Conf. dr. ing. RĂDULESCU OCTAVIAN
Colonel SULIMAN CONSTANDIN

MANUAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ PENTRU OFIŢERII DE ARTILERIE

BUCUREŞTI — 1974

Contribuția autorilor la redactarea acestui volum este **următoarea**:

— Conf. dr. ing. RĂDULESCU OCTAVIAN— capitolele 1 la 15.

— Colonel SULIMAN CONSTANDIN capitolele 16 la 25.

INDEX DE SIMBOLURI ŞI NOTAŢII

$\Leftrightarrow$	echivalent
$\in$	aparţine
$\subset$	inclus
$\cup$	reuniune
$\{a_1, a_2..\}$	mulţime
(a, b)	interval deschis
$[a, b)$	interval închis la stînga şi deschis la dreapta
$[a,b]$	interval închis
Σ	simbolul adunării
$A \times B$	produsul cartezian al mulţimilor A şi B
$\|a\|$	valoarea absolută (modul)
$n!$	factorial: $n! = 1.2.3.n$

$\Rightarrow$	implică
$\notin$	nu aparţine
$\not\subset$	nu este inclus
$\cap$	intersecţie
N	mulţimea numerelor naturale
Q	mulţimea numerelor raţionale
R	mulţimea numerelor reale
R_+	mulţimea numerelor reale pozitive
R_-	mulţimea numerelor reale negative
Z	mulţimea numerelor întregi
C	mulţimea numerelor complexe
Φ	mulţimea vidă
$\equiv$	identic egal
$\approx$	aproximativ egal
lg	logaritm zecimal (baza zece)
ln	logaritm natural (baza e)

ALFABETUL GREC

Caractere		Denumirea	Caractere		Denumirea	Caractere		Denumirea
mari	mici		mari	mici		mari	mici	
A	α	a, alfa	I	ι	i, iota	P	ρ	r, ro
B	β	b, beta	K	$\varkappa$	k, kapa	Σ	σ	s, sigma
Γ	γ	g, gama	Λ	λ	l, lambda	T	τ	t, tau
Δ	δ	d, delta	M	μ	m, miu	Y	υ	y, ipsilon
E	ε	e, epsilon	N	ν	n, niu	Φ	φ	f, fi
Z	ζ	z, zeta	Ξ	ξ	x, xi	X	χ	ch, hi
H	η	e, eta	O	o	o, omicron	Ψ	ψ	ps, psi
Θ	ϑ	t, teta	Π	π	p, pi	Ω	ω	o, omega

PARTEA ÎNTÎI

IDENTITĂŢI

CAPITOLUL 1

NOȚIUNI FUNDAMENTALE

1.1. ANALIZA CALITATIVĂ

1.1.1. Mulțimi

Matematica este știința cunoașterii raționale a naturii și a fenomenelor ce o guvernează, care grupează procesele de transformare asemănătoare și le modelează teoretic.

Aceste modele, prin generalitatea lor, servesc atît la dezvoltarea cunoașterii însăși în ritmuri crescînde, cît și a procesului de prevedere și conducere a fenomenelor naturii. De aceea, în desfășurarea expunerii; se va insista asupra căilor de investigare matematică.

În contactul primar cu mediul înconjurător, omul analizează ființele și lucrurile, pe care le vom numi, în general, *obiecte*, cărora le stabilește trăsăturile comune și necomune, asociindu-le sau diferențiindu-le după criterii obiective, într-o clasificare științifică. Simțurile sale culeg date prin senzațiile furnizate de obiecte, iar rațiunea sa le filtrează, le sortează, le generalizează și le abstractizează sub formă de *noțiuni*.

Procesul primar de cunoaștere grupează lumea înconjurătoare pe obiecte, noțiuni distincte *din punct de vedere calitativ*. Fiecare noțiune reprezintă o clasă de obiecte și formează *mulțimea elementelor* respective, cu proprietăți comune, ce le deosebesc net de oricare alt element, care nu aparține mulțimii definite. În aceste condiții pot fi formulate:

— mulțimea oamenilor de pe glob (A)
— mulțimea militarilor din unitate (B)
— mulțimea gradaților din unitate (C)
— mulțimea soldaților din unitate (D)
— mulțimea sportivilor din unitate (E)

(1.1)

Pentru a ne referi cu ușurință la aceste mulțimi, li s-a asociat cîte o literă mare (A, B, C, D, E); pentru a simplifica scrierea, se folosește și forma simbolică de exprimare:

$$A = \{a \mid \text{om de pe glob}\}$$
$$B = \{b \mid \text{militar din unitate}\} \ldots \text{etc.}$$

Între două acolade se exprimă conținutul mulțimii, prin:

— elementul generic (a, b, c...), reprezentativ al mulțimii (A, B, C...) și

— proprietatea comună tuturor elementelor mulțimii, redată clar și concis, după o bară verticală.

Cînd este greu de exprimat proprietatea comună a elementelor, mulțimea poate fi definită direct, prin indicarea tuturor elementelor sale, ca în următoarele exemple:

$$\left.\begin{aligned} F &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\ G &= \{2, 4, 6, 8\} \\ I &= \{10\} \\ N &= \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

Aceste mulțimi pot fi prezentate și sub formă generică:

$$F = \{f \mid \text{primele nouă numere naturale}\}$$
$$G = \{g \mid \text{primele patru numere pare}\}$$
$$I = \{i \mid i = 10\}$$
$$N = \{n \mid \text{număr natural}\}$$

Ultimele două expresii sînt particulare:

— mulțimea I cuprinde un singur element (10);

— mulțimea N cuprinde un număr oricît de mare de elemente, respectiv numerele naturale, cu ajutorul cărora se face numerația; numărul lor este „infinit", deoarece după oricare din numere urmează un altul, mai mare cu o unitate decît acesta. O astfel de mulțime este *infinită*.

În afara acestor cazuri particulare, trebuie considerat și acela în care mulțimea nu are nici un element și cînd poartă numele de *mulțime vidă* și se notează cu litera Φ (fi).

1.1.2. Operații cu mulțimi

1°. *Apartenența*. Pentru a indica faptul că un element (a) face parte din mulțimea A se scrie astfel:

$$a \in A \text{ sau } A \ni a \qquad (1.3)$$

Semnul $\in$ este semn de apartenență și se citește: „a aparține mulțimii A".

Dacă elementul b nu aparţine mulţimii A, se taie semnul de apartenenţă:

$$b \notin A \text{ sau } A \not\ni b \tag{1.4}$$

adică: „b nu aparţine mulţimii A".

Folosind mulţimile definite anterior (1.1 şi 1.2) putem opera cu aceste semne în felul următor:

● Tehnicianul Marin Constantin, pe care îl notăm cu litera (m) aparţine mulţimii oamenilor de pe glob (A), dar nu face parte din unitate, respectiv din mulţimea (B). Deci:

$$m \in A \ ; \ m \notin B.$$

● Soldatul Trifu Emilian, pe care îl notăm cu litera (t) face parte din unitate, dar nu este gradat. Deci:

$$t \in B \ ; \ t \notin C \ ; \ t \in D.$$

● Numărul (6) aparţine numerelor pare, din mulţimea G. Deci:

$$6 \in G \ ; \ 6 \notin I \ ; \ 6 \in F \ ; \ 6 \in N.$$

2°. *Egalitatea.* Cunoscutul semn de egalitate (=) indică faptul că două elemente egale ($x = y$) aparţin aceleiaşi mulţimi şi unul îl reprezintă pe celălalt şi invers. Dacă elementele sînt diferite, se foloseşte acelaşi semn, dar tăiat ($x \neq y$), care precizează că „x nu este egal cu y".

Relaţia de egalitate satisface următoarele proprietăţi:

a) *Este reflexivă*, deoarece: $a = a$;

b) *Este simetrică*, pentru că, dacă:

$$a = b, \text{ atunci şi } b = a$$

c) *Este tranzitivă*, pentru că, dacă:

$$a = b \text{ şi } b = c, \text{ atunci şi } a = c. \tag{1.5}$$

3°. *Incluziunea.* Obiectele unei mulţimi au o proprietate comună, care a permis gruparea lor într-o mulţime. Totuşi, ele pot avea şi alte proprietăţi, care diferă de la un element la altul sau de la o grupă de elemente la alta şi care permit alcătuirea unor submulţimi.

Astfel, mulţimea militarilor din unitate (B) poate fi considerată ca submulţime a mulţimii oamenilor de pe glob (A). De asemenea, mulţimea gradaţilor din unitate (C) este o submulţime a militarilor din acea unitate (B).

Pentru a indica faptul că o submulțime face parte dintr-o mulțime, adică este inclusă în aceasta, se folosește semnul de incluziune ($\subset$). Exemplele de mai sus se pot exprima astfel:

$$B \subset A \text{ adică „}B \text{ este inclus în } A\text{“} \tag{1.6}$$

$C \subset B$, respectiv „C este inclus în B“.

Evident că, prin tăierea semnului de incluziune se neagă existența sa, deci, între mulțimile 1.1 și 1.2 se poate scrie:

$$E \not\subset D \quad \text{sau} \quad G \not\subset I \tag{1.7}$$

4°. *Reuniunea*. Dacă dorim să ne referim la oricare din elementele a două mulțimi (C, D), se face reuniunea lor, care se scrie astfel:

$$C \cup D, \text{ adică „}C \text{ reunit cu } D\text{“} \tag{1.8}$$

Folosind aceleași mulțimi, rezultă:

$$C \cup D = B,$$

deoarece reunind gradații (C) cu soldații (D), se obține mulțimea tuturor militarilor unității (B).

Reuniunea $D \cup E$, cuprinde pe toți soldații sportivi sau nesportivi, precum și pe gradații sportivi. Un exemplu similar este următorul:

$$\{1, 3, 5, 7\} \cup \{1, 2, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

5°. *Intersecția*. Două mulțimi pot avea elemente comune. Astfel, mulțimea soldaților (D) cuprinde o parte din mulțimea militarilor sportivi (E). Pentru a stabili elementele comune a două mulțimi se face operația de intersecție ($\cap$), care — pentru cazul de mai sus — are forma:

$$D \cap E, \text{ adică "}D \text{ intersectat cu } E\text{“} \tag{1.9}$$

și separă numai pe acei soldați care sînt și sportivi sau pe acei sportivi care sînt și soldați în unitate. Un alt exemplu este următorul:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6,\} \cap \{1, 4, 5, 7, 9\} = \{1, 4, 5\}$$

1.1.3. Aplicații

A1. Se definesc următoarele mulțimi:

$A = \{a \mid \text{tunuri}\}$; $B = \{b \mid \text{obuziere}\}$

$C = \{c \mid \text{țevi}\}$; $D = \{d \mid \text{afete}\}$

$E = \{e \mid \text{aparate de ochire}\}$; $F = \{f \mid \text{guri de foc}\}$

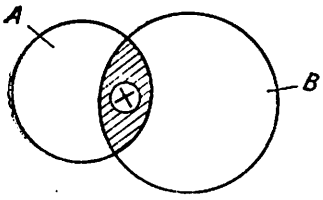


Fig. 1.1.

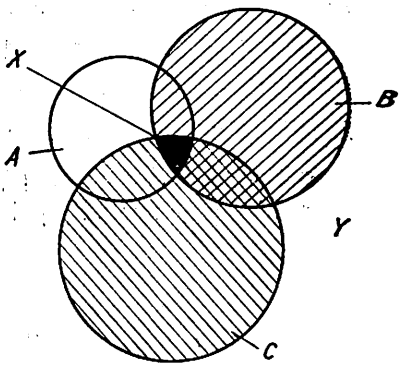


Fig. 1.2.

Să se precizeze care din relaţiile următoare sînt adevărate:

a) $A \not\subset B$; b) $C \cup D = A$; c) $D \cup E = A \cup B$;

d) $A \cup B = F$; e) $A \cup B \subset F$; f) $C \subset A \cup B$

R. a, e, f.

A2. Se dau mulţimile de puncte A şi B ce aparţin suprafeţelor celor două cercuri din figura 1.1. Să se stabilească mulţimea de puncte X, care aparţine ambelor mulţimi date.

R. $X = A \cap B$ este suprafaţa comună, obţinută prin intersecţie, care satisface condiţiile: $X \subset A$ şi $X \subset B$.

A3. Care este rezultatul problemei precedente, dacă cercurile A, B sînt exterioare?

R. $X = A \cap B = \Phi$; mulţimea vidă precizează că nu există nici un punct comun.

A4. Se dau mulţimile de puncte A, B, C ale suprafeţelor din figura 1.2. Să se stabilească mulţimea punctelor comune (X) şi mulţimea punctelor care aparţin oricăreia din cele date (Y).

R. $X = A \cap B \cap C$, suprafaţa comună tuturor (înnegrită).

$Y = A \cup B \cup C$, întreaga suprafaţă ocupată de aceste cercuri.

A5. Să se interpreteze grafic următoarele *proprietăţi ale reuniunii* (fig. 1.2):

- Comutativitatea: $A \cup B = B \cup A$
- Asociativitatea: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Idempotenţă: $A \cup A = A$.

A6. Să se interpreteze pe figura 1.3 *proprietăţile incluziunii*:

- Reflexivitate: $A \subset A$
- Tranzitivitate: Dacă $A \subset B$ şi $B \subset C$, atunci $A \subset C$.

A7. Folosind figura 1.2, să se stabilească *proprietăţile intersecţiei*:

- Comutativitate: $A \cap B = B \cap A$
- Idempotenţă: $A \cap A = A$

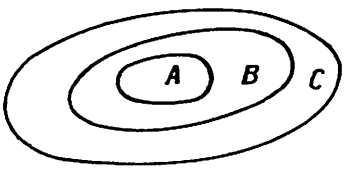


Fig. 1.3

A8. Se definesc următoarele mulţimi:

A = suma corecţiilor balistice;

B = suma corecţiilor meteorologice în bătaie;

C = corecţia pentru presiune (ΔH)

D = corecţia pentru derivaţie (d)

E = corecţia pentru variaţia vitezei iniţiale (ΔV_0)

F = corecţia pentru variaţia temperaturii încărcăturii (ΔT_i)

G = corecţia pentru vînt transversal (ΔzW)

Să se precizeze, care din relaţiile următoare, sînt adevărate:

a) $D \cup G = B$; b) $E \in A$; c) $F \cup C \in B$; d) $G \subset B$; e) $G \notin A$

f) $E \notin A \cdot R = b, c, e$

1.2. ANALIZA CANTITATIVĂ

1.2.1. Numeraţie

Prin capacitatea sa de observaţie şi abstractizare, omul clasifică obiectele naturii în fiinţe sau lucruri, stabilind deosebiri calitative între ele.

Analizînd numai o mulţime de obiecte, care din punct de vedere calitativ au aceeaşi proprietate, apare problema cantităţii şi a numeraţiei, care constă în adunarea cîte unui element la celelalte. Pentru

simplificarea acestui proces s-au atribuit semne și denumiri specifice fiecărei faze a numerației:

$$1 = \text{unu (unitatea)}$$

$$1 + 1 = 2 \text{ (doi)}$$

$$2 + 1 = 3 \text{ (trei) etc.}$$

În acest fel au apărut *numerele naturale*, care cresc din unu în unu și pot exprima orice cantități. Numărul de semne necesar exprimării oricărei cantități este redus, prin folosirea claselor de zece numere, cu aceleași proprietăți, care permit folosirea operației de adunare în scopul numerației directe.

Adunarea se face prin regulile cunoscute ale aritmeticii: adunarea pînă la zece și adunarea peste zece.

1.2.2. Reprezentare grafică

1°. *Expresii algebrice.* Operația de numărare și adunare se efectuează după aceleași reguli, indiferent mulțimea în care se operează. Pentru a indica mulțimea respectivă, se afectează numerelor cîte o literă, care precizează aspectul calitativ.

Astfel, mulțimea arborilor din grădină (A), are ca elemente componente arborii, notați generic cu litera (a). Aceștia pot purta cîte o etichetă cu numărul rezultat din numerație (a_1, a_2, a_3,...,a_n), care îi distinge între ei și care se numește *indice*. Rezultă:

$$A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,a_n\}$$

sau

$$A = \{a \mid \text{arbore din grădină}\} \tag{1.10}$$

Adunarea elementelor acestei mulțimi:

$$3 \text{ arbori} + 5 \text{ arbori} + 7 \text{ arbori} = 15 \text{ arbori},$$

se exprimă cu ajutorul elementului generic al arborilor (a) sub forma:

$$3a + 5a + 7a = 15a. \tag{1.11}$$

La fel se poate opera cu elementele (b) ale mulțimii bidoanelor dintr-un depozit (B):

$$5 \text{ bidoane} + 4 \text{ bidoane} + 3 \text{ bidoane} = 12 \text{ bidoane}$$

sau:

$$5b + 4b + 3b = 12b.$$

Expresiile folosite în exemplele de mai sus ($3a$, $5a$,...,$4b$, $12b$) redau cele două aspecte de care s-a vorbit:

— aspectul cantitativ, prin numere (3, 5, 4, 12) numite *coeficienți* și

— aspectul calitativ, prin litere (a, b) numite *părți literale*.

Aceste expresii sînt fundamentale în matematică și se numesc ***monoame***, iar înlănțuirea lor prin adunare sau scădere formează:

— binoame, cînd cuprind două monoame;

— *trinoame*, cu trei monoame;

— *polinoame*, cu mai multe monoame.

În general, toate acestea poartă numele de *expresii algebrice*.

Subliniem faptul că adunarea nu se poate efectua decît cu elementele aceleași mulțimi. Într-adevăr, între elementele mulțimii arborilor și a bidoanelor nu se poate efectua o adunare:

$$3 \text{ arbori} + 5 \text{ bidoane} = 3a + 5b .$$

Suma coeficienților ($3 + 5 = 8$) nu reprezintă nici arbori, nici bidoane, de aceea, o astfel de adunare rămîne *neefectuată*.

2°. *Reprezentarea grafică*. Se obișnuiește ca elementele mulțimii să fie reprezentate grafic prin puncte. În acest scop se asociază fiecărui element un punct, astfel încît se asigură o corespondență între ele: elementului (a_1) îi corespunde un punct (1), lui (a_2) un punct (2) etc.

Pentru a fi mai simplă și mai sugestivă imaginea grafică a mulțimii se folosesc punctele unei drepte. În figura 1.4 punctele reprezentative (1, 2, 3...), imagini ale obiectelor (a_1, a_2, a_3...) sînt echidistante.

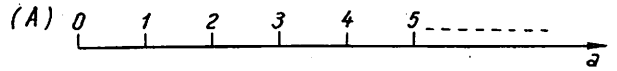


Fig. 1.4

Punctul zero (0) corespunde mulțimii vide, adică nici unui element. Sensul numerației este indicat de o săgeată, iar elementul generic (a) precizează că dreapta respectivă numită „axă" corespunde mulțimii (A).

Dacă dorim să reprezentăm grafic mai multe mulțimi, se va folosi cîte o axă pentru fiecare, astfel încît să nu se suprapună una cu alta. Ele vor avea un punct comun, cel al mulțimii vide (0), care formează *originea* sistemului de axe ales, ca în figura 1.5.

În acest fel se reproduc grafic cele două aspecte ale cunoașterii:

— *calitatea*, prin repartizarea unei axe pentru o anumită mulțime;

— *cantitatea*, prin numerele naturale ale numerației, aferente punctelor acestor axe.

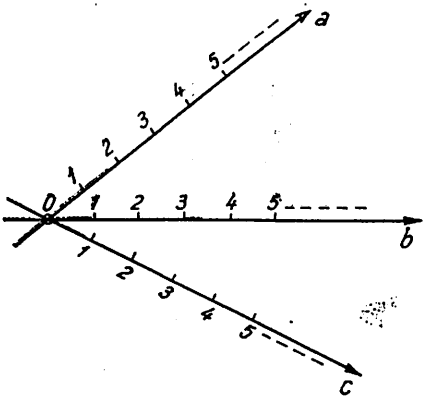


Fig. 1.5

1.3. FUNCȚII

1.3.1. Definiția funcției

Considerăm două mulțimi A și B cu elementele generice x și y:

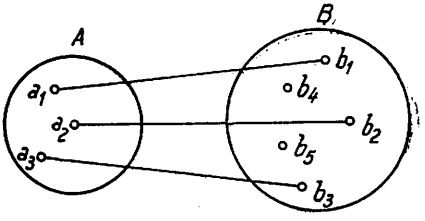
$$x \in A; \quad y \in B$$

Printr-o metodă oarecare, numită *relație* facem să corespundă fiecărui element din A un element și numai unul singur în B; spunem că am definit o funcție pe A cu valori în B. Relația respectivă se numește funcție și reprezintă ansamblul format din mulțimea A, mulțimea B, precum și „corespondența $x \to y$" de la A la B.

În figura 1.6 este redată o funcție, care asigură corespondența:

x	a_1	a_2	a_3
y	b_1	b_2	b_3

Fig. 1.6



Mulțimea A se numește *domeniu de definiție* al funcției, iar mulțimea B în care funcția ia valori se numește *codomeniu*.

Funcția se notează cu o literă oarecare, de exemplu cu f, F, g, G și se exprimă astfel:

$$f : A \to B \tag{1.12}$$

și se poate citi în două feluri:

— funcția f este definită pe A cu valori în B;

— funcția f realizează o aplicație a mulțimii A în mulțimea B.

Deoarece unui element $x \in A$ îi corespunde un singur element $y \in B$, se spune că y este valoarea funcției f în punctul x și se notează $f(x)$. Așadar:

$$y = f(x) \tag{1.13}$$

este o altă formă de exprimare a funcției, care în cazul precedent exprimă corespondența:

$$b_1 = f(a_1); \quad b_2 = f(a_2); \quad b_3 = f(a_3)$$

Funcția asigură corespondența într-un sens: se alege x și, prin aplicația definită, se obține y. De aceea se definesc:

— *variabilă independentă* sau *argument* elementul oarecare (x) al mulțimii de definiție (A) a funcției (f);

— *variabilă dependentă* sau valoarea funcției în punctul x, sau imaginea lui x în B prin intermediul funcției f, elementul ($y \in B$).

1.3.2. Clasificarea funcțiilor

1°. *Funcția injectivă.* O aplicație f a mulțimii A în mulțimea B este injectivă, dacă oricare două elemente diferite din A (x_1 și x_2) au imagini diferite în B (y_1 și y_2):

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ sau } y_1 \neq y_2 \tag{1.14}$$

Funcția din figura 1.6 este injectivă.

Funcția din figura 1.7 și tabelul corespunzător nu este injectivă, deoarece:

$$a_1 \neq a_2$$

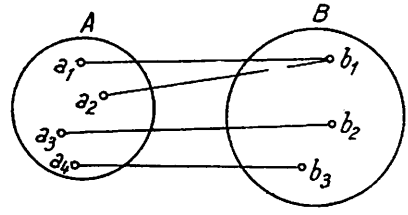


Fig. 1.7

iar:

$$f(a_1) = b_1 \quad \text{și} \quad f(a_2) = b_1$$

astfel încît:

$$f(a_1) = f(a_2)$$

x	a_1	a_2	a_3	a_4
y	b_1	b_1	b_2	b_3

2°. *Funcție surjectivă.* O aplicație f a mulțimii A pe mulțimea B este surjectivă, dacă oricare element al mulțimii B este imaginea unui element din A.

Funcția din figura 1.6 nu este surjectivă, pentru că elementele b_4 și b_5 nu sînt imagini ale elementelor mulțimii A, neavînd corespondente.

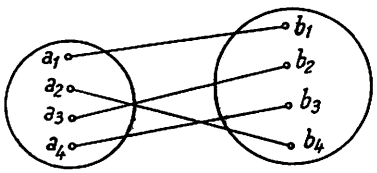
Funcția din figura 1.7 este surjectivă, pentru că toate elementele mulțimii B (b_1, b_2, b_3) sînt imagini ale elementelor mulțimii A.

3°. *Funcție bijectivă.* O aplicație f a mulțimii A pe mulțimea B este bijectivă dacă este și injectivă și surjectivă.

În consecință, funcțiile din figurile 1.6 și 1.7 nu sînt bijective. Două funcții astfel definite trebuie să fie „echivalente", adică să aibă același număr de elemente, iar corespondența să poată fi efectuată și în sens invers.

Figura 1.8 și tabelul său cuprind o funcție surjectivă.

Fig. 1.8



x	a_1	a_2	a_3	a_4	A
y	b_1	b_4	b_2	b_3	B

1.3.3. Graficul funcției

Perechile de elemente (x, y) ale celor două mulțimi alcătuiesc stări diferite:

$$S = (x, y).$$

Astfel, funcția din figura 1.8 este reprezentată de stările următoare:

$$S_1 = (a_1, b_1);\ S_2 = (a_2, b_4);\ S_3 = (a_3, b_2);\ S_4 = (a_4, b_3).$$

Stările definite de funcție, alcătuiesc „graficul funcției f".

$$\mathbf{R} = (a_1, b_1), (a_2, b_4), (a_3, b_2), (a_4, b_3) \tag{1.15}$$

1.3.4. Produsul cartezian

Împerecherea a două elemente $x \in A$ și $y \in B$ printr-o funcție, alcătuiește graficul funcției, definit mai sus.

Alcătuind toate perechile posibile dintre elementele celor două mulțimi, se formează o mulțime de stări, numită *produs cartezian*.

Astfel, produsul cartezian al mulțimilor A și B din figura 1.6, notat prin $(A \times B)$, este următorul:

$$\begin{aligned} A \times B = {} & (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), \\ & (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4), \\ & (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3), (a_3, b_4), \\ & (a_4, b_1), (a_4, b_2), (a_4, b_3), (a_4, b_4). \end{aligned} \tag{1.16}$$

În general, produsul cartezian se exprimă astfel:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\} \tag{1.17}$$

în care, A și B sînt *factorii* produsului cartezian $A \times B$; A este primul factor, iar B cel de al doilea factor.

Dacă se formează produsul $B \times A$ ca în relația 1.17, rezultă evident că:

$$A \times B \neq B \times A$$

Rezultă, de asemenea că graficul funcției $f : A \to B$ este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

1.3.5. Aplicații

A9. Se dau mulțimile:

$$A = \{a, b, c, d, e\}\ \ B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

și funcțiile definite astfel:

$f : A \to B$	x	a	b	c	d	e
	y	2	4	6	8	3

$g : A \to B$	x	a	b	c	d	e
	y	1	1	1	2	5

Să se stabilească tipul acestor funcții.

R. f este injectivă; g nu este injectivă.

f și g nu sînt surjective, deoarece nu toate elementele lui B sînt imagini ale elementelor mulțimii A.

A10. Se dau mulțimile:

$$C = \{a, b, c, d\}, \quad D = \{1, 2, 3, 4\}$$

și funcțiile definite astfel:

$f : A \to B$	x	a	b	c	d
	y	1	2	3	1

$g : A \to B$	x	a	b	c	d
	y	2	4	3	1

Să se stabilească tipul acestor funcții.

R. f nu este injectivă; g este surjectivă și injectivă, deci bijectivă.

A_{11}. Să se exprime graficul R al funcției g din problema precedentă (A_9).

$$\mathbf{R} = (a, 2), (b, 4), (c, 3), (d, 1)$$

A_{12}. Să se exprime produsele carteziene ale mulțimilor:

$$A = \{1, 2\} ; \; B = \{a, b\}.$$

$$R. \; A \times B = (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)$$

$$B \times A = (a, 1) \; (a, 2), (b, 1), (b, 2)$$

CAPITOLUL 2

MULȚIMI DE NUMERE REALE

2.1. NUMERE NATURALE (N)

Exprimarea cantitativă a elementelor unei mulțimi se face prin numerație, folosind numerele create în acest scop: 1, 2, 3... $(n-1)$, n, $(n+1)$....

Aceste numere formează mulțimea numerelor naturale (N), cu elementul generic (n):

$$N = \{1, 2, 3..., n\} = \{n \mid \text{număr natural}\} \tag{2.1}$$

Ca orice mulțime, trebuie să aibă proprietăți, care să permită deosebirea elementelor sale de elementele altor mulțimi. În cele ce urmează, vom stabili proprietățile sale specifice; acestea sînt:

1°. *Adunarea* este operația primară, care a permis numerația (adunarea cu unitatea), precum și operațiile directe, prin regulile amintite și cunoscute din aritmetică.

Procedînd la adunarea a două numere naturale (m și n) se obține o sumă (rezultat), care este tot un număr natural (p). Într-adevăr, cele două numere abstracte reprezintă cantitativ două submulțimi, iar suma lor aparține aceleași mulțimi, rezultat al numerației.

Exemplu: $4a + 5a = 9a$

Folosind numai numerele, rezultă:

$$4 + 5 = 9$$

În general: $$m + n = p, \tag{2.2}$$

unde m, n, p sînt numere naturale:

$$m \in N; \quad n \in N; \quad p \in N.$$

Această constatare constituie una din proprietățile mulțimii (N) și se enunță astfel:

Mulțimea numerelor naturale este închisă față de operația de adunare.

2°. *Scăderea*, operație inversă adunării, corespunde numerației inverse, de la mare la mic, cînd în loc de a aduna cîte o unitate, se scade cîte o unitate.

Dacă numerația se putea efectua în cadrul unei mulțimi pînă la orice valori, oricît de mari, inversa acesteia nu mai poate fi efectuată în aceleași condiții. Într-adevăr:

— Se pot număra elementele unei mulțimi, pornind de la orice obiect al său, adăugînd continuu cîte unul; numerația și adunarea nu are restricții, pentru că ele se efectuează spre numere mari și pot fi oricît de mari, corespunzînd unui număr nelimitat (*infinit* = ∞) de elemente.

— În sens invers, elementele nu pot fi numărate decît pînă la primul sau eliminîndu-l și pe acesta, pînă la zero:

$$5;\ 4 = 5 - 1;\ 3 = 4 - 1;\ 2 = 3 - 1;\ 1 = 2 - 1;\ 0 = 1 - 1.$$

Dacă există n elemente nu se poate efectua scăderea cu unitatea decît de n ori, astfel încît această operație este limitată.

Considerînd operația de scădere ca atare, ea nu se poate efectua în această mulțime decît atunci cînd se scade un număr dintr-unul mai mare:

$$18 - 6 = 12$$

Cel mult se poate efectua scăderea între două numere egale: $18 - 18 = 0$.

Scăzînd un număr din unul mai mic decît el, rezultatul (diferența) va fi un număr deosebit de cele naturale; acest număr este negativ și face parte din altă mulțime, cea a numerelor negative (N'):

$$6 - 14 = -8 \in N' \notin N$$

Calculul se face obișnuit, scăzînd pe cel mic din cel mare și dînd rezultatului semnul celui mare. Spre a face o deosebire, numerele naturale se consideră *pozitive* (+), chiar dacă nu li se atribuie de obicei acest semn în scris.

Rezultă că mulțimea (N) este deschisă față de operația de scădere, deoarece parte din rezultatele sale ies din mulțimea numerelor naturale și trec în cea a numerelor întregi negative (N').

3°. *Înmulțirea*. Adunarea repetată a aceluiași număr, se poate efectua direct, cu regulile cunoscute din aritmetică și cu tabla înmulțirii:

$$6 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$$

Fiind un caz particular al adunării, înmulțirea se bucură de proprietățile acesteia, astfel încît: mulțimea (N) este închisă față de

operația de înmulțire, adică rezultatul său (produsul) este tot un număr natural:

$$m \cdot n = p \qquad (2.3)$$

unde: $m \in N;\ n \in N;\ p \in N$

4°. *Împărțirea.* Încercînd să împărțim un număr de elemente în grupe egale, efectuăm o operație inversă înmulțirii. De data aceasta nu vom izbuti în orice condiții. Astfel, din 12 obiecte se pot forma 6 grupe de cîte 2 obiecte:

$$12 : 6 = 2 \qquad \text{sau } \frac{12}{6} = 2$$

Dacă avem 13 obiecte, nu le mai putem împărți în 6 părți egale:

$$13 : 6 = \frac{13}{6} \notin N;$$

deci, un atare rezultat (cît) nu mai este un număr natural, ci aparține unei alte mulțimi, cea a numerelor ● fracționare (F).

În consecință, mulțimea (N) nu este închisă față de operația de împărțire.

5°. *Proprietățile mulțimii numerelor naturale*, stabilite prin analiza efectuată, sînt următoarele:

● Mulțimea (N) este ordonată, întrucît oricare ar fi două numere naturale (a și b) acestea satisfac una din posibilitățile:

$a < b$, adică a este mai mic decît b;

$a = b$, respectiv a este egal cu b;

$a > b$, a este mai mare decît b.

● Mulțimea (N) este închisă față de operația de adunare și înmulțire și deschisă față de scădere și împărțire.

2.2. NUMERE ÎNTREGI NEGATIVE (N')

Mulțimea numerelor întregi negative este definită astfel:

$$N' = \{-\infty .. -n, \ldots, -3, -2, -1\} = \{-n \mid n, \text{număr natural}\} \qquad (2.4)$$

cuprinzînd numerele naturale cu semnul minus (—). Semnificația acestor numere ar fi lipsa valorilor respective sau mai sugestiv, datoria.

Un om are o datorie de 20 lei; în acest caz, se spune că dispune de (—20) lei. Privind în acest fel sensul numerelor negative, se înțeleg ușor operațiile aritmetice din această mulțime.

1°. *Adunarea*, provine din numeraţia unor elemente care poartă un semn particular (minus):

$$(-5)+(-1)=-6;\ (-6)+(-1)=-7;\ (-7)+(-1)=-8\ldots$$

La fel se efectuează şi adunarea:

$$(-3)+(-15)=-18,$$

care nu diferă de cea a numerelor pozitive şi confirmă că „mulţimea (N') este închisă faţă de această operaţie", întrucît rezultatul aparţine mulţimii.

2°. *Scăderea*, ca şi în cazul anterior nu duce totdeauna la rezultate din aceeaşi mulţime. Dacă scăderea numerelor pozitive are şi rezultate în mulţimea celor negative, tot astfel, diferenţa numerelor negative poate aparţine celor pozitive.

Într-adevăr:

$$(-8)-(-2)=-6 \ni N'$$

dar:

$$(-8)-(-10)=+2 \in N \notin N'$$

Interpretarea scăderii unui număr negativ, prin considerarea lui ca o datorie, este concludentă. Datoria de zece lei, valoarea negativă (— 10), în momentul în care poate fi achitată (scăzută), există ca valoare pozitivă (+ 10). Deci:

$$-(-10)=+10$$

Însemnează că operaţia de scădere (—) schimbă semnul numărului din paranteză, fiind valabilă şi pentru mulţimea numerelor pozitive:

$$-(+10)=-10$$

Această regulă permite desfiinţarea parantezelor şi a se calcula astfel:

$$(-8)-(-2)=-8+2=-6 \in N'$$

$$(-8)-(-10)=-8+10=2 \in N \notin N'$$

Exemplele alese confirmă faptul că mulţimea N' nu este închisă faţă de scădere.

3° *Înmulţirea* numerelor întregi negative are ca rezultat un număr care aparţine numerelor naturale. Este uşor de înţeles că:

$$-(-2)-(-2)-(-2)=2+2+2=6 \in N$$

sau:

$$(-3)\cdot(-2) = +6 \notin N'$$

și că mulțimea N' nu este închisă față de înmulțire.

4°. *Împărțirea* numerelor întregi negative, operație inversă înmulțirii, are ca rezultat un număr care, de asemenea nu aparține mulțimii:

În primul rînd, cîtul este pozitiv:

$$(-6):(-3) = +2 \in N \notin N'$$

În al doilea rînd, există cîturi care nu au ca rezultat un număr întreg: $(-7):(-2) = +\frac{7}{2} \notin N \notin N'$

5°. *Proprietățile* mulțimii numerelor întregi negative sînt;

- Mulțimea N' este ordonată
- Mulțimea N' este închisă numai față de adunare.

2.3. NUMERE ÎNTREGI (Z)

Reunind cele două mulțimi studiate, se obține o mulțime mai cuprinzătoare, cea a numerelor întregi (Z):

$$Z = \{\ldots -n, \ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots n \ldots\} = \tag{2.5}$$
$$= \{n \mid \text{număr întreg}\} = N \cup N'$$

Proprietățile acestei mulțimi sînt următoarele:

1°. *Mulțimea Z este ordonată*

2°. *Mulțimea Z este închisă față de operația de adunare și cea de scădere.*

Dacă mulțimile (N, N') aveau diferențe ce treceau dintr-o mulțime în cealaltă, prin reuniunea lor, aceste rezultate vor aparține mulțimii (Z). Calculele se fac ca în exemplele următoare:

$$(+4) + (+3) = 4 + 3 = 7; \quad (-4) + (-3) = -4 - 3 = -7$$
$$(+4) - (+3) = 4 - 3 = 1; \quad (-4) + (+3) = -4 + 3 = -1$$
$$(+4) - (-3) = 4 + 3 = 7; -(-4) - (-3) = 4 + 3 = 7,$$

respectînd regulile „adunării algebrice", care include și scăderea:

● Semnele (+) și (—) au două semnificații:

— indicatoare ale mulțimilor N și respectiv N';
— indicatoare ale operației de adunare și respectiv scădere.

În fața unei paranteze, semnele de adunare și scădere pot fi desființate, în următoarele condiții:

— plus păstrează semnele mulțimilor
— minus schimbă semnele acestora.

Cu această regulă a desfacerii parantezelor, calculul se face prin procesul stabilit:

● Suma a două numere de același semn are rezultatul cu același semn:

$$+7+5=+12; \quad -6-3=-9.$$

● Suma a două numere de semne contrarii se obține prin scăderea celui mic din cel mare și afectarea rezultatului semnul celui mare:

$$7-3=4; \quad 8-14=-6$$

3°. *Mulțimea Z are un „element neutru"* față de adunare, numărul „zero", întrucît:

— numărul zero poate aparține în aceleași condiții mulțimii N ca și lui N';
— numărul zero nu operează în cazul adunării, fiind neutru față de aceasta:

$$5+0=0+5=5$$

sau, în general:

$$m+0=0+m=m \qquad (2.6)$$

Existența sa creează o *simetrie a mulțimii Z* față de el, deoarece orice număr pozitiv (n) are un simetric $(-n)$:

$$(n)+(-n)=(-n)+(n)=0 \qquad (2.7)$$

4°. *Mulțimea Z este închisă față de operația de înmulțire* nu și față de împărțire.

Atunci cînd două numere întregi au un cît întreg, se numesc *divizibile*, iar rezultatul împărțirii aparține mulțimii Z. Cînd două numere întregi nu sînt divizibile, cîtul lor aparține mulțimii numerelor fracționare (F).

Înmulțirea numerelor întregi se efectuează după următoarele reguli:

● Produsul a două numere cu același semn este pozitiv:

$$(+2)\cdot(+6)=+12$$
$$(-2)\cdot(-6)=+12$$

- Produsul a două numere de semne contrarii este negativ:

$$(+2)\cdot(-6) = (-2)\cdot(+6) = -12.$$

- Produsul unui număr cu zero este zero:

$$5\cdot 0 = 0$$

2.4. NUMERE FRACȚIONARE (F)

Mulțimea numerelor fracționare, care cuprinde cîturile numerelor întregi nedivizibile, numite și „fracții ordinare", nu prezintă interes, considerată ca atare; de aceea nu-i vom stabili proprietățile. În cele ce urmează vom aminti metodele de calcul cu elementele acestei mulțimi.

1°. *Amplificarea și simplificarea fracțiilor* constau în înmulțirea sau împărțirea termenilor cu același număr, operații ce nu schimbă valoarea acestora;

$$\frac{3}{5} = \frac{3\cdot 2}{5\cdot 2} = \frac{6}{10} = \frac{6\cdot 3}{10\cdot 3} = \frac{18}{30}$$

sau:

$$\frac{18}{30} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

2°. *Adunarea și scăderea* fracțiilor se efectuează prin adunarea și scăderea numărătorilor acestora, după ce au fost aduse la același numitor. Aducerea la același numitor se face prin amplificare, folosind cel mai mic multiplu comun al numitorilor:

$$\frac{5}{18}^{(4} + \frac{7}{24}^{(3} = \frac{20}{72} + \frac{21}{72} = \frac{41}{72}$$

unde:

$$\text{c. m. m. m. c.} = 2^3\cdot 3^2 = 72,$$

deoarece:

$$18 = 2\cdot 3^2;\ 24 = 2^3\cdot 3$$

Se precizează că cel mai mic multiplu comun al numitorilor se obține prin produsul factorilor primi comuni și necomuni la puterile cele mai mari, regulă cunoscută din aritmetică.

3°. *Înmulțirea fracțiilor* se face prin înmulțirea numărătorilor și a numitorilor, respectînd regula semnelor stabilită anterior:

$$\frac{+8}{+3}\cdot\frac{-5}{+2} = \frac{-40}{+6}^{(2} = -\frac{20}{3}$$

$$\left(-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(-\frac{21}{30}\right) = +\frac{5\cdot 21}{9\cdot 30} = \frac{105}{270}^{(15} = \frac{7}{18}$$

4°. *Împărțirea fracțiilor* se efectuează prin înmulțirea primei fracții cu cea de a doua răsturnată:

$$\left(-\frac{6}{20}\right) : \left(+\frac{18}{5}\right) = \left(-\frac{6}{20}\right) \cdot \left(+\frac{5}{18}\right) = -\frac{30}{360}^{(30} = -\frac{1}{12}$$

5°. *Proporția* este egalitatea dintre două fracții, cu proprietăți remarcabile. Pentru a le exprima succint, vom folosi un simbol al logicii matematice, numit *implicație* ($\Rightarrow$), care precizează existența unei propoziții (Q), dacă există propoziția (P):

$$P \Rightarrow Q$$

Cu acest simbol, proprietățile proporțiilor, cunoscute din aritmetică sînt următoarele:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \overset{\text{(implică)}}{\Longrightarrow} a \cdot d = c \cdot b \tag{2.8}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \tag{2.9}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} \tag{2.10}$$

Relația (2.8) exprimă faptul că produsul mezilor (b, c) este egal cu produsul extremilor (a, d), lege implicată de existența proporției.

Relația (2.9) arată că o proporție poate lua forme diferite, prin schimbarea mezilor sau extremilor între ei.

Relația (2.10) precizează că fracțiile proporției sînt egale cu fracții a căror termeni sînt egali cu suma sau diferența termenilor proporției.

Ultimele proprietăți se pot verifica, aplicînd prima relație, a produselor mezilor și extremilor.

6°. *Șirul de rapoarte egale* are o proprietate similară:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = \frac{a_5}{b_5} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5}{b_1 + b_2 + b_3 - b_4 + b_5}.$$

7°. *Împărțirea cu zero nu are sens*, deoarece:

$$\frac{a}{0} = \pm \infty$$

2.5 NUMERE RAȚIONALE (Q)

Mulțimea numerelor raționale este constituită din reuniunea numerelor întregi cu cea a numerelor fracționare:

$$Q = Z \cup F \tag{2.11}$$

Această mulțime se bucură de următoarele proprietăți:

1°. Mulțimea Q este ordonată.

2°. Mulțimea Q este închisă față de operația de adunare și cea de scădere.

3°. Mulțimea Q este închisă față de operația de înmulțire și cea de împărțire.

4°. Mulțimea Q are un element neutru față de adunare, numărul *zero* și este simetrică față de acesta.

5°. Mulțimea Q are un element neutru față de înmulțire, numărul *unu* și este simetrică față de acest element.

Într-adevăr:

— numărul unu aparține și mulțimii numerelor întregi ca și celei fracționare:

— numărul unu nu operează în cazul înmulțirii, fiind neutru față de aceasta:

$$1 \times m = m \times 1 = m \tag{2.12}$$

6°. Mulțimea Q este densă, proprietate ușor de evidențiat. Considerăm două numere raționale m și n diferite ($m \neq n$). Există totdeauna un număr rațional cuprins între ele, unul din acestea fiind media lor aritmetică:

$$p = \frac{m+n}{2}$$

iar:

$$m < p < n \tag{2.13.}$$

Cu toate că mulțimea numerelor raționale acoperă operațiile aritmetice de adunare și înmulțire, ea nu epuizează toate numerele posibile.

2.6 NUMERE IRAȚIONALE (P) și IMAGINARE (I)

1°. *Puteri.* După cum adunarea repetată se efectuează direct prin înmulțire, tot astfel înmulțirea repetată se efectuează prin ridicarea la putere:

$$\underbrace{2.2.2.2.2}_{} = 2^5$$

Numărul de ori al înmulțirii repetate se numește *exponent.* În exemplul dat, 5 este puterea lui 2 și se citește: doi la puterea cinci.

Înmulțirea puterilor aceluiași număr se face prin adunarea exponenților:

$$\underbrace{2.2.2}_{} \cdot \underbrace{2.2.2.2}_{} = 2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$

Împărțirea puterilor aceluiași număr se face prin scăderea exponenților:

$$\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3$$

2°. *Rădăcini.* Operația inversă ridicării la putere se numește extragerea rădăcinii.

Mulțimea numerelor raționale este închisă față de operația de ridicare la putere, dar nu și față de cea a extragerii rădăcinii. Într-adevăr:

● Există rădăcini cuprinse în mulțime:

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2 \in Q$$
$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2 \in Q.$$

● Există rădăcini care nu aparțin acestei mulțimi, dar au valori cuprinse între două numere raționale:

$$\frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{15}{10}$$
$$\frac{16}{10} < \sqrt{3} < \frac{18}{10}$$

Aceste rădăcini, care nu au valori în mulțimea numerelor raționale, se grupează într-o altă mulțime, a numerelor iraționale (P).

● Există rădăcini care nu au valoarea cuprinsă între numerele iraționale:

$$\sqrt{-1}\,;\ \sqrt{-5}\,;\ \sqrt[4]{-2}$$

Aceste numere formează mulțimea numerelor imaginare, de care ne vom ocupa mai tîrziu.

2.7. NUMERE REALE (R)

Prin reuniunea numerelor raționale (Q) cu cele iraționale (P) se obține mulțimea numerelor reale (R):

$$R = Q \cup P$$
$$R = \{\, n \mid \text{număr real} \,\} \qquad (2.14)$$

Această mulțime se bucură de următoarele proprietăți:

1°. Mulțimea R este ordonată

2°. Mulțimea R este închisă față de operațiile de adunare, scădere, înmulțire și împărțire.

3°. Mulțimea R are un element neutru față de adunare (zero) și unul față de înmulțire (unu).

4°. Mulțimea R este continuă, datorită reuniunii celor două mulțimi și se poate reprezenta pe o dreaptă.

În acest scop se alege o origină (O), care reprezintă numărul zero, o unitate și un sens de parcurs, ca în figura 2.1.

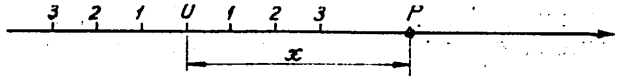


Fig. 2.1

Se acceptă o corespondență biunivocă între punctele dreptei și numerele reale, astfel încît putem folosi noțiunea de punct pentru cea de număr și reciproc. Numărul (x) care corespunde punctului P, se numește *abscisa* lui P.

Corespondența stabilită păstrează ordinea, adică, dacă x și y sînt abscisele a două puncte X și Y, iar $x < y$, atunci X este la stînga lui Y.

2.7.1. Intervale

Datorită acestei corespondențe, mulțimii de numere îi corespunde mulțimea de puncte. În cele ce urmează, se prezintă cîteva noțiuni ce vor fi folosite în manual.

Fie a, b două numere reale ($a < b$).

● Se numește *interval deschis* mulțimea punctelor (x) care satisfac condiția:

$$a < x < b \tag{2.15}$$

Această submulțime cuprinde un interval, care se notează (a, b), ca în figura 2.2 *a* și se exprimă astfel:

$$(a, b) = \{ x \mid x \in R,\ a < x < b \} \tag{2.16}$$

● Se numește *interval închis* mulțimea punctelor (x), care satisfac condiția:

$$a \leqslant x \leqslant b \tag{2.17}$$

și se notează $[a, b]$, ca în figura 2.2. *d*; acest lucru se exprimă și sub forma:

$$[a, b] = \{ x \mid x \in R,\ \ a \leqslant x \leqslant b \} \tag{2.18}$$

● Pot exista intervale închise numai la stînga $[a, b)$ sau numai ladreapta $(a, b]$, ca în figurile 2.2 b și c, exprimate astfel:

$$[a, b) = \{ x \mid x \in R, \quad a \leqslant x < b \} \tag{2.19}$$

și:

$$(a, b] = \{ x \mid x \in R, \quad a < x \leqslant b \} \tag{2.20}$$

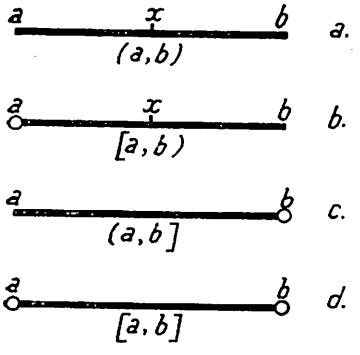


Fig. 2.2

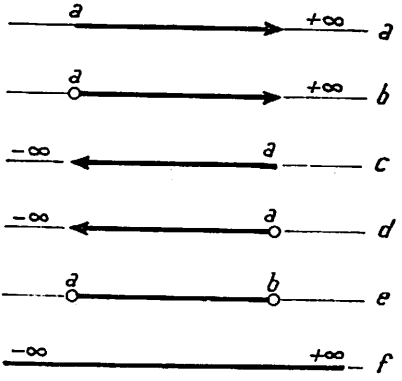


Fig. 2.3

● Se numește *semidreaptă deschisă* mulțimea punctelor din figura 2.3 a:

$$(a, +\infty) = \{ x \mid x \in R, \quad x > a \} \tag{2.21}$$

sau din figura 2.3 c:

$$(-\infty, a) = \{ x \mid x \in R, \quad x < a \} \tag{2.22}$$

● Se numește *semidreaptă închisă* mulțimea punctelor din figura 2.3 b:

$$[a, +\infty) = \{ x \mid x \in R, \quad x \geqslant a \} \tag{2.23}$$

sau din figura 2.3 d:

$$(-\infty, a] = \{ x \mid x \in R, \quad x \leqslant a \} \tag{2.24}$$

● Se numește *segment de dreaptă* mulțimea punctelor din figura 2.3 e:

$$[a, b] = \{ x \mid x \in R, \quad a \leqslant x \leqslant b \} \tag{2.25}$$

● *Dreapta întreagă* corespunde mulțimii numerelor reale (figura 2.3 f):

$$(-\infty, +\infty) = \{ x \mid x \in R \} \tag{2.26}$$

2.7.2. Valoarea absolută

Valoarea absolută sau *modul* unui număr real (a) se notează prin două bare $|a|$, și reprezintă valoarea sa intrinsecă, considerată pozitivă:

$$|+5| = +5 \quad \text{sau} \quad |-6| = +6$$

Această definiție se exprimă astfel:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ cînd } : a > 0 \\ o, \text{ cînd } : a = 0 \\ -a, \text{ cînd } : a < 0 \end{cases} \qquad (2.27)$$

Exemple: $|+3| = +3$, deoarece: $+3 > 0$

$|-3| = -(-3) = +3$, deoarece: $-3 < 0$

$|0| = 0$

2.8. APLICAȚII

1°. Să se efectueze adunarea și scăderea numerelor întregi din expresiile:

$A_1 = (+15) + (+6) + (-9) = 15 + 6 - 9$ **R.** 12

$A_2 = (+20) - (+5) - (-4) = 20 - 5 + 4$ **R.** 19

2°. Să se amplifice cu $(+2)$ și apoi cu (-3) rapoartele:

$A_3 = \frac{-5}{2}$ **R.** $\frac{-10}{4}; \frac{15}{-6}$

$A_4 = -\frac{7}{8}$ **R.** $-\frac{14}{16}; -\frac{-21}{-24} = -\frac{21}{24}$

Observație: Prin amplificare nu se schimbă semnul fracției, astfel încît se efectuează cu numărul respectiv în valoare absolută: $|-3| = 3$.

3°. Să se simplifice cu $(+4)$ și apoi cu (-4) rapoartele:

$A_5 = \frac{12}{20}$ **R.** $\frac{3}{5}$

$A_6 = -\frac{52}{60}$ **R.** $-\frac{13}{15}$

Observație: În baza celor remarcate mai sus, simplificarea cu (± 4) se face prin modulul respectiv: $|\pm 4| = 4$.

4°. Să se aducă la același numitor și să se ordoneze următoarele fracții:

$A_7: \frac{3}{8}^{(9}; \frac{2}{9}^{(8}; \frac{5}{12}^{(6}; \frac{1}{24}^{(3}$ R: $\frac{27}{72}; \frac{16}{72}; \frac{30}{72}; \frac{3}{72}$

$\frac{5}{12} > \frac{3}{8} > \frac{2}{9} > \frac{1}{24}$

$8 = 2^3;\ 9 = 3^2;\ 12 = 2^2 \cdot 3;\ 24 = 2^3 \cdot 3$

c. m. m. m. c. $= 2^3 \cdot 3^2 = 72$

(20 (15 (9

$A_8: \frac{4}{9}; \frac{5}{12}; \frac{1}{20}$ R: $\frac{80}{180}; \frac{75}{180}; \frac{9}{20}$

$\frac{4}{9} > \frac{5}{12} > \frac{1}{20}$

5°. Să se introducă întregii în fracțiile următoare:

$A_9 = 1\frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3}$ R. $\frac{5}{3}$

$A_{10} = 1\frac{5}{6} = \frac{1 \cdot 6 + 5}{6}$ R. $\frac{11}{6}$

$A_{11} = 5\frac{4}{9}$ R. $\frac{49}{9}$

6°. Să se efectueze adunarea și scăderea numerelor raționale din expresiile:

$A_{12} = \frac{4}{15}^{(48} + \frac{3}{20}^{(36} - 1\frac{1}{24}^{(30} - \frac{5}{36}^{(20}$ R. $-\frac{550}{720} = -\frac{55}{72}$

$A_{13} = 1\frac{2}{3} - \left\{2\frac{3}{4} - \left[3\frac{4}{5} + \left(4\frac{5}{6} - 5\frac{6}{7}\right)\right]\right\}$ R. $1\frac{269}{420}$

7°. Să se efectueze înmulțirile și împărțirile numerelor raționale din expresiile:

$A_{14} = \left(2\frac{5}{3}\right) \cdot \left(-3\frac{7}{11}\right) = \frac{11}{3} \cdot \left(-\frac{40}{11}\right)$ R. $-\frac{40}{3}$

$A_{15} = \left(-3\frac{2}{5}\right) : \left(-1\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{17}{5}\right) : \left(-\frac{5}{4}\right) =$

$= \left(-\frac{17}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$ R. $\frac{68}{25}$

$A_{16} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{2^3}{3^3}$ R. $-\frac{8}{27}$

8°. Să se calculeze expresiile:

$A_{17} = \left\{\left[\frac{17}{24} + \frac{9}{40} - \left(\frac{11}{48} + \frac{31}{80}\right)\right] : 3\frac{4}{5}\right\} \cdot 1\frac{5}{7}$ R. $\frac{1}{7}$

$A_{18} = \dfrac{2 + \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = \dfrac{\frac{13}{5}}{\frac{2}{6}} = \frac{13}{5} \cdot \frac{6}{2}$ R. $\frac{39}{5}$

$$A_{19} = \left(1 + \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}\right)\left(1 - \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}\right) -$$

$$- \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}\right) \cdot \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}\right) \qquad \text{R. } \frac{1}{2}$$

9°. Să se efectueze adunarea şi scăderea numerelor reale din expresiile:

$A_{20} = 2 + \sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 4 - 4\sqrt{3} + \sqrt{2} =$

$= (2 - 4) + (\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) + (-5\sqrt{2} + \sqrt{2})$ R. $-(2 + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2})$

$A_{21} = 2\sqrt{5} - 4\sqrt[3]{5} + 5\sqrt[3]{5} - 4\sqrt{5}.$ R. $\sqrt[3]{5} - 2\sqrt{5}$

10°. Să se efectueze înmulţirile:

$A_{22} = (+2\sqrt{3})(-3\sqrt{2}) = -6\sqrt{3 \cdot 2}$ R. $-6\sqrt{6}$

$A_{23} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3}$ R. $\sqrt[6]{2^5}$

Observaţie: Rădăcina (radicalul) reprezintă o putere fracţionară: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ şi permite amplificarea sau simplificarea fracţiei, respectiv amplificarea sau simplificarea indicelui (m) şi a exponentului (n).

$A_{24} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$ R. $\sqrt[12]{2}$

$A_{25} = \sqrt[3]{2^5 \cdot \sqrt[4]{2^3}} = \sqrt[12]{2^{20} \cdot 2^3}$ R. $\sqrt[12]{2^{23}}$

$A_{26} = \sqrt{3^3 \cdot \sqrt[3]{3^2 \sqrt[4]{3}}} = \sqrt[24]{3^{36} \cdot 3^8 \cdot 3}$ R. $\sqrt[24]{3^{45}}$

11°. Să se calculeze expresiile:

$A_{27} = (\sqrt[3]{5} - 2\sqrt{5})(3\sqrt{5} - \sqrt[3]{5}) =$

$= 3 \cdot \sqrt[6]{5^2 \cdot 5^3} - \sqrt[3]{5^2} - 6 \cdot 5 + 2\sqrt[6]{5^3 \cdot 5^2}$ R. $5\sqrt[6]{5^5} - \sqrt[3]{5^2} - 30$

$A_{28} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{2^2}{2^3}}$ R. $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$

$A_{29} = \left[\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2\sqrt{2}}}{\sqrt{2^3}}\right]^3$ R. 2

12°. Să se calculeze a patra proporţională din proporţiile următoare:

A_{30} : $\frac{x}{4} = \frac{9}{6}$ R. $x = \frac{4 \cdot 9}{6} = 6$

A_{31} : $\frac{20}{x} = \frac{12}{6}$ R. $x = \frac{20 \cdot 6}{12} = 10$

A_{32} : $\frac{26}{6} = \frac{x}{9}$ R. $x = \frac{26 \cdot 9}{6} = 39$

A_{33} : $\frac{8}{14} = \frac{12}{x}$ R. $x = \frac{14 \cdot 12}{8} = 21$

13°. Fiind dată egalitatea: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, să se deducă, pe baza proprietăţilor proporţiilor, următoarele egalităţi:

A_{34} : $\frac{4}{9} = \frac{16}{36}$ R. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{6}\right)^2$

A_{35} : $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ R. $\frac{2+4}{3+6} = \frac{4-2}{6-3}$

A_{36} : $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$ R. $\frac{2+3}{3} = \frac{4+6}{6}$

A_{37} : $\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$ R. $\frac{2}{3-2} = \frac{4}{6-4}$

14°. Fiind dată egalitatea: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, să se deducă, pe baza proprietății șirului de rapoarte egale, următoarele egalități:

A_{38} : $\frac{3}{6} = \frac{6}{12}$ R. $\frac{1+2}{2+4} = \frac{1+2+3}{2+4+6}$

A_{39} : $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ R. $\frac{2+3-1}{4+6-2} = \frac{3-2}{6-4}$

15°. Să se calculeze valorile fracțiilor următoare cu aproximație de 1/100:

$A_{40} = \frac{32}{7}$ R. 4,57

$A_{41} = \frac{34}{7}$ R. 4,86

16°. Să se transforme fracțiile zecimale în fracții ordinare:

$A_{42} = 1{,}24$ R. [4] $\frac{124}{100} = \frac{31}{25}$

$A_{43} = 0{,}06$ R. $\frac{6}{100} = \frac{3}{50}$

$A_{44} = 0{,}83636\ldots$ R. $\frac{836-8}{990} = \frac{46}{55}$

$A_{45} = 0{,}36464\ldots$ R. $\frac{364-3}{990} = \frac{361}{390}$

$A_{46} = 0{,}762424\ldots$ R. $\frac{7\,624-76}{9\,900} = \frac{629}{825}$

17°. Să se afle 2/3 din următoarele expresii:

$A_{47} = 21$ R. $\frac{2}{3} \cdot 21 = 14$

$A_{48} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ R. $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$

18°. Să se afle media aritmetică, cu aproximație de 1/10 a următoarelor numere:

A_{49} : 12, 13, 15 R. $\frac{12+13+15}{3} = 13{,}3$

A_{50} : 21, 25, 32, 27 **R.** $\frac{21+25+32+27}{4} =$

$= 26{,}2$

19°. Două numere (x și y) aparțin următoarelor intervale:

$$x \in (2,\ 8];\quad y \in [5,\ 10)$$

Să se stabilească intervalul în care poate exista egalitatea dintre ele ($x = y$)

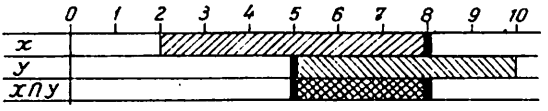


Fig. 2.4

R. Rezultatul se obține din figura 2.4:

$$x \cap y = (2,\ 8] \cap [5,\ 10) = [5,\ 8].$$

20°. Două numere (x, y) aparțin următoarelor intervale:

$$x \in (-3{,}2) \text{ și } y \in (-1{,}3)$$

Să se stabilească intervalul în care poate exista egalitatea dintre ele și să se precizeze dacă valorile — 1 și 2 satisfac această condiție.

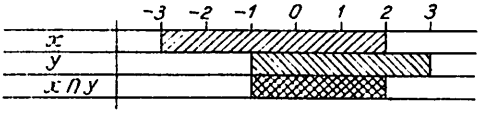


Fig. 2.5

R. Din figura 2.5 se obține intervalul: $(-1{,}2) = x \cap y$.

Numerele — 1 și 2 nu satisfac condiția, deoarece intervalul este deschis.

21°. Două numere (x, y) aparțin următoarelor intervale:

$$x \geqslant -2;\quad y < 3$$

Să se stabilească intervalul în care aceste numere pot fi egale. Să se precizeze dacă valorile — 2 și 3 satisfac condiția.

R. $[-2,\ 3) = x \cap y$

Numărul — 2 satisface, iar 3 nu o satisface (fig. 2.6).

22°. Trei numere (x, y, z) aparţin următoarelor intervale:

$$x \geqslant -2; \quad y \in [-3, 3]; \quad z \leqslant 2$$

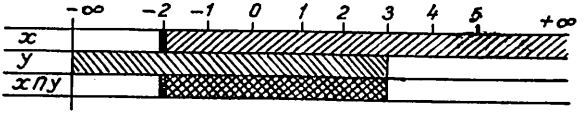


Fig. 2.6

Care este intervalul în care cele trei numere pot fi egale?

R. $[-2,2] = x \cap y \cap z$ conform figurii 2.7.

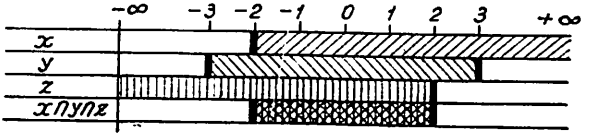


Fig. 2.7

23°. Două numere (x, y) aparţin intervalelor:

$$x \in (1,5]; \quad y \in [3,7]$$

Care este intervalul în care se pot folosi fie valorile lui x, fie ale lui y?

R. $(1,7] = x \cup y$, conform figurii 2.8.

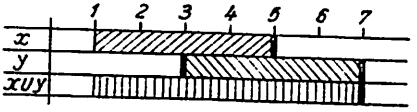


Fig. 2.8

24°. Două numere (x, y) aparţin intervalelor:

$$x \in (1,3); \quad y \in (3,5)$$

Care este intervalul în care se pot folosi fie valorile lui x, fie ale lui y?

R. $(1,3) \cup (3,5) = (1,5) - \{3\}$

Numărul 3 nu aparţine reuniunii, pentru că nu aparţine nici lui x, nici lui y (fig. 2.9).

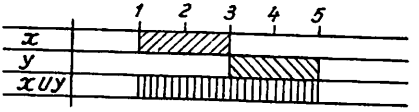


Fig. 2.9

25°. Să se stabilească valoarea absolută a expresiilor următoare:

$A_{51} = |-12|$ R. 12

$A_{52} = |13 - 25|$ R. 12

$A_{53} = |\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1|$ R. $1\frac{1}{6}$

26°. Să se împartă direct proporţional 2 640 cartuşe la trei subunităţi cu efective de 20, 32 şi 36.

R. $\frac{x}{20} = \frac{y}{32} = \frac{z}{36} = \frac{x+y+z}{88} = \frac{2\,640}{88} = 30$

$x = 20 \cdot 30 = 600$

$y = 32 \cdot 30 = 960$

$z = 36 \cdot 30 = 1\,080$

27°. Să se împartă 5 640 cartuşe invers proporţional cu vîrsta medie de 30, 40 şi 50 ani a personalului din trei subunităţi.

R. $\frac{x}{\frac{1}{30}} = \frac{y}{\frac{1}{40}} = \frac{z}{\frac{1}{50}} = \frac{x+y+z}{\frac{47}{600}} = \frac{5\,640 \cdot 600}{47} = 72\,000$

$x = 72\,000 : 30 = 2\,400$

$y = 72\,000 : 40 = 1\,800$

$z = 72\,000 : 50 = 1\,440$

28°. Să se stabilească următoarele procente din 1 250:

$A_{54} = 0{,}3\,\%$ R. $\frac{0{,}3}{100} \cdot 1\,250 = 3{,}75$

$A_{55} = 2{,}2\,\%$ R. $\frac{2.2}{100} \cdot 1\,250 = 27{,}50$

$A_{56} = 15\,\%$ R. $\frac{15}{100} \cdot 1\,250 = 187{,}50$

$A_{57} = 55\,\%$ R. $\frac{55}{100} \cdot 1\,250 = 687{,}50$

29°. Se trage asupra unui adăpost (8 m × 2 m): $A_p^b = 16$m; $A_p^d = 4$ m. Adăpostul e acoperit de elipsa unitate. Să se determine probabilitatea lovirii obiectivului.

R. $p = \frac{S}{16 \cdot A_p^b \cdot A_p^d} = \frac{8 \times 2}{16 \cdot 16 \cdot 4} = \frac{1}{64} = 0{,}015$

30°. Să se calculeze numărul de autocamioane necesar transportului muniției, cunoscînd că:

— s-a alocat pentru materialul de artilerie de calibru $A = 0{,}6$ U.F., iar pentru cel de calibru $B = 0{,}75$ U.F.;

— pentru materialul de artilerie calibru A, U.F. = 180 lovituri, iar pentru cel de calibru B, U.F. = 200 lovituri;

— într-o ladă se pun 3 lovituri din calibrul A sau 4 lovituri din calibrul B.;

— într-un autocamion încap 22 lăzi.

R. 4 autocamioane.

31°. Să se calculeze distanța de observare cunoscînd că unghiul sub care se vede un obiectiv din PO_1 este de 0-60, iar din PO_2 este de 0-80. Distanța de observare din PO_1 este de 4 200 m.

R. Se scrie proporția:

$$\frac{0\text{-}80}{0\text{-}60} = \frac{4\,200}{x}\ ;\ \text{de unde } x = 3\,150 \text{ m}$$

32°. Cunoscînd că suprafața de împrăștiere a schijelor (S) este direct proporțională cu pătratul vitezei rămase a proiectilului, să se determine suprafața S în cazul în care proiectilul are $V_r = 160$ m/s. S-a determinat experimental că în condiții similare, pentru același proiectil, cînd $V_{r1} = 190$ m/s și $S_1 = 250$ m^2.

R: $\frac{S}{V_r^2} = \frac{S^1}{V_{r1}^2}$; Rezultă că $S = 174$ m^2.

33°. Pe hartă s-a măsurat:

$d = 2\,500$ m.

$d_1 = 3\,600$ m

$h = 45$ m

$H = 66$ m. Folosind formula $h_1 = \frac{d_1 h - (H - h)\, d}{d_1}$, să se determine h_1 (înălțimea acoperirii).

R : $h_1 \approx 30$ m

34°. Să se calculeze mărimea erorii de mijloc a procedeului de măsurare, dacă eroarea medie aritmetică este 30 m.

R : Se utilizează relația: $E = \frac{5}{6} E_1$

$$E = 25 \text{ m.}$$

CAPITOLUL 3

EXPRESII ALGEBRICE

3.1. EXPRESII ALGEBRICE RAȚIONALE

3.1.1. Bazele calculului literal

1°. *Monomul.* Calculul cu mulțimile de numere și cu vectorii generalizați permite dezvoltarea procesului de cunoaștere a naturii. Pentru studiu se creează modele matematice, care reprezintă o gamă largă de fenomene similare, simplificînd gîndirea și munca de investigare.

Modelele matematice și instrumentul de calcul permit aflarea unor necunoscute, prevederea unor rezultate și luarea unor hotărîri judicioase.

Pentru a le stăpîni și a crea modele noi, corespunzătoare unor procese inedite, este necesar a cunoaște instrumentul de calcul algebric. Acesta se bazează pe transformarea succesivă a expresiilor algebrice, simplificîndu-le forma. Operațiile de transformare se sprijină pe numerație, așa cum s-a arătat mai înainte și sînt următoarele: adunarea și scăderea, înmulțirea și împărțirea, ridicarea la putere și extragerea rădăcinii. Ele se aplică monoamelor, definite anterior (§ 1.2.2), care aparțin diferitelor mulțimi, indicate de partea literală și cu valori date de coeficienți:

$$2a;\ 5b;\ 9x;\ -4y$$

Din *punct de vedere cantitativ*, operațiile algebrice, ca și cele aritmetice, s-au dezvoltat astfel: adunarea repetată a generat înmulțirea; înmulțirea repetată a generat ridicarea la putere. Ultima operație, prin repetare, nu mai generează o operație nouă.

Din *punct de vedere calitativ* s-a arătat că aceste operații se aplică pentru elementele aceleiași mulțimi, respectiv coeficienților monomului. În dezvoltarea cunoașterii lumii, au apărut noțiuni concrete sau abstracte care permit generarea de noțiuni noi, create din cele existente.

Astfel, tensiunea electrică ($E_{volți}$) depinde de rezistența conductorului (R_{ohmi}) și de intensitatea curentului (I_{amperi}). Deci, starea cu două componente $E = (R, I)$ reprezintă tensiunea electrică. Legea lui Ohm precizează că:

$$E = R \cdot I.$$

E x e m p l u: 6 volți = 2 ohmi × 2 amperi

sau:

$$6\ V = 2\Omega \cdot 3\ A = 6[\Omega A]$$

De data aceasta, înmulțirea dintre cele două mulțimi s-a efectuat nu numai între coeficienți, ci și între părțile literale, obținîndu-se o mulțime nouă.

De aceea, în algebră se înmulțesc și părțile literale:

$$2a \cdot 3b = 6ab$$

unde:

$$a \in A;\ b \in B,\ \text{iar}\ ab \in C$$

Reținem că acest proces de generare a noi mulțimi se obține prin înmulțire, împărțire, putere sau extragerea rădăcinii:

$$a : b = \frac{a}{b};\ a^2 \cdot a^3 = a^5;\ a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2}$$

Noile expresii algebrice reprezintă, deci, noi mulțimi, respectiv părți literale ale monoamelor, care pot avea forme variate:

$$-3a^3b^2;\ 5\frac{ab^2}{c};\ -6\sqrt[5]{ab^2}$$

Practica ne oferă multe exemple de acest fel:

- $v = \frac{s(m)}{t(s)}$, viteza unui mobil;
- $a = \frac{s(m)}{t^2(s^2)}$, accelerația unui mobil;
- $A = L(m) \cdot l(m)$, aria;
- $V = L(m) \cdot l(m) \cdot \hat{i}(m)$, volumul.

2°. *Valoarea numerică.* Uneori, partea literală reprezintă cantități, valori cantitative, cînd literele substituie numerele, spre a generaliza un proces.

În orice interpretare, literelor unui monom li se pot da valori concrete, iar prin înlocuirea lor se află valoarea acestuia.

E x e m p l u: Valoarea monomului:

$$E = \frac{2a^2b}{3c}$$

pentru valorile: $a = -3$; $b = -2$; $c = 4$, se obține prin înlocuire și efectuarea calculelor indicate de semnele dintre litere:

$$E = \frac{2 \cdot (-3)^2 \cdot (-2)}{3 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 9 \cdot (-2)}{3 \cdot 4} = -3$$

Valoarea numerică a unei expresii algebrice oarecare (§1.2.2) se obține în aceleași condiții.

3°. *Operații cu monoame*

Adunarea și scăderea monoamelor. Partea literală a unui monom definește mulțimea căreia îi aparține. Ca atare, adunarea și scăderea nu se pot efectua decît între monoame cu aceeași parte literală, numiți *termeni asemenea*:

$$(+3a^2b) + (-5a^2b) = 3a^2b - 5a^2b = -2a^2b$$

$$(+5x^3y^2z) - (-4x^3y^2z) = 5x^3y^2z + 4x^3y^2z = 9x^3y^2z$$

Se respectă legea semnelor, stabilită pentru desființarea parantezelor la numerele reale:

- Semnul plus păstrează semnele
- Semnul minus schimbă semnele

Se folosesc și următoarele proprietăți ale adunării:

- Adunarea este comutativă: $a + b = b + a$
- Adunarea este asociativă: $(a + b) + c = a + (b + c)$, adică (3.1) se pot schimba termenii ca poziție sau se pot efectua adunări parțiale, fără a se schimba valoarea sumei.

Înmulțirea și ridicarea la putere a monoamelor. Prin definiție:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m} = a^m$$

În consecință: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (3.2)

$$a = a^1 \quad (3.3)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (3.4)$$

Produsul a două monoame este un monom al cărui coeficient este produsul coeficienților dați, iar partea literală formată prin produsul literelor componente. E x e m p l u.

$$(-5a^3b^4c) \cdot (2a^2 \cdot b^2 \cdot c^3) = -10a^5b^6c^4$$

Se respectă legea semnelor înmulțirii numerelor reale și se folosesc proprietățile înmulțirii:

- Înmulțirea este comutativă: $a \cdot b = b \cdot a$
- Înmulțirea este asociativă: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Înmulțirea este distributivă față de adunare:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \tag{3.5}$$

Puterea unui monom, similară înmulțirii, se obține pe baza aceleași reguli:

$$(-2\,a^2b^3)^5 = -32\,a^{10}b^{15}$$

Împărțirea monoamelor. Operația este inversă înmulțirii și se bazează pe relații de forma:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{3.6}$$

$$\frac{a^p}{a^p} = a^\circ = 1 \tag{3.7}$$

Exemplu:

$$\frac{12\,a^5b^3c}{-9a^2b^3c^2} = \frac{4a^3}{-3c} = -\frac{4}{3}a^3c^{-1} \tag{3.8}$$

Se respectă legea semnelor împărțirii numerelor reale și se folosește proprietatea:

- Împărțirea este distributivă față de adunare:

$$(a + b) : c = a : c + b : c \tag{3.9}$$

4°. *Polinomul.* Polinomul este o sumă algebrică de monoame și în particular poate fi:

— binom, dacă are numai două monoame (termeni);

— trinom, dacă are trei termeni.

Monomului i se acordă un grad în raport cu o literă sau în raport cu mai multe litere. Gradul său în raport cu o literă este exponentul acelei litere. Gradul monomului, în raport cu mai multe litere, este suma exponenților acelor litere. Astfel monomul:

$$14\,a^3b^2c^5$$

are gradul: 3 în raport cu litera a; 2, în raport cu b; 5 în raport cu c; 10, în raport cu toate literele.

Gradul polinomului. Polinomului i se acordă un grad, egal cu cel mai mare grad al monoamelor componente, în raport cu o literă sau mai

multe. Polinomul: $3\ a^4bc - 5\ a^3b^2c + 2\ ab^4$ are gradul: 4, în raport cu litera a sau b; 1, în raport cu c; 6, în raport cu toate literele.

Polinomul ordonat. Stabilind criteriul de fixare a gradului unui polinom, se pot aşeza în ordinea descrescătoare a gradelor toţi termenii săi. Sub această formă, se spune că polinomul este ordonat.

Exemple:

$$P\ (a, b, c) = 3\ a^5b^2c + 7\ a^4c^2 - 2\ a^3b$$

$$P\ (x) = 3\ x^4 - 5\ x^3 + 2\ x^2 + x + 2$$

Primul polinom este ordonat atît după gradul literei a, cît şi după toate literele. Celălalt este ordonat după puterile lui x.

5°. *Expresii algebrice.* Expresiile algebrice constau din monoame legate între ele prin toate operaţiile de calcul.

Transformarea expresiilor algebrice se efectuează prin operaţii care le modifică forma, dar le păstrează valoarea prin semnul de egalitate.

Egalitatea a două expresii, valabilă pentru orice valori date literelor, numită identitate, are următoarele proprietăţi:

● se poate trece un termen dintr-un membru în celălalt, odată cu schimbarea semnului:

$$A + B = C + D - E$$

sau:

$$A + B - C + E = D$$

● se poate înmulţi sau împărţi cu aceeaşi valoare ambii termeni:

sau:

$$A + B = C + D - E$$

$$x\ (A + B) = x\ (C + D - E)$$

$$\frac{A+B}{y} = \frac{C+D-E}{y}$$

3.1.2. Operaţii cu polinoame

1°. *Adunarea şi scăderea.* Pe baza celor stabilite la adunarea monoamelor şi respectînd legea vectorială de a aduna numai monoamele cu aceeaşi parte literală, adunarea se efectuează prin *reducerea termenilor asemenea.* Exemple:

$$E_2 = 3\ x^2y - xy + a - 3\ x^2y + 2\ a =$$

$$= (3\ x^2y - 3\ x^2y) - xy + (a + 2a) = -\ xy + 3a$$

De asemenea se respectă regula *desființării parantezelor:*

$$E_3 = (2a - b) + (a - 3b) - 2(a - 3b) =$$
$$= 2a - b + a - 3b - 2a + 3b = a - b$$

$$E_4 = 5a + (2b - 3a) - [2b - (a - 3b)] - \{a - [2b - (2a - b)]\} =$$
$$= 5a + 2b - 3a - [2b - a + 3b] - \{a - [2b - 2a + b]\} =$$
$$= 5a + 2b - 3a - 2b + a - 3b - \{a - 2b + 2a - b\} =$$
$$= \underline{5a} + 2b - \underline{3a} - 2b + \underline{a} - 3b - \underline{a} + 2b - \underline{2a} + b = 0$$

2°. *Înmulțirea și puterea.*

Înmulțirea cu un monom se efectuează pe baza proprietății de *distributivitate*:

$$E_5 = 2a^2b \cdot (5a - 2b - 3ab^2 + a^2b^2) =$$
$$= 10a^3b - 4a^2b^2 - 6a^3b^3 + 2a^4b^3$$

Înmulțirea polinoamelor se efectuează în mod similar, prin înmulțirea fiecărui monom al unuia din ele cu toți termenii celuilalt:

$$E_6 = (2a - 3b^2 + 3a^2b) \cdot (3b - 2a^2 - 5a^2b^2) = 6ab - 4a^3 -$$
$$- 10a^3b^2 - 9b^3 + \underline{6a^2b^2} + 15a^2b^4 + \underline{9a^2b^2} - 6a^4b - 15a^4b^3$$

După efectuarea unei astfel de înmulțiri, se procedează la reducerea termenilor asemenea rezultați:

$$E_7 = (2a + 3b)(-3a + b) = -6a^2 + \underline{2ab} - \underline{9ab} + 3b^2 =$$
$$= -6a^2 - 7ab + 3b^2$$

$$E_8 = (2x^2 - 5x + 1)(4x^3 - x^2 + 2x - 3) = 8x^5 - \underline{2x^4} + \underline{4x^3} -$$
$$- \underline{6x^2} - \underline{20x^4} + \underline{5x^3} - \underline{10x^2} + 15x + \underline{4x^3} - \underline{x^2} + 2x - 3 =$$
$$= 8x^5 - 22x^4 + 13x^3 - 17x^2 + 17x - 3$$

Puterea unui polinom are aceeași definiție cu cea a numerelor reale și cea a monomului:

$$P^n = P \cdot P \cdot P \cdots P \text{ (produs cu } n \text{ factori)} \qquad (3.10)$$

Astfel:

$$E_9 = (2x^2y - 3a)^4 = (2x^2y - 3a)(2x^2y - 3a)(2x^2y - 3a)(2x^2y - 3a) =$$
$$= (4x^4y^2 - 12x^2ya + 9a^2)(4x^4y^2 - 12x^2ya + 9a^2) =$$
$$= 16x^8y^4 - 96x^6y^3a + 216x^4y^2a^2 - 216x^2ya^3 + 81a^4$$

Identități uzuale. Mare parte din înmulțirile folosite frecvent au aceleași forme. De aceea se pot crea modele generale, numite formule sau identități, valabile pentru orice valori date literelor. În cele ce urmează se prezintă cele mai utile identități algebrice.

● *Produsul de sumă prin diferență*:

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2 \tag{3.11}$$

● *Pătratul binomului*:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2 \tag{3.12}$$

● *Pătratul trinomului*:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \tag{3.13}$$

● *Cubul binomului*

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{3.14}$$

● *Cubul trinomului*:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\,(a + b)\,(b + c)\,(c + a) \tag{3.15}$$

● *Suma puterilor impare*:

$$a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 - ab + b^2) \tag{3.16}$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)\ (a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \tag{3.17}$$

$$\vdots$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)\ (a^{2n} - a^{2n-1} \cdot b + a^{2n-2}b^2 - \ldots - a \cdot b^{2n-1} + b^{2n}) \tag{3.18}$$

Demonstrația acestor identități îi revine cititorului și constă în efectuarea înmulțirilor. Aplicarea lor este simplă și utilă, ca în exemplele următoare:

$$E_{10} = \left(\frac{3x^2}{5} + \frac{2y^3a}{3}\right)\left(\frac{3x^2}{5} - \frac{2y^3a}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{5}\right)^2 - \left(\frac{2y^3a}{3}\right)^2 = \frac{9x^4}{25} - \frac{4y^6a^2}{9} \qquad \text{(vezi 3.11)}$$

$$E_{11} = (3x - 2y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)\ (-2y) + (-2y)^2 =$$

$$= 9x^2 - 12xy + 4y^2 \qquad \text{(vezi 3.12)}$$

3°. *Impărţirea*

Impărţirea cu un monom se efectuează pe baza proprietăţii de distributivitate:

$$E_{12} = \frac{6a^3bc^3 - 8ab^2c^3 + 15b}{6ab^2c} = ab^{-1}c^2 - \frac{4}{3}c^2 +$$

$$+ \frac{5}{2}a^{-1}b^{-1}c^{-1} = \frac{ac^2}{b} - \frac{4c^2}{3} + \frac{5}{2abc}$$

$$E_{13} = \frac{4x^3 - 6x^2 + 5x - 9}{6x^2} = \frac{2x}{3} - 1 + \frac{5}{6x} - \frac{9}{6x^2}$$

Impărţirea polinoamelor între ele este o operaţie mai dificilă.

Un polinom (D) numit deîmpărţit care se împarte la un polinom ($\hat{I}$) numit împărţitor, are ca rezultat un cît (C) şi un rest (R), ca la împărţirea numerelor reale:

$$\frac{D}{\hat{I}} = C, \text{ cu un rest : } R \tag{3.19}$$

Relaţia care cuprinde toţi aceşti termeni este dată de verificarea împărţirii:

$$D = \hat{I} \cdot C + R \tag{3.20}$$

Deci, împărţirea a două polinoame ($D.I$), constă în găsirea cîtului (C) şi a restului (R) care satisfac condiţiile de mai sus.

În cazul în care polinoamele cuprind o singură literă, spre exemplu (x), împărţirea se face după exemplul şi regulile de mai jos:

$$\begin{array}{l} 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2 \;\Big|\; \dfrac{x^2 - 2x - 1}{4x + 3} \\ \underline{-4x^3 + 8x^2 + 4x} \\ \quad / 3x^2 + 7x - 2 \\ \underline{-3x^2 + 6x + 3} \\ \quad / 13x + 1 \end{array}$$

unde:

$D = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2$; $\quad \hat{I} = x^2 - 2x - 1$

$C = 4x + 3$ $\quad R = 13x + 1$

Procedeul de calcul este următorul:

— se ordonează polinoamele (D,$\hat{I}$) după puterile descrescătoare ale lui x;

— se împarte primul termen al deîmpărțitului ($4x^3$) la primul termen al împărțitorului:

$$\frac{4x^3}{x^2} = 4x$$

iar acest rezultat se înscrie ca termen al cîtului;

— se înmulțește împărțitorul (I) cu acest rezultat și se scade din deîmpărțit (D), trecîndu-l direct cu semn schimbat:

$$-4x\,(x^2 - 2x - 1) = -4x^3 + 8x^2 + 4x$$

— se efectuează adunarea algebrică, în care scop termenii de același grad se scriu unii sub alții, din care se obține:

$$3x^2 + 7x - 2$$

— se repetă în același mod calculele trecînd la împărțirea noului deîmpărțit la același împărțitor.

Verificarea împărțirii se face pe baza relației (3.20):

$$E_{17} = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2 = (x^2 - 2x - 1)\,(4x + 3) + (13x + 1)$$

4°. *Descompunerea polinomului în factori.* Transformarea în produs de factori a polinoamelor este de mare importanță în calculul algebric, deoarece numai sub această formă se pot efectua simplificări și aducerea la același numitor a fracțiilor. Metodele specifice sînt următoarele:

● *Factorul comun* este prima cale ce trebuie încercată și constă în împărțirea și înmulțirea expresiei algebrice cu același factor:

$$E_{14} = 6a^4b^3c^2 + 4a^3b^2c - 10a^2b^2c = 2a^2b^2c\,(3a^2bc + 2a - 5)$$

$$E_{15} = (x + 2)\,(x^2 - 3x + 1) - (x + 2)\,(3x^2 - x - 2) =$$

$$= (x + 2)\,(x^2 - 3x + 1 - 3x^2 + x + 2) =$$

$$= (x + 2)\,(-2x^2 - 2x + 3)$$

● *Restrîngerea puterilor*, a doua cale a factorizării, constă în identificarea polinoamelor care sînt rezultatul unei dezvoltări la putere:

$$E_{16} = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$$

$$E_{17} = a^2b^2 + 2abc + c^2 = (ab + c)^2$$

$$E_{18} = x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 12yz - 6zx =$$

$$= (x + 2y - 3z)^2$$

$$E_{19} = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3 = (2x - 3y)^3$$

● *Diferența de pătrate* se transformă în produs de sumă prin diferență:

$$E_{20} = 9a^4 - 25b^2 = (3a^2 + 5b)\ (3a^2 - 5b)$$

$$E_{21} = 16x^4y^2 - \frac{z^6}{9} = \left(4x^2y + \frac{z^3}{3}\right)\left(4x^2y - \frac{z^3}{3}\right)$$

● *Suma de puteri impare*, conform identității (3.18):

$$E_{22} = x^3 + 8y^3 = (x + 2y)\ (x^2 - 2xy + 4y^2)$$

$$E_{23} = x^5 + y^5 = (x + y)\ (x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

$$E_{24} = x^5 - 1 = x^5 + (-1)^5 = (x - 1)\ (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

● *Gruparea termenilor* este metoda care se folosește după ce s-au epuizat celelalte:

$$E_{25} = x^3 + 3x^2 + x + 3 = x^2\ (x + 3) + (x + 3) =$$
$$= (x + 3)\ (x^2 + 1)$$

$$E_{26} = x^2 + x + ax + a = x\ (x + a) + (x + a) =$$
$$= (x + a)\ (x + 1)$$

5°. *Cel mai mic multiplu comun și cel mai mare divizor comun.*

Cel mai mic multiplu comun (*c.m.m.m.c*) al mai multor polinoame este produsul factorilor primi comuni și necomuni la puterile cele mai mari.

Cel mai mare divizor comun (*c.m.m.d.c.*) al mai multor polinoame este produsul factorilor primi comuni la puterile cele mai mici.

Pentru determinarea lor este necesară descompunerea polinoamelor în factori prin metodele stabilite anterior (§ 3.2.4).

E x e m p l u: (E_{27}) Să se determine c.m.m.m.c. și c.m.m.d.c. al următoarelor polinoame:

$$P_1(x) = x^4 - 1;\ P_2(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$P_3(x) = x^2 + 2x + 1;\ P_4(x) = (x^2 - 1)^2$$

Descompunerea polinoamelor în factori primi:

$$P_1 = x^4 - 1 = (x^2 + 1)\ (x^2 - 1) = (x^2 + 1)\ (x + 1)\ (x - 1)$$

$$P_2 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$P_3 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

$$P_4 = (x^2 - 1)^2 = (x + 1)^2\ (x - 1)^2$$

Rezultă:

$$\text{c.m.m.m.c.} = (x^2 + 1)\,(x + 1)^2\,(x - 1)^2$$

$$\text{c.m.m.d.c.} = (x + 1)\,(x - 1)$$

(E_{28}) Aceeași problemă pentru polinoamele:

$$Q_1 = a^2 - x^2 = (a + x)\,(a - x)$$

$$Q_2 = a^2 - ax = a\,(a - x)$$

$$Q_3 = x^2 + ax = x\,(a + x)$$

$$\text{c.m.m.m.c.} = (a + x)\,(a - x)\,ax$$

$$\text{c.m.m.d.c.} = 1$$

6°. *Teorema lui Bèzout.*

● *Divizibilitatea polinoamelor cu o singură variabilă*

Pe linia descompunerii unui polinom în factori, este important să cunoaștem divizibilitatea acestuia cu un factor de gradul I care are forma: $(x - a)$. În acest scop, revenind la relația (3.20), să stabilim puterile termenilor săi:

$$D = I \cdot C + R$$

Dacă m este gradul deîmpărțitului (D), iar n gradul împărțitorului (I), rezultă:

— gradul cîtului este $(m - n)$

— gradul restului este $(n - 1)$.

În cazul împărțirii cu $(x - a)$, lucrurile se petrec astfel:

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R \qquad (3.21)$$

unde:

m este gradul deîmpărțitului $P(x)$;

$n = 1$, gradul împărțitorului $(x - a)$;

$m - 1$, gradul cîtului $C(x)$;

$n - 1 = 0$, gradul restului (R).

Rezultă că restul împărțirii cu $(x - a)$ este o constantă, deoarece: $x^0 = 1$.

Egalitatea (3.21) este o identitate, fiind valabilă pentru orice valori date lui x.

Pentru a afla valoarea restului, vom alege un caz particular:

$$x - a = 0 \Rightarrow x = a$$

În aceste condiții, rezultă:

$$P(a) = R \tag{3.22}$$

Deci, valoarea restului împărțirii unui polinom $P(x)$ prin $(x - a)$, se obține prin valoarea numerică a polinomului pentru $x = a$.

Exemple:

(E_{29}). Se cere restul împărțirii polinomului:

$P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x^2 - x + 2$ cu $x - 2$

$P(2) = 3 \cdot 2^5 - 2 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 76$

(E_{36}). Să se calculeze restul împărțirii polinomului:

$$P(x) = x^7 - 3x^5 + 4x + 2 \text{ prin } x + 1$$

$P(-1) = -1 + 3 - 4 + 2 = 0$, împărțirea este exactă.

Observație: Un polinom $P(x)$ se divide cu $(x - a)$, dacă restul este zero, respectiv:

$$P(a) = 0 \tag{3.23}$$

● *Divizibilitatea polinoamelor cu mai multe variabile*

Raționamentul este similar, dar mai general. Relația (3.20), în cazul a trei variabile are forma:

$$P(x,y,z) = Q(x,y,z) \cdot C(x,y,z) + R(x,y,z) \tag{3.24}$$

Pentru ca polinomul P să fie divizibil cu Q, trebuie satisfăcută propoziția următoare:

Dacă

$$Q(x,y,z) = 0, \text{ și } P(x,y,z) = 0 \tag{3.25}$$

Exemple:

(E_{30}). Să se demonstreze că următoarele polinoame:

$$P = (2x + y)^3 + (2y + x)^3 - x^3 - y^3$$

$$Q = x + y$$

sînt divizibile.

Trebuie ca:

$$P(x,y) = (x + y) \cdot C(x,y)$$

Dacă:

$$x + y = 0$$

Rezultă:

$$P = x^3 + y^3 - x^3 - y^3 = 0.$$

(E_{31}). Polinomul: $P = (x + y)\ (y + z)^2 + (y + z)\ (z + (z + x)^2 + x(y^2 + zx)$ se divide cu: $Q = x + y + z$.

Trebuie ca:

$$P = (x + y + z)\ .\ C\ (x,y,z)$$

Dacă:

$$x + y + z = 0$$

Rezultă:

$$P = (-z)\ (-x)^2 + (-x)\ (-y)^2 + xy^2 + x^2z =$$
$$= -x^2z - xy^2 + xy^2 + x^2z = 0$$

7°. *Schema lui Horner.* Împărţirea unui polinom prin binomul de gradul I $(x - a)$ se poate efectua direct.

Pentru a stabili metoda, vom efectua împărţirea generală a unui polinom de gradul n în x, cu $(x - a)$:

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + A_3x^{n-3} + \ldots \quad \Big| \; x - a$$

$$A_0x^{n-1} + B_1x^{n-2} + B_2x^{n-3} + \ldots$$

$$-A_0x^n + aA_0x^{n-1}$$

$$/\ (aA_0 + A_1)\ x^{n-1} + A_2x^{n-2} + A_3x^{n-3} + \ldots$$

sau:

$$B_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + A_3x^{n-3} + \ldots$$

$$-B_1x^{n-1} + aB_1x^{n-2}$$

$$/\ (aB_1 + A_2)\ x^{n-2} + A_3x^{n-3} + \ldots$$

sau:

$$B_2x^{n-2} + A_3x^{n-3} + \ldots$$

$$-B_2x^{n-3} + aB_2x^{n-3}$$

$$/\ (aB_2 + A_3)\ x^{n-3} + \ldots$$

. . . . . .

Pe parcursul împărțirii s-au făcut următoarele notații:

$$B_1 = aA_0 + A_1 \tag{3.26}$$

$$B_2 = aB_1 + A_2 \ldots \text{ etc.} \tag{3.27}$$

care reprezintă tocmai coeficienții cîtului.

Se observă că acești coeficienți se obțin unul din celălalt, cu ajutorul lui a:

$$B_p = aB_{p-1} + A_p \tag{3.28}$$

în afară de primul coeficient, care este tocmai A_0.

Respectînd această lege de calcul pentru fiecare coeficient, cu ajutorul celui precedent, împărțirea cu $(x—a)$ se face direct, într-un tabel, ca în aplicația următoare:

(E_{32}) Să se efectueze direct împărțirea cu $(x—2)$ a polinomului:

$$P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 6x^2 + x + 2$$

Pentru a aplica metoda rezultată, se folosește schema lui Horner:

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
	3	—7	6	1	2	$P(x)$
2	0	3	—1	4	9	$C(x)$

În rîndul întîi se scriu puterile descrescătoare ale lui x, fără a omite nici un grad.

În rîndul doi se trec coeficienții corespunzători din polinomul de împărțit $P(x)$.

În rîndul trei se calculează coeficienții cîtului $C(x)$ după regulile stabilite:

— primul coeficient, al lui x^3, este chiar $A_0 = 3$

— al doilea: $B_1 = aA_0 + A_1 = 2.3 - 7 = -1$

— al treilea: $B_2 = aB_1 + A_2 = 2 \cdot (-1) + 6 = 4$

— al patrulea: $B_3 = aB_2 + A_3 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$

Cîtul are, deci expresia:

$$C(x) = 3x^3 - x^2 + 4x + 9$$

Restul se obține printr-un nou pas, similar:

— al cincilea termen: $B_4 = aB_3 + A_4 = 2 \cdot 9 + 2 = 20 = R$.

Într-adevăr:

$$R = P(2) = 3 \cdot 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 2 + 2 = 20$$

(E_{33}) Să se efectueze împărțirea:

$$(2x^5 - 3x^4 + 5x^2 - 203x + 15\ x + 3) : (x + b)$$

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0	R	
	2	−3	0	5	−203	15	—	$P(x)$
−3	—	2	−9	27	−76	25	−60	$C(x)$

Deci:

$$C(x) = 2x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 76x + 25$$

$$R = -60$$

8°. *Aplicații*

1) Să se calculeze expresiile algebrice:

$\mathbf{A_1} = ax - 2by - \{-[-(-3ax - 3by) + cz]\} + (-3ax)$ **R.** $ax + by + cz$

$\mathbf{A_2} = (x + a)^2 - (x - a)^2$ **R.** $4ax$

$\mathbf{A_3} = (x + a)\ (x - a)\ (x^2 + a^2)\ (x^4 + a^4)$ **R.** $x^8 - a^8$

$\mathbf{A_4} = (x^2 + 3x - 4)\ (2x^3 - x^2 + 5x - 2)$ **R.** $2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 26x + 8$

$\mathbf{A_5} = \dfrac{3x^5y^4 + 8xy + 12x^2y^3}{12x^2y}$ **R.** $\dfrac{x^2y^3}{4} + \dfrac{2}{3x} + y$

2) Să se afle valoarea numerică a expresiilor:

$$\mathbf{A_6} = \frac{(a^2+b)^3 \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{3}{b} + 1\right)^4}{(a+3b)^5 \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + 4\right)^3}$$ **R.** 6

pentru:

$$a = \frac{1}{2}; \quad b = -\frac{1}{3}$$

3) Să se descompună în factori polinoamele:

● *Prin factori comuni*

$\mathbf{A_7} = 3a^3xy + 6a^2by^2 - 9a^2cyz$ **R.** $3a^2y\ (ax + 2by - 3cz)$

$A_8 = 2p\,(p-q) - 5q\,(p-q)$ — R. $(p-q)\,(2p-5q)$

$A_9 = mn(m^2+n^2) - n^2(m^2+n^2)$ — R. $n(m^2+n^2)\,(m-n)$

● *Prin restrîngerea puterilor*

$A_{10} = 4a^2 - 12ab + 9b^2$ — R. $(2a-3b)^2$

$A_{11} = x^4y^2 + 4x^2z^2 + 4x^3yz$ — R. $(x^2y + 2\ xz)^2$

$A_{12} = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$ — R. $(a+b-c)^2$

$A_{13} = x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y + 1$ — R. $(x-y-1)^2$

$A_{14} = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$ — R. $(a+2b)^3$

$A_{15} = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ — R. $(2x-1)^3$

● *Prin diferență de pătrate*

$A_{16} = x^4 - 1$ — R. $(x^2+1)\,(x+1)\,(x-1)$

$A_{17} = (2a-3b)^2 - (3a-2b)^2$ — R. $5(b+a)\,(b-a)$

$A_{18} = x^4 + x^2y^2 + y^4$ — R. $(x^2+y^2+xy)\,(x^2+y^2-xy)$

$A_{19} = 4\,(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2$ — R. $(a+b+c-d)\,(a+b-c+d)\,(c+d+a-b)\,(c+d-a+b)$

● *Prin sumă de puteri impare*

$A_{20} = x^5 + 1$ — R. $(x+1)\,(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

$A_{21} = z^6 - 1 = (z^3+1)\,(z^3-1)$ — R. $(z+1)\,(z^2-z-1)\,(z-1)\cdot(z^2+z+1)$

● *Prin gruparea termenilor*

$A_{22} = x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$ — R. $(x+y)^2\,(x-y)$

$A_{23} = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ — R. $(x+2)\,(x^2+2)$

$A_{24} = a^2 + b^2 - 2ab - c^2$ — R. $(a-b+c)\,(a-b-c)$

4) Să se calculeze c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al polinoamelor.

$\mathbf{A_{25}}$. $P_1 = 2x^3 - 4x + 112$

$P_2 = x^2 + 56x + 208$ **R.** c.m.m.d.c. $= x + 4$

$\mathbf{A_{26}}$. $P_1 = x^6 - 1$; $P_2 = x^8 - 1$; $P_3 = x^{10} - 1$ **R.** c.m.m.d.c. $= x^2 - 1$

5) Să se determine restul următoarelor împărțirilor:

$\mathbf{A_{27}}$. $(4x^3 + 3x^2 - 2x + 100) : (x + 2)$ **R.** $- 12$

$\mathbf{A_{28}}$. $(x^5 + x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6) : (x - 1)$ **R.** 4

6) Să se precizeze care din polinoamele de mai jos se divid cu $(x + 1)$:

$\mathbf{A_{29}}$. $P_1 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$P_2 = x^5 + 1$

$P_3 = 3x^5 - 5x^4 + 2x^3 + x + 4$ **R.** P_2

7) Să se arate că următoarele împărțiri sînt exacte:

$\mathbf{A_{30}} = (x^2 + x + 1)^3 + (x^2 - x + 1)^3 : (x^2 + 1)$

$\mathbf{A_{31}} = (x + y + 3z)^3 + (x + 3y + 3z)^3 : (x + 2y + 3z)$

$\mathbf{A_{32}} = (2x + y + z)(x + 2y + z)(x + y + 2z) - xyz : (x + y + z)$

$\mathbf{A_{33}}$ Să se aplice schema lui Horner la împărțirile din exercițiile $\mathbf{A_{27}}$ și $\mathbf{A_{28}}$ și să se verifice rezultatele.

3.1.3. Fracții algebrice

1°. *Definiție. Proprietăți.* Expresia neefectuată a împărțirii $\left(\frac{D}{I}\right)$ se numește fracție; cînd deîmpărțitul (D) și împărțitorul (I) sînt polinoame, fracția este algebrică; dacă nu cuprinde radicali, este și rațională.

Proprietățile fracțiilor algebrice sînt cele ale fracțiilor ordinare (§ 2.4):

— amplificarea și simplificarea cu un număr sau cu o expresie algebrică nu schimbă valoarea fracției:

$$\frac{D}{I} = \frac{DP}{IP} = \frac{D/P}{I/P} \tag{3.29}$$

— produsul mezilor este egal cu cel al extremilor în cazul proporției algebrice:

$$\frac{D}{I} = \frac{P}{Q}\ ;\ D \cdot Q = I \cdot P \tag{3.30}$$

— şirul de rapoarte egale permite formarea de fracţii derivate egale sau de egalităţi derivate:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_3}{Q_3} = \ldots = \frac{P_1 + P_2 + P_3 \cdots}{Q_1 + Q_2 + Q_3} \tag{3.31}$$

$$\frac{P_1 + Q_1}{Q_1} = \frac{P_2 + Q_2}{Q_2}\,;\quad \frac{P_1 - Q_1}{Q_1} = \frac{P_2 - Q_2}{Q_2} \text{ etc.} \tag{3.32}$$

— fracţia cu numitorul zero nu are sens:

$$\frac{P}{Q} = \infty, \text{ adică: } Q = 0 \tag{3.33}$$

De aceea, vom preciza că această fracţie are sens numai cînd:

$$Q \neq 0 \tag{3.34}$$

2°. *Simplificarea fracţiilor.* Operaţia de simplificare este cunoscută şi constă în împărţirea termenilor fracţiei cu acelaşi număr sau polinom. În acest scop trebuie procedat astfel:

— se descompune în factori primi numărătorul şi numitorul;

— se simplifică factorii corespunzători după regulile împărţirii puterilor:

$$\frac{P}{Q} = \frac{A^m \cdot B^n \cdot C^p \cdots}{A^\alpha \cdot B^\beta \cdot C^\gamma} = A^{m-\alpha} \cdot B^{n-\beta} \cdot C^{p-\gamma} \tag{3.35}$$

Exemplu:

$$\mathbf{E}_{34} = \frac{4x^2(x+2) - 8x(x+2) + 4(x+2)}{6x^2 + 6x - 12} =$$

$$= \frac{4(x+2)(x^2 - 2x + 1)}{6(x^2 + x - 2)} = \frac{4(x+2)(x-1)^2}{6[(x^2 - 1) + (x-1)]} =$$

$$= \frac{4(x+2)(x-1)^2}{6[(x-1)(x+1) + (x-1)]} = \frac{4(x+2)(x-1)^2}{6(x-1)(x+2)} = \frac{2}{3}(x-1)$$

3°. *Adunarea şi scăderea fracţiilor.* Aceste operaţii se efectuează între numărători, după ce fracţiile s-au adus la acelaşi numitor, cu ajutorul proprietăţilor enunţate (§ 3.1.3).

Numitorul comun se obţine după regula generală:

— se descompun toţi numitorii în factori primi;

— se efectuează produsul factorilor comuni şi necomuni la puterile cele mai mari.

Aducerea la acelaşi numitor se face prin amplificarea fiecărei fracţii cu cîtul dintre numitorul comun şi numitorul acesteia.

Exemple:

$$E_{35} = \frac{a+b}{a^2b} + \frac{a-b}{ab^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{b(a+b) + a(a-b) + b^2 - a^2}{a^2b^2} =$$

$$= \frac{ab + b^2 + a^2 - ab + b^2 - a^2}{a^2b^2} = \frac{2b^2}{a^2b^2}$$

$$E_{36} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2-4} = \frac{(x+2) - (x-2) - 4}{x^2-4} = 0$$

$$E_{37} = \frac{1^{(x+1)^2}}{x^2-2x+1} - \frac{1^{(x-1)^2}}{x^2+2x+1} + \frac{1^{(x^2-1)}}{x^2-1} + \frac{1}{x^4-2x^2+1}$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

$$\underline{x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2 = (x+1)^2(x-1)^2}$$

$$\text{c.m.m.m.c.} = (x+1)^2(x-1)^2$$

$$E_{37} = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2 + (x^2-1) + 1}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{x^2-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$E_{38} = \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} - \frac{4ab - a^2 + b^2}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2 - (4ab - a^2 + b^2)}{a^2-b^2} = 1$$

4°. *Înmulțirea și ridicarea la putere a fracțiilor.* Înmulțirea se bucură de proprietățile stabilite (§ 3.1.3) și se efectuează prin înmulțirea numărătorilor între ei și a numitorilor între ei:

$$\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot P_2}{Q_1 \cdot Q_2} \tag{3.36}$$

Ridicarea la putere se obține prin ridicarea fiecărui termen la acea putere:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^n = \frac{P^n}{Q^n} \tag{3.37}$$

Exemple:

$$E_{39} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{(x^2-y^2)^2} \cdot \frac{x^2 + 2xy + y^2}{3xy} \cdot \frac{6x^2y^2}{2} =$$

$$= \frac{(x-y)^2 \cdot (x+y)^2 \cdot 6x^2y^2}{(x-y)^2(x+y)^2 \cdot 6xy} = xy$$

$$\mathbf{E}_{40} = \left[\frac{(x-a)^2}{(x+a)^3}\right]^3 \cdot \left[\frac{x^2+2ax+a^2}{x^2-2ax+a^2}\right]^2 =$$

$$= \frac{(x-a)^4 \cdot (x+a)^4}{(x+a)^6 \cdot (x-a)^4} = \frac{1}{(x+a)^2}$$

5°. *Împărțirea fracțiilor algebrice.* Și această operație respectă legile cunoscute (§ 3.1.3), efectuîndu-se prin înmulțirea cu fracția răsturnată, deoarece:

$$\frac{a}{b} : \frac{Q}{P} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{Q}{P}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{P}{Q} \tag{3.38}$$

Exemple:

$$\mathbf{E}_{41} = \frac{x+2y}{2x-y} : \frac{(x+2y)^2}{4x^2-y^2} =$$

$$= \frac{x+2y}{2x-y} \cdot \frac{4x^2-y^2}{(x+2y)^2} = \frac{(x+2y)\,(2x-y)\,(2x+y)}{(2x-y)\,(x+2y)^2} = \frac{2x+y}{x+2y}$$

$$\mathbf{E}_{42} = 1 + \frac{1-\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{a}}} = 1 + \frac{\frac{a-1}{a}}{1-\frac{1}{\frac{a-1}{a}}} =$$

$$= 1 + \frac{\frac{a-1}{a}}{1-\frac{a}{a-1}} = 1 + \frac{\frac{a-1}{a}}{\frac{a-1-a}{a-1}} = 1 + \frac{(a-1)^2}{-1} =$$

$$= 1 - (a-1)^2 = 1 - (a^2 - 2a + 1) = 1 - a^2 +$$

$$+ 2a - 1 = 2a - a^2 = a\,(2-a)$$

6°. *Aplicații.*

1) Să se deducă, cu ajutorul proprietății proporțiilor, relațiile condiționate de mai jos:

$$\mathbf{A}_{34} \cdot \frac{x}{y} = \frac{z}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{z^2}{t^2} = \frac{xz}{yt}\,; \quad \left(\frac{x-z}{y-t}\right)^2 = \frac{xz}{yt} = \frac{x^2+z^2}{y^2+t^2}$$

$$\mathbf{A}_{35} \cdot \frac{ax-by}{c} = \frac{by-cz}{a} = \frac{cz-ax}{b} \quad \Rightarrow \quad ax = by = cz$$

2) Să se simplifice fracțiile:

$A_{36} = \dfrac{2x^4 - 8x^3y + 8x^2y^2}{x^4 - 2x^3y}$ R. $\dfrac{2(x-2y)}{x}$

$A_{37} = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}$ R. $\dfrac{x^2 - xy + y^2}{x - y}$

$A_{38} = \dfrac{b^2 + 2ac - a^2 + c^2}{a^2 + 2ab - c^2 + b^2}$ R. $\dfrac{b + c - a}{b + c + a}$

$A_{39} = \dfrac{x^4 - y^4 + 2xy\,(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2 + 2xy)\,(x - y)}$ R. $x + y$

3) Să se efectueze calculele algebrice:

$A_{40} = \dfrac{1}{a^2b} + \dfrac{1}{b^2c} + \dfrac{1}{c^2a}$ R. $\dfrac{bc^2 + ca^2 + ab^2}{a^2b^2c^2}$

$A_{41} = \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a-b} + \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$ R. $\dfrac{a+b}{a-b}$

$A_{42} = \dfrac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}} - \dfrac{1 + \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{1}{x}} \cdot \dfrac{x-1}{x+1}$ R. $\dfrac{2x}{y-x}$

$A_{43} = \left[\left(\dfrac{a}{x+1} - b + \dfrac{a}{x-1}\right)(x^2 - 1) - 2\,ax\right] : (1 - x^2)$ R. b

3.1.4. Calcule algebrice expeditive

În cele ce urmează se prezintă cîteva metode de calcul care reduc volumul de lucru în împrejurări frecvent întîlnite în matematică.

Operații cu dublu semn. De multe ori se întîlnesc expresii, în care unele monoame iau valori pozitive sau negative. Pentru a nu repeta calculele efectuate pentru cazul în care li se atribuie semnul plus, se folosește un calcul simultan. Exemplele de mai jos sînt edificatoare.

$E_{43} = (a \pm b)\,(a \pm b \mp c)$, unde:

$E'_{43} = (a + b)\,(a + b - c)$ și $E''_{43} = (a - b)\,(a - b + c)$

După cum se observă, pentru fiecare caz se folosesc semnele respective, superioare sau inferioare. Acest calcul poate fi condus cu ambele semne simultan:

$E_{43} = a^2 \pm ab \mp ac \pm ab + b^2 - bc = (a^2 + b^2 - bc) \pm (ab - ac + ab)$

Rezultatul este totdeauna de forma:

$$E = A \pm B \Rightarrow E' = A + B \text{ și } E'' = A - B$$

Deci:
$$E'_{43} = a^2 + b^2 - bc + 2\,ba - ac$$
$$E''_{43} = a^2 + b^2 - bc - 2\,ab + ac$$

Un alt exemplu este următorul: să se afle valoarea expresiei:

$$E_{44} = x^3 - 2x^2 + 3x - 1,$$

pentru valorile: $x_1 = a + 2b$ și $x_2 = a - 2b$

Folosind valoarea cu dublu sens:

$$x = a \pm 2b,$$

expresia dată, devine:

$$E_{44} = (a \pm 2b)^3 - 2(a \pm 2b)^2 + 3(a \pm 2b) - 1 = a^3 \pm 6a^2b + 12\,ab^2 \pm 8b^3 - 2(a^2 \pm 4ab + 4b^2) + 3a \pm 6b - 1 = (a^3 + 12\,ab^2 - 2a^2 - 8b^2 + 3a - 1) \pm (6a^2b + 8b^3 - 8ab + 6b)$$

Deci: $E'_{44} = a^3 + 12\,ab^2 - 2a^2 - 8b^2 + 3a - 1 + 6a^2b + 8b^3 - 8ab + 6b$

$$E''_{44} = a^3 + 12\,ab^2 - 2a^2 - 8b^2 + 3a - 1 - 6a^2b - 8b^3 + 8ab - 6b$$

3.2. EXPRESII ALGEBRICE IRAȚIONALE

3.2.1. Monomul

După cum se știe, numerele iraționale au apărut prin operația de extragere a rădăcinii, care creează numere ce ies din mulțimea numerelor raționale, dar au valori cuprinse între acestea ca:

$$\sqrt{2} = 1{,}41\ldots;\ \sqrt{3} = 1{,}73\ldots$$

Pentru că numărul irațional nu se poate exprima riguros ca valoare printr-un număr rațional (fracție ordinară sau zecimală), va fi folosit cu simbolul său ($\sqrt{a}$); în acest fel i se conservă valoarea. Altfel, se introduc aproximații dăunătoare preciziei rezultatului. Substituțiile se fac numai în rezultatul final.

Monoamele iraționale sînt cele care cuprind rădăcini ($\sqrt{a}$), chiar dacă — pentru anumite valori ale literelor — acestea ar deveni raționale ($\sqrt{a} = \sqrt{4} = 2$). Monoamele iraționale definesc, ca de obicei,

prin partea lor literală, mulțimi ce permit adunarea elementelor lor, prin reducerea termenilor asemenea:

$$E_{45} = 2\sqrt{a} - 5\sqrt[3]{a} + \sqrt{ab} - \sqrt{a} + 2\sqrt[3]{a} - \sqrt{ab} = (2\sqrt{a} - \sqrt{a}) + (-5\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{a}) + (\sqrt{ab} - \sqrt{ab}) = \sqrt{a} - 3\sqrt[3]{a}$$

1°. *Adunarea și scăderea* monoamelor iraționale se bucură de proprietățile enumerate anterior (§ 3.1.1).

2°. *Înmulțirea și ridicarea la putere* se efectuează ținînd seama de exprimarea numerelor iraționale ca puteri fracționare:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

În consecință:

$$\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{n}{m}} \cdot a^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{np+mq}{mp}} = \sqrt[mp]{a^{np+mq}} \tag{3.39}$$

iar:

$$\frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[p]{a^q}} = \frac{a^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{q}{p}}} = a^{\frac{np-mq}{mp}} = \sqrt[mp]{a^{np-mq}} \tag{3.40}$$

și

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[mn]{a^p} \tag{3.41}$$

Exemplu numeric:

$$E_{46} = \sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^3\sqrt{a}}} = \sqrt[24]{(a^2)^8 \cdot (a^3)^2 \cdot a} = \sqrt[24]{a^{23}}$$

3°. *Scoaterea numerelor de sub radical* corespunde operației de scoatere a întregilor din fracția-exponent:

$$E_{47} = \sqrt[3]{a^8} = a^{\frac{8}{3}} = a^{2\frac{2}{3}} = a^2 \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^2\sqrt[3]{a^2}$$

4°. *Introducerea numerelor sub radical* corespunde operației de introducere a întregilor în fracția-exponent:

$$E_{48} = a^5\sqrt[4]{a^3} = a^5 \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{23}{4}} = \sqrt[4]{a^{23}}$$

5°. *Raționalizarea numitorului* unui monom se obține prin amplificarea cu „conjugatul acestuia".

$$E_{49} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^m}} = \frac{\sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}; \quad \sqrt[m]{a^{m-n}}, \text{ este conjugatul lui } \sqrt[m]{a^n}.$$

$$E_{50} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}; \quad \sqrt[3]{2^2} \text{ este conjugatul lui } \sqrt[3]{2}.$$

6°. *Egalitatea numerelor reale.* În general, un număr real poate fi alcătuit dintr-un număr rațional și unul irațional:

$$Z = A + \sqrt{B} \tag{3.42}$$

Egalitatea a două numere de acest fel:

$$A + \sqrt{B} = X + \sqrt{Y} \tag{3.43}$$

implică egalitățile:

$$A = X \quad \text{și} \quad B = Y$$

deoarece A și X aparțin numerelor raționale, iar B și Y celor iraționale, adică unor mulțimi deosebite.

7°. *Valoarea rădăcinii pare.* Rădăcina pătrată dintr-un număr are două valori. Într-adevăr, să presupunem că există relația:

$$x^2 = 9$$

Valorile lui x care verifică această relație sînt două: $x_1 = +3$ și $x_2 = -3$, pentru că:

$$(+3)^2 = (-3)^2 = 9$$

În consecință valoarea unei rădăcini pătrate (de ordinul doi), dedusă dintr-o relație de forma: $x^2 = a$, este:

$$x = \pm \sqrt{a} \tag{3.44}$$

Pentru un radical de ordinul patru, lucrurile se petrec astfel:

$$x^4 = a; \quad x^2 = \pm \sqrt{a} \quad x = \pm \sqrt{\pm a} \tag{3.45}$$

Rădăcinile impare nu pun astfel de probleme și au o singură valoare, pe care o putem lua în considerare:

$$x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$
$$x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$$

3.2.2. Polinomul

1°. *Adunarea şi scăderea* respectă toate legile stabilite anterior.

2°. *Înmulţirea şi puterea* se efectuează, de asemenea, în condiţii cunoscute:

$$E_{51} = (\sqrt[3]{ab^2} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt[3]{a^2b}) = \sqrt[6]{(ab^2)^2 \cdot b^3} + \sqrt[3]{a^3b^3} - \sqrt{ab} -$$

$$- \sqrt[6]{a^3 \cdot (a^2b)^2} = \sqrt[6]{a^2b^7} + ab - \sqrt{ab} - \sqrt[6]{a^7b^2}$$

3°. *Împărţirea* se efectuează după *raţionalizarea numitorului*, care se obţine tot prin amplificarea cu „conjugata sa".

$$E_{52} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{a - b}$$

$$E_{53} = \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a + b}$$

$$E_{54} = \frac{1}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} = \frac{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{a - b}$$

3.2.3. Fracţiile

Operaţiile cu fracţii se efectuează ca şi în cazul celor raţionale. Pentru aducerea lor la acelaşi numitor, se raţionalizează numitorii. Exemple de calcul:

$$E_{55} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y} = \frac{2\sqrt{x}}{x - y}$$

$$E_{56} = \left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}} - a\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right)\left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}} - b\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}} - a\sqrt{\frac{a+b}{ab}}\right)\left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}} - b\sqrt{\frac{a+b}{ab}}\right) =$$

$$= \frac{ab}{a+b} - b - a + ab \cdot \frac{a+b}{ab} = \frac{ab}{a+b}$$

3.2.4. Aplicații

1°. Să se calculeze expresiile:

$A_{44} = \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}$ R. $a\sqrt[12]{a^{11}}$

$A_{45} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6}}}$ R. $\sqrt[30]{a}$

$A_{46} = \sqrt[3]{a\sqrt{a^4\sqrt{a^3}}}$ R. $\sqrt[12]{a^{15}}$

$A_{47} = \dfrac{\left(\dfrac{y^{-1}}{x^{-1}} + \dfrac{x^{-1}}{y^{-1}} + 2\right) : \left(\dfrac{1}{x^{-1}} + \dfrac{1}{y^{-1}}\right)}{x^{-1}+y^{-1}}$ R. 1

2°. Să se raționalizeze numitorii următoarelor fracții:

$A_{48} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}$ R. $\sqrt[12]{a}$

$A_{49} = \dfrac{1}{\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}}$ R. $\dfrac{\sqrt{ab+b}-\sqrt{ab-b}}{2b}$

$A_{50} = \dfrac{1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ R. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

3°. Să se demonstreze identitățile:

$A_{51} \cdot \left(\sqrt{1-a} + \dfrac{1}{\sqrt{1+a}}\right) : \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}\right) = \sqrt{1-a}$

$A_{52} = \dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}} : \sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}} = 1$

$A_{53} = \left(\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \dfrac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right) = \sqrt{x}+\sqrt{y}$

CAPITOLUL 4

EXPRESII TRIGONOMETRICE

4.1. FUNCȚII TRIGONOMETRICE

4.1.1. Măsura unghiurilor (arcurilor)

1°. *Măsura cu unități unghiulare.* Lungimile se măsoară cu unitățile cunoscute: metrul, multiplii și submultiplii săi. Măsurarea constă în compararea lungimii date (L) cu lungimea aleasă ca unitate de măsură (l):

$$\lambda = \frac{L}{l} \Rightarrow L = \lambda l \tag{4.1}$$

Evident că rezultatul va reprezenta un număr real (λ) de unități de măsură (l); dacă unitatea de măsură este metrul, lungimea va fi exprimată prin λ metri.

Tot astfel, un unghi se măsoară prin compararea sa cu un unghi (u) ales ca unitate:

$$\lambda = \frac{U}{u} \Rightarrow U = \lambda u \tag{4.2}$$

Unitatea de măsură a unghiurilor se obține prin divizarea unui cerc, respectiv a unghiului la centru, într-un număr de părți egale. Artileria folosește patru feluri de unități pentru măsura unghiurilor și a arcelor corespunzătoare: *gradul centesimal* (c), obținut prin împărțirea cercului în 400 părți egale; *gradul sexagesimal* (o), prin divizarea în 360 părți egale; *miimea* (‰), prin împărțirea în 6 000 părți egale; *radianul*, care corespunde unui arc de cerc, a cărui lungime este egală cu raza (fig. 4.1). Definirea acestor patru unități de măsură poate fi exprimată sugestiv printr-o relație matematică:

$$1 \text{ cerc} = 400^c = 360^o = 6000‰ = 2\pi \text{ rad}, \tag{4.3}$$

din care rezultă și modul în care se folosesc notațiile corespunzătoare.

Un sfert de cerc se numește cadran și cuprinde:

$$1 \text{ cadran} = 100^g = 90° = 1500\,‰ = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \tag{4.4}$$

Corespondența dintre aceste unități poate fi exprimată și astfel:

$$1^g = \frac{360°}{400} = \frac{6\,000}{400}‰ = \frac{2\pi}{400} \text{ rad}$$

$$1° = \frac{400^g}{360} = \frac{6\,000}{360}‰ = \frac{2\pi}{360} \text{ rad}$$

$$1‰ = \frac{400^g}{6\,000} = \frac{360°}{6\,000} = \frac{2\pi}{6\,000} \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{400^g}{2\pi} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{6\,000}{2\pi}‰ \tag{4.5}$$

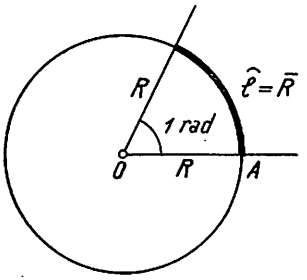


Fig. 4.1

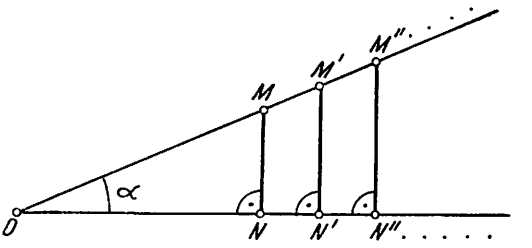


Fig. 4.2

Înțelegînd sensul acestor relații de transformare a unităților de măsură, calculele sînt simple. Astfel:

$$45° = \frac{400}{360} \cdot 45 = 50^g$$

$$45° = \frac{6\,000}{360} \cdot 45 = 750‰$$

$$45° = \frac{2\pi}{360} \cdot 45 = \frac{\pi}{4} \text{rad}.$$

2°. *Măsura cu rapoarte de lungimi.* Unghiurile se pot măsura și cu ajutorul lungimilor, datorită proprietăților triunghiurilor asemenea (fig. 4.2) Astfel:

Fie M, M', M''...diferite puncte luate pe una din laturile unghiului α (alfa), iar N, N', N''...picioarele perpendicularelor coborîte pe cealaltă latură.

Triunghiurile dreptunghice asemenea permit a scrie relaţiile de proporţionalitate:

$$\sin \alpha = \frac{MN}{OM} = \frac{M'N'}{OM'} = \frac{M''N''}{OM''} = \ldots \tag{4.6}$$

$$\cos \alpha = \frac{ON}{OM} = \frac{ON'}{OM'} = \frac{ON''}{OM''} = \ldots \tag{4.7}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MN}{ON} = \frac{M'N'}{ON'} = \frac{M''N''}{ON''} = \ldots \tag{4.8}$$

Cele trei tipuri de rapoarte au fost denumite *sinus*, *cosinus* şi *tangentă*, spre a fi recunoscute. Evident că ele îşi schimbă valoarea atunci cînd se schimbă mărimea unghiului. Deci, ele corespund ca valori unui anumit unghi şi pot servi la măsurarea lui. În acest scop se întocmesc tabele, care asigură corespondenţa dintre unghi şi rapoartele respective, numite funcţii trigonometrice, ca în tabelul următor:

$\alpha°$	sinus	cosinus	tangenta
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
20°	0,342	0,940	0,364
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
30°	0,500	0,866	0,577
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
40°	0,643	0,766	0,839
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Astfel de tabele trigonometrice sînt cuprinse în toate memoratoarele matematice, tehnice, table de trageri etc. şi permit stabilirea măsurii unui unghi, dacă se cunoaşte una din funcţiile trigonometrice, determinată prin raportul a două lungimi.

În afara acestor trei funcții fundamentale, se pot defini încă trei funcții auxiliare, prin inversarea valorilor:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{OM}{MN} \text{ (cosecanta)} \tag{4.9}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{OM}{ON} \text{ (secanta)} \tag{4.10}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{ON}{MN} \text{ (cotangenta)} \tag{4.11}$$

Utilizarea lor este sporadică și vom căuta să le evităm în expunere și aplicații, deoarece măresc artificial numărul de identități sau formule trigonometrice.

4.1.2. Relații fundamentale

Interdependența funcțiilor trigonometrice ale aceluiași unghi (α), se stabilește pe baza definițiilor date (fig. 4.2). Se observă că:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{MN^2}{OM^2} + \frac{ON^2}{OM^2} = \frac{OM^2}{OM^2} = 1, \tag{4.12}$$

deoarece în triunghiul dreptunghic OMN, teorema lui Pitagora se exprimă astfel:

$$OM^2 = MN^2 + ON^2$$

De asemenea

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{MN/OM}{OM/ON} = \frac{MN}{ON} \tag{4.13}$$

Relațiile stabilite (4.12) și (4.13) sînt fundamentale și permit deducerea oricăreia din funcții dacă se cunoaște una din ele.

Spre exemplu, că considerăm că se cunoaște sin și se cer celelalte două. Din prima relație se obține:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \text{ și } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \tag{4.14}$$

Dacă se cunoaște cos, rezultă:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \text{ și } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \tag{4.15}$$

Dacă se dă tgα, problema se rezolvă printr-un artificiu simplu, care evită căutarea sau memorarea formulelor. Se împarte prima relație (4.12) cu $\cos^2\alpha$:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \tag{4.16}$$

iar

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \tag{4.17}$$

Iată că, pentru a opera cu aceste funcții, este necesar și suficient a reține numai relațiile fundamentale și artificiul de calcul asociat.

4.1.3. Variația funcțiilor trigonometrice

1°. *Cercul trigonometric.* Pentru a avea o imagine mai clară a funcțiilor trigonometrice, se folosește un cerc a cărui rază se consideră egală cu unitatea ($R=1$), ca în figura 4.3. Rezultă:

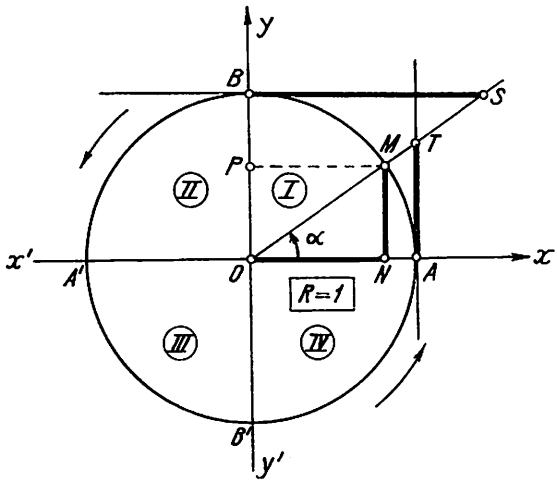


Fig. 4.3

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{MN}{OM} = \frac{MN}{1} = MN \\
\cos\alpha &= \frac{ON}{OM} = \frac{ON}{1} = ON \\
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{MN}{ON} = \frac{TA}{OA} = \frac{TA}{1} = TA
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Pentru că la fel de sugestiv apare și funcția auxiliară a cotangentei, o vom stabili în condiții similare:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{ON}{MN} = \frac{MP}{OP} = \frac{SB}{OB} = \frac{SB}{1} = SB \qquad (4.19)$$

Iată că, în cercul trigonometric, funcțiile trigonometrice au ca imagini segmente de dreaptă, care pot fi urmărite ușor ca lungimi, nu ca rapoarte.

Pentru a da și sens acestor valori, se folosește un sistem de axe cartezian *xoy*, în care se consideră:

— semiaxele pozitive *ox* și *oy*;

— semiaxele negative *ox'*, *oy'*;

— cele patru sferturi de cerc, numite cadrane și numerotate în sensul invers acelor de ceasornic (sens trigonometric)

— cadranul I (*xoy*)
— cadranul II (*yox'*)
— cadranul III(*x'oy'*)
— cadranul IV (*y'ox*)

Este de reținut faptul că valorile lui $\sin\alpha = MN$ de deasupra axei *xx'* sînt pozitive, iar dedesubt negative. Valorile lui $\cos\alpha = ON$ de la dreapta axei *yy'* sînt pozitive, iar cele de la stînga, negative.

Arcurile au sens pozitiv cînd sînt parcurse în sensul trigonometric definit și negative cînd sînt parcurse în sens contrar.

Aceleași considerații sînt valabile și pentru tangentă și cotangentă.

Pentru un unghi oarecare (α), după ce este construit în cercul trigonometric, se obțin imediat punctele *M*, *N*, *T*, *S*, astfel încît măsurile segmentelor *MN*, *ON*, *AT*, *BS*, dau direct valorile funcțiilor trigonometrice.

Este mai dificil a stabili valorile acestor funcții în cazuri particulare (limită), cînd —spre exemplu: $\alpha = 0°$, 90°, 180°, 270°. În acest scop, se deplasează în minte punctul *M* pe cerc și se urmărește segmentul reprezentativ al funcției studiate, stabilind imaginea sa la limită.

2°. *Variația funcțiilor*. Să procedăm ca mai sus pentru funcția sinus:

— Cînd *M* se apropie de *A*, respectiv cînd unghiul α se apropie de zero (tinde către zero), segmentul *MN* se micșorează, apropiindu-se de zero ($M \to N \to A$); deci: $\sin 0° = 0$.

— Cînd *M* se apropie de *B*, iar unghiul tinde spre 90°, segmentul *MN* crește și tinde către $OB = R = 1$; deci: $\sin 90° = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

— Cînd *M* se apropie de *A'*, *MN* tinde către zero, iar unghiul α către 180°: $\sin 180° = \sin\pi = 0$.

— Cînd M se apropie de B', unghiul α tinde către 270°, iar segmentul MN către $OB' = -R = -1$:

$$\sin 270° = \sin \frac{3\pi}{2} = -1.$$

— Revenind în A, unghiul (α) ajunge la 360°, iar segmentul MN revine la zero: $\sin 360° = \sin 2\pi = 0$.

Cu aceste date s-a creat o funcție, al cărui grafic este sintetizat în tabelul următor:

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	1	0	—1	0

Într-un sistem de axe carteziene, reprezentarea grafică a acestei funcții, arată ca în figura 4.4.

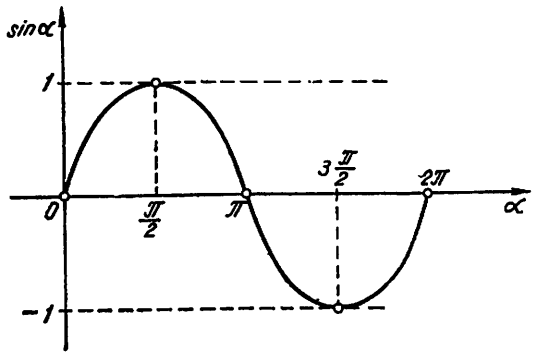


Fig. 4.4

Se observă că funcția este redată ca o curbă, deși în tabel sînt cuprinse numai cele cinci puncte.

Aceasta se datorește faptului că pentru fiecare valoare a lui $\alpha \in [0,2\pi]$ corespunde cîte o valoare pentru $\sin \alpha = f(\alpha)$, ce ar putea fi trecută în tabelul de mai sus, pe baza tabelei trigonometrice. O astfel de funcție, spre deosebire de cazul general cunoscut (§ 1.3.3), este continuă și cuprinde o infinitate de perechi de valori asociate prin relația de corespondență dintre α și $\sin \alpha$ și se numește *sinusoidă*.

Procedînd în acelaşi fel, cu un raţionament similar, se poate întocmi graficul funcţiei cosinus pentru valorile importante ale lui α.

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1

Reprezentarea sa grafică este cea din figura 4.5 şi se numeşte *cosinusoidă*.

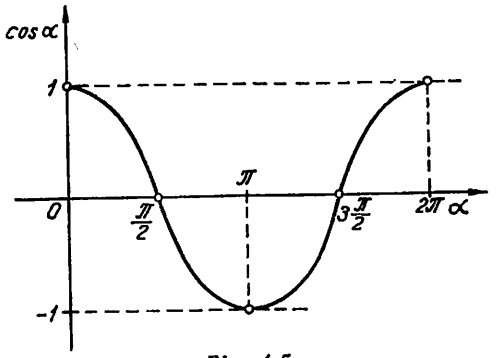


Fig. 4.5

Să studiem acum variaţia tangentei cu ajutorul aceleiaşi figuri (4.3):

— Cînd M se apropie de A ($\alpha \to 0$), segmentul TA se micşorează şi tinde către zero: $\operatorname{tg} 0 = 0$.

— Cînd M se apropie de B, unghiul α se apropie de $\frac{\pi}{2}$, iar punctul T se duce către $+\infty$: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = +\infty$; dacă M trece puţin de B, unghiul α fiind aproape de 90°, dar cu puţin mai mare, punctul T trece în partea opusă, dar tot la infinit: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = -\infty$. Rezultă că pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha$ poate avea două valori ($\pm\infty$), opuse şi la intervale infinite. Fenomenul este curios şi se explică matematic prin analiza descriptivă făcută, în sensul că trebuie să ne ajutăm de un unghi extrem de mic ca valoare (ε, epsilon), cu ajutorul căruia vom exprima cele două cazuri vecine:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = +\infty \text{ iar } : \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\infty$$

Se spune că tangenta este *discontinuă* pentru arcul $\frac{\pi}{2}$, deoarece sare

de la o valoare $(+\infty)$ la alta $(-\infty)$, atunci cînd unghiul trece prin valoarea critică.

— Cînd M se apropie de A' $(\alpha \to \pi)$, punctul T tinde către A, iar: $\operatorname{tg} \alpha = 0$.

— Cînd M se apropie de B' $\left(\alpha \to \frac{3\pi}{2}\right)$, punctul T face un salt ca mai sus:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right) = +\infty \text{ și } \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\infty.$$

În fine, cînd M se apropie din nou de A $(\alpha \to 2\pi)$, T tinde către A: $\operatorname{tg} 2\pi = 0$.

Graficul funcției tg α este următorul:

α	0	$\pi/2$		π	$3\pi/2$		2π
		$\frac{\pi}{2} - \varepsilon$	$\frac{\pi}{2} + \varepsilon$		$\frac{3\pi}{2} - \varepsilon$	$\frac{3\pi}{2} + \varepsilon$	
tg α	0	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$	0

Variația acestei funcții, numită *tangentoidă* este reprezentată în figura 4.6.

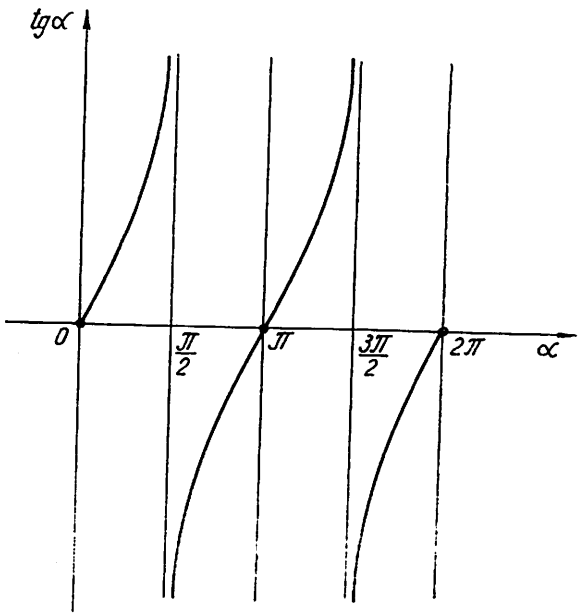


Fig. 4.6

În mod similar se poate stabili și graficul cotangentei, a cărei variație se numește *cotangentoidă*; ea este infinită pentru : $\alpha = \{0, \pi\}$

4.1.4. Reducerea funcțiilor la primul cadran

Pentru a evalua cu ușurință valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor oarecare, mai mici sau mai mari de 2π, se procedează la reducerea lor la funcțiile primului cadran. În acest scop, nu vom stabili formule sau tabele, ci vom învăța metoda generală de analiză a problemei, prin exemple simple și edificatoare.

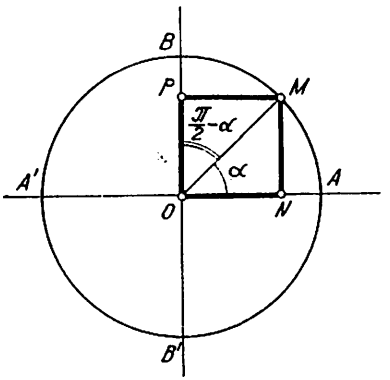


Fig.4.7

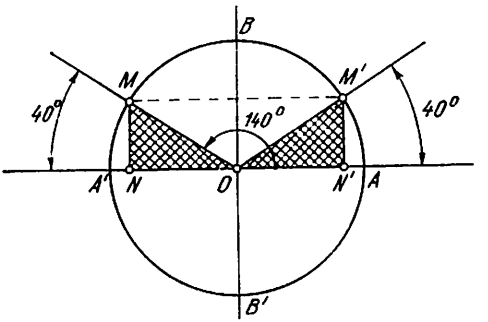


Fig. 4.8

1°. *Funcțiile arcurile complementare.* Folosind cercul trigonometric din figura 4.7, cu triunghiurile egale ($\Delta\, ONM = \Delta\, OPM$), rezultă:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = PM = ON = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = PO = MN = \sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{PM}{PO} = \frac{ON}{MN} = \operatorname{cotg}\alpha \qquad (4.20)$$

2°. *Funcțiile arcurilor din cadrane diferite.* Vom stabili funcțiile trigonometrice ale unghiului $\alpha = 1940°$, cu ajutorul figurii 4.8 (E_1):

- Se împarte la perioadă (360°) și se obține:

$$1\,940° = 5 \cdot 360° + 140°$$

● Se reportează pe cercul trigonometric punctul M, corespunzător unghiului de 140° și simetricul său M', din primul cadran încît:

$$\Delta\, OMN = \Delta\, OM'N'.$$

Deci:

$$\sin\ 1\,940° = \sin\ 140° = MN = M'N' = \sin\ 40°$$

$$\cos\ 1\,940° = \cos\ 140° = ON = -ON' = -\cos\ 40°$$

$$\operatorname{tg}\ 1\,940° = \operatorname{tg}\ 140° = -\operatorname{tg}\ 40°$$

Repetînd raționamentul stabilit, vom calcula funcțiile arcului $\alpha = 2\,750°$, cu ajutorul figurii 4.9 (E 2):

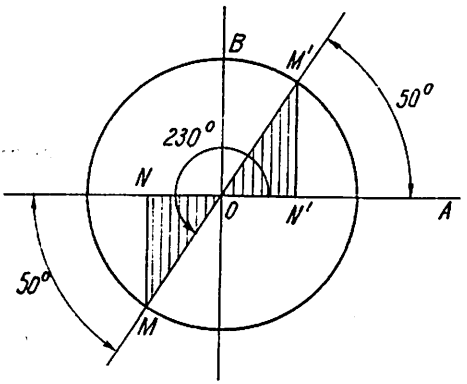


Fig. 4.9

● Se împarte la perioadă (360°) și se obține:

$$2\,750° = 7 \cdot 360° + 230°$$

● Se reportează punctul M pe cercul trigonometric, corespunzător unghiului de 230° și simetricul său M' din primul cadran, astfel încît:

$$\Delta\, OMN = \Delta\, OM'N'.$$

Deci:

$$\sin\ 2\,750° = \sin\ 230° = MN = -M'N' = -\sin\ 50°$$

$$\cos\ 2\,750° = \cos\ 230° = ON = -ON' = -\cos\ 50°$$

$$\operatorname{tg}\ 2\,750° = \operatorname{tg}\ 50°$$

În fine, la fel se procedează și cînd punctul M aparține cadranului IV, ca în cazul următor. Se cer funcțiile trigonometrice ale lui $\alpha = 3\,910°$ (fig.4.10 — E 3):

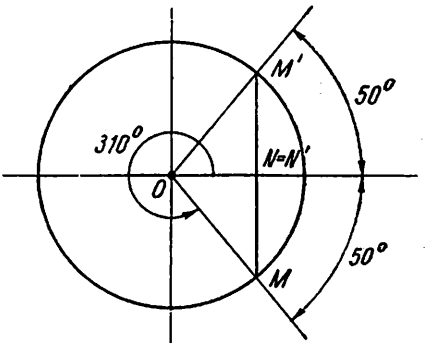


Fig. 4.10

● Se exprimă: $3\,910° = 10 \cdot 360 + 310°$

● Se reportează M pe cercul trigonometric, prin unghiul 310° și simetricul său M' din primul cadran, cînd:

$$\Delta\, OMN = \Delta\, OM'N'.$$

Deci:

$$\sin\ 3\,910° = \sin 310° = MN = -M'N' = -[\sin\ 50°]$$

$$\cos\ 3\,910° = \cos\ 310° = ON = ON' = \cos\ 50°$$

$$\operatorname{tg}\ 3\,910° = -\operatorname{tg}\ 50°$$

3°. *Relații de reducere.* Exemplele de calcul conturează o metodă generală, care poate elimina formule de tipul celor ce pot fi sintetizate astfel:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha;\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha;\ \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha;\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha;\ \operatorname{tg}(\pi + [\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad (4.21)$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

În ultimele relații, arcul $(-\alpha)$ este negativ, adică se obține prin parcurgerea cercului în sens invers celui trigonometric.

4.1.5. Valorile arcului (unghiului)

Funcțiile trigonometrice au ca variabilă independentă (argument) arcul (α) și asigură pentru fiecare valoare a acestuia o singură valoare funcției f (α), așa cum s-a stabilit în graficele lor. În consecință, relațiile de definiție sînt funcții:

$$x = f(\alpha), \text{ respectiv: } x = \sin\alpha;\ x = \cos\alpha \text{ sau } x = \operatorname{tg}\alpha \qquad (4.22)$$

Să studiem relația inversă, care cuprinde arcul ca necunoscută:

$$\sin x = a;\ \cos x = b;\ \operatorname{tg} x = c$$

sau:

$$x = \operatorname{arc}\sin a;\ x = \operatorname{arc}\cos b;\ x = \operatorname{arc}\operatorname{tg} c \qquad (4.23)$$

Să vedem dacă îndeplinește condițiile funcției.

1°. *Relația arcsinus*: $x = \operatorname{Arc}\sin a$ sau: $\sin x = a$.

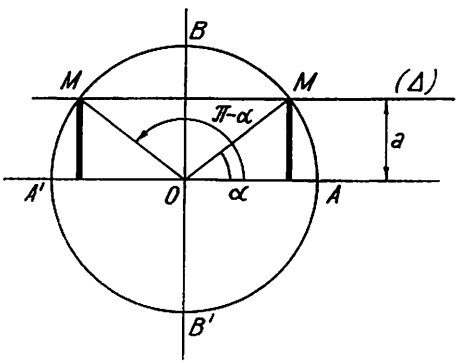


Fig. 4.11

Cunoscînd valoarea a a sinusului, construim în cercul trigonometric (fig. 4.11) paralela $\Delta \parallel AA'$ la distanța respectivă (a). Ea intersectează cercul în două puncte (M, M') simetrice, cărora le corespund două unghiuri cu sinusul dat (a):

$$x_1 = \alpha \text{ și } x_2 = \pi - \alpha$$

Dacă ținem seama și de perioada 2π, mulțimea valorilor care satisfac relația este următoarea:

$$x_1 = 2k\pi + \alpha$$

$$x_2 = 2k\pi + (\pi - \alpha) = (2k+1)\pi - \alpha;\ k \in Z \qquad (4.24)$$

Deci, pentru o valoare dată variabilei independente a rezultă o infinitate de valori pentru cea dependentă (x), iar relația respectivă nu satisface condiția de definiție a unei funcții.

Într-adevăr, pentru a exista funcția (4.22), trebuie ca pentru o valoare dată lui "a" să corespundă numai o valoare pentru x. Acest lucru este posibil numai pe parcursul unei jumătăți de perioadă, între valorile sale extreme $[-1, +1]$, cînd:

$$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \text{ sau } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ etc.}$$

Reținem că funcția inversă are sens numai pe domeniul și codomeniul stabilit mai sus.

Spre a face o distincție între funcția inversă și mulțimea valorilor arcelor pentru care valoarea funcției sinus este un număr dat, se scrie astfel:

$$x = \text{Arc sin } a \Rightarrow \text{mulțimea lui } x \text{ pentru } a \text{ dat.}$$

$$x = \text{arc sin } a \Rightarrow \text{funcția } x(a) \text{ pentru } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

În aceste condiții, rezultă:

$$\text{Arc sin } x_1 = 2k\pi + \alpha = 2k\pi + \text{arc sin } a$$

și:

$$\text{Arc sin } x_2 = (2k+1)\pi - \alpha = (2k+1)\pi - \text{arc sin } a \qquad (4.25)$$

unde:

$$\alpha = \text{arc sin } a \text{ și } k \in Z.$$

E x e m p l e : (E_4) Să se stabilească mulțimea valorilor arcelor x, care au sinusul egal cu 1:

$$\sin x = 1 = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ și } x_2 = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}\ ;\ (k \in Z)$$

(E_5) Să se stabilească valoarea funcției inverse $x = \text{arc sin } a$; $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pentru $a = 1$:

$$x = \frac{\pi}{2}$$

Această valoare se poate obține din soluțiile precedente, pentru $k = 0$:

$$x_1 = \frac{\pi}{2}\,;\; x_2 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

2°. *Relația arc cosinus*

Fie: $x = \text{Arc cos } b$ sau: $\cos x = b$ (4.26)

Paralela $\Delta \parallel BB'$, la distanța b intersectează cercul trigonometric în două puncte simetrice (M, M'), cărora le corespund două unghiuri cu cosinusul dat b (fig. 4.12):

$$x_1 = \alpha \text{ și } x_2 = -\alpha$$

Dacă ținem seama și de perioada 2π, mulțimea valorilor care satisfac relația este:

$$x_1 = 2k\pi + \alpha \text{ și } x_2 = 2k\pi - \alpha$$

sau:

$$x_{1,2} = 2k\pi \pm \alpha;\; (k \in Z) \quad (4.27)$$

Ca și în cazul precedent, pentru o valoare dată variabilei independente b, rezultă o infinitate de valori pentru variabila dependentă x, iar relația nu este funcție.

Funcția inversă $x = \text{arc cos } b$ poate exista în următoarele condiții: pentru domeniul $b \in [-1, 1]$ și codomeniul $x \in [0, \pi]$ sau $x \in [\pi, 2\pi]$ etc.

Deci: $\text{Arc cos } x = 2k\pi \pm \alpha = 2k\pi \pm \text{arc cos } b$ (4.28)

unde:

$$\alpha = \text{arc cos } b \text{ și } k \in Z.$$

Exemple: (E_6) Să se stabilească mulțimea valorilor arcelor x, care au cosinusul egal cu zero:

$$\cos x = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$x_{1,2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \; (k \in Z)$$

(E_7). Să se stabilească valoarea funcției inverse $x = \text{arc cos } b$; $x \in [0, \pi]$, pentru $b = 0$:

$$x = \frac{\pi}{2}$$

Valoarea aceasta este un caz particular al celorlalte și se obține pentru $k = 0$:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \in [0, \pi].$$

3°. *Relația arc-tangentă*

Fie: $x = \text{Arc tg } c$ sau $\text{tg } x = c$ (4.29)

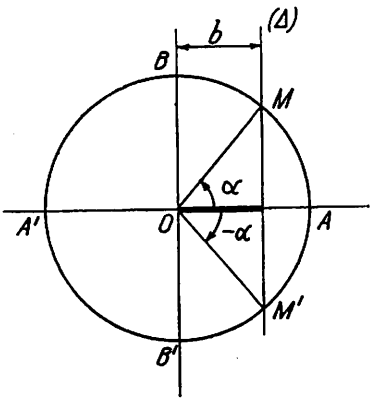


Fig. 4.12

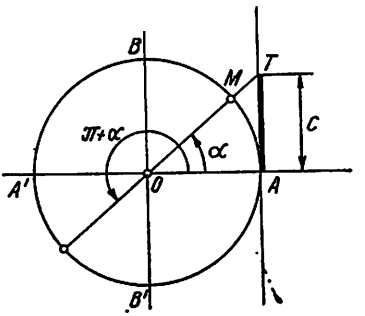


Fig. 4.13

Punctul T, de la distanța $TA = c$, unit cu centru O, intersectează cercul trigonometric în două puncte simetrice (M, M'), cărora le corespund două unghiuri cu tangenta dată c (fig. 4.13):

$$x_1 = \alpha \text{ și } x_2 = \pi + \alpha \tag{4.30}$$

Folosind și perioada tangentei (π), rezultă mulțimea valorilor arcelor care satisfac relația;

$$x_1 = k\pi + \alpha \text{ și } x_2 = k\pi + \pi + \alpha = (k+1)\pi + \alpha = k'\pi + \alpha$$

sau:

$$x = k\pi + \alpha \tag{4.31}$$

Funcția inversă $x = \text{arc tg } c$ poate exista pentru domeniul $c \in (-\infty, \infty)$ și codomeniul $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sau $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ etc.

Deci:

$$\text{Arc tg } x = k\pi + \alpha = k\pi + \text{arc tg } c \qquad (4.32)$$

unde:

$$\alpha = \text{arc tg } c \text{ și } k \in Z$$

E x e m p l e : (E_8). Să se stabilească mulțimea valorilor arcelor x, care au tangenta egală cu zero:

$$\text{tg } x = 0 = \text{tg } 0$$

$$x = k\pi + 0 = k\pi; \quad (k \in Z)$$

(E_9). Să se stabilească valoarea funcției inverse $x = \text{arc tg } c$;

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ pentru } c = 0 : \Big|$$

$$x = 0$$

Ca valoare particulară a exercițiului precedent, se obține pentru $k=0$.

4.1.6. Valori remarcabile ale funcțiilor trigonometrice

În graficele funcțiilor trigonometrice, le-am stabilit valorile pentru arcele: 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ și 2π. În cele ce urmează vom determina și alte valori ale acestora, cu largă utilizare și anume pentru arcele: $30° = \frac{\pi}{6}$; $45° = \frac{\pi}{4}$ și $60° = \frac{\pi}{3}$.

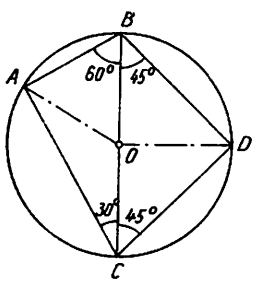


Fig. 4.14

În acest scop, figura 4.14, în care $AB = AO = OB = BC/2$, ne permite să scrim teorema lui Pitagora:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} =$$

$$= \sqrt{BC^2 - \frac{BC^2}{4}} = BC\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 = 2\,BD^2 \Rightarrow BD = CD =$$

$$= \frac{BC}{\sqrt{2}} = BC\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rezultă:

$$\sin 30° = \frac{AB}{BC} = \frac{BC/2}{BC} = \frac{1}{2} = \cos (90° - 30°) = \cos 60°$$

$$\sin 60° = \frac{AC}{BC} = \frac{BC\sqrt{3}/2}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos (90° - 60°) = \sin 30°$$

$$\sin 45° = \frac{BD}{BC} = \frac{BC\sqrt{2}/2}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos (90° - 45°) = \cos 45°$$

Centralizate, aceste valori apar ca în următorul tabel:

$\sin 30°$	$\sin 45°$	$\sin 60°$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 60°$	$\cos 45°$	$\cos 30°$

(4.33)

Nu s-a extins tabelul și pentru valorile tangentei, cu intenția de a nu încărca memoria cu date ce se obțin ușor pe baza acestora:

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{cotg} 60°$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1 = \operatorname{cotg} 45°$$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} = \operatorname{cotg} 30° \qquad (4.34)$$

4.1.7. Cercul topogeodezic

Cercul trigonometric are o origine și un sens, alese în mod arbitrar, deoarece acesta este fictiv și servește numai la reprezentarea sugestivă a funcțiilor trigonometrice.

Atunci cînd măsurătorile de unghiuri se fac în teren, reperele și direcțiile de referință trebuie legate de globul pămîntesc. Este știut că prin orice punct se poate trasa o paralelă și un meridian, cercuri de diametre foarte mari, care, pe porțiuni mici echivalează cu două drepte. Meridianul trece prin polii pămîntului și se determină cu ajutorul busolei; rezultă că oricărui punct din teren i se pot asocia două

axe: o axă NS, determinată cu acul magnetic și o axă EV, perpendiculară pe aceasta.

Iată deci, că sistemul de axe cartezian în topogeodezie este legat de punct; unui cerc cu centrul într-un atare punct, i se afectează sensul invers cercului trigonometric, ca în figura 4.15.

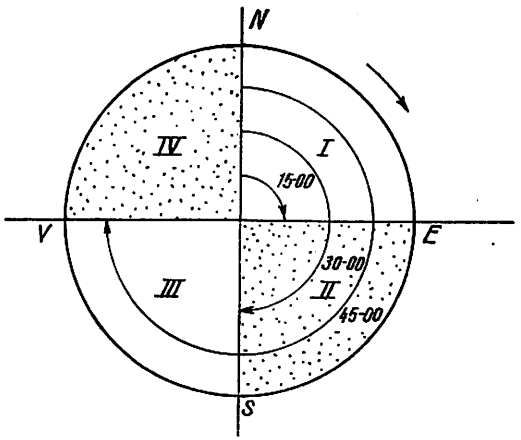


Fig. 4.15

Folosind ca diviziuni miimile, cele patru cadrane a cîte 1 500‰ vor fi repartizate astfel: cadranul I = N E; cadranul II = S E; cadranul III = S V și cadranul IV = N V.

Pentru a elimina în scriere simbolul miimilor (‰), acestea se scriu prin divizarea numărului în două părți, ca în exemplele următoare: 100 ‰ = 1-00; 1 000 ‰ = 10-00; 4 500 ‰ = 45-00;

4.2. IDENTITĂȚI TRIGONOMETRICE

Relațiile echivalente pentru orice valori ale arcurilor constituie identități. Ele servesc la simplificarea formulelor prin operații algebrice și trigonometrice, ca și la simplificarea calculelor, prin folosirea unor formule.

4.2.1. Proiecții

Considerăm segmentul (AB) pe care îl proiectăm pe dreapta (Δ) în A_1B_1; proiecția se obține prin coborîrea perpendicularelor AA_1, BB_1 (fig. 4.16).

Paralela din A la (Δ) formează triunghiul dreptunghic ACB, în care se poate scrie:

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} \text{ sau: } AC = AB \cos \alpha$$

Reţinem:

$$A_1B_1 = AC = AB \cos \alpha \tag{4.35}$$

adică: proiecţia unui segment pe o dreaptă este egal cu segmentul respectiv corectat (prin înmulţire) cu cosinusul unghiului dintre ele.

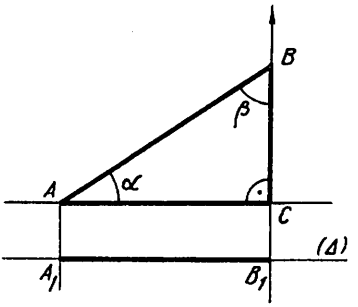


Fig. 4.16

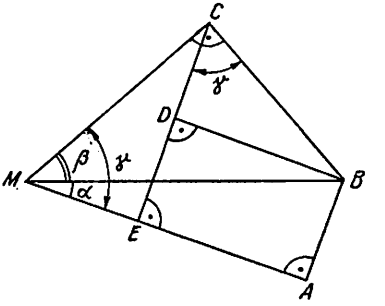


Fig. 4.17

Evident că :

$$BC = AB \cos \beta$$

$$\text{dar: } \cos \beta = \sin (90° - \beta) = \sin \alpha$$

$$\text{iar : } BC = AB \sin \alpha \tag{4.36}$$

Pentru a înţelege mai bine sensul folosirii acestor relaţii de proiecţie, să facem o aplicaţie (fig. 4.17).

Un unghi γ (gama) este format din unghiurile (alfa) şi (beta):

$$\gamma = \alpha + \beta$$

Luăm un punct arbitrar B pe latura mijlocie şi coborîm perpendicularele pe celelalte două laturi în A şi C.

Paralela din B la MA este BD. Se observă că:

$$\widehat{MCE} = 90° - \gamma, \text{ iar: } ECB = 90° - MCE = 90° - (90° - \gamma) = \gamma$$

Avînd stabilite valorile unghiurilor tuturor laturilor construite, să efectuăm două proiecţii ale segmentelor AB şi BC pe direcţiile CE şi MA.

Proiecția pe CE permite să scriem:

$$CD = BC \cos\gamma;\ DE = AB \Rightarrow CE = BC \cos\gamma + AB$$

dar:

$$CE = MC \sin\gamma = (MB \cos\beta) \sin\gamma$$
$$BC = MB \sin\beta$$
$$AB = MB \sin\alpha$$

Deci:

$$MB \cos\beta \sin\gamma = MB \sin\beta \cos\gamma + MB \sin\alpha$$

sau:

$$\sin\alpha = \sin(\gamma - \beta) = \sin\gamma \cos\beta - \sin\beta \cos\gamma \qquad (4.37)$$

Proiecția pe MA se face astfel:

$$EA = BC \sin\gamma\ ;\ ME = MC \cos\gamma\ ;\ MA = MB \cos\alpha$$

dar:

$$MA = ME + EA$$
$$BC = MB \sin\beta$$
$$MC = MB \cos\beta$$

Deci:

$$MB \cos\alpha = MB \cos\beta \cos\gamma + MB \sin\beta \sin\gamma$$

sau:

$$\cos\alpha = \cos(\gamma - \beta) = \cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \qquad (4.38)$$

4.2.2. Funcțiile sumelor de arcuri

Aplicația precedentă și altele similare, care rămîn a fi făcute de cititor, conduc direct la stabilirea unor identități uzuale:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha \qquad (4.39)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \qquad (4.40)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \qquad (4.41)$$

De fapt aceste relații se deduc ușor din precedentele (4.37) și (4.38).

Astfel:

Relația (4.39) pentru alte notații, este:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha,$$

pe care o regăsim mai sus; dacă dăm lui β valoarea $(-\beta)$, rezultă:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos(-\beta) - \sin(-\beta) \cos\alpha =$$

$$= \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha,$$

deoarece:

$$\sin(-\beta) = -\sin\beta$$

$$\cos(-\beta) = \cos\beta,$$

conform relației (4.21) sau a situației ușor de imaginat în cercul trigonometric.

Aceste două formule, strînse într-una singură, — cu semnele $(\pm)$ — folosite așa cum s-a arătat anterior, reprezintă tocmai prima identitate, (4.39).

Relația (4.40) poate fi scrisă astfel:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\beta \sin\alpha$$

Înlocuind pe β cu $(-\beta)$, se obține:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta) =$$

$$= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

Aceste două relații, întrunite, reprezintă identitatea a doua (4.40).

Pentru $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ se procedează astfel:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$$

Se simplifică cu $(\cos\alpha \cos\beta)$:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

iar prin înlocuirea lui β cu $(-\beta)$:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

deoarece: $\operatorname{tg}(-\beta) = -\operatorname{tg}\beta$

Observație: Nu s-au stabilit formule și pentru funcțiile auxiliare, în baza principiului enunțat la început. Ele pot fi deduse cu ușurință. De exemplu, pentru a obține cotg $(\alpha - \beta)$, se va porni de la:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

în care se înlocuiește: $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{cotg} x}$

$$\text{Deci: } \frac{1}{\operatorname{cotg}(\alpha - \beta)} = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} - \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\beta}}{1 + \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta}} = \frac{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\alpha + 1}$$

sau:

$$\operatorname{cotg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\alpha + 1}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha} \tag{4.42}$$

Aplicații. Pentru a calcula funcția unei sume de trei sau mai multe arcuri, se dezvoltă calculele progresiv, pe baza identităților stabilite. Astfel:

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin[(\alpha + \beta) + \gamma] =$$

$$= \sin(\alpha + \beta)\cos\gamma + \sin\gamma\cos(\alpha + \beta) =$$

$$= (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)\cos\gamma + \sin\gamma(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\cos\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

Pentru cosinus se procedează la fel, iar pentru tangentă după cum urmează:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \operatorname{tg}[(\alpha + \beta) + \gamma] =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\gamma} =$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\cdot\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha}$$

Reţinem următoarele formule:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \Sigma \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma - \pi \sin\alpha \tag{4.43}$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \pi \cos\alpha - \Sigma \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma \tag{4.44}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\Sigma \operatorname{tg}\alpha - \pi \operatorname{tg}\alpha}{1 - \Sigma \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \tag{4.45}$$

4.2.3. Funcţiile multiplilor şi submultiplilor de arcuri

În cazul în care se operează cu unghiuri egale, identităţile de mai sus iau forme mai simple.

Spre exemplu, dacă: $\alpha = \beta$,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha$$

devine:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha\cos\alpha$$

Procedînd la fel şi cu celelalte se obţin formulele:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 = \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \tag{4.48}$$

În cazul sumei a trei arcuri, dacă se acceptă $\alpha = \beta = \gamma$, una din relaţiile de forma:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \Sigma \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma - \pi \sin\alpha$$

devine:

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \Sigma \sin\alpha \cos^2\alpha - \sin^3\alpha = \\ &= \Sigma \sin\alpha (1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = \\ &= \Sigma \sin\alpha - \Sigma \sin^3\alpha - \sin^3\alpha = \\ &= 3\sin\alpha - 3\sin^3\alpha - \sin^3\alpha\end{aligned}$$

sau:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

În mod similar se stabilesc identitățile:

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha\,(3 - 4\sin^2\alpha) \tag{4.49}$$

$$\cos 3\alpha = \cos\alpha\,(4\cos^2\alpha - 3) \tag{4.50}$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} \tag{4.51}$$

Observație: Se cunoaște din capitolul precedent importanța metodelor de a transforma expresiile în produse (factori).

Subliniem faptul că această problemă se folosește frecvent, pe baza primelor două identități (4.39) și (4.40).

Astfel:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \tag{4.52}$$

iar:

și:

$$\left.\begin{aligned} 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \text{ devine: } 1 + \cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2} \\ 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \text{ devine: } 1 - \cos x &= 2\sin^2\frac{x}{2} \end{aligned}\right\} \tag{4.53}$$

E x e m p l e: Să se simplifice fracțiile:

$$E_{10} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$E_{11} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{x}{2} \tag{4.54}$$

$$E_{12} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$$

Relaţiile (4.52), (4.53) şi (4.54) permit a se scrie identităţi privind funcţiile cu jumătate de arc:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \tag{4.55}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \tag{4.56}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \tag{4.57}$$

De asemenea, se pot stabili valorile funcţiilor în raport cu tangenta jumătăţii de arc $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Pentru simplificarea formulelor, se notează:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t.$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \tag{4.58}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{4.59}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1-t^2} \tag{4.60}$$

Aceste formule se demonstrează uşor pe baza relaţiilor precedente, dar se verifică şi mai uşor.

Exemplu:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

4.2.4. Transformarea sumelor în produse

Fie p și q două arce oarecare, pe care le exprimăm astfel:

$$p = \alpha + \beta$$

$$q = \alpha - \beta$$

Adunînd membru cu membru și apoi scăzînd, se obține:

$$p + q = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{p+q}{2}$$

$$p - q = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{p-q}{2}$$

Să calculăm suma:

$$\sin p + \sin q = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha =$$

$$= 2\sin\alpha\cos\beta = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

În același mod se raționează și pentru cosinus. Astfel de formule sînt practice în calculul algebric și au următoarele forme:

$$\sin p \pm \sin q = 2\sin\frac{p \pm q}{2}\cos\frac{p \mp q}{2} \tag{4.61}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \tag{4.62}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \tag{4.63}$$

$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q} \tag{4.64}$$

Ultima relație se obține direct:

$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} \pm \frac{\sin q}{\cos q} =$$

$$= \frac{\sin p\cos q \pm \sin q\cos p}{\cos p\cos q} = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p\cos q}$$

Aceste formule pot fi folosite și în sens invers, în scopul transformării unui produs în sumă:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)] \tag{4.65}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \tag{4.66}$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)] \tag{4.67}$$

4.2.5. Aplicații

1°. Se cunosc funcțiile arcelor din primul cadran:

$$\sin\alpha = \frac{1}{2};\ \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \operatorname{tg}\gamma = 1.$$

Să se calculeze valorile următoarelor funcții:

$A_1 = \cos(\beta \pm \gamma)$ R. 0 ; 1

$A_2 = \sin(\alpha+\beta\pm\gamma)$ R. $\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}$

2°. Fie α, β, γ unghiurile unui triunghi ($\alpha+\beta+\gamma=\pi$) Să se demonstreze relațiile:

$$A_3 = \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$

$$A_4 = \operatorname{cotg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\beta\cdot\operatorname{cotg}\gamma+\operatorname{cotg}\gamma\cdot\operatorname{cotg}\alpha = 1$$

R. Se folosește relația (4.51) în care $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\operatorname{tg}\pi=0$, cînd numărătorul este zero. Înlocuind $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$ etc. se obține A_4.

$$A_5 = \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$A_6 = \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1 = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

A_7. Se cunoaște eroarea eliptică (ε) ale cărei semiaxe principale sînt: $a = 60$m; $b = 30$ m. Să se determine care sînt abaterile provocate de această eroare față de direcția MN, știind că aceasta face cu direcția semiaxei mari a erorii eliptice un unghi $\alpha = 30°$

R:

Abaterea (de mijloc) față de direcția MN se află proiectînd erorile vectoriale pe această direcție. De aici rezultă:

— abaterea provocată de abaterea vectorială a, este:

$$a' = a \cdot \cos\alpha = 60 \cdot \cos 30° = 60 \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3} \text{ m.}$$

— abaterea provocată de eroarea vectorială b, este:

$$b' = b \sin\alpha = 30 \sin 30° = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15 \text{ m.}$$

Abaterea totală, produsă de eroarea eliptică, va fi:

$$A = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha} \approx 54 \text{ m}$$

CAPITOLUL 5

EXPRESII LOGARITMICE

5.1. DEFINIȚIE. PROPRIETĂȚI

Puterile fracționare, care generează radicalii, ridică mari greutăți în calcule. Se cunoaște din aritmetică, modul în care se calculează rădăcina pătrată dintr-un număr ($\sqrt{a}$); extragerea rădăcinii de ordine superioare nu mai este la fel de accesibilă ($\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[15]{a}$).

Acest impas a fost depășit prin introducerea unei noțiuni noi *logaritmul*, ale cărui proprietăți, asociate unor tabele matematice, permit efectuarea oricărui calcul de acest fel.

5.1.1. Definiția logaritmului

Fie :

$$N = a^n \tag{5.1}$$

în care: N este un număr oarecare pozitiv;

a, baza;

n, logaritmul, respectiv puterea la care este ridicată baza (a).

Relația (5.1), se mai exprimă astfel:

$$n = \log_a N \tag{5.2}$$

și se citește: logaritm în baza a din N.

5.1.2. Logaritmul produsului și cîtului

Considerăm două numere M și N, exprimate în aceeași bază:

$$M = a^m; \quad N = a^n$$

sau

$$m = \log_a M; \quad n = \log_a N$$

Fie : $P = M \cdot N = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, produsul lor.

Conform definiției, rezultă:

$$m + n = \log_a P$$

Deci:

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N \tag{5.3}$$

Rezultă că logaritmul produsului a două numere este egal cu suma logaritmilor acelor numere. Această proprietate este esențială și a permis o largă utilizare logaritmilor, pînă și la crearea riglei de calcul, introdusă recent în dotarea artileriei

Împărțirea celor două numere:

$$Q = \frac{M}{N} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

conduce la relația:

$$m - n = \log_a \frac{M}{N}$$

sau:

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \tag{5.4}$$

5.1.3. Logaritmul puterii și rădăcinii

Folosind prima proprietate pentru un produs de mai mulți factori, se poate scrie:

$$\log_a N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \ldots N_n = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \\ + \log_a N_3 + \ldots + \log_a N_n \tag{5.5}$$

Dacă:

$$N_1 = N_2 = N_3 = \ldots = N_n = N,$$

rezultă :

$$\log_a N^n = n \log_a N \tag{5.6}$$

Deci, logaritmul puterii unui număr este egal cu produsul dintre putere și logaritmul numărului. Asociind această proprietate celeilalte, rezultă că logaritmii transformă înmulțirea în adunare, iar ridicarea la putere în înmulțire, fapt ce confirmă mai pregnant importanța lor practică în simplificarea calculelor.

Pentru rădăcină:

$$N = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \text{ sau : } N = \sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}},$$

rezultă:

$$\log_a N = \frac{1}{m} \text{ sau : } \log_a N = \frac{p}{n}. \tag{5.7}$$

5.1.4. Schimbarea bazei

Fie: $n = \log_a N \Rightarrow N = a^n$

Pe baza ultimei proprietăți, putem logaritma relația a doua, într-o altă bază (b):

$$n \log_b a = \log_b N$$

Deci:

$$\log_a N \cdot \log_b a = \log_b N \tag{5.8}$$

La fel se poate deduce relația:

$$\log_b N \cdot \log_a b = \log_a N. \tag{5.9}$$

5.1.5. Aplicații

1°. Să se demonstreze identitățile:

$\mathbf{A}_1 = \log_a a = 1$; R. $a^1 = a$;

$\mathbf{A}_2 = \log_a a^3 = 3$; R. $a^3 = a^3$;

$\mathbf{A}_3 = \log_a a^m = m$; R. $m \log_a a = m$;

$\mathbf{A}_4 = \log_{10} 10 = 1$; R. $10^1 = 10$;

$\mathbf{A}_5 = \log_{10} 1000 = 3$; R. $\log_{10} 10^3 = 3 \log_{10} 10 = 3$;

$\mathbf{A}_6 = \log_{10} 0{,}01 = -2$; R. $\log_{10} 10^{-2} = -2$;

$\mathbf{A}_7 = \log_a b \cdot \log_c d = \log_c b \cdot \log_a d$;

2°. Se dau următoarele valori ale logaritmilor zecimali (cu baza 10), din tabelele matematice:

Tabela 1

N	1	2	3	4	5
$\log N$	0	0,30103	0,47712	0,60206	0,69897

N	6	7	8	9	10
$\log N$	0,77815	0,84510	0,90309	0,95424	1,0000

Să se verifice următoarele relații:

$A_8 = \log 2 \cdot 3 = \log 2 + \log 3 = \log 6$

$A_9 = \log 8 = \log 2 + \log 4$

$A_{10} = \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2$

3°. Să se restrîngă următoarele expresii logaritmice:

$A_{11} = \log_a 1 + \log_a 2 + \log_a 3$ R. $\log_a (1.2.3) = \log_a 6$

$A_{12} = \log_{10} 4 + \log_{10} 6 - \log_{10} 8$ R. $\log_{10} \frac{4 \cdot 6}{8} = \log_{10} 3 = 0{,}47712$

$A_{13} = \log_a a^2 + \log_a a^5 - \log_a a^3 - \log_a a$ R.. $\log_a \frac{a^2 \cdot a^5}{a^3 \cdot a} = \log_a a^3 = 3$

5.2. CALCULUL NUMERIC CU LOGARITMI

5.2.1. Logaritmi naturali și zecimali

Logaritmii au fost creați de Neper în secolul XVII, care a întocmit tabele matematice pentru logaritmi cu baza e; acest număr (e) este irațional, are valoarea 2,718... și o justificare, pe care o vom înțelege mai tîrziu. Logaritmii în baza „e" se numesc „logaritmi naturali" sau „neperieni" și se notează simplu:

$$\log_e A = \ln A \tag{5.10}$$

Ulterior, Briggs a întocmit tabele logaritmice cu baza 10, numiți „logaritmi zecimali" și notați astfel:

$$\log_{10} A = \lg A \tag{5.11}$$

În continuare ne vom ocupa de logaritmii zecimali, cu o largă utilitate practică, în calculul expresiilor algebrice și trigonometrice.

5.2.2. Tabela logaritmilor numerelor pozitive

Pornind de la constatarea că:

$$\lg 1 = \lg 10^0 = 0;\ \lg 10 = \lg 10^1 = 1;$$

$$\lg 100 = \lg 10^2 = 2 \ldots \lg 0{,}1 = \lg 10^{-1} = -1;$$

$$\lg 0{,}01 = \lg 10^{-2} = -2 \ldots,$$

se poate întocmi graficul funcției logaritmice, care asigură o corespondență riguroasă între variabila independentă (x) și logaritmul (y):

$$y = \lg x \tag{5.12}$$

Tabela 2

x	0	...	10^{-n}	...	0,01	0,1	1	10	100	...	10^n	...	∞
$y=\lg x$	$-\infty$	...	$-n$	...	-2	-1	0	1	2	...	n	...	∞

Se constată că funcția logaritmică (5.12) are domeniul: $x \in (0,\infty) = R_+$ (numerele reale pozitive), iar codomeniul: $y \in (-\infty, \infty) = R$.

În graficul stabilit sînt trecute numai o parte din valorile lui x, respectiv cele care reprezintă puteri întregi ale lui zece. Celelalte valori reale și pozitive pe care le poate lua argumentul x sînt cuprinse între acestea, iar corespondența este de felul următor:

$$\lg 8 \in (0,1) = 0 + \varepsilon;\ \lg 34 \in (1, 2) = 1 + \varepsilon;\ \lg 256 \in (2, 3) = 2 + \varepsilon$$

$$\lg 0{,}3 \in (-1{,}0) = -1 + \varepsilon;\ \lg 0{,}07 \in (-2, -1) = -2 + \varepsilon \ldots$$

unde ε este un număr subunitar, numit *mantisă*, iar primul termen este un element al mulțimii numerelor întregi (z), pozitiv sau negativ, numit *caracteristică*.

Fie: $$\lg A = a + \varepsilon,$$

unde a este caracteristica, iar ε mantisa.

Se poate scrie:

$$\lg 10A = \lg 10 + \lg A = 1 + a + \varepsilon = (1 + a) + \varepsilon = a_1 + \varepsilon$$

$$\lg 100A = \lg 100 + \lg A = (2 + a) + \varepsilon = a_2 + \varepsilon$$

sau:

$$\lg \frac{A}{10} = \lg A - \lg 10 = a + \varepsilon - 1 = (-1 + a) + \varepsilon = a_3 + \varepsilon$$

$$\lg \frac{A}{100} = \lg A - \lg 100 = (-2 + a) + \varepsilon = a_4 + \varepsilon$$

Rezultă că logaritmul unui număr (A) sau a oricărui număr obținut prin înmulțirea sau împărțirea acestuia cu zece la o putere oarecare își păstrează mantisa (ε). Deci, prin mutarea virgulei numărului (A) la dreapta sau la stînga, respectiv prin schimbarea ordinului său de mărime, mantisa nu se schimbă. Această proprietate a permis simplificarea tabelelor logaritmice, în sensul că ele cuprind numai mantise, numere pozitive și subunitare.

Dacă lg. 3 245 are mantisa 0,51121, atunci logaritmul oricărui număr de forma:

$$324{,}5 \; ; \; 32{,}45 \; ; \; 3{,}245 \; ; \; 0{,}3245 \; ; \; 0{,}03245$$

va avea aceeași mantisă. De aceea, în tabele vor fi trecute numai *cifrele însemnătoare* ale unui număr, fără virgulă, adică fără precizarea *ordinului de mărime* și mantisa respectivă, prin cifrele sale însemnătoare: 51 121.

Determinarea caracteristicii numărului respectiv se face pe baza ordinului de mărime a acestuia, în condițiile exemplelor precedente:

● *Pentru numărul supraunitar*, cu n cifre ale părții întregi, caracteristica este pozitivă și mai mică cu o unitate ($n - 1$). Astfel, caracteristicile numerelor de mai jos, sînt:

$$3245 \Rightarrow 3; \; 324{,}5 \Rightarrow 2; \; 32{,}45 \Rightarrow 1; \; 3{,}245 \Rightarrow 0$$

● *Pentru numărul subunitar*, cu n zerouri înaintea primei cifre însemnătoare, caracteristica este negativă și egală cu n. Caracteristicile numerelor de mai jos sînt:

$$0{,}3245 \Rightarrow \bar{1}; \; 0{,}03245 \Rightarrow \bar{2}; \; 0{,}003245 \Rightarrow \bar{3}.$$

Semnul minus se scrie deasupra, pentru a permite exprimarea logaritmului ca pe un număr zecimal:

$$\bar{2}{,}51121 = -2 + 0{,}51121$$

în care (—2) este o caracteristică negativă, iar 0,51121 este o mantisă pozitivă.

În consecință, logaritmul unui număr, cu caracteristica și mantisa corespunzătoare se exprimă astfel:

$$\lg 3\,245 = 3{,}51121 \; ; \; \lg 324{,}5 = 2{,}51121; \; \lg 32{,}45 = 1{,}51121$$

$$\lg 0{,}3245 = \bar{1}{,}51121 \; ; \; \lg 0{,}03245 = \bar{2}{,}51121$$

Pe baza acestor considerații și proprietăți, tabelele de logaritmi cuprind o mare cantitate de perechi de numere ale graficului funcției logaritmice, în care se dau:

— numărul (argumentul) prin cifrele însemnătoare;

— mantisa (funcția) prin partea zecimală, ca în extrasul din tabela 3.

Tabela 3

LOGARITMII ZECIMALI AI NUMERELOR

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
129	11 059	093	126	160	193	227	261	294	327	361
130	394	428	461	494	528	561	594	628	661	694
131	727	760	793	826	860	893	926	959	992	024
132	12 057	090	123	156	189	222	254	287	320	352
133	385	418	450	483	516	548	581	613	646	678
134	710	743	775	808	840	872	905	937	969	001
135	13 033	066	098	130	162	194	226	258	290	322
317	50 106	120	133	147	161	174	188	202	215	229
318	243	256	270	284	297	311	325	338	352	365
319	379	393	406	420	433	447	461	474	488	501
320	515	529	542	556	569	583	596	610	623	637
321	651	664	678	691	705	718	732	745	759	772
322	786	799	813	826	840	853	866	880	893	907
323	920	934	947	961	974	987	001	014	028	041
324	51055	068	081	095	108	121	135	148	162	175
408	61 066	077	087	098	109	119	130	140	151	162
409	172	183	194	204	215	225	236	247	257	268
410	278	289	300	310	321	331	342	352	363	374
411	384	395	405	416	426	437	448	458	469	479
412	490	500	511	521	532	542	553	563	574	584
413	595	606	616	627	637	648	658	669	679	690
414	700	711	721	731	742	752	763	773	784	794
415	805	815	826	836	847	857	868	878	888	899
416	909	920	930	941	951	962	972	982	993	003
417	62 014	024	034	045	055	066	076	086	097	107
418	118	128	138	149	159	170	180	190	201	211
419	221	232	242	252	263	273	284	294	304	315

Pentru a înțelege modul de lucru cu tabelele logaritmice, vom da detaliile necesare prin exemple.

$$E_1 = \lg 32{,}45 = 1{,}51121$$

Valoarea acestui logaritm se stabilește astfel:

● Se calculează *caracteristica*, după ordinul de mărime al părții întregi (32), care are două cifre ($n = 2$); deci caracteristica este unu ($n - 1 = 1$).

● Se stabilește *mantisa* din tabel, în dreptul numărului 3 245, care se determină la intersecția liniei orizontale, indicată de 324 (primele trei cifre însemnătoare ce se găsesc pe coloana primă a tabelului notată cu *N*), cu coloana verticală, indicată de a patra cifră însemnătoare (5). La această intersecție se găsește partea zecimală a mantisei, formată și ea din două părți: primele două cifre se găsesc pe coloana zero (0), în același rînd sau în primul rînd superior, iar ultimele trei cifre chiar în locul intersecției. Cînd aceste trei cifre poartă un asterisc (steluță), se folosesc ca prime cifre cele din primul rînd inferior, evident, tot de pe coloana zero (0).

$$E_2 = \lg 0{,}032 = \bar{2}{,}50515$$

Valoarea acestui logaritm se obține în mod similar:

● Se calculează *caracteristica* după ordinul de mărime a numărului subunitar, care are două zerouri înaintea părții însemnătoare ($m = 2$), astfel încît aceasta este (—2 sau $\bar{2}$).

● Se stabilește *mantisa* din tabel, în dreptul numărului de patru cifre însemnătoare 3200, grupate astfel: 320-0. Pe linia orizontală a lui 320, la intersecția cu coloana 0, se obține mantisa 50515, grupată astfel: 50-515.

$$E_3 = \lg 3{,}238 = 0{,}51028$$

Modul de lucru este următorul:

● Se calculează caracteristica numărului supraunitar, care are o cifră întreagă (1); deci aceasta este zero (1—1 = 0).

● Se stabilește mantisa la intersecția dată de numărul 323-8, pe linia 323 și coloana 8: 51-028. De data aceasta cele trei cifre de la intersecție (028) au asterisc, astfel încît se folosesc ca prime cifre, cele de pe rîndul inferior (51).

Tabela de logaritmi extrasă permite determinarea logaritmilor numerelor de patru cifre însemnătoare. Există tabele, care dau logaritmii numerelor cu mai multe cifre însemnătoare.

În cazul în care trebuie să calculăm logaritmul unui număr cu mai multe cifre însemnătoare decît cele ale tabelei, se procedează prin *interpolare*, folosind regula de trei simplă. Spre exemplu, dacă dorim să stabilim valoarea lui:

$$E_4 = \lg 414{,}34$$

vom proceda astfel:

● Stabilim valoarea logaritmului cu patru cifre, mai mic:

$$\lg 414{,}30 = 2{,}61731$$

● Stabilim valoarea logaritmului cu patru cifre mai mare:

$$\lg 414{,}40 = 2{,}61742$$

● Interpolăm prin regula de trei simplă, fără a mai ține seama de virgule:

— la o creștere de 10 a numărului, corespunde o creștere de 11 a logaritmului;

— la creșterea de 4 a numărului, corespunde creșterea: $\frac{4\times 11}{10} =$ $= 4{,}4 \approx 4$ pentru logaritm;

— aceasta se adaugă la prima valoare și se obține:

$$\lg 414{,}34 = 2{,}61735$$

Majoritatea tabelelor de logaritmi sînt prevăzute pe margine cu calculele regulii de trei simplă, care pot reduce parte din lucru.

5.2.3. Tabela logaritmului funcțiilor trigonometrice

După cum am văzut, funcțiile trigonometrice ale primului cadran: $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, au următoarele valori:

$$\sin \alpha \text{ și } \cos \alpha \in [0,\ 1]$$

$$\operatorname{tg} \alpha \text{ și } \operatorname{cotg} \alpha \in [0,\ \infty) \qquad (5.13)$$

În consecință, pentru aceste valori care aparțin mulțimii numerelor reale pozitive (R_+) se pot calcula logaritmii și se pot folosi proprietățile cunoscute și utile în simplificarea calculelor.

De aceea s-a întocmit o tabelă cu acești logaritmi, din care se dă mai jos un extras (tabela 4).

LOGARITMII ZECIMALI AI FUNCȚIILOR TRIGONOMETRICE

24°

minute	‰	lg sin	lg cos	lg tg	lg cotg	—
0	4—00	$\bar{1}$,60931	$\bar{1}$,96073	$\bar{1}$,64858	0,35142	60′
1	4—00,3	60960	96067	64892	35108	59
2	4—00,7	60988	96062	64926	35074	58
3	4—01	61016	96056	64960	35040	57
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
26	4—07,3	61662	95925	65736	34264	34
27	4—07,7	61689	95920	65770	34230	33
28	4—08	61717	95914	65803	34197	32
29	4—08,3	61745	95908	65837	34163	31
30	4—08,7	$\bar{1}$,61773	$\bar{1}$,95902	$\bar{1}$,65870	0,34130	30
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
58	4—16,3	62541	95739	66801	33199	↑ 2
59	4—16,7	62568	95733	66834	33166	1
60	4—17	$\bar{1}$,62595	$\bar{1}$,95728	$\bar{1}$,66867	0,33133	0
		lg cos	lg sin	lg cotg	lg tg	minute

65°

Logaritmul unei funcții se obține ca în exercițiile următoare:

$$E_5 = \lg \sin 24°28' = \bar{1},61717$$

● Pe pagina afectată unghiului de 24° se caută pe prima coloană (a minutelor), valoarea de 28′ care hotărăște rîndul logaritmului.

● La intersecția acestui rînd cu coloana lui lg sinus se obține valoarea sa:

$$\bar{1},61717$$

La fel se obține:

$$E_6 = \lg \cos 24°3' = \bar{1},96056$$

$$E_7 = \lg \operatorname{tg} 24°59' = \bar{1},66834$$

Pentru unghiurile mai mari de 45°, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, se folosesc aceleași tabele, în care minutele sînt trecute în ultima coloană și cresc de jos în sus. Deci:

$$E_8 = \lg \sin 65°58' = \bar{1},96062 = \lg \cos 24°2'$$

deoarece: $\sin 65°58' = \cos 24°2'$

$$E_9 = \lg \operatorname{tg} 65°33' = 0{,}34230 = \lg \operatorname{cotg} 24°27'$$

deoarece: $\operatorname{tg} 65°33' = \operatorname{cotg} 24°27'$

În cazul în care unghiul nu se găsește în tabele, avînd și secunde, logaritmul se calculează prin interpolare, ca în cazurile precedente.

$$E_{10} = \lg \sin 24°28'15''$$

● Se stabilesc valorile care încadrează unghiul:

$$\lg \sin 24°28' = \bar{1},61717$$

$$\lg \sin 24°29' = \bar{1},61745$$

● Se interpolează prin regula de trei simplă, observînd că la o creștere de $1' = 60''$ logaritmul crește cu 28 unități. Deci, la o creștere de $15''$, se obține o creștere a logaritmului cu:

$$\frac{15 \cdot 28}{60} = 7 \text{ unități}$$

● Valoarea mantisei primului logaritm se mărește cu aceste 7 unități

$$61717 + 7 = 61724$$

Deci: $\lg \sin 24°28'15'' = \bar{1},61724$

$$E_{11} = \lg \cos 24°28'25''$$

● Se stabilesc valorile logaritmilor care încadrează unghiul:

$$\lg \cos 24°28' = \bar{1},95914$$

$$\lg \cos 24°29' = \bar{1},95908$$

● Se interpolează, observînd că la o creștere a unghiului cu $60''$, logaritmul scade cu 6 unități. Deci, la o creștere a unghiului de $25''$, se obține o micșorare a logaritmului cu:

$$\frac{25 \cdot 6}{60} = 2{,}5 \approx 3 \text{ unități}$$

● Valoarea mantisei primului logaritm se micșorează cu 3 unități:

$$95914 - 3 = 95911$$

Deci: $\lg \cos 24°28'25'' = \bar{1},95911.$

5.2.4. Operații logaritmice

Logaritmii transformă înmulțirea în adunare, împărțirea în scădere, ridicarea la putere în înmulțire și extragerea rădăcinii în împărțire. Ca atare este necesar să cunoaștem modul în care se efectuează aceste operații.

1°. *Adunarea logaritmilor.* Pentru că logaritmul este suma algebrică dintre caracteristica (pozitivă sau negativă) și mantisa pozitivă, adunarea se face ca în algebră:

$$E_{12} = \lg 31{,}92 + \lg 4{,}09 + \lg 0{,}013 =$$
$$= 1{,}50406 + 0{,}61172 + \bar{2}{,}11394 =$$
$$= (1 + 0\text{—}2) + (0{,}50406 + 0{,}61172 + 0{,}11394) =$$
$$= -1 + 1{,}22972 = 0{,}22972$$

Evident că, operația se poate efectua, așezînd logaritmii unii sub alții.

2°. *Scăderea logaritmilor*

$$E_{13} = \lg 31{,}86 - \lg 0{,}411 = 1{,}50325 - \bar{1}{,}61384 =$$
$$= 1 + 0{,}50325 - (-1 + 0{,}61384)$$

Scăzînd mantisele, conform operației de mai sus, se obține o mantisă negativă. Pentru a evita acest lucru, logaritmul ce trebuie scăzut se exprimă cu mantisa pozitivă, prin adunarea și scăderea unei unități:

$$-(-1 + 0{,}61384) + 1 - 1 =$$
$$= 1 - 1 + (1 - 0{,}61384) = 0 + 0{,}38616 = 0{,}38616$$

Deci: $$E_{13} = 1{,}50325 + 0{,}38616 = 1{,}88941$$

Acest artificiu de calcul, necesar scăderii logaritmilor este general, iar logaritmul transformat se numește *cologaritm*. Legea formării cologaritmului se bazează pe cele de mai sus. Dacă c este caracteristica, iar m mantisa, logaritmul negativ va fi operat astfel:

$$-(c + m) = -(c + m) + 1 - 1 = -(c + 1) + (1 - m) \quad (5.14)$$

Deci, cologaritmul se obține prin:

- Adunarea unei unități la caracteristică, după care se schimbă semnul rezultatului.
- Scăderea mantisei din unitate și afectarea semnului plus.

În aceste condiții, scăderea se transformă într-o adunare:

$$E_{14} : \lg A = 2{,}15648 \Rightarrow \operatorname{colg} A = \bar{3}{,}84352$$
$$\lg A = \bar{3}{,}44219 \Rightarrow \operatorname{colg} A = 2{,}55781$$

În aceste condiții, scăderea se efectuează astfel:

$$E_{14} = \lg 3{,}186 - \lg 411 = 1{,}50325 - 2{,}61384 =$$
$$= 1{,}50325 + \bar{3}{,}38616 = \bar{2}{,}88941$$

3°. *Înmulțirea logaritmilor cu un număr*

Operația se face astfel:

$$E_{15} = 3 \cdot \bar{2}{,}42391 = 3 \cdot (-2 + 0{,}42391) =$$
$$= -6 + 1{,}27173 = \bar{5}{,}27173$$

4°. *Împărțirea logaritmilor cu un număr*

Calculul comportă un artificiu:

$$E_{16} = \frac{\bar{2}{,}42391}{5} = \frac{-2 + 0{,}42391}{5} = \frac{-5 + 3{,}42391}{5} =$$
$$= -1 + 0{,}68478 = \bar{1}{,}68478$$

Artificiul constă în adunarea și scăderea unui număr la numărător, astfel încît caracteristica rezultantă să fie întreagă. În cazul de față s-a adunat și scăzut numărul 3, pentru că: $-2-3=-5$.

Pentru logaritmii cu caracteristica pozitivă, împărțirea se efectuează direct.

5°. *Împărțirea logaritmilor*

$$E_{17} = \frac{\lg 354}{\lg 42} = \frac{2{,}54900}{1{,}62325} = 1{,}5703$$

$$E_{18} = \frac{\lg 0{,}458}{\lg 65} = \frac{\bar{1}{,}66087}{1{,}81291} =$$
$$= \frac{-0{,}33913}{1{,}81291} = -0{,}18705 = \bar{1}{,}81295$$

$$E_{19} = \frac{\lg 0{,}458}{\lg 0{,}065} = \frac{\bar{1}{,}66087}{\bar{2}{,}82191} =$$
$$= \frac{-0{,}33913}{-1{,}18709} = 0{,}28567$$

5.3. UTILIZAREA LOGARITMILOR

5.3.1. Calculul expresiilor

În cazul calculelor complicate, în care intervin produse și împărțiri cu puteri mari și radicali, logaritmii sînt indispensabili. Astfel, expresia:

$$E_{20} = \sqrt[5]{\frac{0,0132^2 \cdot \sqrt[4]{32,22}}{4,161}}$$

se calculează prin logaritmare:

$$\lg E_{20} = \frac{1}{5}\left(2 \lg 0,0132 + \frac{1}{4} \lg 32,22 - 7 \lg 4,161\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(2 \cdot \bar{2},12057 + \frac{1,50813}{4} - 7 \cdot 0,61909\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left[2\left(-2 + 0,12057\right) + 0,37703 - 4,33363\right)] =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\bar{4},24114 + 0,37703 + \bar{5},66637\right) =$$

$$= \frac{\bar{8},28454}{5} = \frac{-10 + 2,28454}{5} = -2 + 0,45691 = \bar{2},45691$$

În acest calcul s-au respectat regulile stabilite mai sus, privind operațiile logaritmice.

Rezultatul final ridică problema inversă logaritmării: cea a găsirii numărului care are un logaritm cunoscut, denumit *antilogaritm*. Operația este simplă:

- Se caută în tabela logaritmilor pe prima coloană primele două cifre ale mantisei (45) și apoi, pe liniile orizontale vecine, restul grupei de numere (691); în cazul de față, mantisa nu se găsește în tabelă, dar se află între valorile:

45 682 corespunzătoare lui 2 863

și

45 697 corespunzătoare lui 2 864

- Se interpolează pe același principiu, observînd că la o creștere de 15 unități a mantisei, numărul crește cu o unitate; la o creștere de 9 unități (45 697—45 682=9), corespunde numărului o creștere de:

$$x = 1 \cdot \frac{9}{15} = 0,6$$

Deci, cifrele însemnătoare ale numărului căutat (antilogaritmul) sînt:

$$2863 + 0{,}6 = 2863{,}6$$

Caracteristica (-2) stabilește că acesta are două zerouri:

$$E_{20} = 0{,}028636$$

$$E_{21} = \frac{\sin^6 24^\circ 26' \cdot \sqrt[3]{1345}}{4{,}18^5 \cdot \sqrt[4]{\operatorname{tg} 65^\circ 20'}}$$

Se logaritmează:

$$\lg E_{21} = 6 \lg \sin 24^\circ 26' + \frac{1}{3} \lg 1345 - 5 \lg 4{,}18 - \frac{1}{4} \lg \operatorname{tg} 65^\circ 20' =$$

$$= 6.\bar{1},61662 + \frac{1}{3} \cdot 3{,}12872 - 5 \cdot 0{,}62118 - \frac{1}{4} \cdot 0{,}33796 =$$

$$= -6 + 3{,}69972 + 1{,}04291 - 3{,}10590 - 0{,}08449 =$$

$$= \bar{3},69972 + 1{,}04291 + \bar{4},89410 + \bar{1},91551 = \bar{5},55224$$

$$E_{21} = 0{,}000035665$$

5.3.2. Rigla de calcul

1°. *Adunarea grafică.* Adunarea a două numere se poate efectua pe cale grafică cu ajutorul a două riglete divizate uniform și reprezentate la aceeași scară; ele se pot deplasa una față de cealaltă.

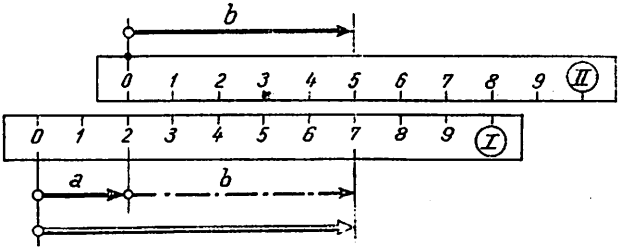


Fig. 5.1

Să considerăm că una din riglete (I) este fixă, iar cealaltă (II) culisează în lungul acesteia, ca în figura 5.1.

Pentru a înțelege bine metoda, presupunem că riglețele conțin numai numere naturale (1, 2, 3...9), la distanțe de cîte un centimetru.

Adunarea algebrică:

$$x = a + b$$

se efectuează prin adunarea grafică (vectorială) a segmentelor a și b.

În acest scop, se marchează mărimea (a) pe rigleta fixă (I) și mărimea (b) pe rigleta mobilă (II). Aducînd aceste segmente cap la cap, se obține suma lor $(a + b)$.

Practic, se procedează astfel:

● Se marchează mărimea a pe rigleta fixă (I) și se aduce rigleta mobilă cu originea sa (0) în dreptul marcajului.

● Se marchează mărimea b pe rigleta mobilă (II) cu mira unui cursor transparent.

● În dreptul mirei cursorului se citește pe rigleta fixă suma segmentelor:

$$x = a + b$$

În figura 5.1 este prezentat exemplul:

$$x = 2 + 5 = 7$$

2°. *Scăderea algebrică.* Scăderea se poate efectua în condiții similare, cu aceleași riglete. De data aceasta, operațiile sînt inverse (fig. 5.2).

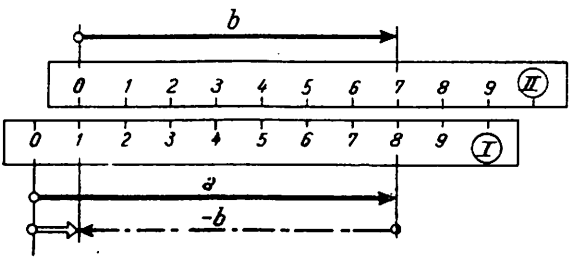


Fig. 5.2

Pentru a efectua scăderea:

$$x = a - b$$

se procedează astfel:

● Se înregistrează pe rigleta fixă (I) mărimea descăzutului a, cu ajutorul mirei cursorului.

● Se aduce rigleta mobilă (II) cu mărimea b în dreptul lui a (pe mira).

● Rezultatul scăderii se citește pe rigleta fixă (I) în dreptul originii rigletei mobile.

Exemplul din figura 5.2 se efectuează cu scăderea:

$$x = a - b = 8 - 7 = 1$$

În practică nu se folosesc rigle de calcul de acest fel, deoarece operațiile de adunare și scădere sînt simple. Prezentarea lor are scopul de a face înțeles procesul operării grafice, care va fi folosit la logaritmi, a căror adunare reprezintă înmulțire, iar scăderea împărțire.

3°. *Inmulțirea grafică.* Pentru înmulțire nu se mai folosește reprezentarea numerelor naturale ca mai sus, ci cea a logaritmilor acestora (§ 5.1.5, tabela 1).

În consecință, cele două riglete (I și II) nu vor mai fi divizate uniform, ci neuniform, conform graficului din tabela 1.

Astfel, pentru un număr A se măsoară pe rigletă o mărime $a = \lg A$, pentru B se măsoară $b = \lg B$ etc.

În aceste condiții, înmulțirea: $X = AB$ se transformă în adunare, prin logaritmarea:

$$\lg X = \lg A + \lg B$$

sau:

$$x = a + b$$

Pe cale grafică, această înmulțire se efectuează în condițiile stabilite anterior; singura deosebire constă în faptul că diviziunile de pe riglete nu sînt echidistante, ci logaritmice.

4°. *Impărțirea grafică* se efectuează cu ajutorul rigletelor cu scări logaritmice, la fel ca scăderea numerelor naturale.

Astfel: $X = \frac{A}{B}$ se transformă în scădere prin logaritmare: $\lg x = \lg A - \lg B$, sau:

$$x = a - b$$

5.4. FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ ȘI LOGARITMICĂ

5.4.1. Funcția exponențială

Expresia: $y = a^x$ sau $f(x) = a^x$ (5.15)

este o funcție, deoarece pentru orice valoare dată argumentului (x) îi corespunde o singură valoare funcției (y).

Pentru ca funcția exponențială, astfel definită, să existe pentru oricare x rațional, deci și pentru cazul în care $x = \frac{m}{n}$, unde n este par sau impar, este necesar să o definim cu condiția:

$$a > 0 \tag{5.16}$$

Altfel, apar funcții sub formă de rădăcini cu indici pari din numere negative, care au valori imaginare.

În aceste condiții (5.15) și (5.16), funcția exponențială este definită pe domeniul numerelor reale ($x \in R$) cu valori în domeniul numerelor reale pozitive ($y \in R_+$), întrucît: $a^x > 0$ pentru oricare x.

Graficul său depinde de valoarea bazei (a):

Cazul 1. : $a > 1$

Fie: $$f(x) = 2^x \; ; \; a = 2 > 1 \tag{5.17}$$

Funcția este continuă, astfel încît în graficul său vom stabili numai cîteva perechi de valori:

x	$-\infty$	-8	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	0	0,0038	0,25	0,5	1	2	4	8	$+\infty$

După cum se observă, această funcție este bijectivă, continuă și crescătoare, așa cum se vede și în reprezentarea sa carteziană din figura 5.3 a.

Cazul 2 : $a = 1$

$$f(x) = 1^x = 1 \text{ pentru oricare } x \tag{5.18}$$

În consecință, această funcție este constantă (fig. 5.3 b).

Cazul 3 : $a < 1$

Fie $$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} \tag{5.19}$$

Graficul său, redat prin perechi de valori este următorul:

x	$-\infty$	-8	-2	-1	0	1	2	8	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	256	4	2	1	0,5	0,25	0,0038	0

Reprezentarea grafică este cea din figura 5.3 c.

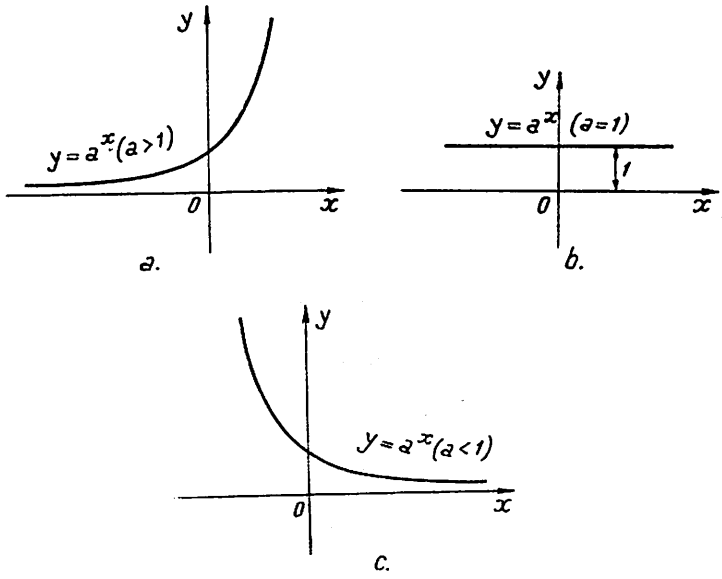


Fig. 5.3

Aplicații (E_{22}). Considerăm efectivul (a) al oamenilor unei unități angajată în luptă sau cantitatea de material de luptă. Pierderile într-o unitate de timp sînt de $p\% = \frac{p}{100}$.

Să se stabilească efectivul rămas după x unități de timp.

- După scurgerea primei unități de timp au mai rămas:

$$a - \frac{p}{100}\, a(n) = a\left(1 - \frac{p}{100}\right).$$

- După a doua unitate de timp au mai rămas:

$$a\left(1 - \frac{p}{100}\right) - a\left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot \frac{p}{100} = a\left(1 - \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right) = a\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$$

- După x unități de timp rămîn:

$$f(x) = a\left(1 - \frac{p}{100}\right)^x \tag{5.20}$$

unde:

$$1 - \frac{p}{100} < 1 \text{ (cazul 3).} \tag{5.21}$$

Deci, legea pierderilor este exponențială, funcție descrescătoare (fig. 5.3 c).

(E_{23}) O unitate cu efectivul (b) primește periodic efective noi, în procent de $q\% = \frac{q}{100}$. Să se stabilească efectivul său după x unități de timp.

- După scurgerea primei unități de timp, efectivul ajunge la:

$$b + \frac{q}{100} b = b\left(1 + \frac{q}{100}\right).$$

- După a doua unitate de timp ajunge la:

$$b\left(1 + \frac{q}{100}\right) + b\left(1 + \frac{q}{100}\right) \cdot \frac{q}{100} = b\left(1 + \frac{q}{100}\right)^2$$

- După x unități de timp, efectivul ajunge la:

$$g(x) = b\left(1 + \frac{q}{100}\right)^x \qquad (5.22)$$

unde:

$$1 + \frac{q}{100} > 1 \text{ (cazul 1)}$$

În consecință, legea completării este tot exponențială, dar o funcție crescătoare (fig. 5.3 a).

(E_{24}) Două armate se găsesc în conflict. Prima, bine pregătită, declară războiul și atacă în continuu, cu pierderi de $p\%$. Cealaltă, surprinsă, luptă în apărare și se consolidează treptat completîndu-și potențialul cu $q\%$.

Se poate prevedea soarta războiului ?

Ridicînd cele două diagrame, se obține un punct de intersecție (I) corespunzător timpului (x_0), care precizează momentul în care se creează echilibrul de forțe și cînd șansa victoriei trece de partea cealaltă (fig. 5.4).

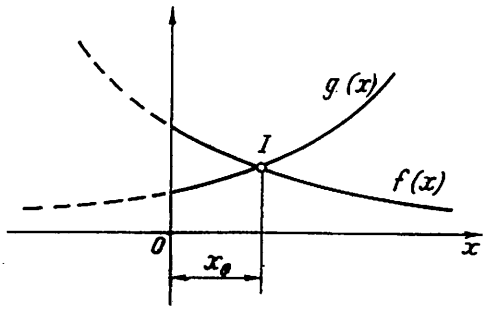


Fig. 5.4

5.4.2. Funcția logaritmică

Funcția logaritmică:

$$y = \log_a x \text{ sau } f(x) = \log_a x \tag{5.23}$$

este inversa funcției exponențiale. Ea asigură lui y o singură valoare pentru o valoare dată argumentului x; acest lucru rezultă clar și din graficul funcției exponențiale, care este și al acesteia.

Domeniul de definiție este mulțimea numerelor reale pozitive ($x>0$), iar codomeniul mulțimea numerelor reale ($y \in R$).

Tabloul de valori este cel întocmit pentru funcția exponențială, evident, cu liniile inversate. Exemplu:

$$y = \log_2 x$$

are tabloul următor:

x	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$+\infty$
$\log_2 x$	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	∞

iar:

$$y = \log_{1/2} x$$

are tabloul următor:

0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$+\infty$
$\log_{1/2} x$	$+\infty$	3	2	1	0	-1	-2	-3	$-\infty$

Diagramele celor două funcții sînt redate în figura 5.5.

5.5. Aplicații

A_{14} Se trage pe un glacis uniform: $n=3°$. Să se afle valoarea abaterii probabile pe acest glacis ($A_p^{b'}$), știind că: $A_p^b = 24$ m, iar $\omega = 31°$.

R.

$$A_p^{b'} = \frac{24 \cdot \sin 31°}{\sin 34°}$$

$$\log A_p^{b'} = \log 24 + \log \sin 31° - \log \sin 34°$$

$$\log A_p^{b'} = 1{,}38021 + 9{,}71184 - 9{,}74756 = 1{,}34449.$$

$$A_p^{b'} = 22{,}62 \text{ m}$$

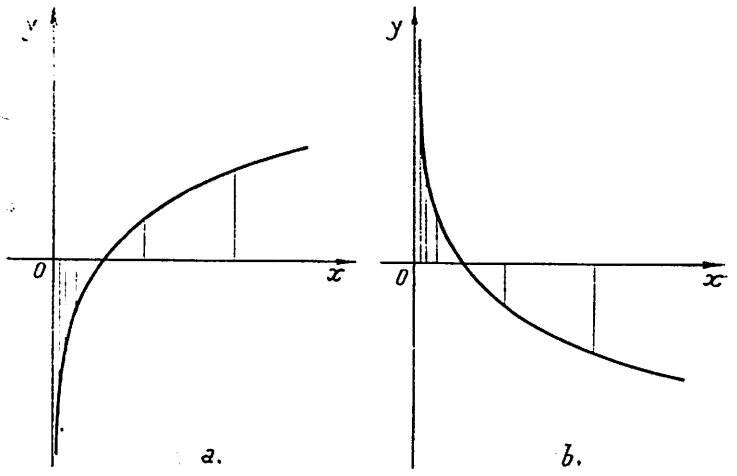


Fig. 5.5

A_{15} Se trage în contrapantă cu încărcătura a 4-a, la distanța 5 000 m. Să se afle $A_p^{b'}$, știind că $n=8°$

R.

$$A_p^{b'} = 20 \text{ m}$$

$$\omega = 24°$$

$$A_p^{b'} = \frac{A_p^b \cdot \sin 24°}{\sin (24° - 8°)} = \frac{A_p^b \cdot \sin 24°}{\sin 16°}$$

$$\log A_p^b = \log 20 + \log \sin 24° - \log \sin 16°$$

$$\log A_p^{b'} = 1{,}30103 + 9{,}60931 - 9{,}44034 = 1{,}47000$$

$$A_p^b = 29{,}5 \text{ m}$$

A_{16} Se trage cu tunul la distanța de 1000 m. Probabilitatea de a lovi obiectivul pentru o lovitură trasă, este de 0,71. Să se determine probabilitatea de a se obține cel puțin o lovitură în obiectiv din 5 lovituri trase.

R:

$$P_I = 1 - (1 - p)^5$$

$$P_I = 1 - (1 - 0{,}71)^5$$

$$P_I = 1 - 0{,}29^5$$

$$\log 0{,}29^5 = 5 \log 0{,}29 = 5 \,.\, \bar{1}{,}46240 = \bar{3}{,}31200$$

$$\bar{3}{,}31200 \approx 0{,}00205$$

$$P_I = 1 - 0{,}00205 = 0{,}9980 \text{ sau } 99{,}80 \text{ la sută.}$$

A_{17}. Care trebuie să fie consumul de proiectile pentru ca siguranța tragerii (P_1) să fie de 80 la sută, dacă probabilitatea unei lovituri directe în obiectiv, trăgîndu-se o singură lovitură (p) este de 0,12 și dacă pentru scoaterea din luptă a obiectivului este suficientă o lovitură în obiectiv?

R.

$$S = \frac{\log (1 - P_1)}{\log (1 - p)} = \frac{\log (1 - 0{,}80)}{\log (1 - 0{,}12)} = \frac{\log 0{,}20}{\log 0{,}88} = \frac{\bar{1}{,}30103}{\bar{1}{,}94448}$$

Cologaritmînd numărătorul și numitorul fracției, obținem:

$$S = \frac{-0{,}69897}{-0{,}0552} = 12 \text{ proiectile.}$$

CAPITOLUL 6

EXPRESII COMPLEXE

6.1. MULȚIMEA NUMERELOR IMAGINARE

6.1.1. Definiție. Proprietăți

În studiul numerelor reale (subcapitolul 2.6) s-a stabilit că operația inversă ridicării la putere, numită extragerea rădăcinii, nu este închisă pe mulțimea numerelor raționale, deoarece apar numere iraționale, reale și numere imaginare, ireale.

Numerele imaginare sînt generate de radicalii cu indici pari ai numerelor negative: $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-3}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[6]{-5}$ și formează o mulțime deosebită de cea a numerelor reale.

Într-adevăr, nu există nici un număr real, pozitiv sau negativ, care — prin ridicare la pătrat sau la o putere pară — să aibă ca rezultat un număr negativ, întrucît produsul a două numere de același semn este totdeauna pozitiv.

$$\text{În general: } \sqrt[2k]{M} \notin R, \text{ dacă } M < 0 \tag{6.1}$$

Cu toate că aceste numere nu au un corespondent real în natură, sînt acceptate ca o „mulțime imaginară" pentru că servesc la închiderea mulțimii față de operația de extragere a rădăcinii. Dealtfel, se va constata pe parcurs că aceste numere sînt de o mare utilitate în calculul algebric și permit generalizarea teoriei, a modelelor matematice și a metodelor de lucru.

Pentru simplificarea operațiilor cu numere imaginare, se face notația:

$$i = \sqrt{-1}, \tag{6.2}$$

care implică acceptarea unui număr imaginar unitar, avînd pătratul negativ:

$$i^2 = -1 \tag{6.3}$$

În acest fel, rădăcina pătrată a oricărui număr negativ poate fi exprimată astfel:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{(-1)\cdot a} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{a} = \sqrt{a}\cdot i = bi \qquad (6.4)$$

Simbolul i reprezintă o „unitate imaginară", iar numărul oarecare imaginar bi o cantitate imaginară.

Litera i reprezintă de fapt partea literală a unui monom, adică elementul generic calitativ al mulțimii numerelor imaginare:

$$I = \{ai \mid a \in R,\ i = \sqrt{-1}\} \qquad (6.5)$$

Puterile unității imaginare i, pot avea valori imaginare sau reale:

$$i = \sqrt{-1} = i \in I$$
$$i^2 = i\cdot i = -1 \in R$$
$$i^3 = i^2\cdot i = -i \in I$$
$$i^4 = i^3\cdot i = -i^2 = +1 \in R$$
$$i^5 = i^4\cdot i = i \in I$$

Se observă că atunci cînd exponenții sînt multipli de patru (4, 8, 12...), puterea unității imaginare este egală cu unu.

Numerele întregi divizibile cu patru se numesc „multipli de patru" și se notează $\mathfrak{M}4$ sau $4k$, unde $k \in Z$. Deci:

$$\mathfrak{M}4 = 4k\ ;\ k \in Z = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3\ \ldots . \qquad (6.6)$$

reprezintă simbolic și algebric toate numerele divizibile cu patru.

În consecință:

$$i^{4k} = 1 \qquad (6.7)$$

Dacă înmulțim succesiv cu i, se obțin relațiile:

$$i^{4k+1} = i\ ;\ i^{4k+2} = -1;\ i^{4k+3} = -i. \qquad (6.8)$$

Deoarece puterile lui i trec prin aceleași valori, în condițiile de mai sus, se spune că puterile unității imaginare au valori cu multiplicitatea patru. Ca atare, puterea acestei unități se calculează prin separarea unui multiplu de patru:

(E_1) $i^{40} = i^{4\cdot 10} = 1\ ;\ i^{41} = i^{40}\cdot i = i\ ;\ i^{42} = i^{40}\cdot i^2 = -1;$

$i^{43} = i^{40}\cdot i^3 = -i\ ;\ i^{50} = i^{48}\cdot i^2 = -1.$

6.1.2. Adunarea și scăderea numerelor imaginare

Operația de adunare sau scădere se efectuează obișnuit, deoarece aceste numere aparțin unei aceleiași mulțimi:

$$E_2 = 2i + 5i - 12i = -5i$$

$$E_3 = i\sqrt{2} + 3i - 4\sqrt{2}i + i = (4 - 3\sqrt{2})\, i$$

$$E_4 = ai + bi - 2ai + bi = (2b - a)\, i$$

$$E_5 = i\sqrt{a} - bi + 2\sqrt{a}i + 2bi = (b + 3\sqrt{a})\, i$$

6.1.3. Înmulțirea numerelor imaginare

Operația de înmulțire se efectuează ca în cazul monoamelor, cu respectarea proprietății de multiplicitate:

$$E_6 = (4i^3) \cdot (-5i^2) = -|20i^5 = -20i^4 \cdot i = -20i$$

$$E_7 = (ai^2) \cdot (-|b^2|i^3) \cdot (-a^2 i) = a^3 b^2 i^6 = a^3 b^2 \cdot i^4 \cdot i^2 = -a^3 b^2$$

$$E_8 = (i\sqrt[3]{a})\,(i^2\sqrt{a}) = i^3\sqrt[6]{a^2 \cdot a^3} = -i\sqrt[6]{a^5}$$

6.1.4. Împărțirea numerelor imaginare

Această operație se efectuează prin amplificarea fracțiilor cu o putere a unității imaginare, care să transforme numitorii în numere reale:

$$E_9 = \frac{a}{bi} = \frac{ai}{bi^2} = -\frac{a}{b}i$$

$$E_{10} = \frac{a}{bi^{50}} = \frac{a}{b \cdot i^{48} \cdot i^2} = -\frac{a}{b}$$

sau:

$$E_{40} = \frac{a}{bi^{50}} = \frac{ai^2}{bi^{52}} = -\frac{a}{b}$$

Proprietățile mulțimii numerelor imaginare (I) sînt următoarele:

1°. Mulțimea I este ordonată, ordinea fiind dată de coeficienți, care aparțin mulțimii numerelor reale.

2°. Mulțimea I este închisă față de operația de adunare și scădere.

3°. Mulțimea I nu este închisă față de operația de înmulțire și împărțire. Într-adevăr:

$$(ai) \cdot (bi) = ab\, i^2 = -ab \in R \notin I$$

$$\frac{a}{bi^2} = -\frac{a}{b} \in R \notin I$$

6.2. MULȚIMEA NUMERELOR COMPLEXE

6.2.1. Definiție

Reunind mulțimea numerelor reale (R) cu cea a numerelor imaginare (I) se obține mulțimea numerelor complexe (C);

$$C = R \cup I \tag{6.9}$$

sau:

$$C = \{ x \mid x = a + bi;\ (a,\ b) \in R\ ;\ i = \sqrt{-1}\ \}$$

Mulțimea astfel formată este mai cuprinzătoare, cu proprietăți largi, fiind închisă față de toate operațiile enunțate; adunare și scădere, înmulțire și împărțire, ridicare la putere și extragerea rădăcinii.

Dacă în polinomul oarecare în i:

$$P(i) = A_0 + A_1 i + A_2 i^2 + A_3 i^3 + \ldots + A_n i^n$$

se înlocuiesc puterile lui i și se reduc termenii asemenea, reali și imaginari, se obține o expresie de forma:

$$P(i) = A + Bi,$$

în care A și B sînt numere reale.

În general, expresia de forma:

$$Z = a + bi \tag{6.10}$$

se numește număr complex, avînd coeficienții reali a și b, care determină valorile cantitative ale părții reale (a) și ale celei imaginare (b).

Deoarece acest număr reprezintă un vector de stare cu două componente:

$$Z = (a,\ b), \tag{6.11}$$

Egalitatea între două numere complexe:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \tag{6.12}$$

nu poate fi adevărată decît în condițiile următoare:

$$a_1 = a_2 \quad \text{și} \quad b_1 = b_2 \tag{6.13}$$

Două numere complexe de formele următoare:

$$Z_1 = a + bi \text{ și } Z_2 = a - bi \tag{6.14}$$

se numesc „conjugate".

CAPITOLUL 7

EXPRESII ORDONATE

Unele fenomene ale naturii sau procese de organizare a elementelor unei mulțimi, ridică problema ordonării sau grupării obiectelor după diferite criterii.

În acest sens, analiza mulțimilor a conturat șiruri de numere, ale căror elemente pot fi orînduite după legi matematice, cu proprietăți deosebite. Acestea formează șiruri ordonate, crescătoare sau descrescătoare, cu largi implicații în practică.

Pe de altă parte, organizarea elementelor în submulțimi se efectuează printr-o analiză combinatorie a acestora, care stabilește posibilitățile științifice ale unui atare proces.

În cele ce urmează, vom studia șirurile de numere în general, progresiile numerice în particular și vom stabili metodele analizei combinatorii.

7.1. ANALIZA COMBINATORIE

7.1.1. Cercetarea prin inducție

Cunoașterea structurii lumii fizice și a legilor sale este rezultatul coerent al triadei observație — model — teorie. După cum se cunoaște, observația experimentală permite crearea unui model, iar acesta, crearea unei teorii proprii. Concluziile teoretice, bazate pe model, se confruntă cu materialul care a fost experimentat, precum și cu alte date noi și astfel se verifică continuu valabilitatea modelului și a teoriei.

Nepotrivirea, pusă în evidență de asemenea confruntări, conduce la înlăturarea neconcordanțelor și la îmbunătățirea modelului. O atare modificare este urmată de îmbunătățirea teoriei și apoi de aceeași

verificare cu datele experimentale, astfel încît, printr-un șir de aproximații succesive, lumea fizică este cunoscută tot mai profund.

Observarea unui fenomen constă în stabilirea factorilor care îl determină și a consecințelor fiecăruia în parte. Astfel:

● Prin observație, se constată că — mărind temperatura unei guri de foc, — aceasta se dilată; factorul ce determină dilatarea este temperatura. Experiența arată că pentru fiecare temperatură (t), variabilă independentă, se obține o altă lungime a barei (l), aceasta fiind variabilă dependentă. Se obține, în acest fel, o funcție al cărui grafic este similar cu cel din tabela 7.1.

Tabela 7.1

$t°$	20°	30°	40°	50°	60°
l_{mm}	220,00	220,01	220,02	220,03	220,04

Rezultatele observației constau, de obicei, în stabilirea cantitativă și calitativă a unui grafic, ce caracterizează fenomenul studiat.

Uneori, se stabilesc numai proprietățile elementelor unei mulțimi, fără a urmări o corespondență cu o altă mulțime. Spre exemplu, analiza numerelor prime din mulțimea numerelor naturale se concretizează într-un tabel ca cel de mai jos:

Tabela 7.2

n	1	2	3	4	5
prim	da	—	da	—	da

Modelul. Pe baza rezultatelor observației, se studiază caracterele comune ale diferitelor date experimentale, spre a se generaliza. Acest proces de generalizare se poate efectua analitic (algebric) sau grafic.

Tabela 7.1 arată că pentru fiecare creștere a temperaturii cu 10°, țeava se alungește cu 0,01 mm. Aplicînd regula de trei simplă, se poate stabili valoarea creșterii lungimii (Δl), pentru o creștere a temperaturii (Δt):

$$\Delta l = \frac{0{,}01}{10} = \Delta t = 0{,}001\ \Delta t \qquad (7.1)$$

Pe cale grafică, se obține o diagramă a funcției, ca în figura 7.1, în care, punctele P_1, P_2, P_3... sînt imaginile perechilor de valori ale tabelei 7.1, reportată în sistemul de axe cartezian.

Unind aceste puncte, se obține o curbă, care în cazul de față este o dreaptă, reprezentativă a fenomenului.

Cele două modele (relația 7.1 și figura 7.1) ne permit să stabilim lungimea țevii pentru oricare altă temperatură, chiar dacă aceasta nu a făcut parte din probele experimentale.

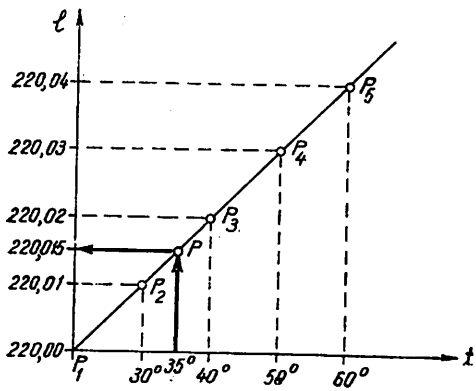


Fig. 7.1

Astfel, pentru 35°, se procedează astfel:

— *analitic*, se pornește de la starea inițială: $t_0 = 20°$; $l_0 = 220{,}00$ mm, față de care:

$$\Delta t = 35° - 20° = 15°,$$

iar:

$$\Delta l = 0{,}001 \quad \Delta t = 0{,}001 \cdot 15 = 0{,}015 \text{ mm}$$

și:

$$l = l_0 + \Delta l = 220{,}00 + 0{,}015 = 22{,}015 \text{ mm}$$

— *grafic*, se reportează punctul P, obținut la intersecția verticalei ridicată în abscisa corespunzătoare temperaturii de 35°, cu dreapta din figura 7.1. Orizontala din P, are ordonata căutată: $l = 220{,}015$ mm.

Încercînd să stabilim un model și pentru cea de a doua problemă (tabela 7.2), se ajunge la concluzia că numerele impare $(2n + 1)$ sînt prime.

Evident că, în ambele cazuri, concluziile și modelele s-au creat numai pe baza unui număr limitat de experiențe sau observații.

Teoria. Pe baza modelului analitic sau grafic, se face o generalizare, încadrînd fenomenul în grupa unor fenomene, guvernate de aceleași legi.

Primul model este o funcție de tipul $y = kx$, unde k este o constantă, precizînd că dilatarea este direct proporțională cu creșterea temperaturii și încadrînd-o alături de toate fenomenele de acest tip. Cercetarea continuă, implicînd noi experimente, pentru a stabili valoarea coeficientului k (de dilatare) pentru alte materiale și pentru alte temperaturi.

Confruntînd rezultatele noilor experiențe cu modelul și teoria, se atestă legea stabilită. Dacă apar elemente noi experimentale — spre exemplu — la temperaturi înalte — se schimbă modelul, apoi teoria, sau se definește domeniul său de existență.

Cel de al doilea exemplu, impune de asemenea o verificare. Modelul stabilit, prin care se acordă proprietatea de a fi număr prim oricărui număr impar, conduce la concluzia că și numerele următoare impare: 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21... ar fi prime. Ori, printre acestea se găsesc numerele 9, 15, 21,..., care sînt divizibile cu 3, 5, 7,... Deci, concluzia este infirmată la acest nivel al cercetării, iar modelul de mai sus își pierde valabilitatea.

Metoda de cercetare descrisă se numește *inducție*, iar verificarea rezultatelor sale, *inducție completă.*

În cele ce urmează se vor prezenta exemple concrete de interpretare.

(E_1). Se cere o formulă pentru calculul sumei:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n \tag{7.2}$$

Evident că S_n este o funcție de variabilă independentă (n): $S_n = f(n)$.

Graficul funcției se stabilește pe baza unor valori particulare, date lui n:

$$S_1 = 1 \; ; \; S_2 = 1 + 2 = 3 \; ; \; S_3 = 3 + 3 = 6 \; ; \; S_4 = 6 + 4 = 10$$

Analizînd aceste rezultate, care trebuie legate de valorile lui n (1, 2, 3, 4, ...), se constată că ele pot fi exprimate astfel:

$$S_1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1; \; S_2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 2; \; S_3 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6; \; S_4 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

Rezultă că, în general, se poate scrie:

$$S_n = \frac{n\,(n+1)}{2} \tag{7.3}$$

Acesta este modelul analitic obținut din cercetarea științifică efectuată, pe baza observației și metoda inducției.

Pentru a confirma valabilitatea sa, vom efectua verificarea prin *inducție completă*. În acest scop, se calculează suma următoare S_{n+1}, pentru $(n + 1)$ termeni, în două feluri:

— *pe cale inițială*:

$$S_{n+1} = S_n + (n + 1) = \frac{n\,(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$$

— *pe calea modelului*, transformînd pe n în $(n + 1)$ și pe $(n + 1)$ în $(n + 2)$ în formula 7.3:

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$$

Deoarece aceste sume au aceeași valoare, dau certitudinea valabilității formulei stabilite (7.3).

($\mathbf{E}_2$) Să se stabilească formula de calcul a sumei:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\,(n+1)} \tag{7.4}$$

Graficul valorilor particulare este următorul:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{8+1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{15+1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

. . . . . .

Se induce, cu mare ușurință, formula generală:

$$S_n = \frac{n}{n+1} \tag{7.5}$$

Pentru inducția completă, se procedează ca mai sus:

— *pe calea inițială*:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} =$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)\,(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)\,(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

— *pe calea modelului*, transformînd pe n în $(n + 1)$ și pe $(n + 1)$ în $(n + 2)$, se obține din formula 7.5, aceeași valoare:

$$S_n = \frac{n+1}{n+2}$$

Deci modelul este valabil.

7.1.2. Permutări

Considerăm două elemente (a_1, a_2) ale unei mulțimi (A) așezate în lungul unei drepte. Ele pot ocupa următoarele poziții: a_1, a_2 sau a_2, a_1. Operația de schimbare a pozițiilor acestor elemente se numește permutare. Numărul posibil al situațiilor ce pot fi create se notează cu P_n, unde indicele (n) precizează cîte obiecte cuprinde mulțimea.

În exemplul ales, avem:

$$P_2 = 2 \tag{7.6}$$

Pentru a stabili o formulă generală a permutărilor cu n elemente, vom folosi metoda inducției. În acest scop, trecem la mulțimea cu trei elemente (a_1, a_2, a_3). Acestea pot ocupa pozițiile:

$$\left.\begin{array}{l} a_1a_2a_3 \ ; \ a_1a_3a_2 \\ a_2a_3a_1 \ ; \ a_2a_1a_3 \\ a_3a_1a_2 \ ; \ a_3a_2a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow P_3 = 6 = P_2 \cdot 3 \tag{7.7}$$

Dacă adaugăm un nou element (a_4), acesta poate ocupa patru poziții în fiecare din grupele de mai sus, ca în exemplul următor:

$$\overset{\downarrow}{a_4}a_1a_2a_3 \ ; \ \overset{\downarrow}{a_1}\overset{\downarrow}{a_4}a_2a_3 \ ; \ a_1\overset{\downarrow}{a_2}\overset{\downarrow}{a_4}a_3 \ ; \ a_1a_2\overset{\downarrow}{a_3}\overset{\downarrow}{a_4}$$

Rezultă că, în total, se obțin de patru ori mai multe grupe, astfel încît:

$$P_4 = P_3 \cdot 4 \tag{7.8}$$

În baza relațiilor (7.7) și (7.8) stabilim prin inducție, formula permutărilor:

$$P_n = P_{n-1} \cdot n = P_{n-2} \cdot (n - 1) \cdot n = P_{n-3} \cdot (n - 2) \ (n-1) \ n =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ (n - 1) \ n = n! \tag{7.9}$$

Produsul numerelor naturale (7.9) se notează cu simbolul $(n!)$, care se citește „factorial" de n.

Verificarea acestei formule se face prin inducție completă.

— *Calculul succesiv* al permutărilor P_{n+1} se face, considerînd cunoscut numărul permutărilor P_n al obiectelor $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Introducerea unui nou element a_{n+1} într-una din grupele deja formate, conduce la $(n+1)$ grupe noi, pentru că el poate ocupa $(n+1)$ poziții:

$$\overbrace{\downarrow a_1 \downarrow a_2 \downarrow a_3 \downarrow a_4 \downarrow \ldots \downarrow a_{n-2} \downarrow a_{n-1} \downarrow a_n \downarrow}^{(n+1}$$

Deci:

$$P_{n+1} = P_n \cdot (n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . n \; . \; (n+1) = (n+1)!$$

— *Calculul direct*, cu formula indusă, dă:

$$P_{n+1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \; (n+1) = (n+1)!$$

deoarece n se transformă în $(n+1)$.

Concordanța dintre ultimele două expresii, confirmă valabilitatea formulei (7.9).

Operația de grupare a n elemente în diferite moduri, constă în stabilirea aplicațiilor posibile ale mulțimii cu n elemente pe o mulțime cu n elemente.

Fie $N = \{ n \mid n \in N \} = \{ 1, 2, 3, \ldots, n \}$, șirul numerelor naturale și:

$A = \{ a_i \mid i = 1, 2, 3, \ldots, n \} = \{ a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \}$, elementele unei mulțimi A, numerotate prin indici ($i = 1, 2, 3, \ldots$).

Între elementele celor două mulțimi, se pot realiza diferite aplicații, ca cele din graficele următoare:

Tabela 7.3

n	1	2	3	4	...	$n-1$	n
a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_{n-1}	a_n

Tabela 7.4

n	1	2	3	4	...	$n-1$	n
a_i	a_5	a_3	a_7	a_1	...	a_{10}	a_2

Prin permutare se înțelege numărul aplicațiilor biunivoce de acest fel, ce pot fi alcătuite. Operînd numai cu indicii mulțimii $A(a_i)$, o aplicație ca cea de mai sus, poate fi redată astfel (tabela 7.4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 3 & 7 & 1 & \dots & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Acest model de prezentare este mai simplu și mai accesibil investigării unor probleme particulare, permițînd a defini astfel:

Permutările mulțimii $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, constau din aplicațiile biunivoce ale mulțimii $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ pe mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

($\mathbf{E_3}$) O subunitate cu patru piese, folosește mai intens prima piesă, mai puțin pe a doua și așa mai departe. Pentru a asigura o uzură omogenă tuturor pieselor, se hotărăște ca la fiecare tragere să se așeze în altă ordine tunurile. După cîte aplicații bateria va ajunge în formația inițială? Care sînt formațiile succesive ale pieselor?

Operația indicată este o permutare; deci:

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

În consecință, după 24 aplicații, bateria va avea aceeași formație. Modul de organizare a pieselor în baterie este următorul:

1 2 3 4	2 3 4 1	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 3 1 4	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 4 2	2 4 1 3	3 2 4 1	4 2 3 1
1 3 2 4	2 4 3 1	3 2 1 4	4 2 1 3
1 4 2 3	2 1 3 4	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 1 4 3	3 4 2 1	4 3 2 1

($\mathbf{E_4}$) Să se determine numărul tragerilor necesare permutării pieselor unei subunități cu șase tunuri:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

($\mathbf{E_5}$) O subunitate de patru piese, păstrează ca ultim tun o piesă foarte uzată. Care este numărul aplicațiilor necesare permutării pieselor sale, dacă tunul patru va rămîne mereu același? Care este modul de aranjare a pieselor?

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

1 2 3 4 ; 1 3 2 4 ; 2 3 1 4 ; 2 1 3 4 ; 3 1 2 4 ; 3 2 1 4

7.1.3. Combinări şi aranjamente

Un număr de elemente (n), aparţinînd unei mulţimi $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, pot fi grupate în diferite moduri în submulţimi de cîte (m) elemente, cu condiţia ca: $m \leqslant n$.

Submulţimile de m elemente, formate cu cele n elemente ale mulţimii, se numesc combinări de n elemente luate cîte m. Numărul lor se notează:

$$C_n^m \tag{7.10}$$

Combinările creează grupe structural diferite privind componenţa lor, fără a interesa ordinea în care sînt aşezate elementele. Astfel, combinările ce se pot face cu indicii 1, 2, 3, 4 luaţi cîte trei (C_4^3), sînt următoarele:

$$C_4^3 \rightarrow 1\ 2\ 3\ ;\ 1\ 2\ 4\ ;\ 1\ 3\ 4\ ;\ 2\ 3\ 4 \tag{7.11}$$

Dacă ne interesează şi modul în care pot fi aşezate elementele în cadrul fiecărei grupe astfel combinate, trebuie să permutăm elementele fiecăreia (P_3), cînd apar următoarele formaţii:

$$A_4^3 \rightarrow \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1\ 2\ 3 & 1\ 2\ 4 & 1\ 3\ 4 & 2\ 3\ 4 \\ 1\ 3\ 2 & 1\ 4\ 2 & 1\ 4\ 3 & 2\ 4\ 3 \\ 2\ 3\ 1 & 2\ 4\ 1 & 3\ 4\ 1 & 3\ 4\ 2 \\ 2\ 1\ 3 & 2\ 1\ 4 & 3\ 1\ 4 & 3\ 2\ 4 \\ 3\ 1\ 2 & 4\ 1\ 2 & 4\ 1\ 3 & 4\ 2\ 3 \\ 3\ 2\ 1 & 4\ 2\ 1 & 4\ 3\ 1 & 4\ 3\ 2 \\ \hline \end{array}}_{C_4^3} \rightarrow P_3$$

Noua formaţie, care reprezintă numărul aplicaţiilor biunivoce ale mulţimii de 3 elemente în mulţimea de 4 elemente, alcătuieşte schema „aranjamentelor a 4 elemente luate cîte 3" şi se notează A_4^3. Numărul total de aranjamente se obţine din schema de mai sus, care stabileşte relaţia:

$$A_4^3 = C_4^3 \cdot P_3$$

În general, numărul aplicaţiilor biunivoce ale unei mulţimi de m elemente într-o mulţime de n elemente constituie aranjamentele de n obiecte luate cîte m:

$$A_n^m \tag{7.12}$$

Cunoscînd combinările C_n^m, aranjamentele se obţin prin permutările elementelor fiecărei grupe (P_m), astfel încît:

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m \tag{7.13}$$

sau:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \tag{7.14}$$

În paragraful precedent, am stabilit formula permutărilor. Rămîne să stabilim formula pentru una din structurile definite (aranjamente sau combinări), întrucît cealaltă se obține în mod implicit. În cele ce urmează, vom stabili formula aranjamentelor prin inducție, pe baza unor valori particulare.

Pentru $m = 1 \rightarrow A_n^m = A_n^1$. În acest caz, aplicațiile biunivoce sînt următoarele:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \downarrow \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \downarrow \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \downarrow \\ 3 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 1 \\ \downarrow \\ n \end{pmatrix}$$

Numărul acestor aplicații este n, astfel încît:

$$A_n^1 = \underbrace{n}_{1 \text{ factor}} \tag{7.15}$$

Pentru $m = 2 \rightarrow A_n^m = A_n^2$. Aplicațiile biunivoce au forma și numărul indicat mai jos:

$(n-1)$ aplicații: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & x \end{pmatrix}$, deoarece x reprezintă elementele $\{2, 3, 4, \ldots, n\}$, care pot ocupa pe rînd locul acestuia;

$(n-1)$ aplicații $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & x \end{pmatrix}$, unde $x = \{1, 3, 4, 5, \ldots, n\}$

$(n-1)$ aplicații $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \downarrow & \downarrow \\ 3 & x \end{pmatrix}$, unde $x = \{1, 2, 4, 5, \ldots, n\}$

. . . . . .

$(n-1)$ aplicații $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ n & x \end{pmatrix}$, unde $x = \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$.

Se observă că pe fiecare rînd se formează cîte $(n-1)$ aplicații și există în total (n) rînduri.

Deci:

$$A_n^2 = \underbrace{n\,(n-1)}_{2 \text{ factori}} = A_n^1 \cdot (n-1) \tag{7.16}$$

Pentru $m = 3 \rightarrow A_n^m = A_n^3$, iar aplicațiile respective au forma generală:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ x & y \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ \downarrow \\ z \end{matrix}\right)$$

în care cele două bare corespund cazului precedent (A_n^2), pentru: $x = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ și $y = \{1, 2, 3, \ldots, n\} - x$. Parametrul z nu poate lua decît $(n-2)$ valori: $z = \{1, 2, 3, \ldots, n\} - x - y$.

Deci, apar $(n-2)$ aplicații pe fiecare rînd, iar numărul rîndurilor este egal cu cel al aranjamentelor precedente (A_n^2). Deci:

$$A_n^3 = A_n^2 \cdot (n-2) = \underbrace{n\,(n-1)\,(n-2)}_{3 \text{ factori}} \tag{7.17}$$

Analizînd relațiile (7.15), (7.16) și (7.17), putem stabili prin inducție o „formulă de recurență":

$$A_n^m = A_n^{m-1} \cdot (n - m + 1) \tag{7.18}$$

și formula generală:

$$A_n^m = \underbrace{n\,(n-1)\,(n-2), \ldots, (n-m+1)}_{m \text{ factori}} \tag{7.19}$$

cu condiția $n \geqslant m$.

Verificarea sa prin inducție completă se face, trecînd la $(m+1)$ elemente:

— *analiza* aplicațiilor biunivoce:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & m \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_m \end{bmatrix} \begin{matrix} m+1 \\ \downarrow \\ x_{m+1} \end{matrix}\right)$$

în care parantezele mari cuprind A_n^m, iar x_{m+1} ia $(n-m)$ valori, conduce la $(n-m)$ aplicații pe un rînd și la A_n^m rînduri.

Deci:

$$A_n^{m+1} = A_n^m \cdot (n-m) = \underbrace{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-m)}_{(m+1) \text{ factori}}$$

— *formula* (*7.19*) ia forma hotărîtă de transformarea lui m în $m+1$:

$$A_n^{m+1} = n\,(n-1)\,(n-2),\ldots,\,(n-m),$$

adică aceeaşi expresie ca mai sus, care atestă valabilitatea inducţiei făcute.

În consecinţă, reţinem următoarele formule:

$$A_n^m = n\,(n-1)\,(n-2),\ldots,(n-m+1) \tag{7.20}$$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,,\ldots,\,(n-m+1)}{m\,!} \tag{7.21}$$

E x e m p l e:

$\mathbf{E}_7 = A_5^3 = 5\cdot4\cdot3 = 60$

$\mathbf{E}_8 = A_6^3 = 6\cdot5\cdot4 = 120$

$\mathbf{E}_9 = C_5^3 = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10$

$\mathbf{E}_{10} = C_8^4 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 70$

$\mathbf{E}_{11} = A_n^4 = \underbrace{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}_{4\text{ factori}}$

$\mathbf{E}_{12} = C_n^4 = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$

$\mathbf{E}_{13} = A_n^{n-1} = n\,(n-1),\ldots,[\,n-(n-1)+1\,] = n\,(n-1),\ldots,2$

$\mathbf{E}_{14} = C_n^{n-1} = \frac{n\,(n-1),\ldots,3\cdot2}{1\cdot2\cdot3,\ldots,(n-1)} = n$

$\mathbf{E}_{15} = A_n^{n-2} = n\,(n-1),\ldots,[n-(n-2)+1] = n\,(n-1),\ldots,3$

$\mathbf{E}_{16} = C_n^{n-2} = \frac{n\,(n-1),\ldots,4\cdot3}{1\cdot2\cdot3,\ldots,(n-2)} = \frac{n\,(n-1)}{1\cdot2}$

Să stabilim altă formă a combinărilor, care evidenţiază unele proprietăţi ale acestora. În acest scop, vom amplifica relaţia (7.21) în felul următor:

$$C_n^m = \frac{n\,(n-1),\ldots,(n-m+1)}{1\cdot2\cdot3,\ldots,m}\cdot\frac{(n-m)\,(n-m-1),\ldots,3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3,\ldots.\,(n-m-1)\,(n-m)} =$$

$$= C_n^m = \frac{n\,!}{m\,!\,(n-m)\,!} \tag{7.22}$$

Folosind noua formulă (7.22), obținem:

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\,(n-n+m)!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} \tag{7.23}$$

Se observă că relațiile (7.22) și (7.23) sînt identice. Deci:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \tag{7.24}$$

Această identitate, simplifică mult calculele, ca în exercițiile următoare:

$$\mathbf{E}_{17} = C_{24}^{20} = C_{24}^{4} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\mathbf{E}_{18} = C_{105}^{104} = C_{105}^{1} = \frac{105}{1} = 105$$

$$\mathbf{E}_{19} = C_n^{n-1} = C_n^1 = n$$

$$\mathbf{E}_{20} = C_n^{n-2} = C_n^2 = \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2}$$

Să se demonstreze identitățile:

$$\mathbf{E}_{21} = C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$

Folosim relația (7.22):

$$C_n^m = \frac{(n-1)!}{m!\,(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!} = \frac{(n-1)!\,(n-m)}{m!\,(n-m)!} +$$

$$+ \frac{(n-1)!\,m}{m!\,(n-m)!} = \frac{(n-1)!}{m!\,(n-m)!}(n-m+m) = \frac{(n-1)!\,n}{m!\,(n-m)!} =$$

$$= \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = C_n^m \qquad \text{q.e.d.}$$

Observație: uneori, încheierea exercițiului este precizată de inițialele: q.e.d., care însemnează în latinește „quod erat demonstrandum", respectiv: „ceea ce era de demonstrat".

În astfel de exerciții, se folosesc frecvent proprietățile factorialului:

$$n! = (n-1)!\,n = (n-2)!\,(n-1)\,n$$

$$(n-m-1)!\,(n-m) = (n-m)!$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n-1) \cdot n\,(n+1)}{(n-1)!} = n\,(n+1)$$

$$E_{22} = C_n^m = C_{n-2}^m + 2\,C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2} =$$

$$= \frac{(n-2)!}{m!\,(n-m-2)!} + 2\cdot\frac{(n-2)!}{(m-1)!\,(n-m-1)!} + \frac{(n-2)!}{(m-2)!\,(n-m)!} =$$

$$= \frac{(n-2)!\,(n-m-1)\,(n-m)}{m!\,(n-m)!} + 2\cdot\frac{(n-2)!\,m\,(n-m)}{m!\,(n-m)!} + \frac{(n-2)!\,(m-1)\,m}{m!\,(n-m)!} =$$

$$= \frac{(n-2)!}{m!\,(n-m)!}\,[(n-m-1)\,(n-m) + 2\,m\,(n-m) + (m-1)\,m] =$$

$$= \frac{(n-2)!}{m!\,(n-m)!}\,[(n-m)\,(n-m-1+2\,m) + m^2 - m] =$$

$$= \frac{(n-2)!}{m!\,(n-m)!}\,(n^2 - m^2 - n + m + m^2 - m) =$$

$$= \frac{(n-2)!\,(n-1)\,n}{m!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = C_n^m \text{ q.e.d.}$$

7.1.4. **Binomul lui Newton**

Vom dezvolta puterea binomului:

$$(x+a)^n = \underbrace{(x+a)\,(x+a)\ldots(x+a)}_{n \text{ factori}} \tag{7.25}$$

$$\begin{aligned}(x+a)^n = {} & x^n + x^{n-1}(a+a+a+\ldots+a) + \\ & + x^{n-2}(a^2+a^2+a^2+\ldots+a^2) + \\ & + x^{n-3}(a^3+a^3+a^3+\ldots+a^3) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + x\,(a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\ldots+a^{n-1}) + a^n = \\ & = x^n + x^{n-1}\cdot a\underbrace{(1+1+1+\ldots+1)}_{C_n^1} + \\ & + x^{n-2}\cdot a^2\underbrace{(1+1+1+\ldots+1)}_{C_n^2} + \ldots\end{aligned}$$

Rezultă următoarea formulă a binomului, stabilită de Newton:

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1\,x^{n-1}\cdot a + \\ + C_n^2\,x^{n-2}\cdot a^2 + \ldots + C_n^k\,x^{n-k}\,a^k + \ldots + C_n^n a^n \tag{7.26}$$

Se observă că termenul general este al $(k+1)$-lea și are expresia:

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot a^k \tag{7.27}$$

Termenul de ordin k are expresia:

$$T_k = C_n^{k-1} \cdot x^{n-k+1} \cdot a^{k-1} \tag{7.28}$$

Raportul a doi termeni consecutivi este:

$$\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot a^k}{C_n^{k-1} \cdot x^{n-k+1} \cdot a^{k-1}} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{(k-1)!\,(n-k+1)!}{n!} \cdot \frac{a}{x} =$$

$$= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{a}{x} = \alpha \cdot x^{-1} \cdot a^1 \tag{7.29}$$

iar:

$$T_{k+1} = \frac{T_k \cdot (n-k+1)}{k} \cdot \frac{a}{x} \tag{7.30}$$

unde:

$$\alpha = \frac{n-k+1}{k} = \frac{\text{exponentul lui } x \text{ din } T_k}{\text{numărul termenului } T_k}$$

$x^{-1} = \frac{1}{x}$, indică descreșterea exponentului lui x;

a^1, indică creșterea exponentului lui a,

astfel încît suma exponenților să fie totdeauna egală cu n:

$$(n-k) + k = (n-k+1) + (k-1) = n$$

Cu aceste observații, dezvoltarea unui binom la o putere se poate face direct, ca în exemplul următor:

$$(x+a)^6 = \underbrace{1x^6}_{1} + \underbrace{6x^5 \cdot a}_{2} + \underbrace{15\,x^4a^2}_{3} + \underbrace{20x^3a^3}_{4} + \underbrace{15x^2a^4}_{5} + \underbrace{6x^5a}_{6} + a^6$$

unde:

$$6 = \frac{6 \cdot 1}{1}\ ;\ 15 = \frac{5 \cdot 6}{2}\ ;\ 20 = \frac{4 \cdot 15}{3}\ ;\ 15 = \frac{3 \cdot 20}{4} \text{ etc.}$$

$$(x+1)^8 = \underbrace{1x^8}_{1} + \underbrace{8x^7}_{2} + \underbrace{28x^6}_{3} + \underbrace{56x^5}_{4} + \underbrace{70x^4}_{5} + \underbrace{56x^3}_{6} + \ldots$$

unde:

$$8 = \frac{8 \cdot 1}{1}\ ;\ 28 = \frac{7 \cdot 8}{2}\ ;\ 56 = \frac{6 \cdot 28}{3}\ ;\ 70 = \frac{5 \cdot 56}{4} \text{ etc.}$$

Exemple de calcul:

$$E_{23} = \left(2x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^5 = (2x^3)^5 + 5\,(2x^3)^4 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 10\,(2x^3)^3 \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 +$$

$$+ 10\,(2x^3)^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right)^3 + 5(2x^3) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^5 =$$

$$= 32x^{15} - 80x^{10} + 80x^5 - 40 + \frac{10}{x^5} - \frac{1}{x^{10}}$$

$$E_{24} = (x+1)^n = C_n^0\, x^n + C_n^1\, x^{n-1} + C_n^2\, x^{n-2} + \ldots + C_n^n$$

Pentru: $x = 1$, rezultă:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n \qquad (7.31)$$

$$E_{25} = (x-1)^n = C_n^0\, x^n + C_n^n x^{n-1}\,(-1) + C_n^2 x^{n-2} \cdot (-1)^2 +$$

$$+ C_n^3 x^{n-3} \cdot (-1)^3 + \ldots = C_n^0 - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - C_n^3 x^{n-3} + \ldots$$

Pentru: $x = 1$, rezultă:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots = 0$$

sau:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots \qquad (7.32)$$

adică suma combinărilor pare este egală cu cea a combinărilor impare.

Ţinînd seama de (7.31) rezultă:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1} \qquad (7.33)$$

$$E_{26} = (x^2 - x + 1)^4 = [(x^2+1) - x]^4 =$$

$$= (x^2+1)^4 + 4\,(x^2+1)^3\,(-x) + 6\,(x^2+1)^2\,(-x)^2 + 4\,(x^2+1)(-x)^3 +$$

$$+ (-x)^4 = (x^2)^4 + 4\,(x^2)^3 + 6\,(x^2)^2 + 4\,(x^2) + 1 - 4\,x\,(x^6 + 3\,x^4 +$$

$$+ 3\,x^2 + 1) + 6x^2\,(x^4 + 2\,x^2 + 1) - 4\,x^3\,(x^2+1) + x^4 = \ldots$$

7.1.5. Suma puterilor numerelor naturale

Am stabilit, prin inducţie, valoarea sumei numerelor naturale, prin relaţia (7.3):

$$S_n^1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2} \qquad (7.34)$$

Pentru a preciza faptul că această sumă este a puterii întîia, s-a notat cu S_n^1.

Deseori avem nevoie de suma puterii a doua:

$$S_n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

Determinarea se va face, pornind de la dezvoltarea binomului la puterea treia:

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Pentru valori particulare ale lui x, se obţine şirul de relaţii:

$$x = 1 \to 2^3 = 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1$$

$$x = 2 \to 3^3 = 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1$$

$$x = 3 \to 4^3 = 3^3 + 3.3^2 + 3.3 = 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x = n \to (n + 1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

$$(n + 1)^3 = 1^3 + 3S_n^2 + 3S_n^1 + n \qquad (7.35)$$

Prin adunarea relaţiilor de mai sus, se reduc termenii la cub din membrul întîi cu cei din membrul doi; făcînd notaţiile, conform convenţiei de mai sus:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = S_n^2$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = S_n^1,$$

se obţine relaţia (7.35), în care numai S_n^2 este necunoscută:

$$3S_n^2 = (n + 1)^3 - (1 + n) - 3S_n^1 =$$

$$= (n + 1)(n^2 + 2n + 1 - 1) - 3\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n+1}{2}(2n^2 + 4n - 3n) = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{2}$$

Deci:

$$S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (7.36)$$

În mod similar, se poate calcula şi suma puterii a treia a numerelor naturale:

$$S_n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

În acest caz, se pornește de la puterea a patra a binomului:

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$x = 1 \to 2^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$$

$$x = 2 \to 3^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1$$

$$x = 3 \to 4^4 = 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1$$

. . . . . .

$$x = n \to (n+1)^4 = n^4 + 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1$$

$$(n+1)^4 = 1^4 + 4S_n^3 + 6S_n^2 + 4S_n^1 + n \qquad (7.37)$$

Prin adunarea acestor relații, se reduc termenii de putere patru și se obține relația (7.37), din care se calculează S_n^3:

$$4S_n^3 = (n+1)^4 - (n-1) - 6S_n^2 - 4S_n^1 =$$

$$= (n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1) - 6 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= (n+1)\, n\, (n^2 + 3n + 3) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) =$$

$$= n(n+1)(n^2 + 3n + 3 - 2n - 1 - 2) = n^2 (n+1)^2.$$

Reținem că:

$$S_n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (S_n^1)^2 \qquad (7.38)$$

În același mod se pot calcula și celelalte sume de puteri ale numerelor naturale.

7.1.7. Analiza combinatorie cu repetiție

Aranjamente cu repetiție. Dacă în definiția aranjamentelor simple suprimăm restricția ca obiectele ce intervin într-o grupare să fie distincte, obținem „aranjamente cu repetiție".

Exemplu: — aranjamentele cu repetiție a trei elemente a_1, a_2, a_3 luate cîte două, sînt:

$$\left.\begin{array}{|c|c|c|} a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2a_2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3a_3 \end{array}\right\} \quad \alpha_3^2 = 9 = 3^2 \qquad (7.39)$$

Să presupunem că am format tabloul aranjamentelor cu repetiții a n elemente luate cîte $(m-1)$, pe care le notăm: α_n^{m-1}. Tabloul corespunzător al aranjamentelor cu repetiție a n elemente luate cîte m, se obține așezînd în fiecare grupă — la sfîrșit — fiecare din cele n elemente, deci, dacă notăm numărul aranjamentelor cu repetiție a n obiecte luate cîte m cu α_n^m, obținem formula de recurență:

$$\alpha_n^m = \alpha_n^{m-1}$$

Cum $\alpha_n^1 = n$, rezultă:

$$\alpha_n^m = n^m \tag{7.40}$$

Permutări cu repetiție. Dacă $m = n$, din formula aranjamentelor cu repetiție, obținem formula permutărilor cu repetiție a n obiecte:

$$\pi_n = \alpha_n^n = n^n \tag{7.41}$$

Combinări cu repetiție. Într-o grupare a combinărilor obișnuite, elementele erau distincte. Dacă acestea se repetă, grupările aparțin combinărilor cu repetiție, notat cu γ_n^m.

În exemplul următor, sînt prezentate combinările cu repetiție a patru obiecte, luate cîte trei:

$$\left.\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
a_1a_2a_3 & a_1a_2a_4 & a_1a_3a_4 & a_2a_3a_4 \\
a_1a_1a_1 & a_1a_1a_2 & a_1a_1a_3 & a_1a_1a_4 \\
a_2a_2a_1 & a_2a_2a_2 & a_2a_2a_3 & a_2a_2a_4 \\
a_3a_3a_1 & a_3a_3a_2 & a_3a_3a_3 & a_3a_3a_4 \\
a_4a_4a_1 & a_4a_4a_2 & a_4a_4a_3 & a_4a_4a_4 \\
\hline
\end{array}\right\} \gamma_4^3 = 20 \tag{7.42}$$

Din cauza simetriei, într-un tablou al combinărilor γ_n^m, un element apare de același număr de ori ca și toate celelalte. Totalul elementelor din tablou este, evident: $m\gamma_n^m$, iar un element din cele n apare de $\frac{m}{n}\gamma_n^m$ ori.

Dacă suprimăm o singură dată un element din toate grupările, de exemplu pe a_1, rămîne structura lui γ_n^{m-1}, care va conține elementele a_1 în afara celor suprimate, de $\frac{m-1}{n}\gamma_n^{m-1}$ ori.

În același timp a fost suprimat a_1 din fiecare grupare a lui γ_n^{m-1}, astfel încît acest element, în γ_n^m are două expresii:

$$\frac{m}{n}\gamma_n^m = \gamma_n^{m-1} + \frac{m-1}{n}\gamma_n^{m-1} = \frac{m+n-1}{n}\gamma_n^{m-1}$$

Rezultă relația de recurență:

$$\gamma_n^m = \frac{n+m-1}{m}\gamma_n^{m-1} \tag{7.43}$$

Cum $\gamma_n^1 = n$, dînd valori lui $m = 2, 3, \ldots, n$, se stabilește din aproape în aproape că:

$$\gamma_n^m = \frac{(n+m-1)(n+m-2), \ldots, (n+1)}{m!}\gamma_n^1 =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2), \ldots, (n+m-1)}{m!} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{m+n-1}^m \tag{7.44}$$

Deci, combinările cu repetiție se exprimă cu ajutorul combinărilor obișnuite.

7.1.7. Aplicații

1°. Să se stabilească prin metoda inducției următoarele formule:

$$A_1 = S_n^1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$A_2 = S_n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$A_3 = S_n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2°. Să se stabilească modelele următoarelor fenomene, pe baza observației experimentale:

A_4. Efectul la țintă al unui proiectil crește cu masa acestuia. Experiențele făcute cu proiectile de diferite mase, dar cu aceeași viteză de cădere (300 m/s) sînt înscrise în graficul următor, în care s-au stabilit grosimile de blindaje perforate:

m (N)	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1.5
δ (cm)	0,80	0,90	0,95	1,00	1,10	1,20

R. $\frac{\delta}{m} = \frac{0,8}{1} = \frac{0,9}{1,1} = \frac{0,95}{1,2} = \ldots = \frac{1,2}{1,5} = 0,8 \Rightarrow \delta = 0,8\ m = \text{k} \cdot \text{m}$

A_5. Efectul la țintă crește cu viteza proiectilului. Experiențele făcute cu proiectile de aceeași masă (1 N), dar cu viteze de cădere diferite, au condus la graficul de mai jos, în care s-au stabilit grosimile blindajelor perforate:

V (m/s)	300	320	340	360	380	500
δ (cm)	0,80	0,90	1,00	1,15	1,30	1,40

R. $\frac{\delta}{v^2} = \frac{0,8}{300^2} = \frac{0,90}{320^2} = \frac{1,00}{340^2} = \ldots = \frac{1,40}{400^2} = 9 \cdot 10^{-6}$

$$\delta = 9 \cdot 10^{-6} \cdot v^2 = k \cdot v^2$$

A_6. Pe baza experiențelor și a concluziilor precedente (A_5, A_6), să se stabilească modelul general al efectului la țintă al unui proiectil, considerînd masa și viteza acestuia.

R. $E = K \cdot m \cdot v^2$, energia proiectilului.

3°. Să se rezolve problemele:

A_7. În cîte moduri pot fi controlate simultan 6 unități, de 3 comisii?

R. $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

A_8. Cîte etichete de inventar, cu numere de patru cifre diferite se pot bate cu șase poansoane, avînd gravate cifrele: 1, 2, 3, 4, 5, 6?

R. $A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

A_9. Cîte etichete pot fi realizate în cazul precedent (A_8), dacă se folosește și un poanson cu cifra zero?

R. $A_7^4 - A_6^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 - 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$. Se scot numerele care încep cu cifra zero.

4°. Să se demonstreze identitățile:

$A_{10} = C_k^s C_{i+s}^{k-1} - C_{i+s}^{s-1} C_i^{k-s} = C_{i+s+1}^s C_i^{k-s-1}$

5°. Folosind expresia termenului general al binomului lui Newton, să se stabilească:

A_{11}. Coeficientul lui x^{10} din dezvoltarea:

$$(x^2 + 2)^8 - (x^2 - 2)^8$$

R. 896 x^{10}

A_{12}. Termenul al şaptelea din dezvoltarea:

$$\left(2x^3 - \frac{3}{x}\right)^{14}$$

R. $2^8 \cdot 3^6 \cdot C_{14}^6 \cdot x^{18}$

A_{13}. Coeficientul termenului liber (x^0) din dezvoltarea:

$$\left(3x - \frac{2}{x}\right)^{10}$$

R. $-2^5 \cdot 3^5 \cdot C_{10}^5$

A_{14}. Să se demonstreze, folosind binomul lui Newton, care este valoarea probabilităţii de a obţine o spargere în obiectiv (P_1) dintr-un număr de lovituri trase (s).

R. Se consideră următoarea dezvoltare a binomului lui Newton, în care p reprezintă probabilitatea producerii loviturii în obiectiv şi q probabilitatea obţinerii acesteia în afara lui pentru o lovitură trasă:

$$(q + p)^s = q^s + C_s^1 q^{s-1} p + C_s^2 q^{s-2} p^2 + \ldots\ldots + p^s = 1.$$

Dacă se notează primul termen din membrul al doilea cu P_0, al doilea termen cu P_1, ... iar ultimul termen cu P_s, se obţine:

$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_s = 1 \qquad (1)$$

În care:

$P_0 = q^s$, ceea ce înseamnă că nu avem nici o lovitură în obiectiv.

$P_1 = C_s^1 q^{s-1} p$, ceea ce înseamnă că $(s-1)$ lovituri sînt în afara obiectivului şi o lovitură în obiectiv (p)

.
.
.
.

Dacă se notează suma $P_1 + P_2 + \ldots + P_s = P_I$, fiecare termen al membrului întîi reprezintă probabilitatea de a avea cel puţin o lovitură în obiectiv.

În acest caz relaţia (1) se poate scrie:

$$P_0 + P_I = 1, \text{ deci}$$
$$P_1 = 1 - P_0 \text{ dar}$$
$$P_0 = q^s = (1 - p)^s$$

Rezultă $$P_I = 1 - (1 - p)^s$$

7.2. PROGRESII

Progresiile sînt şiruri de numere ordinare, în care, un termen oarecare este determinat de cel precedent, operat cu o constantă, prin adunare sau înmulţire.

Atunci cînd operaţia este de adunare, progresia se numeşte *aritmetică*, iar cînd aceasta este de înmulţire, progresia se numeşte *geometrică*.

7.2.1. Progresii aritmetice

În baza definiţiei de mai sus, şirul de numere ordonat:

$$\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n \tag{7.45}$$

respectă următoarea lege de formare a numerelor succesive:

$$a_2 = a_1 + r;\ a_3 = a_2 + r, \ldots, a_n = a_{n-1} + r \tag{7.46}$$

Constanta (r) ce se adună la un termen pentru a stabili valoarea termenului următor, se numeşte *raţie*.

Pentru a indica faptul că un şir de numere formează o progresie aritmetică, se foloseşte semnul de mai sus (7.45): $\div$

Relaţia de definiţie (7.45), permite să se scrie:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r \\ a_4 &= a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r \\ a_n &= a_{n-1} + r = \ldots = a_1 + (n-1)\,r \end{aligned} \tag{7.47}$$

Ultima relaţie s-a stabilit prin inducţie şi trebuie verificată prin inducţia completă:

$$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n-1)r + r = a_1 + nr \tag{7.48}$$

Într-adevăr, relaţia (7.47) stabilită pe baza definiţiei, este identică cu cea dedusă prin inducţie şi confirmă valabilitatea sa:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r \tag{7.49}$$

Această formulă stabileşte valoarea termenului general (al n-lea), în funcţie de „primul termen a_1", de „numărul termenilor n" şi de „raţia r":

$$a_n = f(a_1, n, r) \tag{7.50}$$

În consecință, progresia aritmetică este definită de trei parametri fundamentali (a_1, n, r). Ea are următoarea proprietate: suma termenilor egal depărtați de extreme este constantă. Pentru a o demonstra, o vom exprima matematic:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a^3 + a_{n-2} = \ldots \tag{7.51}$$

Cu ajutorul formulei (7.49), se poate scrie:

$$a_1 + a_1 + (n - 1)\, r = (a_1 + r) + a_1 + (n - 2)\, r = \ldots$$

sau:

$$2\, a_1 + (n - 1)\, r = 2a_1 + (n - 1)\, r = \ldots = \text{etc.}$$

Să verificăm acest lucru pe progresia următoare:

$$\div 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \ 17,\ 20,\ 23 \tag{7.52}$$

care are:

$$a_1 = 2;\ r = 3;\ n = 8$$

$$2 + 23 = 5 + 20 = 8 + 17 = 11 + 14 = 25$$

Un termen oarecare, spre exemplu al cincilea ($a_5 = 14$), se poate obține cu ajutorul formulei (7.49):

$$a_5 = a_1 + 4\, r = 2 + 4 \cdot 3 = 14$$

În cazul aceleiași progresii, dar cu un număr impar de termeni, lucrurile se prezintă în mod similar.

Fie:

$$\div 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ 26 \tag{7.53}$$

progresia aritmetică, cu: $a_1 = 2$; $r = 3$; $n = 9$.

$$2 + 26 = 5 + 23 = 8 + 20 = 11 + 17 = 14 + 14 = 28$$

În acest caz termenul mijlociu (14) se adună cu el însuși.

O altă problemă legată de aceste șiruri de numere, constă în stabilirea sumei termenilor săi:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \tag{7.54}$$

Folosind proprietatea anterioară (7.51) rezultă:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} \tag{7.55}$$

În cazul progresiei (7.52), se poate determina cu ajutorul formulei (7.55) suma termenilor:

$$S_8 = (2 + 23) \cdot \frac{8}{2} = 25 \cdot 4 = 100$$

Într-adevăr: $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 32 = 100$.

Pentru progresia (7.53), lucrurile se petrec la fel:

$$S_9 = (2 + 26) \cdot \frac{9}{2} = \frac{28 \cdot 9}{2} = 14 \cdot 9 = 126$$

ori:

$$S_n = S_8 + 26 = 100 + 26 = 126.$$

Progresia aritmetică de trei termeni

Un caz frecvent întîlnit este cel al progresiei cu trei termeni:

$$\div a_1,\ a_2,\ a_3 \tag{7.56}$$

Folosind proprietatea (7.51), rezultă:

$$a_1 + a_3 = 2\ a_2 \quad \text{sau:} \quad a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \tag{7.57}$$

adică, termenul mijlociu este „media aritmetică" a celorlalți doi.

Avînd numai trei termeni, această progresie poate fi exprimată foarte simplu:

$$\div a_1\ ;\ a_1 + r\ ;\ a_1 + 2r \tag{7.58}$$

Mult mai practic este de a se exprima sub forma următoare:

$$\div a_2 - r\ ;\ a_2\ ;\ a_2 + r \text{ sau } a - r\ ;\ a\ ;\ a + r \tag{7.59}$$

permițînd rezolvarea unor probleme, în care se face sinteza unei progresii cu suma termenilor dată. Spre exemplu, se cere să se stabilească condiția ca progresia aritmetică să aibă suma egală cu 9.

Folosind notația (7.59), rezultă:

$$S = (a - r) + a + (a + r) = 3a$$

iar:

$$a = \frac{S}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Avantajul acestei notații este evident, deoarece, prin adunare se reduce rația.

Exemple de calcul

(E_{27}) S-a constatat că fiecare proiectil tras cu un tun de 100 mm, uzează ţeava prin frecarea brîului forţator şi a efectelor de eroziune chimică cu $2 \cdot 10^{-5}$ mm. Să se stabilească valoarea calibrului ţevii, după tragerea cu 20 000 proiectile.

Diametrele succesive ale ţevii, măsurate după fiecare lovitură, formează o progresie aritmetică:

$$\div D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n,$$

în care: $D_1 = 100$ mm $= 10^2$ mm; $r = 2 \cdot 10^{-5}$ mm; $n = 20\,000$. Rezultă:

$$D_n = D_1 + (n - 1)\, r = 100 + 20\,000 \cdot 2 \cdot 10^{-5} =$$

$$= 100 + 4 \cdot 10^4 \cdot 10^{-5} = 100 + 4 \cdot 10^{-1} = 100{,}4 \text{ mm}.$$

(E_{28}) Diametrul maxim admis prin uzura unei guri de foc cu calibrul de 120 mm este de 121 mm. Ştiind că fiecare proiectil uzează ţeava cu $8 \cdot 10^{-6}$ mm, să se stabilească numărul de proiectile ce pot fi trase cu acest material.

În mod asemănător problemei precedente, şirul de diametre succesive formează o progresie aritmetică: $D_1 = 120$ mm; $r = 16 \cdot 10^{-6}$ mm; $D_n = 121$ mm.

De data aceasta nu se cunoaşte numărul termenilor (n); în schimb se cunoaşte ultimul termen. Deci:

$$D_n = D_1 + (n - 1)\, r \quad \text{sau:} \quad n - 1 = \frac{D_n - D_1}{r} = \frac{121 - 120}{16 \cdot 10^{-6}}$$

sau:

$$n - 1 = \frac{10^6}{16} = 62\,500 \text{ proiectile}.$$

(E_{29}) Pentru a neutraliza un obiectiv, se efectuează o tragere timp de trei ore, astfel încît consumul de muniţie să scadă în fiecare oră cu 20 proiectile. Să se repartizeze 180 proiectile pe cele trei ore.

Cantităţile de lovituri afectate fiecărei ore, formează o progresie aritmetică descrescătoare:

$$\div L_1, L_2, L_3 \quad \text{sau:} \quad a + r;\ a;\ a - r$$

în care se cunoaşte: $n = 3$ termeni; $r = 20$; $S = 180$.

Deci:

$$(a + r) + a + (a - r) = 3a = 180$$

Rezultă: $a = 180/3 = 60$ lovituri şi progresia:

$$\div 80,\ 60,\ 40.$$

7.2.2. Progresii geometrice

Şirul ordonat de numere:

$$\div b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots, b_{n-1},\ b_n \tag{7.60}$$

formează o progresie geometrică, dacă respectă următoarea lege:

$$b_2 = b_1 \cdot q\ ;\ b_3 = b_2 q\ ;\ b_4 = b_3 \cdot q, \ldots,\ b_n = b_{n-1} \cdot q \tag{7.61}$$

în care: b_1 este primul termen al progresiei, q este *raţia* cu care se înmulţeşte un termen spre a-l obţine pe următorul, iar n este numărul termenilor.

Legea de mai sus (7.61) permite să se scrie:

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 q \\ b_3 &= b_2 q = (b_1 q) \cdot q = b_1 q^2 \\ b_4 &= b_3 q = (b_1 q^2) \cdot q = b_1 q^3 \\ &\cdots \qquad\qquad \cdots \\ b_n &= b_{n-1} q = \ldots = b_1 q^{n-1} \end{aligned} \tag{7.62}$$

Ultima relaţie s-a stabilit prin inducţie şi trebuie verificată prin inducţia completă:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q = (b_1 q^{n-1}) \cdot q = b_1 q^n \tag{7.63}$$

care confirmă valabilitatea sa. Reţinem deci:

$$b_n = b_1 q^{n-1} \tag{7.64}$$

ca valoare a termenului general sau al n-lea.

Ca şi progresia aritmetică, această progresie este determinată de trei parametri fundamentali (b_1, q, n). Ea are următoarea proprietate: produsul termenilor egal depărtaţi de extreme este constant. Într-adevăr:

$$b_1\, b_n = b_2\, b_{n-1} = b_3\, b_{n-2} = \ldots \tag{7.56}$$

deoarece:

$$b_1 \cdot b_1 q^{n-1} = b_1 q \cdot b_1 q^{n-2} = \ldots = b_1^2 q^{n-2}$$

Să verificăm acest lucru pe următoarea progresie:

$$\div 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32 \tag{7.66}$$

care are:

$$1 \cdot 32 = 2 \cdot 16 = 4 \cdot 8 = 32$$

Un termen oarecare, spre exemplu al cincilea ($b_5 = 16$) se obține cu formula (7.64):

$$b_5 = b_1 \cdot q^4 = 1 \cdot 2^4 = 16$$

În cazul progresiei cu un număr impar de termeni, lucrurile se petrec în mod similar:

Fie: $\div 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64$ (7.67)

progresia geometrică, avînd: $b_1 = 1$; $q = 2$; $n = 7$.

$$1 \cdot 64 = 2 \cdot 32 = 4 \cdot 16 = 8 \cdot 8 = 64$$

Ca și în cazul progresiei aritmetice, termenul mijlociu (8) se înmulțește cu el însuși.

Suma termenilor progresiei geometrice se calculează direct:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} =$$
$$= b_1 (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$$

Deci:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{7.68}$$

deoarece: $q^n - 1 = (q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1)$ este o identitate algebrică cunoscută și ușor de verificat.

În cazul progresiei (7.66), se poate calcula suma:

$$S_6 = 1 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 63.$$

Într-adevăr: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$.

Pentru progresia 7.67, lucrurile se petrec la fel:

$$S_7 = 1 \cdot \frac{2^7 - 1}{2 - 1} = 127 = S_6 + S_7 = 63 + 64 = 127.$$

Progresia geometrică cu trei termeni este întîlnită frecvent:

$$\div b_1,\ b_2,\ b_3 \tag{7.69}$$

Folosind proprietatea (7.65), rezultă:

$$b_1 b_3 = b_2^2 \quad \text{sau:} \quad b_2 = \sqrt{b_1 b_3} \tag{7.70}$$

adică termenul mijlociu este „media geometrică" a celorlalți doi.

Progresia cu trei termeni se poate exprima mai simplu:

$$\mp b_1 \; ; \; b_1 q \; ; \; b_1 q^2 \quad \text{sau:} \quad \mp \frac{b}{q} \; ; \; b \; ; \; bq \tag{7.71}$$

formă utilă în unele probleme uzuale. Spre exemplu, se cere ca progresia geometrică să aibă produsul termenilor egal cu 27.

Folosind notația (7.27), rezultă:

$$\frac{b}{q} \cdot b \cdot bq = b^3 = 27 \Rightarrow b = 3.$$

Exemple de calcul

(E_{30}) Care este formula de calcul a sumei progresiei geometrice descrescătoare?

În acest caz: $q < 1$, iar formula (7.68) rămîne neschimbată, dar poate fi scrisă astfel:

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \tag{7.72}$$

spre a avea pozitivi ambii termeni ai fracției.

(E_{31}) Care este suma unei progresii cu termeni nelimitați ca număr?

Este evident că un număr supraunitar ($q > 1$) are puteri crescătoare; iar cînd puterea este infinită ($n \to \infty$), valoarea sa este infinită:

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \infty, \text{ dacă } q > 1 \tag{7.73}$$

În acest caz:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \infty \tag{7.74}$$

Un număr subunitar ($q < 1$) are puteri descrescătoare, iar la o putere infinită ($n \to \infty$), valoarea sa devine zero:

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0, \text{ dacă: } q < 1 \tag{7.75}$$

Deci, într-o progresie descrescătoare:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} \tag{7.76}$$

(E_{32}) Să se afle media geometrică a numerelor 3 și 4.

$$x^2 = 3 \cdot 4 \qquad x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

(E_{33}) În ce condiții o progresie cu trei termeni poate fi simultan geometrică și aritmetică?

Fie: $\frac{b}{q}$, b, bq progresia geometrică.

Pentru a fi și progresie aritmetică, trebuie ca:

$$2b = \frac{b}{q} + bq$$

sau

$$2q = 1 + q^2, \text{ respectiv: } (q-1)^2 = 0$$

Deci, acest lucru se petrece numai cînd $q = 1$ și cînd nu există o progresie geometrică, deoarece aceasta devine: b, b, b.

În acest caz, progresia aritmetică ar avea rația zero.

7.3. ȘIRURI DE NUMERE REALE

7.3.1. Definiția șirului

Am văzut că, în reprezentarea grafică, se afectează o axă pentru fiecare mulțime. Astfel, pentru mulțimea:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

se folosesc ca imagini punctele: $1, 2, 3, \ldots, n$, echidistante, de pe o dreaptă. În consecință, se creează o corespondență, stabilită de următorul grafic:

n	1	2	2	4	...	n
a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_n

Evident că aceasta este o funcție: $n \to a_n$, care asigură unui șir de numere reale ($a_n \in R$) „indici" (n), numere naturale: $n \in N$.

Dacă mulțimea numerelor reale (a_n) se scrie în ordinea crescătoare a indicilor, se numește *șir de numere*:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \qquad (7.77)$$

Numerele a_1, a_2... se numesc *termenii* şirului; a_1 este primul termen sau termenul de rang 1, a_2 este termenul al doilea sau de rang 2 etc. Elementul generic al mulţimii (a_n) se numeşte *termenul general.*

E x e m p l e de şiruri:

(E_{34}) 1, 2, 3, 4,..., n — şirul numerelor naturale;

1, 3, 5, 7,..., $(2n + 1)$ — şirul numerelor impare;

2, 4, 6, 8,..., $2n$ — şirul numerelor pare;

$-1, -2, -3, \ldots, -n$ — şirul numerelor întregi negative.

Se observă că aceste şiruri se formează după o lege, în sensul că termenul general are o expresie dată de indicele n:

$$a_n = n \; ; \; a_n = 2n + 1 \; ; \; a_n = 2n \; ; \; a_n = -n$$

În aceste cazuri, graficul funcţiilor respective se obţine prin calcule simple, deoarece pentru o valoare dată indicelui n se obţine imediat corespondentul său a_n.

Şirul numerelor impare, spre exemplu, poate fi determinat prin graficul său, cu ajutorul termenului general:

$$a_n = 2n + 1:$$

$$n = 0 \quad a_0 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$n = 1 \quad a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$n = 2 \quad a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

. . . . . .

Dacă termenul general este exprimat în funcţie de indicele său sub o formă oarecare, şirul se determină la fel.

(E_{35}) Pentru: $a_n = \frac{n+1}{n+2}$, şirul se obţine astfel:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{3+1}{3+2} = \frac{4}{5}$$

. . . . . .

adică:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n+1}{n+2}$$

La astfel de şiruri, li se poate stabili termenul general, ca în exemplul următor:

(E_{36}) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}$; metoda constă în inducţie.

(E_{37}) Să urmărim inducţia pentru stabilirea termenului general al şirului următor:

$$1, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10} \ldots$$

Se scrie:

$$a_1 = 1 = \frac{1+1}{1 \cdot 2}$$

$$a_2 = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$$

$$a_3 = \frac{4}{6} = \frac{3+1}{3 \cdot 2}$$

$$a_4 = \frac{5}{8} = \frac{4+1}{4 \cdot 2}$$

se induce :

$$a_n = \frac{n+1}{n \cdot 2} = \frac{n+1}{2n}$$

(E_{38}) Să se stabilească expresia termenului general al şirului următor:

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1 \ldots\ldots$$

Se observă că:

$$a_1 = 1 = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$a_2 = 0 = \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$a_3 = -1 = \sin 3 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$a_4 = 0 = \sin 4 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

deci:

$$a_n = \sin n \frac{\pi}{2}$$

Evident că pot exista șiruri de numere, care nu au un termen general dependent de indice:

(E_{39}) 1, 5, —2, 14, —3, —5, 12 — șir de numere naturale;

$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{7}, -\frac{2}{5}$ — șir de numere raționale.

În astfel de cazuri, care nu prezintă un interes deosebit, nu se poate stabili expresia termenului general.

7.3.2. Șiruri mărginite și nemărginite

Un șir de numere (a_n) este mărginit inferior, dacă există un număr m, mai mic decît oricare termen al său:

$$m \leqslant a_n, \text{ pentru oricare } n \in N \tag{7.78}$$

Exemplul (E_{40}) Șirul numerelor naturale este mărginit inferior, deoarece se găsește oricînd un număr m mai mic decît oricare termen al său. Astfel, dacă alegem orice valoare negativă pentru m (ex.: $m=-1$), sîntem siguri că: $-1 < n$.

De asemenea, dacă alegem pe $m=0$, acesta este mai mic decît orice număr natural:

$$0 < n, \text{ cînd } n \in N.$$

Un șir de numere (a_n) este mărginit superior, dacă există un număr M, mai mare decît oricare termen al său:

$$M \geqslant a_n \text{ pentru oricare } n \in N \tag{7.79}$$

Exemplul (E_{41}) Șirul numerelor întregi negative $(-n)$ este mărginit superior, pentru că oricînd se găsește un număr M mai mare decît oricare termen al său. Astfel, dacă alegem orice valoare pozitivă pentru M (ex.: $M = 2$):

$$2 \geqslant (-n) \; ; \; n \in N$$

Un șir de numere (a_n) este mărginit, dacă este mărginit simultan superior și inferior. Înseamnă că termenii săi satisfac dubla condiție:

$$m \leqslant a_n \leqslant M \tag{7.80}$$

pentru oricare $n \in N$.

Exemplul (E_{42}) Șirul: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$ este mărginit, deoarece:

$$M = 1 \geqslant a_n \text{ și } m = 0 \leqslant a_n \text{ pentru } n \in N.$$

Într-adevăr, cel mai mare termen al şirului este primul ($a_1=1$); termenii următori descresc, dar nu ajung la valoarea zero.

Rezultă că: $$0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1|.$$

Un şir (a_n) este nemărginit superior, dacă oricare ar fi numărul M, există un termen a_n din şir mai mare decît acesta:

$$a_n \geqslant M \tag{7.81}$$

E x e m p l u l (E_{43}) Şirul numerelor naturale este nemărginit superior.

Un şir (a_n) este nemărginit inferior, dacă oricare ar fi numărul m, există un termen a_n al şirului mai mic decît acesta:

$$a_n \leqslant m \tag{7.82}$$

E x e m p l u l (E_{44}) Şirul numerelor întregi negative este nemărginit inferior.

Un şir (a_n) este nemărginit, dacă este nemărginit superior şi inferior.

E x e m p l u l (E_{45}) Şirul numerelor întregi este nemărginit.

7.3.3. Şiruri monotone

Un şir (a_n) este crescător, dacă:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant, \ldots, \leqslant a_n \leqslant \ldots \tag{7.83}$$

şi strict crescător, dacă:

$$a_1 < a_2 < a_3 < , \ldots, < a_n < \ldots \tag{7.84}$$

Este descrescător, dacă:

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant , \ldots, \geqslant a_n \geqslant \ldots \tag{7.85}$$

şi strict descrescător, dacă:

$$a_1 > a_2 > a_3 > , \ldots, > a_n > \ldots \tag{7.86}$$

E x e m p l e :

(E_{46}) Şirurile: 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6 ...

1, 4, 7, 10, 13 ...

sînt crescătoare; al doilea este monoton crescător.

(E_{47}) Şirurile: $-1, -2, -2, -3, -4, \ldots$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n} \ldots$$

sînt descrescătoare, al doilea este monoton descrescător.

(E_{48}) Şirul: $2, 2, 2, 2 \ldots$

este constant şi satisface condiţiile celor crescătoare şi descrescătoare.

(E_{49}) Şirurile: $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

$$1, -2, 3, -4, 5 \ldots$$

nu sînt nici crescătoare, nici descrescătoare, nici constante.

Şirul crescător sau descrescător se numeşte *şir monoton*. Şirul strict crescător sau strict descrescător se numeşte *strict monoton*.

O submulţime a şirului se numeşte *subşir* şi păstrează proprietăţile acestuia.

7.3.4. Şiruri convergente şi divergente

Şirurile pot avea un număr finit (discret) de termeni sau un număr infinit (nelimitat) de termeni. În cele ce urmează ne vom ocupa de cele cu o infinitate de termeni.

Şirul: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n} \ldots$ are o infinitate de termeni şi este strict descrescător; termenii săi descresc necontenit şi se apropie treptat de zero. În reprezentarea grafică (figura 7.2), se constată că termenii săi succesivi se apropie tot mai mult unii de alţii.

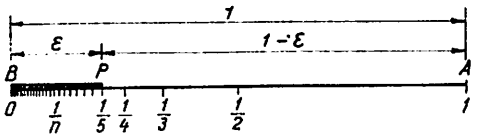


Fig. 7.2

Pentru a ilustra acest fapt, să luăm un punct P pe segmentul de dreaptă $AB = 1$, care îl împarte în două părţi: $BP = \varepsilon$ şi $PA = 1 - \varepsilon$.

Se observă cu uşurinţă că în porţiunea AP este cuprins un număr finit (discret) de termeni, oricît de mare ar fi indicele ($n = 1, 2, 3, 4 \ldots$), adică oricît s-ar mări lungimea AP. În acelaşi timp în porţiunea BP este cuprins un număr infinit de termeni ai şirului.

Rezultă că în vecinătatea (ε) lui B, respectiv a valorii zero de pe axă, rămîn mereu o infinitate de termeni, oricît de mică ar fi valoarea lui ε. În afara acestei vecinătăți rămîn totdeauna un număr finit de termeni, cu atît mai mare, cu cît vecinătatea (ε) este mai restrînsă. Cu alte cuvinte, numărul discret de termeni (n) rămași în afara vecinătății (ε), depinde de mărimea acesteia.

Se spune că numărul $a=0$ este *limita șirului* de mai sus, pentru că orice vecinătate a sa (ε) conține toți termenii șirului (o infinitate), în afară de un număr finit de termeni, hotărît de mărimea vecinătății, care se află în afara acestei vecinătăți.

Un șir de acest fel, care are o limită, se numește *șir convergent*.

În general, a este limita unui șir (a_n) cu un număr infinit de termeni, dacă orice vecinătate (ε) a lui a conține toți termenii șirului, cu excepția unui număr finit de termeni, aflați în afara vecinătății. Această definiție se exprimă astfel:

$$|a - a_n| < \varepsilon \qquad (.87)$$

Conform definiției valorii absolute a unui număr (2.29), condiția aceasta se interpretează astfel:

— dacă $a - a_n > 0$ se folosește valoarea: $a - a_n$;

— dacă $a - a_n < 0$ se folosește valoarea: $a_n - a$,

pentru că valoarea vecinătății (ε) se consideră totdeauna pozitivă: $\varepsilon > 0$.

Cînd a este limita șirului a_n, se scrie astfel:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \qquad (7.88)$$

Limita poate fi definită și cu referire la numărul termenilor (N) aflați în afara vecinătății limitei (a):

Un număr a este limita unui șir (a_n), dacă pentru orice vecinătate a sa ($\varepsilon > 0$), există un număr finit $N(\varepsilon)$ de termeni aflați în afara vecinătății, restul de termeni, infinit ca număr, aparținînd vecinătății.

Exemple:

($\mathbf{E_{50}}$) Să se demonstreze că limita șirului:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1} \text{ este: } a = 1.$$

1) Folosind relația (7.88), se scrie:

$$a = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

Ori:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0$$

Deci:

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+0}=\frac{1}{1}=1$$

2) Folosind relația (7.87), în care cunoaștem $a=1$, rezultă:

$$1-\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

sau:

$$\frac{n+1-n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

sau:

$$1<n\varepsilon+\varepsilon\Rightarrow n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}=N\ (\varepsilon)$$

Deci, conform definiției a doua, există un număr finit $N(\varepsilon)$ de termeni, aflați în afara vecinătății.

Astfel, pentru o vecinătate: $\varepsilon=0{,}001=10^{-3}$

$$N=\frac{1-0{,}001}{0{,}001}=\frac{0{,}999}{0{,}001}=999.$$

Deci, în afara vecinătății există 999 termeni, restul aparținînd acesteia.

Pentru: $\varepsilon=0{,}000001=10^{-6}$

$$N=\frac{1-0{,}000001}{0{,}000001}=\frac{0{,}999999}{0{,}000001}=999999.$$

Micșorînd vecinătatea (ε), numărul termenilor rămași în afara sa a crescut simțitor, dar numărul lor a rămas finit.

(E_{51}) Să se calculeze limita șirului cu termenul general: $a_n=\frac{n^2+1}{2n^2}$, precum și numărul termenilor din afara vecinătății $\varepsilon=0{,}01$.

Se calculează limita:

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{2}$$

ori:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Deci:

$$a = \frac{1}{2}.$$

Pentru numărul termenilor $N(\varepsilon)$, se folosește relația (7.87):

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{n^2+1}{2n^2} \right| < \varepsilon$$

sau:

$$\left| \frac{2n^2 - 2n^2 - 2}{2n^2} \right| < \varepsilon$$

deci:

$$\left| \frac{-2}{2n^2} \right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

sau:

$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = N(\varepsilon).$$

Deci $$N = \frac{1}{\sqrt{0,01}} = \frac{1}{0,1} = 10$$

Un șir (a_n) este divergent, dacă oricare ar fi numărul a, există o vecinătate a sa (ε), în afara căreia se află o infinitate de termeni ai șirului. În acest caz, șirul are limita $(+\infty)$ sau $(-\infty)$.

(E_{52}) Șirul numerelor naturale: $a_n = n$ este divergent:

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Șirul numerelor: $a_n = 2^n$ este divergent:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = 2^\infty = \infty$$

(E_{53}). Șirul numerelor întregi negative: $a_n = -n$ este divergent:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

7.3.5. Numărul e

Pe baza proprietăților șirurilor de numere reale, se deduc cu ușurință o serie largă de alte proprietăți. Fără a le enumera pe toate și fără a le demonstra, vom aminti cîteva mai importante.

- Orice șir convergent este mărginit, iar orice șir nemărginit este divergent.
- Un șir convergent cu termeni pozitivi are limita pozitivă.
- Dacă la un șir convergent se adaugă sau se scoate un număr finit de termeni, șirul rezultat este tot convergent și are aceeași limită.
- Suma a două șiruri convergente $(a_n + b_n)$, produsul lor $(a_n\, b_n)$ și cîtul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sînt șiruri convergente:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b \tag{7.89}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha\, a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha\, a \tag{7.90}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = ab \tag{7.91}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{a}{b} \tag{7.92}$$

cu condiția ca: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$

- Dacă a_n și b_n sînt două șiruri convergente, iar $a_n \leqslant b_n$ pentru oricare $n \in N$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n \tag{7.93}$$

- Orice subșir al unui șir convergent este convergent și are aceeași limită (lema lui Cesàro).
- Limita unui șir crescător și convergent este mai mare decît toți termenii șirului.
- Orice șir monoton și mărginit este convergent.
- Dacă a_n și b_n sînt două șiruri de numere reale, care verifică următoarele două condiții:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$$

și:

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

atunci șirurile a_n și b_n sînt convergente și au aceeași limită:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \tag{7.94}$$

● Pentru orice număr real x există două șiruri a_n și b_n de numere raționale, cu următoarele proprietăți:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant x \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$$

și

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x = \lim_{n\to\infty} b_n \tag{7.95}$$

Numărul e. Fie șirul:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ldots$$

cu termenul general:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{7.96}$$

Dezvoltînd acest binom după formula lui Newton, rezultă:

$$a_n = 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots$$

$$+ \ldots \frac{n(n-1),\ldots,(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1),\ldots,2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n_n}$$

Se observă că un termen oarecare are valoarea:

$$a_{nk} = \frac{n(n-1),\ldots,(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n},\ldots,\frac{n-k+1}{n}}{k!} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right),\ldots,\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

Se observă de asemenea că toate parantezele acestui termen sînt pozitive, deoarece:

$$\frac{k-1}{n} < 1 \text{ și subunitare: } 1 > a_{nk} > 0. \tag{7.97}$$

Înlocuind această valoare în expresia de mai sus, se obține:

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$

Întrucît toți termenii sînt pozitivi, rezultă că:

$$a_n > 2 \tag{7.98}$$

Faptul că acești termeni sînt subunitari, permite să se scrie:

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

sau:

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

deci:

$$a_n < 1 + 2 = 3$$

Așadar:

$$2 < a_n < 3 \text{ pentru } n \in N, \tag{7.99}$$

ceea ce înseamnează că șirul este mărginit. El este și crescător.

Într-adevăr:

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$

ori:

$$\frac{i}{n} > \frac{i}{n+1} \Rightarrow -\frac{i}{n} < -\frac{i}{n+1},$$

sau:

$$1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{n+1}$$

Deci, fiecare termen al sumei care dă pe a_n este mai mic decît termenul corespunzător al sumei care dă pe a_{n+1}.

Fiind crescător și mărginit, șirul dat este convergent. Limita sa se notează cu litera e:

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718 \tag{7.100}$$

PARTEA A DOUA

Ecuații și inecuații

CAPITOLUL 8

ECUAȚII ȘI INECUAȚII ALGEBRICE

Ecuațiile reprezintă o clasă de egalități mai generală decît cea a funcțiilor. Studiul lor este dificil, deoarece mijloacele de investigare sînt reduse, iar prezentarea lor este îngreunată de multiplele aspecte ale clasificării. În cele ce urmează vom face o clasificare după criterii mai importante, privind căile de investigare.

● După numărul necunoscutelor, ecuațiile pot fi: cu o necunoscută, cu două etc.

● După numărul ecuațiilor simultane: cu o ecuație, cu două etc. Atunci cînd un proces este hotărît de mai multe fenomene, iar modelele acestora presupun soluțiile simultane ale ecuațiilor corespunzătoare, se vorbește de *sisteme de ecuații*.

● După gradul ecuației, egal cu cel mai mare grad al monoamelor componente, în raport cu toate necunoscutele: gradul întîi, doi etc.

● După felul coeficienților: coeficienți întregi, iraționali, reali, complexi.

● După felul expresiilor algebrice: ecuații raționale și iraționale.

● După felul rădăcinilor: cu rădăcini întregi, fracționare, iraționale, complexe.

Aceste aspecte variate generează metode specifice de rezolvare a ecuațiilor, care nu pot fi prezentate după nici unul din criteriile de mai sus. De aceea, în cele ce urmează, vom dezvolta metode de rezolvare, după un criteriu didactic.

Proprietăți ale polinoamelor

În cele ce urmează, vom stabili cîteva proprietăți esențiale pentru studiul ecuațiilor algebrice, referitoare la polinomul cu o variabilă de grad oarecare (n).

1.° *Polinoame identice*

Fie: $P(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$

și

$$Q(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \ldots + B_{n-1} x + B_n$$

două polinoame cu o variabilă (x), de gradul n.

Punem condiția ca aceste polinoame să fie identice: $P(x) \equiv Q(x)$.

Semnul de identitate ($\equiv$) subliniază faptul că egalitatea este valabilă pentru oricare valoare dată variabilei x.

Acest lucru poate fi exprimat și astfel: $P(x) = Q(x)$ pentru $\forall x$, unde semnul $\forall x$ înseamnă „pentru oricare x".

Rezultă:

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1} x + B_n$$

Egalitatea trebuind să existe și pentru valoarea particulară: $x = 0$, se obține: $A_n = B_n$.

Reducînd acești doi termeni din relație și simplificînd cu x, rămîne:

$$A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} = B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \ldots + B_{n-1}$$

Repetînd raționamentul, pentru $x = 0$, rezultă $A_{n-1} = B_{n-1}$. În continuare, se obține condiția de existență a identității a două polinoame:

$$A_i = B_i\,;\ i = 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n$$

Deci, coeficienții acelorași puteri trebuie să fie egali.

2°. *Relațiile lui Viète.* Să efectuăm înmulțirea ordonată a lui:

$$P(x) = A\ (x - a_1)\ (x - a_2),\ldots,(x - a_n),$$

care dă:

$$P(x) = A\ [x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} - S_3 x^{n-3} + \ldots \pm S_n]$$

unde:

$S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, cu C_n^1 termeni

$S_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_3 a_3 + \ldots + a_2 a_3 + \ldots$, cu C_n^2 termeni

$S_3 = a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \ldots$, cu C_n^3 termeni

$\vdots$

$S_n = x_1 x_2 x_3, \ldots, x_n$, cu $C_n^n = 1$ termen.

Fie:

$$Q(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n \quad (8.10)$$

un polinom de același grad (n) cu $P(x)$.

Să stabilim condițiile ca aceste polinoame să fie identice: $P(x) = Q(x)$.

$$Ax^n - AS_1 x^{n-1} + AS_2 x^{n-2} \ldots \pm AS_n \equiv A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n$$

În baza teoremei precedente, trebuie satisfăcute condițiile stabilite de Viète:

$$A = A_0;\ -AS_1 = A_1;\ AS_2 = A_2;$$

sau:

$$A = A_0;\ S_1 = -\frac{A_1}{A_0};\ S_2 = \frac{A_2}{A_0};$$

Rezultă, totodată, că un polinom de gradul n poate fi transformat într-un produs de n binoame de gradul întîi:

$$Q(x) = A.\ \prod_1^n (x - a_i);\ i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

ale căror constante (a_i) satisfac relațiile lui Viète.

8.1. ECUAȚII DE GRAD INFERIOR CU O NECUNOSCUTĂ

8.1.1. Ecuații de gradul I cu o necunoscută

1°. *Studiu analitic.* Forma generală a ecuației de gradul I este următoarea:

$$ax + b = 0 \quad (8.1)$$

Rezolvarea sa se face prin separarea necunoscutei:

$$ax = -b \to x = -\frac{b}{a} \quad (8.2)$$

Exemple:

(E_1) $\quad 2x + 3 = 0 \to x = -\frac{3}{2}$

(E_2) $\quad \frac{3x}{4} - 1 = \frac{x}{2} + \frac{2}{3}$

Se elimină numitorii, înmulțind ecuația cu c.m.m.m.c. al numitorilor (12):

$$9x - 12 = 6x + 8$$

Se separă necunoscuta:

$$9x - 6x = 12 + 8 \Rightarrow 3x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{3}$$

(E_3) $\quad (2x + 3)(3x - 5) = (6x + 1)(x - 4)$

Se efectuează calculele:

$$6x^2 - x - 15 = 6x^2 - 23x - 4$$

$$22x = 11 \rightarrow x = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$$

(E_4) $\quad \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$

Se elimină numitorii, înmulțind ecuația cu c.m.m.m.c. al acestora $(x - 1)(x - 2)$:

$$x - 2 + 2(x - 1) = x + 1$$

$$2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

(E_5) $\quad a(x + 1) + b(x - 1) = b$

Se efectuează calculele:

$$ax + a + bx - b = b$$

$$x(a + b) = 2b - a \Rightarrow x = \frac{2b - a}{a + b}$$

2°. *Studiu grafic.* Ecuația de gradul I cu o necunoscută poate fi interpretată ca un caz particular al funcției cu o variabilă de gradul I:

$$y = ax + b \qquad (8.3)$$

cînd funcția asociată este nulă $(y = 0)$.

În reprezentarea grafică (figura 8.1), această relație descrie o dreaptă, întrucît:

$$\frac{y - b}{x} = \frac{y_i - b}{x_i} = \operatorname{tg}\alpha = a \Rightarrow \alpha = \text{constant} \qquad (8.4)$$

Într-adevăr, un punct oarecare $P(x_i, y_i)$, care verifică relația (8.4) aparține dreptei A, B :

$$\left.\begin{aligned} A\left(-\frac{b}{a}, 0\right) &\Leftarrow \{y = 0\,;\ x = -b/a\}\,; \\ B\,(0, b) \qquad &\Leftarrow \{x = 0\,;\ y = b\} \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

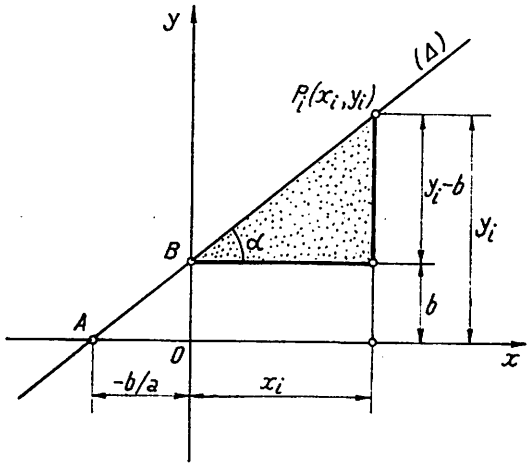


Fig. 8.1

Punctele A și B sînt intersecțiile funcției (dreapta Δ) cu axele și foarte utile în reprezentarea grafică, deoarece se obțin ușor, prin relațiile (8.5).

Cazul particular al funcției nule ($y = 0$), conduce la ecuația: $ax + b = 0$, și la stabilirea soluției sale prin abscisa punctului A : intersecția funcției cu axa absciselor ($x = -b/a$).

Exemplu (E_6). Să se reprezinte grafic funcția de gradul I:

$$y = \frac{2x - 3}{2}$$

Se stabilesc intersecțiile cu axele: A ($x = 0$, $y = -3/2$) și B ($y = 0$, $x = 3/2$) ca în figura 8.2. Dreapta AB este imaginea funcției date, astfel încît punctele P_i (x_i, y_i) ce aparțin dreptei, verifică relația de definiție a funcției.

Tangenta unghiului α de înclinare a dreptei față de axa absciselor ($\operatorname{tg}\alpha$) se numește „coeficient unghiular".

3°. *Aplicații.* Să se rezolve ecuațiile:

$\mathbf{A}_1$. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x^2-1}$ R. $x = 2/3$

$\mathbf{A}_2$. $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2=1$ R. $x = 1$

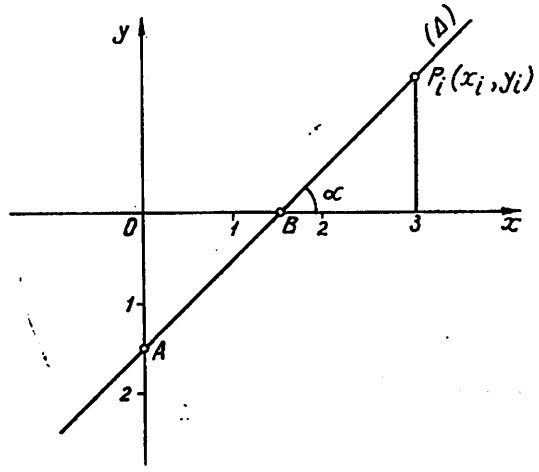


Fig. 8.2

$\mathbf{A}_3$. $(3x-1)(3x+1) = 5x^2+(2x-1)(2x+1)$ R. identitate $(x \in R)$

$\mathbf{A}_4$. $\frac{x+2}{x-1}=\frac{3x+1}{3x-2}$ R. $x = 1/2$

$\mathbf{A}_5$. $(a+1)x+ab=a(b+x)+b$ R. $x = b$

$\mathbf{A}_6$. $\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}=\frac{ax+b}{x^2-x}$ R. $x = \frac{a+b}{b}$

$\mathbf{A}_7$. $(x-a)^2+(x+a)(x-b) = (x-b)^2+(x+b)(x-a)$ R. imposibilă.

Observații. După efectuarea calculelor, se obține — în general — forma ecuației: $ax + b = 0$. În particular, pot apare următoarele cazuri:

a) $ax = 0$, cînd: $x = 0$;
b) $a = 0$, cînd ecuația este imposibilă;

c) $0 = 0$, cînd ecuația este verificată de oricare x și reprezintă o identitate.

● Să se reprezinte grafic funcțiile de gradul I:

$$A_8.\ y = 2x + 1$$

$$A_9.\ 2x - 3y = 6$$

$$A_{10}.\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

8.1.2. Ecuații de gradul II cu o necunoscută

1°. *Studiu analitic.* Forma generală a ecuației de gradul II este următoarea:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{8.6}$$

sau :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \tag{8.7}$$

Urmărind a transforma acest trinom în produs, prin diferență de pătrate, formăm un pătrat perfect din primii doi termeni :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

sau :

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

Produsul celor doi factori poate fi nul, dacă unul din ei este nul, cînd:

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{8.8}$$

Ecuația de gradul doi, satisface teoremele stabilite anterior:
— are două rădăcini (8.27): x_1 și x_2;
— rădăcinile verifică relațiile lui Viète (8.18):

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

— este echivalentă cu un sistem de două ecuații cu două necunoscute (8.9).

Expresia:

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{8.10}$$

se numește *discriminant* sau *realizant*; valoarea sa hotărăște natura rădăcinilor:

Dacă $\Delta > 0$, rădăcinile sînt reale și distincte:

$$(x_1 \neq x_2) \tag{8.11}$$

Dacă $\Delta = 0$, rădăcinile sînt reale și egale:

$$x_1 = x_2 = -b/2a \tag{8.12}$$

Dacă $\Delta < 0$, rădăcinile sînt complexe:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tag{8.13}$$

Exemple:

Fără a rezolva ecuațiile, să se stabilească natura rădăcinilor lor, apoi să se rezolve și să se verifice relațiile lui Viète.

(E_7) $x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \Rightarrow$ rădăcinile sînt reale și distincte (8.11).

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 3;\ x_2 = 1$$

$x_1 + x_2 = 4;\ x_1 x_2 = 3$

(E_8) $x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Delta = 16 - 16 = 0 \Rightarrow$ rădăcinile sînt reale și egale (8.12)

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2$$

$x_1 + x_2 = 4\ ;\ x_1 x_2 = 4$

(E_9) $x^2 + 3x + 5 = 0$

$\Delta = 9 - 20 = -11 < 0$ rădăcinile sînt complexe (8.13)

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{11}}{2}$$

$x_1 + x_2 = -3\ ;\ x_1 x_2 = 5.$

Să se formeze ecuațiile, care au ca **rădăcini**, perechile de valori:

(E_{10}) $x_1 = 2\,;\ x_2 = -3$

Se calculează: $S_1 = x_1 + x_2 = 2 - 3 = -1$

$$S_2 = x_1 x_2 = 2 \cdot (-3) = -6$$

Ecuația (8.7) este: $x^2 + x - 6 = 0$.
Același lucru se obține cu ajutorul **relației**:

$$(x - x_1)\ (x - x_2) = (x - 2)\ (x + 3) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

(E_{11}) $x_1 = -\frac{1}{2}\,;\ x_2 = +\frac{2}{3}$

$$S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$S_2 = x_1 x_2 = -\frac{1}{3}$$

Ecuația este: $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$,

respectiv:

$$6x^2 - x - 2 = 0$$

De asemenea:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$$

● Să se transforme în produs polinoamele:

$E_{12} = 5x^2 - 3x - 2$

Se consideră ecuația: $5x^2 - 3x - 2 = 0$, care are rădăcinile:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{10} \begin{matrix} \nearrow x_1 = 1 \\ \searrow x_2 = -\frac{2}{5} \end{matrix}$$

Deci: $E_{12} = 5\,(x - 1)\left(x + \frac{2}{5}\right) = 5\,(x - 1) \cdot \frac{5x + 2}{5} =$

$$= (x - 1)\ (5x + 2),$$

● Dacă x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației:

$$ax^2 + b + c = 0,$$

să se calculeze expresiile :

$$E_{13} = x_1^2 + x_2^2$$

$$E_{13} = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

● Să se găsească două numere, cunoscînd suma și produsul lor.

$$(E_{14})\ S = 3;\ P = 2$$

Fie x_1 și x_2 cele două necunoscute:

$$x_1 + x_2 = 3;\ x_1x_2 = 2$$

Ecuația de gradul doi, cu aceste rădăcini este:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{matrix} \nearrow x_1 = 1 \\ \searrow x_2 = 2 \end{matrix}$$

● Să se rezolve sistemul de două ecuații cu două necunoscute, de forma relațiilor Viète ;

$$(E_{15}) \qquad x + y = -1;\ xy = -6.$$

Se formează ecuația: $z^2 + z - 6 = 0$, cu rădăcinile :

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \begin{matrix} \nearrow z_1 = 2 \\ \searrow z_2 = -3 \end{matrix}$$

Deci, pot fi formulate următoarele soluții :

x	2	-3
y	-3	2

Cazuri particulare ale ecuației de gradul doi:

$ax^2 + bx = 0$;	$x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{b}{a}$	
$ax^2 = 0$;	$x_1 = x_2 = 0$	
$ax^2 + c = 0$;	$x_{1,2} = \pm\sqrt{-c}$	(8.14)
$a = 0$;	ecuație imposibilă	
$0 = 0$;	identitate.	

Uneori ecuația de gradul doi are termenul b par ($b = 2b_1$) :

$$ax^2 + 2b_1x + c = 0 \tag{8.15}$$

În acest caz, rădăcinile sale au o formă mai simplă :

$$x_{1,2} = \frac{-2b_1 \pm \sqrt{4b_1^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2(-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac})}{2a}$$

$$\text{Deci : } x_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac}}{a} \tag{8.16}$$

Pentru ecuația cu rădăcini reale ($\Delta \geqslant 0$), se pot preciza și semnele acestora, deoarece se cunoaște produsul lor ($P = c/a$). Astfel :

Dacă: $P = x_1x_2 = c/a > 0$, rădăcinile sînt de același semn (+, +) sau (—, —).

Dacă: $P = x_1x_2 = c/a < 0$, rădăcinile sînt de semne contrarii (+, —).

Luînd în considerare și suma rădăcinilor ($S = -b/a$), se pot face precizări și asupra ordinului lor de mărime în valoare absolută (+, —). Astfel:

Pentru $P > 0$ și: $S > 0$, rădăcinile sînt pozitive (+, +).

$S < 0$, rădăcinile sînt negative (—, —).

Pentru $P = 0$ și $S > 0$, o rădăcină este zero și una pozitivă (0, +).

$S < 0$, o rădăcină este zero și una negativă (0,—).

Pentru $P < 0$ și $S > 0$, rădăcinile sînt în relația : $|+| > |-|$

$S = 0$, $|+| = |-|$

$S < 0$ $|-| > |+|$

Exemple:

● Să se rezolve ecuațiile:

(E_{16}) $(2x + 1)(3x - 2) = (x - 1)(x + 2)$

$6x^2 - x - 2 = x^2 + x - 2$

$5x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2/5$

(E_{17}) $(x-2)(x-3) = 6-5x$

$x^2 - 5x + 6 = 6 - 5x$

$x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

(E_{18}) $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} + 1 = 0$

$x - 1 + 2(x-2) + (x-2)(x-1) = 0$

$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

● Să se stabilească natura şi felul rădăcinilor următoarelor ecuaţii:

(E_{19}) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

$\Delta = 25 - 8 > 0 \Rightarrow$ rădăcini reale

$P = 1/2 > 0 \Rightarrow$ acelaşi semn

$S = 5/2 > 0 \Rightarrow$ ambele pozitive $(+, +)$

(E_{20}) $3x^2 + 2x - 5 = 0$

$\Delta = 4 + 60 > 0 \Rightarrow$ rădăcini reale

$P = -5/3 < 0 \Rightarrow$ semne contrarii

$S = -2/3 < 0 \Rightarrow |-| > |+|$

2°. *Studiu grafic.* Ca şi ecuaţia de gradul I, ecuaţia de gradul II poate fi interpretată ca un caz particular al funcţiei cu o variabilă de gradul II:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{8.17}$$

în care, funcţia asociată (y) este nulă: $y = 0$.

Pentru a reprezenta funcţia (8.17), trebuie să-i întocmim graficul, stabilind valorile lui y pentru diferite valori date lui x. Din infinitatea de valori pe care le poate lua variabila independenta $x \in R$, va trebui să alegem cîteva, dar semnificative.

Valorile caracteristice pentru reprezentarea funcţiei de gradul II sînt:

— *Limitele domeniului de definiţie*:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} (ax^2 + bx + c) = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right) = a \cdot (+\infty),$$

deoarece:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{b}{x}=0 \text{ și } \lim_{x\to-\infty}\frac{c}{x^2}=0.$$

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}(ax^2+bx+c)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=a\cdot(+\infty)$$

Evident că în ambele cazuri, funcția y are valori infinite ale căror semne depind de semnul lui a.

$$\begin{aligned}&\text{Dacă } a>0 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} y=+\infty\\&\text{Dacă } a<0 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} y=-\infty\end{aligned}\qquad(8.18)$$

— *Intersecția cu axa ordonatelor*:

$$x=0;\quad y=c \qquad (8.19)$$

— *Intersec,ia cu axa absciselor*:

$$y=0;\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad (8.20)$$

— *Extremele funcției* (limitele codomeniului).

Funcția (y) aparține numerelor reale (R) și are o limită infinită ($\pm\infty$), așa cum s-a stabilit prin relațiile (8.18), în funcție de semnul lui a. Vom căuta să stabilim cealaltă limită a codomeniului, care va fi:

— un minimum, dacă $a>0$, cînd $y\in(m,\infty)$;

— un maximum, dacă $a<0$, cînd $y\in(-\infty,m)$.

Pentru a determina un astfel de extrem, facem următoarele considerații. Funcția: $y=ax^2+bx+c$ are o axă verticală de simetrie care trece prin punctul extrem.

Fie x_m depărtarea axei de simetrie față de axa Oy, respectiv abscisa punctului extrem. În ipoteza că există simetria, trebuie ca unui punct din dreapta acestei axe ($x_m+\alpha$) și simetricului său ($x_m-\alpha$), să le corespundă aceeași ordonată (y):

$$y=a(x_m+\alpha)^2+b(x_m+\alpha)+c=a(x_m-\alpha)^2+b(x_m-\alpha)+c$$

sau:

$$\begin{aligned}&ax_m^2+2a\alpha x_m+a\alpha^2+bx_m+b\alpha+c=\\&=ax_m^2-2a\alpha x_m+a\alpha^2+bx_m-b\alpha+c\end{aligned}$$

Reducînd termenii asemenea, rezultă:

$$x_m = -\frac{b}{2a} \tag{8.21}$$

Oricare ar fi depărtarea (α) a punctelor simetrice față de axa ($x = x_m$), există o singură valoare pentru x_m care satisface condiția de simetrie:

$$x_m = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{S}{2} \tag{8.22}$$

Ultima formă (8.22), arată că rădăcinile x_1, x_2 sînt simetrice și ca atare, x_m se găsește între ele, la jumătatea intervalului.

Cu ajutorul abscisei punctului extrem (x_m), să calculăm ordonata sa (y_m):

$$y_m = ax_m^2 + bx_m + c = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c =$$

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta^2}{4a} \tag{8.23}$$

Folosind punctele caracteristice ale curbei, enumerate mai sus, se întocmește graficul funcției (fig. 8.3):

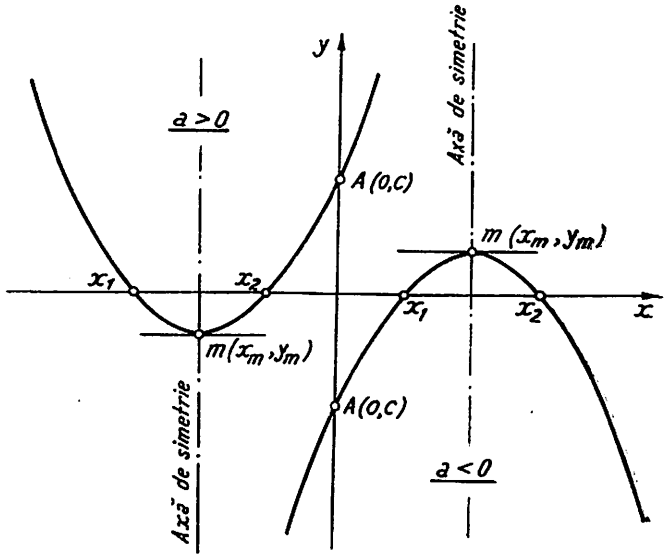


Fig. 8.3

Cazul: $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_m		x_2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\Delta^2}{4a} < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cazul: $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_m		x_2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-\frac{\Delta^2}{4a} > 0$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Prin săgeți, se arată modul în care variază funcția și domeniile în care este crescătoare și descrescătoare.

Exemple: Să se reprezinte grafic funcțiile de gradul doi.

(E_{21}) $\qquad y = 4x^2 + 7x - 15$

Etapele de stabilirea punctelor caracteristice sînt următoarele:

a) $x = \pm\infty$, $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(4x^2 + 7x - 15) = +\infty$

b) $x = 0$, $\quad y = -15$

c) $y = 0$, $\quad 4x^2 + 7x - 15 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 240}}{8} = \frac{-7 \pm 17}{8} \begin{matrix} \nearrow x_1 = -3 \\ \searrow x_2 = \frac{5}{4} \end{matrix}$$

d) $x_m = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{8}$; $y = -\frac{\Delta^2}{4a} = -\frac{289}{16} = -18\frac{1}{16}$

e) Graficul funcției este cel din tabelă

x	$-\infty$		-3		$-7/8$		0		$5/4$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-18\frac{1}{16}$ (m)	$\nearrow$	-15	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f) Reprezentarea grafică este o curbă numită „*parabolă*“ (fig. 8.4), descrescătoare pe intervalul $x < x_m$, minimă pentru $x = x_m$ și crescătoare pe intervalul $x > x_m$.

(E_{22}) $\qquad y = -4x^2 - 7x + 15$

Această funcție este simetrică celeilalte (E_{32}), față de axa Ox. Punctele caracteristice se determină la fel :

a) $x = \pm\infty$; $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(-4x^2 - 7x + 15) = -\infty$

b) $x = 0$; $\qquad y = 15$

c) $y = 0$; $\qquad -4x^2 - 7x + 15 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$; $x_2 = 5/4$

d) $x_m = \dfrac{-b}{2a} = -\dfrac{7}{8}$; $y_m = 18\dfrac{1}{16}$

e) Graficul funcției :

x	$-\infty$		-3		$-7/8$		0		$5/4$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↗	$18\frac{1}{16}$ (m)	↘	15	↘	0	↘	$-\infty$

f) Reprezentarea grafică (fig. 8.5) este tot o parabolă, care variază invers decît cealaltă:

— este crescătoare pe intervalul $x < x_m$, maximă în $x = x_m$ și descrescătoare pe intervalul $x > x_m$.

3°. *Aplicații.* Să se reprezinte grafic următoarele funcții de gradul II:

A_{11}. $y = 2x^2 + 5x - 7$ $\qquad$ R. parabolă ca în figura 8.4.

● Să se stabilească felul rădăcinilor ecuațiilor de mai jos, fără a le rezolva :

A_{12}. $\qquad x^2 + (n^2 - m^2)\,x - m^2n^2 = 0$

R. $\Delta = (n^2 - m^2)^2 + 4\,m^2n^2 = (n^2 + m^2)^2 > 0$; $P =$

$P = -m^2n^2 < 0$; $S = n^2 - m^2$

Dacă : $n^2 > m^2 \Rightarrow S > 0$; iar rădăcinile sînt $|+| > |-|$

Dacă : $n^2 < m^2 \Rightarrow S < 0$; iar rădăcinile sînt $|-| > |+|$

$\mathbf{A}_{13}$. $x^2 + x + 1 = 0$; **R.** $\Delta < 0$, rădăcini complexe.

● Să se stabilească dimensiunile dreptunghiului de împrăștiere, cunoscînd perimetrul și suprafața.

$\mathbf{A}_{14}$. $p = 600$ m; $s = 20\,000$ m^2 ?

R. Fie x și y lungimea și lățimea; rezultă :

$$x + y = \frac{600}{2} = 300;\ xy = 20\,000$$

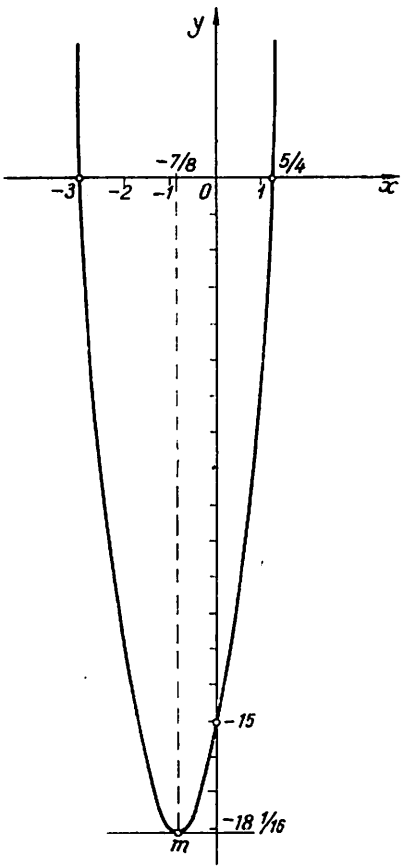


Fig. 8.4

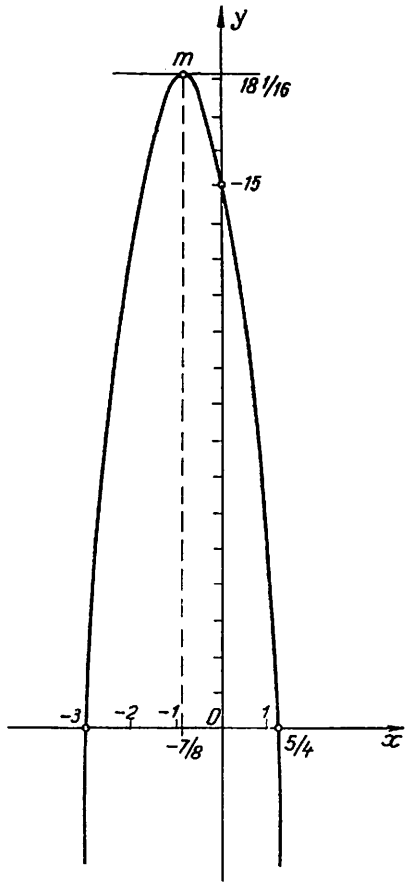


Fig. 8.5

Ecuația de gradul doi în z este:

$$z^2 - 300\,z + 20\,000 = 0, \text{ cu soluțiile:}$$

$$z_1 = 200;\ z_2 = 100$$

Deci: $x = 200;\ y = 100.$

8.1.3. Ecuații de gradul III cu o necunoscută

1°. *Ecuația reciprocă.* Una din ecuațiile reductibile este cea reciprocă, cu termenii depărtați de extreme, egali:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \qquad (8.24)$$

Proprietatea rădăcinilor constă în faptul că două din ele sînt inverse, pentru că înlocuind pe x cu $\frac{1}{x}$ în ecuația (8.24), se obține aceeași ecuație:

$$\frac{a}{x^3} + \frac{b}{x^2} + \frac{b}{x} + a = 0; \qquad a + bx + bx^2 + ax^3 = 0$$

Folosind această concluzie: $x_2 = \frac{1}{x_3}$ sau $x_2x_3 = 1$ și ultima relație a lui Viète:

$$x_1x_2x_3 = \frac{-a}{a} = -1,$$

rezultă:

$$x_1 = \frac{1}{x_1x_2} = -1$$

Deci, ecuația reciprocă de gradul trei are totdeauna o rădăcină, egală cu minus unu ($x_1 = -1$) și două rădăcini inverse.

În baza teoremei lui Bézout, polinomul:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a = (x + 1)\ C(x),$$

pentru că:

$$P(-1) = 0$$

Rezolvarea ecuației constă, deci, în transformarea sa în factori:

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)[a(x^2 - x + 1) + bx] = 0$$

Deci: $(x + 1)[ax^2 - (a - b)x + a] = 0$

Iată cum am redus ecuația de gradul trei la două ecuații de grade inferioare:

$$x + 1 = 0 \tag{8.25}$$

și

$$ax^2 - (a - b)\,x + a = 0 \tag{8.26}$$

Prima are soluția cunoscută: $x_1 = -1$.

Cealaltă este o ecuație de gradul doi care rămîne reciprocă, cu termenii egal depărtați de extreme egali și care conservă proprietatea enunțată de a avea rădăcinile inverse:

$$x_2 x_3 = \frac{a}{a} = 1 \tag{8.27}$$

Aceste rădăcini se obțin cu ajutorul formulei cunoscute:

$$x_{2,3} = \frac{(a-b) \pm \sqrt{(a-b)^2 - 4a^2}}{2a} \tag{8.28}$$

Exemple: Să se rezolve ecuația de gradul trei reciprocă:

(E_{23}) $$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$2\,(x^3 + 1) - 3x\,(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)\,(2x^2 - 2x + 2 - 3x) = 0$$

2°. *Ecuația binomă.* o astfel de ecuație are numai doi termeni:

$$ax^3 \pm b = 0; \quad b > 0 \tag{8.29}$$

Se face substituția:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \cdot t \tag{8.30}$$

Rezultă:

$$a \cdot \frac{b}{a} \cdot t^3 \pm b = 0$$

sau:

$$t^3 \pm 1 = 0 \tag{8.31}$$

Deci, orice ecuație binomă (8.29) poate fi adusă la forma simplă (8.31), dacă se folosește substituția (8.30).

Ecuația simplificată (8.31) prezintă două cazuri:

Cazul 1

$$t^3 - 1 = 0 \tag{8.32}$$

sau:

$$(t-1)(t^2+t+1) = 0 \begin{cases} t-1=0 & (8.33) \\ t^2+t+1=0 & (8.34) \end{cases}$$

Prima ecuație are soluția: $t_1 = 1$, iar a doua:

$$t_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Se face notația: $t_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \alpha$ și $t_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \bar{\alpha}$, în care α și $\bar{\alpha}$ sînt „rădăcinile cubice complexe ale unității". Justificarea constă în faptul că ecuația (8.32), scrisă sub forma: $t^3 = 1$, va avea trei rădăcini, acestea fiind ale unității:

— o rădăcină reală, unitară ($t_1 = 1$);

— două rădăcini complexe (α și $\bar{\alpha}$).

Rădăcinile α, $\bar{\alpha}$ satisfac ecuația (8.34). Deci:

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = \bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha} + 1 = 0;\ \alpha + \bar{\alpha} = -1 \text{ și } \alpha \cdot \bar{\alpha} = 1 \tag{8.35}$$

Aceste rădăcini verifică și ecuația (8.32), astfel încît:

$$\alpha^3 = \bar{\alpha}^3 = 1 \tag{8.36}$$

Amplificînd succesiv cu α, $\bar{\alpha}$ ultimele relații, se obține:

$$\alpha^4 = \alpha;\ \bar{\alpha}^4 = \bar{\alpha}$$
$$\alpha^5 = \alpha^2;\ \bar{\alpha}^5 = \bar{\alpha}^2$$
$$\alpha^6 = \alpha^3 = 1;\ \bar{\alpha}^6 = \bar{\alpha}^3 = 1$$

Se observă că puterile rădăcinilor cubice complexe au valori periodice, cu periodicitatea trei, astfel încît:

$$\alpha^{3k} = 1;\ \alpha^{3k+1} = \alpha;\ \alpha^{3k+2} = \alpha^2$$

și

$$\bar{\alpha}^{3k} = 1;\ \bar{\alpha}^{3k+1} = \bar{\alpha};\ \bar{\alpha}^{3k+2} = \bar{\alpha}^2 \tag{8.37}$$

Exemple:

● Să se rezolve ecuația binomă:

(E_{24}). $$2\sqrt{3}\,x^3 - 3\sqrt[3]{2} = 0$$

Substituim:

$$x = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{3}}}\, t = \sqrt[18]{\frac{3^6 \cdot 2^2}{2^6 \cdot 3^3}}\, t = \sqrt[18]{\frac{3^3}{2^4}}\, t = \sqrt[18]{\frac{27}{16}}\, t$$

Rezultă: $t^3 - 1 = 0$, cu soluțiile

$$t_1 = 1;\ t_2 = \alpha;\ t_3 = \bar{\alpha}$$

Deci:

$$x_1 = \sqrt[18]{\frac{27}{16}};\ x_2 = \sqrt[18]{\frac{27}{16}} \cdot \alpha\ ;\ x_3 = \sqrt[18]{\frac{27}{16}}\bar{\alpha}$$

● Să se demonstreze identitățile:

(E_{25}) $$(\alpha^2 + \alpha + 2)^4 = \alpha^9$$

Într-adevăr: $\alpha^2 + \alpha + 2 = (\alpha^2 + \alpha + 1) + 1 = 1$, deoarece $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, iar: $\alpha^9 = (\alpha^3)^3 = 1^3 = 1$.

(E_{26}) $$(\alpha^2 - \alpha + 1)\ (\bar{\alpha}^2 + 2\bar{\alpha} + 1) = -2$$

Se observă că: $\alpha^2 - \alpha + 1 = (\alpha^2 + \alpha + 1) - 2\alpha = -2\alpha$ iar: $\bar{\alpha}^2 + 2\bar{\alpha} + 1 = (\bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha} + 1) + \bar{\alpha} = \bar{\alpha}$

Deci: $-2\alpha \cdot \bar{\alpha} = -2$

Cazul 2

$$t^3 + 1 = 0, \tag{8.38}$$

sau:
$$(t+1)\ (t^2 - t + 1) = 0 \begin{cases} t + 1 = 0 & (8.39) \\ t^2 - t + 1 = 0 & (8.40) \end{cases}$$

$$t_1 = -1 \text{ și } t_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Rădăcinile: $t_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \beta$ și $t_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \bar{\beta}$ sînt „cubice complexe ale unității negative" și au proprietăți similare:

$$\beta + \bar{\beta} = 1;\ \beta\bar{\beta} = 1;\ \beta^3 = \bar{\beta}^3 = -1 \tag{8.41}$$

Ecuația binomă poate fi rezolvată cu ajutorul relației trigonometrice a lui Moivre, utilizată la extragerea rădăcinii din numerele complexe. Astfel :

Cazul 1 $t^3 - 1 = 0$, se va scrie sub forma:

$$t^3 = 1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi \tag{8.42}$$

Rezultă :

$$t = \sqrt[3]{1} = \cos 2k\frac{\pi}{3} + i\sin 2k\frac{\pi}{3} \tag{8.43}$$

Dînd valori consecutive lui k se obține:

$$k = 0 \Rightarrow t_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 \tag{8.44}$$

$$k = 1 \Rightarrow t_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha \tag{8.45}$$

$$k = 2 \Rightarrow t_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{\alpha} \tag{8.46}$$

Pentru $k = 3, 4, 5, \ldots$ se obțin aceleași valori:
Cazul 2 $t^3 + 1 = 0$ se scrie astfel:

$$t^3 = -1 = \cos (2k + 1)\pi + i \sin (2k + 1)\pi \tag{8.47}$$

iar :

$$t = \sqrt[3]{-1} = \cos (2k + 1)\frac{\pi}{3} + i \sin (2k + 1)\frac{\pi}{3} \tag{8.48}$$

Pentru :

$$k = 0 \Rightarrow t_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \beta \tag{8.49}$$

$$k = 1 \Rightarrow t_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \tag{8.50}$$

$$k = 2 \Rightarrow t_3 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{\beta} \tag{8.51}$$

8.2. DOMENIUL SOLUȚIILOR

Pornim de la ideea că, în general, nu putem calcula cu exactitate valorile rădăcinilor unei ecuații polinomiale oarecare. De aceea, vom studia mijloacele de investigare pentru a stabili domeniile în care acestea

există, precum și metodele de restrîngerea lor în limitele unei precizii dorite.

Soluțiile vor avea expresii de forma:

$$x = (a,\ b) \text{ sau: } x \approx c$$

simbol care înseamnă „aproximativ egal".

8.2.1. Limitele domeniului rădăcinilor

Considerăm funcția polinomială asociată ecuației oarecare de gradul n:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (8.52)$$

Modelul grafic al acestei funcții este o curbă continuă pe domeniul $x \in R$ (fig. 8.6).

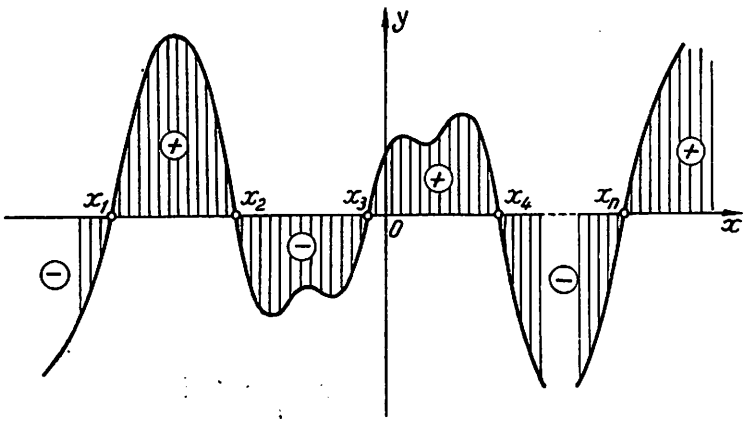


Fig. 8.6

Intersecția curbei cu axa absciselor, respectiv punctele de abscise $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ sînt soluțiile ecuației:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (8.53)$$

care va avea n rădăcini.

Evident că, în figură, vor avea imagini numai rădăcinile reale (m); cele imaginare $(n - m)$ nu pot fi reprezentate în acest plan, ale cărui axe corespund numerelor reale.

Analizînd figura, se constată că de cîte ori curba taie axa absciselor, funcția $y = f(x)$ trece prin zero și schimbă de semn, trecînd din zona pozitivă (+) în cea negativă (—) sau invers.

Deci, *rădăcinile reale ale ecuației sînt puncte de alternanță a semnelor funcției asociate.*

Pentru valori date lui x în afara domeniului rădăcinilor (x_1, x_n):

$$x < x_1 \text{ sau } x > x_n$$

funcția nu-și mai schimbă semnul.

Această teoremă servește la stabilirea domeniului căutat, creînd următoarea temă de studiu.

Să se găsească două limite:

— o limită inferioară sau stînga (l_0), mai mică decît cea mai mică rădăcină a ecuației:

$$l_0 \leqslant x_1 \tag{8.54}$$

— o limită superioară sau dreapta (L_0), mai mare decît cea mai mare rădăcină a ecuației:

$$L_0 \geqslant x_n \tag{8.55}$$

Cunoscînd aceste limite, domeniul soluțiilor este definit:

$$l_0 \leqslant (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \leqslant L_0 \tag{8.56}$$

Investigarea se poate face și pe subdomenii, cînd se definesc:

— limita superioară (L) și limita inferioară (l) a rădăcinilor pozitive;

— limita superioară (L') și limita inferioară (l') a rădăcinilor negative.

Limita superioară a rădăcinilor pozitive (L) este un număr mai mare decît cea mai mare rădăcină pozitivă; oricare alt număr mai mare decît L este tot o limită superioară. Interesul este de a căuta o limită cît mai mică. În acest scop, vom scrie ecuația astfel ca primul termen (de cel mai mare grad) să fie pozitiv. Funcția asociată va avea limita infinit:

$$\lim_{x\to\infty} x^n\left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right) = \infty \tag{8.57}$$

deoarece:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_2}{x^2} = \ldots \lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{x^n} = 0$$

În grafic, ultima ramură a curbei în cadranul I, este crescătoare, ca în figura 8.6.

Pentru a stabili o metodă de calcul a limitei superioare (L), vom folosi următoarea lemă (teoremă ajutătoare):

● Dacă un polinom $f(x)$ cu o singură schimbare de semn între doi termeni succesivi, avînd primul termen pozitiv, pentru $x = a$ $(a > 0)$ are valoarea pozitivă $f_{(a)} > 0$, atunci el rămîne pozitiv pentru oricare altă valoare a lui x mai mare ca a $(x > a)$.

Exemplul (E_{27}). Polinomul:

$$f(x) = x^5 + \underline{3x^4 - 4x^3} - 7x^2 - x - 5$$

cu o singură variație de semn, între termenii doi și trei $(3x^4 - 4x^3)$, se poate scrie:

$$f(x) = x^3\left[x^2 + 3x - \left(4 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right)\right]$$

Dacă pentru $x = a > 0$, $f(a) > 0$, înseamnă că:

$$a^2 + 3a > 4 + \frac{7}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{5}{a^3}$$

Mărindu-l pe a, membrul întîi crește iar celălalt scade, astfel încît a poate fi considerat ca limită superioară.

Metoda de calcul se bazează pe lema enunțată și se procedează astfel:

— se strîng termenii ecuației în grupe cu primul termen pozitiv și cu cel mult o schimbare de semn;

— se stabilesc limitele superioare pentru fiecare grupă astfel formată; cea mai mare dintre ele va fi aleasă ca limită superioară a ecuației.

Exemplul (E_{28}). Să se găsească limita superioară a ecuației:

$$f(x) = x^6 - 4x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 2x + 1 = 0$$

Gruparea termenilor se face astfel:

$$f(x) = x^4 \underbrace{(x^2 - 4x - 2)}_{5} + x \underbrace{(5x^2 - 2)}_{1} + 1$$

Dintre cele două limite subscrise (5 și 1) se alege ca limită superioară a rădăcinilor pozitive, cea mai mare $L = 5$.

Limita inferioară a rădăcinilor pozitive (l) se reduce la căutarea limitei superioare pozitive a ecuației $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Limita inferioară a rădăcinilor negative (l') se reduce la căutarea limitei superioare a rădăcinilor pozitive ale ecuației $f(-x) = 0$.

Limita superioară a rădăcinilor negative (L') se obține ca limită superioară a rădăcinilor pozitive ale ecuației $f\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$.

În concluzie, totul se reduce la aflarea unei limite superioare a rădăcinilor pozitive ale ecuației date și a transformatelor sale în $(-x)$, $1/x$ și $(-1/x)$.

Pentru a simplifica din calcule, ne putem mulțumi cu limitele domeniului soluțiilor: $l_0 = l'$ și $L_0 = L$.

8.2.2. Separarea rădăcinilor

Am văzut că rădăcinile reale sînt puncte de alternanță a semnelor funcției asociate. Afirmația trebuie analizată și în cazurile particulare, în care ecuația are rădăcini multiple.

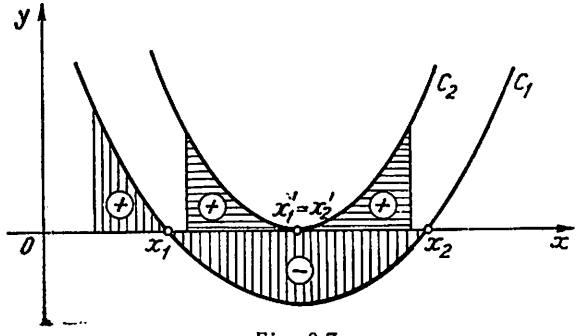


Fig. 8.7

În figura 8.7, sînt reprezentate două funcții, prin curbele C_1 și C_2. Prima (C_1) taie axa absciselor în două puncte distincte (x_1, x_2) rădăcini ale ecuației respective, astfel încît funcția $y = f(x)$ schimbă de semn după ce traversează această axă. Curba a doua (C_2), este tangentă axei, rădăcinile fiind egale ($x_1 = x_2$), iar funcția nu traversează axa și rămîne pozitivă atît la stînga cît și la dreapta punctului de tangență.

Această constatare nu contravine teoremei anterioare, deoarece între x_1 și x_2 funcția schimbă semnul, dar domeniul respectiv este vid.

Pentru a înțelege mai bine raționamentul, vom reprezenta acest caz, în paralel cu cel al curbei C_1 în tabelele de variație:

x	$\ldots$	x_1		x_2
$f(x) = C_1$	+	0	−	0 +

;

x	$x_1' = x_2''$	
$f(x) = C_2$	+	0 − 0 +
		$\varnothing$

Pentru că intervalul dintre x_1 și x_2 ($x_1 = x_2$) este vid, vom prefera să notăm rădăcina dublă printr-o literă, cu două puncte deasupra ei, între care să se poată înscrie semnul schimbat teoretic, ca în tabelul următor:

x		$\overset{\cdot\cdot}{x_1}$	
$f(x)$	+	0	+

În acest fel, legea alternării semnelor funcțiilor continuie în rădăcinile ecuației asociate rămîne valabilă și generală.

La fel se petrec lucrurile cu rădăcinile triple sau multiple. În tabelul următor, se prezintă un caz mai variat al acestei legi și a modului de interpretare a semnelor funcției:

x	$-\infty$	x_1	$\overset{\cdot\cdot}{x_2}$	$\overset{\cdot\cdot\cdot}{x_3}$	$\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{x_4}$	x_5	$+\infty$
	—		—	−+	+−+		
$f(x)$	—	0+	0+	0−	0−	0+	

Se observă că alternarea semnelor funcției $f(x)$ este continuată în dreptul rădăcinilor, între punctele egale ca număr cu ordinul lor de multiplicitate: x_2, rădăcină dublă, x_3, triplă, iar x_4 cvadruplă. Vom evita să stabilim o lege specifică prin care s-ar consemna faptul că rădăcinile cu multiplicitate pară (2, 4, 6...) nu schimbă semnul funcției, iar cele cu ordinul impar de multiplicitate îl schimbă, deoarece raționamentul de mai sus este general și foarte ușor de aplicat.

Cunoscînd această teoremă, să studiem reciproca sa.

Dacă $f(a)>0$ și $f(b)<0$, sigur va exista cel puțin o rădăcină între a și b, deoarece funcția a schimbat semnul și fiind continuă, a traversat axa absciselor cel puțin o dată. În figura 8.8, curba reprezentativă a

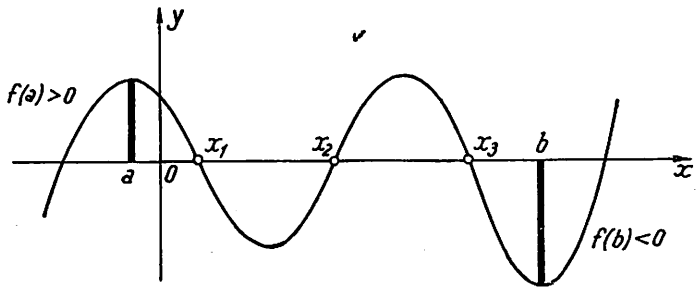


Fig. 8.8

funcției, între a și b, a, intersectat axa de trei ori, astfel încît ecuația asociată are trei rădăcini pe acest interval.

Rezultă, evident, următoarea teoremă:

Dacă $f(a).f(b)<0$, respectiv dacă $f(a)$ și $f(b)$ sînt de semne contrarii, ecuația are pe intervalul (a, b) un număr impar de rădăcini, în orice caz cel puțin una.

Un corolar al acestei teoreme este următorul: O ecuație de grad impar are cel puțin o rădăcină reală. Într-adevăr, dacă:

$$f(x)=x^{2n+1}+a_1 x^{2n}+\ldots=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \text{ și } \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

Deci, pe intervalul $(-\infty, +\infty)$, funcția asociată schimbă de semn și are un număr impar de rădăcini reale și în mod cert are cel puțin una.

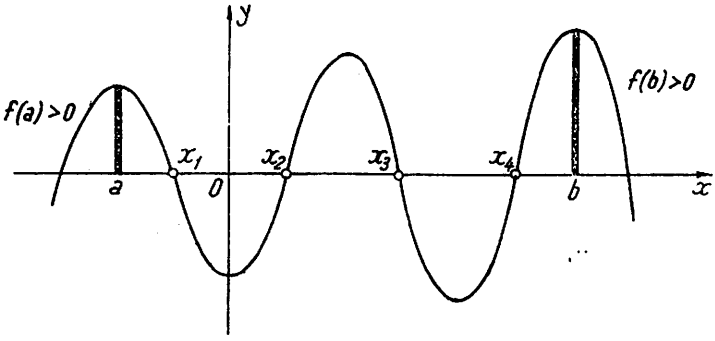


Fig. 8.9

În figura 8.9 se prezintă un alt caz, în care $f(a)>0$ și $f(b)>0$.

De data aceasta, pe intervalul (a, b) există un număr par de rădăcini reale. Deci, dacă $f(a).f(b)>0$, respectiv dacă $f(a)$ și $f(b)$ sînt de același semn, ecuația are pe intervalul (a, b) un număr par de rădăcini reale, sau nici una.

Din cele expuse, rezultă că ar trebui făcute cît mai multe sondaje pe domeniul soluțiilor, stabilind semnele funcției asociate: $f(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3)$... spre a delimita intervale din ce în ce mai mici, care să cuprindă sigur cel puțin o rădăcină reală.

Spre exemplu, dacă s-au găsit două valori (a_1, a_2) pentru care $f(a_1)$ (fa_2) și sînt de semne contrarii, se poate trece la înjumătățirea intervalului. Astfel, cînd

$$f(a_1)>0 \text{ și } f(a_2)<0,$$

iar :

$$f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)=f(a_3)>0,$$

rădăcina va fi cuprinsă în intervalul (a_2, a_3) deoarece $f(a_2)$ și $f(a_3)$ sînt de semne contrarii.

Continuînd înjumătățirea intervalului $\left(a_4=\frac{a_2+a_3}{2}\right)$, se obține, spre exemplu:

$$f\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right)=f(a_4)<0$$

În acest caz, soluția va fi pe intervalul (a_3, a_4). Se procedează astfel, în continuare și se încetează calculul, atunci cînd precizia este satisfăcută și cînd: $x\in(a_n, a_{n+1})$ sau : $x\approx\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$.

E x e m p l u l (E_{29}). Ecuația $f(x)=x^4+4x^3-4x^2-13\ x+4$ are o rădăcină pe intervalul (1, 2), deoarece $f(1)=-8<0$ și $f(2)=10>0$.

Se calculează valoarea funcției asociate pentru jumătatea intervalului $x=\frac{1+2}{3}=1{,}5$:

$$f(1{,}5)=-5{,}9375<0$$

deci rădăcina va fi în intervalul (1,5 și 2).

Se repetă calculul pentru: $x=\frac{1{,}5+2}{2}=1{,}75$, cînd $f(1{,}75)=-0{,}1836<0$, astfel încît rădăcina aparține intervalului (1,75; 2).

Continuînd pînă la o valoare cu trei zecimale, se obține: $x\approx 1{,}756$.

Această metodă de separarea și restrîngerea intervalelor rădăcinilor se numește „metoda înjumătățirii intervalului“:

Calea generală pentru rezolvarea ecuației oarecare va cuprinde următoarele operațiuni:

— se stabilește domeniul soluțiilor (l_0, L_0) ;

— se înjumătățește intervalul și se studiază separat fiecare jumătate etc. pînă cînd se găsesc valori care asigură condiția de existență a unei rădăcini reale: $f(a)\cdot f(b)<0$;

— se aplică metoda înjumătățirii pe aceste intervale, pînă la precizia dorită.

Această imagine a separării intervalelor rădăcinilor reale ilustrează dificultățile în rezolvarea ecuațiilor oarecare.

Preocupările în acest sens au condus la formularea a diferite metode, respectînd principiul enunțat.

Deoarece aceste metode de calcul se bazează şi pe alte noţiuni, ce vor fi cunoscute mai tîrziu (inecuaţii, derivate, teoria funcţiilor), vor fi prezentate înmănunchiat într-un capitol viitor al analizei matematice.

În cele ce urmează, vom vedea cum se folosesc maşinile moderne de calcul la rezolvarea ecuaţiilor oarecare.

8.2.3. **Utilizarea MEC la rezolvarea ecuaţiilor**

Vom folosi denumirea de MEC pentru maşinile electronice de calcul, spre a simplifica scrierea.

Este cunoscut aportul acestor maşini în procedeele de calcul numeric, prin viteza mare de lucru, respectiv a cantităţilor mari de operaţii ce le pot efectua într-un timp extrem de scurt.

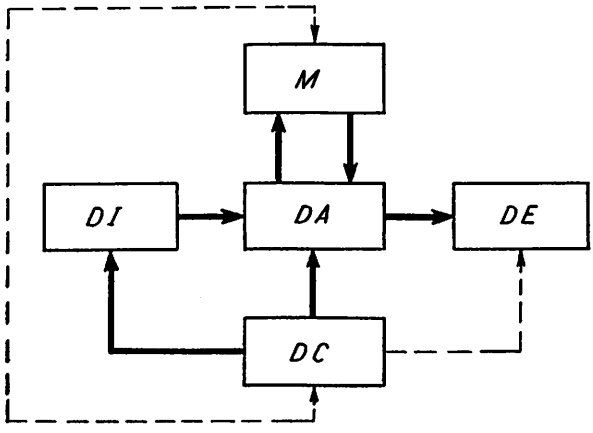


Fig. 8.10

Or, în cazul tatonărilor repetate de mai sus acestea sînt de un real folos. Pentru a înţelege modul în care servesc temei propuse, este necesar să cunoaştem cîteva date asupra schemei unui calculator şi a procesului de programare a acestuia.

1°. *Schema bloc.* Orice MEC se compune din trei părţi fundamentale, care comunică între ele (fig. 8.10): memoria (*M*), dispozitivul de comandă (*DC*) şi dispozitivul aritmetic (*DA*). Posibilitatea de comunicare între memorie, dispozitivul de comandă şi cel aritmetic trebuie înţeleasă în sensul că informaţia păstrată sau prelucrată într-unul din aceste dispozitive poate fi transmisă în oricare alt dispozitiv.

Prin informaţie înţelegem o succesiune de simboluri, cu semnificaţii precise, pe care maşina le poate reţine şi opera.

În afara celor trei părţi fundamentale MEC dispune de două dispozitive auxiliare: unul pentru introducerea datelor (*DI*) şi unul pentru livrarea rezultatelor (*DE*).

2°. *Memoria* (*M*). Aceasta este constituită din celule, în care se înregistrează cîte un simbol. Ele poartă cîte un număr de ordine, denumit *adresă*. Numărul total al celulelor se numeşte *capacitatea memoriei*.

Operaţia de extragerea datelor din memorie se numeşte *citire în memorie*, iar cea de depozitare, *scriere în memorie*.

Dacă se înscrie o informaţie într-o celulă, în care există o altă informaţie, dispare cea veche şi rămîne cea nouă.

3°. *Dispozitivul de comandă* (*DC*). Acesta face oficiul de elaborare a unei instrucţiuni, care poate consta din:

— instrucţiuni aritmetice de adunare (+), scădere (—), înmulţire ($\times$), împărţire (:), introducînd în dispozitivul aritmetic (*DA*) date din memorie;

— instrucţiuni de transfer între dispozitive, introducerea rezultatelor în memorie etc.;

— instrucţiuni de serviciu, pentru pornirea şi oprirea *MEC*, imprimarea rezultatelor etc.

4°. *Dispozitivul aritmetic* (*DA*). Acesta efectuează operaţii de adunare, scădere, înmulţire şi împărţire, în ordinea şi cu datele stabilite prin instrucţiunea elaborată de dispozitivul de comandă.

5°. *Dispozitivul de introducerea datelor* (*DI*). Face oficiul de introducerea datelor în memorie, la anumite adrese, precum şi a instrucţiunilor necesare unui anumit calcul.

6°. *Dispozitivul pentru livrarea rezultatelor* (*DE*), este cel care afişează rezultatele.

În concluzie, *MEC* este organizată astfel încît să poată opera aritmetic asupra unor date iniţiale, sau intermediare, pe care le reţine în memorie. Calculele se efectuează în ordinea în care este impusă de problema ce trebuie rezolvată, adică după un program, condus de operator pas cu pas sau de maşină însăşi.

Programul se întocmeşte după schema logică a temei, numită algoritm. În cele ce urmează, folosind principiul general al separării rădăcinilor unei ecuaţii, vom stabili modul în care se întocmeşte algoritmul acestei probleme. Programul ce se introduce în MEC se întocmeşte pe baza algoritmului, în conformitate cu limbajul folosit de maşină, de către programatori specializaţi.

7°. *Algoritmul ecuaţiei oarecare*. MEC poate efectua cu uşurinţă calculele aritmetice, necesare obţinerii valorii funcţiei asociate ecuaţiei $f(x)$ pentru diferite valori ale lui x.

De aceea, în primul rînd se stabilesc limitele domeniului soluțiilor (l_0, L_0), prin metoda cunoscută.

Se stabilește apoi, un pas (λ) corespunzător preciziei dorite și se urmărește ca *MEC* să efectueze următoarele calcule succesive:

Pentru:

$$l_0 \Rightarrow f_0(l_0)$$

$$l_1 = l_0 + \lambda \Rightarrow f_1(l_1)$$

$$l_2 = l_1 + \lambda \Rightarrow f_2(l_2)$$

$$\vdots$$

$$l_n = l_{n-1} + \lambda = L_0 \Rightarrow f_n(L_0)$$

Se poate impune ca MEC să tipărească fiecare rezultat, evidențiind valorile succesive $f(l_i)$, $f(l_{i+1})$ care au semne contrarii. Evident că între două valori de acest fel, se va găsi o rădăcină reală: $x \in (l_i, l_{i+1})$.

Dacă se dorește o precizie mai mare a rădăcinilor, se repetă calculele pe fiecare interval, cu pași mai mici (μ):

Pentru:

$$l_i \rightarrow f_0(l_i)$$

$$l_i + \mu \rightarrow f_1(l_{i+\mu})$$

. . . . . .

$$l_{i+1} = l_m = l_{m-1} + \mu \rightarrow f_m(l_{i+m\mu}) = f_m(l_{i+1})$$

Și de data aceasta vor fi căutate cele două valori succesive, care au semne contrarii, între care se va găsi rădăcina ecuației, obținută cu mult mai mare precizie.

E x e m p l u l (E_{30}). Să se întocmească algoritmul de rezolvare a ecuației:

$$x^6 - 3x^5 + 2x^2 - x + 8 = 0$$

Limitele acesteia pot fi determinate astfel:

- Limita superioară, prin gruparea:

$$x^5 \underbrace{(x-3)}_{3} + x \underbrace{(2x-1)}_{1} + 8 = 0 \Rightarrow L_0 = 3$$

- Limita inferioară, prin transformata în $(-x)$:

$$x^6 + 3x^5 + 2x^2 + x + 8 = 0 \Rightarrow l_0 = 0$$

Deci: $x \in (0,3)$.

Alegem pasul: $\lambda = 0{,}1$ și întocmim algoritmul următor, ce va fi explicat în continuare:

Datele cu care va opera dispozitivul de calcul se înscriu într-un dreptunghi. Programatorul va introduce prin programul ce-l va întocmi, aceste date în memorie, împreună cu coeficienții ecuației (1, —1, —2, —3, 8).

Algoritmul indică, apoi, prin săgeți, modul de parcurgere a calculelor, pe care programatorul le transformă în simboluri specifice sau dispoziții:

— calculează $x^2 = x \cdot x$, printr-o înmulțire, operație înregistrată într-un dreptunghi;
— calculează $2x^2 = x^2 \cdot 2$ și depune-l în memorie, fapt înscris într-un dreptunghi prelungit, cu o diagonală, care precizează trecerea rezultatului în memorie;
— calculează $x^5 = (x^2)^2 \cdot x$ și depune-l în memorie;
— calculează $3x^5 = x^5 \cdot 3$ și depune-l în memorie;
— calculează $x^6 = x^5 \cdot x$ și depune-l;
— efectuează suma: $x^6 - 3x^5 + 2x^2 - x + 1$ și tipărește-o (TIP);
— adună: $x + \lambda$ și depune rezultatul (în locul lui x), ceea ce înseamnă efectuarea unui pas;
— adună: $(x + \lambda) - L_0$;

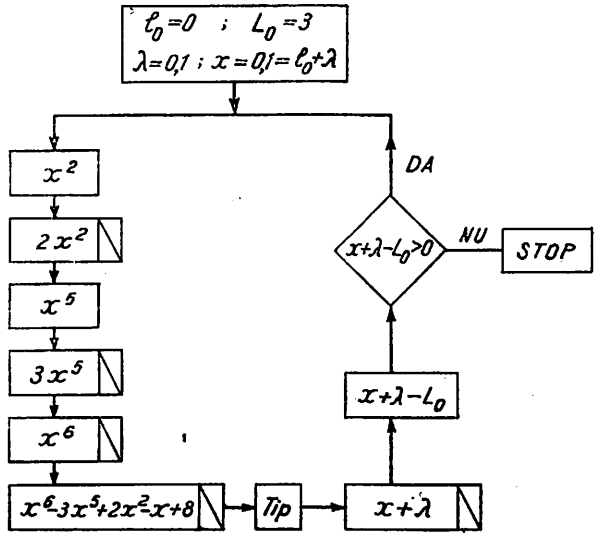


Fig. 8.11

— compară rezultatul cu zero, operație ce se înscrie într-un romb; dacă $x + \lambda - L_0 < 0$, respectiv, dacă „DA" reia calcululde la început după același program. Dacă $x+\lambda - L_0 > 0$, respectiv, dacă „NU", oprește (STOP). Înseamnă că MEC va repeta calculele pentru fiecare pas nou, pînă cînd un ultim pas depășește limita superioară (L_0) și cînd calculul nu mai are sens. În acest caz, este ordonată oprirea mașinii.

Analizînd rezultatele, se reține valorile succesive de semne contrarii, care stabilesc intervalele de existență a rădăcinilor ecuației.

Indicațiile despre *MEC* au avut rostul de a lămuri structura lor principială, necesară exploatării, precum și de a îndemna cititorii să folosească aceste mijloace moderne, accesibile celor ce cunosc matematica.

8.3. INECUAȚII RAȚIONALE CU O NECUNOSCUTĂ

8.3.1. Inecuații polinomiale

Fie:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\,0 \qquad (8.58)$$

o inecuație algebrică și funcția sa asociată $f(x)$. Soluțiile sale sînt toate valorile pe care le poate lua $x \subset R$, astfel încît $f(x)$ să satisfacă relația (8.58).

Rezolvarea inecuației se face pe baza considerațiilor de la paragrafele 8.3.3 și 8.3.4, în felul următor:

● Se rezolvă ecuația $f(x)=0$, ale cărei rădăcini reale sînt: $x_i = (x_1, x_2, x_3 \ldots x_m)$.

● Se întocmește tabloul variației semnelor funcției $f(x_i)$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		x_m		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

În exemplul dat, ecuația are rădăcina dublă x_2 și triplă x_4.

Știind că rădăcinile schimbă semnul funcției, se procedează la stabilirea semnului funcției într-unul din intervale. Dacă se alege o valoare $a \in (x_2, x_3)$, se calculează $f(a)$; fiind negativă, se înscrie minus pe intervalul respectiv (x_2, x_3). După aceea se alternează semnele, ținînd seama și de punctele rădăcinilor multiple.

Acest lucru se poate face mai simplu, prin stabilirea semnelor domeniilor extreme $(-\infty, x_1)$ și (x_m, ∞). În acest scop, se calculează limita

funcției pentru $x = \pm\infty$, care va fi infinită, iar semnul hotărît de semnul lui a_0 și al lui n:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right) = a_0(\pm\infty)^n = (\pm 1)^n a_0 \cdot \infty \quad (8.59)$$

● După stabilirea semnelor funcției pe mulțimea R, se reține domeniile care satisfac inecuația $f(x) > 0$. Deci, în cazul de față:

$$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_3, x_4) \cup (x_m, \infty) \quad (8.60)$$

Iată deci că trebuie reunite toate intervalele cu semnul inecuației (pozitive).

Dacă ecuația ar fi avut forma: $f(x) \geqslant 0$, soluțiile ar fi fost:

$$x \in (-\infty, x_1] \cup [x_3, x_4] \cup [x_m, \infty) \cup \{x_2\} \quad (8.61)$$

De data aceasta apar intervale închise pentru soluțiile ecuației.

E x e m p l u l ($\mathbf{E}_{31}$). Să se rezolve inecuația:

$$f(x) = (x+2)(x+1)(x-2)(x-3) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 \leqslant 0$$

Soluțiile ecuației $f(x) = 0$ se trec în tabloul de variație a funcției:

x	$-\infty$		-2		-1		2		3		$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		

Semnele din tablou s-au stabilit prin limite :

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \frac{12}{x^4}\right) = \infty > 0$$

Ele pot fi obținute pentru o valoare particulară: $f(0) = 12 > 0$, adică pe intervalul $(-1,2)$ care cuprinde pe zero.

Soluțiile inecuației sînt:

$$x \in [-2, -1] \cup [2,3]$$

8.3.2. Inecuații fracționare cu o necunoscută

În primul rînd trebuie să stabilim următoarele teoreme :

— Într-o inecuație se pot trece termenii dintr-un membru în altul, schimbîndu-le semnul, ca și la ecuații.

— O inecuație poate fi amplificată cu un număr pozitiv.

— Amplificarea inecuației cu un număr negativ îi schimbă sensul. Într-adevăr: $-3 < -2$

Prin înmulțirea cu (-1) trebuie schimbat și sensul inecuației: $3 > 2$.

— Amplificarea cu expresii necunoscute sau variabile nu se poate efectua, deoarece nu li se cunosc semnele.

— Fracția nu are sens pentru valorile care anulează numitorul.

Ținînd seama de aceste teoreme, să căutăm o metodă pentru rezolvarea ecuației algebrice fracționare:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \tag{8.62}$$

Stabilim separat semnele celor două funcții $P(x)$ și $Q(x)$, după ce rezolvăm ecuațiile:

$$P(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$$

$$Q(x) = 0 \Rightarrow x_1', x_2', x_3' \ldots x_m'$$

Întocmim tabloul lor de variație, ordonînd rădăcinile ambelor ecuații în ordine crescătoare:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_1'	x_3	x_2'	x_3'	x_4	x_m	x_m'	$+\infty$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		0	$-$	0	$+$	
$Q(x)$		$+$			0	$-$	0	$+$	0	$-$		0	$+$
$f(x) = \frac{P}{Q}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$	$+$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

În ultima linie se face sinteza problemei, în care $f(x)$ este zero pentru rădăcinile numărătorului și fără sens pentru cele ale numitorului, marcînd acest lucru prin bare.

Se constată că toate rădăcinile fac același oficiu de alternare a semnelor funcției. În consecință, metoda de lucru poate fi simplificată astfel:

- Se rezolvă ecuația dată de numărător:

$$P(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2, \ldots, x_m$$

- Se rezolvă ecuația dată de numitor, scrisă sub forma:

$$Q(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq x_1'; \; x \neq x_2' \ldots x \neq x_m'$$

● Se trec toate rădăcinile în ordine crescătoare, în tabloul simplificat:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_1'	x_3	x_2'	x_3'	x_4	x_m	x_m'	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$	$+$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Se stabilesc soluţiile inecuaţiei :

$$x \in (x_1, x_2) \cup (x_1', x_3) \cup (x_2', x_3') \cup (x_4, x_m) \cup (x_m', \infty)$$

Dacă inecuaţia are forma: $f(x) \geqslant 0$, soluţiile sînt:

$$x \in [x_1, x_2] \cup (x_1', x_3] \cup (x_2', x_3') \cup [x_4, x_m] \cup (x_m', \infty),$$

asigurînd intervale închise pentru rădăcinile numărătorului şi deschise pentru cele ale numitorului, spre a exclude valorile fără sens ale funcţiei.

E x e m p l u l (E_{32}). Să se rezolve inecuaţia:

$$\frac{-x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^3 + 1} \leqslant -1$$

Nu se pot alunga numitorii, pentru că cuprind necunoscute, ce pot duce la valori negative ale acestora ($x^3+1<0$). De aceea se aduc toţi termenii în membrul întîi şi se formează funcţia :

$$f(x) = \frac{-x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^3 + 1} + 1 \leqslant 0$$

sau:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 1} \leqslant 0$$

● Se rezolvă ecuaţiile :

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 2$$

$$x^3 + 1 \neq 0 \qquad \Rightarrow x_1' \neq -1;\ x_2' \neq \alpha;\ x_3' \neq \bar{\alpha}$$

● Se întocmeşte tabloul de variaţie :

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$

Semnele s-au stabilit pentru intervalul (—1, 1), dînd lui x valoarea zero: $f(0) = 2 > 0$.

Soluția este:

$$x \in (-\infty, -1) \cup [1,2]$$

8.4. ECUAȚII IRAȚIONALE CU O NECUNOSCUTĂ

8.4.1. Domeniul de existență al soluțiilor

Forma generală a ecuației iraționale cu o necunoscută este următoarea:

$$f(x) = P(x) + \sqrt[m]{Q}(x) + \sqrt[n]{R}(x) + \ldots = 0 \qquad (8.63)$$

în care, parte din indicii radicalilor sînt pari ($m = 2p$), iar parte impari ($n = 2q + 1$).

Pentru radicalii cu indici pari, trebuie să punem condiția:

$$Q(x) \geqslant 0 \qquad (8.64)$$

Această condiție restrînge valorile lui x, pentru ca să elimine valorile imaginare ale lui $f(x)$, stabilind *domeniul de existență* ca domeniu al soluțiilor inecuațiilor de forma (8.1).

Cunoscînd domeniul de existență, respectiv „domeniul de definiție al funcției $f(x)$", se procedează la eliminarea radicalilor prin gruparea termenilor și ridicarea la puteri convenabile. În final, se obține o ecuație rațională: $F(x) = 0$.

Se reține numai rădăcinile ce aparțin domeniului stabilit și se verifică în ecuația inițială (8.156), deoarece — prin ridicarea la putere — se introduc rădăcini în plus, datorită măririi gradului inițial a ecuației.

8.4.2. Metode de calcul

Problema este extrem de complexă, pentru că metodele de eliminarea radicalilor depind de forma ecuației. În cele ce urmează se vor da exemple caracteristice tipurilor frecvente de ecuații iraționale.

$$(E_{33}) \quad \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 0$$

Condițiile: $2x + 1 \geqslant 0$ și $x - 3 \geqslant 0$ stabilesc domeniul de existență: $x \in [3, \infty)$.

Pentru eliminarea radicalilor se scrie :

$$\sqrt{2x+1} = -\sqrt{x-3}$$

şi se ridică la pătrat: $2x + 1 = x - 3 \Rightarrow x = -4$.

Deoarece $(-4) \notin [3, \infty)$ ecuaţia nu are soluţie.

$$(E_{34}) \quad \sqrt{x^2-5x+6} + \sqrt{x+2} = x$$

Domeniul: $f(x) = x^3 - 5x + 6 \geqslant 0$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		

$g(x) = x + 2 \geqslant 0$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$		

Deci : $x \in [-2, 2] \cup [3, \infty)$

Se grupează astfel :

$$\sqrt{x^2-5x+6} = x - \sqrt{x+2}$$

Se ridică la pătrat:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 + x + 2 - 2x\sqrt{x+2}$$

sau :

$$x\sqrt{x+2} = 3x - 2$$

Se ridică din nou la pătrat:

$$x^2(x+2) = 9x^2 - 12x + 4$$

sau:

$$x^3 - 7x^2 + 12x - 4 = 0$$

Ecuaţia are rădăcina întreagă $x_1 = 2$ şi se poate scrie :

$$(x-2)(x^2-5x+2) = 0$$

Deci : $x_1 = 2$; $x_{2,3} = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ $\nearrow$ $x_2 = \dfrac{5+17}{2} \approx 4{,}5$ $\searrow$ $x_3 = \dfrac{5-17}{2} \approx 0{,}5$

Toate cele trei rădăcini aparţin domeniului stabilit. Rămîne să le verificăm în ecuaţia iniţială:

$$x_1 = 2 \Rightarrow \sqrt{4 - 10 + 6} + \sqrt{2 + 2} = 2, \text{ verifică}$$

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} + 6} +$$

$$+ \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} + 2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{25 + 17 \pm 10\sqrt{17} - 50 \mp 10\sqrt{17} + 24}{4}} + \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{17} + 4}{2}} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{16}{4}} + \frac{\sqrt{9 \pm \sqrt{17}}}{\sqrt{2}} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

sau:

$$\sqrt{9 \pm \sqrt{17}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(5 \pm \sqrt{17} - 4)$$

Dar:

$$A = 9;\ B = 17 \Rightarrow C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{81 - 17} = \sqrt{64} = 8$$

şi:

$$\sqrt{\frac{9+8}{2}} \pm \sqrt{\frac{9-8}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm \sqrt{17})$$

respectiv:

$$\sqrt{17} \pm 1 = 1 \pm \sqrt{17}$$

Se observă că ecuaţia este verificată numai de $x_2 = (5 + \sqrt{17})/2$. Rezultă că rădăcinile ecuaţiei iniţiale rămîn:

$$x_1 = 2;\ x_2 = (5 + \sqrt{17})/2.$$

8.5. APLICAŢII

1°. Să se determine parametri m, n, p, astfel încît polinoamele următoare să fie divizibile între ele.

A_{15}. $x^4 - x^3 - 4mx + 2n$ cu $x^2 - 3x + 2$

Rezolvare prin:

a) *Metoda împărţirii.* Se împarte un polinom la celălalt şi se pune condiţia ca restul să fie identic nul :

$$\begin{array}{l|l} x^4 - x^3 - 4mx + 2n & x^2 - 3x + 2 \\ \underline{-x^4 + 3x^3 - 2x^2} & \overline{x^2 + 2x + 4} \\ \quad / \; 2x^3 - 2x^2 - 4mx + 2n & \\ \quad \underline{-2x^3 + 6x^2 - 4x} & \\ \quad\quad / \; 4x^2 - (4m+4)x + 2n & \\ \quad\quad \underline{-4x^2 + 12x - 8} & \\ \quad\quad x(8 - 4m) + (2n - 8) & \end{array}$$

$R = x(8 - 4m) + (2n - 8) \equiv 0 \Rightarrow 8 - 4m = 0$ şi $2n - 8 = 0$

Deci: $m = 2$; $n = 4$.

b) *Metoda coeficienţilor nedeterminaţi.* Se scrie identitatea:

$$x^4 - x^3 - 4mx + 2n \equiv (x^2 - 3x + 2)(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^4 + x^3(b - 3a) + x^2(c - 3b + 2a) + x(-3c + 2b) + 2c$$

Deci: $a = 1$; $b - 3a = -1$; $c - 3b + 2a = 0$; $-3c + 2b = -4m$;

$$2c = 2n.$$

Rezultă: $a = 1$; $b = 2$; $c = 4$; $m = 2$; $n = 4$.

c) *Metoda lui Bézout.* Se descompune în factori :

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$ şi se impune ca :

$$\left.\begin{array}{l} P(1) = 1 - 1 - 4m + 2n = 0 \\ P(2) = 16 - 8 - 8m + 2n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m = 2;\ n = 4$$

2°. Să se rezolve ecuaţiile de grad superior reductibile:

$\mathbf{A}_{16}$. $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$ **R.** 1, 2, 1/2

$\mathbf{A}_{17}$. $2(m - 1)x^3 - (m^2 + 3)x^2 + (m^2 + 3)x - 2(m - 1) = 0$. **R.** 1

$\mathbf{A}_{18}$. $2x^3 - (1 + i)x^2 - (1 + i)x + 2 = 0$; $i = \sqrt{-1}$ **R.** -1, $1 + i$, $\frac{1}{1+i}$

3°. Să se rezolve inecuațiile următoare :

$$\mathbf{A}_{19}.\ \frac{(x+2)(x^2-3x+2)}{(x+5)^3(x+4)} \leqslant 0$$

R.

x	$-\infty$	-5	-4	-2	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$	$-$	$0+$	$0-$	$0+$	

$$x \in (-4, -2] \cup [1, 2].$$

$$\mathbf{A}_{20}\ \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+1)^2(x-2)} \geqslant 0;$$

R :

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+$
$f(x)$	$+$	$0-$	$-$	$0-$	$+$	

$$x \in (-\infty, -2] \cup (2, \infty)$$

4°. Să se rezolve ecuațiile analizei combinatorii :

$$\mathbf{A}_{21}.\ C_x^4 : C_x^2 = 1\ ;\ x \geqslant 4$$

$$\mathbf{R}.\ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4} \cdot \frac{1.2}{x(x-1)} = 1$$

$$x^2 - 5x + 6 = 12 \Rightarrow x = 6$$

$$\mathbf{A}_{22}.\ A_x^6 - 24\, x\, C_x^4 + A_x^4 = 0\ ;\ x \geqslant 6$$

$$\mathbf{R}.\ x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) - 24\, x \cdot \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4} + x(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 7$$

$$\mathbf{A}_{23}.\ \frac{1}{P_{x-1}} - \frac{1}{P_x} = \frac{(x-1)^3}{P_{x+1}}\ ;\ x > 1$$

$$\mathbf{R}.\ \frac{1}{(x-1)!} - \frac{1}{x!} = \frac{(x-1)^3}{(x+1)!}$$

$$x(x+1) - (x+1) = (x-1)^3$$

$$x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 3$$

5°. Să se rezolve următoarele ecuații ale progresiilor numerice.

$\mathbf{A}_{24}$. Se cere progresia aritmetică de patru numere, cu rația 4, al căror produs este 3 465.

R. $x-6\,;\ x-2\,;\ x+2\,;\ x+6.$

$x_{1,2}=\pm 9;\ \div 3,\ 7,\ 11,\ 15$ sau $\div -15,\ -11,\ -7,\ -3$

$\mathbf{A}_{25}$. Să se calculeze termenii comuni ai progresiilor: $\div 4{,}9,\ 14\ \ldots$ și $\div 93,\ 86,\ 79,\ \ldots$

R. $u_m=4+(m-1)\,5;\ v_n=93-(n-1)\,7$

$4+(m-1)\,5=93-(n-1)\,7$ sau: $m-1=\dfrac{96-7n}{5}$

Trebuie ca: $96-7n\geqslant 0$, deci: $n<13{,}7\approx 13$ (număr întreg)

Or: $m-1=\dfrac{95+1-5n-2n}{5}=(19-n)-\dfrac{2n-1}{5}$

Trebuie ca: $2n-1=5k;\ k\in N.$

k	1	3	5
n	3	8	13
$m-1$	15	8	1

$\mathbf{A}_{26}$. Într-o progresie geometrică de patru termeni, suma termenilor de rang impar este 20, iar a celor de rang par este 60.

Să se determine progresia.

R. $\dfrac{b}{q^3},\ \dfrac{b}{q},\ bq,\ bq^3;\ b\left(\dfrac{1}{q^3}+q\right)=20$ și $b\left(\dfrac{1}{q}+q^3\right)=60$

Raportul lor: $\dfrac{b(q^4+1)/q}{b(q^4+1)/q^3}=\dfrac{60}{20}=3\Rightarrow q^2=3$

$b(q^4+1)=60\ q\Rightarrow 10\ b=6\ q\Rightarrow b=6\ q\Rightarrow \div\div 2,\ 6,\ 18,\ 54.$

$\mathbf{A}_{27}$. O progresie geometrică de cinci termeni are suma de 31, iar suma termenilor de rang impar este de 21. Care este progresia?

R. $\dfrac{a}{q^2},\ \dfrac{a}{q},\ a,\ aq,\ aq^2\,;$

$a\left(\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{q}+1+q+q^2\right)=31$

$a\left(\dfrac{1}{q^2}+1+q^2\right)=21$

Raportul : $\frac{q^4+q^3+q^2+q+1}{q^4+q^2+1} = \frac{31}{21}$; $\div$ 1, 2, 4, 8, 16

sau : $\div$ 16, 8, 4, 2, 1.

6°. Să se calculeze rădăcinile iraționale ale ecuațiilor de mai jos, cu două zecimale, cuprinse în intervalele indicate în dreptul fiecăreia :

$\mathbf{A}_{28}$. $2x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0$; $x \in (1,4)$ **R.** 3,73

$\mathbf{A}_{29}$. $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$; $x \in (-1,2)$ **R.** 0,27

7°. Să se rezolve ecuațiile și inecuațiile cu moduli.

$\mathbf{A}_{30}$. $|x+2| - 2|x-1| = |x-2|$

R. Se stabilesc condițiile de existență a expresiilor în moduli:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & (A_1) \\ 0 & (A) \\ -x-2 & (A_2) \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$	$-$		0		$+$
		A_2	A	A_1	

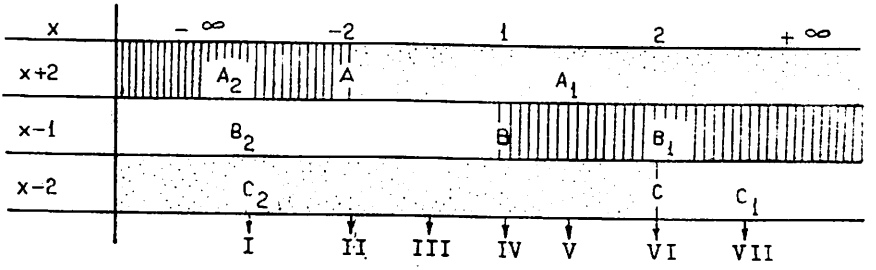
$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & (B_1) \\ 0 & (B) \\ -x+1 & (B_2) \end{cases}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$	$-$		0		$+$
		B_2	B	B_1	

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & (C_1) \\ 0 & (C) \\ -x+2 & (C_2) \end{cases}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$	$-$		0		$+$
		C_2	C	C_1	

Se întocmește tabloul centralizat al cazurilor :



Secționînd intervalele evidențiate în tablou, se obțin cazurile posibile:

Cazul I $(A_2 B_2 C_2)$: $x \in (-\infty, -2)$

Ecuația are următoarea formă:

$$-x-2-2(-x+1) = -x+2$$

Rezultă: $x = 3 \notin (-\infty, -2)$, soluție incompatibilă.

Cazul II $(A B_2 C_2)$: $x = -2$

Ecuația devine: $0-2(-x+1) = -x+2$

$x = 4/3 \neq -2$, soluție incompatibilă.

Cazul III $(A_1 B_2 C_2)$: $x \in (-2,1)$

$$x+2-2(-x+1) = -x+2$$

$x = \frac{1}{2} \in (-2, 1)$ soluție valabilă.

Cazul IV $(A_1 B C_2)$: $x = 1$

$$x+2-2 \cdot 0 = -x+2$$

$x = 0 \neq 1$, soluție imposibilă.

Cazul V $(A_1 B_1 C_2)$: $x \in (1, 2)$

$$x+2-2(x-1) = -x+2$$

$2 = 0$, caz imposibil.

Cazul VI $(A_1 B_1 C)$: $x = 2$

$$x+2-2(x-1) = 0$$

$x = 4 \neq 2$, soluție incompatibilă.

Cazul VII $(A_1 B_1 C_1)$: $x \in (2, \infty)$

$$x+2-2(x-1) = x-2$$

$x = 3 \in (2, \infty)$, soluție valabilă.

În concluzie, reținem că această ecuație are soluțiile: $x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_2 = 3$.

CAPITOLUL 9

ECUAȚII ȘI INECUAȚII TRIGONOMETRICE

9.1. ECUAȚII TRIGONOMETRICE FUNDAMENTALE

Ecuația trigonometrică se poate transforma în produse de factori de gradul întîi, de tip binomial:

$$(a_1 - b_1 \sin x)\ (a_2 - b_2 \cos x)\ (a_3 - b_3 \operatorname{tg} x) \ldots = 0 \qquad (9.1)$$

Egalînd cu zero — pe rînd — acești factori, se obțin ecuații *fundamentale* sau *pur trigonometrice* ale căror soluții sînt date de mulțimea valorilor arcurilor respective (§ 4.1.6):

$$a_1 - b_1 \sin x = 0 \Rightarrow x_1 = 2k\pi + \operatorname{arc}\sin\frac{a_1}{b_1}$$

$$x_2 = (2k+1)\pi - \operatorname{arc}\sin\frac{a_1}{b_1} \qquad (9.2)$$

$$a_2 - b_2 \cos x = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 2k\pi \pm \operatorname{arc}\cos\frac{a_2}{b_2} \qquad (9.3)$$

$$a_3 - b_3 \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{a_3}{b_3} \qquad (9.4)$$

Exemple de calcul. Să se rezolve ecuațiile fundamentale:

$$(\mathbf{E}_1)\ 2 \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} = (12\ k+1)\frac{\pi}{6}$$

$$x_2 = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} = (12\ k+5)\frac{\pi}{6};\ K \in Z = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$$

$$(\mathbf{E}_2)\ 2 \cos^2 x - 1 = 0$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se disting două cazuri:

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$	$\cos = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4}$
$x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{4} = (8k+1)\frac{\pi}{4}$	$x_3 = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} = (8k+3)\frac{\pi}{4}$
$x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{4} = (8k-1)\frac{\pi}{4}$	$x_4 = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} = (8k-3)\frac{\pi}{4}$

Să analizăm soluțiile, spre a formula un rezultat mai sintetic.

Se precizează că $8k$ este un multiplu de 8 : $8k = \mathfrak{M}\,8$ și că întotdeauna:

$$\mathfrak{M}\,8 + \mathfrak{M}\,8 = \mathfrak{M}\,8$$

sau:

$$\mathfrak{M}\,m + 8 = \mathfrak{M}'8$$

Deci, se poate scrie: $\mathfrak{M}\,8 + 7 = \mathfrak{M}'8 - 1$

sau: $\mathfrak{M}\,8 + 5 = \mathfrak{M}'8 - 3$

Rădăcinile de mai sus, ținînd seama de aceste observații, au forma nouă:

$$x_1 = (8k+1)\frac{\pi}{4};\ x_3 = (8k+3)\frac{\pi}{4};\ x_4 = (8k+5)\frac{\pi}{4};\ x_2 = (8k+7)\frac{\pi}{4}.$$

Reprezentînd pe o axă un interval de opt numere, limitat de două numere divizibile cu opt, se obține imaginea soluțiilor.

Se constată atît din grafic cît și din valorile rădăcinilor că, de fapt acestea acoperă mulțimea numerelor impare. Deci, ecuația inițială are soluția generală și sintetică:

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{4};\ k \in Z.$$

$$(\mathbf{E}_3)\ 2\ \operatorname{tg} x + 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arc\ tg}\left(-\frac{3}{2}\right)$$

Un caz particular al ecuațiilor fundamentale, îl constituie acela, în care binoamele au formele de mai jos.

$$(\mathbf{E}_4)\ \sin 3x - \sin 15x = 0$$

Se scrie: $\sin 3x = \sin 15x$

și se aplică formula mulțimii valorilor arcurilor:

$$15x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x_1 = k\frac{\pi}{6}$$

$$15x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x_2 = (2k+1)\frac{\pi}{18}$$

$$(E_5)\ \sin 4x + \cos 5x = 0$$

Se scrie: $\cos 5x = -\sin 4x = \sin(-4x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)$

Rezultă: $5x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)$

respectiv:

$$x_1 = (4k+1)\frac{\pi}{2};\ x_2 = (4k-1)\frac{\pi}{18}$$

$$(E_6)\ \operatorname{tg} 11x = \operatorname{cotg} 7x$$

$$\operatorname{tg} 11x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) \Rightarrow 11x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 7x$$

Deci: $x = (2k+1)\frac{\pi}{36}$.

9.2. ECUAȚII RAȚIONALE

Ecuația generală trigonometrică este de forma:

$$a \sin^m \alpha x + b \cos^n \beta x + ctg^p \gamma x + \ldots = 0 \qquad (9.5)$$

cuprinzînd funcții trigonometrice diferite, la puteri diferite (m, n, p) și arcuri diferite (αx, βx, $\gamma x \ldots$).

Rezolvarea sa se face prin metode specifice, care permit reducerea acesteia la forma unor ecuații fundamentale.

9.2.1. Metoda factorizării

Cînd este posibilă transformarea în factori a ecuației, problema se simplifică, deoarece se obțin ecuațiile fundamentale cunoscute. Astfel:

$$(E_7)\ \sin 2x + 2\sin x - \cos x - 1 = 0$$

Se scrie:

$$2 \sin x \cos x + 2 \sin x - \cos x - 1 = 0$$

sau:

$$2 \sin x (\cos x + 1) - (\cos x + 1) = 0$$

Deci:

$$(2 \sin x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

și:

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} = (12k + 1)\frac{\pi}{6}$$

$$x_2 = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{6} = (12k + 5)\frac{\pi}{6}$$

$$\cos x = -1 = \cos \pi \Rightarrow x_{3,4} = 2k\pi \pm \pi \begin{cases} \nearrow (2k + 1)\pi \\ \searrow (2k - 1)\pi \end{cases}$$

Se observă că $x_{3,4}$ poate fi adus la o singură expresie sintetică: $x_{3,4} = (2k + 1)\pi$.

9.2.2. Metoda reducerii gradului

Se știe că:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad (9.6)$$

Folosind astfel de relații, se poate efectua reducerea gradului ecuației. Exemplu:

$$(E_8)\ 2 \cos^2 x - \sin^2 x = 1\frac{1}{4}$$

Se fac substituțiile de mai sus:

$$1 + \cos 2x - \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = 5/4$$

sau:

$$3 \cos 2x = 3/2$$

respectiv:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k \pm \frac{\pi}{3}$$

și:

$$x = (6k \pm 1)\frac{\pi}{6}$$

9.2.3. Metoda arcului auxiliar

Menținîndu-ne pe linia folosirii identităților trigonometrice, ecuațiile se pot rezolva, înlocuind unii coeficienți, prin funcții de arcuri auxiliare. Exemplu:

$$(E_9)\ \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$$

Notăm:

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x = 1$$

sau:

$$\sin x \cos\varphi + \sin\varphi \cos x = \cos\varphi$$

Rezultă:

$$\sin(x + \varphi) = \cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \varphi\right)$$

Deci:

$$\frac{\pi}{2} - x - \varphi = 2k\pi \pm \varphi$$

iar:

$$-x_1 = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2\varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = (12k + 1)\frac{\pi}{6}$$

$$-x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{2} = (4k - 1)\frac{\pi}{2}$$

sau:

$$x_1 = 2k_1\pi - (12k_2 + 1)\frac{\pi}{6} = (12k - 1)\frac{\pi}{6}$$

$$x_2 = 2k_1\pi - (4k_2 - 1)\frac{\pi}{2} = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$$

9.2.4. Metoda algebrică

Această metodă constă în reducerea funcțiilor trigonometrice la una singură și a arcurilor la unul singur, indiferent de gradele acestora.

În aceste condiții se face o substituție a funcției unice cu arc unic și se obține o ecuație algebrică, ale cărei n soluții servesc la scrierea a n ecuații trigonometrice fundamentale.

Deseori sînt utile formulele de substituție cunoscute (§ 4.2.3):

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ ;\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ;\ \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad (9.7)$$

unde:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Exemple de calcul:

$$(E_{10})\ \sin^2 x - \cos x + 1 = 0$$

Prin substituțiile de mai sus, se obține:

$$\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 = 0$$

sau:

$$4t^2 - (1-t^2)(1+t^2) + (1+t^2)^2 = 0$$

respectiv:

$$2t^2(t^2+3) = 0$$

Rezultă:

$$t^2 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 0$$

și:

$$t^2 + 3 = 0 \Rightarrow t_{3,4} = \pm i\sqrt{3} \in C$$

Deci:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0 = \operatorname{tg} 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi$$

iar:

$$x = 2k\pi\ ;\ k \in Z.$$

9.3. INECUAȚII RAȚIONALE

Inecuațiile trigonometrice se rezolvă ca și cele algebrice, respectînd aceleași principii, deoarece funcțiile asociate sînt tot continuie.

Deosebirea constă în faptul că funcțiile trigonometrice sînt periodice și ca atare, investigarea nu se face pe întregul domeniu de definiție ($x \in R$), ci numai pe o perioadă T (§ 4.1.4). Exemplu:

$$(E_{11})\ f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4 \sin x \cos x + 2 \sin x - 2\sqrt{2} \cos x - \sqrt{2}}{4 \sin x \cos x + 2\sqrt{3} \sin x - 2 \cos x - \sqrt{3}} \geqslant 0$$

● Se rezolvă ecuația $P(x) = 0$, transformînd-o în produs:

$$(2 \sin x - \sqrt{2})\ (2 \cos x + 1) = 0$$

Deci:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{4} = (8k + 1)\frac{\pi}{4}$$

$$x_2 = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{4} = (8k + 3)\frac{\pi}{4}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x_{3,4} = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} = (6k \pm 2)\frac{\pi}{3}$$

Pentru perioada $T = 2\pi$ a funcției $f(x)$, se obțin soluțiile particulare:

$$x_1 = \frac{\pi}{4};\ x_2 = \frac{3\pi}{4};\ x_3 = \frac{2\pi}{3};\ x_4 = \frac{4\pi}{3}.$$

● Se rezolvă ecuația $Q(x) \neq 0$, în mod similar:

$$(2 \sin x - 1)\ (2 \cos x + \sqrt{3}) \neq 0$$

Deci:

$$\sin x \neq \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_1 \neq 2k\pi + \frac{\pi}{6} = (12k + 1)\frac{\pi}{6}$$

$$x_2 \neq (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{6} = (12k + 5)\frac{\pi}{6}$$

$$\cos x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x_{3,4} \neq 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} = (12k \pm 5)\frac{\pi}{6}$$

Pentru aceeași perioadă (2π) se obțin soluțiile:

$$x_1 \neq \frac{\pi}{6};\ x_2 \neq \frac{5\pi}{6};\ x_3 \neq \frac{5\pi}{6};\ x_4 \neq \frac{7\pi}{6}$$

● Se întocmește graficul de variație al funcției $f(x)$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$f(x)$	$+$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$-$	0	$+$

și se obțin soluțiile inecuației pentru perioada $(0,2\pi)$:

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right] - \left\{\frac{5\pi}{6}\right\}$$

Pe alt interval de 2π $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right)$, soluțiile sînt:

$$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}\right) - \left\{\frac{5\pi}{6}\right\}$$

În ce privește perioada T a funcției trigonometrice, se precizează următoarele criterii de investigare.

— Perioada funcțiilor $\sin x$ și $\cos x$ este 2π, iar a lui $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{cotg} x$, numai π.

— Perioada funcțiilor de arcuri multiple se stabilește în cadrul propoziției precedente, astfel:

$$\begin{aligned} \sin mx &\Rightarrow T = 2\pi/m \\ \operatorname{tg} nx &\Rightarrow T = \pi/n \end{aligned} \qquad (9.8)$$

— Perioada se determină numai pentru funcțiile de grad unu; celelalte grade trebuie reduse. Astfel:

$$(E_{12})\ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$(E_{13})\ \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$(E_{14})\ \sin^4 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}(1 + \cos 4x) \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi \searrow$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \nearrow \quad T = \pi$$

— Perioada unei funcții polinomiale se determină prin cel mai mic multiplu comun al perioadelor monoamelor componente.

Exemplu:

$(\mathbf{E_{15}})$ $f(x) = \sin^3 x + \cos 3x + \operatorname{tg} 6x$

$$\sin^3 x = (1 - \cos 2x)\frac{\sin x}{2} = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) =$$

$$= \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$$

Funcția are forma:

$$f(x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x + \cos 3x + \operatorname{tg} 6x$$

unde:

$$\sin x \Rightarrow T_1 = 2\pi = 12\,\frac{\pi}{6}$$

$$\sin 3x,\ \cos 3x \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{3} = 4\,\frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{tg} 6x \Rightarrow T_3 = \frac{\pi}{6}$$

Or, c.m.m.m.c. = 12, între 12,4 și 1.

Perioada funcției $f(x)$ este: $T = 12.\frac{\pi}{6} = 2\pi$.

9.4. APLICAȚII

1°. Să se rezolve ecuațiile trigonometrice:

$\mathbf{A_1}$. $2 \cos x = \cos x - \cos 3x$

R. $\cos x\,(1 - 2\sin^2 x) = 0$; $\cos x = 0$; $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x = (2K + 1)\frac{\pi}{4} \cup (2k + 1)\frac{\pi}{2}$$

A_2. $\sin 2x \cos x = \sin x + \cos 2x$

R. $(2\cos^2 x - 1)(\sin x - 1) = 0$; $\sin x = 1$; $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x = (2K+1)\frac{\pi}{4} \cup (4K+1)\frac{\pi}{2}$$

A_3. $\sin 4x = \sin 5x$ R. $x = 2K\pi \cup (2K+1)\frac{\pi}{9}$

A_4. $\sin^2 x + \sin 2x = \cos 2x - \cos^2 x$ R. $\cos 2x - \sin 2x = 1$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \sin\frac{\pi}{4}\; x = k\pi \cup (4k-1)\frac{\pi}{4}$$

2°. Să se rezolve inecuația:

A_5. $f(x) = \cos x + \cos 3x \geqslant 0$

R. Se rezolvă, în primul rînd ecuația (A_1), care, pe o perioadă $T = 2\pi$, are soluțiile: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$.

Tabloul de variație:

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		$5\pi/4$		$3\pi/2$		$7\pi/4$		2π
$f(x)$	|	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	|
		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Soluția este: $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$

CAPITOLUL 10

ECUAȚII EXPONENȚIALE ȘI LOGARITMICE

10.1. ECUAȚII LOGARITMICE FUNDAMENTALE

Logaritmul, conform definiției, are expresia:

$$\log_b N = n \tag{10.1}$$

care reprezintă:

$$N = b^n \tag{10.2}$$

În consecință, atît forma logaritmică cît și cea exponențială folosesc trei mărimi (N, b, n): numărul (N), baza (b) și logaritmul (n).

Ecuația logaritmică sau exponențială va avea una din aceste mărimi necunoscută. Deci, se pot forma trei tipuri de ecuații fundamentale.

10.1.1. Forma aritmetică

În acest caz, necunoscuta este numărul:

$$N = x$$

Ecuația logaritmică:

$$\log_b x = n \tag{10.3}$$

ia forma unei ecuații algebrice de gradul întîi:

$$x = b^n \tag{10.4}$$

a cărei valoare se obține prin ridicarea bazei (b) la puterea (n), deci prin calcul aritmetic.

10.1.2. Forma logaritmică

De data aceasta, necunoscuta este exponentul sau logaritmul (n):

$$\log_b N = x \tag{10.5}$$

Sub această formă, ecuația nici nu trebuie prelucrată; rămîne doar să se calculeze valoarea lui x, căutînd în tabelele logaritmice, după ce se schimbă baza:

$$x = \frac{\log N}{\lg b} \tag{10.6}$$

10.1.3. Forma algebrică

În fine ultimul caz este acela în care necunoscuta este baza ($b = x$):

$$\log_x N = n \tag{10.7}$$

Rezultă ecuația binoamă:

$$x^n = N \tag{10.8}$$

Rezolvarea sa se face prin substituția cunoscută:

$$x = \sqrt[n]{N \cdot t}, \tag{10.9}$$

cînd:

$$t^n - 1 = 0 \tag{10.10}$$

sau:

$$(t - 1)\ (t^{n-1} + t^{n-2} + \ldots + t + 1) = 0 \tag{10.11}$$

cu:

$$t_1 = 1 \text{ și } x_1 = \sqrt[n]{N} \tag{10.12}$$

iar:

$$t^{n-1} + t^{n-2} + \ldots + t + 1 = 0,$$

o ecuație reciprocă, cu soluțiile:

$$t_i = (t_2, t_3, \ldots, t_n), \text{ respectiv:}$$

$$x_i = \sqrt[n]{N}\ t_i\ ;\ i = 2, 3, \ldots, n \tag{10.13}$$

10.2. METODE DE REZOLVARE

10.2.1. Exprimarea în aceeași bază

Dacă o ecuație logaritmică sau exponențială se exprimă în aceeași bază sau la același exponent, se rezolvă direct.

Exemple:

(E_1) $$2^x = 16 \; ; \; 16 = 2^4$$

Deci:

$$2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$$

(E_2) $$2^x + 2^{x+2} - 2^{x-1} = 3$$

Se face substituția: $2^x = y$

$$y + 2^2 \cdot y - \frac{y}{2} = 3$$

sau:

$$2y + 8y - y = 6 \Rightarrow y = 2/3$$

Deci:

$$2^x = \frac{2}{3} \text{ sau: } 2^{x-1} = \frac{1}{3}$$

$$(x-1) \lg 2 = \lg \frac{1}{3} = \lg 1 - \lg 3 = -\lg 3$$

iar:

$$x = 1 - \frac{\lg 3}{\lg 2}$$

(E_3) $$2 \cdot 4^x + 6^x = 9^x$$

Se descompun în factori:

$$2 \cdot 2^{2x} + 2^x \cdot 3^x = 3^{2x}$$

Se împarte cu $2^{2x} : 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$

Se notează: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$ și se obține:

$$2 + y = y^2 \text{ sau: } y^2 - y - 2 = 0,$$

cu:

$$y_1 = 2; \; y_2 = -1$$

Soluția a doua nu corespunde ecuației. Deci:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \Rightarrow x (\lg 3 - \lg 2) = \lg 2$$

iar:

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 3 - \lg 2}$$

(E_4) $$\log_2 x + 2 \log_4 x + 3 \log_8 x = 3$$

Se scrie în baza zecimală:

$$\frac{\lg x}{\lg 2} + 2\frac{\lg x}{\lg 4} + 3\frac{\lg x}{\lg 8} = 3$$

sau:

$$\frac{\lg x}{\lg 2} + 2 \cdot \frac{\lg x}{2 \lg 2} + 3 \cdot \frac{\lg x}{3 \lg 2} = 3$$

sau:

$$\lg x = \lg 2 \Rightarrow x = 2$$

10.2.2. Restrîngerea logaritmilor

Se folosesc relațiile de restrîngere a logaritmilor: $\log A + \log B = \log AB$ etc. E x e m p l e:

(E_5) $$2 \lg (x+1) - \lg (x-1) = 1; \; x > 1$$

Se scrie:

$$\lg \frac{(x+1)^2}{x-1} = \lg 10$$

sau:

$$(x+1)^2 = 10 (x-1)$$

sau:

$$x^2 - 8x + 11 = 0, \text{ cu: } x = \frac{4 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{matrix} \nearrow \; x_1 = \frac{4+\sqrt{5}}{2} > 1 \\ \searrow \; x_2 = \frac{4-\sqrt{5}}{2} < 1 \end{matrix}$$

Se știe că domeniul de existență (definiție) al logaritmilor: $y = \lg f(x)$ este dat de condiția:

$$f(x) > 0 \qquad (10.14)$$

În consecință, soluțiile nu pot exista decît în acest domeniu. De aceea, în exemplul anterior, a doua rădăcină nu satisface ecuația logaritmică.

10.3. APLICAȚII

Să se rezolve ecuațiile:

A_1. $8^{-x} = 16$ R. $-2/3$

A_2. $2^{x+1} = 0{,}25$ R. -3

A_3. $\sqrt[4]{\sqrt[x]{a^x}} = \sqrt[x]{\sqrt{a}}$ R. 2

A_4. $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} + 3^{x-5} + 3^{x-6} = 364$ R. 6

A_5. $\log_a [1 + \log_b (x + m)] = 0$

R. $1 + \log_b (x + m) = 1$; $x = 1 - m$

A_6. $\lg (x+a) - 2 \lg (x-a) = \lg 3 - \lg 4 - \lg a$

R. $\lg \dfrac{x+a}{(x-a)^2} = \lg \dfrac{3}{4a}$; $3x^2 - 10\,ax - a^2 = 0$

A_7. $\dfrac{\log ax}{\log bx} = \dfrac{\lg a^2x}{\lg b^2x}$

R. $\dfrac{\log a + \lg x}{\lg b + \lg x} = \dfrac{2 \lg a + \lg x}{2 \lg b + \lg x}$; $x = 1$

A_8. $\log_x a + \log_{x^2} a + \log_{x^3} a = \lg a^{11}$

R. $\dfrac{\lg a}{\lg x} + \dfrac{\lg a}{2 \lg x} + \dfrac{\lg a}{3 \lg x} = \dfrac{11 \lg a}{6 \lg x} = \lg a^{11}$

$\lg x = 1/6 \Rightarrow x = 10^{1/6} = \sqrt[6]{10}$.

A_9. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$

R. $\dfrac{\lg 2}{\lg x} \cdot \dfrac{\lg 2}{\lg x + \lg 2} = \dfrac{\lg 2}{2 \lg 2 + \lg x}$

sau:

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{\log_2 4x}$$

$$x_{1,2} = 2^{\pm \sqrt{2}}$$

A_{10}. $2^{x+y} = 32 \ ; \ xy = 6$

R. $x+y = 5; \ xy = 6 \Rightarrow z^2 - 5z + 6 = 0$

$z_1 = 2; \ z_2 = 3$ şi: $x = 2, \ y = 3$

A_{11}. $2^{x+y} = 128; \ \lg x + \log y = 1$

R. $x + y = 7; \ xy = 10 \Rightarrow z^2 - 7z + 10 = 0$

$x = 2, \ y = 5$

CAPITOLUL 11

SISTEME DE ECUAȚII

11.1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

11.1.1. Definiția sistemelor de ecuații

Sistemele de ecuații constau dintr-un număr oarecare de ecuații (m), avînd cîte un număr oarecare de necunoscute (n), ale căror soluții, trebuie să satisfacă simultan toate aceste ecuații:

Modelul general al lor are aspectul:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ f_m(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (11.1)$$

Este evident faptul că scrierea în detaliu a unui asemenea model matematic, precum și repetarea sa pe parcursul rezolvării sau discuției răpește timp și spațiu. De aceea se simbolizează astfel:

$$f_i(x_j) = 0 \qquad (11.2)$$

unde: $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ și $j = 1, 2, 3, \ldots, n$,
scriere, care substituie formal întregul ansamblu de mai sus (11.1). Într-adevăr, prin schimbarea indicilor (i, j) între limitele stabilite, se obține oricînd sistemul inițial.

În cazul în care se folosesc inegalități, sistemul este de inecuații și are forma:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &> 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &> 0 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ f_m x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &> 0 \end{aligned}\right\} \qquad (11.3)$$

sau:

$$f_i(x_j) > 0;\ i = 1.\ 2,\ldots,m \text{ şi } j = 1,\ 2,\ldots,n \qquad (11.4)$$

11.1.2. Clasificarea sistemelor

Dacă ecuaţiile se pot clasifica după diferite criterii (§ 8.1.5), sistemele pot fi clasificate din mult mai multe puncte de vedere. Fără a încerca o clasificare generală sau completă a acestora, vom indica unele aspecte utile în stabilirea metodelor de calcul.

1°. *După gradul sistemului* care este hotărît de produsul dintre gradele ecuaţiilor sale, acestea pot fi:

— sisteme liniare (de gradul întîi), cu ecuaţii de gradul întîi;

— sisteme neliniare, de grade superioare.

2°. *După numărul necunoscutelor*, pot fi: sisteme cu două, trei sau mai multe necunoscute (n).

3°. *După numărul ecuaţiilor*, sistemele pot fi cu două, trei sau mai multe ecuaţii (m).

În cele ce urmează, sistemele vor fi cunoscute după o clasificare didactică, în scopul înţelegerii progresive a metodelor de calcul.

11.2. SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

11.1.2. Modelul general. Simbolizarea matricială

Modelul general al sistemelor liniare, cu m ecuaţii de gradul întîi şi n necunoscute, este următorul:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}\ x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}\ x_n &= b_2 \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &\ \cdot \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &\ \cdot \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \qquad (11.5)$$

care reprezintă un caz particular al formei (11.2):

$$f_i(x_j) = b_i\ ;\ i = 1,2,\ldots,\ m;\ j = 1,2,\ \ldots,\ n\,. \qquad (11.6)$$

Această formă de simbolizare nu redă faptul că ecuaţiile sînt liniare. De aceea, se obişnuieşte scrierea prin simbolul sumei (Σ) cu permutarea indicilor. Se precizează că în noul înţeles, simbolul sigma nu mai are semnificaţia şi proprietăţile din cazul permutărilor circulare (§ 3.1.4).

Cu ajutorul său, sistemul are aspectul:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (11.7)$$

Această expresie, prin interpretarea judicioasă a simbolurilor și operarea succesivă a indicilor, generează sistemul liniar astfel:

● Se dă lui i o valoare constantă, spre exemplu 2; relația simbolică devine:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j = b_2$$

● Se dau valori lui j de la 1 la n și se obține ecuația a doua a sistemului:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

● Procedînd la schimbarea lui i, care va lua toate valorile de la 1 la m, se generează sistemul inițial.

O altă formă de exprimare simbolică a sistemului este următoarea:

$$A \cdot X = B \qquad (11.8)$$

care îl transformă într-o ecuație liniară. De data aceasta dispar indicii și nu pot fi evidențiate deosebirile dintre diferitele sisteme. De aceea, fiecare termen, numit *matrice*, se detaliază separat, astfel:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23}, \ldots, a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}\, a_{m2}\, a_{m3}, \ldots, a_{mn} \end{Vmatrix} = \left\| a_{ij} \right\| \; ; \begin{cases} i = 1,2,3, \ldots, m \\ j = 1,2,3, \ldots, n \end{cases} \qquad (11.9)$$

$$B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{Vmatrix} = \| b_i \| \text{ și } X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix} = \| x_j \| \qquad (11.10)$$

Simbolul A se numește matricea sistemului și reprezintă tabloul coeficienților într-o formație dată. O atare matrice nu are valoare numerică; ea are aspect de fotografie, făcînd oficiul înregistrării unei

situații. Se spune că această matrice este de tipul (m, n), pentru că are m linii și n coloane.

Simbolul B este matricea termenilor liberi, iar X, matricea necunoscutelor. Aceste matrice sînt de tipul $(m, 1)$ sau $(n, 1)$ și se numesc matrice coloană. La fel, pot fi imaginate matrice linie, de tipul $(1, p)$:

$$C = \| c_1, c_2, c_3, \ldots, c_p \| \qquad (11.11)$$

În cazul în care numărul liniilor este egal cu cel al coloanelor, matricea se numește *„pătrată"* sau pătratică (m, n).

Deși matricele nu au valori, vom conveni — așa cum este firesc — să reglementăm *„relația de egalitate"* dintre două matrice, prin următoarele precizări:

— două matrice nu pot fi egale decît atunci cînd sînt de același tip (m, n);

— două matrice de același tip sînt egale, dacă reproduc același tablou, respectiv dacă au elementele corespunzătoare egale.

Această definire a egalității presupune că următoarea relație:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & x \\ 5 & y & z \end{Vmatrix}$$

există numai dacă: $x = 3$; $y = 5$ și $z = 7$.

Cu aceste precizări, să revenim la simbolizarea sistemului (11.5) prin ecuația matricială (11.8), care cuprinde o înmulțire și o egalitate. Înlocuind valorile matricelor A, B, X în ecuația (11.8), se obține:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{Vmatrix} \qquad (11.12)$$

Pentru ca din produsul matricelor $(A.X)$ să rezulte membrii sistemului (11.5), este necesar să definim *operația de înmulțire* astfel:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned} \qquad (11.13)$$

Iată deci, că prin însăşi definirea matricelor, sîntem obligaţi să le asociem o operaţie de înmulţire, pe lîngă relaţia de egalitate care se efectuează între două matrice, astfel: elementele fiecărei linii a primei matrice se înmulţesc cu elementele corespunzătoare ale coloanei celeilalte matrice şi se adună, conform relaţiilor (11.13) şi a săgeţilor din (11.12)

Exemplu:

$$E_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1.2-3.2-5.3+4.1 \\ 2.2-4.2+2.3-1.1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -15 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Se observă că înmulţirea creată de însăşi simbolismul matriceal nu se poate efectua decît între matrice de tipul (x, n) şi (n, y), deoarece numărul de coloane al primei matrice trebuie să fie egal cu al liniilor celeilalte.

Ne mulţumim deocamdată cu teoria matricelor la acest nivel izvorît din necesitatea simbolizării sistemelor de ecuaţii. Pe parcurs, cînd nevoile vor impune dezvoltarea operaţiilor cu matrice, o vom face — de asemenea — în limita cerinţelor respective.

11.2.2. Sistemul cu două ecuaţii şi două necunoscute

Cel mai simplu sistem de ecuaţii este cel de gradul întîi, cu două ecuaţii şi două necunoscute, de forma:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array} \Bigg| \begin{array}{r} a_{22} \\ -a_{12} \end{array} \qquad (11.14)$$

1°. *Studiu analitic.* Rezolvarea acestui sistem se face prin mai multe metode:

● *Metoda reducerii*, care constă în eliminarea uneia din necunoscute, adunînd cele două ecuaţii amplificate în mod corespunzător:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22} \\ -a_{21}a_{12}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -b_2a_{12} \end{array}\right\}$$

$$x_1(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \;/ = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

Deci:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{11.15}$$

și în mod similar: $x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$ (11.16)

● *Metoda substituției* constă în eliminarea necunoscutei dintre ecuații, prin operația de separare: $x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}$ și introducerea acestei valori în cealaltă ecuație:

$$\frac{a_{21}(b_1 - a_{12}x_2)}{a_{11}} + a_{22}x_2 = b_2$$

Ultima ecuație cu o necunoscută, are soluția de mai sus (11.16).

● *Metoda comparației* constă în exprimarea acelorași necunoscute din ambele ecuații:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}} = \frac{b_2 - a_{22}x_2}{a_{21}}$$

Ultima egalitate este, de asemenea, o ecuație cu o necunoscută, din care se obține x_2(11.16).

● *Metoda lui Cramer*

În rezolvarea ecuației de gradul doi cu o necunoscută, am stabilit formula proprie oricărei ecuații de acest fel.

În aceleași condiții s-ar putea folosi formulele (11.15) și (11.16) pentru rezolvarea oricărui sistem ca cel de mai sus. Totuși, este greu de reținut jocul indicilor, încît memorizarea directă este susceptibilă de greșeli. Pentru evitarea acestora, Cramer, stabilește o regulă mnemotehnică foarte simplă, scriind părți din matricea sistemului, astfel:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \tag{11.17}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \tag{11.18}$$

Matricele pătrate astfel formate, se numesc *determinanți*. Pentru a obține soluțiile cunoscute (11.15, 11.16), rezultă regula de dezvoltare sau de calcul a unui determinant, de următoarea formă:

$$\begin{vmatrix} NV & NE \\ SV & SE \end{vmatrix}$$

— se înmulțesc elementele diagonalei NV—SE și se scade produsul elementelor celeilalte diagonale, așa cum se poate urmări în cazul determinanților de mai sus (11.17, 11.18).

Regula lui Cramer precizează și modul de alcătuire a determinanților:

— ambii numitori sînt egali și dați de determinantul (coeficienților) sistemului;

— numărătorii sînt determinanții obținuți din cel definit pentru numitorul comun, în care se înlocuiește coloana coeficienților necunoscutei ce se calculează, cu termenii liberi.

Exemplu de calcul

(E_2) Să se rezolve, prin toate metodele analitice, următorul sistem:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ 3x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

● *metoda reducerii*. Se adună direct cele două ecuații și se obține: $5x=5 \Rightarrow x=1$. Se înlocuiește această valoare într-una din ecuații:

$$2 + y = 4 \Rightarrow y = 2 .$$

● *metoda substituției*. Se scoate din prima ecuație: $y=4-2x$ și se înlocuiește în cealaltă:

$$3x - (4 - 2x) = 1 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1 \text{ etc.}$$

● *metoda comparației*. Se scoate valoarea lui y din ambele ecuații:

$$y = 4 - 2x = 3x - 1 \Rightarrow x = 1 \text{ etc.}$$

● *metoda lui Cramer*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4 \quad -1}{-2 \quad -3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2 \quad -12}{-2 \quad -3} = \frac{-10}{-5} = 2.$$

2°. *Studiu grafic.* Am stabilit că funcția asociată ecuației de gradul întîi cu o necunoscută: $y=ax+b$ reprezintă în plan o dreaptă (§ 8.2.1).

Am stabilit, de asemenea, că o astfel de funcție este o ecuație cu două necunoscute.

Rezultă că cele două ecuații ale sistemului studiat reprezintă cîte o dreaptă în plan (fig. 11.1).

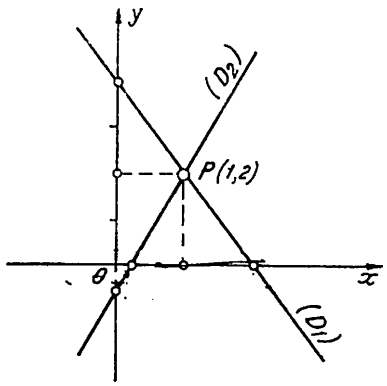


Fig. 11.1

Coordonatele **(x,y) ale oricărui punct de** pe dreapta D_1, imagine a primei ecuații, **verifică ecuația.**

La fel, coordonatele **(x, y) ale oricărui** punct de pe dreapta D_2 verifică ecuația doua.

Punctul de intersecție al celor două drepte (P) verifică simultan ambele ecuații și reprezintă tocmai soluția sistemului. Deci, coordonatele sale sînt rădăcinile sistemului.

În figura 11.1 este rezolvat, pe cale grafică, sistemul (E_1).

11.2.3. Sistemul de trei ecuații cu trei necunoscute

Modelul acestui sistem este următorul:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\} \qquad (11.19)$$

Rezolvarea se va face prin eliminarea uneia din necunoscute și reducerea sistemului la unul cu două ecuații și două necunoscute sau prin metoda lui Cramer.

● *metoda substituției.* Se scoate x_1 din prima ecuație:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \tag{11.20}$$

și se înlocuiește în celelalte două.

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_{21}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)}{a_{11}} + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ \frac{a_{31}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)}{a_{11}} + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\} \tag{11.21}$$

Sistemul rezultat este de două ecuații cu două necunoscute (x_2, x_3) care se rezolvă, după gruparea termenilor, printr-una din metodele cunoscute anterior.

Soluțiile, în final, sînt de forma:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{32}a_{13} + b_3a_{12}a_{23} - b_3a_{22}a_{13} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{32}a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{13}} \tag{11.22}$$

● *metoda lui Cramer.* Evident că o astfel de formulă este și mai greu de reținut.

Folosind metoda lui Cramer, cu determinanți de ordinul trei, se obține:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \tag{11.23}$$

Trebuie ca cei doi determinanți să se dezvolte după aceeași regulă și să aibă ca rezultate numărătorul și numitorul de mai sus (11.22).

Evident că se pot imagina mai multe reguli care să satisfacă deziderat**ul** impus. Cramer a stabilit regula care a permis generalizarea metodei la orice alt sistem liniar și constă în reducerea ordinului determinantului în felul următor:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \tag{11.24}$$

Practic, se procedează astfel:

● Se scot în factori elementele primei linii, cu semne alternante (primul cu plus, al doilea cu minus, al treilea cu plus);

● Se înmulțesc acești termeni cu *determinanții lor minori*, obținuți prin tăierea liniei și coloanei care cuprind elementul factorizat.

● Se dezvoltă determinanții minori, care au ordinul mai mic cu unu decît cel inițial.

Exemplu:

$$E_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(6+1) + 2(12+2) + 3(4-4) = 35$$

Observație: Reducerea ordinului determinantului se poate face nu numai după prima linie, ci după oricare linie sau coloană, dacă se respectă regula formării determinantului minor și cea a semnelor. Astfel:

$$E_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 35$$

În exercițiul E_3, s-a dezvoltat același determinant după coloana întîi și apoi după linia doua.

Pentru determinanții de ordinul trei, se poate folosi și „metoda lui Sarrus", care recomandă formarea unei matrice noi, reproducînd sub determinant primele două linii și apoi înmulțirea diagonalelor complete, ca mai jos:

$$E_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6+12+4-12+1+24 = 35$$

11.2.4. Sistemul liniar cu n ecuații și n necunoscute

Acest sistem are modelul următor:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned}\right\} \qquad (11.25)$$

Vom folosi două metode de rezolvare: una de reducere și alta cu determinanți.

1°. *Metoda Gauss-Jordan.* Folosirea reducerii tuturor necunoscutelor, în afară de una, într-o ecuație a sistemului, aparține matematicienilor Gauss-Jordan. Procedeul este următorul:

● Se împarte prima ecuație cu a_{11}, spre a face coeficientul lui x_1 unitar:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}} \qquad (11.26)$$

● Se amplifică pe rînd cu $(-a_{21}, -a_{31}, \ldots -a_{n1})$, și se adună succesiv cu celelalte ecuații, spre a le reduce necunoscuta x_1; rezultă sistemul:

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}} \\ &\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}\right)x_2 + \ldots + \left(a_{2n} - \frac{a_{1n}}{a_{11}}a_{21}\right)x_n = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\left(a_{n2} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{n1}\right)x_2 + \ldots + \left(a_{nn} - \frac{a_{1n}}{a_{11}}a_{n1}\right)x_n = b_n - \frac{b_1}{a_{11}}a_{n1} \end{aligned}\right\} \qquad (11.27)$$

sau:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a'_{n2}x_2 + \ldots + a'_{nn}x_n &= b'_n \end{aligned}\right\} \quad (11.28)$$

● Se împarte a doua ecuație cu a'_{22}, spre a face coeficientul lui x_2 unitar:

$$x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3 + \ldots + \frac{a'_{2n}}{a'_{22}}x_n = \frac{b'_2}{a'_{22}} \quad (11.29)$$

● Se amplifică această ecuație, pe rînd, cu $(-a'_{12}, -a'_{32} \ldots -a'_{n2})$ și se adună cu celelalte spre a le reduce necunoscuta x_2.

Continuînd astfel, se obține un sistem de forma următoare:

$$\left.\begin{aligned} x_1 \ldots\ldots\ldots &= B_1 \\ \ldots x_2 \ldots\ldots &= B_2 \\ \ldots\ldots x_3 \ldots &= B_3 \\ \ldots\ldots\ldots x_n &= B_n \end{aligned}\right\} \quad (11.30)$$

în care fiecare ecuație are o necunoscută.

Problema se rezolvă mai simplu, cu ajutorul **matricilor** deoarece nu se folosesc decît coeficienții. Să urmărim **exemplul următor:**

$$\left.\begin{aligned} (E_1)\ \ 2x + y + 3z &= 5 \\ 3x - y - 2z &= 0 \\ x + y + 2z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

● Se scrie matricea completă a sistemului:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right\|$$

● Se împarte prima linie cu 2:

$$\left\|\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right\|$$

● Se înmulțește prima linie cu (—3) și se adună cu a doua, apoi cu (—1) și se adună cu a treia:

$$\left\|\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{13}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right\|$$

● Se împarte linia a doua cu (—5/2):

$$\left\|\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{13}{5} & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right\|$$

● Se înmulțește linia a doua cu $\left(-\frac{1}{2}\right)$ și se adună la prima și la a treia linie:

$$\left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{13}{5} & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 \end{array}\right\|$$

• Se împarte linia a treia cu $\left(-\frac{4}{5}\right)$:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{13}{5} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right\|$$

• Se înmulțește linia a treia cu (—1/5) și (—13/5) și se adună la prima, respectiv la a doua linie :

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right\|$$

Scriind sistemul corespunzător acestei matrici, rezultă:

$$x + 0.y + 0.z = 1 \Rightarrow x = 1$$
$$0.x + y + 0.z = 3 \Rightarrow y = 3$$
$$0.x + 0.y + z = 0 \Rightarrow z = 0$$

2°. *Metoda lui Cramer.* Se scriu direct valorile necunoscutelor:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-10 - 8 + 12 + 10}{-4 + 9 - 2 + 3 + 4 - 6} = \frac{4}{4} = 1 \qquad (11.31)$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{4} = 3; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{4} = 0$$

Sistemul liniar cu n ecuații și n necunoscute are soluțiile generale:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \; ; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \; ; \; \ldots \; x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \ldots \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad (11.32)$$

unde: Δ este determinantul coeficienților necunoscutelor, numit *determinantul sistemului.*

Δ_i este determinantul necunoscutei x_i, care se obține din Δ, în care se înlocuiește coloana coeficienților lui x_i cu coloana termenilor liberi.

Se constată următoarele:

● *Dacă*: $\Delta = 0 \Rightarrow (x_1, x_2 \ldots x_n) = \infty$

adică sistemul este imposibil și se spune că este *incompatibil.*

● *Dacă*: $\Delta \neq 0$, necunoscutele au valori cu sens, iar sistemul este *compatibil.*

● *Dacă*: $\Delta_i \neq 0$ și $\Delta \neq 0$, sistemul este compatibil și *determinat*, deoarece fiecare necunoscută (x_i) are o anumită valoare: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$.

● Dacă: $\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$ și $\Delta = 0$, atunci: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{0}{0}$.

O astfel de valoare nu este determinată.

Într-adevăr, să considerăm că: $\frac{0}{0} = 6$. Verificînd, constatăm că $0 \cdot 6 = 0$. La fel putem acorda lui 0/0 orice altă valoare.

Dacă raportul $\frac{0}{0}$ constituie o *nedeterminare*, iar sistemul are rădăcinile cu astfel de valori, se numește *nedeterminat*

Pentru a reține definițiile rezultate din studiul soluțiilor, le vom prezenta în tabela (11.1).

Tabela 1.11

	Δ	Δ_1	Δ_2	...	Δ_i	...	Δ_n	Concluzii asupra sistemului de n ecuații cu n necunoscute
I	0	0	0	...	0	...	0	Nedeterminat
II	0	x	x	...	x	...	x	Incompatibil
III	x	x	x	...	x	...	x	Determinat
	x	x	0	...	x	...	x	Determinat, avînd $x_2 = 0$
	x	0	0	...	0	...	x	Determinat, avînd $x_1 = x_2 = x_i = 0$
	x	0	0	...	0	...	0	Determinat, avînd toate rădăcinile zero

Observație: Ultimul caz din această tabelă reprezintă următorul model al *sistemului omogen*:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \qquad (11.33)$$

Omogenitatea constă în faptul că toți termenii unei ecuații au gradul întîi, pentru că termenii liberi au dispărut.

Acest sistem are soluția banală:

$$x_1 = x_2 \ldots = x_i = \ldots = x_n = 0 \qquad (11.34)$$

El poate avea și alte soluții, numai în cazul în care: $\Delta = 0$. Într-adevăr, atunci rădăcinile sale devin:

$$x_i = \frac{0}{0} = m \in R\,, \qquad (11.35)$$

adică devin nedeterminate și pot lua orice valori.

11.2.5. **Determinanți**

Deoarece determinanții servesc nemijlocit la rezolvarea sistemelor liniare de ecuații, au fost studiați și li s-a creat o teorie proprie, cu scopul de a simplifica metodele de calcul.

Înainte de a le stabili proprietățile, trebuie să remarcăm faptul că determinantul este de forma unei *matrice pătrate*. Dacă matricea este însă un tablou inert, înregistrator a unor numere, determinantul are și o valoare determinată de valorile și ordinea elementelor pe linii și coloane.

Proprietățile determinanților sînt următoarele:

1°. Prin schimbarea liniilor în coloane se obține un determinant egal cu primul. Teorema este evidentă, deoarece în dezvoltarea cu determinanții minori, nu se schimbă nici aceștia, nici semnele termenilor liniei transformate în coloană.

2°. Prin schimbarea a două linii între ele se obține un determinant cu aceeași valoare absolută, dar de semn schimbat.

Acest lucru se demonstrează prin exprimarea valorii determinanților cu ajutorul operatorului Σ.

3°. Un determinant care are toate elementele unei linii sau coloane zero este zero.

Lucrul este evident, deoarece prin dezvoltarea sa după linia sau coloana respectivă, toți termenii sînt nuli.

4°. Un determinant care are două linii sau două coloane egale este zero.

Acest lucru rezultă din proprietatea 2°, întrucît schimbîndu-le între ele, rezultă că $\Delta = \Delta'$ cît și că $\Delta = -\Delta'$; deci $2\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0$.

5°. Prin înmulțirea unei linii sau coloane cu un număr se obține un determinant egal cu produsul dintre determinantul inițial și acel număr.

În baza acestei proprietăți se poate da factor comun un număr, divizor al elementelor unei linii sau coloane.

Teorema este evidentă, dacă dezvoltarea celor doi determinanți o facem după linia neînmulțită și apoi înmulțită cu λ ($\Delta' = \lambda\Delta$).

6°. Un determinant cu două linii sau coloane proporționale este nul ($\Delta = 0$).

În baza proprietății precedente (5°), se poate da factor comun un număr care duce la egalarea celor două linii sau coloane, cînd determinantul este sigur zero, conform proprietății 4°.

7°. Dacă la o linie (coloană) se adună o altă linie (coloană) înmulțită cu un număr, determinantul își păstrează valoarea. Într-adevăr:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} + a_{11} & \dots & a_{kn} + a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta, \qquad (11.36)$$

pentru că celălalt determinant are două linii egale și este zero.

8°. Descompunerea determinantului într-o sumă de determinanți, exprimată mai sus, este evidentă și constituie o altă proprietate a acestora.

9°. Dacă una din linii (coloane) este liniar dependentă de alte linii (coloane), determinantul este zero.

Prin *dependența liniară* între mai multe linii sau coloane:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= (a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \ldots\ ,\ a_{1n}) \\ L_2 &= (a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \ldots\ ,\ a_{2n}) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ L_k &= (a_{k1},\ a_{k2},\ a_{k3},\ \ldots,\ a_{kn}) \end{aligned}\right\} \qquad (11.37)$$

se definește proprietatea următoare:

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots + \lambda_k L_k = 0 \qquad (11.38)$$

sau:

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_k a_{k1} = 0 \\ &\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_k a_{k2} = 0 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \ldots + \lambda_k a_{kn} = 0 \end{aligned}\right. \qquad (11.39)$$

unde $\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\lambda_k$ sînt constante.

O linie sau un vector este liniar dependent de celelalte, dacă satisface relația:

$$L_{k+1} = \lambda_1 L_1 + \lambda_k L_2 + \ldots + \lambda_k L_k \qquad (11.40)$$

respectiv:

$$a_{k+1,1} = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_k a_{k1} \quad \text{etc.} \qquad (11.41)$$

$$\text{sau } L_{k+1} = \sum_{1}^{k} \lambda_k L_k \qquad (11.42)$$

Relația (11.40) arată că de data aceasta sînt liniar dependente $(k + 1)$ linii sau coloane.

În condițiile acestor proprietăți, definite de dependența liniară și a celor de mai sus (7° și 8°), rezultă justețea proprietății enunțate (9°).

• *Calculul determinanţilor* se simplifică dacă se folosesc proprietăţile lor şi dacă se respectă următoarele indicaţii:

— folosind teorema 7° se reduc la zero cît mai multe elemente de pe o linie;

— se dezvoltă calculele după linia cu maximum de elemente nule.

Observaţie: O metodă similară celei a lui Gauss-Jordan permite ca, pentru orice determinant, să se asigure $(n - 1)$ elemente nule pentru o linie sau o coloană.

S-ar părea că aceasta ar fi calea cea mai simplă în dezvoltarea determinanţilor, ţinînd seama de recomandările anterioare. În realitate lucrurile nu stau aşa, deoarece această metodă introduce coeficienţi fracţionari, cu care se operează greu. De aceea, calculul se va conduce după împrejurări, împletind armonios proprietăţile determinanţilor cu metoda lui Cramer a determinanţilor minori. E x e m p l e:

(E_5)
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & -10 \\ 0 & 8 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} -1 & -7 & -10 \\ 8 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -7 & -10 \\ 0 & -55 & -71 \\ 0 & -8 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -55 & -71 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$= -(165 - 568) = +403.$$

Operaţiile succesive au fost următoarele:

— s-a înmulţit linia întîi cu (—2, 2, —1) şi s-a adunat la a doua, a treia şi a patra;

— s-a dezvoltat cu metoda Cramer, după coloana întîi;

— s-a înmulţit linia întîi cu (8,1) şi s-a adunat la linia a doua şi a treia;

— s-a dezvoltat cu metoda Cramer, după prima coloană.

(E_6)
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$
$$= (b-a)\ (c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)\ (c-a)\ (c-b) =$$
$$= (a-b)\ (b-c)\ (c-a) = \pi\,(a-b) \qquad (11.43)$$

Acest determinant care poate fi generalizat la un ordin oarecare aparține lui Vandermonde și s-a rezolvat în etapele următoare:

— s-a scăzut prima coloană din celelalte două;

— s-au dat factori comuni, din coloane, termenii $(b - a)$ și $(c - a)$ și s-a dezvoltat după linia întîi;

— s-a calculat determinantul de ordinul doi.

11.2.6. Matrice

Problema simbolizării modelelor matematice ale sistemelor de ecuații (§ 11.2.1) a condus la noțiunea de matrice, tablou fără valoare intrinsecă, dar care este supus, în baza definiției, la două condiții algebrice:

— egalitatea și

— înmulțirea matricelor (11.12).

Exprimarea matriceală a sistemelor: $A \cdot X = B$ sugerează soluția:

$$X = \frac{B}{A} = A^{-1} \cdot B, \tag{11.44}$$

unde A este o matrice iar A^{-1} matricea inversă.

Vom analiza proprietățile matricelor, astfel încît să ne permită rezolvarea sistemului liniar de n ecuații cu n necunoscute.

1°. *Adunarea matricelor* se definește ca operație de însumare a elementelor corespunzătoare a două matrice de același ordin (m, n)

Exemplu: $C = A + B$

$$(E_7) \quad \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 9 \end{Vmatrix}$$

2°. *Inmulțirea matricei* cu un număr (λ) constă în înmulțirea tuturor elementelor matricei cu acel număr. Exemplu: $B = \lambda A$.

$$(E_8) \quad 3. \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 5 & -2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6 & 3 \\ -9 & 6 \\ 15 & -6 \end{Vmatrix}$$

3°. *Produsul matricelor* se efectuează între două matrice de tip (x, n) și (n, y) după o regulă generală, similară celei de definiție. Exemplu:

$$C = A \cdot B$$

$$(E_9)\qquad \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -5 \\ 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 3\cdot 2+2\cdot 1-5\cdot 3-4\cdot 4 & -3-10-10+4 \\ 2\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 3+(-1)(-4) & -2-15+8-1 \\ 1\cdot 2-2\cdot 1+3\cdot 3-5\cdot 4 & -1+10+6+5 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -23 & -19 \\ 23 & -10 \\ -11 & 20 \end{Vmatrix}$$

4°. *Matricea transpusă* ($\tilde{A}$) a unei matrice (A) este aceea care are drept coloane liniile celeilalte şi invers. Exemplu:

$$(E_{10})\qquad A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}$$

Proprietăţile stabilite mai sus prin definirea lor se aplică matricelor oarecare, de ordin (m, n). Ele impun restricţii ordinelor matricelor A, B, la adunare şi la înmulţire.

În cele ce urmează vom stabili cîteva particularităţi ale matricelor pătrate, care pot fi evaluate cantitativ prin determinanţii corespunzători şi care pot fi folosite la studiul ecuaţiilor.

5°. *Matricea reciprocă* (A^*) a unei matrice pătrate (A) se obţine, înlocuind fiecare element al matricei transpuse ($\tilde{A}$) cu complementul său algebric, determinantul minor al elementului. Exemplu:

$$(E_{11})\qquad A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{Vmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & -3 \end{Vmatrix}$$

$$A^* = \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -23 & -3 & 19 \\ -1 & -9 & -11 \\ 7 & -5 & 9 \end{Vmatrix}$$

Complementul algebric, respectiv determinantul minor, poartă semnul elementului respectiv din dezvoltarea lui Cramer. Mai simplu este de înțeles, dacă asociem pozițiilor elementelor unei matrice cîte un semn, obținut prin alternanțe succesive:

$$A = \begin{Vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & & & & \\ \dots & & & & \end{Vmatrix} \qquad (11.45)$$

6°. *Matricea inversă* (A^{-1}) a unei matrice (A) se obține prin împărțirea matricei reciproce (A^*) cu determinantul lui A (det. A):

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{det. } (A)} \cdot A^* \qquad (11.46)$$

Continuînd exercițiul precedent (E_{12}), se obține:

$$\text{det. } (A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -30-6-4-15-16+3 = -68$$

$$\text{iar: } A^{-1} = \frac{1}{-68} \begin{Vmatrix} -23 & -3 & 19 \\ -1 & -9 & -11 \\ 7 & -5 & 9 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{23}{68} & \frac{3}{68} & -\frac{19}{68} \\ \frac{1}{68} & \frac{9}{68} & \frac{11}{68} \\ -\frac{7}{68} & \frac{5}{68} & -\frac{9}{68} \end{Vmatrix}$$

Pentru ca matricea inversă să aibă sens trebuie ca: det . $(A) \neq 0$. Această condiție clasifică matricile pătrate (A) în două clase:

— matrice singulară, dacă: det $(A) = 0$

— matrice nesingulară, dacă: det $(A) \neq 0$

Deci, matricile singulare nu au inverse.

Se demonstrează cu ușurință proprietatea:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = E \qquad (11.47)$$

Matricea de forma (E), avînd diagonala unitară, iar celelalte elemente zero, se numește *matrice unitară*.

Rezultă că un sistem de ecuații poate fi rezolvat și pe cale matriceală, ca în exemplul următor.

(E_{12}). Să se rezolve sistemul:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 11 \\ x + 5y + 4z &= -1 \\ -x + 2y - 3z &= 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \cdot X = B$$

unde:

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 11 \\ -1 \\ 6 \end{Vmatrix}; \quad X = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}$$

Dar: $X = A^{-1} \cdot B$

Matricea A este cea din exercițiile precedente (E_{12}), astfel încît:

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{23}{68} & \frac{3}{68} & -\frac{19}{68} \\ \frac{1}{68} & \frac{9}{68} & \frac{10}{68} \\ -\frac{7}{68} & \frac{5}{68} & -\frac{9}{68} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{Vmatrix}$$

Efectuînd înmulțirea de mai sus, se obține:

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{Vmatrix} \tag{11.48}$$

În baza condiției de egalitate, rezultă: $x = 2$, $y = 1$; $z = -2$.

7°. *Rangul matricei.* Într-o matrice oarecare de tipul A (m, n), în care $m < n$, se pot forma determinanți de ordinul m în număr de C_n^m / C_m^n. Dacă $n < m$, se pot forma C_n^m / C_m^n determinanți de ordinul n.

De asemenea se pot forma determinanți de ordinul p (p fiind mai mic decît cel mai mic din cele două numere m sau n) în număr de $C_n^p \cdot C_m^p$.

Dacă matricea $A(m, n)$ este *matrice zero*, avînd toate elementele zero, atunci toți determinanții ce se pot forma cu elementele sale sînt nuli.

Dacă matricea $A(m, n)$ nu este zero, există un număr natural $r \leqslant$ minimum (m, n), astfel încît cel puțin un determinant de ordinul r este nenul, iar determinanții de ordin superior lui r sînt nuli.

Acest număr se numește rangul matricei.

El precizează nivelul de la care, micșorînd ordinul determinanților matricei, aceștia nu sînt nuli și au liniile „liniar independente"

Exemplu: ($\mathbf{E}_{13}$). Să se determine rangul matricei următoare:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & 12 & 7 \end{Vmatrix} \Rightarrow m = 3,\ n = 5$$

Determinanții de ordinul cel mai mare sînt cei de ordinul 3:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0;\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 0;\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 8 \\ 0 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 0;\ D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 2 \\ 0 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 0;\ D_6 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & 8 & 2 \\ 0 & 12 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_7 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \\ 5 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 0;\ D_8 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 0;\ D_9 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 2 \\ 5 & 12 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

și

$$D_{10} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 2 \\ 9 & 12 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$ în total: $C_5^3 = C_5^2 = 10$ determinanți

Rezultă că cele trei linii ale matricei date sînt liniar dependente. Acest lucru se putea constata ușor, în felul următor:

Fie α și β coeficienții cu care înmulțim linia întîi și respectiv pe a doua, spre a o obține pe a treia prin adunare.

Rezultă:

$$\begin{aligned} 1\alpha - 1\beta &= 0 \Rightarrow \alpha = \beta \\ 2\alpha + 3\beta &= 5 \Rightarrow 5\alpha = 5\beta = 5 \qquad \alpha = \beta = 1 \\ 3\alpha + 6\beta &= 9 \qquad 3 + 6 = 9 \\ 4\alpha + 8\beta &= 12 \qquad 4 + 8 = 12 \\ 5\alpha + 2\beta &= 7 \qquad 5 + 2 = 7 \end{aligned}$$

Din primele două relații, sistem de două ecuații cu două necunoscute, s-au obținut valorile lui α și β. Celelalte relații ale condiției de dependență liniară sînt verificate.

În consecință, matricea are un rang mai mic decît 3.

Investigăm, în continuare, valorile determinanților de ordinul doi care vor fi la număr:: $C_5^2 \cdot C_3^2 = \frac{5 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 15$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Faptul că unul din acești determinanți este diferit de zero înseamnă că cele două linii sînt liniar independente, iar rangul matricei este 2 ($r = 2$).

11.2.7. Sistemul cu m ecuații și n necunoscute

Modelul acestui sistem este cel definit anterior (11.5):

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \qquad (11.49)$$

sau: $A \,.\, X = B$ (11.50)

unde: $A = \| a_{ij} \|$; $i = 1, 2 \ldots m$ și $j = 1, 2 \ldots n$, matricea sistemului

$X = \| x_j \|$, matricea necunoscutelor

$B = \| b_i \|$, matricea termenilor liberi.

În afara acestor matrice se definește și matricea completă:

$$A_{compl} = \left\| \begin{array}{l} a_{11}\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n}\ b_1 \\ a_{21}\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2n}\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} a_{m2},\ \ldots,\ a_{mn} b_m \end{array} \right\| \tag{11.51}$$

Presupunem că rangul matricei este r, iar determinantul diferit de zero, de rangul r, numit *determinant principal*, este următorul:

$$\Delta_{princ} = \left| \begin{array}{l} a_{11}\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1r} \\ a_{21}\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2r} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{r1}\ a_{r2},\ \ldots,\ a_{rr} \end{array} \right| \neq 0$$

Pentru a rezolva un atare sistem este necesar să studiem diferitele cazuri ce pot exista.

1°. *Cazul* $m > n$, cînd numărul ecuațiilor este mai mare decît cel al necunoscutelor.

Dacă am folosi un sistem de n ecuații, alese arbitrar din cele m ($m > n$), am putea rezolva, prin metodele stabilite, sistemul cu n ecuații și n necunoscute.

Celelalte ($m - n$) ecuații excedentare pot fi satisfăcute de rădăcinile astfel obținute, cînd sistemul inițial este compatibil. Dacă cel puțin una din ele nu este verificată, sistemul este incompatibil.

În cazul compatibilității cele ($m - n$) ecuații excedentare sînt sigur liniar dependente de celelalte. Pentru a stabili acest lucru se poate determina rangul matricei complete (r). Dacă: $r = n$, înseamnă că, într-adevăr cele ($m - n = m - r$) ecuații sînt liniare dependente de cele ale determinantului principal, iar sistemul se reduce, de fapt, la unul cu ($n = r$) ecuații și n necunoscute.

2°. *Cazul* $m = n$, cînd numărul ecuațiilor este egal cu cel al necunoscutelor.

Dacă cele ($m = n$) ecuații sînt liniar independente, respectiv dacă ($r = m = n$), sistemul este determinat.

Dacă rangul matricei complete (r) este mai mic decît numărul ecuațiilor ($r < m = n$), sistemul rămîne cu un număr de ecuații mai mic decît necunoscutele ($r < n$). În acest caz, o parte din necunoscute ($n - r$) pot fi considerate ca parametri arbitrari ai termenilor liberi, iar sistemul ce se rezolvă reține r necunoscute pentru cele r ecuații liniar independente.

Soluțiile vor fi funcții de parametri aleși și nedeterminate ca valori. Într-adevăr, pentru valori arbitrare date celor ($n - r$) parametri rezultă cîte o soluție.

În acest caz sistemul este nedeterminat, cu gradul de nedeterminare: $\delta = n - r$.

3°. *Cazul* $m < n$. Din capul locului sistemul este nedeterminat, chiar dacă ecuațiile sînt liniar independente, cînd: $\delta = n - m$.

Pentru a stabili riguros gradul de nedeterminare se determină rangul matricei complete (r) și se obține: $\delta = n - r$.

4°. *Concluzii*. Orice sistem de ecuații liniare trebuie analizat, în primul rînd, din punctul de vedere al independenței ecuațiilor sale, deoarece ecuațiile liniare dependente sînt excedentare.

Acest lucru se obține prin determinarea rangului matricei (r) care stabilește numărul de ecuații liniar independente. Comparînd acest număr de ecuații (r) cu cel al necunoscutelor (n) rezultă următoarele cazuri:

- $r > n$, sistemul este incompatibil, deoarece rămîn ($r - n$) ecuații liniar independente, neverificate de soluțiile sistemului cu n ecuații și n necunoscute;
- $r = n$, sistemul este determinat cu soluții ce se obțin prin metodele cunoscute. Nu este exclusă posibilitatea ca sistemul să fie incompatibil. Două ecuații de acest fel:

$$3x + 2y = 5 \quad \text{și} \quad 3x + 2y = 9$$

ilustrează posibilitatea incompatibilității;

- $r < n$, sistemul este nedeterminat, compatibil sau incompatibil.

Studiul general al acestor sisteme poate fi extins mai mult, prin teorema lui Rouché și a lui Kronecker-Capelli.

11.2.8. Sisteme clasice

Există unele sisteme de ecuații liniare particulare care se rezolvă extrem de simplu prin metode specifice.

Pentru a cunoaște cît mai multe artificii de calcul algebric vom prezenta cîteva cazuri deosebite.

1°. *Sistemul de forma*:

$$\begin{aligned} x + y &= c \\ y + z &= a \\ z + x &= b \end{aligned} \tag{11.52}$$

se rezolvă prin adunarea ecuațiilor, cînd se obține:

$$x + y + z = \frac{a+b+c}{2};$$

se scad apoi, pe rînd, ecuațiile inițiale din această relație și se obține:

$$z = \frac{a+b-c}{2}\ ;\ x = \frac{-a+b+c}{2}\ ;\ y = \frac{a-b+c}{2} \tag{11.53}$$

2°. *Sistemul de forma*:

$$x + y = cxy;\ y + z = ayz;\ z + x = bzx \tag{11.54}$$

se rezolvă în mod similar, după ce se împart ecuațiile cu xy, yz, zx:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c;\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a;\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = b \tag{11.55}$$

3°. *Sistemul de forma*:

$$\begin{aligned} ax &= by = cz \\ mx + ny + pz &= r \end{aligned} \tag{11.56}$$

Se scriu primele două ecuații sub forma unui șir de rapoarte egale:

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}};\ \frac{mx+ny+pz}{\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}} = \frac{r}{\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}} = k \tag{11.57}$$

După ce se amplifică cu termenii corespunzători ai ultimei relații, se aplică proprietatea șirurilor de rapoarte egale. Rezultă:

$$x = k/a,\quad y = k/b;\quad z = k/c \tag{11.58}$$

11.2.9. Aplicații

1°. Să se rezolve prin cele cinci metode (reducere, substituție, comparație, Cramer și grafic) următoarele sisteme:

A_1. $3x - 2y = 13$; $2x + y = 4$ R. $x = 3,\ y = -2$

A_2. $4x + 3y = -1$; $2x + 9y = 2$ R. $x = -1/2,\ y = 1/3$

A_3. $6x + y = 1$; $8x + 3y = -2$ R. $x = 1/2,\ y = -2$

2°. Să se rezolve prin metode analitice (reducere, Gauss-Jordan, Cramer) următoarele sisteme de ecuații liniare:

$\mathbf{A_4}$. $2x + 3y + 4z = 11$

$3x - 2y + 3z = 1$ R. $x = -2$; $y = 1$; $z = 3$

$5x + 2y - z = -11$

$\mathbf{A_5}$. $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 13$

$3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -4$

$5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -3$ R. 1; 2; 3;4

$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -10$

3°. Să se rezolve prin artificii de calcul sistemele de tip clasic:

$\mathbf{A_6}$. $x + y = 5/6$

$y + z = -2/3$ R. $x = 1/2$; $y = 1/3$; $z = -1$

$z + x = -1/2$

$\mathbf{A_7}$. $6x = -4y = 3z$

$x + 2y + 2z = 4$ R. $x = 2$; $y = -3$; $z = 4$

4°. Să se discute natura sistemelor cu n ecuații și n necunoscute.

$\mathbf{A_8}$. $mx + y + z = 1$

$x + my + z = 2$

$x + y + mz = 3$

R. $\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 1-m & 1-m \\ 1 & m-1 & 0 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)^2 \begin{vmatrix} m & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$= (m-1)^2 \begin{vmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (m-1)^2 (m+2)$

$\Delta x = (m-1)^2(m-4)$; $\Delta y = 2(m-1)^3$; $\Delta z = 3m(m-1)^2$

Se întocmește tabelul discuției cu valorile lui m ce anulează determinanții de mai sus:

m	Δ	Δx	Δy	Δz	Concluzii
-2	0	X	X	X	incompatibil
0	X	X	X	0	compatibil, $z = 0$
1	0	0	0	0	nedeterminat
4	X	0	X	X	compatibil, $x = 0$

5°. Să se discute următoarele sisteme liniare cu m ecuații și n necunoscute:

$\mathbf{A}_9$. $2x + 3y = 5$
$mx - 2ny = 4$
$3x + my = 5$
$4x - y = 3$

R. *Metoda 1*: se rezolvă sistemul de 2 ecuații și 2 necunoscute format din ecuațiile extreme ($x = 1$; $y = 1$). Se înlocuiesc aceste soluții în celelalte ecuații: $m - 2n = 4$ și $3 + m = 5 \Rightarrow m = 2$; $n = -1$.

Metoda 2: se impune ca rangul matricei complete să fie: $r = 2$. În acest scop, determinanții superiori ce se pot forma (în cazul acesta numai de ordinul trei) trebuie să fie nuli, confirmînd că două ecuații sînt liniar dependente de celelalte.

$$\text{Din: } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ m & -2n & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ și } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & m & 5 \end{vmatrix} = 0$$

se obțin aceleași soluții: $m = 2$; $n = -1$.

6°. Să se determine parametrul m, astfel încît sistemele omogene să aibă soluții diferite de zero (nebanale).

$\mathbf{A}_{10}$. $mx + my + z = 0$
$mx + y + mz = 0$
$x + my + mz = 0$

R. $$\Delta = \begin{vmatrix} m & m & 1 \\ m & 1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2m+1 & 2m+1 & 2m+1 \\ m & 1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix} =$$

$$= (2m+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1-m & 0 \\ 1 & m-1 & m-1 \end{vmatrix} = -(m-1)^2(2m+1) \Rightarrow m_1 = 1,\ m_2 = -1/2$$

A_{11}. $x + y + z = 0$

$mx + (2m + 1)y + (3m - 1)z = 0$

$m^2x + (2m + 1)^2y + (3m - 1)^2z = 0$

R. $\Delta = (m + 1)(m - 2)(2m - 1) = 0 \Rightarrow m_1 = -1,\ m_2 = 2;\ m_3 = 1/2$

11.3. SISTEME DE ECUAȚII NELINIARE

Modelul general (11.2): $f_i(x_j) = 0$ poate avea un număr nelimitat de forme concrete, depinzînd de numărul necunoscutelor, numărul ecuațiilor, tipul monoamelor etc.

De aceea, aceste sisteme nu pot fi rezolvate prin metode bine conturate, ca cele liniare. Înlănțuirea logică a calculelor depinde de tipul ecuațiilor și de experiența celui ce întocmește algoritmul acestora. Singurele indicații ce pot fi date sînt legate de cazuri particulare.

11.3.1. Sisteme de tip Viète

În cazul în care sistemul are n ecuații, iar cele n necunoscute sînt cuprinse în relații de tip Viète:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= b_1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots &= b_2 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ x_1x_2 \ldots x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \qquad (11.59)$$

acesta se transformă într-o ecuație de gradul n:

$$x^n - b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} - b_3x^{n-3} + \ldots + b_n = 0 \qquad (11.60)$$

Soluțiile acestei ecuații reprezintă soluțiile sistemului.

11.3.2. Sisteme omogene

Atunci cînd monoamele sînt de același grad, sistemul se rezolvă prin substituții de forma: $x_n = tx_1$. Exemplu:

$$(E_{14}) \qquad x^2 + xy + y^2 = 19$$

$$x^2 - xy + 2y^2 = 16$$

Se notează: $y = tx$ și se înlocuiește:

$$x^2(1 + t + t^2) = 19$$

$$x^2(1 - t + 2t^2) = 16$$

Împărțind cele două ecuații între ele, se elimină x:

$$\frac{1 + t + t^2}{1 - t + 2t^2} = \frac{19}{16}$$

sau: $22t^2 - 35t + 3 = 0 \begin{array}{l} \nearrow t_1 = 3/2 \\ \searrow t_2 = 1/11 \end{array}$

Cazul 1 $\qquad t_1 = 3/2 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$

Se înlocuiește în expresia lui x:

$$x^2 = \frac{19}{1 + t_1 + t_1^2} = \frac{19}{1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4}} = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$$

Din prima ecuație se obține:

$$4 \pm 2y + y^2 = 19$$

sau $y^2 \pm 2y - 15 = 0 \Rightarrow y = \mp 1 \pm 4$

x	2		-2	
y	-5	3	-3	5

Dintre aceste soluţii verifică ecuaţia a doua:

$x^2 - xy + 2y^2 = 16$, numai:

x	2	-2
y	3	-3

Cazul 2 $\qquad t_2 = 1/11 \Rightarrow y = \dfrac{x}{11}$

Deci : $x^2 = \dfrac{19}{1 + t_2 + t_2^2} = \dfrac{19}{1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{121}} = \dfrac{19 \cdot 121}{133} = \dfrac{121}{7}$

iar : $x_{1,2} = \pm \dfrac{11}{\sqrt{7}} = \pm \dfrac{11\sqrt{7}}{7}$

Din prima ecuaţie se obţine:

$$\frac{121}{7} \pm \frac{11\sqrt{7}}{7} y + y^2 = 19$$

sau : $y^2 \pm 11\sqrt{7} - 12 = 0 \Rightarrow y = \mp 11\sqrt{7} \pm \sqrt{895}$

şi se continuă investigaţia ca mai sus.

11.3.3. Aplicaţii

Să se rezolve sistemele neliniare.

A$_{13}$.
$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ xy + yz + zx &= 11 \\ xyz &= 6 \end{aligned}\right\}$$

R. Ecuaţia în u : $u^3 - 6u^2 + 11u - 6 = 0$ are soluţiile întregi: $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 3$.

Sistemul este de gradul șase, cu șase soluții, ce se obțin din tabloul următor :

x	1		2		3	
y	2	3	3	1	1	2
z	3	2	1	3	2	1

A_{14}. $x^2 + 3xy = -5$

$y^2 - 2xy = 8$

R. $y = tx \Rightarrow 5t^2 + 14t + 8 = 0 \Rightarrow t_1 = -2;\ t_2 = -4/5$

a) $t_1 = -2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1,\ y_{1,2} = \mp 2$

b) $t_2 = -4/5 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 5\sqrt{7/7}$; nu convine.

PARTEA A TREIA

Analiza matematică

FUNCȚII REALE DE O VARIABILĂ REALĂ

12.1. FUNCȚII, GRAFICE

12.1.1. Definiția funcției

Funcția, după cele expuse în capitolul 1 (§.1.3.), este un ansamblu format din două mulțimi (X și Y), ale căror elemente (x,y) sînt într-o corespondență de la X la Y $(x \to y)$ și se exprimă astfel:

$$y = f(x) \tag{12.1}$$

X se numește mulțimea sau domeniul de definiție iar Y mulțimea în care funcția ia valori, respectiv codomeniul acesteia; x se numește variabilă independentă sau argument al funcției f, iar y variabilă dependentă sau funcție.

12.1.2. Funcția reală de o variabilă reală

Pentru funcția reală de o variabilă reală domeniul de definiție și codomeniul sînt cuprinse în mulțimea numerelor reale $x \in R$ și $y \in R$.

În consecință, graficul funcției și reprezentarea sa pot fi asociate dreptelor, ca în exemplul următor din tabela 12.1 și figura 12.1:

Tabela 12.1

x	-5	-2	1	3	4	8
y	1	3	4	5	8	9

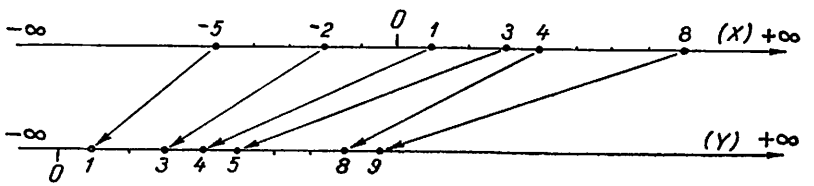


Fig. 12.1

Folosind sistemul cartezian de reprezentare, perechile de valori ale celor două mulțimi:

$$X = \{-5, -2, 1,3,4,9\} \text{ și } Y = \{1,3,4,5,8,9\},$$

au ca imagini, puncte expresive (figura 12.2), substituind ansamblul a două mulțimi de numere, printr-o mulțime de puncte în plan.

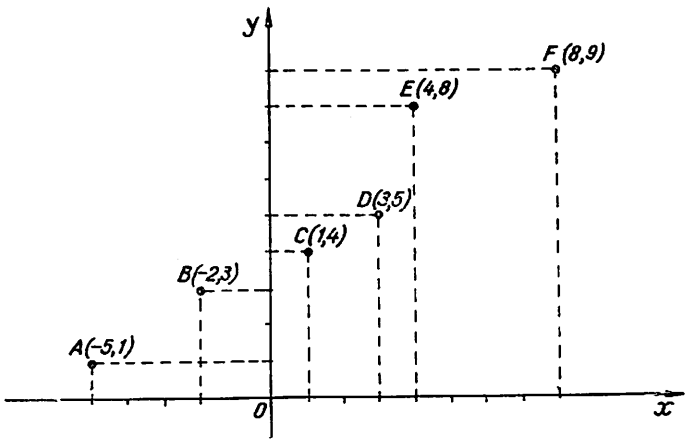


Fig. 12.2

Corespondența dintre elementele a două mulțimi infinite se asigură printr-o relație matematică, iar graficul cuprinde o infinitate de perechi de valori. În sistemul cartezian, o astfel de funcție are ca imagine o infinitate de puncte, care descrie o curbă continuă (neîntreruptă) ca în figura 12.3, sau o curbă discontinuă (întreruptă) ca în figura 12.4.

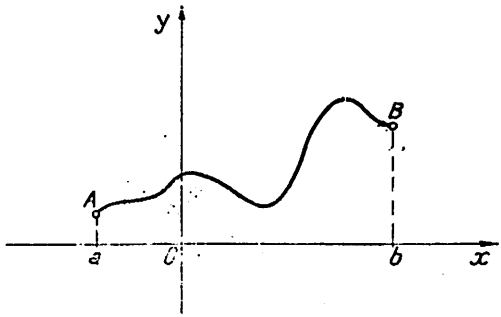


Fig. 12.3

Evident că, în cazul funcțiilor cu mulțimi infinite, nu se poate întocmi un grafic cu totalitatea perechilor de valori. Reprezentarea lor presupune o analiză profundă și alegerea unui minimum de perechi de valori, care să redea cît mai expresiv proprietățile funcțiilor.

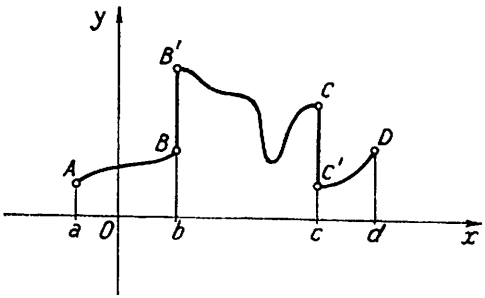


Fig. 12.4

Aceste perechi „caracteristice", prin punctele reprezentative, trebuie să permită trasarea curbei și stabilirea acelor detalii, care interesează procesul investigării fenomenului descris de funcția respectivă.

Astfel:

1°. *Funcția de gradul I* ,asociată ecuației de gradul I (§8.11):

$$y = f(x) = ax+b \ ; \ (a, b > 0) \qquad (12.2)$$

reprezintă o dreaptă și poate fi definită numai prin două puncte (A,B). Acestea se aleg ca în figura 12.5, la intersecția dreptei reprezentative cu axele de coordonate și se determină analitic astfel:

$$\begin{aligned} &(A): \quad y = 0 \ , \ x = -b/a \\ &(B): \quad x = 0 \ , \ y = b \end{aligned} \qquad (12.3)$$

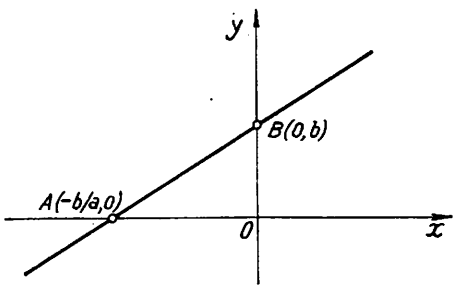


Fig. 12.5

Graficul funcției are aspectul din tabela 12.2:

Tabela 12.2

x	$-\infty$		$-b/a$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	b	$\nearrow$	$+\infty$

2° *Funcția de gradul II*, asociată ecuației respective:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c; \qquad (a,c > 0) \tag{12.4}$$

este o parabolă și necesită mai multe puncte pentru reprezentarea sa (figura 12.6). Acestea au fost stabilite în partea a doua (§ 8.1.2) și constau din:

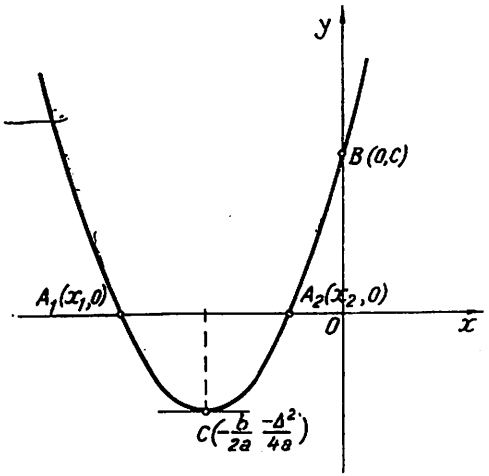


Fig. 12.6

— punctele de intersecție cu axele:

$$\left.\begin{array}{lll} (A_1,A_2): & y = 0, & x_1, x_2 \\ (B): & x = 0, & y = c \end{array}\right\} \tag{12.5}$$

— punctul de extrem (minim):

$$(C) \; : \; x = -\frac{b}{2a}, \quad y = -\frac{\Delta^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} \tag{12.6}$$

Cu ajutorul lor se stabilește graficul funcției prin tabela 12.3:

Tabela 12.3

x	$-\infty$	x_1	$-b/2a$	x_2	0	$+\infty$
y	$+\infty \searrow 0 \searrow$		$-\frac{2}{4a} \nearrow$		$0 \nearrow c \nearrow$	$+\infty$

Se observă că, în afara punctelor de intersecție cu axele (A_1, A_2, B), s-a folosit și punctul de extrem (C).

3°. *Funcția de gradul n*, asociată ecuației de același grad:

$$y = f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (12.7)$$

va fi reprezentată în mod similar, folosind — în primul rînd — intersecțiile cu axele:

$$(A_i) \quad : \quad y = 0, \; x = (x_1, \; x_2 \ldots x_i \ldots x_n)$$

$$(B) \quad : \quad x = 0, \; y = a_n \qquad (12.8)$$

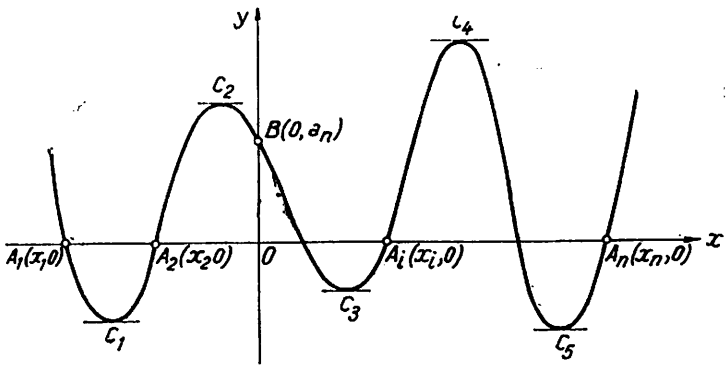


Fig. 12.7

Punctele extreme, de maxim (C_2, C_4) și de minim (C_1, C_3, C_5) nu pot fi determinate cu mijloace cunoscute din algebră; de aceea trebuie să căutăm metode pentru obținerea acestor puncte caracteristice.

În reprezentarea grafică, funcția de gradul n este o curbă continuă pe întregul domeniu al numerelor reale ($x \in R$), ca în figura 12.7.

12.1.3. Graficul funcției într-un punct

Folosirea unui număr redus de puncte, numite „puncte caracteristice" pentru reprezentarea grafică a funcției, impune studiul acesteia în punctele respective, spre a apropia curba trasată în acele puncte cît mai mult de cea reală.

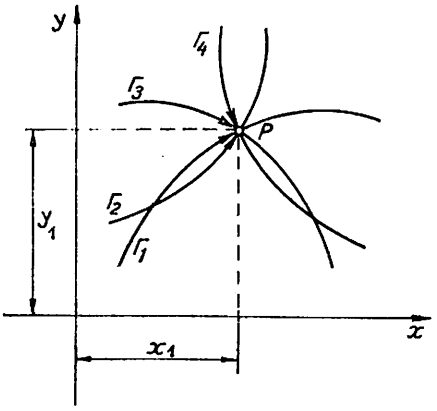


Fig. 12.8

În figura 12.8, spre exemplu, punctul $P(x_1,y_1)$ este perfect cunoscut pentru funcția $y=f(x)$:

$$(P):\ x = x_1\ ,\quad y_1 = f(x_1)$$

Totuși, curba ce trece prin P poate avea diferite direcții și forme (Γ_1,Γ_2, Γ_3, Γ_4...). Pentru a-i stabili forma reală și proprietățile în acest punct, arcul de curbă M_1PM_2 poate fi asimilat ca în figura 12.9, astfel:

— cu un segment de dreaptă (T_1PT_2) tangent curbei în punctul P; în acest caz, se consideră că punctele reale M_1,M_2 coincid cu punctele T_1,T_2.

— cu un arc de cerc ($C_1P\ C_2$) tangent curbei reale în P; de data aceasta, se consideră că punctele reale M_1, M_2 coincid cu punctele C_1 și C_2 ale arcului de cerc cu centrul în C (centru de curbură), avînd raza ρ (rază de curbură).

Iată, deci, că studiul curbei într-un punct impune metode specifice pentru stabilirea tangentei și a curburii acesteia în punctul respectiv; atunci cînd ne interesează mai precis procesul dintr-un punct, va fi nevoie și de centrul de curbură, ca și de raza de curbură a acesteia.

Cînd funcţia este discontinuă într-un punct P (figura 12.10), curba are două ramuri (Γ_1, Γ_2) şi prezintă un salt (P_1P_2) pentru abscisa punctului respectiv ($x = x_1$):

— la stînga lui x_1, respectiv pentru $x = x_1 - \varepsilon$, cînd $\varepsilon \to 0$, se obţine un punct $P_1(x_1, y_1)$;

— la dreapta lui x_1, respectiv pentru $x = x_1 + \varepsilon$, cînd $\varepsilon \to 0$, se obţine un alt punct $P_2(x_1, y_2)$.

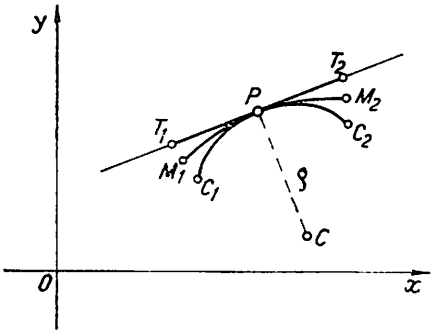


Fig. 12.9

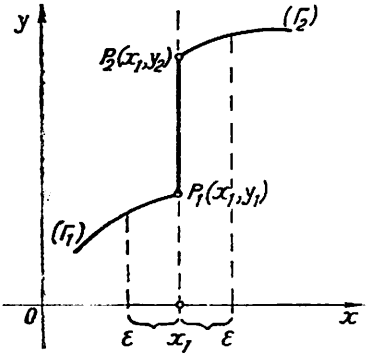


Fig. 12.10

De data aceasta trebuie să studiem funcţia în punctul respectiv ca în cazul funcţiilor trigonometrice tangentă şi cotangentă. prin deplasări mici, respectiv prin folosirea limitelor.

În cele ce urmează vom stabili metode pentru determinarea punctelor caracteristice ale unei funcţii reale de variabilă reală, precum şi pentru studiul acesteia în punctele caracteristice. Metodele se bazează pe analiza fenomenelor în jurul unui punct şi aparţin analizei matematice.

12.2. LIMITE DE FUNCŢII

12.2.1. Definiţia limitei

În subcapitolul 7.3 din partea II au fost studiate limitele unor funcţii particulare, anume şirurile. Un şir a_n are limita a (finită sau infinită), dacă pentru valori ale indicelui n suficient de mari (vecine cu ∞) putem realiza ca termenii şirului să fie cît dorim de apropiaţi (vecini) de a.

În cazul funcției reale de variabilă reală, noțiunea de limită într-un punct constă în cercetarea comportării sale în jurul acelui punct (x_0), adică stabilirea valorilor lui $f(x)$ atunci cînd argumentul (x) se apropie treptat și cît mai mult de x_0.

Se vor urmări valorile lui $f(x)$ spre a stabili valoarea (l) finită sau infinită, de care acestea se apropie treptat.

Comportarea funcției $f(x)$ în jurul lui x_0 nu se referă la valoarea sa în x_0, ci la valorile pe care le ia aceasta în punctele vecine lui x_0, ca în exemplele următoare.

Vom stabili valorile a diferite funcții $f(x)$ în vecinătatea lui $x_0=1$. În acest scop, vom calcula valorile sale pentru $x=x_0-\varepsilon=1-\varepsilon$ și pentru $x=x_0+\varepsilon=1+\varepsilon$, unde ε este o valoare oricît de mică, ce se poate apropia de zero ($\varepsilon\to 0$).

$$(E_1). \quad f(x) = x^2$$

Deci:

$$f(1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^2 = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2,$$

iar:

$$f(1+\varepsilon) = (1+\varepsilon)^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$$

Totodată:

$$f(1) = 1^2 = 1$$

Micșorînd pe ε pînă la valoarea zero, rezultă:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(1-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} (1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2) = 1$$

și:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(1+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2) = 1$$

Într-adevăr, atît ε cît și ε^2 devin zero atunci cînd ε tinde către zero, respectiv atunci cînd acesta ia valoarea zero.

Deci:

$$\lim_{x\to 1-\varepsilon,\ \varepsilon\to 0} f(x) = 1 = f(1)$$

și

$$\lim_{x\to 1+\varepsilon,\ \varepsilon\to 0} f(x) = 1 = f(1)$$

Deci:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(1-\varepsilon) = f(1) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(1+\varepsilon)$$

sau:

$$\lim_{\substack{x\to 1\pm\varepsilon,\\ \varepsilon\to 0}} f(x) = f(1) = 1$$

În graficul din figura 12.11, punctele A și B de la stînga și dreapta punctului P, cu depărtarea ε față de abscisa acestuia ($x_0=1$), au depărtările δ_s și δ_d față de ordonata acestuia:

$$\delta_s = f(1) - f(1-\varepsilon) = 1 - (1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2) = \varepsilon(2 - \varepsilon)$$

și:

$$\delta_d = f(1+\varepsilon) - f(1) = (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2) - 1 = \varepsilon(2 + \varepsilon)$$

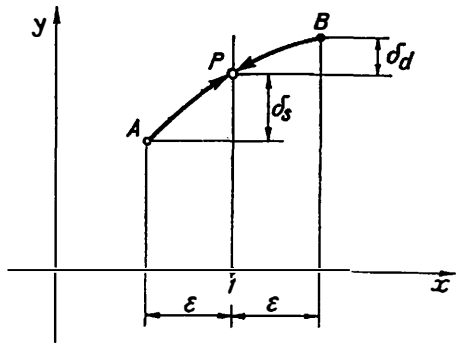


Fig. 12.11

Cum ε este foarte mic și δ_s sau δ_d sînt foarte mici, cînd ε tinde către zero și δ_s, δ_d tind către zero, ambele avînd factor pe ε. Deci punctele A și B sînt foarte apropiate de P și tind către acesta cînd ε se micșorează, așa cum se arată prin săgeți în figură.

$$(\mathbf{E}_2)\quad f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Comportarea funcției în jurul punctului $x_0=1$ se studiază în mod similar:

$$f(1-\varepsilon) = \frac{1}{(1-\varepsilon)-1} = -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$f(1+\varepsilon) = \frac{1}{(1+\varepsilon)-1} = \frac{1}{\varepsilon}$$

cînd:

$$f(1) = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty \text{ și nu are sens.}$$

Făcînd pe ε să tindă către zero, se obţine:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(1 - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\infty$$

şi:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(1 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty$$

De data aceasta funcţia $f(x)$ nu mai are valoare (limită) în punctul studiat de abscisă 1; în vecinătatea sa din stînga are o valoare $-\infty$, iar în vecinătatea din dreapta $+\infty$.

Graficul din figura 12.12 elucidează acest caz, prin faptul că punctul A descrie o ramură de curbă tangentă la verticala $x=1$ şi se spune că este „asimptotică" acesteia; de asemenea punctul B, cînd ε se micşorează, tinde asimptotic către verticala respectivă.

$$(E_3) \quad f(x) = 10^{\frac{1}{x-1}}$$

În acelaşi mod, pentru $x_0 = 1$, vom avea:

$$f(1 - \varepsilon) = 10^{\frac{1}{(1-\varepsilon)-1}} = 10^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{\varepsilon}}}$$

şi:

$$f(1 + \varepsilon) = 10^{\frac{1}{(1+\varepsilon)-1}} = 10^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

iar:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(1 - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{10^{\frac{1}{\varepsilon}}} = \frac{1}{10^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

şi:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(1 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} 10^{\frac{1}{\varepsilon}} = 10^{\infty} = \infty$$

Nici de data aceasta funcţia nu are limită în punctul $x=1$, deoarece la stînga are valoarea zero, iar la dreapta valoarea ∞.

În figura 12.13, acest lucru este indicat de faptul că ramura de curbă din stînga (A) tinde către zero, iar ramura din dreapta (B) tinde către ∞, adică este asimptotică verticalei $x = 1$.

$$(E_4) \quad f(x) = \sin \frac{1}{x-1}$$

În jurul punctului $x_0 = 1$, se obține:

$$f(1-\varepsilon) = \sin\frac{1}{(1-\varepsilon)-1} = \sin\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\sin\frac{1}{\varepsilon}$$

și:

$$f(1+\varepsilon) = \sin\frac{1}{(1+\varepsilon)-1} = \sin\frac{1}{\varepsilon}$$

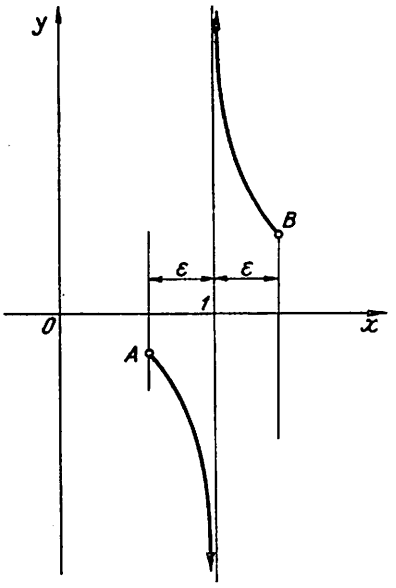


Fig. 12.12

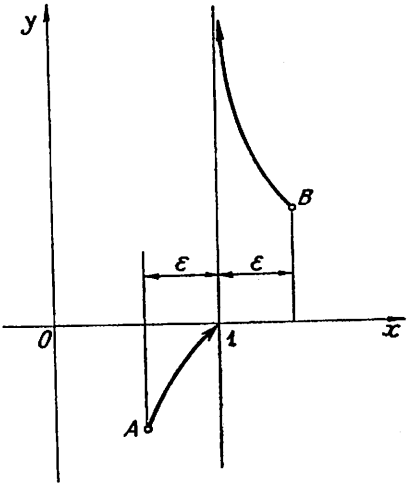


Fig. 12.13

ar:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(1-\varepsilon) = \lim\left(-\sin\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\sin(\infty)$$

și:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(1+\varepsilon) = \lim \sin\frac{1}{\varepsilon} = \sin\infty$$

Se știe că $\sin\alpha \in [-1, 1]$ pentru $\alpha \in (-\infty, \infty)$.

Deci: $\pm\sin\infty \in [-1,1]$, astfel încît funcția nu are o valoare definită și nici limită.

În figura 12.14 se arată că perioada $T=2\pi$ plasată la infinit permite orice valoare lui sin ∞, cuprinsă între -1 și $+1$, dar nedefinită.

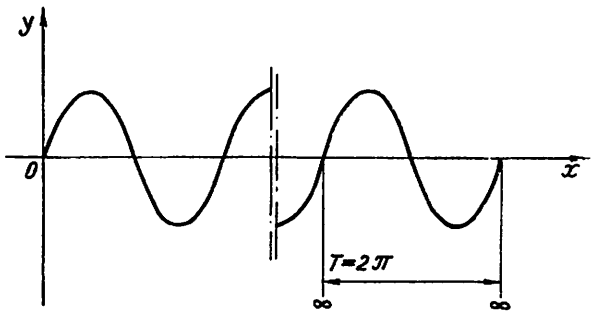


Fig. 12.14

12.2.2. Limite laterale. Infiniți mici

Exemplele de mai sus, studiate în baza definiției limitei funcției într-un punct, conturează cîteva concluzii cu caracter general.

Prima concluzie constă în faptul că limita la stînga și cea la dreapta pot fi diferite. Aceste „limite laterale" au următoarele definiții:

1°. *Limita la stînga* a funcției $y=f(x)$ există și este y_s în punctul x_0, dacă la orice număr $\delta>0$ există un număr $\varepsilon(\delta)>0$, astfel încît să avem:

$$|f(x)-y_s|<\delta$$

dacă:

$$0<x_0-x<\varepsilon, \qquad x\in X;\ x\neq x_0 \tag{12.9}$$

2°. *Limita la dreapta* a funcției $y=f(x)$ există și este y_d în punctul x_0, dacă la orice număr $\delta>0$ există un număr $\varepsilon(\delta)>0$, astfel încît să avem:

$$|f(x)-y_d|<\delta$$

dacă:

$$0<x-x_0<\varepsilon, \quad x\in X;\ x\neq x_0 \tag{12.10}$$

Notarea simbolică a acestor limite se face în diferite feluri. Cele mai uzuale sînt următoarele:

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=y_s \tag{12.11}$$

și:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=y_d \tag{12.12}$$

Se citește: „limita lui $f(x)$, cînd x tinde către x_0", iar simbolurile $(-, +)$ sau $(<, >)$ precizează că limita este la stînga sau la dreapta lui x_0.

În exemplele anterioare am folosit o altă notare pentru că evită — uneori — confuzii la calculul limitelor funcțiilor complicate. Aceasta este următoarea:

$$\lim_{\substack{x\to x_0-\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0-\varepsilon) = y_s \tag{12.13}$$

și:

$$\lim_{\substack{x\to x_0+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0+\varepsilon) = y_d \tag{12.14}$$

Se citește: „limita lui $f(x)$ cînd x tinde către $x_0\pm\varepsilon$, iar ε tinde către zero „și respectiv" limita lui $f(x_0\pm\varepsilon)$ cînd ε tinde către zero".

Calculul limitelor sub această formă are avantajul că, în prima fază se efectuează o înlocuire algebrică $x=x_0\pm\varepsilon$, după care funcția $f(x)$ devine o funcție de ε: $f(\varepsilon)$. În faza doua se calculează totdeauna limita unei funcții $f(\varepsilon)$, cînd ε tinde către zero.

3°. *Infiniți mici.* O altă concluzie importantă cu caracter general, obținută din exemplele precedente, constă în apariția unei noi variabile (ε), extrem de mică ($\varepsilon\to 0$), numită „infinit mic".

Se spune că ε este un „infinit mic", dacă:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon = 0 \tag{12.15}$$

sau, în general: $f(x) = x - x_0$ este un infinit mic pentru $x = x_0$ deoarece:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (x - x_0) = 0 \tag{12.16}$$

De asemenea: ε^α, $(\alpha > 1)$ este un infinit mic, pentru că satisface condiția de mai sus:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^\alpha = 0; \quad \alpha > 1 \tag{12.17}$$

Totuși, se constată cu ușurință că ε^α tinde mai repede spre zero decît ε. Exemplu:

$$\varepsilon = 10^{-3};\ \varepsilon^2 = 10^{-6} \ll \varepsilon;\ \varepsilon^3 = 10^{-9} \ll \varepsilon \ldots$$

Din acest motiv, ε^α se numește „infinit mic de ordin superior", iar ε se numește „infinit mic principal".

Operațiile algebrice cu infiniții mici se efectuează astfel:

● *Adunarea și scăderea* se fac prin reducerea termenilor asemenea și neglijarea infiniților mici de ordin superior, care sînt mult mai mici decît cel principal ($\varepsilon^\alpha \ll \varepsilon$) Exemplu:

$$(E_5)\ f(\varepsilon) = 2\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \varepsilon + 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon = 5\varepsilon - 2\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 \approx 5\varepsilon,$$

deoarece:

$$\varepsilon^3 \ll \varepsilon^2 \ll \varepsilon.$$

$$(E_6)\quad g(\varepsilon) = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \approx 1.$$

întrucît:

$$\varepsilon^2 \ll \varepsilon \ll 1$$

● *Inmulțirea și împărțirea* se efectuează în condițiile calculului algebric și a neglijării infiniților mici de ordin superior, ca în exemplele următoare:

$$(E_7)\quad f(\varepsilon) = (1 - \varepsilon)(2 + 3\varepsilon) = 2 + \varepsilon - 3\varepsilon^2 = 2$$

$$(E_8)\quad g(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3}{3\varepsilon + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^3} = \frac{2\varepsilon}{3\varepsilon} = \frac{2}{3}$$

$$(E_9)\quad h(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^\alpha}{\varepsilon^\beta} = \varepsilon^{\alpha-\beta} = 0, \text{ dacă: } \alpha > \beta$$

$$= 1, \text{ dacă: } \alpha = \beta$$

$$= \infty \text{ dacă: } \alpha < \beta$$

În ultimul caz:

$$\varepsilon^{\alpha-\beta} = \varepsilon^{-(\beta-\alpha)} = \frac{1}{\varepsilon^{\beta-\alpha}} = \frac{1}{\varepsilon^m} = \infty;\quad m > 1,$$

se poate vorbi de un „infinit mare"

12.2.3. Limite la infinit

Modul de calcul al limitei laterale într-un punct x_0 constă — de fapt — în translatarea sistemului de axe cu originea în x_0 și apropierea de zero de la stînga sau de la dreapta.

Într-adevăr, expresia generală a acestei limite este de forma: $\lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0 \pm \varepsilon) = y_0$, astfel încît se poate spune că limita laterală este de tipul limitei la zero, oricare ar fi punctul în care se efectuează studiul.

Cum, în general, domeniul de definiție al funcției cuprinde întreaga mulțime a numerelor reale $x \in (-\infty, \infty)$, apare problema stabilirii va-

lorilor funcției pentru $x \to \pm\infty$. Este evident că în astfel de puncte nu mai pot fi calculate limite laterale ca într-un punct oarecare și că trebuie stabilite metode corespunzătoare.

De data aceasta, limita se exprimă direct, fără vecinătate (ε):

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l \tag{12.18}$$

Fiecare x devine un infinit mare, cu care este mai greu de operat. De aceea, vom căuta metode și îndeosebi factorizări, prin care să se obțină infiniți mici, cu care se operează ca mai sus.

În cele ce urmează, vom stabili metode clasice de calcul al limitelor la infinit.

1°. *Limita funcției polinomiale*:

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n \tag{12.19}$$

Pentru a calcula limita acestei funcții la infinit, vom da factor comun termenul cu gradul cel mai mare, pe care-l vom numi „termenul major" sau simplu „major":

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^n\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{A_n}{x^n}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} A_0x^n = A_0(\pm\infty)^n, \tag{12.20}$$

deoarece:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left\{\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2} \ldots \frac{1}{x^{n-1}}, \frac{1}{x^n}\right\} \to 0$$

Vom stabili valorile funcției polinomiale în cele două cazuri:

Cazul: $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A_0(\infty)^n = (\operatorname{sign} A_0)\,\infty \tag{12.21}$$

Prin simbolul ($\operatorname{sign}A_0$), care se citește ca în limba franceză „signe de A_0", se precizează că semnul expresiei pe care o precedează este semnul lui A_0. Deci:

— dacă $A_0 > 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ (12.22)

— dacă $A_0 < 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ (12.23)

Cazul: $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A_0(-\infty)^n = \operatorname{sign}A_0 \cdot (-1)^n \cdot \infty \tag{12.24}$$

Există două posibilități, care hotărăsc semnul lui $(-1)^n$:

— dacă $n = 2k$ (par), $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = (\text{sign}A_0)\,\infty$ (12.25)

— dacă $x = 2k + 1$ (impar), $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -(\text{sign}A_0)\,\infty$ (12.26)

2°. *Limita fracției algebrice*:

$$f(x) = \frac{A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots - \ldots + A_{n-1}x + A_n}{B_0x^m + B_1x^{m-1} + \ldots + B_{m-1}x + B_m} \tag{12.27}$$

Se procedează ca în cazul precedent, prin factorizarea termenilor majori:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \ldots + \frac{A_n}{x^n}\right)}{x^m\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \ldots + \frac{B_m}{x^m}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{A_0x^n}{B_0x^m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{A_0}{B_0}x^{n-m} \tag{12.28}$$

Dacă:

$$n > m,\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \left(\text{sign}\,\frac{A_0}{B_0}\right)(\pm\infty)^{n-m} = (\pm 1)^{n-m}\,\text{sign}\,\frac{A_0}{B_0}\cdot\infty \tag{12.29}$$

$$n = m,\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{A_0}{B_0} \tag{12.30}$$

$$n < m,\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim \frac{A_0}{B_0}\cdot\frac{1}{x^{m-n}} = 0 \tag{12.31}$$

Exemple:

$$(\mathbf{E}_{10})\quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^5 - 3x^2 + x - 1}{3x^2 + x - 2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^5}{3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{3}x^3 = \pm\infty$$

$$(\mathbf{E}_{11})\quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x^9 - 3x^2 + x - 2}{5x^9 + x^4 + x^2 + 5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x^9}{5x^9} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6}{5} = \frac{6}{5}$$

$$(\mathbf{E}_{12})\quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{5x^4 + 2x - 3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3}{5x^4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{5x} = 0$$

Folosind denumirea de mai sus, limita fracției algebrice este egală cu limita fracției „majorilor", deoarece se neglijează toți ceilalți termeni atît la numărător cît și la numitor.

Este de reținut faptul că limita fracției algebrice este hotărîtă, în primul rînd, de gradele numărătorului (n) și (m).

Dacă: $n > m$, limita este infinită;

$n = m$, limita este egală cu raportul coeficienților majorilor;

$n < m$, limita este zero.

3°. *Limita funcției logaritmice*:

$$f(x) = \ln x \tag{12.32}$$

Se precizează că în cazurile precedente, funcțiile polinomiale au ca domenii mulțimea numerelor reale: $x \in R = (-\infty, +\infty)$.

În cazul funcției logaritmice, domeniul de definiție este: $x \in (0, \infty)$. Aceasta înseamnă că nu se poate calcula decît limita la $+\infty$.

$$(E_{13}) \quad \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty, \tag{12.33}$$

deoarece: $e^{\infty} = \infty$

Pentru $x \to 0$, limita sa este:

$$\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty \tag{12.34}$$

pentru că:

$$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

4°. *Limita funcției exponențiale*:

$$f(x) = a^x \tag{12.35}$$

$$(E_{14}) \quad \lim_{x \to \infty} a^x = a^{\infty} = \infty, \text{ dacă } a \in (1, \infty)$$

$$= 0, \text{ dacă } a \in (0,1)$$

$$(E_{15}) \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = 0, \text{ dacă } a \in (1, \infty)$$

$$= \infty \text{ dacă } a \in (0,1)$$

5°. *Limitele funcțiilor trigonometrice*

Așa cum s-a arătat mai sus, funcțiile trigonometrice nu au limite la infinit:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sin x \in [-1, 1]$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \cos x \in [-1, 1]$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{tg} x \in (-\infty, \infty) \tag{12.36}$$

12.2.4. **Aplicații**

● Să se studieze funcțiile $f(x)$ în vecinătatea punctului x_0 indicat în dreptul fiecăreia, stabilind creșterile δ în funcție de ε.

$$\mathbf{A_1}.\ f(x) = 4^{x+1},\ \text{pentru}\ x_0 = -1$$

$$\text{R. } f(-1-\varepsilon) = 4^{-\varepsilon} = \frac{1}{4^{\varepsilon}};\ f(-1+\varepsilon) = 4^{\varepsilon};\ f(-1) = 1.$$

$$\delta_s = 1 - \frac{1}{4^{\varepsilon}};\ \delta_d = 4^{\varepsilon} - 1;\ \lim_{\varepsilon \to 0} f(-1-\varepsilon) = 1 = \lim f(-1+\varepsilon)$$

$$\mathbf{A_2}.\ f(x) = 2^{\frac{x}{x-2}},\ \text{pentru}\ x_0 = 2.$$

$$f(2-\varepsilon) = 2^{\frac{2}{-\varepsilon}} = \frac{1}{2^{2/\varepsilon}};\ f(2+\varepsilon) = 2^{\frac{2}{\varepsilon}};\ f(2)\ \text{nu are sens;}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(2-\varepsilon) = 0;\ \lim_{\varepsilon \to 0} f(2+\varepsilon) = \infty$$

$$\mathbf{A_3}.\ f(x) = \ln(x-3),\ \text{pentru}\ x_0 = 3.$$

R. $x > 3$; $f(3-\varepsilon) = \ln(-\varepsilon)$ nu aparține domeniului de definiție;

$$f(3+\varepsilon) = \ln \varepsilon;\ f(3) = \ln 0 = -\infty;\ \lim_{\varepsilon \to 0} f(3+\varepsilon) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \varepsilon = -\infty = f(3).$$

Reținem că nu are limită la stînga.

$$\mathbf{A_4}.\ f(x) = \ln \frac{1}{x-3},\ \text{pentru}\ x_0 = 3.$$

R. $x > 3$; nu are limită la stînga;

$$f(3+\varepsilon) = \ln \frac{1}{\varepsilon};\ f(3) = \ln \frac{1}{0} = \infty;$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(3+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \frac{1}{\varepsilon} = \infty.$$

$$\mathbf{A_5}.\ f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{pentru } x < 0 \\ 1, & \text{pentru } x = 0 \\ -x+1, & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

pentru $x_0 = 0$.

R. Vezi § 12.2; $f(0-\varepsilon)=1-\varepsilon$; $f(0+\varepsilon)=1-\varepsilon$; $f(0)=1$;

$$\delta_s=\varepsilon;\ \delta_d=-\varepsilon;\ \lim_{\varepsilon\to 0} f(0-\varepsilon)=1=\lim_{\varepsilon\to 0} f(0+\varepsilon).$$

⊛ Să se calculeze limitele laterale ale funcțiilor următoare:

$$\mathbf{A}_6.\ f(x)=\frac{x}{x^2-1}\ \text{pentru}\ x=1.$$

R. $$\lim_{\varepsilon\to 0}(1-\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\varepsilon}{-2\varepsilon+\varepsilon^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{-2\varepsilon}=-\infty$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(1+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}=+\infty.$$

$$\mathbf{A}_7.\ f(x)=\frac{1}{1+2^{-\frac{1}{x}}},\ \text{pentru}\ x_0=0$$

$$\mathbf{R.}\ \lim_{\varepsilon\to 0} f(0+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1+2^{-\frac{1}{\varepsilon}}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1+\frac{1}{2^{1/\varepsilon}}}=1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(0-\varepsilon)=\lim\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\varepsilon}}}=0$$

⊛ Să se calculeze limitele la infinit ale următoarelor funcții:

$$\mathbf{A}_8.\ f(x)=-2x^3+x+5$$

$$\mathbf{R.}\ \lim_{x\to\pm\infty}(-2x^3+x+5)=\lim_{x\to\pm\infty}(-2x^3)=\mp\infty$$

$$\mathbf{A}_9.\ f(x)=\frac{3}{5}x^4-\frac{5}{2}x^3+x^2-4$$

$$\mathbf{R.}\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{5}x^4=+\infty$$

12.3. OPERAȚII CU FUNCȚIILE REALE ȘI LIMITELE LOR

Considerăm două funcții $f(x)$ și $g(x)$, definite respectiv pe A și B, cu valori în R, astfel încît $A \cap B = C \neq \emptyset$ (intersecție nevidă) și cu limitele:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{și} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = b \tag{12.37}$$

unde $x_0 \in C$.

Domeniile A și B aparțin mulțimii numerelor reale, astfel încît se pot efectua operații algebrice obișnuite asupra valorilor funcțiilor.

12.3.1. Suma și diferența funcțiilor

Dacă se adună sau se scad două funcții definite ca mai sus, se obține o nouă funcție de același argument:

$$s(x) = f(x) \pm g(x), \quad x \in C \tag{12.38}$$

care are — evident — domeniul $C = A \cap B$.

Dacă suma (diferența) limitelor ($a \pm b$) are sens, atunci limita sumei (diferenței) funcțiilor în punctul x_0 este suma (diferența) acestora:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = a \pm b \tag{12.39}$$

Fac excepție cazurile în care:

$$a \pm b = \infty - \infty, \tag{12.40}$$

deoarece aceasta este o valoare nedeterminată. Într-adevăr, dacă $c = \infty - \infty$, însemnează că $c + \infty = \infty$, iar c poate avea orice valoare reală finită, pentru că adunată cu ∞ face tot ∞.

12.3.2. Produsul funcțiilor

Înmulțind funcțiile date $f(x)$ și $g(x)$ definite pe A și B, se obține o nouă funcție:

$$p(x) = f(x) \cdot g(x); \quad x \in C = A \cap B. \tag{12.41}$$

Dacă produsul limitelor $a \cdot b$ are sens, atunci limita produsului funcțiilor în x_0 este egală cu produsul limitelor:

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = \lim_{x \to x^0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = a \cdot b \tag{12.42}$$

Fac excepție cazurile în care:

$$ab = 0 \cdot \infty \tag{12.43}$$

pentru că această valoare este nedeterminată. Dacă $c = 0 \cdot \infty$, însemnează că $\frac{c}{\infty} = 0$ pentru orice valoare reală finită a lui c.

În particular: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^n = a^n \; ; \; n \in N$ (12.44)

12.3.3. Cîtul funcțiilor

Prin împărțirea celor două funcții se obține o nouă funcție de același argument:

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \; ; \quad x \in A \cap B - D \tag{12.45}$$

De data aceasta, valorile care anulează numitorul $g(x) = 0$: $D = \{x_1, x_2 \ldots x_n\}$ se scot din domeniul rezultant, pentru că funcția nu are sens cînd numitorul este zero. În consecință, funcția $q(x)$ este definită pe domeniul $A \cap B - D$.

Dacă raportul limitelor $\frac{a}{b}$ are sens în punctul x_0, atunci limita raportului este egal cu raportul limitelor.

$$\lim q(x) = \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{a}{b} \tag{12.46}$$

Fac excepție cazurile următoare:

$$\frac{a}{0}, \text{ respectiv: } b = 0 \text{ și } a \neq 0; \tag{12.47}$$

$$\frac{\infty}{\infty}, \text{ respectiv: } a, b = \pm \infty. \tag{12.48}$$

$$\frac{0}{0}, \text{ respectiv: } a, b = 0 \tag{12.49}$$

Primul caz nu are sens, iar celelalte conduc la nedeterminări. Într-adevăr, dacă $c = \frac{\infty}{\infty}$, însemnează că $c \cdot \infty = \infty$ este adevărată pentru orice valoare reală și finită a lui c. Dacă $c = \frac{0}{0}$, însemnează că $c \cdot 0 = 0$ pentru oricare c real și finit.

12.3.4. Puterea funcțiilor

Funcția:

$$h(x) = f(x)^{g(x)} \tag{12.50}$$

are același argument și un domeniu $A \cap B - D$, unde domeniul D se determină în raport de forma concretă a puterii.

Dacă puterea limitelor are sens (a^b), atunci limita puterii funcțiilor în punctul x_0 este egală cu puterea limitelor:

$$\lim_{x \to x_0} r(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim f(x)^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = a^b \tag{12.51}$$

Fac excepție următoarele cazuri:

0^0, respectiv: $a = b = 0$ (12.52)

1^∞, respectiv: $a = 1,\ b = \infty$ (12.53)

∞^0, respectiv: $a = \infty,\ b = 0$ (12.54)

deoarece reprezintă valori nedeterminate, evidențiate prin logaritmarea lor.

Din studiul operațiilor cu funcții și cu limitele lor s-a desprins necesitatea analizei excepțiilor și îndeosebi a cazurilor cu valori nedeterminate (12.40; 12.43; 12.48; 12.49; 12.52; 12.53 și 12.54), de care ne vom ocupa în subcapitolul următor.

12.3.5. Aplicații

● Se dau următoarele funcții:

$f_1(x) = x + 1; \qquad x \in R$

$f_2(x) = \sqrt{x - 1}; \qquad x \in [1, \infty]$

$f_3(x) = ex^2; \qquad x \in R$

$f_4(x) = \ln x; \qquad x \in (0, \infty)$

$f_5(x) = \arcsin x; \quad x \in [-1, 1]; \quad f_5 \in [0, 2\pi]$

și se cere să se calculeze pentru $x_0 = 1$ limitele funcțiilor următoare:

$(A_{10}).\quad f(x) = f_3(x) + f_5(x) = ex^2 + \arcsin x$

$R.\ x \in R \cap [-1, 1] = [-1, 1];\ \lim\limits_{x \to 1} f_3(x) = e;$

$$\lim_{x \to 1} f_5(x) = \frac{\pi}{2};\ \lim_{x \to 1} (f_3 + f_5) = e + \frac{\pi}{2}$$

(A_{11}). $f(x) = f_2(x) - f_5(x) = \sqrt{x-1} - \arcsin x$

R. $x \in [1, \infty) \cap [-1, 1] = \{1\}$; $\lim\limits_{x\to 1} f_2(x) = 0$;

$$\lim_{x\to 1}(f_2 - f_5) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$(A_{12}).\quad f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$$

R. $x \in R \cap [1, \infty) - \{1\} = (1, \infty)$; limita în punctul $x_0 = 1$ nu are sens, deoarece x_0 nu aparține domeniului rezultant.

$$(A_{13})\quad f(x) = \frac{f_4(x)}{f_1(x)} = \frac{\ln x}{x+1}$$

R. $x \in R \cap (0, \infty) - \{-1\} = (0, \infty)$; $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$;

$$\lim_{x\to 1}(x+1) = 2;\quad \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{0}{2} = 0.$$

$$(A_{14}).\quad f(x) = [f_3(x)]^{f_1(x)} = (e^{x^2})^{x+1}$$

R. $x \in R \cap R = R$; $\lim\limits_{x\to 1} f_3(x) = e$; $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x) = 2$;

$$\lim_{x\to 1} f(x) = e^2$$

$$(A_{15}).\quad f(x) = [f_5(x)]^{f_4(x)} = (\arcsin x)^{\ln x}$$

R. $x \in (0, \infty) \cap [-1, 1] = (0,1]$; $\lim\limits_{x\to 1} f_5(x) = \frac{\pi}{2}$;

$$\lim_{x\to 1} f_4(x) = 0;\quad \lim_{x\to 1} f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^0 = 1.$$

12.4. EXPRESII NEDETERMINATE

S-au subliniat în subcapitolul precedent cazurile particulare ale limitelor de funcții, exceptate de la regula generală de calcul, datorită valorilor lor nedeterminate. În cele ce urmează, vom stabili metode pentru eliminarea nedeterminărilor, pe baza cunoștințelor de pînă acum. Ulterior, după ce se vor cunoaște derivatele (§ 13), se vor prezenta și alte metode în același scop.

12.4.1. Fracții nedeterminate

a) Considerăm cazul (12.49):

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0} \tag{12.55}$$

● *Metoda simplificării*

Conform teoremei lui Bèzout, cele două funcții $f(x)$ și $g(x)$ se divid cu $(x-x_0)$ deoarece $f(x_0)=g(x_0)=0$:

$$f(x)=(x-x_0)\,f_1(x) \text{ și } g(x)=(x-x_0)\,g_1(x)$$

Deci:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)\,f_1(x)}{(x-x_0)\,g_1(x)}=\lim\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{f_1(x_0)}{g_1(x_0)} \tag{12.56}$$

Dacă și ultima limită are aceeași formă de nedeterminare, se repetă simplificarea cu $(x-x_0)$ și așa mai departe pînă cînd cel puțin una din funcții nu mai este divizibilă cu $(x-x_0)$, respectiv este diferită de zero.

Exemple:

$$(E_{16}).\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+4x-5}=\frac{0}{0}$$

Dar:

$$x^2-3x+2=(x-1)\,(x-2)$$

și:

$$x^2+4x-5=(x-1)\,(x+5)$$

Deci:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+4x-5}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+5}=\frac{-1}{6}$$

$$(E_{17}).\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}$$

notăm: $\sqrt{x}=t$ și obținem:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^4-t}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t\,(t-1)\,(t^2+t+1)}{t-1}=3$$

● *Metoda conjugatei*

Atunci cînd una din funcții este irațională, se înmulțește cu conjugata, care nu mai este nulă. Exemple:

$$(E_{18})\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}}=\frac{0}{0}$$

Se amplifică cu conjugata:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-3x+2)\,(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})}{2x-2} = \sqrt{2}$$

● *Metoda comparației*

Dacă două funcții $g(x)$ și $h(x)$ definite pe A au limitele egale în x_0, iar în vecinătatea lui x_0 funcția $f(x)$ satisface condiția:

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x),$$

atunci:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) \quad (12.57)$$

Exemplul clasic în acest sens este:

$$(E_{19}) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (12.58)$$

Demonstrația sa se face cu ajutorul figurii 12.15, în care:

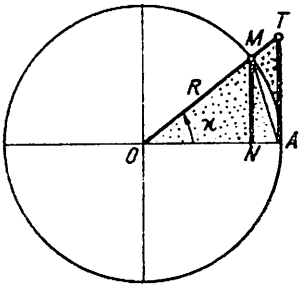


Fig. 12.15

aria tr. OAM < aria sector OAM < aria tr. OAT

unde:

$$\text{aria tr. } OAM = \frac{R^2}{2}\sin x;\ \text{aria sector } OAM = \frac{R^2}{2}x;$$

$$\text{aria } OAT = \frac{R^2}{2}\operatorname{tg} x.$$

Deci:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Împărțind cu $\sin x$, deoarece $x > 0$ și $\sin x > 0$, obținem:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

sau:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

La limită, se obține:

$$1 > \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

Deci:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \text{q.e.d} \tag{12.59}$$

Schimbînd pe x în $-x$, raportul $\frac{\sin x}{x}$ nu se schimbă, astfel încît limita se menţine şi pentru arcul negativ:

$$\lim_{x\to 0\pm} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{12.60}$$

În mod similar se demonstrează şi următoarea limită clasică:

$$(\mathbf{E}_{20}) \quad \lim_{x\to 0\pm} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \tag{12.61}$$

Din figura 1.15 este uşor de înţeles că pentru x foarte mic:

$$\overline{MN} \approx \widehat{MA} \approx \overline{TA}.$$

12.4.2. Produse nedeterminate

Cazul de nedeterminare (12.43) este următorul:

$$\lim_{x\to x_0} (fx)\cdot g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0) = 0\cdot\infty \tag{12.62}$$

Se procedează ca mai sus, scriind astfel încît să revină la forma cunoscută:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{f(x_0)}{\frac{1}{g(x_0)}} = \frac{0}{0} \tag{12.63}$$

Exemple:

$$(\mathbf{E}_{21}). \quad \lim_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x = 0\cdot\infty$$

Se va scrie astfel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$$

12.4.3. Diferenţe nedeterminate

În cazul 12.40, nedeterminarea are forma:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = f(x_0) - g(x_0) = \infty - \infty \tag{12.64}$$

Problema se rezolvă prin artificii de calcul, care reduc expresia la limitele cunoscute anterior.

• *Metoda factorizării.* Se aplică la funcţiile raţionale şi constă în factorizarea uneia din funcţii:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)[= \lim_{x\to x_0} f(x)\left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \left[1 - \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}\right] = f(x_0) \cdot \left[1 - \frac{g(x_0)}{f(x)}\right] = \infty \cdot \left(1 - \frac{\infty}{\infty}\right). \quad (12.65)$$

Problema constă, în primul rînd, în eliminarea nedeterminării cunoscute:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{(vezi 1.61 şi 1.62)}$$

Această limită poate avea trei cazuri deosebite:

Cazul:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \pm\infty \quad (12.66)$$

În aceste condiţii, problema este rezolvată:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \left[1 - \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}\right] = \infty \cdot (1 \mp \infty) = \mp\infty$$

Cazul:

$$\lim \frac{g(x)}{f(x)} = a \neq 1, \quad (12.67)$$

cînd:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \left[1 - \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}\right] = \infty \cdot (1-a) = \text{sign } (1-a) \cdot \infty$$

Cazul:

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1, \quad (12.68)$$

cînd:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \left[1 - \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}\right] = \infty \cdot 0$$

De data aceasta, problema se continuă cu metoda prezentată anterior (§ 12.4.2)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1 - \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{\lim_{x\to x_0} f(x)}} = \frac{0}{0} \quad (12.69)$$

Exemple:

$$(E_{22})\ \lim_{x\to 0}\left(2\operatorname{cotg} x-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty$$

Vom proceda conform celor indicate:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ (\lim_{x\to 0} 2x\operatorname{cotg} x-1)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\operatorname{tg} x}-1\right)=\infty\cdot(2-1)=\infty$$

$$(E_{23})\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x^3-1}\right)=\infty-\infty$$

Factorizăm funcţia a doua:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^3-1}\left[x\left(x^2+x+1\right)-1\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-1}{x^3-1}=\infty$$

● *Metoda inversării* este similară şi constă în folosirea funcţiilor inverse:

$$f_1(x)=\frac{1}{f(x)}\quad \text{şi}\quad g_1(x)=\frac{1}{g(x)}$$

cînd:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f_1(x)}-\frac{1}{g_1(x)}\right]=$$

$$=\lim\frac{g_1(x)-f_1(x)}{f_1(x)\cdot g_1(x)}=\frac{g_1(x_0)-f_1(x_0)}{f_1(x_0)\cdot g_1(x_0)}=\frac{0}{0},\qquad (12.70)$$

formă cunoscută de calcul.

Exemple:

$$(E_{24})\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x^3-1}\right)=\infty-\infty$$

notăm:

$$f_1(x)=\frac{x-1}{x};\quad g_1(x)=x^3-1$$

iar:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g_1(x)-f_1(x)}{f_1(x)\cdot g_1(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1-\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}\cdot\left(x^3-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left[x\left(x^2+x+1\right)-1\right]}{(x-1)\left(x^3-1\right)}=\lim_{x\to i}\frac{x^3+x^2+x-1}{x^3-1}=\infty$$

• *Metoda conjugatei*

În cazul funcțiilor iraționale, se folosește amplificarea cu conjugata, ca și în cazul fracțiilor nedeterminate (§ 1.4.1).

12.4.4. Puteri nedeterminate

Puterea unei funcții (§ 12.3.4.) creează trei situații deosebite de nedeterminare (12.52; 12.53 și 12.54).

a) *Cazul 12.52*: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = f(x_0)^{g(x_0)} = 0^\circ$ (12.71)

Se folosește logaritmarea; în acest scop, se notează:

$$\varphi(x) = f(x)^{g(x)}$$

și se logaritmează:

$$\ln\varphi(x) = g(x)\ \ln f(x)$$

Trecînd la limită, se obține:

$$\lim_{x\to x_0} \ln\ \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) \cdot \ln f(x) = 0\cdot(-\infty)$$

Pentru a elimina nedeterminarea cunoscută a produsului, se scrie:

$$\lim_{x\to x_0} \ln\ \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}} = \frac{0}{0}$$

sau:

$$\lim_{x\to x_0} \ln\ \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Ambele forme sînt cunoscute și permit a exprima limita inițială:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$
$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = e \qquad (12.72)$$

E x e m p l e:

$$(E_{25})\ \lim_{x\to 0} \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2+x} = 0^\circ$$

Deci:

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2+x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x)\cdot \ln e^{-\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{x^2+x}{x^2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{x+1}{x}\right)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

b) *Cazul 12.54*:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = f(x_0)^{g(x_0)} = \infty^0 \tag{12.73}$$

Metoda este aceeaşi:

$$\varphi(x) = f(x)^{g(x)} \; ; \; \ln \varphi(x) = g(x) \ln f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \ln \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) \cdot \ln f(x) = 0 \cdot \infty$$

Deci:

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \ln f(x)} \tag{12.74}$$

c) *Cazul 12.53* :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = f(x_0)^{g(x_0)} = 1^{\infty} \tag{12.75}$$

● Una din metode este similară cu celelalte două, cînd se calculează:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \ln f(x)} \tag{12.76}$$

unde:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) \ln f(x) = \infty \cdot 0$$

● O a doua metodă, foarte simplă, foloseşte funcţia termenului general al şirului care are ca limită numărul e:

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

sau, în general:

$$\lim_{u\to 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e,$$

unde u este o funcție de x. Pentru a folosi această limită cunoscută, funcția inițială va fi exprimată astfel:

$$\varphi(x) = f(x)^{g(x)} = \left\{[1 + f_{(x)} - 1]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{g(x)\,\cdot\,[f(x)-1]}$$

astfel încît: $u(x) = f(x) - 1$, cu limita:

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \lim_{x\to x_0} [f(x) - 1]) = 1 - 1 = 0$$

Se știe, deci, că:

$$\lim_{x\to x_0} [1 + f(x) - 1)[^{\frac{1}{f(x)-1}} = e$$

Deci:

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\,\cdot\,[f(x)-1]} \tag{12.77}$$

unde:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) \cdot [f(x) - 1] = \infty \cdot 0,$$

formă de nedeterminare cunoscută.

Exemple:

$$(\mathbf{E}_{26}) \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{3x}} = 1^{\infty}$$

Vom folosi metoda a doua a numărului e:

$$\frac{x+2}{x+1} + 1 - 1 = 1 + \frac{x+2-x-1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{3x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right]^{\frac{2x^2+1}{3x(x+1)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{3x(x+1)}} = e^{\frac{2}{3}}$$

$$(E_{27})\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0}\left\{[1+\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

12.5. CONTINUITATEA FUNCȚIILOR

12.5.1. Funcția generală

În studiul efectuat pînă acum, am considerat o funcție $f(x)$ pe domeniul propriu de definiție $x \in A \subset R$. Fiecare funcție simplă, de felul acesteia, reproduce un fenomen fizic, adică reprezintă modelul său matematic pe domeniul respectiv.

Fenomenele se pot petrece pe întregul domeniu al numerelor reale $x \in R$, deși o funcție îl descrie numai pe o parte din acesta $A \subset R$. De aceea se impune a asocia fenomenului un model matematic mai complex, format din mai multe funcții simple, ale căror domenii se reunesc pe R. Forma generală a unei astfel de funcții-model este următoarea:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ pentru } x \in (a, b) \\ f_2(x) \text{ pentru } x \in [b, c) \\ f_3(x) \text{ pentru } x \in [c, d) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f^n(x) \text{ pentru } x \in [m, n) \end{cases} \tag{12.78}$$

unde:

$$x \in (a, b) \cup [b, c) \cup [c, d) \ldots \cup [m, n) = (a, n) \subset R$$

Exemplu:

$$(E_{28}) \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x < 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \\ x^2 & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

Prima funcție: $y = f_1(x) = x$ reprezintă o dreaptă (figura 21.16), care descrie fenomenul numai pe intervalul $x \in (-\infty, 0)$.

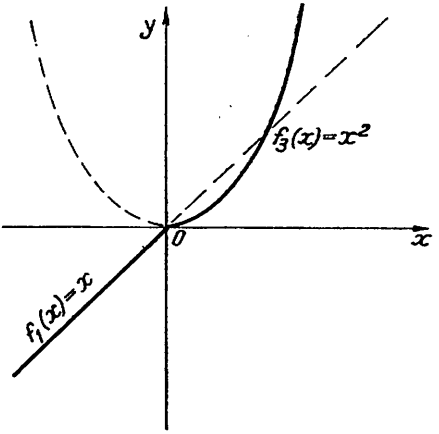


Fig. 12.16

Funcția a doua: $y = f_2(x) = 0$ reprezintă un punct, originea ($x = 0$, $y = 0$).

A treia funcție: $y = f_3(x) = x^2$ reprezintă o parabolă, care descrie fenomenul pe intervalul $x \in (0, \infty)$.

12.5.2. Continuitatea funcției într-un punct

Am văzut că limita unei funcții într-un punct x_0 se studiază prin valoarea sa în acel punct $y_0 = f(x_0)$ și prin cele două limite laterale:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(x_0 - \varepsilon) = y_s \text{ și } \lim_{\varepsilon \to 0} f(x_0 + \varepsilon) = y_d$$

Dacă

$$y_s = y_0 = y_d \tag{12.79}$$

se spune că funcția este continuă în punctul respectiv.

Dacă nu sînt satisfăcute ambele egalități, funcția este discontinuă în acel punct.

Exemple:

• Să se studieze continuitatea funcțiilor următoare:

$$(E_{29}) \quad f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \leqslant 0 \\ x \text{ pentru } x > 0 \end{cases}$$

Este evident că funcțiile: $y = f_1(x) = 1$ și $y = f_2(x) = x$ sînt continue pe întregul lor domeniu de definiție ($x \subset R$). Funcția $f(x)$ va fi — deci — continuă la stînga și la dreapta lui $x_0 = 0$ (figura 12.17)

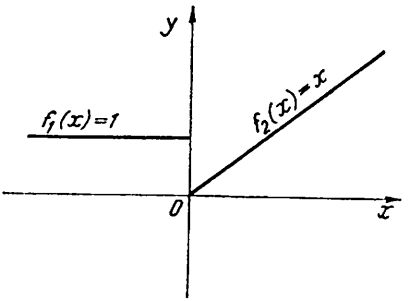


Fig. 12.17

Rămîne de studiat continuitatea sa în acest punct:

$$\lim_{x \to 0-\varepsilon,\ \varepsilon \to 0} f_1(x) = 1 = y_s$$

$$\lim_{x \to 0+\varepsilon} f_2(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon = 0 = y_d$$

Rezultă că funcția $f(x)$ este discontinuă în punctul $x_0 = 0$, deoarece $y_s \neq y_d$.

$$(E_{30}) \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ pentru } x < 0 \\ 1 \text{ pentru } x = 0 \\ -x + 1 \text{ pentru } x > 0 \end{cases}$$

Funcțiile: $f_1(x) = x + 1$ și $f_2(x) = -x + 1$ sînt continue în orice punct (figura 12.18).

Continuitatea lui $f(x)$ trebuie verificată numai în punctul $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0-\varepsilon} (x + 1) = \lim_{\varepsilon \to 0} (-\varepsilon + 1) = 1 = y_s$$

$$\lim_{x \to 0} 1 = 1 = y_0$$

$$\lim_{x \to 0+\varepsilon,\ \varepsilon \to 0} (-x + 1) = \lim_{\varepsilon \to 0} (-\varepsilon + 1) = 1 = y_d$$

Deci: $y_s = y_0 = y_d$, iar $f(x)$ este continuă în $x_0 = 0$.

12.5.3. Continuitatea laterală

O funcție este continuă la stînga, dacă satisface numai prima egalitate:

$$y_s = y_0 \tag{12.80}$$

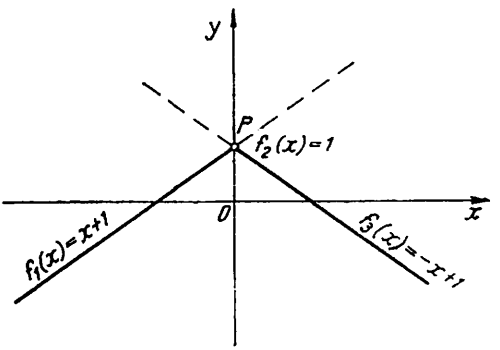


Fig. 12.18

și este continuă la dreapta, dacă satisface cealaltă egalitate:

$$y_0 = y_d \tag{12.81}$$

Exemple:

(E_{30}). Să se arate continuitatea la stînga a funcției:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x \in (-2, 0) \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \\ x+1 & \text{pentru } x \in (0,2) \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0-\varepsilon \\ \varepsilon \to 0}} x = \lim_{\varepsilon \to 0} (-\varepsilon) = 0 = y_s$$

$$\lim_{x \to 0} 0 = 0 = y_0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0+\varepsilon \\ \varepsilon \to 0}} (x+1) = \lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon + 1) = 1 = y_d.$$

Într-adevăr: $y_s = y_0 \neq y_d$ (figura 12.19).

(E_{31}). Să se arate continuitatea la dreapta a funcției:

$$(fx) = \begin{cases} x & \text{pentru } x \in (0,1) \\ x - 1 & \text{pentru } x \in [1,2] \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1-\varepsilon \\ \varepsilon \to 0}} x = \lim_{\varepsilon \to 0} (1 - \varepsilon) = 1 = y_s$$

$$\lim_{x \to 1} (x - 1) = 0 = y_0$$

$$\lim_{\substack{x \to 1+\varepsilon \\ \varepsilon \to 0}} (x - 1) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon = 0 = y_d$$

Într-adevăr: $y_s \neq y_0 = y_d$ (figura 12.20).

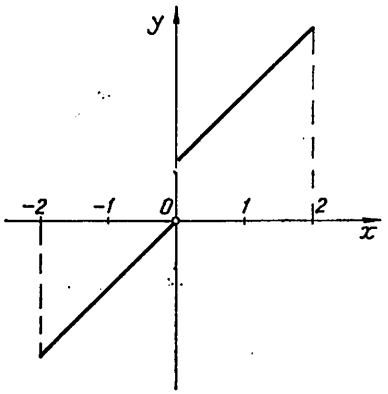


Fig. 12.19

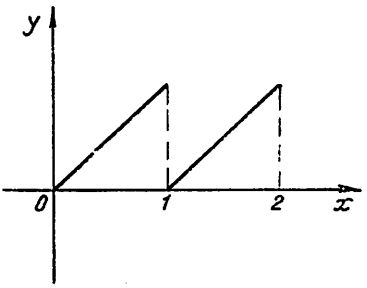


Fig. 12.20

12.5.4. **Discontinuitatea funcției**

Discontinuitatea funcției într-un punct poate fi de două feluri:

• *Discontinuitate de speța I,* cînd limitele laterale în punctul respectiv există, sînt diferite și au valori finite:

$$y_s \neq y_d; \tag{12.82}$$

diferența dintre cele două limite laterale ($y_d - y_s$) se numește „saltul funcției" în acest punct. Rezultă că, în acest caz, funcția are un salt finit.

• *Discontinuitatea de speța II*, cînd cel puțin una din limitele laterale este infinită sau nu există:

$$y_s(y_d) = \pm\infty \tag{12.83}$$

sau:

$$y_s(y_d) \nexists R \tag{12.84}$$

Exemple:

$$(E_{32})\ \text{Funcția: } f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x < 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \\ 2^x & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

are o discontinuitate de speța I în punctul $x_0 = 0$ pentru că:

$$y_s = y_0 = 0 \text{ și } y_d = 1 \neq y_s$$

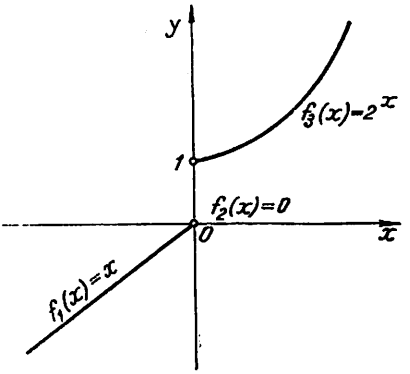


Fig. 12.21

Saltul funcției în $x_0 = 0$ este: $y_d - y_s = 1$ (figura 12.21).

$$(E_{33})\ \text{Funcția: } f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{pentru } x < 0 \\ -1 & \text{pentru } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

are discontinuitate de speța II în $x_0 = 0$:

$$y_s = y_0 = -1 \text{ și } y_d = \infty \neq y_s \text{ (figura 12.22).}$$

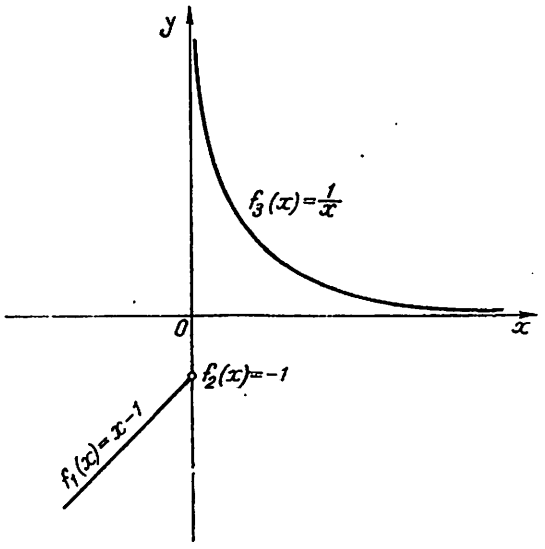


Fig. 12.22

12.5.5. Continuitatea funcției pe un interval. Margini

● O funcție $f(x)$ este continuă pe un interval $[a, b]$, dacă este continuă în toate punctele intervalului.

● O funcție $f(x)$ este mărginită inferior sau minorată pe mulțimea A, dacă există un număr $a \in R$ mai mic decît orice valoare a lui $f(x)$ pe A:

$$a \leqslant f(x); \quad x \in A \tag{12.85}$$

● Cea mai mare valoare a lui $a(m)$, respectiv cea mai mică valoare a lui $f(x)$ pe A, se numește margine inferioară și se notează astfel:

$$m = \inf f(x); \quad x \in A \tag{12.86}$$

● O funcție $f(x)$ este mărginită superior sau majorată pe mulțimea A, dacă există un număr $b \in R$ mai mare decît orice valoare a lui $f(x)$ pe A:

$$b \geqslant f(x); \quad x \in A \tag{12.87}$$

● Cea mai mică valoare a lui $b(M)$, respectiv cea mai mare valoare a lui $f(x)$ pe A, se numește margine superioară și se notează:

$$M = \sup f(x); \quad x \in A \tag{12.88}$$

• O funcție $f(x)$ mărginită superior și inferior pe mulțimea A se numește „funcție mărginită pe mulțimea A“:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \tag{12.89}$$

• O funcție $f(x)$ este „mărginită“, dacă este mărginită pe întregul său domeniu de definiție $x \in X$.

Graficul unei funcții mărginite este cuprins între dreptele paralele cu axa Ox: $y = m$ și $y = M$.

12.5.6. Monotonia funcției

• O funcție $f(x)$ este „crescătoare“ pe mulțimea $A \in X$, dacă oricare ar fi punctele $x_1 < x_2$ ale acestei mulțimi, avem $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, adică:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2);\ x_1 x_2 \in A \tag{12.90}$$

• O funcție $f(x)$ este „strict crescătoare“ pe mulțimea A dacă:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);\ x_1,\ x_2 \in A \tag{12.91}$$

• O funcție $f(x)$ este „descrescătoare“ pe mulțimea A, dacă:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2);\ x_1,\ x_2 \in A \tag{12.92}$$

• O funcție $f(x)$ este „strict descrescătoare“ pe mulțimea A, dacă:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);\ x_1,\ x_2 \in A \tag{12.93}$$

• Funcțiile crescătoare sau descrescătoare se numesc „funcții monotone“.

• Funcțiile strict crescătoare sau strict descrescătoare se numesc „strict monotone“.

CAPITOLUL 13

DERIVATE ŞI DIFERENŢIALE

13.1. DEFINIŢII

13.1.1. Introducere

În capitolul 12 ne-am ocupat de continuitatea funcţiei şi am găsit metode de investigare a comportării sale în vecinătatea unui punct, cu ajutorul limitelor laterale. Cînd cele două limite laterale sînt egale cu limita din punctul respectiv, avem certitudinea că prin acest punct trece un arc de curbă neîntrerupt, care poate fi asimilat — în vecinătatea punctului — cu un segment de dreaptă sau un arc de cerc, tangente curbei reale (figura 12.9).

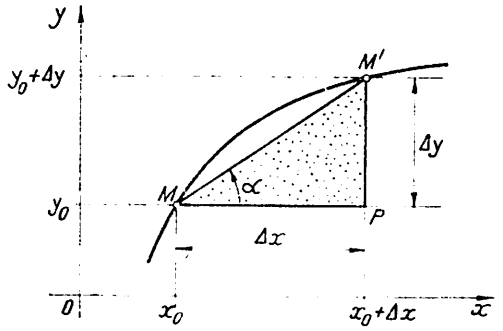


Fig. 13.1

În cele ce urmează vom studia caracteristicile segmentului de dreaptă, tangent la arcul de curbă în punctul dat (x_0).

Fie $f(x)$ o funcţie continuă în punctul x_0, a cărui imagine este punctul M şi arcul MM', din figura 13.1. Pentru o creştere a lui x_0 cu Δx(delta x), corespunde lui $y_0 = f(x_0)$ o creştere Δy (delta y); aceste creşteri stabilesc punctul $M'(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ vecin cu M, dacă Δx are o valoare mică.

Triunghiul dreptunghic MPM', caracteristic celor două puncte vecine (M, M') stabilește proprietățile fundamentale:

- Distanța dintre puncte $(\Delta s = MM')$:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \tag{13.1}$$

- Înclinarea segmentului $(\alpha = \widehat{M'MP})$:

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{13.2}$$

numită și coeficientul unghiular al dreptei MM'.

13.1.2. Definirea derivatei într-un punct

Cunoscînd înclinarea segmentului MM' (13.2), dată de unghiul α sau de tangenta sa trigonometrică $tg\alpha$, vom încerca să evaluăm înclinarea tangentei MT la curba $f(x)$ în M, trasată în figura 13.2, prin tangenta sa trigonometrică $tg\varphi$.

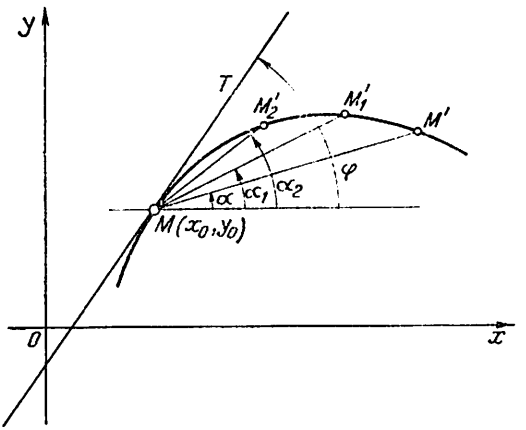


Fig. 13.2

În acest scop, vom folosi două metode, diferite ca interpretare.

1°. *Definirea derivatei prin infiniții mici*

Pentru funcția continuă la dreapta sau la stînga în x_0, creșterii mici Δx îi corespunde o creștere mică Δy, astfel încît aceste două creșteri, care tind către zero sînt doi infiniți mici.

Cu ajutorul lor se deplasează punctul vecin M' (figura 13.2) către M, trecînd prin M_1', M_2' etc. cu unghiurile α, α_1, α_2 etc.

În acest fel, dreapta MM' ajunge sau tinde să ajungă tangentă în M la curba reprezentativă a funcției $f(x)$, iar unghiul α tinde către unghiul φ. Folosind limitele, se poate scrie astfel:

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{M' \to M} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \qquad (13.3)$$

Această limită a raportului dintre creșterea funcției (Δy) și creșterea argumentului (Δx), cînd $\Delta x \to 0$, se numește derivata funcției $f(x)$ în punctul x_0 și se notează cu $f'(x_0)$. Ea este egală cu tangenta trigonometrică tg φ a înclinării tangentei AT față de axa absciselor (φ)

În general, derivata poate fi exprimată astfel:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad (13.4)$$

unde: $\Delta x = x - x_0$ și $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

Evident că funcția $f(x)$ definită pe A este derivabilă în punctul $x_0 \in A$, dacă limita de mai sus există și este finită.

Pentru a întări sensul definiției derivatei și modul de lucru, să urmărim desfășurarea calculelor derivatei în x_0 a parabolei:

$$(E_1) \quad y = x^2$$

La creșterea Δx a lui x, corespunde creșterea Δy lui y, astfel încît:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2.$$

deoarece noile coordonate ($x + \Delta x$, $y + \Delta y$) trebuie să verifice ecuația curbei: $y = x^2$.

Dezvoltăm:

$$y + \Delta y = x^2 + 2x.\Delta x + \Delta x^2.$$

Dar:

$$y = x^2$$

Deci:

$$\Delta y = \Delta x(2x + \Delta x)$$

iar:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

În punctul de abscisă x_0, vom avea:

$$f'(x_0) = tg\varphi = 2x_0$$

2°. *Definirea derivatei prin diferențiale*

Într-o altă interpretare, se folosesc două creșteri finite extrem de mici, infinitezimale (dx și dy), care se numesc „diferențiale", ca în figura 13.3.

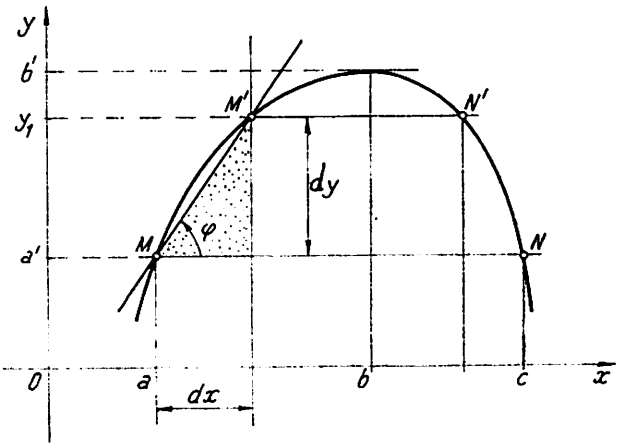


Fig. 13.3

În aceste condiții, înclinarea tangentei la curbă în punctul dat (M) se aproximează astfel:

$$\operatorname{tg}\varphi \approx \frac{dy}{dx} = f'(x_0) \tag{13.5}$$

Evident că cu cît valoarea creșterii (diferențialei) dx este mai mică, cu atît raportul dy/dx este mai aproape de valoarea reală a derivatei $f'(x_0)$. Avantajul diferențialelor constă în faptul că sînt constante și permit aplicarea calculului algebric; astfel, relația de definiție a derivatei:

$$f'(x_0) = dy/dx$$

poate fi scrisă și astfel:

$$dy = f'(x_0)dx \tag{13.6}$$

permițînd determinarea diferențialei funcției (dy) în raport cu diferențiala argumentului (dx).

În prima interpretare a derivatei, prin infiniții mici (Δx, Δy), ce tind către zero, nu pot fi efectuate direct astfel de calcule.

Dezavantajul aproximației, introdusă de valorile constante ale diferențialelor, este numai aparent, deoarece putem considera oricît de mică valoarea lui dx, mai ales că — practic — nu o evaluăm numeric niciodată.

13.1.3. Funcție inversă

În subcapitolul 1.3, odată cu definiția funcției, s-a prezentat și clasificarea acesteia (§ 1.3.2), în felul următor:

• *Funcția injectivă* (f) aplicație a mulțimii X în mulțimea Y, care satisface condiția ca imaginile $y_1 = f(x_1)$ și $y_2 = f(x_2)$ din B, corespunzătoare la oricare două elemente diferite din A, x_1 și x_2, să fie diferite. Deci:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \text{ respectiv } y_1 \neq y_2$$

• *Funcția surjectivă* (f), aplicație în care oricare element din B, $f(x_i)$ este imaginea unui element din A, (x_i). Cu alte cuvinte mulțimea elementelor din A este egală cu mulțimea elementelor din B.

• *Funcția bijectivă sau biunivocă* (f), aplicație injectivă și surjectivă. Aceasta are următoarele proprietăți:

$x \to y = f(x)$; pentru o valoare a lui x corespunde o valoare lui y;

$y = f(x) \to x$; pentru o valoarea lui y corespunde o valoare lui x;

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$; la două valori diferite ale lui x corespund două valori diferite lui y;

$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$; la două valori diferite ale lui y corespund două valori diferite lui x.

Aceste proprietăți pot fi elucidate cu ajutorul funcției din figura 13.3 :

— Această funcție, pe domeniile $x \in (a, b) = A$ și $y \in (a', b') = B$ este biunivocă (bijectivă), deoarece pentru un punct oarecare $x_1 \in (a, b)$ corespunde un singur punct $y_1 \in (a', b')$ și invers: pentru un punct oarecare $y_1 \in (a', b')$ corespunde un singur punct $x_1 \in (a, b)$.

— Funcția respectivă, pe domeniul $x \in (a, c)$, cînd $y \in (a', b')$ nu mai este biunivocă, deoarece prima condiție o satisface $x_1 \to y_1 = f(x)$ dar nu și pe a doua. Într-adevăr, pentru un punct $y_1 \in (a', b')$ corespund două puncte în A (x'_1, x'_2), abscisele punctelor M', N'.

Funcțiile biunivoce au proprietăți deosebite, pentru că legile stabilite pentru o funcție $f(x)$ sînt aceleași cu ale funcției cu celălalt argument $\varphi(y)$. Astfel, în ce privește derivata, conform studiului și defi-

niţiilor date, se poate opera la fel, considerînd pe y drept argument şi pe x drept funcţie, încît:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{iar:} \quad \frac{dx}{dy} = f'(y)$$

Deci:

$$f'(x) \cdot f'(y) = 1 \tag{13.7}$$

● *Funcţie inversă.* Se defineşte drept funcţie inversă a funcţiei biunivoce $f(x)$, funcţia $f^{-1}(y)$, prin care fiecărui element $y \in Y$ îi corespunde acel element unic $x \in X$, pentru care $f(x) = y$.

Exemple:

$f(x) = y = 2x + 1 \Rightarrow f^{-1}(y) = x = \frac{y-1}{2}$, funcţie inversă.

$f(x) = y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(y) = x = \frac{y+1}{y-1}$, funcţie inversă.

Trebuie reţinut faptul că o funcţie oarecare poate fi biunivocă pe anumite intervale sau în vecinătatea unui punct, cînd se bucură de proprietăţile enunţate.

13.2. DERIVATELE FUNCŢIILOR FUNDAMENTALE

Ca o aplicaţie imediată a definiţiei vom stabili derivatele funcţiilor fundamentale de tip algebric, logaritmic, exponenţial şi trigonometric. Expresiile ce vor fi obţinute, constituie un bagaj de formule, strict necesare analizei matematice.

Stabilirea acestor derivate se bazează pe faptul că toate funcţiile considerate fundamentale sînt continue pe domeniul lor de definiţie. Precizăm acest lucru, pentru că problema derivabilităţii funcţiilor va fi prezentată în capitolul următor.

13.2.1. Funcţii algebrice

Considerăm că cea mai expresivă funcţie algebrică este monomul de gradul n:

$$y = f(x) = ax^n$$

Cele două creşteri $(\Delta x, \Delta y)$ sînt legate de aceeaşi relaţie:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = a(x + \Delta x)^n =$$
$$= a(x^n + C_n^1 x^{n-1} \cdot \Delta x + C_n^2 x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \ldots)$$

unde:

$$y = ax^n$$

Reducînd aceste elemente, rezultă:

$$\Delta y = \Delta x \cdot a(C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} \cdot \Delta x + C_n^3 x^{n-3} \cdot \Delta x^2 + \ldots)$$

și:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a \cdot C_n^1 x^{n-1} + \Delta x(C_n^2 x^{n-2} + C_n^3 x^{n-3}\Delta x + \ldots) =$$

$$= a \cdot C_n^1 x^{n-1} = nax^{n-1}$$

În consecință reținem că:

$$\text{și:} \quad \left.\begin{array}{ll} f(x) = ax^n & f'(x) = nax^{n-1} \\ f(x) = x^n & f'(x) = nx^{n-1} \\ f(x) = ax & f'(x) = a \\ f(x) = x & f'(x) = 1 \\ f(x) = a & f'(x) = 0 \end{array}\right\} \qquad (13.8)$$

Exemple:

$$(E_2) \quad (3x^4)' = 12x^3;\ (5x^9)' = 45x^8;\ (3)' = 0$$

13.2.2. Funcții trigonometrice

1°. *Funcția cos x*:

$$y = f(x) = \cos x \qquad (13.9)$$

Deci:

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

iar:

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

și:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

unde:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \quad \text{(v.1.59)}$$

Deci:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x = f'(x) \tag{13.10}$$

2°. *Celelalte funcţii trigonometrice.* Se demonstrează în mod similar şi se obţin formulele din tabelul 13.11.

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = \sin x, & f'(x) = \cos x \\ f(x) = \cos x, & f'(x) = -\sin x \\ f(x) = \operatorname{tg} x, & f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ f(x) = \operatorname{cotg} x, & f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \\ f(x) = \operatorname{arc}\sin x, & f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ f(x) = \operatorname{arc}\cos x, & f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ f(x) = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x, & f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ f(x) = \operatorname{arc}\operatorname{cotg} x, & f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2} \end{array}\right\} \tag{13.11}$$

13.2.3. Funcţii logaritmice şi exponenţiale

1°. *Funcţia logaritmică*

$$y = f(x) = \log_a x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e \tag{13.12}$$

Într-adevăr:

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

iar:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log_a e; \quad \text{q.e.d.}$$

2°. *Funcția exponențială*:

$$y = f(x) = a^x,\ f'(x) = a^x \ln a \tag{13.13}$$

Demonstrația se face în mod similar, folosind funcția inversă:

$$x = \log_a y$$

Recapitulînd, reținem:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \log_a x, & f'(x) &= \frac{1}{x}\log_a e \\ f(x) &= \ln x, & f'(x) &= \frac{1}{x} \\ f(x) &= a^x, & f'(x) &= a^x \ln a \\ f(x) &= e^x, & f'(x) &= e^x \end{aligned}\right\} \tag{13.14}$$

13.3. FUNCȚII DERIVABILE

13.3.1. Derivabilitatea funcției

● Se spune că funcția $f(x)$ este derivabilă la stînga în punctul x_0, dacă expresia:

$$\lim_{x \to x_0 - \varepsilon,\ \varepsilon \to 0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'_s(x_0) \tag{13.15}$$

numită „derivată la stînga", are valoarea finită.

● Se spune că funcția $f(x)$ este derivabilă la dreapta în punctul x_0, dacă expresia:

$$\lim_{x \to x_0 + \varepsilon,\ \varepsilon \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) \tag{13.16}$$

numită „derivată la dreapta", are valoarea finită.

● Funcția $f(x)$ este „derivabilă" în punctul x_0, dacă derivatele laterale există și sînt egale:

$$f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \tag{13.17}$$

● Se spune că funcția $f(x)$ este „derivabilă pe un interval I", dacă este derivabilă în fiecare punct al acestuia $x_0 \in I$.

● *Teoremă.* Dacă funcția $f(x)$ este derivabilă în punctul x_0, atunci funcția este continuă în acest punct.

Într-adevăr, pentru $x \neq x_0$, avem:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

La limită, cînd $x \to x_0$ fie la stînga sau la dreapta, se obține:

$$\lim_{x \to x_0 \pm} (x - x_0) = 0 \text{ și } \lim_{x \to x_0 \pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Deci:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0)\, b =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$$

Deci:

$$y_s = y_d = y_0$$

ceea ce confirmă teorema enunțată, a cărei reciprocă nu este adevărată, deoarece o funcție continuă în x_0 poate avea două tangente, respectiv două derivate, așa cum se arată în figura 13.4:

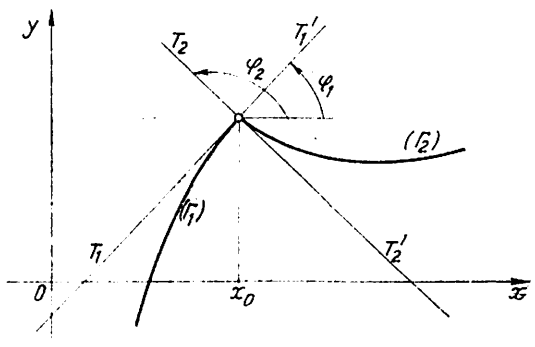


Fig. 13.4

— tangenta T_1T_1' la ramura de curbă Γ_1 și

— tangenta T_2T_2' la ramura de curbură Γ_2.

Într-un astfel de caz, derivatele laterale sînt diferite:

$$f_s'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi_1$$

$$f_d'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi_2$$

iar:

$$\varphi_1 \neq \varphi_2, \quad f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$$

E x e m p l e. Să se analizeze derivabilitatea următoarelor funcții, în punctele indicate în dreptul fiecăreia:

$$(E_3) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ e^x & \text{pentru } x > 0, \text{ în } x_0 = 0 \end{cases}$$

Calculăm derivatele laterale în punctul $x_0 = 0$:

$$f'_s(x) = (1)' = 0, \quad f'_s(0) = 0$$

$$f'_d(x) = (e^x)' = e^x, \quad f'_d(0) = e^0 = 1.$$

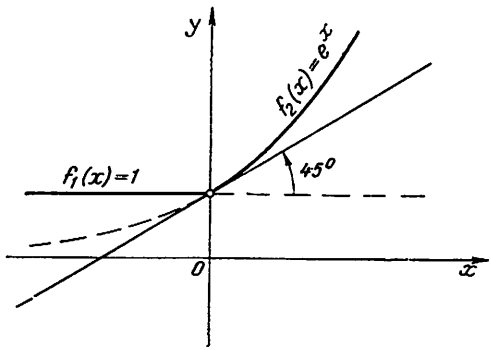


Fig. 13.5

Rezultă că funcția are derivate în $x_0 = 0$, dar acestea nu sînt egale între ele, astfel încît nu este derivabilă. În figura 13.5 sînt reprezentate funcțiile respective și se constată că:

$\operatorname{tg}\varphi_s = 0$, deoarece $f_1(x) = 1$ este o dreaptă orizontală, iar $\varphi_s = 0$;

$\operatorname{tg}\varphi_d = 1$, ceea ce înseamnă că tangenta la funcția exponențială în $x_0 = 0$ are o înclinare de 45°.

13.3.2. Operații cu funcții derivabile

• Dacă două funcții $f(x)$ și $g(x)$ sînt derivabile într-un punct x_0, atunci și *suma sau diferența lor este derivabilă în acel punct*:

$$[f(x) + g(x)]'_{x=x_0} = f'(x_0) + g'(x_0) \qquad (13.18)$$

Într-adevăr:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+$$

$$+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

E x e m p l e. Să se calculeze derivatele următoarelor sume de funcţii:

$$(E_4)\quad f(x)=x^a+a^x+\log_a x$$

$$f'(x)=ax^{a-1}+a^x\ln a+\frac{1}{x}\log_a e$$

$$(E_5)\quad f(x)=\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x$$

$$f'(x)=\cos x-\sin x+\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}$$

● *Produsul a două funcţii definite ca mai sus este derivabil conform relaţiei*:

$$[f(x).g(x)]'_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)\qquad(13.19)$$

Demonstraţia se bazează pe definiţia derivatei, ca în cazul precedent (2.4):

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)[f(x)-f(x_0)]+f(x_0)[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}g(x)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=g(x_0)\cdot f'(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

E x e m p l e. Să se calculeze derivatele următoarelor produse:

$$(E_6)\quad f(x)=2\sin x\cdot\cos x$$

$$f'(x)=2[(\sin x)'\cos x+\sin x\cdot(\cos x)']=2(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\cos 2x$$

● *Cîtul a două funcţii derivabile în punctul x_0 este derivabil în acel punct şi are expresia*:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'_{x=x_0}=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}\qquad(13.20)$$

Într-adevăr:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)\,g(x_0)} \cdot \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{1}{g^2(x_0)} \lim_{x\to x_0} \frac{g(x_0)\,[f(x) - f(x_0)] - f(x_0)\,[g(x) - gx_0)]}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

E x e m p l e. Să se calculeze derivatele următoarelor funcții:

$$(\mathbf{E}_7) \quad f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

conform cu cele stabilite anterior

$$(\mathbf{E}_8) \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x + 1)'\,(x - 1) - (x - 1)'\,(x^2 - 2x + 1)}{(x - 1)^2} =$$

$$= \frac{(2x - 2)\,(x - 1) - (x^2 - 2x + 1)}{(x - 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x - 1)^2} = 1$$

Rezultatul este explicabil și se putea obține direct, dacă se opera simplificarea funcției inițiale:

$$f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = x - 1$$

iar:

$$f'(x) = 1.$$

● Dacă funcția $u(x)$ este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ și funcția $f(u)$ este derivabilă în punctul corespunzător $u_0 = u(x_0) \in J$, atunci

„funcția compusă" $F(x) = F[u(x)]$ *este derivabilă în punctul* x_0 *și are expresia:*

$$F'(x_0) = F'(u_0) \cdot u'(x_0) \tag{13.21}$$

În adevăr:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0)$$

iar:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(u) - F(u_0)}{u - u_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{u(x) - u(x_0)} = F'(u_0)$$

Deci:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{u(x) - u(x_0)} \cdot \frac{u - u_0}{x - x_0} = F'(u_0) \cdot u'(x_0)$$

Exemple:

$$(E_9) \quad f(x) = (2x^3 - 5x + 1)^3 = u^3$$

$$f'(x) = 3u^2 \cdot u' = 3(2x^3 - 5x + 1)^2 \cdot (6x - 5)$$

$$(E_{10}) \quad f(x) = \sqrt{u(x)} = u^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2} - 1} \cdot u' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$(E_{11}) \quad f(x) = 2 \sin^3 5x - \operatorname{tg}^2 3x$$

$$f'(x) = 6 \sin^2 5x \cdot \cos 5x \cdot 5 - 2 \operatorname{tg} 3x \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3$$

$$(E_{12}) \quad f(x) = \ln u$$

$$f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{u'}{u}$$

● Dacă două funcții $u(x)$ și $v(x)$ sînt derivabile pe intervalul I și dacă $u(x) > 0$ pentru $x = x_0 \in I$, *atunci funcția* u^v *este derivabilă în* x_0 *și are expresia:*

$$f(x) = u^v, f'(x) = v\, u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v' \tag{13.22}$$

Pentru a demonstra această relație, o vom scrie astfel:

$$f(x) = u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}$$

Sub această formă, $f(x)$ este o funcție compusă și se derivează pe baza celor stabilite mai sus:

$$f'(x) = (e^{v \ln u})' = e^{v \ln u} \cdot (v \ln u)' =$$

$$= e^{v \ln u}\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) = e^{\ln u^v}\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) =$$

$$= u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$$

Rezultă că „funcția la funcție" u^v se derivează astfel: întîi se consideră că v este constant și se derivează ca o putere, apoi se consideră u constant și se derivează ca o exponențială, iar cele două derivate se adună.

Exemple:

$$(E_{13})\ f(x) = x^x$$

$$f'(x) = x \cdot x^{x-1} \cdot 1 + x^x \cdot \ln x \cdot 1 = x^x(1 + \ln x)$$

$$(E_{14})\ f(x) = (\sin x + \cos x)^{x^2}$$

$$f'(x) = x^2(\sin x + \cos x)^{x^2-1} \cdot (\cos x - \sin x) +$$

$$+ (\sin x + \cos x)^{x^2} \cdot \ln x^2 \cdot 2x$$

13.3.3. Operații cu diferențiale

Relațiile stabilite mai sus (§ 13.3.3) pot fi exprimate cu ajutorul diferențialelor, pe baza relațiilor: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ sau: $dy = f'(x)dx$.

În această interpretare, operațiile cu funcțiile derivabile $u(x)$ și $v(x)$ iau următoarele forme:

$$\left.\begin{aligned} &d(u \pm v) = du \pm dv \\ &d(uv) = udv + vdu \\ &d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \\ &d[u(v)] = \frac{du}{dv} \cdot dv = u'_v \cdot dv \\ &d(u^v) = vu^{v-1}du + u^v \ln u dv \end{aligned}\right\} \qquad (13.23)$$

Exemple. Să se calculeze diferențialele următoarelor funcții:

(E_{15}) $f(x) = 3x^5 - 4x^2 + 3x - 6$; $df = (15x^4 - 8x + 3)dx$

$$(E_{16})\quad u = \operatorname{tg}^3 x;\ du = 3\operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx$$

$$(E_{17})\quad v = 4\sin 3x - e^x;\ dv = (12\cos 3x - e^x)dx$$

$$(E_{18})\quad f = \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x};\ df = \frac{\cos 2x \cdot d(\sin^2 2x) - \sin^2 2x\, d(\cos 2x)}{\cos^2 2x} =$$

$$= \frac{4 \sin 2x \cdot \cos^2 2x + 2 \sin^3 2x}{\cos^2 2x} \cdot dx$$

13.3.4. Aplicații

● Să se calculeze derivatele funcțiilor $f(x)$, $g(x)$ și diferențialele funcțiilor $u(x)$, $v(x)$:

$$(A_1)\quad f(x) = \frac{2}{3} x^3 - \operatorname{arc}\cos x$$

$$\mathbf{R.}\quad f'(x) = 2x^2 + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(A_2)\quad g(x) = 2^{x^2-3x+5} + \operatorname{tg} 6x - 2$$

$$\mathbf{R.}\ g'(x) = 2^{x^2-3x+5} \cdot \ln 2 \cdot (2x - 3) + \frac{6}{\cos^2 6x}$$

$$(A_3)\quad u(x) = (x^3 - x)^2(2x + x^2)$$

$$du = [2(x^2 - x) \cdot (3x^2 - 1) \cdot (2x + x^2) + (x^3 - x)^2 \cdot (2 + 2x)]dx$$

$$(A_4)\quad v(x) = \ln(1 + x^2) + \operatorname{arctg} x$$

$$dv = \left(\frac{2x}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + x^2}\right) dx$$

$$(A_5)\quad f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\mathbf{R.}\ f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(A_6)\quad g(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x + a}{x - a}$$

$$\mathbf{R.}\quad g'(x) = -\frac{a}{x^2 + a^2}$$

$$(A_7)\quad f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$\text{R. } f'(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{x^2-1}{x^2+1}\right]$$

● Să se calculeze derivatele laterale ale funcțiilor următoare, în punctele indicate în dreptul fiecăreia și să se precizeze continuitatea funcțiilor.

$$(A_8)\quad f(x)=\begin{cases} e^{\frac{x^2}{1+x^2}}, & x>0 \\ 1, & x\leqslant 0 \end{cases}, \text{ în } x_0=0$$

$$\text{R. } f_1'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}\cdot e^{\frac{x^2}{1+x^2}};\ f_d'=\lim_{\varepsilon\to 0} f_1'(0+\varepsilon)=0,$$

$$\underset{x\to 0}{f_2'(x)}=(1)'=0,\quad \underset{\varepsilon\to 0}{f_s'(0-\varepsilon)}=0$$

$f_s'=f_d'\Rightarrow$ funcția este continuă în $x_0=0$.

$$(A_9)\ f(x)=|x|+1, \text{ în } x_0=0.$$

$$\text{R. } f(x)=\begin{cases} x+1, & x>0 \\ 1, & x=0;\ f_d'=1;\ f_s'=-1 \\ -x+1, & x<0 \end{cases}$$

$y_d=y_0=y_s=1\Rightarrow$ funcția este continuă în $x_0=0$.

● Să se studieze continuitatea și derivabilitatea următoarelor funcții, în punctele indicate în dreptul fiecăreia:

$$(A_{10})\ f(x)=\ln(x-2),\ x_0=2$$

R. Continuă la dreapta: nederivabilă.

$$(A_{11})\ f(x)=|x^2-3x+2|, \text{ în } x_0=1$$

R. Continuă, nederivabilă cu derivate laterale diferite $(-1,1)$.

13.4. DERIVATE ȘI DIFERENȚIALE DE ORDIN SUPERIOR

1°. Fie $f(x)$ o funcție derivabilă în punctul x_0; dacă derivata sa $f'(x)$ este derivabilă în acest punct x_0, se spune că funcția $f(x)$ este de două ori derivabilă în punctul x_0.

Derivata lui $f'(x)$ în x_0 se numește „derivata doua" sau „derivata de ordinul doi" a funcției $f(x)$ și se notează astfel:

$$f''(x_0) \text{ sau } \frac{d^2f(x_0)}{dx^2} \tag{13.24}$$

Deci:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \tag{13.25}$$

2°. Dacă derivata doua $f''(x)$ a funcției $f(x)$ este derivabilă în punctul x_0, se spune că $f(x)$ este de trei ori derivabilă în x_0.

Derivata lui $f''(x)$ în punctul x_0 se numește „derivata treia" sau „derivata de ordinul trei" în punctul x_0 și se notează:

$$f'''(x_0) \text{ sau } \frac{d^3f(x_0)}{dx^3} \tag{13.26}$$

3°. Dacă se mențin proprietățile derivabilității în aceleași condiții ca mai sus, o funcție poate avea n derivate succesive; ultima se numește derivata „n-a" sau „de ordinul n" a funcției $f(x)$ în puntul x_0 și se notează:

$$f^{(n)}(x_0) \text{ sau } \frac{d^nf(x_0)}{dx^n} \tag{13.27}$$

iar:

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} \tag{13.28}$$

E x e m p l e. Să se calculeze derivatele de ordinul întîi și doi ale următoarelor funcții în punctul $x_0 = 1$.

$$(E_{10}) \quad f(x) = 4x^2 - 5x + 3$$

$$f'(x) = 8x - 5, \quad f'(1) = 3$$

$$f''(x) = 8, \quad f''(1) = 8$$

$$(E_{20}) \quad f(x) = e^{-x}$$

$$f'(x) = -e^{-x}, \quad f'(1) = -\frac{1}{e}$$

$$f''(x) = e^{-x}, \quad f''(1) = \frac{1}{e}$$

4°. *Extinderea teoremei lui Bézout*

Se cunoaște teorema lui Bézout, prin care se stabilește că un polinom $P(x)$ are ca divizor binomul $(x - a)$, dacă $P(a) = o$.

Pentru a extinde această teoremă, la polinomul care are ca divizor puterea binomului $(x-a)^n$, vom deriva succesiv:

$$P(x) = (x-a)^n \cdot C(x) \tag{13.29}$$

$$P'(x) = n(x-a)^{n-1} \cdot C(x) + (x-a)^n \cdot C'(x) = (x-a)^{n-1} \cdot C_1(x),$$

deoarece:

$$nC(x) + (x-a)C'(x) = C_1(x)$$

Derivata doua va avea forma similară:

$$P''(x) = (x-a)^{n-2} \cdot C_2(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P^{(n-1)}(x) = (x-a)C_{(n-1)}(x)$$

iar:

$$P^{(n)}(x) = C_n(x)$$

Rezultă că dacă polinomul se divide cu $(x-a)^n$, atunci primele $(n-1)$ derivate ale sale se divid cu $(x-a)$; deci:

$$P(a) = P'(a) = P''(a) = \ldots = P^{(n-1)}(a) = 0 \tag{13.30}$$

În consecinţă, ecuaţia asociată unei astfel de funcţii: $P(x) = (x-a)^n C(x) = 0$, respectiv ecuaţia care are o rădăcină (a) multiplă de n ori, satisface condiţia de mai sus (13.30).

Exemple:

(E_{21}) Să se determine parametrul m, astfel încît ecuaţia: $x^4 + x^3 - 3x^2 - mx - 2 = 0$, să aibă o rădăcină triplă.

Se derivează de două ori:

$$4x^3 + 3x^2 - 6x - m = 0$$

$$12x^2 + 6x - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0,$$

iar:

$$x = \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{cases} -1 \\ 1/2 \end{cases}$$

Cazul 1: $x_1 = x_2 = x_3 = -1$

Trebuie ca $P(-1) = P'(-1) = 0 \Rightarrow m = 5$ şi $m' = 5$.

Deci: $m = 5$ este soluţie a problemei, deoarece $m = m' = 5$.

Cazul 2: $x_1 = x_2 = x_3 = 1/2$

De data aceasta: $P(-1) = 0 \Rightarrow m = -41/8$

iar: $P'(-1) = 0 \Rightarrow m' = -14/8$

Deoarece $m \neq m'$, acest caz nu este posibil.

13.5. PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR DERIVABILE

Pentru a studia funcția reală de variabilă reală, s-a impus analiza graficului în puncte caracteristice, cu ajutorul limitelor laterale și a derivatelor. Cunoscînd procesul de investigare, precum și modul de calcul al derivatelor, vom stabili proprietăți utile în reprezentarea grafică a funcțiilor și în rezolvarea ecuațiilor, cu ajutorul funcțiilor asociate.

13.5.1. Extremele funcției. Teorema lui Fermat

1°. *Extreme relative.* Fie $f(x)$ o funcție definită pe $x \in A$ *cu* valori în R, ca în figura 13.6.

● Vom spune că $x_0 \in A$ este un punct de maxim local al funcției $f(x)$, dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît pentru orice $x \in V$ să avem: $f(x) \leqslant f(x_0)$; (M_1, M_2, M_3).

● Spunem că $x_0 \in A$ este un punct de minim local al funcției $f(x)$, dacă pentru orice $x \in A$ avem: $f(x) \geqslant f(x_0)$; (m_1, m_2, m_3).

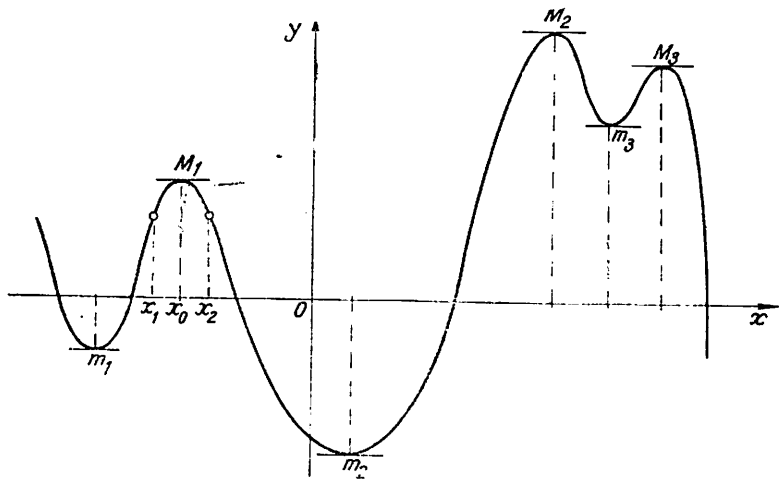


Fig. 13.6

Aceste extreme, maxime sau minime, sînt „locale" și proprii numai vecinătăților punctelor x_0, pentru că funcția are în afara lor alte extreme, care le pot depăși pe acestea. Astfel, în figura 13.6, ordonata punctului de minim local (m_3) este mai mare decît ordonata punctului de maxim local (M_1).

Extremele locale se mai numesc și „relative".

2°. *Extreme absolute.* Maximul unei funcții $f(x)$ pe domeniul său de definiție este cel mai mare maxim local și se numește „maxim absolut". Minimul unei funcții $f(x)$ pe domeniul de definiție este cel mai mic minim local și se numește „minim absolut".

În reprezentarea grafică a funcției, ne interesează toate extremele relative, care fac parte din punctele caracteristice ale acesteia. Extremele absolute sînt cuprinse și evidențiate, în mod implicit, în graficul funcției, astfel încît ele nu necesită o investigare deosebită.

În consecință, vom stabili metoda de calcul a extremelor — în general — respectiv a tuturor extremelor relative.

3°. *Teorema lui Fermat.* Dacă o funcție $f(x)$ definită pe intervalul $x \in I$, cu valori în R, are derivată într-un punct x_0 de extrem (maxim sau minim local), aceasta este zero: $f'(x_0) = 0$.

Într-adevăr, dacă x_0 este un punct de maxim, există o vecinătate (V) a lui x_0, în care:

$$f(x) - f(x_0) \leqslant 0 \tag{13.31}$$

Dacă x_1 și x_2 sînt două puncte vecine ($x_1 < x_0 < x_2$), rezultă:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geqslant 0$$

deoarece, $f(x_1) - f(x_0) \leqslant 0$, conform condiției 13.31;

iar:

$$x_1 - x_0 < 0.$$

La limită, rezultă:

$$f'(x_0) \geqslant 0.$$

În mod similar avem:

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leqslant 0$$

deoarece:

$$f(x_2) - f(x_0) \leqslant 0,$$

conform condiției 13.31;

iar:

$$x_2 - x_0 > 0$$

La limită, rezultă:

$$f'(x_0) \leqslant 0.$$

Deci:

$$0 \leqslant f'(x_0) \leqslant 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Pentru un punct x_0 de minim, demonstrația este similară.

Această teoremă este ușor de înțeles pe grafic, în figura 13.6, deoarece tangenta într-un punct extrem (M_1, M_2,...,m_1, m_2...) este orizontală, iar unghiul dintre aceasta și axa absciselor este zero:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} 0 = 0 \qquad (13.32)$$

E x e m p l e. Să se determine punctele de extrem ale următoarelor funcții:

$$\mathbf{E}_{(22)} \quad f(x) = ax^2 + bx + c; \quad x \in R$$

$$f'(x) = 2ax + b = 0; \quad x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$f(x_0) = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$(\mathbf{E}_{23}) \quad f(x) = \sin x; \qquad x \in [0,2\pi]$$

$$f'(x) = \cos x = 0 \qquad x_1 = \frac{\pi}{2}; \quad x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; \quad f\left(3\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Observații

● Teorema lui Fermat este valabilă pentru un punct din interiorul intervalului $I = [a, b]$, nu și pentru punctele din capetele acestuia: $x = a$ sau $x = b$. Aceste puncte nu permit justificarea matematică de mai sus, deoarece vecinătatea lor (V), nu are puncte de o parte și alta a lui a sau b, care să satisfacă condiția: $x_1 < a < x_2$ sau $x_1 < b < x_2$.

Dacă punctul x_0 este unul din capetele intervalului I, punctul x_0 poate fi punct de extrem, fără ca derivata să să se anuleze în x_0.

E x e m p l e. ($\mathbf{E}_{24}$). Funcția $f(x) = x^2$, pe intervalul $x \in [1, 2]$ nu are derivata nulă:

$$f'(x) = 2x = 0; \quad x_0 = 0 \notin [1, 2].$$

Cu toate acestea, funcţia are valori extreme la capetele intervalului (figura 13.7):

— un minim pentru $x = 1$, $f(1) = 1$;

— un maxim pentru $x = 2$, $f(2) = 4$.

Acest lucru se datoreşte faptului că funcţia $f(x)$ este strict crescătoare pe intervalul dat.

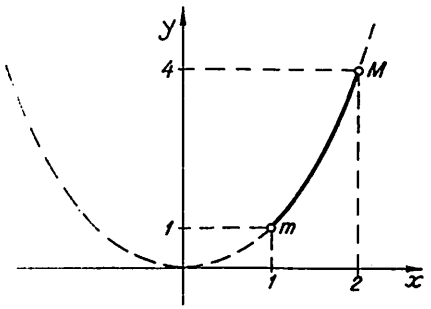


Fig. 13.7

● O funcţie poate avea, de asemenea, un extrem în punctul x_0, fără ca aceasta să aibă derivată în x_0; ea are derivate laterale diferite.

E x e m p l e

Funcţia E_{30} din paragraful 12.5.2, figura 12.18, are un maxim în P, fără a avea o derivată în $x_0 = 0$. Ea are derivate la stînga:

$$y'_s = 1 \text{ şi la dreapta } y'_d = -1.$$

● O funcţie cu derivata nulă în punctul x_0, nu are în mod obligatoriu un extrem în acel punct, astfel încît reciproca teoremei lui Fermat nu este adevărată în general.

E x e m p l e: (E_{25}). Funcţia :$f(x) = x^3$ are derivata:

$$f'(x) = 3x^2 = 0, \text{ cu rădăcina dublă } x_1 = x_2 = 0.$$

Pentru ca în $x_0 = 0$ să aibă un maxim (minim) ar trebui ca diferenţa: $f(x) - f(x_0) = x^3$ să rămînă negativă (pozitivă) pentru orice x din vecinătatea lui $x_0 = 0$.

Or, pentru $x < 0 \Rightarrow x^3 < 0$, iar pentru $x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$.

Acest lucru se explică pe graficul funcției din figura 13.8, în care se constată că aceasta are două ramuri (Γ_1, Γ_2) tangente la axa Ox, fără ca punctul 0 (0, 0) să fie un extrem; un astfel de punct se numește „punct de inflexiune" (vezi § 14.5).

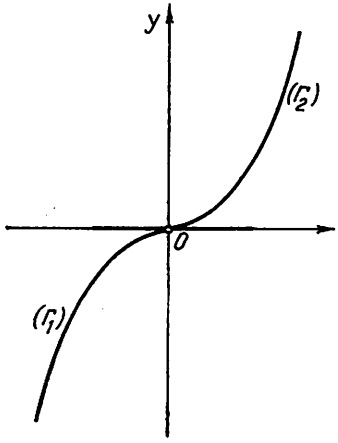


Fig. 13.8

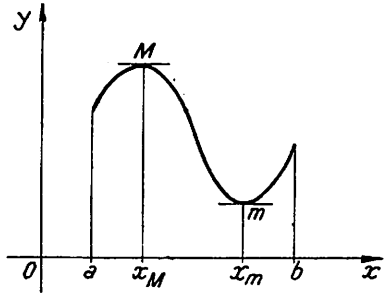


Fig. 13.9

4°. *Variația funcției.* În figura 13.9, funcția $f(x)$ are pe intervalul $[a, b]$ un punct de maxim (M) în x_M și un punct de minim (m) în x_m.

Graficul funcției, cu aceste elemente este cel din tabela 13.1.

Tabela 13.1

x	a		x_M		x_m		b
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$f(a)$	↗	$f(x_M)$	↘	$f(x_m)$	↗	$f(b)$

Într-adevăr, relațiile anterioare stabilite pentru punctul de maxim, confirmă că:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x<x_M} > 0 \text{ și } \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x>x_M} < 0 \qquad (13.33)$$

iar limitele lor: $f'_s(x_M) > 0$ și $f'_d(x_m) < 0$

Pentru punctul de minim:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x<xm} < 0 \text{ și } \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x>xm} > 0 \qquad (13.34)$$

sau:

$$f'_s(x_m) < 0, \text{ iar } f'_d(x_m) > 0.$$

Rezultă că semnul derivatei stabilește modul de variație al funcției așa cum se va demonstra mai riguros la § 13.5.3, în felul următor:

- Derivata pozitivă corespunde funcției strict crescătoare, iar:
- Derivata negativă corespunde funcției strict descrescătoare.

Cu alte cuvinte, la schimbarea de semn a derivatei, în punctul în care aceasta se anulează, funcția are un extrem (maxim sau minim). Dacă derivata are rădăcini multiple, problemă cunoscută de la studiul inecuațiilor (§ 8.4), graficul funcției va exprima acest lucru prin puncte ca în tabela 13.2.

Tabela 13.2

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\overset{+}{\underset{0}{\cdot}}$ $-$	$\overset{+}{\underset{0}{\cdot}}$ $+$	$-$ 0 $+$	
$f(x)$	$\nearrow$	y_1	$\searrow$	y_2 $\searrow$ y_3	$\nearrow$	y_4 $\searrow$ y_5	$\nearrow$

Analizînd această tabelă, rezultă:

- Multiplicitatea rădăcinilor derivatei trebuie să fie redată riguros și în funcție de soluțiile sale să se stabilească semnele acesteia.
- Semnele derivatei determină modul de creștere sau descreștere al funcției, indicat prin săgeți.
- Rădăcina simplă sau cu ordinul impar de multiplicitate alternează semnele derivatei și este punct de extrem.
- Rădăcina dublă sau cu ordinul par de multiplicitate păstrează semnul derivatei și este punct de inflexiune (fig. 2.8).
- Cînd derivata are rădăcina fără sens (∞), ca în cazul lui x_4 din tabela 13.2, tangenta la curbă este verticală, astfel încît nu asigură un extrem.

5. *Probleme de maxim și minim.* Proprietățile punctelor extreme le conferă caracterul de puncte caracteristice în studiul funcțiilor și servesc la rezolvarea directă a unor probleme uzuale, așa cum se exemplifică mai jos.

(E_{26}). Să se calculeze înălțimea maximă a traiectoriei unui **proiectil** de artilerie și distanța corespunzătoare.

Se știe că ecuația traiectoriei proiectilului în vid este de **forma** parabolei:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

unde:

x reprezintă distanța de la proiectil la punctul de tragere;
y, înălțimea proiectilului față de orizontala punctului de **tragere.**
Maximele acestei înălțimi (y_{max}) se obțin anulînd derivata **sa:**

$$y' = 2ax + b = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}$$

cînd:

$$y_{max} = f(x_0) = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

(E_{27}). Dispunînd de materialul necesar îngrădirii unui **depozit,** se cer dimensiunile acestuia, pentru a avea o suprafață maximă **dreptunghiulară.**
Înseamnă că: $x + y = c$, adică semiperimetrul este dat și constant.
Aria dreptunghiului este:

$$z = xy = x\ (c - x) = -x^2 + cx = f(x)$$

Această funcție va fi maximă, cînd derivata ei va fi nulă:

$$z' = -2x + c = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{c}{2}$$

Rezultă:

$$z_{max} = -\frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{2} = \frac{c^2}{4}$$

iar:

$$y_0 = c - x_0 = c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} = x_0$$

Deci, forma convenabilă este un pătrat.

13.5.2. Teorema lui Rolle. Sirul lui Rolle

Dacă o funcție $f(x)$, definită pe domeniul A continuă pe **intervalul** închis $I \subset A$, și derivabilă pe acest interval deschis, satisface **condiția:** $f(a) = f(b)$, există cel puțin un punct $c \in (a, b) = I$, $a < c < b$, **în** care derivata se anulează, $f'(c) = 0$.

Deoarece funcția este continuă pe intervalul $[a, b]$, este mărginită, astfel încît există două puncte, care satisfac condiția:

$$f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) \text{ pentru orice } x \in [a, b]$$

Dacă x_m este punct interior intervalului I $(a < x_m < b)$, conform teoremei lui Fermat, avem $f'(x_m) = 0$ și rezultă că $x_m = c$.

Dacă x_M este interior intervalului I, pe baza teoremei lui Fermat: $f'(x_M) = 0$ și atunci: $c = x_M$.

Interpretarea grafică a teoremei lui Rolle este dată în figura 13.10 pentru cazul unui punct de maxim. Ca funcția continuă să ajungă în intervalul $[a, b]$ la aceeași valoare: $f(a) = f(b)$, trebuie să treacă cel puțin printr-un extrem.

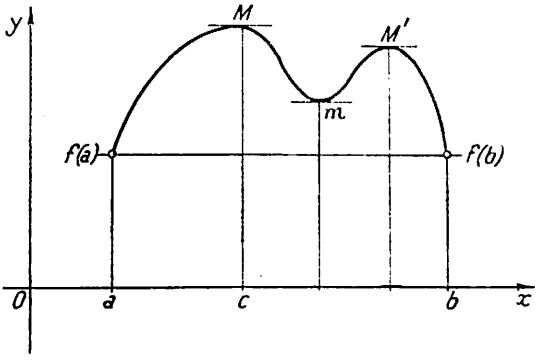


Fig. 13.10

Deci, teorema lui Rolle precizează că în condițiile stabilite, există cel puțin un punct cu derivata nulă și că — în general — numărul punctelor cu derivata nulă (puncte de extrem) este impar.

În cazul particular, în care $f(a) = f(b) = 0$. adică a și b sînt rădăcini ale ecuației $f(x) = 0$, atunci teorema lui Rolle are următorul enunț:

● *Între două rădăcini reale consecutive ale funcției există un număr impar de rădăcini reale ale derivatei, respectiv cel puțin una.*

Pentru studiul ecuațiilor prezintă o mare importanță următoarea teoremă a lui Rolle, consecință a primei:

● *Între două rădăcini reale consecutive ale derivatei, există cel mult o rădăcină reală a funcției.*

Într-adevăr, fie $x_1 < x_2$ două rădăcini consecutive ale derivatei: $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Să presupunem prin absurd că funcția are două rădăcini diferite α și β între x_1 și x_2:

$$x_1 < \alpha < \beta < x_2 \Rightarrow f(\alpha) = f(\beta) = 0$$

În baza teoremei inițiale, înseamnă că între α și β există cel puțin o rădăcină a derivatei, concluzie ce contrazice ipoteza că x_1 și x_2 sînt rădăcini consecutive.

Deci, între x_1 și x_2 nu poate exista decît cel mult o rădăcină a ecuației.

Această teoremă permite să separăm rădăcinile ecuației $f(x) = 0$, atunci cînd cunoaștem rădăcinile ecuației derivate $f'(x) = 0$.

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ toate rădăcinile reale ale derivatei $f'(x) = 0$, așezate în ordine crescătoare, iar (fx_1), $f(x_2) \ldots f(x_n)$ valorile funcției $f(x)$ în aceste puncte, respectiv ordonatele extremelor sale.

Teorema a doua precizează că între două rădăcini consecutive ale derivatei, x_i și x_j poate exista o rădăcină reală a funcției:

Dacă această rădăcină există și are valoarea c: $x_i < c < x_j$ trebuie ca $f(x_i)$ și $f(x_j)$ să fie de semne contrarii:

$$f(x_i) \cdot f(x_j) < 0 \tag{13.35}$$

În baza acestor proprietăți, Rolle a propus întocmirea unui șir cu valorile funcției:

$$f(-\infty)\ f(x_1)\ f(x_2) \ldots f(x_n)\ f(+\infty) \tag{13.36}$$

care servește la stabilirea numărului de rădăcini reale ale funcției și a intervalelor în care se găsesc acestea:

— numărul de rădăcini reale este egal cu numărul schimbărilor de semn ale valorilor șirului lui Rolle;

— rădăcinile reale se găsesc în intervalele ale căror capete au funcții de semne contrarii.

Exemple

($\mathbf{E_{28}}$). Să se stabilească numărul rădăcinilor reale ale ecuației:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 = 0$$

și să se separe pe intervale.

Derivata: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4 = 0$ este o ecuație reciprocă, cu rădăcinile:

$$x_1 = -1;\ x_2 = \frac{1}{2};\ x_3 = 2$$

Șirul lui Rolle este următorul:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\frac{33}{16}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Rezultă următoarele:

— Ecuația are patru rădăcini reale;

— Acestea sînt repartizate cîte una în fiecare din cele patru intervale:

$$(-\infty, -1), \left(-1, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right), (2, \infty).$$

(E_{29}). Să se discute cu ajutorul teoremei lui Rolle ecuația cu un parametru:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + \lambda$$

Derivata: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4 = 0$ are rădăcinile:

$$x_1 = -1; \quad x_2 = \frac{1}{2}; \quad x_3 = 2.$$

Șirul lui Rolle se dezvoltă pe verticală după valorile ce le poate lua parametrul $\lambda \in R$, ca în tabela 13.3. Rădăcinile reale sînt marcate prin puncte.

Tabela 13.3

λ	x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	Concluzii
	$f(x)$	$+\infty$	$\lambda - 4$	$\lambda + \frac{17}{16}$	$\lambda - 4$	$+\infty$	
$-\infty$		+	● −	−	−	● +	2 rădăcini reale
$-\frac{17}{16}$		+	● −	●0●	−	● +	4 rădăcini reale, din care $x_1 = x_2 = 1/2$
		+	● −	● + ●	−	● +	4 rădăcini reale.
4		+	●0●	+	●0●	+	4 rădăcini reale, $x_1 = x_2 = -1$; $x_3 = x_4 = 2$
$+\infty$		+	+	+	+	+	nici o rădăcină reală

(E_{30}). Să se discute cu ajutorul teoremei lui Rolle ecuația cu doi parametri:

$$f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 2(19\lambda - 8\mu) = 0$$

Derivata:

$$f'(x) = 15x^4 - 75x^2 + 60 = 0$$

sau:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1;\ x_{3,4} = \pm 2$$

Şirul lui Rolle se dezvoltă pe verticală după domeniile create de funcţiile $f(\lambda, \mu) = 0$ rezultate în tabela 13.4 conform figurii 13.11.

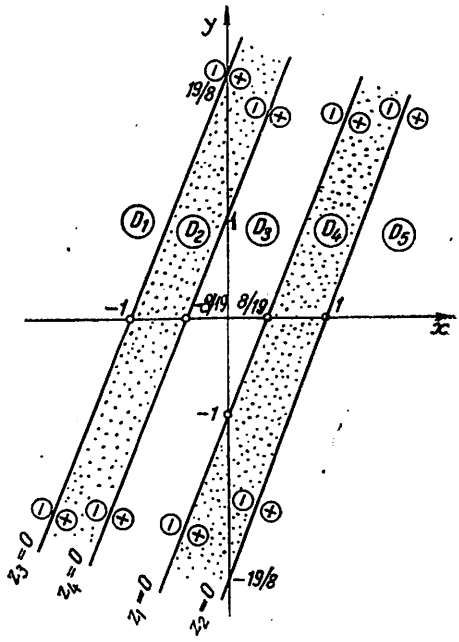


Fig. 13.11

Pentru a contura mai bine concluziile din ultima rubrică a tabelului, rădăcinile sînt marcate prin puncte. Se consideră că acolo unde $f(x_1) = 0$, rădăcina este dublă, deoarece şi $f'(x) = 0$.

(E_{31}). Să se discute următoarea ecuaţie parametrică:

$$f(x) = x^5 - 5a^4 x + 4a^3 = 0$$

$f'(x) = 5x^4 - 5a^4 = 0$ sau: $x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)\ (x^2 + a^2) = 0$

iar:

$$x_1 = a \text{ şi } x_2 = -a \Rightarrow f(a) = 4a^3(1 - a^2), \text{ cu:}$$

$a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $a_5 = -1$ şi $f(-a) = 4a^3\ (1 + a^2)$,

Tabela 13.4

D	x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$	Concluzii
	$f(x)$	$-\infty$	$z_1=2(19\lambda-8\mu-8)$		$z_2=(19\lambda-8\mu-19)$		$z_3=2(19\lambda-8\mu+19)$		$z_4=2(19\lambda-8\mu+8)$			$+\infty$	
D_1		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	●	$+$	1 rădăcină reală
z_3		$-$		$-$		$-$		●0●		$-$	●	$+$	3 rădăcini reale; 1 dublă; $x_1 = x_2 = 1$
D_2		$-$		$-$		$-$	●	$+$	●	$-$	●	$+$	3 rădăcini reale
z_4		$-$		$-$		$-$	●	$+$		●0●		$+$	3 rădăcini reale: 1 dublă; $x_1 = x_2 = 2$
D_3		$-$		$-$		$-$	●	$+$		$+$		$+$	1 rădăcină reală
z_1		$-$		●0●		$-$	●	$+$		$+$		$+$	3 rădăcini reale: 1 dublă; $x_1 = x_2 = -2$
D_4		$-$	●	$+$	●	$-$	●	$+$		$+$		$+$	3 rădăcini reale
z_2		$-$	●	$+$		●0●		$+$		$+$		$+$	3 rădăcini reale: 1 dublă; $x_1 = x_2 = -1$
D_5		$-$	●	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	1 rădăcină reală

cu:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Cazul 1: $a \leqslant 0$

a	x	$-\infty$		a		$-a$		$+\infty$	Concluzii
	$f(x)$	$-\infty$		$4a^3(1-a^2)$		$4a^3(1+a^2)$		$+\infty$	
$-\infty$		$-$	●	$+$	⊛	$-$	●	$+$	3 rădăcini reale
-1		$-$	⊛	0	●	$-$	●	$+$	3 rădăcini reale x_3 $x_1 = x_2 = a = -1$
		$-$		$-$		$-$	●	$+$	o rădăcină reală
0		$-$	●	0	⊛	●	0 ●	$+$	5 rădăcini egale cu zero

Cazul 2: $a > 0$

a	x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$	Concluzii
	$f(x)$	$-\infty$		$4a^3(1+a^2)$		$4a^3(1-a^2)$		$+\infty$	
0									Studiat anterior
		$-$	●	$+$		$+$		$+$	1 rădăcină reală
1		$-$	⊛	$+$		●	0 ●	$+$	3 rădăcini reale $x_1 = x_2 = a = 1$
∞		$-$	●	$+$	⊛	$-$	●	$+$	3 rădăcini reale

De data aceasta a fost necesar a studia două cazuri, pentru că pe axa $(-\infty, \infty)$, punctele a şi $-a$ ocupă poziţii relative diferite, după cum $a \leqslant 0$ sau $a > 0$.

13.5.3. Teorema lui Lagrange. Formula creşterilor finite

1. *Teorema lui Lagrange*

Dacă o funcţie $f(x)$, definită pe domeniul A este continuă pe intervalul închis $I \subset A$ şi derivabilă pe acest interval deschis, satisface relaţia:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \tag{13.37}$$

unde:

$$a < c < b, \text{ iar } [a,b] = I.$$

Cu alte cuvinte, există cel puţin un punct c pe interval, care satisface formula de mai sus (13.37), numită a „creşterilor finite".

Pentru demonstraţie, se aplică teorema lui Rolle funcţiei auxiliare $h(x)$ definită pe I, astfel:

$$h(x) = f(x) - kx; \; x \in I$$

unde k este un număr ce urmează a fi determinat astfel ca:

$$h(a) = h(b).$$

Deci:

$$h(a) = f(a) - ka; \; h(b) = f(b) - kb$$

iar:

$$f(a) - ka = f(b) - kb \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Pentru această valoare a lui k, funcţia $h(x)$ verifică ipotezele teoremei lui Rolle: funcţia $h(x)$ este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b) ca diferenţă a funcţiilor $f(x)$ şi (kx) care satisfac ambele condiţii. În plus, $h(a) = h(b)$. Rezultă că există cel puţin un punct $c \in (a, b)$, astfel încît $h'(c) = 0$,

Dar, pentru $x \in (a, b)$, avem:

$$h'(x) = f'(x) - k.$$

Deci:

$$h'(c) = f'(c) - k, \text{ adică:}$$

$$0 = f'(c) - k \Rightarrow k = f'(c)$$

şi:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = k = f'(c) \text{ q.e.d}$$

Interpretarea geometrică a acestei teoreme, conform figurii 13.12, este următoarea: punctele a, b determină pe curbă punctele A și B. Segmentul AB are înclinarea φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

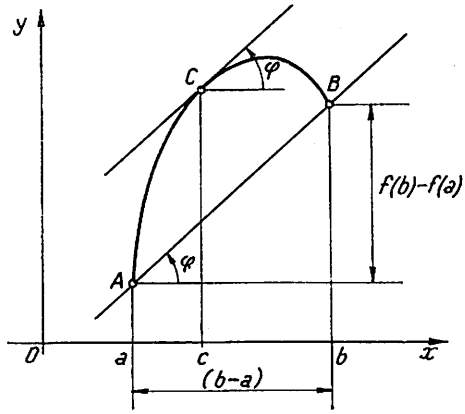


Fig. 13.12

Există cel puțin un punct C pe curbă în acest interval (a, b) a cărui tangentă să fie paralelă cu coarda AB, cînd:

$$\operatorname{tg}\varphi = f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

De fapt, teorema lui Rolle este un caz particular al teoremei lui Lagrange, pentru $f(a) = f(b)$, cînd $f'(c) = 0$.

Pentru a exprima mai general formula creșterilor finite, vom considera intervalul $I = [a, x]$ sau $[x, a]$ și $a < \xi < x$ sau respectiv, $x < \xi < a$, cînd:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi);\ \xi \in (a, x) \tag{13.38}$$

sau:

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(\xi);\ a < \xi < x \tag{13.39}$$

sau:

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta h);\ 0 < \theta < 1 \tag{13.40}$$

dacă se notează:

$$x = a + h \text{ și } \xi = a + \theta h,$$

unde θ este un coeficient subunitar.

2. *Consecințe ale teoremei lui Lagrange*

● Dacă derivata funcției $f(x)$ este nulă pe intervalul I, atunci funcția este constantă pe acest interval.

Aceasta înseamnă că $f'(x) = 0$ pentru $x \in I$, deci:

$$f'(\xi) = 0$$

în formula creșterilor finite:

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(\xi) = 0$$

Rezultă:

$$f(x) = f(a) \tag{13.41}$$

pentru orice $x \in I$.

● Dacă derivata funcției $f(x)$ este nulă pe intervalul I, și dacă $f'(x) = g'(x)$ pentru orice $x \in I$, atunci diferența lor $h(x) = f(x) - g(x)$ este constantă pe I.

Într-adevăr:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = ct.$$

Deci:

$$f(x) - g(x) = h(x) = \text{ct.} \tag{13.42}$$

pentru orice $x \in I$.

● *Dacă derivata $f'(x)$ este negativă pe I, atunci funcția $f(x)$ este strict descrescătoare pe I. Dacă $f'(x)$ este pozitivă, atunci $f(x)$ este strict crescătoare pe I.*

Dacă $x_1, x_2 \in I$ și $x_1 < x_2$, avem:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x_1)$$

Dacă $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in I$, rezultă că:

$$f'(\xi) < 0$$

și

$$f(x_2) < f(x_1) \tag{13.43}$$

adică $f(x)$ este strict descrescătoare pe I. La fel se demonstrează pentru $f'(x) > 0$, cînd:

$$f(x_2) > f(x_1) \tag{13.44}$$

și cînd funcția este strict crescătoare.

13.5.4. Teorema lui Cauchy. Formula a doua a creşterilor finite

Fie $f(x)$ şi $g(x)$ două funcţii, definite pe un interval $\mathbf{I}$ şi $a < b$ două puncte din $\mathbf{I}$. Dacă f şi g sînt continue pe intervalul închis $[a,b]$ şi derivabile pe acelaşi interval deschis (a, b), iar $g'(x) \neq 0$ pentru $x \in (a,b)$, atunci: $g(a) \neq g(b)$ şi există un punct $c \in (a,b)$, $a < c < b$, astfel încît să avem:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \tag{13.45}$$

relaţie ce se mai numeşte „formula a doua a creşterilor finite".

Pentru demonstraţia teoremei, aplicăm teorema lui Rolle funcţiei auxiliare $h(x)$, definită pe $\mathbf{I}$ astfel:

$$h(x) = f(x) - kg(x), \qquad x \in \mathbf{I}$$

unde k este un număr ce urmează a fi determinat astfel încît să avem $h(a) = h(b)$.

Deci:

$$h(a) = f(a) - kg(a)$$

şi

$$h(b) = f(b) - kg(b)$$

şi

$$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b)$$

sau:

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Pentru această valoare a lui k, funcţia $h(x)$ verifică ipotezele teoremei lui Rolle: h este continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă pe (a,b), ca diferenţă a funcţiilor f şi kg, cu aceste proprietăţi. În plus, $h(a) = h(b)$. Există deci, cel puţin un punct $c \in (a,b)$, astfel ca: $h'(c) = 0$.

Dar:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

şi

$$h'(c) = f'(c) - kg'(c) = 0$$

Deci:

$$k = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ şi } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

În aceste condiţii, teorema lui Lagrange este un caz particular al teoremei lui Cauchy, în care se consideră: $g(x) = x$, cu $g'(x) = 1$.

13.5.5. Regulile lui L'Hospital

Derivatele au o largă aplicație în eliminarea nedeterminărilor studiate în subcapitolul 12.4. Am stabilit că expresiile nedeterminate se reduc, în fond, la două forme esențiale: $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$.

1. *Cazul* $\frac{0}{0}$. Fie $f(x)$ și $(g(x)$ două funcții definite pe I, derivabile pe I și un punct al intervalului I.

Dacă $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, iar $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I și dacă există:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ (finită sau infinită)},$$

atunci:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{13.46}$$

Pentru că $g'(x) \neq 0$ la stînga și la dreapta lui x_0, $g(x)$ este strict monotonă atît la stînga cît și la dreapta lui x_0, deci $g(x) \neq g(x_0)$ pentru orice $x \neq x_0$, $x \in$ I.

Fie x_n un șir arbitrar $x_n \in$ I convergent către x_0.

Funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ îndeplinesc condițiile teoremei lui Cauchy; pentru intervalul (x_n, x_0) avem:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

Însă:

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

Deci:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

Deoarece $x_n < \xi_n < \xi_0$, înseamnă că:

$$|\xi_n - \xi_0| < |x_n - x_0| \text{ și cînd } x_n \to x_0 \text{ și } \xi_n \to x_0.$$

Dar:

$$\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = A \text{ (finit sau infinit)}$$

Rezultă:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

În cazul în care x_0 este infinit, se demonstrează că formula de mai sus rămîne valabilă:

$$\lim_{x\to\infty,\ g(x)\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty,\ g'(x)} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{13.47}$$

și, în consecință are caracter general, pentru oricare x_0 finit sau infinit.

2. *Cazul* $\frac{\infty}{\infty}$. Fie $f(x)$ și $g(x)$ două funcții definite pe I, derivabile pe I și x_0 un punct al intervalului I. Dacă $g(x)$ este strict monotonă atît la dreapta cît și la stînga lui x_0 și $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \neq x_0$ din I și dacă există:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ (finită sau infinită)},$$

atunci:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{13.48}$$

E x e m p l e. Să se calculeze, cu ajutorul regulilor lui L'Hospital, următoarele limite:

$$(E_{32})\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$(E_{33})\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x\to 0} \frac{m\cos mx}{n\cos nx} = \frac{m}{n}$$

$$(E_{34})\quad \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \ln a}{nx^{n-1}} = \ldots = \lim \frac{a^x \ln^n a^n}{n!} = \infty;\ a > 1$$

$$(E_{35})\quad \lim_{\substack{x\to 0+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{\substack{x\to 0+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\alpha\varepsilon^\alpha} = \infty;\ \alpha > 0$$

Se calculează numai limita la dreapta, deoarece: $x \in (0, \infty)$

$$(E_{36})\quad \lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1$$

$$(E_{37})\quad \lim_{x\to\infty}(x - e^x) = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{-x} - 1}{e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x} - xe^{-x}}{-e^{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - x}{-1} = \infty$$

$$(E_{38})\quad \lim_{x\to 0}(\lim x^x) = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1$$

$$(E_{39})\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\operatorname{ctg} x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg} x\ln(1+x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg} x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}} = e$$

$$(E_{40})\quad \lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^x = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln\operatorname{ctg} x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{ctg} x}{\frac{1}{x}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\operatorname{ctg} x\cdot\sin^2 x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x\cos x}} = e^0 = 1.$$

13.5.6. Convexitatea şi concavitatea curbei

Am arătat că semnul derivatei $f'(x)$ a funcţiei $f(x)$ pentru $x \in [a,b]$ indică felul monotoniei curbei: — dacă $f'(x) > 0$, funcţia este strict crescătoare pe $[a,b]$, iar dacă $f'(x) < 0$, funcţia este strict descrescătoare.

Aceste indicaţii sînt preţioase, dar insuficiente pentru descrierea fenomenului pe $[a,b]$. În fig. 13.13 se poate trece de la A la B în mod strict crescător, fie pe ramura Γ_1 (convexă), fie pe ramura Γ_2 (concavă). Pentru a deosebi mai bine aceste forme, reţinem că o curbă concavă ţine apa, în timp ce cealaltă nu ţine apa.

În fig. 13.14 funcţia are chiar pe intervalul $[a,b]$ două ramuri, una convexă AC şi una concavă CB. Punctul C se numeşte punct de inflexiune; în acest punct, tangenta traversează curba, fiind formată din două semitangente în prelungire, fiecare aparţinînd uneia din ramuri.

Pentru analiza curbei din acest punct de vedere, vom folosi derivatele de ordin superior.

Considerăm funcția $f(x)$, derivabilă de $(n+1)$ ori pe un interval I și două puncte vecine a, $b \in I$. Conform teoremei lui Lagrange, există un punct $c \in (a,b)$, astfel încît:

$$f(x) - f(c) = (x - c)f'(x);\ x \in [a,b]$$

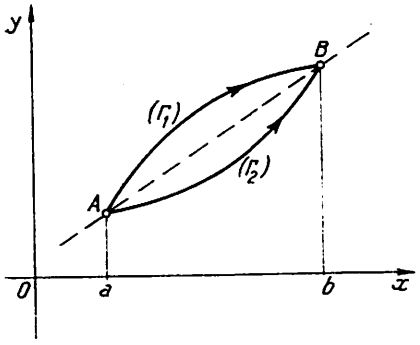


Fig. 13.13

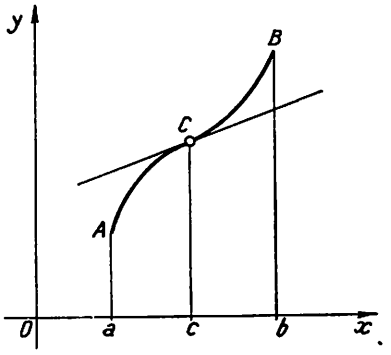


Fig. 13.14

Pentru o curbă concavă (fig. 13.15) trebuie ca $AA'' > A'A''$ și $BB'' > B'B''$.

Or:

$$BB'' = f(b) = f(c + h)$$

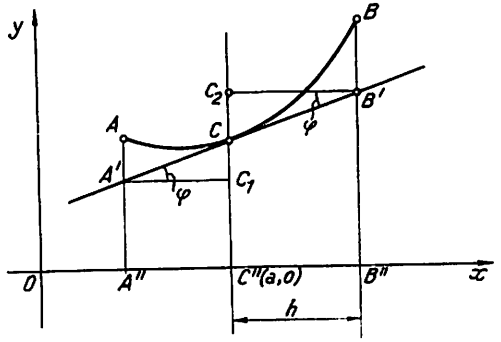


Fig. 13.15

iar:

$$B'B'' = C''C_2 = CC'' + CC_2 = f(c) + h\text{tg}\varphi = f(c) + hf'(c)$$

Deci ca $BB'' > B'B''$, trebuia ca:

$$f(c+h) > f(c) + hf'(c)$$

Dar, dezvoltînd pe $f(c+h)$ după formula lui Taylor, rezultă:

$$f(c+h) = f(c) + \frac{h}{1!}f'(c) + \frac{h^2}{2!}f''(c) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c) +$$

$$+ \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(\xi) > f(c) + hf'(c)$$

sau, după reducerile evidente:

$$\frac{h^2}{2!}f''(c) + \frac{h^3}{3!}f'''(c) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^n(c) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) > 0$$

• Dacă $f''(c) \neq 0$, neglijăm infiniții mici de ordin superior ($h^{n+1} \ll h^n \ll \ldots \ll h^3 \ll h^2$) și rămîne condiția:

$$\frac{h^2}{2!}f''(c) > 0 \Rightarrow f''(c) > 0$$

Repetînd raționamentul pentru punctul A, prin înlocuirea lui h cu $(-h)$ se ajunge la aceeași concluzie, deoarece: $(\pm h)^2 \geqslant 0$.

Deci, pentru ca funcția $f(x)$ să fie concavă în punctul $c \in I$, trebuie ca derivata a doua în acest punct să fie pozitivă.

Dacă $f''(c) \neq 0$, iar $f'''(c) \neq 0$, neglijînd infiniții mici de ordin superior lui h^3, rezultă condiția:

$$\frac{h^3}{3!}f'''(c) > 0$$

În acest caz: $(\pm h)^3 \lesseqgtr 0$. Deci, pentru $f'''(c) > 0$, curba este concavă la dreapta și convexă la stînga, iar pentru $f'''(c) < 0$ curba este concavă la stînga și convexă la dreapta. Deci, atunci cînd $f''(c) = 0$, curba are o inflexiune în punctul C, iar felul ramurilor din stînga și dreapta este hotărît de semnul derivatei a treia $f'''(x)$.

Repetînd acest raționament, se ajunge la următoarele concluzii, în cazul în care $f''(c) = f''''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$ și $f^{(n)}(c) \neq 0$:

— dacă $f^{(n)}(c) > 0$ și $n = 2k$, curba este concavă în vecinătatea punctului c;

— dacă $f^{(n)}(c) < 0$ și $n = 2k$, curba este convexă;

— dacă $n = 2k + 1$, adică n este impar, curba are o inflexiune în punctul C.

13.5.7. Condițiile de extrem

Punctele de maxim și minim ale unei funcții $f(x)$ se găsesc, așa cum s-a precizat anterior, printre punctele care au derivata întîi nulă: $f'(x) = 0$. Dar, nu toate punctele care satisfac această condiție sînt de extrem.

Pentru a stabili punctele de extrem, vom folosi următoarea teoremă pentru funcția derivabilă de $(n+1)$ ori, $n > 2$ în punctul $c \in I$, astfel încît:

$$f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0;\ f^{(n)}(c) \neq 0$$

— dacă $n = 2k$ și $f^{(n)}(c) < 0$, atunci c este un punct de maxim;

— dacă $n = 2k$ și $f^{(n)}(c) > 0$, atunci c este un punct de minim;

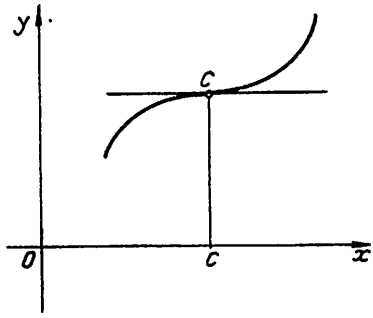


Fig. 13.16

— dacă $n = 2k + 1$, punctul c este un punct de inflexiune, ca în fig. 13.16.

Exemple. Să se studieze punctele de extrem ale funcțiilor:

$$(E_{41})\quad f(x) = x^6;\ x \in R$$

$$f'(x) = 6x^5;\ x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

$$f''(0) = f'''(0) = f^{IV}(0) = f^{V}(0) = 0;\ f^{VI}(0) = 6!$$

În acest caz, $n = 6 = 2k$; punctul $x = 0$ este un punct de minim, deoarece $f^{(n)}(0) = 6! > 0$.

Acest lucru se putea stabili și din tabela de variație a derivatei întîi:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$(E_{42})\ f(x) = x^5; \qquad x \in R$$

$$f'(x) = 5x^4 = 0;\ x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

$$f''(0) = f''\,'(0) = f^{IV}(0) = 0;\ f^{V}(0) = 5!.$$

În acest caz, $n = 5 = 2k + 1$; punctul $x = 0$ este un punct de inflexiune. Ca și în cazul precedent, faptul reiese și din tabela de variație a derivatei întîi:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Într-adevăr, funcția este strict crescătoare în vecinătatea punctului $x = 0$.

CAPITOLUL 14

REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR

14.1. ETAPELE DE CALCUL

Am stabilit că o funcție are, în general, o infinitate de perechi de valori și ca imagine grafică, o curbă continuă pe diferite domenii. În asemenea condiții, reprezentarea sa se face pe domeniul de existență, prin punctele caracteristice, pe care le-am cunoscut în capitolul precedent.

Pentru ca graficul să exprime corespondența dintre valorile argumentului $x \in D$, valorile funcției $f(x)$, cît și cele ale derivatelor $f'(x)$, $f''(x)$ etc., este necesar a se întocmi un tablou al valorilor caracteristice pentru $x \in R$.

Ținînd seama de aceste recomandări, etapele de lucru sînt următoarele:

— stabilirea domeniului de definiție al funcției reale de variabilă reală și a valorilor funcției la capetele intervalelor;
— punctele de intersecție cu axele;
— punctele extreme (relative);
— punctele de inflexiune;
— asimptotele funcției;
— tabloul valorilor graficului;
— trasarea curbei reprezentative.

În cele ce urmează, vom analiza fiecare etapă în parte pentru diferite tipuri de funcții.

14.2. DOMENIUL DE DEFINIȚIE

Domeniul de definiție $f(x)$ este alcătuit din mulțimea valorilor argumentului x, pentru care funcția $f(x)$ *este reală și are sens.*

Domeniul de definiție poate cuprinde un interval $x \in D = I_1$ sau o reuniune de intervale $x \in D = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots$ În oricare din aceste cazuri, se va cerceta comportarea funcției la capetele intervalelor.

14.2.1. Funcții algebrice

Forma cea mai complexă a funcției algebrice, din acest punct de vedere, este următoarea:

$$f(x) = \sqrt[m]{\frac{P(x)}{Q(x)}} \tag{14.1}$$

Pentru a fi *reală și cu sens*, este necesar a satisface următoarele condiții:

$\frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$, pentru a fi reală, în cazul în care:

$$m = 2k(\text{par}); \tag{14.2}$$

și:

$$Q(x) \neq 0, \text{ pentru a avea sens} \tag{14.3}$$

- Dacă m este impar $(2k + 1)$, prima condiție (14.2) nu se mai pune.
- Dacă fracția nu are numitor $(Q \in Z)$, nu se pune a doua condiție (14.3).
- Dacă $m = 2k + 1$ și $Q \in Z$, nu se mai pune nici o condiție, iar domeniul de definiție este $x \in R$.

Stabilirea domeniului D, impune de fapt rezolvarea inecuației fracționare în felul următor:

$$P(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3, \ldots$$

și: (14.4)

$$Q(x) \neq 0 \Rightarrow x_1', x_2', x_3' \ldots$$

Cu soluțiile celor două ecuații, se întocmește tabela 14.1.

Tabela 14.1

x	$-\infty$	x_1		x_2		x_1'		x_3		x_2'		x_3'	$\ldots$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	$\ldots$

Domeniul de definiție va fi:

$$x \in D = [x_1, x_2] \cup (x_1', x_3] \cup (x_2', x_3') \ldots \tag{14.5}$$

Observații:

- Dacă există rădăcini multiple, se folosește artificiul și interpretarea cunoscută la studiul inecuațiilor prin care rădăcinile multiple de ordin par nu schimbă semnul funcției.

● Dacă una din rădăcini (x_i) aparține ambilor termeni ai funcției, $P(x_i) = 0$, $Q(x_i) = 0$, atunci $\frac{P(x_i)}{Q(x_i)} = \frac{0}{0}$ și este nedeterminată. În acest caz se elimină nedeterminarea și se trece în tabelă x_i numai dacă valoarea fracției este 0 sau ∞.

● Rădăcinile numitorului fac ca $f(x_j) = \pm\infty$, adică funcția să tindă spre infinit în x_j. Aceasta înseamnă că în aceste puncte funcția este tangentă la verticalele ce trec prin punctele x_j. În figura 14.1 se

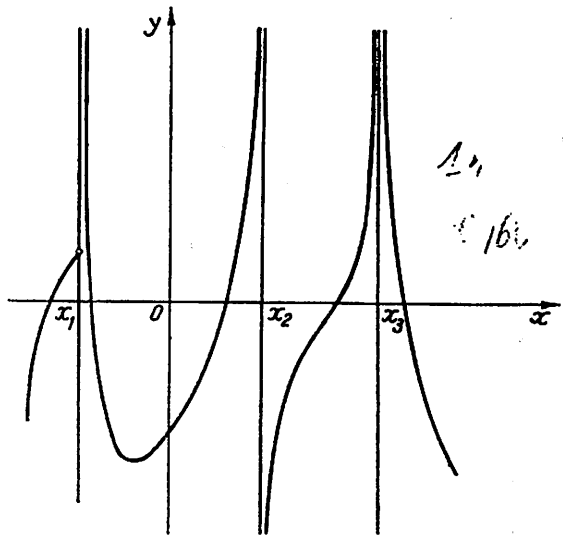


Fig. 14.1

arată cîteva cazuri de acest fel, care ilustrează necesitatea calculării limitelor laterale ale funcției în aceste puncte, capete de interval.

● Atunci cînd domeniul de definiție este nelimitat la stînga ($-\infty$) sau la dreapta ($+\infty$), trebuie să se calculeze valorile funcției și în aceste capete:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \qquad \text{și} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) \tag{14.6}$$

● Dacă funcția este o sumă de expresii iraționale:

$$f(x) = \sum_{1}^{p} \sqrt[m_i]{\frac{P_i(x)}{Q_i(x)}} \tag{14.7}$$

se stabilesc domeniile fiecărei fracții ($x_i \in D_i$) și se intersectează:

$$x \in D = D_1 \cap D_2 \cap \ldots \cap D_i \cap \ldots \cap D_q \qquad (14.8)$$

Exemple:

Să se stabilească domeniile de definiție ale următoarelor funcții algebrice:

(E_1) $\quad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

$x \in R$

(E_2) $\quad f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 + 2x - 3}}$

$P(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1;\ x_3 = -2;\ x_4 = 2$

$Q(x) = x^2 + 2x - 3 \neq 0 \Rightarrow x_1' \neq 1,\ x_2' \neq -3$

Se observă că $x_2 = x_1' = 1$ și implică o nedeterminare $\left(\frac{0}{0}\right)$. După simplificarea fracției cu $(x - 1)$, funcția devine:

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x + 3}},\ \text{cu:}\ x_1 = -1;\ x_2 = -2;\ x_3 = 2;\ x_1' \neq -3$$

Deci:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

iar:

$$x \in (-\infty, -3) \cup [-2, -1] \cup [2, \infty)$$

14.2.2. Funcții trigonometrice

Se știe că funcțiile trigonometrice sînt periodice și ca atare, funcția trece prin aceleași valori, după o perioadă (T):

$$f(x) = f(x + kT); \qquad k \in Z \qquad (14.9)$$

În consecință studiul funcției trigonometrice se va efectua numai pentru o perioadă care se determină așa cum s-a arătat în subcapitolul 9.3, astfel încît:

$$x \in D \subseteq T \qquad (14.10)$$

Stabilirea domeniului de definiție pe o perioadă se face în aceleași condiții: funcția să fie *reală și cu sens.*

În afara restricțiilor studiate la funcțiile algebrice de la punctul precedent (14.2.1), în acest caz există și următoarele:

$$f(x) = \sin x \in [-1, 1]; \; f(x) = \cos x \in [-1, 1] \tag{14.11}$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2} \tag{14.12}$$

$$f(x) = \operatorname{cotg} x \Rightarrow x \neq 2k\frac{\pi}{2} \tag{14.13}$$

Observații: În afara celor stabilite anterior, la funcțiile algebrice, trebuie precizate particularitățile funcțiilor periodice.

• Valorile lui $f(x)$ la capetele perioadei $T = [a,b]$ sînt egale: $f(a) = f(b)$, deoarece:

$$f(a) = f(a + T) = f(b) \tag{14.14}$$

• Valorile derivatei $f'(x)$ la capetele perioadei sînt egale:

$$f'(a) = f'(b) \tag{14.15}$$

din aceleași considerații. Această condiție permite racordarea curbelor succesive ale perioadelor succesive, prin tangenta comună.

14.2.3. Funcții logaritmice

• Funcția: $f(x) = \log_a(x)$; $a > 0$ și $a \neq 1$ (14.16)

are ca domeniu de definiție: $x \in (0, \infty)$.

• Funcția: $f(x) = \log_a u(x)$; $a > 0$ și $a \neq 1$ (14.17)

are domeniul definit de condiția corespunzătoare:

$$u(x) > 0 \tag{14.18}$$

• Funcția:

$$f(x) = \log_{u(x)} v(x) \tag{14.19}$$

are domeniul definit de condițiile:

$$u(x) \in (0, \infty) - \{1\} \text{ și } v(x) > 0 \tag{14.20}$$

14.2.4 Funcții exponențiale

• Funcția: $f(x) = a^x$; $a > 0$ și $a \neq 1$ (14.21)

are ca domeniu de definiție: $x \in R = (-\infty, \infty)$.

● Funcția $f(x) = a^{u(x)}$; $a > 1$ și $a \neq 1$ (14.22)

are ca domeniu de definiție, domeniul funcției $u(x)$.

● Funcția $f(x) = u(x)^{v(x)}$ (14.23)

are domeniul funcției $v(x)$ intersectat cu cel rezultat din restricția:

$$u(x) \in (0, \infty) - \{1\}$$

Exemple: Să se stabilească domeniile de definiție ale următoarelor funcții logaritmice și exponențiale:

(E_3) $$f(x) = \log \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 5x + 6}$$

$x - 2 > 0$; $x_1 > 2$; $x^2 - 5x + 6 > 0$; $\Rightarrow x_1' = 2$; $x_2' = 3$, $\Rightarrow$

$x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$ Deci: $x \in (3, \infty)$

(E_4) $$f(x) = \ln(1 - 2\cos x)$$

$1 - 2\cos x > 0$; $T = 2\pi$; $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3},\ x_2 = \frac{5\pi}{3}$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$1 - 2\cos x$	$-$	0	$+$ 0	$-$

; $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) \subset T$

În general:

$$x \in \left(2K\pi + \frac{\pi}{3},\ 2K\pi + \frac{5\pi}{3}\right);\quad K \in Z$$

14.2.5. Aplicații

● Să se stabilească domeniile de definiție ale următoarelor funcții:

(A_1) $$f(x) = x^2 + x + 1$$

$R \cdot x \in R$

(A_2) $$f(x) = \frac{2x^5 - 5x + 1}{x^4 - 4x^2 + 3}$$

$R \cdot x \in R - \{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\}$

(A_3) $\quad f(x) = \sqrt{x^4 - 5x^2 + 4}$

$R \cdot x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, \infty)$

(A_4) $\quad f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x+3}}$

$R \cdot \dfrac{x^2-4}{x+3} \geqslant 0; \quad x \in (-3, -2] \cup [2, \infty)$

(A_5) $\quad f(x) = \sqrt{\cos 3x - \sin 2x}$

R. $\cos 3x - \sin 2x \geqslant 0; \quad \cos 3x = \sin 2x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$

$$3x = 2K\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \begin{cases} 5x = 2K\pi + \dfrac{\pi}{2} = (4K+1)\dfrac{\pi}{2} \\ x = 2K\pi - \dfrac{\pi}{2} = (4K-1)\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{3}; \quad T_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi = 3\frac{\pi}{3} \Rightarrow T = 2\pi$$

$$x_1 = (4K+1)\frac{\pi}{10}; \quad x_1 = \left\{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{17\pi}{10}\right\}$$

$$x_2 = (4K-1)\frac{\pi}{2}; \quad x_2 = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$$

x	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{10}$	$\frac{13\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{10}$	2π
$f^2(x)$	$+$	0	$-$	0 $+$ 0	$-$	0 $+$ 0	$-$	0 $+$

Deci:

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{10}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{10}, 2\pi\right]$$

(A_6) $f(x) = (9 - x^2)^{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

R. $9 - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (-3, 3)$; $9 - x^2 \neq 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

$x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

Deci domeniul este: $x \in (-3,1) \cup (2,3) - \{\pm 2\sqrt{2}\}$

14.3. PUNCTELE DE INTERSECȚIE CU AXELE

Punctele de intersecție ale curbei $y = f(x)$ cu axele se obțin prin ecuațiile următoare:

— Intersecțiile cu axa ordonatelor:

$$x = 0, \quad y = \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \tag{14.24}$$

— Intersecțiile cu axa absciselor:

$$y = 0, \ f(x) = 0 \Rightarrow x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \tag{14.25}$$

soluții reale ale ecuației asociate funcției.

Punctele de intersecție vor fi:

$$\left.\begin{array}{l} - \ A(0, f(0)) \quad \text{și} \\ - \ B_1(x_1,0) \ ; \ B_2(x_2,0) \ldots B_n(x_n,0) \end{array}\right\} \tag{14.26}$$

Exemple:

Să se stabilească punctele de intersecție cu axele pentru următoarele funcții:

(E_5)

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 5}$$

R. $A\left(0, \frac{1}{5}\right)$; $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$; $B_1(-1,0)$, $B_2(1,0)$

(E_6)

$$f(x) = \ln \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 3}$$

R. $A\left(0, \ln \frac{5}{3}\right)$; $\frac{x^2 - 2x + 5}{x + 3} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 3} = 0$

$B_1(1,0)$; $B_2(2,0)$

(E_7)

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+1}{x-1}}$$

R. $A\ (0,3)$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+1}{x-1}} = 0 \Rightarrow x = 1$; $B(1,0)$

14.4. PUNCTELE EXTREME (MAXIME ŞI MINIME)

Punctele extreme se obţin prin anularea derivatei întîi şi stabilirea variaţiei semnelor acestei derivate, aşa cum s-a stabilit anterior.

Dacă derivata există pe o reuniune de intervale, se va cerceta comportarea acesteia la capetele intervalelor, pentru a găsi coeficienţii unghiulari ai semitangentelor în punctele respective.

E x e m p l e. Să se stabilească extremele următoarelor funcţii:

(E_8) $f(x) = x - 2\sin x$

$$f'(x) = 1 - 2\cos x = 0; \quad \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$x_{1,2} = 2K\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_1 = \left\{\ldots -\frac{7\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\ldots\right\};$$

$$x_2 = \left\{\ldots -\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\ldots\right\}$$

x	$-\infty \ldots -\frac{7\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3} \ldots +$
$f'(\pi)$	$+$	$0\ -$	$0\ +$	$0\ -$	$0\ +$	$0\ -\ 0\ +$

Rezultă că toate soluţiile derivatei sînt puncte de extreme:

— maxime: $\ldots -\frac{7\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \ldots \Rightarrow x_1 = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$

— minime: $\ldots -\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \ldots \Rightarrow x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$

(E_9) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 > 0$ pentru orice x.

Deşi derivata se anulează pentru $x_1 = x_2 = 1$, funcţia nu are puncte extreme, întrucît derivata nu schimbă semnul. Pentru $x = 1$, funcţia are un punct de inflexiune.

Într-adevăr, derivata a doua:

$$f''(x) = 6(x - 1) = 0 \qquad \text{— are soluţia } x = 1 \text{ —}$$

14.5. PUNCTELE DE INFLEXIUNE

Punctele de inflexiune se obţin prin anularea derivatei a doua şi stabilirea semnelor acesteia (§ 13.5.9).

Aceste puncte există sau pot exista, în afara acelora de mai sus (§ 3.4), în care tangenta care traversează curba este orizontală şi cînd se anulează simultan ambele derivate:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0$$

Punctele de inflexiune de care ne ocupăm acum, diferite de acestea, se obţin în cazul în care: $f'(x_0) \neq 0$ şi $f''(x_0) = 0$. În aceste puncte, tangenta la curbă o traversează şi are panta determinată de valoarea derivatei întîi.

E x e m p l e: Să se determine punctele de inflexiune ale următoarelor funcţii:

$(\mathbf{E}_{10})$ $\qquad f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x;\ f''(x) = -\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$(x_1 = 0,\ x_2 = \pi,\ x_3 = 2\pi,\ \text{pentru } T = 2\pi)$$

x	0		π		2π
$f''(x)$	$+\ 0$	$-$	0	$+$	$0\ -$

Punctele de inflexiune sînt:

- $x_1 = 2k\pi$, concav-convexe, cu $f'(2k\pi) = 1$;
- $x = (2k + 1)\pi$, convex-concave, cu $f'[(2k + 1)\pi] = -1$.

$(\mathbf{E}_{11})$ $\quad f(x) = x + \sin x;$

$$f'(x) = 1 + \cos x = 0;\ x = (2K \pm 1)\pi;\ (x_1 = x_2 = \pi)$$

$$f''(x) = -\sin x = 0;\ x = k\pi;\ (x'_1 = 0,\ x'_2 = \pi,\ x'_3 = 2\pi)$$

x	0		π		2π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f''(x)$	$+\ 0$	$-$	0	$+$	$0\ -$

Punctele de inflexiune sînt: $x = k\pi$

- $x = 2k\pi$, concav-convexe, cu $f'(2K\pi) = 1 + 1 = 2$
- $x = (2k + 1)\pi$, convex-concave, cu $f'[(2K + 1)\pi] = 1 - 1 = 0$

Observații:

- Punctele de inflexiune nu au aceeași importanță ca celelalte puncte caracteristice (punctele de capăt ale intervalelor, extremele sau punctele de intersecție cu axele). De aceea, nu întotdeauna este necesar a fi stabilite în graficul funcției și îndeosebi atunci cînd derivata de ordinul doi este greu de calculat sau de rezolvat.
- Punctele de inflexiune rezultă în general din grafic, o dată cu trasarea curbei, cînd se pot stabili intervalele cu puncte de inflexiune. Există și cazuri, îndeosebi pe intervalele infinite $(-\infty, a)$ și (b, ∞), cînd graficul nu le mai poate evidenția.

14.6. ASIMPTOTELE FUNCȚIEI

Funcția are trei feluri de asimptote, tangente la infinit:

14.6.1. Asimptote verticale

Dreapta $x = x_0$ este asimptotă verticală a funcției $f(x)$, dacă cel puțin una din limitele laterale în x_0 este infinită:

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = \pm \infty \text{ sau } \lim_{x \to x_0 -} f(x) = \pm \infty \qquad (14.27)$$

sau:

$$\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = \pm \infty$$

Aceste puncte se determină o dată cu domeniul de definiție.

14.6.2. Asimptote orizontale

Dreapta $y = y_0$ este asimptotă orizontală a funcției $y = f(x)$, dacă:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \text{ sau } \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0 \qquad (14.28)$$

Aceste puncte rezultă, dacă există, o dată cu determinarea punctelor de la capetele intervalelor, componente ale domeniului.

Ele pot exista numai în cazul în care există intervale de forma:

$$x \in (-\infty, a) \text{ sau } x \in (b, \infty)$$

sau:

$$x \in (-\infty, \infty) \qquad (14.29$$

14.6.3. Asimptote oblice

1°, Se spune că dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică la ramura $+\infty$ a graficului $y = f(x)$, dacă:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0 \tag{14.30}$$

Această expresie reprezintă condiția ca la $+\infty$, ordonata funcției $f(x)$ să fie egală cu a dreptei asimptotice $(mx + n)$; cu alte cuvinte, curba este tangentă asimptotei la $+\infty$.

Din 14.30 rezultă:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = n$$

sau:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - m\right] = n$$

Pentru ca n să fie finit, trebuie ca:

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m\right] = 0$$

adică:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{14.31}$$

iar:

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] \tag{14.32}$$

2°. Se spune că derivata $y = m'x + n'$ este asimptotă oblică la ramura $-\infty$ a graficului $y = f(x)$, dacă:

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (m'x + n')\ ] = 0 \tag{14.33}$$

unde:

$$m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{14.34}$$

și:

$$n' = \lim_{x\to-\infty} [f'(x) - m'x] \tag{14.35}$$

E x e m p l e:

Să se determine asimptotele funcției:

$$(\mathbf{E}_{12}) \quad f(x) = \frac{x^2 - 9x + 8}{x - 2}$$

Asimptota verticală: $x = 2$.
Asimptota orizontală: nu are, deoarece:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm \infty \text{ (nu este finită).}$$

Asimptotele oblice:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 9x + 8}{x(x-2)} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 9x + 8}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-7x + 8}{x - 2} = -7$$

Deci:

$$y = mx + n = x - 7$$

De asemenea:

$m' = m = 1$ și $n' = n = -7$ iar $y' = m'x + n' = x - 7$

În figura 14.2 este reprezentată funcția cu cele două asimptote.

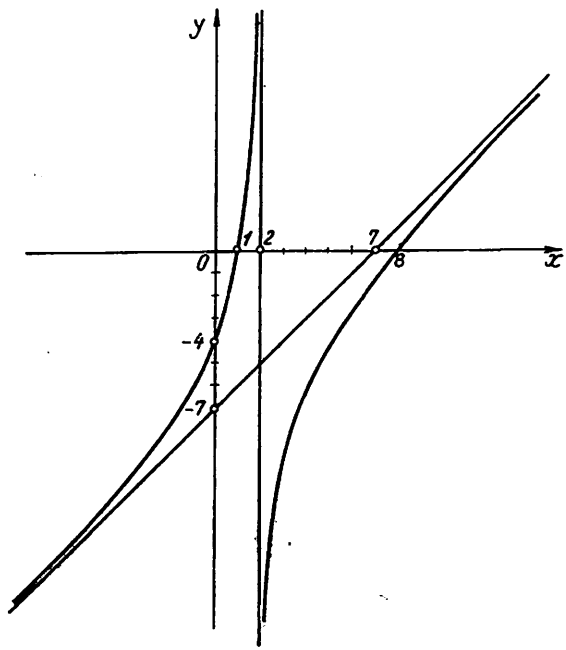


Fig. 14.2

14.7. GRAFICUL FUNCȚIEI

Așa cum s-a prezentat la început, pentru trasarea curbei reprezentative este necesar a se întocmi tabelul valorilor caracteristice, descrise mai sus.

Cu ajutorul acestor valori se reportează în plan punctele caracteristice.

Trasarea curbei prin aceste puncte, se face cu ajutorul indicațiilor suplimentare din tabelul valorilor, care precizează:

- *punctele de extrem*, în care tangentele la curbă sînt orizontale, date de derivata întîi nulă;
- *coeficienții unghiulari* ai tangentelor la curbă, la capetele intervalelor;
- *monotonia curbei*, după semnele derivatei întîi;
- *concavitatea și convexitatea*, după semnele derivatei a doua;
- *punctele de inflexiune*, date de derivata a doua nulă și tangentele în aceste puncte la curbă, ale căror coeficienți unghiulari sînt dați de valorile derivatei întîi;
- *asimptotele verticale* ($x = x_0$, $y = \pm\infty$);
- *asimptotele orizontale* ($y = y_0$, $x = \pm\infty$).

Totodată, se folosesc și asimptotele oblice, care se determină separat de tabelul valorilor.

Aceste indicații sumare se sprijină pe expunerea din acest capitol, care stabilește elementele de principiu și de detaliu.

E x e m p l e:

Să se reprezinte grafic următoarele funcții:

$$(\mathbf{E}_{13}) \quad f(x) = \frac{x^2 - 9x + 8}{x - 2}$$

- Domeniul de definiție: $x \in R - \{2\}$
- Asimptota verticală: $x = 2$
- Capetele intervalelor:

$$x = \pm\infty, \quad y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 9x + 8}{x - 2} = \pm\infty$$

- Intersecțiile cu axele:

$$x = 0, \qquad y = f(0) = -4$$

$$y = 0, \quad \Rightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

● Extremele:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 10}{(x-2)^2} > 0$$

pentru orice x, deoarece $x^2 - 4x + 10 = 0$ are rădăcini complexe, iar $(x-2)^2$ este pătrat perfect.

Deci, nu avem extreme.

● Punctele de inflexiune:

$$f''(x) = -\frac{12}{(x-2)^3}, \text{ nu are soluții.}$$

● Asimptotele oblice au fost determinate la exercițiul E_{12}:

$y = x - 7$, pentru ambele ramuri ($\pm\infty$).

Tabloul valorilor:

x	$-\infty$		0		1		2		8		$+\infty$
$f'(x)$	+		+		+		+		+		+
$f''(x)$	+		+		+		−		−		−
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↗	0	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Observații:

● Derivata întîi, prin semnul său, servește la stabilirea monotoniei funcției care se marchează cu săgeți crescătoare cînd $f'(x)$ este pozitivă și invers.

Valorile lui $f(x)$ corespund sensului săgeților; cînd nu există această corespondență, înseamnă că s-au făcut greșeli de calcul sau că tabloul este întocmit greșit: nu respectă ordinea crescătoare a valorilor lui x pe domeniul de existență sau s-a omis trecerea anumitor valori caracteristice.

● Asimptota verticală ($x = 2$) se trece în tabel și se barează valorile care devin infinite: $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$.

Pentru a stabili valorile lui $f(x)$ la stînga și la dreapta asimptotei, trebuie calculate limitele laterale în acest punct. Totuși, în general, se pot folosi indicațiile tabloului prin semnul derivatei întîi. În cazul de față, la stînga lui 2, funcția crește, deci tinde către $+\infty$; la dreapta lui 2, funcția crește spre 0, deci vine de la $-\infty$.

● Derivata a doua precizează că pe intervalul $(-\infty,2)$ funcția este concavă (ține apa), iar pe intervalul $(2,\infty)$ este convexă (nu ține apa).

● Asimptota oblică se trece în grafic, prin coordonatele a două puncte de intersecție: $(x = 0,\ y = -7)$ și $(y = 0,\ x = 7)$.

Folosind tabloul valorilor, punctele reportate în plan, asimptota oblică și indicațiile de mai sus, se trasează curba ca în figura 14.2.

$$(\mathbf{E}_{14})\quad f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x^2-x-2}}$$

● Domeniul:

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$f^2(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

$$x \in (-1,2) \cup [3,\infty)$$

Asimptotele verticale: $x = -1$; $x = 2$.

● Capetele intervalelor:

$x = -1,\quad y = +\infty$

$x = 2,\quad y = +\infty$

$x = 3,\quad y = 0$

$x = +\infty,\quad y = 0$, asimptota orizontală.

● Intersecția cu axele:

$$x = 0,\ y = \sqrt{3/2} = \sqrt{6/2}$$

$$y = 0,\ x = 3$$

● Extremele:

$$f'(x) = \frac{-x^2+6x-5}{2(x^2-x-2)^2\sqrt{\frac{x-3}{x^2-x-2}}} = 0$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = 5 \Rightarrow y_1 = f(1) = 1;\quad y_2 = \frac{1}{3}$$

● Punctele de inflexiune: — renunțăm din cauza dificultăților de calcul.

● Asimptote oblice: — nu are.

● Tabloul valorilor:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		$-$		0	$+$			$+$		$-$		
$f(x)$		∞	$\searrow$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\searrow$		1	$\nearrow$		0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$		0
							m					M			

Curba reprezentativă este cea din figura 14.3.

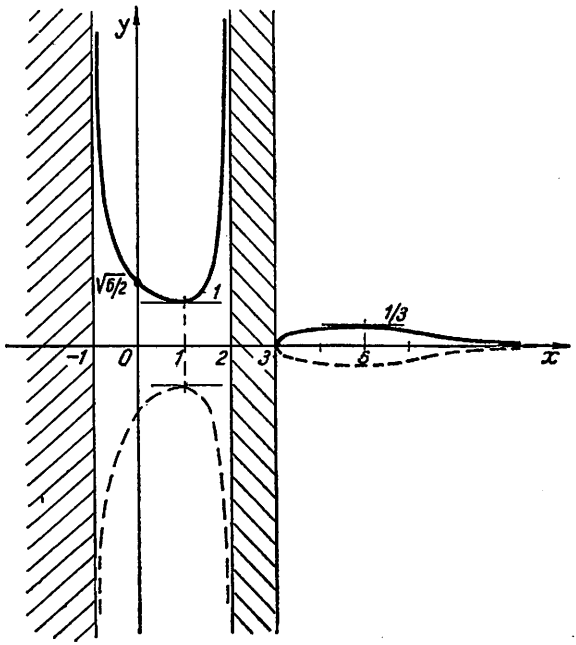


Fig. 14.3

Observații:

● În punctele de capăt (— 1) și (2) curba este asimptotică la două verticale, avînd $f'(x) = \infty$.

● În punctul $x = 3$, $y = 0$, trebuie să calculăm coeficientul unghiular al tangentei la curbă:

$$f'(3) = \infty$$

Deci tangenta este verticală în $x = 3$.

● Funcția:

$$f(x) = -\sqrt{\frac{x-3}{x^2-x-2}}$$

este curba simetrică a celei din figura 14.3, față de axa OX, desenată punctat.

(E_{15})

$$f(x) = \cos x \cdot e^{\sin^2 x}$$

● Domeniul de definiție este $x \in R$, dar vom efectua studiul pe o perioadă $T = 2\pi$, $x \in [0,2\pi]$, deoarece funcția este periodică.

● Capetele intervalului:

$x = 0$ sau $x = 2\pi$, $y = 1$

● Intersecția cu axele:

$f(x) = 0$, $\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$

● Extremele:

$$f'(x) = -\sin x \cdot e^{\sin^2 x} + 2 \sin x \cos^2 x \cdot e^{\sin^2 x} =$$
$$= \sin x \cdot e^{\sin^2 x} \cdot (2\cos^2 x - 1) = \sin x \cdot \cos 2x \cdot e^{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0;\ x = k\pi \quad \begin{cases} x_1' = 0, & y_1 = 1 \\ x_2' = \pi, & y_2 = -1 \\ x_3' = 2\pi, & y_3 = 1 \end{cases}$$

$$\cos 2x = 0 = \cos\frac{\pi}{2};\ 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$x_4' = \frac{\pi}{4};\ y_4' = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e};\ x_5' = \frac{3\pi}{4},\ y_5' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e};$$

$$x_6' = \frac{5\pi}{4},\ y_6' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e};\ x_7' = \frac{7\pi}{4},\ y_7' = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}$$

● Punctele de inflexiune. — Renunțăm la derivata a doua, a cărei ecuație este greoaie, mai ales că inflexiunile rezultă din grafic.

● Asimptote oblice nu are.

● Tabloul valorilor:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f'(x)$	0	$+$ 0	$-$	0	$+$	0 $-$ 0	$+$	0 $-$	0
$f(x)$	1	$\nearrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}$	$\searrow 0$	$\searrow -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}$	$\nearrow -1$	$\searrow -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}$	$\nearrow 0$	$\nearrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}$	$\searrow 1$
		M		m	M	m		M	

● Curba reprezentativă este cea din figura 14.4.

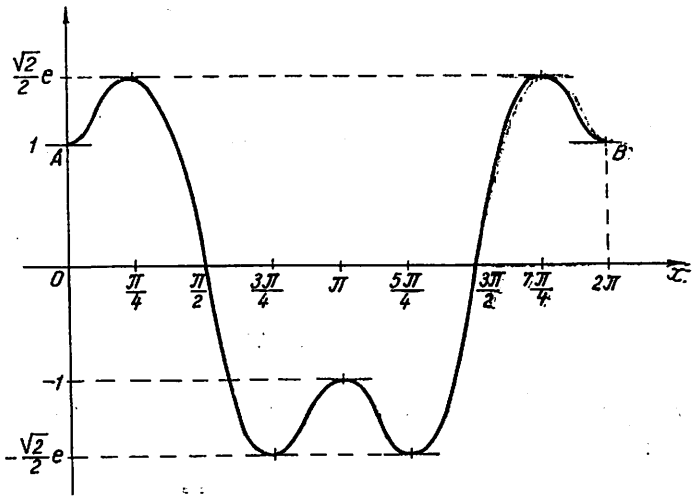


Fig. 14.4

Observaţii:

● Punctele de la capetele perioadei satisfac condiţiile funcţiei periodice:

— au aceleaşi ordonate: $f(0) = f(2\pi) = 1$

— au aceleaşi derivate: $f'(0) = f'(2\pi) = 0$

În aceste condiţii, curba se repetă la stînga şi la dreapta în mod identic pe perioade succesive, racordîndu-se în punctele A şi B.

● Punctele de inflexiune nu se pot determina riguros, dar rezultă cu precizie, că există, şi anume, în următoarele intervale:

$$\left(0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right), \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right), \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right).$$

14.8. APLICAŢII

● Să se studieze grafic următoarele probleme artileristice:

(A_7) *Profilul interior al proiectului*, dat de ecuaţia:

$$y = \frac{AH}{2\pi rC} \cdot e^{\frac{A\delta}{c}x}$$

unde A, H, r, C, δ, c sînt parametri constanţi hotărîţi de calibru, metal, condiţii balistice etc; y grosimea secţiunii la distanţa x de la ogivă.

R. Se exprimă astfel: $y = ae^{bx}$; grosimea proiectilului variază după o exponențială ca în figura 14.5.

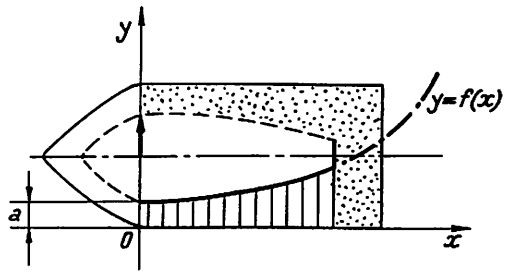


Fig. 14.5

(A_8). *Legea de distribuție normală continuă a abaterilor* (legea lui Gauss):

$$P(z) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2z^2}$$

unde: $h = 0{,}477/Ap$ este o constantă, Ap abaterea probabilă a dispersiei rezultatelor (tabla de tragere).

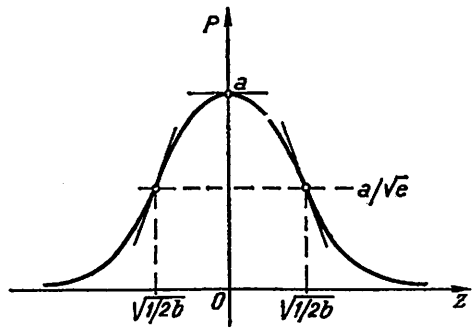


Fig. 14.6

R. $P(z) = ae^{-bz^2}$; legea împrăștierii (*v.* regulament *A*8, art. 23) este cea din figura 14.6, obținută prin reprezentarea funcției de mai sus, conform tabloului de valori.

z	$-\infty$		$-\sqrt{1/2b}$		0		$\sqrt{1/2b}$		$+\infty$
$P'(z)$			$+$		0		$-$		
$P''(z)$	$+$		0		$-$		0		$+$
$P(z)$	0	$\nearrow$	$a/\sqrt{e}$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$a/\sqrt{e}$	$\searrow$	0
					M				

● Să se reprezinte grafic următoarele funcţii algebrice:

(A_9) $f_1(x) = x^2 - 3x + 2$ R. Figura 14.7

(A_{10}) $f_2(x) = (x^2 - 3x + 2)^2$ R. Figura 14.8.

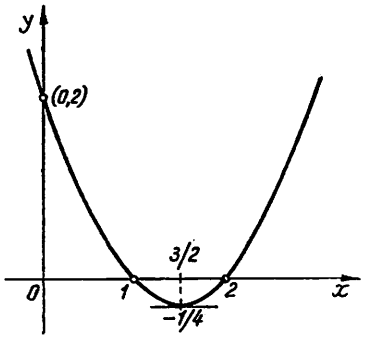


Fig. 14.7

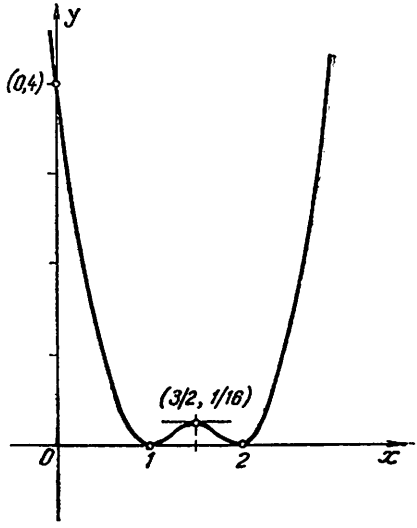


Fig. 14.8

(A_{11}) $f_3(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ R. Fig. 14.9; $f_1' = f_2' = \infty$; $f''_{(x)} < 0$.

(A_{12}) $f_4(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$ R. Fig. 14.10; $f'_{(1)} = f'_{(2)} = \infty$; $f''_{(x)} > 0$

(A_{13}) $f_5(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2}, & x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty) \\ -\sqrt{-x^2 + 3x - 2}, & x \in (1,2) \end{cases}$ R. figura 14.11.

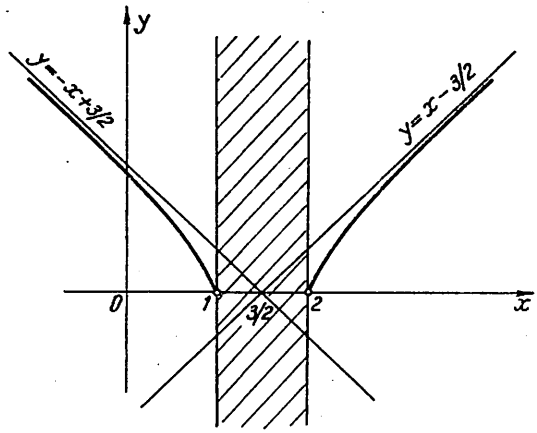


Fig. 14.9

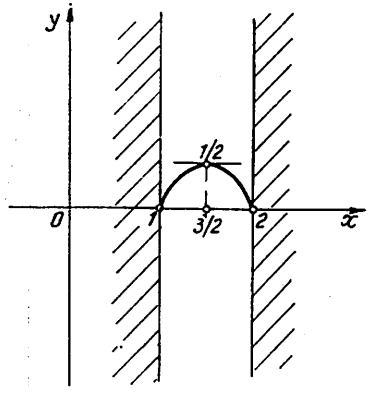


Fig. 14.10

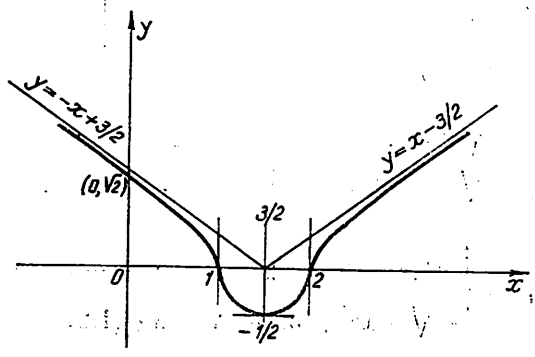


Fig. 14.11

(A_{14}) $f_6(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$

R. Curba este de tip parabolic (figura 14.12), similară cu cea din figura 14.7 (A_9), cu deosebirea că:

$$f_6(x) < f_1(x) \quad \text{pentru } x > 0$$
$$f_6(x) = f_1(x) \quad \text{pentru } x = 0$$
$$f_6(x) > f_1(x) \quad \text{pentru } x < 0$$

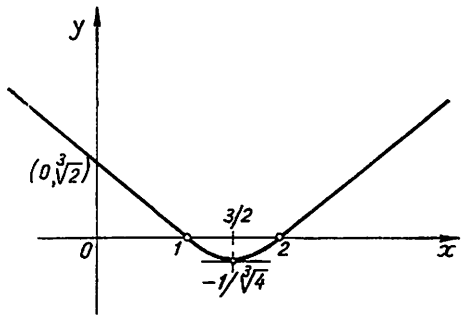


Fig. 14.12

Cu alte cuvinte, curbele $\sqrt[2k+1]{f(x)}$ sînt similare curbelor $f(x)$ dar mai aplatisate decît acestea.

● Să se reprezinte grafic următoarele funcţii fracţionare:

(A_{15}) $f_1(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ — **R.** Figura 14.13.

(A_{16}) $f_2(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x-1}$ — **R.** Figura 14.14; $y = x + 3$ asimptotă oblică.

(A_{17}) $f_3(x) = \dfrac{(x+1)}{(x-1)^2}$ — **R.** Figura 14.15.

(A_{18}) $f_4(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ — **R.** Figura 14.16.

(A_{19}) $f_5(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$ — **R.** Figura 14.17.

(A_{20}) $f_6(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$ — **R.** Figura 14.18.

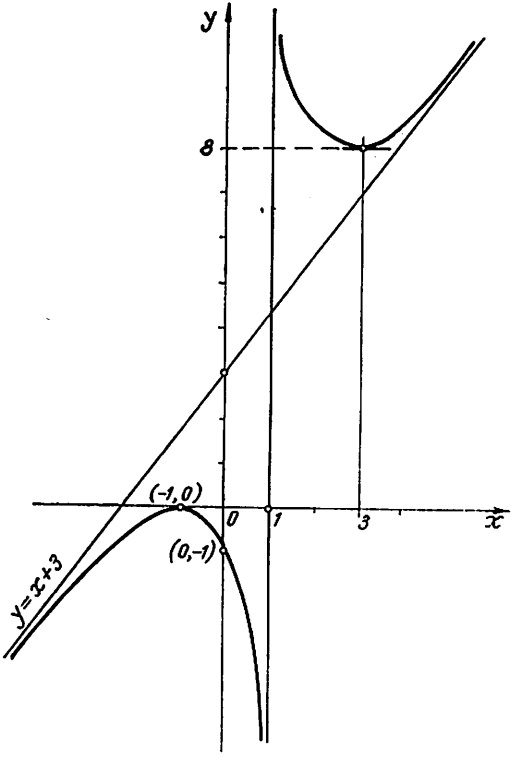


Fig. 14.14

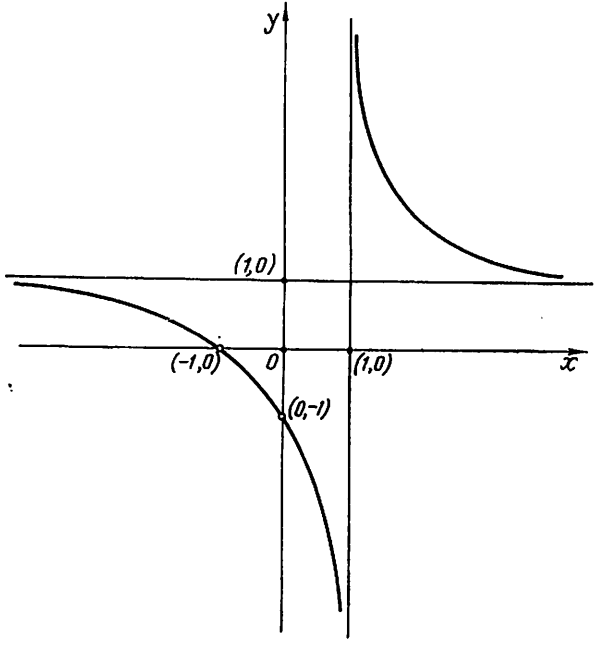


Fig. 14,13

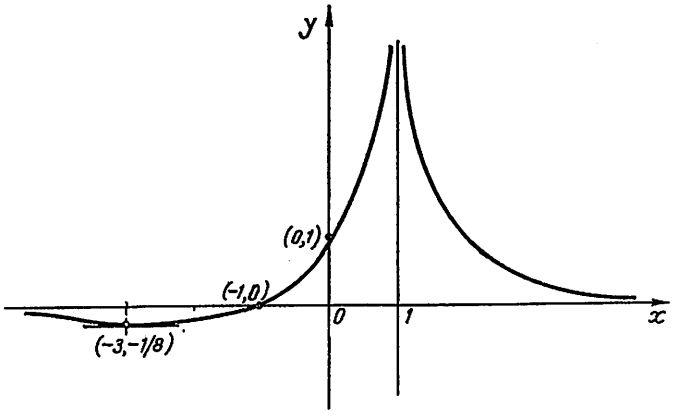


Fig. 14.15

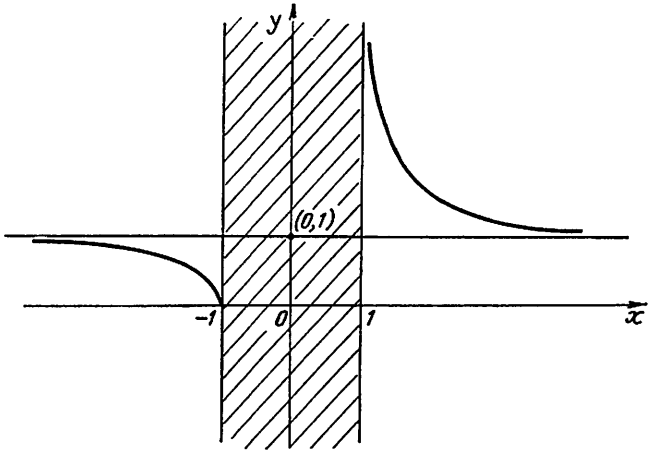


Fig. 14.16

● Să se reprezinte grafic următoarele funcţii exponenţiale şi logaritmice:

(A_{21}) $f_1(x) = e^{x-1}$ R. Figura 14.19.

(A_{22}) $f_2(x) = xe^{x-1}$ R. Figura 14.20.

(A_{23}) $f_3(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x}$ R. Figura 14.21.

(A_{24}) $f_4(x) = e^{1-x}$ R. Figura 14.22.

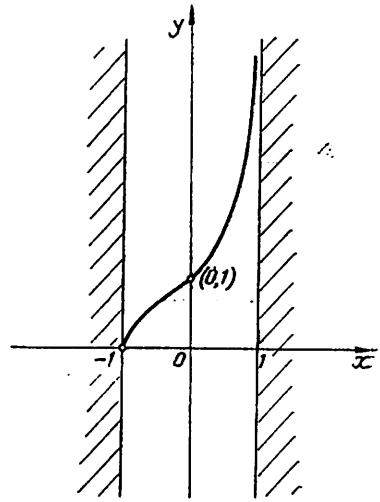


Fig. 14.17

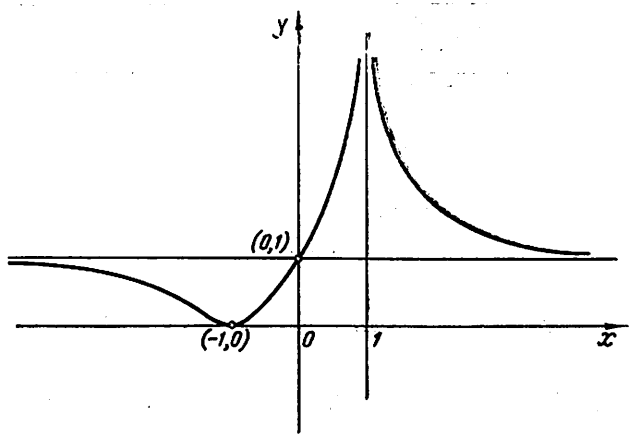


Fig. 14.18

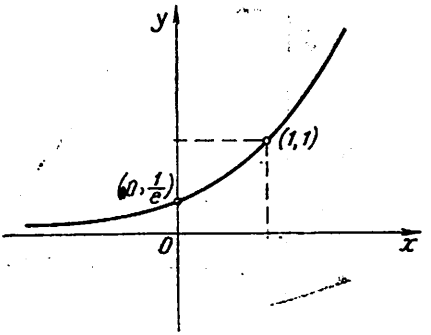


Fig. 14.19

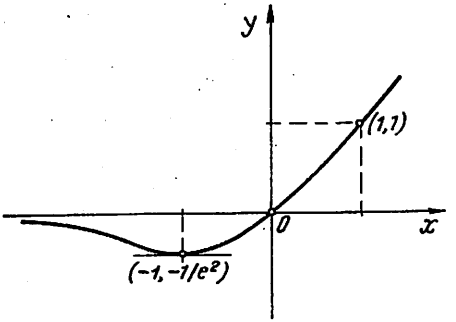


Fig. 14.20

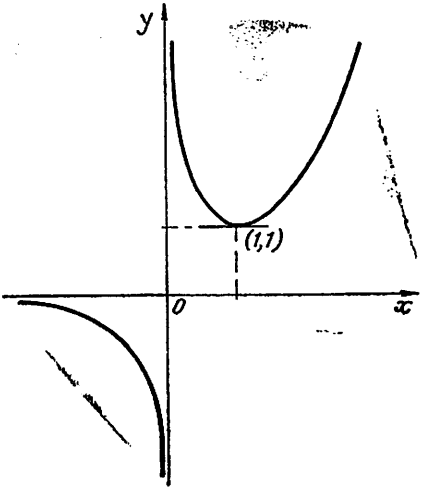


Fig. 14.21

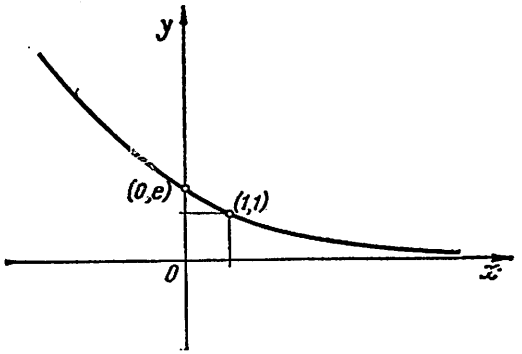


Fig. 14.22

$(A_{25})\ f_5(x) = e^{1-x} \cdot \sin x$

R. $x \in R$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty \sin(-\infty) = \pm\infty$, deoarece

$\sin(-\infty) \in [-1, 1]$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$; $f'(x) = e^{1-x}(\cos x - \sin x)$;

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi + \pi/4$; $x = 0$, $f(0) = 0$; $f(x) = 0$, $\Rightarrow$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$. Tabloul valorilor şi figura 14.23:

x	$-\ldots\infty\ -2\pi\ -\frac{7\pi}{4}\ -\pi\ -\frac{3\pi}{4}\ 0\ \frac{\pi}{4}\ \pi\ \frac{5\pi}{4}\ 2\pi\ldots\infty$
$f'(x)$	$+\ 0\ -\ 0\ +\ 0\ -\ 0\ +$
$f(x)$	$\pm\infty\ldots 0\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^1\ +\frac{7\pi}{4}\ 0\ -\frac{\sqrt{2}}{2}e^1\ +\frac{3\pi}{4}\ 0\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^1\ -\frac{\pi}{4}\ 0\ -\frac{\sqrt{2}}{2}e^1\ -\frac{5\pi}{4}\ 0\ldots 0$

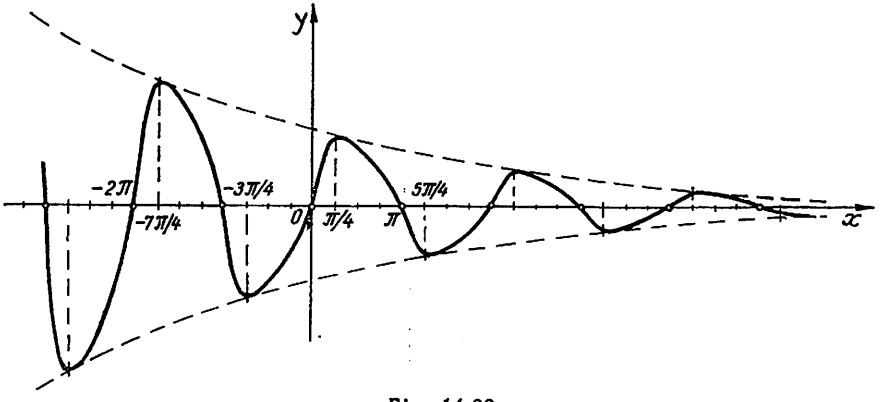


Fig. 14.23

(A_{26}) $f(x) = \ln \dfrac{x+1}{x-1}$ R. Figura 14.24

(A_{27}) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ R. Figura 14.24

● Să se reprezinte grafic următoarele funcţii trigonometrice

(A_{28}) $f(x) = \sin^2 x + 2\cos x$ R. Figura 14.25

Fig. 14.24

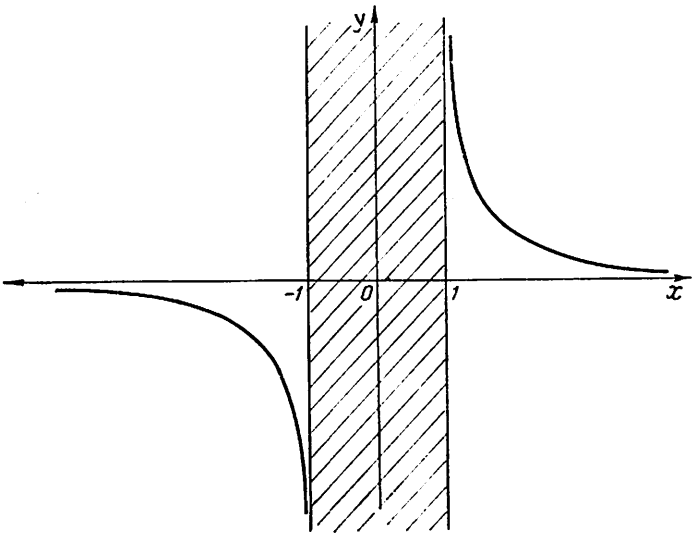
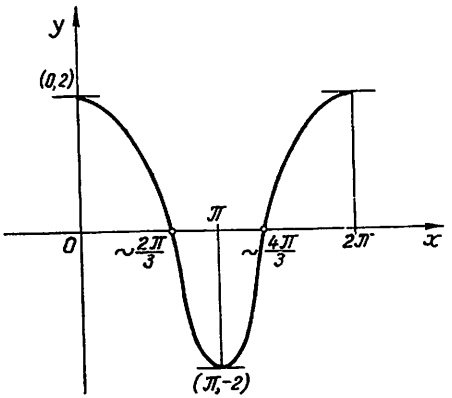


Fig. 14.25



(A_{29}) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x - \sin 2x}{\cos^2 x}$ R. Figura 14.26

(A_{30}) Se dă funcția: $f(x) = \ln(1 + 4x^2)$ și se cere:

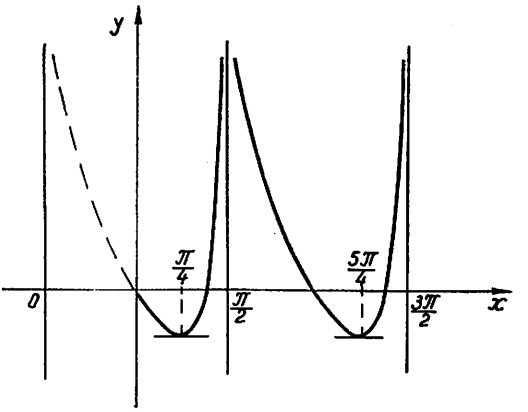


Fig. 14.26

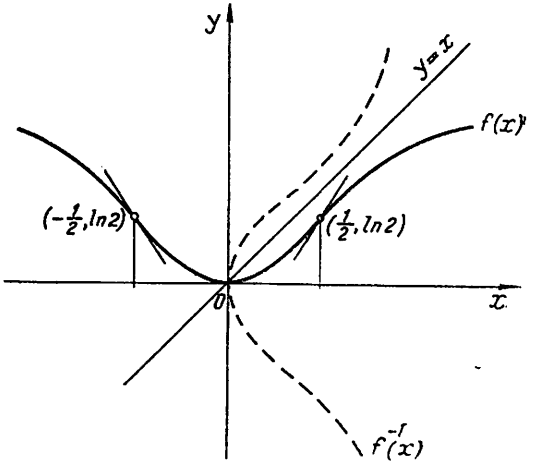


Fig. 14.27

— domeniul de definiție, intervalele de monotonie și funcția inversă pe aceste intervale;

— reprezentarea grafică a funcției și a celor inverse.

R. $x \in R$; $f'(x) < 0$ pentru $(-\infty, 0) \Rightarrow$ strict monotonă (descrescătoare); $f'(x) > 0$ pentru $(0, \infty) \Rightarrow$ strict monotonă (crescătoare). $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\sqrt{e^y - 1}$ pe $[0, \infty)$ și $f^{-1}(y) = -\frac{1}{2}\sqrt{e^x - 1}$ pe $(-\infty, 0)$. Graficele sînt cele din figura 14.27, unde

$$f^{-1}_{(x)} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{e^x - 1}$$

sînt simetricele lui $f(x)$ față de prima bisectoare.

CAPITOLUL 15

FUNCȚII ASOCIATE. ECUAȚII

15.1. REZOLVAREA ECUAȚIILOR

Ecuațiile au fost studiate în capitolele 8, 9, 10 cu mijloace algebrice.

Folosind funcțiile asociate ecuațiilor și cunoștințele prezentate despre teoria funcțiilor, se poate lărgi arsenalul mijloacelor de investigare și al metodelor de rezolvarea ecuațiilor.

În cele ce urmează se vor prezenta noi metode în acest sens.

15.1.1. Ecuații algebrice de grad superior

Pentru rezolvarea ecuațiilor algebrice de grad superior, ireductibile la tipuri ce pot fi rezolvate prin metode clasice, s-a indicat folosirea mașinilor electronice de calcul.

Studiul funcțiilor asociate permite determinarea aproximativă a rădăcinilor prin metode analitice și grafice.

1. *Metodele analitice* constau în interpolarea rădăcinii pe un interval și reducerea acestuia pînă la aproximația dorită.

În acest sens cunoaștem *metoda mediei*, prin care se calculează succesiv $f(c)$, unde $c = \frac{a+b}{2}$, atunci cînd $f(a) \cdot f(b) < 0$. Se știe că dacă $f(a)$ și $f(b)$ sînt de semne contrarii, între a și b există ce puțin o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$.

Metoda mediei este simplă și ușor de reținut; de aceea este și foarte des utilizată. Înjumătățirile succesive ale intervalelor pot duce mai repede sau mai încet la rezultat, după alura curbei pe interval.

Pentru a ajunge mai repede la soluție, s-au stabilit mai multe metode de interpolare: metoda tangentelor a lui Newton, metoda coardelor și metoda iterației.

În cele ce urmează vom prezenta numai una din aceste metode, complementară metodei mediei:

1. *Metoda coardelor*. Curba $f(x)$ pe intervalul $[a, b]$, satisface condiția:

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \tag{15.1}$$

astfel încît pe acest interval există cel puțin o soluție a ecuației.

Se aproximează arcul de curbă $(\widehat{AB})$ al intervalului $[a, b]$ cu un segment de dreaptă $(\overline{AB})$, care intersectează axa absciselor în C, apropiat de x_0 (fig. 15.1).

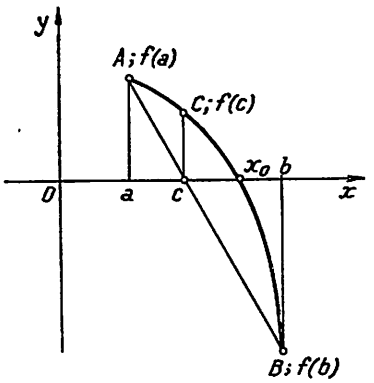


Fig. 15.1

În această situație, punctul C are abscisa:

$$x = a + \overline{ac}, \quad \text{unde:}$$

$$\frac{ac}{bc} = \frac{f(a)}{f(b)}$$

sau:

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{f(a)}{f(b)} \Rightarrow x = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b) - f(a)} = c \tag{15.2}$$

Metoda constă în a determina valoarea lui $c \in [a, b]$ și apoi a lui $f(c) \lesssim 0$, creînd două intervale: (a, c) și (c, b).

Unul din acestea satisface condiția 15.1, în care se continuă metoda pînă la o valoare x (15.2) cu un număr de zecimale impus.

E x e m p l u. Să se calculeze rădăcinile reale ale ecuației:

(E_1) $$3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

Pentru a stabili numărul rădăcinilor reale și intervalele în care se găsesc, folosim șirul lui Rolle.

$$f'(x) = 9x^2 + 4x + 2 = 0;\ x_{1,2} \in C \text{ (complexe)}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Ecuația are o singură rădăcină reală pe intervalul nelimitat: $x_0 \in (-\infty, \infty)$. Pentru a-l micșora, calculăm limitele rădăcinilor.

— limita superioară: $L = \frac{1}{2}$

— limita inferioară: $L' = -\frac{2}{3}$

Deci

$$x_0 \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right).$$

Într-adevăr:

$$f(-2/3) = -7/3 < 0 \text{ și}$$
$$f(1/2) = 7/8 > 0$$

Interpolăm după metoda coardei

$$x = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b) - f(a)} = -\frac{2}{3} - \frac{\frac{7}{6}\left(-\frac{7}{3}\right)}{\frac{7}{8} + \frac{7}{3}} = -\frac{2}{11} = c$$

iar:

$$f(c) = f\left(-\frac{2}{11}\right) \approx -1{,}3 < 0$$

Deci:

$$x_0 \in \left(-\frac{2}{11}, \frac{1}{2}\right)$$

Se calculează din nou

$$x = -\frac{2}{11} - \frac{\frac{15}{11}(-1{,}3)}{\frac{7}{8} + 1{,}3} \approx 0{,}2 = d$$

iar:

$$f(d) \approx -0,5 < 0 \text{ și } x_0 \in (0,2;\ 0,5)$$

Se calculează (15.2):

$$x = 0,2 - \frac{0,3\,(-0,5)}{\frac{7}{8} + 0,5} = 0,31 = h$$

iar:

$$f(h) \approx -0,10 < 0 \text{ și } x_0 \in (0,31;\ 0,50) \text{ etc.}$$

2. *Metodele grafice*, care servesc la rezolvarea ecuațiilor cu ajutorul funcțiilor, constau în obținerea punctelor de intersecție a două curbe.

Astfel: $y = f(x) = 0$ se descompune în două funcții:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0 \qquad (15.3)$$

Evident că exprimarea funcției $f(x)$ ca o diferență se poate face într-o infinitate de moduri. De aceea, se va alege o astfel de descompunere, încît funcțiile componente $f_1(x)$ și $f_2(x)$ să poată fi reprezentate ușor în grafic (fig. 15.2).

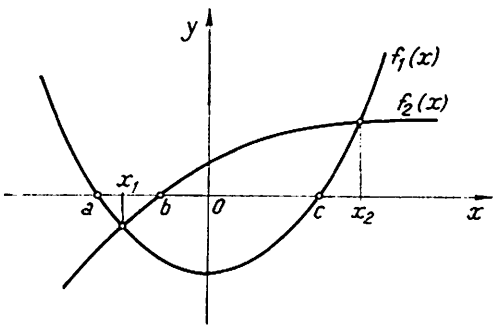


Fig. 15.2

Punctele lor de intersecție au ca abscise tocmai rădăcinile ecuației (x_1, x_2,...).

Tot din grafic se obțin intervalele în care acestea există:

$$x_1 \in (a,\ b)\ ;\ x_2 \in (c,\ \infty) \qquad (15.4)$$

astfel că metoda grafică servește atît la stabilirea numărului rădăcinilor reale, substituind șirul lui Rolle cînd acesta nu poate fi stabilit, cît și la determinarea intervalelor, cînd se poate aplica o metodă analitică pentru obținerea lor cu precizia dorită.

E x e m p l u. Să se rezolve grafic ecuația precedentă:

$$(E_2) \qquad 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

Se poate scrie:

$$f(x) = x^2(3x + 2) - (1 - 2x) = 0$$

unde:

$$f_1(x) = x^2(3x + 2) \text{ și } f_2(x) = 1 - 2x$$

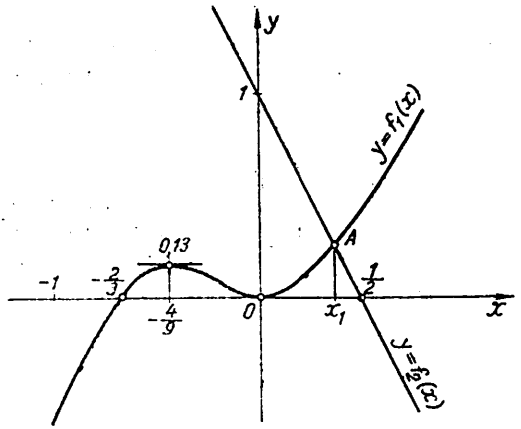


Fig. 15.3

În grafic, aceste funcții arată că în fig. 15.3, din care rezultă:
— ecuația are o singură rădăcină reală;
— rădăcina reală se găsește în intervalul: $x \in (0,1/2)$.

15.1.2. Discuția ecuațiilor parametrice

S-au studiat ecuațiile parametrice și s-au stabilit metode pentru discuția rădăcinilor, după valorile unuia sau a mai mulți parametri.

Analiza matematică permite dezvoltarea acestui capitol prin metode, care pot acoperi cazuri mai variate și mai dificile.

Una din aceste metode este cea a lui Rolle (§ 13.5.2), al cărui șir precizează numărul rădăcinilor reale și intervalele pe care se găsesc. Această metodă este aplicabilă numai în cazurile în care derivata funcției asociate este ușor de rezolvat.

De aceea, ori ce altă metodă nouă este utilă în acest domeniu de investigare. Cea mai reprezentativă este metoda grafică, prin care

funcția asociată ecuației $f(x, m) - m$ fiind parametrul — se descompune în două funcții de felul următor:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x, m) = 0$$

În acest caz, funcția $f_2(x, m)$ reprezintă un fascicul de curbe $f_{2i}(x, mi)$ ca în fig. 15.5, după valorile date lui $m = m_i = \{m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots\}$

Studiind graficul funcției $f_1(x)$ și a fasciculului $f_{2i}(x)$, se stabilesc concluzii, ca în exemplul ales în fig. 15.4:

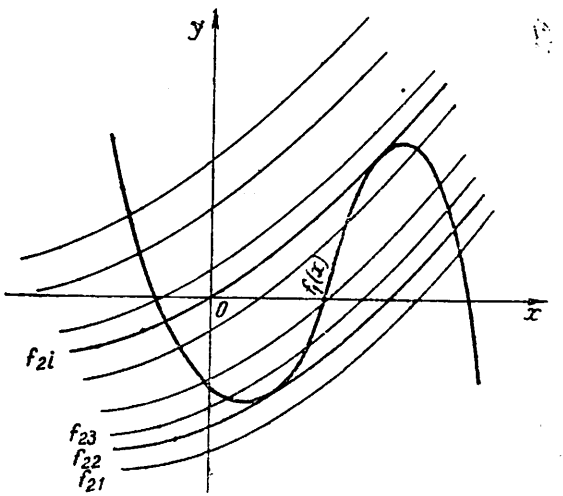


Fig. 15.4

— pentru $m \in (-\infty, m_2)$: o rădăcină reală, pentru că cele două funcții f_1 și f_{2i} au cîte un singur punct comun (de intersecție):

— pentru $m = m_2$: trei rădăcini reale, una fiind dublă, pentru că unul din punctele comune este dublu (punct de tangență);

— pentru $m \in (m_2, m_i)$: trei rădăcini reale, fiindcă au trei puncte distincte de intersecție;

— pentru $m \in (m_i, \infty)$: o rădăcină reală.

E x e m p l u. Să se discute ecuația cu un parametru:

$$(E_3)\ x^2 - 4x + 3 - m = 0$$

Se formează funcția:

$$f(x) = (x^2 - 4x + 3) - (m) = 0$$

unde:

$$f_1(x) = x^2 - 4x + 3 \text{ şi } f_2(x) = m$$

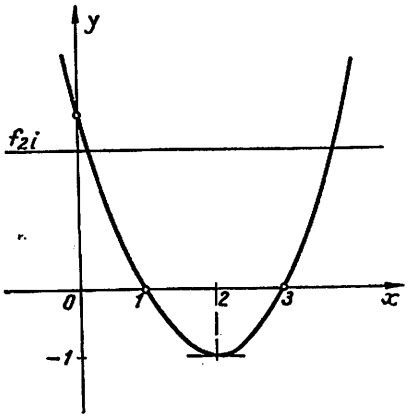


Fig. 15.5

În graficul din fig. 15.5, se obţin concluziile următoare:

m	Concluzii
$-\infty$	nici o rădăcină reală
-1	două rădăcini reale şi egale
$+\infty$	două rădăcini reale

Aici se încheie analiza matematică, strict necesară ofiţerului de artilerie. Cu acest fond aperceptiv se poate aborda calculul integral şi problemele esenţiale ale tragerilor de artilerie: balistică interioară, balistică exterioară, precum şi teoria autorului (RO) privind reglajul tragerilor prin observarea sensului spargerilor (v. ciclul de articole din Buletinul Academiei militare).

PARTEA A PATRA

Geometrie

CAPITOLUL 16

NOȚIUNI FUNDAMENTALE

16.1. INTRODUCERE

Geometria se numără printre cele mai vechi creații ale geniului omenesc. Apariția ei a fost condiționată de necesități practice, de cercetarea experimentală a formelor și relațiilor spațiale ale corpurilor — măsurarea loturilor de pămînt, a capacității vaselor, a reprezentării schematice, din linii drepte sau curbe a formelor și obiectelor înconjurătoare.

Studierea formelor obiectelor din natură, a constituit în cadrul unui îndelungat proces de abstractizare, originea concepției geometrice a punctelor, liniilor, suprafețelor și volumelor care asociate după asemănarea acestor forme au dat naștere figurilor geometrice.

Geometria se ocupă cu studiul proprietăților figurilor și al relațiilor care există între ele, operînd cu noțiuni primare (simple) cum sînt: clasă, mulțime, punct, dreaptă, plan, suprafață, volum.

O porțiune a spațiului mărginită din toate părțile se numește *volum* Partea comună la două regiuni vecine ale spațiului constituie ceea ce noi numim *suprafață* (să ne imaginăm o foaie de hîrtie a cărei grosime se micșorează indefinit).

Partea comună a două porțiuni vecine ale unei suprafețe se numește *linie*. Ea mai poate fi definită și ca intersecția a două suprafețe. Linia geometrică nu are lățime. Linia cea mai simplă este linia dreaptă. Imaginea ei ne este dată de un fir întins. Linia formată din porțiuni de linii drepte se numește linie frîntă. Linia care nu este nici dreaptă și nici frîntă se numește linie curbă.

Partea comună a două porțiuni vecine ale unei linii se numește *punct*. Punctul nu are nici o dimensiune și poate fi definit și ca intersecția a două linii care se întîlnesc.

Orice linie conține o infinitate de puncte. Putem deci spune că o *dreaptă este o clasă (mulțime) formată din o infinitate de puncte și este complet determinată de oricare două puncte ale sale.*

Suprafaţa nemărginită a clasei tuturor punctelor dreptelor care unesc două puncte din această suprafaţă se numeşte *plan*. Astfel spus, *se numeşte plan* acea suprafaţă nemărginită care conţine în întregime în ea, orice dreaptă care uneşte două puncte ale suprafeţei.

Dacă se poate considera că linia este generată de un punct care se deplasează pe ea, tot aşa putem afirma că un plan poate fi generat de o linie dreaptă care se mişcă.

Nu toate punctele se află în acelaşi plan.

Considerînd o mulţime finită de plane, există o infinitate de puncte care nu sînt conţinute în aceste plane.

O asociere oarecare de puncte, linii, plane, suprafeţe şi volume constituie ceea ce se numeşte *figură*. Rezultatul studiului asupra figurilor este exprimat de geometrie prin *propoziţii*. Cunoaştem că o propoziţie cuprinde *o ipoteză* (totalitatea condiţiilor de situaţie) şi *o concluzie* ce exprimă fenomenul care are loc în mod necesar în situaţia creată. Parte din propoziţiile cu care operează geometria sînt considerate evidente şi poartă numele unele de *axiome* iar altele de *postulate*.

Iată cîteva postulate şi axiome, aşa cum au fost ele formulate de Euclid în celebra sa „Elemente".

Postulate

1. Se cere ca, de la orice punct să se poată duce o linie dreaptă la orice alt punct;
2. Şi orice dreaptă limitată să se poată prelungi nelimitat în linie dreaptă;
3. Si din orice centru şi cu orice rază să se poată descrie un cerc;
4. Şi toate unghiurile drepte să fie egale între ele.

Axiome

1. Cele egale cu aceeaşi, sînt egale şi între ele;
2. Şi dacă la egale se adună egale, cele obţinute sînt egale;
3. Şi cele care coincid una cu alta sînt egale între ele;
4. Şi întregul este mai mare decît o parte a sa;
5. Două puncte aparţin unei drepte şi numai uneia singure;
6. Dacă două plane au un punct comun, atunci ele au şi al doilea punct comun;
7. Orice figură poate fi mutată în spaţiu fără să-şi schimbe forma şi mărimea;
8. Figuri egale se numesc acelea care prin suprapunere coincid.

În geometrie se utilizează însă și propoziții a căror exactitate trebuie dovedită, numite *teoreme*. O consecință imediată a unei teoreme se numește *corolar*.

Propoziția pregătitoare care are drept scop ușurarea demonstrației altei propoziții ce o urmează constituie ceea ce numim *lema*.

16.2. FIGURI GEOMETRICE

Am reținut că observarea obiectelor sau corpurilor materiale din natură ne dau primele noțiuni de geometrie: volum, suprafață, linie, punct. Porțiunea din spațiu ocupată de un obiect (corp) se numește *volumul* obiectului (corpului) respectiv. Acea parte a obiectului (corpului) care îl separă pe acesta de mediul înconjurător se numește *suprafață*. O porțiune de suprafață este mărginită de o *linie*. Orice porțiune de linie se termină printr-un *punct*. Forma diferită a corpului (obiectelor) determină suprafețe de diferite înfățișări: plane, curbe.

Suprafața plană sau mai simplu *planul, este acea suprafață nemărginită pe care se poate așeza o linie dreaptă în orice direcție.*

Suprafața pe care linia dreaptă poate fi așezată numai într-o anumită direcție se numește *suprafață riglată.*

Suprafața pe care nu se poate așeza linia dreaptă în nici o direcție se numește *suprafață curbă.*

O dreaptă situată în plan (are două puncte situate în acel plan) împarte planul respectiv în două regiuni numite *semiplane.*

Geometria studiază corpurile numai din punct de vedere al formei și al mărimii, independent de materia din care ele sînt constituite. Aceste corpuri se numesc *corpuri geometrice.*

Așa cum punctul material este considerat în fizică elementul constituitiv al corpurilor materiale, *punctul geometric* este considerat în geometrie, *elementul constitutiv al corpurilor geometrice.*

Punctele, liniile, suprafețele, corpurile geometrice sînt *figuri geometrice*. Figura geometrică poate fi definită ca o reuniune de puncte, linii, suprafețe sau volume.

Figurile geometrice se împart în următoarele categorii:

— *Figuri geometrice* ale căror puncte sînt așezate în totalitate pe o dreaptă (sau pe o curbă) numite figuri *cu o dimensiune* (au o dimensiune — lungimea). (Exemple: două sau mai multe puncte coliniare, un segment de dreaptă etc.).

— Figuri geometrice care pot fi așezate cu toate punctele lor pe același plan, numite *figuri plane* caracterizate prin *două dimensiuni* — lungime și lățime (exemple: un unghi, un dreptunghi, un cerc, o elipsă etc.).

— Figuri geometrice care nu pot fi așezate cu toate punctele lor pe un plan, numite *figuri spațiale* caracterizate prin trei *dimensiuni* — lungime, lățime și grosime (exemple: o cană, un pahar, o țeavă de tun, un proiectil).

Se pot concepe și figuri geometrice ale căror puncte sînt așezate pe o altă suprafață decît planul (sferă, con etc). suprafață neregulată.

Deoarece obiectul geometriei este studiul proprietăților figurilor geometrice, geometria se împarte în:

— geometria cu o singură dimensiune;
— geometria cu două dimensiuni — geometria plană (sau pe o suprafață);
— geometria cu trei dimensiuni — geometria în spațiu;
— geometria cu mai mult de trei dimensiuni (numărul de dimensiuni fiind determinat de numărul de coordonate ale unui punct).

Considerînd figurile geometrice formate din puncte, putem spune că o figură geometrică se poate genera prin mișcarea unei figuri mai simple (mișcarea punctului poate naște linii, mișcarea acestora generează suprafețe, mișcarea suprafețelor dă naștere la corpuri).

Figurile geometrice se pot reprezenta — în geometria cu o singură dimensiune și în geometria cu două dimensiuni — prin desene în forma lor adevărată, ceea ce dă posibilitatea cercetării proprietăților lor prin analiza desenului respectiv.

Figurile din spațiu nu pot fi reprezentate prin desene pe un plan decît convențional, iar desenul nu este util decît în măsura în care dă posibilitatea a se intui figura din spațiu.

CAPITOLUL 17

GEOMETRIA PUNCTULUI

Geometria se ocupă cu studiul spațiului și al relațiilor spațiale, studiază natura și proprietățile curbelor, suprafețelor și ale altor configurații de puncte în spațiu.

În prezentarea problemelor fundamentale ale geometriei vom utiliza spațiul perceput cu simțurile noastre, acela căruia îi sînt proprii calitățile de infinit, continuu și măsurabil.

Acest lucru ne va da posibilitatea vizualizării considerațiilor geometrice prin reprezentări grafice în spațiile cu una, două și trei dimensiuni.

Considerînd punctul ca fiind intersecția a două linii, iar linia ca fiind traiectoria unui punct mobil care se deplasează după o anumită lege, putem înțelege mai ușor, determinarea și localizarea punctelor în spațiu.

Dacă legea de mișcare a unui punct nu se schimbă, atunci traiectoria punctului este o linie dreaptă, iar dacă legea de mișcare a punctului considerat îl obligă să-și schimbe mereu direcția, punctul descrie o traiectorie sub forma unei linii curbe, plane sau spațiale după cum deplasarea punctului mobil se face în plan sau în spațiu.

Un punct situat pe o dreaptă o împarte pe aceasta în două semidrepte, iar porțiunea de dreaptă cuprinsă între două puncte neconfundate ale aceleași drepte este ceea ce am denumit *segment de dreaptă.*

Stabilirea poziției unui punct pe o linie (localizarea lui) constă în a arăta distanța (în unități de măsură date) dintre punctul respectiv și un punct de reper considerat.

17.1. DEFINIREA PUNCTULUI ÎN SPAȚIUL UNIDIMENSIONAL

Pe o dreaptă D se alege un punct 0 (numit origine), o unitate de măsură (1 cm de exemplu) și un sens $\rightarrow$ (toate distanțele măsurate la dreapta punctului 0 sînt pozitive, iar cele măsurate la stînga sînt negative) (fig. 17.1).

Dreapta pe care s-a fixat o origine, un sens și o unitate de măsură se numește axă.

Dreapta pe care s-a ales un sens pozitiv se numește *dreaptă orientată*

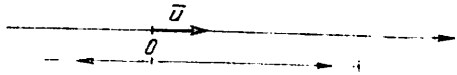


Fig. 17.1

Rezultă că fiecare punct al dreptei D este localizat prin numărul de unități de măsură (cm) cît măsoară distanța de la originea „0" la punctul considerat.

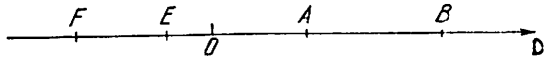


Fig. 17.2

Numărul poate fi pozitiv sau negativ. Exemplu (fig. 17.2)

$$A = +2\ u$$
$$B = +5\ u$$
$$E = -u$$
$$F = -3\ u$$

Punctele A, B, E și F sînt localizate pe dreapta D prin numărul de unități de măsură. De exemplu, punctul A definit de numărul $+2$ se află la dreapta punctului origine 0 la o depărtare de 2 unități de măsură.

Numărul real $x = +2$ ($x \in R$ unde R reprezintă mulțimea numerelor reale) se asociază punctului $A \in D$ astfel încît între A și x să existe o corespondență biunivocă, biordonată și bicontinuă. Se scrie $A(x)$ și se citește punctul A de coordonată x.

Rezultă deci că *numărul care definește poziția punctului* $A \in D$ *față de un sistem (punct) de referință* 0 *se numește coordonata* (x) *a punctului* A. Punctul A are o valoare algebrică bine determinată, x.

Numărul real $x = 5$, *care corespunde punctului* B *al dreptei* D (*fig.* 17.2) *se numește abscisa punctului* B.

Oricărui număr real, rațional sau irațional, îi corespunde un punct și numai unul singur pe o dreaptă dată.

Se poate spune că poziția unui punct oarecare M pe axă este unic determinată, dacă cunoaștem mărimea segmentului orientat $\overline{OM} = x$, care poartă numele de abscisa punctului M.

Punctul de pe axă, căruia îi corespunde un număr raţional se numeşte *punct raţional.*

Un segment de dreaptă AB se numeşte raţional atunci cînd punctele care îl definesc, A şi B sînt raţionale.

17.2. DEFINIREA PUNCTULUI IN SPAŢIUL BIDIMENSIONAL (PLAN) PRIN SISTEMUL CARTEZIAN DE COORDONATE

Pe o hartă de stat major, o poziţie este determinată prin indicarea numărului de metri la care se află poziţia la nord sau la sud de un reper dat şi numărul de metri la est sau la vest de acelaşi punct. Rezultă necesitatea a două măsurători — a două numere.

Pentru determinarea poziţiei unui punct în plan este deci necesar să se folosească două axe care se intersectează într-un punct O, care se consideră origine pentru fiecare dintre ele. Cele două axe OX şi OY (fig. 17.3) formează sistemul de referinţă în plan.

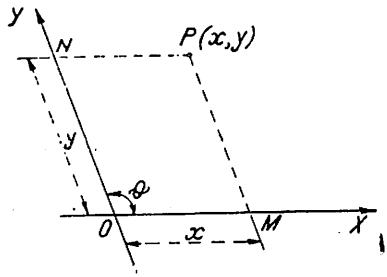


Fig. 17.3

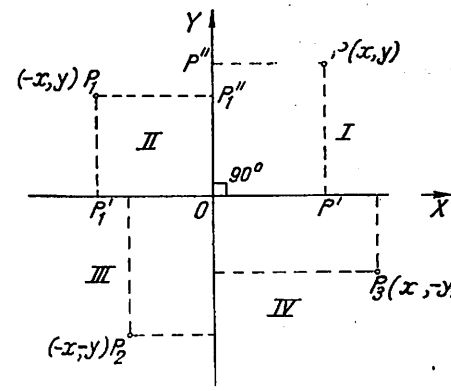


Fig. 17.4

Să considerăm un punct P în plan. Se duce PM paralelă la OY şi PN paralelă la OX ($M \in OX$, $N \in OY$). Mărimea segmentului orientat $\overline{OM} = x$ este ceea ce se numeşte *abscisa* punctului P, iar $\overline{ON} = y$ *ordonata* lui.

Abscisa şi ordonata constituie coordonatele plane ale punctului P.

Axele sistemului de referinţă pot forma între ele unghiuri diferite de 90° sau egale cu 90°.

Cînd $\theta \neq 90°$ axele se numesc *oblice* (fig. 17.3)

Cînd $\theta = 90°$ axele se numesc *rectangulare* (fig. 17.4).

Axele unui sistem de referinţă în plan îl împart pe acesta în patru regiuni numite *cadrane* (I, II, III, IV; fig. 17.4).

Tabelul 17.1

Cadrane	I	II	III	IV
Abscisa (x)	+	−	−	+
Ordonata (y)	+	+	−	−

Din (fig. 17.4) rezultă, conform tabelului 17.1, că:

— un punct situat pe axa Ox are ordonata nulă ($y = 0$);

— un punct situat pe axa Oy are abscisa nulă ($x = 0$);

— un punct situat în cadranul I are coordonatele pozitive;

— un punct situat în cadranul II are abscisa negativă și ordonata pozitivă;

— un punct situat în cadranul III are coordonatele negative;

— un punct situat în cadranul IV are abscisa pozitivă, iar ordonata negativă;

— originea O a sistemului de referință are coordonatele nule.

Coordonatele punctelor în sistemul de referință în plan cu axe rectangulare se numesc *coordonate rectangulare plane*.

Cele două axe OX și OY, formează așa-numitul *sistem cartezian de coordonate*.

Arătați că: unei perechi ordonate de numere reale îi corespunde un punct bine determinat al planului.

Considerînd în plan, un punct în mișcare, în fiecare moment coordonatele sale sînt date de o funcție de timp.

$$x = f(t),\ y = \varphi(t).$$

ceea ce înseamnă că odată cu variația variabilei t vor varia și coordonatele (atît x cît și y).

Cu ajutorul parametrului t, se descrie mișcarea punctului în plan. Ecuațiile $x = f(t)$; $y = \varphi(t)$ constituie *ecuațiile parametrice ale traiectoriei punctului considerat*. Prin eliminarea parametrului t între cele două ecuații se obține o relație de forma $F(x, y) = 0$, care exprimă legătura între coordonatele x și y ale punctului respectiv, pentru ca acesta să se găsească pe traiectoria exprimată de ecuațiile parametrice.

Funcția $F(x, y) = 0$ arată o proprietate comună a tuturor punctelor traiectoriei (curbei) respective, deci o proprietate de *loc geometric* (vezi capitolul 23).

17.3. DEFINIREA PUNCTULUI ÎN SPAȚIUL TRIDIMENSIONAL PRIN SISTEMUL CARTEZIAN DE COORDONATE

Pentru reprezentarea punctelor cu ajutorul coordonatelor în spațiul tridimensional este necesar să stabilim *un sistem de referiță, format din trei axe de coordonate*, perpendiculare OX, OY, OZ, care se intersectează în O și au sensurile pozitive ca în fig. 17.5. Cele trei axe se numesc:

OX = axa absciselor; OY = axa ordonatelor; OZ = axa cotelor

Fiecare axă este perpendiculară pe planul format de celelalte două axe ($OX \perp YOZ$; $OY \perp ZOX$; $OZ \perp XOY$).

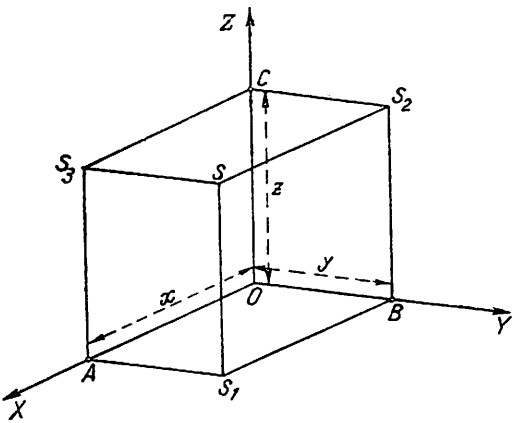


Fig. 17.5

Dacă pe planele XOY, YOZ, ZOX, (numite plane de coordonate) se coboară perpendiculare din orice punct S al spațiului se formează figura rectangulară cu muchiile ON, OP și OV în lungul axelor. Observăm că poziția punctului S este determinată de trei coordonate notate $S(x, y, z)$. Rezultă că poziția punctelor în spațiul cu trei dimensiuni este definită de trei coordonate. Două din coordonate x și y determină punctul în planul orizontal XOY, iar cea de a treia, z, determină înălțimea punctului în spațiu (deasupra sau dedesubtul punctului corespunzător din planul orizontal) fig. 17.6.

Semnele coordonatelor depind de poziția punctului S față de planele de coordonate (fig. 17.7) tabelul nr 17.2.

Din figură rezultă că orice punct din planul XOY are cota nulă deci: planul XOY are ecuația $Z = 0$

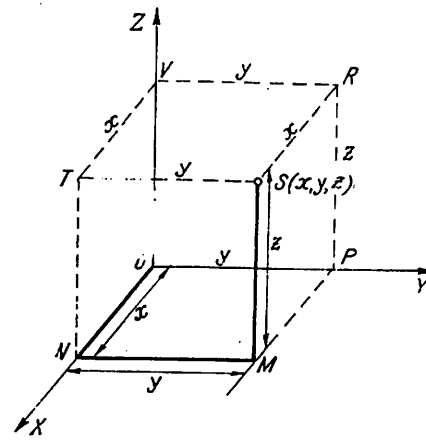


Fig. 17.6

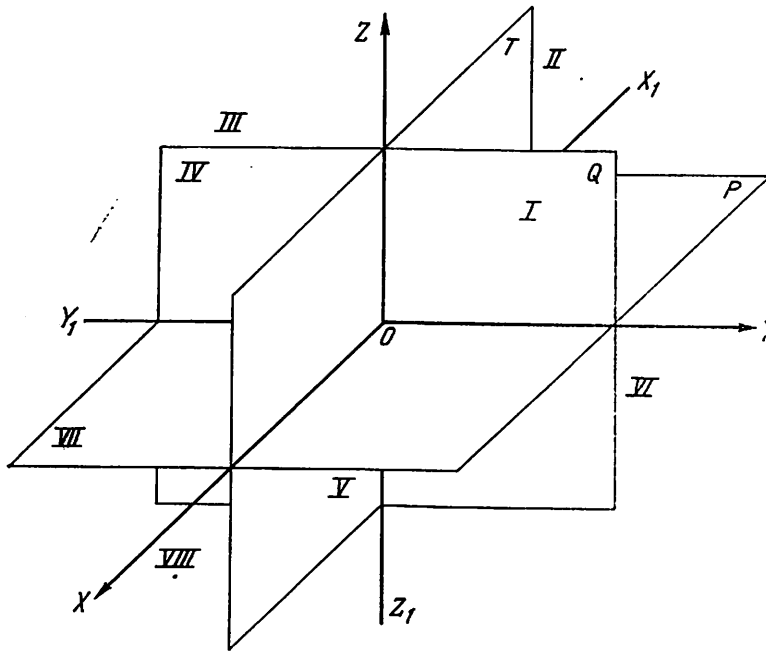


Fig. 17.7

Analog putem scrie — planul YOZ are ecuația $X = 0$ (17.1)
— planul ZOX are ecuația $Y = 0$

Pentru axele sistemului de referință se poate scrie că:

axa OX are ecuațiile: $Y = 0;\ Z = 0$
axa OY are ecuațiile: $X = 0;\ Z = 0$ (17.2)
axa OZ are ecuațiile: $X = 0;\ Y = 0$

În tabelul 17.2 se arată semnul coordonatelor unui punct oarecare S în raport de numărul cadranului și de planele de coordonate.

Tabelul 17.2

S	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	XOY	YOZ	ZOX	OX	OY	OZ	O
x	+	−	−	+	+	−	−	+	±	0	±	±	0	0	0
y	+	+	−	−	+	+	−	−	±	±	0	0	±	0	0
z	+	+	+	+	−	−	−	−	0	±	±	0	0	±	0

17.4. DEFINIREA PUNCTULUI PRIN ALTE SISTEME DE COORDONATE

Coordonate polare în plan

În sistemul coordonatelor polare se alege în plan o dreaptă fixă OX, numită axă polară și un punct fix pe ea O, numit pol (fig. 17.8) Considerăm un punct oarecare P al planului, rotim axa OX în sens

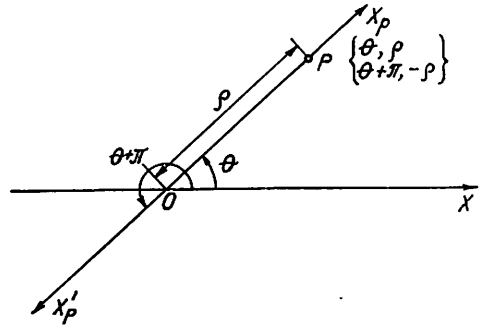


Fig. 17.8

trigonometric pînă trece prin punctul considerat. Notăm cu θ unghiul de rotire și cu ρ abscisa punctului P pe axa OX. *Numerele θ și ρ numite respectiv unghi polar și rază polară (rază vectoare) constituie coordonatele polare ale punctului P.*

Corespondența dintre coordonatele polare și punctele din plan nu este biunivocă. Coordonatele polare ale punctului P nu sînt unic determinate (spre exemplu punctul P rămîne același și pentru un unghi de rotire θ și pentru un unghi $\theta + 2\,k\pi$, de unde rezultă că coordonatele polare ale punctului P sînt: $P(\theta + 2k\pi, \rho)$ unde k = număr întreg).

Atunci cînd axa OX se rotește cu valoarea unui unghi egal cu $\theta + \pi$, punctul P pe axa OX' va avea abscisa negativă $(-\rho)$ deci coordonatele lui polare vor fi $P'(\theta + \pi, -\rho)$ sau

$$P'[\theta + (2k + 1)\pi, -\rho] \text{ unde } k = \text{număr întreg.}$$

Dacă raportăm un punct P în același timp la un sistem de axe carteziene rectangulare și la un sistem polar de coordonate care au originea și polul confundate, iar axa polară suprapusă pe axa rectangulară OX (fig. 17.9) putem scrie relațiile dintre coordonatele carteziene rectangulare și coordonatele polare astfel:

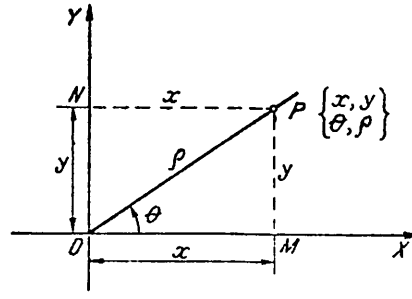


Fig. 17.9

În fig. 17.9 se observă că punctul P este definit de coordonatele carteziene x și y și de coordonatele polare θ și δ.

Din triunghiul OPM rezultă relațiile

$$x = \rho \cos\theta \qquad y = \rho \sin\theta$$

de unde:

$$x^2 = \rho^2 \cos^2\theta \qquad y^2 = \rho^2 \sin^2$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$\boxed{\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}}$$

și

$$\boxed{\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}} \qquad \boxed{\sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

Aceste relații permit găsirea ecuației carteziene a unei curbe a cărei ecuație polară se cunoaște și invers.

17.5. PROIECȚIA PUNCTULUI

Geometria descriptivă are drept scop reprezentarea grafică a diferitelor figuri ce formează corpurile în spațiu cu două și trei dimensiuni și rezolvarea pe desenele obținute a problemelor relative la aceste figuri.

Pentru reprezentarea grafică a obiectelor și pieselor, mașinilor și utilajelor precum și pentru rezolvarea unor probleme, geometria descriptivă folosește sisteme de proiecție.

Se consideră un punct oarecare S (S_1S_2...) din spațiu și un plan P(fig. 17.10)

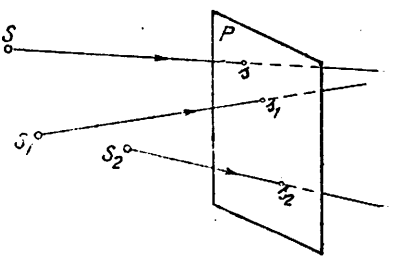


Fig.17.10

Din punctele S, S_1, S_2 din spațiu se duc drepte înclinate oricum față de planul P. La intersecția dreptelor cu planul se obțin punctele s, s_1, s_2 care constituie *proiecțiile punctelor* respectiv S, S_1, S_2 pe planul P, plan care se numește *plan de proiecție*. Dreptele Ss, S_1s_1, S_2s_2 se numesc *proiectante sau raze de proiecție.*

Înclinarea proiectantelor față de planul de proiecție determină sistemul de proiecție.

Sistemele principale de proiecție sînt:

— proiecția centrală sau conică;

— proiecția paralelă sau cilindrică.

Sistemul de proiecție în care proiectantele pornesc dintr-un punct fix (ochi, punct luminos) numit centru de proiecție se numește *proiecție centrală sau conică* (fig. 17.11).

Ducînd prin S (*centru de proiecție*) raze vizuale sau luminoase tangente la figura $ABCD$, ele înțeapă planul P în punctele respective, a, b, c, d.

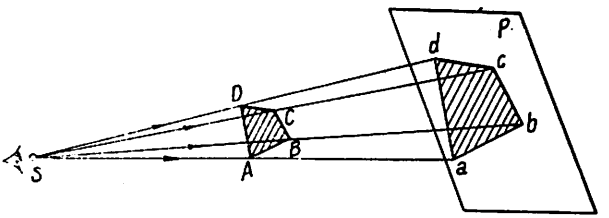


Fig. 17.11

Proiecția figurii $ABCD$ pe planul de proiectare P este figura care unește punctele a, b, c, d. Patrulaterul $ABCD$ este reprezentat în planul de proiecție în *perspectivă lineară*, ceea ce face ca *proiecția conică* să se numească și *reprezentarea în perspectivă*.

Sistemul de proiecție în care proiectantele sînt paralele între ele se numește *proiecție paralelă* sau *cilindrică*. În acest caz centrul de proiecție se consideră la infinit.

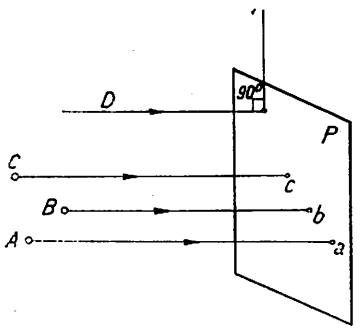


Fig. 17.12

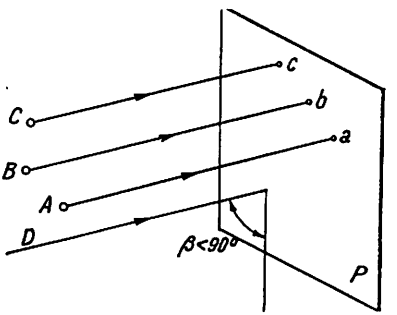


Fig. 17.13

Dacă planul de proiecție este perpendicular pe dreptele proiectante, *proiecția se numește ortogonală* (dreaptă) fig. 17.12.

Dacă planul de proiecție este oblic față de dreptele proiectante, *proiecția se numește oblică* (fig. 17.13).

În fig. 17. 12 sînt reprezentate proiecţiile ortogonale ale punctelor A, B, C din spaţiu pe planul P. Proiectantele Aa, Bb, Cc sînt paralele cu dreapta D care la rîndul ei este perpendiculară pe planul P.

În figura 17.13. sînt reprezentate proiecţiile oblice ale punctelor A, B, C din spaţiu pe planul P. Proiectantele Aa, Bb, Cc intersectează planul de proiecţie sub un unghi β diferit de 90°, ele fiind paralele cu dreapta D.

Proiecţia cotată a unui punct M pe un plan Q este proiecţia sa ortogonală m pe acest plan, lîngă care se înscrie, în cifre, cota care repre-

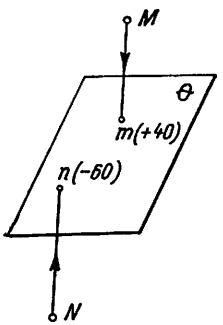


Fig. 17.14

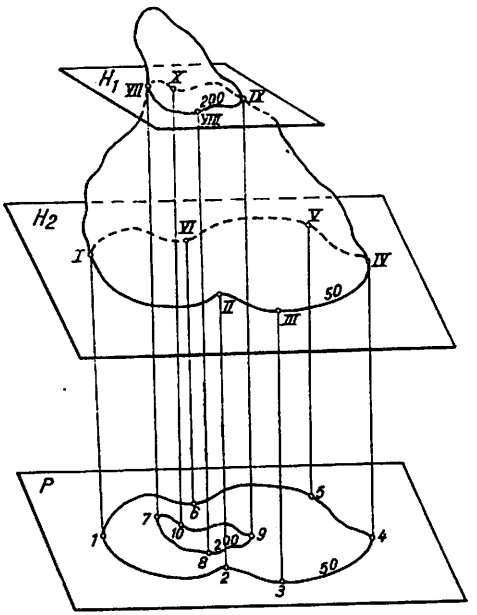


Fig. 17.15

zintă valoarea numerică (pozitivă sau negativă) a distanţei sale la planul de proiecţie P (fig. 17.14). Proiecţiile cotate se folosesc pentru reprezentarea obiectelor din spaţiu, cu forma şi dimensiunile lor reale.

Aplicaţie:

Proiecţiile cotate se folosesc în special în topografie pentru reprezentarea grafică a reliefului suprafeţei globului, prin proiecţiile punctelor care alcătuiesc *curbele de secţiune* făcute în suprafaţă, după plane orizontale echidistante numite *curbe de nivel*. În fig. 17.15 este repre-

zentată în proiecție cotată o formă de teren cu ajutorul planelor orizontale H_1, H_2 duse prin punctele aflate pe suprafața respectivă de cotă 200 și 50.

Prin proiectarea ortogonală a punctelor care au cotele egale I, II, III, IV, V, VI, de cotă 50 și VII, VIII, IX, X de cotă 200, se obțin curbele de nivel căutate.

17.6. APLICAȚII

1. Reprezentați punctele: $A\,(3, 0)$; $B\,(0, 2)$; $C\,(3, 5)$; $D\,(4, 2)$; $E\,(-4, 3)$; $F\,(-6, -2)$; $G\,(2, -4)$; $H\,(-3, 0)$.

2. Reprezentați punctele: $M\,(2, 3, 8)$; $N\,(-3, -2, -6)$; $P(5, -1, 3)$; $R\,(0, 5, 4)$; $S\,(-4, -3, 7)$; $T\,(3, 2, -4)$.

3. Arătați legătura dintre coordonatele rectangulare plane ale unui punct, pentru ca punctul să se găsească pe prima bisectoare a axelor de coordonate.

4. Stabiliți coordonatele punctelor $P_1\,P_2\,P_3$ simetrice cu punctul $P(x, y)$, față de OX, OY, și O.

5. Stabiliți coordonatele simetrielor punctului $S(x, y, z)$ față de planele de coordonate, axele de coordonate și față de origine.

6. Construiți punctele definite prin următoarele coordonate polare:

$$A\left(\frac{\pi}{4}, 3\right);\quad B\,(\pi, -6);\quad c\left(\frac{5\pi}{4}, -3\right);\quad D\left(\frac{3\pi}{4}, 4\right);\quad E\left(\frac{7\pi}{6}, 5\right);$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}, 2\sqrt{2}\right).$$

7. Care sînt coordonatele carteziene ale punctelor:

$$M\left(\frac{\pi}{6}, 3\right);\quad N\left(-\frac{\pi}{2}, 4\right);\quad P\left(\frac{\pi}{2}, -2\right).$$

8. Determinați coordonatele polare ale punctelor definite prin următoarele coordonate carteziene:

$$A\,(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1);\quad B\,(3, -3);\quad C\,(2, 2\sqrt{3}).$$

9. Calculați coordonatele carteziene ale punctelor definite prin coordonatele cilindrice următoare:

$$M\left(\frac{\pi}{2}, 4, 3\right);\quad N\left(\frac{\pi}{6}, 3, -2\right);\quad P\,(0, 2, 1);\quad R\left(\frac{5\pi}{4}, 1, 1,\right)$$

10. Pe dreapta D se găsesc punctele A, B, C de abscise respectiv a, b, c. Determinați abscisa m a punctului M astfel încît să existe relația $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 3\,\overline{OM}^2$

Generalizați.

R. Se obține $m = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2(a + b + c)}$. Dacă $a + b + c = 0$, punctul M este situat la infinit pe dreapta D. Pentru n puncte arătați că relația se generalizează astfel:

$$\sum_{i=1}^{n} MA_i^2 = n\,\overline{OM}^2.$$

CAPITOLUL 18

GEOMETRIA DREPTEI ŞI A UNGHIURILOR

18.1. DREAPTA, UNGHIUL

18.1.1. Figuri geometrice cu o singură dimensiune

Cele mai simple figuri geometrice sînt segmentul de dreaptă (fig. 18.1) şi semidreapta (fig. 18.2).

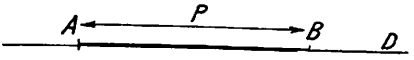


Fig. 18.1

Dacă A şi B sînt două puncte distincte, oarecare, luate într-o ordine fixată, mulţimea punctelor formată din A, B şi toate punctele P situate între aceste puncte se numeşte *segmentul de dreaptă* AB sau distanţa AB.



Fig. 18.2

A şi B sînt extremităţile segmentului, iar punctele P se numesc puncte interioare ale segmentului.

Figura formată dintr-un punct M al unei drepte şi mulţimea punctelor dreptei situate de o aceeaşi parte a punctului considerat se numeşte *semidreaptă*. Semidreapta este nemărginită într-un sens.

18.1.2. Figuri geometrice cu două dimensiuni

Figura formată de două semidrepte care pleacă din acelaşi punct (origine) se numeşte *unghi* (fig. 18.3).

Semidreptele Ox şi Oy constituie laturile unghiului iar originea O vîrful unghiului.

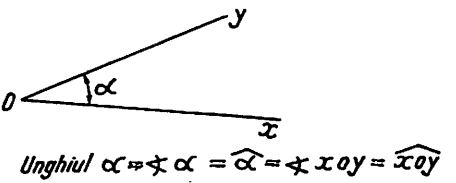


Fig. 18.3

Unghiurile care au același vîrf și o latură comună se numesc unghiuri *adiacente* (fig. 18.4)

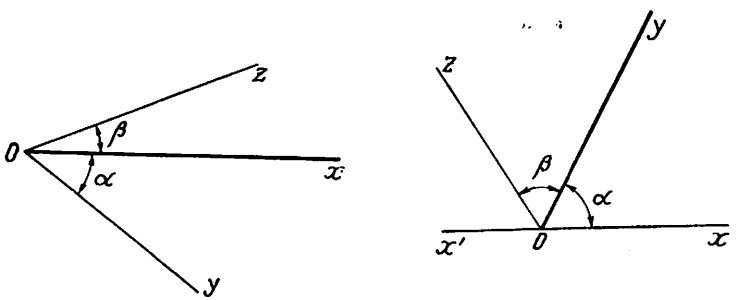


Fig. 18.4

Unghiurile adiacente a căror sumă este egală cu valoarea unui unghi cu laturile în prelungire ($\alpha + \beta = 180°$) se numesc *suplementare* (fig. 18.5).

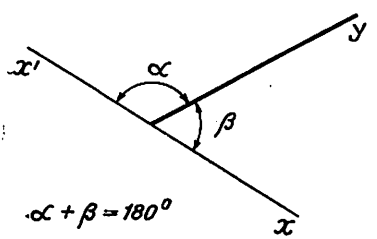


Fig. 18.5

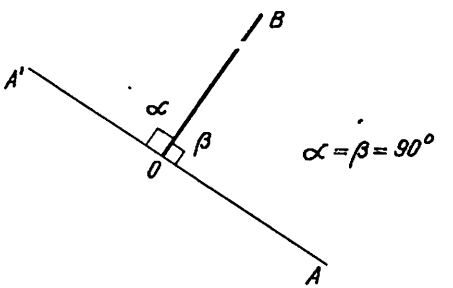


Fig. 18.6

Unghiul care este egal cu suplementul său se numește *unghi drept* ($\alpha + \beta = 180°$; $\alpha = \beta = 90°$) (fig. 18.6).

Unghiul mai mic decît un unghi drept se numește *unghi ascuțit*, iar cel mai mare, *obtuz*.

Pentru a compara două unghiuri, le transportăm astfel încît să se suprapună vîrfurile și o latură, iar ele să fie de aceeași parte a laturii comune (fig. 18.7).

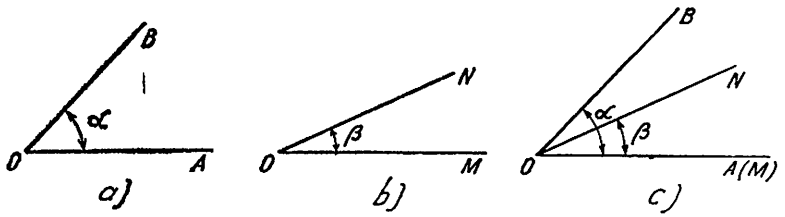


Fig. 18.7

Din fig. 18.7 c. rezultă: $AOB > MON$.

Dacă OB coincide cu ON (fig. 18.7) cele două unghiuri sînt egale.

Mărimea unui unghi nu depinde de lungimea laturilor sale, ci de deschizătura dintre ele.

Unghiurile care au același vîrf și laturile în prelungire se numesc *opuse la vîrf* (fig. 18.8).

Două unghiuri opuse la vîrf sînt egale

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$$

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD$$

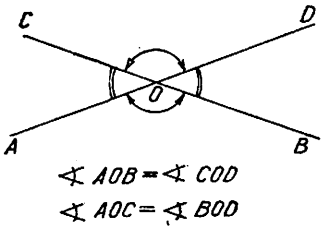


Fig. 18.8

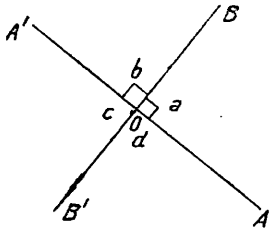


Fig. 18.9

Două drepte sînt perpendiculare una pe cealaltă dacă printre cele patru unghiuri pe care le formează sînt două unghiuri adiacente egale (fig. 18.9).

Dreapta BOB' este perpendiculară pe dreapta AOA' dacă unghiurile a și b sînt egale. Unghiul ale cărui laturi sînt perpendiculare între ele se numește *unghi drept*.

Două unghiuri se numesc complementare dacă suma lor este egală cu un unghi drept (90°).

18.1.3. Măsura unghiurilor

Cunoaștem că raportul a două mărimi de același fel este numărul care ne arată de cîte ori una dintre mărimi este mai mare decît cealaltă.

Măsura unei mărimi, făcută cu o mărime de același fel, însă luată ca unitate de măsură, este raportul dintre mărimea respectivă și unitate.

Unitatea obișnuită de măsură pentru unghiuri (arce) este *gradul* (sexagesimal sau centesimal).

O altă unitate de măsură a unghiurilor și arcelor este *miimea*. În artilerie se cunosc următoarele feluri de miimi:

— miimea adevărată (miimea de 6283);
— miimea de 6400;
— miimea de 6 000.

Miimea adevărată este un unghi la centru care subîntinde între laturile sale un arc de cerc egal cu a mia parte din raza cercului. Definită altfel, miimea este a 6283-a parte din lungimea cercului a cărui rază este egală cu unitatea

$$Lc = 2\pi R = 2 \times 3{,}1415 \times 1 = 6{,}283$$

Miimea fiind egală cu $\frac{1}{1\,000}$ din raza cercului a cărui lungime este $6{,}283 \cdot 1000 = 6.283$ rezultă că lungimea cercului are $\frac{6.283 \times 1\,000}{1\,000} = 6283$ miimi.

În practica artileristică nu se folosesc aceste miimi deoarece calculul este greoi, împărțirea dînd fracțiuni de miimi care nu se pot înregistra cu precizie pe aparate.

Pentru aceasta s-a împărțit lungimea cercului în 6 000 de miimi.

Paralaxa. În artilerie se folosește noțiunea de paralaxă. Unghiul sub care se vede un front oarecare (considerat în metri) de către un observator care se află la o distanță oarecare (considerată în km) se numește paralaxă.

$$P = \frac{f\,(m)}{D\,(\text{km})}$$

unde: P = paralaxa în miimi; $f(m)$ = frontul în metri; D (km) = distanța în km.

În *topografie*, pentru uşurarea şi ordonarea calculelor, unghiurile se măsoară faţă de o direcţie fixă, paralelă cu direcţia nord-sud, în sensul mişcării acelor unui ceasornic. Un asemenea cerc, cu raza egală cu unitatea se numeşte cerc topografic (fig. 18.10)

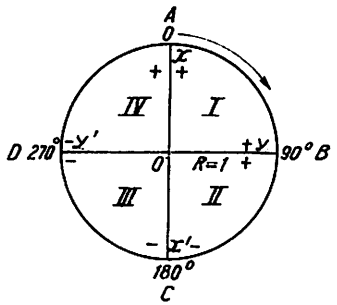


Fig. 18.10

Rezultă că cercul topografic este cercul care are raza egală cu unitatea, diametrul vertical origină, iar sensul pentru măsurarea unghiurilor este cel al mişcării acelor unui ceasornic.

Cele două diametre perpendiculare împart cercul topografic în patru cadrane.

18.1.4. Unghiul a două semidrepte în spaţiu

Noţiunea are sens numai dacă avem de-a face cu semidrepte situate în acelaşi plan şi care nu sînt paralele. Unghiul a două drepte nesituate în acelaşi plan este măsura unui unghi plan cu laturile paralele cu cele două semidrepte.

Considerăm dreptele D_1 şi D_2 nesituate în acelaşi plan (fig. 18.11).

Printr-un punct oarecare M din spaţiu ducem dreptele D_1' şi D_2', paralele cu D_1 şi D_2. Prin definiţie, unghiurile formate de dreptele concurente D_1' şi D_2' se numesc unghiurile dreptelor date D_1 şi D_2 (de ex. unghiul α).

Dreptele D_1' şi D_2' formează patru unghiuri α, β, γ, δ care sînt două cîte două egale sau suplementare. Unul din ele este unghiul dreptelor D_1 şi D_2.

Două unghiuri din spaţiu, care au laturile lor respectiv paralele sînt sau egale sau suplementare, după cum sînt sau nu de acelaşi fel (ambele obtuze sau ascuţite sau unul ascuţit şi unul obtuz).

Considerăm două unghiuri aşezate în plane diferite (AOB şi $A_1O_1B_1$) care au perechile de laturi (OA, O_1A_1), (OB, O_1B_1), respectiv paralele şi de aceleaşi sensuri (fig. 18.12)

Pe laturile celor două unghiuri se iau punctele m, m_1 și n, n_1 astfel încît $Om = O_1m_1$; $On = O_1n_1$.

Patrulaterele $Om\,m_1O_1$ și $On\,n_1O_1$ sînt paralelograme (au cîte două laturi opuse paralele și egale).

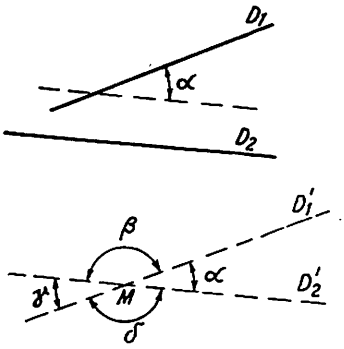


Fig. 18.11

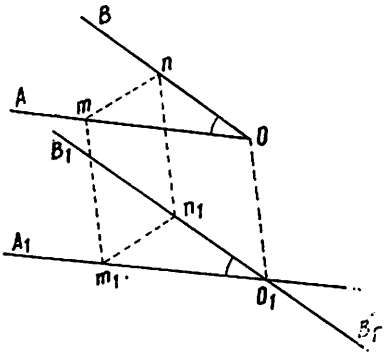


Fig. 18.12

Deoarece segmentele mm_1, nn_1 sînt paralele cu OO_1 și egale, patrulaterul $mn\,n_1m_1$ este paralelogram, deci mn și m_1n_1 sînt paralele și egale. Triunghiurile Omn și $O_1m_1n_1$ sînt egale avînd laturile egale.

Rezultă că $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A_1O_1B_1$.

Prin prelungirea laturilor O_1A_1 și O_1B_1 în sens opus se obțin unghiurile $A_1'O_1B_1'$, $A_1'O_1B_1$, $B_1'O_1A_1$, care avînd laturile paralele cu ale unghiului AOB sînt egale sau suplementare cu acesta.

Unghiul format de o dreaptă cu proiecția ei pe un plan se numește unghiul dreptei cu planul.

În fig. 18.13 vede că unghiul dreptei MN cu planul P este unghiul NMn.

Cînd dreapta MN este perpendiculară pe planul de proiecție P, formează cu orice dreaptă din plan unghiuri drepte.

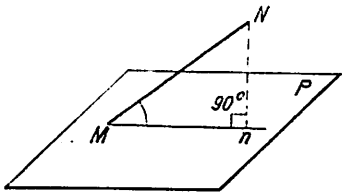


Fig. 18.13

Atunci cînd dreapta MN este paralelă cu planul de proiecție P, ea este paralelă și cu proiecția ei pe plan, deci unghiul ei cu planul este nul.

18.1.5. Unghiuri diedre

Figura formată de două semiplane (P și Q) mărginite de aceeași dreaptă (AB) se numește unghi diedru (fig. 18.14). Semiplanele P și Q se numesc *fețele diedrului* iar dreapta care le mărginește *muchia diedrului.*

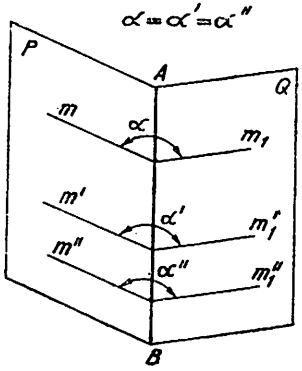


Fig. 18.14

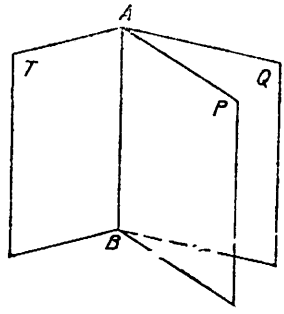


Fig. 18.15

Unghiuri diedre adiacente se numesc unghiurile care au aceeași muchie, o față comună, iar fețele necomune sînt așezate de o parte și de alta a feței comune (fig. 18.15).

Unghiurile $PABQ$ și $PABT$ sînt diedre adiacente.

Unghiuri diedre opuse la muchie se numesc diedrele care au aceeași muchie iar fețele unuia sînt prelungirile fețelor celuilalt (fig. 18.16). Unghiurile diedre $PABQ$ și $P'ABQ'$, $PABQ'$ și $QABP'$ sînt diedre opuse la muchie.

Unghiurile diedre opuse la muchie sînt egale.

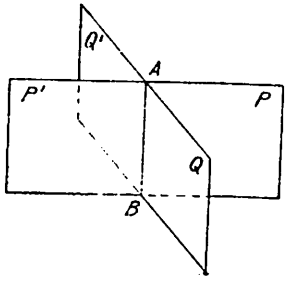


Fig. 18.16

Dacă două unghiuri diedre prin suprapunere coincid ele sînt egale.

Se numește *unghi plan al unui unghi diedru* unghiul format de perpendicularele duse într-un punct de pe muchie și cuprinse în fețele diedrului respectiv (fig. 18.17).

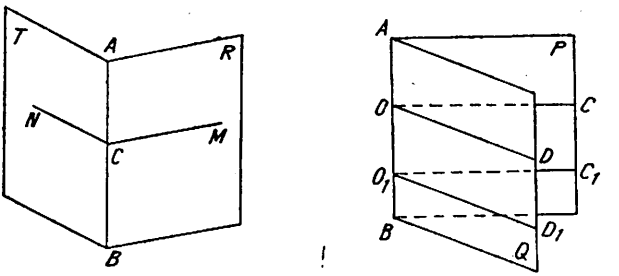


Fig. 18.17

Unghiul plan al unghiului diedru $RABT$ este unghiul MCN; iar unghiul plan al unghiului diedru $PABQ$ este unghiul COD.

Unghiul diedru care are unghiul plan de 90° se numește *unghi diedru drept*. (Ex.: diedrul format de planul tavanului cu planul unui perete).

Două unghiuri diedre care au unghiurile plane egale, sînt egale.

18.1.6. Unghiuri triedre

Trei plane au, în general, un punct comun, definit de trei muchii care trec prin acest punct comun și care sînt formate din întretăierea planurilor, două cîte două (fig. 18.18).

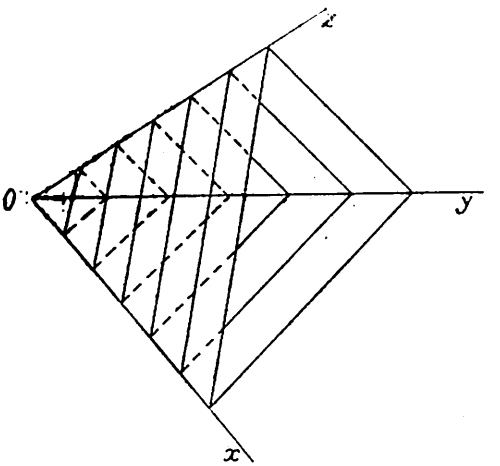


Fig. 18.18

Cele trei plane închid între ele o porțiune de spațiu care este ceea ce numim unghi triedru. El se mai numește și unghi spațial (sau solid).

Triedrul din figura 18.18 se notează $Oxyz$. O este vîrful triedrului iar semidreptele Ox, Oy, Oz formează muchiile triedrului.

Din fig. 18.18 rezultă că elementele triedrului sînt:

— vîrful triedrului (O); trei muchii (Ox, Oy, Oz); trei fețe (xOy, yOz, zOx), fiecare dintre ele este un unghi plan; trei unghiuri diedre ale căror muchii sînt Ox, Oy, Oz.

Fețele unghiului triedru se mai notează și astfel:

$$\sphericalangle yOz = \alpha;\ \sphericalangle xOy = \gamma;\ \sphericalangle zOx = \beta;$$

iar unghiurile diedre X (cu muchia Ox); Y (cu muchia Oy); Z (cu muchia Oz).

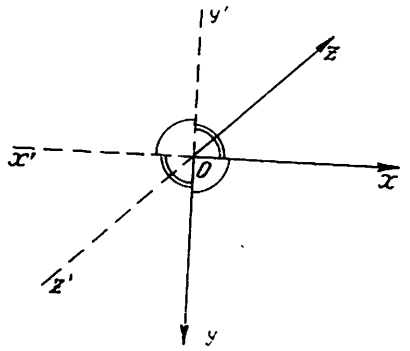


Fig. 18.19

Din figura 18.19 se observă că trei plane care au un punct comun determină opt triedre. Dacă vrem să definim un triedru dintre ele, trebuie să precizăm semidreptele (muchiile) care îl determină.

Dreptele xx' și yy' formează patru unghiuri plane (xOy, xOy', yOx', $x'Oy'$). Fiecare dintre ele poate constitui o față a unui triedru. Luînd pe Oz ca a treia muchie, se pot forma 4 triedre; luînd pe Oz' ca a treia muchie se pot forma alte 4 triedre.

Exemple de triedre: colțul unui acoperiș de casă, colțul unei camere etc.

Un triedru poate să aibă: *o orientare pozitivă* (fig. 18.20 *a*). În acest caz observatorul din O care privește spre Z trebuie să rotească axa Ox de la dreapta la stînga pentru a o suprapune pe Oy;

triedrul cu orientare pozitivă se numește *triedru drept*. În figura 18.20 b sensul de rotire al axei Ox este invers, triedrul se spune că are *orientare contrară* și el se numește *triedru stîng*.

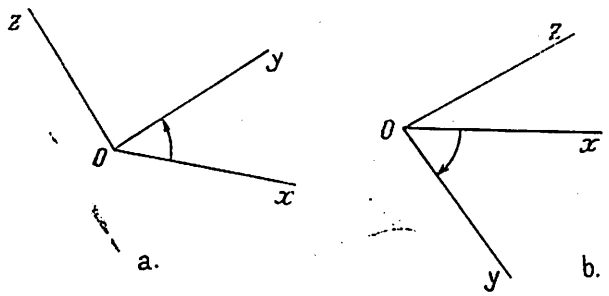


Fig. 18.20

În știința artileristică triedrul se folosește ca sistem de referință (sau reper), mai ales triedrul tridreptunghic.

În spațiu poziția unui punct M se stabilește prin trei coordonate:

abscisa $x = OA$, ordonata $y = OB$ și cota $z = Oc$; $Oa = 3$;

$$OB = 5;\ OC = 4$$

Atunci cînd coordonatele sînt negative, ele se măsoară pe axele respective însă în sens contrar.

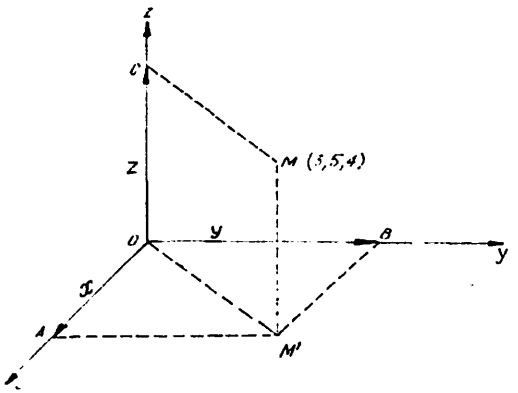


Fig. 18.21

Coordonatele care determină poziția unui punct pe hartă (și cota poziției punctului) determină un triedru. Am reținut că două figuri geometrice sînt egale, dacă prin suprapunere coincid.

Două sau mai multe triedre sînt egale atunci cînd:

— au cîte un unghi diedru egal determinat de fețe respectiv egale și la fel așezate;

— au cîte o față egală și unghiurile diedre alăturate ei respectiv egale și la fel dispuse;

— au toate unghiurile diedre respectiv egale și la fel așezate;

— au toate fețele respectiv egale și la fel așezate.

18.1.7. **Drepte paralele**

Intersecția a două drepte cu o a treia

Să considerăm dreptele AB și CD intersectate de secanta MN (fig. 18.22).

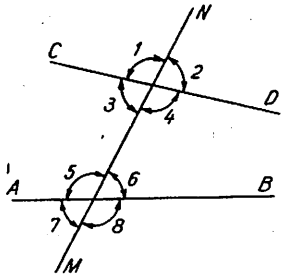


Fig. 18.22

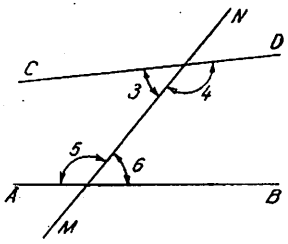


Fig. 18.23

Unghiurile 1 și 5, 2 și 6, 3 și 7, 4 și 8 se numesc *corespondente*.

Unghiurile 3 și 6, 4 și 5 se numesc *alterne interne* (fig. 18.23).

Unghiurile 1 și 8, 2 și 7 se numesc *alterne externe*.

Unghiurile 3 și 5, 4 și 6 se numesc *interne de aceeași parte a secantei* (fig. 18.24).

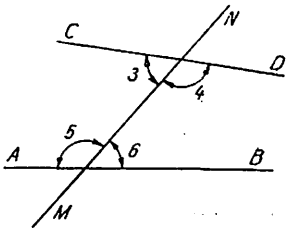


Fig. 18.24

Unghiurile 1 și 7, 2 și 8 se numesc *externe de aceeași parte a secantei* (fig. 18.25).

Două drepte situate în același plan și care nu se întîlnesc se numesc *paralele*.

Dacă două drepte tăiate cu o secantă formează unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare, dreptele sînt paralele.

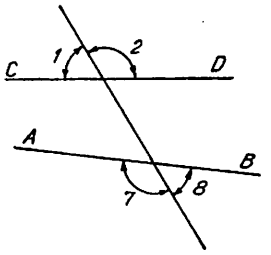


Fig. 18.25

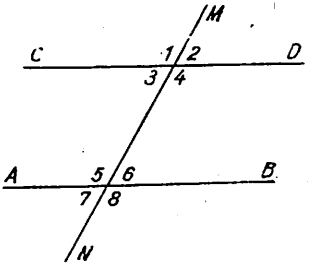


Fig. 18.26

Dacă $\measuredangle 3 + \measuredangle 5 = 2$ dr atunci dreptele AB și CD nu se pot întîlni în nici o parte a secantei MN, deci sînt paralele.

Două drepte sînt paralele atunci cînd, tăiate de o secantă, formează (fig. 18.26):

— *unghiuri corespondente egale* ($\measuredangle 1 = \measuredangle 5$; $\measuredangle 2 = \measuredangle 6$; $\measuredangle 3 = \measuredangle 7$; $\measuredangle 4 = \measuredangle 8$);

— *unghiuri alterne interne egale* ($\measuredangle 3 = \measuredangle 6$; $\measuredangle 4 = \measuredangle 5$);

— *unghiuri alterne externe egale* ($\measuredangle 1 = \measuredangle 8$; $\measuredangle 2 = \measuredangle 7$);

— *unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplimentare* ($\measuredangle 3 + \measuredangle 5 = 2$ dr; $\measuredangle 4 + \measuredangle 6 = 2$ dr);

Axioma paralelelor. Printr-un punct dat, la o dreaptă dată, în planul determinat de punct și dreaptă, nu se poate duce decît o dreaptă paralelă la dreapta dată (formulare Hilbert).

Aplicații: Să se demonstreze următoarele teoreme:

1) Două drepte perpendiculare pe aceeași dreaptă sînt paralele.

2) Dacă două drepte sînt paralele, orice dreaptă care taie una din ele, taie și pe cealaltă.

3) Dacă două drepte tăiate de o secantă formează unghiuri externe de aceeași parte a secantei, care nu sînt suplementare, aceste drepte se taie de partea secantei unde suma unghiurilor externe este mai mare decît două unghiuri drepte.

4) Dacă două drepte sînt paralele orice perpendiculară pe una din ele este perpendiculară și pe cealaltă.

18.1.8. Unghiuri cu laturile paralele sau perpendiculare

Teoreme: Unghiurile care au laturile paralele şi îndreptate în acelaşi sens sau în sensuri contrare, sînt egale.

Unghiurile care au laturile paralele şi îndreptate cîte una în acelaşi sens şi celelalte în sensuri contrare, sînt suplementare.

În figură se observă:

MN este paralelă cu $M'N'$ iar PN paralelă cu $P'N'$.

Avînd în vedere că $P'N'$ taie pe $M'N'$, va tăia şi pe MN care este paralelă cu $M'N'$.

Rezultă că *unghiurile* α şi α_1, fiind unghiuri corespondente formate de paralele ($MN \,//\, M'N'$) tăiate de secanta $P'P''$ *sînt egale*; *unghiurile* α_1 şi α_2 formate de asemenea de drepte paralele ($PN \,//\, P'P''$) tăiate de secanta MM'' sînt *tot egale*.

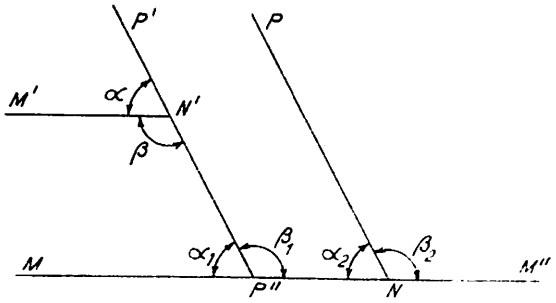


Fig. 18.27

În figura 18.27 se observă:

$$\hat{\beta}_2 + \hat{\alpha}_2 = 2 \text{ dr}; \quad \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha};$$

deci

$$\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_1 = \hat{\beta} \quad ; \quad \boxed{\hat{\beta}_1 + \hat{\alpha} = 2 \text{ dr};} \quad \boxed{\hat{\beta}_2 + \hat{\alpha} = 2 \text{ dr}}$$

Unghiurile care au laturile perpendiculare sînt suplementare dacă unul este ascuţit iar celălalt obtuz (fig. 18.28).

$$BB' \perp CC'$$

$$A'B \perp AA''$$

Rezultă:

$$\sphericalangle ABA' = 1 \text{ dr}$$

$$\sphericalangle B'BC' = 1 \text{ dr}$$

$$\boxed{\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1 = \sphericalangle \alpha_2}$$

$$\boxed{\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta_1}$$

$$\boxed{\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta = 1 \text{ dr}}$$

$$\boxed{\sphericalangle \alpha_1 + \sphericalangle \beta_1 = 1 \text{ dr}}$$

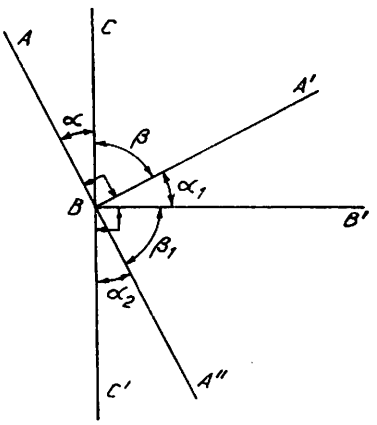


Fig. 18.28

18.1.9. Determinarea lungimii unui segment (distanța între două puncte) și a înclinării lui față de axa OX

Considerăm segmentul ale cărui extremități sînt A_1 (x_1, y_1) și $A_2(x_2, y_2)$. Proiecțiile celor două puncte pe axa OX sînt M și M_1 iar pe axa OY sînt N și N_1 (fig. 18.29) și $P = NA_1 \cap A_2M_1$. Din triunghiul dreptunghic A_1A_2P, rezultă

$$\boxed{\overline{A_1A_2} = \sqrt{\overline{A_1P}^2 + \overline{A_2P}^2}}$$

$\overline{A_1P} = x_2 - x_1$; $\overline{A_2P} = y_2 - y_1$, rezultă relația care dă distanța între două puncte A_1 (x_1, y_1) și A_2 (x_2, y_2)

$$\boxed{\overline{A_1A_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Distanța de la origine O (0,0) la un punct P (x, y) al planului este dată de relația:

$$\boxed{\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Din fig 18.29 se observă că : $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{A_2P}{A_1P} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Rezultă că relația $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$ determină înclinarea segmentului A_1A_2 față de axa OX.

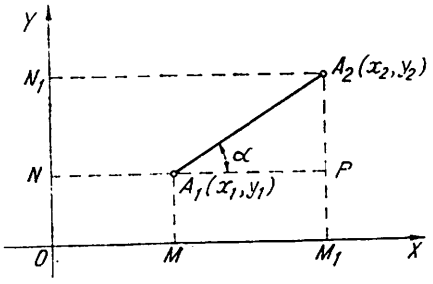


Fig. 18.29

Cînd segmentul este definit de origine și un punct P (x, y) atunci înclinarea segmentului este dată de relația

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}}$$

Exerciții:

1. Reprezentați pe o axă punctele: $A(7)$, $B(-5)$ și $M\left(\frac{1}{7}\right)$ și calculați raportul $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.

2. Dacă a, b, c sînt abscisele punctelor respectiv A, B și C determinați abscisa m a punctului M astfel încît să existe relația:

$$\overline{AB} + 2\ \overline{BC} + 3\ \overline{CD} + 4\ \overline{MA} = 0$$

R. $m = 3a - b - c$

3. Determinați abscisa punctului M pe axa Δ pe care sînt punctele A, B, C, D, de abscisă respectiv, a, b, c, d, astfel încît să fie satisfăcută relația

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$$

Stabiliți condiția pentru ca punctul M să fie la distanță finită

R. $m = \dfrac{ab - cd}{(a+b) - (c+d)}$

Condiția. Cele două segmente să nu aibă același mijloc.

18.2. DIRECȚIA UNEI DREPTE

18.2.1. Parametrii directori Cosinusuri directoare Panta

Dacă se cunosc unghiurile (α, β, γ) pe care o direcție din spațiu le formează respectiv cu direcțiile pozitive ale celor trei axe de coordonate, direcția respectivă se consideră determinată (fig. 18.30). Un vector coliniar cu o direcție constituie ceea ce numim *vectorul director* al direcției respective.

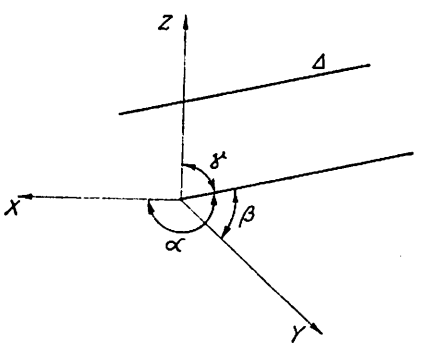


Fig. 18.30

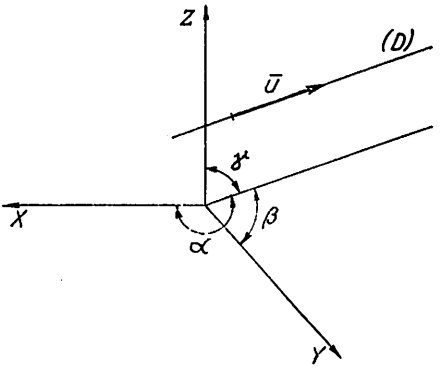


Fig. 18.31

Proiecțiile ortogonale, pe cele trei axe de coordonate rectangulare ale vectorului director al unei direcții date, constituie parametrii directori ai direcției respective.

Vectorul unitate coliniar cu o direcție se numește versor director al direcției respective.

Proiecțiile ortogonale pe cele trei axe de coordonate rectangulare ale versorului director al unei direcții constituie cosinusurile directoare ale direcției respective. Ele se notează convențional cu (α, β, γ) (fig. 18.31).

Deoarece s-au notat convențional cu α, β și γ proiecțiile versorului $\bar{u}$ pe axele de coordonate, rezultă că:

$$\boxed{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1}$$

$$\text{pr.}_x\bar{U} = 1 \cdot \cos(O_x, \Delta) = \alpha$$
$$\text{pr.}_y\bar{U} = 1 \cdot \cos(O_y, \Delta) = \beta$$
$$\text{pr.}_z\bar{U} = 1 \cdot \cos(O_z, \Delta) = \gamma$$

Se spune că două drepte paralele între ele au aceeași direcție. În continuare ne propunem să definim analitic o direcție. Considerăm un sistem de axe rectangulare și prin originea lui ducem o dreaptă paralelă cu direcția dată.

Coordonatele a și b ale unui punct oarecare P de pe dreaptă (diferit de origine) determină dreapta și implicit și direcția dată. Aceste coordonate constituie ceea ce am definit parametrii directori ai direcției.

O direcție are o infinitate de perechi de parametrii directori, deoarece punctul P poate fi luat oriunde pe dreaptă (mai puțin în origine).

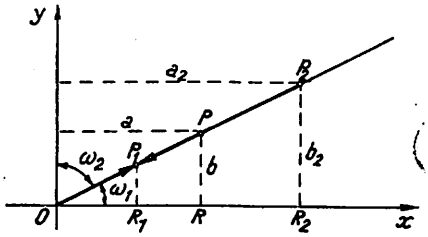


Fig. 18.32

Între perechile de parametri ai unei direcții se poate scrie proporția:

$$\boxed{\frac{a_2}{a} = \frac{b_2}{b}}$$

rezultată din asemănarea triunghiurilor OPR și OP_2R_2 (fig. 18.32).

Dacă punctul P este considerat în punctul P_1 la distanța de o unitate de origine și dacă se notează cu ω_1 și ω_2 unghiurile, după cum rezultă din triunghiul dreptunghic OP_1R_1 (fig. 18.32) se poate scrie:

$$\alpha = \cos\ \omega_1\ ;\ \beta = \cos\ \omega_2 = \sin\ \omega_1$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

Se observă că aceşti parametri directori sînt cosinusurile directoare ale unghiurilor făcute de direcţie cu axele de coordonate.

Dacă se cunosc cosinusurile directoare ale unei direcţii, se pot calcula imediat o infinitate de perechi de parametri directori, înmulţind cosinusurile cu un factor arbitrar diferit de zero.

Atunci cînd se cunoaşte o pereche de parametri directori n_1 n_2 şi trebuie calculată una din perechile de cosinusuri directoare, se rezolvă sistemul:

$$\frac{\alpha}{n_1} = \frac{\beta}{n_2};\ \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

Dacă se notează valoarea rapoartelor cu λ rezultă:

$$\alpha = \lambda n_1,\quad \beta = \lambda n_2$$

Înlocuind în ecuaţia a doua a sistemului rezultă:

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \text{ şi prin urmare}$$

$$\boxed{\alpha = \pm \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}} \qquad \boxed{\beta = \pm \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}}$$

Atunci cînd $n_1 \neq 0$, perechea de parametri $(n_1\ n_2)$ se poate înmulţi cu $\frac{1}{n_1}$ obţinîndu-se o nouă pereche de parametri $\left(1, \frac{n_2}{n_1}\right)$ care defineşte aceeaşi direcţie.

Cantitatea $m = \frac{n_2}{n_1}$ poartă numele de *pantă sau coeficient unghiular.*

Cînd se cunoaşte panta, se cunoaşte direcţia dată de parametrii (1,m) şi unghiul ω_1 (pînă la un unghi multiplu de π)

$$\text{Rezultă că ;}\ m = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tg} \omega_1$$

$$m = \operatorname{tg} \omega_1$$

Cînd o dreaptă D este definită prin coordonatele (x_1, y_1), (x_2, y_2) respectiv ale punctelor A_1 şi A_2, atunci parametrii directori ai dreptei sînt diferenţele:

$$(x_2 - x_1,\quad y_2 - y_1)$$

Panta direcţiei respective va fi: $\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

18.2.2. Direcție orientată

Toate dreptele paralele cu o dreaptă dată și orientate în același sens definesc o direcție orientată.

Pentru a afla cosinusurile directoare ale unei direcții orientate, cînd se cunosc o pereche de parametrii ai direcției, se procedează ca mai înainte cu deosebirea că semnul în fața radicalului este numai + deoarece factorul λ trebuie să fie pozitiv.

Rezultă că unei direcții orientate din plan îi corespunde o singură pereche de cosinusuri directoare și invers.

18.2.3. Unghiul unei direcții orientate cu axa Ox

Considerăm direcția orientată *OP*. Unghiul orientat al direcției *OP* cu axa *Ox* este unghiul format de axa *Ox* cu direcția orientată dată (unghiul cu care trebuie rotită axa *Ox* pentru a o face să coincidă cu *OP*)

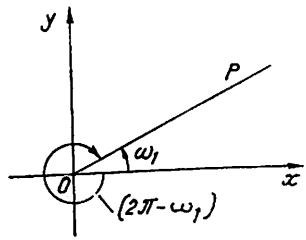


Fig. 18.33

Cînd direcția orientată este dată prin cosinusurile ei directoare (α și β) atunci unghiul orientat este determinat pînă la un multiplu de 2π, astfel:

$$\alpha = \cos\ \omega_1, \quad \beta = \sin\ \omega_1$$

18.2.4. Unghiul a două direcții

Unghiul a două direcții este unghiul determinat de vectorii directori ai direcțiilor date.

Considerăm direcțiile Δ_1 și Δ_2 definite prin vectorii lor directori respectiv, $\bar{v}_1\ (a_1,\ b_1,\ c_1)$ și $\bar{v}_2\ (a_2,\ b_2,\ c_2)$ (fig.18).

Din algebra vectorială unghiul a doi vectori $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ este:

$$\cos\ (\bar{v}_1,\ \bar{v}_2) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} = \cos\theta \text{ (fig.18.34).}$$

Semnul + sau — se consideră după cum unghiul θ este ascuțit sau obtuz.

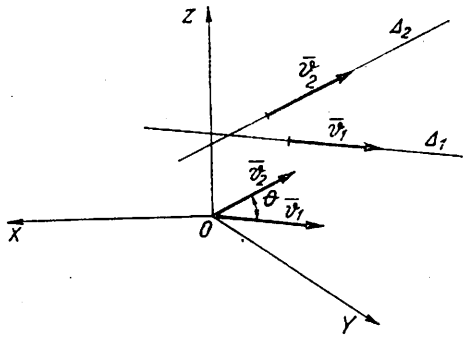


Fig. 18.34

Condiția necesară și suficientă ca două *direcții* D_1 *și* D_2 definite prin vectorii lor directorii $\bar{v}_1\ (a_1, b_1, c_1)$, $\bar{v}_2\ (a_2, b_2, c_2)$ să fie perpendiculare este:

$$a_1\ a_2 + b_1\ b_2 + c_1\ c_2 = 0$$

deoarece în acest caz, $\cos\theta = 0$ deci $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Două direcții Δ_1 și Δ_2 definite prin vectorii lor directori respectiv $\bar{v}_1\ (a_1, b_1, c_1)$, $\bar{v}_2\ (a_2, b_2, c_2)$ sînt paralelele atunci cînd:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$ adică $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ sînt coliniare.

18.2.5. **Exerciții:**

1. Bisectoarea I a axelor de coordonate are parametrii 1,1 sau 2,2. Cosinusurile directoare ale aceleiași drepte sînt $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$, iar panta ei este 1.

Pe aceeași dreaptă se află două drepte orientate care au parametri directori (a,a) — pentru una $a > 0$ pentru alta $a < 0$. Stabiliți cosinusurile directoare ale celor două drepte.

1. Construiți dreptele care trec prin origine și au pantele $\frac{3}{5}, \frac{8}{3}, \frac{3}{4}$.

3. Calculați unghiul dreptelor de pante 3 și $\frac{1}{2}$ utilizînd tablele de funcții trigonometrice.

4. Determinați cosinusurile directoare și pantele dreptelor care formează unghiul $\theta = \frac{\pi}{6}$ cu dreapta de pantă $m = \frac{1}{2}$.

5. Parametrii directori ai unei direcții fiind (3, — 6, 2) determinați cosinusurile directoare ale direcției respective.

6. Se cunosc două direcții ai căror parametrii directori sînt, respectiv (2, — 1,4) și (—3, 5,2). Calculați parametrii directori ai direcției care este perpendiculară pe cele două direcții date.

18.3. ECUAȚIILE DREPTEI

Considerăm un punct $P\ (x,y)$ din planul XOY. Punctul $P(x,y)$ descrie o anumită curbă atunci cînd se deplasează după o anumită lege — deci cînd există o legătură între coordonatele sale. Legătura dintre coordonate se exprimă algebric printr-o ecuație cu două necunoscute $F(x,y) = 0$.

În continuare se va arăta legătura care trebuie să existe între coordonatele unui punct mobil (variabil) astfel încît el să descrie o linie dreaptă. Punctul mobil se numește *punct curent*.

18.3.1. Ecuația dreptei paralelă la axa OX

Ecuația axei OX este : $\boxed{y = 0}$

Considerăm că $A(0,3)$ este punctul în care o paralelă la axa OX taie axa OY, deci $OA = 3$. Pe această paralelă considerăm mai multe puncte P, R, S, T.

În fig. 1.35 se observă că oricare ar fi abscisa lor ele au toate aceeași ordonată $y = 3$.

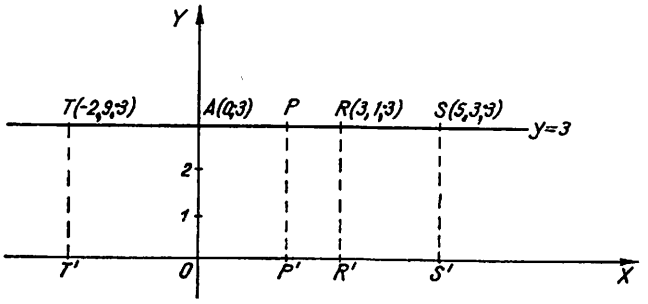


Fig. 18.35

Prin urmare ecuația $y = 3$ caracterizează toate punctele situate pe această paralelă.

Pe baza acestui raționament putem afirma că $y = b$ este ecuația unei paralele la axa OX.

18.3.2. Ecuația dreptei paralelă la axa OY

Ecuația axei OY este $x = 0$

Considerăm că $MC \parallel OY$ unde $M(2,5;0) \in OX$.

Toate punctele de pe paralela MC au aceeași abscisă indiferent ce ordonată au.

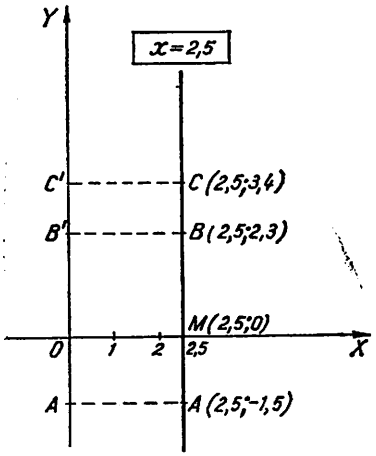


Fig. 18.36

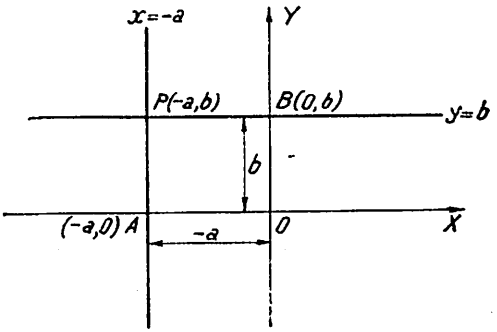


Fig. 18.37

Prin urmare abscisa $x = 2,5$ este ecuația unei drepte paralele cu axa OY. Generalizînd putem spune că $x = a$ este ecuația unei paralele la axa OY.

Paralelele $x = -a$ și $y = b$ au drept punct de intersecție punctul $P(-a,b)$ (fig.18.37).

18.3.3. Ecuația unei drepte ce trece prin origine

În acest caz, elementele care determină poziția dreptei sînt: *originea* și *coeficientul unghiular* $m = tg\,\alpha$.

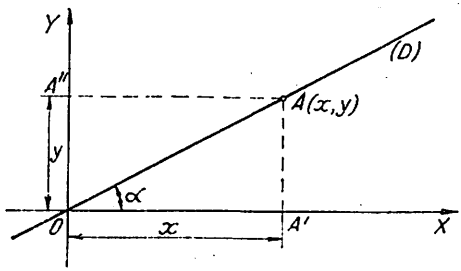


Fig. 18.38

Să considerăm pe dreapta (D) punctul curent $A\,(x,\ y) \in (D)$ (fig. 18.38). Între coordonatele punctului A există următoarea legătură:

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}} = \operatorname{tg}\alpha = m = \text{constant}$$

rezultă că: $m = \dfrac{y}{x}$

de unde: $\boxed{y = mx}$

Ecuația de gradul I cu două necunoscute $y = mx$, care reprezintă legătura între coordonatele punctului $A(x,y) \in (D)$, constituie *ecuația dreptei* (D), care trece prin origine.

Cînd coeficientul unghiular al dreptei m este mai mare decît zero $(m > 0)$, dreapta trece prin cadranele I și III; cînd coeficientul unghiular este mai mic decît zero $(m < 0)$, dreapta trece prin cadranele II și IV.

Cînd coeficientul unghiular $m = \operatorname{tg}\alpha = 1$, deci $\alpha = 45°$ (sau 225°) ecuația dreptei care trece prin origine este $\boxed{y = x}$ și reprezintă *bisectoarea cadranelor unu și trei* (fig.18.39)

Ea se mai poate prezenta și sub forma $\boxed{x - y = 0}$

Cînd coeficientul unghiular $m = \operatorname{tg}\alpha = -1$, deci $\alpha = -45°$, ecuația dreptei care trece prin origine este $\boxed{y = -x}$ și reprezintă *bisectoarea cadranelor doi și patru* (fig.18.39). Ea se mai poate prezenta și sub forma

$$\boxed{x + y = 0}$$

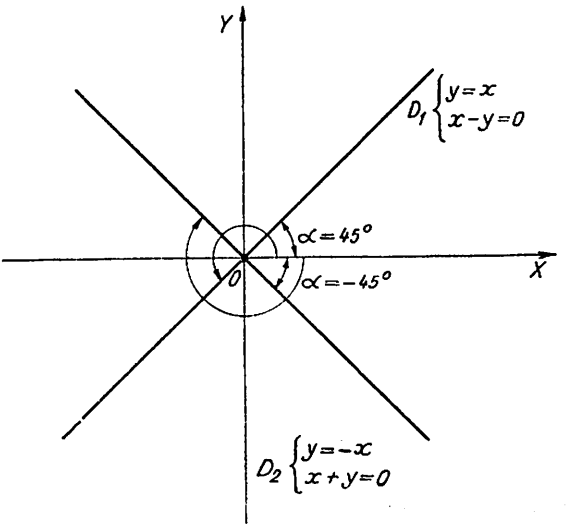


Fig. 18.39

18.3.4. Ecuația unei drepte oarecare

Ecuația dreptei definită prin coeficientul unghiular și ordonata la origine.

Considerăm dreapta (D) și punctul curent pe ea $P(x,y)$.

Ducem $PP' \,//\, OY$ $(P' \in OX)$. Prin punctul N ducem de asemenea $NR \,//\, OX$. Este evident că: $NR = OP' = x$;

$\overline{PR} = y - n$; și $\dfrac{PR}{NR} = \operatorname{tg}\alpha = m$ (constant)

Substituind se obține:

$$\frac{y-n}{x} = m$$

sau

$$\boxed{y = mx + n}$$

Aceasta este ecuația dreptei oarecare (D) exprimată cu ajutorul coeficientului unghiular (m) și al ordonatei la origine (n).

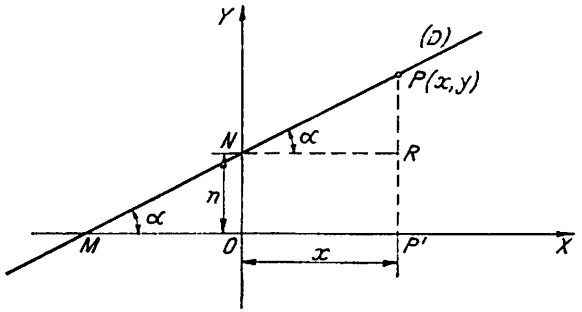


Fig. 18.40

Cînd ordonata la origine este egală cu zero ($n = 0$) ecuația reprezintă o dreaptă care trece prin origine și este paralelă cu dreapta dată.

18.3.5. Ecuația dreptei care trece prin două puncte

Considerăm punctele $A(x_1y_1)$ și $B(x_2y_2)$ care definesc dreapta D (fig.18.41).

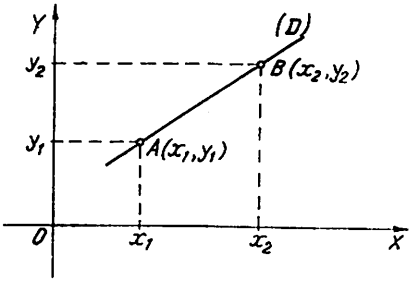


Fig. 18.41

Deoarece abscisa și ordonata punctelor unei drepte sînt date de relațiile:

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \; y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}$$

Eliminînd parametrul k între cele două relații se obține ecuația:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

de unde

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

Aceasta este ecuația dreptei care trece prin două puncte. Ea se mai poate scrie și sub forma:

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y - y_2) = 0$$

sau

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dacă unul din puncte, spre exemplu $B(x_2, y_2)$ este originea, adică $x_2 = y_2 = 0$, iar $A(x_1, y_1)$ un punct oarecare $(x_1, y_1 \neq 0)$ ecuația dreptei care trece prin cele două puncte este

$$\boxed{\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}} \text{ sau } \boxed{y = \frac{y_1}{x_1}x}$$

18.3.6. Ecuația dreptei prin tăieturi

Dreapta D taie axele de coordonate în punctele a și b.

Segmentele $OA = a$ și $OB = b$, se numesc tăieturile dreptei (fig. 18.42).

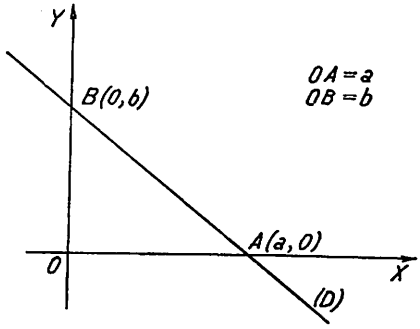


Fig. 18.42

Ecuația dreptei D care trece prin punctele $A\ (a, 0)$ și $B\ (0, b)$ este:

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b} \text{ sau } y=-\frac{b}{a}(x-a)$$

sau

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0}$$

Aceasta este ecuația dreptei prin tăieturi.

18.3.7. Ecuația normală a unei drepte

Considerăm o dreaptă (D) definită prin direcția normalei orientată arbitrar și prin mărimea algebrică a distanței de la dreaptă la origine.

Dreapta D intersectează axele în punctele $A\ (a, 0)$ și $B\ (0, b)$, (fig. 18.43).

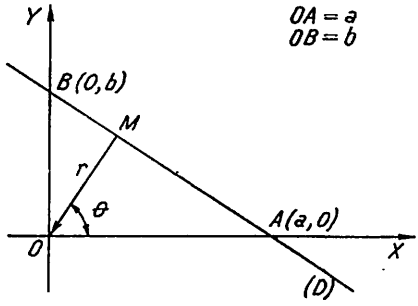


Fig. 18.43

Notăm cu M piciorul perpendicularei din O pe dreaptă și cu θ unghiul normalei orientate cu OX.

Din triunghiurile OMA și OMB se poate scrie:

$$a = -\frac{r}{\cos\theta}; \quad b = -\frac{r}{\sin\theta}$$

Eliminînd numitorii se obține:

$$\boxed{x\cos\theta + y\sin\theta - r = 0}$$

Dacă $r = 0$ și θ este unghiul normalei cu OX, unghiul dreptei D este $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Ecuația dreptei devine:

$$\boxed{x\cos\theta + y\sin\theta = 0}$$

18.3.8. Ecuația generală a dreptei

Din cele studiate pînă acum rezultă că ecuația unei drepte este o ecuație de gradul I în x și y. În general, orice ecuație de gradul I în coordonate carteziene reprezintă o dreaptă.

Considerăm ecuația de gradul I în x și y

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Dacă considerăm $B \neq 0$ și rezolvăm ecuația în raport cu y, obținem:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Această ecuație este o ecuație de pantă $m = -\frac{A}{B}$ și de tăietură $n = -\frac{C}{B}$, adică adusă sub forma:

$$y = mx + n$$

Dacă considerăm $A = 0$, ecuația generală devine:

$By + C = 0$ sau $y = -\frac{C}{B}$ = constant, adică o paralelă la OX.

Dacă considerăm $B = 0$, ecuația generală devine:

$Ax + C = 0$ sau $x = -\frac{C}{B}$ = constant, adică o paralelă la OY

Dacă considerăm $C = 0$, ecuația generală devine:

$Ax + By = 0$ sau $y = -\frac{A}{B}x = mx$, adică ecuația unei drepte care trece prin origine.

Dacă considerăm $A = 0$ și $C = 0$, ecuația generală devine: $By = 0$, adică ecuația axei OX.

Dacă considerăm $B = 0$ și $C = 0$, ecuația generală devine: $Ax = 0$, adică ecuația axei OY.

Condiția necesară și suficientă ca două ecuații de gradul I în x și y să reprezinte aceeași dreaptă este ca coeficienții lor să fie proporționali.

Considerăm ecuațiile:

$$Ax + By + C = 0 \quad (D)$$

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (D_1)$$

pentru care prin ipoteză avem

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C};$$

pantele și ordonatele la origine sînt respectiv:

$$m = -\frac{A}{B};\ m_1 = \frac{A_1}{B_1};\ n = -\frac{C}{B};\ n_1 = -\frac{C_1}{B_1}$$

Prin ipoteză avem: $m = m_1$ și $n = n_1$ ceea ce dovedește că cele două ecuații reprezintă aceeași dreaptă.

Condiția necesară și suficientă ca două ecuații de gradul I să reprezinte două drepte paralele este ca coeficienții variabilelor să fie proporționali.

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} \text{ deci } m = m_1$$

Această proporționalitate exprimă egalitatea pantelor, deci paralelismul dreptelor.

Ca o consecință se poate spune că *ecuațiile care diferă numai prin termenul liber reprezintă două drepte paralele.*

Condiția ca un punct oarecare să fie situat pe o dreaptă este ca ecuația dreptei să fie verificată de coordonatele punctului respectiv.

Condiția ca trei puncte $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ să fie coliniare este: cel de al treilea punct C să se găsească pe dreapta definită de punctele A și B.

Scriem ecuația dreptei AB sub forma:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Pentru ca punctul C să se găsească pe dreapta AB, coordonatele lui trebuie să verifice ecuația dreptei deci:

$$\boxed{\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}}$$

Aceasta este condiția ca cele trei puncte să fie colineare.
Această ecuație se poate scrie și sub forma unui determinant.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Condiția necesară și suficientă ca două drepte să fie perpendiculare este ca să aibă coeficienții unghiulari inverși și de semn contrar.
Considerăm dreptele date prin ecuațiile lor:

$$Ax + By + C = 0$$

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

Coeficienții lor unghiulari sînt egali cu:

$$m = -\frac{A}{B},\ m_1 = -\frac{A_1}{B_1},\ (m \neq m_1)$$

Considerăm vectorii $a(a_x, a_y)$ și $b\ (b_x, b_y)$ definiți prin componentele lor.

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j};\ b = b_x\bar{i} + b_y\bar{j}$$

unde $\bar{i}$ și $\bar{j}$ sînt versorii axelor.

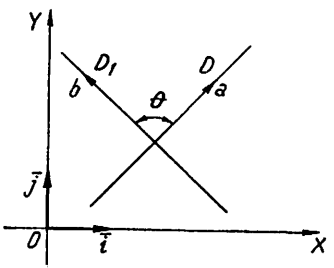


Fig. 18.44

Unghiul θ format de vectorii a și b are valoarea:

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + b_x^2} \cdot \sqrt{a_y^2 + b_y^2}}$$

Acest unghi al vectorilor este același cu unghiul dreptelor suport, ceea ce înseamnă că:

$$m = \frac{a_y}{a_x}; \quad m_1 = \frac{b_y}{b_x}$$

Dacă în relația care dă valoarea cos θ se împart termenii cu $a_y\ b_y$ se obține:

$$\cos \theta = \frac{1 + mm_1}{\sqrt{(1 + m^2)\ (1 + m_1^2)}}$$

Dacă cele două drepte sînt perpendiculare $\theta = 90°$, deci cos $\theta = 0$, rezultă:

$$1 + mm_1 = 0 \text{ sau } \boxed{m = -\frac{1}{m_1}}$$

18.3.9. **Ecuația polară a dreptei**

Considerăm un sistem de axe perpendiculare cu originea în pol și cu axa OX coincidentă cu axa polară.

În raport cu sistemul de axe XOY, ecuația dreptei considerate este:

$$Ax + By + C = 0$$

Cunoaștem că relațiile dintre coordonatele rectangulare plane și cele polare sînt:

$$x = r \cos \theta \ ; \ y = r \sin \theta$$

Dacă înlocuim pe x și pe y în aceste relații se obține ecuația polară a dreptei

$$\boxed{r\ (A \cos \theta + B \sin \theta) + C = 0}$$

Atunci cînd $C \neq 0$, deci dreapta nu trece prin pol, ecuația devine:

$$r = -\frac{C}{A \cos\theta + B \sin \theta}$$

Dacă $C = 0$ înseamnă că $A \cos \theta + B \sin \theta = 0$ adică $\operatorname{tg} \theta = -\frac{A}{C}$ sau $\theta =$ constant.

Axa polară are ecuația

$$\theta = 0 \text{ sau } \theta = k$$

Dreapta perpendiculară pe axa polară prin pol are ecuația

$$\theta = \frac{k\pi}{2} \text{ sau } \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

O paralelă la axa polară are ecuația:

$$r \sin \theta = \text{constant}$$

O perpendiculară la ea, însă care nu trece prin pol are ecuația

$$r \cos \theta = \text{constant}.$$

18.3.10. Poziţiile relative ale dreptelor în plan

A determina analitic intersecția a două drepte înseamnă a afla coordonatele punctului lor de intersecție, dacă dreptele sînt definite prin ecuațiile lor.

Considerăm ecuațiile dreptelor (D) și (D_1) și punctul de intersecție $M(x, y)$.

$$D = Ax + By + C = 0 \text{ și } D_1 = A_1x + B_1y + C_1 = 0;$$

Punctul de intersecție fiind un punct comun al celor două drepte, coordonatele sale trebuie să satisfacă ambele ecuații. Prin urmare coordonatele punctului de intersecție se obțin rezolvînd sistemul format de cele două ecuații lineare.

Cunoaștem din algebră că sistemul admite o pereche unică de soluții pentru x și y, atunci și numai atunci cînd

$$d = \begin{vmatrix} A & A_1 \\ B & B_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Valorile necunoscutelor x și y sînt date de rapoartele:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}$$

sau

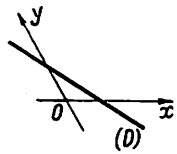
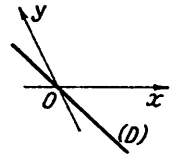
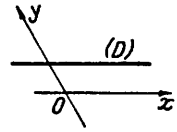
$$x = -\frac{CB_1 - BC_1}{AB_1 - A_1B} \qquad y = -\frac{AC_1 - A_1C}{AB_1 - A_1B}$$

Dacă $AB_1 - A_1B \neq 0$ sistemul de ecuații este un sistem Cramer și are soluție unică.

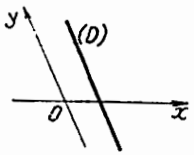
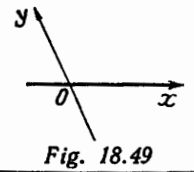
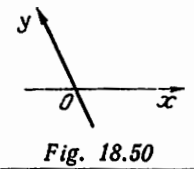
Cele două drepte nu sînt nici confundate și nici paralele deci au un punct comun $M(x_1y)$. Dreptele se intersectează în acest punct.

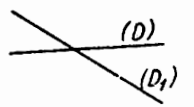
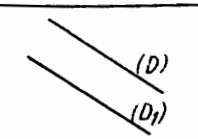
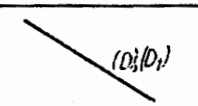
Dacă $d = 0$ deci $AB_1 - A_1B = 0$ și $CB_1 - BC_1 \neq 0$ (pentru y $AC_1 - CA_1 \neq 0$) sistemul este imposibil (nu admite nici o soluție) și prin urmare dreptele nu au nici un punct comun la distanță finită. Ele sînt paralele.

Dacă $d = 0$ deci $AB_1 - A_1B = 0$ și $CB_1 - BC_1 = 0$ $(AC_1 - CA_1 = 0)$ sistemul este nedeterminat (admite o infinitate de soluții) și prin urmare dreptele (D) și (D_1) se confundă.

Poziția unei drepte față de un sistem de coordonate carteziene generale		Condiția	Forma ecuației
 *Fig. 18.45*	1. Dreapta (D) nu trece prin origine însă taie ambele axe de coordonate	$A \neq 0$ $B \neq 0$ $C \neq 0$	$Ax + By + C = 0$
 *Fig. 18.46*	2. Dreapta (D) trece prin origine	$C = 0$	$Ax + By = 0$
 *Fig. 18.47*	3. Dreapta $D)$ este paralelă cu OX	$A = 0$ $C \neq 0$	$By + C = 0$ $y = b$ $(b \neq 0)$ sau

(continuare)

Poziția unei drepte față de un sistem de coordonate carteziene generale		Condiția	Forma ecuației
 *Fig. 18.48*	4. Dreapta (D) este paralelă cu OY	$B = 0$ $C \neq 0$	$Ax + C = 0$ sau $x = a\ (a \neq 0)$
 *Fig. 18.49*	5. Dreapta coincide cu axa OX	$A = 0$ $C = 0$	$y = 0$
 *Fig. 18.50*	6. Dreapta coincide cu axa OY	$B = 0$ $C = 0$	$x = 0$

Poziția a două drepte una față de cealaltă		Condiția
 *Fig. 18.51*	1. Dreptele (D) și (D_1) sînt concurente	$\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \neq 0$
 *Fig. 18.52*	2. Dreptele (D) și (D_1) sînt paralele	$A = \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = 0$ iar unul din determinanți $\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}$ sau $\begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix}$ este diferit de zero
 *Fig. 18.53*	3. Dreptele sînt confundate	$\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix} = 0$

18.4. APLICAȚII

18.4.1. Îndreptarea piesei de bază pe direcția de bază

1. *Prin procedeul jaloanelor*

În punctul P se marchează locul piesei de bază.

Pe direcția de bază se instalează jaloanele A_1 și A_2 astfel încît:

$$\overline{PA_1} = \overline{A_1A_2}$$

La aducerea piesei pe poziție, luneta piesei nu se instalează exact în punctul P care marchează locul piesei de bază ci într-un punct apropiat P_1 astfel încît

$\overline{P_1A_1} = \overline{PA_1} = \overline{A_1A_2}$ de unde rezultă că:

$\alpha = \beta$ (unghiuri care se opun la laturi egale);

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \beta_1 \\ \alpha_1 &= \alpha_2 \end{aligned}\right\} \text{(unghiuri opuse la vîrf)}$$

Cu deriva la gradațiunea origină (30-00) se ochește jalonul îndepărtat (A_2). Prin reperarea jalonului apropiat (A_1) se măsoară unghiul $A_2P_1A_1 = \beta$ a cărui valoare este egală cu deriva de reperaj pe jalonul apropiat (A_1) modificată cu 30-00.

Cu deriva de reperaj pe aparat se ochește din nou jalonul îndepărtat (A_2); cu această operațiune, linia 30-00 a lunetei se îndreaptă pe DB_1 rotindu-se cu unghiul α_1.

Deoarece $\alpha_1 = \alpha_2$ iar $\alpha_2 = \beta_1$; $\beta_1 = \beta$; rezultă că $\alpha_2 = \alpha$ deoarece $\beta = \alpha$ dar $\alpha_2 = \alpha_1$ deci $\alpha = \alpha_1$.

α și α_1 fiind unghiuri alterne interne formate de secanta P_1A_2 cu dreptele PA_2 și PDB_1 rezultă că $PA_2 // PDB_1$.

Deoarece axul țevii tunului este paralel cu linia 30-00 a lunetei, piesa este îndreptată pe direcția de bază.

2. Să se determine deriva pe punctele de ochire de zi și de noapte, cunoscînd că piesa de bază a fost îndreptată, cu ajutorul jaloanelor, pe direcția $DB = 8 - 80$ cunoscînd: gismentul direcției piesă-punct de ochire de zi $G_{PO_Z} = 27\text{-}10$ iar gismentul direcției piesă-punct de ochire de noapte $G_{PO_N} = 40\text{-}80$.

Din fig. 18.55. rezultă: $d_z = GDB_1 + 30\text{-}00 - G_{PO_Z}$.

$$d_z = 8\text{-}80 + 30\text{-}00\ 27\text{-}10$$

$$d_z = 11 - 70$$

Determinarea derivei:

$\Delta_N = G_{DB} + 30\text{-}00 - G_{PO_N}$

$\Delta_N = 8\text{-}80 + 30\text{-}00 - 40\text{-}70 = 38\text{-}80 - 40\text{-}70$

$\Delta_N = 98\text{-}80 - 40\text{-}70 = 58\text{-}10$

$\boxed{\Delta_N = 58 - 10}$

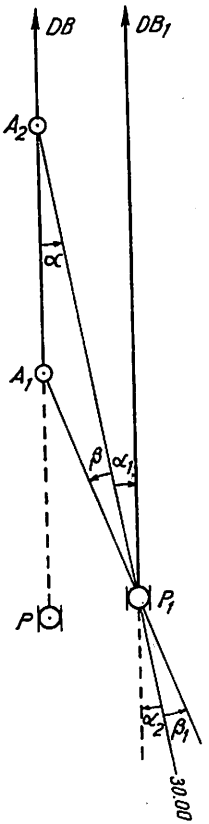


Fig. 18.54

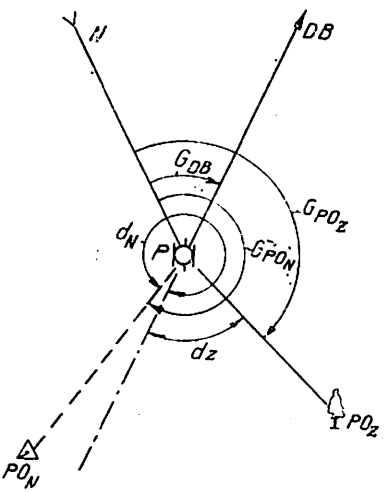


Fig. 18.55

3. *Îndreptarea piesei de bază pe direcția de bază cu ajutorul goniometrului busolă (fig. 18.56).*

a) *Folosind azimutul magnetic.* Cu goniometrul busolă instalat înapoi și lateral la o depărtare de 30 m de piesă, se măsoară azimutul magnetic al direcției goniometru-piesă (Am_p).

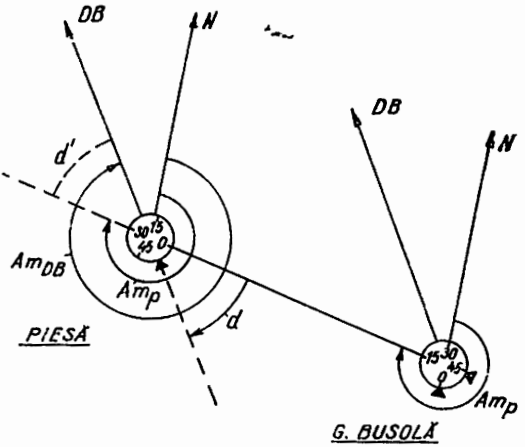


Fig. 18.56

Din figură rezultă că deriva cu care trebuie să ochească ochitorul pe goniometru pentru ca luneta tunului să se îndrepte pe direcția de bază este dată de relația:

$$d = Am_{DB} - Am_p$$

Cînd azimutul magnetic al piesei este mai mare decît azimutul magnetic al direcției de bază, deriva așa cum rezultă și din figură este dată de relația:

$$d = Am_{DB} + 60\text{-}00 - Am_p$$

b) *Folosind discul derivelor.* Pe goniometrul busolă orientat se înregistrează pe discul și tamburul azimuturilor gismentul direcției de bază (G_{DB}).

Se aduce gradațiunea 0 (zero) a discului și tamburului derivelor în dreptul indicelui „*D*“ după care se blochează mișcarea lor.

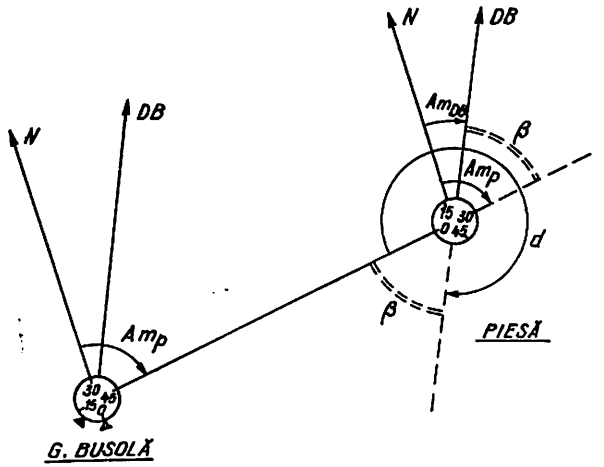


Fig. 18.57

Se repereză luneta piesei de bază — se citește în dreptul indicelui „*D*“ gradațiunea înregistrată pe discul și tamburul derivelor. Această citire este egală cu deriva cu care piesa va ochi pe goniometrul busolă (fig. 18.58, fig. 18.59).

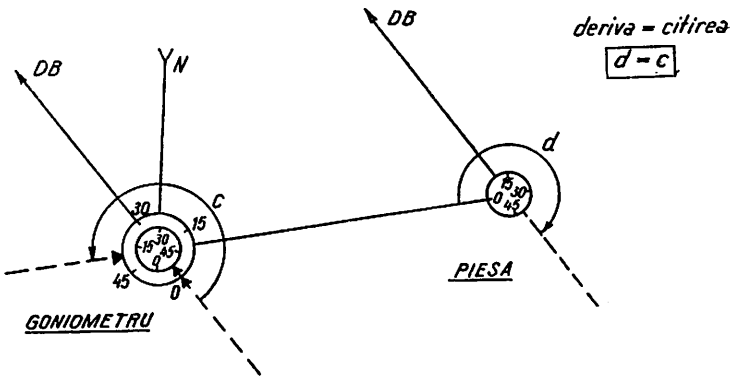


Fig. 18.58

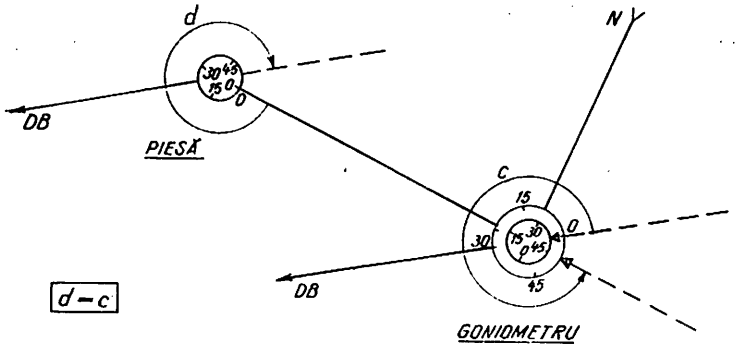


Fig. 18.59

18.4.2. Transportul orientării prin drumurile de unghiuri

1. *Cu aparatul orientat*

Să se determine prin calcul și să se justifice grafic ce gisment trebuie înregistrat pe aparat în punctele B, C și D, pentru ca vizînd pe punctul anterior de la mișcarea neînregistratoare aparatul să se orienteze pe direcția nord caroiaj, cunoscînd că s-a calculat gismentul direcției AM ($G_{AM} = 49\text{-}55$); s-a orientat goniometrul-busolă și s-a măsurat gismentul direcției AB ($G_{AB} = 23\text{-}10$); s-a orientat aparatul în B înregistrînd $G_{AB} + 30\text{-}00$ și ochind pe A și după aceea s-a măsurat gismentul direcției BC ($G_{BC} = 13\text{-}00$). La fel se determină gismentul direcției CD ($G_{CD} = 24\text{-}10$).

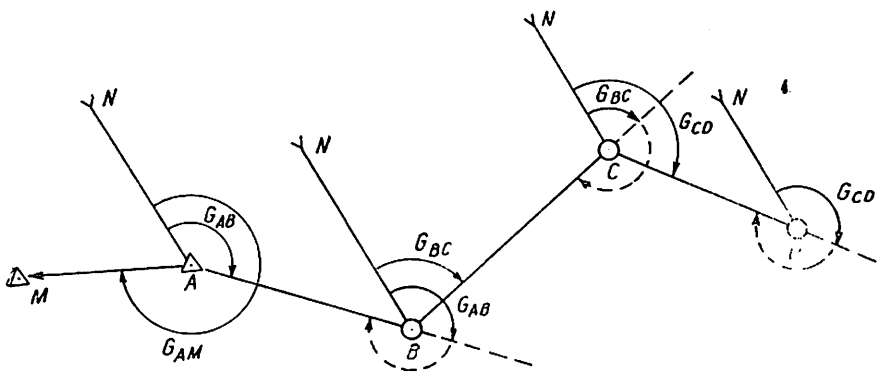


Fig. 18.60

Pentru orientarea aparatului în punctul D se calculează gismentul direcției DC.

$$G_{DC} = G_{CD} + 30\text{-}00 = 24\text{-}10 + 30\text{-}00 = 54\text{-}10$$

Înregistrînd pe aparat 54-10 și ochind pe C, aparatul este orientat în punctul D.

2. *Cu aparatul neorientat.*

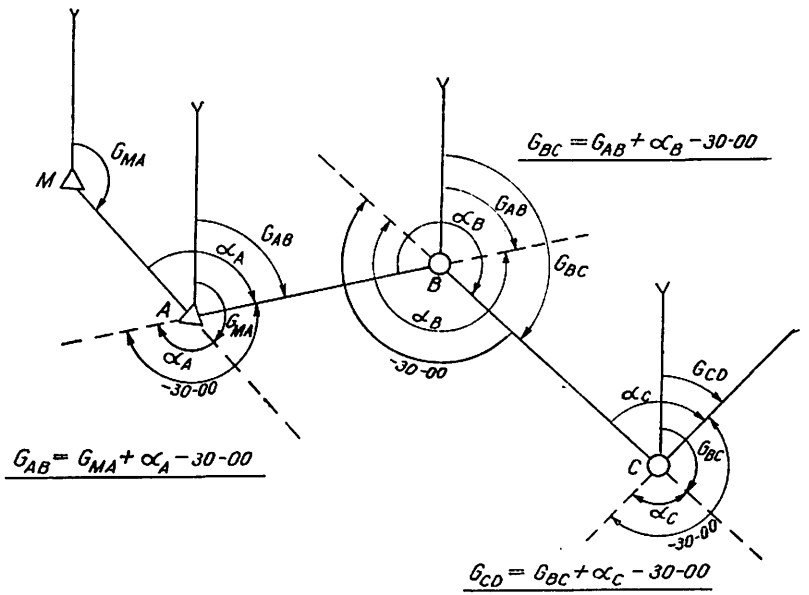


Fig. 18.61

3. *Transport de orientare prin reperare simultană pe același astru*

Justificare și relații

Exemplu: Pentru a transporta orientarea din „A" în „B" s-au măsurat pe un astru următoarele unghiuri orizontale:

În punctul A.	În punctul B.
1. $\beta_A = 17\text{-}18$;	1. $\beta_B = 9\text{-}75$;
2. $\beta_A = 17\text{-}20$;	2. $\beta_B = 9\text{-}77$;
3. $\beta_A = 17\text{-}22$;	3. $\beta_B = 9\text{-}79$
4. $\beta_A = 17\text{-}24$;	4. $\beta_B = 9\text{-}82$

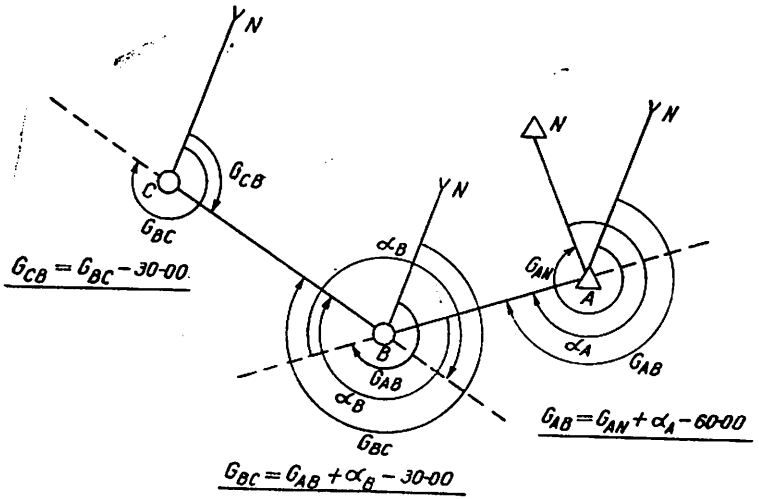


Fig. 18.62

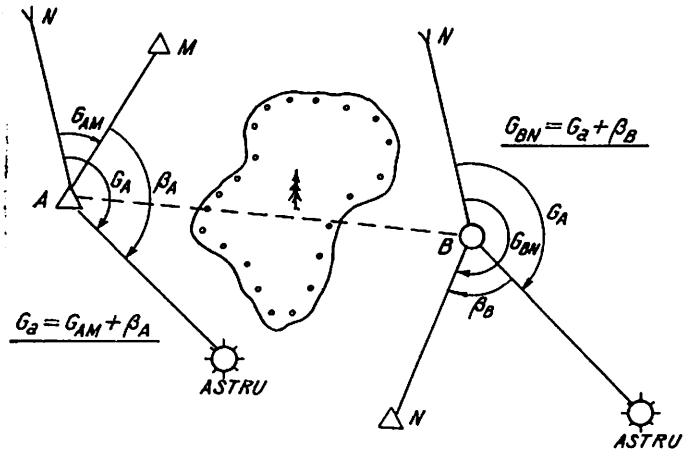


Fig. 18.63

Ştiind că gismentul direcţiei AM este $G_{AM} = 7\text{-}18$ să se afle valoarea gismentului direcţiei BN pentru fiecare operaţie şi valoarea lui medie ($G_{BN\text{mediu}}$).

În punctul „A“ 1. $Ga = 7 - 18 + 17 - 18 = 24 - 36$
2. $Ga = 7 - 18 + 17 - 20 = 24 - 38$
3. $Ga = 7 - 18 + 17 - 22 = 24 - 40$
4. $Ga = 7 - 18 + 17 - 24 = 24 - 42$

În punctul „B“ 1. $G_{BN} = 24 - 36 + 9 - 75 = 34 - 11$
2. $G_{BN} = 24 - 38 + 9 - 77 = 34 - 15$
3. $G_{BN} = 24 - 40 + 9 - 79 = 34 - 19$
4. $G_{BN} = 24 - 42 + 9 - 82 = 34 - 24$
G_{BN} mediu $= 34 - 17$

4. Executîndu-se un transport de orientare cu aparatul oriental, au fost măsurate în teren următoarele gismente:

$$G_1 = 5 - 10;\ G_2 = 11 - 15;\ G_3 = 14 - 25;\ G_4 = 16 - 10;\ G_5 = 18 - 10$$
$$G_6 = 21 - 10;\ G_7 = 31 - 12;\ G_8 = 41 - 00.$$

Să se determine valoarea gismentului care s-a înregistrat pe aparat, în vederea orientării prin vizare inversă în punctele A, B, C, D, E, F, G, H.

Justificați grafic valoarea gismentelor determinate prin calcul pentru punctele A, C, E, G.

5. Pentru executarea unui transport de orientare prin drumuire de unghiuri, cu aparatul neorientat, s-au măsurat în stînga drumuirii următoarele unghiuri orizontale:

$$\beta_1 = 22 - 00;\ \beta_2 = 29 - 88;\ \beta_3 = 38 - 10;\ \beta_4 = 21 - 10;\ \beta_5 = 34 - 05;$$
$$\beta_6 = 18 - 50;\ \beta_7 = 41 - 20;\ \beta_8 = 44 - 26;\ \beta_9 = 15 - 00;\ \beta_{10} = 46 - 80$$

Cunoscînd că gismentul direcției AM ($G_{AM} = 46 - 00$) să se determine valoarea gismentelor: G_1; G_2; G_3; G_4; G_5; G_6; G_7; G_8; G_9; G_{10}.

Justificați grafic valoarea gismentelor determinate prin calcul pentru vîrfurile: G_1; G_3.

6. În punctele „A“ și „B“ s-au măsurat pe un astru următoarele unghiuri orizontale:

1. $\beta_A = 38 - 10$	1. $\beta_B = 5 - 80$
2. $\beta_A = 38 - 12$	2. $\beta_B = 5 - 82$
3. $\beta_A = 38 - 14$	3. $\beta_B = 5 - 84$
4. $\beta_A = 38 - 15$	4. $\beta_B = 5 - 86$

cunoscînd gismentul direcției AM ($G_{AM} = 24 - 00$) să se determine valoarea medie a gismentului direcției BN și să se justifice grafic valoarea G_{BN}.

18.4.3. **Determinarea coordonatelor reperelor de tragere şi a obiectivelor folosind observarea conjugată atunci cînd punctele observării conjugate (cunoscute) nu sînt văzute între ele:**

Considerăm punctele observării conjugate de coordonate cunoscute. Se cer coordonatele reperului de tragere R. (fig. 18.64)

Justificarea procedeului:

Ecuaţia unei drepte, exprimată analitic sub formă explicită, este:

$$y = mx + n$$

unde x şi y sînt coordonatele unui punct de pe dreaptă, iar m este coeficientul unghiular al dreptei (m reprezintă tangenta unghiului format de axa orizontală cu dreapta „respectivă", unghi considerat în sens trigonometric) iar n este ordonata la origine a dreptei, fig. 18.65)

$$m = \operatorname{tg} \alpha;\ n = \overline{OM}$$

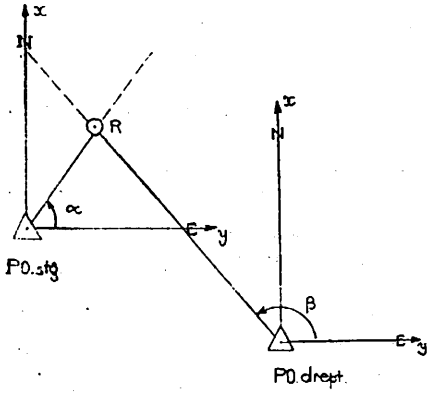


Fig. 18.64

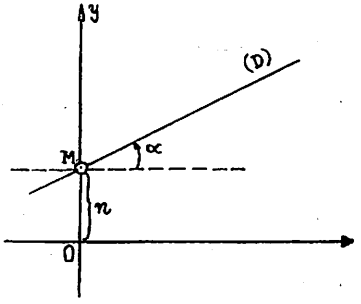


Fig. 18.65

Determinarea coordonatelor reperului de tragere (obiectivului), constă în determinarea ecuaţiilor dreptelor:

$PO_{stg.}$ — Reper de tragere şi PO_{drept} — Reper de tragere, drepte a căror intersecţie reprezintă tocmai reperul de tragere.

Sistemul de ecuaţii format este:

$$\begin{cases} y = m_1 x + n_1 \\ y = m_2 x + n_2 \end{cases}$$

unde: m_1 şi m_2 sînt coeficienţii unghiulari ai dreptelor;

n_1 şi n_2 sînt ordonatele la origine ale dreptelor (fig. 18.66)

Valorile coeficienților unghiulari m_1 și m_2 se obțin cu ajutorul relațiilor:

$m_1 = \pm \operatorname{tg} \alpha$ (după cum reperul (obiectivul) se află în stînga sau în dreapta direcției nord a $PO_{stîng}$, adică α este mai mare sau mai mic decît 90°).

$m_2 = \pm \operatorname{tg} \beta$ (în raport de poziția reperului sau valoarea unghiului β).

Dacă se consideră originea sistemului de axe în $PO_{stîng}$ atunci

$$n_1 = 0$$

$$n_2 = PO_{stg.} - M$$

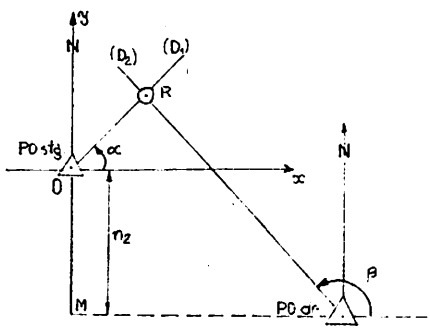


Fig. 18.66

Deci:

$$\begin{matrix} (D_1) \\ (D_2) \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} y = m_1 x + n_1 \\ y = m_2 x + n_2 \end{matrix} \right.$$

Pentru rezolvare sînt necesare următoarele date (fig. 18.67):

unghiul α (unghiul format de direcția est a $PO_{stg.}$ și Reper);

unghiul β (unghiul format de direcția est a PO_{drept} și Reper);

unghiul γ (unghiul format de direcția nord a $PO_{stg.}$ și direcția PO_{drept} -- Reper).

Δx (diferența x-urilor celor două puncte de observare)

Δy (diferența y-urilor celor două puncte de observare).

Valoarea unghiului γ este dată de relaţiile:

$$\gamma = \beta - \frac{\pi}{2}$$

(atunci cînd reperul (obiectivul) este în stînga axei Ox a PO_{drept}) (fig. 18.67):

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta$$

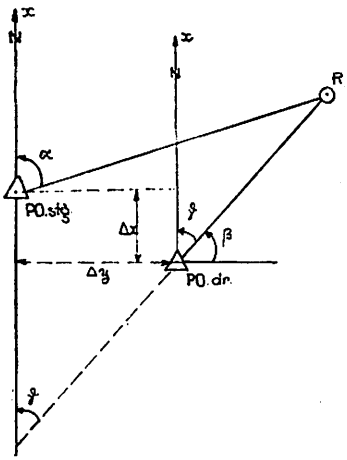


Fig. 18.67

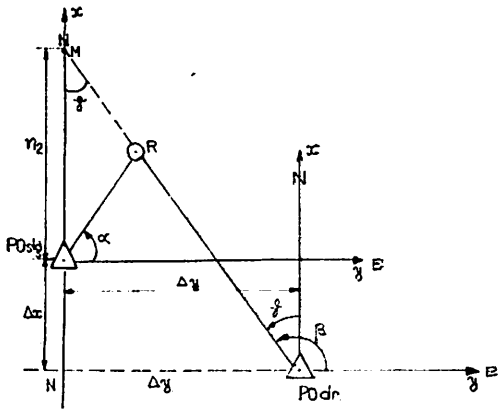


Fig. 18.68

(atunci cînd reperul (obiectivul) este în dreapta axei Ox a PO_{drept} (fig. 18.68)

Mod de rezolvare

a) Determinarea ecuaţiilor dreptelor (D_1) *şi* (D_2)

$$m_1 = \pm \operatorname{tg} \alpha; \quad m_2 = \pm \operatorname{tg} \beta$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta y}{n_2 + \Delta x}$$

Din această relaţie rezultă valoarea lui n_2

$$n_2 = \frac{\Delta y}{\operatorname{tg} \gamma} - \Delta x; \; n_1 = 0 \text{ (prin ipoteză).}$$

Pe baza acestor date se pot scrie ecuațiile dreptelor

$$(D_1)\ y = m_1 x + n_1 \qquad \boxed{y = \pm \operatorname{tg} \alpha\ x}$$

$$(D_2)\ y = m_2 x + n_2 \qquad \boxed{y = \pm \operatorname{tg} \beta\ x + \frac{\Delta y}{\operatorname{tg} \gamma} - \Delta x}$$

Valoarea lui n_2 (fig. 18.68) rezultă din triunghiul $MN\ PO_{drept}$ pe baza relației:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}} = \frac{\Delta y}{n_2 + \Delta x} \text{ de unde } n_2 = \frac{\Delta y}{\operatorname{tg}\gamma} - \Delta x.$$

Rezolvarea sistemului format de ecuațiile dreptelor (D_1) și (D_2)

$$\begin{cases} y = \pm \operatorname{tg} \alpha\, x \\ y = \pm \operatorname{tg} \beta\ x + \dfrac{\Delta y}{\operatorname{tg} \gamma} - \Delta x \end{cases}$$

dau coordonatele punctului de intersecție (R).
Soluțiile acestui sistem sînt:

$$\boxed{x = \frac{\dfrac{\Delta y}{\operatorname{tg}\gamma} - \Delta x}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta};}$$

$$\boxed{y = \frac{\operatorname{tg}\alpha\left(\dfrac{\Delta y}{\operatorname{tg}\gamma} - \Delta x\right)}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}}$$

Aplicație practică:

$$PO_{stîng}\ \begin{matrix} x = 71 \cdot 842 \\ y = 15 \cdot 104 \end{matrix} \qquad PO_{drept}\ \begin{matrix} x = 69 \cdot 377 \\ y = 16 \cdot 925 \end{matrix}$$

În teren, ținînd seama de corecția de busolă, s-a măsurat:

$$\alpha = 6\text{-}41;\ \beta = 18\text{-}89$$

Se determină unghiul γ:

$$\gamma = 18\text{-}89 - 15\text{-}00 = 3\text{-}89$$

Se scot valorile naturale ale tangentelor acestor unghiuri care reprezintă coeficienții unghiulari ai dreptelor

$$m_1 = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 6 - 41 = \operatorname{tg} 38°24' \approx 0{,}792$$

$$m_2 = -\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} 18 - 89 = -\operatorname{tg} 113°24' = -\operatorname{tg} 23°24' \approx -0{,}433$$

$$n_1 = 0 \text{ (prin ipoteză)}$$

$$n_2 = \frac{\Delta y}{\operatorname{tg} \gamma} - \Delta x$$

$$\Delta y = 16\,925 - 15\,104 = 1\,821$$

$$\Delta x = 71\,842 - 69\,377 = 2\,465$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} 3 - 89 = \operatorname{tg} 23°23' = 0{,}432$$

$$n_2 = \frac{1\,821}{0{,}432} - 2465 \approx 1750$$

Înlocuind valorile calculate, se obține sistemul:

$$\begin{cases} y = 0{,}792\ x \\ y = -0{,}433\ x + 1750 \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem se obține:

$$0{,}792\ x = -0{,}433\ x + 1750$$

$$x = \frac{1750}{1{,}225} = 1428$$

$$\boxed{x = 1428}$$

$$y = 0{,}792\ x = 0{,}792 \cdot 1428 = 1130{,}97$$

$$\boxed{y = 1131}$$

Determinarea coordonatelor reperului de tragere

$$x_R = x_{PO_{stg.}} + x = 71 \cdot 842 + 1428 = 73 \cdot 270$$

$$\boxed{x_R = 73270}$$

$$y_R = y_{PO_{stg.}} + y = 15104 + 1\,131 = 16 \cdot 235$$

$$\boxed{y_R = 16 \cdot 235}$$

În concluzie, în aplicarea procedeului trebuie avut în vedere următoarele:

Δx se ia plus sau minus după cum PO_{drept} este mai jos sau mai sus față de $PO_{stîng}$

Δy este totdeauna pozitiv, avînd în vedere faptul că PO_{drept} este mereu în dreapta.

Unghiurile α și β se măsoară cu goniometrul busolă (α din $PO_{stîng}$ și β din PO_{drept}) de la direcția EST a fiecărui punct de observare, ținînd seama de corecția de busolă.

Unghiul γ este egal cu diferența dintre β și unghiul drept, sau invers, după cum reperul (obiectivul) se găsește în stînga sau în dreapta direcției nord a punctului de observare drept.

Pentru rezolvare se folosește tabla funcțiilor trigonometrice naturale.

Coordonatele obținute prin rezolvarea sistemului

$$x = \pm \operatorname{tg} \alpha \, x$$

$$y = \pm \operatorname{tg} \beta \, x + \frac{\Delta y}{tg \, \gamma} - \Delta x$$

se adună la coordonatele punctului de observare stîng, care prin ipoteză este considerat originea sistemului de referință.

CAPITOLUL 19

GEOMETRIA PLANULUI

19.1. GENERALITĂȚI

19.1.1. Determinarea unui plan

Planul fiind o suprafață nemărginită, în geometrie se lucrează cu porțiuni de plan reprezentate prin diferite figuri geometrice plane (triunghi, dreptunghi, cerc, paralelogram etc.).

Un plan este determinat astfel:

— prin trei puncte neașezate în linie dreaptă;

— printr-o dreaptă și un punct exterior ei;

— prin două drepte concurente;

— prin două drepte paralele.

Cunoscînd axioma că trei puncte necoliniare determină un plan, demonstrați că printr-o dreaptă (AB) și un punct exterior ei (M) nu trece decît un singur plan.

19.1.2. Pozițiile unui punct în raport cu un plan

— punctul (A) se află în planul P;

— punctul (B) se află exterior planului P;

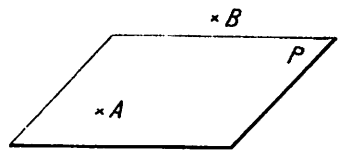


Fig. 19.1

Se mai spune că planul P trece prin punctul (A) și nu trece prin punctul (B).

19.1.3. Poziţiile unei drepte faţă de un plan

Dreapta (D) are un singur punct (I) comun cu planul (P). Se spune că dreapta este incidentă cu planul sau că dreapta taie planul.

Dreapta (MN) are două puncte comune cu planul Q, deci este conţinută în întregime în plan.

Dreapta (T) nu are nici un punct comun cu planul (S)

Dreapta (T) este paralelă cu planul (S).

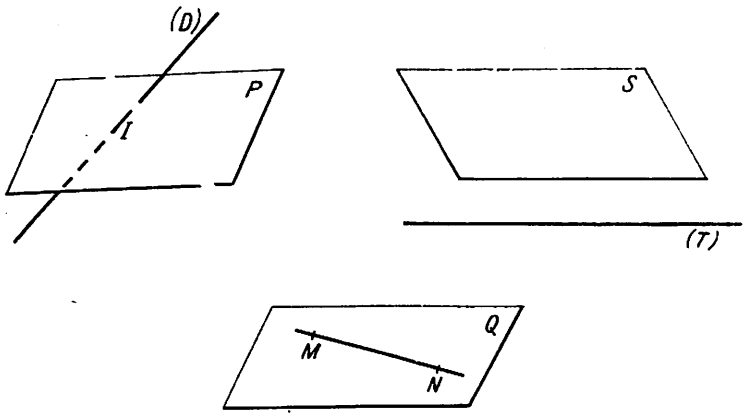


Fig. 19.2

19.1.4. Poziţiile a două drepte în spaţiu

— Drepte care au un singur punct comun, numite concurente. Dreptele AB şi CD, (fig. 19.3).

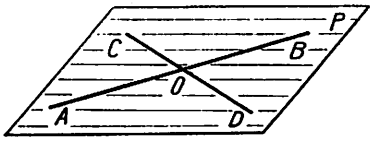


Fig. 19.3

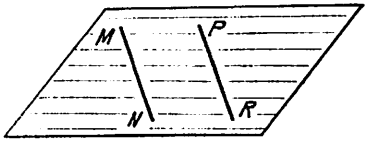
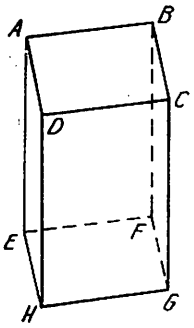


Fig. 19.4

— Drepte conţinute în acelaşi plan care nu au nici un punct comun numite paralele. Dreptele MN şi PR (fig. 19.4).



— Drepte care nu sînt conținute în același plan, nu au nici un punct comun numite drepte oarecare. Dreptele AB și CG (fig. 19.5).

Fig. 19.5

19.1.5. **Poziția a două plane**

Două plane pot avea toate punctele comune — ele coincid și formează același plan.

Două plane pot să se intersecteze, intersecția lor este o dreaptă (AB), (fig. 19.6).

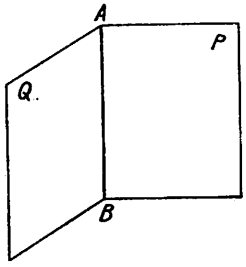


Fig. 19.6

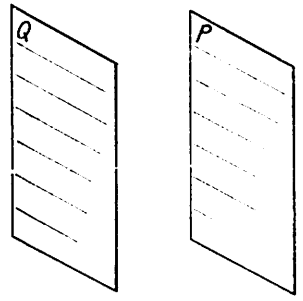


Fig. 19.7

Două plane pot să nu aibă nici un punct comun. Planele P și Q sînt paralele (fig. 19.7).

19.1.6. **Drepte paralele cu un plan**

Dacă o dreaptă din spațiu este paralelă cu o dreaptă conținută într-un plan, atunci dreapta din spațiu este paralelă cu planul.

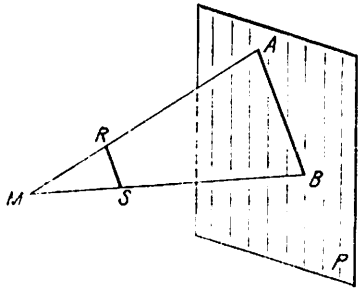


Fig. 19.8

Să considerăm un plan oarecare (P) și AB o dreaptă în acest plan. Fie M un punct exterior planului. Pe dreptele MA și MB luăm respectiv punctele R și S astfel încît:

$$AR = \frac{2}{3} MA \text{ și } BS = \frac{2}{3} MB$$

În triunghiul ABM se poate scrie:

$\frac{MR}{MA} = \frac{MS}{MB} = \frac{1}{3}$ de unde, conform reciprocei teoremei lui Thales rezultă: $\overline{RS} \,//\, \overline{AB}$.

Deoarece dreapta AB este conținută în planul P înseamnă că: $\overline{RS} \,//\, P$.

Demonstrați următoarele teoreme:

1) Dacă o dreaptă D este paralelă cu un plan P, orice plan Q care conține pe D taie planul P după o dreaptă D_1 paralelă cu D.

2) Dacă două drepte sînt paralele, orice plan care intersectează pe una, intersectează și pe cealaltă.

3) Dacă două drepte sînt paralele cu o a treia, cele două drepte sînt paralele între ele.

4) Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci cînd se duce o paralelă la dreapta dată printr-un punct al planului, această paralelă este conținută în planul dat.

5) Dacă o dreaptă este paralelă cu două plane neparalele, dreapta respectivă este paralelă cu intersecția celor două plane.

6) Atunci cînd o dreaptă se mișcă în spațiu rămînînd paralelă cu o dreaptă fixă și întîlnind o altă dreaptă de asemenea fixă, ea generează un plan.

19.1.7. **Plane paralele**

Am văzut că două plane sînt paralele dacă nu au nici un punct comun.

Dacă două plane sînt paralele, orice dreaptă conținută în unul din plane este paralelă cu celălalt plan.

Considerăm planele paralele $(P \,//\, Q)$ și dreapta AB conținută în planul P. Această dreaptă este paralelă cu planul Q deoarece nu există nici un punct „C" al planului Q prin care să treacă dreapta AB; dacă ar exista un asemenea punct acesta ar însemna să fie comun celor două plane, lucru imposibil deoarece planele sînt paralele (fig. 19.9).

Dacă printr-un punct M, exterior unui plan P se duc două drepte MA şi MB paralele cu planul P, cele două drepte determină un plan Q paralel cu planul P (fig. 19.10).

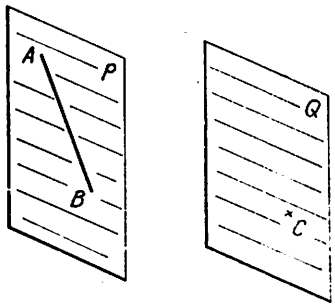


Fig. 19.9

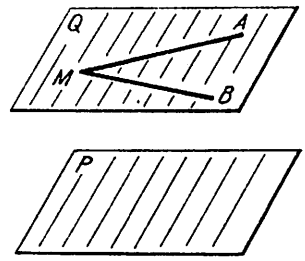


Fig. 19.10

Dacă două plane sînt paralele, orice dreaptă care intersectează pe unul, intersectează şi pe celălalt. Planele P şi Q sînt paralele iar dreapta D înţeapă planul P în punctul M şi planul Q în punctul N (fig. 19.11). Demonstraţi acest lucru.

Arătaţi că atunci cînd două plane sînt paralele, orice plan paralel cu unul din ele este paralel şi cu celălalt.

— Două plane paralele cu al treilea sînt paralele între ele.

Probleme:

1) Considerăm planul P reprezentat prin paralelogramul $ABCD$ şi planul Q, reprezentat prin dreptunghiul $CDFE$ (fig. 19.12). Se duc

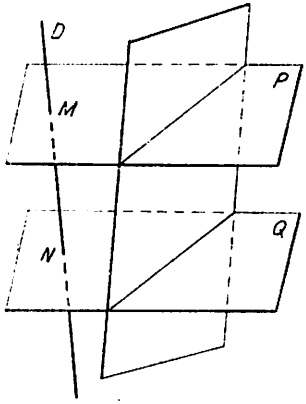


Fig. 19.11

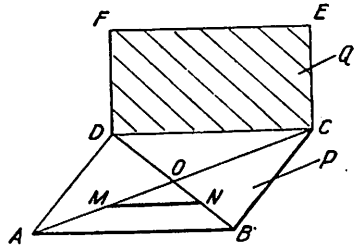


Fig. 19.12

diagonalele AC și BD. O fiind punctul lor de intersecție se unește mijlocul lui OA notat cu M cu mijlocul lui OB notat cu N. Demonstrați că $\overline{MN} \parallel Q$.

2) Arătați că, dacă un plan intersectează două plane secante după drepte paralele, atunci el este paralel cu dreapta lor de intersecție.

3) Duceți o dreaptă paralelă cu o dreaptă (D) care să întîlnească două drepte M și N, nesituate în același plan.

4) Arătați că trei plane oarecare au în general un punct comun. În ce situație cele trei plane nu au nici un punct comun? În ce caz cele trei plane au o infinitate de puncte comune și unde sînt situate aceste puncte comune.

5) Construiți o dreaptă care să se sprijine pe două drepte date și să fie paralelă cu o altă dreaptă dată.

6) Arătați în ce situație printr-o dreaptă se poate duce un plan paralel cu un alt plan.

7) Demonstrați că, dacă două triunghiuri, așezate în planuri diferite, au laturile respectiv paralele, dreptele care unesc vîrfurile triunghiurilor două cîte două sînt concurente sau paralele.

19.1.8. Drepte perpendiculare pe un plan

O dreaptă este perpendiculară pe un plan atunci cînd ea este perpendiculară pe orice dreaptă conținută în plan (formează cu oricare dreaptă a planului unghiuri drepte). Punctul în care dreapta înțeapă planul se numește piciorul perpendicularei. Definiția dată mai sus nu dă posibilitatea practică de a determina dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, deoarece este imposibil să se măsoare toate unghiurile pe care dreapta le face cu dreptele planului, ele fiind în număr infinit. Pentru a determina dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, facem apel la următoarea teoremă: *Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte neparalele conținute într-un plan, dreapta este perpendiculară pe orice dreaptă din acel plan, adică este perpendiculară pe plan.*

Considerăm planul P și dreapta AB perpendiculară pe dreptele D_1 și D_2. Dreapta AB înțeapă planul în punctul B. Pentru a arăta că dreapta AB este perpendiculară pe orice dreaptă (Δ) conținută în planul P și neparalelă cu nici una din dreptele D_1 și D_2, procedăm astfel:

Prin punctul B ducem paralelele d_1, d_2, δ, la dreptele D_1, D_2 și Δ, și le tăiem cu aceeași dreaptă în punctele C, E și F. Rezultă: $BC \parallel D_1$; $BE \parallel D_2$; $BF \parallel \Delta$. Prelungim dreapta AB și luăm segmentul $BA' = AB$. Unim punctele A și A' cu punctele E, C și F.

Prin ipoteză AB este perpendiculară pe D_1 și D_2, deci $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABE = 90°$. Trebuie arătat că $AB \perp \Delta$, adică și $\sphericalangle ABF = 90°$.

Deoarece $BE \perp ABA'$ și $BA = BA'$ se poate scrie că: $\overline{EA} = \overline{EA'}$ c a oblice egal depărtate de piciorul perpendicularei. Pe același consideren t $\overline{CA} = \overline{CA'}$.

Rezultă că $\Delta ACE = \Delta A'CE$ și deci

$$\sphericalangle ACF = \sphericalangle A'CF$$

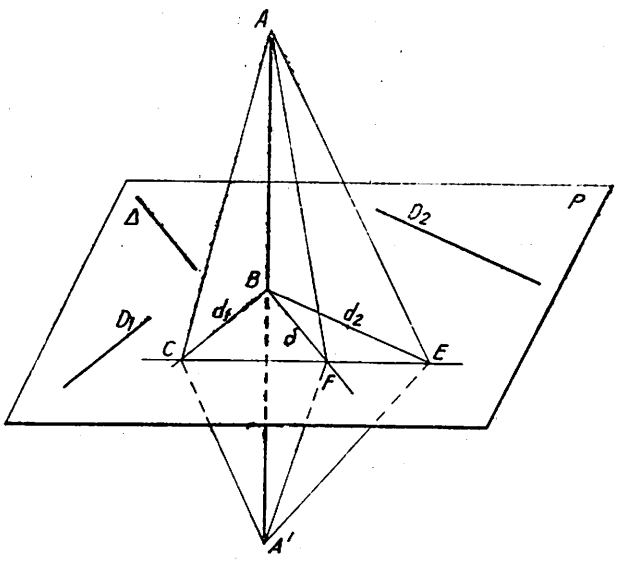


Fig. 19.13

Datorită faptului că $\overline{CA} = \overline{CA'}$, că $\sphericalangle ACF = \sphericalangle A'CF$ și că $\Delta\ ACF$ și $\Delta\ A'CF$ au latura CF comună, rezultă că:

$$\Delta\ ACF = \Delta\ A'CF, \text{ deci } \overline{AF} = \overline{A'F}$$

Triunghiul AFA' este deci isoscel și prin urmare BF care este mediană prin construcție ($AB = A'B$) este și înălțime. Deci BF este perpendiculară pe AA' în punctul B ($\overline{BF} \perp \overline{AB}$) ceea ce trebuia arătat.

Arătați că:

— Atunci cînd două plane sînt paralele, orice dreaptă perpendiculară pe unul din ele, este perpendiculară și pe celelalte;

— Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce un plan perpendicular pe dreapta respectivă și numai unul;

— Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, orice paralelă a ei este perpendiculară pe planul respectiv.

19.1.9. Perpendiculara și oblicele dintr-un punct la un plan

Dreapta care nu este nici perpendiculară pe plan și nici paralelă cu el poartă numele de oblică față de plan.

Dacă dintr-un punct exterior unui plan se duce perpendiculara pe plan și mai multe oblice, atunci:

— perpendiculara este mai scurtă decît oricare dintre oblice;

— oblicele ale căror picioare sînt egal depărtate de piciorul perpendicularei sînt egale;

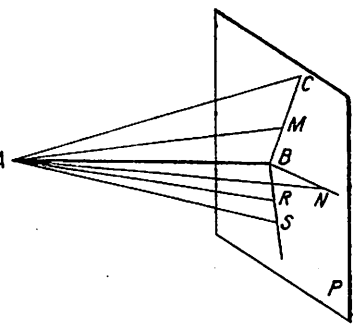


Fig. 19.14

— dintre două sau mai multe oblice, cea mai mare este aceea al cărei picior este mai depărtat de piciorul perpendicularei (fig. 19.14).

$$\overline{BC} > \overline{BM}$$

deci $\overline{AC} > \overline{AM}$

$$\overline{BM} = \overline{BR}$$

deci $\overline{AM} = \overline{AR}$

$$\overline{AB} < \overline{AM} < \overline{AC}$$

$$\overline{AB} < \overline{AN}$$

$$\overline{AB} < \overline{AR} < \overline{AS}$$

Rezultă că drumul cel mai scurt de la un punct din spațiu la un plan este perpendiculara dusă din punctul respectiv la plan.

19.1.10. Teorema celor trei perpendiculare

Dacă prin piciorul (B) al unei drepte (AB), perpendiculară pe un plan (P), se duce o perpendiculară BM pe o dreaptă (D) conținută în planul P, dreapta care unește punctul M cu un punct oarecare al dreptei AB este perpendiculară pe dreapta D (fig. 19.15).

$$\overline{AB} \perp P; \quad \overline{BM} \perp (D)$$

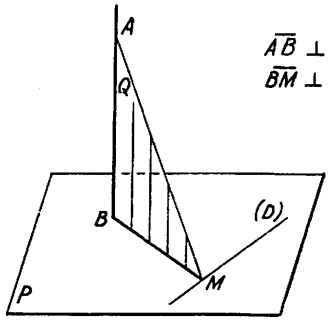


Fig. 19.15

Se cere să se demonstreze că $\overline{AM} \perp (D)$.

$\overline{AB}$ fiind perpendiculară pe planul P, este perpendiculară și pe dreapta (D).

$$\overline{AB} \perp (D)$$

Prin ipoteză $\overline{BM} \perp (D)$.

Dreptele concurente $\overline{AB}$ și $\overline{BM}$ determină planul Q.

Dreapta (D) fiind perpendiculară pe două drepte concurente conținute în planul Q este perpendiculară pe planul Q ($D \perp Q$).

Rezultă deci că (D) $\perp \overline{AM}$ sau $\overline{AM} \perp (D)$.

Demonstrați că:

— Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan și dintr-un punct al ei se duce o perpendiculară pe o dreaptă conținută în plan, dreapta care unește picioarele celor două perpendiculare este perpendiculară pe dreapta din plan.

— Dacă într-un punct al unei drepte conținute în plan se ridică două perpendiculare, una situată în plan și alta exterioară planului, perpendiculara dusă dintr-un punct al perpendicularei exterioare pe cea din plan este perpendiculară pe plan.

— Atunci cînd o dreaptă AB este perpendiculară pe un plan P, orice plan Q care conține dreapta AB este perpendicular pe planul P.

19.1.11. Plane perpendiculare

Două plane se consideră perpendiculare, atunci cînd ele se intersectează formînd diedre drepte

Planul P intersectează planul Q după dreapta MN (fig. 19.16). În planul P se duce dreapta AB perpendiculară pe MN ($\overline{AB} \perp \overline{MN}$); de asemenea $\overline{CB} \perp \overline{MN}$.

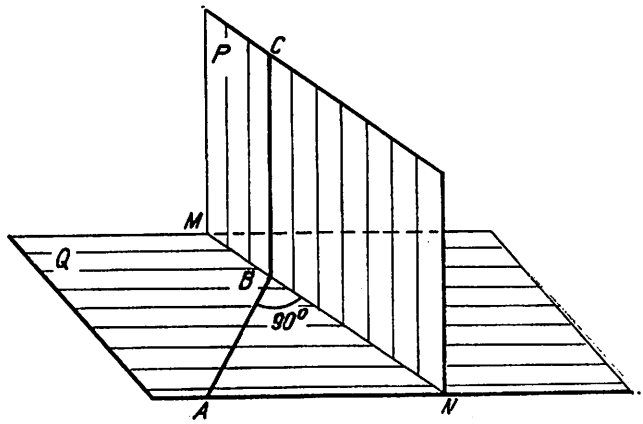


Fig. 19.16

Unghiul ABC este unghiul plan al diedrului

$$\overline{BC} \perp Q; \quad \overline{BC} \perp \overline{BA} \text{ rezultă}$$

$$\measuredangle ABC = 90° \text{ ceea ce înseamnează că } P \perp Q.$$

Arătați că două plane neparalele perpendiculare pe un al treilea plan au intersecția perpendiculară pe acest din urmă plan (fig. 19.17).

$R \perp P$; $Q \perp P$; MN intersecția planelor R și Q. Se cere să se arate că $MN \perp P$.

Demonstrați că dreapta $\overline{H_1 H_2}$ (fig. 19.18) care unește picioarele înălțimilor coborîte pe laturile egale ale triunghiului isoscel ABC a

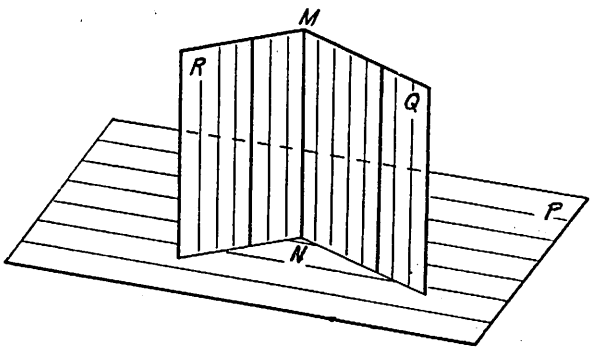


Fig. 19.17

cărui latură AC este perpendiculară pe planul P, este paralelă cu AC și perpendiculară pe P (trebuie deci arătat că $\overline{H_1H_2} \parallel \overline{AC}$ și $\overline{H_1H_2} \perp P$).

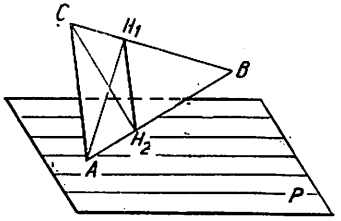


Fig. 19.18

Se va arăta că:

$$CH_1 = AH_2$$

$$\overline{BC} \parallel \overline{H_1H_2} \text{ (Thales)}$$

și că paralela unei drepte perpendiculare pe un plan este perpendiculară pe acel plan.

19.2. ECUAȚIILE PLANULUI

Ecuația unui plan P din spațiu este dată de relația între coordonatele unui punct curent al planului, verificată de toate punctele planului respectiv.

19.2.1. Ecuația unui plan care trece prin origine

Într-un sistem de coordonate rectangulare, un plan este definit de o ecuație de gradul întîi în x, y și z de forma

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

unde cel puțin unul din coeficienți este diferit de zero.

Dacă considerăm:

$$A \neq 0, \quad B \neq 0, \quad C \neq 0, \quad D = 0$$

obținem *ecuația* $\boxed{Ax + By + Cz = 0}$

care este verificată de originea sistemului de coordonate $O(0, 0, 0)$, deci ea reprezintă *planul care trece prin origine*

19.2.2. Ecuația planelor paralele cu axele de coordonate

O ecuație de forma:

$$\begin{cases} Ax + By + D = 0 \\ Ax + Cz + D = 0 \\ By + Cz + D = 0 \end{cases} \tag{1}$$

reprezintă plane ale căror normale sînt perpendiculare pe axele de coordonate, deci plane paralele cu axele corespunzătoare variabilei care lipsește.

Ecuația $Ax + By + D = 0$ reprezintă un plan paralel cu axa Oz.

Ecuația $Ax + Cz + D = 0$ reprezintă un plan paralel cu axa Oy.

Ecuația $By + Cz + D = 0$ reprezintă un plan paralel cu axa Ox.

Dacă în ecuațiile (1) facem $D = 0$ se obțin ecuațiile:

$$\begin{cases} Ax + By = 0 \\ Ax + Cz = 0 \\ By + Cz = 0 \end{cases}$$

care reprezintă *plane paralele cu axele de coordonate și care trec prin origine.*

19.2.3. Ecuația planelor paralele cu planele de coordonate

Dacă în ecuația $Ax + By + Cz + D = 0$ considerăm doi coeficienți ai variabilelor egali cu zero, se obțin ecuațiile:

$$\begin{cases} Ax + D = 0 \\ By + D = 0 \\ Cz + D = 0 \end{cases}$$

Fiecare din aceste ecuații reprezintă un plan paralel în același timp cu două axe de coordonate, deci paralel cu planul determinat de aceste axe astfel:

Ecuația $Ax + D = 0$ *reprezintă un plan paralel cu axa Oy* (lipsește termenul în y) și *paralel cu Oz* (lipsește termenul în z), *deci un plan paralel cu planul yOz*. Similar, ecuația $By + D = 0$ reprezintă un *plan paralel cu planul xOz*, iar ecuația $CZ + D = 0$ un *plan paralel cu planul xOy*.

Dacă în ecuațiile care definesc planele paralele cu planele de coordonate se consideră și termenul liber egal cu zero, se obțin ecuațiile:

$$\begin{cases} Ax = 0 \\ By = 0 \\ Cz = 0 \end{cases}$$

care reprezintă respectiv, planele yOz, xOz, xOy.

19.2.4. Ecuația generală a planului

Să arătăm că orice ecuație de gradul I în x, y, z, reprezintă un plan.

Considerăm ecuația $Ax + By + Cz + D = 0$ și punctul $M(x_1, y_1, z_1)$ care verifică ecuația considerată deci

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

Scăzînd cele două ecuații membru cu membru obținem:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

Aceasta este ecuația planului care trece prin punctul $M(x_1, y_1, z_1)$ și este perpendicular pe direcția definită de coeficienții (A, B, C).

Cele două ecuații de mai sus fiind echivalente reprezintă plane perpendiculare pe aceeași direcție (A, B, C).

Rezultă că coeficienții A, B, C, sînt *parametri directori ai normalei la plan.*

19.2.5. Ecuația planului care trece printr-un punct dat și este perpendicular pe o direcție dată

Să considerăm punctul $M(x_1\ y_1, z_1)$ și A, B, și C parametrii directori ai direcției date. Dacă $N(x, y, z)$ este un punct curent al planului căutat, direcția determinată de punctele M și N este perpendiculară pe direcția (A, B, C). Direcția definită de punctele M și N are parametrii $(x - x_1)$, $(y - y_1)$, $(z - z_1)$.

Această direcție fiind perpendiculară pe direcția dată, poate fi exprimată prin relația:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

Dacă coordonatele unui punct $N(x_1\ y_1\ z_1)$ din spațiu satisfac această condiție, punctul se află în planul perpendicular pe direcția A, B, C, iar ecuația respectivă este ecuația planului căutat.

19.2.6. Condiția necesară și suficientă ca două ecuații de gradul I în x, y, z să reprezinte același plan

Fie ecuațiile

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

unde

$$A = \frac{A_1}{k},\quad B = \frac{B_1}{k},\quad C = \frac{C_1}{k},\quad D = \frac{D_1}{k}$$

Înlocuind aceste valori în prima ecuație se obține

$$\frac{1}{k}(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$$

sau

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

Se observă că prima ecuație s-a redus la cea de a doua, deci ambele ecuații reprezintă același plan.

Prin urmare, *condiția necesară și suficientă ca două ecuații de gradul I în x, y, z să reprezinte același plan este ca coeficienții necunoscutelor și termenii liberi să fie proporționali.*

19.2.7. Ecuația planului care trece prin trei puncte

Considerăm punctele $M(x, y, z)$, $N(x_1, y_1, z_1)$, $S(x_2, y_2, z_2)$ $T(x_3, y_3, z_3)$. Pentru ca aceste puncte să fie cuprinse în același plan ele trebuie să satisfacă ecuația planului (P).

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ceea ce înseamnă:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cy_2 + D &= 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D &= 0 \end{aligned}$$

Pentru ca cele patru puncte considerate să fie coplanare trebuie ca sistemul de mai sus să admită soluții nu toate nule în A, B, C, D. Această condiție necesară și suficientă este:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dacă această ecuație este satisfăcută identic în x, y, z punctele N, S, T sînt coplanare cu orice punct P din plan, deci ele sînt coliniare.

Dezvoltînd ecuația de mai sus după linia I obținem:

$$x\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Dacă toți coeficienții sînt nuli, înseamnă că ecuația este satisfăcută identic în x, y, z.

Cum determinanții matricei nu sînt nuli, rezultă că

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{matrix} \right\| \neq 0$$

punctele N, S, T, nu sînt coliniare, deci ele reprezintă un plan iar ecuația:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

este *ecuația carteziană a planului determinat de trei puncte necoliniare.*

19.2.8. Ecuația planului prin tăieturi

Fie $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ (fig. 19.19) trei puncte necoliniare pe axele de coordonate, care determină un plan.

Valorile a, b, c reprezintă tăieturile planului pe axe.

Scriind, că, coordonatele punctelor A, B și C verifică ecuația planului, avem:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

unde prin dezvoltare obținem:

$$bcx + acy + abz - abc = 0$$

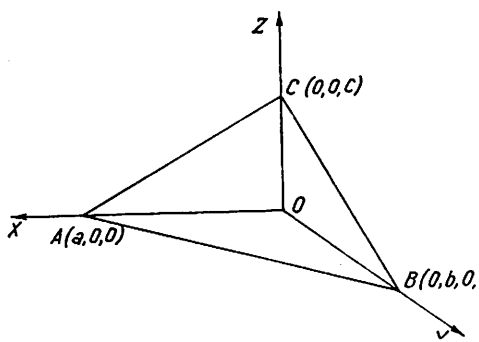


Fig. 18.19

Dacă împărțim această ecuație cu abc, obținem ecuația planului prin tăieturi, (fig. 19.19).

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0}$$

19.2.9. Ecuația normală a planului

Considerăm vectorul $\overline{OM}$ dus din originea sistemului de axe rectangulare, perpendicular pe planul P (fig. 19.20).

Dacă notăm cu m distanța de la origine la plan putem scrie $|\overline{OM}| = m$.

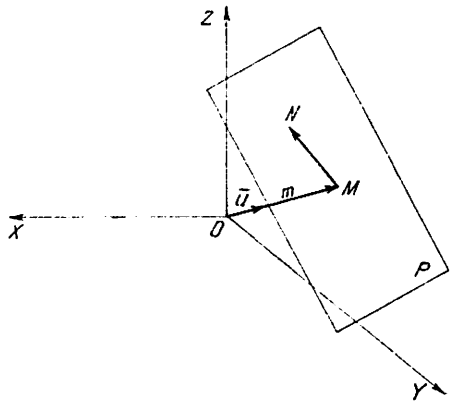


Fig. 19.20

Piciorul perpendicularei duse din origine la plan are coordonatele: M $(m\cos\alpha,\ m\cos\beta,\ m\cos\gamma)$ deoarece versorul vectorului $\overline{OM}$ este $\overline{u}$ $(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$.

Dacă $N(x, y, z)$ este un punct curent din plan, vectorul MN are pe axe proiecțiile:

$$MN\ (x-m\cos\alpha,\quad y-m\cos\beta,\quad z-m\cos\gamma).$$

Dar vectorul $\overline{MN}$ este perpendicular pe vectorul $\overline{OM}$ că înseamnă $\overline{MN}\cdot\overline{u}=0$.

Analitic acest produs se poate scrie:

$$(x-m\cos\alpha)\cos\alpha+(y-m\cos\beta)\cos\beta+(z-m\cos\gamma)\cos\gamma=0,$$

sau

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - m\,(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 0$$

deoarece $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

rezultă

$$\boxed{x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - m = 0}$$

Aceasta este ecuația normală a planului.

19.2.10. Trecerea ecuației planului de la forma generală la forma normală

Fie $Ax + By + Cz + D = 0$ ecuația generală a planului P iar $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - m = 0$, ecuația normală a aceluiași plan.

Pentru ca aceste ecuații să reprezinte același plan trebuie să aibă coeficienții proporționali.

$$\cos\alpha = kA,\ \cos\beta = kB,\ \cos\gamma = kC \text{ și } -m = kD. \qquad (2)$$

Dacă se ridică la patrat și se adună primele trei proporționalități se obține:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = k^2\,(A^2 + B^2 + C^2)$$

sau

$$1 = k^2\,(A^2 + B^2 + C^2)$$

de unde

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

înlocuind pe k în relațiile (2) ... se obține:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};\quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};\quad -m = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Făcînd substituirile de mai sus se obține ecuația normală a planului.

$$\boxed{\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0}$$

19.2.11. Poziţiile relative a două şi trei planuri

Ecuaţiile: $Ax + By + Cz + D = 0$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

reprezintă două plane, ale căror poziţii relative se caracterizează prin:

Cele două plane sînt paralele atunci cînd coeficienţii variabilelor sînt proporţionali

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$$

deci sistemul celor două ecuaţii este incompatibil.

Cele două plane se confundă (coincid) atunci cînd:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{D}{D_1}$$

deci sistemul celor două ecuaţii este nedeterminat.

Atunci cînd $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \neq 0$, planele definite de ecuaţiile considerate nu sînt nici paralele şi nici nu coincid, ele se intersectează după o dreaptă care este reprezentată analitic de sistemul format din ecuaţiile considerate.

Dreapta (D) fiind situată pe cele două plane este perpendiculară pe normalele la aceste plane.

Cunoaştem că coeficienţii variabilelor din ecuaţiile planelor reprezintă parametrii directori ai normalelor la cele două plane. Între aceşti parametrii directori şi parametrii directori (m_1, m_2, m_3) ai dreptei de intersecţie a planelor există relaţiile:

$$m_1A + m_2B + m_3C = 0$$

$$m_1A_1 + m_2B_1 + m_3C_1 = 0$$

care reprezintă perpendicularitatea direcţiilor respective.

Din sistemul de mai sus rezultă:

$$m_1 = \begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}; \quad m_2 = \begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix}; \quad m_3 = \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}.$$

Se observă că *parametrii directori ai dreptei de intersecţie sînt minorii matricei coeficienţilor* variabilelor din ecuaţiile celor două plane.

Toate planele care trec prin dreapta de intersecție a două plane formează un fascicul liniar de plane, a cărui ecuație este:

$$k_1(Ax + By + Cz + D) + k_2(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$$

19.3. PROBLEME DE UNGHIURI ȘI DISTANȚE

19.3.1. Unghiul a două plane

Începem prin a arăta că unghiul a două plane este unghiul plan al unghiului diedru format de cele două plane, adică unghiul format de urmele acestor plane pe un plan perpendicular pe dreapta lor de intersecție. Rezultă că valoarea unghiului diedru a două plane este egală cu mărimea unghiului format de normalele la cele două plane.

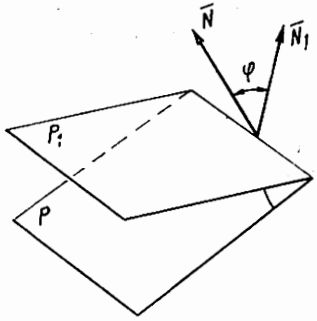


Fig. 19.21

Unghiul normalelor la cele două plane se poate determina ușor, datorită faptului că parametrii directori ai normalei sînt coeficienții variabilelor din ecuațiile celor două plane.

Dacă considerăm că:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

sînt ecuațiile celor două plane, cosinusurile unghiurilor lor sînt date de relația:

$$\cos \varphi_{1,2} = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

19.3.2. **Unghiul unei drepte cu un plan**

Unghiul unei drepte cu un plan este unghiul format de dreaptă cu proiecția ei pe plan. Acest unghi (α) este complementar cu unghiul (φ) format de dreaptă cu normala la plan (fig. 19.22).

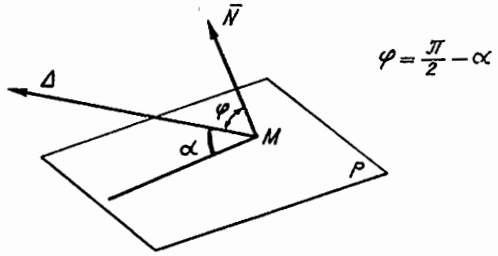


Fig. 19.22

Dacă considerăm că ecuația $Ax + By + Cz + D = 0$ definește planul P iar dreapta (Δ) este definită de ecuațiile

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{m_2} = \frac{z - z_1}{m_3}$$

și dacă notăm cu α unghiul format de dreapta Δ cu planul P și cu φ unghiul format de dreaptă cu normala planului, putem scrie

$$\sin \alpha = \cos \varphi = \frac{m_1 A + m_2 B + m_3 C}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

19.3.3. **Distanța de la un punct la o dreaptă**

a) Considerăm dreapta (D) definită prin ecuația normală

$$x \cos \theta + y \sin \theta - r = 0$$

și punctul M_1 $(x_1 y_1)$ (fig. 19.23). Se cere să se afle expresia analitică a distanței $d = M_1 M_2$ de la punctul M_1 la dreapta D.

Prin M_1 se construiește dreapta D_1 paralelă cu dreapta D.

Distanța de la origine la dreapta D_1 este $(r + d)$.

Ecuația normală a dreptei (D_1) va fi:

$$x \cos \theta + y \sin \theta - (r + d) = 0$$

Deoarece punctul M_1 se găsește pe dreapta (D_1) putem scrie:

$$x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta - (r + d) = 0$$

de unde:

$$\boxed{d = x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta - r = 0}$$

deci: *distanța de la un punct la o dreaptă se obține înlocuind coordonatele curente prin coordonatele punctului considerat, în ecuația normală a dreptei.* Cînd ecuația dreptei este dată sub forma generală, măsura distanței respective este dată de relația

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

unde x_1 și y_1 sînt coordonatele punctului.

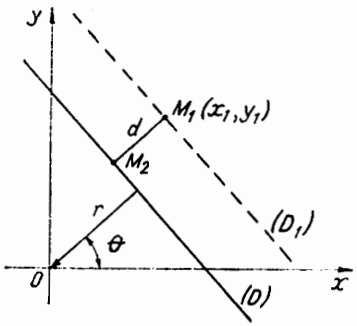


Fig. 19.23

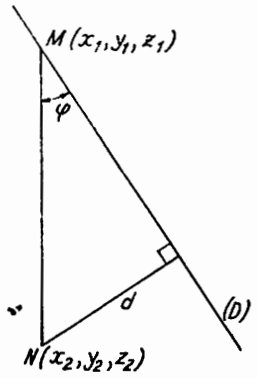


Fig. 19.24

b). Considerăm dreapta D care trece prin punctul $M(x_1, y_1, z_1)$ din spațiu, definită de ecuațiile:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{m_2} = \frac{z - z_1}{m_3}$$

și punctul $N(x_2, y_2, z_2)$ din plan.

Distanța de la punctul N la dreapta D așa cum rezultă din fig. 19.24 este:

$$d = NM \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

observînd că direcţia dreptei NM este dată de parametrii directori $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$, putem scrie:

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{[m_2(z_1-z_2) - m_3(y_1-y_2)]^2 + [m_3(x_1-x_2) - m_1(z_1-z_2)]^2 + [m_1(y_1-y_2) - m_2(x_1-x_2)]^2}{m_1^2(m_2^2+m_3^2)(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}}$$

Rezultă că valoarea distanţei este:

$$\boxed{d = \sqrt{\frac{[m_2(z_1-z_2) - m_3(y_1-y_2)]^2 + [m_3(x_1-x_2) - m_1(z_1-z_2)]^2 - [m_1(y_1-y_2) - m_2(x_1-x_2)]^2}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}}}$$

19.3.4. **Distanţa de la un punct la un plan**

Considerăm planul (P) definit prin ecuaţia normală

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - m = 0$$

şi un punct $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (fig. 19.25). Distanţa d de la punctul M_1 la planul P este egală cu valoarea absolută a ecuaţiei planului, în urma înlocuirii variabilelor prin coordonatele punctului M_1, astfel:

$$\boxed{d = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - m|}$$

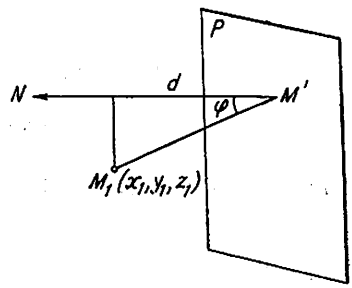


Fig. 19.25

Demonstraţi că atunci cînd ecuaţia planului este dată sub formă generală $Ax + Bx + Cz + D = 0$, distanţa de la un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ la plan este dată de

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

19.3.5. **Exerciţii**

1. Scrieţi ecuaţia unui plan:

— care trece prin punctul $M(3, -4, 2)$ şi este paralel cu planul XOy.

— care trece prin punctul $M_1\ (-4, 2, -3)$ şi prin axa Oz;

— care trece prin punctele $M_2\,(4, -1, 2)$ şi $M_3\,(5, 2, 6)$ şi este paralel cu axa Ox;

— care trece prin punctul $M_4\ (2, -5, -3)$ şi este perpendicular pe planele:

$$(P)\ 3x - 2y + 2z + 1 = 0$$

$$(P_1)\ x - y + z - 3 = 0$$

2. Determinaţi ecuaţia planului care trece prin axa Oz şi formează cu planul $2x + y - 5z - b = 0$, unghiul $\theta = 30°$.

3. Calculaţi cosinusurile directoare ale dreptei

$$\begin{cases} 2x - 5y - 3z - 9 = 0 \\ x - 4y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

4. Scrieţi ecuaţia planului prin tăieturi, cînd planul trece prin punctele $A\,(a, o, o)$, $B\,(o, b, o)$, $C\,(o, o, C)$,

$$\mathbf{R} \cdot \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

5. Demonstraţi că planele:

$$4x + 3y + 5z - 12 = 0$$

$$2x + 5y - 7z = 0$$

$$3x + 4y - 3z - 4 = 0$$

se intersectează într-un punct. Care sînt coordonatele punctului de intersecţie?

6. Calculaţi distanţa de la punctul $M\ (1, 1, 3)$ la planul

$$(P)\ 2x + 3y + z - 7 = 0$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

7. Cunoscînd coordonatele punctelor $A\,(2, -3, 1)$ şi $B\,(4, 6, -2)$ scrieţi ecuaţia planului perpendicular pe dreapta AB (în mijlocul segmentului $\overline{AB}$).

8. Calculați unghiul planelor

$$(P_1)\quad x + y + 2z - 10 = 0$$

$$(P_2)\quad 2x - y + z - 9 = 0$$

9. Calculați distanța de la punctul $M_1(6, 8, -2)$ la dreapta (D) definită de ecuațiile:

$$4x + 4y - 2z - 30 = 0;\ 8x + 2y + 2z - 66 = 0$$

10. Scrieți ecuația planului care formează un unghi de 45° cu planul $x - 4y - 8z + 12 = 0$, și trece prin dreapta de intersecție a planelor

$$x + 5y + 2z = 0,\ x - z + 2 = 0$$

11. Calculați cosinusurile directoare ale dreptei

$$\begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \end{cases}$$

12. Găsiți condiția ca trei plane să fie paralele cu o aceeași dreaptă.

13. Găsiți condiția ca dreptele

$$\frac{x-1}{3} + \frac{y+2}{1} + \frac{z-3}{5},\ \frac{x}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

să fie concurente. Determinați coordonatele punctului de intersecție.

14. Stabiliți relația care dă lungimea perpendicularei comune a două drepte:

R — este distanța de la un punct de pe una din drepte, la un plan ce trece prin cea de a doua dreaptă și care este paralel cu prima dreaptă.

15. Determinați distanța dintre punctele $A(1, 2)$ și $B(-2, 1)$ precum și punctul lor median.

16. Calculați expresia distanței dintre punctele de coordonate: $A\ (at_1^2, 2at_1)$ și $B\ (at_2^2, 2at_2)$ știind că a, t_1 și t_2 sînt constante.

17. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctele $A\ (-2, -1)$ și $B\ (4, 3)$ și arătați că punctul $C\ (1, 1)$ este coliniar cu punctele A și B.

18. Determinați valorile coeficienților A, B, C astfel încît dreapta $Ax + By + C = 0$ să treacă prin punctele $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$ și $N\ (-1, 2)$. Verificați rezultatul scriind ecuația dreptei care trece prin punctul M și N.

19. Calculați panta dreptei $2x - 3y + 1 = 0$ (și coordonatele punctelor în care dreapta intersectează axele de coordonate.

20. Arătați că dreptele $3x + y - 4 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ și $x + 5y - 6 = 0$ sînt concurente.

Arătați de asemenea, că ecuația ultimei drepte poate fi scrisă sub forma:

$(3x + y - 4) + \lambda(x - 2y + 1) = 0$, unde λ are o valoare bine determinată.

21. Determinați ecuațiile paralelelor la axele de coordonate duse prin punctul M (5, —4, 3). Stabiliți ecuația planului determinat de punctele în care aceste drepte intersectează planele de coordonate.

22. Stabiliți ecuația planului care trece prin punctul A (—1, 1, 2) și prin dreapta definită de ecuațiile:

$$2x + y - 3z = 0$$

$$x - y - z - 1 = 0$$

R. $3x + 12y - 8z + 7 = 0.$

23. Coordonatele unui punct de observare mobil sînt exprimate în funcție de timpul t astfel:

$$x - 2t - 3 = 0;\ y + 3t - 6 = 0;\ z + t - 1 = 0$$

— calculați traiectoria urmată de punctul de observare mobil;

— stabiliți poziția punctului de observare mobil la momentul $t = 2$

— calculați la ce moment punctul de observare mobil se află în planul $x0y$ și care este poziția lui în acest plan.

a) Traiectoria este dreapta

R. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-1}{-1}$

b) P. O. M. se găsește în punctul M (7, 0, —1)

c) $t = 1 \to N$ (5, 3, 0).

24. Calculați punctul de intersecție al planelor

$$\begin{cases} x = +7y - 3z - 4 \\ y = -6x + 2z + 2 \\ z = +2x + 3y - 5 \end{cases}$$

R. P (1, 2, 3)

25. Stabiliți ecuația planului definit de dreptele

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = z+2 \\ \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+2}{5} \end{cases}$$

R. $13x - 7y - 5z - 23 = 0$

26. Care este condiția ca dreptele

$$(D_1)\ \frac{x-x_1}{A_1} = \frac{y-y_1}{B_1} = \frac{z-z_1}{C_1}$$

$$(D_2)\ \frac{x-x_2}{A_2} = \frac{y-y_2}{B_2} = \frac{z-z_2}{C_2}$$

să nu fie concurente sau paralele

R. $$\begin{vmatrix} x_2-x & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

19.4. APLICAȚII

19.4.1. Calculul analitic al coordonatelor unui punct P prin procedeul intersecției directe

Principiul procedeului constă în determinarea coordonatelor unui punct necunoscut P cînd se cunosc coordonatele a două puncte (A, B) și orientările sau coeficienții unghiulari ai direcțiilor care trec prin aceste puncte și punctul de coordonate necunoscute:

Metoda se bazează pe stabilirea și rezolvarea ecuațiilor dreptelor ce trec prin punctele cunoscute și punctul necunoscut. Pentru a se evita erorile în determinarea coordonatelor punctului P în practica artileristică se folosesc trei puncte de coordonate cunoscute (fig. 19.37)

Se cunosc:

$$X_A,\ X_B,\ X_C,\ Y_A,\ Y_B,\ Y_C$$

Se cere: X_p și Y_p

1. Se calculează orientările direcţiilor: AB, BC şi CA din fig. 19.37 rezultă:

$$\operatorname{tg} \theta_{AB} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

$$\operatorname{tg} \theta_{BC} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_C - x_B}{y_C - y_B}$$

$$\operatorname{tg} \theta_{CA} = \frac{x_3}{y_3} = \frac{x_A - x_C}{y_A - y_C}$$

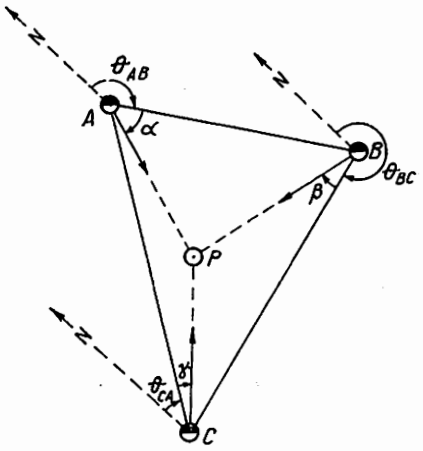


Fig. 19.37

2. În teren se măsoară unghiurile α, β, γ. Se calculează orientările direcţiilor AP, BP şi CP

$$\theta_{AP} = \theta_{AB} + \alpha$$

$$\theta_{BP} = \theta_{BC} + \beta$$

$$\theta_{CP} = \theta_{CA} + \gamma$$

Dacă în punctele de coordonate cunoscute există posibilitatea să se orienteze teodolitul (goniometrul busolă) atunci în teren se măsoară direct orientările direcţiilor AP, BP şi CP.

Se scriu ecuaţiile analitice ale dreptelor (vizelor orientate) AP, BP şi CP.

$$(AP)\quad X_P - X_A = \operatorname{tg} \theta_{AP} (Y_P - Y_A) \qquad (1)$$

$$(BP)\quad X_P - X_B = \operatorname{tg} \theta_{BP} (Y_P - Y_B) \qquad (2)$$

$$(CP)\quad X_P - X_C = \operatorname{tg} \theta_{CP} (Y_P - Y_C) \qquad (3)$$

Avînd în vedere faptul că $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\theta}$ ecuațiile pot fi scrise și sub forma:

$$(AP)\quad Y_P - Y_A = \operatorname{ctg}\theta_{AP}(X_P - X_A)$$
$$(BP)\quad Y_P - Y_B = \operatorname{ctg}\theta_{BP}(X_P - X_B)$$
$$(CP)\quad Y_P - Y_C = \operatorname{ctg}\theta_{CP}(X_P - X_C)$$

Rezolvînd sistemul format de ecuația 1 și 2 se obțin coordonatele punctului necunoscut P.

$$\begin{cases} X_P - X_A = \operatorname{tg}\theta_{AP}(Y_P - Y_A) \\ X_P - X_B = \operatorname{tg}\theta_{BP}(Y_P - Y_B) \end{cases}$$

scăzînd ecuația a doua din prima obținem:

$$X_B - X_A = \operatorname{tg}\theta_{AP}(Y_P - Y_A) - \operatorname{tg}\theta_{BP}(Y_P - Y_B)$$

sau

$$X_B - X_A = Y_P(\operatorname{tg}\theta_{AP} - \operatorname{tg}\theta_{BP}) + Y_B \operatorname{tg}\theta_{BP} - Y_A \operatorname{tg}\theta_{AP}$$

de unde

$$\boxed{Y_P = \frac{(X_B - X_A) + Y_A \operatorname{tg}\theta_{AB} - Y_B \operatorname{tg}\theta_{BP}}{\operatorname{tg}\theta_{AP} - \operatorname{tg}\theta_{BP}}}$$

Introducînd această valoare în ecuațiile dreptelor se obține valoarea coordonatei X_P.

$$\boxed{X_P = X_A + \operatorname{tg}\theta_{AB}(Y_P - Y_A)}$$

sau

$$\boxed{X_P = X_B + \operatorname{tg}\theta_{BP}(Y_P - X_B)}$$

În mod asemănător se găsesc relațiile în funcție de cotangentă. Ele sînt:

$$Y_P = \frac{X_B - X_A + Y_A \operatorname{ctg}\theta_{AP} - Y_B \operatorname{ctg}\theta_{AP}}{\operatorname{ctg}\theta_{AB} - \operatorname{ctg}\theta_{BP}}$$

$$\boxed{X_P = X_A + (Y_P - Y_A)\operatorname{ctg}\theta_{AP}}$$

sau

$$\boxed{X_P = X_B + (Y_P - Y_B) \operatorname{ctg} \theta_{BP}}$$

Cînd valoarea cotangentelor este mai mică decît 1 (în acest caz precizia este mai mare) se aplică relaţiile bazate pe cotangentă.

19.4.2. Calculul analitic al coordonatelor unui punct P, prin procedeul intersecţiei inverse

Principiul procedeului constă în determinarea coordonatelor unui punct necunoscut P în care se staţionează şi se măsoară unghiurile α şi β (fig. 19.38).

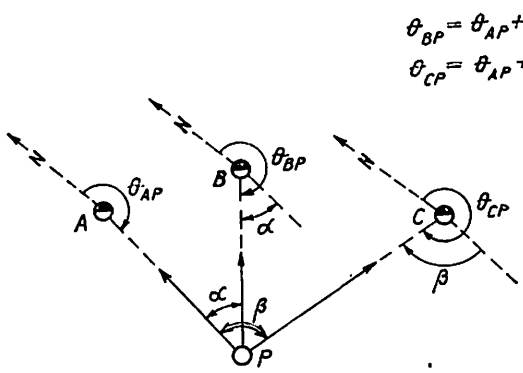


Fig. 19.38

Metoda analitică (DELAMBRE) se bazează pe stabilirea ecuaţiilor dreptelor AP, BP şi CP (fig. 19.38).

Se cunosc coordonatele punctelor A, B, C

$$X_A,\ Y_A,\ X_B,\ Y_B,\ X_C,\ Y_C$$

S-au măsurat α şi β. Se cere X_P şi Y_P

1) Se scriu ecuaţiile analitice ale dreptelor ce trec prin punctul P şi respectiv A (X_A, Y_A), B (X_B, Y_B) şi C (X_C, Y_C).

$$\begin{cases} X_P - X_A = \operatorname{tg} \theta_{PA} (Y_P - Y_A) \\ X_P - X_B = \operatorname{tg} \theta_{PB} (Y_P - Y_B) \\ X \ \ = X_C = \operatorname{tg} \theta_{PC} (Y_P - Y_C) \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} Y_P - Y_A = \operatorname{ctg} \theta_{PA} (X_P - X_A) \\ Y_P - Y_B = \operatorname{ctg} \theta_{PB} (X_{PB} - X_B) \\ Y_P - Y_C = \operatorname{ctg} \theta_{PC} (X_P - X_C) \end{cases}$$

Din fig. 19.39 se observă că dacă orientarea direcției PA este θ_{PA}, atunci orientările direcțiilor PB și PC sînt: $\theta_{PB} = \theta_{PA} + \alpha$

$$\theta_{PC} = \theta_{PA} + \beta$$

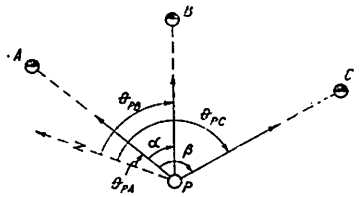


Fig. 19.39

Înlocuind aceste valori în ecuațiile dreptelor PB și PC obținem:

$$\begin{cases} X_P - X_A = \operatorname{tg} \cdot \theta_{PA} (Y_P - Y_A) \\ X_P - X_B = \operatorname{tg} (\theta_{PA} + \alpha) (Y_P - Y_B) \\ X_P - X_C = \operatorname{tg} \cdot (\theta_{PA} + \beta) (Y_P - Y_C) \end{cases}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem de trei ecuații cu trei necunoscute luăm primele două ecuații:

$$\begin{cases} X_P - X_A = \operatorname{tg} \cdot \theta_{PA} (Y_P - Y_A) \\ X_P - X_B = \operatorname{tg} (\theta_{PA} + \alpha) (Y_P - Y_B). \end{cases}$$

În ecuația a doua înlocuim $\operatorname{tg} (\theta_{PA} + \alpha)$ cu

$$\operatorname{tg} (\theta_{PA} + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \theta_{PA} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \theta_{PA} \operatorname{tg} \alpha}$$

și obținem sistemul

$$\begin{cases} X_P - X_A = \operatorname{tg} \theta_{PA} (Y_P - Y_A) \\ (X_P - X_B) (1 - \operatorname{tg} \theta_{PA} \operatorname{tg} \alpha) = (Y_P - Y_B) (\operatorname{tg} \theta_{PA} + \operatorname{tg} \alpha) \end{cases}$$

Scoatem valoarea lui X_P din prima ecuație

$$X_P = X_A + \operatorname{tg} \theta_{PA} (Y_P - Y_A)$$

și o introducem în ecuația a doua

$$[(X_A - X_B) + (Y_P - Y_A)\operatorname{tg} \theta_{PA}] (1 - \operatorname{tg} \theta_{PA} \operatorname{tg} \alpha) =$$
$$= (Y_P - Y_B) (\operatorname{tg} \theta_{PA} + \operatorname{tg} \alpha).$$

Efectuînd calculele obținem:

$$Y_P \operatorname{tg} \alpha - Y_P \operatorname{tg}^2 \theta_{PA} \operatorname{tg} \alpha = (X_A - X_B) - X_A \operatorname{tg} \theta_{PA} \operatorname{tg} \alpha +$$
$$+ X_B \operatorname{tg} \theta_{PA} \operatorname{tg} \alpha - Y_A \operatorname{tg} \theta_{PA} + Y_A \operatorname{tg}^2 \theta_{PA} \operatorname{tg} \alpha +$$
$$+ Y_B \operatorname{tg} \theta_{PA} + Y_B \operatorname{tg} \alpha$$

de unde:

$$Y_P (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_{PA}) \operatorname{tg} \alpha = (X_A - X_B) + (X_B - X_A) \operatorname{tg} \theta_{PA} \operatorname{tg} \alpha +$$
$$+ (Y_B - Y_A) \operatorname{tg} \theta_{PA} + (Y_B + Y_A \operatorname{tg}^2 \theta_{PA}) \operatorname{tg} \alpha.$$

În ecuația a treia se face înlocuirea:

$$\operatorname{tg} (Q_{PA} + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \theta_{PA} + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \theta_{PA} \operatorname{tg} \beta}$$

și rezolvînd sistemul format de ecuația 1 și 3 se obține ecuația

$$Y_P (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_{PA}) \operatorname{tg} \beta = (X_A - X_C) + (X_C - X_A) \operatorname{tg} \theta_{PA} \operatorname{tg} \beta +$$
$$+ (Y_C - Y_A) \operatorname{tg} \theta_{PA} + (Y_C + Y_A \operatorname{tg}^2 \theta_{PA}) \operatorname{tg} \beta$$

Împărțind cele două ecuații obținem:

$$\frac{Y_P (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_{PA}) \operatorname{tg} \alpha}{Y_P (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_{PA}) \operatorname{tg} \alpha} =$$

$$= \frac{(X_A - X_B) + (X_B - X_A) \operatorname{tg} \theta_{PA} \operatorname{tg} \alpha + (Y_B - Y_A) \operatorname{tg} \theta_{BA} + (Y_B + Y_A) \operatorname{tg}^2 \theta_{PA} \operatorname{tg} \alpha}{(X_A - X_C) + (X_C - X_A) \operatorname{tg} \theta_{PA} \operatorname{tg} \beta + (Y_C - Y_A) \operatorname{tg} \theta_{BA} + (Y_C + Y_A \operatorname{tg}^2 \theta_{PA}) \operatorname{tg} \beta}$$

Făcînd reducerile și înlocuind $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$ și $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{ctg} \beta}$ și grupînd tremenii după $\operatorname{tg} \theta_{PA}$ obținem:

$$\operatorname{tg} \theta_{PA} (X_B - Y_C) + (Y_B - Y_A) \operatorname{ctg} \alpha +$$
$$+ (Y_A - Y_C) \operatorname{ctg} \beta = (Y_A - X_C) \operatorname{ctg} \beta + (X_B - X_A) \operatorname{ctg} \alpha + (Y_C - Y_B)$$

de unde

$$\operatorname{tg} \theta_{pA} = \frac{(X_B - X_A) \operatorname{ctg} \alpha + (X_A - X_C) \operatorname{ctg} \beta + (Y_C - Y_B)}{(Y_B - Y_A \operatorname{ctg} \alpha + (Y_A - Y_C) \operatorname{ctg} \beta + (X_B - X_C)}$$

După aflarea orientării direcției PA cu această relație, se calculeaza orientările direcțiilor PB și PC

$$\theta_{pB} = \theta_{pA} + \alpha$$

$$\theta_{pC} = \theta_{pA} + \beta$$

Se calculează după aceea orientările direcțiilor AP, BP și CP.

$$\theta_{Ap} = \theta_{pA} + 180^\circ$$

$$\theta_{Bp} = \theta_{pB} + 180^\circ$$

$$\theta_{pC} = \theta_{pC} + 180^\circ$$

Cunoscînd orientările direcțiilor AP, BP și CP, coordonatele punctului necunoscut P se determină ca în cazul intersecției directe.

Notă: Demonstrați că atunci cînd $\alpha+\beta+\gamma$ (fig. 19.40) totalizează 180° (200ᵍ) patrulaterul $ABCP$ este inscriptibil și problema este nedeterminată.

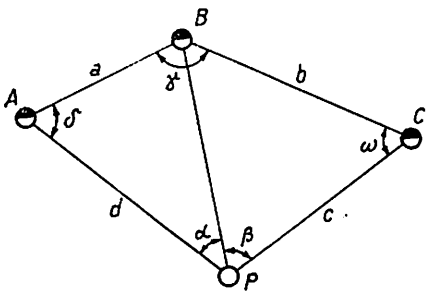


Fig. 19.40

Arătați că, atunci cînd unul din unghiurile determinate în teren, α sau β au valori apropiate de 180° (200ᵍ) precizia determinărilor nu mai corespunde și este necesar să se schimbe direcția de referință a orientărilor [direcția AP cu direcția BP (sau CP)].

CAPITOLUL 20

GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

20.1. DEFINIȚIE ȘI ELEMENTE

Segmentele care unesc consecutiv mai multe puncte A, B, C,D E, F, G, care nu sînt situate cîte trei consecutiv pe o aceeași dreaptă, constituie ceea ce numim *linie poligonală* (fig. 20.1).

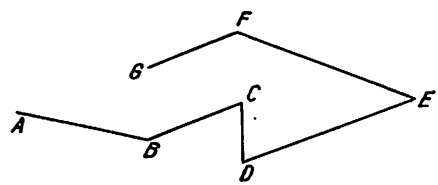


Fig. 20.1

Linia poligonală ale cărei extremități coincid se numește poligon. Rezultă că poligonul este o porțiune din plan, mărginită de segmente de linie dreaptă, care, constituie laturile poligonului considerat.

Poligoanele din fig. 20.2 și 20.3 se numesc poligoane simple.

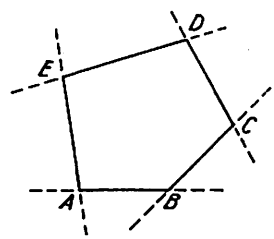


Fig. 20.2

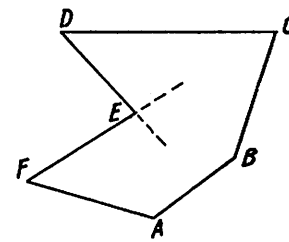


Fig. 20.3

Un poligon se numește convex atunci cînd prelungind nemărginit fiecare latură a sa, aceasta nu traversează poligonul (fig. 20.2). Un poligon se numește concav, atunci cînd prelungirea uneia sau mai multor laturi ale sale traversează poligonul respectiv (fig. 20.3).

Poligoanele se clasifică și după numărul de laturi.

În continuare vom studia unul din cele mai simple poligoane, poligonul cu trei laturi — *triunghiul.*

20.1.1. Elementele triunghiului

A, *B*, *C* sînt vîrfurile triunghiului. Ele nu sînt colineare. Cele trei segmente care formează figura se numesc laturile triunghiului. Ele se notează în principiu cu *a*, *b*, *c* sau $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$.

Cele trei unghiuri formate de laturile triunghiului în cele trei vîrfuri se numesc unghiurile triunghiului și se notează cu α, β, γ.

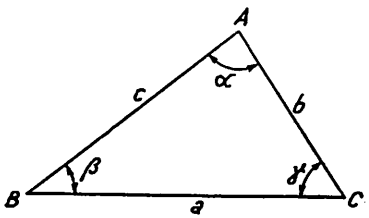


Fig. 20.4

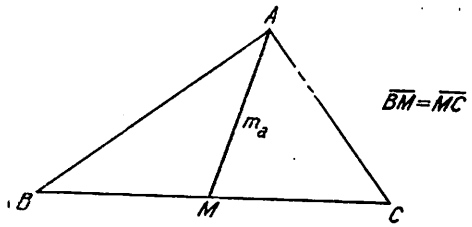


Fig. 20.5

Segmentul egal cu suma laturilor triunghiului se numește perimetrul său și se notează:

$$2p = a + b + c = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$$

Segmentul de dreaptă format de un vîrf al triunghiului și mijlocul laturii opuse se numește *mediană* a triunghiului. (AM) (fig. 20.5). Se notează m_a, m_b, m_c.

Segmentul de dreaptă dus dintr-un vîrf al triunghiului perpendicular pe latura opusă se numește *înălțimea* triunghiului. Ea se notează h_a, h_b, h_c (fig. 20.6).

Segmentul de dreaptă care împarte un unghi al triunghiului în două părți egale (AD) se numește bisectoare. Ea se notează de obicei cu d_α, d_β, d_γ (fig. 20.7).

În orice triunghi, la o latură mai mare a sa, i se opune un unghi mai mare.

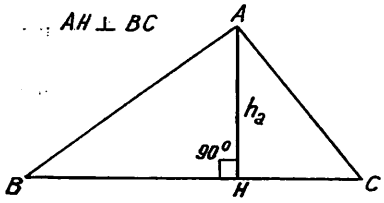


Fig. 20.6

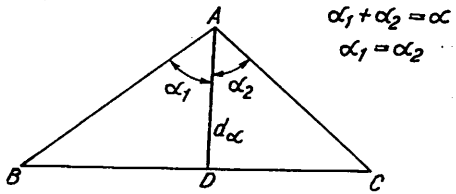


Fig. 20.7

În triunghiul ABC, $\overline{BC} > \overline{AB}$. Să arătăm ca $\hat{A} > \hat{C}$ (fig. 20.8). Luăm pe BC lungimea $\overline{BD} = \overline{AB}$ (fig. 20.8). Dreapta AD este în interiorul unghiului α deci unghiul $\alpha_1 < \alpha$. În triunghiul ABD (prin construcție $\overline{AB} = \overline{BD}$) unghiul $\alpha_1 = \measuredangle \delta$ și deci $\measuredangle \delta$ este mai mic decît $\measuredangle \alpha$.

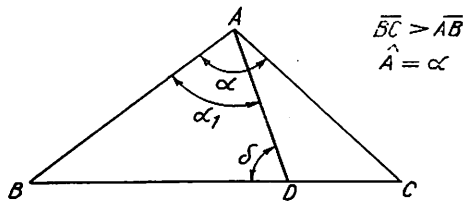


Fig. 20.8

Cititorul să arate că în orice triunghi la un unghi mai mare corespunde o latură mai mare.

În orice triunghi, suma a două laturi este mai mare decît cea de a treia latură (fig. 20.9).

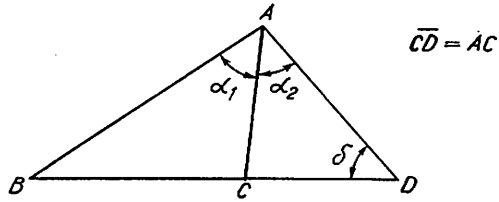


Fig. 20.9

În triunghiul ABC prelungim pe BC cu lungimea $\overline{CD} = \overline{AC}$. Trebuie arătat că $\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{AC}$.

Unghiul $\delta = \hat{\alpha}_2 < \widehat{BAD} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2$. Rezultă că $BD > AB$ deoarece se opune la un unghi mai mare.

În orice triunghi diferența a două laturi este mai mică decît latura a treia (fig. 20.10) .

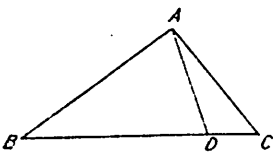


Fig. 20.10

$$\overline{BC} - \overline{AB} = \overline{DC}$$

Trebuie arătat că $\overline{DC} < \overline{AC}$. Din inegalitatea

$\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$ dacă scădem pe AB obținem

$\overline{BC} - \overline{AB} < \overline{AC}$ ceea ce trebuie arătat.

20.1.2. Cerc circumscris triunghiului

Se numește cerc, mulțimea punctelor din plan situate la o distanță dată de un punct al planului, numit centrul cercului.

Segmentul de dreaptă care unește centrul cercului cu un punct oarecare al cercului se numește rază.

Cercurile care au raza egală sînt figuri egale ($O = O_1$).

Două puncte ale unui cerc se consideră diametral opuse atunci cînd dreapta care le unește trece prin centru. B și D sînt puncte diametral opuse în cercul O. $\overline{BD} = 2R$. BD se numește diametru. Diametrul împarte cercul în două părți egale (2 semicercuri). Orice diametru este o axă de simetrie pentru cerc.

Se numește *arc* o porțiune din circumferința cercului ($A_1 B_1$).

Arcul de cerc poate fi împărțit în două sau mai multe părți asemănător unui segment de dreaptă.

Segmentul de dreaptă care unește extremitățile unui arc de cerc se numește *coardă*, $\overline{A_1B_1}$ sau $\overline{MN}$ (fig. 20.11).

Coarda MN subîntinde arcul MAN.

La arce egale corespund coarde egale și invers.

Diametrul este coarda cea mai mare a cercului.

Prin trei puncte nesituate în linie dreaptă trece un cerc și numai unul. Aceste cerc se numește *cerc circumscris triunghiului* format din

cele trei puncte din plan. Centrul cercului circumscris este egal depărtat de vîrfurile triunghiului şi se găseşte la întretăierea *mediatoarelor laturilor* (fig. 20.12). Prin mediatoare se înţelege perpendiculara ridicată pe mijlocul laturii respective.

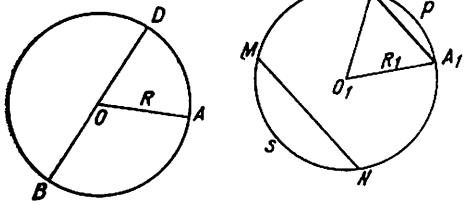


Fig. 20.11

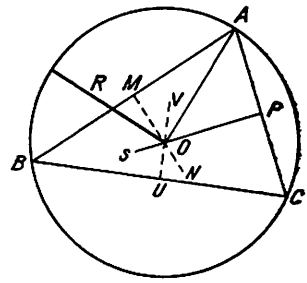
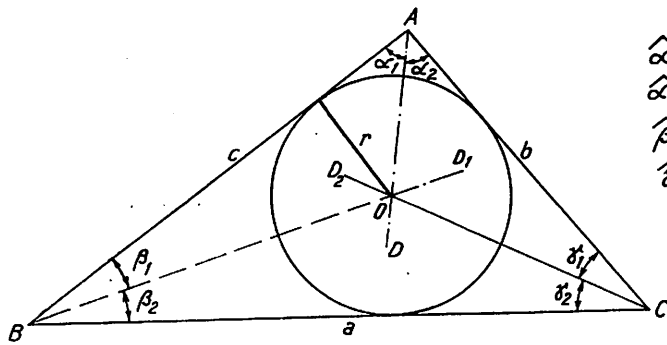


Fig. 20.12

Mediatoarea MN reprezintă locul geometric[1]) al punctelor egal depărtate de A şi B, iar mediatoarea PS pe cel al punctelor egal depărtate de A şi C.

Punctul „O", intersecţia celor două mediatoare se află deci la egală depărtare de cele trei puncte A, B şi C, constituind centrul cercului circumscris triunghiului ABC ($\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = R$).



$\widehat{\alpha_1} + \widehat{\alpha_2} = \widehat{\alpha}$
$\widehat{\alpha_1} = \widehat{\alpha_2}$
$\widehat{\beta_1} = \widehat{\beta_2}$
$\widehat{\gamma_1} = \widehat{\gamma_2}$

Fig. 20.13

Cercul tangent laturilor unui triunghi se numeşte *cerc înscris* în triunghi. Raza lui se notează cu „r" (fig. 20.13).

[1] Prin loc geometric se înţelege mulţimea tuturor punctelor care au o aceeaşi proprietate caracteristică.

Cercul tangent unei laturi a unui triunghi și prelungirilor celorlalte laturi se numește cerc exînscris (fig. 20.14).

Centrul cercului înscris în triunghiul ABC se află la intersecția bisectoarelor unghiurilor triunghiului (fig. 20.13).

Bisectoarea AD reprezintă locul geometric al punctelor egal depărtate de laturile b și c.

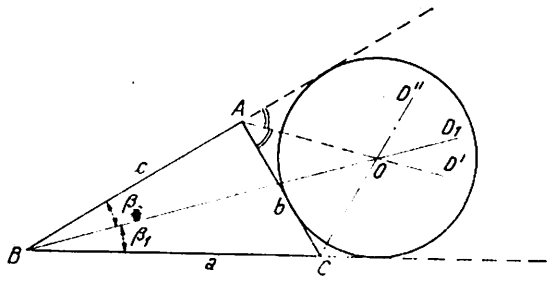


Fig. 20.14

Bisectoarea BD_1 reprezintă locul geometric al punctelor egal depărtate de laturile a și c. Punctul de intersecție a celor două bisectoare (O) este egal depărtat de laturile a, b, c ale triunghiului — constituie deci centrul cercului înscris.

20.1.3. Egalitatea triunghiurilor

Se numesc figuri egale, acelea care pot fi suprapuse astfel încît să coincidă exact una cu cealaltă în toate părțile lor. Rezultă că două triunghiuri sînt egale atunci cînd prin suprapunere, elementele lor coincid.

Condițiile necesare și suficiente ca două triunghiuri să fie egale se arată în propozițiile următoare.

I. *Două triunghiuri sînt egale, dacă au o latură egală și unghiurile alăturate acestei laturi, respectiv egale.*

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}; \qquad \hat{\alpha} = \hat{\alpha}'; \qquad \hat{\beta} = \hat{\beta}'.$$

Triunghiul $A'B'C'$ (fig. 20.15) va coincide cu triughiul ABC printr-o mișcare în plan.

Triunghiul $A'B'C'$ (fig. 20.16) pentru a coincide cu triunghiul ABC trebuie mai întîi să considerăm figura simetrică a triunghiului $A'B'C'$

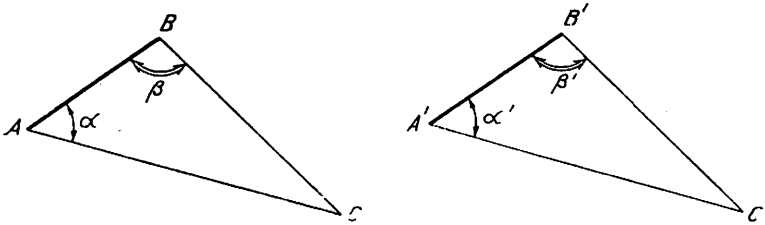


Fig. 20.15

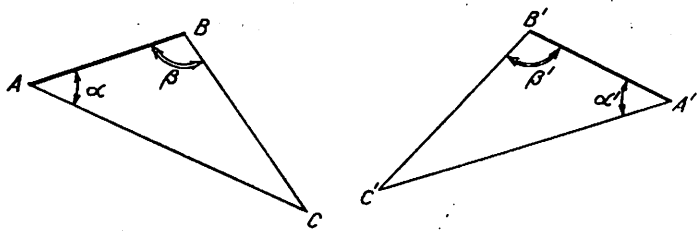


Fig. 20.16

în raport cu latura AB luată ca axă de simetrie (fig. 20.17) după care printr-o mișcare în plan se face coincidența triunghiurilor.

II. *Două triunghiuri sînt egale dacă au două laturi și unghiul cuprins între ele egale* (fig. 20.18).

$$\overline{AB} = \overline{A'B'};\ \overline{AC} = \overline{A'C'};\ \hat{\alpha} = \hat{\alpha'}.$$

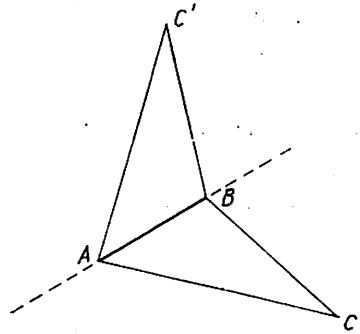


Fig. 20.17

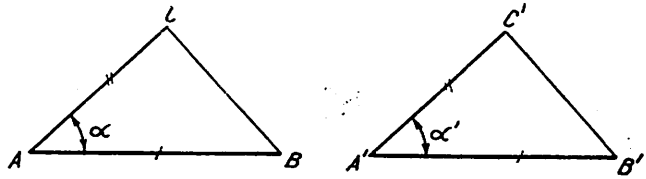


Fig. 20.18

Demonstrația este analoagă cu cea a teoremei precedente.

III. *Două triunghiuri sînt egale dacă au laturile egale două cîte două.*

Să presupunem că în triunghiurile ABC și $A'B'C'$ (fig. 20.19) laturile AB, BC și AC sînt respectiv egale cu laturile $A'B'$; $B'C'$ și $A'C'$.

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}; \quad \overline{AC} = \overline{A'C'}; \quad \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

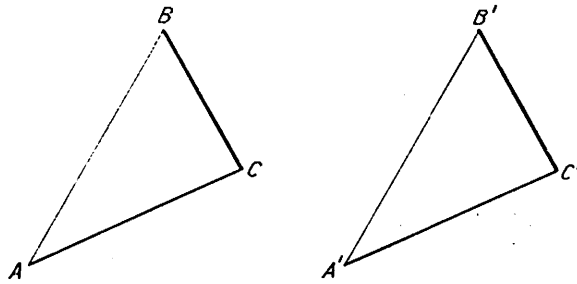


Fig. 20.19

Pentru a demonstra că $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ se consideră triunghiul ABC simetric față de una din laturile lui și apoi se deplasează $\Delta A'B'C'$ în așa fel încît latura sa, egală cu cea considerată drept axă de simetrie să coincidă. În această situație, triunghiul simetric reprezintă o poziție a triunghiului $A'B'C'$.

20.1.4. Triunghiuri isoscele și echilaterale

Se numește *triunghi isoscel*, triunghiul care are două laturi egale. Cea de a treia latură se numește baza triunghiului isoscel. Unghiurile alăturate bazei sînt egale.

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$

$\overline{BC}$ = baza triunghiului

$$\sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma$$

Pe baza figurilor simetrice față de una din laturi să se arate că $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma$.

Într-un triunghi isoscel, mediana, dusă din vîrful opus bazei, coincide cu înălțimea, bisectoarea și mediatoarea duse din același vîrf.

În triunghiul isoscel ABC (fig. 20.20) AM este mediană, deci $\overline{BM} = \overline{MC}$. Unghiul BMA este egal cu unghiul CMA și egal cu unghiul drept. Unghiurile α_1 și α_2 sînt egale deoarece fac parte din triunghiuri egale $\Delta ABM = \Delta ACM$. Deci AM este și bisectoare.

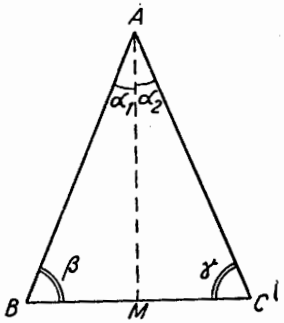


Fig. 20.20

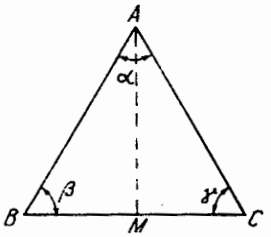


Fig. 20.21

Se numește *triunghi echilateral*, triunghiul care are toate laturile egale.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$$

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma$$

Unghiurile unui triunghi echilateral sînt egale între ele. În triunghiul echilateral, fiecare mediană coincide cu bisectoarea, înălțimea și mediatoarea dusă din același vîrf.

Să se arate că triunghiul echilateral are trei axe de simetrie — cele trei mediane ale sale.

20.1.5. **Triunghiul dreptunghic**

Se numește triunghi dreptunghic, triunghiul care are un unghi drept (fig. 20.22)

Latura opusă unghiului drept se numește ipotenuza (a) iar laturile care formează unghiul drept se numesc catete (b și c).

$$\overline{CA} \perp \overline{AB}$$

Egalitatea triunghiurilor dreptunghice

Două triunghiuri dreptunghice sînt egale dacă au catetele respective egale.

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

$$\overline{AC} = \overline{A'C'}$$

$$\Delta\, ABC = \Delta A'B'C'$$

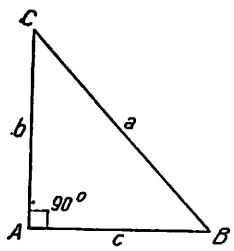


Fig. 20.22

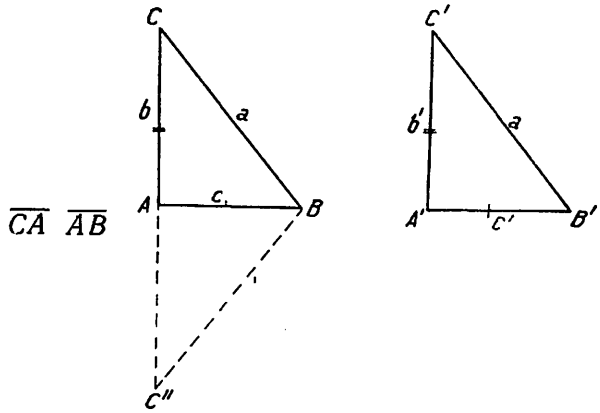


Fig. 20.23

Două triunghiuri dreptunghice sînt egale dacă au ipotenuza egală și o catetă egală.

$$a = a'$$

$$c = c'$$

$$\Delta\, ABC = \Delta A'B'C'$$

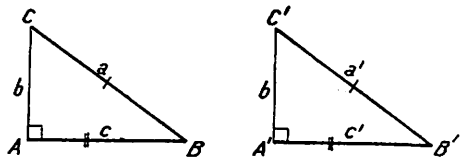


Fig. 20.24

În triunghiurile ABC și $A'B'C'$ avem $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ și $\overline{BC} = \overline{B'C'}$. Dacă suprapunem triunghiul $A'B'C'$ peste triunghiul ABC,

astfel încît laturile egale să coincidă, latura $A'C'$ ia direcția AC și se suprapune. Rezultă că $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ deci triunghiurile menționate sînt egale.

Două triunghiuri dreptunghice sînt egale dacă au ipotenuzele egale și cîte un unghi ascuțit egal.

$$a = a'$$

$$\beta = \beta'$$

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$$

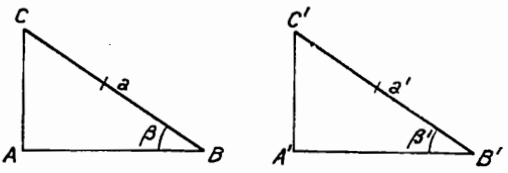


Fig. 20.25

Dacă se suprapune triunghiul $A'B'C'$ peste triunghiul ABC, astfel încît $\sphericalangle\beta$ să coincidă cu $\sphericalangle\beta'$, ipotenuza $C'B'$ ia direcția CB, iar B' coincide cu B. Rezultă că $AB = A'B'$ deci triunghiurile sînt egale.

Două triunghiuri dreptunghice sînt egale dacă au cîte o catetă egală și unghiul opus ei de asemenea egal.

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

$$c = c'$$

$$\sphericalangle\gamma = \sphericalangle\gamma'$$

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$$

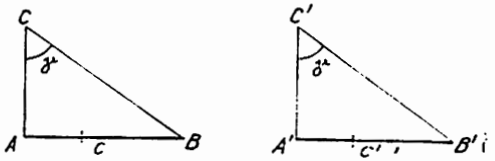


Fig. 20.26

Prin suprapunere toate elementele triunghiurilor coincid, deci triunghiurile sînt egale.

20.1.6. Unghiul exterior triunghiului

Se numește unghi exterior triunghiului, unghiul format de semidreapta pe care este așezată o latură a triunghiului și semidreapta pe care este așezată prelungirea altei laturi a triunghiului și care își are vîrful într-unul din vîrfurile triunghiului (fig. 20.27 și 20.28)

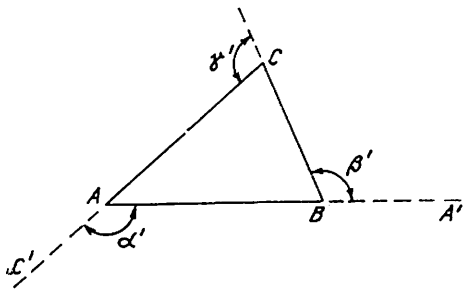


Fig. 20.27

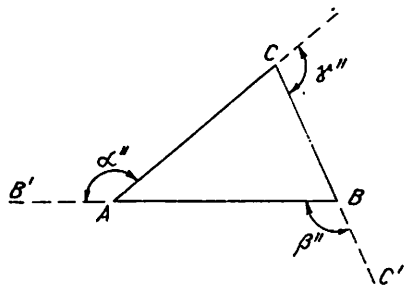


Fig. 20.28

Unghiurile α', α'', β', β'' și γ', γ'' sînt unghiuri exterioare triunghiului ABC.

Unghiul exterior al unui triunghi este mai mare decît oricare unghi al triunghiului neadiacent cu el. Considerăm triunghiul ABC și unghiul exterior CBA' (fig. 20.29).

$$AM = MD$$

$\Delta AMC = \Delta BMD$ deoarece au laturile

$\overline{AM} = \overline{MD}$ și $\overline{CM} = \overline{BM}$ prin construcție și

$\sphericalangle CMA = \sphericalangle BMD$ ca opuse la vîrf.

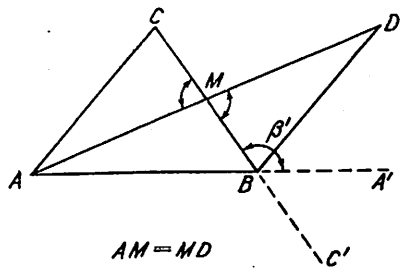


Fig. 20.29

Rezultă că $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ACB$ ca unghiuri care se opun la laturi egale.

Unghiul β', unghi exterior triunghiului ABC reprezintă suma a două unghiuri adiacente ($\sphericalangle CBD$ şi $\sphericalangle DBA'$) deci unghiul β' este mai mare decît oricare din unghiurile care îl formează ($\sphericalangle CBD$ şi $\sphericalangle DBA'$).

Să se arate în continuare că $\sphericalangle CBA' > \sphericalangle CAB$ şi $\sphericalangle CBA' > \sphericalangle ACB$, considerînd şi unghiul exterior triunghiului ABC' egal ca opus la vîrf cu unghiul CBA'.

20.1.7. Suma unghiurilor unui triunghi

Suma unghiurilor unui triunghi este egală cu valoarea a două unghiuri drepte (fig. 20.30).

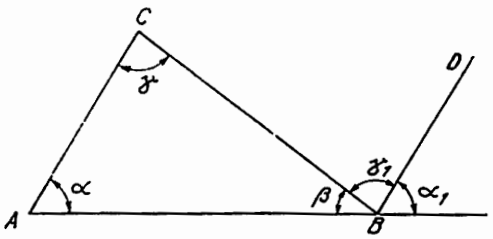


Fig. 20.30

În vîrful B al triunghiului ABC s-a dus segmentul $\overline{BD} \,//\, \overline{AC}$. În punctul B sau format 3 unghiuri a căror sumă este egală cu două unghiuri drepte $\sphericalangle \alpha_1 + \sphericalangle \gamma_1 + \sphericalangle \beta = 2$ dr.

Deoarece unghiurile $\alpha = \alpha_1$ ca unghiuri corespondente, iar $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_1$ ca alterne interne formate de paralelele AC şi BD cu secanta BC rezultă că:

$$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma = 2\ dr = 180°.$$

Cititorul să arate că:

Un unghi exterior unui triunghi este egal cu suma unghiurilor interioare neadiacente cu el.

20.1.8. Segmente proporţionale

Am reţinut de la teoria numerelor că se numeşte proporţie egalitatea a două rapoarte. Două mărimi sînt proporţionale atunci cînd raportul a două valori oarecare a unei mărimi este egal cu raportul valorilor corespunzătoare celei de a doua mărimi.

Două segmente de dreaptă, AB și CD sînt proporționale cu segmentele $A'B'$ și $C'D'$ dacă este satisfăcută relația:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Dacă se înlocuiesc segmentele prin numerele care le reprezintă, atunci proprietățile rapoartelor de numere sînt valabile și rapoartelor de segmente.

20.1.9. Asemănarea triunghiurilor

Două triunghiuri sînt asemenea dacă au unghiurile egale sau laturile omoloage proporționale.

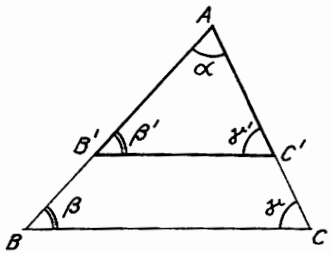


Fig. 20 .31

Triunghiurile egale sînt și triunghiuri asemenea.

O paralelă la o latură a unui triunghi ($\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$), formează cu celelalte două laturi un triunghi asemenea cu primul, deoarece:

— unghiurile celor două triunghiuri sînt egale.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle\alpha = \text{comun};\ \sphericalangle\beta = \sphericalangle\beta' \\ \sphericalangle\gamma = \sphericalangle\gamma' \end{array}\right\} \text{unghiuri corespondente}$$

Condițiile necesare și suficiente pentru ca două triunghiuri să fie asemenea sînt:

I. Două triunghiuri sînt asemenea dacă au două unghiuri respectiv egale.

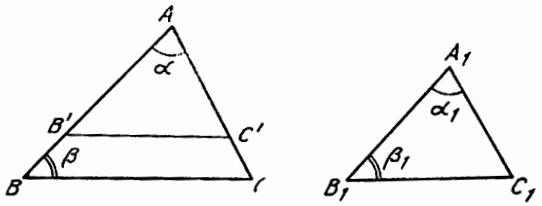


Fig. 20.32

Considerăm triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ în care $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1$ și $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta_1$.

Luăm pe AB lungimea $AB' = A_1B_1$ și ducem prin punctul B' segmentul $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$.

Triunghiul $AB'C'$ este asemenea cu triunghiul ABC, $\Delta AB'C' = \Delta A_1B_1C_1$, avînd 2 unghiuri egale.

Rezultă că triunghiul $A_1B_1C_1$ este asemenea cu triunghiul ABC.

II. Două triunghiuri sînt asemenea dacă au un unghi egal cuprins ntre laturi proporționale.

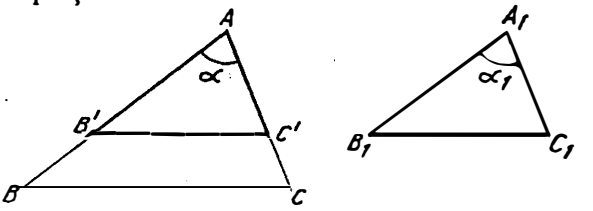


Fig. 20.33

Considerăm triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ în care $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1$ iar

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1}.$$

Se ia pe AB lungimea $AB' = A_1B_1$ și prin B' se duce $B'C' \parallel BC$. Triunghiul $AB'C'$ este asemenea cu triunghiul ABC. Dar triunghiul $AB'C'$ este egal cu triunghiul $A_1B_1C_1$ avînd un unghi egal cuprins între laturi egale.

Rezultă că $\Delta ABC \approx \Delta A_1B_1C_1$.

III. Două triunghiuri sînt asemenea dacă au laturile proporționale.

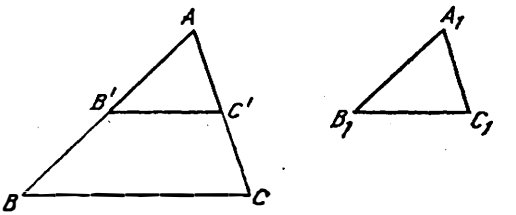


Fig. 20.34

Considerăm triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ în care

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Se ia pe AB lungimea $AB' = A_1B_1$ și prin B' se duce $B'C' \parallel BC$. Triunghiul $AB'C'$ este asemenea cu ABC dar $AB'C' = A_1B_1C_1$, avî laturile egale două cîte două.

Proporțiile $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$ și $\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'}$ au cîte trei termeni comu cu proporțiile date:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \text{ și } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{C_1B_1},$$

dar $AB' = A_1B_1$ rezultă că $AC = A_1C_1$ și $B'C' = B_1C_1$,

IV. Două triunghiuri sînt asemenea dacă au laturile paralele sau perpendiculare două cîte două. În acest caz unghiurile sînt egale sau suplementare.

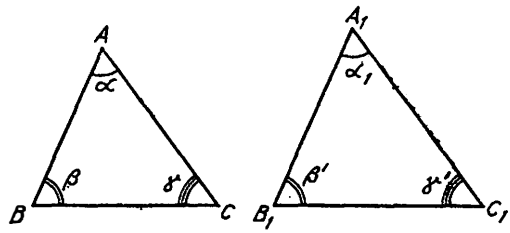


Fig. 20.35

Dacă considerăm triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ putem scrie:

$$AB \parallel A_1B_1; \qquad AC \parallel A_1C_1; \qquad BC \parallel B_1C_1$$

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1; \qquad \hat{\beta} = \hat{\beta}_1; \qquad \hat{\gamma} = \hat{\gamma}_1.$$

Să se arate că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt asemenea dacă laturile lor sînt perpendiculare.

V. Două triunghiuri dreptunghice sînt asemenea, dacă raportul între o catetă și ipotenuză este același pentru cele două triunghiuri considerate.

VI. Două triunghiuri dreptunghice sînt asemenea dacă au un unghi ascuțit egal.

VII. Două triunghiuri dreptunghice sînt asemenea dacă au catetele proporționale.

Cazurile de asemănare ale triunghiurilor dreptunghice rezultă din cazurile de asemănare a triunghiurilor oarecare.

20.1.10. Drepte concurente în triunghi

I. În orice triunghi mediatoarele laturilor se taie în același punct sînt concurente). Punctul lor de întretăiere (O) constituie centrul cercului circumscris triunghiului.

$$AM = MB$$
$$OM \perp AB$$
$$AN = NC$$
$$ON \perp AC$$
$$BP = PC$$
$$OP \perp BC$$

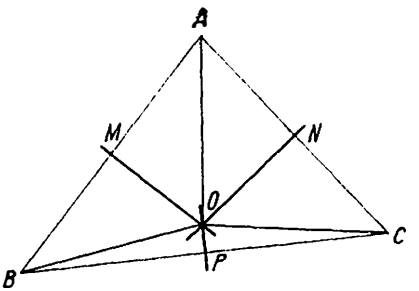


Fig. 20.36

Punctul 0, găsindu-se pe perpendiculara OM este egal depărtat de A și de B. Punctul 0 pe perpendiculara ON este egal depărtat de A și de C.

Rezultă că: $\overline{OA} = \overline{OB}$; $\overline{OA} = \overline{OC}$ deci și $\overline{OB} = \overline{OC}$.

Punctul 0 găsindu-se egal depărtat de B și de C se află pe mediatoarea OP, deci perpendicularele pe mijloacele laturilor triunghiului sînt concurente în punctul 0.

II. În orice triunghi, cele trei bisectoare interioare se intersectează în același punct (sînt concurente).

În triunghiul ABC bisectoarele unghiurilor interioare formate în vîrfurile A și B se întretaie în punctul 0 interior triunghiului.

Punctul 0 găsindu-se pe bisectoarea AO se află egal depărtat de AB și de AC ($\overline{OM} = \overline{ON}$).

Punctul O aflîndu-se pe bisectoarea BO este egal depărtat de A și de BC. ($\overline{OM} = \overline{OP}$).

Rezultă că punctul O este egal depărtat de AC și de BC, deci el găsește și pe bisectoarea CO.

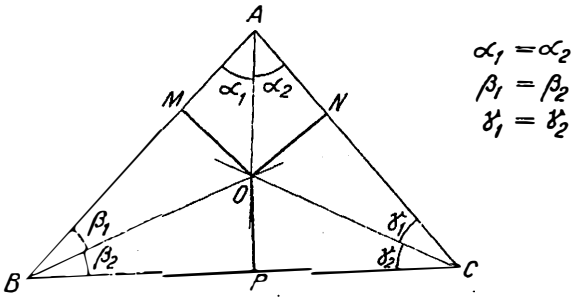


Fig. 20.37

Punctul O este centrul cercului înscris în triunghi.

III. În orice triunghi, bisectoarea unui unghi interior triunghiului și bisectoarele unghiurilor exterioare neadiacente se taie în același punct.

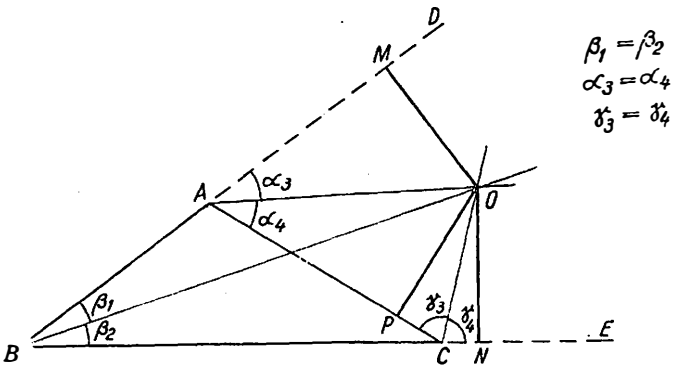


Fig. 20.38

Considerăm triunghiul ABC (fig. 20.38). Unghiurile exterioare DAC și ACE avînd suma mai mică decît patru unghiuri drepte, vor avea și suma jumătăților lor mai mică decît 180 grade și deci bisectoarele lor se vor întretăia într-un punct O interior unghiului, interior triunghiului format în vîrful B.

Acest punct O este egal depărtat de laturile triunghiului ABC ($\overline{OM} = \overline{ON} = \overline{OP}$). Fiind egal depărtat de laturile AB și BC el se află pe bisectoarea BO.

IV. În orice triunghi cele trei înălțimi se intersectează în același punct (sînt concurente).

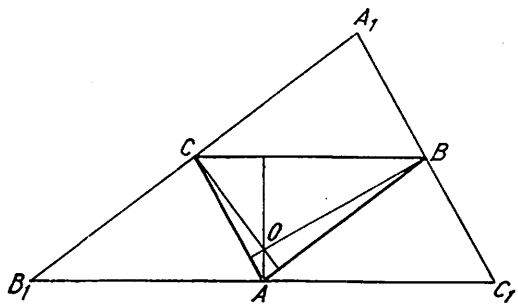


Fig. 20.39

Paralele duse la laturile triunghiului ABC prin vîrfurile triunghiului formează triunghiul $A_1B_1C_1$. Înălțimile triunghiului ABC sînt mediatoarele laturilor triunghiului $A_1B_1C_1$.

Mediatoarele, așa cum am văzut sînt concurente în punctele O. Rezultă deci că înălțimile triunghiului ABC sînt concurente în punctul O.

V. Cele trei mediane ale unui triunghi sînt concurente într-un punct a flat la 2/3 din lungimea fiecăreia dintre ele, măsurat de la vîrful respectiv.

AM, BN și CP sînt medianele triunghiului ABC.

Considerăm medianele BN și CP și punctul lor de intersecție (O). Notăm cu R și S jumătățile segmentelor BO și CO. În triunghiul BOC se unește R cu S. Segmentul RS este paralel cu BC și egal cu jumătatea lui (unește jumătățile a două laturi ale triunghiului BOC).

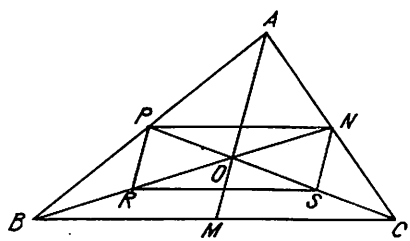


Fig. 20.40

NP este paralel și egal cu RS. Diagonalele PS și NR se întretaie la mijloacele lor.

Rezultă că medianele BN și CP se taie la 2/3 din lungimea lor, considerat de la vîrfurile B și C.

Punctul O constituie centrul de greutate al triunghiului ABC.

20.2. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIURI

20.2.1. Relații metrice în triunghiul dreptunghic

I. În triunghiul dreptunghic ABC (fig. 20.41) înălțimea AD formează triunghiurile asemenea ABH și ACH deoarece $\sphericalangle AHB = \sphericalangle AHC = 90°$ și $\sphericalangle BAH = \sphericalangle ACH$ ca unghiuri ascuțite cu laturi perpendiculare.

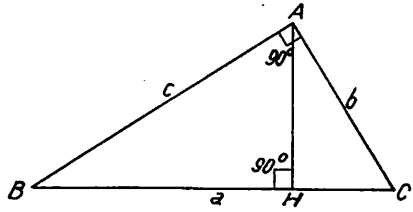


Fig. 20.41

Din asemănarea ΔABH și a ΔACH rezultă proporția:

$$\frac{CH}{AH} = \frac{AH}{BH} \text{ sau } \boxed{AH^2 = BH \cdot HC}$$

Deci *într-un triunghi dreptunghic, înălțimea dusă din vîrful unghiului drept este medie proporțională între segmentele determinate de piciorul ei pe ipotenuză.*

II. Cunoaștem că proiecția unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei dusă din punct pe dreapta respectivă. Proiecția unui segment pe o dreaptă este segmentul ale cărui extremități sînt proiecțiile extremităților segmentului dat.

În triunghiul dreptunghic ABC (fig. 20.41) BH este proiecția catetei AB, iar HC proiecția celeilalte catete, AC.

Triunghiurile ABH și ABC sînt asemenea avînd unghiul din B comun.

Din asemănarea celor două triunghiuri se poate scrie proporția:

$$\frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC} \text{ sau } \boxed{AC^2 = BC \cdot CH}$$

Deci, *într-un triunghi dreptunghic, o catetă este medie proporțională între ipotenuză și proiecția catetei pe ipotenuză.*

Corolar. Raportul patratelor catetelor este egal cu raportul proiecțiilor acestora pe ipotenuză.

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BC \cdot BH}{BC \cdot CH} = \frac{BH}{CH}.$$

20.2.2. Teorema lui Pitagora

III. *Într-un triunghi dreptunghic, patratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor* ($BC^2 = AB^2 + AC^2$) (fig. 20.41).

În teorema precedentă am văzut că:

$$AB^2 = BC \cdot BH \text{ și } AC^2 = BC \cdot CH.$$

Adunînd aceste relații se obține:

$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot BH + BC \cdot CH = BC(BH + CH)$$

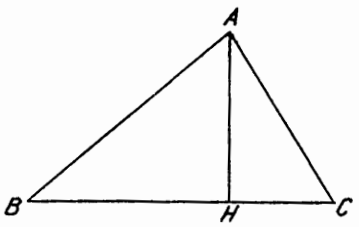
$$\boxed{AB^2 + AC^2 = BC^2} \text{ sau } \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

20.2.3. Relații metrice într-un triunghi oarecare

I. Să considerăm triunghiul ABC (fig. 20.42) în care punctul H este proiecția vîrfului A pe latura BC.

$$AH \perp BC$$

Fig. 20.42



Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABH avem: $\overline{AB^2} = \overline{AH^2} + \overline{BH^2}$, iar în triunghiul dreptunghic ACH: $\overline{AC^2} = \overline{AH^2} + \overline{CH^2}$.

Scăzînd cele două egalităţi membru cu membru, obţinem:

$$\overline{AB^2} - \overline{AC^2} = \overline{BH^2} - \overline{CH^2}$$

Deoarece BH este proiecţia laturii AB pe latura BC iar CH proiecţia laturii AC pe latura BC putem enunţa că:

Diferenţa pătratelor a două laturi ale unui triunghi este egală cu diferenţa pătratelor proiecţiilor lor pe latura a treia.

II. Fie triunghiul ABC (fig. 20.42) în care am arătat că:

$$\overline{AB^2} - \overline{AC^2} = \overline{BH^2} - \overline{CH^2}$$

sau

$$\overline{AB^2} = \overline{AC^2} + \overline{BH^2} - \overline{CH^2}$$

Deoarece $\overline{BH} = \overline{BC} - \overline{CH}$ se poate înlocui BH^2 cu

$$(\overline{BC} - \overline{CH})^2 = \overline{BC^2} - 2\,\overline{BC}\,.\,\overline{CH} + \overline{CH^2}$$

Deci

$$\overline{AB^2} = \overline{AC^2} + \overline{BC^2} - 2\,\overline{BC}\,.\,\overline{CH}$$

Intr-un triunghi oarecare, pătratul unei laturi opuse unui unghi ascuţit, este egal cu suma patratelor celorlalte două laturi, minus de două ori produsul uneia dintre aceste laturi cu proiecţia celeilalte pe ea.

III. În triunghiul ABC (fig. 20.43), latura AB este opusă unghiului obtuz γ. Din A s-a coborît perpendiculara AH pe BC.

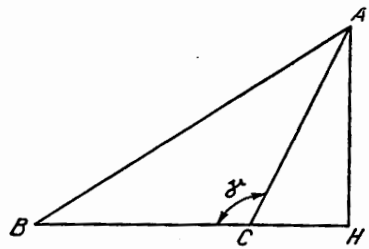


Fig. 20.43

Putem scrie din nou:

$$\overline{AB^2} = \overline{AC^2} + \overline{BH^2} - \overline{CH^2}$$

cum însă

$$\overline{BH} = \overline{BC} + \overline{CH}$$

relația devine:

$$\boxed{AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2\,BC \cdot CH}$$

Adică: *într-un triunghi oarecare, pătratul laturii opuse unui unghi obtuz este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi, plus de două ori produsul uneia dintre aceste laturi și proiecția celeilalte pe ea.*

IV. Să considerăm triunghiul ABC (fig. 20.44). Pe latura BC se ia un punct D pe care-l unim cu vîrful A. Tot din vîrful A se duce perpendiculara AH.

$$\sphericalangle \delta = \text{obtuz}.$$

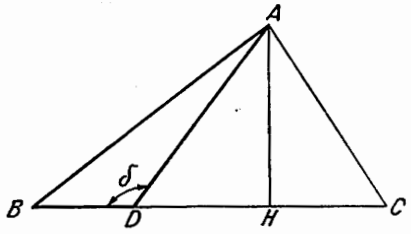


Fig. 20.44

În triunghiul ABD se poate scrie:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2\,\overline{BD} \cdot \overline{DH}.$$

În triunghiul ACD se poate scrie:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2\,\overline{CD} \cdot \overline{DH}.$$

Dacă înmulțim cele două egalități prima cu CD iar cea de a doua cu BD și le adunăm membru cu membru obținem:

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{CD} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} = \overline{AD}^2(\overline{BD} + \overline{CD}) + \overline{CD}^2 \cdot \overline{BD}$$
$$+ \overline{BD}^2 \cdot \overline{CD} = \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{BD} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BC}$$

Rezultă teorema lui Stewart:

$$\boxed{\overline{AB}^2 \cdot \overline{DC} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} - \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} = \overline{BC} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{BD}}$$

V. Fie triunghiul oarecare ABC (fig. 20.45)

$\overline{BC} = a$

$\overline{BD} = \overline{DC} = \frac{a}{2}$

$\overline{AB} = c$

$\overline{AC} = b$

$\measuredangle\delta$ = obtuz

$\overline{AD}$ = mediana coborîtă din vîrful A.

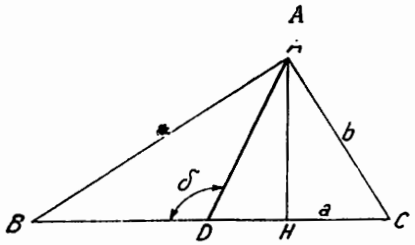


Fig. 20.45

Dacă în teorema lui Stewart arătată anterior înlocuim laturile AB, AC şi BC prin valorile lor, c, b şi a, iar segmentele BD şi DC prin $\frac{a}{2}$ se obţine:

$$\overline{AC^2} \cdot \overline{BD} + \overline{AB^2} \cdot \overline{CD} = \overline{AD^2} \cdot \overline{BC} + \overline{BD} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BC}$$

$$b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \frac{a}{2} = \overline{AD^2} \cdot a + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a$$

împărţim cu a:

$$\frac{b^2 + c^2}{2} = \overline{AD^2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

de unde:

$$\overline{AD^2} = \frac{b^2 + c^2}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$\boxed{b^2 + c^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\,\overline{AD^2}}$$

Rezultă că *suma pătratelor a două laturi ale unui triunghi este egală cu dublul pătratului jumătății laturii a treia, adunat cu de două ori pătratul medianei corespunzătoare.*

VI. Considerăm același triunghi ABC (fig. 20.45) în care scriem egalitățile:

$$\overline{AB^2} = \overline{AD^2} + \overline{BD^2} + 2\,\overline{BD} \cdot \overline{DH}$$

$$\overline{AC^2} = \overline{AD^2} + \overline{CD^2} - 2\,\overline{CD} \cdot \overline{DH}$$

din aceste egalități înlocuim laturile prin valorile lor și obținem:

$$c^2 = \overline{AD^2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \overline{DH}$$

$$b^2 = \overline{AD^2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \overline{DH}$$

Scăzînd aceste egalități membru cu membru se obține:

$$\boxed{c^2 - b^2 = 2a\,\overline{DH}}$$

Rezultă că *diferența pătratelor a două laturi ale unui triunghi este egală cu dublul produsului dintre latura a treia și proiecția medianei pe această latură.*

VII. Să considerăm triunghiul ABC (fig. 20.46) în care $AH \perp BC$. Scriem valoarea unei laturi care se opune unui unghi ascuțit

$$\overline{AB^2} = \overline{AC^2} + \overline{BC^2} - 2\,\overline{BC} \cdot \overline{CH}$$

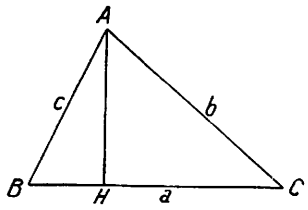


Fig. 20.46

sau

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2a \cdot \overline{CH}$$

de unde

$$\overline{CH} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

În triunghiul dreptunghic AHB se poate scrie:

$$\overline{AH^2} = c^2 - \overline{BH^2} = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2$$

Membru doi este o diferență de două patrate, deci:

$$\overline{AH^2} = \left[c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right]\left[c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right] =$$

$$= \frac{(2ac + b^2 - a^2 - c^2)(2ac + a^2 + c^2 - b^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{[b^2 - (a - c)^2]\,](a+c)^2 - b^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{(b + c - a)(a + b - c)(a + c - b)(a + b + c)}{4a^2}$$

Dacă notăm perimetrul triunghiului cu $2p$ egalitatea devine:

$$\overline{AH^2} = \frac{(2p - 2a)(2p - 2c)(2p - 2b)\,2p}{4a^2}$$

$$\boxed{\overline{AH^2} = \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{a^2}}$$

$$\boxed{\overline{AH} = \frac{2\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{a}}$$

Valoarea înălțimii se poate obține și dacă efectuăm calculele în relația

$$\overline{AH^2} = \frac{[(a + c)^2 - b^2]\,[b^2 - (a - c)^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{1}{4a^2}[4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2] =$$

$$\boxed{\overline{AH^2} = \frac{1}{4a^2}(2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$$

Aceste relații dau valoarea înălțimii în orice triunghi în raport cu măsura laturilor triunghiului.

VIII. Să vedem în continuare valoarea bisectoarelor triunghiului în funcție de laturi.

Considerăm triunghiul ABC (fig. 20.47) în care AD este bisectoarea unghiului α format în vîrful A.

Piciorul bisectoarei AD, punctul D împarte latura BC în segmente proporționale cu celelalte laturi (AB și AC) ale triunghiului ABC.

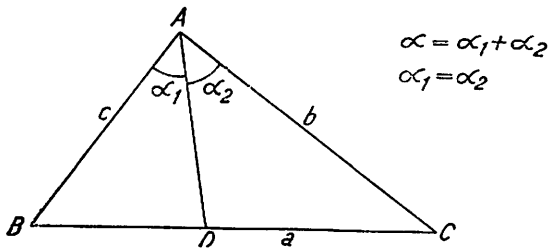


Fig. 20.47

Deci:

$$\frac{c}{BD} = \frac{b}{DC} = \frac{c+b}{BD+DC} = \frac{c+b}{a}$$

de unde rezultă:

$$\boxed{\overline{BD} = \frac{ca}{c+b}} \qquad \boxed{\overline{CD} = \frac{ab}{b+c}}$$

Dacă în relația lui Stewart

$$\overline{AB^2} \cdot \overline{DC} + \overline{AC^2} \cdot \overline{BD} - \overline{AD^2} \cdot \overline{BC} = \overline{BC} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{BD}$$

înlocuim valorile lui $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ și $\overline{AB}$ se obține:

$$c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} + b^2 \cdot \frac{ca}{c+b} - \overline{AD^2} \cdot a = a \cdot \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ac}{b+c}$$

împărțind cu a se obține:

$$\frac{c^2 b}{b+c} + \frac{b^2 c}{c+b} - \overline{AD^2} = \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ac}{b+c}$$

de unde:

$$\overline{AD^2} = \frac{c^2 b + b^2 c}{b+c} - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = bc\,\frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}$$

$$\boxed{AD^2 = bc\,\frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}}$$

IX. Fie triunghiul ABC (fig. 20.48) și AD bisectoarea unghiului A iar AF bisectoarea unghiului exterior triunghiului în punctul A.

Punctul F împarte exterior latura BC proporțional cu AC și AB și se găsește pe latura CB dincolo de B, astfel:

$$\frac{CF}{b} = \frac{BF}{c} = \frac{BC}{b-c} = \frac{a}{b-c}$$

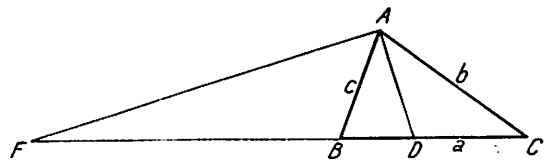


Fig. 20.48

de unde:

$$\boxed{CF = \frac{ab}{b-c}} \qquad \boxed{BF = \frac{ac}{b-c}}$$

Aplicînd teorema lui Stewart în triunghiul ACF și punctul B, luat pe baza CF, și înlocuind pe BC, AC, AB, BF și CF, prin valorile lor obținem:

$$\overline{AF^2}\,\overline{BC} + \overline{AC^2}\,\overline{BF} - \overline{AB^2}\,\overline{CF} = \overline{CF} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BF}$$

$$\overline{AF^2}\,a + b^2 \cdot \frac{ac}{b-c} - c^2 \frac{ab}{b-c} = \frac{ab}{b-c} \cdot \frac{ac}{b-c} \cdot a$$

Împărțind cu a rezultă:

$$\overline{AF^2} + \frac{b^2c}{b-c} - \frac{c^2b}{b-c} = \frac{ab}{b-c} \cdot \frac{ac}{b-c}$$

$$\overline{AF^2} = \frac{a^2bc}{(b-c)^2} - \frac{b^2c - c^2b}{b-c} = bc\frac{a^2 - (b-c)^2}{(b-c)^2}$$

$$\boxed{\overline{AF^2} = bc\frac{a^2 - (b-c)^2}{(b-c)^2}}$$

X. Considerăm triunghiul ABC și cercul circumscris lui (fig. 20.49).

AA_1 = diametrul cercului circumscris.

AH = înălțimea dusă din A pe latura BC.

Triunghiurile AHB și ACA_1 sînt triunghiuri dreptunghice, avînd unghiurile drepte în H și în C. Cele două triunghiuri au un unghi ascuțit egal ($\sphericalangle AA_1C = \sphericalangle ABH$ ca unghiuri care subîntind același arc (Anc).

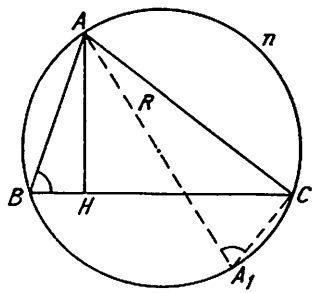


Fig. 20.49

Rezultă că cele două triunghiuri dreptunghice sînt asemenea, ceea ce ne dă posibilitatea să scriem:

$$\frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AA_1} \quad \text{de unde } AB \cdot AC = AH \cdot AA_1$$

dar:

$$AA_1 = 2R \ (R = \text{raza cercului circumscris})$$

$$\overline{AH^2} = \frac{4p\,(p-a)\,(p-b)\,p-c)}{a^2}$$

$$\overline{AH} = \frac{2\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{a}$$

Rezultă că: $\frac{2\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{a} \cdot 2R = b \cdot c$

deci:

$$\boxed{R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}}$$

Această relație dă posibilitatea să se determine raza cercului circumscris triunghiului în funcție de laturile lui.

20.3.1. Relații trigonometrice în triunghiul dreptunghic

Elementele principale ale triunghiului ABC sînt cele trei laturi (a,b,c) și cele trei unghiuri (α,β,γ). Pentru a rezolva un triunghi trebuie să se calculeze elementele principale ale lui cînd se cunosc un număr suficient de elemente.

Pentru rezolvarea triunghiului dreptunghic sînt necesare două elemente principale dintre care cel puțin o latură.

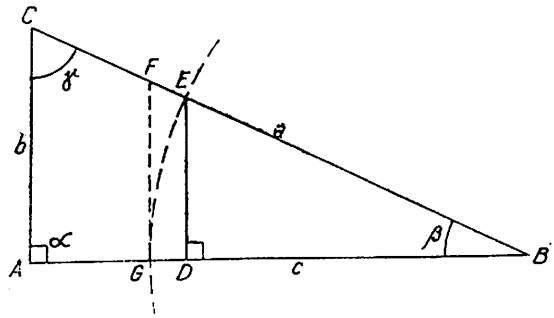


Fig. 20.50

Între cele trei laturi ale triunghiului cunoaștem relația dată de teorema lui Pitagora.

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Cu raza $BE = BG = 1$ se descrie arcul EG.

Se duc perpendicularele: $\overline{ED} \perp \overline{AB}$ și $\overline{FG} \perp \overline{AB}$.
Din figură se observă:

$$\overline{ED} = \sin\beta;\ \overline{BD} = \cos\beta;\ \overline{FG} = \operatorname{tg}\alpha;\ \text{etc.}$$

Din triunghiurile asemenea ABC și DBE rezultă:

1. $\dfrac{AC}{DE} = \dfrac{BC}{BE}$

sau:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{R} = \frac{a}{1} \quad \text{de unde:} \quad \boxed{b = a\sin\beta}$$

2. $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE}$ de unde: $\boxed{c = a\cos\beta}$

Pe același considerent se poate scrie

$$\boxed{b = a\cos\gamma}$$

$$\boxed{c = a\sin\gamma}$$

Din triunghiurile asemenea ABC și GBF rezultă:

3. $\frac{AC}{AB} = \frac{FG}{BG}$ sau $\frac{b}{c} = \text{tg}\beta$; de unde $\boxed{b = c\,\text{tg}\beta}$

Cunoaștem că suma unghiurilor unui triunghi este egală cu două unghiuri drepte $\alpha = 90°$; $\beta + \gamma = 90°$; $\beta = 90° - \gamma$ și $\gamma = 90° - \beta$. Tangenta și cotangenta fiind inverse una alteia se poate scrie

$$\boxed{\text{tg}\beta = \text{cotg}\,\gamma} = \text{cotg}\,(90° - \beta)$$

$$\boxed{\text{tg}\gamma = \text{cotg}\,\beta} = \text{cotg}\,(90° - \gamma)$$

Relațiile de mai sus se pot exprima astfel:

Intr-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete a triunghiului este egală cu lungimea ipotenuzei înmulțită cu sinusul unghiului opus sau cu cosinusul unghiului alăturat.

Intr-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este egală cu lungimea celeilalte catete a triunghiului înmulțită cu tangenta unghiului opus sau cu cotangenta unghiului alăturat.

Teorema lui Pitagora din geometrie.

($a^2 = b^2 + c^2$) se poate dovedi și trigonometric, ridicînd la pătrat relațiile:

$$b = a\sin\beta$$

$$c = a\cos\beta$$

și adunîndu-le:

$$b^2 = a^2 \sin^2\beta$$

$$c^2 = a^2 \cos^2\beta$$

$$b^2 + c^2 = a^2 (\sin^2\beta + \cos^2\beta)$$

însă $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

deci

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

TABEL
cu relațiile trigonometrice în triunghiul dreptunghic

Nr. crt.	Unghiul ascuțit β		Unghiul ascuțit γ	
1	$b = a \sin\beta$	$\sin\beta = \frac{b}{a}$	$c = a \sin\gamma$	$\sin\gamma = \frac{c}{a}$
2	$c = a \cos\beta$	$\cos\beta = \frac{c}{a}$	$b = a \cos\gamma$	$\cos\gamma = \frac{b}{a}$
3	$b = c \operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}$	$c = b \operatorname{tg}\gamma$	$\operatorname{tg}\gamma = \frac{c}{b}$
4	$c = b \operatorname{cotg}\beta$	$\operatorname{cotg}\beta = \frac{c}{b}$	$b = c \operatorname{cotg}\gamma$	$\operatorname{cotg}\gamma = \frac{b}{c}$
5	$a = c \sec\beta$	$\sec\beta = \frac{a}{c}$	$a = b \sec\gamma$	$\sec\gamma = \frac{a}{b}$
6	$a = b \operatorname{cosec}\beta$	$\operatorname{cosec}\beta = \frac{a}{b}$	$a = c \operatorname{cosec}\gamma$	$\operatorname{cosec}\gamma = \frac{a}{c}$

Din tabel se vede că în triunghiul dreptunghic avem:

$$\sin\beta = \cos\gamma; \qquad \cos\beta = \sin\gamma$$

— sinusul unui unghi ascuțit este egal cu cosinusul complementului său

la fel:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{cotg}\gamma; \qquad \operatorname{cotg}\beta = \operatorname{tg}\gamma$$

— tangenta unui unghi ascuțit este egală cu cotangenta complementului său.

Rezultă deci:

$$\sin\beta = \cos(90° - \beta)$$
$$\cos\beta = \sin(90° - \beta)$$
$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{cotg}(90° - \beta)$$
$$\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{tg}(90° - \beta).$$

20.3.2. **Rezolvarea triunghiului dreptunghic**

Relațiile precedente folosesc în primul rînd la rezolvarea triunghiurilor dreptunghice.

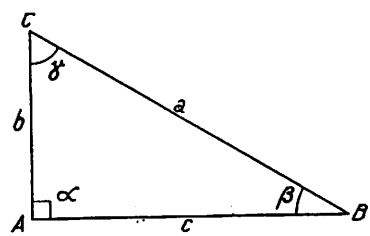


Fig. 20.51

Într-un orice triunghi dreptunghic se cunoaște un element al său și anume unghiul drept ($\alpha = 90°$).

A rezolva un triunghi dreptunghic înseamnă a calcula elementele sale cînd se cunosc trei din elementele sale principale (dintre care cel puțin o latură). Dacă se cunoaște un unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic, se poate calcula ușor și celălalt unghi ascuțit deoarece

$$\beta = 90° - \gamma \text{ și } \gamma = 90° - \beta$$

Triunghiul dreptunghic avînd un element cunoscut (unghiul α) rezultă că pentru determinarea elementelor lui principale este nevoie să mai cunoaștem două elemente (dintre care cel puțin o latură).

Să examinăm cîteva cazuri principale de rezolvare a triunghiurilor dreptunghice.

1. *Se cunosc ipotenuza* (a) *şi unghiul ascuţit* (γ) *necunoscute catetele* (b *şi* c) *şi unghiul ascuţit* (β). Se aplică relaţiile:

$$\beta = 90° - \gamma; \quad b = a \sin \beta; \quad c = a \cos \beta$$

Aplicaţie:

$$a = 718{,}580\ m \qquad \gamma = 54°12'44''$$

Rezolvare:

$$\beta = 90° - \gamma = 89°59'60'' - 54°12'44''$$

$$\boxed{\beta = 35°47'16''}$$

$$b = a \sin \beta$$

$$\lg b = \lg a + \lg \sin \beta = \lg 718{,}580 + \lg \sin 35°47'16'' =$$
$$= 2{,}8564760 + \bar{1}{,}76700$$
$$= 2{,}623460$$

$$\boxed{b = 420{,}216\ \text{m}}$$

$$c = a \cos \beta$$

$$\lg c = \lg a + \lg \cos \beta$$

$$\lg c = 718{,}580 + \lg \cos 35°47'16''$$

$$\lg c = 2{,}8564760 + \bar{1}{,}90912$$
$$= 2{,}7655960$$

$$\boxed{c = 582{,}911\ \text{m}}$$

2. *Se cunosc*: *ipotenuza* (a) *şi cateta* (b)

Se aplică relaţiile:

$$a^2 = b^2 + c^2; \qquad \sin \beta = \frac{b}{a}; \qquad \cos \gamma = \frac{b}{a}$$

Aplicație:

$$a = 450{,}75\ m; \qquad b = 278{,}35\ m$$

$$c = a^2 - b^2 = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

$$\lg c = \frac{1}{2}\lg(a+b) + \frac{1}{2}\lg(a-b)$$

$$= \frac{1}{2}\lg 729{,}10 + \frac{1}{2}\lg 172{,}40$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2{,}86278 + \frac{1}{2}\cdot 2{,}23655$$

$$\lg c = 2{,}54967$$

$$\boxed{c = 354{,}53\ m}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{a}$$

$$\lg \sin \beta = \lg b - \lg a = 2{,}44459 - 2{,}65394$$

$$\lg \sin \beta = \bar{1}{,}79065$$

$$\boxed{\beta = 38°8'7''}$$

$$\lg \cos \gamma = \lg b - \lg a = \bar{1}{,}79065$$

$$\boxed{\gamma = 51°51'53''}$$

20.3.3. **Probleme**

1. *Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC cunoscînd ipotenuza* ($a=50$ *m*) *și unghiul ascuțit* $\gamma=10—00$.

2. *Să se determine depărtarea de la PO la bateria 1-a cunoscînd că punctul de observare împreună cu bateria 1-a și a 3-a formează un triunghi dreptunghic în care depărtarea între bateria 1-a și a 3-a,* $b=320$ *m iar unghiul* $\beta=8—00$.

3. *Să se determine distanța de observare la obiectivul* O_1 *cunoscînd că depărtarea între punctele de observare ale bateriei 1-a și a 2-a este de 372 m,*

iar din cele două puncte de observare se măsoară cu teodolitul către obiectiv următoarele unghiuri $\alpha=90°$ *şi* $\beta=30°$.

4. *Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC dacă se cunosc: ipotenuza* ($a = 80$ *m*) *şi suma catetelor* ($b + c = 50$ *m*).

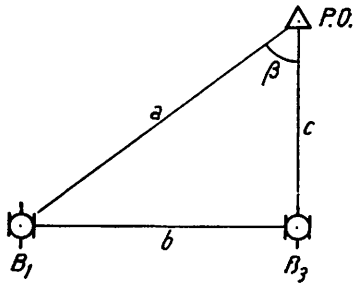


Fig. 20.52

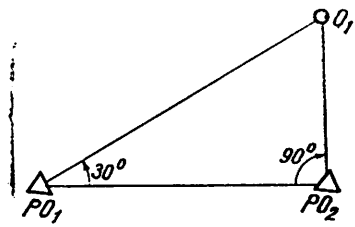


Fig. 20.53

Indicaţie: Din $a^2 = b^2 + c^2$, se deduce cu ajutorul relaţiilor:

$$a \sin \beta + a \cos \beta = s$$

$$a (\sin \beta + \cos \beta) = s$$

$$\sin \beta + \cos \beta = \frac{s}{a}$$

care se mai pot scrie:

$$\sin \beta = \frac{s}{a} - \cos \beta$$

sau

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = \frac{s^2}{a^2} - \frac{2s}{a} \cos \beta + \cos^2 \beta$$

sau

$$2 \cos^2 \beta - \frac{2s}{a} \cos \beta + \frac{s^2}{a^2} - 1 = 0$$

de unde rezultă:

$$\cos \beta = \frac{as \pm \sqrt{2a^4 - a^2 s^2}}{2a^2}$$

Valorile lui cos β sînt nule dacă

$$2a^4 - a^2 s^2 = a^2(2a^2 - s^2) \geqslant 0$$

$$2a^2 - s^2 \geqslant 0$$

deci

$$s \geqslant a\sqrt{2}$$

Rădăcinile sînt amîndouă pozitive dacă:

$$as > \sqrt{2a^4 - a^2 s^2}$$

sau

$$a^2 s^2 \geqslant 2a^4 - a^2 s^2 \quad \text{sau} \quad s \geqslant a$$

Condiție care împreună cu cea de mai sus dă:

$$a \leqslant s \leqslant a\sqrt{2}$$

Avînd în vedere că cos $\beta < 1$ rezultă:

$$as + \sqrt{a^4 - a^2 s^2} < 2a^2$$

sau

$$2a^4 - a^2 s^2 < 4a^2 - 4a^3 s + a^2 s^2$$

de unde prin reducere rezultă:

$$0 < (s - a)^2$$

5. *Justificarea determinării coordonatelor unui punct (P) prin intersecție directă, dacă din punctele de sprijin A și B s-au măsurat gismentele (AP) și (BP) notate în fig. 20.54.*

$$G_{AP} = \alpha \quad \text{și} \quad G_{BP} = \beta$$

Se cunosc coordonatele punctelor de sprijin X_A, Y_A și X_B și Y_B. În teren s-au măsurat gismentele: $G_{AP} = \alpha$; $G_{BP} = \beta'$.

Se cer coordonatele punctului P (X_P și Y_P)

$$\boxed{X_P = X_A + \Delta xP}$$

$$\boxed{Y_P = Y_A + \Delta yP}$$

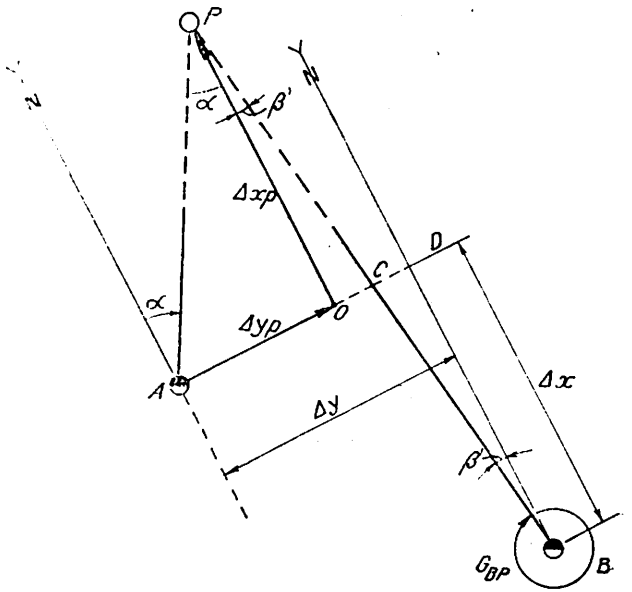


Fig. 20.54

Din figură rezultă:

$$\Delta x = X_B - X_A$$

$$\Delta y = Y_B - Y_A$$

$$AO = OP \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\boxed{\Delta yP = \Delta xP \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

dar:

$$AO = \Delta y - (CD + CO)$$

însă

$$CD = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \beta$$

$$CO = \Delta xP \cdot \operatorname{tg} \beta$$

deci

$$AO = \Delta y - (\Delta x \operatorname{tg} \beta + \Delta xP \operatorname{tg} \beta)$$

Înlocuind pe AO cu ΔyP obținem:

$$\Delta yP = \Delta y - (\Delta x \cdot \operatorname{tg}\beta + \Delta xP \operatorname{tg}\beta)$$

$$\Delta xP \cdot \operatorname{tg}\alpha = \Delta y - (\Delta x \cdot \operatorname{tg}\beta + \Delta xP \cdot \operatorname{tg}\beta)$$

$$\Delta xP (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = \Delta y - \Delta x \cdot \operatorname{tg}\beta$$

$$\boxed{\Delta xP = \frac{\Delta y - \Delta x \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}}$$

$$\boxed{\Delta yP = \Delta xP \cdot \operatorname{tg}\alpha}$$

Coordonatele punctului P sînt date deci de relațiile:

$$X_P = X_A + \Delta xP$$

$$\boxed{X_P = X_A + \frac{\Delta y - \Delta x \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}}$$

$$\boxed{Y_P = Y_A + \Delta xP \cdot \operatorname{tg}\alpha}$$

6. *Justificarea determinării coordonatelor unui punct (P) prin procedeul intersecției inverse cu aparatul orientat.*

S-au măsurat în teren gismentele direcțiilor PA și PB (G_{PA} și G_{PB}).

Din figură rezultă:

$$\boxed{X_P = X_A + \Delta xP}$$

$$\boxed{Y_P = Y_A + \Delta yP}$$

$$\Delta x = X_B - X_A$$

$$\Delta y = Y_B - Y_A$$

$$\alpha = G_{PA} - 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - G_{PB}$$

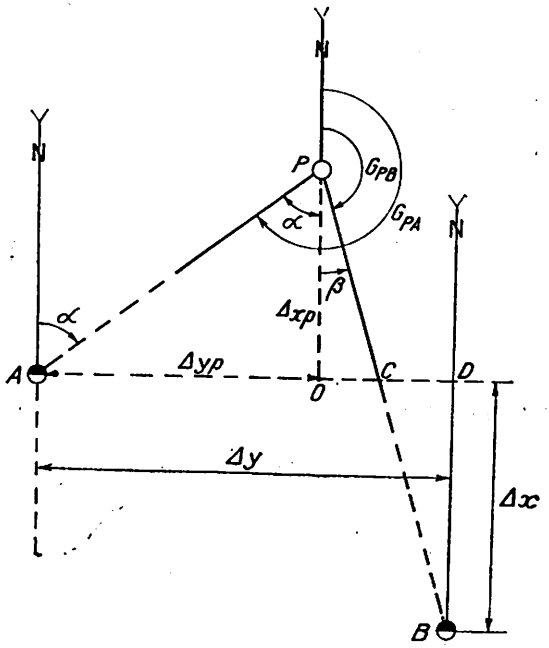


Fig. 20.55

Cunoscînd pe α și β se poate scrie:

$$AO = OP \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\boxed{\Delta Y_P = \Delta xP \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

$$AO = \Delta y - (CD + CO)$$

unde:

$$CD = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \beta$$

$$CO = \Delta xP \cdot \operatorname{tg} \beta$$

deci:

$$AO = \Delta y - (\Delta x \cdot \operatorname{tg} \beta + \Delta xP \cdot \operatorname{tg} \beta) = \Delta yP = \Delta xP \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\Delta xP \cdot \operatorname{tg} \alpha = \Delta y - (\Delta x \operatorname{tg} \beta + \Delta xP \cdot \operatorname{tg} \beta)$$

$$\Delta xP \, (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) = \Delta y - \Delta x \cdot \operatorname{tg} \beta$$

de unde rezultă:

$$\Delta xP = \frac{\Delta y - \Delta x \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$$

$$\Delta yP = \Delta xP \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$X_P = X_A + \Delta xP$$

$$Y_P = Y_A + \Delta yP$$

Aplicație:

Din punctul P s-a măsurat către punctele de sprijin A și B gisementele direcțiilor: PA (G_{PA}) și PB (G_{PB}) (fig. 20.56). Cunoscînd coordonatele punctelor A și B să se determine coordonatele punctului necunoscut P.

$$A \begin{cases} x = 61391 \\ y = 14421 \end{cases} \qquad B \begin{cases} x = 62793{,}5 \\ y = 14638 \end{cases}$$

$$G_{PA} = 68°36'6''$$

$$G_{PB} = 41°45'3''$$

$$\alpha = G_{PA} + 180°$$

$$\beta = G_{PA} + 180°$$

$$\alpha = 68°36'6'' + 180°$$

$$\alpha = 248°36'6''$$

$$\beta = 41°45'3'' + 180°$$

$$\beta = 221°45'3''$$

$$X_P = X_A + \Delta xP$$

$$Y_P = Y_A + \Delta yP$$

$$\Delta xP = \frac{\Delta y - \Delta x \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$$

unde:

$$\Delta X = X_B - X_A = 62793{,}5 - 61391 = + 1402{,}5$$
$$\Delta X = + 1402{,}5$$
$$\Delta Y = Y_B - Y_A = 14638 - 14421 = + 217$$
$$\Delta Y = + 217$$
$$\operatorname{tg} \alpha = + 2{,}5524$$
$$\operatorname{tg} \beta = + 0{,}8926$$
$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = + 1{,}6598$$

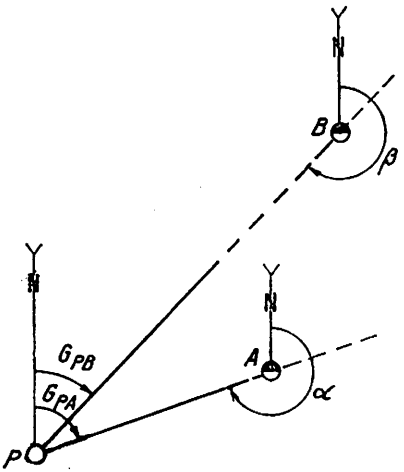


Fig. 20.56

Înlocuind aceste valori în relația ΔxP obținem:

$$\Delta xP = \frac{+ 217 - [(+ 1\,402{,}5)\ (+ 0{,}8926)]}{+ 1{,}6598} = - 622{,}9 \text{ m}$$

$$\boxed{\Delta xP = - 622{,}9 \text{ m}}$$

$$\Delta yP = (- 622{,}9)\ (+ 2{,}5524) = - 1\,589{,}89 \text{ m}$$

$$\boxed{\Delta yP = - 1\,589{,}89 \text{ m}}$$

$$X_P = X_A + \Delta xP = 61391 - 622{,}9 = 60768{,}1$$

$$\boxed{X_P = 60768{,}1}$$

$$Y_P = Y_A + \Delta yP = 14421 - 1589{,}9 = 12831{,}1$$

$$\boxed{Y_P = 12831{,}1 \text{ m}}$$

7. *Justificarea corecției de devansare în tragerea prin ochire directă asupra navelor de la suprafața apei.*

Ochitorul pentru a obține lovituri în navă trebuie să ochească în raport cu unghiul de cursă și viteza de deplasare a navei, cu o distanță oarecare în fața acesteia pe direcția ei de deplasare.

Această distanță se numește corecție de devansare.

Modul de stabilire a direcției de mișcare a navei și a vitezei de deplasare a ei se arată în instrucțiunile de specialitate.

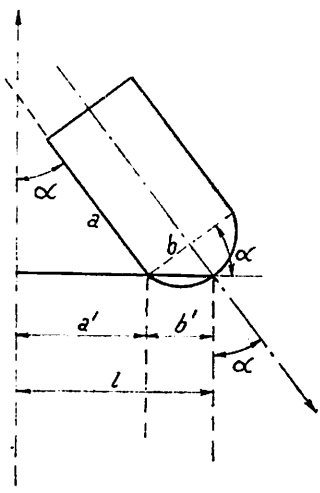


Fig. 20.57

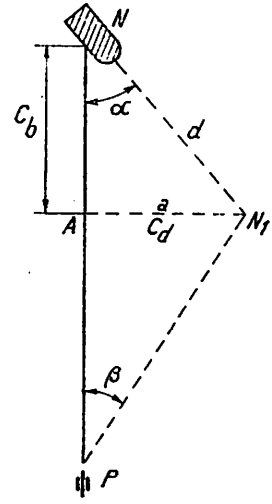


Fig. 20.58

Din fig. 20.57. rezultă:

$$l = a' + b'$$

dar

$$a' = a \sin \alpha$$

$$b' = b \cos \alpha$$

deci:

$$\boxed{l = a \sin \alpha + b \cos \alpha}$$

a = lungimea reală a navei

b = lățimea reală a navei

l = lungimea navei proiectată

α = unghiul de cursă

t_s = durata de traiect

d = deplasarea navei

β = corecția pentru direcție în miimi

$d = V_n \cdot t_s$

C_b = corecția în bătaie

C_d = corecția în direcție

D_b = distanța de tragere în km

$C_b = d \cdot \cos \alpha = V_n \cdot t_s \cdot \cos \alpha$

$$C_d = \frac{d \sin \alpha}{D_b \text{ (km)}} = \frac{V_n \cdot t_s \cdot \sin \alpha}{D_b}$$

Aplicație:

O navă aflată la 2000 m de mal se deplasează cu o viteză de 18 km/oră cu un unghi de cursă variabil. Nava are o lungime de 10 m. Durata traiectului=3 secunde. Pentru timpul de 3 secunde nava se deplasează: $d = V_n \cdot t_s$

$$V_n = 18 \text{ km/oră} = 5 \text{ m/sec}$$

$$d = 5 \times 3'' = 15 \text{ m}$$

Determinarea corecțiilor cînd nava se deplasează frontal ($\alpha = 0$).

$$C_b = d \cos \alpha = 15 \cos 0° = 15 \cdot 1 = 15 \text{ m}$$

$$C_d = d \sin \alpha = 15 \sin 0° = 15 \cdot 0 = 0$$

Cînd nava se deplasează oblic sub un unghi de cursă α ($\alpha = 45°$).

$$C_b = d \cdot \cos \alpha = 15 \times \sqrt{2}/3 = 12 \text{ m}$$

$$C_d = \frac{d \cdot \sin \alpha}{D_b} = \frac{15 \times \sqrt{2}/3}{2 \text{ km}} = \frac{12 \text{ m}}{2 \text{ km}} = 0 - 06$$

Cînd nava se deplasează de flanc ($\alpha = 90°$)

$$C_b = d \cos \alpha = 15 \cdot 0 = 0$$

$$C_d = \frac{d \cdot \sin \alpha}{D_b} = \frac{15 \cdot 1}{2} = 0 - 08$$

20.3.4. Relaţii trigonometrice în triunghiul oarecare

În triunghiul ABC, prin coborîrea înălţimii AD perpendiculară pe BC s-au format triunghiurile dreptunghice ACD şi BAD, care au cateta AD comună.

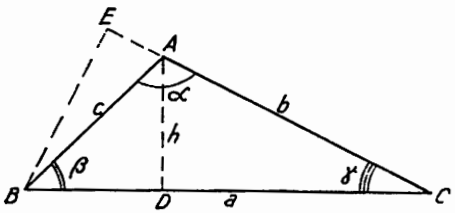


Fig. 20.59

Exprimînd valoarea înălţimii h prin valoarea catetei în funcţie de ipotenuză rezultă:

$$h = c \cdot \sin \beta \qquad h = b \sin \gamma$$

deci:

$$c \cdot \sin \beta = b \sin \gamma$$

sau

$$\boxed{\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}}$$

Ducînd şi înălţimea din vîrful B se obţine:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Deci:

$$\boxed{\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}}$$

ceea ce înseamnă că: *laturile unui triunghi sînt proporţionale cu sinusurile unghiurilor opuse.*

Din figură rezultă:

$$BC = BD + DC$$

$$BC = c \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\gamma$$

$$\boxed{a = c \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\gamma}$$

În același mod se calculează și valoarea celorlalte două laturi ale triunghiului oarecare:

$$\boxed{b = a \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha}$$

$$\boxed{c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha}$$

Înmulțind membrii acestor relații cu: prima cu a, a doua cu $(-b)$ și a treia cu $(-c)$ și adunînd, se obține:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \end{aligned}}$$

ceea ce înseamnă că: *pătratul unei laturi a unui triunghi oarecare este egal cu suma pătratelor celorlalte două micșorată cu de 2 ori produsul acestora și cosinusul unghiului cuprins între ele.*

20.3.5. Rezolvarea triunghiurilor oarecare

A rezolva un triunghi oarecare înseamnă a calcula toate elementele sale cînd sînt cunoscute trei dintre ele.

Calculul elementelor necunoscute se face folosind relațiile stabilite.

Dacă se cunosc două unghiuri ale triunghiului cel de al treilea se determină cu relația:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \text{ de unde: } \alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$$

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

Cazurile de rezolvare a triunghiurilor oarecare:

1. *Se cunosc*: o latură (a) și două unghiuri (β și γ)

Se aplică relațiile:

$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma); \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

de unde:

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{a \sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$$

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

$$\lg b = \lg a + \lg \sin\beta + \operatorname{colg} \sin\alpha$$

$$\lg c = \lg a + \lg \sin\beta + \operatorname{colg} \sin\alpha$$

Aplicație:

$$a = 365\ m; \quad \beta = 125°40' \quad \gamma = 30°59'$$

Rezolvare:

$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 156°39'$$

$$\boxed{\alpha = 23°21'}$$

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$\lg b = \lg a + \lg \sin\beta - \lg \sin\alpha$$
$$= 2{,}56258 + \bar{1}{,}90930 - \bar{1}{,}59721$$
$$= 2{,}87470$$

$$\boxed{b = 749{,}42\ \text{m}}$$

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$\lg c = \lg a + \lg \sin\gamma - \lg \sin\alpha$$
$$\lg c = 2{,}56258 + \bar{1}{,}71120 - \bar{1}{,}59721$$
$$\lg c = 2{,}67658$$

$$\boxed{c = 474{,}89\ \text{m}}$$

2. *Se cunosc*: două laturi (b, c) și unghiul cuprins între ele (α

Se aplică relațiile:

$$a)\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;\quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 + b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

b) folosind relațiile teoremei sinusurilor:

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a};\quad \sin\gamma = \frac{c\sin\alpha}{a}$$

sau:

$$\lg\sin\beta = \lg b + \lg\sin\alpha + \operatorname{colg} a$$

$$\lg\sin\gamma = \lg c + \lg\sin\alpha + \operatorname{colg} a$$

c) se pot folosi și relațiile:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}}$$

Aplicație:

$1^\circ \cdot a = 250$ m; $\quad b = 575{,}6\ m$; $\quad \gamma = 42^\circ 57' 13''$

Rezolvare:

$$\operatorname{tg}\frac{(\beta-\alpha)}{2}=\frac{b-a}{b+a}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{(\beta-\alpha)}{2}=\lg(b-a)+\lg\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}-\lg(b+a)$$

$$=\lg 325{,}6+\lg\operatorname{ctg}21°28'36''-\lg 825{,}6$$

$$=2{,}51263+0{,}40512-2{,}91681$$

$$=0{,}00094$$

$$\frac{\beta-\alpha}{2}=45°3'42''$$

$$\beta-\alpha=90°7'24''$$

$$\beta+\alpha=180°-\gamma=137°02'47''$$

$$2\beta=227°10'11''$$

$$\boxed{\beta=113°35'05''}$$

$$\boxed{\alpha=23°27'42''}$$

$$c=\frac{(b-a)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$\lg c=\lg(b-a)+\lg\cos\frac{\gamma}{2}-\lg\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$=2{,}51263+\bar{1}{,}96876-\bar{1}{,}84995$$

$$=2{,}63144$$

$$\boxed{c=428\ m}$$

2 . *Se cunosc* laturile triunghiului (a, b, c).

Se aplică relațiile:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

de unde:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$1 + \cos\alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

sau

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

Însemnînd perimetrul triunghiului cu $2p$ putem scrie:

$$a + b + c = 2p; \qquad b + c - a = 2(p - a)$$

$$a - b + c = 2(p - b); \qquad a + b - c = 2(p - c)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}; \qquad \cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{p(p-b)}{ca}$$

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{p(p-c)}{ab}$$

Calculînd expresia:

$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ se obţin relaţiile:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}; \qquad \sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{(p-c)(p-a)}{ca}$$

$$\sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(p-a)(p-b)}{ab}$$

Pe baza relaţiilor în sinus şi cosinus se obţin relaţiile calculabile prin logaritmi

$$\boxed{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(p-b)((p-c)}{p(p-a)}} \qquad \boxed{\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} = \frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Aplicație:

1° · $a = 365{,}25\ m$; $b = 749{,}42\ m$; $c = 474{,}97\ m$

Rezolvare:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\lg \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}[\lg p + \lg (p-a) - \lg b - \lg c]$$

$$= \frac{1}{2}[\lg 794{,}82 + \lg 429{,}57 - \lg 749{,}42 - \lg 474{,}97]$$

$$= \frac{1}{2}[2{,}90027 + 2{,}63303 - 2{,}87472 - 2{,}67666]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \bar{1}{,}98192 = \bar{1}{,}99096$$

$$\frac{1}{2}\alpha = 11°39'$$

$$\boxed{\alpha = 23°18'}$$

$$\lg \cos \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}[\lg p + \lg (p-b) - \lg a - \lg c]$$

$$= \frac{1}{2}[\lg 794{,}82 + \lg 45{,}40 - \lg 365{,}25 - \lg 474{,}97]$$

$$= \frac{1}{2}(2{,}90027 + 1{,}65706 - 2{,}56259 - 2{,}67666)$$

$$= \bar{1}{,}65904$$

$$\frac{\beta}{2} = 62°51'55''$$

$$\boxed{\beta = 125°43'50''}$$

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$$

$$\boxed{\gamma = 30°59'09''}$$

2°. *Cunoscînd* o latură (c) suma celorlalte două laturi ($a + b$) și unghiul α (alăturat laturii c cunoscute), triunghiul oarecare se rezolvă astfel:

Calculul unghiului

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{a+b+c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} = \frac{a+b-c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$$

Dacă substituim $a + b + c = 2p$

$$a + b - c = 2(p - c)$$

și:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

obținem:

$$\frac{2p}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{2(p-c)}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

sau

$$\frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{2(p-c)}{2p}$$

de unde rezultă:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{p-c}{p}$$

Pentru a calcula valoarea lui β punem:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{p-c}{p}$$

de unde rezultă:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{p-c}{p}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$$

Cunoscînd pe β putem ușor calcula pe γ, a și b.

3°. *Se cunosc* unghiurile triunghiului ABC (α, β, γ) și perimetrul($2p$).

Pentru rezolvarea triunghiului procedem astfel:

Pentru calculul laturilor

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

sau

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a+b+c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} = \frac{2p}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$$

de unde:

$$a = \frac{2p\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$$

Dacă înlocuim pe:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

se obține:

$$a = \frac{4p\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{p\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$\boxed{a = \frac{p\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}}$$

Analog se obţin valorile laturilor b şi c

$$b = \frac{p \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}$$

$$c = \frac{p \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}$$

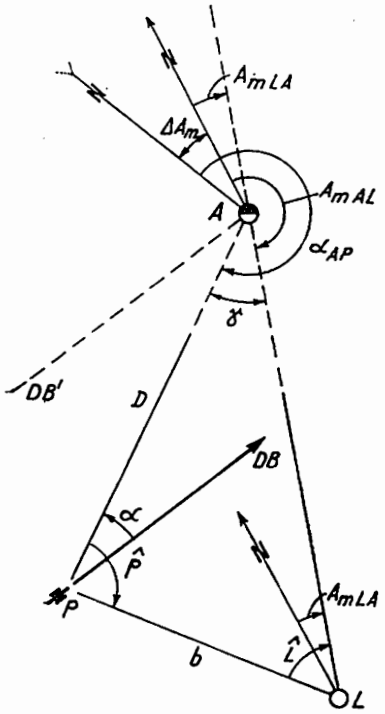


Fig. 20.60

20.3.6. Justificarea determinării dispozitivului de luptă al bateriei pe timp de noapte prin intersecţie inversă pe o urmă luminoasă executată într-un punct de sprijin (A), cu măsurarea unei baze ajutătoare.

În punctul de sprijin A se instalează o puşcă-mitralieră care creează urmele luminoase. De la piesa de bază (luneta de observare) pe o direcţie perpendiculară pe direcţia PT (PO) — punct de sprijin A se măsoară o bază de 100—200 m (b) în a cărei extremitate se instalează un goniometru busolă (fig. 20.60).

Luneta piesei şi goniometrul busolă se orientează reciproc prin vizări directe şi inverse.

Se creează în punctul de sprijin „A“ urme luminoase.

Făcînd citiri pe urma luminoasă se obţin:

— unghiurile P și L și azimutul magnetic al direcției LA (A_{mLA}) cînd piesa nu a fost orientată pe direcția de bază;

— unghiul P și L și unghiul dintre direcția de bază și direcția PA (α), în cazul în care piesa este îndreptată pe direcția de bază.

Se determină unghiul de intersecție

$$\gamma = 30 - 00 - (\hat{P} + \hat{L})$$

Se calculează distanța AP (D) folosind teorema sinusurilor:

$$\frac{b}{\sin \gamma} = \frac{D}{\sin L}$$

de unde

$$\boxed{D = b \frac{\sin L}{\sin \gamma}}$$

Dacă piesa nu a fost orientată pe direcția de bază se procedează astfel:

— se determină azimutul magnetic al direcției AL ($A_m AL$)

$$A_{mAL} = A_{mLA} \pm 30 - 00$$

— se corectează azimutul magnetic al direcției AL (A_{mAL}) cu valoarea unghiului de intersecție (γ) și cu corecția busolei (ΔA_m) și se obține gismentul direcției AP (α_{AP})

$$\boxed{\alpha_{AP} = A_{mAL} + \gamma - \Delta A_m}$$

Folosind unghiul de orientare (α_{AP}) și distanța (D) se reportează pe hartă, planșetă, locul poziției de tragere (punctului de observare).

Aplicație:

Pentru determinarea locului poziției de tragere folosind o singură urmă luminoasă, comandantul unei baterii de artilerie a procedat astfel:

A ales ca punct de sprijin o încrucișare de drumuri care se află și pe hartă și a instalat-pușca mitralieră. Coordonatele punctului de sprijin, scoase de pe hartă sînt:

$$A \begin{cases} X = 10\,425 \\ Y = 60\,820 \end{cases}$$

În poziția de tragere a măsurat aproximativ perpendicular pe direcția PT-A o bază de 150 m și a instalat un goniometru busolă (GB): luneta piesei și goniometrul busolă s-au vizat reciproc.

La crearea urmelor luminoase, operatorul de la G.B., ochitorul piesei au măsurat unghiurile de la bază obținînd: $\measuredangle P = 14—50$ și $\measuredangle L = 14—28$.

Operatorul de la goniometrul busolă a măsurat și azimutul magnetic către urmele luminoase. Comandantul bateriei de tragere a calculat;

$$\gamma = 30 — 00 — (14 — 50 + 14 — 28) = 1 — 22$$

$$D = 150 \frac{\sin 14 — 28}{\sin 1 — 22} = 150 \frac{0{,}997}{0{,}127} = \frac{149{,}55}{0{,}127}$$

$$D = 1\,178 \text{ m}$$

$$A_{mAL} = 52 — 50 — 30 — 00 = 22 — 50$$

$$A_{mAP} = 22 — 50 + 1 — 22 = 23 — 72$$

$$\alpha_{AP} = 23 — 72 — (0 — 18) = 23 — 90$$

Se determină grafic coordonatele piesei cu ajutorul distanței D și a unghiului α_{AP}.

$$P_T\,(X = 09\,490; \quad Y = 61\,510)$$

Prin procedeul intersecției pe o singură urmă luminoasă se pot determina simultan mai multe poziții de tragere și puncte de observare (cu condiția ca punctul de sprijin să se aleagă către centrul raionului de desfășurare a pozițiilor de tragere și a punctelor de observare).

20.3.7. Justificarea intersecției inverse pe trei puncte cu aparatul neorientat prin introducerea unui unghi auxiliar

Principiul procedeului intersecției inverse pe trei puncte prin introducerea unui unghi auxiliar se reduce la determinarea unghiurilor α și β (fig. 20.61).

Cunoscînd coordonatele punctelor de sprijin A, B și C și unghiurile D_a și D_b măsurate în teren se pot calcula coordonatele punctului D astfel:

Calculul unghiurilor α și β

În patrulaterul $ACBD$ (fig. 20.61) suma celor patru unghiuri interioare este egală cu 60 — 00. Valoarea unghiurilor γ și δ se cunoaște:

$$\delta = D_a + D_b$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\gamma = (AC) — (BC)$$

Rezultă: $\alpha + \beta = 60 - 00 - (\delta + \gamma)$

$$\alpha + \beta = 60 - 00 - [D_a + D_b + (AC) - (BC)]$$

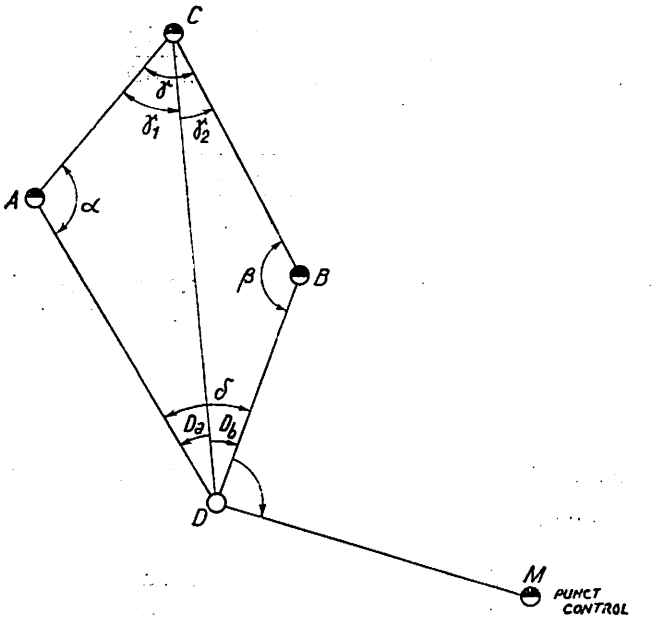


Fig. 20.61

Din triunghiurile *ACD* și *BCD* se determină valoarea sinusurilor unghiurilor α și β.

$$\frac{\overline{CD}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AC}}{\sin D_a}$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{\overline{CD} \sin D_a}{\overline{AC}}}$$

$$\frac{\overline{CD}}{\sin \beta} = \frac{\overline{BD}}{\sin D_b}$$

$$\boxed{\sin\beta = \frac{\overline{CD} \sin D_b}{\overline{BC}}}$$

Valoarea $\overline{CD}$ fiind necunoscută pentru a determina sinusurile unghiurilor α și β se elimină latura $\overline{CD}$ astfel:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\dfrac{\overline{CD}\sin D_b}{\overline{BC}}}{\dfrac{\overline{CD}\sin D_a}{\overline{AC}}} = \frac{\overline{CD}\sin D_b\,\overline{AC}}{\overline{CD}\sin D_a\,\overline{BD}}$$

$$\boxed{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AC}\sin D_b}{\overline{BC}\sin D_a}}$$

Deoarece valorile acestei expresii sînt cuprinse între 0 și $+\infty$ se poate atribui această valoare tangentei unui unghi oarecare, pe care-l vom nota λ.

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\overline{AC}\sin D_b}{\overline{BC}\sin D_a}$$

Valoarea unghiului auxiliar λ poate fi calculată prin logaritmi.

În continuare îl considerăm cunoscut

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\lambda \quad \text{iar} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{\operatorname{tg}\lambda}$$

De la proporții cunoaștem că: într-o proporție oarecare, diferența dintre numărător și numitor supra suma numărătorului și numitorului dau o nouă proporție: deci:

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{1 - \operatorname{tg}\lambda}{1 + \operatorname{tg}\lambda}$$

Cunoaștem că:

1. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

2. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

3. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

4. $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

5. $\operatorname{tg} 7 \cdot 50 = 1$

$$1 + \operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg} 7 \cdot 50 + \operatorname{tg}\lambda$$

$$1 - \operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg} 7 \cdot 50 - \operatorname{tg}\lambda$$

$$\operatorname{tg} 7 \cdot 50 + \operatorname{tg}\lambda = \frac{\sin (7 \cdot 50 + \lambda)}{\cos 7 \cdot 50 \cos \lambda}$$

$$\operatorname{tg} 7 \cdot 50 - \operatorname{tg}\lambda = \frac{\sin (7 \cdot 50 - \lambda)}{\cos 7 \cdot 50 \cos \lambda}$$

6. $\sin (7 \cdot 50 - \lambda) = \cos (7 \cdot 50 + \lambda)$

Înlocuind în proporția noastră se obțin:

— membrul din stînga:

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

simplificînd și aplicînd relațiile de la punctele 3 și 4 obținem:

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

deci:

$$\boxed{\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}}$$

— membrul din dreapta

$$\frac{1 - \operatorname{tg}\lambda}{1 + \operatorname{tg}\lambda} = \frac{\operatorname{tg} 7 \cdot 50 - \operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg} 7 \cdot 50 + \operatorname{tg}\lambda} = \frac{\frac{\sin (750 - \lambda)}{\cos 7 \cdot 50 \cdot \cos \lambda}}{\frac{\sin (750 + \lambda)}{\cos (750 \cdot \cos \lambda)}} = \frac{\sin (750 - \lambda)}{\sin (750 + \lambda)}$$

Dar $\sin (7 \cdot 50 - \lambda) = \cos (7 \cdot 50 + \lambda)$

Rezultă:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}\lambda}{1 + \operatorname{tg}\lambda} = \frac{\cos (750 + \lambda)}{\sin (750 + \lambda)} = \operatorname{ctg} (7 \cdot 50 + \lambda)$$

deci

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}} = \operatorname{ctg}(750+\lambda)$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}(750+\lambda)}$$

Deoarece $(\alpha+\beta)$, este cunoscut, s-a determinat anterior iar $\operatorname{tg}\beta = \frac{AC\sin D_b}{BC\sin D_a}$, se poate calcula valoarea diferenţei dintre unghiurile α si β.

Semnul diferenţei $\alpha-\beta$ depinde de semnul termenilor $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$ şi ctg. $750+\lambda$.

Dacă $\frac{\alpha+\beta}{2}$ şi $750+\lambda$ au valori cuprinse intre $0 \div 15-00$, tangenta şi cotangenta au valori pozitive. Dacă au valori între $15-00$ — $30-00$ tangenta şi cotangenta au valori negative. Dacă sînt cuprinse între $30-00 \div 45-00$ (cadranul III) tangenta şi cotangenta sînt pozitive.

Cunoscînd valoarea sumei şi diferenţei celor două unghiuri α şi β se calculează uşor valoarea unghiurilor.

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\beta = -\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$$

Aplicaţie. Avînd următoarele date cunoscute calculaţi coordonatele punctului *D*.

1. TABEL

cu coordonatele punctelor de sprijin (fictive)

Denumirea punctelor	Coordonate			Obs.
	x	*y*	*h*	
LA RUS	02 393,6	55 147,4	210	*A*
CUCA	03 568,4	52 662,5	190	*C*
Pilon ZAREA	05 484,4	52 445,1	290	*B*
HAMEIULUI	05 561,0	53 413,0	250	*M*

2. JURNAL DE CIMP

pentru măsurarea unghiurilor orizontale — extras

Denumirea punctelor	Tur de orizont		Unghiuri reduse la zero	Valoarea medie a unghiurilor	Obs.
	I	II			
La Rus	0 — 00	30 — 66	$\frac{0}{0}$	0 — 00	*A*
Cuca	12 — 62	43 — 27	$\frac{12-62}{12-61}$	12 — 61,5	*C*
Pilon Zarea	21 — 71	52 — 37	$\frac{21-71}{21-71}$	21 — 71	*B*
Hameiului	24 — 89	55 — 36	$\frac{24-89}{24-88}$	24 — 88,5	*M*
La Rus	0 — 00	30 — 66	$\frac{0}{0}$	0 — 00	*A*

3. Schema cu poziția relativă a punctelor din teren;

$$D_a = 12 - 61{,}5$$

$$D_b = 9 - 09{,}5$$

$$\rho = 3 - 17{,}5$$

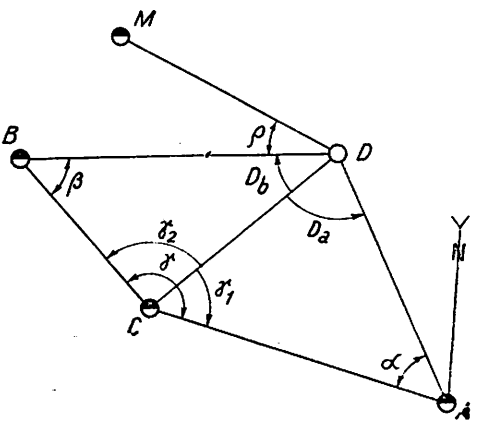


Fig. 20.62

Pentru controlul calculelor prezentăm următoarele date:

$$(AC) = 49 - 22$$
$$(BC) = 28 - 92$$
$$\gamma = 20 - 30$$
$$\alpha = 7 - 81{,}5$$
$$\beta = 10 - 17{,}5$$
$$\lambda = 8 - 36$$

$$(AD) = 57 - 03{,}5$$
$$(BD) = 18 - 74{,}5 \quad D \begin{cases} x = 04668{,}97 \\ y = 54417{,}37 \end{cases}$$
$$(CD) = 9 - 65$$

20.3.8. Justificarea intersecției inverse pe două puncte, cazul cînd în teren se măsoară numai unghiurile

Se cunosc coordonatele punctelor A și B; unghiurile α și β măsurate din punctul de determinat P; unghiurile γ și δ măsurate din punctul ajutător C.

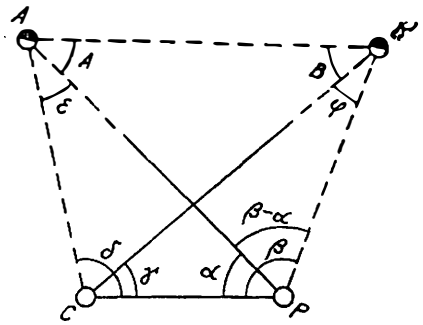


Fig. 20.63

Problema care se pune este determinarea coordonatelor punctului P.

Dacă s-ar mai cunoaște și valoarea unghiurilor BAP și ABP calculul coordonatelor punctului P s-ar reduce la rezolvarea unui triunghi.

Valoarea unghiurilor A și B se poate calcula cu relațiile

$$\measuredangle A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}$$

$$\measuredangle B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$$

Semisuma unghiurilor A și B se poate calcula deoarece în triunghiul ABP se cunoaște unghiul APB, $\sphericalangle APB = \beta - \alpha$ deci $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180° - (\beta - \alpha)$

$$\boxed{\frac{A+B}{2} = \frac{180° - (\beta - \alpha)}{2}}$$

Pentru calculul semidiferenței este necesar să revedem unele noțiuni de aritmetică și trigonometrie.

Raportul $\frac{a}{b} = k$ se poate scrie sub forma unei proporții

$$\frac{a}{b} = \frac{k}{1}$$

Pe baza unei proprietăți a proporțiilor putem de asemenea scrie

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{k-1}{k+1}$$

Cunoaștem de asemenea că tangenta unui unghi „u" luată cu semn schimbat — este egală cu cotangenta sumei $(90 + u)$.

$$-\operatorname{tg} \cdot u = \operatorname{ctg} (u + 90°)$$

Problema care se pune este să determinăm două unghiuri A și B cînd se cunosc: semisuma lor $\frac{A+B}{2}$ și raportul sinusurilor acestor unghiuri, ceea ce înseamnă rezolvarea următorului sistem de ecuații:

$\frac{A+B}{2} = a°$ ($a°$ reprezintă un număr oarecare de grade, minute, secunde sau miimi)

$\frac{\sin B}{\sin A} = k$ (unde k este o constantă oarecare)

Cunoscînd că tangenta unghiurilor cuprinse între $0° \div 90°$ variază între zero și plus infinit, constanta k care reprezintă raportul dintre sinusurile unghiurilor B și A poate fi considerată cotangenta unui anumit unghi θ, unghi a cărui mărime poate fi găsită cu ajutorul tabelelor trigonometrice.

Pe aceste considerente sistemul de mai sus poate fi scris astfel:

$$\frac{A+B}{2} = a°$$

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \operatorname{tg} \theta$$

Unghiul 0, a cărui tangentă este egală cu raportul dintre sin B și sin A se numește unghi auxiliar. Cu ajutorul lui putem afla valoarea semidiferenței $\frac{A+B}{2}$ și ulterior a unghiurilor A și B.

Calculul semidiferenței

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \operatorname{tg} 0$$

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\operatorname{tg} 0}{1}$$

$$\frac{\sin B - \sin A}{\sin B + \sin A} = \frac{\operatorname{tg} 0 - 1}{\operatorname{tg} 0 + 1}$$

Facem calculele prin logaritmi: diferența

$$\sin B - \sin A;$$ și suma $$\sin B + \sin A.$$

$$\sin B + \sin A = 2 \sin \frac{B-A}{2} \cos \frac{B-A}{2}$$

deci

$$\frac{\sin B - \sin A}{\sin B + \sin B} = \frac{\sin \frac{B-A}{2} \cos \frac{B+A}{2}}{\sin \frac{B+A}{2} \cos \frac{B-A}{2}}$$

Împărțind numărătorul și numitorul membrului al doilea cu $\cos \frac{B-A}{2} \cos \frac{B+A}{2}$ și simplificînd obținem:

$$\frac{\sin \frac{B-A}{2} \cos \frac{B+A}{2}}{\cos \frac{B-A}{2} \cos \frac{B+A}{2}} = \frac{\sin \frac{B-A}{2}}{\cos \frac{B-A}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B-A}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B+A}{2}}$$
$$\frac{\sin \frac{B+A}{2} \cos \frac{B-A}{2}}{\cos \frac{B+A}{2} \cos \frac{B-A}{2}} \qquad \frac{\sin \frac{B+A}{2}}{\cos \frac{B+A}{2}}$$

Rezultă:

$$\frac{\sin B - \sin A}{\sin B + \sin A} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B-A}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B+A}{2}} = \frac{\operatorname{tg} 0 - 1}{\operatorname{tg} 0 + 1}$$

Relația care dă valoarea tangentei pentru diferența a doua arce $(a - b)$ este:

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} \cdot a \operatorname{tg} b}$$

Aplicînd această relație diferenței $(\theta - 45°)$ și avînd în vedere că $\operatorname{tg} 45° = 1$ se poate scrie:

$$\operatorname{tg}(\theta - 45°) = \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg} 45°}{1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg} 45°} = \frac{\operatorname{tg}\theta - 1}{1 + \operatorname{tg}\theta \cdot 1} = \frac{\operatorname{tg}\theta - 1}{\operatorname{tg}\theta + 1}$$

Rezultă că putem scrie:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{B - A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B + A}{2}} = \operatorname{tg}(\theta - 45°)$$

Dacă înmulțim cu -1 se obține:

$$\frac{-\operatorname{tg}\frac{B - A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B + A}{2}} = \operatorname{tg}(\theta - 45°)$$

Cum însă $(-\operatorname{tg} u) = \operatorname{tg}(-u)$ se poate scrie

$$-\operatorname{tg}\frac{B - A}{2} = \operatorname{tg}\left(-\frac{B - A}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{A - B}{2}$$

Dar

$$-\operatorname{tg} u = \operatorname{ctg}(u + 90°).$$

Dacă facem $\theta - 45° = u$ avem:

$$= \operatorname{ctg}\ [(\theta - 45°) = \operatorname{ctg}[(\theta - 45°) + 90°] = \operatorname{ctg}(\theta + 45°)$$

Înlocuind în relație, obținem:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A - B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A + B}{2}} = \operatorname{ctg}(\theta + 45°), \text{ de unde}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{A - B}{2} = \operatorname{tg}\frac{A + B}{2} \cdot \operatorname{ctg}(\theta + 45°)}$$

Rezultă că se poate calcula valoarea semidiferenței $\frac{A-B}{2}$, dacă se cunoaște valoarea unghiului θ. Dar $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin B}{\sin A}$

Valoarea raportului $\frac{\sin B}{\sin A}$ în funcție de unghiurile α, β, γ, δ măsurate.

Aplicăm relația sinusurilor în triunghiurile din fig. 20.64.

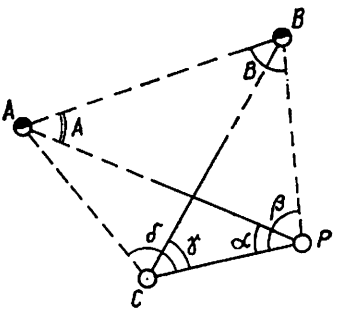


Fig. 20.64

În triunghiul ABP

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{\overline{AP}}{\sin B} = \frac{\overline{BP}}{\sin A}$$

$$\boxed{\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\sin B}{\sin A}}$$

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul APC

$$\frac{\overline{CP}}{\sin(\alpha+\delta)} = \frac{\overline{AP}}{\sin\delta}$$

de unde:

$$\overline{CP} = \frac{\overline{AP}\sin(\alpha+\delta)}{\sin\delta}$$

La fel în triunghiul CBP

$$\frac{\overline{CP}}{\sin(\gamma+\beta)} = \frac{\overline{BP}}{\sin\gamma}$$

de unde

$$\overline{CP} = \frac{\overline{BP}\,\sin(\gamma + \beta)}{\sin\gamma}$$

Egalînd valorile lui CP din cele două triunghiuri obținem:

$$\frac{\overline{AP}\,\sin(\alpha + \delta)}{\sin\delta} = \frac{\overline{BP}\,\sin(\gamma + \beta)}{\sin\gamma}$$

Împărțind ambii membrii cu

$$\frac{\overline{BP}\,\sin(\alpha + \delta)}{\sin\delta}$$

se obține

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\sin\delta\,\sin(\beta + \gamma)}{\sin\gamma\,\sin(\alpha + \delta)}$$

cum însă

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\sin B}{\sin A} = \operatorname{tg}\theta$$

rezultă:

$$\boxed{\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\delta\,\sin(\beta + \gamma)}{\sin\gamma\,\sin(\alpha + \delta)}}$$

Iată cum putem calcula valoarea tangentei unghiului auxiliar θ în funcție de unghiurile măsurate. Cu valoarea lui θ se poate trece la calculul semidiferenței $\frac{A-B}{2}$

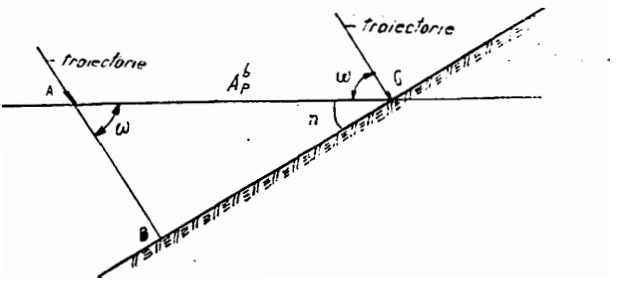
$$\boxed{\lg\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \lg\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\,\lg\operatorname{ctg}(\theta + 45^\circ)}$$

relație prevăzută și în instrucțiunile serviciului topografic al artileriei.

Cunoscînd suma și diferența unghiurilor A și B se determină cele 2 unghiuri și pe baza lor se află coordonatele punctului de determinat P prin rezolvarea unei intersecții directe (calculul lungimilor laturilor AP și BP și a orientărilor acestora după care diferențele de coordonate ale lui P față de A și B).

20.3.9. Probleme privind influența pantei terenului asupra împrăștierii tragerii

1. Terenul la obiectiv este în glacis, cu un unghi de pantă $n = 4°$. Determinați abaterea probabilă în bătaie în glacis, dacă, abaterea probabilă în teren orizontal este egală cu 40 m, iar unghiul de cădere $\omega = 31°$ (fig. 20.65).



Flg. 20.65

Din triunghiul ABC rezultă:

$$\frac{BC}{\sin \omega} = \frac{A_p^b}{\sin [180° - (\omega + n)]}$$

$$\frac{A_p^b}{\sin (\omega + n)} = \frac{BC}{\sin \omega}$$

de unde:

$$BC = A_p^b \frac{\sin \omega}{\sin (\omega + n)}$$

deci:

$$BC = 40 \frac{\sin 31°}{\sin (31° + 4°)} = \frac{40 \cdot 0{,}529}{0{,}587} = 36 \text{ m}$$

$$\boxed{BC = 36 \text{ m}}$$

2. Se trage asupra unui obiectiv pe un teren aflat în contrapantă, al cărui unghi de pantă este de 5°.

Determinați abaterea probabilă în bătaie pe contrapantă dacă abaterea probabilă în teren orizontal este de 20 m iar unghiul de cădere $\omega = 27°$

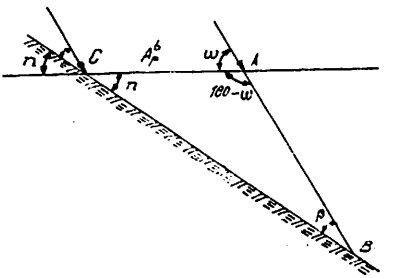


Fig. 20.66

Din triunghiul ABC rezultă:

$$\frac{BC}{\sin(180°-\omega)} = \frac{A_p^b}{\sin\beta} = \frac{A_p^b}{\sin(\omega - n)}$$

de unde

$$BC = A_b^b \frac{\sin}{\sin(\omega - n)} = 20 \frac{\sin 27°}{\sin(27° - 5°)} = \frac{20 \cdot 0{,}454}{0{,}374} = 24{,}25 \text{ m.}$$

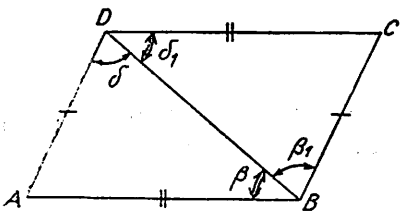
$$BC = 24{,}25 \text{ m.}$$

GEOMETRIA POLIGOANELOR CU MAI MULT DE TREI LATURI

21.1. PATRULATERE

Poligonul cu patru laturi poartă numele de patrulater. Laturile patrulaterului care nu au extremităţi comune se numesc laturi opuse.

21.1.1. Patrulaterul care are laturile opuse paralele şi egale poartă numele de *paralelogram* (fig. 21.1).



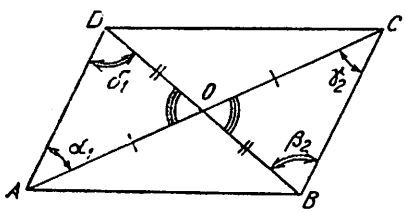
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\overline{AB} = \overline{CD}$
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
$\overline{AD} = \overline{BC}$

Fig. 21.1

$\Delta ABD = \Delta BCD$
$\measuredangle\beta = \measuredangle\delta_1$
$\measuredangle\beta_1 = \measuredangle\delta$

Diagonala BD împarte paralelogramul $ABCD$ în două triunghiuri egale ($\Delta\, ABD = \Delta\, BCD$) (fig. 21.1).

Diagonalele unui paralelogram se împart în părţi egale (fig. 21.2).



$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
$\overline{AD} = \overline{BC}$
$\alpha_1 = \delta_2$
$\beta_2 = \delta_1$
} *ca alterne interne*

Rezultă că:

Fig. 21.2

$\Delta AOD = \Delta BOC$

ceeace înseamnă că şi

$\overline{AO} = \overline{CO}$
$\overline{BO} = \overline{DO}$

Demonstrați următoarele teoreme:

1. Într-un paralelogram unghiurile opuse sînt egale;
2. Într-un paralelogram unghiurile alăturate unei laturi sînt suplementare;
3. Un patrulater este paralelogram atunci cînd un unghi al patrulaterului este suplementar cu fiecare din unghiurile învecinate lui.

4. Dacă unghiurile opuse sînt egale, patrulaterul este paralelogram.

21.1.2. Paralelogramul care are laturile alăturate perpendiculare, poartă numele de *dreptunghi*. Rezultă că atunci cînd unul din unghiurile unui paralelogram este un unghi drept, paralelogramul este dreptunghi.

$$\alpha = 1 \text{ dr} = 90^\circ$$

$$\overline{AB} \perp \overline{AD}$$

$$\overline{AB} \perp \overline{BC}$$

$$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$$

$$\overline{DC} \perp \overline{AD}$$

$$\overline{DC} \perp \overline{BC}$$

$$\overline{AD} = \overline{BC}$$

$$\overline{AB} = \overline{DC}$$

$\sphericalangle \beta_2 = \sphericalangle \delta_2$ (alterne interne)

$\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOC$ (opuse la vîrf)

$\sphericalangle \alpha_1 = \sphericalangle \gamma_2$ (alterne interne)

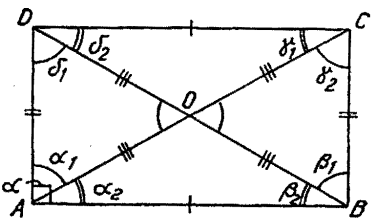


Fig. 21.3

Rezultă că:

$$\overline{AO} = \overline{OC} = \overline{BO} = \overline{OD}$$

$$\overline{AO} + \overline{OC} = \overline{BO} + \overline{OD}$$

Diagonalele unui dreptunghi sînt egale și se împart în părți egale.

Demonstrați că atunci cînd diagonalele unui paralelogram sînt egale, paralelogramul este dreptunghic.

21.1.3. Paralelogramul care are toate laturile egale poartă numele de *romb*.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

$$\overline{AC} \perp \overline{BD}$$

$$\overline{AC} \neq \overline{BD}$$

deci

$$\overline{AO} = \overline{OC} \neq \overline{BO} = \overline{OD}$$

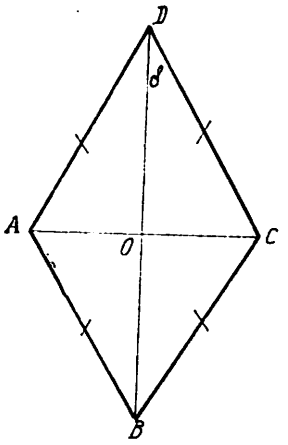


Fig. 21.4

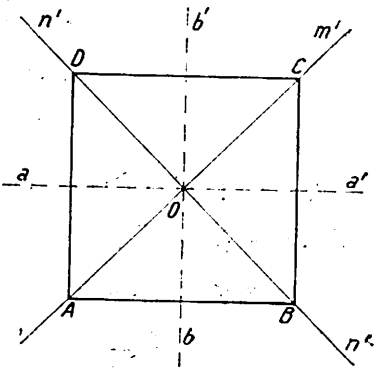


Fig. 21.5

Diagonalele unui romb sînt perpendiculare și bisectoare ale unghiurilor rombului.

În triunghiul ACD, DO este mediană potrivit proprietăților paralelogramului, ceea ce înseamnă că este și înălțime în triunghiul ACD și bisectoare a unghiului ADC (δ).

Demonstrați următoarele teoreme:

1. Patrulaterul care are diagonalele neegale și perpendiculare este romb.
2. Paralelogramul ale cărui diagonale sînt bisectoarele unghiurilor lui este romb.

21.1.4. Dreptunghiul care are laturile egale se numește *patrat.*

$$aa' \perp bb'$$

Pe bisectoarea mm' a axelor perpendiculare aa' și bb' s-a luat un punct A și un punct C simetric cu el față de O.

Pe bisectoarea nn' a aceloraşi axe aa' și bb' s-au construit punctele B și D simetrice cu punctele A și C în raport cu cele două axe.

S-a obținut patrulaterul $ABCD$ care are laturile alăturate perpendiculare, deci este un dreptunghi. Avînd în vedere faptul că diagonalele acestui dreptunghi sînt perpendiculare (ca bisectoare ale unghiurilor alăturate), dreptunghiul este în acelaşi timp și romb. Prin construcție, rezultă că $AB = BC = CD = DA$ ($ABCD$ fiind puncte simetrice față de axe perpendiculare).

21.1.5. Patrulaterul care are două laturi paralele se numește *trapez* (fig. 21.6).

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$$
$$\overline{DD'} \blacktriangle \overline{AB}$$
$$\overline{DD'} \perp DC \quad (DD' \text{ se numește înălțimea trapezului}).$$

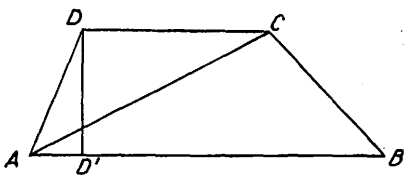


Fig. 21.6

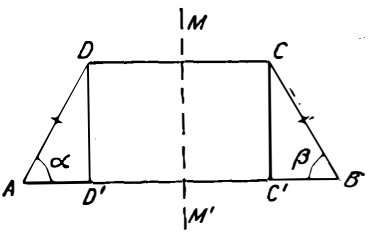


Fig. 21.7

Trapezul care are laturile neparalele egale se numește *trapez isoscel* (fig. 21.7).

$$\overline{AD} = \overline{BC}$$
$$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$$
$$\overline{DD'} \perp \overline{AB}$$
$$\overline{DD'} \perp \overline{DC}$$

În trapezul isoscel, dreapta care unește mijloacele bazelor este axa de simetrie a trapezului isoscel, MM'.

Trapezul care are o latură neparalelă perpendiculară pe laturile paralele se numește *trapez dreptunghic* (fig. 21.8).

$$\overline{BC} \perp \overline{AB}$$

$$\overline{BC} \perp \overline{DC}$$

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

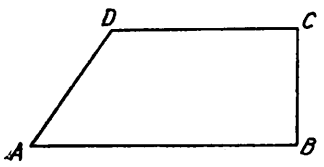


Fig. 21.8

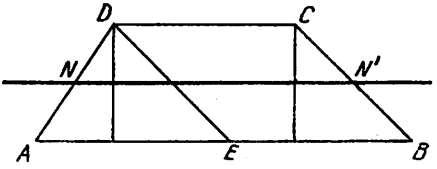


Fig. 21.9

Laturile paralele într-un trapez se numesc *baze*. AB = baza mare iar CD = baza mică.

Dacă baza mică a unui trapez se micșorează nelimitat, păstrîndu-se lungimea bazei mari, trapezul se transformă în triunghi.

Dreapta care trece prin mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez este paralelă cu bazele trapezului.

$$\overline{AN} = \overline{DN}$$

$$\overline{BN'} = \overline{CN'}$$

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

$$\overline{NN'} \parallel \overline{AB}$$

$$\overline{NN'} \parallel \overline{CD}$$

Aplicație

1. Demonstrați că segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez este egal cu semisuma bazelor.

2. Demonstrați că dacă laturile neparalele ale unui trapez sînt egal înclinate pe baze, trapezul este isoscel.

21.1.6. Poligoane regulate

Polinomul convex care are toate laturile egale și toate unghiurile egale se numește *poligon regulat.*

Dacă se împarte un cerc într-un număr oarecare „*n*" de părți egale, punctele de diviziune constituie vîrfurile unui poligon regulat, iar tangentele în aceste vîrfuri reprezintă laturile unui alt poligon regulat.

Linia frîntă care are toate laturile egale și toate unghiurile egale și de același sens se numește *linie frîntă regulată.*

Orice poligon regulat este inscriptibil într-un cerc și circumscriptibil altui cerc.

Poligoanele regulate care au același număr de laturi sînt asemenea (ele sînt egale și coincid atunci cînd facem să coincidă cercurile circumscrise și un vîrf).

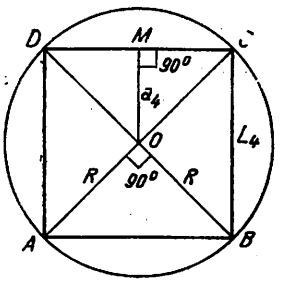


Fig. 21.10

În cercul O de rază *R* (fig. 21.10) se duc doi diametri perpendiculari *AC* și *BD*. Cercul este împărțit astfel în patru arce egale.

Unind punctele *ABCD*, obținem *patratul* înscris în cercul O. Distanța de la o latură a poligonului înscris la centrul cercului se numește apotemă (*OM*).

$$\overline{AC} \perp \overline{DB}$$

$$\overline{AO} = \overline{OC} = \overline{BO} = \overline{OD} = R$$

Din triunghiul dreptunghic *AOB* rezultă

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$$

$$\boxed{L_4 = R\sqrt{2}}$$

Rezultă că *latura patratului* înscris într-un cerc este egală cu produsul dintre raza cercului și radical din 2.

Din triunghiul dreptunghic OMC rezultă:

$$\overline{OM}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{MC}^2$$

$$a_4^2 = R^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2$$

$$a_4^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$a_4 = \sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

ceea ce înseamnă că apotema patratului înscris în cerc este egală cu jumătate din latura patratului.

Cercul „0" se divide în părți egale cu raza R. Se unesc punctele de diviziune obținîndu-se un poligon regulat cu 6 laturi egale cu raza R numit *exagon*.

$$\overline{AB} = L_6 = R$$

Apotema exagonului regulat înscris (MO) are următoarea valoare

$$\overline{MO}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{MB}^2$$

$$\overline{MO}^2 = a_6^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$a_6 = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boxed{L_6 = R}$$

Dacă se unesc punctele de diviziune obținute prin împărțirea cercului în părți egale cu raza și se unesc din două în două, se obține poligonul regulat înscris, cu trei laturi egale (ABC), numit *triunghi echilateral*.

$$\overline{AB} \perp \overline{OM}$$

Latura AB a triunghiului fiind perpendiculară pe raza OM este egală cu de două ori înălțimea triunghiului AOM (fig. 21.12) adică cu dublul apotemei exagonului $a6$.

$$L_3 = 2a_6 = 2\,\frac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$

$$\boxed{L_3 = R\sqrt{3}}$$

Rezultă că latura triunghiului înscris este egală cu raza cercului înmulțită cu radical din trei.

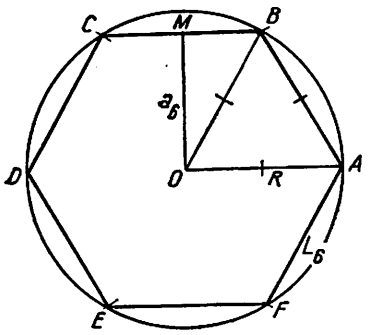


Fig. 21.11

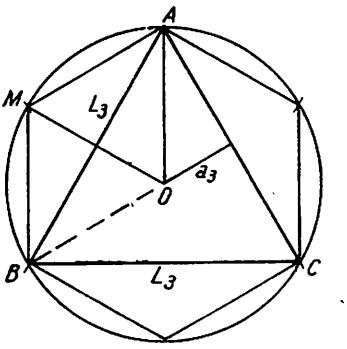


Fig. 21.12

Din fig. 21.12 rezultă că apotema triunghiului echilateral înscris în cerc este egală cu jumătatea razei cercului

$$\boxed{a_3 = \frac{R}{2}}$$

Cunoscînd cum se divide cercul pentru a obține latura exagonului, se poate deduce ușor modalitatea de a construi poligoane regulate cu 12, 24...3×2^n laturi.

CAPITOLUL 22

GEOMETRIA CERCULUI

22.1. GENERALITĂȚI

Am definit cercul ca fiind mulțimea punctelor din plan situate la o distanță egală de un punct al planului numit centrul cercului.

Am reținut de asemenea că distanța de la centru la un punct al cercului se numește *rază*. $OA = R$ = raza cercului „O".

Toate razele cercului sînt egale între ele.

Spunem că un cerc este determinat atunci cînd se cunosc planul, centrul și raza lui.

Două cercuri care au razele egale sînt egale.

Două puncte ale unui cerc se consideră *diametral opuse* dacă dreapta care le unește trece prin centru. (Punctele M și N (fig. 22.1) sînt diametral opuse). Dreapta care unește două puncte diametral opuse ale cercului se numește *diametru*. Valoarea diametrului unui cerc este egală cu dublul razei cercului.

$$\boxed{\overline{MN} = 2R}$$

Un diametru împarte cercul în două arce egale, numite *semicercuri*. Fiecare diametru este axă de simetrie.

O dreaptă nu poate tăia cercul în mai mult de două puncte.

Intr-un cerc, coardele egale sînt egal depărtate de centru. Considerăm coardele egale MN și PR (fig. 22.2).

Unind extremitățile coardelor cu centrul cercului se obțin triunghiurile isoscele egale (MON și POR) și ca urmare și înălțimile lor sînt egale ($OH = OH_1$). Rezultă că coardele egale sînt egal depărtate de centrul cercului.

Punctele planului a căror distanţă la centrul cercului este mai mică decît raza (R) a cercului se numesc puncte interioare cercului, iar cele a căror distanţă este mai mare decît raza cercului sînt puncte exterioare

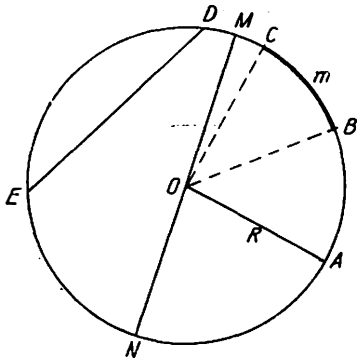


Fig. 22.1

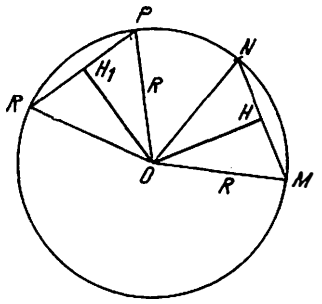


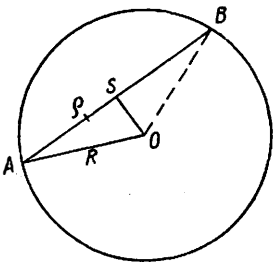
Fig. 22.2

22.1.1. Poziţia relativă a dreptei faţă de cerc

Dreapta care trece printr-un punct interior cercului taie cercul în două puncte.

Se consideră dreapta AB care trece prin punctul S, în interiorul cercului. Dreapta taie cercul în punctul A (fig. 22.3)

Fig. 22.3



Din centrul cercului se coboară perpendiculara OS pe dreapta AB,

$$\overline{OS} \perp \overline{AB}$$

Se iau segmentele $\overline{AS} = \overline{SB}$.

Se formează triunghiurile dreptunghice AOS și BOS care au catetele egale: (OS comună; $\overline{SA} = \overline{SB}$;) deci triunghiurile AOS și BOS sînt egale, deci au și ipotenuzele egale ($\overline{AO} = \overline{OB} = R$) ceea ce înseamnă că punctul B se află pe cerc.

O dreaptă nu poate intersecta un cerc în mai mult de două puncte.

Cînd distanța de la centrul cercului la dreaptă este mai mare decît raza, dreapta nu intersectează cercul.

Cînd această distanță este mai mică decît raza, dreapta intersectează cercul în două puncte,

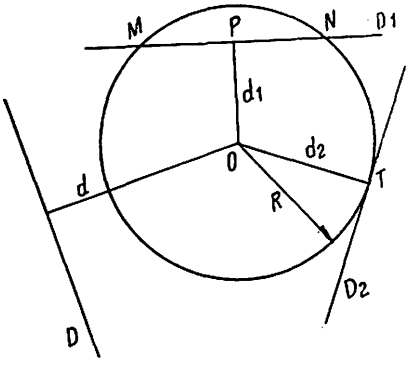


Fig. 22.4

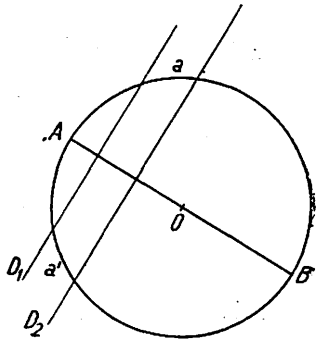


Fig. 22.5

Cînd distanța este egală cu raza cercului, dreapta are un singur punct comun cu cercul, spunem că este *tangentă* la cerc.

$d > R$ — dreapta D nu taie cercul 0

$d_1 < R$ — dreapta D_1 taie cercul 0 în 2 puncte M și N

$d_2 = R$ — dreapta D_2 are un punct comun cu cercul (T),

și este tangentă la cerc în punctul T, care se numește punct de contact.

Printr-un punct luat pe cerc se poate duce o tangentă la acesta și numai una, — perpendiculară pe raza în punctul considerat.

Două *paralele care intersectează un cerc, cuprind între ele arce de cerc egale*, deoarece aceste arce sînt simetrice unul față de celălalt în raport cu diametrul perpendicular pe dreptele paralele D_1 și D_2.

$$D_1 \parallel D_2$$

$$D_1 \perp AO$$

$$D_2 \perp AO$$

deci

$$a = a'.$$

22.1.2. Poziția relativă a două sau mai multe cercuri

Două cercuri nu pot avea mai mult de două puncte comune. Cercurile care au două puncte comune

Dacă *două cercuri se întretaie, linia centrelor este perpendiculară pe coarda comună și o împarte în două părți egale.*

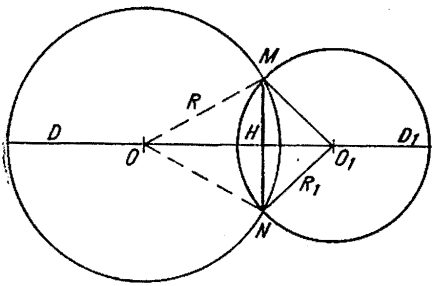


Fig. 22.6

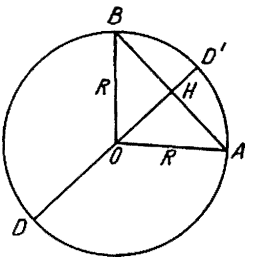


Fig. 22.7

OO_1=linia centrelor este o axă de simetrie comună celor două cercuri. Atunci cînd cele două cercuri se intersectează într-un punct (M) nesituat pe această linie, al doilea punct comun al celor două cercuri (N) este simetricul celui dintîi deci $MH = HN$.

Rezultă că diametrul perpendicular pe o coardă, o împarte pe aceasta și arcele subîntinse de ea în două părți egale.

Fiind axă de simetrie pentru cerc, este axă de simetrie și pentru triunghiul isoscel AOB.

$$\overline{DD'} \perp \overline{AB}$$

$$\overline{AH} = \overline{BH}$$

Atunci cînd două cercuri au distanța centrelor egală cu suma razelor lor, se numesc *cercuri tangente exterioare*. Ele au un singur punct comun, numit punct de contact. Aceste cercuri sînt situate de o parte și de alta a tangentei comune (fig. 22.8).

$$\overline{OA} + \overline{AO_1} = R + R_1$$

$$\overline{OM} + \overline{MO_1} > R + R_1$$

Orice punct al tangentei TT' diferit de A este exterior ambelor cercuri.

Dacă *două cercuri sînt exterioare, distanța centrelor lor este mai mare decît suma razelor.*

Dacă *două cercuri se intersectează, distanța centrelor lor este cuprinsă între suma razelor și diferența lor.*

Cercurile a căror distanță a centrelor este egală cu valoarea absolută a diferenței razelor, se numesc *cercuri tangente interioare*. Ele sînt situate de aceeași parte a tangentei comune și au un punct comun, punctul de contact (fig. 22.9).

$$\overline{OA} = \overline{OB} = R$$

$$\overline{OO_1} = |R - R_1|$$

$$\overline{OO_2} = |R - R_2|$$

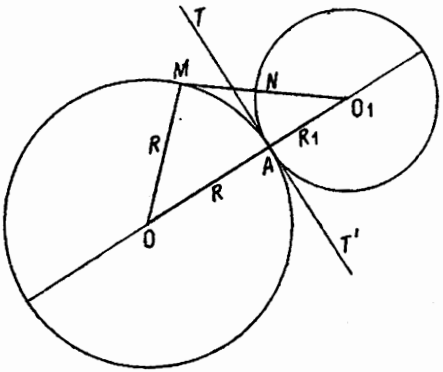


Fig. 22.8

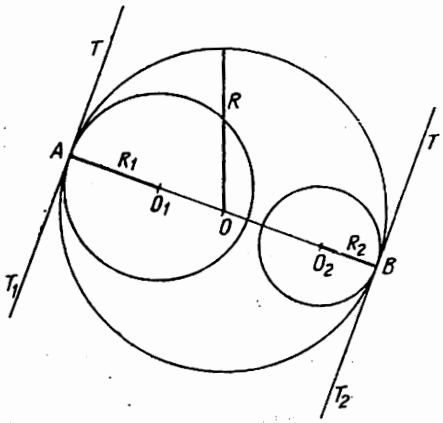


Fig. 22.9

Demonstrați că atunci cînd distanța centrelor a două cercuri este mai mare decît suma razelor sau e mai mică decît mărimea absolută a diferenței razelor, cercurile nu au puncte comune.

Cercurile care au același centru însă raze neegale, nu au puncte comune și se numesc cercuri concentrice.

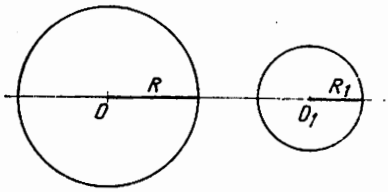


Fig. 20.10

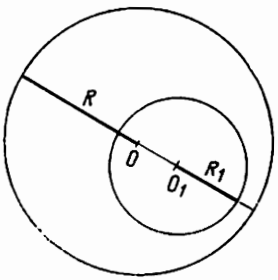


Fig. 20.11

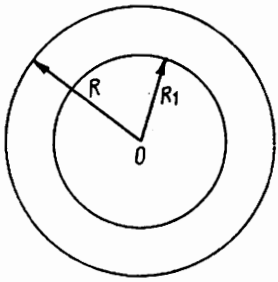


Fig. 22.12

22.1.3. **Unghiuri la centru. Unghiuri înscrise**

Unghiul la centru

Unghiul care are vîrful în centrul cercului se numește unghi la centru. Unghiul la centru este determinat de 2 raze.

Unghiurilor la centru egale le corespund coarde și arce de cerc egale (fig. 22.13).

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB' = \sphericalangle A_1OB_1$$

$$\alpha = \alpha' = \alpha_1$$

Din triunghiurile isoscele AOB și $A'OB'$ rezultă că $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ și că arc AB = arc $A'B'$.

Dintre două unghiuri la centru neegale, celui mai mic îi corespunde coarda și arcul de cerc mai mici,

$$\sphericalangle COD > \sphericalangle A_1OB_1$$

$$\sphericalangle COD > \sphericalangle AOB$$

Din triunghiurile isoscele COD și A_1OB_1 rezultă că $\overline{A_1B_1} < \overline{CD}$ iar arc $A_1B_1 <$ arc CD.

Demonstrați următoarele teoreme

1. Coardelor egale le corespund unghiuri la centru egale.
2. Coardele egale sînt egal depărtate de centrul cercului.
3. La două coarde neegale corespund două unghiuri la centru neegale (la coarda mai mare corespunde unghiul la centru mai mare).

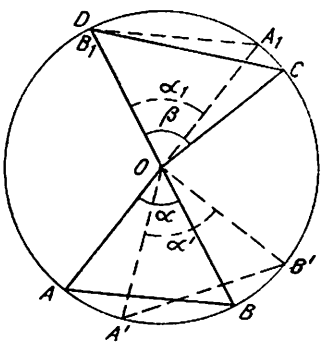


Fig. 22.13

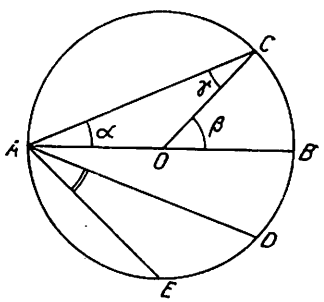


Fig. 22.14

4. Unghiurilor la centru egale le corespund arce egale.
5. La două arce neegale corespund unghiuri la centru neegale (la arcul mai mic corespunde unghiul la centru mai mic).

N o t ă: arcele se consideră mai mici de un semicerc.

Unghiul înscris

Unghiul format de două coarde AB și AC care au o extremitate comună A, se numește *unghi înscris*. Vîrful unghiului înscris se află pe cerc.

Orice unghi înscris într-un cerc este egal cu jumătate din unghiul la centru care corespunde aceluiaș arc.

$$\measuredangle BAC = \frac{\measuredangle BOC}{2}$$

$$\measuredangle \alpha = \frac{\measuredangle \beta}{2}$$

— Dacă una din laturile unghiului înscris trece prin centru, se formează triunghiul isoscel AOC în care $\measuredangle \alpha = \measuredangle \gamma$.

Unghiul exterior BOC al acestui triunghi, este egal cu suma unghiurilor BAC și ACO ($\measuredangle \beta = \measuredangle \alpha + \measuredangle \gamma$)

$$\measuredangle \alpha = \frac{\measuredangle \beta}{2}$$

Dacă centrul cercului se află în interiorul unghiului înscris, ($\measuredangle CAD$) ducînd dreapta AO, care taie cercul în B se împarte unghiul înscris în două părți $\measuredangle CAB$ și $\measuredangle BAD$ pentru care putem scrie.

$$\measuredangle CAB = \frac{1}{2}\text{arc } BC;\ \measuredangle BAD = \frac{1}{2}\text{ arc } BD.$$

Prin adunare rezultă:

$$\measuredangle CAD = \frac{1}{2}\text{ arc } CD$$

— Dacă centrul cercului se află în exteriorul unghiului înscris ($\measuredangle DAE$) considerăm diametrul AB și putem scrie:

$$\measuredangle BAD = \frac{1}{2}\text{ arc } BD$$

$$\measuredangle BAE = \frac{1}{2}\text{ arc } BE$$

iar prin scădere rezultă:

$$\measuredangle DAE = \frac{1}{2}\text{ arc } DE.$$

Demonstrați că:

1. Unghiul înscris într-un semicerc este drept.

2. Unghiul format de o tangentă și o coardă dusă din punctul de contact, are ca măsură jumătatea arcului determinat de coardă.

3. Unghiul format de două secante care se taie în interiorul unui cerc, are ca măsură semisuma arcelor cuprinse, unul între laturile sale și al doilea între prelungirile lor.

4. Unghiul format de două secante, care se întîlnesc în exteriorul cercului, are ca măsură semidiferența dintre arcul concav și arcul convex cuprins între laturile sale.

22.1.4. Segmente proporționale în cerc

Să considerăm punctul S în planul cercului (în interiorul lui) și secantele SAA' și SBB' duse prin el (fig. 22.15 a).

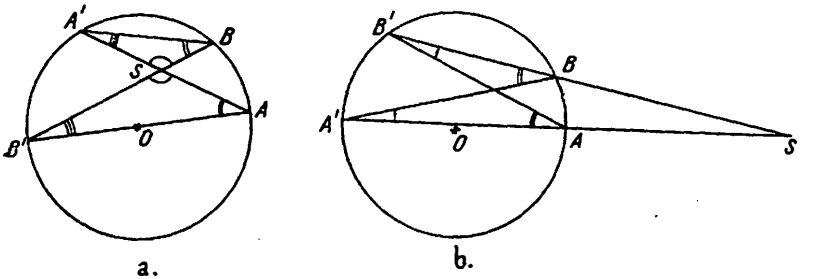


Fig. 22.15

Triunghiurile ASB' și ASA' sînt asemenea avînd unghiurile egale. Scriem proporționalitatea laturilor triunghiului

$$\frac{SA}{SB} = \frac{SB'}{SA'} \text{ sau } \boxed{SA \cdot SA' = SB \cdot SB'}$$

Rezultă că *produsul distanțelor unui punct (interior cercului) prin care s-au dus secante la cerc, la cele două puncte de intersecție ale secantei cu cercul este constant.*

Să considerăm punctul S exterior cercului (fig. 22.15 b).

Cele două secante SAA' și SBB'. Triunghiurile SAB' și SBA' sînt asemenea avînd unghiurile egale.

Proporționalitatea laturilor ne dă

$$\frac{SA}{SB} = \frac{SB'}{SA'} \text{ sau } \boxed{SA \cdot SA' = SB \cdot SB'}$$

Să considerăm cercul O, secanta SAA' și tangenta ST (fig. 22.16). Considerînd tangenta ca avînd cu cercul două puncte comune, confundate în punctul de contact T, se poate scrie.

$$ST^2 = SA \cdot SA'$$

deci tangenta este medie proporțională între secanta întreagă și porțiunea ei exterioară.

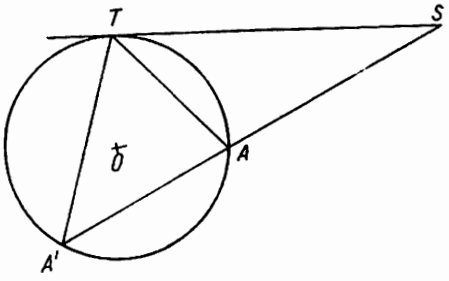


Fig. 22.16

Un punct interior unui cerc determină pe fiecare din coardele care trec prin el, segmente al căror produs este constant (fig. 22.17).

$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$$

Puterea unui punct față de cerc se numește produsul constant al segmentelor determinate de cerc pe secantele care trec printr-un punct dat.

Ea este egală cu diferența dintre pătratul distanței lui la centrul cercului și patratului razei cercului.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PM} \cdot \overline{PN} = \text{constant}$$

$\overline{PO}^2 - R^2 =$ puterea punctului P față de cercul O (fig. 22.18).

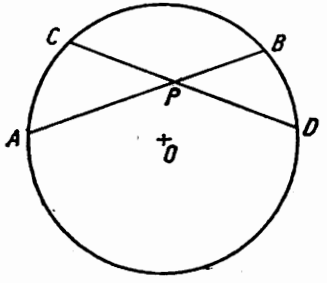


Fig. 22.17

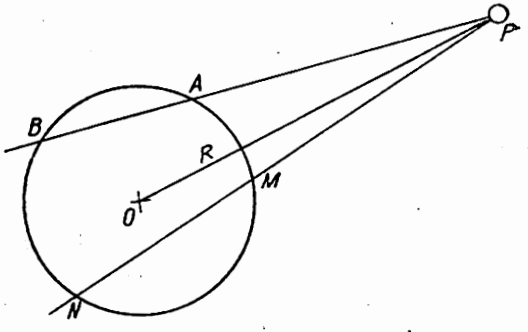


Fig. 22.18

Unghiul format de tangentele duse într-unul din punctele comune ale două cercuri secante (P) se numeşte unghiul cercurilor secante (fig. 22.19).

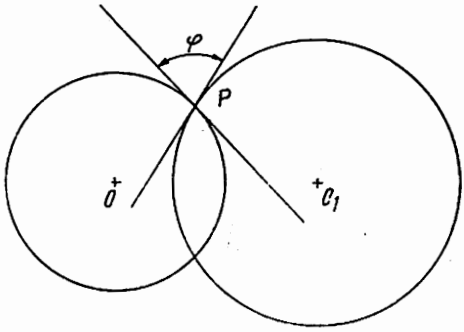


Fig. 22.19

Dacă $\varphi = 90°$ cercurile se numesc ortogonale.

Tangentele în punctele comune a două cercuri ortogonale trec prin centrele lor.

22.2 REPREZENTAREA ANALITICĂ A CERCULUI

Cercul este locul geometric al punctelor din plan care se află la egală distanţă de un punct fix C numit centrul cercului.

22.2.1. Ecuaţiile cercului

1. *Reprezentarea analitică a cercului cu centrul în originea unui sistem de axe ortogonale.*

Considerăm cercul de rază R cu centrul în originea axelor de coordonate. Notînd cu $M\ (x, y)$ un punct curent al cercului putem scrie:

$$MO = R$$

deci

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = R$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

Aceasta este ecuaţia cercului cu centrul în originea sistemului de axe ortogonale (fig. 22.20).

2. *Reprezentarea analitică a cercului cu centrul pe una din axe şi tangent celeilalte axe.*

a) Considerăm cercul $C\ (R,\ O)$ şi un punct curent al lui $M\ (x,\ y)$

$$MC = R$$

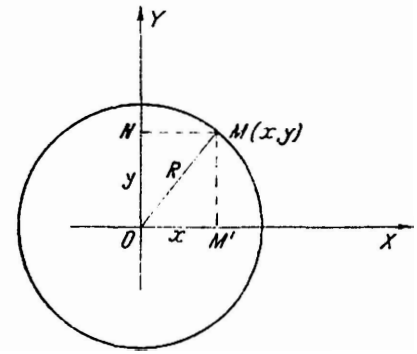


Fig. 22.20

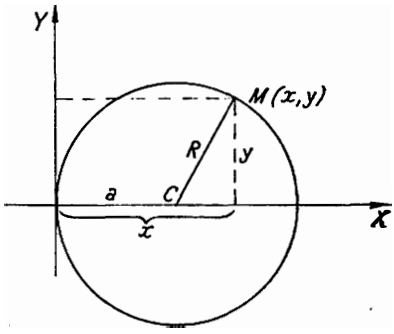


Fig. 22.21

Relaţia geometrică a punctelor M şi C scrisă analitic este:

$$R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2}$$

$$R^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$R^2 = x^2 + a^2 - 2ax + y^2$$

dar $a = R$ deci $a^2 = R^2$

Rezultă

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax = 0}$$

care este ecuaţia cercului cu centrul pe axa X, tangent la axa y (fig. 22.21).

b) Considerăm cercul $C\ (O,\ R)$ şi un punct curent al lui $M\ (x,\ y)$ (fig. 22.22)

$$MC = R$$

Relaţia geometrică a punctelor M şi C scrisă analitic este:

$$R = \sqrt{(x-0)^2 + (y-b)^2}$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + b^2 - 2by$$

$$b = R;\ b^2 = R^2$$

deci

$$\boxed{x^2 + y - 2by = 0}$$

Este ecuația cercului cu centrul pe axa y, tangent la axa X.

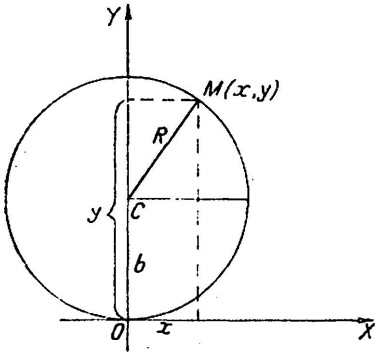


Fig. 22.22

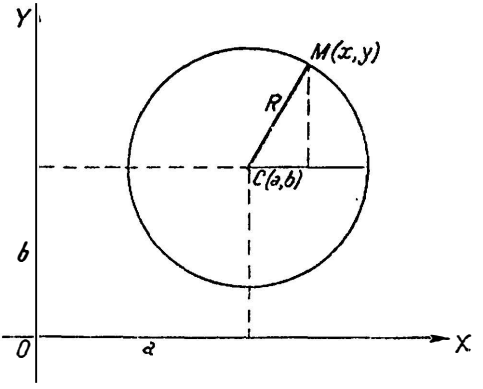


Fig. 22.23

3. *Ecuația generală a cercului*, în sistemul de axe ortogonale.

Considerăm cercul $C\,(a, b)$ și un punct curent al lui $M\,(x, y)$. Notînd raza cercului cu $R=MC$, putem scrie analitic relația geometrică a punctelor M și C.

$$R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

sau

$$\boxed{R^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2}$$

care este ecuația cercului de rază R cu centrul $C\,(a, b)$ (fig. 22.23).

Dacă se dezvoltă patratele se obține.

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = R^2$$

sau

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - R^2) = 0$$

Dacă se notează

$$a^2 + b^2 - R^2 = c.$$

ecuația de mai sus devine:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0}$$

care este o ecuație de gradul al doilea în x și y, și reprezintă un cerc.

Trebuie reținut însă că nu orice ecuație de gradul al doilea reprezintă un cerc.

Dacă considerăm ecuația generală de gradul al doilea în x și y

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

care, comparată cu ecuația de mai sus, pentru a reprezenta un cerc trebuie:

— să nu conțină termenul în xy, deci $B = 0$;

— coeficienții lui x^2 și y^2 să fie egali cu 1, deci $C = A$.

Rezultă că pentru ca ecuația generală de gradul al doilea în x și y să reprezinte un cerc trebuie să aibă forma:

$$\boxed{A(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0}$$

Aceasta este *ecuația generală a cercului* (A, D, E, F sînt numere reale cu $A \neq 0$).

4. *Ecuația normală a cercului.*

Dacă ecuația generală a cercului o împărțim cu A obținem:

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

Notînd

$$\frac{D}{A} = 2\text{m}; \quad \frac{E}{A} = 2\text{ n}; \quad \frac{F}{A} = p$$

se obține

$$\boxed{x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0}$$

care este ecuația normală a cercului.

5. *Ecuația cercului de rază R tangent ambelor axe de coordonate.*

Considerăm cercul C de rază R tangent axelor x și y (fig. 22.24) Din fig. 22.24 rezultă:

$$R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$R^2 = (x-y)^2 + (y-b)^2$$

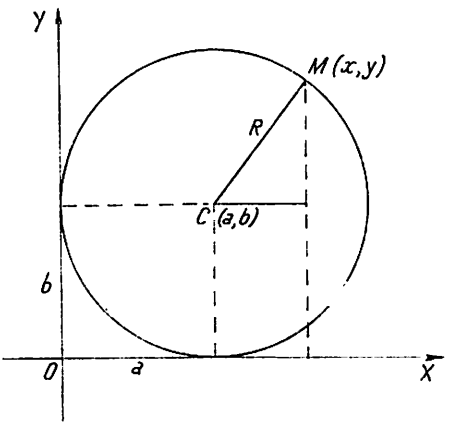


Fig. 22.24

însă

$$a = b = R$$

deci

$$R^2 = (x-R)^2 + (y-R)^2$$

$$R^2 = x^2 - 2Rx + R^2 + y^2 - 2Ry + R^2$$

sau

$$x^2 + y^2 - 2Rx - 2Ry + R^2 = 0$$

Cum cercul poate fi tangent celor două axe în toate cele 4 cadrane (deci a și b pot lua valori $\pm$) rezultă că ecuația de mai sus se poate scrie:

$$\boxed{x^2 + y^2 \pm 2Rx \pm 2Ry + R^2 = 0}$$

care este ecuația cercului de rază R, tangent la cele două axe de coordonate.

6. *Ecuația cercului C dacă diametrul DE are extremitățile de coordonate* $D(x_1y_1)$, $E\ (x_2,\ y_2)$

Considerăm cercul C cu diametrul ED (fig. 22.25).

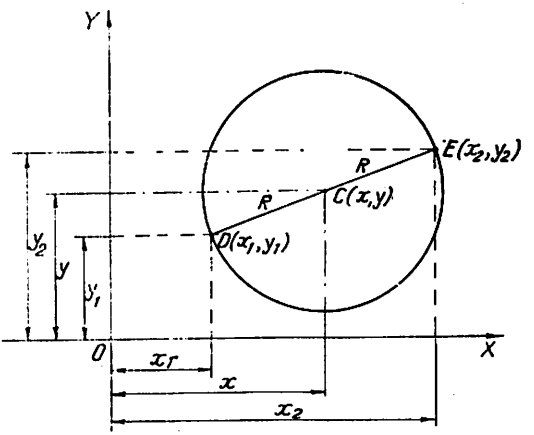


Fig. 22.25

Se scrie analitic relația geometrică a punctelor D și C și a punctelor C și E.

$$R = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}$$

$$\boxed{R^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}$$

și

$$R = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$\boxed{R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

Cele două relații reprezintă același cerc C deci se poate scrie.

$$(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

Rezolvînd, se obține ecuația cercului care are ca diametru segmentul DE ale cărui extremități au coordonatele $D\ (x_1,\ y_1)$, $E\ (x_2,\ y_2)$.

$$\boxed{(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)\ (y - y_2) = 0}$$

7. *Ecuația cercului determinat de trei puncte.*

Cunoaștem din geometria plană că prin trei puncte necolineare A, B, C trece un cerc și numai unul și anume cercul circumscris triunghiului (fig. 22.26).

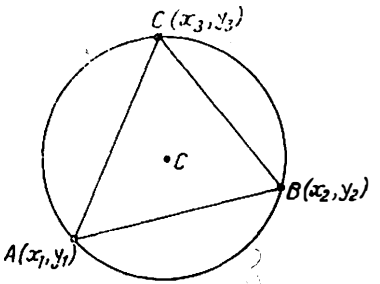


Fig. 22.26

Considerăm cunoscute coordonatele punctelor:

$$A\ (x_1,\ y_1),\ B\ (x_2,\ y_2),\ C\ (x_3,\ y_3).$$

Am reținut că ecuația generală a cercului este:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2bx + c = 0$$

Dacă considerăm că cele trei puncte aparțin cercului obținem trei ecuații care împreună cu ecuația generală formează sistemul liniar:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + c = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 - 2ax_2 - 2by_2 + c = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 - 2ax_3 - 2by_3 + c = 0 \end{cases}$$

Pentru ca acest sistem în a, b, c, să fie compatibil, conform teoremei lui Rouché, este necesar și suficient să fie îndeplinită condiția

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Această ecuație de gradul al doilea în x și y, are coeficienții lui x^2 și y^2 egali cu:

$$A_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

deoarece punctele A, B, C au fost considerate necolineare iar termenul în xy lipsește, deci ecuația

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

reprezintă un cerc. Acest lucru se dovedește și prin faptul că coordonatele punctelor verifică ecuația, înlocuind pe x și y cu coordonatele acestor puncte se obține un determinant care are două linii egale deci este nul. Rezultă că cercul trece prin cele trei puncte.

Ecuația de mai sus reprezintă un cerc și din faptul că, dezvoltînd-o după linia întîi, ecuația ia forma ecuației generale a cercului.

E x e m p l u:

Determinați ecuația cercului ce trece prin punctele

$$A\ (-1,3);\ B\ (3,-1);\ C\ (3,2).$$

R. Aplicînd ecuația cercului care trece prin trei puncte, se obține ecuația:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 10 & -1 & 3 & 1 \\ 10 & 3 & -1 & 1 \\ 13 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

8. *Ecuațiile parametrice ale unui cerc.*

Considerăm cercul cu centrul $C(a,b)$ raza R și un punct curent de pe acest cerc $M\ (x,y)$ (fig. 22.27).

Dacă considerăm ca parametru variabil unghiul θ format de raza MC cu axa OX, rezultă că *ecuațiile parametrice ale cercului* sînt:

$$x = a + a_1 = a + \mathrm{Cm} = a + R\cos\theta$$
$$y = b + b_1 = b + \mathrm{Mm} = b + R\sin\theta$$

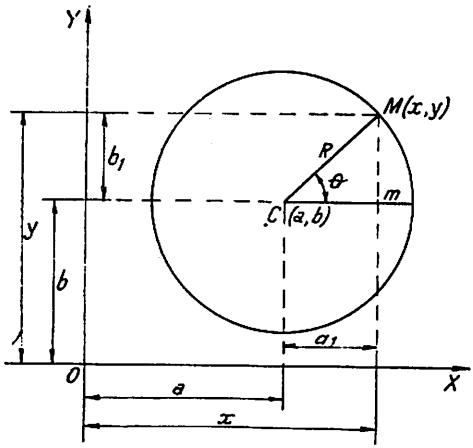


Fig. 22.27

deci

$$\boxed{\begin{array}{l} x = a + R\cos\theta \\ \hline y = b + R\sin\theta \end{array}}$$

Atunci cînd parametrul variabil θ ia toate valorile de la 0 la 2π, se obțin toate punctele care definesc cercul considerat.

Reprezentarea parametrică a cercului cu centrul în origine. În această situație $a = b = 0$, iar ecuațiile parametrice ale cercului devin:

$$\boxed{x = R\cos\theta} \qquad \boxed{y = R\sin\theta}$$

9. *Ecuația cercului în coordonate polare.*

a) *Ecuația polară a cercului cu centrul în origine* (fig. 22.28).

Dacă considerăm punctul curent al cercului M definit de coordonatele polare θ și ρ, ecuația polară a cercului cu centrul în origine și de rază R este:

$$\boxed{\rho = R}$$

b) *Ecuația polară a cercului cu centrul pe una din axe și tangent la cealaltă axă.*

Considerăm cercul de rază b cu centrul în $C(o,b)$ pe axa OY, tangent față de axa OX și un punct curent al cercului M definit de coordonatele θ și ρ, (fig. 22.29).

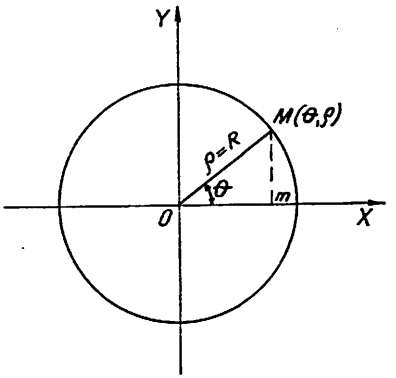


Fig. 22.28

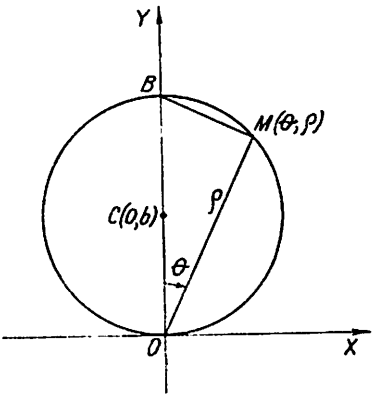


Fig. 22.29

Ecuația acestui cerc rezultă din triunghiul OBM și este:

$$\boxed{\rho = 2b \cos \theta}$$

c) *Ecuația generală a unui cerc în coordonate polare.*

Considerăm cercul cu centrul $C(\theta_0,\rho_0)$ de rază R și un punct curent al cercului $M(\theta,\rho)$ (fig. 22.30).

Aplicînd în triunghiul OMC teorema cosinusului se obține:

$$OM^2 + OC^2 - 2\,OC \cdot OM \cos(\sphericalangle COM) = CM^2$$

Scriind această relație cu ajutorul coordonatelor polare care definesc centrul C al cercului de rază R și punctul curent M al lui, obținem relația:

$$\boxed{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) = R^2}$$

Această relație este ecuația polară a cercului cu centrul în $C(\theta_0,\rho_0)$ și de rază R.

Dacă în ecuația de mai sus se dezvoltă $\cos(\theta - \theta_0)$ și ordonînd în raport cu puterile lui ρ se obține:

$$\rho^2 = \rho\,(2\rho_0 \sin\theta_0 \sin\theta + 2\rho_0 \cos\theta_0 \cos\theta) + R^2 - \rho_0^2.$$

Dacă se notează

$$2\rho_0 \sin\theta_0 = m;\ 2\rho_0 \cos\theta_0 = n$$

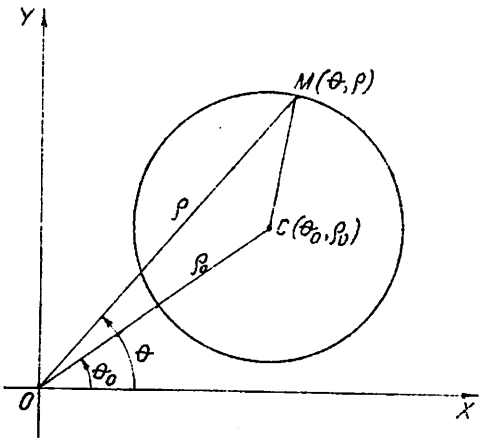


Fig. 22.30

și

$$R^2 - \rho_0^2 = p$$

relația devine:

$$\rho^2 = (m \sin\theta + n \cos\theta)\,\rho + p$$

Invers, o ecuație în coordonate polare

$$A\rho^2 + (D \sin\theta + E \cos\theta)\rho + F = 0 \quad (A \neq 0)$$

reprezintă un cerc cu centrul de coordonate polare:

$$\theta_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{D}{E} \qquad \rho_0 = \frac{\sqrt{D^2 + E^2}}{2A}$$

și cu rază:

$$R = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2A}$$

22.2.2. Interpretarea geometrică a coeficienților ecuației normale a cercului

Considerăm ecuația cercului sub forma unei ecuații de gradul al doilea în x și y.

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

și ecuația normală a cercului

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0$$

Comparînd coeficienții celor două ecuații considerate obținem:

$$m = -a;\ n = -b;\ p = a^2 + b^2 - R^2$$

Coeficienții lui x și y ($2m$ și $2n$) sînt coordonatele centrului cercului, dublate și cu semn schimbat.

Dacă din originea sistemului de axe se duce o tangentă la cerc, (OT), rezultă că $p = OT^2$, deci p reprezintă puterea originii față de cerc. Dacă p este negativ, atunci originea sistemului de axe este interioară cercului.

Atunci cînd $p = 0$, cercul trece prin originea sistemului axelor de coordonate.

Determinarea razei și a centrului cercului.

Din comparația coeficienților rezultă:

$$a = -m,\ b = -n,\ R = \sqrt{a^2 + b^2 - p}$$

Aceste relații dau valoarea coordonatelor centrului și raza cercului.

Rezultă că coordonatele centrului cercului sînt egale cu jumătatea coeficienților lui x și y luate cu semn schimbat.

Privind raza R a cercului, se poate arăta că:

Atunci cînd $a^2 + b^2 - p > 0$, raza este reală.

Atunci cînd $a^2 + b^2 - p = 0$ raza este nulă, deci cercul se reduce la un punct de coordonate a și b.

Atunci cînd $a^2 + b^2 - p < 0$ raza cercului este imaginară, deci și cercul este imaginar.

22.2.3. Intersecția cercului cu o dreaptă

a. *Intersecția unei drepte cu un cerc oarecare*

Să se afle coordonatele punctelor de intersecție ale cercului

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0$$

cu dreapta:

$$y = mx + n$$

Dacă printr-o translație a sistemului de axe se aduce originea în centrul cercului $[C(a,b)]$, sistemul de ecuații devine:

$$x^2_1 + y^2_1 - R^2 = 0;\ y_1 = mx_1 + ma - b + n$$

unde:

$$x_1 = x - a;\ y_1 = y - b.$$

Comparînd cele două sisteme se observă că n din ecuația dreptei este înlocuit cu $(ma - b + n)$.

Realizantul este $R_1 = 4\ [R^2(1 + m^2) - (ma - b + n)^2]$.

De unde rezultă că:

Atunci cînd $R_1 > 0$, rădăcinile sînt reale și dreapta intersectează cercul, ceea ce înseamnă că

$$R > \left| \frac{ma - b + n}{\sqrt{1 + m^2}} \right|$$

adică raza cercului este mai mare decît depărtarea de la centrul cercului la dreapta considerată $(y = mx + n)$

Atunci cînd $R_1 = 0$, rădăcinile sînt confundate și dreapta este tangentă la cerc deoarece

$R = \frac{ma - b + n}{\sqrt{1 + m^2}}$ adică raza cercului este egală cu depărtarea de la centrul cercului la dreaptă.

Atunci cînd $R_1 < 0$, rădăcinile sînt complexe iar dreapta este exterioară cercului.

b. *Tangente la cerc duse dintr-un punct exterior.*

Considerăm punctul exterior $A(x_0, y_0)$ și cercul

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Din punctul exterior $A(x_0, y_0)$ se consideră tangenta la cerc de pantă m. Coordonatele omogene ale unui punct $I\infty$ de pe dreaptă sînt $(1, m, 0)$.

Introducînd coordonatele omogene ale punctelor A și $I\infty$ în ecuația care definește condiția ca o dreaptă să fie tangentă la un cerc, se obține;

$$(x_1x_2 + y_1y_2) - a(x_1z_2 + x_2z_1) - b(y_1z_2 + y_2z_1) + cz_1z_2 =$$
$$= F(x_1y_1z_1)\ F(x_2y_2z_2)$$

unde $x_1y_1z_1$ și $x_2y_2z_2$ sînt coordonatele omogene ale punctelor A_1 și A_2.

Se obține ecuația care dă valoarea pantei m și anume

$$[(x_0 - a) + m(y_0 - b)]^2 = (1 + m^2)\, f(x_0 y_0).$$

Rădăcinile m_1 și m_2 ale acestei ecuații fiind reale și diferite, rezultă că prin punctul A se pot duce două tangente reale, în cazul cînd

$$f(x_0 y_0) > 0.$$

Dacă $f(x_0 y_0) < 0$, ecuația de mai sus are rădăcini complexe — deci nu se poate duce nici o tangentă reală.

Atunci cînd $f(x_0 y_0) = 0$, iar punctul A se află pe cerc, ecuația are o singură rădăcină.

$$m = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}$$

care reprezintă panta tangentei dusă prin punctul A.

c) *Tangente la cerc, paralele cu o direcție dată.*

Considerăm cercul

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

și dreapta de pantă m care trece prin punctul $A(x,y)$. Pentru ca această dreaptă să fie tangentă la cerc trebuie să existe relația:

$$[(x - a) + m\,(y - b)]^2 = (1 + m^2)\,(x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c)$$

sau

$$(x - a)^2 + 2\,m\,(x - a)\,(y - b) + m^2(y - b)^2 = (1 + m^2)$$
$$[(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2]$$

sau

$$(y - b)^2 - 2m\,(x - a)\,(y - b) + m^2(x - a)^2 = R^2(1 + m^2)$$
$$[(y - b) - m(x - a)]^2 = R^2\,(1 + m^2)$$

de unde rezultă că ecuația dreptelor tangente la cerc, de pantă m, este

$$\boxed{y - b = m\,(x - a) \pm R\sqrt{1 + m^2}}$$

22.2.4. Aplicații

1. O baterie de artilerie dispusă în punctul P de coordonate $x = 12{\cdot}260$, $y = 20{\cdot}600$, $h = 120$ a primit misiunea să deschidă focul asupra unui obiectiv (S) aflat în punctul de coordonate $x = 16{\cdot}500$;

$y = 26.020$. Se cere distanța de tragere și gismentul direcției bate obiectiv.

Rezolvare: Distanța de tragere se calculează cu relația distanței în două puncte.

$$D_T = \sqrt{(x_s - x_p)^2 + (y_s - y_p)^2} =$$

$$= \sqrt{(16 \cdot 500 - 12 \cdot 260)^2 + (26 \cdot 020 - 20 \cdot 600)^2}$$

$$D_T = \sqrt{(4240)^2 + (5 \cdot 420)^2} = \sqrt{473 \cdot 540}$$

$$D_T = 6 \cdot 880 \text{ m}.$$

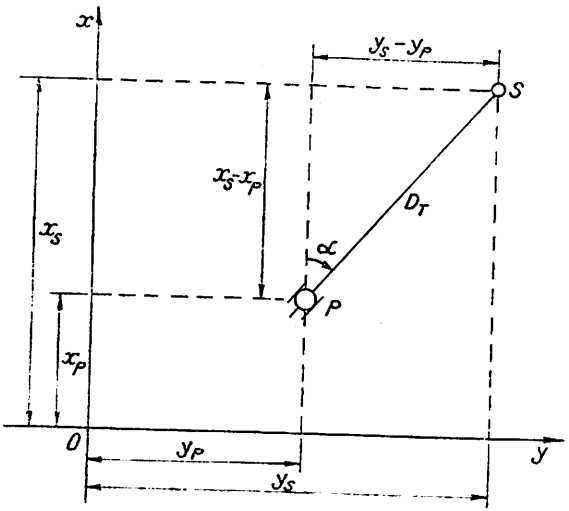


Fig. 22.31

Gismentul direcției baterie-obiectiv este dat de relația

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Y_s - Y_p}{X_s - X_p} = \frac{26 \cdot 020 - 20 \cdot 600}{16 \cdot 500 - 12 \cdot 260}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 1{,}238.$$

$$\alpha = 51°57'57''.$$

sau

$$D_T = \frac{x_s - x_p}{\cos\alpha}$$

Avînd în vedere faptul că în topografie sensul unghiurilor şi cadranelor nu este cel din matematică, reducerea unghiurilor la primul cadran se arată în fig. (22.32) şi în tabelul de mai jos.

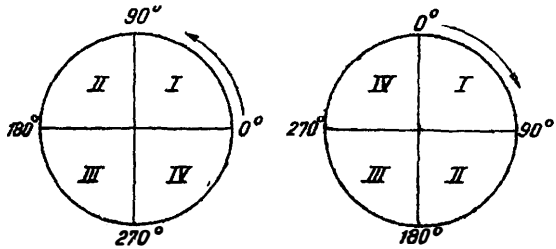


Fig. 22.32

Sensul în care se consideră unghiurile (fig. 22.32).

Determinarea gismentului ţinînd seama de semnul diferenţei de coordonate.

Semnul diferenţei		$y_s - y_p$	+	+	−	−
		$x_s - x_p$	+	−	−	+
Cadranul			I	II	III	IV
Unghiul R obţinut	Se adună la		0°		180°	
	Se scade			180°		360°

2. *Determinarea analitică a distanţei şi direcţiei de tragere folosind tabelul Gravcenco.*

Pentru determinarea distanţei de tragere se foloseşte relaţia:

$$D_T = \frac{\Delta x}{\cos (PS)} = \Delta x \frac{1}{\cos (PS)} = \Delta x \cdot \sec \cdot (PS).$$

Unghiurile se calculează numai pînă la 45° adică unghiuri care au tangenta subunitară şi deci a căror secantă variază de la 1 la 1,414.

Pentru ca unghiul să fie mai mic de 45°, trebuie ca valoarea $y_s - y_p$ să fie mai mică decît diferenţa $x_s - x_p$ (ambele în valoare absolută).

În acest caz tangenta unghiului ascuțit (rumbului) se determină cu relația:

$$\operatorname{tg} R_1 = \frac{y_{s_1} - y_p}{x_{s_1} - x_p}$$

Atunci cînd valoarea $(y_s - y_p) > (x_s - x_p)$ relația folosită este:

$$\operatorname{tg} R_2 = \frac{x_{s_2} - x_p}{y_{s_2} - y_p}$$

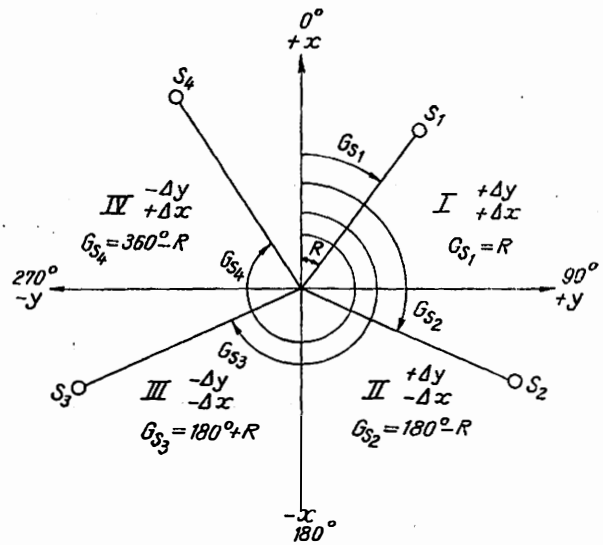


Fig. 22.33

Unghiul R_1 este mai mic de 45° și este alăturat axei x-lor iar unghiul R_2 este tot mai mic de 45° însă este alăturat axei y-lor.

Valoarea gismentului direcției de tragere în raport cu valoarea unghiului R se arată în fig. 22.34.

Exemplu numeric

$$P \begin{cases} x = 42374 \\ x = 31124 \end{cases} \qquad S \begin{cases} x = 49263 \\ y = 23561 \end{cases}$$

iar gismentul direcției de tragere $G_s = 48—00$.

Rezolvare.

1°. Se calculează diferența de coordonate.

$x_s = 49263 -$	$y_s = 23561$
$x_p = 42374$	$y_p = 31124$
$\Delta_x = +\ 6889$	$\Delta_y = -\ 7563$

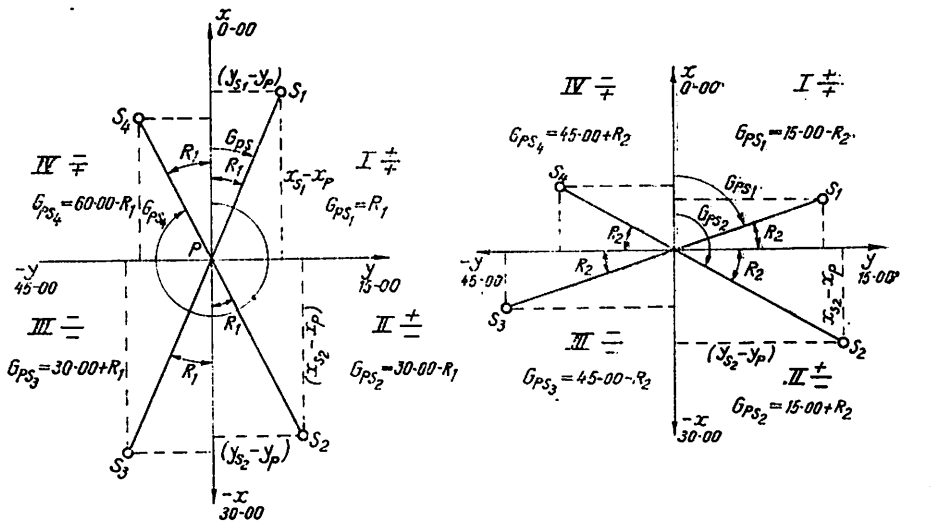


Fig. 22.34

2°. Se împarte diferența de coordonate mai mică (în valoare absolută) la diferența de coordonate mai mare (în valoare absolută) și se obține tangenta unghiului R:

$$\operatorname{tg} R = \frac{6\,889}{7\,563} = 0{,}910$$

3°. Din tabelul Gravcenco, coloana tangentei, se caută valoarea tangentei unghiului și în dreptul ei se determină unghiul în miimi.

$$\operatorname{tg} R = 0{,}910;\ R = 7 - 05$$

Din coloana secantei se scoate partea zecimală a secantei unghiului, 352.

4°. În raport de semnele diferenței de coordonate se determină gismentul direcției piesă-obiectiv folosind tabelul următor:

Relația semnelor în $\frac{y_s - y_p}{x_s - x_p}$		+ / +	+ / −	− / −	− / +
Unghiul R în cadranul		I	II	III	IV
G_{Ps}	Dacă $(y_s - y_p) > (x_s - x_p)$	15—00—R	15—00+R	45—00—R	45—00+R
	Dacă $(y_s - y_p) < (x_s - x_p)$	R	30—00—R	30—00+R	60—00—R

În cazul nostru

$$G_{PS} = 45 - 00 + R = 45 - 00 + 7 - 05 = 52 - 05$$

5°. Determinarea unghiului de transport de la direcția de bază.

$T_B = 52 - 05 - 48 - 00 = +4 - 05$ (de la direcția de bază dreapta 4—05).

6°. Pentru determinarea distanței de tragere, se înmulțește diferența de coordonate cea mai mare în valoare absolută cu partea zecimală a secantei și se împarte la 1000 (se rotunjește în unități întregi); rezultatul obținut se adună cu diferența de coordonate cea mai mare.

$$\frac{7\,563 \times 352}{1\,000} = 2652{,}176 = 2652.$$

$$D_T = 7563 + 2652 = 10\,215 \text{ m}.$$

La acest rezultat se ajunge și dacă se înmulțește direct diferența de coordonate cea mai mare (în valoare absolută) cu valoarea secantei.

$$D_T = 7563 \times 1{,}352 = 10\,215{,}176 \text{ m}.$$

3. *Determinați unghiul de transport și distanța de tragere* asupra bateriei inamicului dispusă în punctul de coordonate:

$$x_s = 48260;\ y_s = 13370$$

cunoscînd că se trage cu o baterie de 122 mm dispusă în punctul $x_p = 53865$; $y_p = 05355$ și îndreptată pe direcția de bază $G_{DB} = 20 - 00$.

4. *Determinarea coordonatelor elementelor dispozitivului de luptă al subunităților de artilerie (în special al punctelor de comandă observare) prin intersecție înapoi.*

Am reținut din exemplele anterioare că principiul procedeului constă în determinarea coordonatelor unui punct necunoscut P în care se staționează și se măsoară unghiurile α și β (fig. 22.35) ținînd seama de proprietatea punctului P de a fi simetricul punctului B față de direcția centrelor cercurilor circumscrise triunghiurilor APB și BPC (fig. 22.36).

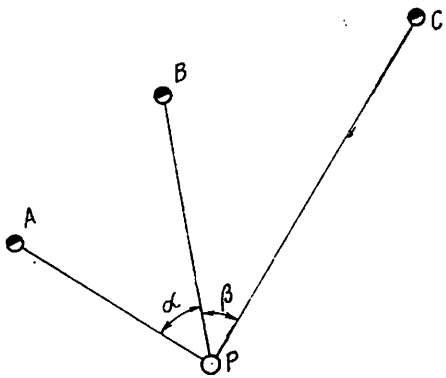


Fig. 22.35

Din figură rezultă: triunghiurile AC_1B și BC_2C sînt triunghiuri isoscele cu unghiurile în C_1 și C_2 egale respectiv cu 2α și 2β (ele subîntind arce egale cu cele subîntinse, respectiv de α și β). Ca urmare unghiurile din A, B și C sînt egale cu 15—00 — α și respectiv 15—00 — β (fig. 22.36).

Pe baza acestor date se pot calcula centrele celor două cercuri C_1 și C_2 prin intersecție directă folosind punctele cunoscute A și B respectiv B și C.

Atunci cînd unghiurile α și β măsurate în teren nu sînt favorabile intersecției directe (au valori prea mici sau apropiate de 15—00 ceea ce face ca unghiurile AC_1B și BC_2C să aibă valori prea mari respectiv prea mici) este indicat a se folosi *metoda grafic-analitică.*

În acest caz se folosește procedeul calculului razelor R_1 și R_2 ale celor două cercuri.

Din figură rezultă:

$$\overline{AB} = 2\,R_1 \cos(15 - 00 - \alpha) = 2R_1 \sin\alpha$$

$$\overline{BC} = 2\,R_2 \cos(15 - 00 - \beta) = 2\,R_2 \sin\beta$$

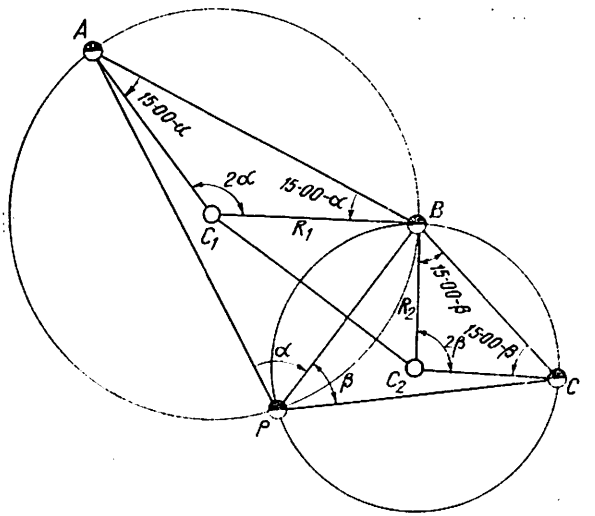


Fig. 22.36

de unde:

$$R_1 = \frac{\overline{AB}}{2 \sin \alpha} = \frac{\overline{AB}}{2} \operatorname{cosec} \alpha$$

$$R_2 = \frac{\overline{BC}}{2 \sin \beta} = \frac{\overline{BC}}{2} \operatorname{cosec} \beta$$

Cu ajutorul coordonatelor punctelor A, B și C se calculează distanțele AB și BC folosind relațiile:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

sau se măsoară pe planșetă în milimetri. Introducîndu-se în relațiile care dau valoarea razelor, obținem R_1 și R_2 în milimetri la scara folosită în construcția grafică.

Folosind valoarea razelor R_1 și R_2 calculate se pot determina pozițiile centrelor celor două cercuri C_1 și C_2 pe planșetă; trasînd cu compasul din punctele A și B arce de cerc cu raza egală cu R_1 se obține poziția

punctului C_1 — la fel din B și C arcele de rază egală cu R_2 vor da poziția punctului C_2.

Din cele 2 centre obținute, C_1 și C_2, se vor duce cercurile respective prin punctele A și B și respectiv B și C.

Intersecția lor (opusă lui B) determină poziția punctului de determinat P ale cărui coordonate pot fi ușor scoase de pe planșetă sau de pe paratul de conducerea focului (fig. 22.37).

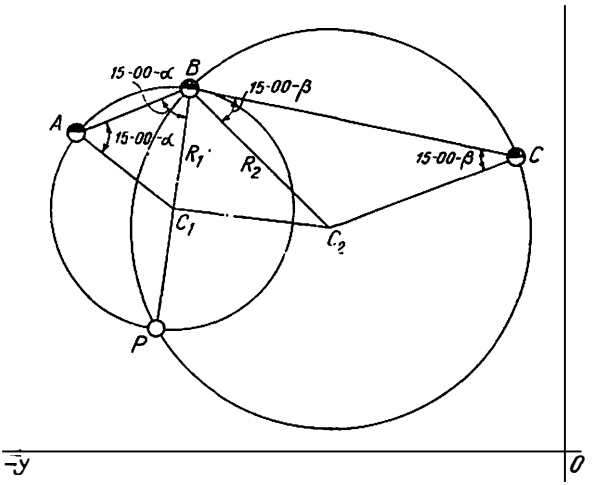


Fig. 22.37

Cînd se dispune de timp suficient pentru determinarea coordonatelor elementelor dispozitivului de luptă se poate folosi *metoda analitică*.

În acest caz se folosesc coordonatele a trei puncte cunoscute: $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$; $C(x_C, y_C)$ și unghiurile α și β măsurate din punctul de comandă observare (necunoscut).

Mod de lucru.

1°. Se calculează coordonatele centrelor cercurilor C_1 (x_{c_1}, y_{c_1}) și $C_2(x_{c_2}, y_{c_2})$. Pe baza lor se determină coordonatele punctului necunoscut $P(x_p, y_p)$.

Din figura 22.38 rezultă:

$$X_{c_1} = X_B + R_1 \cos (BC_1)$$
$$Y_{c_1} = Y_B + R_1 \sin (BC_1)$$
$$X_{c_2} = X_B + R_2 \cos(BC_2)$$
$$Y_{c_2} = Y_B + R_2 \sin (BC_2)$$

Avînd în vedere că:

$$R_1 = \frac{\overline{AB}}{2 \sin \alpha} = \frac{\overline{AB}}{2} \operatorname{cosec} \alpha$$

$$R_2 = \frac{\overline{BC}}{2 \sin \beta} = \frac{\overline{BC}}{2} \operatorname{cosec} \beta$$

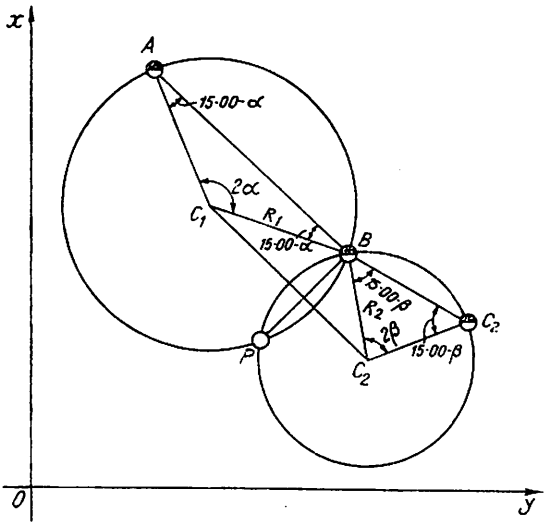


Fig. 22.38

iar direcțiile:

$$(BC_1) = (BA) - (15 - 00 - \alpha)$$
$$(BC_2) = (BC) - (15 - 00 - \beta)$$

rezultă că:

$$\cos (BC_1) = \cos [(BA) - (15 - 00 - \alpha)]$$
$$\sin (BC_1) = \sin [(BA) - (15 - 00 - \alpha)]$$
$$\cos (BC_2) = \cos [(BC) + (15 - 00 - \beta)]$$
$$\sin (BC_2) = \sin [(BC) + (15 - 00 - \beta)]$$

Din trigonometrie am reținut relațiile:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$$
$$\cos (a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

Pe baza acestor relații se poate scrie:

$$\cos(BC_1) = \cos(BA)\sin\alpha + \sin(BA)\cos\alpha$$
$$\sin(BC_1) = \sin(BA)\sin\alpha - \cos(BA)\cos\alpha$$
$$\cos(BC_2) = \cos(BC)\sin\beta + \sin(BC)\cos\beta$$
$$\sin(BC_2) = \sin(BC)\sin\beta + \cos(BC)\cos\beta$$

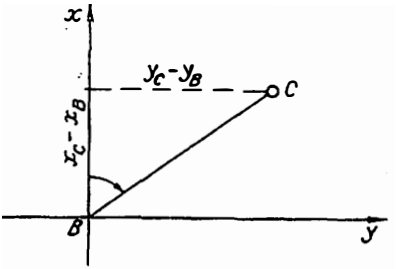


Fig. 22.39

Din figura 22.39 rezultă

$$\sin(BC) = \frac{Y_C - Y_B}{BC}\,;\ \cos(BC) = \frac{X_C - X_B}{BC}$$

și în mod analog:

$$\sin(AB) = \frac{y_A - y_B}{AB}\,;\ \cos(AB) = \frac{x_A - x_B}{AB}$$

Folosind aceste relații putem scrie, în final relațiile care dau coordonatele centrelor cercurilor astfel:

$$\boxed{x_{c_1} = \frac{1}{2}\left[X_A + X_B - (Y_B - Y_A)\operatorname{cotg}\alpha\right]}$$

$$\boxed{Y_{c_1} = \frac{1}{2}\left[Y_A + Y_B + (X_B - X_A)\operatorname{cotg}\alpha\right]}$$

$$\boxed{X_{c_2} = \frac{1}{2}\left[X_B + X_C - (Y_C - Y_B)\operatorname{cotg}\beta\right]}$$

$$\boxed{Y_{c_2} = \frac{1}{2}\left[Y_B + Y_C + (X_C - X_B)\operatorname{cotg}\beta\right]}$$

2°. Se calculează orientarea direcției centrelor C_1C_2 folosind relația:

$$\boxed{\operatorname{tg}(C_1C_2) = \frac{Y_{c_2} - Y_{c_1}}{X_{c_2} - X_{c_1}}}$$

3°. Se calculează unghiul φ (unghiul de rotire al sistemului format de cele 2 centre ale cercurilor pentru a se suprapune peste sistemul axelor de coordonate ortogonale) folosind relațiile:

$$\varphi = 15 - 00 - (C_1C_2), \text{ atunci cînd } (C_1C_2) < 30 - 00.$$

$$\varphi = 45 - 00 - (C_1C_2), \text{ atunci cînd } (C_1C_2) > 30 - 00.$$

4°. Se determină coordonatele punctului necunoscut P.

$$\boxed{X_P = X_{c_1} - (X_B - X_{c_1})\cos 2\varphi + (Y_B - Y_{c_1})\sin 2\varphi}$$

$$\boxed{Y_P = Y_{c_1} + (X_B - X_{c_1})\sin 2\varphi + (Y_B - Y_{c_1})\cos 2\varphi}$$

Notă: în calcule trebuie să se țină seama de semnul unghiului φ. Cînd are semnul (—) atunci $\sin(-2\varphi) = -\sin 2\varphi$ iar $\cos(-2\varphi) = +\cos 2\varphi$. Atunci cînd $2\varphi > 15 - 00$, $\cos 2\varphi$ are semnul (—).

5°. Dacă sînt necesare și orientările din punctul P spre punctele A, B și C, acestea se calculează cu ajutorul relațiilor deduse din fig. 22.40

$$(BP) = (C_1C_2) \pm 15 - 00$$

$$(PB) = (C_1C_2) \pm 15 - 00 \pm 30 - 00$$

$$(PA) = (PB) - \alpha$$

$$(PC) = (PB) + \beta$$

Verificarea rezultatelor se poate face prin rezolvare grafică sau prin folosirea următoarelor relații:

$$X_{c_1} = \frac{1}{2}\left[X_A + X_B - \frac{Y_B - Y_A}{\operatorname{tg}\alpha}\right]$$

$$Y_{c_1} = \frac{1}{2}\left[Y_A + Y_B + \frac{X_B - X_A}{\operatorname{tg}\alpha}\right]$$

similar pentru X_{c_2} și Y_{c_2}.

Pentru coordonatele punctului necunoscut P se folosesc relaţiile:

$$X_P = X_{C_2} - (X_B - X_{C_2}) \cos 2\varphi + (Y_B - Y_{C_2}) \sin 2\varphi$$

$$Y_P = Y_{C_2} + (X_B - X_{C_2}) \sin 2\varphi + (Y_B - Y_{C_2}) \cos 2\varphi$$

Trebuie remarcat că metoda duce la scurtarea timpului necesar, deoarece poate fi lucrată pe subpuncte de către mai mulţi operatori, deoarece calculele nu decurg în totalitate unele din altele.

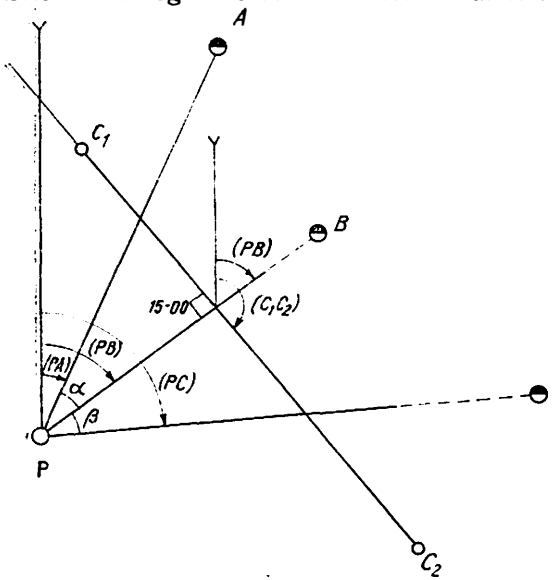


Fig. 22.40

Exerciţiu numeric

Coordonatele punctelor de sprijin, Călugăriţa (A), Cucu (B), Stupăriei (C) sînt:

$X_A = 54\,577{,}5$ $\quad X_B = 55\,410$ $\quad X_C = 55\,494{,}2$

$Y_A = 80\,259$ $\quad Y_B = 80\,275$ $\quad Y_C = 82\,440$.

În teren, din punctul de comandă observare al divizionului s-au măsurat: $\alpha = 6\text{—}90$; $\beta = 19 - 40$.

Să se determine coordonatele punctului de comandă observare $O(X_0, Y_0)$.

1°. Calculul coordonatelor centrelor C_1 și C_2 ale centrelor cercurilor.

$$X_{C_1} = \frac{1}{2}\,[X_A + X_B - (Y_B - Y_A)\ \text{cotg}\ \alpha]$$

$$Y_{C_1} = \frac{1}{2}\,[Y_A + Y_B + (X_B - X_A)\ \text{cotg}\ \alpha]$$

$$\text{cotg}\ \alpha = +\,0{,}7776$$

$$X_{C_2} = \frac{1}{2}\,[X_B + X_C - (Y_C - Y_B)\ \text{cotg}\ \beta]$$

$$Y_{C_2} = \frac{1}{2}\,[Y_B + Y_C + (X_C - X_B)\ \text{cotg}\ \beta]$$

$$\text{cotg}\ \beta = -\,0{,}4940$$

$$(X_B - X_A)\ \text{cotg}\ \alpha = 832{,}5 \times 0{,}7776 = 647{,}35$$

$$(Y_B - Y_A)\ \text{cotg}\ \alpha = 16 \times 0{,}7776 = 12{,}45$$

$$(X_C - X_B)\ \text{cotg}\ \beta = 84{,}2 \times (-0{,}4940) = -\,41{,}6$$

$$(Y_C - Y_B)\ \text{cotg}\ \beta = 2165 \times (-0{,}4940) = -\,1069{,}5$$

$$X_{C_1} = \frac{1}{2}\,[54577{,}5 + 55410 - (80275 - 80259)\ 0{,}7776] =$$

$$= \frac{1}{2}\,[54577{,}5 + 55410 - 12{,}45]$$

$$\boxed{X_{C_1} = 54987{,}5}$$

$$Y_{C_1} = \frac{1}{2}\,[80259 + 80275 + 647{,}35]$$

$$\boxed{Y_{C_1} = 80590{,}7}$$

$$X_{C_2} = \frac{1}{2}\,[55410 + 55494{,}2 - (-\,1069{,}5)]$$

$$\boxed{X_{C_2} = 55\,986{,}8}$$

$$Y_{C_2} = \frac{1}{2}\,[80275 + 82440 - 41{,}6]$$

$$\boxed{Y_{C_2} = 81337}$$

2°. *Calculul orientării* C_1C_2

$$\operatorname{tg}(C_1C_2) = \frac{Y_{c_2} - Y_{c_1}}{X_{c_2} - X_{c_1}} = \frac{+746}{+999,3} = 0,747$$

$$\boxed{(C_1C_2) = 6 - 16}$$

3°. *Calculul unghiului de rotire* φ

$$\varphi = 15 - 00 - 6 - 16 = 8 - 84$$

$$2\varphi = 17 - 68$$

$$\sin 2\varphi = +0,9609;\ \cos 2\varphi = -0,2770$$

4°. *Calculul coordonatelor punctului P.*

$$(X_B - X_{c_1}) \cos 2\varphi = (55410 - 54987,5) \cos 2\varphi = 422,5 \times$$

$$\times (-0,2770) = -117 \text{ m}$$

$$(Y_B - Y_{c_1}) \sin 2\varphi = (80275 - 80590,7) \sin 2\varphi = -315,7 \cdot 0,9609 =$$

$$= -303,4 \text{ m}$$

$$(X_B - X_{c_1}) \sin 2\varphi = 422,5 \times 0,9609 = +406 \text{ m}$$

$$(Y_B - Y_{c_1}) \cos 2\varphi = -315,7 \times (-0,2770) = +87,5 \text{ m}$$

$$X_P = X_{c_1} - (X_B - X_{c_1}) \cos 2\varphi + (Y_B - Y_{c_1}) \sin 2\varphi =$$

$$= 54987,5 + 117 - 303,4 = 54801,1 \text{ m}$$

$$\boxed{X_P = 54801,1}$$

$$Y_P = Y_{c_1} + (X_B - X_{c_1}) \sin 2\varphi + (Y_B - Y_{c_1}) \cos 2\ 1$$

$$Y_P = 80.590,7 + 406 + 87,5 =$$

$$\boxed{Y_P = 81,084,2}$$

5°. *Calculul orientărilor din punctul P spre punctele de sprijin A, B, C.*

$$(PB) = 6 - 16 + 15 - 00 + 30 - 00 = 51 - 16$$

$$(PA) = 51 - 16 - 6 - 90 = 44 - 26$$

$$(PC) = 51 - 16 + 19 - 40 = 10 - 56$$

CAPITOLUL 23

ECUAȚIILE CANONICE ALE CONICELOR

23.1. ELIPSA

Considerăm două puncte fixe F_1 și F_2, numite focare și un punct $M(x,y)$ mobil în plan. Se ia F_1F_2 ca axă Ox, mediatoarea segmentului F_1F_2 ca axă Oy, iar valoarea distanței focale $F_1F_2 = 2c$ Coordonatele celor două focare sînt: $F_1(c_1O)$ și $F_2(c_2O)$. Se poate stabili ecuația curbei descrise de punctul mobil M (fig. 23.1).

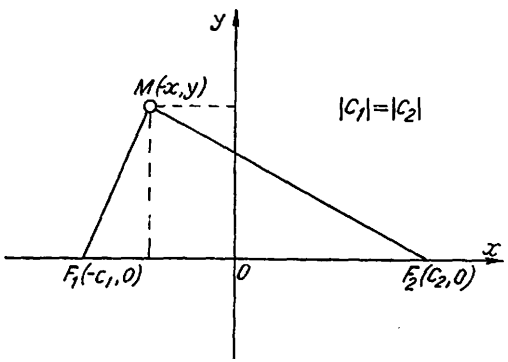


Fig. 23.1

Considerăm suma distanțelor la cele două focare egală cu $2a$.

$$MF_1 + MF_2 = 2a. \tag{23.1}$$

Notînd cu x și y coordonatele punctului M al curbei se obține:

$$\begin{aligned} MF_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ MF_2 &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{aligned} \tag{23.2}$$

Înlocuind în relaţia 23.1 se obţine

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Prin ridicări succesive la patrat, transformăm această formă iraţională în una raţională, astfel:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

După reduceri şi simplificări obţinem:

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

Pentru MF_2 rezultă:

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

Ridicînd din nou la patrat, reducînd termenii asemenea se obţine:

$$(a^2-c^2)\,x^2+a^2y^2=a^2\,(a^2-c^2)$$

Ţinînd seama de faptul că $MF_1+MF_2>F_1F_2$ deci $a>c$, rezultă că a^2-c^2 este număr pozitiv care se poate nota, $a^2-c^2=b^2$.

Înlocuind în ultima relaţie se obţine ecuaţia simplificată a curbei

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

sau

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

Aceasta este *ecuaţia elipsei* raportată la axele sale (ecuaţia canonică a elipsei).

Elipsa este locul geometric al punctelor care au suma distanţelor la două puncte fixe, numite focare, constantă.

23.1.1. Intersecţia elipsei cu axele de coordonate

Cînd y ia valoarea zero, punctul variabil M intersectează axa OX în punctele $A_1(-a,0)$ şi $A_2(a,0)$ iar cînd x ia valoarea zero, elipsa intersectează axa OY în punctele $B_1(0,-b)$ şi $B_2(0,+b)$. Elipsa admite cele două axe, drept axe de simetrie.

Segmentul $A_1A_2=2a$ constituie axa mare a elipsei, iar segmentul $B_1B_2=2b$, axa mică, fig. 23.2.

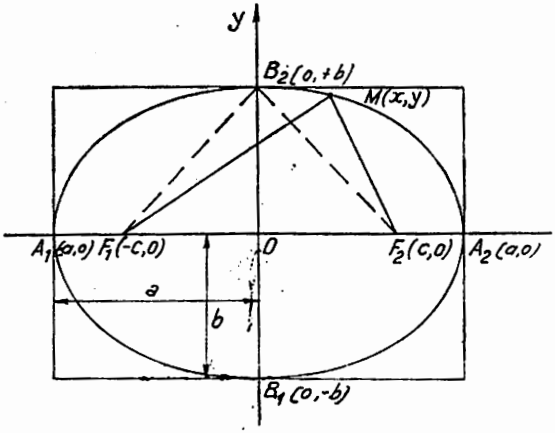


Fig. 23.2

23.1.2. **Reprezentarea elipsei — forma ei**

Din ecuaţia elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, se determină

$$\boxed{y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}$$

De aici rezultă că domeniul de definiţie al funcţiei y este

$$-a \leqslant x \leqslant a$$

Avînd în vedere cele două axe de simetrie, este suficient să reprezentăm numai ramura de curbă aflată în cadranul întîi, după care se reprezintă simetricele acesteia faţă de axe şi faţă de centrul de simetrie.

Reprezentăm deci funcţia $y=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ pentru care $y \geqslant 0$.

Derivata funcţiei $y'=\frac{-b\,x}{a\sqrt{a^2-x^2}}$

Tabloul de variaţie pentru x variind de la zero la a.

x	0 ⟶ a
y'	0 — — — — — ∞
y	b descreşte 0

Punctele A_1, A_2, B_1, B_2 poartă numele de *vîrfurile elipsei.*

Atunci cînd $b = a$ elipsa devine cerc, iar distanța focală este nulă. Cercul acesta are raza $R = a$ și centrul în origine.

În continuare presupunem că $a \geqslant b$. Raportul dintre jumătatea distanței focale și semiaxa mare a elipsei se numește *excentricitatea elipsei* și se notează cu e,

deci:

$$e = \frac{c}{a} \; ; \; 0 \leqslant e \leqslant 1$$

Raportul semiaxelor elipsei determină excentricitatea ei astfel:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

Dacă presupunem că coordonatele punctului M satisfac ecuația elipsei, putem scrie:

$$MF_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{(x + c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 + 2cx + b^2 + c^2}$$

$$= \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2} + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2}$$

Deci:

$$MF_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right|$$

Analog

$$MF_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right|$$

sau

$$MF_1 = a + ex$$

$$MF_2 = a - ex$$

Directoarele elipsei sînt două axe perpendiculare pe axa elipsei care conține focarele, situate la distanța $\frac{a}{e}$ de centrul elipsei (a este semiaxa mare a elipsei, iar e excentricitatea ei), fig. 23.3.

Cercul nu are directoare deoarece $e = 0$.

Pentru elipsa de forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ unde $a > b$ ecuațiile directoarelor sînt:

$$x = \frac{a}{e} \; ; \; x = -\frac{a}{e}$$

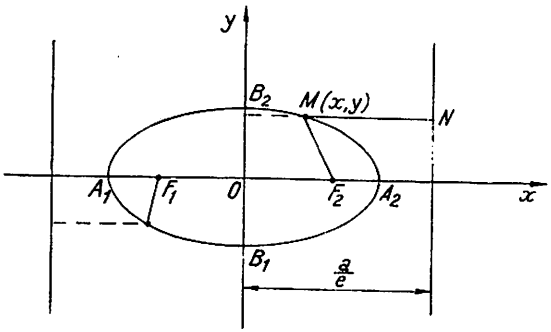


Fig. 23.3

Raportul distanței de la un punct oarecare al elipsei la un focar către distanța de la același punct la directoarea corespunzătoare acestui focar este egal cu excentricitatea elipsei

$$\frac{MF_2}{MN} = e$$

23.1.3. Ecuațiile parametrice ale elipsei

Trasăm două cercuri concentrice (fig. 23.4) unul de rază a și altul de rază b ($a > b$) cu diametrele A_1A_2 și B_1B_2 perpendiculare în O, centrul comun al celor două cercuri. Cercul cu raza a se numește cerc principal al elipsei. O rază variabilă intersectează cercul mic în P iar pe cel mare în M. Prin P și M ducem paralelele PN și MN la cele două diametre perpendiculare.

Se pune problema să determinăm curba descrisă de punctul N cînd dreapta OPM variază.

Notînd cu θ unghiul AOM și cu P' și M' proiecțiile lui P și M pe axa Ox, din triunghiurile dreptunghice OMM' și OPP' se poate scrie

$$OM' = OM \cos \theta; \quad PP' = OP \sin \theta$$

sau

$$x = a \cos \theta \text{ și } y = b \sin \theta$$

Prin eliminarea parametrului θ obținem:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ceea ce înseamnă că punctul $N(x,y)$ descrie elipsa cu axa mare $A_1A_2 = 2a$ și axa mică $B_1B_2 = 2b$.

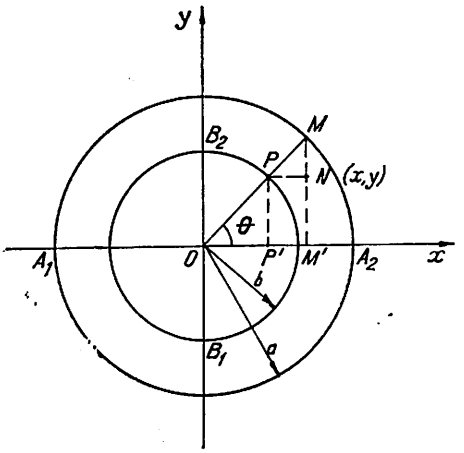


Fig. 23.4

Coordonatele parametrice ale elipsei sînt:

$$\boxed{x = a\cos\theta} \qquad \boxed{y = b\sin\theta}$$

care constituie ecuațiile parametrice ale elipsei unde θ este parametru care variază de la 0 la 2π.

23.1.4. Ecuația elipsei în coordonate polare

Considerăm drept pol unul din focare iar axa polară suprapusă peste axa mare cu sensul pozitiv de la pol spre vîrful mai îndepărtat de pe axa polară.

Unui punct M al elipsei îi corespund coordonatele polare $F_2M = \rho$ și $\widehat{A_1F_2M} = \theta$, d = distanța de la focar la directoare.

Ținînd seama de proprietatea că elipsa este locul geometric al punctului variabil M pentru care avem

$$\frac{MF}{MN} = e < 1$$

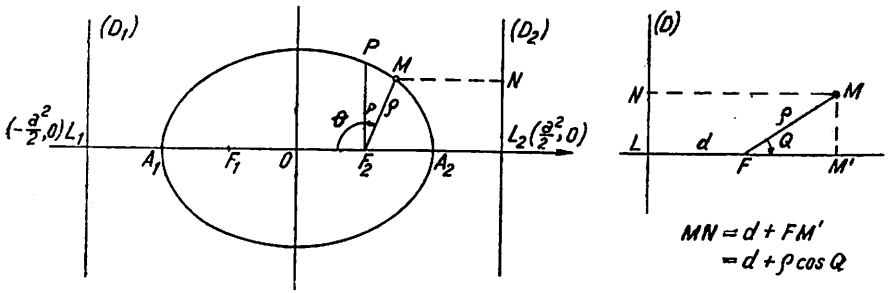


Fig. 23.5

sau

$$\frac{\rho}{\frac{a^2}{c} - c + \rho\cos\theta} = e \text{ sau } \frac{\rho}{d + \rho\cos\theta} = e$$

dar

$$\frac{a^2}{c} - c = \frac{b^2}{c} \text{ și } e \cdot \frac{b^2}{c} = \frac{b^2}{a}$$

deci

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - e\cos\theta} = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

sau $\boxed{\rho = \frac{p}{1 - e\cos\theta}} = \boxed{\frac{ed}{1 - e\cos\theta}}$

Aceasta este ecuația elipsei în coordonate polare.

Numărul $p = \frac{b^2}{a}$ poartă numele de *parametrul elipsei* și este egal cu lungimea perpendicularei ridicate din focar, pînă la intersecția cu elipsa —F_2P — (fig. 23.5).

23.1.5. Intersecția elipsei cu o dreaptă

Considerăm elipsa definită de ecuația $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ și dreapta $y = mx + n$. Soluțiile acestui sistem reprezintă coordonatele punctelor de intersecție.

Substituind y din ecuația dreptei în ecuația elipsei, prin eliminarea umitorilor și ordonarea puterilor lui x obținem ecuația de gradul al oilea.

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0$$

Rezolvarea acestei ecuații dă abscisele x_1 și x_2, care introducîndu-se n ecuația dreptei duc la obținerea ordonatelor.

Rădăcinile x_1 și x_2 pot fi reale și distincte, confundate sau imaginare lupă cum discriminantul

$$\Delta = a^2b^2\,(a^2m^2 + b^2 - n^2)$$

ste pozitiv, nul sau negativ.

Semnul lui Δ este același cu al expresiei

$$E = a^2m^2 + b^2 - n^2$$

Atunci cînd $E > 0$ punctele de intersecție sînt reale și distincte.
cînd $E = 0$, punctele de intersecție sînt reale și confundate;
cînd $E < 0$, punctele de intersecție sînt imaginare (dreapta este exterioară elipsei).

23.1.6. Tangente la elipsă

a) *Tangenta la elipsă dusă dintr-un punct exterior*

Considerăm punctul exterior $M_1(x_1,y_1)$ și elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Ecuația unei drepte oarecare ce trece prin M_1 este:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1).$$

Pentru ca această dreaptă să fie tangentă de pantă m la elipsă, ecuația ei devine:

$$y_1 = mx_1 \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

După raționalizare și ordonare față de necunoscuta m se obține:

$$(x^2_1 - a^2)m^2 - 2\,x_1y_1m + (y^2_1 - b^2) = 0$$

Soluțiile m_1 și m_2 sînt pantele tangentelor duse din $M_1(x_1,y_1)$ la elipsă. Ecuațiile celor două tangente sînt:

$$\boxed{y - y_1 = m_1\,(x - x_1)} \quad \text{și} \quad \boxed{y - y_1 = m_2\,(x - x_1)}$$

b) *Tangenta la elipsă, paralelă cu o dreaptă dată*

Considerăm elipsa $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$. Ecuația tangentei paralelă cu o dreaptă dată va fi de forma:

$y = mx + \lambda$; λ fiind necunoscută se determină scriind că $y = mx + \lambda$ este tangentă, adică realizantul este nul.

Deci expresia $E = 0$ sau $a^2m^2 + b^2 - \lambda^2 = 0$;

de unde

$$\lambda = \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$$

Rezultă că ecuațiile celor două tangente la elipsă, paralele cu direcția considerată sînt:

$$y_{1,2} = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

c. *Tangenta într-un punct de pe elipsă*

Considerăm elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ și un punct $M_0\ (x_0,y_0)$ pe această elipsă.

Panta tangentei într-un punct oarecare al elipsei este derivata funcției y în raport cu x

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

Panta tangentei în punctul $M_0\ (x_0y_0)$ rezultă că este

$$y'_{x_0} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

iar ecuația tangentei va fi:

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)}$$

sau sub altă formă

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

23.2 HIPERBOLA

23.2.1. Definiție

Locul geometric al punctelor a căror diferență a distanțelor la două puncte fixe, numite focare este constantă și egală cu 2 a, este o curbă de gradul 2, numită hiperbolă.

Considerăm punctele fixe (focarele) F_1 și F_2 și M (x,y) un punct al hiperbolei. Stabilim ecuația hiperbolei luînd F_1F_2 ca axă Ox, iar mediatoarea segmentului F_1F_2 ca axa Oy. Conform definiției, coordonatele punctului M trebuie să satisfacă relația geometrică. (fig. 23.6).

$$| MF_1 - MF_2 | = 2a$$

sau

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a \text{ (constant)}.$$

Transformînd analitic această relație obținem ecuația hiperbolei.

Dacă notăm $\overline{F_1F_2} = 2c$ rezultă că focarele au coordonatele:

$$F_1 (-c,0) \text{ și } F_2 (c,0)$$

Exprimată analitic relația $\overline{MF_1} - \overline{MF_2} = \pm 2a$, devine:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Raționalizînd prin izolarea unui termen și ridicare la patrat se obține:

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx + a^2$$

și

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2$$

Ridicînd din nou la patrat și reducînd termenii asemenea obținem:

$$(c^2 - a^2)\, x - a^2y^2 = a^2\,(c^2 - a^2)$$

Avînd în vedere că $F_1F_2 > MF_1 - MF_2$ rezultă că $c > a$ și deci $c^2 - a^2$ este un număr pozitiv.

Dacă notăm $\qquad c^2 - a^2 = b^2.$

Ecuația devine:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

sau:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{}{b^2} - 1 = 0$$

Aceasta este ecuația hiperbolei raportată la axe.

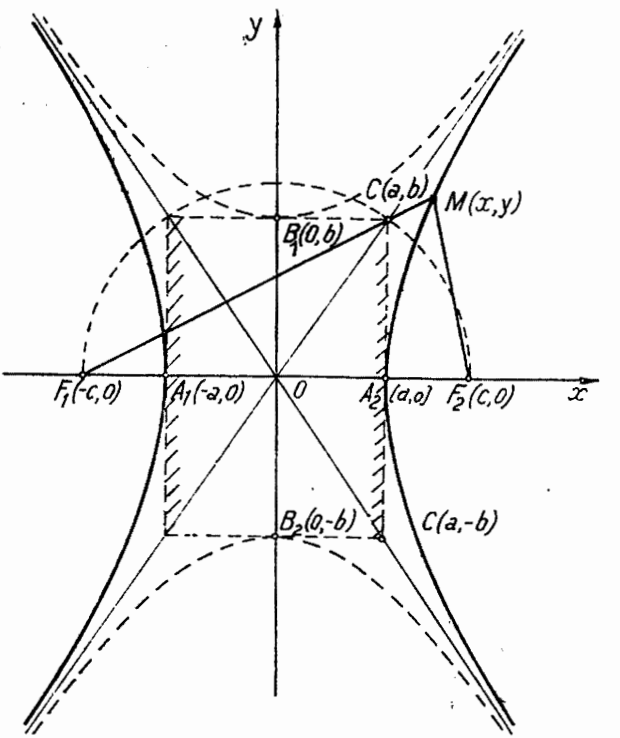


Fig. 23.6

23.2.2. Forma hiperbolei

Axele Ox și Oy sînt axe de orientare pentru hiperbolă, iar originea sistemului considerat este centru de simetrie. Axa Ox se numește axa transversală a hiperbolei.

Explicitînd ecuația hiperbolei se obține:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Rezultă că, curba există pentru $x \leqslant -a$ și $x \geqslant a$, Cu ajutorul derivatei funcției $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - a^2}$; $y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$ se poate întocmi următorul tablou de variație.

x	$a \longrightarrow +\infty$
y'	$\infty \quad + \quad + \quad +$
y	$0 \qquad$ crește $\qquad \infty$

Deoarece pentru $x \to \infty$ se obține $y \to \infty$, este necesar să căutăm asimptotele oblice.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (y - mx) = \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a}(\sqrt{x^2 - a^2} - x) =$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x\to\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0$$

Rezultă că hiperbola are două asimptote, ale căror ecuații sînt:

$$y_1 = \frac{b}{a}x; \; y_2 = -\frac{b}{a}x$$

Pe baza tabloului de variații și a asimptotelor se poate construi hiperbola. Forma ei este cea arătată în figura 23.6.

23. 3. PARABOLA

Locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix, numit focar și o dreaptă fixă, numită directoare este o curbă de gradul 2, care se numește parabolă.

23.3.1. Ecuația parabolei raportată la axele alese

Considerăm punctul fix F și depărtarea $\overline{FN} = p$ a acestuia pînă la directoarea D, iar perpendiculara din F pe dreapta D ca axa Ox. Ca axă Oy considerăm perpendiculara pe FN la depărtarea $\frac{p}{2}$ de punctul fix (jumătatea distanței dintre focar și directoare).

Fie M un punct al parabolei și I proiecția lui pe directoarea (D) (fig. 23.7) MF se numește ca și la elipsă și hiperbolă, rază vectoare. Relația geometrică pe care o satisface punctul M, din definiție este:

$$\overline{MF} = \overline{MI}$$

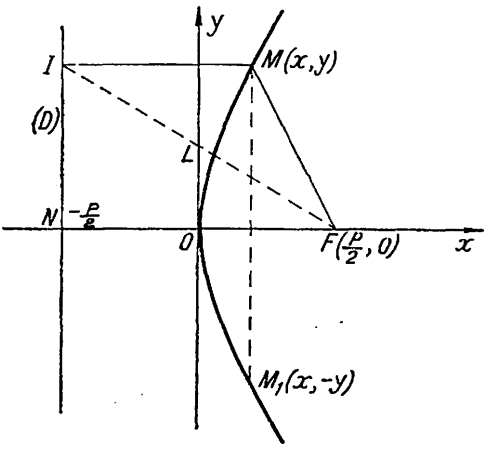


Fig. 23.7

Deoarece coordonatele lui F sînt $\frac{p}{2}$ și O, iar ale lui M, x și y.

$$\overline{MF} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x$$

Ridicînd la pătrat și efectuînd reducerile se obține ecuația rațională a parabolei

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

sau

$$\boxed{y^2 - 2px = 0}$$

Aceasta este ecuația parabolei raportată la axele sale iar p se numește parametrul parabolei.

Deoarece ecuația conține numai pe y la patrat, curba este simetrică față de Ox, nu și față de Oy și origine. Rezultă că parabola are *o singură axă de simetrie* și un *singur vîrf*, originea.

De asemenea, parabola are puncte la infinit reale, deoarece lui x i se pot atribui valori oricît de mari.

Dacă se schimbă sensul pe axe sau rolul lor, se obţin alte ecuaţii care definesc de asemenea parabole. Exemplu:

$$y^2 + 2px = 0;\ x^2 = 2py;\ x^2 + 2py = 0$$

Reprezentaţi grafic aceste parabole.

23.3.2. Ecuaţia parabolei în coordonate polare

Ecuaţia parabolei în coordonate polare are forma cea mai simplă cînd se consideră focarul F drept pol iar perpendiculara $\overline{FN}$ pe directoarea D drept semiaxă polară.

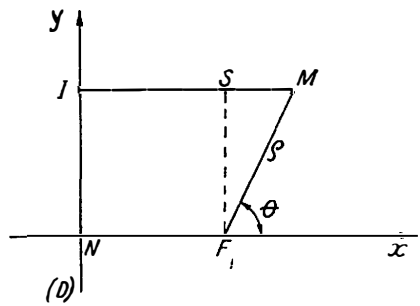


Fig. 23.8

În fig. 23.8 considerăm punctul M ca aparţinînd parabolei:

$$\overline{FM} = \rho;\ \overline{MI} = \overline{MS} + \overline{SI} = \rho \cos \theta + d$$

Definiţia conicei exprimată prin raportul $\frac{FM}{MI} = e$ devine:

$$\frac{\rho}{\rho \cos \theta + d} = e$$

Rezultă: $\rho = \rho e \cos \theta + de$

Deoarece $de = p$, ecuaţia conicei în coordonate polare devine:

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

În cazul particular al parabolei $e = 1$ deci ecuația devine:

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 - \cos\theta}} \quad \text{sau} \quad \boxed{\rho = \frac{p}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

Această formă a ecuației se întrebuințează în mecanică și în astronomie.

23.3.3. Ecuațiile parametrice ale parabolei

Considerăm drept parametru al dreptei care unește un punct M al parabolei cu originea O a sistemului axelor de coordonate, panta $\frac{1}{\lambda}$.

Intersectînd parabola $y^2 = 2px$, cu dreapta $y = \frac{x}{\lambda}$ se obțin coordonatele punctului M $(x = 2p\lambda^2;\ y = 2p\lambda)$.

Egalitățile $\begin{cases} x = 2p\lambda^2 \\ y = 2p\lambda \end{cases}$

constituie ecuațiile parametrice ale parabolei considerate.

23.3.4. Intersecția parabolei cu o dreaptă

Coordonatele punctelor comune dintre parabolă și dreapta $y = mx + n$ sînt date de soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} y^2 - 2px = 0 \\ y = mx + n \end{cases}$$

Substituind valoarea lui y în prima ecuație se obține ecuația de gradul al doilea:

$$m^2x^2 + 2(mn - p)x + n^2 = 0$$

care ne dă abscisele x_1 și x_2. Înlocuind aceste rădăcini în ecuația dreptei se obțin ordonatele y_1 și y_2.

Realitatea punctelor de intersecție depinde de valoarea realizantului:

$$R = (mn - p)^2 - m^2n^2 = p(p - 2mn).$$

Atunci cînd $p > 0$ adică parabola este îndreptată către x pozitiv, pot fi următoarele cazuri:

— Cînd $p > 2mn$, $R > 0$, rădăcinile sînt reale și distincte, dreapta este secantă parabolei.

— Cînd $p = 2mn$, $R = 0$, rădăcinile sînt confundate și dreapta este tangentă parabolei.

— Cînd $p < 2mn$, $R < 0$, rădăcinile sînt complexe, dreapta este exterioară parabolei, nu o intersectează.

— Cînd $m = 0$ dreapta $y = mx + n$ intersectează parabola într-un singur punct la distanță finită. Rezultă că dreptele paralele cu axa parabolei OX sînt singurele care intersectează parabola la distanță finită.

23.3.5. Tangente la parabolă

a. *Tangentele la parabolă duse dintr-un punct exterior*

Considerăm punctul $M_1(x_1, y_1)$ nesituat pe parabola

$$y^2 = 2px$$

Ecuația unei tangente duse din acest punct la parabolă are forma

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Panta acestei tangente fiind m, rezultă că ecuația ei se poate scrie

$$y = mx + \frac{p}{2m}$$

Considerînd că punctul $M_1(x_1, y_1)$ se află pe această tangentă, ecuația care dă panta „m" este

$$2x_1m^2 - 2y_1m + p = 0$$

Rădăcinile m_1 și m_2 dau pantele tangentelor duse din $M_1(x_1, y_1)$ la parabolă, iar ecuațiile lor vor fi:

$$\boxed{y - y_1 = m_1(x - x_1)} \quad \text{și} \quad \boxed{y - y_1 = m_2(x - x_1)}$$

b) *Tangenta la parabolă, paralelă cu o direcție dată*

Considerăm o direcție de pantă m și parabola $y^2 = 2px$.
Ecuația tangentei paralelă cu o dreaptă de pantă m, este

$$y = mx + n$$

Pentru ca această dreaptă să fie tangentă ea trebuie să intersecteze parabola în puncte confundate deci:

$$p^2 - 2mpn = 0$$

de unde

$$n = \frac{p}{2m}$$

Rezultă că ecuația tangentei de pantă m la parabola considerată este

$$\boxed{y = mx + \frac{p}{2m}}$$

Se constată că la parabolă, spre deosebire de elipsă și hiperbolă se poate duce o singură tangentă paralelă cu o direcție dată.

c. *Tangenta într-un punct al parabolei.*

Ecuația parabolei $y^2 = 2px$, prin derivare dă:

$2yy' = 2p$, de unde $y' = \frac{p}{y}$. Într-un punct $M_1(x_1, y_1)$ al parabolei, coeficientul unghiular al tangentei este:

$$m = y' = \frac{p}{y_1}$$

În acest caz ecuația tangentei este:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

sau

$$yy_1 - y_1^2 - px + px_1 = 0$$

Punctul M_1 aparținînd parabolei, rezultă că:

$$y_1^2 = 2px_1$$

Înlocuind în ecuația de mai sus se obține pentru tangenta în punctul M_1 ecuația:

$$\boxed{yy_1 - p(x + x_1) = 0}$$

cu condiția:

$$y_1 - 2px_1 = 0$$

23.3.6. Aplicații

1. Arătați că tangenta la parabolă într-un punct M_1 este bisectoarea unghiului format de raza vectoare și paralela la axă dusă prin M_1.
2. Determinați ecuațiile tangentelor la parabolă, paralele cu bisectoarele axelor.
3. Stabiliți ecuațiile tangentelor la parabolă în punctele care se proiectează în focar.
4. Determinați ecuațiile parabolelor care au:
   - focarul $F(4,0)$ și directoarea $x = -4$
   - focarul $F(-3,0)$ și directoarea $x = +3$
   - focarul $F(0,3)$ și directoarea $y = -3$
   - focarul $F(0,-5)$ și directoarea $y = +5$
5. Determinați focarul și directoarea fiecăreia din parabolele:

$$y = -4x^2$$

$$y = -\frac{x^2}{16}$$

$$y^2 = 4x$$

$$y^2 - 12x = 0$$

$$y^2 + 8x = 0$$

6. Stabiliți axele de simetrie, vîrfurile, focarele și directoarele parabolelor:

$$y^2 + 4x = 10$$

$$y^2 = 16x$$

$$y^2 - 10x + 15 = 0$$

$$x^2 - 4y = 12$$

$$x^2 + y^2 - 2xy + 8x = -8$$

$$y^2 - 6x = 4$$

7. Determinați intersecția parabolei care trece prin punctul $M_1(3,2)$ cu cercul $x^2 + y^2 - 9 = 0$.
8. Cunoscînd parabola $y^2 = 8x$, stabiliți ecuația tangentei paralelă cu direcția determinată de dreapta $y = 2x$.

9. Determinați coordonatele punctului de tangență dintre dreapta $y = mx + \frac{p}{2m}$ și parabola $y^2 = 2px$.
10. Calculați punctele de tangență între dreptele $x + 2y = -6$; $x - 2y = 6$; $4x - 2x = -2$ și parabola $y^2 = 6x$.
11. Fiind cunoscut punctul $M(6,1)$ și parabola $y^2 = 36x$, stabiliți ecuațiile normalei la parabolă.
12. Stabiliți ecuația normalei la parabola $y^2 = 2px$, a cărei pantă să fie $\frac{1}{m}$

23.4. APLICAȚIE LA CURBELE DE ORDINUL AL DOILEA (CONICE)

23.4.1. Mișcarea parabolică a unui proiectil

Pentru determinarea elementelor geometrice ale traiectoriei unui proiectil M de masă m atunci cînd este aruncat din gura de foc cu o viteză inițială v_0 sub un unghi α, trebuie stabilite:

ecuația mișcării proiectilului, înclinarea traiectoriei în diferite puncte, ordonatele acestor puncte, distanța de tragere, săgeata maximă a traiectoriei, depărtarea ei față de gura de foc.

Considerăm că mișcarea proiectilului are loc în vid. În raport cu axele de coordonate (a căror origine se află la gura țevii) scriem ecuațiile de mișcare ale proiectilului antrenat de presiunea gazelor obținute prin arderea încărcăturii de azvîrlire și de forța gravitației (fig. 23.9).

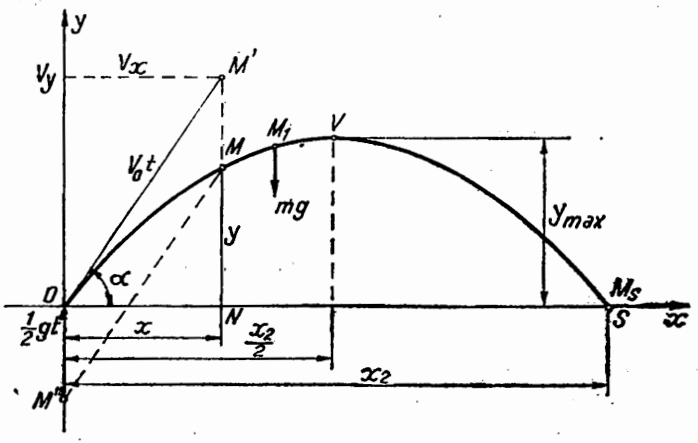


Fig. 23.9

Dacă proiectilul nu ar fi supus forței dezvoltate prin arderea încărcăturii de azvîrlire, datorită accelerației $g = 9{,}80$ m/s² s-ar deplasa în direcția OM'' cu o mișcare rectilinie uniform variată. După timpul t deplasarea proiectilului ar avea valoarea $OM'' = \frac{1}{2} gt^2$.

Dacă proiectilul nu ar avea greutate, datorită forței dezvoltate de gazele rezultate prin arderea încărcăturii de azvîrlire, s-ar deplasa pe direcția în care a fost azvîrlit cu o mișcare rectilinie uniformă.

După timpul t ar străbate spațiul OM'.

Antrenat de cele două mișcări, proiectilul se va deplasa după o curbă rezultantă OS, determinată de pozițiile succesive în timp, ale proiectilului M.

$$M'M = OM'' = \frac{1}{2} gt^2.$$

Poziția proiectilului în punctul M de pe traiectorie este definită de coordonatele

$$x = ON \text{ și } y = MN$$

Din triunghiul ONM' unde $OM' = v_0 t$ rezultă:

$$x = ON = OM' \cos \alpha = v_0 t \cos \alpha$$

$$\boxed{x = v_0 t \cos \alpha} \qquad (23.3)$$

Considerînd relațiile $\overline{MM'} = \overline{OM''} = \frac{1}{2} gt^2$ și $\overline{OM'} = v_0 t$ rezultă din același triunghi ONM'.

$$y = MN = \overline{M'N} - \overline{M'M} = \overline{OM'} \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2 \qquad (23.4)$$

$$\boxed{y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2}$$

Ecuațiile 23.3 și 23.4 sînt ecuațiile parametrice ale traiectoriei. Rezolvînd prin eliminarea lui t între cele două relații se obține:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

deci:

$$y = v_0 \frac{\ddot{x}}{v_0 \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

$$\boxed{y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}}$$

Aceasta este ecuația unei parabole ce trece prin origine, ea are axa de simetrie paralelă cu Oy iar ramurile îndreptate spre sensul negativ al axei ordonatelor.

Calculul distanței de tragere:

Dacă facem $y = 0$ obținem:

$$x_1 = 0, \quad \boxed{x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = D}$$

unde x_2 este abscisa punctului de cădere (bătaia D) în condițiile tragerii în teren orizontal.

Pentru *calculul săgeții* (înălțimea maximă) a traiectoriei se ia $x = \frac{1}{2} x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$. Această valoare o introducem în ecuația traiectoriei în vid și se obține:

$$\boxed{y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}}$$

Rezultă că vîrful parabolei V este definit de coordonatele $V \left(\frac{v_0^2 \sin^2 2\alpha}{2g}, \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \right)$.

Înclinarea traiectoriei proiectilului într-un anume moment se definește calculînd mărimea tangentei în punctul corespunzător deplasării proiectilului pentru timpul considerat.

Valoarea tangentei se află cu ajutorul derivatei de ordinul întîi a ecuației

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

care este:

$$y' = -\frac{g}{v^2 \cos^2 \alpha} x + \operatorname{tg} \alpha$$

unde x este abscisa punctului traiectoriei considerat, $g = 9{,}81$ m/s^2, α este înclinarea țevii în momentul plecării proiectilului din gura de foc și v_0 este viteza inițială determinată de forța gazelor obținute prin arderea pulberii de azvîrlire.

Viteza proiectilului la un moment dat este determinată de viteza orizontală v_x și viteza ascensională v_y în momentul respectiv (fig. 23.10).

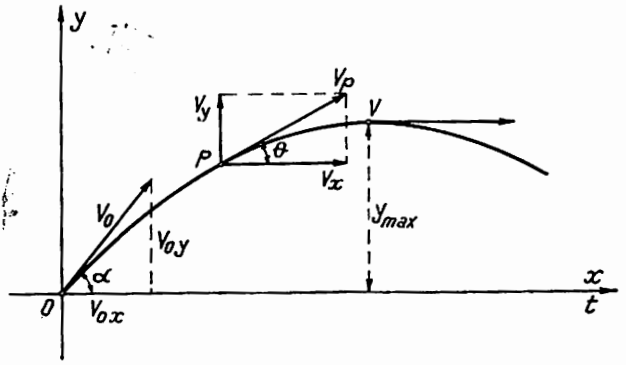


Fig. 23.10

Pentru punctul P, viteza tangențială v_p, se obține prin compunerea vitezelor orizontale și ascensionale așa cum rezultă din fig. 23.10.

$$v_p^2 = v_x^2 + v_y^2 \text{ sau } v_p = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

componentele v_x și v_y se obțin prin derivarea relațiilor

$$x = v_0 t \cos\alpha \text{ și } y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

astfel că:

$$v_x = x' = v_0 \cos \alpha; \; v_y = y' = v_0 \sin \alpha - gt$$

Valoarea acestor componente dau posibilitatea calculării *vitezei*:

$$v_p = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

înclinării traiectoriei în punctul respectiv

$$\boxed{i_p = \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x}}$$

acceleraţiei proiectilului prin derivarea componentelor $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$ şi $v_x = v_0 \cos \alpha$

$$\boxed{v_y' = a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g}$$

şi

$$\boxed{v_x' = v_0 \cos \alpha' = a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0}$$

CAPITOLUL 24

MĂSURA ARIILOR

24.1. GENERALITĂȚI

A defini ariile poligoanelor plane înseamnă a face să corespundă fiecărui poligon plan o mărime (numită suprafața sau aria poligonului), având următoarele proprietăți.

1. Orice poligon ale cărui laturi nu se taie are o arie (suprafață) (fig. 24.1) Se exclude poligonul din fig. 24.2 ale cărui laturi se taie.

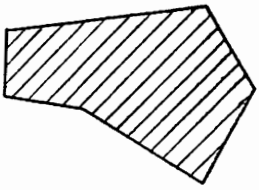


Fig. 24.1

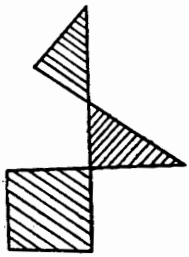
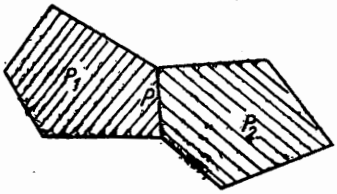


Fig. 24.2

2. Două poligoane egale au aceeași arie, oricare ar fi poziția lor în spațiu.

3. Aria sumei a două poligoane adiacente este egală cu suma ariilor acestor poligoane ($P = P_1 + P_2$) fig. 24.3.

Fig. 24.3



4. Aria patratului a cărui latură este egală cu unitatea, este egală cu unitatea.

Pentru a măsura ariile stabilim un anumit poligon, a cărui arie va fi luată ca unitate de arie. Alegem ca unitate de arie, aria patratului avînd ca latură unitatea de lungime.

Măsura unei arii oarecare este raportul dintre aria respectivă și unitatea de arie.

Poligoanele care au aceeași arie se numesc echivalente.

24.1.1 Aria dreptunghiului

Considerăm două dreptunghiuri $ABCD$ și $A'B'C'D'$ avînd bazele egale ($AB = A'B'$) și înălțimile comensurabile.

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{m}{n} \text{ (fig. 24.4)}$$

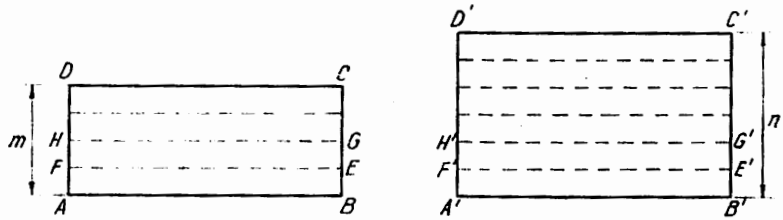


Fig. 24.4

Dacă $BE = B'E'$ măsura comună a segmentelor BC și $B'C'$ atunci $BC = mBE$ și $B'C' = nB'E'$.

Împărțind segmentele BC și $B'C'$ în respectiv m și n părți egale și ducînd paralele la baze, cele două dreptunghiuri ($ABCD$ și $A'B'C'D'$) se împart, respectiv în m și n dreptunghiuri egale. Dreptunghiurile $ABEF$ și $A'B'E'F$ fiind egale și ariile lor sînt egale.

Rezultă:

$$\frac{\text{aria } ABCD}{\text{aria } A'B'C'D'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Ariile a două dreptunghiuri care au aceeași bază sînt în același raport ca și înălțimea lor.

Considerăm dreptunghiul $ABCD$ cu baza $AB = a$ și înălțimea $BC = h$. Se ia pe înălțimea AD segmentul $AF = 1$ se duce paralela EF la baza AB. Conform celor arătate se poate scrie:

$$\frac{\text{aria } ABCD}{\text{aria } ABEF} = \frac{AD}{AF}$$

Se ia pe baza AB segmentul $AG = 1$. Prin G ce duce o paralelă la D și se obține:

$$\frac{\text{aria } ABEF}{\text{aria } AGIF} = \frac{AB}{AG}$$

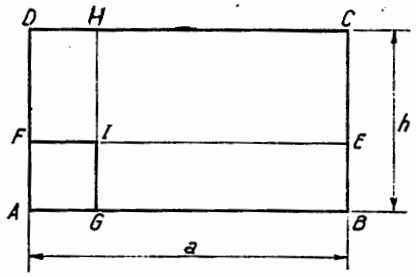


Fig. 24.5

Dacă se înmulțesc cele două egalități, membru cu membru se obține:

$$\frac{\text{aria } ABCD}{\text{aria } ABEF} \cdot \frac{\text{aria } ABEF}{\text{aria } AGIF} = \frac{AD}{AF} \cdot \frac{AB}{AG}$$

le unde rezultă:

$$\frac{\text{aria } ABCD}{\text{aria } AGIF} = \frac{AB \cdot AD}{AF \cdot AG} = \frac{\text{aria } ABCD}{1} = \frac{AB \cdot AD}{1}$$

eci aria $ABCD = AB \cdot AD = a \cdot h$.

Aria dreptunghiului este egală cu produsul bazei cu înălțimea.

Aria patratului este egală cu patratul laturei sale.

Baza și înălțimea dreptunghiului constituie ceea ce numim *dimen-iunile* lui.

Raportul ariilor a două dreptunghiuri este egal cu produsul rapoarte-or dimensiunilor analoage.

24.1.2. Aria paralelogramului

— Considerăm paralelogramul $ABCD$. Pentru a stabili relația care ă aria paralelogramului, arătăm că paralelogramul se poate împărți în iguri, care se pot alătura astfel încît să formeze un dreptunghi cu arie chivalentă cu a paralelogramului.

Se duce perpendiculara din C și D pe latura AB. Se formează triu ghiurile dreptunghice $ADd = BCc$.

Rezultă: $AB = dc$

Dreptunghiul $CDdc$ are baza dc și înălțimea Cc egale respectiv c baza și înălțimea paralelogramului $ABCD$.

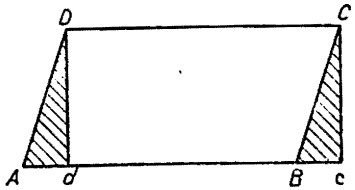


Fig. 24.6

Deci: *Aria unui paralelogram are ca măsură valoarea produsulu dintre bază și înălțime.*

$$\text{aria } ABCD = AB \cdot Dd.$$

24.1.3. Aria triunghiului

Considerăm triunghiul ABC (fig. 24.7). Din punctul C ducem para lela CD la AB iar din B paralela BD la AC. Se formează paralelogramu $ABCD$ care are aceeași înălțime ca triunghiul ABC.

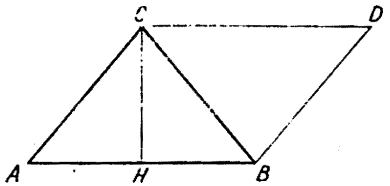


Fig. 24.7

Prin diagonala BC paralelogramul $ABCD$ este împărțit în dou triunghiuri egale. Rezultă că aria triunghiului ABC este egală cu jumă tatea ariei paralelogramului.

Deci: Aria unui triunghi are ca măsură jumătatea produsului dintr bază și înălțime

$$\text{aria } ABC = \frac{1}{2} AB \cdot CH.$$

Aria unui poligon oarecare se află descompunînd poligonul respectiv în triunghiuri ale căror arii le deducem. De exemplu:

24.1.4. Aria trapezului

— Considerăm trapezul $ABCD$ (fig. 24.8). Se descompune acest trapez cu ajutorul diagonalei BD, în două triunghiuri ABD și ACD care au bazele respectiv AB și CD. Cele două înălțimi DD' și BB' sînt egale între ele și egale cu înălțimea h a trapezului.

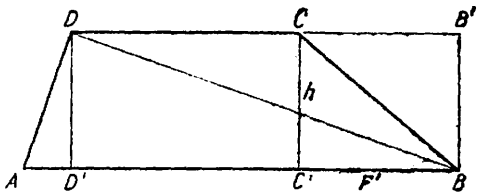


Fig. 24.8

Din fig. 24.8 rezultă:

$$\text{aria } ABCD = h\frac{AB}{2} + h\frac{CD}{2} = \frac{h(AB + CD)}{2}$$

Deci: *Aria unui trapez are ca măsură valoarea produsului dintre înălțime și semisuma bazelor.*

Considerăm trapezul $ABCD$, M și N mijloacele laturilor neparalele AD și BC. Prin M și N se duc perpendicularele EF și GH pe baze, (fig. 24.9).

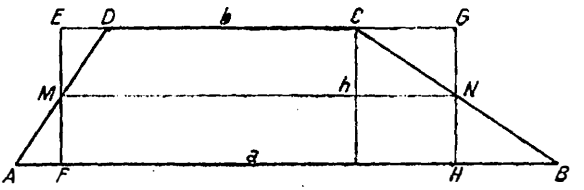


Fig. 24.9

Deoarece prin construcție, $\Delta AMF = \Delta MDE$ și $\Delta CNG = \Delta BNH$, aria dreptunghiului $EFGH$ este echivalentă cu aria dreptunghiului $ABCD$.

Segmentul MN fiind egal cu semisuma bazelor rezultă:

$$MN = \frac{AB + CD}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{aria } ABCD = h \cdot \frac{AB + CD}{2} = h \cdot \frac{a+b}{2} = h\ MN.$$

Deci: *Aria trapezului poate fi definită și ea fiind egală cu produsu dintre înălțime și segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele.*

24.1.5. Aria poligonului regulat

Considerăm poligonul regulat $ABCDEF$ (fig. 24.10) pe care îl descompunem ducînd raze la vîrfurile sale în triunghiurile OAB, OBC, OCD..., egale între ele. Toate triunghiurile au aceeași înălțime și anume apotema poligonului.

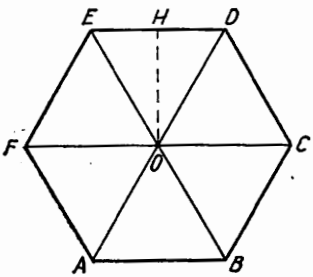


Fig. 24.10

Rezultă deci:

$$\text{aria } DOE = OH \frac{DE}{2}$$

$$\text{aria } EOF = OH \frac{EF}{2}$$

$$\text{aria } FOA = OH \frac{FA}{2}$$

$$\text{aria } COD = OH \frac{CD}{2}$$

făcînd adunarea se obține aria poligonului regulat.

$$\text{aria } ABCDEF = \frac{OH\ (AB + BC + CD \ldots + FA)}{2}$$

Atunci cînd numărul laturilor poligonului este par, aria sa este egală u jumătatea razei, înmulțită cu perimetrul poligonului obținut unind 'îrfurile din două în două.

Arătați că aria unui poligon convex circumscris unui cerc este egală :u produsul dintre perimetrul său și jumătatea razei cercului înscris.

24.1.6. Aria cercului

Limita către care tinde aria unui poligon circumscris sau înscris, ale :ărui laturi tind toate către zero, constituie aria unui cerc.

Considerăm poligoane regulate circumscrise ale căror laturi se dublea- :ă nemărginit, deci perimetrul „P" tinde către o limită „L".

Considerăm, de asemenea, poligoane regulate înscrise, al căror ıumăr de laturi se dublează nemărginit și deci perimetrul „P" tinde :ătre o limită „L".

Ariile poligoanelor circumscrise descresc mereu, deoarece fiecare lintre ele este interior celui anterior, iar ariile poligoanelor înscrise :resc mereu, deoarece fiecare dintre ele îl cuprinde pe cel precedent.

Ariile poligoanelor înscrise precum și cele ale poligoanelor circum- ;crise tind către o limită. Cele două limite sînt egale între ele și au o valoare comună „S" care este aria cercului.

Rezultă că valoarea acestei arii „S" este dată de produsul dintre lungimea cercului și jumătatea razei (aria unui poligon regulat am văzut că are ca măsură produsul dintre perimetru și jumătatea apotemei). Atunci cînd numărul laturilor crește nemărginit perimetrul tinde către lungimea cercului iar apotema devine egală cu raza.

$$S = 2\pi R \cdot \frac{R}{2} = \pi R^2$$

$$S = \pi R^2$$

24.1.7. Exerciții

1. Calculați aria triunghiului ale cărui laturi sînt cunoscute (a,b,c).

R: $S = \frac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}$

2. Stabiliți aria unui patrulater inscriptibil ale cărui laturi sînt:

$$AB = a;\ BC = b;\ CD = c;\ DA = d$$

R: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

3. Calculați aria sectorului de cerc a cărui rază este R iar unghiul la centru este egal cu $n°$, m' și s''.

R: $S = \frac{\pi R^2}{360}\left(n + \frac{m}{60} + \frac{s}{3\,600}\right)$

CAPITOLUL 25

ELEMENTE DE CALCUL VECTORIAL

25.1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Mărimile întîlnite în geometrie, în fizică, în științele artileristice etc. sînt de mai multe feluri. În geometria elementară, în topografie, poziția unui punct pe o dreaptă este dată de un număr real. Un punct în plan este definit printr-o pereche ordonată de numere reale. În spațiul cu trei dimensiuni un punct P poate fi definit prin trei numere reale (x, y, z) care constituie coordonatele sale carteziene. Atunci cînd variabilele independente x, y și z iau toate valorile reale, punctul P descrie întreg spațiul.

În diferite domenii artileristice se întîlnesc mărimi caracterizate printr-o valoare numerică, mărimi care se pot exprima printr-un singur număr (durata arderii pulberii de azvîrlire, greutatea proiectilului, lungimea camerei de încărcare etc.), numite *mărimi scalare.*

Rezultă că o mărime este *scalară*, atunci cînd pentru determinarea ei este suficient un singur număr, independent de vreun sistem de coordonate. Scalarul este o mărime caracteristică fiecărui punct din spațiu căruia îi corespunde o funcție numită componentă, care are aceeași valoare în orice sistem de coordonate. Mulțimea acestor puncte constituie ceea ce se numește cîmp scalar. Astfel, de exemplu aria unei suprafețe, temperatura, presiunea, densitatea, potențialul de viteze, turația arborelui unui motor, lungimea unui segment etc., sînt de asemenea; mărimi perfect determinate printr-un singur număr, în orice sistem de referință. Scalarul cel mai tipic este numărul abstract.

În diferite domenii ale matematicii, fizicii, precum și ale științelor artileristice se întîlnesc mărimi caracterizate nu numai prin valoare numerică ci și prin orientare în spațiu.

Viteza sau accelerația unei rachete, forța care acționează asupra unui proiectil, presiunea exercitată de gazele rezultate prin arderea încărcăturii de explozie, sînt mărimi care, în afară de valoarea nume-

rică, se mai caracterizează și prin orientarea lor în spațiu. Asemenea mărimi constituie ceea ce numim *mărimi vectoriale.*

Rezultă că o astfel de mărime nu poate fi definită printr-un singur număr *real*, ci trebuie să i se atașeze *o direcție* și un sens. Un vector este caracterizat prin *modul* (mărime, intensitate, lungime), reprezentat în lungimea segmentului AB (fig. 25.1.), prin *suportul* (linia de acțiune) cu direcția sa, reprezentată prin dreapta (D) și *sensul* său de parcurs indicat printr-o săgeată la unul din capetele segmentului care-l reprezintă.

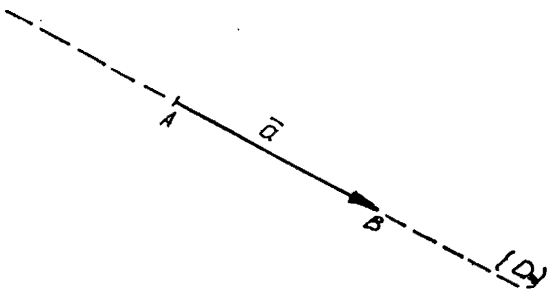


Fig. 25.1

Geometric, un vector se reprezintă printr-un segment de dreaptă orientat. Vectorul $\bar{a}$ sau $\overline{AB}$. Modulul vectorului se notează $|\bar{a}|$, AB sau $|\overline{AB}|$ și se citește modul de $\bar{a}$, de $\overline{AB}$. Vectorul se notează de obicei prin litere aldine a, b modulul său prin litere cursive „a"

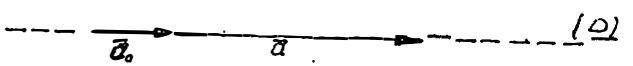


Fig. 25.2

Atunci cînd lungimea vectorului este egală cu 1, vectorul poartă denumirea de *versor* (vector unitar). Versorul se notează $\bar{a}_0$, ($\bar{b}_0$) iar modulul său este $|\bar{a}_0| = 1$, ($|\bar{b}_0| = 1$).

$$a = \bar{a} = a.\ \bar{a}_0$$

În general un vector depinde de poziția unui punct considerat în spațiu și-i corespund cele trei componente (modulul, direcția și sensul) cu ajutorul cărora el este perfect determinat.

Mulțimea acestor puncte, împreună cu valorile componentelor constituie ceea ce numim cîmp vectorial.

Componentele unui vector b pot fi exprimate prin proiecțiile sa b_1, b_2, b_3 pe cele trei axe de coordonate ale unui sistem $Ox_1x_2x_3$.

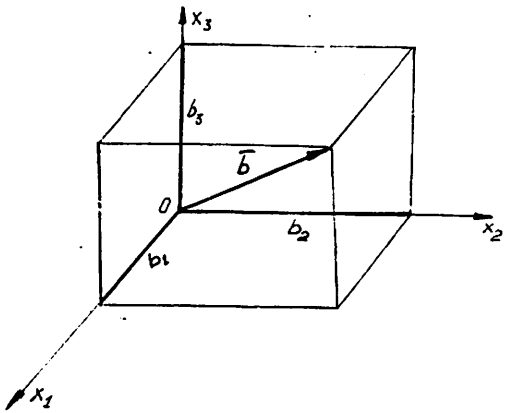


Fig. 25.3

În sistemul $Oxyz$, vectorii unitari după cele trei axe se notează cu $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. (fig. 25.4.).

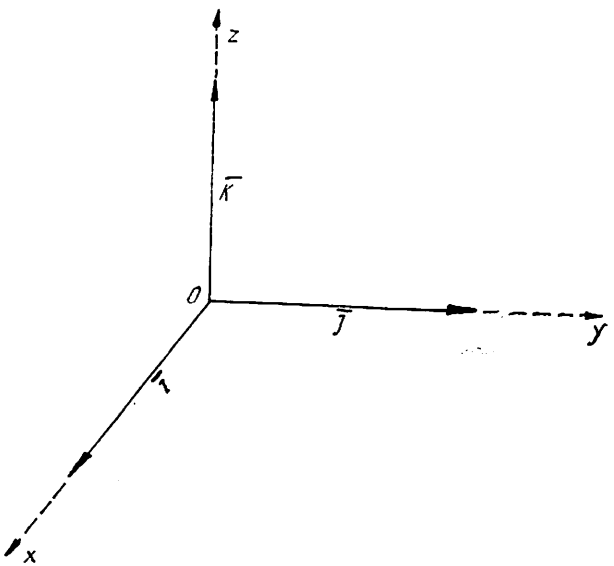


Fig. 25.4

Luînd în considerare cele spuse mai înainte putem scrie:

$$\bar{b} = \bar{i}b_x + \bar{j}b_y + \bar{k}b_z$$

unde b_x, b_y și b_z sînt componentele vectorului $\bar{b}$ în sistemul $O\,x\,y\,z$. Această reprezentare cuprinde în același timp și regula de descompunere a unui vector după cele trei axe de coordonate (regula paralelipipedului construit pe cele trei componente).

Atunci cînd doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ au aceeași mărime, același sens și aceeași direcție, adică au suporturile paralele, se numesc *vectori egali* sau *echipolenți*. Egalitatea lor se exprimă prin același semn ca și a numerelor scalare $\bar{a} = \bar{b}$.

Vectorii egali care au aceeași origine se confundă. Vectorii care au aceeași direcție se numesc *vectori colineari*. Ei sînt vectori paraleli aduși pe același suport. Vectorii care au același modul, aceeași direcție însă au sensuri opuse se numesc *vectori opuși* ($\bar{a}$ opus — $\bar{a}$).

Între doi vectori colineari există o relație de forma:

$$\bar{b} = m\bar{a} \quad \text{unde} \quad m = \pm \frac{b}{a}$$

(cînd b și a au același sens, „m" este pozitiv, iar cînd b și a sînt de sens contrar „m" este negativ). Egalitatea a doi vectori se reduce la egalitatea a 3 perechi de numere, luate două cîte două (mărimea vectorilor, direcția, sensul). Rezultă că o egalitate vectorială este egală cu trei egalități scalare.

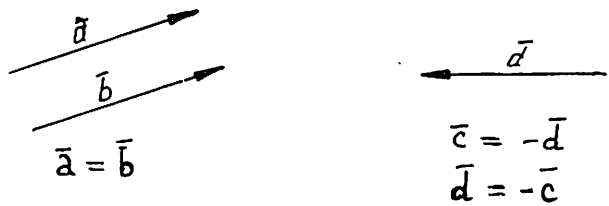


Fig .25.5

Doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ am reținut că sînt egali dacă valorile lor numerice sînt egale, iar vectorii sînt paraleli între ei și au aceeași orientare.

25.2. CATEGORII DE VECTORI

Se deosebesc trei categorii de vectori: *vectori liberi*, *vectori alunecători*, *vectori legați*.

Vectorul al cărui punct de aplicație poate fi luat în mod arbitrar în spațiu se numește *vector liber*. Vectorul liber poate fi deplasat paralel cu el fără a-și schimba semnificația. Exemplu translația unui corp.

Vectorul al cărui punct de aplicație se poate deplasa numai de-a lungul liniei sale de acțiune se numește vector alunecător. În acest caz punctul de aplicație nu este definit pe dreapta suport.

Ca exemplu de vector alunecător se poate considera forța aplicată unui corp solid, deoarece punctul de aplicație al forței poate fi considerat în orice punct al liniei de aplicație a forței. Exemplu: vectorul $\bar{\omega}$ în mișcarea circulară.

Vectorul al cărui punct de aplicație este fix se numește *vector legat*. Ca exemplu se poate considera vectorul care dă valoarea cîmpului electric într-un punct oarecare al spațiului. Vectorii legați nu-și pot schimba punctul de aplicație fără a-și pierde semnificația. Pentru a fi egali vectorii legați trebuie să aibă același suport, sens, modul și punct de aplicație.

25.3. OPERAȚII VECTORIALE

25.3.1. Înmulțirea vectorilor prin scalar

Prin produsul $m\bar{a}$ al vectorului $\bar{a}$ prin scalarul m se înțelege un vector nou a cărui mărime este egală cu mărimea $|\bar{a}|$ înmulțită cu m și a cărui orientare este aceeași cu a vectorului $\bar{a}$ atunci cînd $m > 0$, și opusă lui $\bar{a}$ atunci cînd $m < 0$

$$m < 0 \qquad\qquad m > 0$$

$$|m\,\bar{a}| < |\bar{a}| \qquad\qquad |m\,\bar{a}| > |\bar{a}|$$

Acest produs este comutativ: $m(n\bar{a}) = n(m\bar{a}) = (mn)\,\bar{a}$ și distributiv $(m + n)\,\bar{a} = m\bar{a} + n\bar{a}$

25.3.2. Împărțirea vectorilor prin scalar

Prin cîtul $\frac{\bar{a}}{m}$ obținut din împărțirea vectorului $\bar{a}$ prin scalarul m, se înțelege un vector nou $\frac{1}{m}\,\bar{a}$, adică un vector de „m" ori mai mic decît $\bar{a}$. Acest vector nou este orientat în același sens cu $\bar{a}$ atunci cînd $m > 0$ și în sens contrar atunci cînd $m < 0$.

$$\frac{\bar{a}}{m} = \frac{1}{m} \cdot \bar{a}$$

25.3.3. Adunarea vectorilor

Suma geometrică a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este un nou vector $\bar{c}$.

Acest vector se obține astfel: se aplică vectorul $\bar{a}$ într-un punct M oarecare al spațiului, iar după aceea din extremitatea vectorului $\bar{a}$ se duce vectorul $\bar{b}$. Unind punctul M cu extremitatea P a vectorului $\bar{b}$ se obține noul vector $\bar{c}$.

$$\boxed{\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}}$$

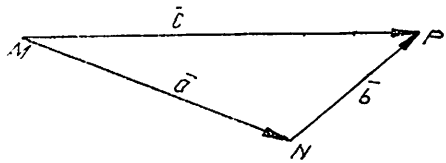


Fig .25.6

Vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ se numesc vectori componenți iar vectorul $\bar{c}$ poartă numele de vector rezultant sau sumă geometrică.

Această metodă de adunare a vectorilor poartă numele de *metoda triunghiului.*

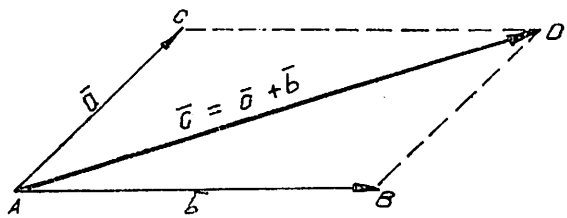


Fig .25.7

Suma geometrică a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este un nou vector $\bar{c}$, egal cu diagonala paralelogramului construit pe două segmente echipolente cu vectorii considerați $\bar{a}$ și $\bar{b}$ prin același punct, având drept origină, originea comună a celor doi vectori. Această metodă de adunare a vectorilor poartă numele de *metoda paralelogramului.*

25.3.4. **Proprietățile sumei geometrice a vectorilor**

1. Adunarea vectorilor este *comutativă* adică, suma geometrică nu se schimbă dacă se permută între ele componentele

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$$

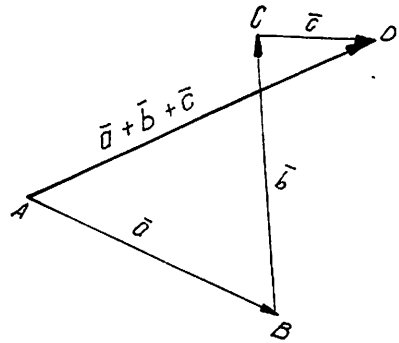


Fig .25.8

2. Adunarea vectorilor este asociativă, adică parantezele pot fi introduse și suprimate ca și în algebra obișnuită

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$$

3. Adunarea vectorilor este *distributivă*

$$(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})\ m = m\bar{a} + m\bar{b} + m\bar{c}$$

25.3.5. **Metoda poligonului de vectori**

Vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$,..., $\bar{n}$ se pun succesiv într-o ordine oarecare făcînd să coincidă originea fiecărui vector cu extremitatea vectorului precedent, după care se unesc extremitățile liniei poligonale astfel formate.

$$\bar{S} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} + \bar{e}$$

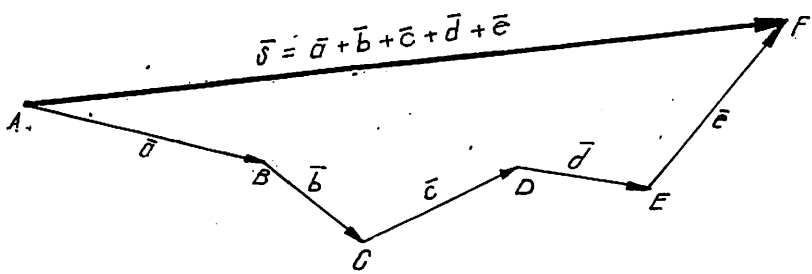


Fig .25.9

Rezultă că vectorul sumă are ca origine originea primului vector iar ca extremitate, extremitatea ultimului vector.

Atunci cînd conturul vectorilor se închide, suma vectorilor reprezintă un vector nul.

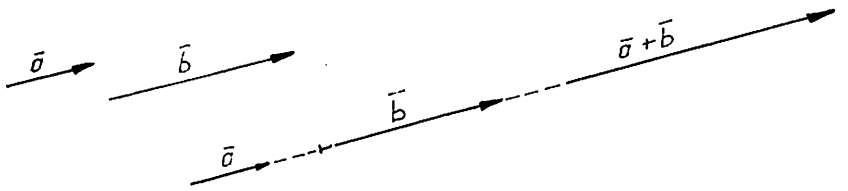


Fig. 25.10

Dacă avem de adunat doi sau mai mulți vectori paraleli și de același sens, ei se aduc printr-o mișcare de translație pe o dreaptă suport. În această situație modulul sumei este evident egal cu suma modulelor vectorilor (fig. 25.10).

Suma a doi vectori egali opuși este egală cu un vector nul.

25.3.6. Scăderea vectorilor

Diferența a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este un vector $\bar{c}$ care se obține din adunarea primului vector $\bar{a}$ cu vectorul $-\bar{b}$ opusul vectorului $\bar{b}$ (fig. 25.11).

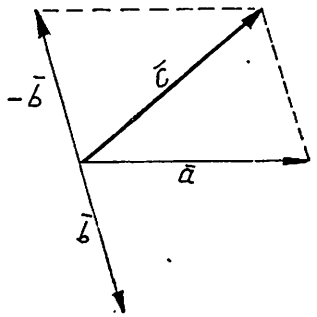


Fig. 25.11

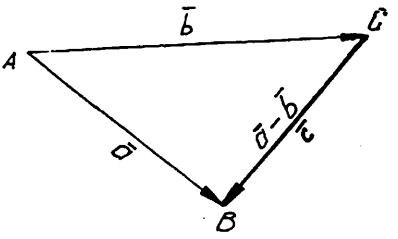


Fig. 25.12

Diferența geometrică a vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este un vector $\bar{c}$ definit prin relația:

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$$

De aici rezultă: $\bar{a} = \bar{b} + \bar{c}$. Din figura 25.12 rezultă că vectorul $\bar{c}$ unește extremitatea vectorului $\bar{a}$ cu extremitatea vectorului $\bar{b}$.

Într-un paralelogram $ABCD$ construit pe vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ cele două diagonale reprezintă: diagonala AC suma vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ iar diagonala DC diferența lor (fig. 25.13).

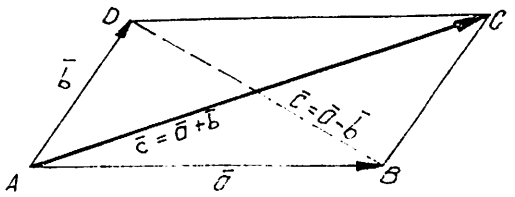


Fig. 25.13

25.3.7. **Suma și diferența a mai mulți vectori**

$$\bar{P} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\bar{S} = \bar{P} + \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$$

$$D = \bar{a} - \bar{b} - \bar{c}$$

Descompunerea vectorilor este o operație inversă adunării și constă în aceea că un vector considerat poate fi înlocuit cu suma mai multor vectori, egală cu el.

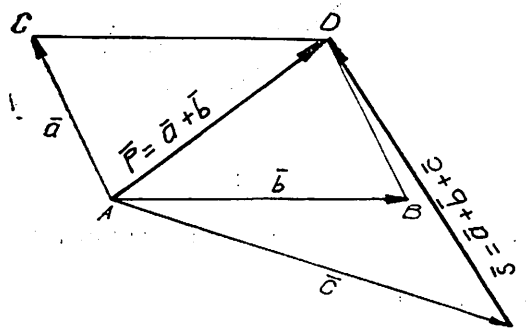


Fig. 25.14

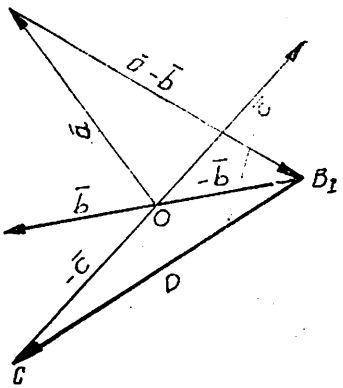


Fig. 25.15

Geometric problema se reduce la construirea unei linii poligonale care să aibă vectorul dat ca latură de închidere (fig. 25.16).

$$\bar{U} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$$

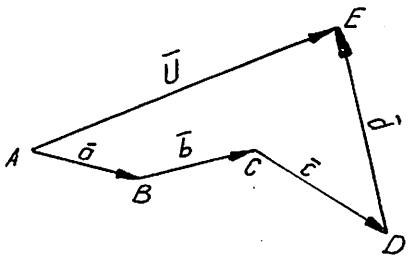


Fig. 25.16

a) *Descompunerea unui vector după două direcții date necoliniare.*

Considerăm vectorii coplanari $\bar{a}$, $\bar{b}$ și $\bar{c}$.

Deplasăm vectorii respectivi în plan și facem ca ei să aibă aceeași origine O (fig. 25.17).

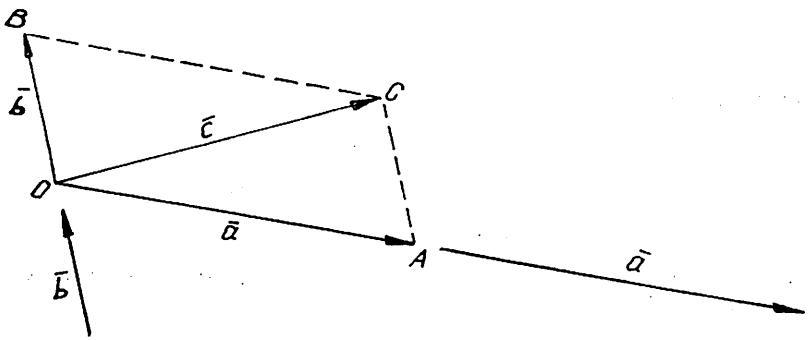


Fig. 25.17

Din figură rezultă: $AC \parallel \bar{b}$ iar $BC \parallel \bar{a}$

$$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{OC} = \bar{c}$$

Vectorii $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$ sînt componentele vectorului $\bar{c}$ după direcțiile celor doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

b) *Descompunerea unui vector $\bar{V}$ după trei direcții necoplanare.*

Considerăm patru puncte necoplanare în spațiu M,N,P,S și unul dintre aceste puncte P drept origine. Se construiesc în spațiu trei vectori independenți:

$$\bar{a} = \overline{PA},\ \bar{b} = \overline{PB_1},\ \bar{c} = \overline{P\bar{c}}$$

Se observă că cei trei vectori liniar independenți, avînd același punct de aplicație P, definesc un triedru.

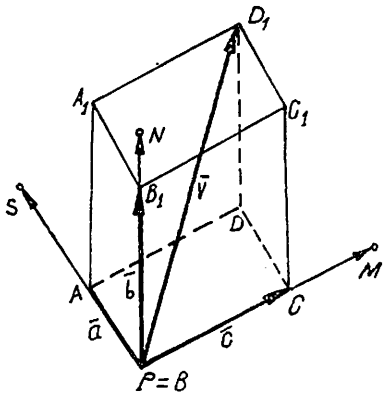


Fig. 26.18

Din figura 25.18 rezultă:

$$PA = C_1D_1,\ PB_1 = CC_1,\ PC = A_1D_1$$

$$\text{iar } PD_1 = PC + CC_1 + C_1D_1$$

$$\text{adică } \bar{V} = \bar{c} + \bar{b} + \bar{a}$$

Vectorul $\bar{V}$ s-a descompus deci după direcțiile celor trei vectori necoplanari $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

25.3.8. **Produsul scalar a doi vectori**

Produsul scalar a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este un scalar definit de expresia:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = ab \cdot \cos \varphi$$

deoarece:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a\ pr_{\bar{a}} \cdot \bar{b} = b\ pr_{\bar{b}} \cdot \bar{a}$$

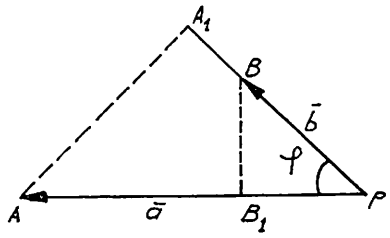
Din figură rezultă:

$$pr_{\bar{a}}\bar{b} = PB_1 = b \cos \varphi$$

$$\text{iar } pr_{\bar{b}}\bar{a} = PA_1 = a \cos \varphi$$

unde unghiul φ este mai mic decît 180° (fig. 25.19).

Fig. 25.19



Produsul scalar este comutativ: $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$

Produsul scalar este distributiv față de adunarea vectorială $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$.

Produsul scalar este permutabil cu înmulțirea vectorilor printr-un scalar

$$m(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (m\bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (m\bar{b})$$

Produsul scalar este nul, atunci cînd unul din factori este nul sau dacă vectorii sînt perpendiculari:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \text{ cînd } \bar{a} = 0, \ (\bar{b} = 0) \text{ sau } \bar{a} \perp \bar{b}$$

Rezultă deci că, condiția necesară și suficientă ca doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ nenuli, să fie perpendiculari este ca produsul lor scalar să fie nul.

Produsul scalar permite evaluarea modulului unui vector. Dacă considerăm vectorii $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c}$, rezultă că: $\bar{c} \cdot \bar{c} = c^2$, ceea ce înseamnă că produsul scalar al unui vector prin el însuși este egal cu pătratul modulului său.

Ținînd seama de proprietățile de distributivitate și comutativitate ale produsului scalar, produsul scalar a două sume se efectuează ca și produsul a două polinoame.

În particular,

$$(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + 2\,\bar{a}\bar{b} = a^2 + b^2 + 2\,ab \cos \varphi$$

$$(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a}^2 - \bar{b}^2 = a^2 - b^2$$

Modulul sumei a doi vectori rezultă din prima relație

$$(\bar{a} + \bar{b})^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab\,\cos\varphi$$

$$|\,\bar{a} + \bar{b}\,| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2\,ab\,\cos\varphi}$$

Împărțirea unui vector cu un scalar se reduce la înmulțirea vectorului cu inversul scalarului. Orice vector $\bar{a}$ se poate pune sub forma: $\lambda\bar{a}_0$, unde $\bar{a}_0$ este un vector de lungime egală cu unitatea iar λ este lungimea vectorului $\bar{a}$ cu semnul plus sau minus după cum $\bar{a}_0$ are același sens cu $\bar{a}$ sau sens contrar lui $\bar{a}$.

25.3.9. Reprezentarea analitică a vectorilor

Fie sistemul de axe rectangulare xOy. Vectorii unitari ai axelor Ox și Oy sînt $\bar{i}$ și respectiv $\bar{j}$. Cu ajutorul vectorilor unitari vom exprima analitic vectorul $\overline{V}$ (fig. 25.20).

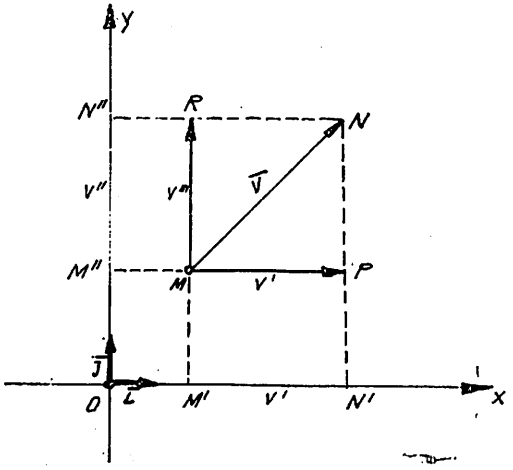


Fig. 25.20

Vectorul $\overline{V}$ poate fi exprimat prin vectorii $\overline{v}'$ și $\overline{v}''$ care nu sînt altceva decît proiecțiile vectorului considerat pe axele sistemului.

Dacă notăm cu $\overline{v}_x$ și $\overline{v}_y$ mărimile algebrice ale celor două proiecții putem scrie:

$$\overline{v}' = v_x\bar{i}\ ;\ v'' = v_y\bar{j}$$

iar $$\boxed{\overline{V} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j}}$$

Considerăm în mod analog un sistem de axe rectangulare *Oxyz* în spațiu iar vectorii unitari ai axelor $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Orice vector în spațiu (fig. 25.21) se poate defini cu relația:

$$\boxed{\bar{V} = v_x\bar{i} + v_y + \bar{j}\, v_z\bar{k}}$$

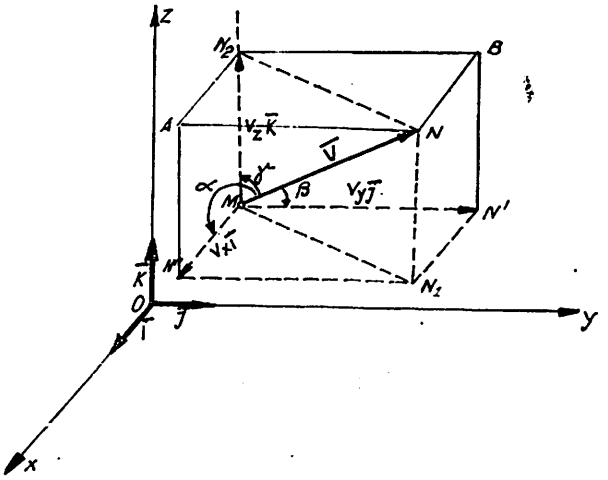


Fig. 25.21

unde v_x, v_y și v_z sînt proiecțiile vectorului V pe cele trei axe.

$$v_x = V \cos \alpha$$

$$v_y = V \cos \beta$$

$$v_z = V \cos \gamma$$

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Dacă considerăm că, în raport cu sistemul de axe rectangulare în spațiu, vectorul $\bar{V}$ este definit prin coordonatele originii $M(x_1, y_1, z_1)$ și extremității $N\ (x_2, y_2, z_2)$ (fig. 25.22).

$$V_x = x_2 - x_1 \ ; \ V_y = y_2 - y_1 \ ; \ V_z = z_2 - z_1$$

iar vectorul $\bar{V} = (x_2 - x_1)\ \bar{i} + (y_2 - y_1)\ \bar{j} + (z_2 - z_1)\ \bar{K}$

Atunci cînd originea vectorului este în centrul sistemului de axe O, iar extremitatea $A\,(x, y, z)$, *vectorul* $\overline{OA} = \bar{r}$, numit *vector de poziție* al punctului A, are expresia

$$\boxed{\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}$$

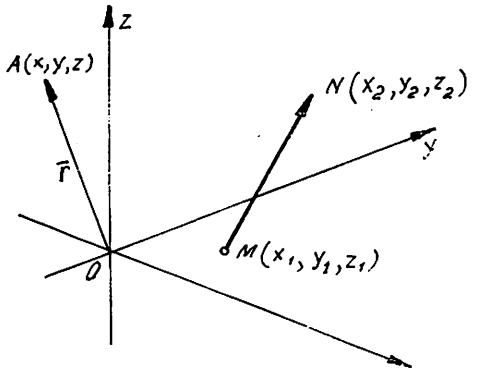


Fig. 25.22

În plan exprimarea analitică a vectorului de poziție este:

$$\boxed{\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}}$$

25.4. APLICAȚII

1. Printr-un punct A a cărui rază vectoare este $(\bar{r})$ să se ducă un plan paralel cu vectorii $\bar{m}$ și $\bar{n}$. Considerînd că raza vectoare a unui alt punct al planului este $\bar{r}_1$, rezultă că vectorul $\bar{r}_1 - \bar{r}$ trebuie să fie perpendicular pe $\bar{m} \times \bar{n}$ ceea ce înseamnă:

$$(\bar{r}_1 - \bar{r}) \cdot (\bar{m} \times \bar{n}) = 0.$$

Ecuația planului va fi:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} =$$

$$= (m_y n_z - m_z n_y)(x_1 - x) + (m_z n_x - m_x n_z)(y_1 - y) +$$

$$+ (m_x n_y) - m_y n_x)(z_1 - z) = 0.$$

2. Se consideră vectorii

$$\bar{m} = \bar{i} + \bar{j} + 2\,\bar{k}\,;\ \bar{n} = 2\,\bar{i} - \bar{j} + \varepsilon\,\bar{k}\,;\ \bar{s} = \bar{i} - 2\,\bar{j} + \bar{k}$$

Se pune problema să se determine ε astfel încît vectorul $\bar{V} = \bar{m} \times \bar{n} \times \bar{s}$ să fie paralel cu planul xoy.

$$\mathbf{R}:\ \varepsilon = -1$$

3. Arătați că extremitatea razei vectoare $\bar{r}(\alpha) = \bar{a}\cos\alpha + \bar{b}\sin\alpha$, unde $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt vectori constanți, liniar independenți, descrie o elipsă pentru care $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt două raze conjugate.

Indicație: Se iau suporții vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ drept axe de coordonate. Vectorul $\bar{r}$ are drept componente $x = \bar{a}\cos\alpha$, $y = \bar{b}\sin\alpha$. Eliminînd pe α se obține o ecuație de gradul II în x și y, care reprezintă o conică, care este o elipsă deoarece $|\bar{r}\,(\alpha)|$ rămîne mărginit.

Pentru a se arăta că vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt două raze conjugate, se arată că orice coardă paralelă cu vectorul $\bar{b}$ este împărțită de vectorul $\bar{a}$ în părți egale.

Dacă considerăm că vectorii de poziție ai extremităților coardei respective sînt $\bar{r}_1 = \bar{a}\cos\alpha_1 + \bar{b}\sin\alpha_1$ și $\bar{r}_2 = \bar{a}\cos\alpha_2 + \bar{b}\sin\alpha_2$ și dacă facem $\bar{r}_1 - \bar{r}_2 = \lambda\,\bar{b}$ $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$ iar dacă $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\sin\alpha_1 = -\sin\alpha_2$ deci $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = \mu\bar{a}$

4. Deduce-ți relația lui Pitagora generalizată

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A$ și expresia lungimii medianei

$m_a^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2\,bc\cos A)$, folosind produsul scalar.

Indicație: Se consideră A, B și C vîrfurile triunghiului și A_1, B_1 și C_1 mijloacele laturilor. Se dezvoltă expresiile $\overline{BC}^2 = (\overline{BA} + \overline{AC})^2$; $\overline{AA}_1^2 = \frac{1}{4}(\overline{AB} + \overline{AC})^2$.

BIBLIOGRAFIE

1. Coşniţă C., Turtoiu F. — *Probleme de algebră*, Editura tehnică, Bucureşti, 1972.

2. Perju C. şi alţii — *Culegere de probleme de matematică*, Editura didactică şi pedagogică, 1970.

3. Pic Gh. — *Algebra superioară*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1966.

4. Roşculeţ M. — *Analiza matematică*, volumul I şi II, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1967.

5. Sabac I., — *Matematici speciale*, volumul I şi II, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965.

6. Stamate I. — *Culegere de probleme de matematici superioare*, Editura didactică.

7. Stoka M. şi alţii — *Culegere de probleme de trigonometrie*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1970.

8. Rădulescu O. — *Riglă de calcul artileristică românească* (riglă R.C.A.), instrucţiuni-brevet, 1971.

9. x x x — *Manuale de algebră pentru secţia reală de liceu clasele X, XI şi XII*.

10. x x x — *Manual de trigonometrie pentru secţia reală de liceu, clasa IX*.

11. Stamate I. şi alţii — *Culegere de probleme analiză*, Editura tehnică, Bucureşti, 1969.

12. Coşniţă C. şi alţii — *Culegere de probleme de analiză*, Editura didactică, Bucureşti, 1962.

13. Manolescu N. şi alţii — *Culegere de probleme de analiză matematică*, Ed. Didactică, Bucureşti, 1967.

14. Demidovici B. — *Recueil d'exercices et de probleme d'analyse mathematique*, Editura MIR, Moscou, 1971.

15. Roşculeţ M. ş.a. — *Probleme de analiză matematică*, Editura didactică, Bucureşti, 1971.

16. Stamate I. — *Culegere de probleme de matematici superioare*, Editura Didactică, Bucureşti, 1971.

17. Niculescu M. ş.a. — *Analiză matematică*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, vol. I şi II., 1971.

18. Roşculeţ M. — *Analiza matematică*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, vol. I şi II, 1967.

19. x x x — *Manual de analiză matematică pentru cl. XII reală.*

20. Teodorescu I. — *Culegere de probleme de geometrie analitică şi algebră liniară*, Editura Didactică, 1971.

21. Mihăileanu, ş.a. — *Culegere de probleme de geometrie sintetică şi proiectivă*, Editura Didactică, 1971.

22. x x x — *Manual de geometrie analitică pentru cl. XI reală.*

23. G. Dumitrescu — *Geometrie în spaţiu.*

24. C. Ionescu-Buja — *Exerciţii şi probleme de geometrie analitică şi diferenţială.*

25. Alvamescu — *Secţiuni de geometrie analitică.*

26. Gheorghiu G. Th. — *Curs de matematici superioare.*

27. Gheorghiu G. Th. — *Geometrie diferenţială.*

28. Modenov P.S. — *Geometrie analitică.*

29. Ţiţeica G. — *Culegere de probleme de geometrie analitică.*

30. Vrînceanu — *Geometrie analitică şi proiectivă.*

31. Teodorescu I.D. — *Geometrie analitică şi elemente de algebră liniară.*

32. Teodorescu N. — *Metode vectoriale în fizica matematică.*

33. Papelin Aubert — *Exercices de Géométric Analitique.*

34. Romulus Cristescu — *Matematici superioare.*

35. N.E. Kocin — *Calculul vectorial şi introducere în calcul tensorial.*

36. M. Ghermănescu — *Probleme şi propoziţii de calcul vectorial.*

37. I.Gh. Sabac — *Matematici speciale.*

38. Eduard Sava — *Tratat de geometrie descriptivă şi stereotomie*

39. Gordan şi M. Sementor Oghievschi — *Curs de geometrie descriptivă.*

40. Mihăileanu N.B. — *Conice*, cuadrice.

41. T. Angheluță — *Curs de algebră superioară.*

42. V. Cristescu — *Culegere de probleme de trigonometrie.*

43. N. Culianu — *Secțiuni de trigonometrie sferică.*

44. F.G.M. — *Exerciții de trigonometrie.*

45. M. Ghermănescu — *Curs de trigonometrie plană și sferică.*

46. T. Dalescu și St. N. Mirea — *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și astronomie.*

47. V. Alaci — *Trigonometrie patratică.*

48. Raul Filimon — *Geodezie.*

49. I.F. Ladon — *Bazele calculului vectorial.*

50. André Rerut — *Matematică modernă. Matematică vie.*

CUPRINS

PARTEA ÎNTÎI

IDENTITĂȚI

	Pag.
Capitolul 1. **Noțiuni fundamentale**	9
1.1. Analiza calitativă	9
1.1.1. Mulțimi	10
1.1.2. Operații cu mulțimi	10
1.1.3. Aplicații	12
1.2. Analiza cantitativă	14
1.2.1. Numerația	14
1.2.2. Reprezentarea grafică	15
1.3. Funcții	17
1.3.1. Definiția funcției	17
1.3.2. Clasificarea funcțiilor	18
1.3.3. Graficul funcției	20
1.3.4. Produsul cartezian	20
1.3.5. Aplicații	20
Capitolul 2. **Mulțimi de numere reale**	22
2.1. Numere naturale *(N)*	22
2.2. Numere întregi negative	24
2.3. Numere întregi *(Z)*	26
2.4. Numere fracționare *(F)*	28
2.5. Numere raționale *(Q)*	30
2.6. Numere iraționale *(P)* și imaginare *(I)*	30
2.7. Numere reale *(R)*	31
2.8. Aplicații	34
Capitolul 3. **Expresii algebrice**	44
3.1. Expresii algebrice raționale	44
3.1.1. Bazele calculului literal	44
3.1.2. Operații cu polinoame	48

Pag.

3.1.3. Fracţii algebrice 60
3.1.4. Calcule algebrice expeditive 64
3.2. Expresii algebrice iraţionale 65
3.2.1. Monomul 65
3.2.2. Polinomul 68
3.2.3. Fracţiile 68
3.2.4. Aplicaţii 69

Capitolul 4. **Expresii trigonometrice** 70

4.1. Funcţii trigonometrice 70
4.1.1. Măsura unghiurilor (arcurilor) 70
4.1.2. Relaţii fundamentale 73
4.1.3. Variaţia funcţiilor trigonometrice . . 74
4.1.4. Reducerea funcţiilor la primul cadran 79
4.1.5. Valorile arcului (unghiului) 82
4.1.6. Valori remarcabile ale funcţiilor trigonometrice 86
4.1.7. Cercul topogeodezic 87
4.2. Identităţi trigonometrice 88
4.2.1. Proiecţii 88
4.2.2. Funcţiile sumelor de arcuri 90
4.2.3. Funcţiile multiplilor şi submultiplilor de arcuri 93
4.2.4. Transformarea sumelor în produse . 96
4.2.5. Aplicaţii 97

Capitolul 5. **Expresii logaritmice** 99

5.1. Definiţie. Proprietăţi 99
5.1.1. Definiţia logaritmului 99
5.1.2. Logaritmul produsului şi cîtului . . . 99
5.1.3. Logaritmul puterii şi rădăcinii . . . 100
5.1.4. Schimbarea bazei 101
5.1.5. Aplicaţii 101
5.2. Calculul numeric cu logaritmi 102
5.2.1. Logaritmi naturali şi zecimali . . . 102
5.2.2. Tabela logaritmilor numerelor pozitive 103
5.2.3. Tabela logaritmilor funcţiilor trigonometrice 107
5.2.4. Operaţii logaritmice 110
5.3. Utilizarea logaritmilor 112
5.3.1. Calculul expresiilor 112
5.3.2. Rigla de calcul 113
5.4. Funcţia exponenţială şi logaritmică . . . 115
5.4.1. Funcţia exponenţială 115
5.4.2. Funcţia logaritmică 119
5.5. Aplicaţii 119

Pag.

Capitolul 6. **Expresii complexe** 122

6.1. Mulțimea numerelor imaginare 122
6.1.1. Definiție. Proprietăți 122
6.1.2. Adunarea și scăderea numerelor imaginare 124
6.1.3. Înmulțirea numerelor imaginare . . 124
6.1.4. Împărțirea numerelor imaginare . . 124
6.2. Mulțimea numerelor complexe 125
6.2.1. Definiție 125

Capitolul 7. **Expresii ordonate** 127

7.1. Analiza combinatorie 127
7.1.1. Cercetarea prin inducții 127
7.1.2. Permutări 132
7.1.3. Combinări și aranjamente 135
7.1.4. Binomul lui Newton 140
7.1.5. Suma puterilor numerelor naturale . 142
7.1.6. Analiza combinatorie cu repetiție . 144
7.1.7. Aplicații 146
7.2. Progresii 149
7.2.1. Progresii aritmetice 149
7.2.2. Progresii geometrice 153
7.3. Șiruri de numere reale 156
7.3.1. Definiția șirului 156
7.3.2. Șiruri mărginite și nemărginite . . 159
7.3.3. Șiruri monotone 160
7.3.4. Șiruri convergente și divergente . . 161
7.3.5. Numărul e 165

PARTEA A DOUA

ECUAȚII ȘI INECUAȚII

Capitolul 8. **Ecuații și inecuații algebrice** 171

8.1. Ecuații de grad inferior cu o necunoscută . 173
8.1.1. Ecuații de gradul I cu o necunoscută 173
8.1.2. Ecuații de gradul II cu o necunoscută 177
8.1.3. Ecuații de gradul III cu o necunoscută 188
8.2. Domeniul soluțiilor 192
8.2.1. Limitele domeniului rădăcinilor . . . 193
8.2.2. Separarea rădăcinilor 196
8.2.3. Utilizarea MEC la rezolvarea ecuațiilor 200
8.3. Inecuații raționale cu o necunoscută . . 204
8.3.1. Inecuații polinomiale 204
8.3.2. Inecuații fracționare cu o necunoscută 205
8.4. Ecuații iraționale cu o necunoscută . . . 208
8.4.1. Domeniul de existență al soluțiilor . 208
8.4.2. Metode de calcul 208
8.5. Aplicații 210

Pag.

Capitolul 9. **Ecuaţii şi inecuaţii trigonometrice** 216

9.1. Ecuaţii trigonometrice fundamentale . . . 216
9.2. Ecuaţii raţionale 218
9.2.1. Metoda factorizării 218
9.2.2. Metoda reducerii gradului 219
9.2.3. Metoda arcului auxiliar 220
9.2.4. Metoda algebrică 221
9.3. Inecuaţii raţionale 222
9.4. Aplicaţii 224

Capitolul 10. **Ecuaţii exponenţiale şi logaritmice** 226

10.1. Ecuaţii logaritmice fundamentale 226
10.1.1. Forma aritmetică 226
10.1.2. Forma logaritmică 226
10.1.3. Forma algebrică 227
10.2. Metode de rezolvare 227
10.2.1. Exprimarea în aceeaşi bază . . . 227
10.2.2. Restrîngerea logaritmilor 229
10.3. Aplicaţii 230

Capitolul 11. **Sisteme de ecuaţii** 232

11.1. Noţiuni introductive 232
11.1.1. Definiţia sistemului de ecuaţii . . 232
11.1.2. Clasificarea sistemelor 233
11.2. Sisteme de ecuaţii liniare 233
11.2.1. Modelul general. Simbolizarea matriceală 233
11.2.2. Sistemul cu două ecuaţii şi două necunoscute 236
11.2.3. Sistemul cu trei ecuaţii şi trei necunoscute 239
11.2.4. Sistemul liniar cu n ecuaţii şi n necunoscute 242
11.2.5. Determinanţi 247
11.2.6. Matrice 251
11.2.7. Sisteme de m ecuaţii şi n necunoscute 256
11.2.8. Sisteme clasice 258
11.2.9. Aplicaţii 269
11.3. Sisteme de ecuaţii neliniare 262
11.3.1. Sisteme tip Viète 262
11.3.2. Sisteme omogene 263
11.3.3. Aplicaţii 264

PARTEA A TREIA

ANALIZA MATEMATICĂ

Capitolul 12. **Funcţii reale de o variabilă reală** 269

12.1. Funcţii, grafice 269
12.1.1. Definiţia funcţiei 269

Pag.

12.12. Funcția reală de o variabilă reală . 269
12.1.3 Graficul funcției într-un punct . . 274
12.2 Limite de funcții 275
12.21. Definiția limitei 275
12.2.2 Limite laterale. Infiniți mici 280
12.2.3 Limite la infinit 282
12.2.4 Aplicații 286
12.3 Operații cu funcțiile reale și limitele lor 288
123.1. Suma și diferența funcțiilor 288
12.3.2 Produsul funcțiilor 288
12.3.3 Cîtul funcțiilor 289
12.3.4 Puterea funcțiilor 290
12.3.5 Aplicații 290
12.4 Expresii nedeterminate 291
124.1 Fracții nedeterminate 292
12.4.2 Produse nedeterminate 294
12.4.3 Diferențe nedeterminate 294
12.4.4 Puteri nedeterminate 297
12.5 Continuitatea funcțiilor 300
12.5.1 Funcția generală 300
12.5.2 Continuitatea funcției într-un punct 301
12.5.3 Continuitatea laterală 303
12.5.4 Discontinuitatea funcției 304
12.5.5 Continuitatea funcției pe un interval
Margini 306
12.5.6 Monotonia functiei 307

Capitolul 13. **Derivate și diferențiale** 308

13.1 Definiții 308
13.1.1 Introducere 308
131.2 Definirea derivatei într-un punct . 309
13.1.3 Funcția inversă 312
13.2. Derivatele funcțiilor fundamentale . . . 313
13.2.1 Funcții algebrice 313
13.2.2 Funcții trigonometrice 314
13.2.3 Funcții logaritmice și exponențiale . 315
133. Funcții derivabile 316
13.3.1 Derivabilitatea funcției 316
133.2 Operații cu funcții derivabile . . . 318
13.3.3 Operații cu diferențiale 322
13.3.4 Aplicații 323
13.4. Derivate și diferențiale de ordin superior 324
13.5. Proprietăți ale funcțiilor derivabile . . 327
13.5.1 Extremele functiei. Teorema lui Fermat 327
13.5.2 Teorema lui Rolle. Șirul lui Rolle . 333
13.5.3 Teorema lui Lagrange. Formula creșterilor finite 340
13.5.4 Teorema lui Cauchy. Formula a doua a creșterilor finite 343
13.5.5 Regulile lui L'Hospital 344
13.5.6 Convexitatea și concavitatea curbei . 346
13.5.7 Condițiile de extrem 349

Pag.

Capitolul 14. **Reprezentarea grafică a funcţiilor** . . 351
14.1. Etapele de calcul 351
14.2. Domeniul de definiţie 351
14.2.1. Funcţii algebrice 352
14.2.2. Funcţii trigonometrice 354
14.2.3. Funcţii logaritmice 355
14.2.4. Funcţii exponenţiale 355
14.2.5. Aplicaţii 356
14.3. Punctele de intersecţie cu axele 358
14.4. Punctele extreme (maxime şi minime) . . 359
14.5. Punctele de inflexiune 360
14.6. Asimptotele funcţiei 361
14.6.1. Asimptote verticale 361
14.6.2. Asimptote orizontale 361
14.6.3. Asimptote oblice 362
14.7. Graficul funcţiei 364
14.8. Aplicaţii 369

Capitolul 15. **Funcţii asociate. Ecuaţii** 382
15.1. Rezolvarea ecuaţiilor 382
15.1.1. Ecuaţii algebrice de ordin superior . . 382
15.1.2. Discuţia ecuaţiilor parametrice . . 386

PARTEA A PATRA

GEOMETRIA

Capitolul 16. **Noţiuni fundamentale** 391
16.1. Introducerea 391
16.2. Figuri geometrice 393

Capitolul 17. **Geometria punctului** 395
17.1. Definirea punctului în spaţiul unidimensional 395
17.2. Definirea punctului în spaţiul bidimensional (plan) prin sistemul cartezian de coordonate 397
17.3. Definirea punctului în spaţiul tridimensional prin sistemul cartezian de coordonate 399
17.4. Definirea punctului prin alte sisteme de coordonate 401
17.5. Proiecţia punctului 403
17.6. Aplicaţii 406

Capitolul 18. **Geometria dreptei şi a unghiurilor** 408
18.1. Dreapta, unghiul 408
18.1.1. Figuri geometrice cu o singură dimensiune 408
18.1.2. Figuri geometrice cu două dimensiuni 408

Pag.

18.1.3. Măsura unghiurilor 411
18.1.4. Unghiul a două semidrepte în spaţiu 412
18.1.5. Unghiuri diedre 414
18.1.6. Unghiuri triedre 415
18.1.7. Drepte paralele 418
18.1.8. Unghiuri cu laturile paralele sau perpendiculare 420
18.1.9. Determinarea lungimii unui segment (distanţa dintre două puncte) şi a înclinării lui faţă de axa Ox 421
18.2. Direcţia unei drepte 423
18.2.1. Parametrii directori. Cosinusuri directoare. Panta 423
18.2.2. Direcţie orientată 426
18.2.3. Unghiul unei direcţii orientate cu axa Ox 426
18.2.4. Unghiul a două direcţii 426
18.2.5. Exerciţii 427
18.3. Ecuaţiile dreptei 428
18.3.1. Ecuaţia dreptei paralelă la axa Ox 428
18.3.2. Ecuaţia dreptei paralelă la axa Oy 429
18.3.3. Ecuaţia unei drepte ce trece prin origine 430
18.3.4. Ecuaţia unei drepte oarecare . . . 431
18.3.5. Ecuaţia dreptei care trece prin 2 puncte 432
18.3.6. Ecuaţia dreptei prin tăieturi . . . 433
18.3.7. Ecuaţia normală a unei drepte . . 434
18.3.8. Ecuaţia generală a dreptei 435
18.3.9. Ecuaţia polară a dreptei 438
18.3.10. Poziţiile relative ale dreptelor în plan 439
18.4. Aplicaţii 422
18.4.1. Îndreptarea piesei de bază pe direcţia de bază 442
18.4.2. Transportul orientării prin drumuire de unghiuri 446
18.4.3. Determinarea coordonatelor reperelor de tragere şi a obiectivelor folosind observarea conjugată 450

Capitolul 19. Geometria planului 456

19.1. Generalităţi 456
19.1.1. Determinarea unui plan 456
19.1.2. Poziţiile unui punct în raport cu un plan 456
19.1.3. Poziţiile unei drepte faţă de un plan 457
19.1.4. Poziţiile a două drepte în spaţiu . . 457
19.1.5. Poziţia a două plane 458
19.1.6. Drepte paralele cu un plan 458
19.1.7. Plane paralele 459

Pag.

19.1.8. Drepte perpendiculare pe un plan . 461
19.1.9. Perpendiculare şi oblice dintr-un punct la un plan 463
19.1.10. Teorema celor trei perpendiculare . 464
19.1.11. Plane perpendiculare 465
19.2. Ecuaţiile planului 466
19.2.1. Ecuaţia unui plan care trece prin origine 467
19.2.2. Ecuaţia planelor paralele cu axele de coordonate 467
19.2.3. Ecuaţia planelor paralele cu planele de coordonate 468
19.2.4. Ecuaţia generală a planelor 468
19.2.5. Ecuaţia planului care trece printr-un punct dat şi este perpendicular pe o direcţie dată 469
19.2.6. Condiţia necesară şi suficientă ca două ecuaţii de gradul I în x, y, z să reprezinte acelaşi plan 469
19.2.7. Ecuaţia planului care trece prin trei puncte 470
19.2.8. Ecuaţia planului prin tăieturi . . . 471
19.2.9. Ecuaţia normală a planului 472
19.2.10. Trecerea ecuaţiei planului de la forma generală la forma normală 473
19.2.11. Poziţiile relative a două şi trei plane 474
19.3. Probleme de unghiuri şi distanţe 475
19.3.1. Unghiul a două plane 475
19.3.2. Unghiul unei drepte cu un plan . . 476
19.3.3. Distanţa de la un punct la o dreaptă 476
19.3.4. Distanţa de la un punct la un plan 478
19.3.5. Exerciţii 479
19.4. Aplicaţii 482
19.4.1. Calculul analitic al coordonatelor unui punct P prin procedeul intersecţiei directe 482
19.4.2. Calculul analitic al coordonatelor unui punct P prin procedeul intersecţiei inverse 485

Capitolul 20. **Geometria triunghiului** 489

20.1. Definiţie şi elemente 489
20.1.1. Elementele triunghiului 490
20.1.2. Cerc circumscris triunghiului . . . 492
20.1.3. Egalitatea triunghiurilor 494
20.1.4. Triunghiuri isoscele şi echilaterale . 496
20.1.5. Triunghiul dreptunghic 497
20.1.6. Unghiul exterior triunghiului . . . 500
20.1.7. Suma unghiurilor unui triunghi . . 501
20.1.8. Segmente proporţionale 501
20.1.9. Asemănarea triunghiurilor 502
20.1.10. Drepte concurente în triunghi . . 505

Pag.

20.2. Relații metrice în triunghiuri 508
20.2.1. Relații metrice în triunghiul dreptunghic 508
20.2.2. Teorema lui Pitagora 509
20.2.3. Relații metrice într-un triunghi oarecare 509
20.3. Relații trigonometrice în triunghiuri . . 518
20.3.1. Relații trigonometrice în triunghiul dreptunghic 518
20.3.2. Rezolvarea triunghiului dreptunghic 521
20.3.3. Probleme 523
20.3.4. Relații trigonometrice în triunghiul oarecare 533
20.3.5. Rezolvarea triunghiurilor oarecare 534
20.3.6. Justificarea determinării dispozitivului de luptă al bateriei pe timp de noapte prin intersecție inversă pe o urmă luminoasă executată într-un punct de sprijin *(A)* cu măsurarea unei baze ajutătoare 542
20.3.7. Justificarea intersecției inverse pe trei puncte cu aparatul neorientat prin introducerea unui unghi auxiliar 544
20.3.8. Justificarea intersecției inverse pe două puncte, în cazul cînd în teren se măsoară numai unghiurile 550
20.3.9. Probleme privind influența pantei terenului asupra împrăștierii tragerii . . . 556

Capitolul 21. Geometria poligoanelor cu mai mult de trei laturi 558
22.1. Patrulatere 558
21.1.1. Paralelogramul 558
21.1.2. Dreptunghiul 559
21.1.3. Rombul 560
21.1.4. Patratul 561
21.1.5. Trapezul 561
21.1.6. Poligoane regulate 563

Capitolul 22. Geometria cercului 566
22.1. Generalități 566
22.1.1. Poziția relativă a dreptei față de cerc 567
22.1.2. Poziția relativă a două sau mai multe cercuri 569
22.1.3. Unghiuri la centru. Unghiuri înscrise 571
22.1.4. Segmente proporționale în cerc . . 574
22.2. Reprezentarea analitică a cercului 576
22.2.1. Ecuațiile cercului 576
22.2.2. Interpretarea geometrică a coeficienților ecuației normale a cercului 587
22.2.3. Intersecția cercului cu o dreaptă . . 587
22.2.4. Aplicații 589

Pag.

Capitolul 23. **Ecuaţiile canonice ale conicelor** . 604
23.1. Elipsa 604
23.1.1. Intersecţia elipsei cu axele de coordonate 605
23.1.2. Reprezentarea elipsei — forma ei . 606
23.1.3. Ecuaţiile parametrice ale elipsei . . 608
23.1.4. Ecuaţia elipsei în coordonate polare . 609
23.1.5. Intersecţia elipsei cu o dreaptă . . 610
23.1.6. Tangente la elipsă 611
23.2. Hiperbola 613
23.2.1. Definiţie 613
23.2.2. Forma hiperbolei 614
23.3. Parabola 615
23.3.1. Ecuaţia parabolei raportată la axele alese 615
23.3.2. Ecuaţia parabolei în coordonate polare 617
23.3.3. Ecuaţiile parametrice ale parabolei . 618
23.3.4. Intersecţia parabolei cu o dreaptă . 618
23.3.5. Tangente la parabolă 619
23.3.6. Aplicaţii 621
23.4. Aplicaţie la curbele de ordinul al doilea (conice) 622
23.4.1. Mişcarea parabolică a unui proiectil 622

Capitolul 24 **Măsurilor** 627

24.1. Generalităţi 627
24.1.1. Aria dreptunghiului 628
24.1.2. Aria paralelogramului 629
24.1.3. Aria triunghiului 630
24.1.4. Aria trapezului 631
24.1.5. Aria poligonului regulat 632
24.1.6. Aria cercului 633
24.1.7. Exerciţii 633

Capitolul 25. **Elemente de calcul vectorial** . . . 634

25.1. Noţiuni introductive 634
25.2. Categorii de vectori 637
25.3. Operaţii vectoriale 638
25.3.1. Înmulţirea vectorilor prin scalar . . . 638
25.3.2. Împărţirea vectorilor prin scalar . 638
25.3.3. Adunarea vectorilor 639
25.3.4. Proprietăţile sumei geometrice a vectorilor 640
25.3.5. Metoda poligonului de vectori . . . 640
25.3.6. Scăderea vectorilor 641
25.3.7. Suma şi diferenţa a mai mulţi vectori 642
25.3.8. Produsul scalar a doi vectori . . . 644
25.3.9. Reprezentarea analitică a vectorilor . 646
25.4. Aplicaţii 648

Bibliografie 650