MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

Ion Achiri Andrei Braicov Olga Șpuntenco

Matematică

Manual pentru clasa a VII-a

7

EDITURA PRUT

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

Ion Achiri Andrei Braicov Olga Șpuntenco

Matematică

Manual pentru clasa a VII-a

EDITURA PRUT

Manualul şcolar a fost elaborat în conformitate cu prevederile Curriculumului la disciplină, aprobat prin Ordinul ministrului educației şi cercetării nr. 906 din 17 iulie 2019. Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului educației şi cercetării nr. 446 din 12 mai 2023 ca urmare a evaluării calității metodico-ştiințifice.

(Denumirea instituției de învățământ)

EVIDENȚA UTILIZĂRII MANUALULUI:

Anul de folosire	Numele şi prenumele elevului	Anul de studii	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

• Dirigintele verifică dacă numele şi prenumele elevului sunt scrise corect.
• Elevii nu vor face niciun fel de însemnări în manual.
• Aspectul manualului (la primire şi la returnare) se va aprecia cu unul dintre următoarele calificative: *nou*, *bun*, *satisfăcător*, *nesatisfăcător*.

Autori: Ion Achiri, doctor, conferențiar universitar, UPS „Ion Creangă” din Chişinău
Andrei Braicov, doctor, conferențiar universitar, UPS „Ion Creangă” din Chişinău
Olga Şpuntenco, profesoară, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Gaudeamus”, Chişinău

Redactor: Vitalie Puțuntică
Corector: Fulga Poiată
Copertă: Irina Cuzin, Sergiu Stanciu
Machetare computerizată: Valentina Stratu

Editura Prut Internațional, str. Alba Iulia, nr. 23, bl. 1 A, Chişinău, MD-2051
Tel.: (+373 22) 75 18 74; (+373 22) 74 93 18
www.edituraprut.md; e-mail: office@prut.ro

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

Achiri, Ion

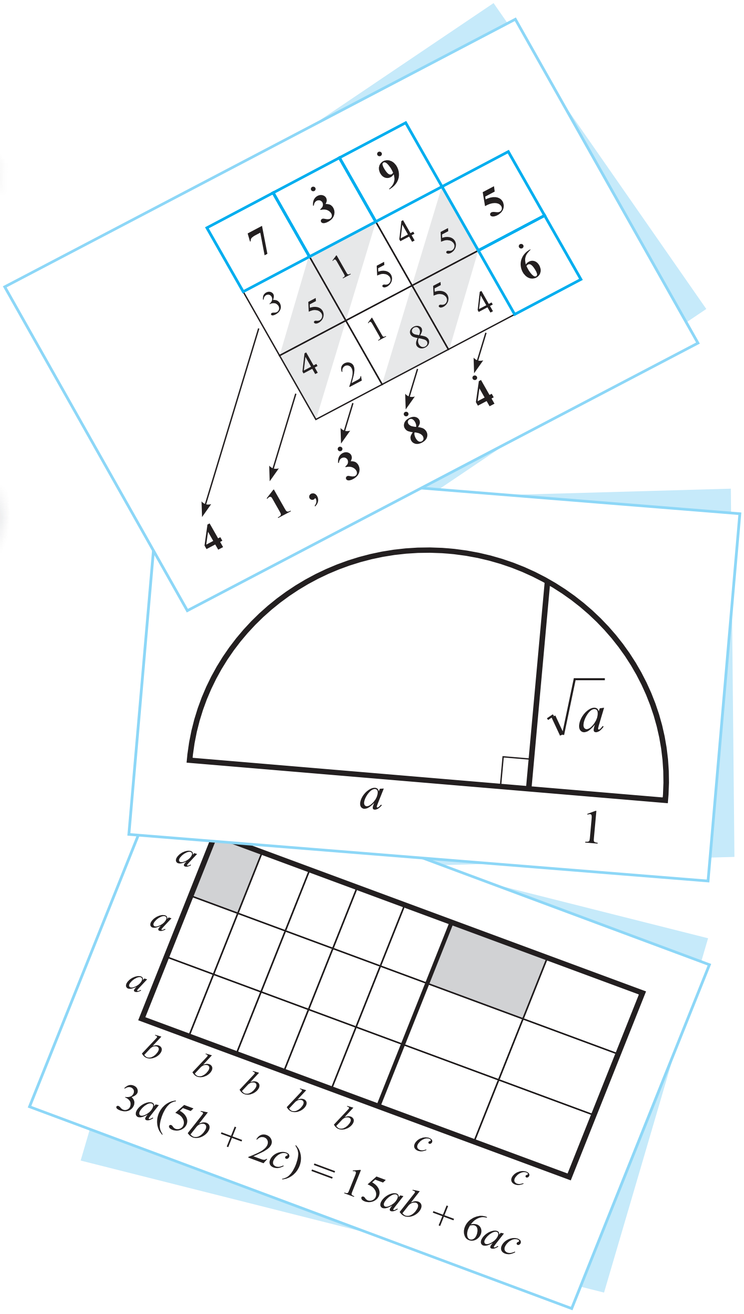
Matematică: Manual pentru clasa a 7-a / Ion Achiri, Andrei Braicov, Olga Şpuntenco; Ministerul Educației şi Cercetării al Republicii Moldova. – [Chişinău]: Prut Internațional, 2023 (F.E.-P. Tipografia Centrală). – 184 p.

ISBN 978-9975-54-734-5

51(075.3)
A 16

Imprimat la F.E.-P. Tipografia Centrală. Comanda nr. 9602

ALGEBRĂ



capitolul 1
Numere reale

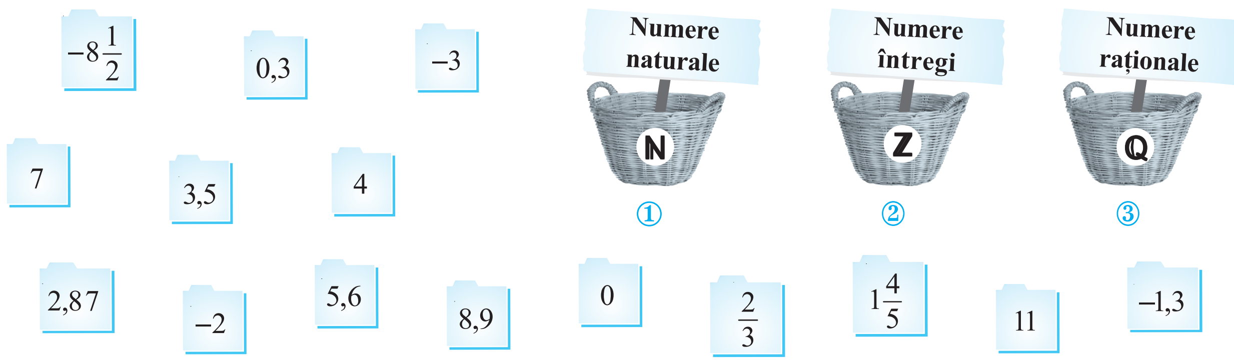
Orice poate fi demonstrat, chiar şi adevărul.
Grigore Moisil

§1. Mulțimea numerelor raționale

1.1. Numere raționale. Forme de reprezentare

Ne amintim

1 a) Selectați numerele care se potrivesc primului coş, apoi, din cele rămase, selectați numerele potrivite pentru al doilea coş. Corespund numerele rămase coşului al treilea?



b) Vom obține acelaşi rezultat dacă vom selecta mai întâi numerele care se potrivesc coşului ③? De ce?

Rețineți

- Un număr rațional poate fi scris sub forma $\frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{Z}$, iar $n \in \mathbb{N}^*$.
- $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2 Scrieți numărul sub forma $\frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{Z}$, iar $n \in \mathbb{N}^*$:

a) 5; b) $4\frac{1}{3}$; c) –12,3; d) $-6\frac{2}{5}$.

Rezolvare:

a) $5 = \frac{5}{1}$;

b) $4\frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{13}{3}$;

c) $-12{,}3 = -12\frac{3}{10} = -\frac{12 \cdot 10 + 3}{10} = -\frac{123}{10}$;

d) $-6\frac{2}{5} = -\frac{6 \cdot 5 + 2}{5} = -\frac{32}{5}$.

3 Scrieți trei fracții echivalente cu fracția $\frac{2}{5}$.

Rezolvare:

1) $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, deoarece $4\cdot5=10\cdot2$;

2) $\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$, deoarece $12\cdot5=30\cdot2$;

3) $\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$, deoarece $50\cdot2=20\cdot5$.

Ne amintim

Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ sunt echivalente, dacă $a\cdot d=b\cdot c$. Se notează $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Exerciții și probleme

1. Selectați numerele:
a) întregi;
b) naturale;
c) raționale;
d) raționale negative.

9,3; $\frac{19}{5}$; 0,4; 173; 12,9; –8,(1); –7,1(2); $-3\frac{9}{14}$; 0; –17; 5,01; 18; $7\frac{5}{11}$; $\frac{1}{99}$; –371; –46

2. Precizați trei numere care:
a) aparțin mulțimii $\mathbb{Z}$ și nu aparțin mulțimii $\mathbb{N}$;
b) aparțin mulțimilor $\mathbb{N}$ și $\mathbb{Z}$;
c) aparțin mulțimii $\mathbb{Q}$ și nu aparțin mulțimii $\mathbb{Z}$;
d) aparțin mulțimilor $\mathbb{Z}$ și $\mathbb{Q}$.

3. ***Lucrați în perechi!*** Găsiți perechile de fracții echivalente (egale):

a) $\frac{21}{14}$, $\frac{4}{18}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{8}{36}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{4}{8}$;

b) $\frac{18}{27}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{20}{32}$, $\frac{60}{80}$, $\frac{16}{28}$, $\frac{64}{112}$.

4. Scoateți întregii din fracție:

a) $\frac{7}{2}$; b) $-\frac{11}{3}$; c) $\frac{121}{10}$; d) $-\frac{61}{12}$.

5. Introduceți întregii în fracție:

a) $10\frac{1}{5}$; b) $-5\frac{3}{4}$; c) $8\frac{5}{7}$; d) –25.

6. ***Lucrați în perechi!*** Desenați un pătrat cu latura de 4 cm.

a) Colorați $\frac{1}{4}$ din pătrat.

b) Colorați $\frac{2}{4}$ din pătrat.

c) Colorați $\frac{1}{2}$ din pătrat. Ce observați?

d) Colorați $\frac{3}{4}$ din pătrat.

e) Colorați $\frac{4}{4}$ din pătrat. Ce observați?

7. ***Investigați!*** *Adevărat* sau *fals*?

a) $\frac{4}{7}=\frac{16}{49}$; b) $\frac{64}{40}=\frac{8}{5}$;

c) $\frac{1}{2}=\frac{10}{20}$; d) $\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$.

8. Scrieți ca fracție supraunitară numărul zecimal:

a) 3,5; b) –6,25; c) 15,48; d) 7,002.

9. ***Lucrați în perechi!*** Substituiți fracția cu o fracție echivalentă, care să aibă numitorul 36:

a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{7}{4}$; c) $\frac{9}{12}$; d) $\frac{10}{18}$; e) $\frac{18}{72}$.

10. Scrieți numărul rațional echivalent cu numărul:

a) $4\frac{2}{5}$; b) $-7\frac{1}{8}$; c) $10\frac{2}{3}$; d) $-21\frac{1}{2}$.

11. Veronica a citit o carte în trei zile. În prima zi ea a citit $\frac{2}{9}$ din carte, în ziua a doua – $\frac{1}{3}$ din carte, iar în ziua a treia – partea rămasă. Ce parte din carte a citit Veronica în ziua a treia?

12. Viteza sunetului este de $\frac{1}{3}$ km/s. La ce distanță de furtună se află Nicu, dacă el a auzit sunetul peste 12 secunde după ce a văzul fulgerul?

13. La un maraton au participat 64 de sportivi. $\frac{7}{8}$ dintre ei au sosit la finiş. Câți sportivi au abandonat competiția?

14. Un biciclist trebuie să parcurgă 30 km. Ce distanță a parcurs biciclistul, dacă ea reprezintă $\frac{4}{5}$ din drum?

15. Paula a plătit la cantina şcolară 5,5 lei pentru o chiflă. Câți bani avea ea, dacă se ştie că a plătit pentru chiflă $\frac{1}{4}$ din suma totală?

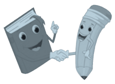
16. ***Lucrați în grup!*** Scrieți inversul numărului rațional egal cu:

a) suma numerelor 0,5 şi 1,4;

b) diferența numerelor $9\frac{3}{4}$ şi $4\frac{1}{2}$;

c) produsul numerelor 2,45 şi $4\frac{2}{5}$;

d) câtul numerelor $\frac{5}{13}$ şi $\frac{5}{26}$.



17. ***Lucrați în perechi!***
Copiați şi completați tabelul:

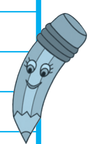
Viteza		90,5 km/h	68 km/h
Timpul	$\frac{2}{5}$ h	$3\frac{2}{3}$ h	
Distanța	$8\frac{3}{4}$ km		120,25 km

18. Scrieți trei numere raționale cuprinse între:

a) $-1\frac{3}{4}$ şi $-1\frac{1}{2}$; b) $4\frac{1}{4}$ şi $4\frac{1}{3}$.

19. Reproduceți şi completați tabelul (rotunjind până la sutimi). Scrieți denumirile substanțelor în ordinea crescătoare a densității lor.

Denumirea substanței	Densitatea (kg/m^3) – greutatea (în kilograme) unui cub de substanță cu muchia de 1 m	Densitatea (g/cm^3) – greutatea (în grame) unui cub de substanță cu muchia de 1 cm
Aluminiu	2 700	
Argint	10 500	
Aur	19 320	
Chihlimbar	1 100	
Cupru	8 900	
Cositor	7 300	
Platină	21 460	
Plumb	11 300	
Zahăr	1600	
Zinc	7100	



1.2. Numere zecimale. Numere zecimale periodice

1.2.1. Numere zecimale

Ne amintim

$$15\frac{27}{1000}=\underbrace{15}_{\text{partea întreagă}},\underbrace{027}_{\text{partea zecimală}}$$ ⟵ număr zecimal

Scriem: 1 5 , 0 2 7 — zeci, unități, zecimi, sutimi, miimi

Citim:
cincisprezece întregi și douăzeci și șapte miimi
sau
cincisprezece virgulă zero douăzeci și șapte.

• $8\frac{3}{4}=?$

Metoda 1

$\frac{3}{4}=3:4=0{,}75;\quad 8\frac{3}{4}=8+\frac{3}{4}=8+0{,}75=8{,}75.$

Metoda 2

$8\frac{3}{4}=\frac{8\cdot 4+3}{4}=\frac{35}{4}=35:4=8{,}75.$

1 Observați modelul și scrieți sub formă zecimală numerele raționale:

$2\frac{5}{10},\quad -4\frac{3}{5},\quad 3\frac{2}{4},\quad 1\frac{5}{8},\quad -\frac{5}{8},\quad 3\frac{8}{25},\quad \frac{9}{40}.$

• Citiți numerele zecimale obținute.

Aplicăm

2 Scrieți numele râurilor în ordinea crescătoare a lungimilor lor.

- Determinați țările prin care curge fiecare dintre râuri.
- Care este cel mai lung fluviu de pe glob? Ce lungime are el?
- Care sunt 5 cele mai lungi fluvii din lume?

Denumirea râului	Lungimea râului (mii de kilometri)
Nipru	2,201
Bâc	0,155
Nistru	1,362
Dunăre	2,857
Prut	0,953
Tisa	0,966
Răut	0,286
Missisipi	3,78

1.2.2. Numere zecimale periodice

Cercetăm și descoperim

1) Efectuați: a) $2{,}8:2{,}1$; b) $2{,}7:1{,}1$; c) $36{,}1:2{,}25$; d) $0{,}9:2{,}2$.

2) Discutați rezultatele obținute.

3) Analizați și completați:

Numere zecimale periodice

- $1{,}333...=1{,}(3)$ (perioada; se scrie) — se citește → unu întreg și trei în perioadă;
- $2{,}454545...=2{,}(45)$ (perioada; se scrie) — se citește → doi întregi și patruzeci și cinci în perioadă;
- $0{,}4090909...=0{,}4(09)$ (perioada; se scrie) — se citește → zero întregi, patru zecimi și zero nouă în perioadă;
- $3{,}15212121...=3{,}15(\square\square)$ (perioada; se scrie) — se citește → $\square$

4) Scrieți rezultatele obținute la sarcina 1 sub formă de numere zecimale periodice.

Rețineți

Numerele 2,(8); 35,(21); 0,(115) sunt **numere zecimale periodice simple**.
Numerele 0,7(23); 6,25(3); 21,56(7) sunt **numere zecimale periodice mixte**.
Perioada numărului zecimal periodic este numărul din parantezele lui.

Aplicăm

- $2 : 3 = 0{,}666... = 0{,}(\underbrace{\square}_{\text{perioada}})$;
- $15 : 11 = \square = \square{,}(\underbrace{\square\,\square}_{\text{perioada}})$;
- $14 : 12 = \square = 1{,}\square(\underbrace{\square}_{\text{perioada}})$;
- $63 : 22 = \square = \square{,}\square(\underbrace{\square\,\square}_{\text{perioada}})$.

Rețineți

Numerele zecimale periodice sunt numere zecimale infinite.

1.2.3. Transformarea numerelor periodice simple în fracții

1 Transformați fracția în număr zecimal periodic:

- $\dfrac{2}{\underbrace{9}_{\text{o cifră}}} = 0{,}2222\ldots = 0{,}(\underbrace{2}_{\text{o cifră}})$;
- $\dfrac{11}{\underbrace{99}_{\text{2 cifre}}} = 0{,}111111\ldots = 0{,}(\underbrace{11}_{\text{2 cifre}})$;
- $\dfrac{5}{\underbrace{999}_{\text{3 cifre}}} = 0{,}005005\ldots = 0{,}(\underbrace{005}_{\text{3 cifre}})$.

2 Transformați numărul zecimal periodic simplu în fracție:

- $0{,}(\underbrace{7}_{\text{o cifră}}) = 0{,}7777\ldots = \dfrac{7}{\underbrace{9}_{\text{o cifră}}}$;
- $0{,}(\underbrace{15}_{\text{2 cifre}}) = 0{,}151515\ldots = {}^{(3}\dfrac{15}{\underbrace{99}_{\text{2 cifre}}} = \dfrac{5}{33}$;
- $1{,}(\underbrace{235}_{\text{3 cifre}}) = 1{,}235235235\ldots = 1\dfrac{235}{\underbrace{999}_{\text{3 cifre}}} = \dfrac{1234}{999}$.

Generalizăm

① Dacă numărul zecimal periodic simplu are 0 întregi, atunci el se transformă într-o fracție al cărei numărător este perioada numărului zecimal periodic simplu şi al cărei numitor este un număr natural format din atâtea cifre de 9, câte cifre are perioada numărului periodic simplu.

$$0{,}(17) = \frac{17}{99}.$$

② Dacă numărul zecimal periodic simplu are întregul diferit de 0, atunci el se transformă într-o fracție care se obține prin adunarea părții întregi cu fracția obținută în urma transformării părții zecimale a numărului zecimal periodic simplu dat.

$$2{,}(05) = 2 + 0{,}(05) = 2 + \frac{5}{99} = 2\frac{5}{99} = \frac{203}{99}.$$

③ Fracția obținută se simplifică, de regulă, până la o fracție ireductibilă.

1.2.4. Transformarea numerelor zecimale mixte în fracții

Cercetăm și descoperim

Metoda I

- $0,\underbrace{1}_{\text{o cifră}}(\underbrace{16}_{\text{2 cifre}})=\dfrac{1,(16)}{10}=\dfrac{1\frac{16}{99}}{10}=\dfrac{\frac{115}{99}}{10}=\dfrac{115}{\underbrace{99}_{\text{2 cifre}}\underbrace{0}_{\text{o cifră}}}=\dfrac{116-1}{990};$

- $0,\underbrace{21}_{\text{2 cifre}}(\underbrace{03}_{\text{2 cifre}})=\dfrac{21,(03)}{100}=\dfrac{21\frac{3}{99}}{100}=\dfrac{2082}{\underbrace{99}_{\text{2 cifre}}\underbrace{00}_{\text{2 cifre}}}=\dfrac{2103-21}{9900};$

- $10,5(2)=10+0,5(2)=10+\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}=10\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}=\boxed{}.$

Metoda II

- $0,\boxed{2}(35)=\dfrac{235-\boxed{2}}{990}=\dfrac{233}{990};$

- $0,\boxed{16}(2)=\dfrac{162-\boxed{16}}{900}=\dfrac{146}{900};$

- $5,3(01)=5+0,3(01)=5+\dfrac{\boxed{}-\boxed{}}{\boxed{}}=\boxed{}.$

Generalizăm

① Dacă un număr zecimal periodic mixt are 0 întregi, atunci el se transformă într-o fracție al cărei numărător este diferența dintre numărul natural exprimat de partea neperiodică, urmată de perioadă, și numărul natural exprimat de partea neperiodică și al cărei numitor este un număr natural format din atâtea cifre de 9, câte cifre are perioada, urmate de atâtea zerouri câte cifre are partea neperiodică.

$$0,2(31)=\frac{231-2}{990}.$$

② Dacă un număr zecimal periodic mixt are întregul diferit de 0, atunci el se transformă într-o fracție care se obține prin adunarea întregului cu fracția obținută în urma transformării părții zecimale a numărului zecimal mixt dat.

$$2,3(11)=2+0,3(11)=2+\frac{311-3}{990}=2+\frac{308}{990}=\frac{2288}{990}.$$

- Observați modelul și scrieți sub formă de fracție numerele raționale:

  $6,8;\quad -7,(12);\quad 3,5(24);$

  $11,11;\quad 8,(76);\quad -0,2(134).$

$-2,9=-2\dfrac{9}{10}$

număr cu perioadă simplă: $4,(53)=4\dfrac{53}{99}$

număr cu perioadă mixtă: $\underbrace{7,8(15)}_{1+2=3}=7\dfrac{815-8}{\underbrace{990}_{2+1=3}}=7\dfrac{807}{990}$

Rețineți

- Orice număr rațional poate fi scris univoc sub formă de fracție ireductibilă.
- Orice număr rațional poate fi scris sub formă zecimală.

Exerciții și probleme

1. Completați: $\frac{2}{5}=0,\square$; $\quad 1\frac{1}{4}=1,\square$; $\quad \frac{3}{8}=0,\square$; $\quad 2\frac{1}{8}=2,\square$.

2. Ordonați crescător numerele zecimale: a) 6,025; 5,99; 6,1; b) 0,08; 25,02; 5.

3. *Lucrați în perechi!* Scrieți două numere întregi consecutive între care este situat pe axă numărul:
a) 4,81; b) –3,2; c) 34,01; d) 0,02; e) –0,1; f) –16,25.

4. a) Determinați care este cea mai mare țară înconjurată în întregime de ape.
b) Aflați ce suprafață ocupă ea (în km^2).
c) Câte procente din uscat ocupă suprafața ei?

5. a) Scrieți numele munților în ordinea descrescătoare a înălțimilor.

Munții	Înălțimea (km)	Țara
Cho Oyu	8,201	Nepal
Manaslu	8,163	Nepal
Nanga Parbat	8,126	Pakistan
Annapurma	8,091	Nepal
Everest	8,848	Nepal

b) Care este cel mai înalt munte de pe glob? Ce înălțime are el (în metri)?

6. Găsiți perechile de numere egale:
a) $\frac{5}{6}$; $1\frac{1}{5}$; $-\frac{12}{5}$; $0,8(3)$; $-2\frac{1}{5}$; $\frac{6}{5}$; $-2,4$; $-2,(2)$; $-\frac{20}{9}$; $-2,2$.
b) $\frac{3}{4}$; $-\frac{21}{24}$; $-0,75$; $1,(3)$; $0,75$; $\frac{7}{8}$; $\frac{4}{3}$; $0,875$; $-\frac{7}{8}$; $-\frac{6}{8}$.

7. Selectați numerele: a) cu perioadă simplă; b) cu perioadă mixtă.
0,0(21); –2431,49494949; 4,(1234); –0,722222; 16,6363121212...; –3,(5); –9,878787...

8. *Lucrați în grup!* Scrieți sub formă zecimală numerele:
a) $\frac{2}{5}, \frac{16}{3}, -2\frac{3}{8}, 1\frac{3}{7}, \frac{3}{16}, -\frac{4}{9}, \frac{25}{90}, -\frac{101}{90}$;
b) $\frac{1}{8}, \frac{14}{9}, -3\frac{5}{6}, 2\frac{5}{7}, \frac{7}{18}, -\frac{7}{9}, \frac{34}{900}, \frac{21}{990}$.

9. Efectuați calculele și scrieți rezultatul sub formă de număr zecimal periodic:
a) 24,16 : 11; b) 12,4 : 37; c) 0,9 : 2,2;
d) 0,5 : 1,3; e) 64,45 : 15; f) 0,267 : 0,18;
g) 1,24 : 2,7; h) 0,632 : 1,8.

10. Scrieți sub formă de fracție numărul zecimal periodic simplu:
a) 0,(15); b) 0,(231); c) 2,(9); d) 12,(12).

11. Scrieți sub formă de fracție numărul zecimal periodic mixt:
a) 2,3(4); b) 16,1(8);
c) 30,0(18); d) 12,12(12).

12. Scrieți 4 fracții egale cu numărul:
a) 0,6; b) 0,(3); c) 2,4;
d) 1,8; e) 1,(5); f) 0,(4).

13. *Lucrați în perechi!* Scrieți sub formă de fracție numerele:
a) 0,16; –3,14; 0,(8); –5,(7); 0,3(5); 8,21(6); –4,97(35);
b) –0,72; 5,36; –0,(42); –3,(18); 0,5(3); 12,3(45); –7,6(543).

14. Completați cu cifre sau paranteze, astfel încât să obțineți numere zecimale:
a) cu perioadă simplă, b) cu perioadă mixtă.

3,□□4□; 0,□8□□□; –41,7□□□...; 39,□27□□...; –6,3□1□□□...; 0,□9□4□□... .

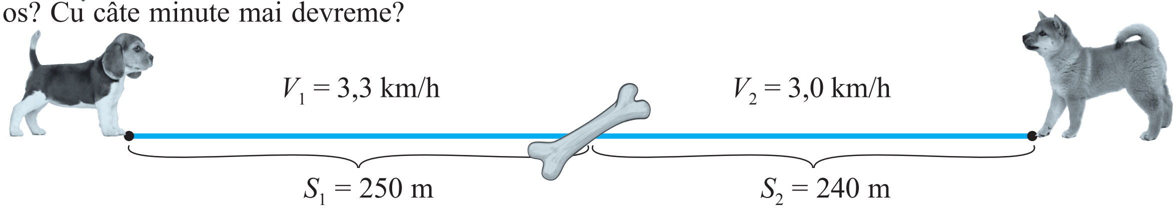
☑☑☐

15. Aflați numerele întregi situate pe axă între numerele:
a) –1,1 şi 5,04; b) 0,03 şi 2,5; c) –3,25 şi 1,25;
d) –10,2 şi –6,4; e) –25,4 şi –22,2; f) 15,1 şi 19,4.

16. Completați cu cifre, astfel încât numărul să aibă o scriere zecimală:
a) cu perioadă simplă; b) fără perioadă; c) cu perioadă mixtă.

$\frac{13}{\square}$, $\frac{\square}{9\square}$, $\frac{\square}{3\square}$, $\frac{\square}{6}$, $\frac{7\square}{9\square}$, $\frac{34}{\square}$, $\frac{3\square}{3\square}$.

17. *Lucrați în perechi!* Care dintre câini, cel din stânga sau cel din dreapta, va ajunge mai repede la os? Cu câte minute mai devreme?



18. Calculați:
a) $\frac{2}{9}:0,(1)$; b) $2\frac{1}{18}:0,(4)$; c) $2\frac{2}{3}:0,(8)$;
d) $1,(4):\frac{8}{11}$; e) $3,(15):0,(5)$;
f) $0,(008)\cdot\frac{999}{100}$; g) $2,(07):\frac{1}{9}$.

19. Scrieți sub formă de fracție numărul zecimal periodic:
a) 123,(18); b) 6,02(78); c) 2,(135);
d) 16,2(14); e) 6,25(8); f) 30,02(78).

20. Reprezentați sub formă de număr zecimal periodic numărul:
a) $\frac{43}{111}$; b) $\frac{37}{18}$; c) $2\frac{8}{15}$; d) $9\frac{2}{3}$.

21. Ordonați crescător numerele:
0,466; $\frac{7}{15}$; 0,4(63); 0,4637; 0,(46).

22. *Investigați!* Comparați numerele:
a) 0,(545) ◯ $\frac{6}{11}$;
b) $-2\frac{2}{9}$ ◯ –2,(212);
c) $-7\frac{8}{11}$ ◯ –7,(72).

$>$ $=$ $<$

23. Masa medie a unui bob de mazăre este egală cu 220,6 mg. Aflați masa a 100 de boabe:
a) în grame;
b) în kilograme.

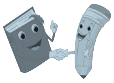
24. *Lucrați în perechi!* *Magia numerelor!*
Scrieți sub formă zecimală numerele: $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{891}$, $\frac{1}{8991}$, $\frac{1}{89991}$. Ce observați?

☑☑☑

25. Aflați un număr rațional cuprins între numerele:
a) 64,(98) şi 65; b) $\frac{417}{500}$ şi $\frac{418}{499}$.

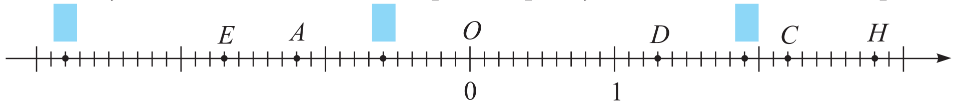
26. Pentru ce valori ale lui n, $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $\frac{1}{n}$ se transformă într-o fracție periodică simplă:
a) cu o cifră în perioadă; b) cu două cifre în perioadă?

1.3. Reprezentarea numerelor raționale pe axă

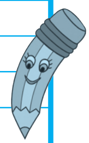


Lucrați în perechi!

1 Examinați axa numerelor şi tabelul, apoi completați-le cu numărul sau litera potrivită.



Punctul	Coordonata	Distanța de la punct până la originea axei
A	–1,2	1,2
		0
	1,3	
E		
		$2\frac{4}{5}$
		2,2
	–2,8	
	1,9	



Ne amintim

- Dreapta pe care sunt indicate originea, direcția (sensul pozitiv) şi segmentul unitate se numeşte **axa numerelor**.
- Fiecare punct pe axă are o coordonată. Se scrie: $A(a)$.
  Se citeşte: *punctul* ***A*** *are coordonata* ***a***.

2 În sarcina **1** avem: $A(-1{,}2)$; $O(0)$.

Completați: a) $E($ $)$; $D($ $)$; $C($ $)$; $H($ $)$. b) (2,8); (0,6); (1,9).

Rețineți

Reprezentarea numerelor raționale pe axă ne ajută să comparăm numere.

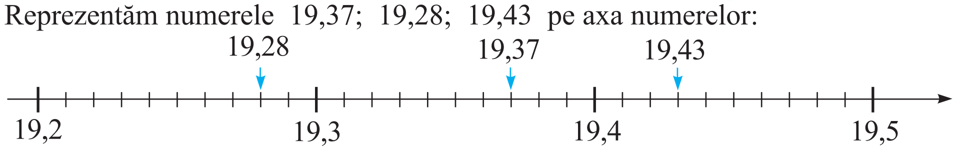
3 Examinați tabelul şi spuneți în ce zi prețul dolarului a fost cel mai mic.

	1 $	1 €
Luni	19,37 lei	20,54 lei
Marți	19,28 lei	20,57 lei
Miercuri	19,43 lei	20,48 lei

Rezolvare:

Metoda 1

Reprezentăm numerele 19,37; 19,28; 19,43 pe axa numerelor:



$< 19{,}37 <$

Metoda 2

Pasul 1

Comparăm zecile:

19,37
19,28
19,43

Acelaşi număr de zeci

Pasul 2

Comparăm unitățile:

19,37
19,28
19,43

Acelaşi număr de unități

Pasul 3

Comparăm zecimile:

19,37
19,28
19,43

$2 < 3 < 4$

$< 19{,}37 <$

Răspuns: .

Rețineți Dintre două numere reprezentate pe axă este mai mare numărul situat în dreapta celuilalt.

4 Examinați tabelul problemei **3**, reprezentați numerele pe axă și determinați în ce zi prețul monedei europene a fost cel mai mare.

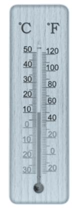
Exerciții și probleme

1. a) Construiți pe caiet axa numerelor.
b) Notați pe ea punctele: $A(-3{,}5)$; $B\left(-2\frac{1}{2}\right)$; $C(-0{,}7)$; $D\left(3\frac{1}{4}\right)$; $E(4{,}5)$; $F(5)$.
c) Aflați distanța de la punct până la originea axei.

2. Notați pe axa numerelor punctele egal depărtate de originea axei și completați:
a) $M(-5)$ și $F(\square)$; b) $A(-3{,}5)$ și $G(\square)$;
c) $C\left(2\frac{2}{5}\right)$ și $D(\square)$; d) $P\left(-4\frac{1}{5}\right)$ și $V(\square)$.

3. *Lucrați în perechi!* Reprezentați pe axa numerelor punctul corespunzător:
a) unui număr natural mai mic decât 4;
b) unui număr rațional mai mare decât –2,5 și mai mic decât –1,4;
c) unui număr rațional mai mare decât 1,4 și mai mic decât 2,5.

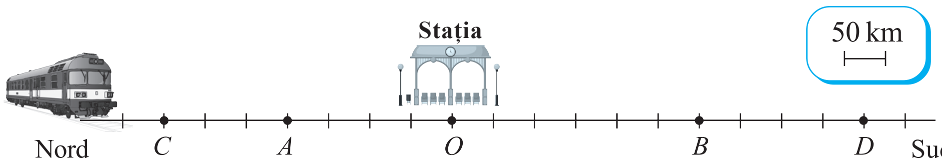
4. Cercetați acasă:
a) termometrul pentru măsurarea temperaturii corpului uman. Ce temperaturi arată el: pozitive sau negative? Argumentați.
b) termometrul pentru măsurarea temperaturii aerului. Ce temperaturi arată el: pozitive sau negative?
Argumentați.



5. Scrieți trei numere raționale reprezentate pe axă:
a) la stânga numărului 1;
b) la dreapta numărului 2,5;
c) la dreapta numărului $-4\frac{1}{2}$;
d) la stânga numărului –8,25;
e) la stânga numărului $12\frac{2}{3}$.

6. Aflați distanța de la origine până la punctul:
a) $A(15{,}1)$; b) $B(-6{,}4)$; c) $C(-78)$; d) $D(101)$; e) $O(0)$; f) $F\left(-\frac{1}{2}\right)$.

7. La ce distanță de stația O se află trenul, dacă el a ajuns în punctul:
a) A; b) B;
c) C; d) D?



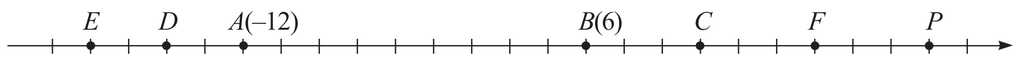
8. Maxim a urcat cu ascensorul unei clădiri cu 22 de etaje până la etajul 9 și, apoi a parcurs treptele a încă 7 etaje. La ce etaj a ajuns Maxim? Argumentați.

9. În ce sens și cu câte unități trebuie deplasat un obiect din punctul:
a) $A(-4{,}25)$ până în punctul $B(5)$;
b) $C\left(1\frac{3}{4}\right)$ până în punctul $D\left(-6\frac{1}{4}\right)$?

10. Un obiect a fost deplasat din punctul E în sensul negativ cu $6\frac{2}{3}$ unități și acum el se află în punctul $F\left(-2\frac{2}{3}\right)$. Aflați coordonata punctului E.

11. Un obiect a fost deplasat din punctul C în sensul pozitiv cu $5\frac{1}{6}$ unități și acum el se află în punctul $D\left(3\frac{5}{6}\right)$. Aflați coordonata punctului C.

12. Copiați pe caiet desenul şi notați originea axei. Ce coordonate au punctele C, D, E, F, P?



13. Notați pe axa numerelor punctele ale căror coordonate au modulul egal cu:

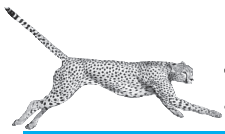
a) 4; b) 1,5; c) $6\frac{1}{4}$; d) $\frac{1}{2}$.

14. Reprezentând pe axa numerelor punctele $A(-7{,}5)$, $C\left(-8\frac{7}{15}\right)$, $D\left(\frac{31}{6}\right)$, $H(-8{,}(4))$, $I(-8{,}4)$, $K\left(-\frac{31}{4}\right)$, $R(5)$, $S(-10)$, $C(-8{,}\ (2))$, se obține numele celui care în 1623 a inventat prima maşină de calcul capabilă să efectueze adunări şi scăderi. Aflați numele inventatorului.

15. Cine se mişcă cel mai repede? Cine se mişcă cel mai încet?

Gazela aleargă 5 km în 3 min.

Cangurul sare 1 km în 2 min.



Ghepardul aleargă 900 m în 30 sec.

Struțul fuge 2 km în 90 sec.

16. Reprezentați pe axă numerele întregi x, dacă e posibil, astfel încât:

a) $|x| \le 6$; b) $|x| = 3$; c) $|x| < 3{,}8$; d) $|x| > 10$.

17. Aflați $|x|$, dacă distanța dintre punctele $B(x)$ şi $C(-x)$ este egală cu 8 unități de măsură.

18. Completați tabelul (rotunjind până la sutimi). Indicați pe axă numele țărilor în ordinea crescătoare a densității populației lor.

Țara	Suprafața (km^2)	Numărul de locuitori (milioane)	Densitatea populației $\left(\frac{\text{loc.}}{km^2}\right)$
Moldova	33 800	3,64	
România	237 500	21,5	
Rusia	17 075 000	141,83	
Ucraina	603 700	46,39	
Belgia	30 500	10,63	
Franța	643 400	62	

MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

19. Completați cu numere cele 5 casete, astfel încât suma tuturor numerelor să fie pozitivă, iar suma oricăror 3 numere vecine să fie negativă.

§2. Numere iraționale

2.1. Rădăcina pătrată

1 Observați și completați:

$3^2 = 9$, $\square^2 = 4$, $\square^2 = 25$, $\square^2 = 49$.

Definiție

Numărul nenegativ b se numește ***rădăcina pătrată*** a numărului nenegativ a (sau radical din a) dacă $b^2 = a$.
Rădăcina pătrată a numărului nenegativ a se notează cu $\sqrt{a}$.

Exemplu. Deoarece $4^2 = 16$, rezultă că 4 este rădăcina pătrată a numărului 16.
Notăm: $\sqrt{16} = 4$.

2 Completați cu numere potrivite:

a) 3 este rădăcina pătrată a numărului 9, deoarece $\square = 9$. Notăm $\sqrt{9} = \square$.

b) 2,1 este rădăcina pătrată a numărului 4,41, deoarece $2{,}1^2 = \square$.
Notăm $\sqrt{\square} = 2{,}1$.

c) $\square$ este rădăcina pătrată a numărului 0,09, deoarece $\square^2 = 0{,}09$.
Notăm $\sqrt{0{,}09} = \square$.

d) –3 nu este rădăcină pătrată a niciunui număr, deoarece $-3 < \square$.

3 Rotunjiți până la sutimi numerele $\sqrt{3}$ și $\sqrt{5}$.

Explicăm

Utilizăm calculatorul și obținem:

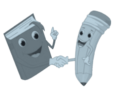
$\sqrt{3} = 1{,}7320508...$	$\sqrt{5} = 2{,}2360679...$
↓	↓
Cifra miimilor este 2.	Cifra miimilor este 6.
↓	↓
Deoarece $2 < 5$.	Deoarece $6 > 5$.
↓	↓
$\sqrt{3} \approx 1{,}73$	$\sqrt{5} \approx 2{,}24$

4 Calculați utilizând calculatorul și completați, rotunjind până la sutimi:

a) $\sqrt{2} \approx 1,\square$; b) $\sqrt{3} \approx 1,\square$; c) $\sqrt{5} \approx 2,\square$;

d) $\sqrt{10} \approx 3,\square$; e) $\sqrt{55} \approx 7,\square$; f) $\sqrt{1{,}15} \approx 1,\square$;

g) $\sqrt{18\frac{3}{4}} \approx 4,\square$; h) $\sqrt{102{,}8} \approx 10,\square$; i) $\sqrt{625{,}4} \approx 25,\square$.



Lucrați în perechi!

5 Estimați și completați, rotunjind până la întregi:

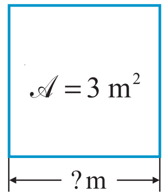
a) $\sqrt{25{,}2} \approx 5$; b) $\sqrt{30} \approx \square$; c) $\sqrt{111{,}8} \approx \square$;

d) $\sqrt{1{,}25} \approx \square$; e) $\sqrt{5} \approx \square$; f) $\sqrt{226\frac{1}{4}} \approx \square$.

• Verificați corectitudinea utilizând calculatorul.

2.2. Noțiunea *număr irațional*

Știetot îi propune prietenului său Știemult să afle lungimea exactă a laturii unui pătrat cu aria de 3 m². Observați cum judecă Știemult.



Explicăm

Fie x lungimea laturii pătratului, unde $x > 0$.

Obținem: $x \cdot x = 3$ sau $x^2 = 3$.

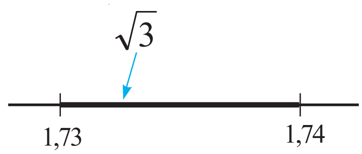
Prin urmare, $x = \sqrt{3}$.

$\sqrt{3} = ?$

$$\overset{1}{1^2} < 3 < \overset{4}{2^2} \rightarrow 1 < \sqrt{3} < 2$$

$$\overset{2{,}89}{1{,}7^2} < 3 < \overset{3{,}24}{1{,}8^2} \rightarrow 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$$

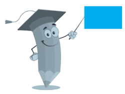
$$\overset{2{,}9929}{1{,}73^2} < 3 < \overset{3{,}0276}{1{,}74^2} \rightarrow 1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$$



Prin urmare, lungimea laturii este cuprinsă între 1,73 m = 173 cm și 1,74 m = ___ cm.

Straniu! Nu există un număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 3.

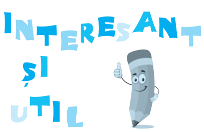
Într-adevăr, $\sqrt{3}$ nu este un număr rațional, el nu poate fi reprezentat ca număr zecimal periodic, prin urmare nu are nici scriere fracționară. El este un număr zecimal infinit neperiodic: $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$ Numărul $\sqrt{3}$ este număr *irațional*. Numerele iraționale reprezentate în formă zecimală au un număr infinit de zecimale și nu sunt periodice.



Rețineți

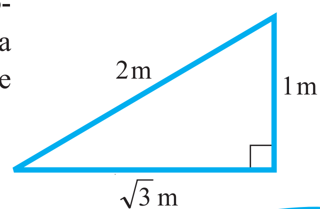
Un **număr irațional** nu poate fi scris ca număr zecimal periodic (simplu sau mixt).
Numerele iraționale nu pot fi scrise ca fracții.
Numerele iraționale pot fi scrise ca numere zecimale infinite neperiodice.
Mulțimea numerelor iraționale se notează cu **I**.

Numere iraționale nu apar doar la extragerea rădăcinii pătrate. De exemplu, numărul irațional 0,1234567891011... nu este radicalul unui număr rațional. Numărul $\pi = 3{,}1415...$, de asemenea, este număr irațional.



Chiar dacă lungimea laturii pătratului cu aria de 3 m² este un număr irațional, acest pătrat poate fi construit cu rigla și compasul exact. Pentru aceasta, construim mai întâi un triunghi dreptunghic cu o catetă de 1 m și ipotenuza de 2 m. Lungimea celeilalte catete a triunghiului este egală cu $\sqrt{3}$ m! Acest fapt se datorează relației dintre lungimile catetelor (a, b) și lungimea ipotenuzei (c) triunghiului: $a^2 + b^2 = c^2$. Această relație se numește *teorema lui Pitagora*.

În cazul nostru, $\underset{1}{1^2} + \underset{3}{(\sqrt{3})^2} = \underset{4}{2^2}$.



Exerciții și probleme

1. Completați cu numere potrivite:

a) $11=\sqrt{\square}$; b) $0{,}8=\sqrt{\square}$; c) $1\frac{1}{4}=\sqrt{\square}$;

d) $0{,}01=\sqrt{\square}$; e) $1{,}5=\sqrt{\square}$; f) $4,(3)=\sqrt{\square}$.

> ***Model:***
> Întrucât $10^2=100$,
> rezultă că $10=\sqrt{100}$.

2. *Lucrați în perechi!* Calculați:

a) $\sqrt{25}$; b) $\sqrt{0{,}04}$; c) $\sqrt{144}$; d) $\sqrt{81}$; e) $\sqrt{\frac{9}{4}}$;

f) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; g) $\sqrt{4{,}5\cdot 2}$; h) $\sqrt{4\cdot 9^2}$; i) $\sqrt{\frac{8}{2}}$.

3. Selectați numerele raționale:

a) $\sqrt{2}$; -4; $\sqrt{9}$; $-\sqrt{9}$; $\sqrt{24}$; 1,18; 0,1234567891011...; 3,(7); –5,0(2).

b) $\frac{1}{4}$; $-\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{81}}$; $\sqrt{\frac{48}{3}}$; $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; $(\sqrt{5})^0$; $(-1)^{2007}$; $(-1)^6\cdot\sqrt{7}$.

4. Calculați:

a) $2{,}1^2$; b) $3{,}5^2$; c) $0{,}28^2$; d) $8{,}19^2$; e) $4{,}56^2$.

5. Scrieți un număr irațional cuprins între:

a) 5 şi 6; b) 7 şi 8; c) -5 şi -4; d) 0 şi 1.

6. *Lucrați în perechi!* Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:

a) $x^2=9$; b) $x^2=25$; c) $x^2=\frac{1}{4}$; d) $x^2=8$; e) $x^2=-4$; f) $x^2=0$.

7. *Investigați!* Selectați şi completați cu numărul potrivit:

a) $\sqrt{2{,}89}=\square$; b) $\sqrt{15{,}21}=\square$; c) $\sqrt{0{,}1936}=\square$; d) $\sqrt{0{,}5184}=\square$.

1,7	1,07	1,3

3,1	3,81	3,9

0,34	0,54	0,44

0,82	0,72	0,68

8. Comparați numerele fără a extrage radicalul:

$>$ $=$ $<$

a) $\sqrt{8}$ şi 3;
b) 9 şi $\sqrt{90}$;
c) 3,4 şi $\sqrt{10}$;
d) $\sqrt{19}$ şi 4,5;
e) $\sqrt{39}$ şi 6,2.

> ***Model:***
> $\sqrt{15}<4$, deoarece $4=\sqrt{16}$.

9. Aplicând calculatorul, calculați:

a) $\sqrt{549{,}9025}$; b) $\sqrt{326{,}8864}$; c) $\sqrt{7942{,}3744}$; d) $\sqrt{4912{,}6081}$.

10. Calculați prin rotunjire, utilizând calculatorul, până la a doua zecimală inclusiv:

a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{5}$; c) $\sqrt{7}$; d) $\sqrt{10}$.

11. Estimați și completați, rotunjind până la întregi:

a) $\sqrt{39} \approx \square$; b) $\sqrt{12} \approx \square$; c) $\sqrt{25{,}1} \approx \square$;.

d) $\sqrt{66\frac{1}{4}} \approx \square$; e) $\sqrt{105} \approx \square$; f) $\sqrt{145} \approx \square$.

12. Completați tabelul.

Numărul a	Rotunjirea numărului a până la			
	unități	zecimi	sutimi	miimi
12,345678...				
−49,626226222...				
$\sqrt{53} = 7{,}2801098...$				
$\sqrt{0{,}6} = 0{,}774596...$				

13.  ***Lucrați în grup!*** Ridicați la pătrat numărul:

a) 0,(4); b) 0,(7); c) 7,(3);

d) 1,8(3); e) 0,2(6); f) –2,(45).

Model:
$1,(3)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} = 2{,}5(4)$

14. Calculați, utilizând calculatorul, cu exactitate de 1 cm lungimea laturii unui pătrat cu aria de:

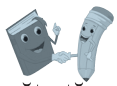
a) 2 m^2; b) 3 m^2;

c) 2,4 m^2; d) 6 m^2.

15. Calculați aria pătratului cu latura de lungimea:

a) 4,(3) cm; b) 2,(5) cm;

c) $\sqrt{8{,}7}$ cm; d) $\sqrt{3,(7)}$ cm.

16.  ***Lucrați în perechi!*** Extrageți rădăcina pătrată:

a) $\sqrt{0,(4)}$; b) $\sqrt{28,(4)}$;

c) $\sqrt{2,(7)}$; d) $\sqrt{7,(1)}$;

e) $\sqrt{53,(7)}$; f) $\sqrt{40,(1)}$.

Indicație. Reprezentați sub formă de fracție numărul de sub radical.

17. Extrageți rădăcina pătrată:

a) $\sqrt{0{,}32(1)}$; b) $\sqrt{0{,}58(7)}$.

MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

18. Observați și completați cu cifrele potrivite, fără a calcula:

$\frac{1}{7} = 0,(142857)$, $\frac{2}{7} = 0,(285714)$, $\frac{3}{7} = 0,(428\square71)$,

$\frac{4}{7} = 0,(57\square\square28)$, $\frac{5}{7} = 0,(71\square\square\square5)$, $\frac{6}{7} = 0,(85\square\square\square\square)$.

§3. Mulțimea numerelor reale

3.1. Mulțimea numerelor reale

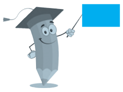
Ştietot îi propune lui Ştiemult să numească o mulțime de numere în care rezultatele operațiilor aritmetice ale ridicării la putere cu exponent natural şi ale extragerii rădăcinii pătrate să aparțină acestei mulțimi. Observați cum judecă Ştiemult.

Explicăm

Mulțimea numerelor raționale (adică $\mathbb{Q}$) nu satisface condițiile problemei, deoarece rădăcina pătrată nu întotdeauna este număr rațional. De exemplu, $\sqrt{3}$ nu este număr rațional. În mulțimea numerelor iraționale (notată cu **I**) nu întotdeauna rezultatul operațiilor menționate aparține mulțimii **I**. De exemplu, numerele $\sqrt{3}$ şi $-\sqrt{3}$ sunt iraționale, iar suma lor este 0 (care este un număr rațional).

Printre mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, **I** nu există astfel de mulțime.

Construim altă mulțime, aplicând operația reuniunii:



Rețineți

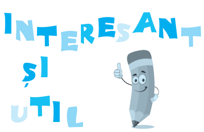
$\boxed{\mathbb{Q} \cup \mathbf{I}}$ ← **Mulțimea numerelor reale** care se notează cu $\mathbb{R}$.
Un număr real este rațional sau irațional.

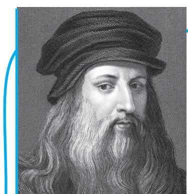
Notații:
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ← mulțimea numerelor reale nenule;
$\mathbb{R}_-$ ← mulțimea numerelor reale nepozitive;
$\mathbb{R}_+$ ← mulțimea numerelor reale nenegative;
$\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_- \setminus \{0\}$ ← mulțimea numerelor reale negative;
$\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ ← mulțimea numerelor reale pozitive.

Răspuns: Mulțimea $\mathbb{R}$ satisface condițiile problemei.

- Substituiți cu una dintre mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, **I**, $\mathbb{R}$, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

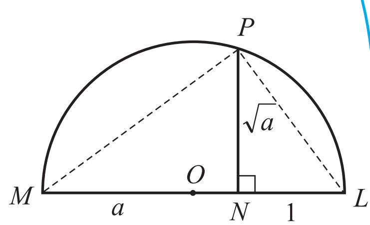
a) $\square \subset \mathbb{Z}$.
b) $\square \setminus \mathbb{Q} = \mathbf{I}$.
c) $\square \cap \square = \varnothing$.
d) $\square \subset \square \subset \square \subset \mathbb{R}$.
e) $\square \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.
f) $\mathbb{N} \cap \square = \mathbb{N}$.





Leonardo da Vinci (1452–1519)

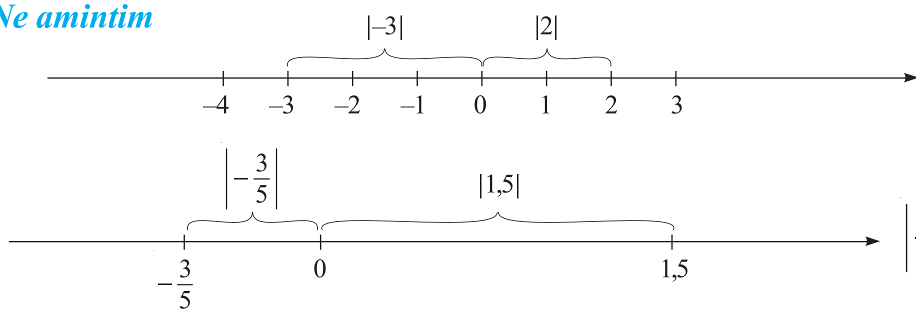
Leonardo da Vinci ştia să calculeze rădăcini pătrate cu ajutorul construcțiilor geometrice.



Pentru a determina $\sqrt{a}$, el construia un segment MN de lungime a şi, în prelungirea lui, segmentul NL de lungime 1. Apoi construia un semicerc de diametru ML, iar din punctul N trasa perpendiculara pe ML, care intersecta semicercul în punctul P. Obținem $NP = \sqrt{a}$. Această egalitate rezultă din aşa-numita **teoremă a înălțimii** unui triunghi dreptunghic. Aşa cum triunghiul MPL este dreptunghic $(m(\angle MPL) = 90°)$, rezultă că $NP^2 = MN \cdot NL$ sau $NP = \sqrt{MN \cdot NL}$

3.2. Modulul numărului real

Ne amintim



$|-3| = 3$; $|2| = 2$

$\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$; $|1{,}5| = 1{,}5$

1 Analizați și completați:

$|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$; $\left|5\frac{1}{8}\right| = 5\frac{1}{8}$; $|-7{,}98| = 7{,}98$;

$|-0{,}005| = \square$; $\left|-\frac{5}{6}\right| = \square$; $\left|\frac{7}{11}\right| = \square$; $|0| = \square$.

Rețineți

- Distanța de la originea O la punctul $A(a)$, $a \in \mathbb{R}$, este **modulul** sau **valoarea absolută** a numărului real a și se notează $|a|$.
- Pentru orice număr real a: $|a| = \begin{cases} a, \text{ dacă } a > 0, \\ 0, \text{ dacă } a = 0, \\ -a, \text{ dacă } a < 0. \end{cases}$

Lucrați în perechi!

2 Analizați și observați:

a) $|-3| = 3 > 0$; $|5{,}5| = 5{,}5 > 0$; $|0| = 0$ $\longrightarrow$ $|a| \geq 0$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$;

b) $|-5| = 5 > -5$; $\left|8\frac{1}{2}\right| = 8\frac{1}{2} \geq 8\frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ $|a| \geq a$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$;

c) $|-2|^2 = 4$

$(-2)^2 = 4$

$|(-2)^2| = 4$

$\longrightarrow$ $|-2|^2 = (-2)^2 = |(-2)^2|$

$|5{,}2|^2 = 27{,}04$

$(5{,}2)^2 = 27{,}04$

$|5{,}2^2| = 27{,}04$

$\longrightarrow$ $|5{,}2|^2 = (5{,}2)^2 = |5{,}2^2|$

$\longrightarrow$ $|a|^2 = a^2 = |a^2|$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$;

d) $|(-3) \cdot 5| = |-15| = 15$

$|-3| \cdot |5| = 3 \cdot 5 = 15$

$\longrightarrow$ $|(-3) \cdot 5| = |-3| \cdot |5|$

$|\sqrt{21} \cdot \sqrt{2}| = \sqrt{21} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{42}$

$|\sqrt{21}| \cdot |\sqrt{2}| = \sqrt{21} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{42}$

$\longrightarrow$ $|\sqrt{21} \cdot \sqrt{2}| = |\sqrt{21}| \cdot |\sqrt{2}|$

$\longrightarrow$ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$;

e) $\left|\dfrac{-\sqrt{5}}{4{,}5}\right| = \left|-\dfrac{\sqrt{5}}{4{,}5}\right| = \dfrac{\sqrt{5}}{4{,}5}$

$\dfrac{|-\sqrt{5}\,|}{|\,4{,}5\,|} = \dfrac{\sqrt{5}}{4{,}5}$

$\rightarrow \left|\dfrac{-\sqrt{5}}{4{,}5}\right| = \dfrac{|-\sqrt{5}\,|}{|\,4{,}5\,|}$

$\left|\dfrac{3,(2)}{6}\right| = \dfrac{3,(2)}{6}$

$\dfrac{|\,3,(2)\,|}{|\,6\,|} = \dfrac{3,(2)}{6}$

$\rightarrow \left|\dfrac{3,(2)}{6}\right| = \dfrac{|\,3,(2)\,|}{|\,6\,|}$

$\rightarrow \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|\,a\,|}{|\,b\,|}$, pentru orice $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^*$.

Rețineți

Proprietăți ale modulului numărului real

$1^\circ\ |\,a\,| \geq 0$; $2^\circ\ |\,a\,| \geq a$; $3^\circ\ |\,a\,|^2 = a^2 = |\,a^2\,|$;

$4^\circ\ |\,ab\,| = |\,a\,| \cdot |\,b\,|$; $5^\circ\ \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|\,a\,|}{|\,b\,|},\ b \neq 0$.

3 Explicitați modulul: a) $|\,3-\sqrt{5}\,|$; b) $|\,\sqrt{2}-2\,|$.

Rezolvare:

a) Aflăm semnul numărului $3-\sqrt{5}$.

Deoarece $\sqrt{5} \approx 2{,}24$ şi $3 > 2{,}24$, rezultă că $3-\sqrt{5} > 0$.

Prin urmare, $|\,3-\sqrt{5}\,| = 3-\sqrt{5}$.

Răspuns: $3-\sqrt{5}$.

b) Aflăm semnul numărului $\sqrt{2}-2$.

Deoarece $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ şi $1{,}41 < 2$, rezultă că $\sqrt{2}-2 < 0$.

Prin urmare, $|\,\sqrt{2}-2\,| = -(\sqrt{2}-2) = 2-\sqrt{2}$.

Răspuns: $2-\sqrt{2}$.

3.3. Compararea și ordonarea numerelor reale

1 Ordonați crescător numerele $-\sqrt{7}$; $2{,}345\ldots$; $-2,(6)$.

Explicăm

$-\sqrt{7}$ şi $-2,(6)$ — numere negative; $2{,}345\ldots$ — număr pozitiv $\rightarrow$ Cel mai mare este numărul ______

$-\sqrt{7}$ ◯ $-2,(6)$

$\uparrow$ $\uparrow$

$\approx -2{,}65$ ◯ $-2{,}66\ldots$

$\uparrow$ $\uparrow$

$|-2{,}65| < |-2{,}66|$

$>$ $=$ $<$

Prin urmare, ______ $<$ ______ $< 2{,}345\ldots$

Rețineți

La compararea numerelor reale se aplică aceleaşi reguli şi metode ca şi la compararea numerelor raționale.

- Comparați numerele:

a) $\sqrt{9}$ şi $\sqrt{16}$; b) $\sqrt{81}$ şi $\sqrt{49}$; c) $\sqrt{5}$ şi $\sqrt{3}$.

Trageți concluzia.

1) Dacă $a > b \geq 0$, atunci $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

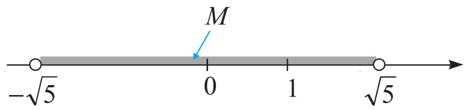
2) Dacă $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, atunci $a > b \geq 0$.

2 Reprezentați pe axă mulțimea:

a) $M = \{$numerele reale mai mari decât $-\sqrt{5}$ și mai mici decât $\sqrt{5}\}$;

b) $K = \{$numerele reale mai mici sau egale cu $\sqrt{3}\}$.

Rezolvare:

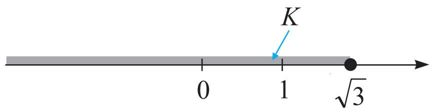


a) $\sqrt{5} \approx 2{,}24$. Numerele $-\sqrt{5}$ și $\sqrt{5}$ sunt egal depărtate de originea axei.

Numerele mulțimii M se află la o distanță mai mică de $\sqrt{5}$ de la originea axei.

Mulțimea M poate fi scrisă și astfel: $M = \{x \mid |x| < \sqrt{5}\}$.

b)



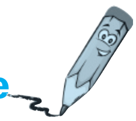
Rețineți

Două **numere reale** diferite sunt **opuse** dacă se află pe axa numerelor la distanțe egale de originea axei.

3 Completați adecvat schema:

Dintre două numere reale

pozitive	negative	de semne diferite
mai mare este numărul cu modulul ...	mai mare este numărul cu modulul ...	mai mare este numărul ...



Exerciții și probleme

1. Selectați numerele:
a) raționale;
b) iraționale;
c) reale pozitive;
d) iraționale negative.

$\frac{2}{\sqrt{3}}$; $-\frac{10}{11}$; $\sqrt{1{,}44}$; 21; $-\sqrt{81}$; $-\sqrt{33}$; $-2{,}(6)$; 0; $\sqrt{12}$; $-\frac{5}{9}$; $17{,}82$; $\sqrt{0{,}(4)}$

2.  *Investigați!* Comparați numerele:

a) $-6{,}2345...$ și $0{,}1234...$; b) $\sqrt{71}$ și $-\sqrt{80}$;

c) $-\sqrt{\frac{5}{6}}$ și 1; d) $\sqrt{2}+3$ și $-3\sqrt{2}$;

e) $|-\sqrt{3}|$ și $\sqrt{2}+1$; f) $|-\sqrt{7}|$ și $|-2\sqrt{3}|$.

3. Aflați semnul numărului:

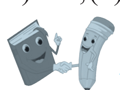
a) $\sqrt{17}-4$; b) $-7+\sqrt{47}$;

c) $\frac{8}{9}-\sqrt{1{,}25}$; d) $\sqrt{10}-2\sqrt{5}$.

4. Care este opusul numărului:

a) $\sqrt{5}$; b) $\frac{\sqrt{7}}{7}$; c) $2-\sqrt{3}$;

d) $-0,(2)$; e) $-\sqrt{2}+\frac{1}{3}$; f) $-6-2\sqrt{2}$?

5.  *Lucrați în perechi!* Scrieți în ordine crescătoare numerele:

a) $3,(5);\ -3\sqrt{5};\ -5\sqrt{3}$. b) $\frac{4}{7};\ \sqrt{\frac{4}{7}};\ -\frac{7}{4}$.

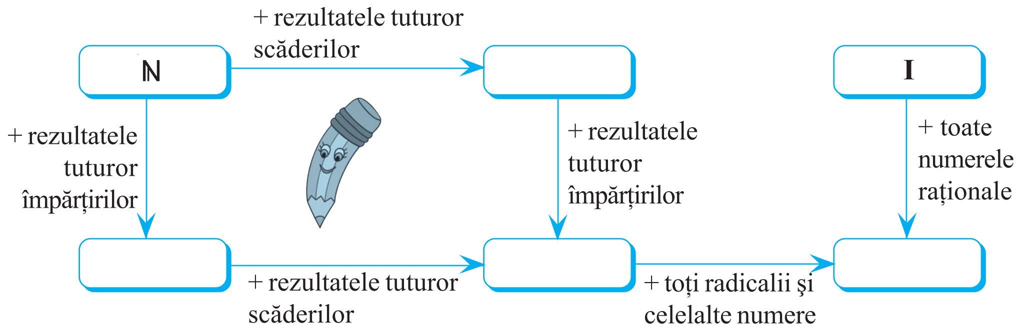
c) $4\frac{1}{2};\ \left|-4\frac{2}{3}\right|;\ \sqrt{20}$. d) $-8\frac{1}{3};\ -8{,}1(3);\ -8{,}3(1)$.

6. Reprezentați pe axă numerele:

a) mai mari decât $\sqrt{8}$; b) mai mici decât $2\sqrt{3}$;

c) pozitive mai mici decât $5,(3)$; d) negative mai mari decât $-4\frac{5}{9}$.

7. *Lucrați în grup!* Examinați schema și completați fiecare casetă cu una din mulțimile $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{R}$:



8. Scrieți numerele opuse care se află pe axă unul față de altul la distanța de:

a) $5\frac{5}{8}$; b) $3,(6)$; c) $4\sqrt{10}$; d) $2+\sqrt{20}$.

9. Explicitați modulul:

a) $|\sqrt{7}-4|$; b) $|9-\sqrt{80}|$;

c) $|\sqrt{6}-2\sqrt{3}|$; d) $|-5+\sqrt{20}|$.

10. *Lucrați în perechi!* Reprezentați pe axă numerele reale:

a) mai mici decât $\frac{1}{3}$ și mai mari decât $-0,5$;

b) cuprinse între -3 și $\sqrt{3}$;

c) mai mici decât $\sqrt{8}$ și mai mari decât -2;

d) cuprinse între $-\sqrt{10}$ și $\sqrt{10}$.

11. Scrieți analitic, utilizând semnul modulului și semnele de comparație:

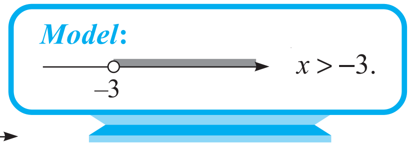
a) numărul a este cuprins între $-\sqrt{6}$ și $\sqrt{6}$;

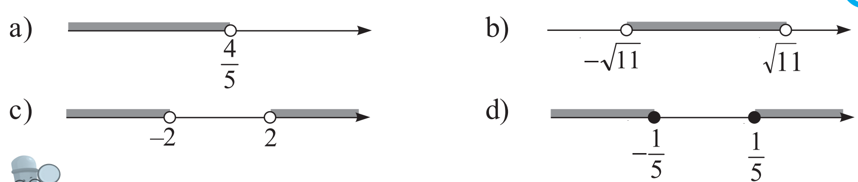
b) numărul b este mai mare decât $-\frac{1}{6}$ și mai mic decât $\frac{1}{6}$;

c) numărul c este mai mic decât -3 sau mai mare decât 3;

d) numărul d este mai mare decât 2,4 sau mai mic decât –2,4.

12. Se știe că numărul x aparține porțiunii colorate. Scrieți ce valori poate avea x, utilizând semnele $<, \leq, >, \geq$:





13. *Investigați!* Comparați:

a) $\sqrt{2{,}1^2}$ cu $|2{,}1|$; b) $\sqrt{\left(-\frac{2}{7}\right)^2}$ cu $\left|-\frac{2}{7}\right|$;

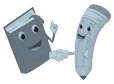
c) $|-\sqrt{3}\cdot 2|$ cu $|-\sqrt{3}|\cdot|2|$; d) $\frac{|-9|}{|-4|}$ cu $\left|\frac{-9}{-4}\right|$.

14. Construiți pe caiet (sau pe o foaie cu rețea de pătrate) un segment cu lungimea de:

a) $\sqrt{7}$ cm; b) $\sqrt{5}$ cm; c) $\sqrt{3{,}5}$ cm; d) $\sqrt{5{,}5}$ cm.

§4. Operații cu numere reale

4.1. Operații aritmetice cu numere reale. Proprietăți



Lucrați în perechi!

- Calculați, rotunjind cu o sutime şi completați cu numere potrivite:

a) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}\approx \square$

$2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{5}\approx 2\cdot 1{,}73+\square=\square$

$\approx 1{,}73 \qquad \approx 2{,}24$

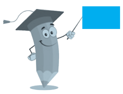
b) $2\cdot\sqrt{7}:\dfrac{1}{4}-5\cdot\sqrt{7}\approx \square$

$2\cdot\sqrt{7}\cdot\dfrac{4}{1}-5\sqrt{7}=8\cdot\sqrt{7}-5\sqrt{7}=\square\cdot\sqrt{7}\approx\square$

$\approx \square$

Notăm: $a\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{b}$.

Termenii $2\sqrt{7}$ şi $5\sqrt{7}$ sunt **radicali asemenea**.



Rețineți

- Numerele $a\sqrt{b}$ şi $c\sqrt{b}$, unde $a, c\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}_+$, se numesc ***radicali asemenea***.
- La efectuarea calculelor, numerele iraționale se aproximează cu numere raționale.
- La efectuarea operațiilor aritmetice cu numere reale se utilizează aceleaşi reguli şi proprietăți ca şi în cazul operațiilor aritmetice cu numere raționale.

Proprietățile operațiilor cu numere reale

Pentru orice numere reale a, b, c:

Adunarea şi înmulțirea sunt operații **comutative**.	$a+b=b+a$ $a\cdot b=b\cdot a$
Adunarea şi înmulțirea sunt operații **asociative**.	$a+(b+c)=(a+b)+c$ $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
Pentru operația de adunare, 0 este **element neutru**.	$a+0=0+a=a$
Pentru operația de înmulțire, 1 este **element neutru**.	$a\cdot 1=1\cdot a=a$
Fiecare număr real a are un unic **opus** $-a$.	$a+(-a)=(-a)+a=0$
Fiecare număr real nenul a are un unic **invers** $\dfrac{1}{a}$.	$a\cdot\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{a}\cdot a=1,\ a\neq 0$
Înmulțirea este distributivă față de adunare şi față de scădere.	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ $a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$

4.2. Puterea cu exponent natural a unui număr real

Operația de ridicare la putere cu exponent natural a numerelor raționale este valabilă și în mulțimea numerelor reale și posedă aceleași proprietăți.

Definim

Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}} = a^n$$

exponentul puterii

puterea

baza puterii

$a^0 = 1,\ a \neq 0;\ \ a^1 = a;\ \ 0^0$ nu are sens.

De exemplu, 2^3 este putere cu baza 2 și exponentul puterii 3.

Regulile de calcul cu puteri cu exponent natural

Pentru orice numere reale nenule a, b și orice numere naturale m, n, unde $m \geq n$:

1° $1^m = 1$;

2° $(-1)^{2m} = 1$;

3° $(-1)^{2m+1} = -1$;

4° $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

5° $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

6° $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;

7° $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$;

8° $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

- Aplicați reguli de calcul cu puteri și scrieți cât mai simplu:

a) $4{,}13^5 \cdot 4{,}13^8$; b) $(2\sqrt{11})^3 : (\sqrt{11})^2$; c) $\dfrac{-0{,}39^2}{0{,}13^2}$; d) $\left(-\dfrac{14}{9}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{3}{7}\right)^3$.

4.3. Operații cu radicali. Proprietăți

1 Găsiți perechile de expresii numerice cu aceeași valoare:

$4\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2}\sqrt{8}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ | $\sqrt{6}$ | $\sqrt{24}$ | $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{8}$ | 8 | $\sqrt{15}$ | $\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

Dacă a, b sunt numere reale nenegative, atunci $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

Model:

$(\sqrt{3} \cdot \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 3 \cdot 5 = \mathbf{15}$

$(\sqrt{15})^2 = \mathbf{15}$

$\rightarrow \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$.

Rețineți

Proprietățile radicalilor

Pentru orice numere reale a și b:

1° $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, unde $a \geq 0, b \geq 0$;

2° $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, unde $a \geq 0, b > 0$;

3° $(\sqrt{a})^2 = a$, unde $a \geq 0$;

4° $\sqrt{a^2} = |a|$, unde $a \in \mathbb{R}$.

Lucrați în perechi!

2 Găsiți perechile de expresii numerice cu aceeași valoare:

$2\sqrt{10}$ | $\sqrt{75}$ | $4\sqrt{5}$ | $-3\sqrt{8}$ | $-7\sqrt{2}$ | $5\sqrt{3}$ | $\sqrt{40}$ | $-\sqrt{7^2 \cdot 2}$ | $\sqrt{16 \cdot 5}$ | $\sqrt{(-8)^2 \cdot 3}$ | $-\sqrt{72}$ | $-8\sqrt{3}$

Model:

$(3\sqrt{8})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{8})^2 = 9 \cdot 8 = \mathbf{72}$

$(\sqrt{72})^2 = \mathbf{72}$

$\rightarrow 3\sqrt{8} = \sqrt{72}$

Rețineți

Pentru orice număr real a şi orice număr real nenegativ b:

- $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$ ← **Scoaterea factorului de sub radical.**
- $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b}, & \text{dacă } a \geq 0, \\ -\sqrt{a^2b}, & \text{dacă } a < 0. \end{cases}$ ← **Introducerea factorului sub radical.**

4.4. Ordinea efectuării operațiilor cu numere reale

• Calculați valoarea expresiei numerice:

$$[-3\sqrt{5} \underset{⑥}{+} 2^3 \underset{④}{} \underset{⑤}{\cdot} (7\sqrt{5} \underset{③}{-} \underset{①}{\sqrt{9}} \underset{②}{\cdot} 2\sqrt{5})] \underset{⑦}{:} 5.$$

Explicăm

I. Efectuăm operațiile din parantezele rotunde:

① $\sqrt{9} = 3$

② $3 \cdot 2\sqrt{5} = \square$

③ $7\sqrt{5} - \square = \square$

II. Efectuăm operațiile din parantezele drepte:

④ $2^3 = 8$

⑤ $8 \cdot \square = \square$

⑥ $-3\sqrt{5} + \square = \square$

III. Efectuăm împărțirea:

⑦ $\square : 5 = \square$

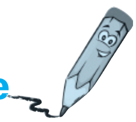
Răspuns: $\square$

Rețineți

Ordinea efectuării operațiilor

1. Operațiile din paranteze (interioare, apoi exterioare).
2. Ridicarea la putere, extragerea rădăcinii pătrate.
3. Înmulțirea şi împărțirea.
4. Adunarea şi scăderea.

Exerciții și probleme



1. Calculați:

a) $8{,}54 - 2{,}75$; b) $-0{,}189 + 4{,}793$; c) $3{,}17 - 2{,}4$; d) $6{,}37 : 1{,}3$.

2. Calculați utilizând calculatorul şi rotunjind rădăcina pătrată până la zecimi:

a) $\sqrt{7} + \sqrt{2}$; b) $\sqrt{3} - \sqrt{6}$; c) $2\sqrt{8} - 0{,}3\sqrt{8}$; d) $\frac{1}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

3. Examinați fişele şi completați şirul de radicali asemenea:

a) $\sqrt{8}$, ...

b) $-2\sqrt{5}$, ...

c) $\sqrt{0{,}3}$, ...

d) $7\sqrt{7}$, ...

$\sqrt{8}$ $\quad \sqrt{5}$ $\quad 7\sqrt{7}$ $\quad 0{,}3\sqrt{5}$ $\quad \sqrt{0{,}3}$ $\quad 7\sqrt{5}$

$2\sqrt{0{,}3}$ $\quad -\sqrt{7}$ $\quad 0{,}4\sqrt{8}$ $\quad -2\sqrt{5}$ $\quad 3\sqrt{8}$ $\quad \frac{1}{4}\sqrt{8}$

4. Copiați și completați cu numere potrivite:

a) $\sqrt{3}(8-\sqrt{2})=8\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\square$;
b) $\sqrt{7}+2\sqrt{3}=2\sqrt{3}+\square$;
c) $4-\sqrt{11}=-(\square-\square)$;
d) $-\square+2\sqrt{5}=0$;
e) $1\cdot(2\sqrt{6}+1)=1+\square$;
f) $4\sqrt{10}\cdot\dfrac{1}{\square}=1$.

5. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $4\sqrt{3}-7\sqrt{3}-2\sqrt{3}+6\sqrt{3}$;
b) $0{,}4\sqrt{6}+2\sqrt{6}-0{,}4\sqrt{6}+\sqrt{6}$;
c) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}+\dfrac{\sqrt{7}}{3}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}+\dfrac{5\sqrt{7}}{12}$;
d) $0{,}8\sqrt{5}-\dfrac{4}{5}\sqrt{5}-\dfrac{1}{9}\sqrt{5}+1{,}(1)\sqrt{5}$.

6. Calculați:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$;
b) $(-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{32})$;
c) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$;
d) $\sqrt{5}\cdot|-\sqrt{45}|$.

7. Calculați:

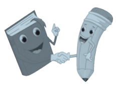
a) $\sqrt{24}:\sqrt{6}$;
b) $(-\sqrt{343}):\sqrt{7}$;
c) $\sqrt{180}:\sqrt{5}$;
d) $\sqrt{363}:|-\sqrt{3}|$.

8. Aplicând reguli de calcul cu puteri, scrieți cât mai simplu:

a) $2{,}5^8\cdot 2{,}5^4$;
b) $7{,}1^9:7{,}1^6$;
c) $(\sqrt{5})^{11}:\sqrt{5}$;
d) $(\sqrt{7})^3\cdot 3\sqrt{7}$;
e) $4{,}2^5\cdot 0{,}5^5$;
f) $(\sqrt{18})^3:(\sqrt{2})^3$.

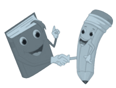
9. Aplicând formulele $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$, $a\in\mathbb{R}$, $m, n\in\mathbb{N}^*$ și $(\sqrt{a})^2=a$, $a\in\mathbb{R}_+$, calculați:

a) $(\sqrt{2})^6$;
b) $(\sqrt{3})^4$;
c) $(\sqrt{0{,}5})^4$;
d) $(\sqrt{0{,}1})^8$.

10.  ***Lucrați în perechi!*** Scoateți factori de sub radical:

Model:
$\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{3^2\cdot 5}=3\sqrt{5}$.

a) $\sqrt{24}$;
b) $\sqrt{63}$;
c) $\sqrt{98}$;
d) $\sqrt{96}$;
e) $\sqrt{200}$;
f) $\sqrt{108}$.

11.  ***Lucrați în perechi!*** Introduceți factorul sub radical:

a) $2\sqrt{3}$;
b) $3\sqrt{2}$;
c) $6\sqrt{5}$;
d) $-5\sqrt{6}$;
e) $-4\sqrt{7}$;
f) $7\sqrt{3}$.

Model:
$-4\sqrt{8}=-\sqrt{4^2\cdot 8}=-\sqrt{128}$

12. Comparați:

a) $3\sqrt{2}$ cu $2\sqrt{3}$;
b) $-3\sqrt{5}$ cu $-4\sqrt{3}$;
c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ cu $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$;
d) $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$ cu $\dfrac{4}{\sqrt{20}}$;
e) $2\sqrt{3}+1$ cu $\sqrt{3}+2$;
f) $\sqrt{5}-2$ cu $3\sqrt{5}-9$.

Indicație. Pentru exercițiile e) și f) luați în considerare că $a>b$ dacă și numai dacă $a-b>0$, pentru orice $a, b\in\mathbb{R}$.

13. Scoateți factori de sub radical și aduceți expresia la o formă mai simplă:

a) $\sqrt{18}-3\sqrt{32}+2\sqrt{8}-\sqrt{72}$;
b) $0{,}4\sqrt{12}-0{,}9\sqrt{27}+1{,}3\sqrt{75}$;
c) $-2\sqrt{80}+\sqrt{320}-4\sqrt{20}+\sqrt{45}$;
d) $\sqrt{0{,}8}+\sqrt{3{,}2}+\sqrt{5}-10\sqrt{7{,}2}$.

14.  ***Lucrați în grup!*** Calculați:

a) $4\sqrt{90}-\sqrt{10}-(3\sqrt{160}-5\sqrt{40})$; b) $9\sqrt{27}+5\sqrt{24}-(-2\sqrt{96}-\sqrt{150}+3\sqrt{243})$;

c) $4\sqrt{84}-10\sqrt{189}-12\sqrt{1029}+2\sqrt{525}$; d) $5\sqrt{243}+2\sqrt{48}-(8\sqrt{300}-6\sqrt{363})$.

15. Calculați:

a) $3^3+\sqrt{25}[\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}-(5\sqrt{6})^2]-100$; b) $[2^5-(4\sqrt{3})^2]\cdot\frac{5}{12}\cdot(\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}-2)+7^2$.

16. Aflați perimetrul unui triunghi isoscel cu laturile laterale de $12\sqrt{5}$ cm şi baza cu $\sqrt{20}$ cm mai mică decât latura laterală.

17. Aflați perimetrul unui dreptunghi a cărui lățime este de $5\sqrt{12}$ cm, iar lungimea este cu $\sqrt{27}$ cm mai mare decât lățimea.

18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $x^2-5=11$; b) $-3x^2+4=1{,}2$; c) $-\frac{5}{4}x^2=x^2$;

d) $(x+3)^2=-2$; e) $\sqrt{3}x^2-\sqrt{27}=0$; f) $\sqrt{5}x^2-5x=0$.

19. Aduceți la forma cea mai simplă expresia: $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}-\sqrt{(\sqrt{11}+2\sqrt{5})^2}+\sqrt{(1-2\sqrt{11})^2}$.

20. Determinați valorile reale ale lui x, y şi z pentru care este adevărată egalitatea:

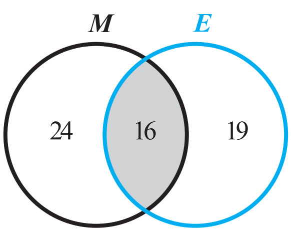
$$\sqrt{2-x}+|x-2y|+(z+3\sqrt{7})^2=0.$$

§5. Operații cu mulțimi

5.1. Reuniunea, intersecția și diferența mulțimilor

1 Toți elevii unei clase participă la cel puțin unul din concursurile de matematică şi limba engleză: 24 de elevi sunt înscrişi la concursul de matematică, 19 – la concursul de limba engleză. La ambele concursuri participă 16 elevi. Câți elevi sunt în clasă? Observați şi comentați cum a rezolvat problema Ştietot.

Rezolvare:



M – mulțimea elevilor înscrişi la concursul de matematică
E – mulțimea elevilor înscrişi la concursul de limba engleză
n – numărul elevilor din clasă

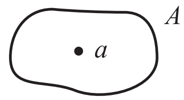
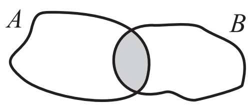
$$\boxed{\text{card } A\cup B=\text{card } A+\text{card } B-\text{card } A\cap B}$$

$n=24+19-16=27.$

Răspuns: 27 de elevi.

- Ce semnificație au în problemă notațiile $M\cup E$ şi $M\cap E$?

Ne amintim **2** Reproduceți şi completați tabelul:

Notăm	*Citim*	*Reprezentăm*	*Exemple*
$a\in A$	Elementul a aparține mulțimii A		$3\in\mathbb{N}$
$a\notin A$			$-7{,}2\notin\mathbb{Z}$
$A\cup B$	Mulțimea A reunită cu mulțimea B		
$A\cap B$			$A=\{1, 2, 3, 4\}$ $B=\{3, 4, 5, 6\}$ $A\cap B=\{3, 4\}$
$A=B$			A – mulțimea numerelor naturale pare $B=\{n \mid n=2k,\ k\in\mathbb{N}\}$ $A=B$
$A\subset B$	Mulțimea A este submulțime a mulțimii B		A – mulțimea pomilor fructiferi B – mulțimea copacilor $A\subset B$
$A\setminus B$			

- a) Care este semnificația notației $M\setminus E$ în problema **1**? Dar a notației $E\setminus M$?
  b) Calculați $\operatorname{card} M\setminus E$ şi $\operatorname{card} E\setminus M$.

Numărul de elemente ale mulțimii A este **cardinalul** mulțimii A şi se notează card A. **Mulțimea vidă** se notează $\varnothing$ şi are cardinalul egal cu 0.

5.2. Produsul cartezian a două mulțimi

1 Observați şi completați, astfel încât să obțineți toate meniurile posibile formate din felul I şi felul II (în această ordine).

A ***Felul I***

Ciorbă (C)
Zeamă (Z)

$A=\{C, Z\}$

B ***Felul II***

Frigărui (F)
Peşte (P)
Sarmale (S)

$B=\{F, P, S\}$

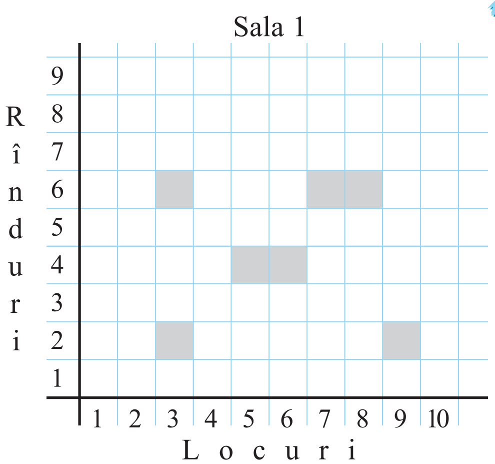
$A\times B=\{(C, F), (C, P), (C,\ \square\ ), (Z, F), (\ \square\ ), (\ \square\ )\}$

Rețineți

Produsul cartezian a două mulțimi este mulțimea tuturor perechilor ordonate care au pe primul loc un element al primei mulțimi, iar pe locul al doilea – un element al mulțimii a doua. Produsul cartezian al mulțimilor A şi B se notează $A\times B$. Prin urmare, $A\times B=\{(x, y) \mid x\in A,\ y\in B\}$.

Observații

1. Mulțimea $A\times B$ din problema **1** este produsul cartezian al mulțimilor A şi B.
2. Întrucât perechile unui produs cartezian sunt ordonate, considerăm diferite perechile (a, b) şi (b, a), unde a şi b aparțin mulțimilor A şi B.



2 Observați imaginea. Fie R mulțimea rândurilor, iar L – mulțimea locurilor de pe un rând arbitrar ale unei săli de cinema.
Așadar, $R=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$L=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
a) Care este semnificația mulțimii $L\times R$?
b) Completați:

- Fie O mulțimea fotoliilor ocupate.

  Atunci, $O=\{(3, 2), (9, 2), (\ \ \ ), (\ \ \ ), (\ \ \ ), (\ \ \ ), (\ \ \ )\}$.
- card $L\times R$ = card $\square$ $\cdot$ card $\square$
- Justificați verbal de ce $(3, 2)\neq(2, 3)$.

Rețineți

- În general, mulțimile $A\times B$ și $B\times A$ pot fi diferite.
- card $A\times B$ = card $A\cdot$ card B.

Exerciții și probleme

1. Aflați $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, dacă:
a) $A=\{-2, -5, 3, 7, 9\}$, $B=\{-5, 3, 7, 9\}$;
b) $A=\{a, b, m, n\}$, $B=\{b, c, d, m, n, t\}$;
c) $A=\{x\mid x\in\mathbb{Z}, |x|<7\}$, $B=\{x\mid x\in\mathbb{Z}, |x|>2\}$;
d) $A=\mathbb{N}$, $B=\mathbb{Z}$.

2. Enumerați elementele mulțimii:
a) $A=\{x\mid x\in\mathbb{N}, 2x<11\}$;
b) $B=\{x\mid x\in\mathbb{Z}, |2x|<17\}$;
c) $C=\{x\mid x\in\mathbb{N}, 24\,\vdots\,x\}$.

3. ***Lucrați în perechi!*** Completați cu numere sau simboluri, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată:
a) $\{\square, \square\}\subset\{1, 11, 21, 31, 41, 51\}$;
b) $\{-7, 9, 17\}\subset\{\square, \square, 9, 19, 27\}$;
c) $-3\ \square\ \{x\mid x\in\mathbb{N}, |x|>2\}$;
d) $\{10, 20, 30\}\ \square\ \{x\mid x\in\mathbb{Z}, x\,\vdots\,5\}$.

4. Scrieți toate submulțimile de 5 elemente ale mulțimii $A=\{1, 2, ..., 6\}$.

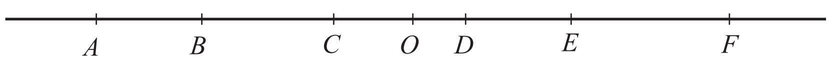
5. Calculați card $A\cup B$, dacă:
a) card $A=12$, card $B=17$, card $A\cap B=4$;
b) card $A=44$, card $B=28$, card $A\cap B=0$;
c) card $A=9$, card $B=19$, card $A\cap B=9$.

6. Fie A mulțimea lunilor cu 30 de zile și B – mulțimea lunilor cu 31 de zile. Comparați card A și card B.

7. Fie $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{5, b\}$. Scrieți produsul cartezian:
a) $X\times Y$;
b) $Y\times X$;
c) $X\times X$;
d) $Y\times Y$.

8. Fie A mulțimea dreptunghiurilor, iar B – mulțimea romburilor. Descrieți elementele mulțimii:
a) $A\cap B$;
b) $A\setminus B$;
c) $B\setminus A$.

9. ***Lucrați în perechi!*** Examinați desenul, apoi aflați:
a) $[AO]\cup[BE]$;
b) $[BF]\cup[AC]$;
c) $[BD]\cap[CF]$;
d) $[CF]\cap[AB]$.



10. Amintim că prin D_n se notează mulțimea divizorilor numărului n, iar prin M_n – mulțimea multiplilor numărului n. Aflați:

a) $D_{24} \cap D_{16}$; b) $D_{48} \cap M_3$; c) $D_{10} \cup D_{50}$; d) $D_{120} \setminus M_2$; e) $M_3 \cap M_5$.

11. *Lucrați în grup!* Determinați numerele m și n, dacă:

a) $\{m, 3, 5\} \cup \{3, 5, 6\} = \{2, 3, n, 6\}$; b) $\{-6, m, 9, 10\} \cap \{-8, n, 16\} = \{-8, 9\}$;
c) $\{5, 6, ..., m\} \setminus \{1, 2, n, 13\} = \{6, 7, ..., 11\}$; d) $\{m, 8, 9\} \cap \{3, 6, n\} = \{6, 9\}$.

12. Calculați $\text{card}\, A \cap B$, dacă:

a) $\text{card}\, A = 33$, $\text{card}\, B = 16$, $\text{card}\, A \cup B = 40$;
b) $\text{card}\, A = 26$, $\text{card}\, B = 15$, $\text{card}\, A \cup B = 27$;
c) $\text{card}\, A = 14$, $\text{card}\, B = 23$, $\text{card}\, A \cup B = 37$.

$\text{card}\, A \cap B =$
$= \text{card}\, A + \text{card}\, B - \text{card}\, A \cup B$

13. Aflați A și B, dacă: a) $A \cup B = \{1, 2, ..., 9\}$, $A \setminus B = \{1, 3, 4\}$, $B \setminus A = \{5, 6, 7\}$;
b) $A \cap \{a, b, c\} = \varnothing$, $B \cap \{d, f, h\} = \varnothing$, $A \cap B = \{e, g\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

14. *Lucrați în grup!* Aflați mulțimile A și B, dacă:

a) $A \cup B = \{3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3, 5\}$, $B \setminus A = \varnothing$; b) $A \cup B = \{a, b, c\}$, $A \cap B = \{a, b\}$, $A \setminus B = \{c\}$;
c) $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{6, 7\}$, $A \setminus B = \{3, 4\}$.

15. Din 30 de elevi ai unei clase, 18 cunosc engleza, 16 – franceza, iar unul nu cunoaşte niciuna dintre aceste limbi. Câți elevi cunosc ambele limbi?

16. Fiecare elev al unei clase practică cel puțin unul din sporturile: volei, atletism. Câți elevi sunt în clasă, dacă 14 joacă volei, 16 practică atletismul, iar 5 – ambele sporturi?

17. Într-un liceu toți elevii studiază cel puțin una dintre limbile clasice: latina şi greaca. 65% din elevi studiază latina, iar 75% – limba greacă. Ce parte din elevi studiază ambele limbi?

18. *Investigați!* Scrieți o relație între mulțimile A și B, dacă:

a) A este mulțimea multiplilor numărului 9, iar B – mulțimea numerelor divizibile cu 3;
b) A este mulțimea multiplilor numărului 2, iar B – mulțimea numerelor divizibile cu 4;
c) A este mulțimea multiplilor numărului 10, iar B – mulțimea divizorilor numărului 100.

19. Într-o clasă învață 30 de copii. Fiecăruia dintre ei îi place să danseze sau să cânte. Se ştie că 19 copii cântă, iar 18 dansează. Câtor copii le place să danseze şi să cânte?

20. Într-o firmă lucrează 70 de persoane, dintre care 48 cunosc engleza, 35 – franceza, iar 24 – ambele limbi. Câte persoane nu cunosc nici engleza, nici franceza?

21. 65% din iepurii pe care-i creşte Mihai preferă morcovul, 20% preferă în egală măsură morcovul şi varza. Ce parte din iepuri preferă varza?

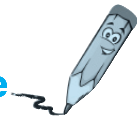
22. Din 400 de intervievați, 320 au declarat că preferă să bea ceai, 210 – cafea, iar 150 – ceai şi cafea în egală masură. Câți intervievați nu preferă nici ceaiul, nici cafeaua?

23. Fiind intervievate, 180 de persoane au declarat că preferă să vizioneze în cinematografe filme de acțiune, 190 – drame, 60 sunt interesate de ambele genuri, iar 5 persoane au declarat că nu frecventează cinematografele. Câte persoane au fost intervievate?

24. Din 200 de studenți de la Facultatea de Limbi Străine, 170 vorbesc engleza, 160 – franceza, 150 – spaniola. Fiecare vorbește cel puțin o limbă străină, nimeni nu cunoaște exact două limbi străine. Câți studenți vorbesc cele 3 limbi străine?

25. Într-un liceu învață 600 de copii. Pentru primul semestru au nota 10 la limba română 280 de elevi, la matematică – 240, la educația fizică – 460, la română și la matematică – 80, la matematică și la educația fizică – 180, la română și la educația fizică – 100 de elevi. Câți copii au 10 la toate cele trei discipline, dacă se știe că fiecare elev are la cel puțin una din cele trei discipline nota 10?

Exerciții și probleme recapitulative



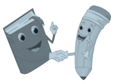
1. Selectați numerele:
a) raționale;
b) iraționale;
c) reale negative.

$-\frac{5}{16}$, $-\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\frac{19}{9}$, $7{,}11$, $\sqrt{16}$, -24, $4\frac{3}{7}$, $4{,}(6)$, $0{,}001$, $-\sqrt{\frac{1}{4}}$, -660, $-3\sqrt{8}$, $-5{,}1(3)$, $9\sqrt{7}$

2. Calculați: a) $(-3{,}8)^2$; b) $-4{,}5^2$; c) $\left(1\frac{1}{3}\right)^2$; d) $-\frac{6^2}{11}$; e) $\left(-\frac{3}{10}\right)^2$; f) $\left|-2\frac{1}{2}\right|^3$; g) $|-3|^0$.

3. Calculați: a) $\left(\frac{8}{11}\right)^2$; b) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$; c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; d) $\left(-\frac{5}{6}\right)^3$; e) $\left(1\frac{6}{7}\right)^2$.

4. Calculați: a) $2{,}3^2$; b) $(-0{,}5)^3$; c) $(-2{,}1)^2$; d) $13{,}72^0$; e) $|-2|^3$.

5.  ***Lucrați în perechi!***

Completați cu numere potrivite:

a) $0{,}9^5 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}9^{\square}$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\square} \cdot \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^7$;

c) $(-6{,}1)^{11} : 6{,}1^{10} = \square$; d) $\left(\frac{9}{25}\right)^{\square} : \left(\frac{3}{5}\right)^{\square} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$;

e) $\left|-\frac{3}{5}\right|^2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^3 = -\left(\frac{3}{5}\right)^{\square}$.

6. Calculați: a) $\left(1\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \left(1\frac{1}{5} - \frac{7}{10}\right)^2$;

b) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^6 : 0{,}5^{12} - \frac{1}{32}$.

7. Calculați:

a) 1^{2007}; b) $(-1)^{2007}$;

c) 1^{44}; d) $(-1)^{44}$;

e) $(-1)^3 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)$; f) $(-1)^{15} \cdot 1^{27} \cdot (-1)^{32}$;

g) $\frac{(-1)^7}{(-1)^8}$; h) $((-1)^5)^{20}$.

8. Calculați:

a) $\sqrt{121}$; b) $-\sqrt{2{,}56}$; c) $(\sqrt{1{,}7})^2$;

d) $(-\sqrt{7{,}3})^2$; e) $\sqrt{0{,}0009}$; f) $\sqrt{(-12)^2}$.

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $a^2 = 0{,}16$; b) $y^2 = -0{,}04$; c) $x^2 = 1$;

d) $-x^2 = -2{,}89$; e) $y^2 = \frac{1}{81}$.

10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\sqrt{x} = 2{,}5$; b) $\sqrt{y} = 0{,}7$; c) $\sqrt{a} = -0{,}1$;

d) $-\sqrt{x} = 6{,}3$; e) $-\sqrt{y} = -1{,}8$.

11. Comparați fără a extrage radicalul:

a) 8 cu $\sqrt{80}$; b) 11 cu $\sqrt{110}$;

c) 9,9 cu $\sqrt{99}$; d) 10,1 cu $\sqrt{101}$.

12. Aflați semnul valorii expresiei:

a) $6 - \sqrt{20}$; b) $\sqrt{0{,}9} - 0{,}9$; c) $\sqrt{1{,}1} - 1{,}1$;

d) $\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{7}{8}}$; e) $\frac{4}{3} - \sqrt{\frac{4}{3}}$.

13. Calculați rădăcina pătrată și rotunjiți până la zecimi rezultatul:

a) $\sqrt{8}$; b) $\sqrt{11}$; c) $\sqrt{0,5}$; d) $\sqrt{2,4}$; e) $\sqrt{17,69}$.

14. ***Lucrați în perechi!*** Reprezentați pe axă numerele:

a) mai mari sau egale cu –2,5; b) mai mici sau egale cu 3,8;

c) cuprinse între $-\sqrt{6}$ și $2\sqrt{3}$; d) care nu sunt cuprinse între 0,5 și $\sqrt{7}$.

15. Scrieți în ordine descrescătoare numerele: a) $\sqrt{6}-6$; $6-\sqrt{6}$; $\frac{\sqrt{6}}{6}$; $-\frac{6}{\sqrt{6}}$; $6\frac{1}{6}$; $-6,(6)$; $6+\sqrt{6}$; $-6\sqrt{6}$;

b) $5\sqrt{7}$; $-7\sqrt{5}$; $7\sqrt{5}$; $-5\sqrt{7}$; $\frac{5}{7}$; $-\frac{7}{5}$; $\frac{7}{5}$; $-\frac{5}{\sqrt{7}}$.

16. ***Lucrați în grup!*** Calculați:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$; b) $\sqrt{63}\cdot(-\sqrt{7})$; c) $\sqrt{3\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{1,2}$; d) $-\sqrt{\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{3\frac{1}{2}}$;

e) $-\sqrt{338}:\sqrt{98}$; f) $\frac{-\sqrt{7,5}}{-\sqrt{0,3}}$; g) $\frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt{21}}{\sqrt{7}}$; h) $\frac{\sqrt{5,4}}{\sqrt{9,6}}$.

17. Care dintre numerele -3; $\frac{4}{5}$; 2,04; $-7,9$; 3 sunt soluții ale ecuației:

a) $3x-6=0,12$; b) $-4x+3,2=0$; c) $5-0,4x=3,8$; d) $\frac{2}{3}x=1,2^2-0,08$?

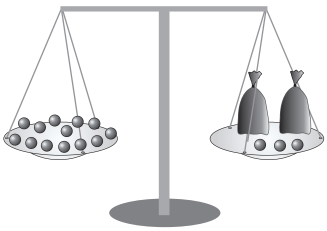
18. Rezolvați ecuația în mulțimea numerelor raționale:

a) $x-2,4=8$; b) $x+3,6=0,5$; c) $-x+8,2=6$; d) $5-x=-11,7$;

e) $-\frac{3}{4}x=3,12$; f) $2,5x-7,2=1,8$; g) $2\frac{1}{3}x+0,08=1,2$; h) $-5\frac{3}{5}x+0,48=-53$.

19. Balanțele se află în echilibru. Fiecare pungă conține același număr de bile identice. Câte bile sunt în fiecare pungă?

a)

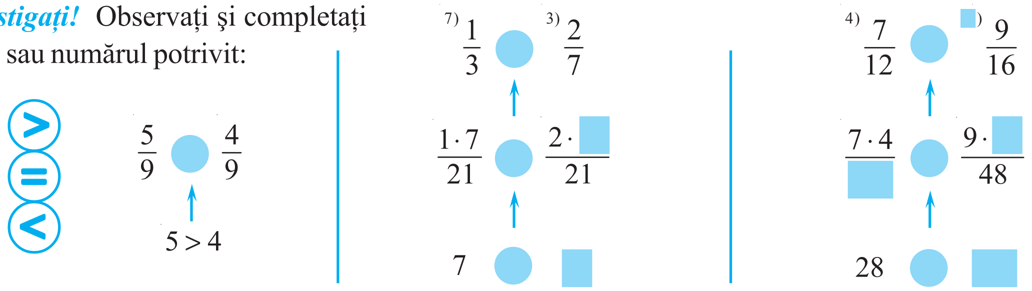


b)

20. Scrieți prenumele participanților la proba de alergare pe distanța de 200 m în ordinea descrescătoare a rezultatelor acestora:

Prenume	***Timp (sec.)***
Mihai	18,39
Petru	18,42
Ștefan	18,37
Radu	17,98
Ion	18,05
Victor	18,47

21. ***Investigați!*** Observați și completați cu semnul sau numărul potrivit:



22. Reprezentați pe axa numerelor punctele corespunzătoare numerelor cu modulul:
a) egal cu 2,5; b) număr natural mai mic decât 4; c) număr natural mai mare decât 3 şi mai mic decât 7.

23. Aflați x, dacă:
a) $|x|=18{,}1$; b) $-|x|=-2\frac{2}{7}$; c) $7-|x|=17$; d) $|x-0{,}9|=0{,}9$; e) $|x|=0$.

24. ***Investigați!*** Substituiți ● cu unul dintre semnele <, =, >, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.
a) $\frac{8}{15}$ ● $\frac{7}{15}$; $-\frac{8}{15}$ ● $-\frac{7}{15}$; 59,317 ● 59,238; $\frac{3}{16}$ ● $\frac{5}{18}$; $-1\frac{4}{9}$ ● $-1{,}(4)$.
b) $\frac{7}{3}$ ● $\frac{7}{5}$; $-\frac{7}{3}$ ● $-\frac{7}{5}$; 18,(7) ● 18,77; $\frac{9}{10}$ ● $-\frac{10}{9}$; $-\frac{9}{4}$ ● $-3{,}25$.

25. Comparați numerele x şi y, dacă:
a) $\frac{x}{y}=1{,}14$ şi $x>0$; b) $\frac{x}{y}=1\frac{2}{5}$ şi $x<0$; c) $\frac{x}{y}=-0{,}91$ şi $x>0$; d) $\frac{x}{y}=-0{,}83$ şi $x<0$.

26. Scoateți factorul de sub radical:
a) $\sqrt{90}$; b) $\sqrt{147}$; c) $\sqrt{132}$; d) $\sqrt{192}$; e) $\sqrt{588}$; f) $\sqrt{1080}$.

27. Introduceți factorul sub radical:
a) $3\sqrt{6}$; b) $6\sqrt{3}$; c) $9\sqrt{2}$; d) $5\sqrt{5}$; e) $8\sqrt{7}$; f) $7\sqrt{8}$.

28. Aflați lungimea segmentului AB (în unități ale axei), dacă:
a) $A\left(3\frac{1}{5}\right)$ şi $B(2,(6))$; b) $A(-0,(8))$ şi $B(0,0(8))$;
c) $A\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ şi $B\left(-\frac{\sqrt{75}}{8}\right)$; d) $A\left(-9\frac{1}{3}\right)$ şi $B(-3,(3))$.

29. Calculați perimetrul unui dreptunghi cu dimensiunile $\sqrt{80}$ cm şi $2\sqrt{45}$ cm.

30. Calculați lungimea unui dreptunghi cu aria de $36\,\text{cm}^2$ şi lățimea de $3\sqrt{3}$ cm.

31. Calculați aria unui dreptunghi cu dimensiunile de $\sqrt{24}$ cm şi $2\sqrt{6}$ cm.

---

32. ***Investigați!*** Aflați cel mai mare număr întreg mai mic decât: a) $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$; b) $\frac{2}{1-\sqrt{5}}$.

33. ***Investigați!*** Aflați cel mai mic număr întreg mai mare decât: a) $\frac{9-\sqrt{8}}{7}$; b) $\frac{6}{\sqrt{5}+4}$.

34. ***Lucrați în perechi!*** Calculați:
a) $|5-\sqrt{5}|+|2-\sqrt{5}|-|\sqrt{20}-3|-|6-2\sqrt{5}|$;
b) $\frac{|3\sqrt{3}-6|+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}}{|\sqrt{3}-3|-1}$;
c) $2|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}|+|3\sqrt{8}-8\sqrt{3}|+2\sqrt{12}$.

35. Copiați şi completați tabelul (rotunjiți până la sutimi).

Numele angajatului	Nr. de zile lucrate	Plata pentru o zi (lei)	Asigurarea medicală 9%	Impozit pe venit 7%	Contribuție individuală la asigurarea socială 6%	Spre achitare
Ion Moraru	22	200				
Vasile Olaru	21	250				
Alina Albu	23	220				
Gheorghe Ursu	23	180				

36. Calculați aplicând proprietăți ale operațiilor aritmetice:

a) $(2{,}18\cdot 6{,}791+2{,}18\cdot 3{,}209)\cdot 3{,}14-1{,}8\cdot 3{,}14$; b) $-9{,}25\cdot\dfrac{(16{,}2\cdot 3^2+16{,}2-28{,}8)\cdot 0{,}25}{9{,}25}$.

37. Aflați valoarea lui x din egalitatea: a) $[(3^{10}\cdot 3^5)^2:81+3\cdot(9^3)^4]:x=3^{25}$; b) $\dfrac{2^{2007}}{4^{1004}}=\dfrac{x}{0{,}5}$.

38. Completați cu numere potrivite:

a) $2\frac{2}{5}$ m = ☐ cm; b) $4\frac{1}{8}$ kg = ☐ g; c) $3\frac{5}{6}$ min = ☐ s;

d) $9\frac{1}{4}$ t = ☐ kg; e) $\frac{4}{9}$ m = ☐ cm; f) $7\frac{2}{3}$ h = ☐ min.

39. Care produs este mai convenabil a fi cumpărat?

a)

b)

c)

40. *Lucrați în grup!* Proiect *Aplicații ale numerelor reale în viața de zi cu zi.*

---

41. Reprezentați numărul ca produs de două puteri cu același exponent (baza puterii să fie număr natural, diferită de 1):

a) 1 000 000;

b) 320 000;

c) 24 300 000.

Model:
$144=3^2\cdot 4^2$.

42. Aflați ultima cifră a numărului:

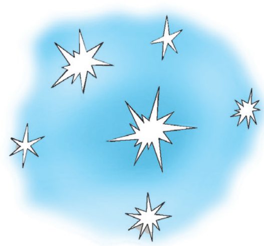
a) 2^{2012}; b) 3^{2012}; c) 4^{2012}.

43. Aflați numărul natural n din egalitatea

$2^{2n}-4=3(4+4^2+...+4^{2011})$.

44. *Numere mari!*

Pentru distanțe cosmice se utilizează unitatea de măsură *an-lumină*. Un *an-lumină* este distanța străbătută de lumină într-un an.



a) Luând în considerare că viteza luminii este egală cu 298 000 km/s și că anul are, în medie, 365,25 zile, calculați lungimea unui *an-lumină* în kilometri.

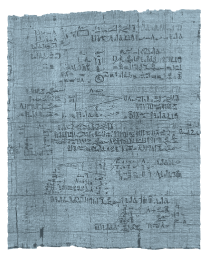
b) Galaxia cea mai apropiată de Sistemul Solar este Norul Andromedei, care se află la distanța de $2{,}25\cdot 10^6$ *ani-lumină*. Exprimați această distanță în kilometri.

c) Cea mai apropiată de Pământ este steaua Proxima Centauri, aflată la 4,2 *ani-lumină*. Exprimați această distanță în kilometri.

45. *Este interesant!*

Un **googol** este cel mai mare număr natural care are nume. Câte cifre are numărul 0,125 googol dacă 1 googol = 10^{100}?

46. Aflați a 2012-a zecimală a fracției $\frac{7}{11}$.



47. Papirusul Rhind (datat în jurul anului 1650 î.H.) conține informații despre descompunerea fracțiilor în fracții elementare, de exemplu:

$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{x}.$$

Aflați numitorul x al ultimei fracții elementare.

48. Ce număr trebuie scăzut din numărătorul fracției $\frac{537}{463}$ şi adunat cu numitorul ei, astfel încât să obținem o fracție echivalentă cu fracția $\frac{1}{9}$?

PENTRU CAMPIONI

49. Notăm $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Aflați câți factori egali cu 2 conține descompunerea în produs de factori primi a numărului 2011!.

MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

50. Suma celor cinci numere de pe fiecare linie, coloană şi diagonală trebuie să fie aceeaşi. Pentru aceasta trebuie folosite trei numere naturale diferite ori de câte ori este necesar. Care sunt aceste trei numere?

	7		27	13
6	20			32
22	23	16	9	10
				14
19	9	20		

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta 1

1. Indicați litera corespunzătoare răspunsului corect. Numărul $\sqrt{18+x}$ este rațional pentru x egal cu:

A 2 **B** 7 **C** 3 **D** 10

2. Fie $A = \{0,(5);\ 3\sqrt{3};\ -\frac{7}{10};\ -11;\ 5;\ \sqrt{26};\ \sqrt{49}\}$.

a) Ordonați crescător elementele mulțimii A.

b) Aflați mulțimea $B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin \mathbb{Q}\}$.

c) Scrieți mulțimea C, care conține trei elemente, astfel încât $C \cap A = \{-11,\ 5\}$.

d) Determinați $C \times B$.

3. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$8\sqrt{48} - 8\sqrt{80} + 5\sqrt{405} - 7\sqrt{147}.$$

4. Substituiți ◯ cu unul dintre semnele <, =, >, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

$$72:6 \ \bigcirc \ \left|2{,}56 - 9\frac{1}{5}\right|.$$

Argumentați.

5. Doi muncitori au săpat un şanț de 126 m. Unul dintre ei a săpat cu 12 m mai mult decât celălalt. Câți metri de şanț a săpat fiecare muncitor?

Varianta 2

1. Indicați litera corespunzătoare răspunsului corect. Numărul $\sqrt{14+x}$ este rațional pentru x egal cu:

A 10 **B** 5 **C** 22 **D** 20

2. Fie $A = \{0,(3);\ 2\sqrt{2};\ -\frac{9}{10};\ -12;\ 6;\ \sqrt{15};\ \sqrt{64}\}$.

a) Ordonați crescător elementele mulțimii A.

b) Aflați mulțimea $B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin \mathbb{Q}\}$.

c) Scrieți mulțimea C, care conține trei elemente, astfel încât $C \cap A = \{-12,\ 6\}$.

d) Determinați $C \times B$.

3. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$-10\sqrt{125} + 2\sqrt{108} + 7\sqrt{192} - 3\sqrt{245}.$$

4. Substituiți ◯ cu unul dintre semnele <, =, >, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

$$169:13 \ \bigcirc \ \left|15{,}24 - 2\frac{3}{5}\right|.$$

Argumentați.

5. Doi elevi au rezolvat 98 de probleme. Unul dintre ei a rezolvat cu 14 probleme mai puține decât celălalt. Câte probleme a rezolvat fiecare elev?

2 capitolul

Calcul algebric

> *Matematica este muzica rațiunii.*
> James J. Sylvester

§1. Expresii algebrice

1 Dana a procurat caiete de matematică. Un caiet costă 2 lei. Cât a plătit Dana pentru 5 caiete? Dar dacă un caiet costă x lei, cât va plăti Dana pentru 5 caiete?

Rezolvare:

În primul caz Dana va plăti $5 \cdot 2 = 10$ lei. Iar în cazul al doilea Dana va plăti $5x$ lei.

$\underbrace{5 \cdot 2}$ expresie numerică $\qquad$ $\underbrace{5x}$ expresie algebrică

Expresiile $4a$, $1{,}3ab$, $-6x$, $\sqrt{3}x^2y$, xyz, $8t$, de asemenea, sunt expresii algebrice.

Definiție

Expresia sub forma unui produs în care factorii sunt numere şi litere se numeşte **expresie algebrică**.

Fiecare expresie algebrică este formată din **coeficient** şi **parte literală**.

Observații

Fiecare dintre expresiile algebrice $2a$, $3t$, a, $2t$, $-5bc$, $\sqrt{2}y$ este formată din **coeficient** şi **parte literală**.
Coeficientul este număr real.

$-\sqrt{2}\,x$; $\frac{1}{9}a^2b$; $2xyz$

■ – coeficientul

■ – partea literală

Rețineți

1) Suma a două sau mai multe expresii algebrice este expresie algebrică.
$2x^2 - 3xy$
$y - \sqrt{5} + tz + z^2$

2) Produsul a două sau mai multe expresii algebrice este expresie algebrică.
$2ab \cdot b^2$
$x \cdot y \cdot x^2 z^2$

3) Dacă $E \neq 0$ este expresie algebrică, atunci E^{-1} este expresie algebrică.
$E(x) = x^3$
$E^{-1}(x) = \frac{1}{x^3}$

Definiție

Termenii unei expresii algebrice se numesc **asemenea** dacă ei au aceeaşi parte literală.

Explicăm

$$\sqrt{3} - 2a^2 + 4\sqrt{3} + 5a^2 + ab$$

Termeni asemenea   Termeni asemenea

Rețineți

Termenii asemenea **se reduc** (**se adună**) în baza proprietății de distributivitate a înmulțirii numerelor reale în raport cu adunarea sau scăderea.

Deci, $\sqrt{3} - 2a^2 + 4\sqrt{3} + 5a^2 + ab = (\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) - (2a^2 - 5a^2) + ab = 5\sqrt{3} + 3a^2 + ab.$

Rețineți

Cu expresiile algebrice se pot efectua aceleaşi operații care se efectuează cu numere: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere. Aceste operații au aceleaşi proprietăți ca şi operațiile cu numere reale.

Deoarece literele dintr-o expresie algebrică pot fi înlocuite cu numere diferite, literele se numesc **variabile**, iar **expresia algebrică** este numită **expresie cu variabile**.

Expresia cu o singură variabilă se notează, de regulă, $E(x)$.

De exemplu: $E(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

2 Aflați valoarea expresiei algebrice $E(x)$ pentru $x = 2$.

Explicăm

Calculăm $E(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 9$.

Numărul 9 este valoarea expresiei $E(x)$ pentru valoarea variabilei $x = 2$.

Exercițiu

Fie expresia $ab - a - b$. Aflați valoarea expresiei pentru $a = 1,\ b = 3$.

Rezolvare:

Înlocuim valorile $a = 1$ şi $b = 3$ în expresie.

Obținem: $1 \cdot 3 - 1 - 3 = 3 - 4 = -1$.

Răspuns: -1.

Definiție

Numărul obținut în rezultatul înlocuirii literelor (variabilelor) cu valorile lor numerice şi efectuării operațiilor respective se numeşte **valoarea expresiei algebrice**.

Rețineți

Dacă la calcularea valorii expresiei numerice sau algebrice se întâlneşte împărțirea la 0, ridicarea lui 0 la puterea 0 sau ridicarea lui 0 la putere cu exponent negativ, spunem că **expresia nu are sens** pentru valorile respective.

Explicăm

Expresiile de tipul $\frac{10}{0}$, $6 : 0$, 0^0 şi 0^{-3} nu au sens.

Expresia $E(x) = \frac{3}{x-1}$ nu are sens pentru $x = 1$, deoarece prin înlocuire în $E(x)$ a valorii $x = 1$ obținem $\frac{3}{0}$. Această expresie nu are sens. Deci, pentru $x = 1$ expresia $E(x)$ nu are sens.

Exerciții și probleme

1. Copiați și completați:

a)

Expresia	$-3x$	$2a^2$	$0{,}4xy$	$1\frac{1}{2}ab$	$\sqrt{2}xa$	$-5ax$	b^2c	$-3\sqrt{3}c$
Coeficientul								

b)

Expresia	xzy	$-abc$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{\sqrt{3}}{2}c^2$	-15	$0,(8)d$	$7{,}2x^2$	$-\frac{ax}{2}$
Coeficientul								

2. ***Lucrați în perechi!*** Calculați valoarea expresiei numerice:

a) $3\cdot 17+25:0{,}5+1$; b) $16:(-0{,}5)-6(15+3^2\cdot 7)$;

c) $(24:1{,}2-8)\cdot(78:3+2\cdot 0{,}5)$; d) $(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{25}-3{,}5\cdot 0{,}4\sqrt{75}$.

3. Fie expresia algebrică $E(x)=1{,}4x^2$. Calculați valoarea expresiei pentru:

a) $x=0$; b) $x=1$; c) $x=-1$; d) $x=5$; e) $x=-10$; f) $x=\sqrt{2}$.

4. Fie expresia algebrică $E(x)=\sqrt{3}x-x^3$. Aflați valoarea expresiei pentru:

a) $x=-2$; b) $x=0$; c) $x=\sqrt{3}$; d) $x=10$.

5. ***Investigați!*** Aflați pentru care valori ale variabilei expresia nu are sens:

a) $E(x)=\frac{3}{x}$; b) $E(x)=\frac{2x}{x+2}$; c) $E(x)=\frac{1}{3x-6}$;

d) $E(x)=\frac{x^2}{4-x}$; e) $E(x)=\frac{x+2}{x-5}$; f) $E(x)=\frac{\sqrt{3}+x^2}{2x}$.

6. ***Lucrați în perechi!*** Scrieți expresia numerică valoarea căreia este egală cu 100, folosind de fiecare dată patru cifre de 9 și semnele operațiilor aritmetice.

7. ***Investigați!*** Observați expresia și scrieți termenii asemenea:

a) $-2x+3ay-\frac{1}{3}x+2{,}5y^2+9ay-\sqrt{5}y^2+1{,}4x-5$.

$-2x$, ...; $3ay$, ...; $2{,}5y^2$, ...

b) $\frac{x^2a}{2}-\frac{5}{2}+\frac{xa}{2}-\frac{5y}{3}-\sqrt{2}xa-x^2a+1+y$.

$\frac{x^2a}{2}$, ...; $\frac{xa}{2}$, ...; $-\frac{5}{2}$, ...; $-\frac{5y}{3}$, ...

8. Reduceți termenii asemenea: a) $2x-5y+3x+y$; b) $-2+2a-3b-a+b$;

c) $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2\sqrt{2}x+\sqrt{2}y$; d) $a+b-1+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+1$.

9. Citiți expresia utilizând termenii: *suma*, *deferența*, *produsul*, *câtul*:

a) $m+n+p$; b) $2t-z$; c) xyz; d) $\frac{x+3}{4}$; e) $\frac{m-n}{p}$; f) $\frac{xy}{x+y}$; g) $\frac{x^2}{x-y}$.

10. Aflați valoarea expresiei:

a) $E(x)=\frac{3x^2}{1-x}$, pentru $x=10$; b) $E(x)=\frac{x}{2+x^2}$, pentru $x=-\sqrt{2}$;

c) $E(x)=\frac{2x-16}{4x+12}$, pentru $x=2{,}5$; d) $E(x)=\frac{x^3-x+1}{x^4+2}$, pentru $x=-1$.

11. Aflați valoarea expresiei:

a) $5a-3b$, pentru $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{3}$;

b) $0{,}5t-4z$, pentru $t=4$, $z=-0{,}5$;

c) $3a^2-\frac{1}{2}b^2$, pentru $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{8}$;

d) x^3-y^3, pentru $x=2$, $y=1$.

12. Perimetrul triunghiului este P, iar două laturi ale lui sunt a și b.

a) Scrieți expresia pentru calcularea laturii a treia c.

b) Calculați valoarea expresiei obținute la a) pentru:

1) P = 25 cm, a = 8 cm, b = 7 cm;

2) P = 18,5 cm, a = 6,8 cm, b = 4 cm.

13. ***Lucrați în perechi!*** Un lot agricol are forma unui dreptunghi cu dimensiunile a km și b km. După curățarea terenului adiacent aria inițială a lotului s-a mărit cu 1,55 km^2.

a) Scrieți expresia pentru calcularea ariei lotului după mărirea acestuia.

b) Calculați (în m^2) aria obținută la a) pentru:

1) a = 25,2 m, b = 78,5 m;

2) a = 100,4 m, b = 96,8 m.

14. Aflați valoarea expresiei:

a) $|a|+|b|-|c|-|d|$, pentru $a=2$, $b=-3$, $c=8$, $d=100$;

b) $|a-1|+|b+1|-|c-1|-|d+1|$, pentru $a=-3{,}8$, $b=-5$, $c=-7{,}8$, $d=-101$.

15. Un aparat confecționează câte 2 piese în fiecare minut. El trebuie să confecționeze 540 de piese. Aflați cât timp a funcționat aparatul dacă i-a mai rămas să confecționeze n piese.

16. Fie expresia $x^2-2y^2-z^2$. Aflați valoarea expresiei pentru:

a) $x=0$, $y=1$, $z=-1$;

b) $x=4$, $y=0$, $z=1$;

c) $x=-2$, $y=-3$, $z=-4$.

17. Fie $A=3x-y$, $B=x+y-10$, $C=1{,}5x+2{,}4$. Aflați:

a) $A+B+C$;

b) $A+B-C$;

c) $A-B-C$;

d) $-A+B-C$;

e) $-A-B-C$;

f) $A-B+C$.

18. Fie expresia $\frac{6+a}{a-b+1}$. Determinați trei perechi de valori pentru a și b, astfel încât expresia să nu aibă sens.

19. Turiștii au parcurs 2 ore cu viteza v km/h prin pădure și, apoi, 5 km pe șosea.

a) Scrieți formula s de calcul a drumului parcurs de turiști.

b) Exprimați din această formulă v prin s.

c) Aflați v pentru s = 12 km.

20. Scrieți sub formă de expresie algebrică:

a) suma a două numere naturale consecutive;

b) produsul a două numere întregi consecutive;

c) produsul a trei numere naturale consecutive, dacă cel mai mic număr este $2n$;

d) suma a trei numere naturale consecutive impare, dacă cel mai mic număr este $2k+1$.

21. Câte monede de 2 lei și 5 lei sunt necesare pentru a obține 23 de lei?

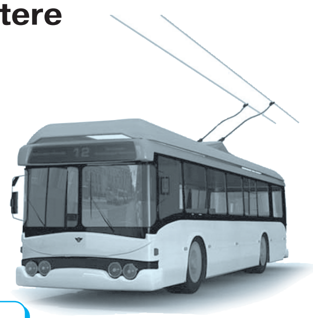
22. Cât timp un elev se află la școală într-o zi, dacă el are x lecții, y pauze a câte 10 min. și z pauze a câte 15 min.?

a) Scrieți formula de rezolvare a problemei.

b) Calculați (în ore) pentru $x=5$, $y=3$ și $z=1$.

§ 2. Operații cu numere reale reprezentate prin litere

2.1. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere



1 Domnul Bănuț a fost timp de două zile la Chișinău. Fiind econom (sau, poate, curios), a hotărât să calculeze cât a cheltuit pentru călătoriile cu transportul urban.

Observați tabelul, luând în considerare că a este prețul (în lei) al unei călătorii cu autobuzul, iar t – prețul (în lei) al unei călătorii cu troleibuzul.

	Autobuz		Troleibuz	
	Nr. de călătorii	Costul	Nr. de călătorii	Costul
Sâmbătă	2	$2a$	3	$3t$
Duminică	1	a	2	$2t$
Total	3	?	?	?

Explicăm

Sâmbătă, domnul Bănuț a cheltuit $(2a+3t)$ lei.

Duminică, domnul Bănuț a cheltuit ($\square$ + $\square$) lei.

Domnul Bănuț a cheltuit în total $(2a + 3t + a + \square)$ lei, adică $(3a + \square)$ lei.

2 Examinați și completați: $2\sqrt{3}-\sqrt{5}+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}$ $\qquad$ $2a+3t+a+2t$

Radicali asemenea $\qquad$ Termeni asemenea

$2\sqrt{3}$ și $3\sqrt{3}$; $\square$ și $2\sqrt{5}$. $\qquad$ $2a$ și a; $\square$ și $\square$.

Rețineți

A aduna (sau **a reduce**) **termenii asemenea** înseamnă a înlocui acești termeni cu un termen asemenea, având coeficientul egal cu suma coeficienților termenilor dați.

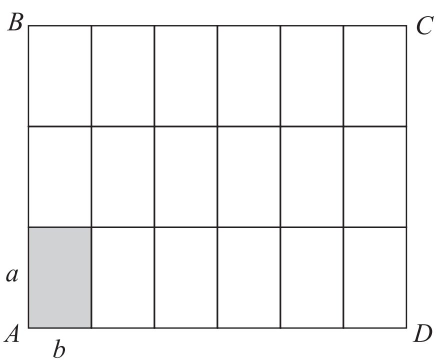
• Reproduceți și completați:

Expresia	$2a$	t	$-\sqrt{3}x$	$\frac{1}{4}y$	$-\frac{a}{3}$	$5sm$
Coeficientul		1				

3 Observați și continuați reducerea termenilor asemenea:

$$4\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}y+\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}-1=\left(4\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)x+\left(-\frac{1}{9}+\square\right)y-1=5x+\square\, y-1.$$

2.2. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere



1 Dreptunghiul $ABCD$ este împărțit într-o rețea de dreptunghiuri cu dimensiunile a și b.

Fie $\mathscr{A}$ aria dreptunghiului $ABCD$, iar S – aria dreptunghiului mic.

Completați adecvat:

Dimensiunile dreptunghiului $ABCD$ sunt $3a$ și $6b$.

$\mathscr{A}=3a\cdot 6b$, iar $S=\square$.

$3a\cdot 6b=18\cdot\square$

Atunci, $\mathscr{A}=18\cdot S=18\cdot\square$.

• Ce rezultat se obține dacă $a=b$?

Lucrați în perechi!

2 Examinați şi completați adecvat:

a) $3\cdot 2^2\cdot 5\cdot 2^3\cdot 4\cdot 5=3\cdot 4\cdot 2^{2+3}\cdot 5^{\square}=\square\cdot 2^{\square}\cdot 5^{\square}$.

b) $5a^4\cdot 6b^2\cdot a^3\cdot 3b=5\cdot\square\cdot 3\cdot a^{4+3}\cdot b^{\square+\square}=\square\cdot a^{\square}\cdot b^{\square}$.

Rețineți

Pentru a înmulți numere reale reprezentate prin litere:
- înmulțim coeficienții;
- înmulțim părțile literale, utilizând proprietățile puterii.

Lucrați în perechi!

3 Examinați şi completați adecvat:

a) $(18\cdot 5^4):(6\cdot 5^2)=(18:6)\cdot(5^4:5^2)=3\cdot 5^{\square-\square}=3\cdot 5^{\square}$.

b) $12x^5y^3:(3x^2y)=\ (12:3)\cdot(x^5:x^2)\cdot(y^3:y)=\square\cdot x^{5-2}\cdot y^{\square-\square}=\square\cdot x^{\square}y^{\square}$.

Rețineți

Pentru a împărți numere reale reprezentate prin litere:
- împărțim coeficienții;
- împărțim părțile literale, utilizând proprietățile puterii.

2.3. Ridicarea la putere cu exponent natural a numerelor reale reprezentate prin litere

1 Examinați şi completați adecvat:

a) $\left(\frac{3}{4}\cdot 7^2\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot(7^2)^{\square}=\frac{3^3}{4^{\square}}\cdot 7^{2\cdot\square}=\frac{3^{\square}}{4^{\square}}7^{\square}$;

b) $(-0{,}2ab^3)^3=(-0{,}2)^3\cdot a^{\square}\cdot(b^3)^{\square}=\square\cdot a^{\square}\cdot b^{3\cdot\square}=-0{,}008\cdot a^{\square}b^{\square}$.

Rețineți

Pentru a ridica la putere cu exponent natural un număr real reprezentat prin litere:
- ridicăm la puterea dată coeficientul;
- ridicăm la puterea dată fiecare factor din partea literală.

2 Aflați: a) $(5x^2)^3$; b) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^2$; c) $(\sqrt{2}b\cdot\sqrt{3}c)^4$.

Rezolvare:

a) $(5x^2)^3=(5x^2)\cdot(5x^2)\cdot(5x^2)=(5\cdot 5\cdot 5)(x^2\cdot x^2\cdot x^2)=\square\cdot\square$.

b) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^2=\frac{2a}{3b}\cdot\frac{2a}{3b}=\frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square}=\frac{(\square)^2}{(\square)^2}=\frac{\square}{\square}$.

c) $(\sqrt{2}b\cdot\sqrt{3}c)^4=(\sqrt{2}b\cdot\sqrt{3}c)\cdot(\sqrt{2}b\cdot\sqrt{3}c)\cdot(\sqrt{2}b\cdot\sqrt{3}c)\cdot(\sqrt{2}b\cdot\sqrt{3}c)=$

$=(\sqrt{2}\cdot\square\cdot\square\cdot\square)\cdot(b\cdot\square\cdot\square\cdot\square)\cdot$

$\cdot(\sqrt{3}\cdot\square\cdot\square\cdot\square)\cdot(c\cdot\square\cdot\square\cdot\square)=$

$=(\sqrt{2})^{\square}\cdot b^{\square}\cdot(\sqrt{3})^{\square}\cdot c^{\square}=\square b^4c^4$.

Răspuns: a) $\square$; b) $\square$; c) $\square$.

Rețineți

Ridicarea la putere cu exponent natural a numerelor reale exprimate prin litere are aceleași proprietăți ca și ridicarea la putere a numerelor reale. Pentru numerele reale a și b, exprimate prin litere, avem:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a \neq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$;   2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$;

3) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, $m \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$;   4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$, $b \neq 0$, $m \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$;

5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $a \neq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Exerciții și probleme

1. Efectuați:
a) $2x - 3y + 4x + y$;
b) $a^2 - 3b - 4a^2 - 6b$;
c) $1{,}2x + 2{,}5xy + 3 - 0{,}5xy - x + y^2$;
d) $20x^3 - x^2 + 4x^2 + 2x - 5$;
e) $\frac{3}{2}a - \frac{1}{5}b + a - 3b$;
f) $-4{,}8t - 2z + 3{,}5t - 7{,}2z + 30$.

2. Efectuați înmulțirea:
a) $3x \cdot 5y$;   b) $-2a \cdot (-3b)$;   c) $2xy \cdot x$.

3. Scrieți ca sumă expresia:
a) $7{,}5xy$;   b) $-\frac{2}{5}x^2$;   c) $\sqrt{3}y$;   d) x.

4. Efectuați înmulțirea:
a) $-\frac{1}{4}x^2y \cdot 2xy$;   b) $0{,}6ab^2 \cdot 5a^2b$;
c) $2x^3y \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)$;   d) $-3\sqrt{18}ab \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}a^3b^2$.

5. Efectuați împărțirea:
a) $12xy : (3x)$;   b) $-\frac{2}{27}x^3y^4 : (\frac{1}{9}x^2y)$;
c) $0{,}1a^4b^2 : (-5ab^2)$;   d) $1{,}(5)a^6b^7 : (0{,}(5)a^3b^5)$.

6. Ridicați la putere:
a) $(-2a^3b)^2$;   b) $(3xy^2)^4$;
c) $\left(\frac{1}{3}x^5y\right)^3$;   d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}ab^5\right)^4$.

7. *Lucrați în perechi!* Completați expresia, astfel încât să se reducă toți termenii expresiei:
a) $-3xy + 2x^2y - 5 + \ldots$;
b) $\sqrt{2}ab - \sqrt{3}a^2b + 10 + \ldots$

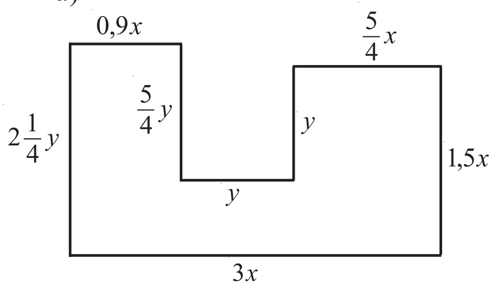
8. Completați cu expresia potrivită:
a) $2x^2y^3 \cdot \boxed{} = 6x^3y^5$;   b) $\boxed{} \cdot ab^2 = 5a^3b^2$;
c) $3xy \cdot \boxed{} = 0{,}3x^5y^2$;   d) $\boxed{} \cdot 2a = \frac{2}{3}a^2b^2$.

9. Reduceți termenii asemenea:
a) $2y - 5x^2 + 51 - 18x^2 - 2y + 3x^2 - 50 - 5x + 10x^2$;
b) $\frac{2}{5}ax + ax^2 - \frac{1}{10}ax - a^2x - 0{,}1ax + a^2 - \frac{2}{3}a^2 + ax$.

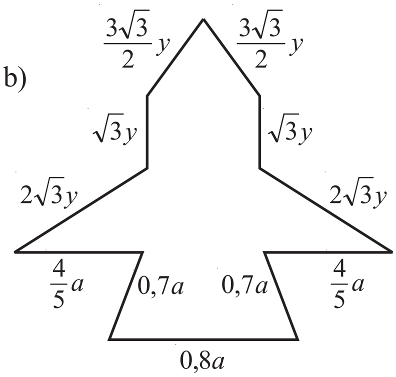
10. Copiați și completați:
a) $4x^5y^2 : \boxed{} = 2x^3y$;   b) $\boxed{} : 3ab^2 = 3ab$;
c) $x^3y^8 : \boxed{} = 3x$;   d) $\boxed{} : a^2b^3 = 6a^3b^2$.

11. *Lucrați în grup!*
Calculați perimetrul figurii:

a)



b)



12. Produsul dintre pătratul unui număr şi cubul altui număr este de 15 ori mai mare decât dublul produsului pătratelor acestor numere. Aflaţi unul din numere.

13. Fie expresia $E(x)=\frac{1}{x^2-2x}+\frac{1}{5-4x}$. Calculaţi valoarea expresiei pentru $x=0{,}125$.

14. De câte ori perimetrul unui dreptunghi este mai mare decât perimetrul unui pătrat, dacă lungimea dreptunghiului este de 2,5 ori mai mare, iar lăţimea – de 1,2 ori mai mică decât lungimea laturii pătratului?

15. De câte ori aria unui dreptunghi este mai mare decât aria unui pătrat, dacă dimensiunile dreptunghiului sunt mai mari decât lungimea laturii pătratului de 1,2 ori şi, respectiv, de 1,5 ori?

16. Suma a două numere este cu 124 mai mare decât diferenţa lor. Aflaţi numerele, dacă produsul lor este egal cu 310.

17. Media aritmetică a trei numere este 25. Al doilea număr este cu 4 mai mic decât primul, iar diferenţa dintre al treilea şi al doilea este 8. Aflaţi cele trei numere.

18. Completaţi adecvat:

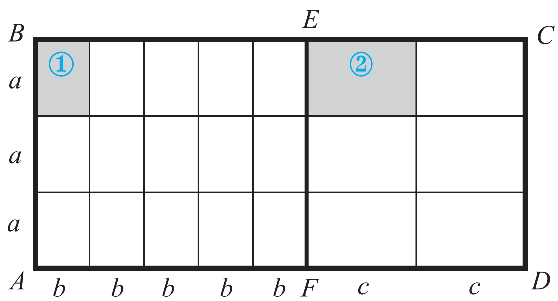
a) Dacă $5^n=625$, atunci $n=\square$.

b) Dacă $3^m=243$, atunci $m=\square$.

19. Aflaţi $(a+b+c)^2$.

§3. Formule de calcul prescurtat

3.1. Desfacerea parantezelor



1 Dreptunghiul $ABCD$ este împărţit în două dreptunghiuri: $ABEF$ şi $FECD$. Fiecare dintre dreptunghiurile $ABEF$ şi $FECD$ este divizat într-o reţea de dreptunghiuri. Fie $\mathscr{A}$ aria dreptunghiului $ABCD$.

Observaţi desenul şi completaţi:

$\mathscr{A}=3a(5b+2c)$

$\mathscr{A}=\mathscr{A}_{ABEF}+\mathscr{A}_{FECD}=$

$=3a\cdot 5b+3a\cdot\square$

$3a(5b+2c)=$

$=3a\cdot 5b+\square\cdot\square=$

$=\square ab+\square ac$

Reţineţi

Înmulţirea numerelor reale reprezentate prin litere este distributivă faţă de adunare:
Pentru orice numere reale a, b, c:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\qquad (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c.$$

① ② ③ ① ② ① ③ ① ② ③ ① ③ ② ③

• Completaţi adecvat:

$a(b-c)=a(b+(-c))=a\cdot\square-a\cdot\square$.

Reţineţi

$$a(b\pm c)=ab\pm ac$$

2 Examinaţi şi completaţi adecvat:

$(a+b)\cdot c \quad ac + bc$

$$(2x+3y)(s+t)=2x\cdot(s+t)+\square\cdot(s+t)=2xs+2xt+\square\cdot s+\square\cdot t.$$

$a\cdot(b+c) \quad ab \quad ac$

Rețineți

Pentru orice numere reale a, b, c: $\underset{\textcircled{1}}{(a}+\underset{\textcircled{2}}{b)}\cdot\underset{\textcircled{3}}{(c}+\underset{\textcircled{4}}{d)}=\underset{\textcircled{1}}{a}\cdot\underset{\textcircled{3}}{c}+\underset{\textcircled{1}}{a}\cdot\underset{\textcircled{4}}{d}+\underset{\textcircled{2}}{b}\cdot\underset{\textcircled{3}}{c}+\underset{\textcircled{2}}{b}\cdot\underset{\textcircled{4}}{d}.$

3.2. Pătratul sumei a doi termeni

Examinați, comentați și completați adecvat: $(a+b)^2=?$

Metoda I $(a+b)^2=\underset{\textcircled{1}}{(a}+\underset{\textcircled{2}}{b)}\cdot\underset{\textcircled{3}}{(a}+\underset{\textcircled{4}}{b)}=\underset{\textcircled{1}}{a}\cdot\underset{\textcircled{3}}{a}+\underset{\textcircled{1}}{a}\cdot\underset{\textcircled{4}}{b}+\underset{\textcircled{2}}{\square}\cdot\underset{\textcircled{3}}{\square}+\underset{\textcircled{2}}{\square}\cdot\underset{\textcircled{4}}{\square}=$

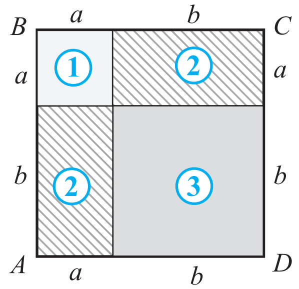
$=a^2+2\,\square\,\square+\square^2$

Metoda II $\mathscr{A}_{ABCD}=(a+b)^2$ sau

$\mathscr{A}_{ABCD}=\mathscr{A}_{\textcircled{1}}+2\mathscr{A}_{\textcircled{2}}+\mathscr{A}_{\textcircled{3}}=a^2+2\,\square\,\square+\square^2$

$\Downarrow$

$(a+b)^2=a^2+2\,\square\,\square+\square^2$



Rețineți

Pătratul unei sume a doi termeni este egal cu suma pătratelor lor plus dublul produsului termenilor: $\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$.

3.3. Pătratul diferenței a două numere reale

Examinați, comentați și completați adecvat: $(a-b)^2=?$

$(a-b)^2=[a+(-b)]^2=\bigcirc^2+2\cdot a\cdot(-b)+\square^2=\bigcirc^2-2ab+\square^2$

Rețineți

Pătratul diferenței a două numere reale este egal cu descăzutul la pătrat plus scăzătorul la pătrat, minus dublul produsului lor: $\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$.

• Demonstrați că $(a-b)^2=(b-a)^2$.

3.4. Produsul dintre suma și diferența a două numere reale

Examinați, comentați și completați adecvat: $(a+b)(a-b)=?$

$(a+b)(a-b)=\underset{\textcircled{1}}{(a}+\underset{\textcircled{2}}{b)}\underset{\textcircled{3}}{(a}+\underset{\textcircled{4}}{(-b))}=\underset{\textcircled{1}}{a}\cdot\underset{\textcircled{3}}{a}+\underset{\textcircled{1}}{a}\underset{\textcircled{4}}{(-b)}+\underset{\textcircled{2}}{\square}\,\underset{\textcircled{3}}{\square}+\underset{\textcircled{2}}{\square}\,\underset{\textcircled{4}}{\square}=$

$=a^2-ab+\square\,\square+\square^2=\square$

Rețineți

Produsul dintre suma și diferența a două numere reale este egal cu diferența pătratelor celor două numere:

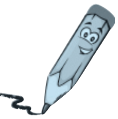
$\boxed{(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2}$.

$(\bigcirc+\square)^2=\bigcirc^2+2\bigcirc\square+\square^2$

$(\bigcirc-\square)^2=\bigcirc^2-2\bigcirc\square+\square^2$

$(\bigcirc+\square)(\bigcirc-\square)=\bigcirc^2-\square^2$

Exerciții și probleme



1. Desfaceți parantezele:
a) $x(y+z)$;
b) $(y-x)z$;
c) $2a(3b-c)$;
d) $-\frac{1}{2}x(2x+y)$.

2. Desfaceți parantezele:
a) $(x+y)(u+v)$;
b) $(u-v)(x+y)$;
c) $(a-b)(c-d)$;
d) $(b-a)(x+y)$.

3. *Lucrați în perechi!* Calculați:
a) $-\sqrt{3}(\sqrt{12}+\sqrt{3})$;
b) $\sqrt{6}(\sqrt{24}-\sqrt{6})$;
c) $(\sqrt{8}+\sqrt{5})(\sqrt{8}-\sqrt{5})$;
d) $\left(2-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(2+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

4. Calculați aria dreptunghiului cu dimensiunile $(\sqrt{5}+3)$ cm și $(3-\sqrt{5})$ cm.

5. Desfaceți parantezele:
a) $\frac{1}{9}x^2y(9x-3y^2)$;
b) $\frac{2}{3}xy^2(2y^2+3x^2)$;
c) $(x^2-2y^2)(5x+0{,}5y)$;
d) $(3x^3+4y)\left(\frac{1}{3}y+\frac{1}{12}x^2\right)$.

6. Desfaceți parantezele:
a) $(2a-\sqrt{3})(a^2+3a-\sqrt{3})$;
b) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
c) $(b-2b^2+1)(1-b)$;
d) $(x^2+2xy+y^2)(x-y)$.

7. Scrieți ca produs:
a) $2x-4$;
b) $ab+a$;
c) $xy+x^2$;
d) $3ab-6bc$.

8. *Lucrați în perechi!* Scrieți ca produs:
a) $-3a+2$;
b) $1{,}5x-8$;
c) $-\sqrt{3}-x$;
d) $-7+2b$.

9. Desfaceți parantezele:
a) $6m(n+1)$;
b) $3b(4y-3)$;
c) $5x(3a+4b)$;
d) $7y^3(y^2+3)$;
e) $(x-1)(4x+1)$;
f) $(x-2)(9-y)$;
g) $(a-b)(5+ay-by)$.

10. Efectuați:
a) $(x+y)^2$;
b) $(a-3)^2$;
c) $(x+a)^2$;
d) $(b-2)^2$;
e) $(3-x)^2$;
f) $(4+a)^2$.

11. Efectuați:
a) $(2x-3y)^2$;
b) $(3a+5b)^2$;
c) $(\sqrt{3}x-\sqrt{2}y)^2$;
d) $\left(\frac{1}{3}a+2x\right)^2$;
e) $(\sqrt{3}+3b)^2$;
f) $\left(\frac{b}{4}-\frac{a}{3}\right)^2$.

12. Efectuați:
a) $(x+y)(x-y)$;
b) $(c-b)(c+b)$;
c) $(x+4)(x-4)$;
d) $(8-a)(8+a)$;
e) $(y-\sqrt{3})(y+\sqrt{3})$;
f) $(\sqrt{7}-x)(x+\sqrt{7})$.

13. *Lucrați în perechi!* Copiați și completați:
a) $(\square+8a)(\square-8a)=49y^2-\square$;
b) $(5x-\square)(5x+\square)=\square-7y^2$;
c) $(\square-3b)(\square+\square)=25y^2-9b^2$;
d) $(0{,}6a+\square)(\square-\square)=0{,}36a^2-2b^2$.

14. Comparați aria unui pătrat și cea a unui dreptunghi, dacă lungimea dreptunghiului este cu $\sqrt{10}$ cm mai mare, iar lățimea – cu $\sqrt{10}$ cm mai mică decât lungimea laturii pătratului.

15. Comparați perimetrul unui pătrat și cel al unui dreptunghi, dacă lungimea dreptunghiului este cu $3\sqrt{3}$ cm mai mare, iar lățimea – cu $5\sqrt{3}$ cm mai mică decât lungimea laturii pătratului.

16. *Lucrați în grup!* Copiați și completați:
a) $\square(2xy-5y)=10x^3y^2-\square$;
b) $-7ax(\square+\square)=a^2x-14a^3x^2$;
c) $\square\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{4}{3}y^2\right)=\square+\frac{1}{9}xy^3$;
d) $\frac{5}{6}a^2b(\square+\square)=a^2b^2+5a^2b$.

17. Scrieți ca produs:
a) $5a^2b-25ab^2$;
b) $-18x^4y^5-24x^5y^4$;
c) $-2xy+3x^3y$;
d) $16xy^4+24y$.

18. *Investigați!* Fie trei numere naturale consecutive. Pătratul primului număr este cu 56 mai mic decât produsul celorlalte două numere. Aflați numerele.

19. Desfaceți parantezele:

a) $5(x-y)^2$; b) $(x-3)(y-2)$;

c) $(x-y)(3-y)$; d) $(b+1)(2a+b)$.

20. Copiați și completați:

a) $(3a+\square)^2=9a^2+42a+\square$;

b) $(\square-5b)^2=36a^2-\square+25b^2$;

c) $(4x-\square)^2=\square-24xy+\square$;

d) $(\square+\sqrt{2}a)^2=\square+4\sqrt{3}ab+\square$.

21. Aflați aria pătratului cu latura de:

a) $(\sqrt{5}-2)$ cm; b) $(2\sqrt{3}+1)$ cm.

22. Pătratul unui număr natural este cu 65 mai mic decât pătratul succesorului său. Aflați numărul.

23. Pătratul unui număr natural este cu 85 mai mare decât pătratul predecesorului său. Aflați numărul.

24. Dacă mărim lungimea laturii unui pătrat cu 6 cm, obținem un nou pătrat, cu aria cu 132 cm² mai mare. Aflați lungimea laturii pătratului inițial.

25. Dacă micșorăm lungimea laturii unui pătrat cu 8 cm, obținem un nou pătrat, cu aria cu 128 cm² mai mică. Aflați lungimea laturii pătratului inițial.

26. Aplicând formula $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, calculați oral:

a) $101\cdot 99$; b) $51\cdot 49$;

c) $61\cdot 59$; d) $102\cdot 98$;

e) $32\cdot 28$; f) $43\cdot 37$.

27. Aplicând formulele $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$, calculați oral:

a) 41^2; b) 59^2; c) 51^2;

d) 38^2; e) 62^2.

28. *Investigați! Adevărat* sau *fals?*

a) Pentru orice numere reale a și b are loc relația $(a+b)^2=(-a-b)^2$.

b) Pentru orice numere reale a și b are loc relația $(a-b)^2=-(b-a)^2$.

c) Pentru orice numere reale a și b are loc relația $2(a^2-b^2)=(a-b)^2+(a+b)^2$.

29. Se știe că $a+\frac{1}{a}=4$. Aflați:

a) $a^2+\frac{1}{a^2}$; b) $a^4+\frac{1}{a^4}$.

30. Luând în considerare că $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, calculați suma:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

31. Se știe că $\frac{1}{a}-a=8$. Aflați: a) $a^2+\frac{1}{a^2}$; b) $a^4+\frac{1}{a^4}$.

32. Calculați:

a) $(\sqrt{3}-2)^{100}\cdot(\sqrt{3}+2)^{100}$; b) $(9-4\sqrt{5})^{50}\cdot(9+4\sqrt{5})^{50}$;

c) $(\sqrt{8}-\sqrt{2})^{20}$; d) $(\sqrt{3}-\sqrt{12})^{16}$.

33. *Investigați!* Demonstrați că dacă a este număr întreg impar, atunci a^3-4a de asemenea este număr întreg impar.

34. Fie trei numere naturale consecutive. Demonstrați că dublul primului număr este cu 3 mai mic decât modulul diferenței pătratelor celorlalte două numere.

MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

35. Pentru 32 de baloane trebuie plătiți atâția lei, câte baloane se pot procura cu 8 lei. Cât costă un balon?

§4. Descompunerea unei expresii algebrice în produs de factori

4.1. Factorizări (scoaterea factorului comun)

1 Scrieți ca produs de factori expresia $12x^4y^3+18x^2y^5$.

$12x^4y^3+18x^2y^5=$

$=\left\{\begin{array}{l}12x^4y^3:(6x^2y^3)=2x^2\\ 18x^2y^5:(6x^2y^3)=3y^{\square}\end{array}\right\}=$

$=6x^2y^3(2x^2+3y^{\square})$

① Găsim c.m.m.d.c. al coeficienților 12 şi 18: $(12,18)=\mathbf{6}$.

② Găsim cel mai mic exponent al puterii fiecărui factor comun din părțile literale:

$\boldsymbol{x}\to\min(4,2)=\mathbf{2}$

$\boldsymbol{y}\to\min(3,5)=\mathbf{3}$.

③ Scoatem factorul comun $\mathbf{6x^2y^3}$.
În paranteze rămâne rezultatul împărțirii fiecărui termen la $6x^2y^3$.

2 Scoateți factorul comun –1 în expresia $-3a+4b-1$.

Rezolvare:

$-3a+4b-1=(-1)\cdot(3a-4b+1)=-(3a-4b+1)$.

Rețineți Scoaterea lui –1 în afara parantezelor schimbă semnele în opuse ale tuturor termenilor.

• Completați adecvat: $6xy-2=(-1)\cdot(\square+\square)=\square(\square+\square)$.

4.2. Aplicarea formulelor de calcul prescurtat

4.2.1. Restrângerea pătratului unei sume sau diferențe

1 Observați şi completați adecvat.

a) $x^2+4xy+4y^2=(x+\square)^2$

$x^2+2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2=(x+2y)^2$

$\to\quad x^2+4xy+4y^2=(x+2y)^2$

b) $a^2-2\sqrt{2}ab+\square^2=(a-\square)^2$

$a^2-2\cdot a\cdot\square+(\square)^2=(a-\square)^2$

$\to\quad a^2-2\sqrt{2}ab+\square^2=(a-\square)^2$

c) $29+12\sqrt{5}=(\bigcirc+\square)^2$

$29+2\cdot\underset{①}{2}\cdot\underset{②}{3}\underset{③}{\sqrt{5}}=(\bigcirc+\square)^2$

① ②
$(2\cdot3)^2=36>29$

② ③
$(3\sqrt{5})^2=45>29$

① ③
$(2\sqrt{5})^2=20<29$

$3^2=9<29$

$20+9=29$

$\to\quad 2\sqrt{5}$, 3

$\to\quad 29+12\sqrt{5}=(3+\square)^2$

d) $79-20\sqrt{3}=(\bigcirc-\square)^2$ $\to$?

4.2.2. Descompunerea în factori a diferenței de pătrate

1 Observați și completați adecvat:

a) $4x^2 - \frac{y^2}{9} = (2x + \square)(\bigcirc - \frac{y}{3})$

$\bigcirc^2 - \square^2 = \left(\bigcirc + \square\right)\left(\bigcirc - \square\right)$

$\to 4x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(2x + \frac{y}{3}\right)\left(\bigcirc - \square\right)$

b) $2a - 3b = (\bigcirc + \square)(\bigcirc - \square)$

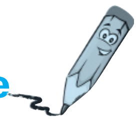
$(\sqrt{2a})^2 - (\sqrt{3b})^2 = (\bigcirc + \square)(\sqrt{2a} - \square)$

$\to 2a - 3b = (\bigcirc + \square)(\sqrt{2a} - \square)$

• Ce valori trebuie să aibă numerele a și b din exemplul b)?

2 Calculați oral $\frac{1{,}01^2 - 0{,}99^2}{0{,}04}$.

Exerciții și probleme



1. Completați: a) $x^2 - 2xy + y^2 = (x - \square)^2$; b) $x^4 + 4x^2 + 4 = (\square + 2)^2$;
c) $9a^2 - 6ab + b^2 = (\square - b)^2$; d) $3x^2 + 4\sqrt{3}xy + 4y^2 = (\square + 2y)^2$.

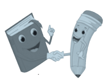
2. Restrângeți în pătrate: a) $a^2 + 2ay + y^2$; b) $b^2 + c^2 - 2bc$;
c) $2xz + z^2 + x^2$; d) $9 - 6y + y^2$.

3. Restrângeți în pătrate: a) $16x^2 + 8xy + y^2$; b) $9y^2 - 12xy + 4x^2$;
c) $25x^2 + 40x + 16$; d) $0{,}25a^2 - 2ab + 4b^2$.

4.  ***Lucrați în grup!*** Completați adecvat:

a) $6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} - \square)^2$; b) $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \square)^2$; c) $22 - 12\sqrt{2} = (\square - 3\sqrt{2})^2$;
d) $33 + 12\sqrt{6} = (\square + 3)^2$; e) $30 - 12\sqrt{6} = (2\sqrt{3} - \square)^2$; f) $50 = (\sqrt{8} + \square)^2$.

5. Restrângeți în pătrate: a) $29 + 12\sqrt{5}$; b) $73 - 40\sqrt{3}$; c) $89 + 36\sqrt{2}$;
d) $91 - 48\sqrt{3}$; e) $9 + 6\sqrt{2}$; f) $17 - 4\sqrt{15}$.

6.  ***Lucrați în perechi!*** Completați adecvat:

a) $a^2 - 4b^2 = (a - \square)(a + \square)$; b) $9y^2 - 0{,}25x^2 = (\square - 0{,}5x)(\square + 0{,}5x)$;
c) $3a^2 - 8y^2 = (\sqrt{3}a - \square)(\square + \square)$; d) $\frac{b^2}{6} - \frac{1}{7}x^2 = \left(\square - \frac{x}{\sqrt{7}}\right)(\square + \square)$.

7. Descompuneți în factori:

a) $16a^2 - 25b^2$; b) $0{,}09x^2 - 0{,}01y^2$; c) $\frac{4}{25}y^2 - \frac{25}{4}x^2$; d) $6b^2 - 7a^2$.

8. Scrieți numărul ca pătratul unei sume:
a) 48; b) 28; c) 35; d) 112; e) 99.

9. Scrieți numărul ca pătratul unei diferențe:
a) 60; b) 44; c) 72; d) 120; e) 58.

Model:
$50 = (\sqrt{50})^2 = (5\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{2} + 3\sqrt{2})^2$

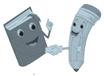
10. Aduceți expresia la forma cea mai simplă:

a) $(a-\sqrt{2})^2-(a+\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}$; b) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a-b}+a+b$; c) $\frac{x^2-4y^2}{x+2y}-2y$;

d) $(\sqrt{5}-x)^2+(x+\sqrt{5})^2+4x\sqrt{5}$; e) $(a-2x)^2-4x^2-a^2$.

11. Descompuneți în factori:

a) $4a^2-y^2-2a-y$; b) $9x^2+3x-6xy+y^2-y$; c) $5b-4y-16y^2+25b^2$.

12.  ***Lucrați în perechi!*** Aplicând formula $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, calculați:

a) $\frac{34^2-18^2}{104}$; b) $\frac{78^2-46^2}{64}$; c) $\frac{57^2-39^2}{44^2-26^2}$.

13. Suma pătratului unui număr real negativ și a triplului său este egală cu 4. Aflați numărul.

14. Diferența dintre pătratul unui număr real pozitiv și numărul propriu-zis este egală cu 12. Aflați acest număr.

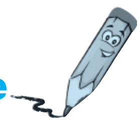
15.  ***Investigați!*** Demonstrați că dacă a este număr întreg, atunci:

a) a^3-a se divide cu 3; b) a^3-a se divide cu 6.

16. Descompuneți în factori: a) a^2+b^2; b) $4x^2+9y^2$.

Indicație. a) Adăugați și scădeți expresia $2|a||b|$.

Exerciții și probleme recapitulative



1. Aflați valoarea expresiei algebrice $\frac{4x-y}{x+y}$ pentru:

a) $x=1,\ y=5$; b) $x=-1,\ y=2$;

c) $x=1{,}5,\ y=2{,}5$; d) $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{3}{4}$.

2. Reduceți termenii asemenea:

a) $3a+7b-1{,}5a-2{,}8b$;

b) $-8x-3+7y+4x-6y+1$.

3. Determinați ce valori pot avea variabilele a și b în expresiile algebrice:

a) $\frac{a-b}{5}$; b) $\frac{a-3}{b}$; c) $\frac{b}{a-1}$; d) $\frac{2a}{a-b}$.

4. În sala de teatru sunt n rânduri, cu m locuri în fiecare rând. Mai pot fi oferite k scaune suplimentare.

a) Câte locuri sunt în sala de teatru?

b) Calculați pentru $n=45$, $m=34$ și $k=66$.

5. Efectuați înmulțirea:

a) $\frac{2}{5}x^2\cdot 5y^3$; b) $-3a\cdot\frac{2}{3}a$; c) $\frac{3}{4}a\cdot\left(-\frac{2}{3}y\right)$;

d) $\sqrt{8}x\cdot\sqrt{2}y^2x$; e) $0,(5)x^2y\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)xy^2$.

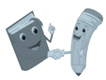
6. Efectuați împărțirea:

a) $21x^3y^2:(3xy)$; b) $-18x^3y^2:(-6xy^2)$;

c) $\frac{3}{5}a^6b^2x:(\frac{1}{3}a^4bx)$; d) $35a^4b^5:(7a^2b^3)$.

7. Efectuați:

a) $(2x^3y^2)^6$; b) $(-\sqrt{7}x^3z^5)^8$; c) $(3\frac{1}{4}x^2z)^3$.

8.  ***Lucrați în perechi!*** Calculați:

a) $(\sqrt{8}+\sqrt{32})\sqrt{2}$;

b) $(\sqrt{27}-\sqrt{12})\sqrt{3}$;

c) $2\sqrt{5}(\sqrt{125}-3\sqrt{5})$;

d) $(4\sqrt{24}+2\sqrt{54})(-0{,}5\sqrt{6})$.

9. Desfaceți parantezele:

a) $(\sqrt{3}+7)(\sqrt{3}-7)$;

b) $(2\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}-4)$;

c) $(\sqrt{12}-5)(2\sqrt{5}+12)$;

d) $(5\sqrt{7}-\sqrt{13})(\sqrt{13}+5\sqrt{7})$.

10. Descompuneți în factori:

a) x^2y+3yz; b) $8xy-12x^2$;

c) $2ab-4a^2b$; d) $-12y^4b^3-16yb^2$.

11. Desfaceți parantezele:

a) $\left(\frac{3}{4}x+\frac{2}{9}\right)^2$; b) $\left(-\frac{2}{5}x-\frac{5}{2}\right)^2$;

c) $\left(\frac{1}{6}a-3b\right)^2$; d) $\left(8a^2-1\frac{1}{2}b\right)^2$.

12. *Lucrați în perechi!* Copiați și completați:

a) $(\square+3x)^2=\square+12xy+\square$;

b) $(\square-2a)^2=\square-16ab+\square$;

c) $(4x+\square)^2=\square+4xy+\square$;

d) $(3a-\square)^2=\square-4ab+\square$.

13. *Lucrați în perechi!* Completați adecvat:

Fie expresia $E(x)=\frac{x^2-144}{x^3+12x^2-x-12}$. După simplificare, expresia este egală cu $\square$. Argumentați!

14. Calculați aria dreptunghiului cu laturile de:

a) $(\sqrt{3}+3)$ cm și $(\sqrt{27}+2)$ cm;

b) $(5\sqrt{5}+1)$ cm și $(\sqrt{5}-1)$ cm.

15. Calculați aria pătratului cu latura de:

a) $(7-\sqrt{2})$ cm; b) $(9+\sqrt{3})$ cm;

c) $(2\sqrt{5}+3)$ cm; d) $(\sqrt{27}-3\sqrt{2})$ cm.

16. *Lucrați în perechi!* Calculați:

a) $\sqrt{82^2-18^2}$; b) $\sqrt{65^2-63^2}$;

c) $\sqrt{113^2-112^2}$; d) $\sqrt{85^2-36^2}$.

17. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $-(a-5)(a+3)-(1-a)^2$; b) $(x-1)(x-2)-(x-4)^2$.

18. Descompuneți în factori:

a) $x^2-18xy+81y^2$; b) $\frac{1}{36}x^2-xy+9y^2$.

19. Fie expresia algebrică:

a) $a-999$; b) $\frac{5}{a-1}$; c) $\frac{a-3}{a+5}$; d) a^2+4.

Există oare valori ale variabilei a pentru care valoarea expresiei algebrice este egală cu 0?

20. *Investigați!* Determinați pentru care valori ale variabilei x expresia $E(x)$ nu are sens:

a) $E(x)=\frac{1}{2x+1}$; b) $E(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$;

c) $E(x)=\frac{x}{x^2+3x}$; d) $E(x)=\frac{1-x}{x-x^2}$.

21. Aflați lungimea laturii pătratului cu aria de:

a) $(7-4\sqrt{3})$ cm^2; b) $(49-12\sqrt{5})$ cm^2.

22. *Lucrați în perechi!*

Calculați: $(\sqrt{6-\sqrt{11}}+\sqrt{6+\sqrt{11}})^2$.

23. Calculați $\frac{x+y}{2}\cdot\sqrt{xy}$, dacă:

a) $x=\sqrt{5}+2,\ y=\sqrt{5}-2$;

b) $x=2\sqrt{7}-5,\ y=5+2\sqrt{7}$.

24. M-am gândit la un număr natural. L-am înmulțit cu el însuși și am adunat rezultatul cu dublul numărului inițial. Astfel, am obținut numărul 143. La ce număr m-am gândit?

25. M-am gândit la un număr natural. L-am înmulțit cu el însuși și din rezultat am scăzut dublul numărului inițial. Astfel, am obținut numărul 168. La ce număr m-am gândit?

26. Formulați exemple de aplicare a formulelor înmulțirii prescurtate în diverse domenii.

27. Calculați:

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

b) $(\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}})^2$.

28. Se știe că $a+b=8\sqrt{5}$ și $ab=\frac{1}{\sqrt{5}}(a+b)$.

Calculați a^2+b^2 și a^4+b^4.

29. Se știe că $x^2 + y^2 = 25$ și $(x+y)^4 - (x-y)^4 = 40$. Calculați xy.

30. Fie expresia $E(x) = |-2x+7| + \sqrt{x^2} + 3x - 1$. Pentru $x \le 0$ calculați valoarea expresiei $E(x)$.

31. Determinați cea mai mică valoare a expresiei $E(x) = 9x^2 + 6x + 5,\ x \in \mathbb{R}$.

32. *Investigați!* Demonstrați că produsul a trei numere naturale consecutive nenule nu poate fi cubul unui număr natural.

PENTRU CAMPIONI

33. Scrieți numărul 2011 ca o diferență de pătrate de numere naturale.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta 1

1. O carte costă x lei, iar un caiet costă y lei.

a) Scrieți expresia algebrică prin care se poate calcula cât se va plăti pentru 4 cărți și 6 caiete.

b) Calculați cât se va plăti, dacă $x = 65$ lei, $y = 2{,}4$ lei.

2. Copiați și completați:

$(3x - \square)^2 = \square - \square + 16.$

3. Descompuneți în factori:

a) $ab + ac + 4b + 4c$;

b) $(5a+7)^2 - 4b^2$.

4. Un strat de flori are forma unui pătrat cu latura de $(2\sqrt{27} + \sqrt{3})$ dm.

a) Aflați aria stratului de flori.

b) Determinați câte grame de semințe sunt necesare pentru a însămânța stratul, dacă pentru 1 dm² se folosesc 22 g de semințe.

5. Scrieți ca pătrat al unei diferențe:

$$19 - 8\sqrt{3}.$$

Varianta 2

1. O cutie cu bomboane costă a lei, iar o ciocolată costă b lei.

a) Scrieți expresia algebrică prin care se poate calcula cât se va plăti pentru 5 cutii cu bomboane și 3 ciocolate.

b) Calculați cât se va plăti, dacă $a = 120$ lei, $b = 22{,}5$ lei.

2. Copiați și completați:

$(\square - 2x)^2 = 49 - \square + \square.$

3. Descompuneți în factori:

a) $3x + 3y + bx + by$;

b) $9x^2 - (2y+1)^2$.

4. O parcelă are forma unui pătrat cu latura de $(2\sqrt{80} - \sqrt{5})$ dm.

a) Aflați aria parcelei.

b) Determinați câte grame de semințe de sfeclă roșie sunt necesare pentru a însămânța parcela, dacă pentru 1 dm² se folosesc 18 g de semințe.

5. Scrieți ca pătrat al unei sume:

$$27 + 10\sqrt{2}.$$

capitolul 3

Funcții

Omul înțelept nu spune tot ce gândeşte, dar gândeşte ce spune.
Aristotel

§1. Sistemul cartezian de coordonate în plan

1 Numerele reale, adică elementele mulțimii $\mathbb{R}$, pot fi reprezentate pe o dreaptă, numită **axa numerelor**.

Pentru a reprezenta elementele produsului cartezian $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ avem nevoie de două axe perpendiculare şi patru cadrane:

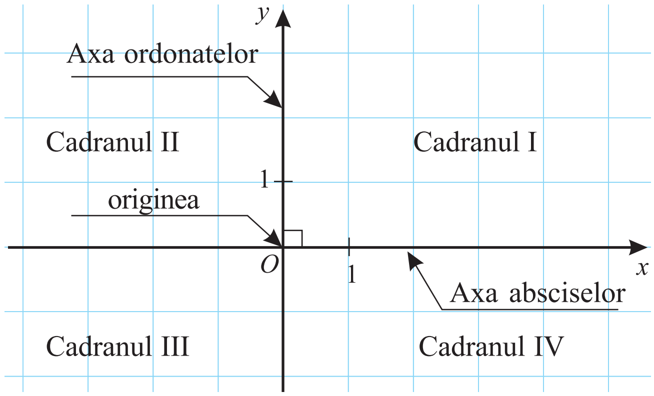


Fig. 1. *Sistem cartezian de coordonate*

Rețineți

- Axa Ox se numeşte **axa absciselor**.
- Axa Oy se numeşte **axa ordonatelor**.
- Axele Ox şi Oy sunt perpendiculare. Ele împart planul în 4 regiuni, numite **cadrane**.
- Punctul O se numeşte **originea** sistemului cartezian de coordonate.

Rețineți

2 Cum reprezentăm într-un sistem cartezian de coordonate o pereche $(a; b)$ a mulțimii $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$?

Explicăm

① Notăm pe axa Ox punctul $A(a)$.

② Notăm pe axa Oy punctul $B(b)$.

③ Paralela cu Oy, care trece prin punctul $A(a)$, intersectează paralela cu Ox, care trece prin punctul $B(b)$, într-un punct. Notăm acest punct cu M.

④ Punctul M reprezintă în plan perechea $(a; b)$ (fig. 2).

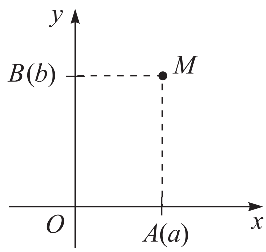


Fig. 2

Notăm: $M(a; b)$.

Citim: Punctul M are coordonatele $(a; b)$. Coordonata a se numeşte **abscisa** punctului M şi întotdeauna se scrie prima, iar b – **ordonata** punctului M.

• Reprezentați într-un sistem cartezian de coordonate perechile: (4; 3); (–3; 2,5); (4; –6); (–2; –1).

Rețineți

3 Cum determinăm coordonatele unui punct N dintr-un sistem cartezian de coordonate?

Explicăm

① Fie $C(c)$ punctul în care paralela cu axa Oy, care trece prin punctul N, intersectează axa Ox.

② Fie $D(d)$ punctul în care paralela cu axa Ox, care trece prin punctul N, intersectează axa Oy.

③ $(c; d)$ sunt coordonatele punctului N (fig. 3).

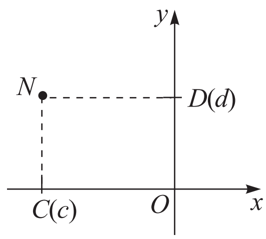


Fig. 3

• Determinați coordonatele punctelor din desen:

Model:
$E(-1; 2)$

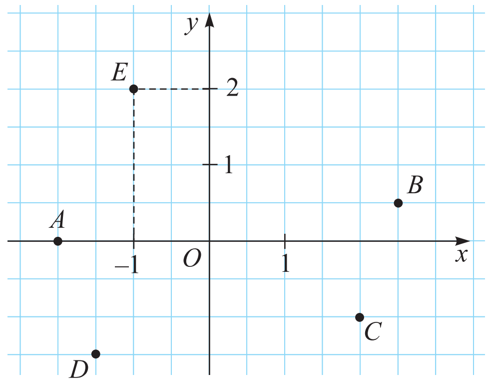


Fig. 4

4 Fie punctele $A(a_1; a_2)$ și $B(b_1; b_2)$. Care sunt coordonatele mijlocului segmentului AB?

Rezolvăm

Fie $M(m_1; m_2)$ punctul căutat (fig. 5). Atunci, se poate arăta că m_1 este mijlocul segmentului $[a_1, b_1]$, iar m_2 este mijlocul segmentului $[b_2, a_2]$.

Astfel, $m_1 - a_1 = b_1 - m_1$ sau $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

$m_2 - b_2 = a_2 - m_2$ sau $m_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$.

Răspuns: $\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}; \dfrac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

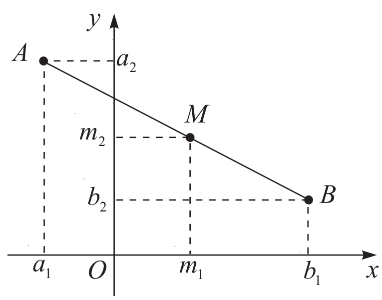


Fig. 5

Rețineți

Fie $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$. Atunci:

a) punctul $M\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}; \dfrac{a_2 + b_2}{2}\right)$ este mijlocul segmentului AB;

b) $\boldsymbol{\dfrac{a_1 + b_1}{2}}, \boldsymbol{\dfrac{a_2 + b_2}{2}}$ sunt formulele de calcul pentru coordonatele mijlocului segmentului AB;

c) $\boldsymbol{AB = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}$ – formula de calcul pentru distanța dintre două puncte.

Exersăm

Fie $A(-4; 3)$, $B(8; -2)$. Să aflăm:

a) coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$; b) AB.

Rezolvăm

a) Fie $M(m_1; m_2)$ mijlocul segmentului $[AB]$.

Atunci: $m_1 = \dfrac{-4+8}{2} = 2;\ m_2 = \dfrac{3+(-2)}{2} = 0{,}5.$

Răspuns: $M(2;\ 0{,}5)$.

b) $AB = \sqrt{(-4-8)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{144+25} = 13.$

Răspuns: 13 unități de lungime.

Exerciții și probleme

1. Construiți un sistem cartezian de coordonate şi reprezentați în el punctele:

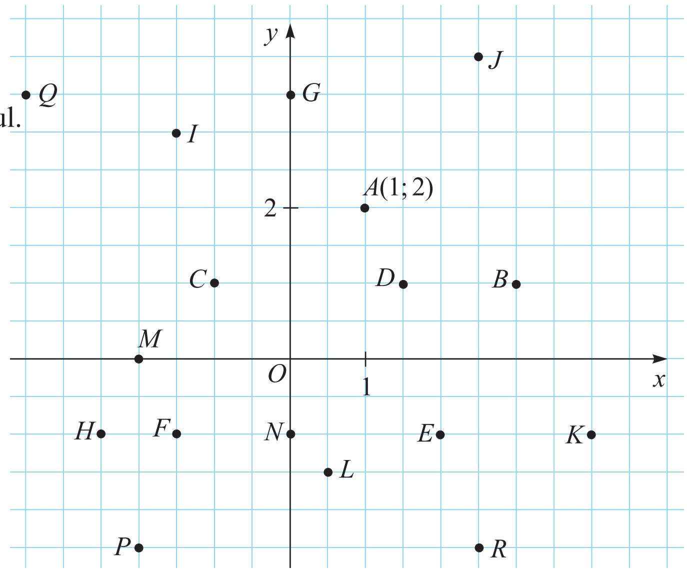
a) $A(-4;\ 1)$; $B(0{,}5;\ 3)$; $C(7;\ -1{,}5)$; $D(-2;\ -6)$;

b) $M(3;\ 4{,}5)$; $N(9,\ -2)$; $K(-1;\ -8)$; $P(-4;\ 7)$.

2. *Lucrați în perechi!* Examinați desenul. Aflați coordonatele punctelor:

a) B, C, D, E; b) F, G, H, I;

c) J, K, L, M; d) N, P, Q, R.



3. Construiți într-un sistem cartezian de coordonate dreapta care trece prin punctele $A(-2;\ -1)$ şi $B(3;\ 1{,}5)$. Notați pe dreapta AB punctele cu abscisele -1, 0, 1, 2. Aflați coordonatele acestor puncte.

4. Construiți într-un sistem cartezian de coordonate dreapta care trece prin punctele $M(-3;\ 4)$ şi $N(4{,}5;\ -1)$. Notați pe dreapta MN punctele cu ordonatele 0, 1, 2, 3. Aflați coordonatele acestor puncte.

5. *Investigați!* În care cadran se află punctul $A(a;\ b)$, dacă:

a) $a > 0,\ b > 0$; b) $a > 0,\ b < 0$;

c) $a < 0,\ b > 0$; d) $a < 0,\ b < 0$?

6. *Investigați!* Ce putem afirma despre punctele care au:

a) abscisa egală cu 2;

b) ordonata egală cu -4;

c) modulul abscisei egal cu 3;

d) modulul ordonatei egal cu 5?

7. Aflați lungimea segmentului cu o extremitate în originea sistemului de axe ortogonale şi cealaltă în punctul:

a) $A(4;\ 3)$; b) $B(-7;\ -24)$; c) $C(6;\ -8)$;

d) $D(-8;\ 15)$; e) $E(20;\ 21)$.

8. *Lucrați în perechi!* Aflați coordonatele mijlocului segmentului AB, unde:

a) $A(1;\ 3)$, $B(3;\ 5)$; b) $A(-2;\ 6)$, $B(6;\ -2)$;

c) $A(5;\ -2)$, $B(-5;\ 8)$; d) $A(-3;\ 7)$, $B(-9;\ 11)$.

9. Ştiind că $O(0; 0)$ este mijlocul segmentului AB, aflați coordonatele punctului A, dacă:
a) $B(3; -4)$; b) $B(-12; 10)$;
c) $B(-6; -6)$; d) $B(9; 2{,}5)$.

10. Aflați coordonatele vârfurilor C şi D ale pătratului $ABCD$, ştiind că:
a) $A(-3; 4)$, $B(1, 4)$;
b) $A(2; -3)$, $B(5, -3)$.

11.  ***Lucrați în perechi!*** Aflați aria dreptunghiului $ABCD$, ştiind că:
a) $A(4{,}5; -1)$, $B(-3;\ -1)$ şi $C(-3; 5)$;
b) $A(-5; 1)$, $B(3; 1)$ şi $C(3; -2)$.

12. Punctele A şi B sunt egal depărtate de axa ordonatelor şi $[AB]$ este perpendicular pe această axă. Aflați coordonatele punctului B, dacă punctul A are coordonatele:
a) $(2; \sqrt{5})$; b) $(-7{,}4; 4)$;
c) $(-0{,}6; -8{,}1)$; d) $(13; -10)$.

13.  ***Lucrați în grup!*** Punctele M şi N sunt egal depărtate de axa absciselor şi $[MN]$ este perpendicular pe această axă. Aflați coordonatele punctului N, dacă punctul M are coordonatele:
a) $\left(3\frac{1}{4};\ 4\right)$; b) $(6; -5)$;
c) $(-0{,}35; 8)$; d) $(-85;\ -58)$.

14. Calculați aria triunghiului ABC, dacă:
a) $A(2; 6)$, $B(2; -1)$, $C(8; -1)$; b) $A(-2; 4)$, $B(-2; -5)$, $C(10; 4)$.
Indicație. Completați triunghiul până la dreptunghi.

§2. Noțiunea de funcție

2.1. Ce este funcția?

1 În tabel sunt prezentate mărimile pentru haine utilizate în Europa şi mărimile corespunzătoare utilizate în SUA. Exprimați analitic corespondența dintre cele două mulțimi.

E

EUR	36	38	40	42	44	46	48
SUA	10	12	14	16	18	20	22

A

Explicăm Întrucât fiecărui m, $m \in E$, îi corespunde elementul $n = m - 26$, unde $n \in A$, putem defini mulțimea A astfel: $A = \{m - 26 \mid m \in E\}$.

2 Stabiliți o corespondență între mulțimile $T = \{$Moldova, România, Rusia, Ucraina, Franța, Italia$\}$ şi $C = \{$Bucureşti, Moscova, Kiev, Roma, Chişinău, Paris$\}$.

Explicăm *Modul I*. Reprezentăm corespondența cu ajutorul unui tabel:

T	Moldova	România	Rusia	Ucraina	Franța	Italia
C	Chişinău	Bucureşti	Moscova	Kiev	Paris	Roma

Modul II. Reprezentăm corespondența cu ajutorul unei diagrame:

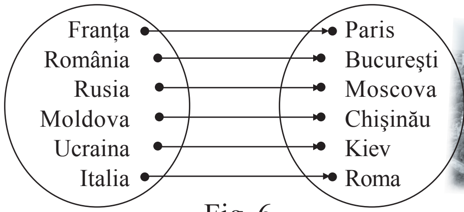


Fig. 6

3 Reprezentați printr-o diagramă corespondența prin care fiecărui element (cuvânt) al mulțimii $B = \{$ram, circ, motor, raport, mal, copac$\}$ i se asociază numărul de litere ale acestui cuvânt, element al mulțimii $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Rezolvare:

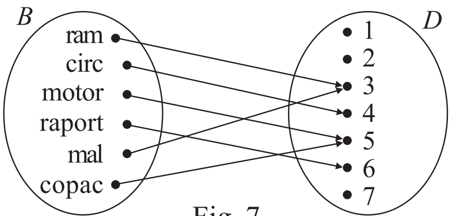


Fig. 7

Corespondențele (dependențele) care sunt examinate în problemele **1**, **2** și **3** se numesc **dependențe funcționale**.

Definiție

Fie X și Y două mulțimi nevide. Corespondența prin care fiecărui element al mulțimii X i se asociază un singur element al mulțimii Y se numește **funcție definită pe mulțimea** X **cu valori în mulțimea** Y (sau, mai scurt, **funcție de la** X **la** Y).

Rețineți

Notația $f\colon X \to Y$ se citește „**funcția** f **de la** X **la** Y" sau „**funcția** f **definită pe mulțimea** X **cu valori în mulțimea** Y".

Astfel, pentru problemele **1**, **2** și **3** putem defini funcțiile $f\colon E \to A$, $g\colon T \to C$, $h\colon B \to D$.

- Rețineți denumirile elementelor funcției.

Elementele funcției

$f\colon X \to Y$

Corespondența (legea, procedeul)

Domeniul de valori sau **codomeniul** funcției

Domeniul de definiție al funcției (se notează cu $D(f)$)

Rețineți

Fie funcția $f\colon X \to Y$ și x un element arbitrar al mulțimii X.
Dacă $y \in Y$ și funcția f asociază elementului x elementul y, se spune că x este **argumentul** (sau **variabila independentă**) **funcției**, iar y este **valoarea funcției** f **în punctul** x.
Se notează $y = f(x)$ și se citește „y este egal cu f de x".

De exemplu, valoarea funcției $h\colon B \to D$ din exemplul **3**, în punctul „circ", este egală cu 4, adică h(circ) = 4.

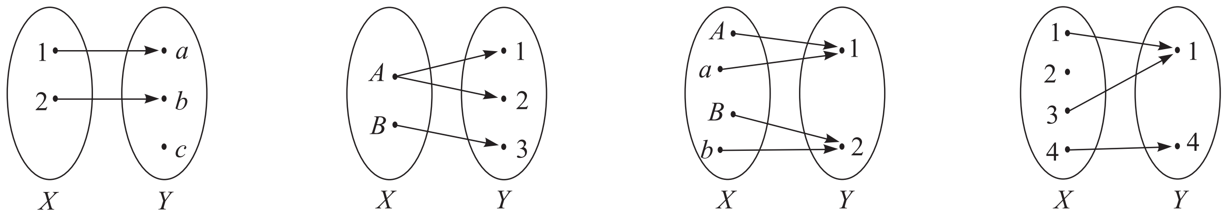
Rețineți

Mulțimea $E(f) = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$ se numește **mulțimea valorilor funcției** f, care este submulțime a domeniului de valori.

De exemplu, $E(h) = \{3, 4, 5, 6\}$ este o submulțime a lui D.

2.2. Moduri de definire a funcției

1 Care dintre următoarele diagrame definește o funcție?



① ② ③ ④

Fig. 8

Explicăm Diagrama ① definește o funcție, deoarece fiecărui element x al domeniului de definiție X îi corespunde un singur element y al domeniului de valori Y.
Diagrama ② nu definește o funcție, deoarece...
Diagrama ③ ..., deoarece...
Diagrama ④ ..., deoarece...

2 a) Care dintre următoarele tabele definesc o funcție?

①

x	3	5	7	8
$f(x)$	13	15	17	18

②

x	–3	–2	–1	1	2	3
$g(x)$	3	2	1	1	2	3

③

x	A	B	C	D	E
$h(x)$	1	1	1	1	1

b) Descrieți printr-o formulă fiecare din funcțiile definite în a).

Explicăm a) Fiecare din tabelele ①–③ definește o funcție, deoarece...
b) Funcțiile definite de tabelele ①–③ pot fi descrise astfel:

f: $\{3, 5, 7, 8\} \to \{13, 15, 17, 18\}$, $f(x) = x + 10$.

g: $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3, \} \to$ ______, $g(x) =$ ______.

h: ______ $\to \{1\}$, $h(x) =$ ______.

Rețineți

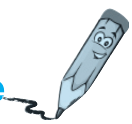
O funcție poate fi definită:
- printr-un tabel, numit ***tabel de valori*** al funcției;
- printr-o diagramă;
- printr-un grafic;
- printr-o formulă;
- verbal.

modul sintetic

modul analitic

De regulă, o funcție se definește sintetic în cazul în care domeniul ei de definiție are un număr mic de elemente. Definirea unei funcții cu ajutorul unui grafic se va studia ulterior.

Exerciții și probleme



1. Reproduceți și completați tabelul:

a)

Numărul	–3	2	0	1	5
Opusul numărului	3				

b)

Numărul	–2	–1	0	1	2	3
Cubul numărului	–8					

2. Fiecărei luni a anului îi corespunde un anumit număr de zile. Defineşte această corespondenţă o funcţie? Justificaţi.

3. Fiecărei litere din alfabetul latin i se pune în corespondenţă numărul ei de ordine în acest alfabet. Defineşte această corespondenţă o funcţie? Justificaţi.

4. ***Lucrați în perechi!*** Fie M o mulţime de numere. Fiecărui număr $|x|$ din M i se asociază numărul x. Defineşte această corespondenţă o funcţie dacă:

a) $M = \mathbb{N}$; b) $M = \mathbb{Z}$; c) $M = \mathbb{Q}$?

Justificaţi.

5. Corespondenţa dintre numele şi prenumele oamenilor defineşte o funcţie? Justificaţi.

6. Fie M o mulţime de numere. Fiecărui număr din M i se pune în corespondenţă predecesorul lui. Defineşte această corespondenţă o funcţie dacă:

a) $M = \mathbb{N}$; b) $M = \mathbb{Z}$?

7. Fie M o mulţime de numere. Fiecărui număr din M i se asociază succesorul lui. Defineşte această corespondenţă o funcţie dacă:

a) $M = \mathbb{N}$; b) $M = \mathbb{Z}$?

8. Citiţi:

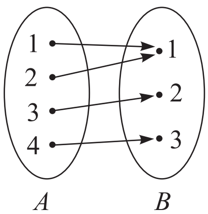
a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = x^2$;

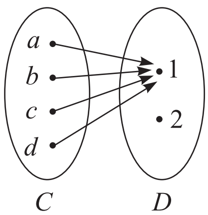
b) $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ g(x) = |x|$;

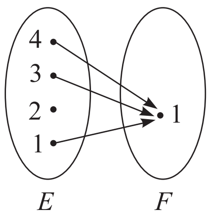
c) $t\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R},\ t(x) = \sqrt{x}$;

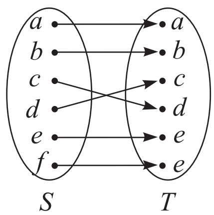
d) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 2x$.

9. ***Investigați!*** Care dintre următoarele diagrame defineşte o funcţie?

a) 

b) 

c) 

d) 

10. ***Lucrați în grup!*** Scrieţi analitic funcţia:

a) cu domeniul de valori $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ şi domeniul de definiţie $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$, care pune în corespondenţă fiecărui număr opusul său;

b) cu domeniul de definiţie $A = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{7}\right\}$ şi domeniul de valori $B = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3, 5, 7\right\}$, care pune în corespondenţă fiecărui număr inversul său;

c) care pune în corespondenţă fiecărui număr real nenegativ radicalul acestui număr;

d) care pune în corespondenţă fiecărui număr întreg cu modulul mai mic decât 7 pătratul lui.

11. Aflaţi valoarea funcţiei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x$, în punctul:

a) $-2{,}4$; b) $3{,}5$; c) $\sqrt{2}$; d) $-1\frac{5}{8}$.

---

12. Aflaţi valoarea argumentului pentru care valoarea funcţiei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$ este egală cu:

a) 8; b) -5; c) $\sqrt{18}$; d) $3\frac{3}{4}$.

13. ***Lucrați în perechi!*** Construiţi şi completaţi tabelul de valori al funcţiei:

a) $f\colon \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{Q},\ f(x) = \frac{1}{x^2+1}$;

b) $f\colon \{a^2 \mid a < 6,\ a \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N},\ f(x) = \sqrt{x}$;

c) $f\colon \{a \mid |a| < 5,\ a \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = a + 3$;

d) $f\colon \{2a \mid -3 \le a \le 4,\ a \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = 3x$.

14. Definiți analitic (printr-o formulă) funcția care are următorul tabel de valori:

a)

0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	2	3	4	5

b)

1	2	3	4	5
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$

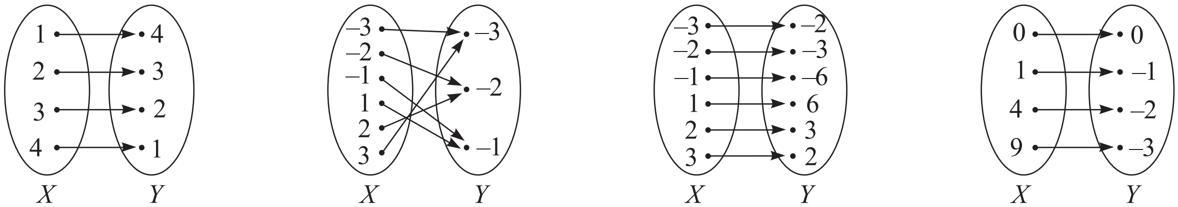
c)

–2	–1	0	1	2
–1,4	–0,4	0,6	1,6	2,6

d)

0	1	2	3	4
1	2	4	8	16

15. ***Investigați!*** Descrieți analitic funcția definită de diagramele:



a) b) c) d)

16. Funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = [x]$, pune în corespondență fiecărui număr real x partea întreagă a numărului x (cel mare mare număr întreg mai mic sau egal cu x). Calculați:

a) $f(2{,}71)$, $f(0{,}49)$, $f(3\frac{5}{7})$;

b) $f(-3{,}14)$, $f(-5{,}81)$, $f(-7{,}9)$.

17. Fiecărui număr natural i se asociază numărul format din ultima cifră (cifra unităților) a numărului respectiv. Definiți analitic (printr-o formulă) funcția definită de această corespondență.

Indicație. Aplicați funcția de la problema **16**.

§3. Graficul funcției

1 Observați și completați adecvat:

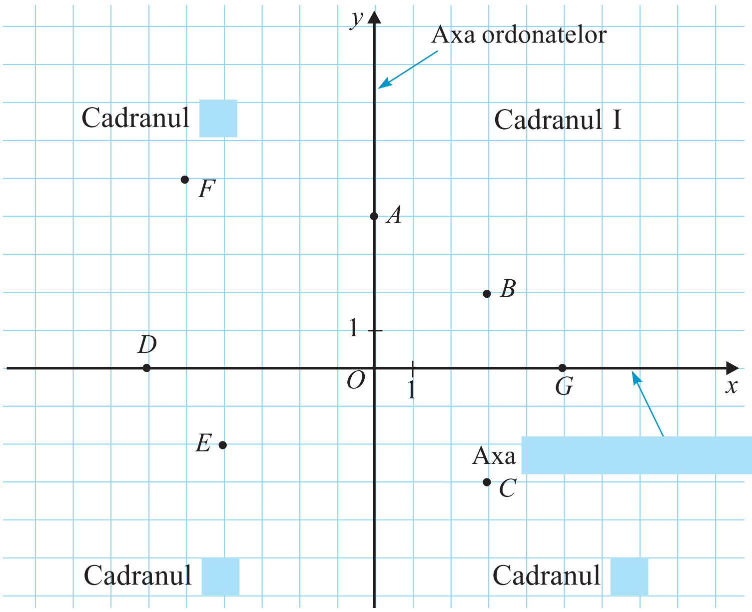


Fig. 9

Punctul B are coordonatele (3; 2). Punctul G (5; 0) aparține axei ______.

Punctul D are coordonatele (–6; ___).

Punctul E aparține cadranului ___.

Punctul F aparține cadranului ___. Punctul ___ aparține cadranului 4.

Abscisa punctului A este egală cu ___.

Ordonata punctului E este egală cu ___.

Punctele F și ___ sunt egal depărtate de axa ______ (fig. 9).

2 Mihai şi-a petrecut vacanța de Crăciun în oraşul Roma. Din curiozitate, a înregistrat temperatura aerului şi a reprezentat datele prin puncte într-un sistem de coordonate (punctul O corespunde Anului Nou).

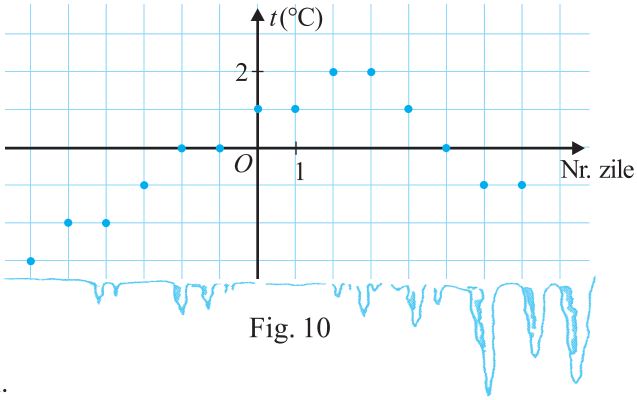


Fig. 10

• Observați graficul şi completați.

De Anul Nou temperatura aerului a fost ___ °C.

Cu 3 zile înainte de Anul Nou temperatura aerului a fost ___ °C.

Timp de ___ zile după Anul Nou temperatura aerului a crescut cu 2 °C.

Temperatura -1 °C s-a înregistrat ___.

Peste patru zile după Anul Nou temperatura aerului a fost ___ °C (fig. 10).

• Determinați dacă corespondența prin care zilei respective i se asociază valoarea temperaturii reprezintă o funcție.

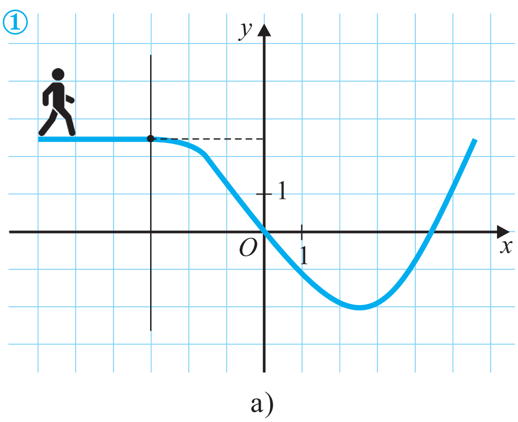
Explicăm

Graficul reprezentat defineşte o funcție de forma $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, deoarece fiecărui număr de zile (x, unde $x \in \mathbb{Z}$) îi corespunde o singură valoare a temperaturii (y, unde $y \in \mathbb{R}$).

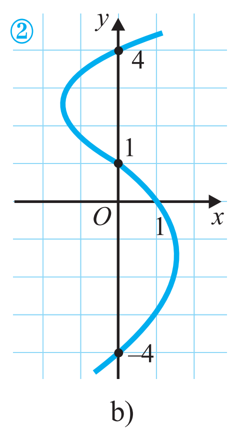
Rețineți

- Funcția $f\colon X \to Y$, unde X şi Y sunt mulțimi numerice, se numeşte **funcție numerică**.
- **Graficul funcției** numerice $f\colon X \to Y$ este figura formată din punctele $(x; y)$, unde $x \in X$ şi $y = f(x) \in Y$.
  Graficul funcției f se notează cu G_f; deci, $G_f = \{(x; y) \mid x \in X,\ y = f(x) \in Y\}$.

3 a) Care dintre următoarele grafice defineşte o funcție?
b) Cum aflăm valoarea funcției, definită grafic, într-un punct dat x?



a)



b)

Fig. 11

Explicăm a) Graficul ① (fig. 11 a) definește o funcție, deoarece fiecărei valori a variabilei x îi corespunde o unică valoare y.

Graficul ② (fig. 11 b) ______ o funcție, deoarece există valori ale lui x cărora le corespund mai multe valori ale lui y. De exemplu, abscisei 0 îi corespund mai multe valori ale lui y: –4; 1 şi 4.

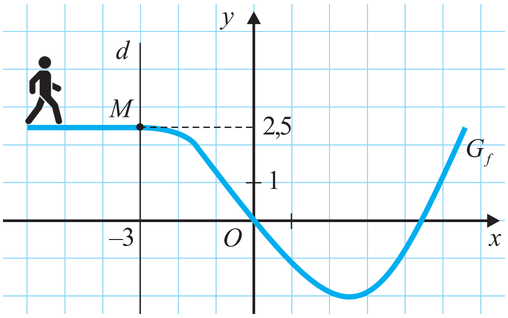
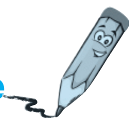


Fig. 12

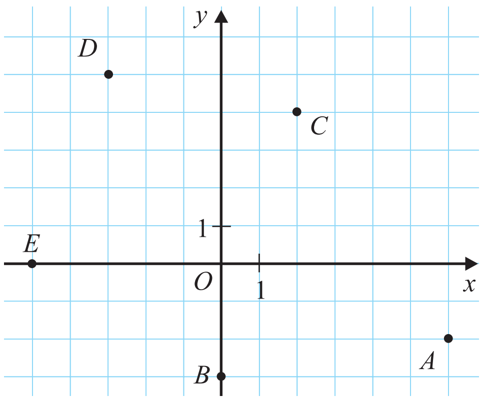
b) Notăm cu f funcția definită de graficul ① (fig. 12). Să aflăm valoarea funcției f în punctul de abscisă –3:
- construim o dreaptă d paralelă cu axa ordonatelor şi care intersectează axa absciselor în punctul –3;
- fie M punctul de intersecție a dreptei d cu graficul funcției f.

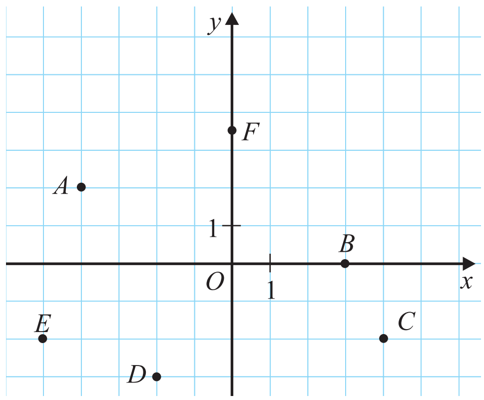
Ordonata punctului M este valoarea funcției f în punctul de abscisă –3. Prin urmare, $f(-3) = 2{,}5$.

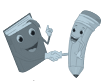
Exerciții și probleme



1. Scrieți coordonatele punctelor reprezentate în sistemul cartezian de coordonate:

a)


b)


2.  ***Lucrați în perechi!*** Construiți un sistem cartezian de coordonate și reprezentați punctele:

a) $A(-3; 5)$, $B(0; 2)$, $C(-4; 0)$, $D(3{,}5; -2)$; b) $A(1; -2)$, $B(3; -1)$, $C(-5; -3)$, $D(1{,}5; 4)$.

3. Trasați graficul funcției definite prin tabelul de valori:

a)

–3	–2	–1	0	1	2	3
9	4	1	0	1	4	9

b)

–3	–2	–1	0	1	2	3
5	3	–2	0	2	–3	–5

c)

0	1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1	0

d)

0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
0	1	0	1	0	1	0

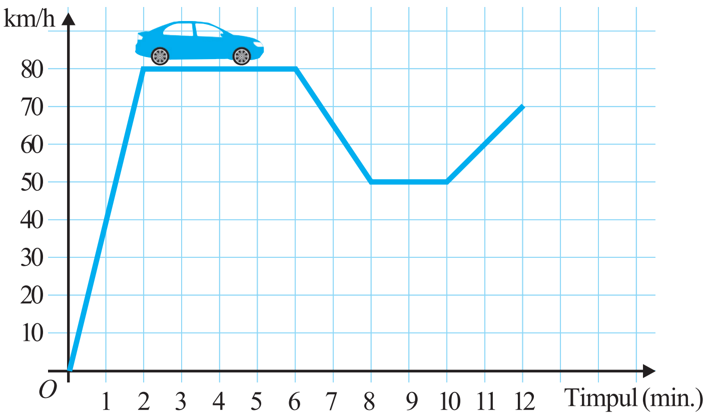
4. ***Lucrați în grup!*** Examinați graficul vitezei mişcării unui automobil şi determinați:

a) peste câte minute de la pornire automobilul a atins cea mai mare viteză din perioada mişcării;

b) câte minute automobilul s-a deplasat cu viteza de 80 km/h;

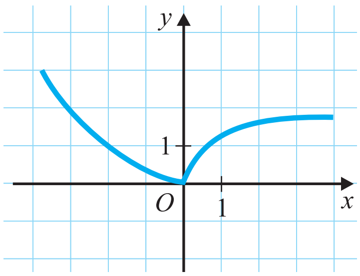
c) ce viteză avea automobilul peste 10 minute de la pornire;

d) câte minute automobilul s-a mişcat cu viteza de 50 km/h.

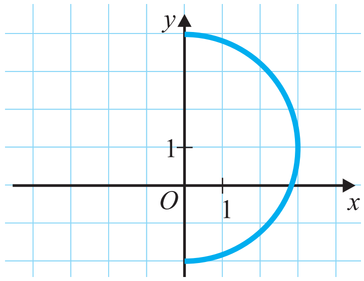


5. ***Investigați!*** Care dintre următoarele grafice defineşte o funcție?

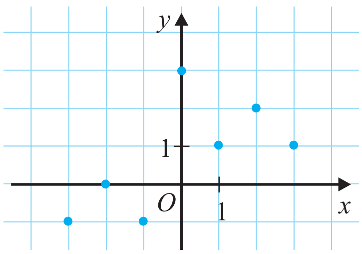
a)



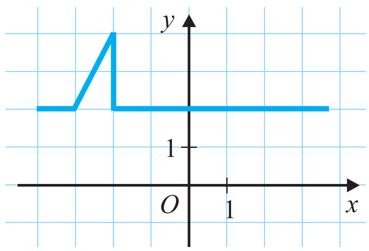
b)



c)



d)



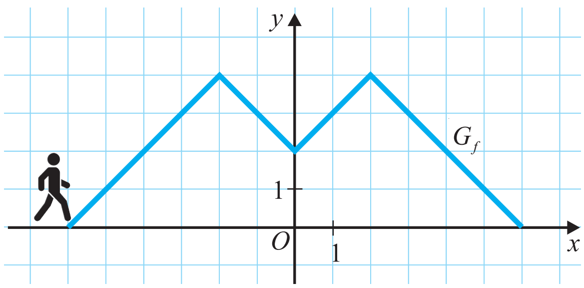
6. ***Lucrați în grup!*** Completați tabelul de valori al funcției şi trasați graficul ei:

a) $f\colon \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x^2 - 3$; b) $f\colon \{x \mid |x| \le 5,\ x \in \mathbb{Z}^*\} \to \mathbb{Q},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$.

7. ***Investigați!*** Examinați graficul funcției f şi stabiliți:

a) valoarea funcției f în punctele de abscisă: -5; $-3{,}5$; -2; $1{,}5$; 3;

b) punctele în care valoarea funcției f este egală cu 0; 1,5; 2; 3; 3,5.

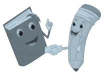


8. Trasați graficul funcției:

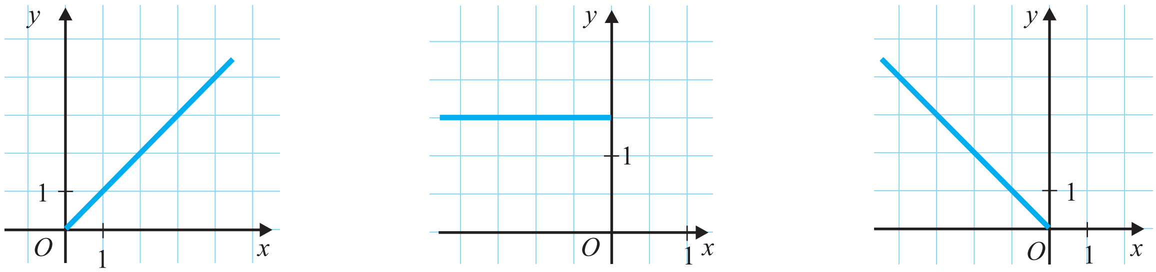
a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = 3x;$ b) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = -2x;$

c) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ f(x) = x^2;$ d) $f: \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q},\ f(x) = \frac{8}{x};$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4;$ f) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(x) = -1{,}5x.$

9.  ***Lucrați în perechi!***

Definiți analitic (printr-o formulă) funcția al cărei grafic este semidreapta reprezentată:



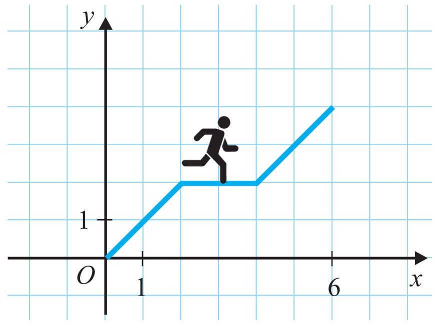
a) b) c)

10.  ***Investigați!*** Verificați dacă punctul $A(-1; 2)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = -2x;$ b) $f(x) = x^2 + 1;$ c) $f(x) = 3 - x.$

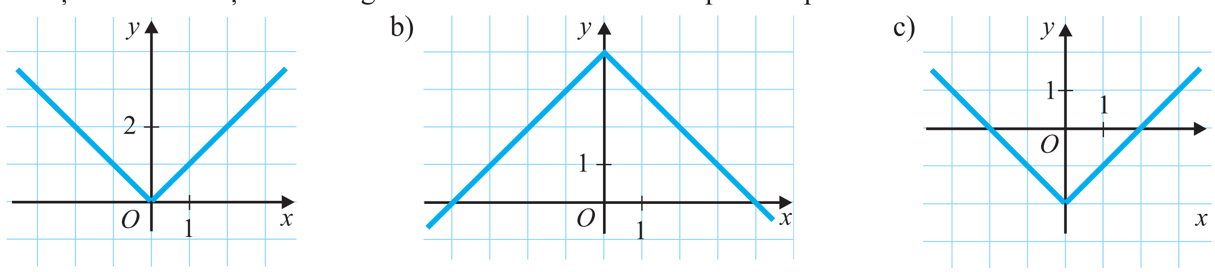
11.  ***Lucrați în grup!*** Se știe că domeniul de definiție al funcției f este mulțimea $M = \{x \mid |x| \le 6,\ x \in \mathbb{R}\}$.
În desen este reprezentat graficul funcției f pentru $0 \le x \le 6$.
Copiați și completați graficul funcției f pentru orice x din M, dacă:

a) $f(-x) = f(x);$ b) $f(-x) = -f(x).$



12. Definiți analitic funcția al cărei grafic este reuniunea semidreptelor reprezentate:

a) b) c)



13. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(x) = (-1)^x;$

b) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x \cdot (-1)^x;$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x| - 1.$

14. Reprezentați grafic funcția cu domeniul de definiție $M = \{x \mid x < 10,\ x \in \mathbb{N}\}$ care pune în corespondență numărului x restul împărțirii lui x la 3.

15. Demonstrați că un cerc nu poate fi graficul unei funcții.

§4. Funcții de gradul I. Funcții constante

4.1. Noțiunile *funcție de gradul I* și *funcție constantă*

1 Înălțimea unui bambus este de 2 m. Timp de o zi, bambusul creşte în înălțime cu 0,8 m.

a) Scrieți formula care determină înălțimea bambusului peste un număr dat de zile.
b) Construiți un tabel şi înregistrați în el înălțimea bambusului peste 1 zi, 2 zile, 3 zile, 4 zile.
c) Reprezentați grafic funcția obținută.

Explicăm

a) Timp de x zile, bambusul va creşte cu ___ $\cdot x$ (metri).

Peste x zile, înălțimea bambusului va fi $h = 2 +$ ___ $\cdot x$ (metri).

b)

x (zile)	0	1	2	3	4
h (m)	2	2,8	?	4,4	?

c) Obținem funcția:

h: {0, 1, 2, 3, 4} $\to \mathbb{R}$, $h(x) = 2 +$ ___ x.

Trasăm graficul funcției, notând în sistemul cartezian de coordonate punctele (0; 2), (1; ___), (2; ___), (3; 4,4), (4; ___) (fig. 13).

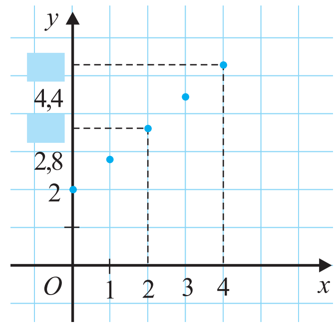


Fig. 13

Observații

Constatăm că cele 5 puncte construite sunt coliniare (sunt situate pe aceeaşi dreaptă).

2 Ce figură geometrică reprezintă graficul funcției $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 0,8x + 2$? Dar al funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2$?

Rezolvare:

Graficul funcției $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 0,8x + 2$, reprezintă o dreaptă (fig. 14).

Pentru a construi această dreaptă, este suficient să determinăm coordonatele a două puncte diferite ale ei.

Graficul funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2$, este o dreaptă paralelă cu axa Ox (fig. 14).

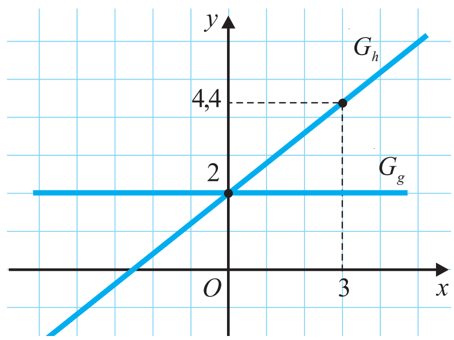


Fig. 14

Definiții

- Funcția de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a \neq 0$ şi $a, b \in \mathbb{R}$, se numeşte **funcție de gradul I**.
- Funcția de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b$, unde $b \in \mathbb{R}$, se numeşte **funcție constantă**.

Rețineți

Graficul funcției de gradul I este o **dreaptă**.
Graficul funcției constante este o **dreaptă paralelă cu axa absciselor**.

4.2. Proprietățile funcției de gradul I

LUCRARE PRACTICĂ

a) Luând în considerare că graficul funcției de gradul I este o dreaptă, trasați în același sistem cartezian de coordonate graficele funcțiilor $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -2x + 2$.

b) Aflați coordonatele punctelor în care graficul fiecărei funcții intersectează: axa absciselor; axa ordonatelor.

c) Determinați tipul unghiului format de graficul fiecărei funcții cu direcția pozitivă a axei Ox.

d) Fie $x_1 < x_2$. Comparați: $f(x_1)$ cu $f(x_2)$; $h(x_1)$ cu $h(x_2)$.

e) Pentru ce valori ale variabilei x: $f(x) > 0$; $h(x) > 0$? Dar $f(x) < 0$; $h(x) < 0$?

Explicăm

a) Deoarece orice dreaptă este determinată de două puncte diferite ale ei, completăm tabelul de valori al funcțiilor pentru două valori arbitrare ale lui x.

x	0	1
$f(x)$	-1	1
$h(x)$	2	0

Punctele de coordonate $(0; -1)$ și $(1; 1)$ determină o dreaptă care este graficul funcției f (fig. 15).

Punctele de coordonate (0; ...) și (1; ...) determină o dreaptă care este graficul funcției $h(x)$ (fig. 15).

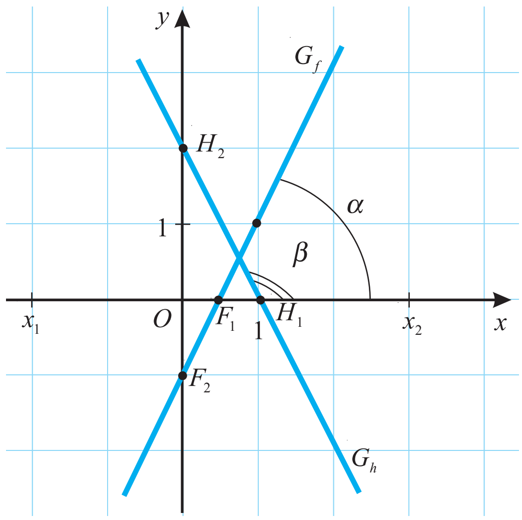


Fig. 15

b) Putem utiliza graficele sau putem proceda în felul următor:

– Determinăm punctul de intersecție a graficului cu axa absciselor:

$f(x) = 2x - 1 = 0$ sau $2x = 1$.

Prin urmare, $x = \frac{1}{2}$ și $F_1\left(\frac{1}{2}; 0\right) \in G_f$.

$h(x) = -2x + 2 = 0$ sau $-2x = -2$.

Prin urmare, $x =$ ... $\Rightarrow H_1($... $;0) \in G_h$.

– Determinăm punctul de intersecție cu axa ordonatelor:

Utilizând tabelul de valori, obținem $F_2(0; -1) \in G_f$ și $H_2(0; 2) \in G_h$.

c) Unghiul α, format de G_f și direcția pozitivă a axei Ox, este unghi ascuțit.

Unghiul β, format de G_h și direcția pozitivă a axei Ox, este unghi ... .

d) Analizând graficele funcțiilor f și g, observăm că pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ și $x_1 < x_2$, au loc relațiile $f(x_1) < f(x_2)$ și $h(x_1)$ ... $h(x_2)$;

e) $f(x) > 0$ pentru orice $x > \frac{1}{2}$, iar $h(x) > 0$ pentru orice $x <$ ... .

$f(x) < 0$ pentru orice ... , iar $h(x) < 0$ pentru orice ... (fig. 15).

Rețineți

Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Valoarea variabilei x pentru care $f(x)=0$ se numeşte **zerou** al funcției f.
- Dacă pentru orice $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ avem:
  a) $f(x_1) < f(x_2)$, atunci funcția f este **strict crescătoare**;
  b) $f(x_1) > f(x_2)$, atunci funcția f este **strict descrescătoare**.

Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

- Zeroul funcției f este numărul $-\dfrac{b}{a}$.
  Pentru a calcula zeroul funcției vom rezolva ecuația $ax = -b$.
- Punctul de intersecție a graficului funcției f cu axa absciselor este $A(x_0; 0)$, unde x_0 este zeroul funcției. Punctul de intersecție a graficului funcției f cu axa ordonatelor este $B(0; f(0))$, iar în cazul funcției de gradul I va fi $B(0; b)$.
- Funcția f este: a) strict crescătoare, dacă $a > 0$;
  b) strict descrescătoare, dacă $a < 0$.
- Numărul a se numeşte **panta** (sau **coeficientul unghiular** al) graficului funcției f.

4.3. Funcția proporționalitate directă

Este important să conştientizăm că funcțiile şi graficele sunt în jurul nostru şi se aplică în diverse domenii. De exemplu:

În tabel este înregistrat consumul de energie electrică (exprimat în kilowați) al unui radiator electric în funcție de timp (exprimat în ore).

Examinați tabelul:

Timpul (h)	0,5	1	1,5	2
Consumul (kW)	0,6	1,2	1,8	2,4

Completați adecvat:

- Timpul şi consumul de energie electrică sunt mărimi direct proporționale, deoarece $\dfrac{0{,}5}{0{,}6} = \dfrac{\square}{1{,}2} = \dfrac{1{,}5}{1{,}8} = \dfrac{2}{\square}$.
- Dacă notăm cu x timpul, atunci $y = \square \cdot x$ este numărul de kilowați consumați de radiator în x ore.
- Prin urmare, tabelul defineşte funcția
  $f\colon \{0{,}5;\ \square\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \square \cdot x$.

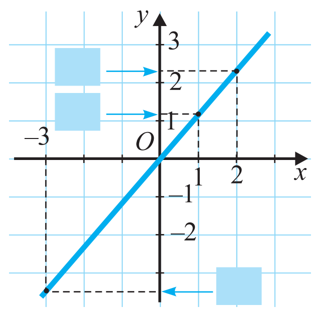


Fig. 16

Graficul funcției $f\colon \{0{,}5; 1; 1{,}5; 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1{,}2x$, reprezintă 4 puncte coliniare, iar graficul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1{,}2x$, reprezintă o dreaptă (fig. 16).

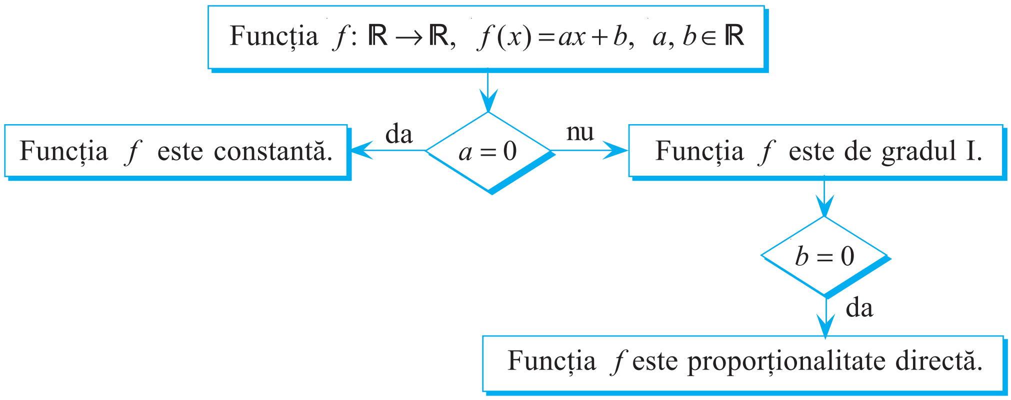
Rețineți

- Funcția de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, unde $a \in \mathbb{R}^*$, se numește **proporționalitate directă**.
  Numărul a se numește **coeficient de proporționalitate**.
- Graficul funcției proporționalitate directă este o dreaptă care conține originea sistemului de axe ortogonale.

Observăm că, dacă în formula funcției de gradul I $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, considerăm $b = 0$, atunci funcția f devine proporționalitate directă.

Rețineți

Prin urmare, fiind un caz particular al funcției de gradul I, proporționalitatea directă posedă aceleași proprietăți ca și funcția de gradul I.



- Se știe că punctul $M(2; 3)$ aparține graficului unei proporționalități directe.
  a) Trasați graficul acestei funcții.
  b) Scrieți formula care descrie această dependență funcțională.

Observații

Proporționalitatea directă este o funcție care descrie dependența dintre două mărimi direct proporționale: x și y. Dependența dintre două mărimi invers proporționale este descrisă de o funcție de forma $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{k}{x}$, unde $k \in \mathbb{R}^*$, numită **proporționalitate inversă**.

Funcția proporționalitate inversă se va studia în clasa a VIII-a.

Exerciții și probleme

1. Trasați graficul funcției:

a) $f: \{-0{,}5; 0{,}5; 1; 2; 3; 4\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$;

b) $f: \{-3; -2; -1; 0; 1{,}5; 3\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + 1$;

c) $h: \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 0{,}5x$.

2. ***Lucrați în perechi!*** Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Selectați formulele prin care poate fi definită funcția f:
a) de gradul I;
b) constantă;
c) proporționalitate directă.

$f(x)=\sqrt{5}$ $\quad$ $f(x)=8x^2-1$ $\quad$ $f(x)=2x-4$ $\quad$ $f(x)=\sqrt{7}x+7$ $\quad$ $f(x)=\frac{1}{3}x$ $\quad$ $f(x)=-3x$ $\quad$ $f(x)=x^2$

3. Determinați coeficientul unghiular și trasați graficul funcției:
a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-4$; b) $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-1{,}5x+2$; c) $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=2(x+1)$;
d) $t\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t(x)=-\frac{5}{2}x$; e) $p\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ p(x)=\frac{1}{2}x+1$; f) $q\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ q(x)=-3(1+\frac{x}{3})$.

4. Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Aflați punctele de intersecție a graficului funcției cu axele sistemului cartezian de coordonate, dacă:
a) $f(x)=0{,}8x+8$; b) $f(x)=-3{,}2x-6{,}4$; c) $f(x)=\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}$; d) $f(x)=-\sqrt{2}x+2$.

5. Definiți analitic funcția constantă, dacă graficul ei intersectează axa ordonatelor în punctul:
a) $A(0;\,-3)$; b) $B\left(0;\,\frac{1}{2}\right)$; c) $C(0;\,\sqrt{3})$; d) $O(0;\,0)$.

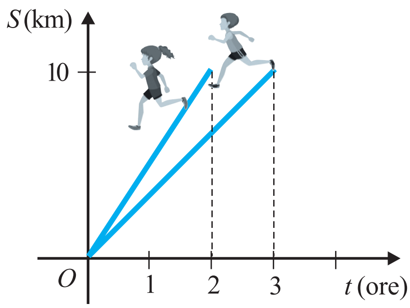
6. ***Investigați!*** În care cadrane se află graficul funcției:
a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=121x$; b) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-0{,}001x$;
c) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{59}}x$; d) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2^{10}x$?

7. Care dintre punctele $A(-10;\,-6)$, $B(20;\,-8)$, $C(-40;\,4)$ aparțin graficului funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-\frac{1}{5}x-4$?

8. Într-o butelie sunt 1,6 kg de gaz lichid. Aragazul consumă într-o oră 0,1 kg de gaz. Descrieți analitic dependența dintre masa gazului din butelie și timpul de funcționare (în ore) a aragazului.

9. Mihai avea 20 de lei. El a cumpărat câteva caiete la prețul de 3 lei. Descrieți analitic dependența dintre rest și numărul de caiete cumpărate.

10. Un robinet a fost deschis pentru a umple un vas cu capacitatea de 20 *l*. Trasați graficul dependenței funcționale dintre volumul apei din vas și timp, dacă apa din robinet curge cu viteza de 4 *l*/min.



11. Graficele din figura alăturată reprezintă mișcarea a două persoane. Viteza cărei persoane este mai mare?

12. ***Lucrați în grup!*** Scrieți formula prin care se definește funcția de gradul I, dacă graficul ei intersectează axele sistemului de axe ortogonale în punctele:
a) $A(0;\,-1)$, $B(2;\,0)$; b) $A\left(0;\,\frac{1}{2}\right)$, $B(-2;\,0)$;
c) $A(0;\,\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3};\,0)$; d) $A(0;\,-4{,}5)$, $B(9;\,0)$.

13. ***Investigați!*** Fie funcțiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Stabiliți poziția relativă a graficelor acestor funcții, dacă:

a) $f(x) = 1{,}5x - 1$, $g(x) = 1{,}5x + 2$; b) $f(x) = 2x - 4$, $g(x) = 3x - 4$;

c) $f(x) = 2{,}5x - 2$, $g(x) = 2{,}5x$; d) $f(x) = -2x + 1$, $g(x) = -2x - 1$.

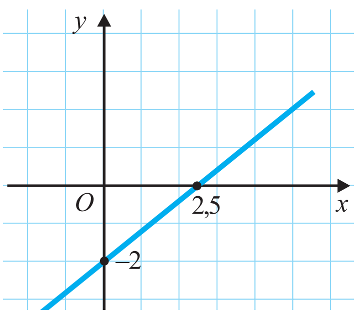
14. ***Investigați!*** Stabiliți tipul unghiului format de direcția pozitivă a axei Ox şi graficul funcției:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$; b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$;

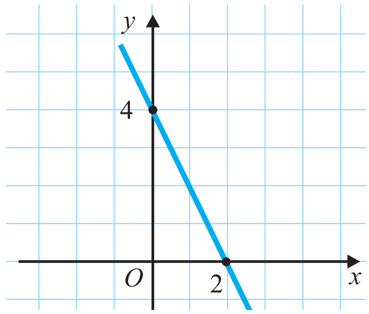
c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3}x$; d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -0{,}8x - 1$.

15. ***Lucrați în perechi!*** Definiți analitic funcția de gradul I al cărei grafic este reprezentat:

a)



b)



16. Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 8$.

1) Aflați zeroul funcției f.

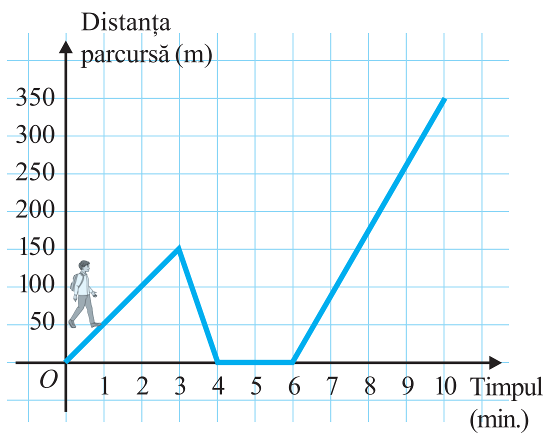
2) Trasați graficul funcției f.

3) Utilizând graficul, determinați valorile lui x, pentru care:

a) $f(x) > 0$; b) $f(x) < 0$;

c) f este strict crescătoare; d) f este strict descrescătoare.

17. Dinu a ieşit din casă şi s-a pornit spre şcoală. Pe drum şi-a amintit că a uitat caietul cu temele pentru acasă şi s-a întors. A luat caietul şi din nou s-a pornit şi a ajuns la şcoală. În figura alăturată este reprezentat graficul deplasării lui Dinu de acasă la şcoală (timpul este în minute, iar distanța în metri).



1) Utilizând graficul, răspundeți la întrebările:

a) La ce distanță de casă Dinu şi-a amintit de caiet?

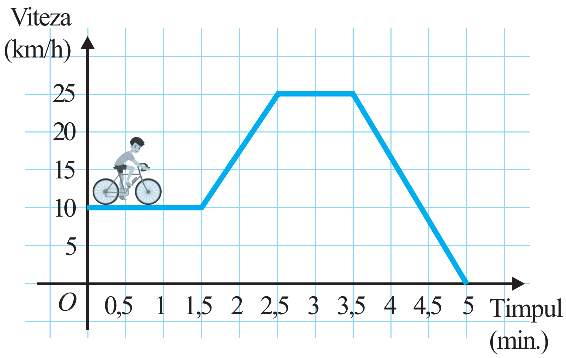
b) Câte minute i-au trebuit lui Dinu să caute caietul?

c) La ce distanță de casă se află şcoala?

d) În care interval de timp Dinu s-a deplasat cel mai rapid?

2) Trasați graficul distanței de la casa lui Dinu până la şcoală, dacă Dinu s-ar fi deplasat cu viteza inițială, reprezentată pe desen.

3) Este graficul distanței de la casă până la şcoală graficul unei proporționalități directe?



18. În figura alăturată este reprezentat graficul mişcării unui biciclist în 5 minute (timpul este în minute, iar viteza în km/h). Folosind graficul, răspundeți la întrebările:

a) Care a fost cea mai mare viteză a biciclistului?

b) Câte minute s-a deplasat biciclistul cu viteze constante?

c) Când viteza biciclistului creştea?

d) Când viteza biciclistului se micşora?

e) Cu ce viteză se deplasa în perioada de timp [0; 1,5]?

f) Dar în perioada de timp [2,5; 3,5]?

19. Cristina a fost bolnavă 8 zile. În figura alăturată este reprezentat graficul variației temperaturii corpului în cele 8 zile. Determinați, utilizând graficul:

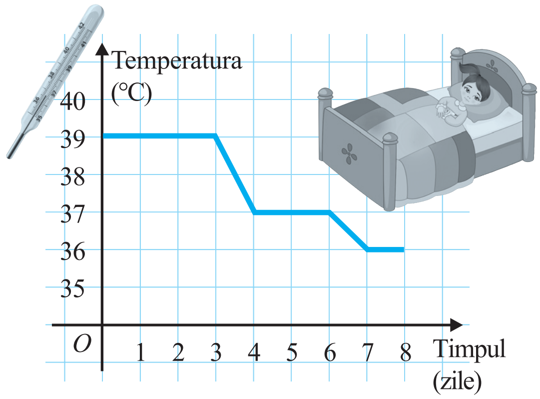
a) Ce temperatură avea Cristina în a treia zi?

b) Dar în a cincea zi?

c) În a câta zi temperatura s-a redus la 36°?

d) Care a fost temperatura maximă?

e) Cât timp s-a menținut temperatura de 39°?



20. Formulați exemple de funcții din fizică, chimie, biologie, economie, istorie etc.

21.  ***Lucrați în grup!*** Proiect *Aplicații ale funcțiilor în medicină*.

22. Graficul funcției f de gradul I este dreapta AB. Definiți analitic funcția f, dacă:

a) $A(0; -2)$, $B(1; 1)$; b) $A(0; 8)$, $B(-3; 2)$.

23. Trasați graficul funcției $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă:

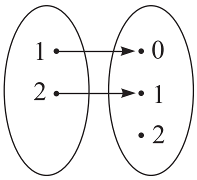
a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{pentru } x<0, \\ -x+1, & \text{pentru } x \geq 0; \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 3x, & \text{pentru } x \leq 2, \\ 6, & \text{pentru } x>2; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -3x-1, & \text{pentru } x<1, \\ -4, & \text{pentru } x \geq 1; \end{cases}$ d) $g(x) = \begin{cases} 1{,}5-x, & \text{pentru } x \leq -3, \\ 4{,}5, & \text{pentru } x>-3. \end{cases}$

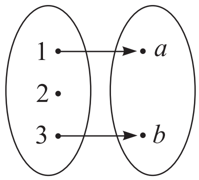
24.  ***Lucrați în grup!*** Proiect *Funcții în fizică*.

Exerciții și probleme recapitulative

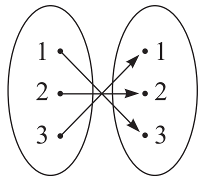
1. Care dintre următoarele diagrame definesc o funcție?



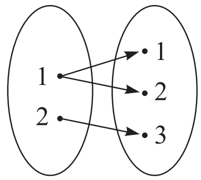
a)



b)

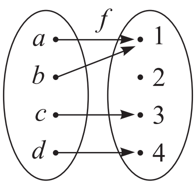


c)

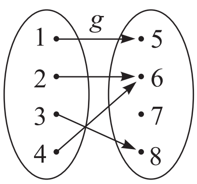


d)

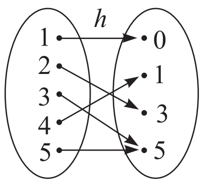
2. Care este domeniul de definiție şi mulțimea de valori ale funcției definite de următoarea diagramă?



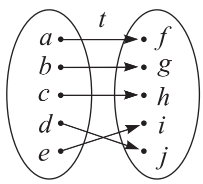
a)



b)



c)



d)

3. ***Lucrați în perechi!*** Examinați funcțiile definite în exercițiul **2** şi calculați:

a) $f(a)$, $f(c)$, $f(d)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$;

b) $h(1)$, $h(4)$, $h(5)$, $t(a)$, $t(d)$, $t(e)$.

4. ***Lucrați în perechi!*** Examinați funcțiile definite în exercițiul **2** şi determinați punctele în care:

a) valoarea funcției f este 3, valoarea funcției g este 6;

b) valoarea funcției h este 5, valoarea funcției t este f.

5. Descrieți printr-un tabel funcția:

a) $f\colon \{1, 3, 5\} \to \{4, 10, 16\},\ f(x) = 3x+1;$

b) $f\colon \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{N},\ f(x) = 2\cdot|x|;$

c) $f\colon \{-3, -2, 1, 2, 3\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = -x;$

d) $f\colon \{x\in\mathbb{Z} \mid |x| < 4\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x^2 - 1.$

6. Calculați $f(1)$, $f(3)$ şi $f(5)$, dacă:

a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ f(x) = \dfrac{1}{15}x;$

b) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(x) = -x+2;$

c) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(x) = 4-x;$

d) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(x) = |x|+2.$

7. ***Lucrați în grup!*** Scrieți analitic (printr-o formulă) funcția care pune în corespondență:

a) fiecărui număr natural dublul pătratului acestui număr;

b) fiecărui număr întreg sfertul opusului său;

c) fiecărui număr rațional nenul opusul inversului său;

d) fiecărui număr real radicalul modulului său.

8. Aflați mulțimea valorilor funcției:

a) $f\colon \{-2, -1, 5, 7\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x};$

b) $f\colon \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x| - 1;$

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 0;$

d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|.$

9. ***Lucrați în perechi!*** Trasați graficul funcției:

a) $f\colon \{x\in\mathbb{Z} \mid |x| \le 4\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = 2x;$

b) $f\colon \{x\in\mathbb{Z} \mid |x| \le 5\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = -2x-1;$

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x;$

d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x.$

10. Descrieți printr-un tabel funcția al cărei grafic este mulțimea:

a) $G_f = \{(0; 0), (1; 1), (2; 4), (3; 9)\};$

b) $G_f = \{(-2; 2), (-1; 2), (0; 2), (1; 2), (2; 2)\}.$

11. ***Lucrați în grup!*** Descrieți analitic fiecare funcție definită în exercițiul **10**.

12. Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă:

a) $a = 3$, $b = -1$; b) $a = b = -2$;

c) $a = -1$, $b = 3$; d) $a = b = 3$.

13. ***Lucrați în perechi!*** Pentru fiecare dintre funcțiile definite în exercițiul **12**, aflați punctele de intersecție cu axele sistemului cartezian de coordonate şi tipul unghiului format de graficul funcției cu direcția pozitivă a axei Ox.

14. Completați cu numărul potrivit:

a) $A\left(\frac{1}{5}; \square\right) \in G_f$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 20x$;

b) $B\left(\frac{1}{3}; \square\right) \in G_f$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -18x$;

c) $C(\square; -3) \in G_f$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 12x$;

d) $D(\square; -1) \in G_f$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x$.

15. ***Investigați!*** Care dintre următoarele scrieri defineşte o funcție? Justificați.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$; b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$; d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x$.

16. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Selectați formulele care pot defini funcția f:

a) de gradul I;

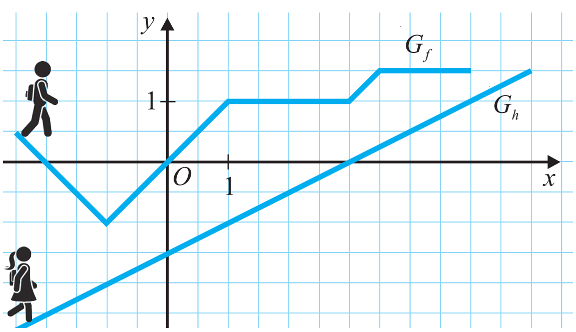
b) constantă;

c) proporționalitate directă.

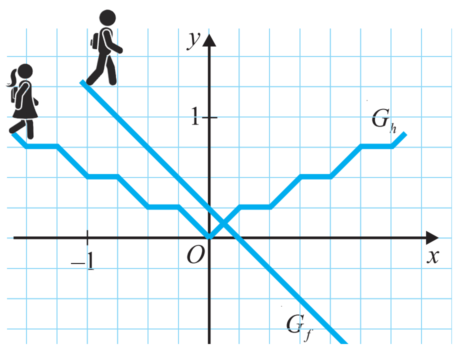
$\boxed{f(x) = 5}$ $\boxed{f(x) = \frac{1+x}{2}}$ $\boxed{f(x) = \frac{x}{4}}$ $\boxed{f(x) = 0}$ $\boxed{f(x) = 2(1-x) - 2}$ $\boxed{f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}}$ $\boxed{f(x) = x^2}$ $\boxed{f(x) = \frac{4-x}{2}}$

17. ***Lucrați în perechi!*** Examinați graficele funcțiilor f şi h. Calculați valorile funcțiilor f şi h în punctele de abscisă: $-1{,}5$; -1; $-0{,}5$; 0; $0{,}5$; 1; $1{,}5$.

a)



b)



18. ***Lucrați în grup!*** Completați adecvat:

a) Punctul $A(1; 1)$ aparține graficului funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \square \cdot x - 1$.

b) Punctul $B(-1; 1)$ aparține graficului funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + \square$.

c) Punctul $C(\square; -15)$ aparține graficului funcției $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 1$.

d) Punctul $D(\square; 3)$ aparține graficului funcției $f\colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R},\ f(x) = |x+2|$.

19. ***Investigați!*** Determinați dacă graficul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ conține puncte care au abscisa egală cu ordonata, dacă:

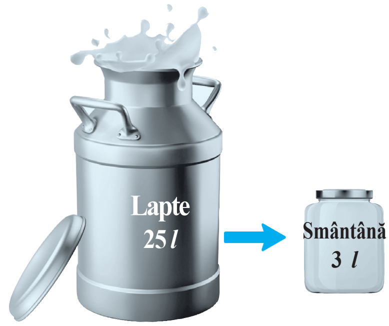
a) $f(x) = 2x - 4$; b) $f(x) = x + 0{,}19$; c) $f(x) = 0{,}8x - 5$; d) $f(x) = |x|$.

20. ***Lucrați în perechi!*** Din 25 *l* de lapte se obțin 3 *l* de smântână.

a) Definiți analitic funcția f care pune în corespondență fiecărei cantități x de lapte cantitatea de smântână ce se obține din x litri de lapte.

b) Calculați $f(180)$; $f(0{,}5)$; $f(200)$.

c) În ce puncte valoarea funcției f este 4,5; 0,6; 0,5?



21. *Proiect individual*. Trasați graficul variației temperaturii aerului dimineața în localitatea voastră, pe parcursul a două săptămâni.

22. Discutați cu părinții și împreună trasați un grafic din activitatea profesională a acestora.

23. Câte funcții ce au ca domeniu și codomeniu mulțimile $\{1; 2\}$ și, respectiv, $\{1; 2; 3\}$ se pot defini?

24. În tabel sunt indicate tarifele pentru convorbirile telefonice pentru două tipuri de abonamente.

Pachetul	Minute incluse	Abonamentul (lei)	Tariful pentru un minut suplimentar (bani)
Standard	300	24	9,6
Econom	200	6	24

a) Definiți câte o funcție care descrie formula de calcul pentru nota de plată pentru fiecare tip de abonament.

b) Calculați valorile funcțiilor S și E, corespunzătoare abonamentului *Standard* și, respectiv, abonamentului *Econom*, în punctele 100, 200, 250, 300, 400.

c) Aflați valorile argumentului x pentru care $S(x) = E(x)$. Ce informație furnizează această egalitate?

25. Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 3$.

a) Calculați $f(f(-1))$, $f(f(2))$.

b) Pentru care valori ale lui x obținem $f(x) = f(f(x))$?

26. ***Lucrați în grup!*** Proiect *Proporționalitatea directă în viața de zi cu zi.*

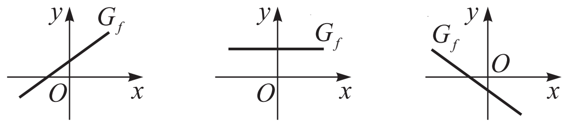
Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta 1

1. Fie $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{2}{7}x + 4$.
Precizați cele trei elemente ale funcției f.

2. În imagine este reprezentat graficul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx + n,\ m, n \in \mathbb{R}$.



① ② ③

a) Completați caseta cu unul dintre termenii „funcție de gradul I”, „funcție constantă”:
- în ① este reprezentat graficul $\boxed{}$;
- în ② este reprezentat graficul $\boxed{}$;
- în ③ este reprezentat graficul $\boxed{}$.

b) Comparați cu zero numerele m şi n.

3. a) Completați, astfel încât să obțineți o proporționalitate directă cu coeficient unghiular pozitiv

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \boxed{}\,x.$$

b) Precizați tipul unghiului format de graficul funcției f cu direcția pozitivă a axei Ox.

4. Scrieți formula care exprimă dependența timpului t de viteza v, fiind dată distanța parcursă s. Este această dependență o proporționalitate directă? Argumentați.

5. Reprezentați grafic funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -3x + 6$.

a) Aflați zeroul funcției f.

b) Determinați semnul funcției f, utilizând graficul.

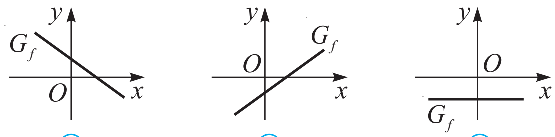
c) Precizați dacă funcția f este strict crescătoare sau strict descrescătoare.

d) Stabiliți coeficientul unghiular (panta) graficului funcției f.

Varianta 2

1. Fie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2\sqrt{x} - 3$.
Precizați cele trei elemente ale funcției g.

2. În imagine este reprezentat graficul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx + n,\ m, n \in \mathbb{R}$.



① ② ③

a) Completați caseta cu unul dintre termenii „funcție de gradul I”, „funcție constantă”:
- în ① este reprezentat graficul $\boxed{}$;
- în ② este reprezentat graficul $\boxed{}$;
- în ③ este reprezentat graficul $\boxed{}$.

b) Comparați cu zero numerele m şi n.

3. a) Completați, astfel încât să obțineți o proporționalitate directă cu coeficient unghiular negativ

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \boxed{}\,x.$$

b) Precizați tipul unghiului format de graficul funcției g cu direcția pozitivă a axei Ox.

4. Scrieți formula care exprimă dependența timpului t de distanța s, fiind dată viteza v. Este această dependență o proporționalitate directă? Argumentați.

5. Reprezentați grafic funcția $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2x - 4$.

a) Aflați zeroul funcției g.

b) Determinați semnul funcției g, utilizând graficul.

c) Precizați dacă funcția g este strict crescătoare sau strict descrescătoare.

d) Stabiliți coeficientul unghiular (panta) graficului funcției g.

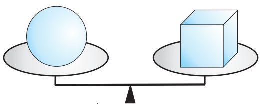
4
capitolul

Ecuații și inecuații

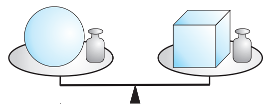
Matematica este o limbă şi o ştiinţă.
Lucian Blaga

§1. Noțiunea de ecuație. Recapitulare și completări

• Examinați şi comentați.



$a = b$



$a + c = b + c$

$a = b,\ a, b \in \mathbb{R}$

① $a + c = b + c,\ c \in \mathbb{R}$

② $a - c = b - c,\ c \in \mathbb{R}$

③ $ac = bc,\ c \in \mathbb{R}^*$

④ $\frac{a}{c} = \frac{b}{c},\ c \in \mathbb{R}^*$

Rețineți Aceste relații se numesc **relații de egalitate** în mulțimea numerelor reale.

1.1. Ecuații cu o necunoscută

1 Vindetot preconiza să vândă 600 kg de portocale la prețul de 15 lei/kg. La transportare s-au alterat 100 kg de portocale. Cu câți lei trebuie să majoreze Vindetot prețul portocalelor pentru a obține profitul preconizat?

Explicăm Fie că prețul trebuie majorat cu x lei. Atunci:

$$\boxed{(15 + x) \cdot 500 = 15 \cdot 600}$$

necunoscuta — ecuație cu o necunoscută

$(15 + x) \cdot 500 = 9000$ → ④ $15 + x = 9000 : \boxed{}$ → ② $x = \boxed{}$ → *Răspuns*: Cu $\boxed{}$ lei.

Definiție O egalitate de forma $A(x) = B(x)$, unde necunoscuta x apare în expresia $A(x)$ şi/sau $B(x)$, se numeşte **ecuație cu necunoscuta** x.

Membrul stâng al ecuației $\longrightarrow A(x) = B(x) \longleftarrow$ Membrul drept al ecuației

2 Este oare numărul **−1** soluție a următoarelor ecuații cu o necunoscută:

a) $7x+5=2(x+1)$;

b) $(y+1)(y-\sqrt{3})=0$;

c) $t^2+1=0$;

d) $2(z+1)-7=2z-5$?

> ***Model:***
> $3x+5=2(2x+3)$
> $3\cdot(-1)+5=2\cdot[2\cdot(-1)+3]$
> $2=2$ – Adevărat.
> *Răspuns*: Numărul -1 este soluție a acestei ecuații.

Definiție

Valoarea necunoscutei care transformă ecuația într-o propoziție adevărată se numește **soluție a ecuației** date.

Prin urmare, x_0 este soluție a ecuației $A(x)=B(x)$ dacă propoziția $A(x_0)=B(x_0)$ este adevărată.

Rețineți

- A **rezolva ecuația** înseamnă a afla mulțimea soluțiilor ei.
- Mulțimea soluțiilor ecuației se notează, de regulă, cu ***S***.
- O ecuație, în mulțimea numerică indicată, poate să aibă o soluție, o mulțime finită de soluții, o mulțime infinită de soluții sau să nu aibă soluții.

De exemplu, ecuația $(x+1)(x-\sqrt{3})=0$ în mulțimea $\mathbb{R}$ se rezolvă în felul următor:

$x+1=0$ sau $x-\sqrt{3}=0$

$x=-1$ sau $x=\boxed{}$.

$S=\{\boxed{}\}$

• Rezolvați ecuația în mulțimea $\mathbb{Q}$, apoi în mulțimea $\mathbb{N}$.

3 Determinați în care sertar va fi trimisă fiecare dintre ecuațiile:

$3x+5=2(2x+3)$, $(x+1)(x-\sqrt{3})=0$, $x^2+1=0$, $2(x+1)-7=2x-5$.

O soluție în $\mathbb{R}$	Două soluții în $\mathbb{R}$	Nu are soluții în $\mathbb{R}$	Mulțimea soluțiilor este $\mathbb{R}$

• Ce se va schimba dacă în locul mulțimii $\mathbb{R}$ va fi indicată mulțimea $\mathbb{N}$?

1.2. Ecuații echivalente

1 Examinați și completați, astfel încât să obțineți rezolvarea ecuației în $\mathbb{R}$:

$2-(x-4)-3x=7 \iff -x-3x=\boxed{}+7 \iff -4x=\boxed{} \iff x=\boxed{}$

Răspuns: $S=\{\boxed{}\}$.

Pentru a rezolva o ecuație, încercăm să găsim o altă ecuație, mai simplă, care să fie echivalentă cu cea dată.

Definiție

Două ecuații cu aceeași necunoscută se numesc **echivalente** dacă mulțimile lor de soluții sunt egale.

Între ecuațiile echivalente se scrie semnul „**⇔**” (se citește „**echivalent**”).

La rezolvarea ecuațiilor se utilizează următoarele reguli, ce rezultă din relațiile de egalitate în mulțimea numerelor reale, care conduc la ecuații echivalente:

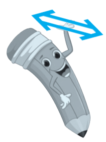
> 1* Termenii ecuației se pot trece dintr-un membru în celălalt, schimbându-le semnul.
> 2* Ambii membri ai ecuației se pot înmulți (împărți) cu (la) un număr real nenul.

Aplicăm

$5(7-2x)=15(x-1)\overset{2^*}{\Leftrightarrow} 7-2x=3\cdot(x-1)\Leftrightarrow 7-2x=3x-\square \overset{1^*}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow -3x-2x=\square-\square \Leftrightarrow -5x=\square \overset{2^*}{\Leftrightarrow} x=\square.$

Răspuns: $S=\{\square\}$.



• Între care perechi de ecuații poate fi amplasat semnul „$\Leftrightarrow$”? Justificați.

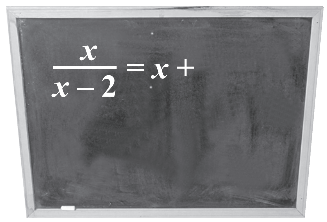
a) $3(x-8)=9x$ ◯ $x-8=3x$; b) $4x-3=x+2$ ◯ $4x-x=2+3$;
c) $x(x-1)=2x$ ◯ $x-1=2$; d) $2x+7=2-3x$ ◯ $2x+3x=7-2$.

Rețineți

> Transformările care conduc la obținerea ecuațiilor echivalente se numesc **transformări echivalente**.

1.3. Domeniul valorilor admisibile (DVA) al ecuației

• Pe tablă a fost scrisă o ecuație, însă, din întâmplare, elevul de serviciu a șters o parte din ea.



Profesorul, privind cele scrise pe tablă, a întrebat:

– Putea oare numărul 2 să fie soluție a ecuației scrise?

Explicăm

Pentru $x=2$ expresia $\frac{x}{x-2}$ nu are sens, de aceea numărul 2 nu putea fi soluție a ecuației respective.

Definiție

> Mulțimea valorilor lui x pentru care au sens expresiile $A(x)$ și $B(x)$ ale ecuației $A(x)=B(x)$ se numește **domeniul valorilor admisibile (DVA)** al acestei ecuații.

O ecuație se rezolvă în DVA al ei.

• Examinați și completați:

$2x-3=5$ → DVA: $\mathbb{R}$

$2(x-7)=4$ → DVA: $\square$

$\frac{2}{x+1}=1$ → DVA: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$\frac{1}{x-3}=\frac{2}{x+5}$ → DVA: $\mathbb{R}\setminus\{\square;\square\}$

$\frac{3}{\square}=6$ → DVA: $\mathbb{R}^*$

DIN ISTORIE...

Primul care a notat necunoscuta cu o literă a fost matematicianul Diofant din Alexandria (Grecia Antică). Primele descrieri privind transformări ale ecuațiilor au fost incluse în lucrările matematicianului arab Ali Horesmi.

Trecerea termenilor dintr-un membru al ecuației era numită de către Horesmi „nimicire” și „restabilire”. Restabilire, în limba arabă, se pronunță *alidjebr*. De la acest cuvânt a provenit denumirea *algebra*.

Diofant din Alexandria (sec. III î.H.)

Ali Horesmi (787–850)

Exerciții și probleme

1. Scrieți ca egalitate propoziția:
a) Numărul 20 este mai mare cu 8 decât numărul x.
b) Numărul x este de trei ori mai mic decât numărul $x+2$.
Cum se numesc egalitățile obținute?

2. Indicați litera corespunzătoare variantei corecte de răspuns.
Numărul –2 este soluție a ecuației:
A $x^2+4=0$. **B** $(x-2)^2=-4$.
C $(x+1)(x+2)=0$. **D** $-4x=-8$.

3. Arătați că:
a) numărul 4 este soluție a ecuației $3(x-1)=5+x$;
b) numărul –1 nu este soluție a ecuației $7x+2=5x^2$.

4. ***Lucrați în perechi!*** Care dintre elementele mulțimii $M=\{0;\ 1;\ -1;\ 2\}$ sunt soluții ale ecuației:
a) $x(x+2)=0$; b) $x^2-1=0$?

5. Câte soluții are ecuația $3x-1=7$:
a) în mulțimea $\mathbb{R}$; b) în mulțimea $\mathbb{Z}$?

6. Câte soluții are ecuația $\sqrt{3}\cdot x-3=0$:
a) în mulțimea $\mathbb{R}$; b) în mulțimea $\mathbb{Q}$?

7. ***Lucrați în perechi!*** Completați, astfel încât să obțineți o ecuație pentru care:
a) $S=\varnothing$; b) $S=\mathbb{R}$.
$2x+1=2x+\square$

8. ***Investigați!*** *Adevărat* sau *fals*?
a) $2x-9=x \Leftrightarrow 2x+x=9$;
b) $12(3+x)=8x \Leftrightarrow 3(3+x)=4x$;
c) $5x+1=x-1 \Leftrightarrow 5x-x=0$;
d) $(x+1)(x+2)=2(x+1) \Leftrightarrow x+2=2$.

A F

9. Aflați DVA al ecuației:
a) $\frac{2}{x}+3=1$; b) $x-4=\frac{48}{3x-12}$;
c) $x^2-x=0$; d) $\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x-1}$.

10. Aflați numărul de soluții reale ale ecuației:
a) $8x+2=0$;
b) $x+4=x-2$;
c) $(x+1)\cdot 2=2x+2$.

11. Scrieți ca egalitate propoziția:
a) Media aritmetică a numerelor 7 şi x este egală cu produsul lor.
b) Numărul 25 reprezintă 12% din x.

12. Utilizând egalitatea adevărată $5\cdot 2-3=3\cdot 2+1$, compuneți o ecuație care are mulțimea soluțiilor $S=\{2\}$.

13. ***Lucrați în perechi!*** Substituiți cu un număr, astfel încât ecuația obținută:
a) să nu aibă soluții în mulțimea $\mathbb{Z}$, dar să aibă soluție în mulțimea $\mathbb{Q}$;
b) să aibă soluție în mulțimea $\mathbb{R}$, dar să nu aibă soluții în mulțimea $\mathbb{Q}$.
$\square\, x=18$

14. Completați, astfel încât să obțineți o ecuație echivalentă cu cea dată:
a) $\frac{2x-1}{3}=x \Leftrightarrow 2x-1=\square$;
b) $2x-(6x-5)=45 \Leftrightarrow 2x-6x=\square$.

15. Găsiți greşeala:
$7x-14=5x-10 \Leftrightarrow 7(x-2)=5(x-2) \Leftrightarrow 7=5$ – fals.
Răspuns: $S=\varnothing$.

16. Fie ecuația $|x|=x$ în mulțimea $\mathbb{R}$.
a) Este oare soluție a acestei ecuații numărul 7?
b) Dar numărul –7?
c) Aflați mulțimea soluțiilor acestei ecuații.

17. ***Lucrați în grup!*** Aflați DVA al ecuației:
a) $\frac{x}{x^2-1}=2$; b) $\sqrt{x}+1=3$;
c) $\frac{2}{x^2+4}=1$; d) $\frac{4}{|x|}=1$.

18. Substituiți, astfel încât mulțimea soluțiilor ecuației obținute să fie:
a) $S=\{1\}$; b) $S=\{0\}$;
c) $S=\{-1\}$; d) $S=\varnothing$.

$$4x-3=3x+\boxed{}$$

19. Compuneți o ecuație pentru care mulțimea soluțiilor este:
a) $S=\varnothing$; b) $S=\mathbb{R}$;
c) $S=\{\sqrt{2}\}$; d) $S=\{0;-2\}$.

20. Compuneți o ecuație ce are o soluție în mulțimea $\mathbb{R}$, dar nu are soluții în mulțimea $\mathbb{Q}$.

21. Compuneți o ecuație ce are o soluție în mulțimea $\mathbb{Q}$, dar nu are soluții în mulțimea $\mathbb{Z}$.

22. Indicați litera corespunzătoare variantei corecte de răspuns.
Mulțimea soluțiilor ecuației $|x|=-x$ este:
A. $S=\varnothing$; **B.** $S=\mathbb{R}_+$;
C. $S=\mathbb{R}_-$; **D.** $S=\mathbb{R}^*_-$.

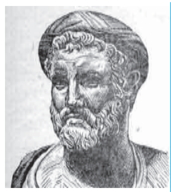
23. ***Investigați!*** Determinați dacă sunt echivalente ecuațiile:
a) $x^2=9$ şi $x=3$; b) $|x|=2$ şi $x=2$;
c) $|x|=0$ şi $x=0$; d) $x^2=4$ şi $|x|=2$.

MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

24. De ce pentru orice valoare reală a lui x valoarea expresiei $3(2x-8)-4(1,5x-8,5)$ este una şi aceeaşi?

§2. Ecuații de gradul I cu o necunoscută

2.1. Rezolvarea ecuațiilor de gradul I cu o necunoscută


Pitagora

1 Legenda spune că cineva, întâlnindu-se cu matematicianul şi filozoful grec Pitagora, l-a întrebat ce oră este. Pitagora a răspuns: „Până la sfârşitul celor 24 de ore ale zilei curente a mai rămas de două ori câte $\frac{2}{5}$ din timpul care a trecut de la începutul zilei". Ce oră era?

Explicăm Fie că de la începutul zilei s-au scurs x ore. Atunci, până la sfârşitul zilei au mai rămas $2\cdot\frac{2}{5}x=\frac{4}{5}x$ ore. Astfel, $x+\frac{4}{5}x=\frac{9}{5}x$ reprezintă 24 ore; deci $\boxed{\frac{9}{5}x=24}$ ← ecuație de gradul I cu o necunoscută

$$\frac{9}{5}x=24 \quad\Leftrightarrow\quad x=24:\frac{9}{5} \quad\Leftrightarrow\quad x=\boxed{}.$$

Răspuns: Ora $\boxed{}$ şi $\boxed{}$ minute.

Rețineți

$\boxed{ax+b=0,\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0}$ ← **ecuație de gradul I cu o necunoscută** (forma generală)

coeficientul necunoscutei; necunoscuta; termenul liber

Ecuația $ax+b=0,\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0,$ are soluția unică $-\frac{b}{a}$. Prin urmare, $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

• Completați:

$3x-2=0$ → $S=\{\boxed{}\}$

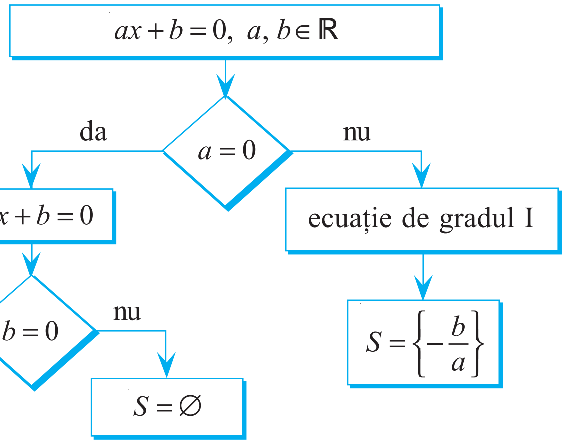
$\frac{1}{2}x+1=0$ → $S=\{\boxed{}\}$

$\frac{2}{5}x-\frac{3}{4}=0$ → $S=\{\boxed{}\}$

$-0,1x+8=0$ → $S=\{\boxed{}\}$

Lucrați în perechi!

• Examinați schema și explicați cum se rezolvă ecuația $ax+b=0$ în mulțimea $\mathbb{R}$.



2 O butelie plină cu ulei de floarea-soarelui cântărește 800 g. După ce din ea s-a luat jumătate din cantitatea de ulei, masa buteliei a devenit 425 g. Ce masă are butelia goală?

Rezolvare:

Fie x g masa buteliei goale, atunci $(800-x)$ g este masa buteliei pline cu ulei. Prin urmare,

$$x+\frac{800-x}{2}=425 \Leftrightarrow 2x+800-x=850 \Leftrightarrow 2x-x=850-\square \Leftrightarrow x=\square .$$

Răspuns: $\square$ g.

Exerciții și probleme

1. a) Selectați ecuațiile de gradul I.
b) Indicați, pentru fiecare dintre ecuațiile selectate, coeficientul necunoscutei și termenul liber.

$-2x=2$ $3x+5=0$ $\frac{5}{x}+1=0$ $2x^2-6=0$ $\frac{x}{5}-1=0$ $0\cdot x=2$

2. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $7x=21$; b) $9x=3$;
c) $5x-\frac{2}{3}=0$; d) $4x-\frac{1}{7}=0$;
e) $\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}=0$; f) $0{,}2x-10=0$;
g) $-10x+0{,}2=5$; h) $24x+1=9$.

3. *Lucrați în perechi!* Pentru ce valori reale ale necunoscutei sunt egale valorile expresiilor:
a) $3x+2$ și $2x-1$;
b) $2{,}5y-4$ și $5y+2{,}4$;
c) $3z+4$ și $3-2z$;
d) $\sqrt{2}-7x$ și $2x-2\sqrt{2}$?

4. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $5x+4=25-2x$; b) $2z-4=8-z$; c) $6{,}5y-15=4y+3{,}4$;
d) $3x-35=7x-28$; e) $5(x-7)=3(x-4)-13$; f) $3(2z+7)+4=5(z-3)$;
g) $\frac{4}{5}x-2=2\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}$; h) $2\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}=2\frac{1}{3}x+1$; i) $-2x=3(x-5)+6$.

5. Aflați zeroul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă:
a) $f(x)=2x+1$; b) $f(x)=3-5x$; c) $f(x)=\sqrt{10}x$; d) $f(x)=\frac{1}{2}x-7{,}2$.

6. Aflați DVA al expresiei:
a) $E(x)=\frac{x}{3x+0{,}2}$; b) $E(x)=\frac{1-x}{\frac{2}{3}x-5}$; c) $E(x)=\frac{3x}{2{,}8-0{,}1x}$.

7. ***Lucrați în perechi!*** Continuați rezolvarea:

a) $\frac{3x-1}{5}-\frac{5x+1}{6}=\frac{x+1}{8}-3 \Leftrightarrow 24\cdot(3x-1)-20\cdot(5x+1)=\square\cdot(x+1)-3\cdot 120 \Leftrightarrow ...$

b) $\frac{4x+1}{3}-\frac{3x-1}{5}=15-\frac{25-x}{4} \Leftrightarrow 20\cdot(4x+1)-\square(3x-1)=15\cdot 60-\square\cdot(25-x) \Leftrightarrow ...$

8. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\frac{8x-1}{5}-1=\frac{50-2x}{9}+\frac{3x+3}{4}$; b) $\frac{3y+1}{3}-\frac{16-y}{6}-\frac{9y+1}{7}=3$.

9. Pentru ce valoare reală a necunoscutei x valoarea expresiei $8x+3$ este de trei ori mai mare decât valoarea expresiei $5x-6$?

10. Pentru ce valoare reală a necunoscutei x valoarea expresiei $3x+2$ reprezintă 25% din valoarea expresiei $x+15$?

11. ***Lucrați în grup!*** Completați, astfel încât $S=\{2\}$ să fie mulțimea soluțiilor ecuației obținute:

a) $\square\, x-4=12$; b) $3x+\square=15$;

c) $-5x+8=\square$; d) $4x+\square=x+1$.

12. ***Lucrați în grup!*** Fie S_1 mulțimea soluțiilor ecuației $(4x+1)-(7x+3)=x$, iar S_2 – mulțimea soluțiilor ecuației $12x-9=\square+5$.

a) Aflați mulțimea S_1.

b) Completați caseta, astfel încât $S_1=S_2$.

c) Completați caseta, astfel încât $S_2=\varnothing$.

d) Completați caseta, astfel încât $S_2=\mathbb{R}$.

13. Scrieți propoziția sub formă de ecuație și rezolvați ecuația obținută în mulțimea $\mathbb{R}$:

a) Dacă mărim numărul x cu 12%, atunci obținem numărul 56.

b) Dacă micșorăm numărul x cu 30%, atunci obținem numărul 28.

c) Numărul $3x$ este cu 10 mai mare decât numărul x.

d) Diferența numerelor 15 și $2x$ este de 6 ori mai mare decât numărul $\frac{1}{2}x$.

14. ***Lucrați în perechi!*** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $(x-3)(x+4)-2(3x-2)=(x-4)^2$;

b) $(x+5)(x+2)-3(4x-3)=(x-5)^2$;

c) $x(x+2)-13=(x-3)(x+3)$;

d) $4x(x-1)=(2x+5)(2x-5)+1$.

15. Scrieți o ecuație de gradul I cu o necunoscută mulțimea soluțiilor căreia este:

a) $S=\{2\}$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\mathbb{R}$.

16. Scrieți o ecuație de gradul I cu o necunoscută mulțimea soluțiilor căreia este și mulțimea soluțiilor ecuației:

a) $(4x+2)-(7x+1)=x-1$; b) $6-3(2x-1)=-8x+1$;

c) $-5+2(2-x)=-3x$; d) $1{,}8(x-5)-5{,}8x=4x+6$.

17. Scrieți în casetă un număr real, astfel încât mulțimea soluțiilor ecuației $\square\, x+5=0$ să fie:

a) $S=\{5\}$; b) $S=\{-10\}$;

c) $S=\varnothing$; d) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$?

18*. Pentru ce valori reale ale parametrului m ecuația are o soluție unică? Aflați această soluție, dacă:

a) $mx=4$; b) $(m+1)x+2=0$; c) $(m-3)x=0$.

19*. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $|x|-2=0$; b) $|y|+\sqrt{13}=0$;

c) $|x-2|=3$; d) $|2x+1|=0$;

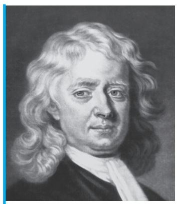
e) $|x-0{,}2|=3$; f) $|4-x|=12{,}3$;

g) $|2x+\sqrt{7}|=-5$; h) $\left|\frac{1}{2}x+3\right|=25$.

Indicație. Examinați cele două cazuri: I – când expresia de sub semnul modulului este negativă, II – când expresia menționată este nenegativă.

20. ***Lucrați în grup!*** Proiect *Aplicarea ecuațiilor de gradul I în diverse domenii.*

§ 3. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor


Isaac Newton (1643–1727)

În manualul de algebră al ilustrului matematician şi fizician englez Isaac Newton scrie: „Pentru a rezolva probleme despre numere sau despre relații între mărimi, trebuie doar să «traducem» aceste probleme în limbajul algebrei”.

Să urmăm sfatul geniului.

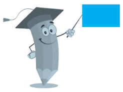
1 La soare se încălzesc câțiva pisoi. Numărul labelor acestora este cu 10 mai mare decât numărul urechilor lor. Câți pisoi se încălzesc la soare?

	În limbaj matematic
La soare se încălzesc câțiva pisoi.	x
Numărul labelor acestora	$4x$
Numărul urechilor lor	$2x$
Numărul labelor este cu 10 mai mare decât numărul urechilor.	$2x+10=4x$

Rezolvăm ecuația obținută:

$2x+10=4x \;\Leftrightarrow\; \square\, x=\square \;\Leftrightarrow\; x=\square$

Răspuns: $\square$ pisoi.



Rețineți

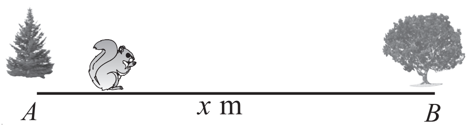
Rezultatul „traducerii” problemei în limbajul matematic este modelul matematic al acestei probleme.

„Traducerea” problemei în limbajul matematic poate fi realizată în diverse moduri, de aceea rezolvările problemei date pot fi diverse.

20 min. = 1200 s

2 În 20 de minute veverița aduce în scorbură o nucă. La ce distanță de la bradul cu scorbura crește nucul, dacă se știe că veverița se deplasează fără nucă cu viteza de 5 m/s, iar cu nuca – cu viteza de 3 m/s?

Rezolvare:



Metoda 1 Distanța de la brad până la nuc: x metri.

Timpul necesar veveriței pentru a ajunge la nuc: $\frac{x}{5}$ s.

Timpul necesar veveriței pentru întoarcere: $\frac{x}{\square}$ s.

$\frac{x}{5}+\frac{x}{\square}=1200 \Leftrightarrow \square\, x+\square\, x=1200\cdot 15 \Leftrightarrow \square\, x=\square \Leftrightarrow x=\square$ (metri).

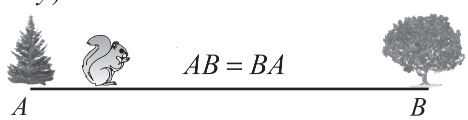
Răspuns: $\square$ metri.

Metoda 2 Timpul necesar veveriței pentru a ajunge la nuc: y s.

Timpul necesar veveriței pentru întoarcere: $(1200-y)$ s.

Distanța de la brad până la nuc: $5y$ metri

sau $\square\cdot(1200-y)$ metri.



$5y=\square\cdot(1200-y) \Leftrightarrow 5y+\square\, y=1200\cdot 3 \Leftrightarrow \square\, y=3600 \Leftrightarrow y=\square$ (secunde).

$AB=5\cdot\square=\square$

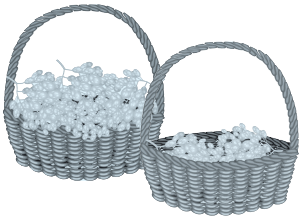
Răspuns: $\square$ metri.

Exerciții și probleme

1. „Traduceți” în limbaj matematic şi aflați numărul x:
a) Dacă mărim numărul x de 4 ori și micșorăm cu 2 rezultatul obținut, atunci obținem numărul 22.
b) Dacă mărim numărul x de 3 ori, atunci diferența dintre numărul obținut și numărul x va fi egală cu 92.

2. Într-o cutie sunt x grame de bomboane, iar în alta – de 3 ori mai multe. Ce semnifică scrierea:
a) $x+3x=800$;
b) $3x-x=400$;
c) $3x-200=x+200$?

3. *Lucrați în perechi!* Într-un coş sunt de 2 ori mai multe kilograme de struguri decât în al doilea coş. Dacă din primul coş se vor muta 3 kg de struguri în coşul al doilea, atunci în ambele coşuri va fi aceeaşi cantitate de struguri. Câte kilograme de struguri sunt în fiecare coş?
Completați tabelul și rezolvați problema.

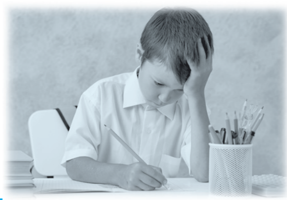


	În limbaj matematic
În coşul II (kg)	x
În coşul I (kg)	$\square\, x$
Din coşul I se vor lua 3 kg.	$\square - \square$
În coşul II se vor pune cele 3 kg luate din coşul I.	$\square + \square$
Cantitatea de struguri în ambele coşuri va fi aceeaşi.	$\square = \square$

4. În clasele a VII-a A şi a VII-a B învață 64 de elevi. Dacă doi elevi din clasa a VII-a A vor fi transferați în clasa a VII-a B, atunci în ambele clase va fi acelaşi număr de elevi. Câți elevi învață în clasa a VII-a B?

5. Pentru a ajunge la școală, Ana parcurge o porțiune din drum cu autobuzul, apoi merge pe jos. Tot drumul îl parcurge în 25 min. Ana se deplasează pe jos cu 5 minute mai mult decât cu autobuzul. Câte minute se deplasează Ana cu autobuzul?
Completați tabelul și rezolvați problema.

	În limbaj matematic
Ana se deplasează cu autobuzul (min.).	x
Ana merge pe jos cu 5 min. mai mult decât cu autobuzul.	$x + \square$
Ana parcurge tot drumul în 25 min.	$\square = \square$



6. Mihai a rezolvat două probleme în 35 de minute. Pentru rezolvarea primei probleme, i-au trebuit cu 7 minute mai multe decât pentru rezolvarea problemei a doua. În câte minute a rezolvat Mihai problema a doua?

7. Suma a trei numere naturale consecutive este egală cu 33. Aflați aceste numere.

8. La dreapta unui număr natural s-a scris cifra 0. S-a obținut un număr cu 405 mai mare decât primul. Aflați primul număr.

9. Pentru 3 acvarii sunt necesari 61 l de apă. Capacitatea primului acvariu este de 1,5 ori mai mare decât a celui de-al treilea, iar a celui de-al doilea – cu 5 l mai mare decât a celui de-al treilea acvariu. Care este capacitatea fiecărui acvariu?

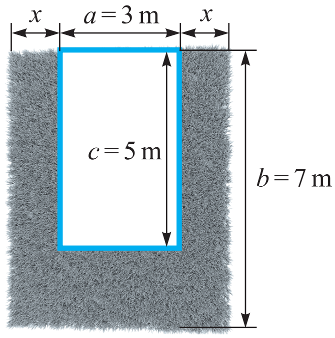
10. Trei ouă de struț african şi 60 de ouă de găină cântăresc împreună 9 kg. Aflați greutatea unui ou de struț, dacă se ştie că el este de 20 de ori mai greu decât un ou de găină.

11. *Lucrați în perechi!* Autobuzul se deplasează cu viteza de 50 km/h şi parcurge distanța de la Chişinău până la Edineț cu 1,5 ore mai mult decât un automobil ce se deplasează cu viteza de 80 km/h. La ce oră va sosi autobuzul la Edineț dacă el s-a pornit din Chişinău la ora 9:00?

12. O barcă cu motor parcurge distanța dintre două debarcadere în direcția cursului apei râului în 6 ore, iar contra cursului apei – în 10 ore. Aflați viteza apei, dacă viteza bărcii în apă stătătoare este de 16 km/h.

13. Dan și mama lui au lipit împreună 220 de colțunași. Dan a lipit colțunași timp de 2 ore, iar mama – timp de 3 ore. Într-o oră, împreună, ei au lipit 86 de colțunași. Câți colțunași a lipit Dan?

14. În desenul alăturat este prezentat planul unui lot cu aria de 27 m². Aflați dimensiunea indicată prin x.



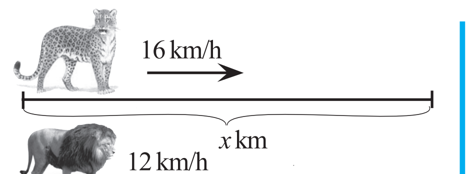
---

15. Vasile a parcurs cu bicicleta distanța de acasă până la râu cu viteza de 15 km/h, iar la întoarcere – cu viteza de 10 km/h. Aflați distanța dintre casa lui Vasile și râu, dacă el a parcurs drumul dus-întors într-o oră.
Rezolvați problema prin două metode.

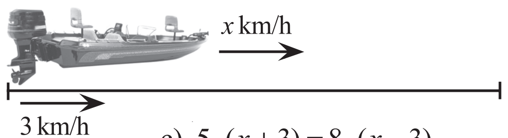
16. Radu a parcurs distanța de la stația de autobuz până la livadă cu viteza de 6 km/h. La întoarcere, a avut o viteză cu 2 km/h mai mică, deoarece ducea două găleți cu cireșe. Băiatul a parcurs tot drumul (dus-întors) într-o oră. La ce distanță de la stație se află livada?
Rezolvați problema prin două metode.

17. Compuneți o problemă după desen, astfel încât rezolvarea ei să se reducă la rezolvarea ecuației:

a) $3x = 2(x+2)$.

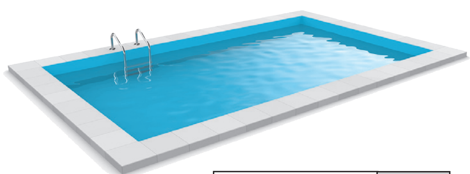


b) $\frac{x}{16} + 1 = \frac{x}{12}$.

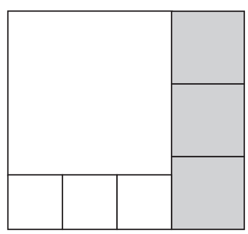


c) $5 \cdot (x+3) = 8 \cdot (x-3)$.

18. În jurul unei piscine de formă dreptunghiulară este pavată o porțiune cu lățimea de 1 m. Una din laturile piscinei este cu 15 m mai scurtă decât cealaltă. Aria suprafeței piscinei este cu 74 m² mai mică decât aria suprafeței piscinei împreună cu aria porțiunii pavate. Aflați lățimea și lungimea piscinei.



19. Un dreptunghi este împărțit în 7 pătrate, așa cum este arătat în desenul alăturat. Latura fiecărui pătrățel hașurat este de 8 cm. Determinați lungimea laturii celui mai mare pătrat.



§ 4. Inecuații cu o necunoscută

4.1. Proprietățile inegalităților numerice

1 Examinați, comentați și completați adecvat.

Inegalități numerice adevărate

$-7{,}2 \le -7{,}1$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

$1 < \sqrt{3} < 2$

$\square < 0$

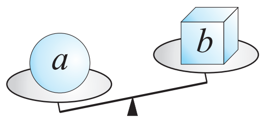
$\square \ge 8{,}1$

$\frac{1}{3} < \square < \frac{1}{2}$

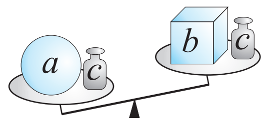
$a > b;\ a > c;\ b > c$

$c \quad b \quad a$

$c < b < a$



$a > b$



$a + c > b + c$

• Comparați:

> = <

$12 \bigcirc -6$

$12 + 7 \bigcirc -6 + 7$

$12 - 9 \bigcirc -6 - 9$

Rețineți

① Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a > b$, atunci $a + c > b + c$.

2 Comparați:

$-3 \bigcirc -7$	$30 \bigcirc 15$
$-3 \cdot 4 \bigcirc -7 \cdot 4$	$30 : 3 \bigcirc 15 : 3$
$-3 \cdot (-2) \bigcirc -7 \cdot (-2)$	$30 : (-5) \bigcirc 15 : (-5)$

Rețineți

② Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ și $c \in \mathbb{R}_+^*$, atunci $ac > bc$.

③ Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ și $c \in \mathbb{R}_-^*$, atunci $ac < bc$.

④ Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ și $c \in \mathbb{R}_+^*$, atunci $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

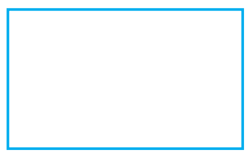
⑤ Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ și $c \in \mathbb{R}_-^*$, atunci $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

• Comparați, știind că $x, y \in \mathbb{R}$ și $x > y$:

$2x \bigcirc 2y$	>	$0 \cdot x \bigcirc 0 \cdot y$
$\frac{1}{3}x \bigcirc \frac{1}{3}y$	=	$x + 1 \bigcirc y + 1$
$-5x \bigcirc -5y$	<	$x - 7 \bigcirc y - 7$

4.2. Inecuații

1 Lungimea unei laturi a dreptunghiului este de 5 cm. Ce lungime trebuie să aibă latura a doua pentru ca perimetrul dreptunghiului să fie mai mare decât 16 cm?



x cm

5 cm

$\boxed{(5 + x) \cdot 2 > 16}$

necunoscuta   inecuație cu o necunoscută

$(5 + x) \cdot 2 > 16 \xrightarrow{④} 5 + x > 8 \xrightarrow{①} x > \square$

Răspuns: $\square$

• Este oare numărul -4 soluție a inecuației:

a) $3x+6<0$;

b) $\frac{1}{2}x \geq 8$;

c) $x^2+x \leq 13$;

d) $x+1>x+3$?

Model: $2x+1 \leq 0$

$2\cdot(-4)+1 \leq 0$

$-7 \leq 0$ – adevărat

Răspuns: Numărul -4 este soluție a inecuației.

Definiție

Se numeşte **soluție a inecuației cu o necunoscută** valoarea necunoscutei care transformă această inecuație într-o inegalitate numerică adevărată.

2 Găsiți două soluții diferite ale inecuației:

a) $2x+1<0$;

b) $\frac{1}{2}x \geq 8$;

c) $x^2+x \leq 13$;

d) $x+1<x+3$.

Rețineți

A rezolva inecuația în mulțimea dată înseamnă a găsi mulțimea soluțiilor ei ce aparțin mulțimii date. Mulțimea soluțiilor inecuației se notează cu *S*.

Definiție

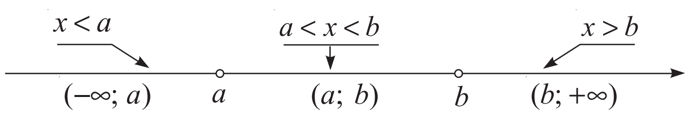
Două inecuații se numesc **echivalente** dacă mulțimile lor de soluții sunt egale.

Între inecuațiile echivalente se scrie semnul „$\Leftrightarrow$”.
Astfel, $2x+1<0 \Leftrightarrow 2x<-1 \Leftrightarrow x<-0{,}5$.

• Pentru care dintre inecuațiile de mai sus $S=\mathbb{R}$?

4.3. Intervale de numere reale şi operații cu ele

Mulțimea soluțiilor inecuației cu o necunoscută, de regulă, se scrie ca **interval de numere reale**:



1 Examinați, comentați şi completați:

	Reprezentăm pe axă	*Scriem*	*Citim*
$x>3$	3	$S=(3;\ +\infty)$	Intervalul numeric de la 3 la plus infinit, exclusiv 3.
$x \leq 2$	2	$S=(-\infty;\ 2]$	Intervalul numeric de la minus infinit la 2, inclusiv 2.
$-1 \leq x<0$	-1 0	$S=[-1;\ 0)$	Intervalul numeric de la -1 la 0, inclusiv -1, exclusiv 0.
$2 \leq x \leq 5$	2 5	$S=[\ \ ;\ \ ]$	?

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a < b$.

Mulțimea	Intervalul numeric	
	Reprezentarea pe axă	Notarea
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x \le b\}$	a b	$[a;\ b]$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x < b\}$	a b	$[a;\ b)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\}$	a b	$(a;\ b]$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$	a b	$(a;\ b)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > a\}$	a	$(a;\ +\infty)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \ge a\}$	a b	$[a;\ +\infty)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < b\}$	b	$(-\infty;\ b)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \le b\}$	b	$(-\infty;\ b]$
$\mathbb{R}$		$(-\infty;\ +\infty)$

Lucrați în perechi!

2 Efectuați:

a) $[-3;\ 8] \cup [0;\ 12) = [-3;\ 12)$.

$[-3;\ 8] \cap [0;\ 12) =$ ____

b) $(-\infty;\ 2] \cup (3;\ 7) =$ ____

$(-\infty;\ 2] \cap (3;\ 7) =$ ____

c) $(-10;\ 5] \cup [5;\ +\infty) =$ ____

$(-10;\ 5] \cap [5;\ +\infty) =$ ____

Exerciții și probleme

1. Selectați inegalitățile adevărate:

a) $-2 > 0$; b) $3 < 7$; c) $-3 < -7$; d) $6 \ge 6$;

e) $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$; f) $\frac{5}{8} > \frac{9}{16}$; g) $-\frac{3}{4} \le -\frac{2}{3}$; h) $3\sqrt{2} \le 2\sqrt{3}$.

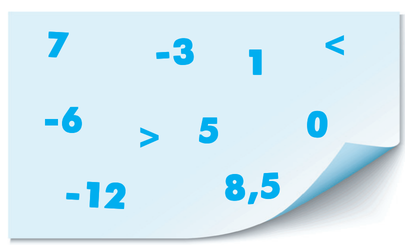
2. *Lucrați în perechi!* Scrieți ca inegalitate propoziția:

a) Şapte este mai mare decât unu.

b) Minus trei este mai mic decât zero.

c) Cinci nu este mai mare decât opt întregi şi cinci zecimi.

d) Minus şase nu este mai mic decât minus doisprezece.



3. ***Investigați!*** Se știe că $a, b \in \mathbb{R}$ și $a > b$.
Determinați valoarea de adevăr a propoziției:

a) $0{,}1a > 0{,}1b$; b) $\frac{a}{7} < \frac{b}{7}$;
c) $a - 3 > b - 3$; d) $-3a > -3b$;
e) $-5 + a < -5 + b$.

4. Este oare numărul –2 soluție a inecuației:
a) $-3x - 7 < 0$; b) $2x > 1$; c) $-5 < x \le 0$;
d) $\frac{1}{2}x \ge -1$; e) $3x + 6 > 0$; f) $10 - x > 10$?

5. Găsiți o soluție a inecuației:
a) $x > 18$; b) $x < -27$;
c) $9 < x \le 10$; d) $1 < x < 2$;
e) $-1{,}5 < x < -1$; f) $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$.

6. Citiți:
a) $[-2; 3)$; b) $(-1; 5]$; c) $(2; 7)$;
d) $[0; 11]$; e) $(0; +\infty)$; f) $(-\infty; -100]$;
g) $[-17; +\infty)$; h) $(-\infty; 3{,}2)$.

7. ***Lucrați în grup!*** Completați tabelul după modelul indicat în prima linie:

$x < 2$	2	$(-\infty; 2)$	Intervalul numeric de la $-\infty$ la 2, exclusiv 2
		$[5; +\infty)$	
	 –3 1		
			Intervalul numeric de la 3 la 4, inclusiv 3, exclusiv 4
$-1 \le x \le 15$			

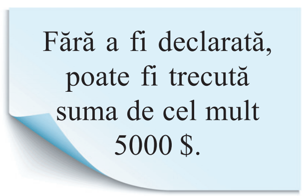
8. ***Investigați!*** *Adevărat* sau *fals*?
a) $5 \in (-1; 7)$; b) $3 \in (3; +\infty)$; c) $2 \in (-\infty; 2]$;
d) $10{,}2 \in (10{,}1; 10{,}19)$; e) $7 \in [-3; 7)$; f) $0 \in [0; 100)$.

9. „Traduceți” în limbaj matematic și scrieți ca interval numeric următoarele restricții:

a) pe ambalajul unui joc pentru copii;

b) în trafic;

c) la vamă.



10. Reprezentați pe axă intervalul numeric:
a) $(-2; 1]$; b) $[0; 5]$; c) $[1; 3)$; d) $(2; +\infty)$;
e) $(-\infty; -1]$; f) $(-\infty; 4)$; g) $[7; +\infty)$; h) $(-4{,}5; +\infty)$.

11. ***Lucrați în perechi!*** Scrieți intervalul numeric reprezentat pe axă:

a)  –2 6

b)  3

c)  1

d)  –1 0

e)  –3

f)  0

12. Selectați inegalitățile adevărate:

a) $-\frac{11}{23}<-\frac{1}{2}$; b) $\frac{7}{8}>\frac{11}{12}$;

c) $\frac{7}{29}\le\frac{1}{3}$; d) $\pi\le 3{,}14$;

e) $0{,}11>-\frac{10}{11}$; f) $\sqrt{5}>2\sqrt{2}$;

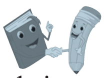
g) $-\sqrt{11}<-3{,}5$; h) $0<-6{,}(3)$.

13. Comparați numerele a și b, dacă:

a) $a+3>b+3$; b) $\frac{a}{6}<\frac{b}{6}$;

c) $-\frac{1}{3}a>-\frac{1}{3}b$; d) $a-5>b-5$.

14. Ambii membri ai inegalității $7>6$ se înmulțesc cu a^4, $a\in\mathbb{R}$. Se poate afirma că $7a^4>6a^4$? Argumentați răspunsul.

15.  *Lucrați în perechi!* Găsiți două soluții ale inecuației:

a) $0<x<\frac{1}{2}$; b) $2{,}5<x\le 2{,}6$;

c) $-0{,}25\le x<0$; d) $\frac{3}{4}<x\le 1$.

16. Aflați cel mai mare și cel mai mic număr întreg ce aparțin intervalului:

a) $(-10; -2)$; b) $[-1; 2]$; c) $(5; 9]$;

d) $[3; 18)$; e) $(1{,}1; 7{,}21)$; f) $(-3{,}1; 5{,}02]$;

g) $[-9{,}2; 0{,}8]$; h) $\left[-\frac{9}{2}; \frac{11}{3}\right)$.

17.  *Lucrați în grup!* Scrieți ca interval și reprezentați pe axă mulțimea soluțiilor inecuației:

a) $x\ge -6{,}2$; b) $x\le 15$; c) $\frac{1}{8}<x<\frac{2}{3}$;

d) $x>8$; e) $x<-13{,}2$; f) $2\le x\le 2{,}5$.

18. Efectuați: a) $[0; 5]\cup(-10; 7)$;

b) $(-3; -1)\cup[-1; 78]$;

c) $(-\infty; 3)\cup(-8; +\infty)$;

d) $(-7{,}3; 0{,}2)\cup(-1; 3{,}5]$;

e) $(-\infty; +\infty)\cup[-7; \sqrt{3}]$;

f) $(-\infty; -\sqrt{5})\cup(-10; 1]$.

19. Efectuați: a) $(-3; 2)\cap(-2; 3)$;

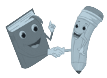
b) $(-\infty; 5)\cap(-1; 2)$;

c) $(8{,}3; +\infty)\cap[-3; 7]$;

d) $(-\infty; +\infty)\cap(0; +\infty)$;

e) $(-\sqrt{7}; -2{,}3]\cap[-2; 7)$;

f) $(-3; 7]\cap[7; +\infty)$.

20.  *Lucrați în perechi!* Efectuați:

a) $\mathbb{R}\cap[0; 3]\cup(0; +\infty)$; b) $\mathbb{Z}\cap[-3; 4)$;

c) $\mathbb{N}\cap[-1; 5{,}5)$; d) $[-3; 0]\cap[-7; 1]\cup\mathbb{R}$.

21. Găsiți trei soluții ale inecuației:

a) $\frac{1}{3}<x\le\frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{3}\le x<\frac{3}{4}$; c) $\sqrt{2}<x<\sqrt{3}$.

22. Argumentați de ce orice număr negativ este soluție a inecuației:

a) $x^2>x$; b) $0\cdot x>-1$; c) $x^2-2x\ge 0$.

23. Determinați toate numerele întregi care aparțin intervalului numeric:

a) $(\sqrt{2}; \sqrt{17})$; b) $[-\sqrt{11}; -\sqrt{3})$;

c) $[\pi; \sqrt{27}]$; d) $(-\pi; -\sqrt{2}]$.

24. Copiați și completați cu un interval numeric, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată:

a) ____ $\cup[-1; 1)=[-1; 3]$; b) $(2; 5)\cup$ ____ $=[-5; 5)$;

c) ____ $\cap[0; 2]=(0; 1)$; d) $(-7; 9]\cap$ ____ $=\{9\}$.

25. Indicați litera care corespunde răspunsului corect.

Dacă $a=2^{25}$, $b=8^8$, $c=3^{11}$, atunci:

a) $a<b<c$; b) $b<a<c$; c) $c<b<a$; d) $c<a<b$; e) $b<c<a$.

§5. Inecuații de gradul I cu o necunoscută

5.1. Noțiunea de inecuație de gradul I cu o necunoscută

1 Masa unui caiet de matematică este de 35 g. Ce număr maxim de caiete poate să ia acasă pentru verificare profesoara de matematică, dacă greutatea sacoşei ei cu manuale este de 4,5 kg, iar medicul i-a interzis să ridice o greutate mai mare de 6 kg?

Explicăm

Fie x numărul maxim de caiete.

Atunci:

$$\boxed{0{,}035x + 4{,}5 \le 6}$$

inecuație de gradul I cu o necunoscută

$35 \text{ g} = 0{,}035 \text{ kg}$

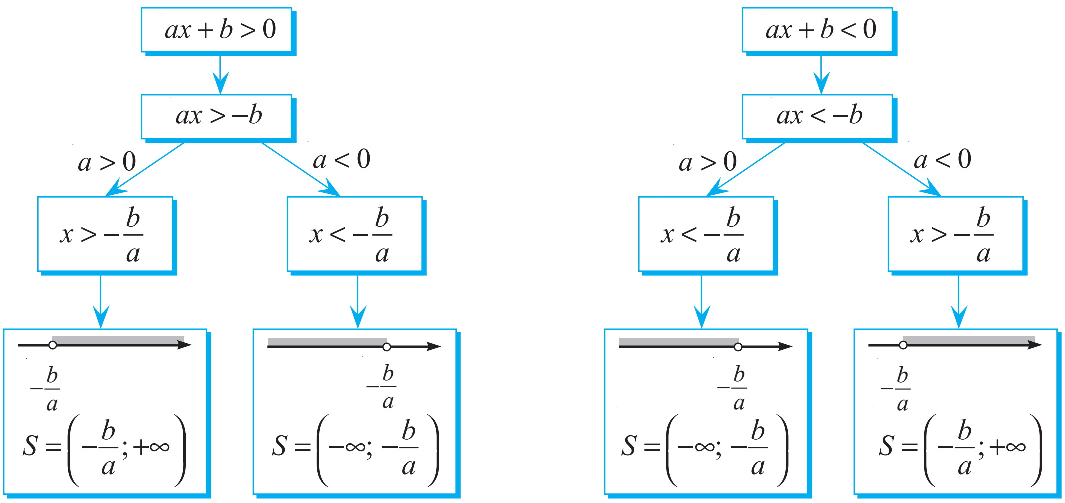
$$0{,}035x + 4{,}5 \le 5 \Leftrightarrow 0{,}035x \le \square + 5 \Leftrightarrow x \le \square$$

Răspuns: $\square$ caiete.

Definiție

Inecuațiile de forma $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\ge 0$, $ax+b\le 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a \ne 0$, se numesc **inecuații de gradul I cu o necunoscută**.

2 Examinați schemele:



Lucrați în grup!

- Alcătuiți scheme similare pentru rezolvarea inecuațiilor de forma $ax+b\ge 0$ şi $ax+b\le 0$, $a, b\in\mathbb{R}$ şi $a\ne 0$. Utilizând schemele alcătuite, completați:

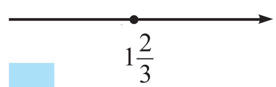
a) $2x-7\ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x \ge 7 \Leftrightarrow x \bigcirc 3{,}5$

$S = \square$

b) $5-3x\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x \bigcirc -5 \Leftrightarrow x \bigcirc 1\frac{2}{3}$

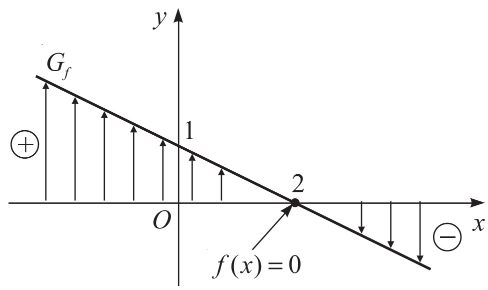


$S = \square$

3 Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{1}{2}x + 1.$

Aflați valorile reale ale lui x pentru care:

a) $f(x) = 0$; b) $f(x) > 0$; c) $f(x) < 0$.



Explicăm

a) $f(x) = 0$ pentru $-\frac{1}{2}x + 1 = 0$.

Deci, $-\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = \square$

b) $f(x) > 0$ pentru $-\frac{1}{2}x + 1 > 0$.

$-\frac{1}{2}x > -1 \Leftrightarrow x < \square$

$x \in \square$

c) $f(x) < 0$ pentru $-\frac{1}{2}x + 1 < 0$.

$-\frac{1}{2}x < -1 \Leftrightarrow x > \square$

$x \in \square$

• Observați modelul și rezolvați similar inecuațiile:

a) $0 \cdot x \geq 3$; b) $0 \cdot x < 0$; c) $0 \cdot x > -1$.

***Model*:**
$0 \cdot x > 2$
$0 > 2$ – fals
$S = \varnothing$

5.2. Inecuații reductibile la inecuații de gradul I cu o necunoscută

Pentru a rezolva o ecuație, încercăm să găsim altă ecuație, mai simplă, echivalentă cu cea dată, aplicând proprietățile relației de egalitate.

Pentru a rezolva o inecuație, încercăm să găsim altă inecuație, mai simplă, echivalentă cu cea dată, aplicând proprietățile inegalităților numerice.

Aplicăm

$\frac{7 - 2x}{3} = 5 \Leftrightarrow$

$7 - 2x = 5 \cdot 3 \Leftrightarrow$

$-2x = \square \Leftrightarrow$

$x = \square$.

Răspuns: $S = \{\square\}$.

$\frac{7 - 2x}{3} > 5 \Leftrightarrow$

$7 - 2x > 5 \cdot 3 \Leftrightarrow$

$-2x > \square \Leftrightarrow$

$x < \square$.

Răspuns: $S = (-\infty; \square)$.

Rețineți

Rezolvarea inecuațiilor se bazează pe următoarele **reguli, care conduc la inecuații echivalente cu inecuația dată**:

- În inecuație se pot trece termenii dintr-un membru în celălalt, schimbându-le semnul.
$$3x - 5 > 2x + 1 \Leftrightarrow 3x - 2x > 5 + 1.$$
- Dacă ambii membri ai inecuației se înmulțesc (împart) cu (la) unul și același număr pozitiv, atunci semnul inecuației nu se schimbă.
$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} > 2 \Leftrightarrow 2x - 1 > 2 \cdot 3.$$
- Dacă ambii membri ai inecuației se înmulțesc (împart) cu (la) unul și același număr negativ, atunci semnul inecuației se schimbă.
$$-3x > 6 \Leftrightarrow x < -2.$$
- Dacă se schimbă locurile membrilor inecuației, atunci semnul inecuației se schimbă.
$$-3\sqrt{2} > x \Leftrightarrow x < -3\sqrt{2}.$$

Exerciții și probleme

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $2x > 12$; b) $-3x \geq 15$;
c) $8x < 24$; d) $-\frac{1}{2}x \leq -1$;
e) $5x < -2{,}5$; f) $0 \cdot x < -2$;
g) $2x - 71 \leq 1$; h) $-15 - 11x > 18$.

2. Găsiți două soluții întregi ale inecuației:
a) $\frac{x-1}{3} < 1$; b) $3x - 1 \leq 2 + 7x$;
c) $3 - 2x > 2x - 13$; d) $\frac{x}{2} < 1 + \frac{x}{3}$;
e) $x + 1 \geq \frac{x}{2}$; f) $\frac{2x-1}{6} < \frac{x+3}{12}$.

3. *Lucrați în perechi!* Aflați valorile lui x, $x \in \mathbb{R}$, pentru care valoarea expresiei $5 + 8x$ este:
a) negativă; b) mai mare decât 15;
c) nenegativă; d) nu întrece 21.

4. Aflați cea mai mare soluție întreagă a inecuației:
a) $2x + 5 \leq 3$; b) $6x - 2 < 4$;
c) $5{,}4 - x > 1{,}2$; d) $8 - 3x \geq 18$.

5. Aflați cea mai mică soluție întreagă a inecuației:
a) $5x + 2 \geq 17$; b) $3x - 19 > 2$;
c) $-2x - 3 < 4$; d) $10 - \frac{1}{3}x < 0{,}1$.

6. *Lucrați în grup!* Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația și determinați elementele mulțimii $M = \left\{-21; -\frac{1}{5}; 0; \sqrt{2}; 101\right\}$ care aparțin mulțimii soluțiilor inecuației:
a) $2x + 3 \geq 5 - x$; b) $\frac{1}{2}(x+5) \leq x - 3$;
c) $5 - 3x > 6 + 2x$; d) $7(3x - 5) < 28 - 21x$.

7. Pentru ce valori reale ale necunoscutei x valoarea expresiei $5 - x$ nu este mai mare decât valoarea expresiei $\frac{1-3x}{2}$?

8. Pentru ce valori reale ale necunoscutei y valoarea expresiei $7 - 2y$ nu este mai mică decât valoarea expresiei $\frac{1+3y}{2}$?

9. *Lucrați în grup!* Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $4x - 7(x-2) < 10 - (3x - 5)$;
b) $10 + 3(x-1) > 2x - 5(3x + 1)$;
c) $5 - 4(2x + 3) \geq 1 - 2(3x - 7)$;
d) $12x - (x + 4) \leq -3 - (x - 2)$.

10. a) Aflați mulțimea S a soluțiilor inecuației $-5(2x + 8) > x - 4(x + 6)$.
b) Determinați dacă este adevărată propoziția $[-5; -3] \subset S$.

11. a) Aflați mulțimea S a soluțiilor inecuației $3(6 - 9x) < 15x - 2(x + 1)$.
b) Determinați dacă este adevărată propoziția $[-1; 2] \subset S$.

12. *Lucrați în perechi!* Determinați valorile reale ale variabilei x pentru care au loc relațiile $f(x) = 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, dacă $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: a) $f(x) = 3x + 51$;
b) $f(x) = -\frac{1}{4}x + 15$;
c) $f(x) = 2 - 8x$.

13. Lungimea laturii AB a dreptunghiului $ABCD$ este de 15 cm. Ce lungime trebuie să aibă latura BC pentru ca aria dreptunghiului să fie:
a) mai mare de 120 cm²; b) mai mică de 48 cm².

14. Perimetrul triunghiului cu laturile a, b și c este mai mare de 20 cm. Determinați ce valori, în acest caz, poate primi latura c, dacă a = 7 cm și b = 9 cm.

15. Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$. Pentru care valori ale lui x:
a) $f(x) = 0$; b) $f(x) > 0$; c) $f(x) \leq 0$?

16. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $(\sqrt{3} - 2)x < 2\sqrt{3} - 4$; b) $(\sqrt{5} - 2)x + 3\sqrt{5} \geq 6$.

17. Pentru ce valori ale lui x, $x \in \mathbb{R}$, valoarea expresiei: a) $\frac{14 - 2x}{x^2 + 1}$ este pozitivă; b) $\frac{3x + 18}{|x| + 1}$ este nepozitivă?

18. Aflați soluțiile negative ale inecuației $-2x-\frac{x-3}{2}\le 14$.

19. Aflați soluțiile pozitive ale inecuației $3x-\frac{2-x}{3}\le 6$.

20. Aflați mulțimea soluțiilor comune ale inecuațiilor:

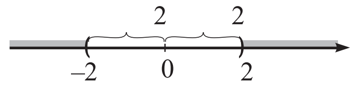
a) $2x+5>7$ și $7x-2\le 26$;

b) $7x+3\ge 2x+10$ și $2-3x<4x-12$.

21. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $|x|\ge 3$; b) $|x|\le 5$; c) $|2x|<7$; d) $4|x|>24$.

Model: $|x|>2$



$x>2$ sau $x<-2$

Răspuns: $S=(-\infty;\,-2)\cup(2;\,+\infty)$.

22. Tatăl și fiica au decis să se plimbe cu o barcă cu motor. Mama i-a rugat să se întoarcă nu mai târziu de 2 ore după plimbare. La ce distanță de debarcader se pot deplasa cu barca în direcția cursului apei pentru a îndeplini rugămintea mamei, dacă viteza bărcii în apă stătătoare este de 15 km/h, viteza apei este de 3 km/h, iar pentru a parcurge drumul de la debarcader spre casă este nevoie de 10 min.?

23. ***Lucrați în grup!*** 1) Examinați schema alăturată.

2) Compuneți scheme similare pentru cazurile $ax<b,\ ax\ge b,\ ax\le b,\ a,\,b\in\mathbb{R}$.

3) Utilizând schemele, determinați pentru care valori ale lui $a\in\mathbb{R}$ mulțimea soluțiilor inecuației:

a) $ax+2\le 7$ este $S=(-\infty;\,1]$;

b) $ax-10>2$ este $S=(-\infty;\,-3)$;

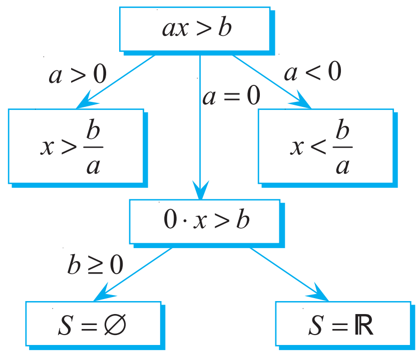
c) $ax+3<-8$ este $S=\varnothing$.

4) Scrieți o inecuație pentru care mulțimea soluțiilor este:

a) $S=(2;\,+\infty)$; b) $S=(-\infty;\,-3)$;

c) $S=[-1;\,+\infty)$; d) $S=(-\infty;\,0]$;

e) $S=\mathbb{R}$; f) $S=\varnothing$.



Exerciții și probleme recapitulative

1. Pentru ce valori ale lui x, $x\in\mathbb{R}$, valoarea expresiei $8x+2$ este de trei ori mai mare decât valoarea expresiei $5x-18$?

2. Pentru ce valori ale lui y, $y\in\mathbb{R}$, valoarea expresiei $3y-1$ este de două ori mai mică decât valoarea expresiei $10y-18$?

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $12x-3=9$; b) $7x+11=4$;

c) $3x+7=x-2$; d) $8x-(3x+1)=9$.

4. Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 32 cm. Lățimea dreptunghiului este cu 6 cm mai scurtă decât lungimea acestuia. Aflați lungimile laturilor dreptunghiului.

5. ***Lucrați în perechi!*** Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația și reprezentați pe axă mulțimea soluției ei:

a) $-2\cdot(x+5)<12$; b) $-\frac{1}{2}(x+2)\ge -3$;

c) $5\cdot(3-2x)\le 15$; d) $4\cdot(8-3x)>12$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $5(x-3)-2(x-7)=7-7(2x+6)$;
b) $5(8x-1)-7(4x+1)=9-8(7-4x)$;
c) $\frac{4x-51}{3}-\frac{17-3x}{4}=\frac{x+5}{2}$;
d) $\frac{2x+1}{3}-\frac{x-2}{5}=\frac{7x+5}{15}$.

7. După ce prețul scurtei a fost micșorat cu 20%, ea costă 320 de lei. Care a fost prețul inițial al scurtei?

8. ***Investigați!*** *Adevărat* sau *fals*?
a) $3x-2\le 0 \Leftrightarrow 2-3x\ge 0$;
b) $x^2+1>0 \Leftrightarrow (x+1)^2<0$.

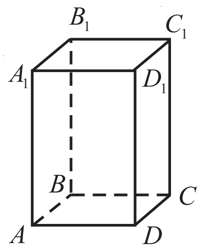
9. Rezolvați inecuația în $\mathbb{R}$ și indicați două soluții iraționale ale acesteia:
a) $\frac{2x-3}{7}<1-\frac{3-x}{2}$;
b) $(3x-5)^2>x\cdot(9x-1)+54$.

10. Aflați soluțiile întregi pozitive ale inecuației
$4-\frac{x-1}{2}\ge x-\frac{2x-1}{3}$.

11. Efectuați operațiile, utilizând reprezentările respective ale intervalelor:
a) $(-\infty; 3)\cup[0{,}5; 7)$;
b) $[-5; \sqrt{3})\cup(-2{,}(3); 10)$;
c) $[-5; 8)\cap(0; 3)$;
d) $(-6; +\infty)\cap(-2; -0{,}3)$;
e) $[-8; 3)\cap(0; 1)\cup(8; +\infty)$;
f) $(3; +\infty)\cup(-2{,}6; 5)\cap(0; 25)$.

12. ***Lucrați în grup!*** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $x(x+2)-(x-3)(x+3)=13$;
b) $4x(x-1)-(2x+5)(2x-5)=1$;
c) $(x-3)(x+4)-2(3x-2)=(x-4)^2$;
d) $(x+5)(x+2)-3(4x-3)=(x-5)^2$.

13. Dintr-un fir de sârmă cu lungimea de 96 dm trebuie să confecționăm carcasa unui paralelipiped dreptunghic a cărui lungime este de două ori mai mare decât lățimea, iar înălțimea este de trei ori mai mare decât lățimea. Aflați ce dimensiuni ar trebui să aibă acest paralelipiped.



14. Lungimea gardului cu care va fi împrejmuit un lot de formă dreptunghiulară nu trebuie să depășească 150 m. Care poate fi lățimea lotului dacă lungimea lui este de 40 m?

15. Fie funcțiile $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3(x-2)$ și $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-2x+3$. Aflați:
a) zerourile funcțiilor f și g;
b) pentru care valori ale lui x $f(x)>0$;
c) pentru care valori ale lui x $f(x)\le g(x)$.

16. Numărul 2 este soluție a ecuației $kx+5=x-1$. Aflați soluția ecuației $k(x-1)=3x+7$.

17*. Pentru ce valori ale parametrului m, $m\in\mathbb{R}$, nu are soluții ecuația:
a) $(m-4)x=12$;   b) $2x=5-mx$?

18. Pentru ce valori ale parametrului a, $a\in\mathbb{R}$, ecuația $|x|=a$:
a) nu are soluții;
b) are două soluții;
c) are o soluție unică?

19. Din sac s-a luat o jumătate din cantitatea de nuci, apoi încă jumătate din rest și, în sfârșit, încă jumătate din ceea ce a mai rămas. Câte nuci erau inițial în sac, dacă au rămas 10 nuci?

20. Aflați mulțimea soluțiilor comune ale inecuațiilor $|x|\le 3$ și $\frac{3-5x}{1-x}<5$.

PENTRU CAMPIONI

21. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $4^{23}x - 32^{9}x = 16^{4} \cdot (4^{4})^{4}$; b) $\frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{4} + \ldots + \frac{x-2022}{2023} + 2022 = 0$.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta 1

1. Completați:

$5x-7=2x+1 \Leftrightarrow \square\, x = \square \Leftrightarrow x = \square$

2. Fie funcțiile $f,\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \frac{x-7}{2},\ g(x) = 3x-1.$

a) Aflați zerourile funcțiilor f și g.

b) Pentru ce valori reale ale lui x, $f(x) \geq g(x)$?

3. Fie inecuația $3(x-1) > 6-2(x+1)$.

a) Încercuiți litera **A** dacă propoziția este adevărată sau litera **F** dacă ea este falsă.
„Inecuația dată este o inecuație reductibilă la inecuația de gradul I cu o necunoscută.”

A	F

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația.

c) Reprezentați mulțimea soluțiilor inecuației pe axă.

d) Aflați cea mai mică soluție întreagă a inecuației.

4. Pentru a vinde o cantitate de banane în perioada de timp preconizată, trebuia să se vândă zilnic câte 40 kg. În fiecare zi s-au vândut cu 20 kg de banane mai multe şi, astfel, toate bananele au fost vândute cu 3 zile înainte de termen. Pentru câte zile era preconizată vânzarea bananelor?

Varianta 2

1. Completați:

$3-2x=x+6 \Leftrightarrow \square\, x = \square \Leftrightarrow x = \square$

2. Fie funcțiile $f,\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \frac{5-x}{2},\ g(x) = 5x+1.$

a) Aflați zerourile funcțiilor f și g.

b) Pentru ce valori reale ale lui x, $f(x) \geq g(x)$?

3. Fie inecuația $2(x+1) < 4-3(x-2)$.

a) Încercuiți litera **A** dacă propoziția este adevărată sau litera **F** dacă ea este falsă.
„Inecuația dată este o inecuație reductibilă la inecuația de gradul I cu o necunoscută.”

A	F

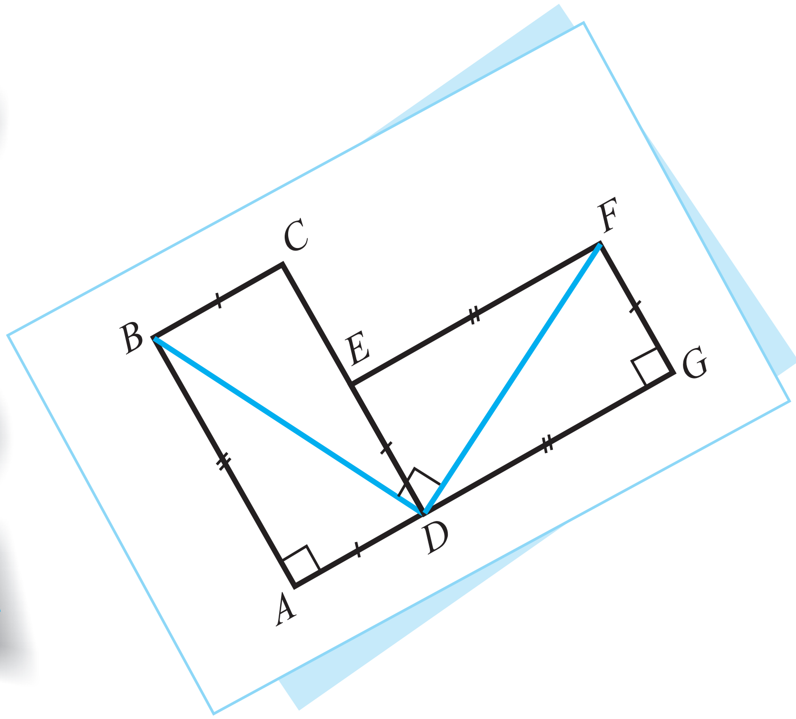
b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația.

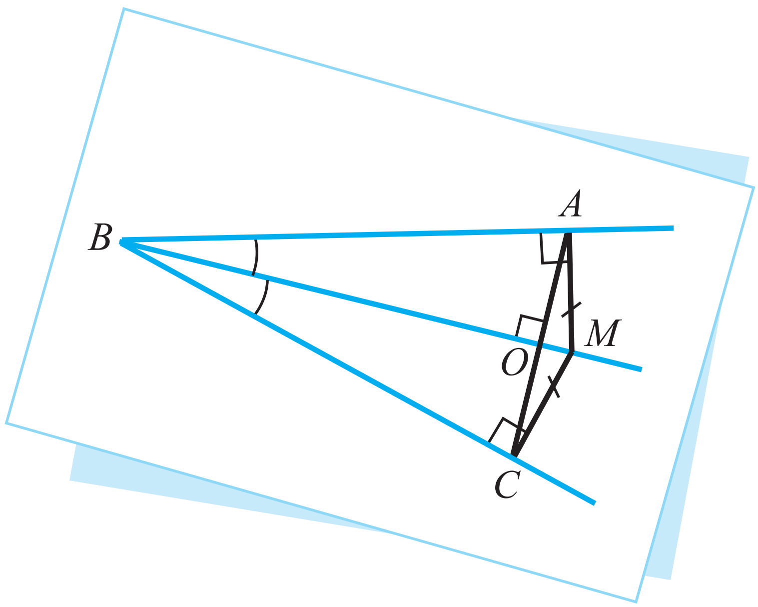
c) Reprezentați mulțimea soluțiilor inecuației pe axă.

d) Aflați cea mai mare soluție întreagă a inecuației.

4. Ştefan a calculat că, pentru a reuşi să citească o carte în vacanță, trebuie să citească zilnic 50 de pagini. Ştefan a citit zilnic cu 20 de pagini mai multe şi, astfel, a terminat de citit cartea cu 4 zile înainte de sfârşitul vacanței. Câte zile a durat vacanța?

GEOMETRIE





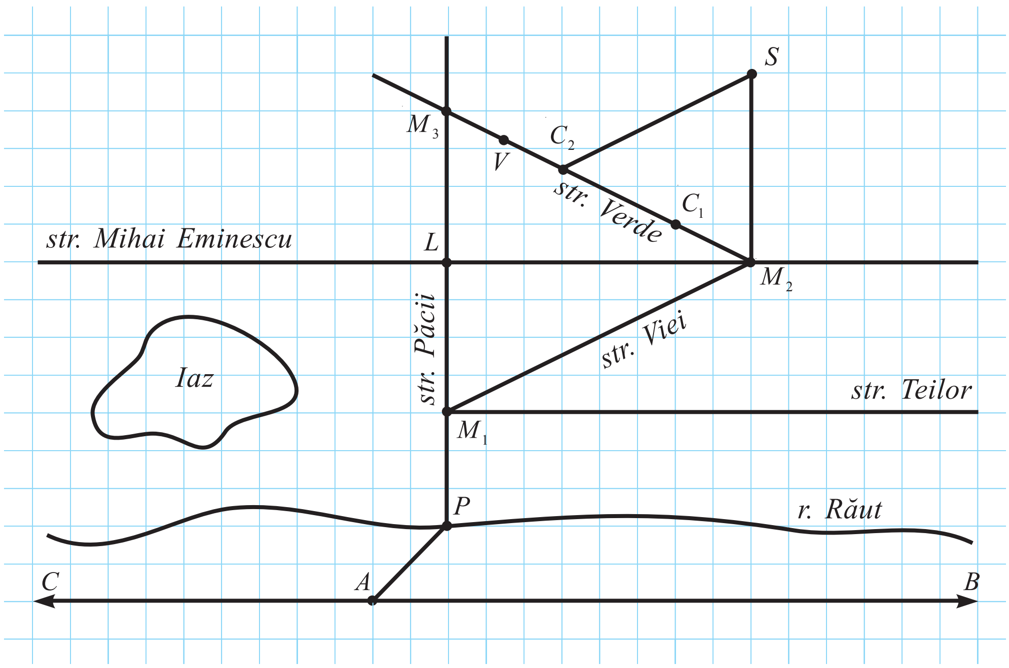
1 capitolul

Noțiuni geometrice fundamentale

Învățând matematică, înveți să gândești.
Grigore Moisil

§1. Puncte, drepte, plane. Recapitulare și completări

1 La tabăra de vară Vlad și-a făcut un prieten. Acum, într-o scrisoare, îl invită în vizită. A desenat și o hartă a localității, menționând că literele din ea semnifică:
A – autogara, B – direcția Bălți, C – direcția Chișinău, P – pod, M_1, M_2, M_3 – magazine, L – librăria, S – școala, C_1, C_2 – case, iar V – casa lui.



Examinați harta.

a) Ce a reprezentat Vlad prin puncte și cum le-a notat?

b) Ce a reprezentat prin drepte, semidrepte, linii curbe?

c) Notați pe caiet: punctele; dreptele; semidreptele; segmentele.

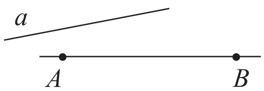
• Desenați o hartă similară a localității voastre (a cartierului vostru).

✓ **Punctul** este cea mai simplă figură geometrică. Toate celelalte figuri geometrice sunt compuse din puncte. O **figură geometrică** este o mulțime de puncte. Două figuri geometrice sunt **egale** dacă ele sunt formate din aceleaşi puncte.

Reprezentăm:	*Notăm*:
• sau ×	Punctele se notează cu literele mari ale alfabetului latin: A, B, ... Uneori punctele se notează cu A_1, A_2, ... (citim: „A unu”, „A doi”, ...).

✓ **Dreapta**

Noțiunea de dreaptă, ca şi noțiunea de punct, nu poate fi definită. Ea poate fi doar explicată. Dreapta se desenează cu ajutorul riglei. De fapt, cu ajutorul acestui instrument se reprezintă doar o porțiune a dreptei. Dreptele sunt nemărginite, deci pot fi prelungite oricât dorim.

Reprezentăm:	*Notăm*:	*Citim*:
	Dreptele se notează cu literele mici ale alfabetului latin: a, b, ... sau cu două litere mari: AB, CD, ...	Dreapta a, dreapta AB (sau BA).

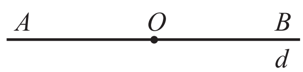
Definiție

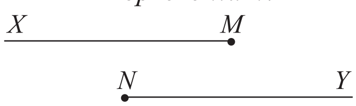
Punctele care aparțin unei drepte se numesc **puncte coliniare.**

Dacă trei sau mai multe puncte nu sunt coliniare, atunci ele se numesc puncte ***necoliniare***.

✓ **Semidreapta**

Orice punct O al unei drepte împarte această dreaptă în două figuri, numite **semidrepte**. Punctul O se numeşte **originea semidreptelor.**



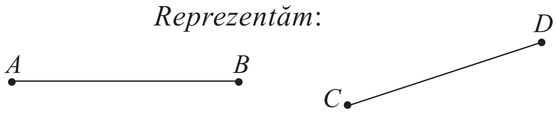
Reprezentăm:	*Notăm*:
	Semidreptele se notează cu două litere mari ale alfabetului latin: $[MX$, $[NY$, ..., prima literă indicând originea semidreptei.

Definiție

Două semidrepte care au originea comună şi formează o dreaptă se numesc **semidrepte opuse**.

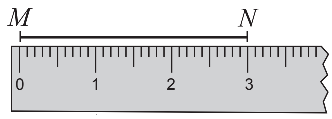
$[AB$ şi $[AC$ sunt semidrepte opuse.

✓ **Segmentul** este o parte a dreptei, formată din toate punctele situate între două puncte ale acestei drepte, numite **extremitățile segmentului**.

Reprezentăm:	*Notăm*:
	$[AB]$ sau $[BA]$ $[CD]$ sau $[DC]$

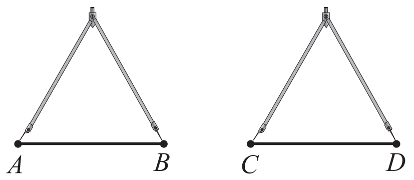
Lungimea segmentului se poate stabili cu ajutorul riglei gradate.

Pentru **a compara lungimile** a două segmente, putem utiliza rigla gradată sau compasul.



$MN = 3$ cm

Măsurăm:



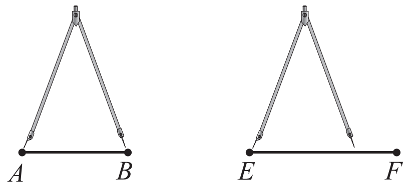
Notăm:

$AB = CD$

Citim:

Lungimea segmentului AB este egală cu lungimea segmentului CD.

Măsurăm:



Notăm:

$AB < EF$

sau

$EF > AB$

Citim:

Lungimea segmentului AB este mai mică decât lungimea segmentului EF sau lungimea segmentului EF este mai mare decât lungimea segmentului AB.

Definiție

Două segmente cu lungimi egale se numesc **segmente congruente**.

Notăm: $[AB] \equiv [CD]$. *Citim*: Segmentul AB este congruent cu segmentul CD.

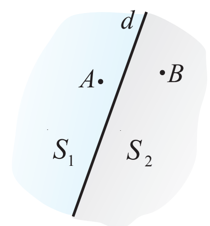
Evident, orice segment determină o dreaptă. Această dreaptă se numeşte **dreapta suport** a segmentului respectiv. Fiind dat segmentul $[AB]$, dreapta AB este dreapta suport a acestui segment.

2 Completați adecvat:

O dreaptă d din plan împarte planul în ______ mulțimi de puncte S_1 şi S_2.

Dacă segmentul AB intersectează dreapta d şi punctul A aparține mulțimii S_1, atunci $B \in$ ______.

Dacă segmentul CD nu intersectează dreapta d şi $D \in S_1$, atunci $C \in$ ______.



✓ Plane şi semiplane

Noțiunea *plan*, ca şi noțiunile *punct*, *dreaptă*, nu se defineşte.

Reprezentăm:

Notăm:

Planele se notează cu literele mici ale alfabetului grec: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ (citim: „alfa”, „beta”, „gama”, „delta”, ...).

Definiție

Două **figuri geometrice** se numesc **coplanare** dacă ele sunt incluse în acelaşi plan.

Dacă două figuri geometrice nu sunt incluse în acelaşi plan, atunci ele se numesc ***figuri necoplanare***.

Luând în considerare că figurile geometrice sunt mulțimi de puncte, dacă figura F este inclusă în planul α, notăm $F \subset \alpha$. În cazul în care un punct M aparține figurii F, notăm $M \in F$.

O dreaptă d din plan separă planul în două mulțimi de puncte, numite **semiplane**.
Dreapta d se numeşte **frontiera semiplanelor**.

Reprezentăm:	*Notăm*:	*Citim*:
	$[dA$	Semiplanul determinat de dreapta d şi punctul A.

Exerciții și probleme

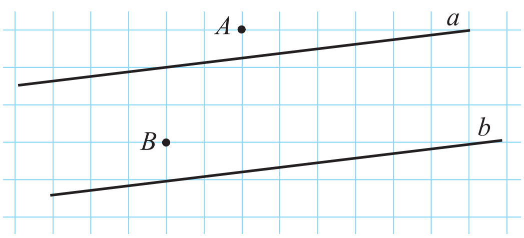
1. Selectați figurile geometrice care nu se definesc: dreaptă, pătrat, plan, triunghi, cerc, punct, semidreaptă, segment, unghi.

2. Construiți o figură geometrică formată din:
a) trei puncte; b) cinci puncte;
c) două drepte; d) trei semidrepte;
e) cel puțin 100 de puncte; f) patru segmente.

3. Punctul N aparține segmentului MK. Aflați:
a) MN, dacă $MK = 4{,}4$ cm, $NK = 26$ mm;
b) NK, dacă $MK = 6{,}3$ cm, $MN = 17$ mm;
c) MK, dacă $KN = 5{,}6$ cm, $MN = 0{,}9$ dm;
d) NM, dacă $KN = 3{,}8$ cm, $MK = 0{,}12$ m.

4. Stabiliți dacă punctele A, B, C sunt coliniare, ştiind că:
a) $AB = 17$ cm, $AC = 3$ dm, $BC = 13$ cm;
b) $AB = 29$ cm, $AC = 420$ mm, $BC = 1{,}3$ dm;
c) $AB = 4$ dm, $AC = 15$ mm, $BC = 38{,}5$ cm;
d) $AB = 48$ mm, $AC = 6$ cm, $BC = 12$ cm.

5. Reproduceți desenul şi construiți două puncte coliniare cu punctele A şi B:
a) situate pe dreptele a şi b;
b) situate de părți diferite ale dreptei a;
c) situate în semiplanul $[bA$;
d) situate în semiplanul $[aA$.



6. Examinați desenul problemei precedente. Aplicând operațiile cu mulțimi, scrieți cum se poate nota porțiunea planului cuprinsă între dreptele a şi b.

7. Punctele M, N, K sunt coliniare.
Ce punct, în mod sigur, nu se află între celelalte două, dacă:
a) $MN < NK$; b) $KM < KN$;
c) $NK > KM$; d) $NM > NK$?

8. Construiți un desen corespunzător situației.
a) Dreptele a şi b se intersectează, punctul A aparține dreptei a, punctul B (diferit de A) aparține ambelor drepte.
b) Dreptele a, b, c nu au un punct comun şi fiecare două se intersectează (drepte concurente două câte două).
c) Dreapta a conține semidreapta $[OA$ şi punctele O, A, B sunt coliniare.
d) Punctul C aparține intersecției semidreptelor $[AB$ şi $[BA$.

9. În câte mulțimi de puncte împart planul trei semidrepte cu originea comună?

10. Citiți:
a) $M \in [AB]$; b) $d \subset \alpha$;
c) $M \in \alpha$; d) $[AB] \subset \alpha$.

11. Notați:
a) Punctul O aparține semidreptei $[AB$.
b) Punctul X nu aparține segmentului MN.
c) Punctele A, B, C sunt coliniare şi punctele A şi B aparțin dreptei a.
d) Planul α include segmentul AB.

12. *Adevărat* sau *fals*?

a) $[AB] \subset AB$; b) $[AB \subset [AB]$;

c) $[AB \cap [BA = \varnothing$; d) $[AB] \cap [AB = [AB$;

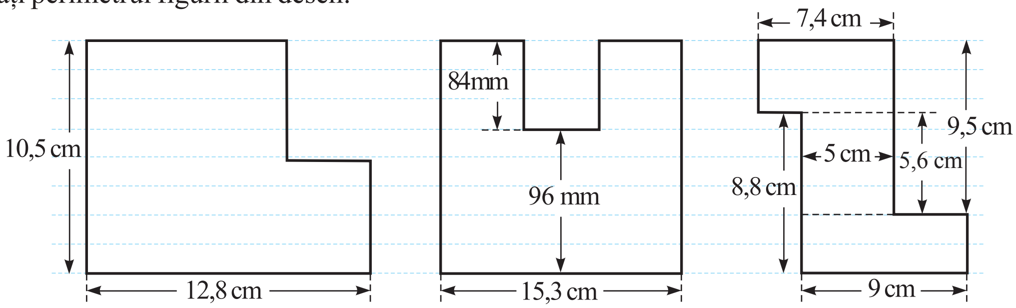
e) $[AB] \cup [AB = [AB$; f) $AB \setminus [AB = [AB]$.

13. Câte semidrepte diferite determină:

a) trei puncte coliniare distincte; b) trei puncte necoliniare;

c) patru puncte coliniare distincte; d) patru puncte, necoliniare fiecare trei?

14. Calculați perimetrul figurii din desen:

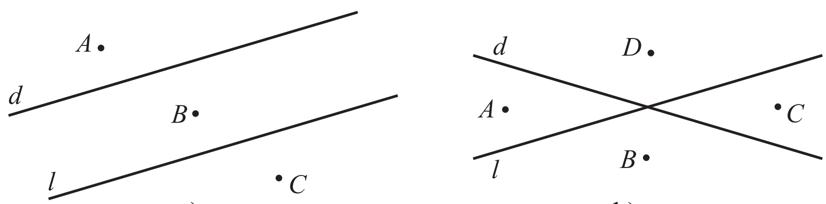


a) b) c)

15. În câte moduri poate fi notată dreapta din desen?

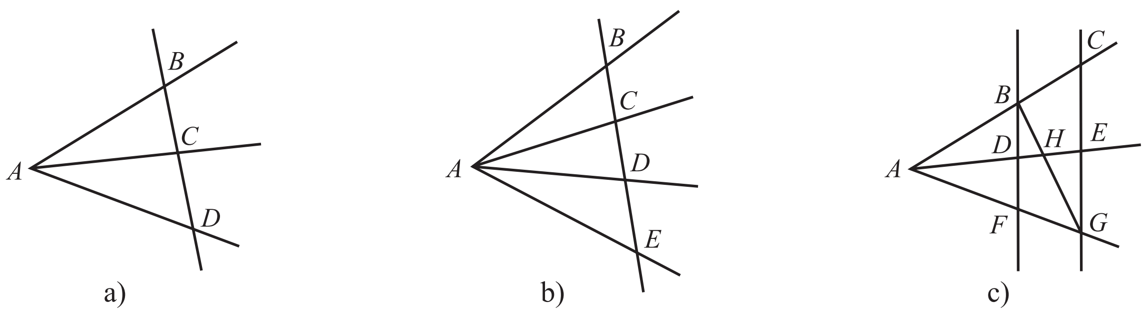
a) b)

16. Notați toate semiplanele diferite care pot fi puse în evidență.



a) b)

17. Câte segmente diferite pot fi puse în evidență?



a) b) c)

18.  *Lucrați în perechi!* Construiți:

a) cinci puncte, necoliniare fiecare trei;

b) șapte puncte, necoliniare fiecare trei;

c) 20 de puncte, necoliniare fiecare trei.

§ 2. Poziții relative

✓ Două puncte

Puncte identice sau confundate	Puncte distincte
$A \bullet B$	$A \bullet \qquad \bullet B$
Notăm: $A = B$	*Notăm*: $A \neq B$

Proprietate fundamentală
Dacă punctele A şi B sunt diferite, atunci există o unică dreaptă care trece prin punctele A şi B.

✓ Un punct şi o dreaptă

Punctul aparține dreptei

Notăm: $A \in d$

Punctul nu aparține dreptei

Notăm: $A \notin d$

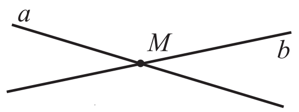
Proprietate fundamentală
Oricare ar fi dreapta, există puncte ce aparțin acestei drepte şi puncte ce nu-i aparțin.

✓ Două drepte coplanare

Drepte confundate sau coincidente

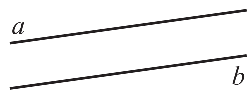
Notăm: $a = b$

Drepte concurente sau secante



Notăm: $a \cap b = \{M\}$

Drepte paralele



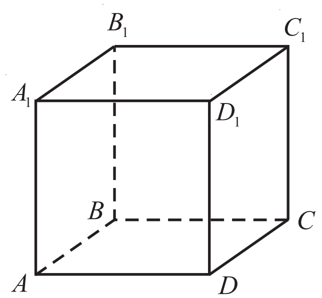
Notăm: $a \parallel b$

Ne amintim Două drepte concurente care formează un unghi drept se numesc **drepte perpendiculare**.

Notăm: $a \perp b$. *Citim*: Dreptele a şi b sunt perpendiculare.

• Examinați harta lui Vlad (pag. 98) şi precizați:
a) dreptele concurente;
b) dreptele paralele;
c) punctele care aparțin dreptei C_1C_2;
d) punctele care nu aparțin dreptelor M_2L şi C_1C_2;
e) punctul de intersecție a dreptelor C_1C_2 şi M_2L.

• Examinați cubul şi precizați muchiile ale căror drepte suport:
a) sunt paralele;
b) sunt concurente;
c) nu sunt nici paralele, nici concurente.

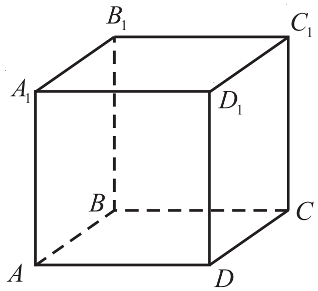


Observație Spunem că două ***segmente*** sunt ***paralele*** dacă dreptele lor suport sunt paralele.

Exerciții și probleme

1. Citiți: a) $M \in d$;
b) $M \notin AB$;
c) $\{A, B, C\} \subset d$;
d) $\{A, B, C\} \subset \alpha$.

2. Examinați cubul din desen.
a) Notați două drepte paralele cu dreapta AD.
b) Notați şapte drepte care conțin punctul A.
c) Notați patru drepte concurente cu dreapta AD.



3. *Lucrați în perechi!* Scrieți toate perechile de drepte determinate de vârfurile cubului din desen care nu sunt nici paralele, nici concurente.

4. Câte drepte diferite se pot construi prin:
a) trei puncte necoliniare;
b) patru puncte, necoliniare fiecare trei;
c) cinci puncte, necoliniare fiecare trei;
d) zece puncte, necoliniare fiecare trei?

5. Realizați un desen corespunzător situației:
a) $a \parallel b$, $b \cap c = \{A\}$, $B \neq a \cap c$, $B \in a$;
b) $a \cap b = \{A\}$, $b \cap c = \{B\}$, $a \cap c = \{C\}$;
c) $a \cap b \cap c = \{X\}$, $\{X, Y, Z\} \subset a$;
d) $[AB] \cap d = \{C\}$, $AC = BC$, $D \in [dA$.

6. Se poate stabili poziția relativă a dreptelor a şi b dacă:
a) dreptele a şi c sunt paralele, iar dreptele b şi c sunt necoplanare;
b) dreptele a şi c sunt concurente, iar dreptele b şi c sunt necoplanare;
c) dreptele a şi c sunt concurente, iar dreptele b şi c sunt paralele;
d) dreptele a şi c sunt coplanare şi dreptele b şi c sunt coplanare?
Argumentați răspunsul.

7. *Posibil* sau *imposibil*?
a) Trei drepte au două puncte de intersecție.
b) Trei drepte au trei puncte de intersecție.
c) Trei drepte au patru puncte de intersecție.
d) Trei drepte au un singur punct de intersecție.

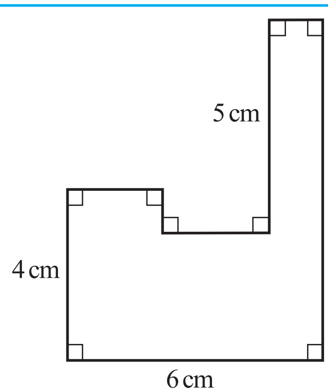
8. Construiți patru drepte care se intersectează în:
a) 3 puncte; b) 4 puncte; c) 5 puncte; d) 6 puncte.

9. În câte regiuni disjuncte împart planul:
a) două drepte paralele intersectate de a treia dreaptă;
b) trei drepte paralele concurente cu a patra dreaptă;
c) patru drepte concurente într-un punct?

10. E posibil ca din trei drepte fiecare două să fie concurente, iar toate trei să fie necoplanare? Justificați.

PENTRU CAMPIONI

11. Calculați perimetrul figurii din imagine.



§ 3. Distanțe în plan. Congruența figurilor

3.1. Distanțe

Distanța dintre două figuri geometrice F_1 și F_2 este lungimea celui mai scurt segment cu o extremitate aparținând figurii F_1 și cealaltă extremitate aparținând figurii F_2.

Evident, **distanța dintre punctele** A și B este lungimea segmentului AB.

Notăm: $d(A, B)$ sau AB.

1 Examinați desenul și completați tabelul. Trageți concluzia.

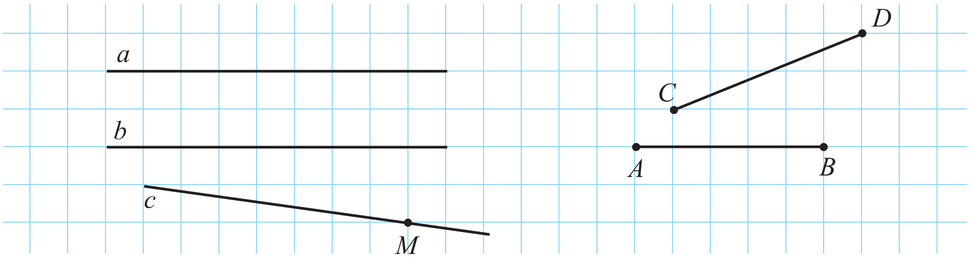
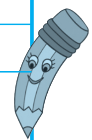


Figura ①	A	a	a	$[AB]$	M	C	A
Figura ②	B	b	c	$[CD]$	a	AB	b
Distanța dintre figurile ① și ② (cm)							



2 Observați proprietățile distanței dintre două puncte, comentați și exemplificați prin desene.

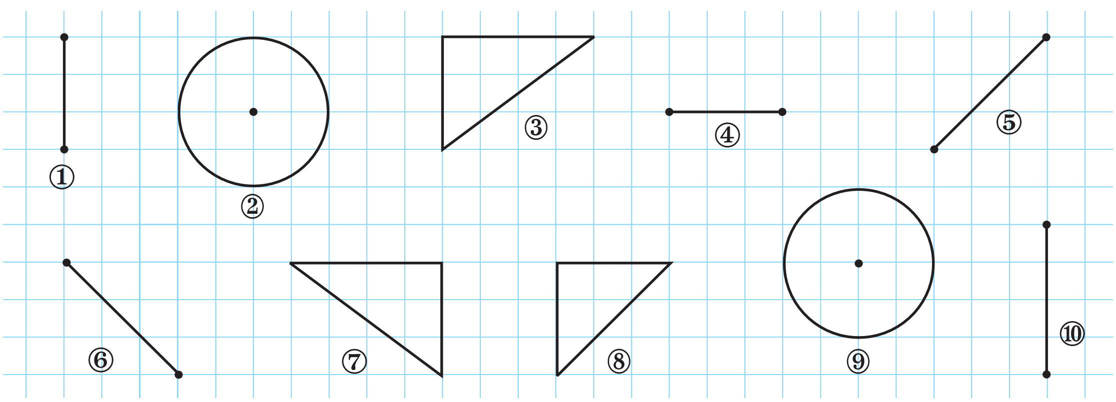
Proprietățile distanței dintre două puncte

1° $d(A, A) = 0$; 2° $d(A, B) = d(B, A)$; 3° $d(A, B) \le d(A, C) + d(C, B)$.

• Care este poziția relativă a punctelor A, B, C, dacă $d(A, B) < d(A, C) + d(C, B)$?

3.2. Congruența figurilor

1 Examinați și selectați perechile de figuri care, prin suprapunere, coincid.



Definiție Două figuri geometrice F_1 și F_2 care, prin suprapunere, coincid se numesc **figuri congruente**.

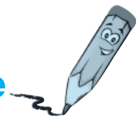
Notăm: $F_1 \equiv F_2$. *Citim*: „Figura F_1 este congruentă cu figura F_2”.

- Utilizând definiția figurilor congruente, completați pentru a obține propoziții adevărate:
  a) Două segmente sunt congruente dacă ... sunt egale.
  b) Două cercuri sunt congruente dacă ... sunt egale.
  c) Două unghiuri sunt congruente dacă ... sunt egale.
  d) Două dreptunghiuri sunt congruente dacă ... sunt egale.

2 Fie figurile geometrice F_1, F_2, F_3. Ce se poate spune despre congruența figurilor F_1 și F_2, dacă $F_1 \equiv F_3$ și $F_2 \equiv F_3$?

Teoremă Dacă $F_1 \equiv F_3$ și $F_2 \equiv F_3$, atunci $F_1 \equiv F_2$.

Exerciții și probleme



1. Examinați desenul și completați tabelul.

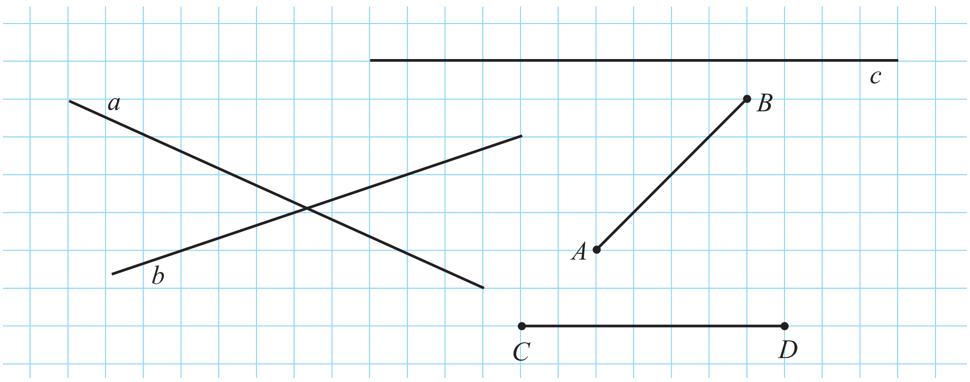
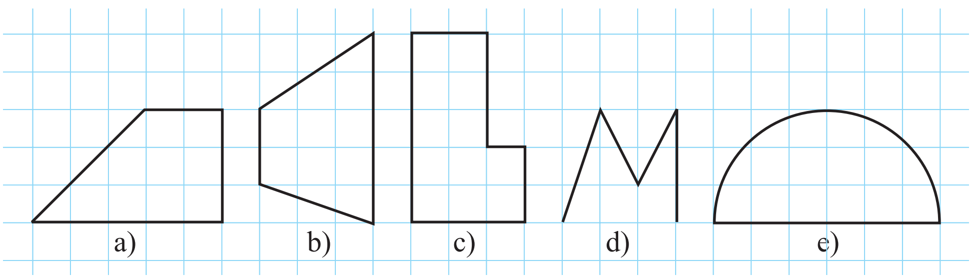


Figura ①	a	a	b	a	$[CD]$	$[AB]$	$[AB]$
Figura ②	b	$[CD]$	AB	c	c	$[CD]$	c
Distanța dintre figurile ① și ② (cm)	0						

2. Completați pentru a obține o propoziție adevărată.
a) Distanța dintre două drepte concurente este egală cu ______.
b) Dacă distanța dintre punctul A și dreapta a este egală cu 0, atunci ______.
c) Dacă distanța dintre două drepte coplanare este diferită de 0, atunci dreptele sunt ______.
d) Dacă $AB + AC = BC$, atunci punctele A, B, C sunt ______.

3. Construiți o figură congruentă cu figura din desen:



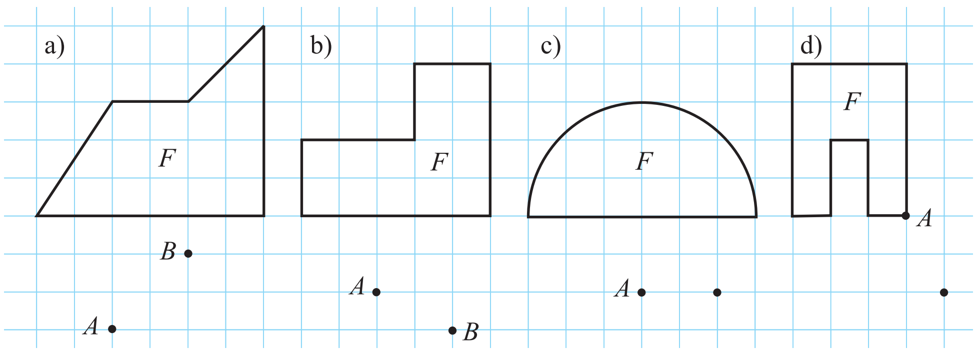
4. *Adevărat* sau *fals*?
a) Orice două drepte sunt congruente.
b) Orice două semidrepte sunt congruente.
c) Orice două pătrate sunt congruente.
d) Orice două laturi ale unui pătrat sunt congruente.

5. Distanța dintre două segmente congruente este de 18 cm. Aflați distanța dintre mijloacele segmentelor, dacă extremitățile lor sunt coliniare și lungimea unui segment este egală cu 10 cm.

6. Distanța dintre două segmente congruente este de 24 cm. Aflați lungimea segmentelor, dacă se știe că ea este de 2 ori mai mică decât distanța de la mijlocul unui segment până la celălalt segment și extremitățile segmentelor sunt coliniare.

7. Dreptele a, b, c sunt paralele. Distanța dintre dreptele a și c este de două ori mai mică decât distanța dintre dreptele b și c. Care pot fi distanțele dintre dreptele a și c, b și c, dacă distanța dintre dreptele a și b este de 12 cm?

8. Reproduceți și construiți o figură F_c, congruentă cu figura F din desen, astfel încât punctele A și B să aparțină figurii F_c.



9. *Lucrați în perechi!* Punctele M, N și L sunt coliniare. Calculați distanța dintre mijloacele segmentelor MN și NL, dacă $MN = 10$ cm și $[MN] \equiv [NL]$. Cercetați toate cazurile posibile.

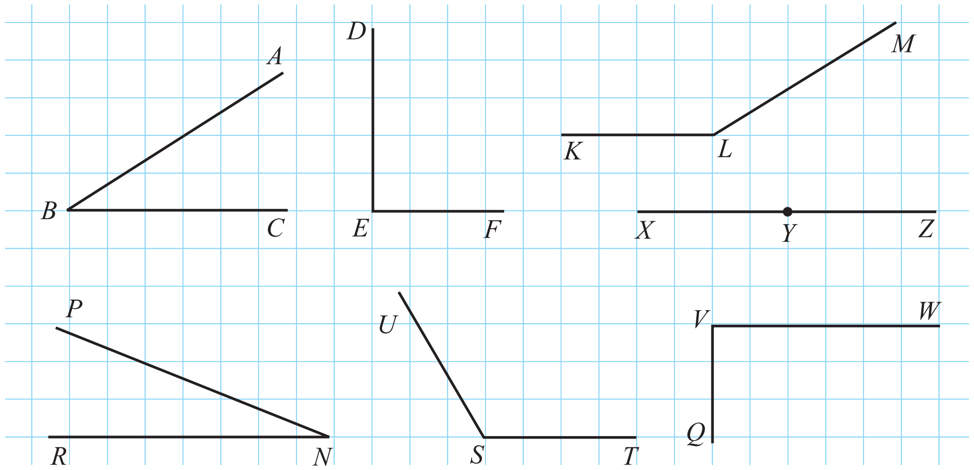
10. Latura unui pătrat este congruentă cu o latură a unui dreptunghi și perimetrul pătratului este de 2 ori mai mic decât perimetrul dreptunghiului. De câte ori lungimea laturii pătratului este mai mică decât cealaltă dimensiune a dreptunghiului?

MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

11. Ce înălțime are masa?

§4. Unghiuri

1 Examinaţi desenele şi completaţi adecvat.



a) Unghiul este o figură geometrică formată din...

b) Elementele unghiului *ABC* sunt...

c) Unghiurile *DEF* şi *QVW* sunt...

d) Unghiurile *ABC* şi *PNR* sunt...

e) Unghiurile şi sunt unghiuri obtuze.

f) Unghiul *XYZ* este unghi .

g) Unghiul cu laturile confundate se numeşte unghi .

Ne amintim

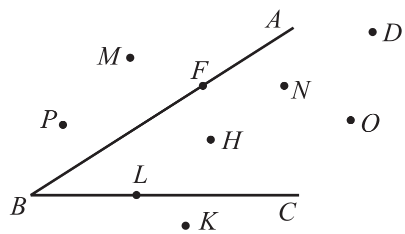
- Se numeşte **unghi** figura geometrică formată din două semidrepte (**laturile** unghiului) cu originea comună (**vârful** unghiului).
- Măsura unghiului **ascuțit** este mai mică decât 90°.
  Măsura unghiului **obtuz** este cuprinsă între 90° şi 180°.
  Măsura unghiului **drept** este egală cu 90°.
  Măsura unghiului **alungit** este egală cu 180°.
  Măsura unghiului **nul** este egală cu 0°.

• Utilizând raportorul, aflați măsurile în grade ale unghiurilor reprezentate în exemplul 1. Rotunjiți rezultatele până la zeci.

2 Examinați desenul şi precizați care puncte aparțin:

a) interiorului unghiului *ABC*;

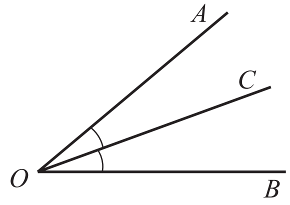
b) exteriorului unghiului *ABC*.



Ne amintim

- Un unghi *ABC* (cu măsura mai mare de 0° şi mai mică de 180°) separă planul în două mulțimi, numite **interiorul unghiului** (mulțimea punctelor cuprinse între laturile unghiului, care se notează Int$\angle ABC$) şi **exteriorul unghiului** (se notează Ext$\angle ABC$).
- Unghiurile cu măsuri egale se numesc **unghiuri congruente**.
- Două unghiuri coplanare se numesc **unghiuri adiacente** dacă au vârful comun şi o latură comună, situată între celelalte două laturi ale unghiurilor.
- Unghiurile *A* şi *B* se numesc **unghiuri complementare** dacă suma măsurilor lor este 90°. În acest caz, unghiul *A* este **complementul** unghiului *B* şi reciproc.

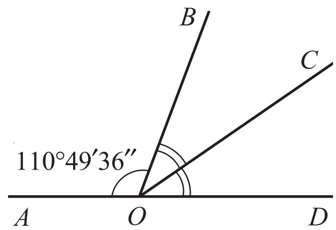
- Unghiurile A şi B se numesc **unghiuri suplementare** dacă suma măsurilor lor este $180°$. În acest caz, unghiul A este **suplementul** unghiului B, iar unghiul B – suplementul unghiului A.
- Două unghiuri se numesc **unghiuri opuse la vârf** dacă au vârful comun şi laturile lor sunt semidrepte opuse.
- Unghiurile opuse la vârf sunt congruente.
- **Bisectoarea unghiului** este semidreapta cu originea în vârful unghiului, care este inclusă în interiorul lui şi formează cu laturile unghiului două unghiuri congruente.



$[OC$ este bisectoarea unghiului AOB.

Aplicăm

5 Calculaţi $m(\angle COD)$, dacă $m(\angle AOB) = 110°49'36''$ şi semidreapta $[OC$ este bisectoarea unghiului BOD.



Explicăm

① Calculăm întâi $m(\angle BOD)$.
Unghiurile AOB şi BOD sunt adiacente suplementare.
Prin urmare, $m(\angle BOD) = 180° - m(\angle AOB)$.

grade, minute, secunde

$180° - 110°49'36'' = ?$ → $\begin{array}{r} \overset{1°}{180°\ 0'\ 0''} - \\ 110°49'36'' \\ \hline ? \end{array}$ → $\begin{array}{r} \overset{1'}{179°60'\ 0''} - \\ 110°49'36'' \\ \hline ? \end{array}$ → $\begin{array}{r} 179°\ 59'\ 60'' - \\ 110°\ 49'\ 36'' \\ \hline \square°\ \square'24'' \end{array}$

$m(\angle BOD) = \square°\ \square'24''$.

② $m(\angle COD) = m(\angle BOD) : 2 = \overset{1°}{69°10'}\ \square'' : 2 = 68°\ \square'\ \square'' : 2 = \square°\ \square'\ \square''$.

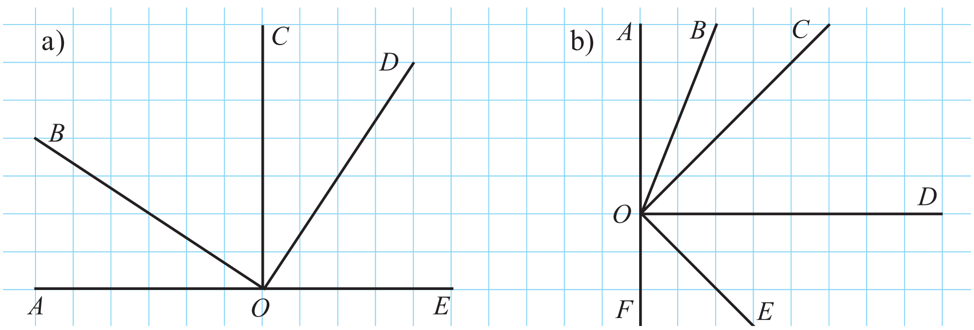
Răspuns: $\square$.

Observaţie

La efectuarea operaţiilor aritmetice cu măsuri de unghiuri se va ţine cont că $1° = 60'$ şi $1' = 60''$.

Exerciţii şi probleme

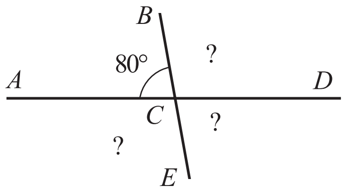
1. Examinaţi desenul şi precizaţi unghiurile:
a) ascuţite;
b) drepte;
c) obtuze;
d) alungite.

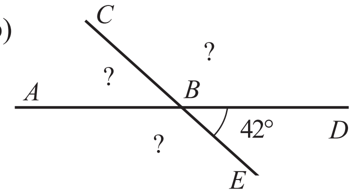


2. Examinaţi desenul exerciţiului **1** şi precizaţi perechile de unghiuri:
a) suplementare; b) complementare; c) adiacente;
d) adiacente complementare; e) adiacente suplementare.

3. Calculați măsura:
a) complementului unui unghi de 40°;
b) complementului unui unghi de 25°;
c) suplementului unui unghi de 110°;
d) suplementului unui unghi de 36°.

4. Calculați măsurile unghiurilor necunoscute din desen:

a) 

b) 

5. Aflați măsura unui unghi, dacă măsura complementului lui este:
a) de 5 ori mai mare;
b) de 4 ori mai mică;
c) cu 50° mai mare;
d) cu 60° mai mică.

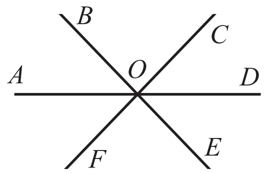
6. Aflați măsura unui unghi, dacă măsura suplementului lui este:
a) de 3 ori mai mică;
b) de 5 ori mai mare;
c) cu 70° mai mare;
d) cu 128° mai mică.

7. Calculați: a) $48°30' + 54°40'$;
b) $112°48' + 49°15'$;
c) $99°25'34'' + 27°28'29''$;
d) $36°37'38'' + 39°38'37''$.

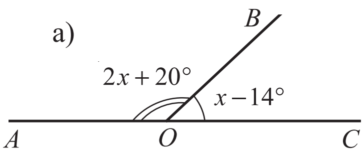
8. Calculați:
a) $88°12' - 26°41'$;
b) $170° - 64°39$;
c) $95°40' - 28°54'43''$;
d) $100° - 37°48'59''$.

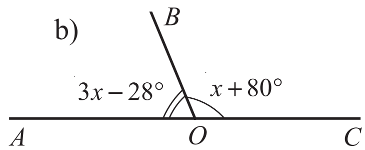
9. Calculați: a) $47°24' : 2$;
b) $125°37' : 2$;
c) $19° : 3$;
d) $21° : 4$.

10. Examinați desenul și determinați mulțimea:
a) $\angle AOC \cap \angle BOC$;
b) $\angle FOD \cap \angle AOE$;
c) $\angle FOE \cap \angle DOE$;
d) $\angle BOF \cap \angle DOF$.



11. Examinați desenul și aflați măsurile unghiurilor *AOB* și *BOC*:

a) 

b) 

12. Un unghi are măsura de 44°. Aflați măsurile unghiurilor formate de bisectoarea lui și de laturile complementului adiacent cu acest unghi.

13. Un unghi are măsura de 68°. Aflați măsurile unghiurilor formate de bisectoarea lui și de laturile suplementului adiacent cu acest unghi.

14. Diferența măsurilor a două unghiuri suplementare este cu 100° mai mică decât suma lor. Aflați măsurile unghiurilor.

15. *Adevărat* sau *fals*?
a) Măsurile unghiurilor opuse la vârf și suplementare sunt egale cu 90°.
b) Măsurile unghiurilor opuse la vârf și complementare sunt egale cu 90°.
c) Măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri complementare este egală cu 45°.
d) Măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri suplementare este egală cu 90°.

16. La intersecția a două drepte concurente se formează 4 unghiuri. Care sunt măsurile unghiurilor, dacă suma măsurilor a 3 unghiuri este egală cu 200°?

17. Laturile a două unghiuri cu același vârf sunt perpendiculare două câte două. Ce poziții relative pot avea bisectoarele acestor unghiuri?

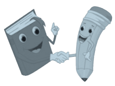
18. Calculați măsura unghiului format de acele ceasornicului la ora 2 și 10 minute.

§5. Propoziții matematice. Axiome. Teoreme

5.1. Enunțuri și propoziții

● Alina a observat în caietul de matematică al fratelui mai mare următoarele notițe:

• Vaca este un animal domestic. – **A**	• Timpul trece repede.
• Numărul 13 se împarte exact la numărul 5. – **F**	• Numărul $\frac{1}{10}$ este foarte mic.
• Luna este satelit al Pământului. – **A**	• Iarna este cel mai frumos anotimp al anului.
• Numărul 21 este impar. – **A**	
• Paris este capitala Spaniei. – **F**	• Este greu să treci Nistrul înotând.



Lucrați în perechi!

● Discutați și explicați:

– Ce semnifică literele **A** și **F** scrise în dreptul enunțurilor de pe prima pagină a caietului?

– De ce în dreptul enunțurilor de pe pagina a doua lipsesc astfel de litere?

Se numește **propoziție** (**matematică**) un enunț despre care are sens să spunem că este adevărat (**A**) sau că este fals (**F**).

1 Clovnul Fănică are pălărie. – **A**

2 Clovnul Fănică nu are pălărie. – **F**

Formulați câte un exemplu de propoziție adevărată și propoziție falsă. Formulați un enunț care nu este propoziție.

Propoziția 2 este **negația propoziției** 1.

Negația unei propoziții se obține punând **nu** în fața verbului.

Prin negarea unei propoziții adevărate se obține o propoziție falsă, iar prin negarea unei propoziții false se obține o propoziție adevărată.

Exersăm

1. Formulați negația propoziției, apoi determinați care dintre propoziții este adevărată și care este falsă:

a) Zero este cel mai mic număr natural. b) Numărul 33 se împarte exact la 9.

Rezolvare:

a) Zero este cel mai mic număr natural. – A
Zero nu este cel mai mic număr natural. –

b) Numărul 33 se împarte exact la 9. –
 –

Din propoziții simple, cu ajutorul cuvintelor *și*, *sau*, *dacă*..., *atunci*... se formează propoziții compuse.

2. Determinați care dintre propozițiile compuse sunt adevărate și care sunt false:

a) Numărul 5 este impar și $5 < 7$.

b) Pustiul Sahara se află în Europa sau pustiul Sahara se află în Africa.

c) Dacă astăzi este marți, atunci mâine va fi miercuri.

5.2. Axiome. Teoreme

Propozițiile matematice adevărate care se admit fără demonstrații se numesc **axiome**.

O propoziție matematică al cărei adevăr se demonstrează se numeşte **teoremă**.

Demonstrația teoremei este un şir de deducții bazate pe axiome, teoreme şi proprietăți (deja demonstrate).

Exemple

1. Propozițiile „Oricare ar fi dreapta, există puncte ce aparțin acestei drepte şi puncte ce nu-i aparțin” şi „Oricare două puncte diferite determină o unică dreaptă” sunt axiome.
2. Propoziția „Dacă două drepte au două puncte comune diferite, atunci ele sunt confundate” este o teoremă. Adevărul ei poate fi demonstrat.

O teoremă poate fi enunțată astfel: „Dacă I, atunci C”.

Propoziția I se numeşte **ipoteza** teoremei, iar C – **concluzia** teoremei.

Ipoteza teoremei este o propoziție adevărată. Concluzia teoremei este o propoziție al cărei adevăr trebuie demonstrat.

Schimbând cu locurile ipoteza şi concluzia teoremei, obținem o nouă propoziție, numită **reciproca teoremei** date. Reciproca teoremei poate fi o propoziție adevărată (adică o nouă teoremă) sau o propoziție falsă. Dacă reciproca teoremei date este, de asemenea, teoremă, atunci teorema dată se mai numeşte **teoremă directă**, iar reciproca ei – **teoremă reciprocă**.

Exemple

1. Reciproca teoremei „Dacă ultima cifră a numărului întreg este 0, atunci numărul se divide cu 10” este propoziția adevărată (teorema) „Dacă numărul întreg se divide cu 10, atunci ultima cifră a lui este 0”.
2. Reciproca teoremei „Dacă ultima cifră a numărului întreg este 0, atunci numărul se divide cu 5” este propoziția falsă „Dacă numărul întreg se divide cu 5, atunci ultima cifră a lui este 0”.

Există diferite metode de demonstrație a teoremelor.

Uneori, în loc să demonstrăm că propoziția C este adevărată, este mai uşor să demonstrăm că ea nu poate fi falsă. Această metodă de demonstrare se numeşte *metoda reducerii la absurd* şi se bazează pe faptul că:

> Propoziția „Dacă ***I***, atunci ***C***” este adevărată dacă şi numai dacă este adevărată propoziția „Dacă **negația lui *C***, atunci **negația lui *I***”. (∗)

Etapele demonstrației prin metoda reducerii la absurd

1. Se presupune că este falsă concluzia C (adică negația lui C este adevărată).
2. În baza presupunerii, se parcurge un raționament logic, până când se ajunge la o contradicție sau până când se arată că ipoteza I este falsă (adică negația lui I este adevărată).
3. În conformitate cu afirmația (∗), concluzia C a teoremei este adevărată.

Exemplu

Să demonstrăm prin metoda reducerii la absurd teorema:

„Dacă <u>două drepte au două puncte comune diferite</u>, atunci <u>dreptele sunt confundate</u>”.

Demonstrație:

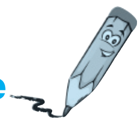
1. Presupunem că nu este adevărată concluzia „dreptele sunt confundate”, adică „fie că dreptele sunt diferite”.
2. Obținem că prin două puncte diferite trec **două** drepte diferite, ceea ce contrazice axioma „Oricare două puncte diferite determină o **unică** dreaptă”.
3. Contrazicerea obținută demonstrează că presupunerea este greşită (falsă), adică este adevărată concluzia „dreptele sunt confundate”. Ceea ce trebuia demonstrat (c.c.t.d.).

• Demonstrați teorema:
„Dacă trei puncte sunt necoliniare, atunci fiecare două dintre ele sunt diferite”.

Observație Pentru a demonstra că o propoziție nu este adevărată, este suficient să găsim un exemplu (numit **contraexemplu**) care contrazice propoziția.

• Demonstrați că propoziția „Dacă numărul întreg se divide cu 5, atunci ultima cifră a lui este 0” este falsă.

Exerciții și probleme



1. Selectați propozițiile şi stabiliți valoarea lor de adevăr.
a) „Prin trei puncte coliniare se pot construi două drepte diferite”.
b) „Perimetrul pătratului cu latura de 0,75 cm este egal cu 30 mm”.
c) „$3\cdot 3=10$”.
d) „Vara, temperatura aerului nu este mai mică de 5 °C”.
e) „Există pisici albe”.
f) „Viteza sunetului este mai mare decât viteza luminii”.

2. Formulați negația fiecărei propoziții de la exercițiului **1**.

3. Pentru ce valori întregi ale lui a se obține o propoziție adevărată?
a) $a+2=3$. b) $a+a=a$. c) $|a|=4$. d) $2a-3a=-a$.

4. Precizați ipoteza şi concluzia teoremei:
a) Dacă $a\parallel b$ şi $b\parallel c$, atunci $a\parallel c$.
b) Dacă un număr se divide cu 8, atunci el se divide şi cu 4.
c) Dacă fiecare trei puncte din patru puncte date sunt coliniare, atunci toate cele patru puncte sunt coliniare.
d) Dacă a, b, c sunt numere reale, $a>b$ şi $b>c$, atunci $a>c$.

5. Formulați reciprocele teoremelor din exercițiul **4**. Stabiliți valoarea lor de adevăr.

6. Demonstrați că următoarele propoziții sunt false, găsind un contraexemplu.
a) „Dacă ultima cifră a unui număr natural este 7, atunci numărul este prim”.
b) „Orice număr de forma $\sqrt{a}$ este irațional”.
c) „Nu există cuvinte în limba română care să conțină o secvență de 4 consoane alături”.
d) „Ecuația $x^2=2x$ nu are soluții întregi”.

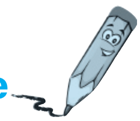
7. Aplicând metoda reducerii la absurd, demonstrați adevărul propozițiilor.
a) „Dacă $a\neq b$, atunci $a+3\neq b+3$”.
b) „Dacă mâine este duminică, atunci astăzi este sâmbătă”.
c) „Dacă lungimea laturii unui triunghi echilateral este 8 cm, atunci perimetrul triunghiului este 24 cm”.
d) „Numărul 19 este prim”.

8. Formulați negația propoziției.
a) „Orice număr natural este rațional”.
b) „Există numere negative”.
c) „Toate numerele sunt întregi”.
d) „Există numere naturale care nu sunt întregi”.
Ce observați?

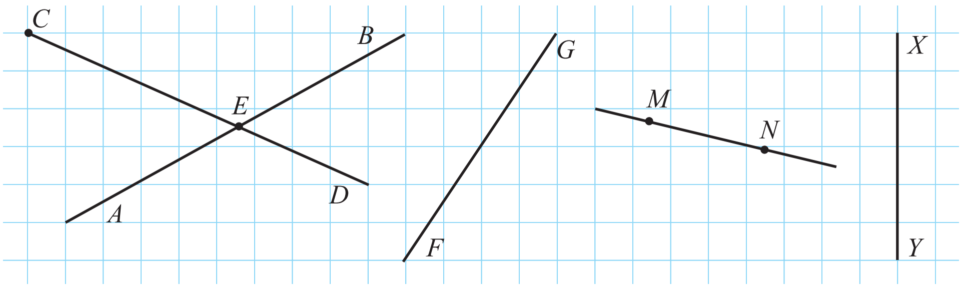
9. Fie teorema „Dacă un număr natural este divizibil cu 3, atunci suma cifrelor lui este divizibilă cu 3”. Formulați teorema reciprocă. Precizați ipoteza și concluzia teoremei reciproce.

10. Demonstrați că:
a) pentru orice număr întreg n, dacă $n^2 \vdots 16$, atunci $n^2 \vdots 4$;
b) în orice triunghi există cel mult un unghi obtuz.

Exerciții și probleme recapitulative

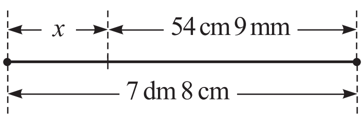


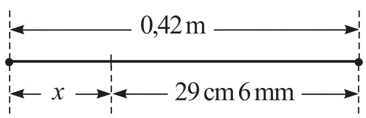
1. Examinați desenul și precizați:
a) dreptele; b) semidreptele; c) segmentele.



2. Citiți notațiile:
a) MN, $[MN$, $[MN]$, $[NM$, m, $[mN$, α;
b) d, $[dA$, $[DA]$, $[AD$, AD, $[DA$, β.

3. Citiți propoziția:
a) $M \in d$ și $M \notin l$;
b) $\{X, Y, Z\} \subset \alpha$;
c) $a \cap b = \{M\}$;
d) $C \in [AB$;
e) $X \notin AB$;
f) $XY = YZ$.

4. Aflați x:
a)


b)


5. Realizați un desen corespunzător situației:
a) Punctele M, R, S sunt coliniare și dreptele AB și CD sunt concurente în punctul R.
b) Dreptele a, b, c sunt concurente, fiecare două, în punctele A, B, C, $a \cap b = \{A\}$, $B \notin b$.
c) Semidreptele $[MN$ și $[MP$ nu sunt semidrepte opuse și punctele L, N, P sunt coliniare.
d) Punctele X și Y aparțin semidreptelor $[AB$ și $[CD$.

6. ***Lucrați în perechi!*** Măsurați cu rigla și calculați lungimea reală:

a) a automobilului; b) a camionului.

Scara 1 : 90

Scara 1 : 160

Indicație. Dacă scara unui desen este 1 : n, atunci obiectul desenat este, în realitate, de n ori mai mare.

7. Punctul M aparține segmentului AB.
Aflați distanța dintre mijloacele segmentelor AM și MB, dacă $AB = 6$ cm.

8. Un sfert din lungimea segmentului MN este egal cu o jumătate din lungimea segmentului KP, care este cu 24 cm mai scurt. Aflați lungimea fiecărui segment.

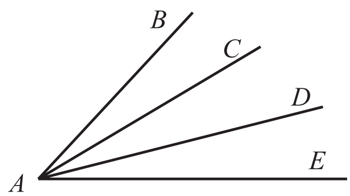
9. Punctele A, B, C, D sunt coliniare, $AB = 1$ cm, $BC = 2$ cm, $CD = 4$ cm. Care poate fi lungimea segmentului AD?

10. Pe o riglă sunt indicate doar notațiile 0 cm, 7 cm și 11 cm. Cum se poate construi, cu ajutorul acestei rigle, un segment de:
a) 18 cm; b) 5 cm; c) 10 cm?

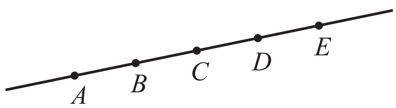
11. Punctul C aparține segmentului AB. Aflați:

a) $\frac{AB}{AC}$, dacă $\frac{AC}{BC} = \frac{2}{5}$; b) $\frac{BC}{AB}$, dacă $\frac{BC}{AC} = 0{,}75$; c) $\frac{AC}{BC}$, dacă $\frac{AB}{BC} = 1{,}(3)$.

12. ***Lucrați în perechi!***



a) Câte unghiuri observați în desen?
b) Câte unghiuri se vor obține dacă vom construi în interiorul unui unghi:
 3 semidrepte cu originea în vârful unghiului;
 4 astfel de semidrepte?
c) Câte semidrepte trebuie să construim în interiorul unui unghi cu origine în vârful unghiului pentru a obține:
21 de unghiuri; 28 de unghiuri?



13. Examinați desenul și precizați toate semidreptele.

14. Examinați desenul problemei **13** și determinați:
a) $[AC] \cap [BE]$; b) $[CA] \cup [AD]$;
c) $[AB] \cap [CD]$; d) $[BE \cup [CD$;
e) $[BD \cap [CA$; f) $AE \cap [BC \cap [CD$.

15. Punctul A este mijlocul segmentului BC, $D \in BC$, astfel încât $AD = 3{,}(3)$ cm și $AB = 3{,}75$ cm. Ce lungime poate avea segmentul CD?

16. Determinați valoarea de adevăr a propoziției.
a) „Numărul 5 este divizor al numărului 20”.
b) „Diferența oricăror două numere naturale este număr natural”.
c) „Cuvântul *matematică* este format din 9 litere”.
d) „Negația propoziției adevărate este falsă”.

17. Formulați reciprocele propozițiilor.

a) „Dacă astăzi este 1 mai, atunci peste 60 de zile va fi vară”.

b) „Dacă Ion are 100 de lei, atunci îi ajung bani pentru a cumpăra un cadou de 90 de lei”.

c) „Dacă $a = 0$, atunci $\frac{8}{a}$ nu are sens”.

d) „Dacă patrulaterul este un pătrat, atunci el are toate unghiurile drepte”.

18. Aflați valorile de adevăr ale propozițiilor din exercițiul **17** și ale reciprocelor lor.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

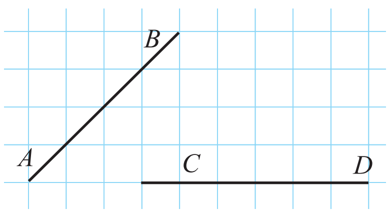
Varianta 1

1. Realizați un desen corespunzător situației:
$A \in BC$, $D \notin BC$, $[AB] \equiv [AC]$ și $[BD] \equiv [DC]$.

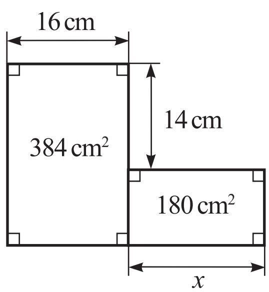
2. *Adevărat* sau *fals*?
$$[AB] \cup [BA = AB.$$

3. Calculați: $40°32' + 28°49'$.

4. Aflați distanța dintre dreptele AB și CD.



5. Aflați lungimea x:



6. Aflați măsura unui unghi, dacă măsura suplementului lui este de 4 ori mai mare.

7. Formulați și stabiliți valoarea de adevăr a reciprocei propoziției: „Dacă $5a = 0$, atunci $a = 0$”.

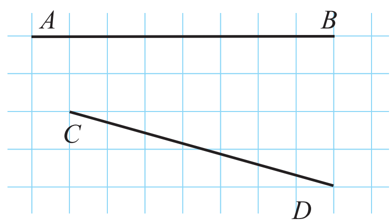
Varianta 2

1. Realizați un desen corespunzător situației:
$M \in [AB$, $N \in [AC$, $K \in [AD$ și $N \in MK$.

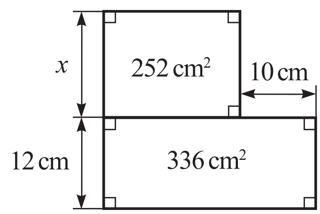
2. *Adevărat* sau *fals*?
$$[AB \cup [BA = [AB].$$

3. Calculați: $20°47' + 13°25'$.

4. Aflați distanța dintre dreptele AB și CD.



5. Aflați lungimea x:



6. Aflați măsura unui unghi, dacă măsura complementului lui este de 8 ori mai mică.

7. Formulați și stabiliți valoarea de adevăr a reciprocei propoziției: „Dacă $n \vdots 4$, atunci $n \vdots 2$”.

2
capitolul

Triunghiuri congruente

Matematica nu este un limbaj, este o aventură.
Paul Lockhart

§1. Triunghiul și elementele lui. Recapitulare și completări

Ne amintim

Figura geometrică formată din reuniunea segmentelor [AB], [AC], [BC], unde A, B, C sunt trei puncte necoliniare, se numeşte **triunghiul *ABC*** şi se notează ΔABC. Punctele A, B, C se numesc **vârfurile** triunghiului, segmentele [AB], [AC], [BC] – **laturile** triunghiului, iar unghiurile ABC, ACB, BAC – **unghiurile** triunghiului ABC.

Observație

Interiorul triunghiului ABC se notează cu $\mathrm{Int}\Delta ABC$, iar exteriorul lui – cu $\mathrm{Ext}\Delta ABC$.

1 Observați cum se clasifică triunghiurile şi denumirile elementelor lor.

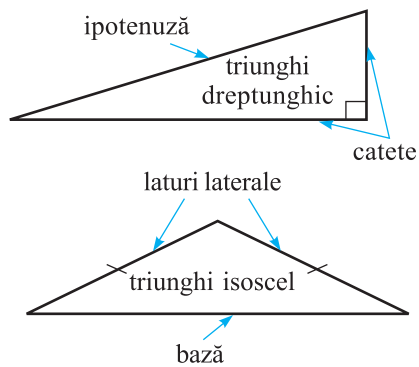
Clasificarea triunghiurilor

✓ **după unghiuri**

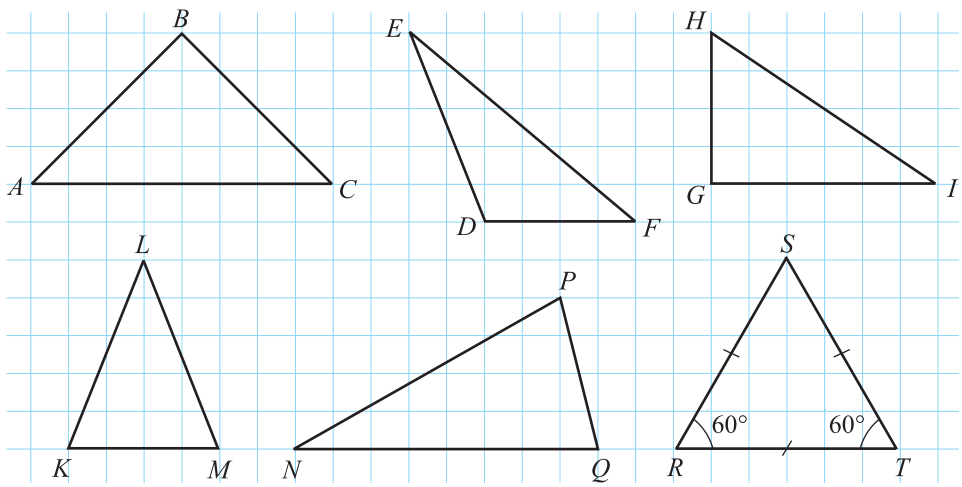
Triunghiul **ascuțitunghic** are toate unghiurile ascuțite.
Triunghiul **dreptunghic** are un unghi drept.
Triunghiul **obtuzunghic** are un unghi obtuz.

✓ **după laturi**

Triunghiul **scalen** are laturile de lungimi diferite.
Triunghiul **isoscel** are două laturi congruente.
Triunghiul **echilateral** are toate laturile congruente.



• Examinați desenul şi completați adecvat.



a) Triunghiurile KLM şi ____ sunt ascuțitunghice, deoarece...

b) Triunghiurile ABC şi HGI sunt ____, deoarece...

c) Laturile HG şi GI se numesc ____ triunghiului HGI. Latura ____ se numeşte ipotenuza triunghiului ABC.

d) Triunghiul DEF este ____, deoarece $m(\angle D) >$ ____.

e) Triunghiurile ____ şi ____ sunt isoscele, deoarece...

f) Triunghiul NPQ este ____, deoarece...

g) Triunghiul ____ este echilateral, deoarece...

h) Dacă $m(\angle N) = 35°$ şi $m(\angle Q) = 75°$, atunci $m(\angle P) =$ ____.

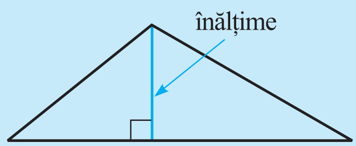
Proprietăți

1° Din proprietățile distanței rezultă că între laturile oricărui triunghi ABC există relațiile:
$AB + AC > BC$, $AB + BC > AC$, $AC + BC > AB$ (**inegalitățile triunghiului**).

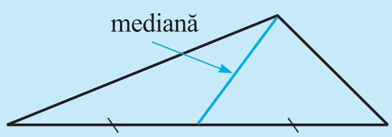
2° Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°.

Definiții

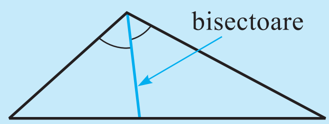
- **Înălțime** a triunghiului se numeşte segmentul determinat de un vârf al triunghiului şi de punctul în care perpendiculara dusă din acest vârf intersectează dreapta suport a laturii opuse.



- **Mediană** a triunghiului se numeşte segmentul determinat de un vârf al triunghiului şi de mijlocul laturii opuse.



- **Bisectoare** a triunghiului se numeşte segmentul determinat de un vârf al triunghiului şi de punctul în care bisectoarea unghiului cu acest vârf al triunghiului intersectează latura opusă.



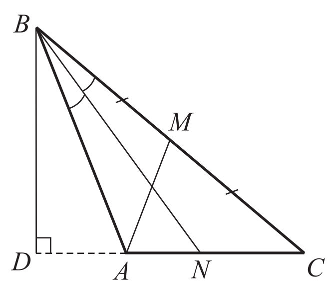
Aplicăm

2 Examinați şi completați cu una dintre noțiunile *înălțime*, *mediană*, *bisectoare*:

a) Segmentul BD este o ____ a triunghiului ABC, deoarece...

b) Segmentul AM este o ____ a triunghiului ABC, deoarece $[BM] \equiv [MC]$.

c) Segmentul BN este o ____ a triunghiului ABC, deoarece...



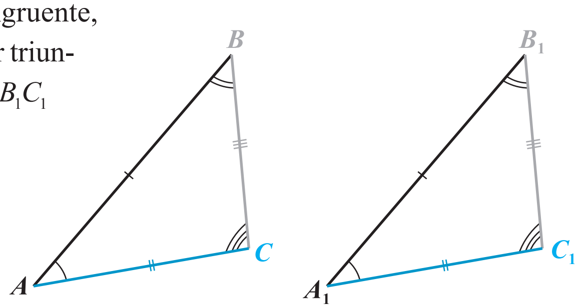
3 Amintiți-vă definiția figurilor congruente şi stabiliți ce relații există între laturile şi între unghiurile respective a două triunghiuri congruente.

Definiție

Două **triunghiuri** se numesc **congruente** dacă au laturile şi unghiurile respectiv congruente.

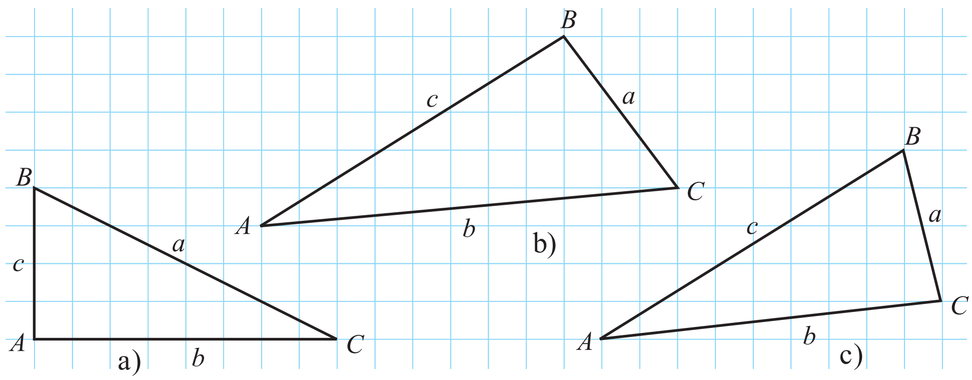
Observație

Notând că două triunghiuri sunt congruente, vom respecta ordinea scrierii vârfurilor triunghiurilor. Astfel, notația $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$ înseamnă că $\angle A \equiv \angle A_1$, $\angle B \equiv \angle B_1$, $\angle C \equiv \angle C_1$ şi $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[AC] \equiv [A_1C_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$.
În general, $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$ nu înseamnă că, de exemplu, $\Delta ABC \equiv \Delta B_1A_1C_1$.



– vârfuri omoloage; – laturi omoloage;
– vârfuri omoloage; – laturi omoloage;
– vârfuri omoloage; – laturi omoloage.

4 Examinați desenul. Utilizând compasul şi raportorul, comparați lungimile laturilor, apoi măsurile unghiurilor triunghiului.



Completați adecvat:

a) $\square < b < a$; $\square < m(\angle B) < \square$;

b) $a < \square < \square$; $m(\angle A) < \square < \square$;

c) $\square < \square < c$; $\square < \square < m(\angle C)$.

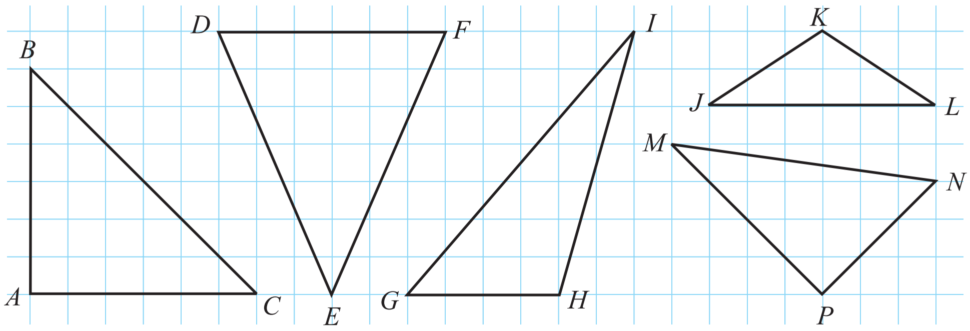
Teoremă

Unghiului de măsură mai mare al triunghiului i se opune o latură de lungime mai mare.

• Reciproca acestei teoreme de asemenea este teoremă. Formulați reciproca teoremei.

Exerciții și probleme

1. Examinați desenul şi precizați triunghiurile:
a) ascuțitunghice;
b) dreptunghice;
c) obtuzunghice;
d) isoscele;
e) scalene;
f) dreptunghice isoscele.



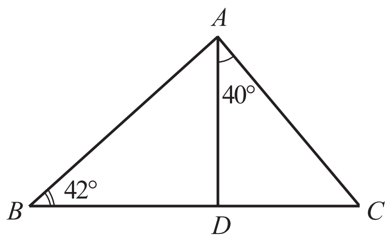
2. Numiți elementele triunghiului ABC din desenul exercițiului **1**. Măsurați cu rigla şi calculați perimetrul aproximativ al triunghiului ABC. Exprimați rezultatul în milimetri.

3. Construiți un desen corespunzător situației:
a) Punctele M şi N aparțin triunghiului ABC, punctele K şi L – interiorului triunghiului ABC, iar punctul P – exteriorului triunghiului ABC, astfel încât punctele A, M, N, K, P sunt coliniare.
b) Triunghiul ABC este obtuzunghic isoscel, cu baza de 4 cm.
c) Triunghiurile KLM şi LMN sunt dreptunghice isoscele.
d) Triunghiurile KLM şi KLN sunt obtuzunghice isoscele şi $KM \cap LN = \{R\}$.

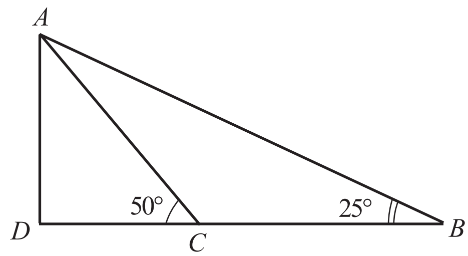
4. Fie triunghiul ABC. Calculați $m(\angle A)$, dacă:
a) $m(\angle B) = m(\angle C) = 35°$;
b) $m(\angle B) = 48°$, $m(\angle C) = 84°$;
c) $m(\angle B) + m(\angle C) = 130°$;
d) $m(\angle A) = m(\angle B) = m(\angle C)$.

5. Calculați perimetrul triunghiului ABC, dacă:
a) $AB = AC = BC = 9{,}7$ cm;
b) $AB = 2AC = 16$ cm, $BC = 10{,}6$ cm;
c) $AB = 0{,}8(AC + BC) = 12$ cm;
d) $AB + AC = 15$ cm, $AB + BC = 16$ cm, $AC + BC = 17$ cm.

6. Examinați desenul şi calculați măsura unghiului A al triunghiului ABC, dacă AD este o înălțime a triunghiului ABC.

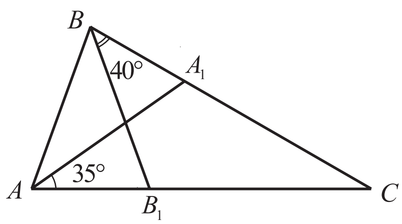


a)

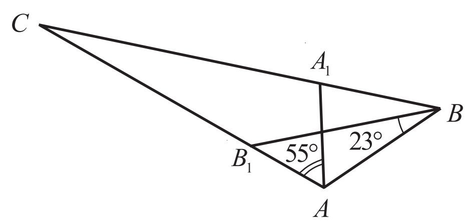


b)

7. Examinați desenul şi calculați măsurile unghiurilor triunghiului ABC, dacă $[AA_1]$ şi $[BB_1]$ sunt bisectoare ale triunghiului ABC.



a)



b)

8. $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ sunt medianele triunghiului ABC. Calculați perimetrul triunghiului ABC, dacă:

a) $AC_1 = 7{,}8$ cm, $BA_1 = 9$ cm, $CB_1 = 8{,}7$ cm;

b) $BC_1 = \sqrt{8}$ cm, $BA_1 = \sqrt{18}$ cm, $AB_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

9. Stabiliți dacă următoarele trei numere pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi (exprimate în aceeaşi unitate de măsură):

a) 7, 9, 17; b) 3, 10, 13;

c) 12, 11, 20; d) $\sqrt{8}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{32}$.

10. Aflați unghiul cu măsura cea mai mare şi unghiul cu măsura cea mai mică ale triunghiului ABC, dacă:

a) $AB = 8$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 9$ cm;

b) $AB = \frac{2}{3}AC$, $AC = 1{,}2BC$;

c) $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $BC = 3\sqrt{5}$ cm, $AC = 7$ cm.

11. Scrieți laturile triunghiului ABC în ordinea crescătoare a lungimilor, dacă:

a) $m(\angle A) = 30°$, $m(\angle B) = 70°$;

b) $m(\angle B) = 60°$, $m(\angle C) = 10°$;

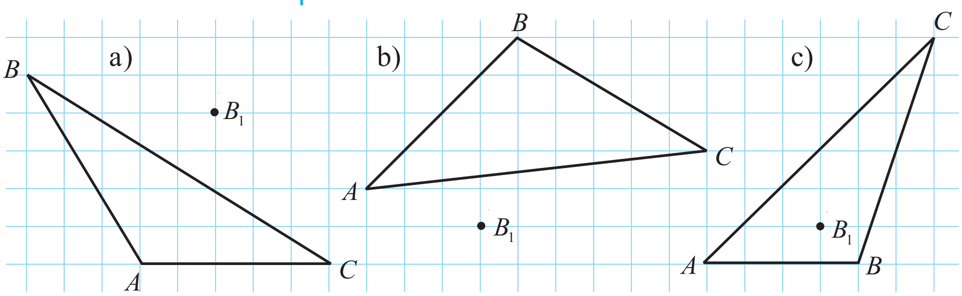
c) $m(\angle A) < m(\angle B) < 45°$.

12. Perimetrul triunghiului ABC este de 44 cm, iar perimetrul triunghiului ACD – de 52 cm. Calculați perimetrul triunghiului ABD, dacă $AC = 18$ cm şi $C \in [BD]$.

13. Calculați perimetrul triunghiului echilateral ABC, dacă $M \in [AC]$ şi $AM = 3MC = 12{,}6$ cm.

14. Calculați aria triunghiului ABC, dacă $m(\angle B) = 90°$, $AB = 12{,}4$ cm şi $BC = 8{,}5$ cm.

15. Reproduceți desenul şi construiți triunghiul $A_1B_1C_1$ congruent cu triunghiul ABC, astfel încât punctul B_1 să fie omologul vârfului B.



16. *Adevărat* sau *fals*?

a) Dacă ΔABC este isoscel, cu baza $[AC]$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta CBA$.

b) Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta CBA$, atunci ΔABC este isoscel.

c) Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta CBA \equiv \Delta BAC$, atunci ΔABC este echilateral.

d) Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, $m(\angle B) = 90°$ şi $m(\angle A) + m(\angle D) = 70°$, atunci $m(\angle F) = 20°$.

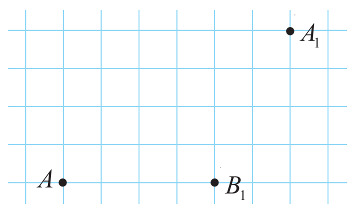
17. Un triunghi cu perimetrul de 54 cm are lungimile laturilor exprimate prin numere naturale consecutive. Aflați lungimile laturilor acestui triunghi.

18. *Adevărat* sau *fals*?

a) Există un triunghi cu laturile de 6 cm, 8 cm, 14 cm.

b) Înălțimea unui triunghi nu este mai lungă decât mediana corespunzătoare aceleiaşi laturi.

19. Punctul A din desen este un vârf al triunghiului ABC, iar punctele A_1 şi B_1 – mijloacele laturilor BC şi, respectiv, AC ale acestui triunghi. Reproduceți desenul şi, utilizând rigla şi compasul, „restabiliți” triunghiul ABC.



20. Fie triunghiul ABC. Măsura unghiului A este de 1,8 ori mai mică decât măsura unghiului B şi de 5 ori mai mare decât cea a unghiului C. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului.

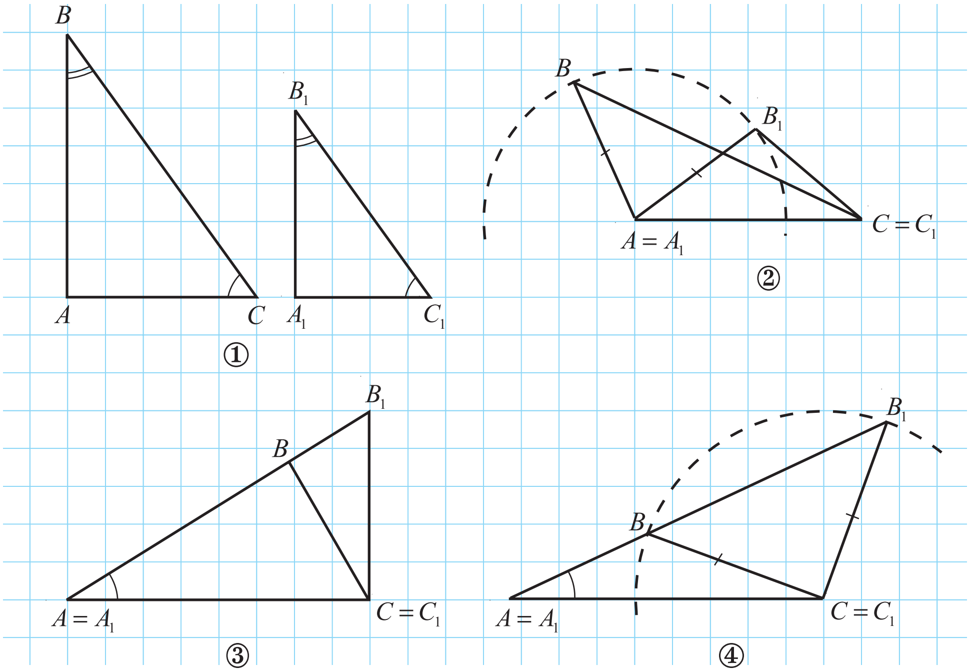
21. Ce lungime poate avea latura unui triunghi, dacă ea este cu 2 cm mai lungă decât jumătatea altei laturi şi cu 32 cm mai scurtă decât dublul lungimii laturii a treia?

22. Demonstrați că dacă latura AB este cea mai scurtă latură a triunghiului ABC, atunci $m(\angle C) < 90°$.

§2. Criteriile de congruență a triunghiurilor

2.1. Criteriile de congruență a triunghiurilor oarecare

Scrieți perechile de elemente congruente ale triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$.



• Stabiliți dacă propoziția este adevărată. Trageți concluzia.

a) Dacă două triunghiuri au unghiurile respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.

b) Dacă două triunghiuri au câte două laturi respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.

c) Dacă două triunghiuri au câte o latură şi un unghi respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.

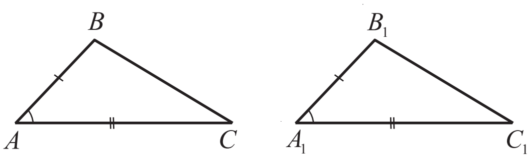
Observație

Pentru a afirma că două triunghiuri sunt congruente nu este suficient să cunoaştem două perechi de elemente ale acestora.

Criteriile de congruență a două triunghiuri oarecare

1. Criteriul LUL (latură–unghi–latură)

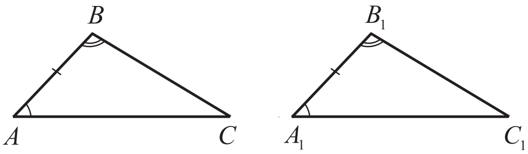
Dacă două laturi şi unghiul cuprins între ele ale unui triunghi sunt respectiv congruente cu două laturi şi unghiul cuprins între ele ale altui triunghi, atunci triunghiurile sunt congruente.



$$\left.\begin{array}{l}[AB]\equiv[A_1B_1]\\ [AC]\equiv[A_1C_1]\\ \angle A\equiv\angle A_1\end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$$

2. Criteriul ULU (unghi–latură–unghi)

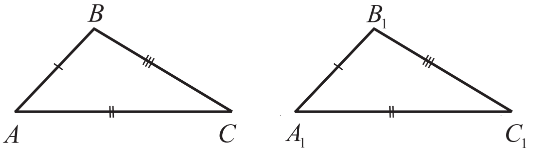
Dacă o latură şi unghiurile alăturate ei ale unui triunghi sunt respectiv congruente cu o latură şi unghiurile alăturate ei ale altui triunghi, atunci triunghiurile sunt congruente.



$$\left.\begin{array}{l}[AB]\equiv[A_1B_1]\\ \angle A\equiv\angle A_1\\ \angle B\equiv\angle B_1\end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$$

3. Criteriul LLL (latură–latură–latură)

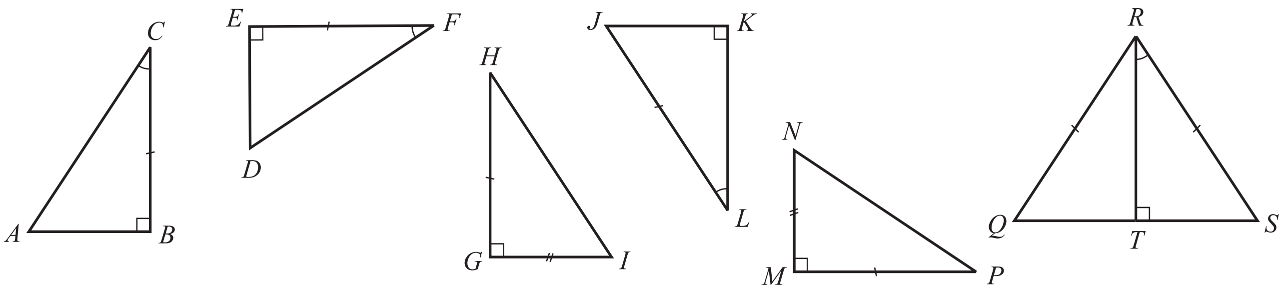
Dacă laturile unui triunghi sunt respectiv congruente cu laturile altui triunghi, atunci triunghiurile sunt congruente.



$$\left.\begin{array}{l}[AB]\equiv[A_1B_1]\\ [AC]\equiv[A_1C_1]\\ [BC]\equiv[B_1C_1]\end{array}\right| \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$$

2.2. Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice

Aplicând criteriile de congruență, găsiți perechile de triunghiuri congruente.



Explicăm $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, criteriul …… . $\Delta HGI \equiv \Delta PMN$, criteriul …… .

$\Delta LKJ \equiv \Delta RTS$, criteriul …… (deoarece $m(\angle J) = 90° - m(\angle L) = 90° - m(\angle R) = m(\angle S)$).

Mai târziu vom arăta că înălțimea cuprinsă între laturile congruente ale triunghiului isoscel este şi mediană, şi bisectoare a acestui triunghi.

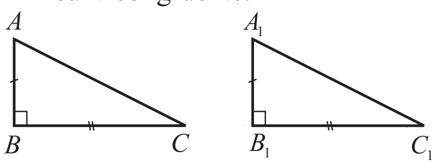
Prin urmare, $[QT] \equiv [ST]$; deci, …… $\equiv \Delta STR$, conform criteriului LLL.

Observație Deoarece orice două triunghiuri dreptunghice au un unghi drept, rezultă că două triunghiuri dreptunghice sunt congruente, dacă există două perechi de elemente omoloage congruente, dintre care cel puțin o pereche de laturi.

Criteriile de congruență a două triunghiuri dreptunghice

1. Criteriul CC (catetă–catetă)

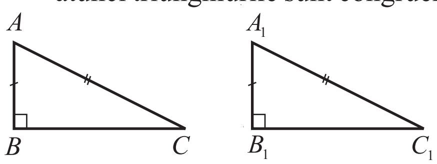
Dacă două triunghiuri dreptunghice au catetele respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



$$\left.\begin{array}{l}m(\angle B) = m(\angle B_1) = 90°\\ [AB]\equiv[A_1B_1]\\ [BC]\equiv[B_1C_1]\end{array}\right| \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$$

2. Criteriul IC (ipotenuză–catetă)

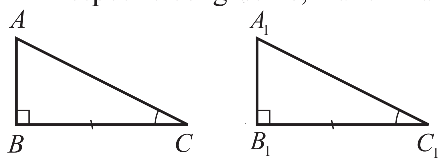
Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele şi câte o catetă respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



$$\left.\begin{array}{l}m(\angle B) = m(\angle B_1) = 90°\\ [AB]\equiv[A_1B_1]\\ [AC]\equiv[A_1C_1]\end{array}\right| \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$$

3. Criteriul CU (catetă–unghi ascuțit alăturat)

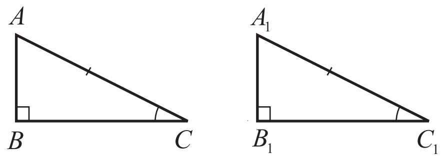
Dacă două triunghiuri dreptunghice au câte o catetă şi un unghi ascuțit alăturat catetei respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



$\left.\begin{array}{l} m(\angle B) = m(\angle B_1) = 90° \\ [BC] \equiv [B_1C_1] \\ m(\angle C) = m(\angle C_1) \end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$

4. Criteriul IU (ipotenuză–unghi ascuțit)

Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele şi câte un unghi ascuțit respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



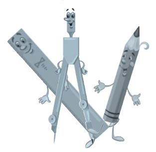
$\left.\begin{array}{l} m(\angle B) = m(\angle B_1) = 90° \\ [AC] \equiv [A_1C_1] \\ m(\angle C) = m(\angle C_1) \end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$

Pentru demonstrarea criteriilor de congruență a două triunghiuri dreptunghice se aplică criteriile de congruență a două triunghiuri oarecare.

Criteriul CC (catetă–catetă) este de fapt criteriul LUL, unde cele două laturi sunt catetele, iar unghiul dintre ele este egal cu 90°. Prin urmare, aplicând criteriul LUL, tragem concluzia: dacă două catete ale unui triunghi dreptunghic sunt congruente cu două catete ale altui triunghi dreptunghic, atunci aceste triunghiuri dreptunghice sunt congruente.

Criteriul CU (catetă–unghi alăturat) este de fapt criteriul ULU, unde al doilea unghi alăturat este unghiul de 90°.

2.3. Construirea triunghiurilor



1 Să se construiască un triunghi cu laturile de 6 cm, 5 cm, 4 cm, utilizând rigla şi compasul.

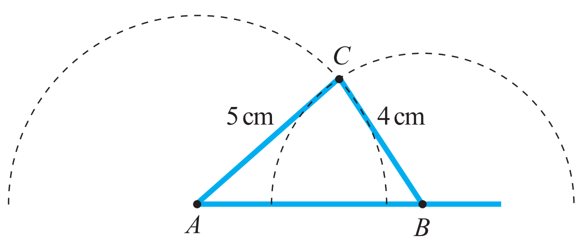
Explicăm

Conform criteriului LLL, datele problemei respectă inegalitatea triunghiului şi sunt suficiente pentru a construi triunghiul.

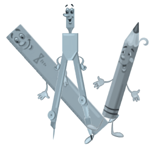
① Construim semidreapta $[AM$ şi depunem cu ajutorul compasului un segment AB, cu lungimea de 6 cm.

② Fixăm piciorul compasului în punctul A şi construim un semicerc cu raza de 5 cm.

③ Construim un semicerc cu centrul în B şi cu raza de 4 cm. Cele două semicercuri se intersectează în punctul C.



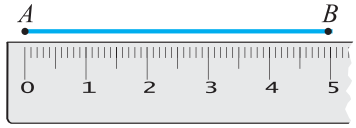
Triunghiul ABC astfel construit satisface condițiile problemei.



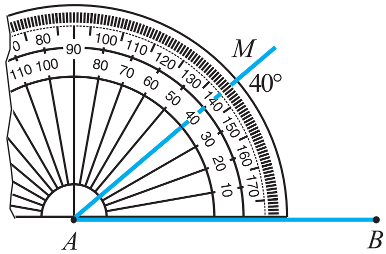
2 Să se construiască un triunghi cu o latură de 5 cm și unghiurile alăturate ei de 40° și 45°, utilizând rigla, raportorul și compasul.

Explicăm

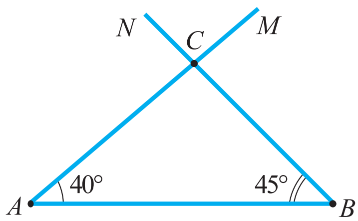
① Construim segmentul AB cu lungimea de 5 cm.



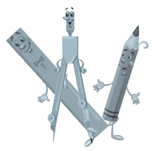
② Fixăm raportorul cu centrul în A și marcăm punctul M din dreptul gradației 40°. Construim semidreapta $[AM$.



③ Similar, construim semidreapta $[BN$, care formează cu semidreapta $[BA$ un unghi de 45°. Notăm cu C punctul de intersecție a semidreptelor $[AM$ și $[BN$.

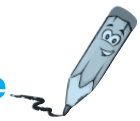


Triunghiul ABC astfel construit satisface condițiile problemei.

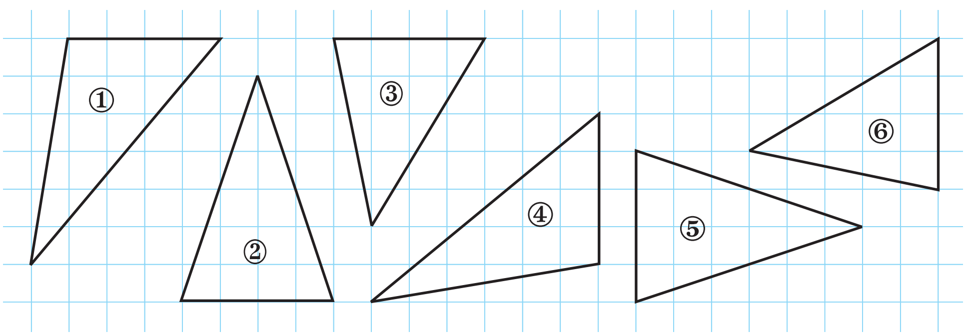


• Construiți un triunghi cu laturile de 5 cm și 6 cm și unghiul dintre ele de 60°, utilizând rigla și raportorul.

Exerciții și probleme



1. Examinați desenul și stabiliți perechile de triunghiuri congruente.



2. Triunghiurile ABC și DEF sunt congruente. Copiați și completați:

$[AB] \equiv [DE]$, ______ $\equiv DF$, $EF \equiv$ ______,

$\angle A \equiv$ ______, $\angle E \equiv$ ______, ______ $\equiv \angle C$.

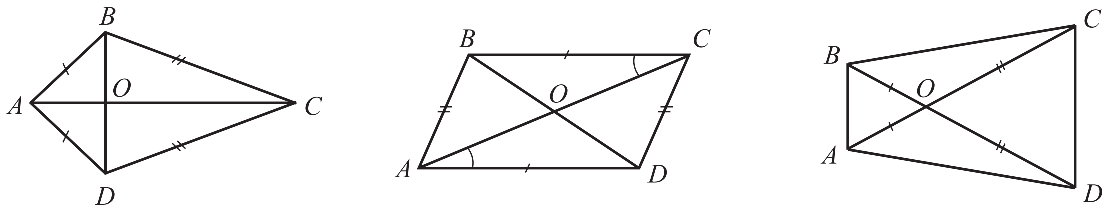
3. Triunghiurile ABC și CAD sunt congruente. Copiați și completați:

a) ______ $\equiv [AB]$, ______ $\equiv [DC]$,

$[BC] \equiv$ ______, $\angle A \equiv$ ______, $\angle B \equiv$ ______.

b) Triunghiurile ABC și CAD sunt ______.

4. Aplicând criteriile de congruență, stabiliți perechile de triunghiuri congruente.

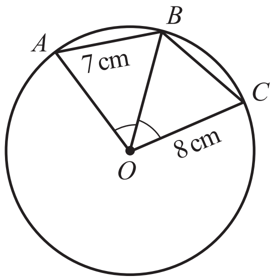


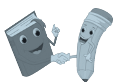
a) b) c)

5. Fie triunghiurile ABC şi DEF, unde $\angle A \equiv \angle D$, $[AB] \equiv [DE]$. Scrieți încă o relație între elementele triunghiurilor, astfel încât ele să fie congruente conform criteriului:

a) LUL; b) ULU.

6. Examinați desenul şi aflați lungimile segmentelor AO, BO şi BC, dacă O este centrul cercului.



7.  ***Lucrați în perechi!*** Construiți un triunghi cu laturile de:

a) 6 cm, 7 cm, 8 cm; b) 5 cm, 3 cm, 6 cm.

8. Construiți un triunghi:

a) cu două laturi de 3 cm şi 4 cm şi unghiul format de ele de 45°;

b) cu două laturi de 5 cm şi 6 cm şi unghiul format de ele de 120°.

9. Construiți un triunghi:

a) cu o latură de 4 cm şi unghiurile alăturate ei de 30° şi 50°;

b) cu o latură de 6 cm şi unghiurile alăturate ei de 25° şi 60°.

10. Punctul M este mijlocul laturii AB a triunghiului ABC şi $CM \perp AB$. Aflați AC, dacă $BC = 8$ cm.

11. $[EH]$ este bisectoare şi înălțime a triunghiului DEF. Aflați $m(\angle D)$, dacă $m(\angle F) = 40°$.

12. Construiți un triunghi echilateral cu perimetrul de 15 cm.

13. Construiți un triunghi isoscel cu baza de 5 cm şi perimetrul de 17 cm.

14. Se poate oare construi un triunghi cu laturile de:

a) 2 cm, 3 cm, 5 cm; b) 3 cm, 7 cm, 3 cm?

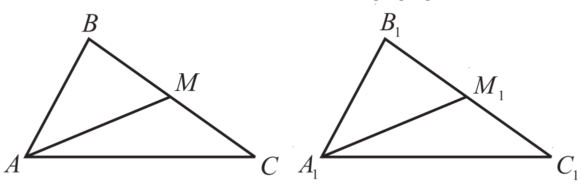
Justificați.

15. Segmentele AB şi CD se intersectează în punctul O, care este mijlocul fiecărui segment. Aflați AC şi BC, dacă $AD = 10$ cm, $BD = 9$ cm.

16. Examinați desenul.

$[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$, $[AM] \equiv [A_1M_1]$ şi $[AM]$, $[A_1M_1]$ sunt mediane ale triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$.

Demonstrați că $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

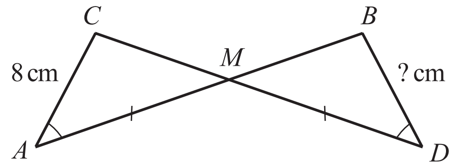


17. Demonstrați că diagonalele rombului se includ în bisectoarele unghiurilor rombului.

18. Unghiurile unui triunghi sunt respectiv congruente cu unghiurile altui triunghi şi două laturi ale primului triunghi sunt congruente cu două laturi ale triunghiului al doilea. Putem afirma că triunghiurile sunt congruente?

§3. Metoda triunghiurilor congruente

1 Segmentele AB şi CD se intersectează în punctul M, astfel încât $AM = DM$, $AC = 8$ cm şi $m(\angle CAM) = m(\angle BDM)$. Să se afle lungimea segmentului BD.



Explicăm

Examinăm triunghiurile AMC şi DMB.

$[AM] \equiv [DM]$.

$\angle CAM \equiv$ ___ .

Unghiurile AMC şi ___ sunt opuse la vârf. Prin urmare, $\angle AMC \equiv$ ___ .

Aplicând criteriul ULU, putem afirma că $\Delta AMC \equiv$ ___ . Prin urmare, $[AC] \equiv$ ___ şi $BD =$ ___ cm.

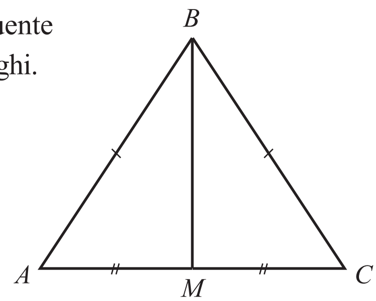
Răspuns: $BD =$ ___ cm.

La rezolvarea problemei am aplicat *metoda triunghiurilor congruente*.

> **Metoda triunghiurilor congruente** se foloseşte pentru a demonstra că două segmente sau două unghiuri sunt congruente. Pentru a realiza demonstrația:
> - cele două segmente (sau unghiuri) se încadrează în două triunghiuri a căror congruență poate fi demonstrată cu ajutorul criteriilor LUL, ULU, LLL;
> - se constată că segmentele (sau unghiurile) sunt congruente dacă ele sunt elemente omoloage ale triunghiurilor în care au fost încadrate.

Model de demonstrare a unei teoreme

2 Demonstrați că mediana cuprinsă între laturile congruente ale unui triunghi isoscel este şi bisectoare a acestui triunghi.



Explicăm

① Realizăm un desen corespunzător enunțului.

② Reformulăm enunțul problemei, utilizând notațiile din desen:
„Demonstrați că mediana BM cuprinsă între laturile congruente AB şi BC ale triunghiului isoscel ABC este şi bisectoare a acestui triunghi”.

③ Pentru a evidenția ipoteza şi concluzia propoziției (teoremei), reformulăm ultimul enunț sub forma: *Dacă* Ipoteza, *atunci* Concluzia.
Dacă triunghiul ABC este isoscel şi $[BM]$ este mediana cuprinsă între laturile congruente AB şi BC, *atunci* $[BM]$ este bisectoare a triunghiului ABC.

④ Evidențiem ipoteza: ... .
Evidențiem concluzia: ... .

⑤ Scriem prescurtat enunțul şi demonstrația:

Ipoteză: ΔABC, $[AB] \equiv [CB]$, $M \in [AC]$, $[AM] \equiv [CM]$.

Concluzie: $\angle ABM \equiv \angle CBM$.

Demonstrație:

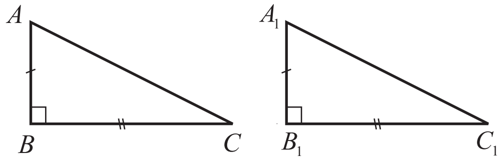
$$\left.\begin{array}{l}[AB] \equiv [CB] \text{ (din ipoteză)}\\ [AM] \equiv [CM] \text{ (din ipoteză)}\\ [BM] - \text{latură comună}\end{array}\right\} \overset{\text{LLL}}{\Rightarrow} \Delta ABM \equiv \Delta CBM \overset{\text{def}}{\Rightarrow} \angle ABM \equiv \angle CBM \text{ (c.c.t.d.)}.$$

Observație De regulă, pașii ②–④ se realizează oral.

3 Utilizând metoda triunghiurilor congruente, să demonstrăm criteriul CC de congruență a triunghiurilor dreptunghice.

Ipoteză: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$ – dreptunghice,
$[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$.

Concluzie: $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$



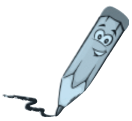
Demonstrație:

① $m(\angle ABC) = m(A_1B_1C_1) = 90°$. Prin urmare, $\angle ABC \equiv \angle A_1B_1C_1$. $(*)$

② Conform ipotezei și relației $(*)$, aplicând criteriul LUL de congruență a triunghiurilor oarecare, obținem $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$ (c.c.t.d.). ►

• Demonstrați similar criteriul CU de congruență a triunghiurilor dreptunghice.

Exerciții și probleme



1. Examinați figura 1 și calculați AD, DC și BD, dacă $AB = 9$ cm, $BC = 6$ cm, $DE = 3$ cm.

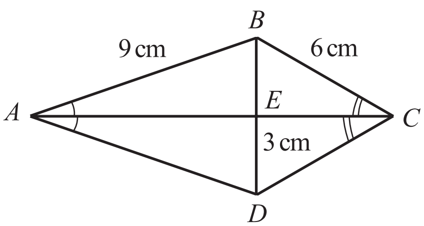


Fig. 1

2. Fie $[AM]$ o mediană a triunghiului ABC și $D \in [AM$, astfel încât $AM = MD$. Aflați BD și CD, dacă $AB = 5$ cm, $AC = 6$ cm.

3. Examinați figura 2 și precizați celelalte perechi de segmente congruente.

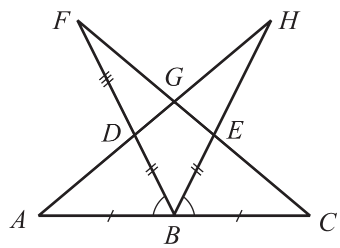


Fig. 2

4. Segmentul BD este mediana corespunzătoare bazei triunghiului isoscel ABC. Aflați BD, dacă perimetrele triunghiurilor ABC și ABD sunt, respectiv, de 48 cm și 36 cm.

5. Examinați figura 3. Demonstrați că $[AM]$ este o bisectoare a triunghiului ABC.

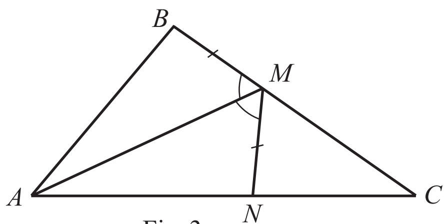


Fig. 3

6. Examinați figura 4 și aflați măsura unghiului ACD.

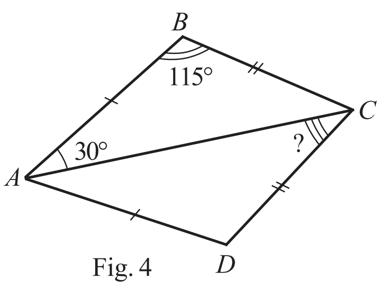


Fig. 4

7. Fie triunghiurile isoscele ABC și $A_1B_1C_1$, unde $\angle A \equiv \angle A_1$, $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$, $m(\angle C) = 70°$, iar unghiul C_1 este obtuz. Aflați $m(\angle C_1)$.

8. Examinați figura 5. Demonstrați că $\angle BAF \equiv \angle DEG$ şi $[AB] \equiv [DE]$, dacă $[AG] \equiv [FE]$, $m(\angle B) = m(\angle D)$, $m(\angle CGF) = m(\angle CFG)$.

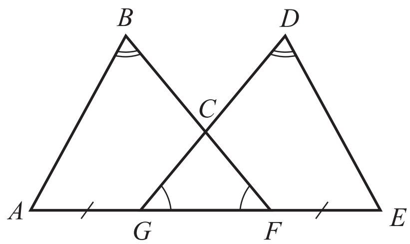


Fig. 5

9. Examinați figura 6. Aflați AB, dacă $DE = 7$ cm.
Indicație. Cercetați triunghiurile ABE şi ADE.

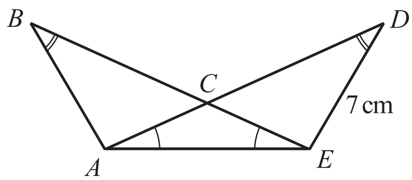


Fig. 6

10. Examinați figura 7. Aflați BE, dacă $FC = 10$ cm.
Indicație. Cercetați triunghiurile ABE şi AFC.

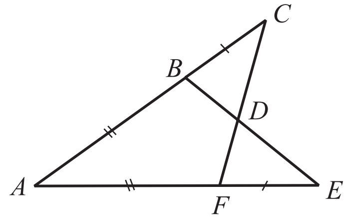
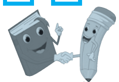


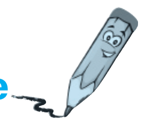
Fig. 7

11.  ***Lucrați în perechi!*** Cercurile de centrele O şi O_1 se intersectează în punctele A şi B. Demonstrați că dreptele AB şi OO_1 sunt perpendiculare.

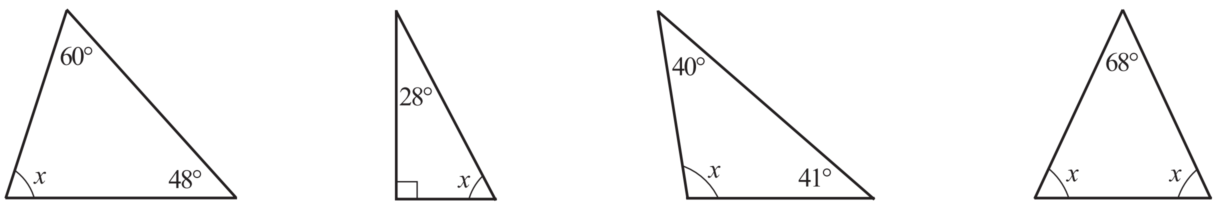
12. Demonstrați că lungimea laturii oricărui triunghi este mai mică decât semiperimetrul triunghiului.

13. Punctul D aparține interiorului triunghiului ascuțitunghic ABC. Demonstrați că $m(\angle A) < m(\angle ADC)$.

Exerciții și probleme recapitulative



1. Examinați desenul şi calculați măsura unghiului x.



a) b) c) d)

2. Calculați perimetrul unui triunghi echilateral cu latura de $2\frac{1}{3}$ cm.

3. Examinați desenul şi calculați măsura unghiului x:

a) b)

4. Calculați perimetrul unui triunghi:
a) echilateral, cu latura de 11 cm;
b) isoscel, cu o latură de 19 cm şi alta de 8 cm;
c) scalen, ale cărui laturi au lungimile numere naturale consecutive, cea mai lungă fiind de 10 cm.

5. Aflați măsura unghiului B al triunghiului ABC, dacă:
a) $m(\angle A) = m(\angle C) = 50°$;
b) $m(\angle A) = 2m(\angle B) = m(\angle C)$;
c) $m(\angle A) = \frac{1}{2}m(\angle B) = m(\angle C)$;
d) $m(\angle A) + m(\angle C) = m(\angle B)$.

6. Diferența măsurilor unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic este egală cu 50°. Aflați măsurile lor.

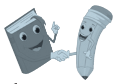
7. Perimetrul triunghiului echilateral ABC este egal cu 2,7 cm. Aflați AB.

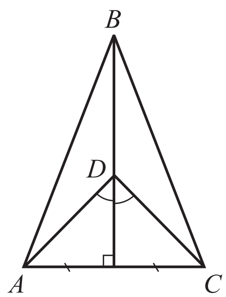
8. Un triunghi isoscel are o latură de 10 cm şi alta de 14 cm. Care poate fi perimetrul acestui triunghi?

9. Cele două laturi ale unui triunghi isoscel sunt cu 6 cm mai scurte decât a treia latură. Ce lungime are latura mai mare dacă ea este cu 22 cm mai mică decât perimetrul triunghiului?

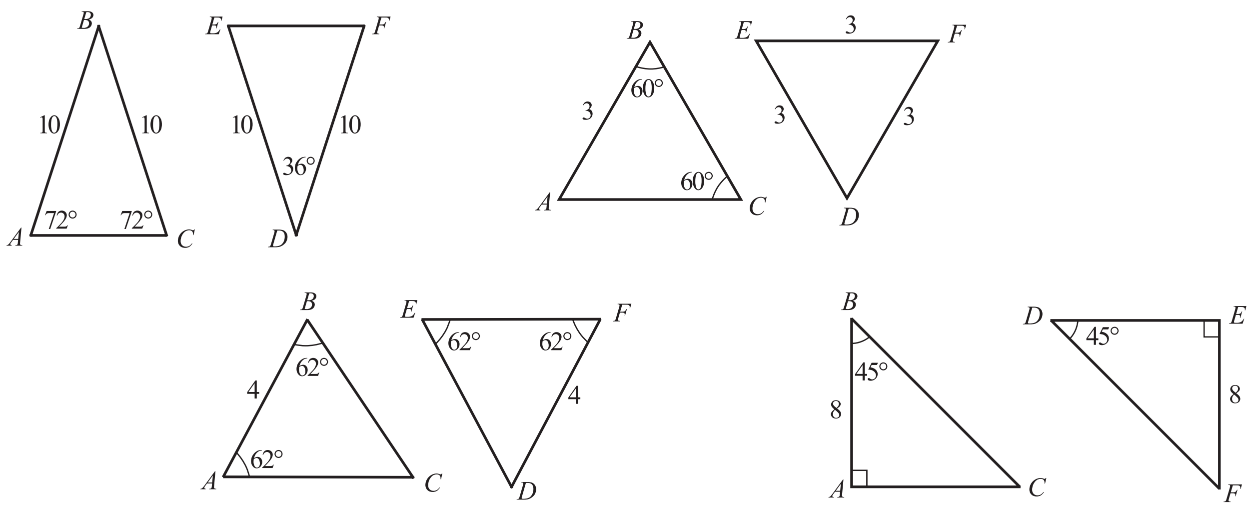
10. Un triunghi isoscel are o latură de 10 cm şi perimetrul de 28 cm. Aflați lungimile celorlalte două laturi.

11. Măsura unui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic este de $68°45'$. Determinați măsura celuilalt unghi acuțit al triunghiului.

12.  ***Lucrați în perechi!*** Examinați desenul şi scrieți perechile de segmente congruente. Justificați răspunsul.



13. Examinați desenul şi stabiliți dacă triunghiurile sunt congruente.

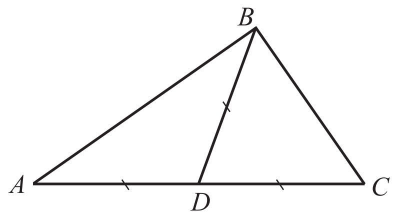


14. Construiți un triunghi cu laturile de 5 cm, 6 cm, 8 cm.

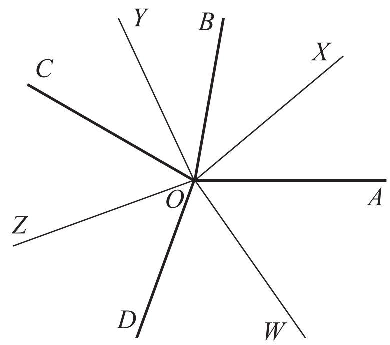
15. Construiți un triunghi cu o latură de 5 cm, alta de 7 cm şi unghiul format de ele de 140°.

16. Construiți un triunghi cu o latură de 7 cm şi unghiurile alăturate ei de 45° şi 55°.

17. Fie triunghiul ABC şi $D \in [AC]$, astfel încât $[AD] \equiv [BD] \equiv [CD]$. Demonstrați că $m(\angle ABC) = 90°$.



18. 10 drepte sunt concurente într-un punct. Demonstrați că cel puțin unul dintre unghiurile formate are măsura mai mică decât 20°.

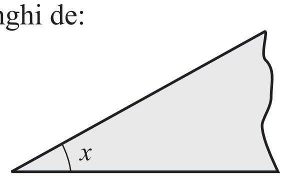


19. Dintr-un punct O au fost construite 4 semidrepte $[OA$, $[OB$, $[OC$ şi $[OD$. Semidreptele $[OX$, $[OY$, $[OZ$ şi $[OW$ sunt bisectoarele unghiurilor AOB, BOC, COD şi, respectiv, DOA. Demonstrați că printre unghiurile XOY, YOZ, ZOW, WOX sunt două perechi de unghiuri suplementare.

20. Aflați $m(\angle A)$ dacă măsurile unghiurilor B şi C ale triunghiului ABC sunt egale respectiv cu:

a) $20°47'$ şi $73°28'$; b) $39°21'$ şi $48°58'$;
c) $120°21'$ şi $32°54'$; d) $82°04'11''$ şi $32°18'43''$;
e) $71°52'19''$ şi $81°32'42''$; f) $14°18''$ şi $132°52'43''$.

21. *Lucrați în perechi!* Desenul reprezintă imaginea unui obiect cu ajutorul căruia se poate construi un unghi de $x°$. Cum se poate construi cu ajutorul acestui obiect un unghi de:



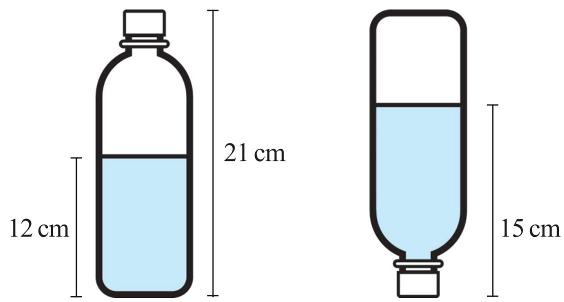
a) 9°, dacă $x = 19°$;
b) 4°, dacă $x = 23°$;
c) 3°, dacă $x = 31°$;
d) 19°, dacă $x = 38°$?

22. Calculați măsura unghiului format de acele ceasornicului la ora:
a) 2 şi 20 de minute; b) 1 şi 15 minute.

23. Două cercuri cu razele de 3 cm şi 5 cm se intersectează în două puncte. Demonstrați că distanța dintre centrele lor nu este mai mică de 2 cm şi nu este mai mare de 8 cm.

PENTRU CAMPIONI

24. Observați imaginea! Ce parte din vas este umplută?



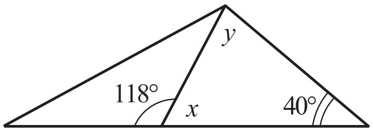
Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 minute

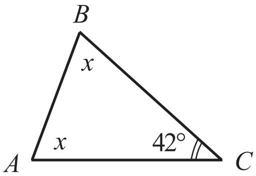
Varianta 1

1. Aflați măsurile unghiurilor x și y:

a)



b)

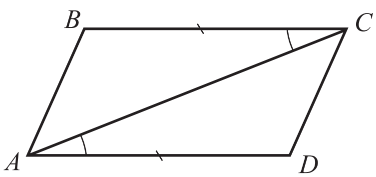


2. Triunghiul ABC este dreptunghic, având unghiul drept B. Aflați $m(\angle C)$, dacă:

$$m(\angle A) = 36°.$$

3. Aflați $m(\angle C)$, dacă măsurile unghiurilor A și B ale triunghiului ABC sunt egale, respectiv, cu $48°36'$ și $25°31'$.

4. Scrieți triunghiurile congruente:

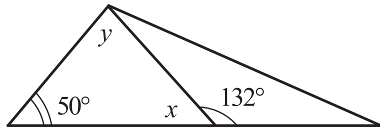


5. Lungimile laturilor unui triunghi sunt direct proporționale cu numerele 4, 5, 6. Aflați aceste lungimi, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 45 cm.

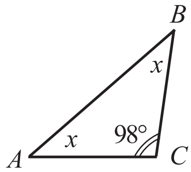
Varianta 2

1. Aflați măsurile unghiurilor x și y:

a)



b)

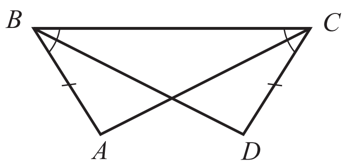


2. Triunghiul ABC este dreptunghic, având unghiul drept B. Aflați $m(\angle C)$, dacă:

$$m(\angle A) = 28°.$$

3. Aflați $m(\angle C)$, dacă măsurile unghiurilor A și B ale triunghiului ABC sunt egale, respectiv, cu $37°46'$ și $24°22'$.

4. Scrieți triunghiurile congruente:



5. Lungimile laturilor unui triunghi sunt direct proporționale cu numerele 3, 4, 5. Aflați aceste lungimi, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 48 cm.

3
capitolul

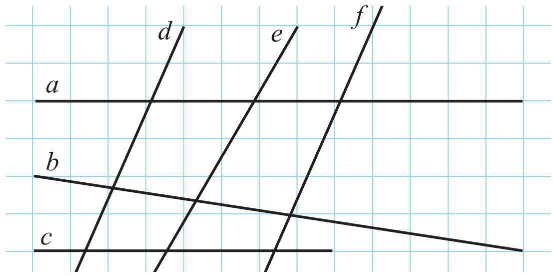
Paralelism și perpendicularitate

Cea mai înaltă formă a gândirii pure există în matematică.
Platon

§1. Drepte paralele

1.1. Drepte paralele

1 Examinați desenul. Observați poziția relativă a dreptelor şi completați.



a) Dreptele a şi b sunt ______, deoarece ______.

b) Dreptele d şi c sunt ______, deoarece ______.

c) Dreptele a şi c sunt ______, deoarece ______.

d) Dreptele e şi f sunt ______, deoarece ______.

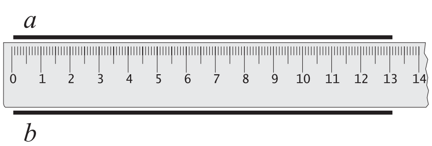
Observație Evident, concluzia că două drepte date sunt sau nu paralele trebuie argumentată matematic riguros. Cu acest scop, ulterior vom studia criteriile de paralelism a două drepte.

Definiție Două **drepte** se numesc **paralele** dacă ele sunt situate în acelaşi plan şi nu au puncte comune sau care coincid.

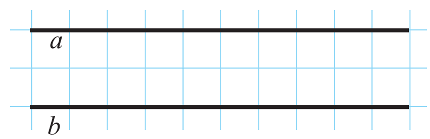
Notăm: $a \parallel b$. *Citim*: Dreptele a şi b sunt paralele.
Dacă dreptele a şi b nu sunt paralele, notăm $a \nparallel b$.

• Putem construi drepte paralele:

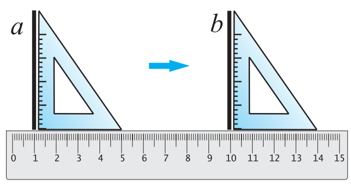
a) cu ajutorul riglei;



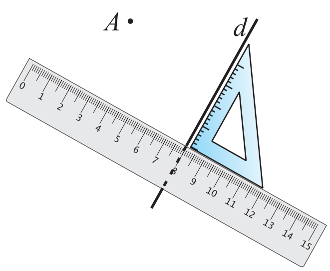
b) cu ajutorul rețelei de pătrate;



c) cu ajutorul riglei şi echerului.



2 Examinați imaginea şi explicați cum se poate construi o dreaptă paralelă cu dreapta d, care va conține punctul A. Câte astfel de drepte se pot construi?



Axioma paralelelor (sau **axioma lui Euclid**)

Prin orice punct exterior unei drepte se poate construi o unică dreaptă paralelă cu dreapta dată.

• Luând în considerare că două puncte diferite determină o unică dreaptă, stabiliți câte perechi de drepte paralele pot fi construite, astfel încât orice pereche să conțină trei puncte necoliniare date.

3 Aplicând metoda reducerii la absurd și axioma paralelelor, demonstrați următoarea teoremă.

Teoremă (tranzitivitatea relației de paralelism)

Dacă două drepte sunt paralele cu a treia dreaptă, atunci ele sunt paralele: dacă $a \parallel c$ și $b \parallel c$, atunci $a \parallel b$.

• Completați și argumentați:

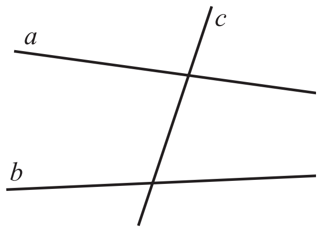
Dacă $a \parallel b$ și $a \cap c = \{M\}$, atunci dreptele b și c sunt ________.

1.2. Criterii de paralelism al dreptelor

1 a) Câte unghiuri formează dreapta c cu dreptele a și b?

b) Câte perechi de unghiuri congruente observați în desen?

c) Câte perechi de unghiuri suplementare observați în desen?

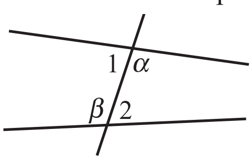


Definiție

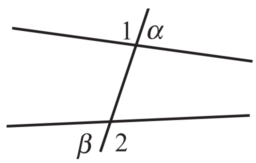
Dreapta care intersectează două drepte coplanare se numește **secantă**.

Dreapta c din desen este secantă, deoarece intersectează dreptele a și b.

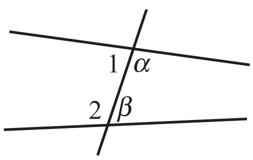
Două drepte formează cu o secantă 8 unghiuri.



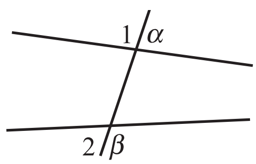
Unghiuri **alterne interne** $(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle 1, \angle 2)$.



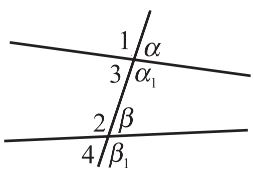
Unghiuri **alterne externe** $(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle 1, \angle 2)$.



Unghiuri **interne de aceeași parte a secantei** $(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle 1, \angle 2)$.



Unghiuri **externe de aceeași parte a secantei** $(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle 1, \angle 2)$.



Unghiuri **corespondente** $(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle\alpha_1, \angle\beta_1)$; $(\angle 1, \angle 2)$; $(\angle 3, \angle 4)$.

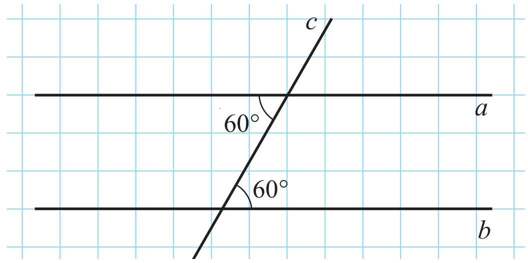
2 Unghiurile alterne interne din desen sunt congruente şi au măsura de 60°.
Calculați:

a) măsurile unghiurilor alterne externe;

b) suma măsurilor unghiurilor interne de aceeaşi parte a secantei;

c) suma măsurilor unghiurilor externe de aceeaşi parte a secantei;

d) măsurile unghiurilor corespondente.



Teorema 1

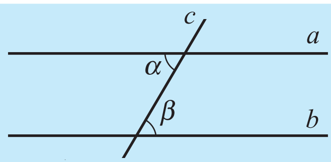
Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci:
1) celelalte două unghiuri alterne interne sunt congruente;
2) unghiurile alterne externe sunt congruente;
3) unghiurile interne de aceeaşi parte a secantei sunt suplementare;
4) unghiurile externe de aceeaşi parte a secantei sunt suplementare;
5) unghiurile corespondente sunt congruente.

Observație

Schimbând locurile ipotezei şi ale oricărei condiții din concluzia teoremei 1, obținem de asemenea o propoziție adevărată, adică o nouă teoremă.

Teorema 2 (Criteriul de paralelism a două drepte)

Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci dreptele sunt paralele.



$\angle\alpha \equiv \angle\beta \Rightarrow a \parallel b$

• Demonstrați teorema 2 prin metoda reducerii la absurd.

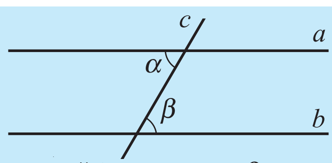
Observații

1. În baza teoremei 1, condiția subliniată din teorema 2 poate fi substituită cu oricare din condițiile 2)–5) ale teoremei 1, obținându-se astfel alte 4 criterii de paralelism a două drepte. Formulați-le.

2. Reciprocele criteriilor de paralelism, de asemenea, sunt teoreme. Teorema 3 este reciproca teoremei 2. Formulați reciprocele celorlalte criterii.

Teorema 3 (reciproca teoremei 2)

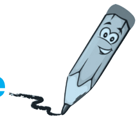
Două drepte paralele formează cu o secantă unghiuri alterne interne congruente.



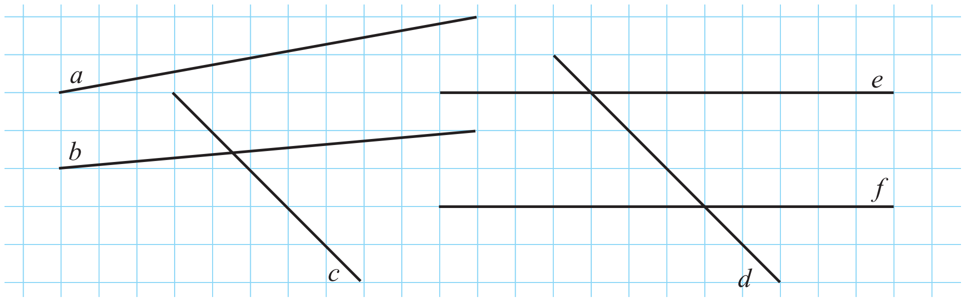
$a \parallel b \Rightarrow \angle\alpha \equiv \angle\beta$

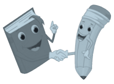
• Fie date o dreaptă *a* şi un punct *M* care nu aparține dreptei *a*. Cu ajutorul riglei şi raportorului, construiți o dreaptă *b* paralelă cu dreapta *a*, care va conține punctul *M*.

Exerciții și probleme



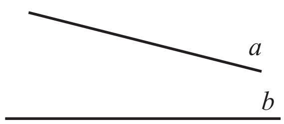
1. Examinați desenul și determinați perechile de drepte:
a) paralele; b) concurente.



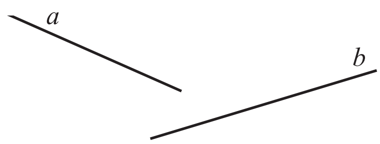


2. *Lucrați în perechi!* Construiți pe caiet cu ajutorul riglei:
a) două drepte orizontale; b) două drepte oblice paralele; c) două drepte concurente oblice.

3. Utilizând raportorul și echerul, aflați măsura unghiului mai mic format la intersecția dreptelor a și b din desen:



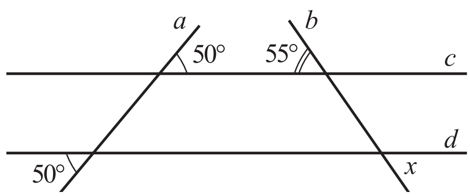
a)



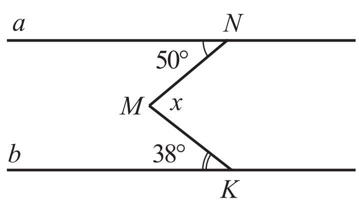
b)

4. În câte regiuni disjuncte împart planul trei drepte secante două câte două?

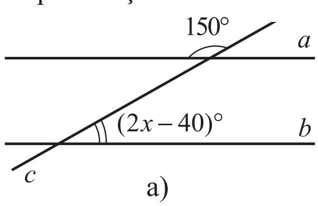
5. Examinați desenul și aflați măsura unghiului x.



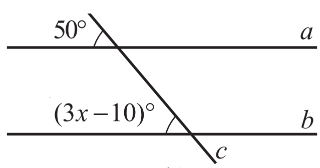
6. Dreptele a și b sunt paralele. Calculați măsura unghiului x.
Indicație. Construiți prin punctul M o dreaptă paralelă cu dreptele a și b.



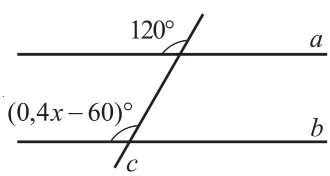
7. Dreptele a și b din desen sunt paralele. Calculați valoarea lui x.



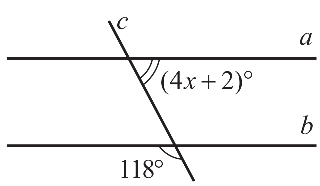
a)



b)

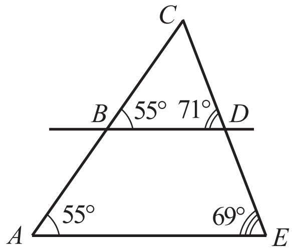


c)

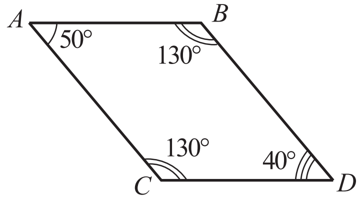


d)

8. Cum se poate argumenta că datele din desen sunt greşite?



a)

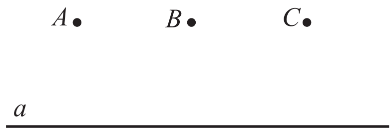


b)

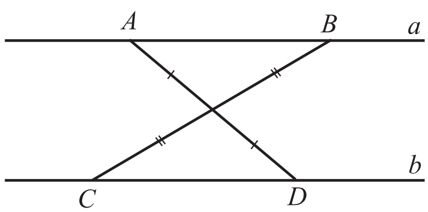
9. Fie punctele $A(3; 0)$, $B(0; 2)$, $C(6; 0)$. Determinaţi coordonatele a două puncte M şi N, astfel încât $MN \parallel AB$ şi M, N, C sunt puncte coliniare.

10. Suma măsurilor a 6 din cele 8 unghiuri formate de o secantă cu două drepte paralele este 636°. Calculaţi măsurile celor 8 unghiuri.

11. Punctele A, B, C nu aparţin dreptei a, $AB \parallel a$ şi $BC \parallel a$. Demonstraţi prin metoda reducerii la absurd că punctele A, B, C sunt coliniare.

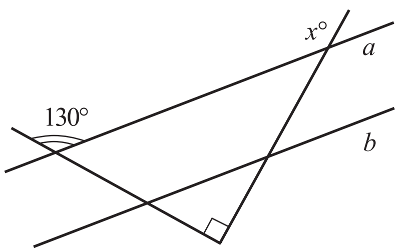


12. Demonstraţi că dreptele a şi b din desen sunt paralele.

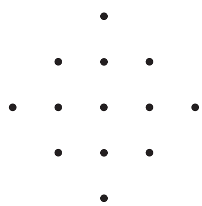


PENTRU CAMPIONI

13. Ce măsură are x dacă dreptele a şi b sunt paralele?

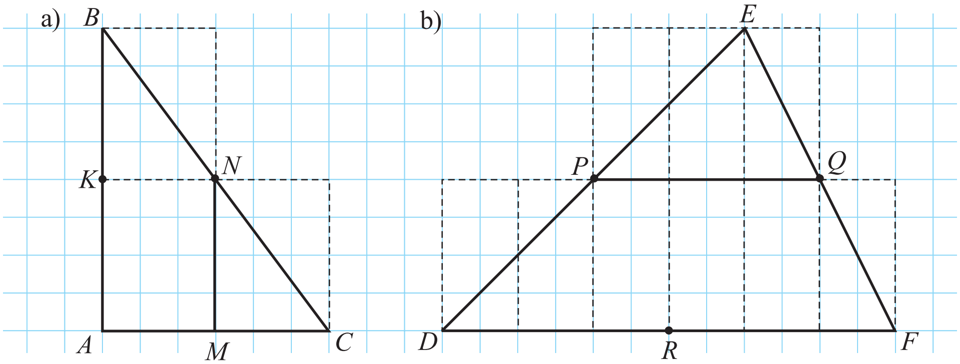


14. Construiţi 5 segmente fără a ridica creionul şi fără a trece peste aceeaşi linie de două ori, astfel încât să intersectaţi toate cele 13 puncte din imagine.



§2. Linia mijlocie a triunghiului

Examinați desenul şi completați adecvat.



a) Punctul M este ______ laturii AC.

Punctul N este ______ laturii BC.

Dreptele MN şi AB sunt ______.

$\dfrac{AB}{MN} =$ ______.

b) Punctul P este ______ laturii DE.

Punctul Q este ______ laturii EF.

Dreptele PQ şi DF sunt ______.

$\dfrac{DF}{PQ} =$ ______.

Definiție

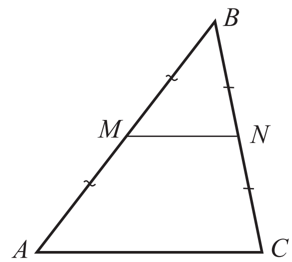
Segmentul determinat de mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numeşte **linie mijlocie** a triunghiului.

De exemplu, în desen, $[MN]$ este o linie mijlocie a triunghiului ABC, iar $[PQ]$ este o linie mijlocie a triunghiului DEF.

• Punctul K este mijlocul laturii AB, iar punctul R – mijlocul laturii DF. Ce relație există între segmentele KN şi AC? Dar între segmentele QR şi DE?

Teorema 1

Linia mijlocie a unui triunghi este paralelă cu o latură a triunghiului şi are lungimea de două ori mai mică decât lungimea acestei laturi.



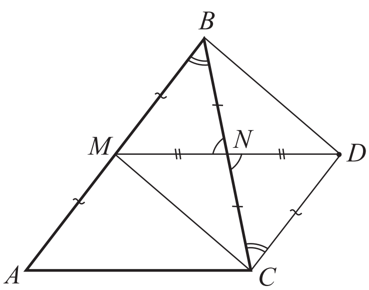
Să demonstrăm teorema 1.

Ipoteză: ΔABC, $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $[MN]$ este linie mijlocie a triunghiului ABC.

Concluzie: 1) $MN \parallel AC$; 2) $AC = 2MN$.

Demonstrație:

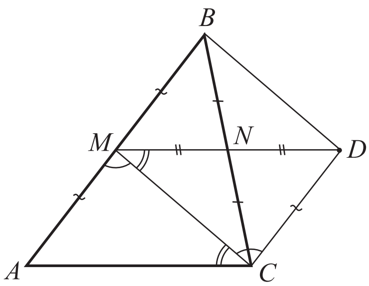
① Construim pe dreapta MN punctul D, astfel încât $ND = MN$.



①–③

② Examinăm ΔBNM şi ΔCND:
$[BN] \equiv [CN]$ (conform ipotezei),
$[NM] \equiv [ND]$ (conform construcției),
$\angle BNM \equiv \angle CND$ (unghiuri opuse la vârf).
Conform criteriului LUL, $\Delta BNM \equiv \Delta CND$.
Prin urmare, $\angle MBN \equiv \angle DCN$ şi $[BM] \equiv [DC]$.

③ Examinăm dreptele MB şi CD, intersectate de secanta BC.
Conform criteriului de paralelism, $MB \parallel CD$ (unghiurile MBN şi DCN sunt alterne interne congruente).

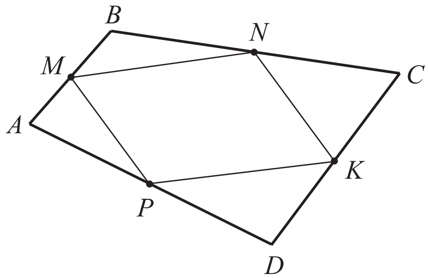


④, ⑤

④ Dreptele paralele MB şi CD formează cu secanta MC unghiurile alterne interne congruente AMC şi DCM.

⑤ Conform criteriului LUL, $\Delta AMC \equiv \Delta DCM$.
Prin urmare, $[AC] \equiv [MD]$. Cum $MD = 2MN$ şi $MD = AC$, obţinem $AC = 2MN$.
Avem $MN \parallel AC$, deoarece dreptele MN şi AC formează cu secanta MC unghiurile alterne interne congruente DMC şi ACM, c.c.t.d. ▶

• Punctele M, N, K, P sunt mijloacele laturilor patrulaterului $ABCD$.
Aplicând proprietatea liniei mijlocii într-un triunghi şi tranzitivitatea relaţiei de paralelism a două drepte, demonstraţi că $MN \parallel PK$ şi $MP \parallel NK$.

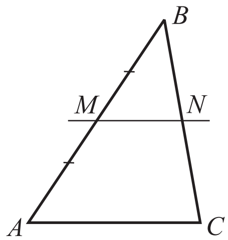


Teorema 2 (reciproca teoremei 1)

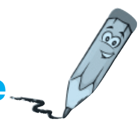
Paralela dusă prin mijlocul unei laturi la o altă latură a triunghiului trece prin mijlocul laturii a treia.

Ipoteză: ΔABC, $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $AM = MB$, $MN \parallel AC$.
Concluzie: $BN = NC$.

• Demonstraţi teorema 2 aplicând metoda reducerii la absurd.



Exerciţii şi probleme



1. Calculaţi lungimile liniilor mijlocii ale triunghiului cu laturile de:

a) 3 cm, 4 cm, 5 cm; b) $\frac{5}{8}$ cm, $\frac{6}{7}$ cm, $\frac{4}{5}$ cm;

c) $\sqrt{12}$ cm, $\sqrt{10}$ cm, $\sqrt{14}$ cm; d) $2,(4)$ cm, $3,(6)$ cm, $1,(8)$ cm.

2. Calculaţi perimetrul unui triunghi, dacă liniile mijlocii ale acestuia au lungimile de:

a) $4\frac{1}{3}$ cm, $4\frac{4}{9}$ cm, $3\frac{1}{6}$ cm;

b) $2\sqrt{3}$ cm, $3\sqrt{3}$ cm, $4\sqrt{3}$ cm;

c) $2,(4)$ cm, $2,(6)$ cm, $2,(3)$ cm.

3. O linie mijlocie a triunghiului ABC formează cu laturile lui unghiuri de 45° şi 60°. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului.

4. Segmentul MN este o linie mijlocie a triunghiului ABC, astfel încât $MN \parallel AC$. Calculaţi perimetrul triunghiului BMN, dacă perimetrul triunghiului ABC este egal cu $4\sqrt{7}$ cm.

5. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele AD şi BC. Punctele M şi N sunt mijloacele laturilor AB şi, respectiv, DC. Demonstraţi că $MN \parallel AD$ şi $MN \parallel BC$.

6. Lungimea liniei mijlocii a unui triunghi isoscel, care uneşte mijloacele laturilor congruente, este egală cu 6 cm. Aflaţi lungimile laturilor triunghiului, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 40 cm.

7. Linia mijlocie a unui triunghi isoscel, care nu este paralelă cu baza, are lungimea de 5 cm. Aflaţi lungimile laturilor triunghiului, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 32 cm.

8. Punctele A, B, C, D sunt mijloacele laturilor MN, NK, KP, PM respectiv ale patrulaterului $MNKP$. Aflaţi lungimile laturilor patrulaterului $ABCD$, dacă $MK = 10$ cm, $NP = 12$ cm.

9. Fie $[MN]$ linie mijlocie a triunghiului ABC, $M \in [AB]$, $N \in [BC]$. Aflaţi lungimile celorlalte două laturi ale triunghiului, dacă:

a) $AB = 8$ cm, $MN = 4{,}5$ cm şi perimetrul triunghiului ABC este egal cu 27 cm;

b) $BC = 11$ cm, $MN = 5{,}4$ cm şi perimetrul triunghiului ABC este egal cu 30 cm;

c) $AB = 4\sqrt{5}$ cm, $MN = 3\sqrt{5}$ cm şi perimetrul triunghiului ABC este egal cu $15\sqrt{5}$ cm;

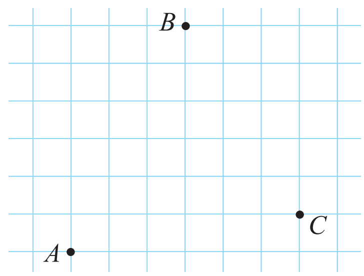
d) $BC = 9,(4)$ cm, $MN = 5,(2)$ cm şi perimetrul triunghiului ABC este egal cu 28, (6) cm.

10. Lungimea liniei mijlocii a unui triunghi echilateral este egală cu 3,(7) cm. Aflaţi perimetrul triunghiului.

11. Punctele M, N, K sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC. Aflaţi perimetrul triunghiului, dacă

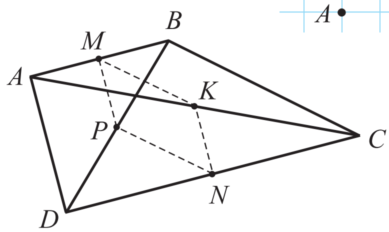
$MN + MK = 9{,}3$ cm, $MN + NK = 10{,}1$ cm, $MK + NK = 9{,}8$ cm.

12. Demonstraţi că liniile mijlocii ale unui triunghi îl împart în 4 triunghiuri congruente.



13. Punctele A, B, C din desen sunt mijloacele laturilor triunghiului MNK. Copiaţi şi „restabiliţi” triunghiul MNK cu ajutorul riglei şi al echerului.

14. Examinaţi desenul. M şi N sunt mijloacele laturilor AB şi CD, iar P şi K – mijloacele diagonalelor BD şi AC, respectiv ale patrulaterului $ABCD$. Demonstraţi că $MP \parallel KN$ şi $MK \parallel PN$.

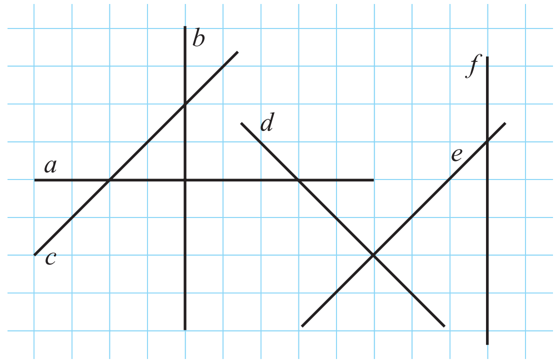


§3. Drepte perpendiculare. Mediatoarea segmentului

3.1. Drepte perpendiculare. Distanța de la un punct la o dreaptă

1 Examinați desenul. Precizați perechile de drepte perpendiculare.

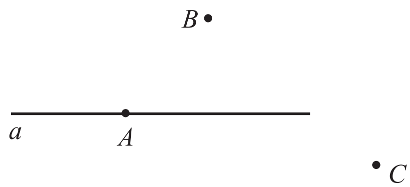
• Care este poziția relativă a două drepte x şi y dacă fiecare dintre ele este perpendiculară pe o dreaptă z?



2 Putem construi cu rigla şi echerul o dreaptă perpendiculară pe dreapta a din desen, care să conțină:

a) punctul A;
b) punctul B;
c) punctul C?

Justificați.



• Care drepte se numesc perpendiculare?
• Cum se scrie, utilizând simbolurile matematice, propoziția: „Dreptele a şi b sunt perpendiculare”?

Teoremă

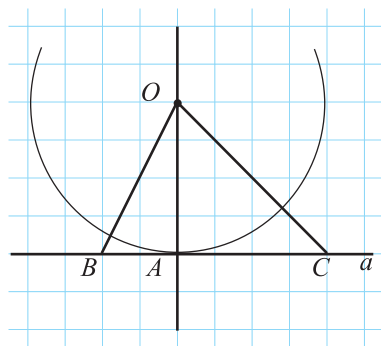
Prin orice punct care aparține sau nu unei drepte se poate construi o unică dreaptă perpendiculară pe dreapta dată.

3 Examinați desenul şi completați.

Dreapta OA este perpendiculară pe dreapta ____ .

Ordonând crescător lungimile segmentelor OA, OB, OC, obținem: ____ $< OB <$ ____ .

Conform definiției distanței dintre două figuri, observăm că distanța dintre punctul O şi dreapta a este egală cu lungimea segmentului ____ .



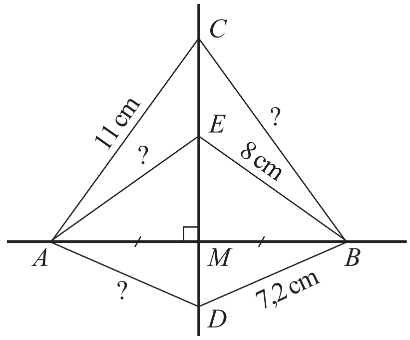
Definiții

- Punctul în care perpendiculara pe dreapta a, dusă din punctul O, intersectează dreapta a se numeşte **piciorul perpendicularei** duse din punctul O pe dreapta a, sau **proiecția ortogonală a punctului** O pe dreapta a.
- Dreapta determinată de punctul O şi de orice punct al dreptei a, diferit de proiecția ortogonală a punctului O pe a, se numeşte **oblică** la dreapta a.
- **Distanța de la punctul O la dreapta a** este lungimea segmentului determinat de punctul O şi de proiecția ortogonală a acestuia pe dreapta a.

În desenul problemei **3**, punctul A este proiecția ortogonală a punctului O pe dreapta a, dreptele OB şi OC sunt oblice, iar OA este distanța de la punctul O la dreapta a.

3.2. Mediatoarea segmentului

1 Dreptele AB şi CD, din desen, sunt perpendiculare şi punctul M este mijlocul segmentului AB.
Precizaţi perechile de triunghiuri dreptunghice congruente.
Aflaţi lungimea segmentelor BC, AE şi AD.
Trageţi concluzia.



Definiție

Mediatoarea unui segment este dreapta care trece prin mijlocul segmentului şi este perpendiculară pe el.

În desen, dreapta CD este mediatoarea segmentului AB.

Teoremă

Punctele mediatoarei unui segment sunt egal depărtate de extremităţile acestuia.

Să demonstrăm această teoremă.

Ipoteză: CD – mediatoarea segmentului $[AB]$. $K \in CD$.

Concluzie: $AK = BK$.

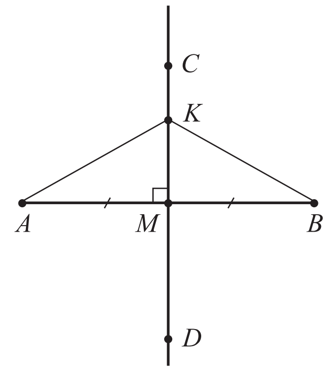
Demonstraţie:

① Fie $M \in [AB]$, $AM = BM$.

② $CD \perp AB$, $CD \cap AB = \{M\}$ (conform ipotezei).

③ $\Delta AMK \equiv \Delta BMK$ (criteriul CC).

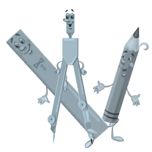
④ Prin urmare, $[AK] \equiv [BK]$, adică $AK = BK$, c.c.t.d. ▶



• Reciproca acestei teoreme este, de asemenea, teoremă. Formulaţi şi demonstraţi reciproca.

Observație

Conform teoremei despre punctele mediatoarei unui segment şi reciprocei ei, un punct este egal depărtat de extremităţile unui segment dacă şi numai dacă aparţine mediatoarei segmentului.

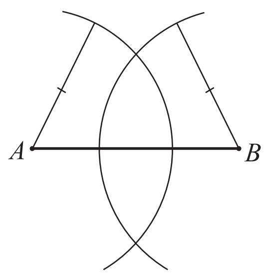


2 Cum se poate construi cu ajutorul riglei şi al compasului mediatoarea unui segment dat?

Explicăm

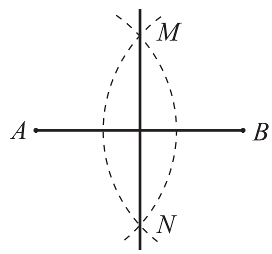
Considerăm segmentul AB.

① Fixăm piciorul compasului în punctul A şi construim un semicerc a cărui rază este mai mare decât $\frac{AB}{2}$.



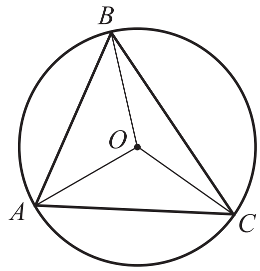
② Păstrând aceeaşi deschidere a compasului, fixăm piciorul lui în punctul B şi construim alt semicerc.

③ Punctele de intersecţie a semicercurilor determină mediatoarea segmentului AB.



• Demonstrați că dreapta MN astfel construită este într-adevăr mediatoarea segmentului AB.

• De ce raza semicercurilor trebuie să fie mai mare decât $\frac{AB}{2}$?



3 Examinați desenul. Cum este situat centrul O al cercului față de punctele A şi B? Dar față de A şi C? De B şi C? Trageți concluzia.

Explicăm

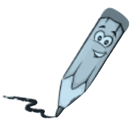
Punctul O este egal depărtat de punctele A şi B, deoarece AO şi OB sunt ______ ale cercului. Prin urmare, punctul O aparține ______ segmentului AB.

Acelaşi lucru se poate spune şi despre poziția punctului O față de punctele A şi C (respectiv B şi C).

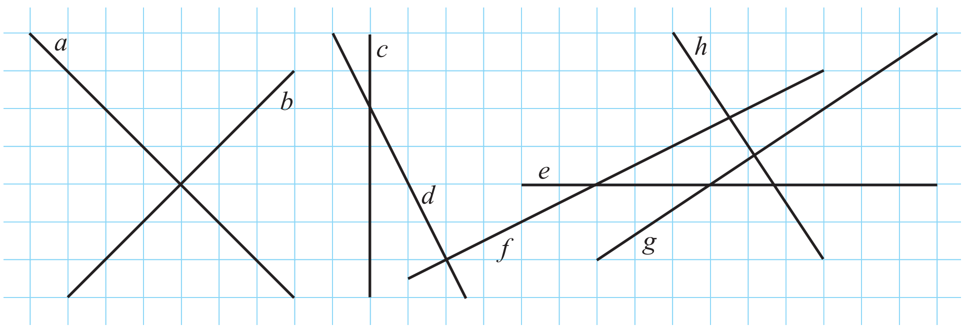
Rețineți

Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente.
Punctul lor de intersecție este egal depărtat de vârfurile triunghiului.

Exerciții și probleme



1. Examinați desenul şi cu ajutorul instrumentelor geometrice stabiliți perechile de drepte perpendiculare.



2. Punctul M aparține mediatoarei segmentului AB. Aflați:

a) AM, dacă $BM = 8$ cm;

b) BM, dacă $AM = \sqrt{10}$ cm;

c) AM, dacă $AM + BM = 21$ cm;

d) BM, dacă $3AM = 17$ cm.

3. Punctul M_1 este proiecția ortogonală a punctului $M(a;\ b)$ pe axa absciselor a unui sistem de axe ortogonale. Aflați coordonatele punctului M_1, dacă:

a) $a = \sqrt{3},\ b = -\frac{5}{12}$; b) $a = \frac{1}{9},\ b = -\frac{1}{5}$;

c) $a = 2,(5),\ b = 1,(4)$; d) $a = 0,\ b = -2$.

4. Punctul M_1 este proiecția ortogonală a punctului $M(a;\ b)$ pe axa ordonatelor a unui sistem de axe ortogonale. Aflați MM_1, dacă:

a) $a = 3,\ b = -7$; b) $a = -2,\ b = \sqrt{5}$;

c) $a = b = -3,(4)$; d) $a = -5,\ b = 0$.

5. Punctele A_1 şi B_1 sunt proiecțiile ortogonale ale punctelor A şi, respectiv, B pe dreapta a (situate în semiplane diferite determinate de dreapta a), $[AA_1] \equiv [BB_1]$. Aflați:

a) AB_1, dacă $A_1B = 7$ cm;

b) $m(\angle A_1AB_1)$, dacă $m(\angle B_1A_1B) = 30°$.

6. Punctele A_1 şi B_1 sunt proiecţiile ortogonale ale punctelor A şi, respectiv, B pe dreapta a (situate în acelaşi semiplan determinat de dreapta a), $[AA_1] \equiv [BB_1]$, M este mijlocul segmentului A_1B_1. Aflaţi:

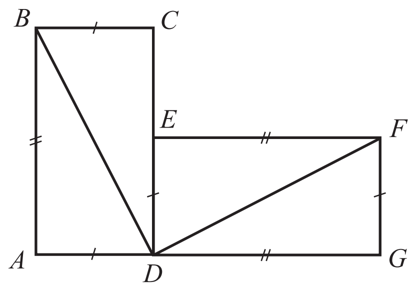
a) $m(\angle A_1AM)$, dacă $m(\angle BMB_1) = 50°$;

b) $m(\angle AMB)$, dacă $m(\angle BMB_1) = 40°$.

7. Fie triunghiul ABC, punctul D – mijlocul laturii BC, $E \in AD$, $[BE] \equiv [CE]$. Aflaţi:

a) $m(\angle BED)$, dacă $m(\angle DCE) = 42°$;

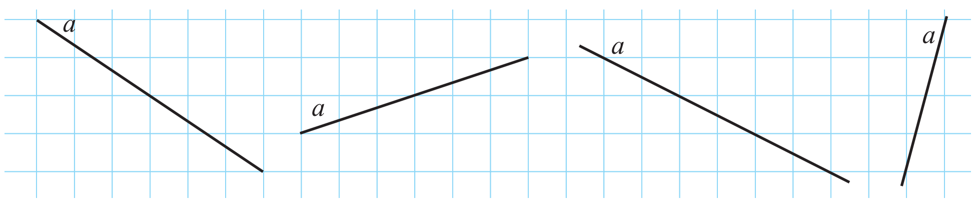
b) $m(\angle CAD)$, dacă $m(\angle ABC) = 35°$.



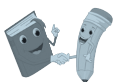
8. Câte perechi de drepte perpendiculare pot fi duse prin trei puncte necoliniare (adică fiecare punct să aparţină cel puţin uneia din cele două drepte ale perechii)?

9. Dreptunghiurile $ABCD$ şi $DEFG$ din desen sunt congruente. Demonstraţi că $m(\angle BDF) = 90°$.

10. Utilizând rezultatul problemei precedente, reproduceţi desenul şi construiţi doar cu ajutorul riglei o dreaptă perpendiculară pe dreapta a:



a) b) c) d)

11.  ***Lucraţi în perechi!*** Fie punctele $A(1; 2)$, $B(5; 6)$, $C(5; 2)$ într-un sistem de axe ortogonale. Aflaţi coordonatele:

a) proiecţiei ortogonale a punctului C pe dreapta AB;

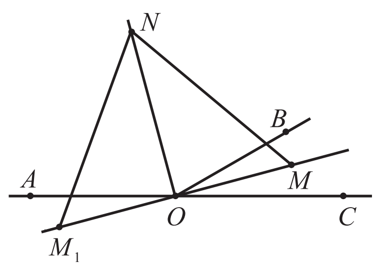
b) proiecţiei ortogonale a punctului B pe dreapta AC;

c) proiecţiei ortogonale a punctului A pe dreapta BC.

12. Punctele A, O, C sunt coliniare, $[OM$ este bisectoarea unghiului BOC, iar $[ON$ este bisectoarea unghiului AOB, $M_1 \in OM$, $[M_1O] \equiv [OM]$. Aflaţi:

a) $m(\angle ONM_1)$, dacă $m(\angle OMN) = 55°$;

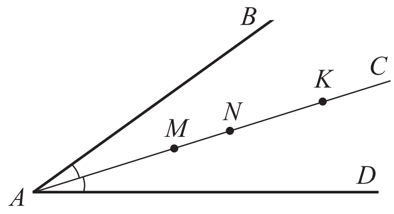
b) ON, dacă $OM = 5$ cm şi perimetrul triunghiului M_1NM este egal cu 24 cm, iar perimetrul triunghiului MON este egal cu 18 cm.



§4. Proprietățile bisectoarei unghiului

1 Examinați desenul. Semidreapta $[AC$ este bisectoarea unghiului BAD. Cu ajutorul echerului şi al riglei gradate, aflați distanțele de la punctele M, N, K la laturile unghiului BAD.

• Ce observați?



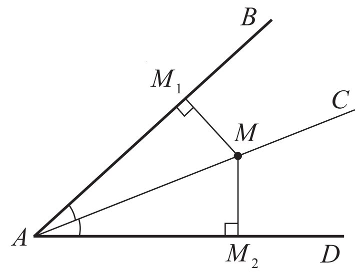
Teorema 1 Orice punct al bisectoarei unui unghi este egal depărtat de laturile acestuia.

Să demonstrăm teorema 1.

Ipoteză: $\angle BAD$, $\angle BAC \equiv \angle CAD$,
$MM_1 \perp AB$, $MM_2 \perp AD$,
$M_1 \in [AB$, $M_2 \in [AD$.

Concluzie: $MM_1 = MM_2$.

Demonstrație:



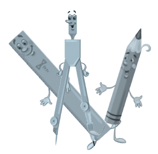
① $\Delta AM_1M \equiv \Delta AM_2M$ (criteriul IU).

② Prin urmare, $[MM_1] \equiv [MM_2]$, adică $MM_1 = MM_2$, c.c.t.d. ►

Teorema 2 (reciproca teoremei 1)

Dacă un punct situat în interiorul unghiului este egal depărtat de laturile acestui unghi, atunci punctul aparține bisectoarei unghiului.

• Demonstrați teorema 2.



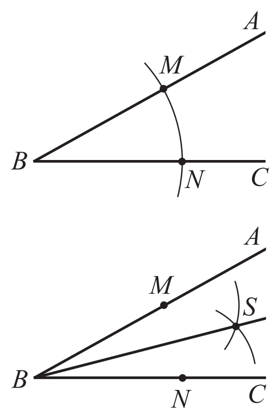
2 Cum poate fi construită bisectoarea unui unghi dat ABC cu ajutorul riglei şi al compasului?

Explicăm

① Fixăm piciorul compasului în vârful unghiului şi construim un cerc.
Fie M şi N punctele de intersecție a cercului cu unghiul ABC.

② Fixăm piciorul compasului în punctul M şi construim un cerc cu raza mai mare decât $\frac{MN}{2}$. Cu aceeaşi deschizătură a compasului construim un alt cerc, cu centrul în punctul N. Fie S punctul de intersecție a celor două cercuri (cuprins între laturile unghiului).

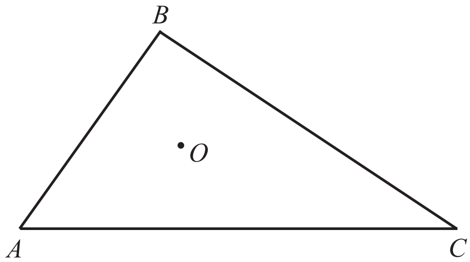
③ $[BS$ este bisectoarea unghiului ABC.



• Demonstrați că semidreapta $[BS$ este într-adevăr bisectoarea triunghiului ABC.

• De ce raza celor două cercuri de la pasul ② trebuie să fie mai mare decât $\frac{MN}{2}$?

3 Cum poate fi construit un punct O în interiorul triunghiului ABC, egal depărtat de laturile triunghiului?

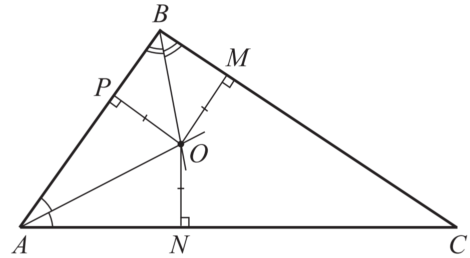


Explicăm

① Deoarece punctul O este egal depărtat de laturile AB şi AC, rezultă că punctul O aparține bisectoarei unghiului A.

② Similar, conchidem că punctul O aparține concomitent bisectoarelor unghiurilor B şi C. Prin urmare, punctul O aparține tuturor bisectoarelor unghiurilor triunghiului.

③ Este suficient să construim bisectoarele a două unghiuri ale triunghiului. Punctul lor de intersecție este punctul căutat.



Rețineți

Bisectoarele unghiurilor triunghiului sunt concurente într-un punct situat la aceeaşi distanță de laturile triunghiului.

Exerciții și probleme

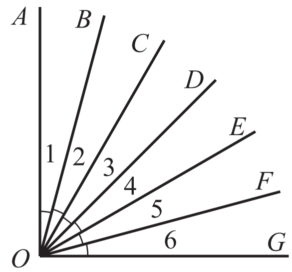
1. Unghiurile 1–6 din desen sunt congruente. Completați:

a) $[CO$ este bisectoarea unghiurilor ... .

b) Bisectoarea unghiului AOG este ... .

c) $\angle AOC \equiv ...,\quad \angle DOG \equiv ...$.

d) Dacă $m(\angle AOG) = 90°$, atunci $m(\angle BOD) = ...$.



2. Punctul X aparține bisectoarei unghiului AOB. Aflați distanța de la punctul X la semidreapta $[OB$, dacă distanța de la punctul X la semidreapta $[OA$ este egală cu:

a) $\sqrt{5}$ cm; b) 3,6 cm;

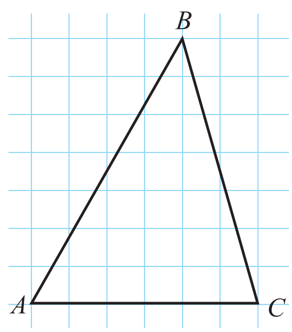
c) $|\sqrt{3} - 2|$ cm; d) 0,4 cm.

3. Punctul M este egal depărtat de laturile unghiului AOB şi aparține interiorului acestui unghi. Aflați $m(\angle AOM)$, dacă:

a) $m(\angle BOM) = 35°$; b) $m(\angle AOB) = 80°$;

c) $m(\angle BOM) = 40°26'$; d) $m(\angle AOB) = 17°$.

4. Reproduceți desenul şi construiți cu ajutorul riglei şi al compasului bisectoarea triunghiului ABC dusă din vârful: a) A; b) B; c) C.



5. Punctul M aparține bisectoarei unghiului AOB, iar punctele M_1 şi M_2 sunt proiecțiile ortogonale ale punctului M pe laturile unghiului AOB. Calculați:

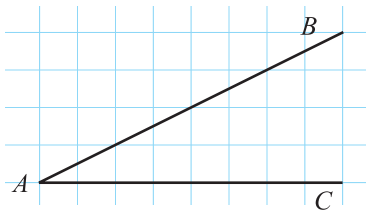
a) $m(\angle M_1OM)$, dacă $m(\angle OMM_2) = 42°$;

b) $m(\angle OMM_2)$, dacă $m(\angle AOB) = 70°$;

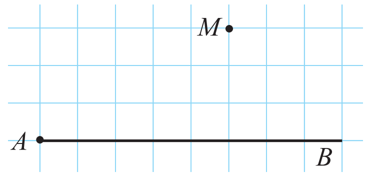
c) $m(\angle AOB)$, dacă $m(\angle OMM_1) = 65°$;

d) $m(\angle AOB)$, dacă $m(\angle M_1MM_2) = 160°$.

6. Reproduceți desenul şi construiți, cu ajutorul riglei şi al compasului, semidreapta $[AD$, astfel încât $[AB$ să fie bisectoarea unghiului CAD.



7. Reproduceți desenul şi construiți, cu ajutorul riglei şi al compasului, semidreapta $[AC$, astfel încât punctul M să fie egal depărtat de $[AB$ şi $[AC$.



8. Semidreapta $[OA$ este opusa bisectoarei unghiului BOC. Aflați:

a) $m(\angle AOB)$, dacă $m(\angle BOC) = 60°$; b) $m(\angle BOC)$, dacă $m(\angle AOC) = 165°$.

9. Segmentul AD este o bisectoare a triunghiului ABC şi $E \in [AC]$, astfel încât $[AE] \equiv [AB]$. Demonstrați că $BD = DE$.

10. Fie triunghiul ABC cu $[AB] \equiv [BC]$ şi $[AD]$ o bisectoare a triunghiului. Aflați:

a) $m(\angle CAD)$, dacă $m(\angle B) = 20°$; b) $m(\angle B)$, dacă $m(\angle BAD) = 25°$.

11. Punctul M este egal depărtat de laturile triunghiului echilateral ABC. Aflați $m(\angle AOB)$.

12. Semidreapta $[BE$ este bisectoare a unghiurilor ABC şi ADC (fig. 1). Demonstrați că triunghiurile ABC şi ADC sunt isoscele.

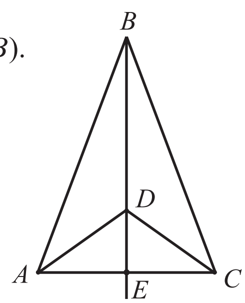


Fig. 1

13. Examinați figura 2. Demonstrați că $AC \perp M_1M_2$.

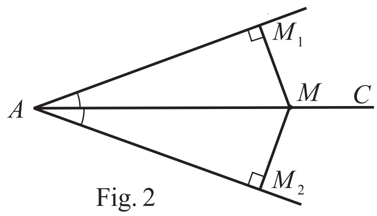


Fig. 2

14. Punctul O este egal depărtat de laturile triunghiului echilateral ABC (fig. 3) şi $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $K \in [AC]$, astfel încât $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OK \perp AC$. Aflați:

a) $m(\angle MON)$;

b) perimetrul triunghiului MNK, dacă $AC = 10$ cm.

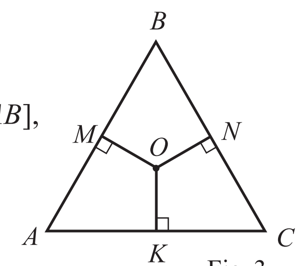
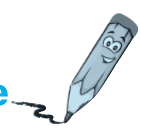


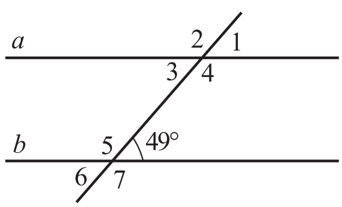
Fig. 3

Exerciții și probleme recapitulative

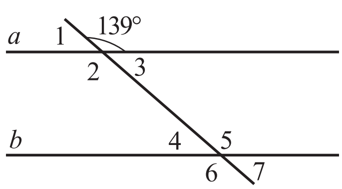


1. Dreptele a şi b sunt paralele. Aflați măsurile unghiurilor 1–7.

a)



b)



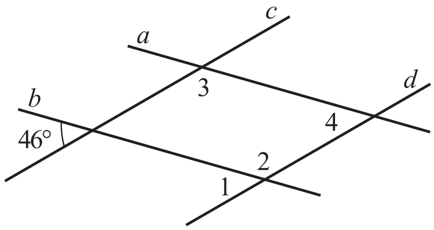
2. Fie două drepte paralele intersectate de o a treia dreaptă. Aflați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor interne de aceeași parte a secantei.

3. La intersecția a două drepte paralele cu o secantă unul dintre unghiurile interne de aceeași parte a secantei are măsura cu 50° mai mare decât celălalt. Aflați măsura unghiului mai mic.

4. Punctele A și D se află de aceeași parte a dreptei BC, $m(\angle ABC) = \alpha$, iar $m(\angle BCD) = \beta$. Aflați poziția relativă a dreptelor AB și CD, dacă:
a) $\alpha = 70°$, $\beta = 110°$; b) $\alpha = 65°$, $\beta = 115°$.

5. Diferența măsurilor a două unghiuri interne de aceeași parte a secantei (formate la intersecția a două drepte paralele cu o secantă) este de 4 ori mai mică decât suma lor. Aflați măsura unghiului mai mare.

6. Examinați desenul.
Aflați măsurile unghiurilor 1–4, dacă $a \parallel b$ și $c \parallel d$.

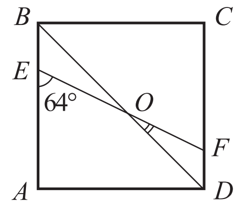


7. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle B) = 90°$. Distanța dintre mijlocul ipotenuzei și o catetă este egală cu 7,5 cm. Aflați lungimea celeilalte catete.

8. Punctul M este egal depărtat de laturile unghiului ABC. Aflați măsura unghiului ABM, dacă măsura unghiului ABC este egală cu 111°.

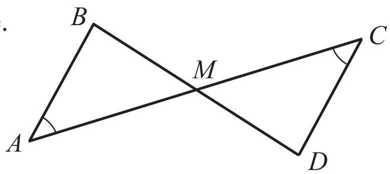
9. Punctul M este egal depărtat de extremitățile segmentului AB. Aflați $m(\angle MAB)$, dacă $m(\angle AMB) = 71°$.

10. Examinați desenul. $ABCD$ este pătrat. Aflați $m(\angle DOF)$, dacă $m(\angle AEO) = 64°$.

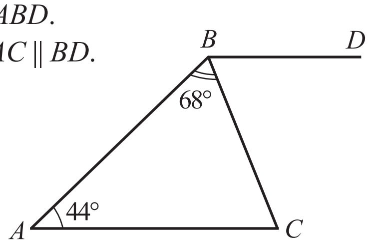


11. Două mediane ale unui triunghi sunt congruente. Demonstrați că triunghiul este isoscel.

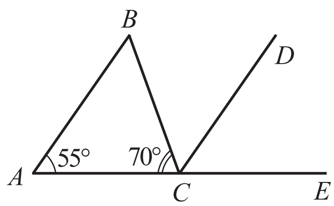
12. Examinați desenul. Demonstrați că $AB \parallel CD$.



13. Examinați desenul. Semidreapta $[BC$ este bisectoarea unghiului ABD.
Demonstrați că $AC \parallel BD$.

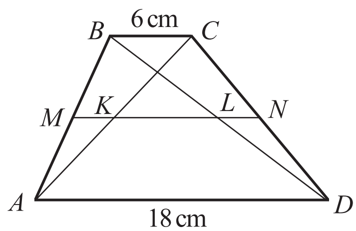


14. Examinați desenul. Semidreapta $[CD$ este bisectoarea unghiului BCE. Demonstrați că $AB \parallel CD$.



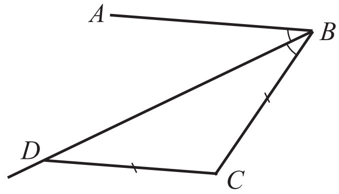
15. Fie $ABCD$ un trapez cu $AD \parallel BC$. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor neparalele ale trapezului. Aflați MN, dacă AD = 12 cm și BC = 4,8 cm.

16. Fie trapezul $ABCD$ cu $AD \parallel BC$ și AD = 18 cm, BC = 6 cm. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB și, respectiv, CD, $MN \cap AC = \{K\}$, $BD \cap MN = \{L\}$. Calculați MK, KL, LN.



17. Segmentele AB și CD se intersectează în mijlocurile lor. Demonstrați că dacă dreapta a este paralelă cu AC, atunci dreapta a este paralelă și cu BD.

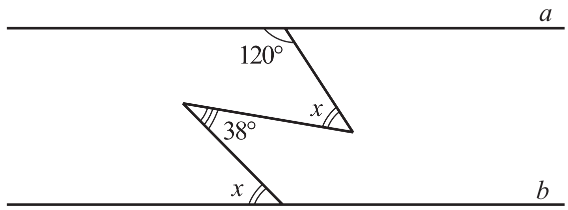
18. Examinați desenul. Semidreapta $[BD$ este o bisectoare a triunghiului ABC și $[BC]\equiv[CD]$. Demonstrați că $AB\parallel CD$.
Indicație. Construiți mediana CN a triunghiului BDC și demonstrați că triunghiurile CNB și CND sunt congruente.



19. Demonstrați că unghiurile cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare.

PENTRU CAMPIONI

20. Aflați măsura x a unghiurilor, dacă dreptele a și b sunt paralele.

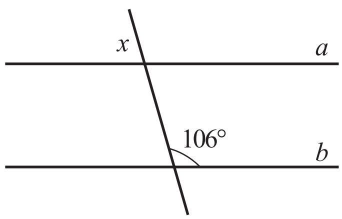


Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 minute

Varianta 1

1. Dreptele a și b sunt paralele. Calculați măsura unghiului x:



2. Diferența măsurilor a două unghiuri interne de aceeași parte a secantei care intersectează două drepte paralele este egală cu 36°.
Aflați măsura unghiului mai mare.

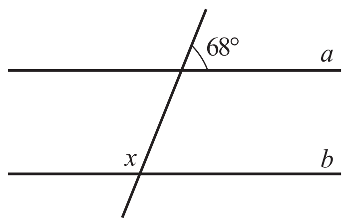
3. Aflați perimetrul triunghiului ABC, dacă perimetrul triunghiului MNK, unde M, N, K sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC, este egal cu 22,2 cm.

4. Aflați măsura unghiului format de semidreapta opusă bisectoarei unghiului A și o latură a acestui unghi, dacă $m(\angle A)=88°$.

5. Fie punctele A, B, C într-un sistem de axe ortogonale. Aflați coordonatele punctului C, dacă el aparține mediatoarei segmentului AB, cu $A(-3;4)$, $B(5;4)$, are ordonata pozitivă și este situat la distanța de 6 unități de segmentul AB.

Varianta 2

1. Dreptele a și b sunt paralele. Calculați măsura unghiului x:



2. Diferența măsurilor a două unghiuri externe de aceeași parte a secantei care intersectează două drepte paralele este egală cu 34°.
Aflați măsura unghiului mai mic.

3. Aflați perimetrul triunghiului ABC, dacă perimetrul triunghiului MNK, unde A, B, C sunt mijloacele laturilor triunghiului MNK, este egal cu 19,1 cm.

4. Aflați măsura unghiului format de semidreapta opusă bisectoarei unghiului A și o latură a acestui unghi, dacă $m(\angle A)=76°$.

5. Fie punctele A, B, C într-un sistem de axe ortogonale. Aflați coordonatele punctului C, dacă el aparține mediatoarei segmentului AB, cu $A(2;3)$, $B(2;-2)$, are ordonata pozitivă și este situat la distanța de 5 unități de segmentul AB.

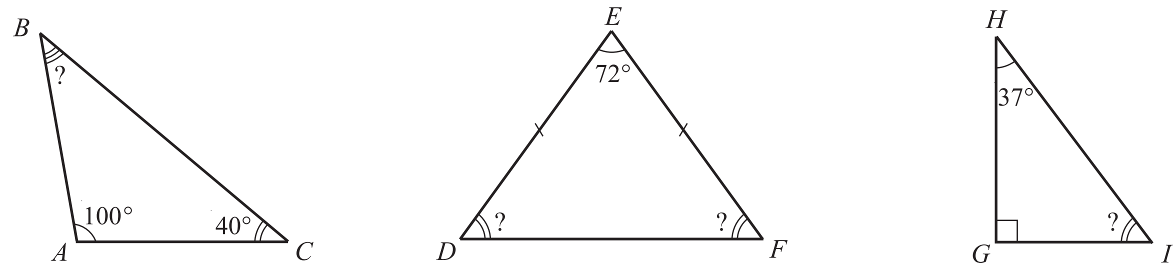
4
capitolul

Proprietăți ale triunghiurilor

Matematica este nici mai mult, nici mai puțin decât partea exactă a gândirii noastre.
L.E.J. Brouwer

§1. Unghi exterior al triunghiului

1 Examinați desenul și calculați măsurile necunoscute ale unghiurilor fiecărui triunghi.



Explicăm Deoarece suma măsurilor unghiurilor oricărui triunghi este 180°, obținem:

$m(\angle B) = 180° - m(\angle A) - m(\angle C) = 180° - 100° - \square° = \square°$.

$m(\angle D) = m(\angle F) = \dfrac{180° - \square°}{2} = \square°$.

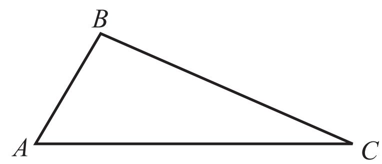
$m(\angle I) = 180° - \square° - \square° = \square°$.

Am utilizat până acum fără demonstrație proprietatea unghiurilor unui triunghi. Să demonstrăm această proprietate.

Teorema 1 Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°.

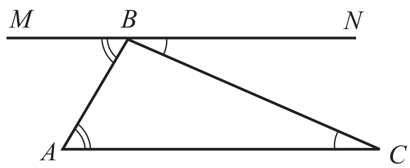
Ipoteză: ABC – triunghi.

Concluzie: $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180°$.



Demonstrație:

① Construim prin punctul B dreapta MN, paralelă cu dreapta AC.



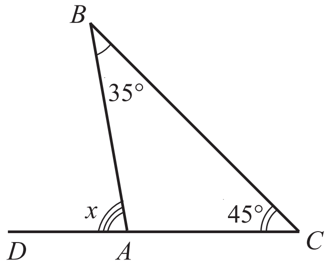
② $\angle C \equiv \angle CBN$, $\angle A \equiv \angle ABM$ (unghiuri alterne interne formate de secanta BC cu dreptele paralele MN și AC).

③ $m(\angle MBN) = 180°$ (unghi alungit).

④ $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) \overset{②}{=} m(\angle ABM) + m(\angle B) + m(\angle CBN) =$

$\overset{③}{=} m(\angle MBN) = 180°$, c.c.t.d. ►

2 Aflați măsura unghiului notată cu x:



Explicăm

Unghiurile BAD şi BAC sunt adiacente suplementare:

$$m(\angle BAD) = 180° - m(\angle BAC); \qquad (1)$$

$$m(\angle BAC) \overset{T_1}{=} 180° - m(\angle B) - m(\angle C). \qquad (2)$$

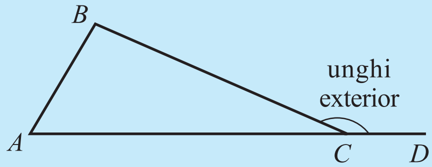
Substituind (2) în (1), obținem:

$$m(\angle BAD) = 180° - [180° - m(\angle B) - m(\angle C)] = \ldots$$

$$m(\angle BAD) = \ldots° + \ldots° = \ldots°.$$

Definiție

Unghi exterior al triunghiului de la vârful dat se numeşte unghiul suplement şi adiacent cu unghiul triunghiului de la acest vârf.



Teorema 2

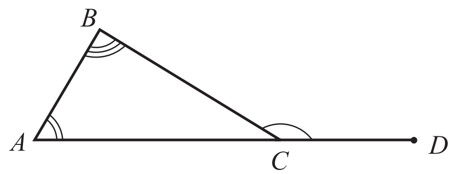
Măsura unghiului exterior al triunghiului este egală cu suma măsurilor unghiurilor triunghiului neadiacente lui.

$$m(\angle BCD) = m(\angle A) + m(\angle B).$$

Să demonstrăm teorema 2.

Ipoteză: ΔABC, $D \in [AC$, $C \in [AD]$.

Concluzie: $m(\angle BCD) = m(\angle A) + m(\angle B)$.



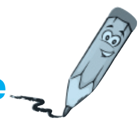
Demonstrație:

① $m(\angle ACB) = 180° - m(\angle BCD)$, deoarece $\angle ACB$ şi $\angle BCD$ – unghiuri adiacente suplementare.

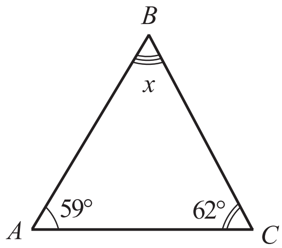
② $m(\angle ACB) = 180° - [m(\angle A) + m(\angle B)]$, deoarece toate cele trei unghiuri aparțin aceluiaşi triunghi ABC.

③ Din ① şi ② rezultă că $180° - m(\angle BCD) = 180° - [m(\angle A) + m(\angle B)]$, adică $m(\angle BCD) = m(\angle A) + m(\angle B)$ c.c.t.d. ►

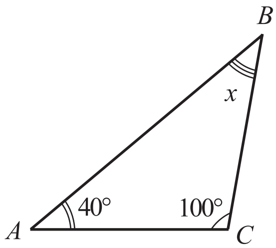
Exerciții și probleme



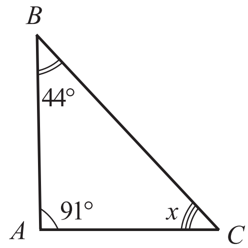
1. Examinați desenul şi calculați măsura unghiului notată cu x.



a)

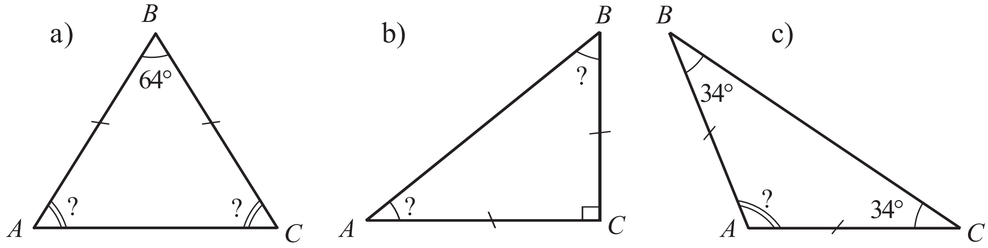


b)

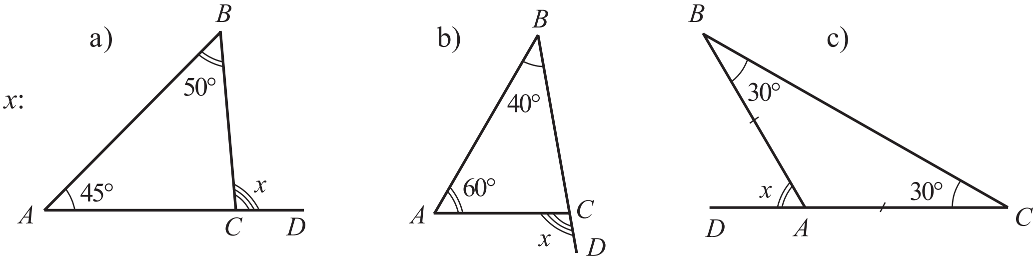


c)

2. Calculați măsurile necunoscute ale unghiurilor triunghiului ABC.



3. Calculați măsura unghiului notată cu x:



4. Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale unui triunghi echilateral.

5. Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale unui triunghi dreptunghic isoscel.

6. Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale unui triunghi dreptunghic cu un unghi ascuțit de 20°.

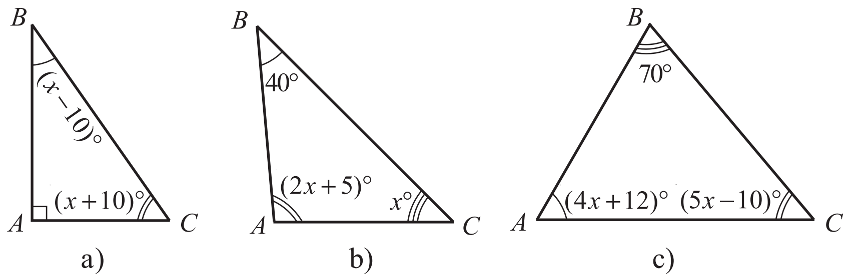
7. Aflați suma măsurilor unghiurilor exterioare ale oricărui triunghi.

8. Unghiurile exterioare ale unui triunghi au măsurile de 100°, 110°, 150°. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului.

---

9. Măsurile a două dintre unghiurile exterioare ale unui triunghi sunt egale cu 95° și 130°. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului.

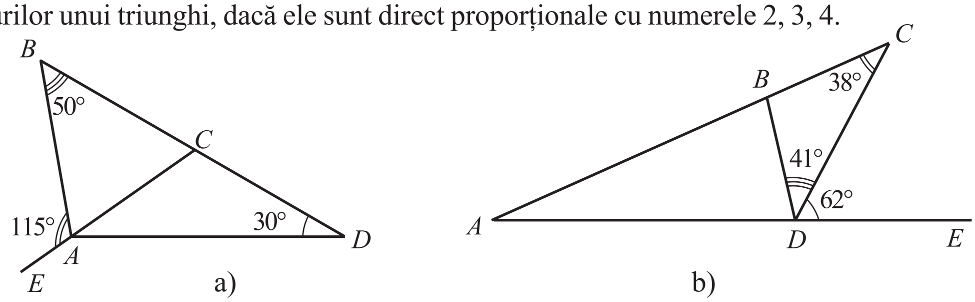
10. Examinați desenul și calculați măsurile necunoscute ale unghiurilor triunghiului ABC.



11. Un unghi al triunghiului isoscel are măsura de 92°. Aflați măsurile celorlalte două unghiuri.

12. Aflați măsurile unghiurilor unui triunghi, dacă ele sunt direct proporționale cu numerele 2, 3, 4.

13. Examinați desenul și aflați măsura unghiului CAD.



14. Aflați măsurile unghiurilor unui triunghi, dacă măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului sunt direct proporționale cu numerele 3, 4, 5.

---

15. Demonstrați că nu există un triunghi astfel încât toate sumele măsurilor oricăror două unghiuri ale triunghiului să fie:
a) mai mari decât 120°;
b) mai mici decât 120°.

16. Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporționale cu 3 numere naturale consecutive. Demonstrați că unul dintre unghiuri este de 60°.
Indicație. Utilizați proprietatea $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.

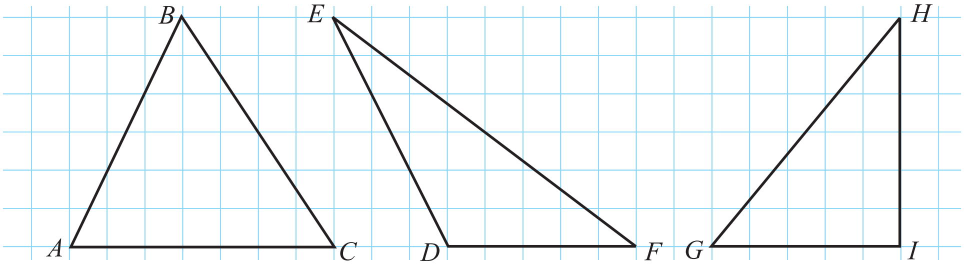
§2. Proprietăți ale liniilor importante ale triunghiului

1 Completați, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată.

a) Punctul de intersecție a mediatoarelor laturilor unui triunghi este egal depărtat de ... .

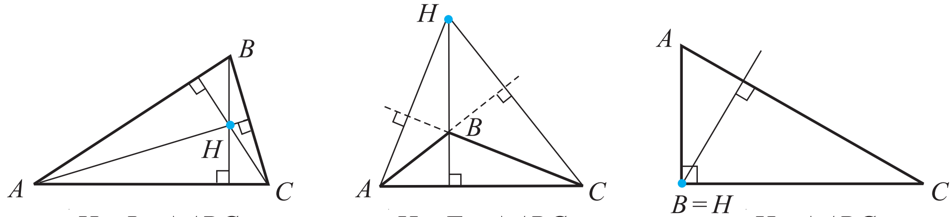
b) Punctul de intersecție a bisectoarelor unui triunghi este egal depărtat de ... .

2 Copiați şi construiți înălțimile fiecărui triunghi.

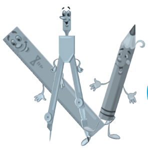


• Observați poziția punctului de intersecție a dreptelor suport ale înălțimilor triunghiului față de triunghi. Formulați ipoteze şi verificați-le pe alte triunghiuri de acelaşi tip (ascuțitunghice, obtuzunghice, dreptunghice).

Dreptele suport ale înălțimilor unui triunghi sunt concurente într-un punct, numit **ortocentru** al triunghiului (notat, de regulă, cu H).

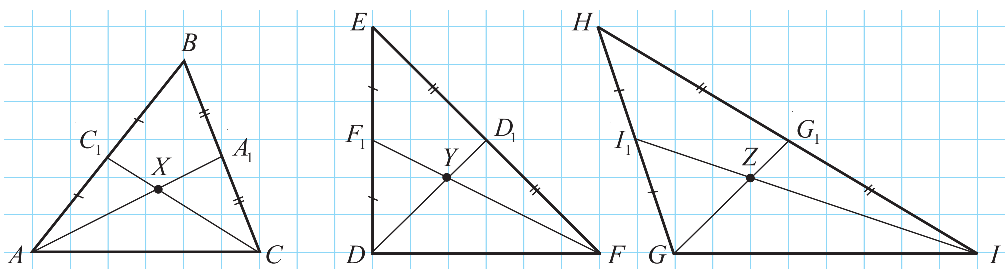


$H \in \text{Int}\,\Delta ABC$ $\quad H \in \text{Ext}\,\Delta ABC$ $\quad H \in \Delta ABC$



LUCRARE PRACTICĂ

Examinați desenul. Cu ajutorul riglei, determinați dacă mediana nereprezentată a fiecărui triunghi trece prin punctul de intersecție a celor două mediane construite. Trageți concluzia.



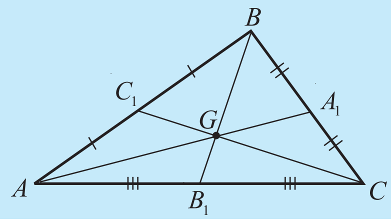
• Punctul de intersecție a medianelor împarte fiecare mediană în două segmente. Cu ajutorul compasului, determinați de câte ori segmentul mai mic se conține în segmentul mai mare. Trageți concluzia.

Rețineți

Medianele unui triunghi sunt concurente într-un punct, numit **centrul de greutate** al triunghiului (notat, de regulă, cu G).

Teoremă

Centrul de greutate al triunghiului se află pe fiecare mediană de două ori mai departe de un vârf al triunghiului decât de mijlocul laturii opuse.

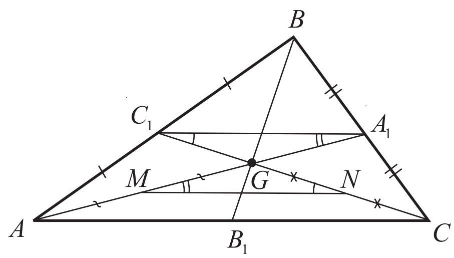


Să demonstrăm teorema.

Ipoteză: ΔABC, $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ – medianele triunghiului ABC.
$[AA_1]\cap[BB_1]\cap[CC_1]=\{G\}$.

Concluzie: $AG=2A_1G$, $BG=2B_1G$, $CG=2C_1G$.

Demonstrație:



① Fie M mijlocul segmentului AG, iar N – mijlocul segmentului CG.

② $[A_1C_1]$ este linie mijlocie a triunghiului ABC.
Aşadar, $A_1C_1 \parallel AC$ şi $A_1C_1=\dfrac{AC}{2}$ (1).
$[MN]$ este linia mijlocie a triunghiului AGC.
Prin urmare, $MN \parallel AC$ şi $MN=\dfrac{AC}{2}$ (2).

③ Din (1) şi (2) rezultă că $[MN]\equiv[A_1C_1]$ şi $MN \parallel A_1C_1$ (3).

④ $\angle MNG \equiv \angle A_1C_1G$ (unghiuri alterne interne formate de secanta NC_1 cu dreptele paralele MN şi A_1C_1) (4).

⑤ $\angle NMG \equiv \angle C_1A_1G$ (unghiuri alterne interne formate de secanta MA_1 cu dreptele paralele MN şi A_1C_1) (5).

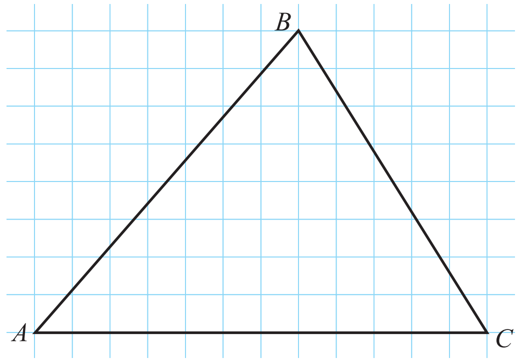
⑥ Din (3)–(5) rezultă că $\Delta A_1C_1G \equiv \Delta MNG$ (ULU).
Prin urmare, $[A_1G]\equiv[MG] \Rightarrow AG=2A_1G$,
$[C_1G]\equiv[NG] \Rightarrow CG=2C_1G$.
Similar, se demonstrează că $BG=2B_1G$, c.c.t.d. ►

Observație

Teorema poate fi formulată şi astfel:
Punctul de intersecție a medianelor triunghiului împarte fiecare mediană în raportul 2 : 1 (considerând de la vârf).

Exerciții și probleme

1. Reproduceți desenul și construiți:
a) medianele triunghiului;
b) înălțimile triunghiului;
c) bisectoarele triunghiului.



2. *Adevărat* sau *fals*?
a) Centrul de greutate al unui triunghi este punctul de intersecție a bisectoarelor triunghiului.
b) Medianele unui triunghi sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului.
c) Bisectoarele unui triunghi sunt concurente în centrul cercului înscris în triunghi.
d) Ortocentrul unui triunghi este punctul de intersecție a mediatoarelor laturilor triunghiului.

3. Corectați propozițiile false de la exercițiul 2.

4. Substituiți, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.
a) Ortocentrul unui triunghi ______ aparține exteriorului triunghiului.
b) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC și AA_1 este o mediană a triunghiului, atunci
$\frac{AA_1}{A_1G} =$ ______ , $\frac{AA_1}{AG} =$ ______ .
c) Dacă diametrul cercului care conține vârfurile unui triunghi este de 10 cm, atunci distanța de la vârful triunghiului până la punctul de intersecție a mediatoarelor triunghiului este egală cu ______ cm.

5. Aflați tipul triunghiului, dacă punctul de intersecție a mediatoarelor lui aparține:
a) triunghiului;
b) interiorului triunghiului;
c) exteriorului triunghiului.

6. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic are lungimea de 6 cm. Aflați raza cercului care conține vârfurile acestui triunghi.

7. Medianele AM și BN ale triunghiului ABC se intersectează în punctul O. Calculați:
a) AO și BO, dacă $AM = 9$ cm, $BN = 12$ cm;
b) AM și BN, dacă $AO = 4\sqrt{3}$ cm, $BO = 6\sqrt{3}$ cm;
c) OM și ON, dacă $AM = 12$ cm, $BN = 15$ cm;
d) AO și BO, dacă $OM = \sqrt{5}$ cm, $ON = \sqrt{6}$ cm.

8. Punctul M este egal depărtat de laturile triunghiului ABC. Aflați:
a) măsurile unghiurilor triunghiului ABC, dacă $m(\angle MAC) = 30°$, $m(\angle ACM) = 40°$;
b) $m(\angle BAM)$ și $m(\angle BCM)$, dacă $m(\angle BAC) = 74°$, $m(\angle ABC) = 70°$;
c) $m(\angle AMC)$ și $m(\angle BMC)$, dacă $m(\angle BAC) = 46°$, $m(\angle ABC) = 100°$;
d) măsurile unghiurilor triunghiului ABC, dacă $m(\angle AMB) = 100°$, $m(\angle BMC) = 130°$.

9. Segmentul AM este o înălțime a triunghiului ascuțitunghic ABC.
Aflați măsurile unghiurilor formate de $[AM$ cu laturile AB și AC ale triunghiului, dacă:
a) $m(\angle B) = 70°$, $m(\angle C) = 50°$;
b) măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului de la vârfurile B și C sunt egale cu 120° și, respectiv, cu 110°.

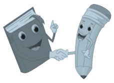
10. Fie ABC un triunghi isoscel cu $[AB]\equiv[AC]$, $[AM]$ și $[CN]$ – două înălțimi ale triunghiului. Calculați:

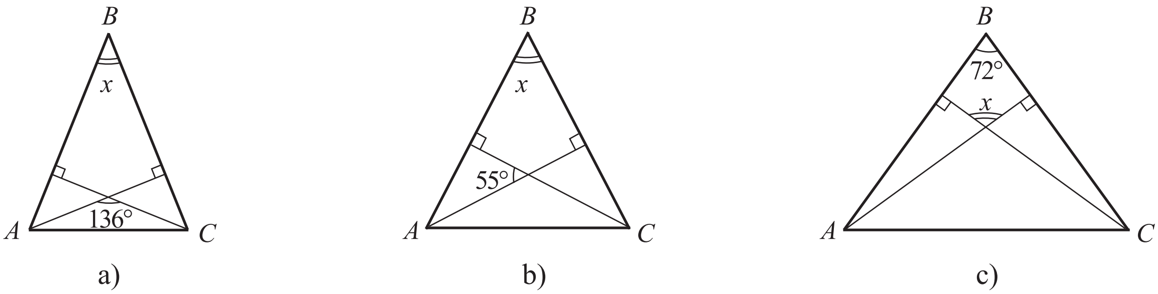
a) măsurile unghiurilor formate de $[AM$ cu $[AB$ şi $[AC$, dacă $m(\angle B)=78°$;

b) măsurile unghiurilor formate de $[CN$ cu $[CA$ şi $[CB$, dacă $m(\angle A)=50°$;

c) $m(\angle B)$, dacă $m(\angle MAC)=27°$;

d) $m(\angle A)$, dacă $m(\angle MCN)=31°$.

11.  ***Lucrați în perechi!*** Examinați desenul $([AB]\equiv[BC])$ şi calculați măsura unghiului notată cu x.



12. Fie triunghiul ABC şi $[AM]$, $[CN]$ – mediane ale triunghiului. Calculați:

a) perimetrul triunghiului BMN, dacă perimetrul triunghiului ABC este egal cu $8\sqrt{7}$ cm;

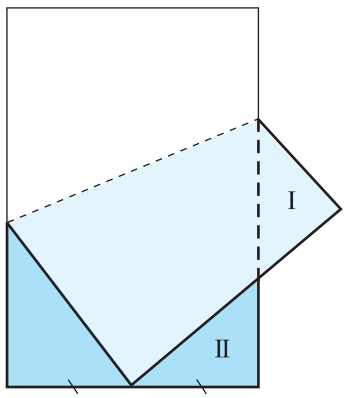
b) perimetrul patrulaterului $ANMC$, dacă perimetrul triunghiului ABC este egal cu 28 cm şi $AC=10$ cm.

13. Mediana AM a triunghiului ABC este congruentă cu segmentul BM. Demonstrați că măsura unui unghi al triunghiului ABC este egală cu suma măsurilor celorlalte două unghiuri ale acestui triunghi.

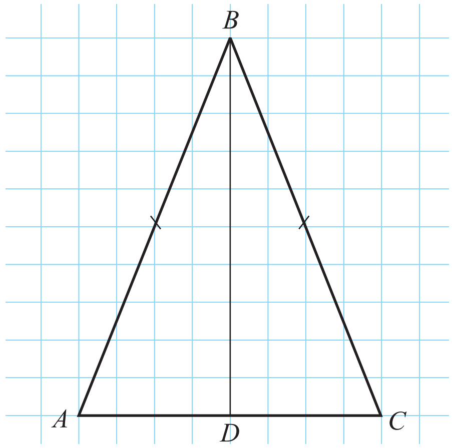
14. Fie triunghiul ABC cu $[AB]\equiv[AC]$. Punctele M şi N aparțin laturii BC, astfel încât $[BM]\equiv[CN]$. Aflați $m(\angle MAN)$, dacă $m(\angle BMA)=115°$.

MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

15. O foaie drepunghiulară a fost îndoită astfel încât colțul stânga-sus a coincis cu mijlocul laturii de jos (a se vedea desenul). S-au obținut două triunghiuri, I şi II, congruente. Aflați înălțimea foii, dacă lățimea ei (latura mai scurtă) este egală cu 16 cm.



§3. Proprietăți ale triunghiului isoscel



1 Examinați desenul. Completați cu una dintre noțiunile *mediană*, *bisectoare*, *înălțime*, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată.

Segmentul *BD* este o ______________ a triunghiului isoscel *ABC*.

• Trageți concluzia.

Teorema 1 Mediana, bisectoarea și înălțimea construite din vârful opus bazei triunghiului isoscel coincid.

Să demonstrăm teorema 1.

Ipoteză:	*Concluzie*:
ΔABC, $[AB] \equiv [CB]$.	
Dacă $[BD]$ este mediană,	atunci $[BD]$ este bisectoare și înălțime.
Dacă $[BD]$ este bisectoare,	atunci $[BD]$ este înălțime și mediană.
Dacă $[BD]$ este înălțime,	atunci $[BD]$ este mediană și bisectoare.

Demonstrație:

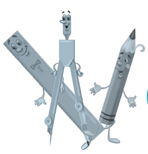
Dacă $[BD]$ este mediană, atunci $\Delta ABD \equiv \Delta CBD$ (Criteriul LLL).
Dacă $[BD]$ este bisectoare, atunci $\Delta ABD \equiv \Delta CBD$ (Criteriul LUL).
Dacă $[BD]$ este înălțime, atunci $\Delta ABD \equiv \Delta CBD$ (Criteriul IC).
Concluzia teoremei rezultă din congruența triunghiurilor *ABD* și *CBD*, c.c.t.d. ►

Demonstrând teorema 1, am arătat că triunghiurile *ABD* și *CBD* sunt congruente. Prin urmare, $\angle A \equiv \angle C$.

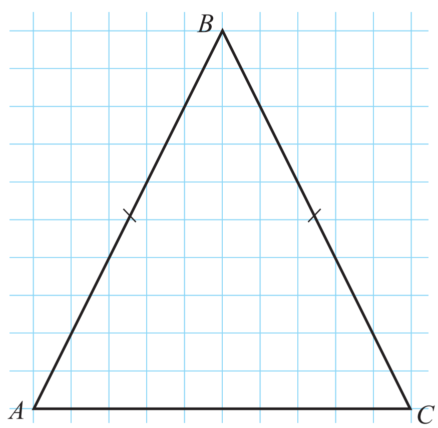
Teorema 2 Unghiurile alăturate bazei unui triunghi isoscel sunt congruente.

Observație Reciproca teoremei 2 de asemenea este o teoremă.

• Formulați și demonstrați reciproca teoremei 2.



LUCRARE PRACTICĂ



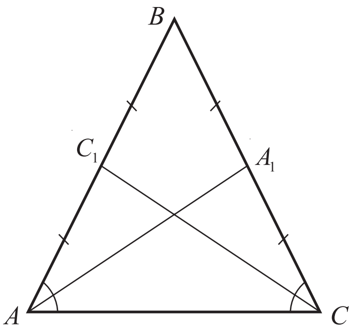
1. Reproduceți desenul.

2. Construiți din vârfurile *A* și *C* înălțimile, medianele și bisectoarele triunghiului.
Comparați lungimile:
a) medianelor;
b) bisectoarelor;
c) înălțimilor.
Trageți concluzia.

Teorema 3 Medianele construite din vârfurile unghiurilor alăturate bazei triunghiului isoscel sunt congruente.

Teorema 4 Bisectoarele construite din vârfurile unghiurilor alăturate bazei triunghiului isoscel sunt congruente.

Teorema 5 Înălțimile construite din vârfurile unghiurilor alăturate bazei triunghiului isoscel sunt congruente.



Să demonstrăm teorema 3.

Ipoteză: ΔABC, $[AB]\equiv[CB]$, $[AA_1]$, $[CC_1]$ – mediane ale triunghiului ABC.

Concluzie: $[AA_1]\equiv[CC_1]$.

Demonstrație:

$\Delta AC_1C \equiv \Delta CA_1A$ (Criteriul LUL: $[AC]$ – latură comună, $[AC_1]\equiv[CA_1]$ conform ipotezei, $m(\angle A)\equiv m(\angle C)$ conform teoremei 2).

Prin urmare, $[AA_1]\equiv[CC_1]$, c.c.t.d. ▶

• Demonstrați teoremele 4 și 5.

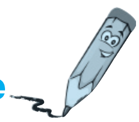
Observație Reciprocele teoremelor 3–5, de asemenea, sunt teoreme.

• Formulați și demonstrați reciprocele teoremelor 3–5.

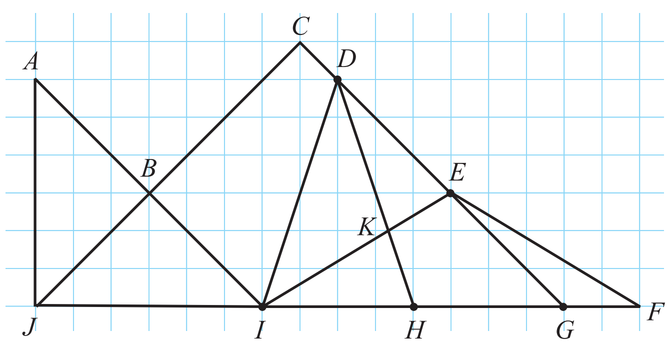
Criteriile triunghiului isoscel

Un triunghi este isoscel dacă îndeplinește cel puțin una dintre condițiile:
1) triunghiul are două unghiuri congruente;
2) o mediană și o bisectoare ale triunghiului coincid;
3) o mediană și o înălțime ale triunghiului coincid;
4) o bisectoare și o înălțime ale triunghiului coincid;
5) două mediane ale triunghiului sunt congruente;
6) două bisectoare ale triunghiului sunt congruente;
7) două înălțimi ale triunghiului sunt congruente.

Exerciții și probleme



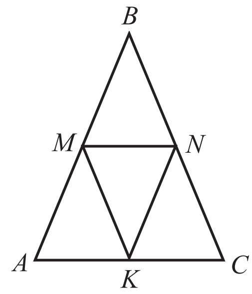
1. Examinați desenul și precizați triunghiurile isoscele.



2. Unghiurile A şi B ale triunghiului ABC sunt congruente. Calculați:
a) AC, dacă $BC = 6$ cm;
b) BC, dacă $AC + BC = 11$ cm;
c) $2AC$, dacă $3BC = 15$ cm;
d) $2AC - BC$, dacă $AC = \sqrt{5}$ cm.

3. Fie $[BM]$ o mediană a triunghiului isoscel ABC cu baza AC. Calculați:
a) $m(\angle ABC)$, dacă $m(\angle ABM) = 25°$;
b) $m(\angle A)$, dacă $m(\angle MBC) = 28°$;
c) $m(\angle C)$, dacă $m(\angle ABM) + m(\angle AMB) = 130°$;
d) $m(\angle ABM)$, dacă $m(\angle C) + m(\angle BMC) = 124°$.

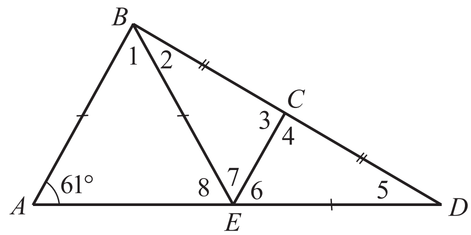
4. În desen, $[AB] \equiv [BC]$ şi punctele M, N, K sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC.
Precizați:
a) segmentele congruente din desen;
b) unghiurile congruente.



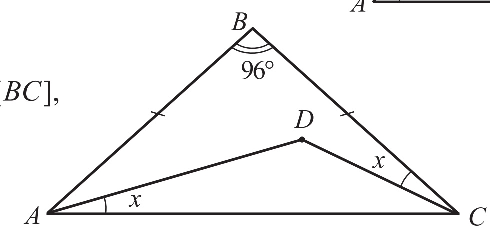
5. Examinați desenul şi enunțul problemei **4**. Aflați:
a) $m(\angle MKN)$, dacă $m(\angle A) = 44°$;
b) $m(\angle B)$, dacă $m(\angle KMN) = 55°$;
c) $m(\angle A)$, dacă $m(\angle B) + m(\angle MKN) = 80°$;
d) $m(\angle C)$, dacă $m(\angle A) + m(\angle KMN) = 88°$.

6. Examinați desenul şi enunțul problemei **4**. Calculați:
a) MN, dacă $AC + MN = 18$ cm;
b) AM, dacă $MB + NC = 9$ cm;
c) BN, dacă $AM + MK = 4\sqrt{3}$ cm;
d) KN, dacă $AB + BC = 8,(4)$ cm.

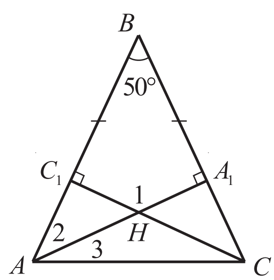
7.  ***Lucrați în perechi!*** Examinați desenul.
Ştiind că $[AB] \equiv [BE] \equiv [DE]$, $[BC] \equiv [CD]$, $m(\angle A) = 61°$, calculați măsurile unghiurilor 1–8.



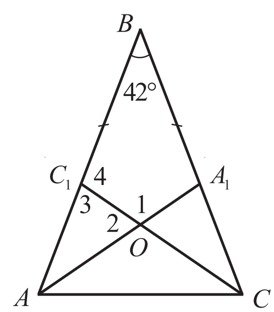
8. Examinați desenul. Ştiind că $[AB] \equiv [BC]$, $m(\angle B) = 96°$, calculați $m(\angle ADC)$.



9. Examinați desenul. Se ştie că $[AB] \equiv [BC]$, $[AA_1]$ şi $[CC_1]$ sunt înălțimi ale triunghiului ABC, $m(\angle B) = 50°$. Calculați măsurile unghiurilor 1–3.

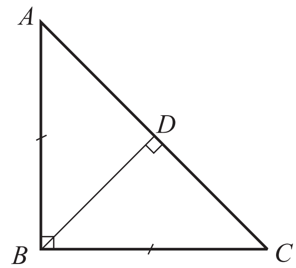


10. Examinați desenul. Se ştie că $[AB] \equiv [BC]$, $[AA_1]$ şi $[CC_1]$ sunt bisectoare ale triunghiului ABC, $m(\angle B) = 42°$. Calculați măsurile unghiurilor 1–4.



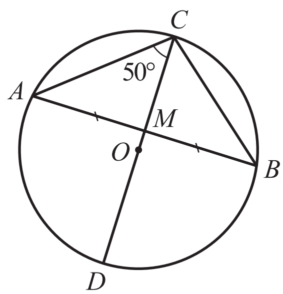
11. Aflați lungimile laturilor unui triunghi isoscel, dacă:
a) perimetrul triunghiului este de 28 cm și lungimea unei laturi este cu 8 cm mai mică decât lungimea celeilalte;
b) perimetrul triunghiului este de 42 cm și lungimea unei laturi este de 2,5 ori mai mare decât lungimea celeilalte.

12. Triunghiul ABC din desen este dreptunghic isoscel $(m(\angle B) = 90°$, $[AB] \equiv [BC])$, $[BD]$ este o înălțime a triunghiului ABC.
Aflați BD, dacă $AC = 4\sqrt{2}$ cm.

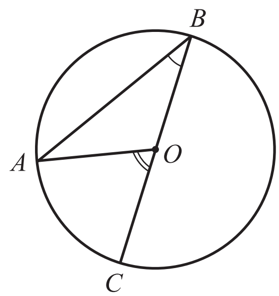


13. Diametrul AB al unui cerc intersectează în punctul M o coardă CD a cercului sub un unghi de 90°. Aflați CM și DM, dacă $CD = 18$ cm.

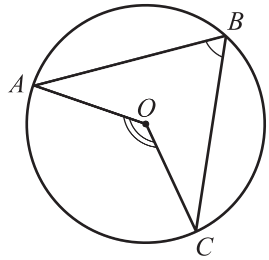
14. Diametrul CD al unui cerc intersectează coarda AB în mijlocul ei – punctul M (vezi desenul). Aflați $m(\angle ABC)$, dacă $m(\angle ACM) = 50°$.



15. $[BC]$ este un diametru al cercului de centru O și punctul A aparține acestui cerc (vezi desenul). Demonstrați că $m(\angle AOC) = 2m(\angle ABC)$.

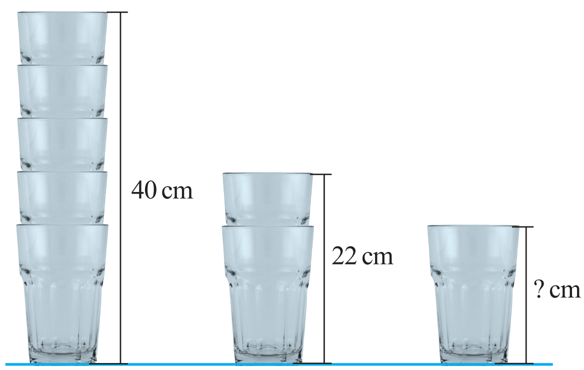


16. Punctele A, B, C aparțin cercului de centru O și punctul O este situat între laturile unghiului AOB (vezi desenul). Demonstrați că $m(\angle AOC) = 2m(\angle ABC)$.
Indicație. Utilizați rezultatul problemei **15**.

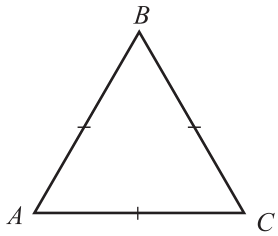


MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

17. Examinați imaginea și aflați înălțimea paharului.



§4. Proprietăți ale triunghiului echilateral



1 Folosind instrumentele respective şi proprietățile triunghiului isoscel, formulați cât mai multe propoziții adevărate despre elementele şi liniile importante ale triunghiului echilateral.

Exemplu: Medianele triunghiului echilateral sunt congruente.

Observație Un triunghi echilateral este în acelaşi timp şi triunghi isoscel.

Teorema 1

Dacă un triunghi este echilateral, atunci unghiurile lui sunt congruente, având măsura egală cu $60°$.

Să demonstrăm teorema 1.

Ipoteză: ΔABC – echilateral.

Concluzie: $\angle A \equiv \angle B \equiv \angle C$, $m(\angle A) = 60°$.

Demonstrație:

① Deoarece $[AB] \equiv [CB]$, rezultă că $\angle A \equiv \angle C$ (conform teoremei despre unghiurile alăturate bazei triunghiului isoscel).

② Deoarece $[AC] \equiv [BC]$, rezultă că $\angle A \equiv \angle B$.

③ Din ① şi ② rezultă că $\angle A \equiv \angle B \equiv \angle C$. Prin urmare, $m(\angle A) = 180° : 3 = 60°$,

c.c.t.d. ►

Teorema 2 (reciproca teoremei 1)

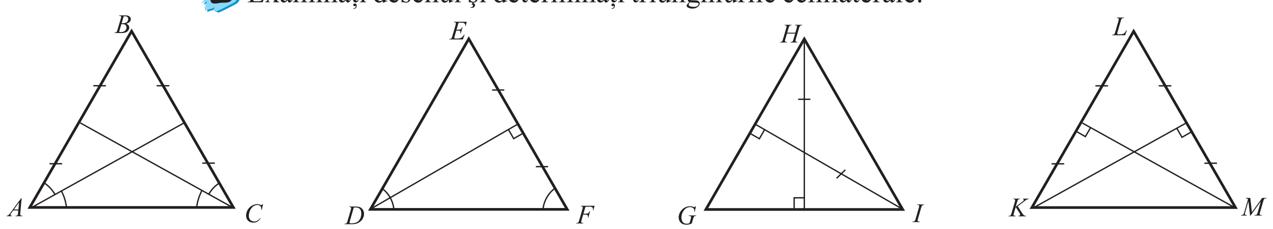
Dacă unghiurile unui triunghi sunt congruente, atunci acest triunghi este echilateral.

• Demonstrați teorema 2.

Teorema 3

Mediana, bisectoarea, înălțimea construite din acelaşi vârf al triunghiului echilateral coincid. Medianele, bisectoarele şi înălțimile triunghiului echilateral sunt congruente.

2 Examinați desenul şi determinați triunghiurile echilaterale.



Teorema 4

Dacă două mediane ale unui triunghi sunt şi bisectoare ale acestui triunghi, atunci triunghiul este echilateral.

Teorema 5

Dacă două mediane ale unui triunghi sunt şi înălțimi ale acestui triunghi, atunci triunghiul este echilateral.

Teorema 6

Dacă două înălțimi ale unui triunghi sunt şi bisectoare ale acestui triunghi, atunci triunghiul este echilateral.

• Demonstrați teoremele 4–6.

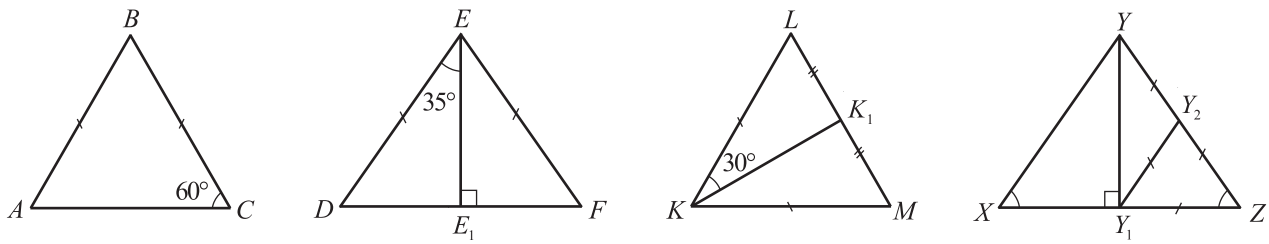
Criteriile triunghiului echilateral

Un triunghi este echilateral dacă îndeplineşte cel puțin una dintre condițiile:

1) triunghiul are unghiurile congruente;
2) două mediane ale triunghiului sunt şi bisectoare ale acestui triunghi;
3) două mediane ale triunghiului sunt şi înălțimi ale acestui triunghi;
4) două bisectoare ale triunghiului sunt şi înălțimi ale acestui triunghi;
5) medianele triunghiului sunt congruente;
6) bisectoarele triunghiului sunt congruente;
7) înălțimile triunghiului sunt congruente;
8) este isoscel cu unghi de 60°.

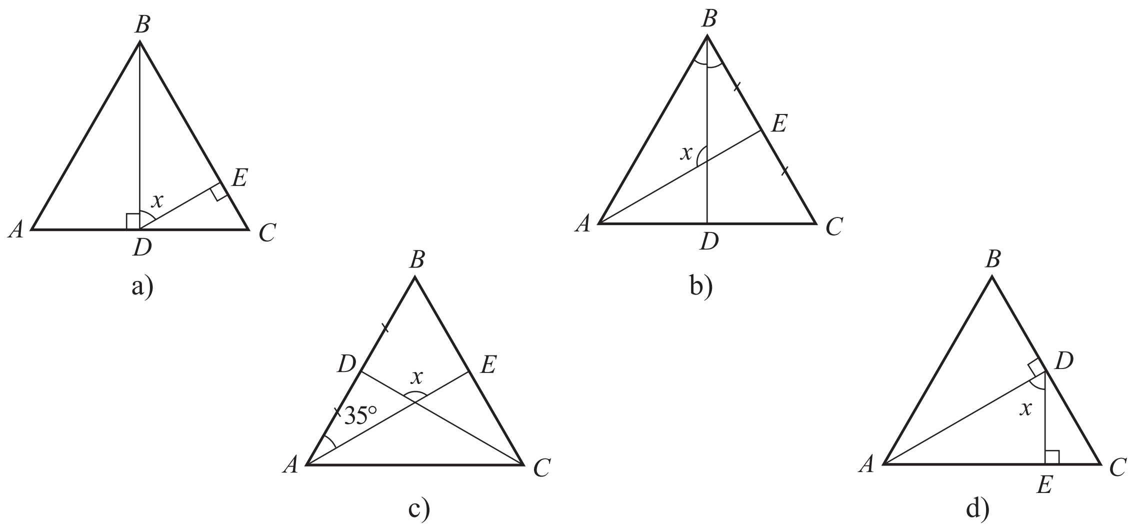
Exerciții și probleme

1. Examinați desenul şi selectați triunghiurile echilaterale.



2. Utilizând rigla şi compasul, construiți un triunghi echilateral cu latura de: a) 4 cm; b) 5 cm.

3. Triunghiul ABC din desen este echilateral. Calculați măsura unghiului notată cu x.



4. Calculați perimetrul unui triunghi echilateral cu linia mijlocie de $\frac{4}{\sqrt{3}}$ cm.

5. Aria triunghiului echilateral ABC este egală cu 60 cm^2.
Aflați aria triunghiului cu vârfurile mijloacele laturilor triunghiului ABC.

6. Înălțimea unui triunghi echilateral este de 8 cm, iar d este distanța dintre punctul M şi laturile triunghiului. Aflați $R+d$, unde R este raza cercului care conține vârfurile triunghiului.

7. Înălțimea unui triunghi echilateral este de 9 cm. Aflați raza cercului care conține vârfurile triunghiului.

8. Înălțimea unui triunghi echilateral este de 12 cm. Aflați distanța de la punctul egal depărtat de laturile triunghiului până la aceste laturi.

9. Raza cercului care conține laturile unui triunghi echilateral este de 5 cm. Aflați înălțimea triunghiului.

10. Punctul M se află la distanța de 7 cm de laturile unui triunghi echilateral. Aflați înălțimea triunghiului.

11. Înălțimea triunghiului echilateral ABC este de 8,4 cm. Aflați înălțimea triunghiului AOB dusă din vârful O, unde O este egal depărtat de laturile triunghiului ABC.

12. Aflați măsurile unghiurilor formate la intersecția unei bisectoare şi a unei mediane ale triunghiului echilateral.

13. O înălțime şi o mediană ale triunghiului echilateral ABC se intersectează în punctul M. Aflați aria triunghiului AMB, dacă aria triunghiului ABC este de 24 cm^2.

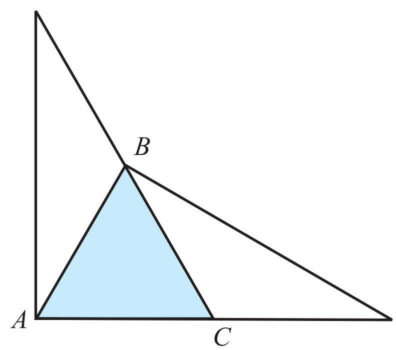
14. Mediana AA_1 şi bisectoarea BB_1 ale triunghiului echilateral ABC se intersectează în punctul M. Aflați aria triunghiului ABC, dacă aria triunghiului A_1BM este de 6 cm^2.

15. Bisectoarea AA_1 şi înălțimea CC_1 ale triunghiului echilateral ABC se intersectează în punctul M. Aflați aria triunghiului MA_1C_1, dacă aria triunghiului ABC este de 96 cm^2.

16. Fie ABC un triunghi isoscel cu $[AB]\equiv[BC]$. Punctele M şi N aparțin exteriorului triunghiului ABC, astfel încât triunghiurile ABM şi BCN sunt echilaterale. Demonstrați că $MN \parallel AC$.

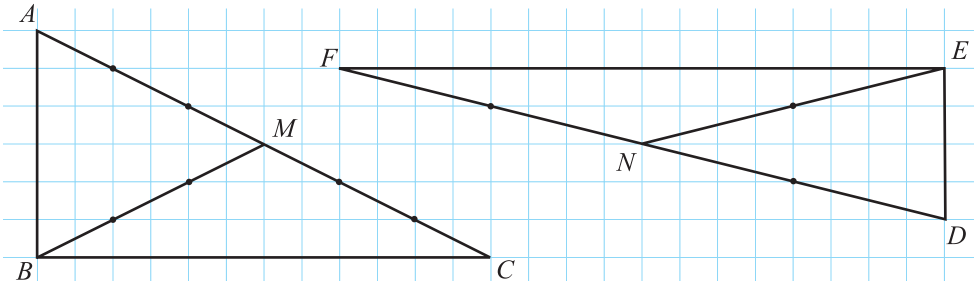
MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

17. Două bucăți identice de hârtie, fiecare de forma unui triunghi dreptunghic, au fost suprapuse astfel, încât vârful unghiului drept al unuia a nimerit pe o latură a celuilalt triunghi. Aflați perimetrul triunghiului colorat, dacă $AB = 12$ cm.



§5. Proprietăți ale triunghiului dreptunghic

• Examinați desenul.



Completați:

a) Triunghiurile ABC şi DEF sunt triunghiuri ___ .

b) ___ şi ___ sunt catetele triunghiului ABC.

c) $[FD]$ este ___ triunghiului DEF.

d) $[BM]$ este ___ triunghiului ABC.

$[BM] \equiv$ ___ , $[BM] \equiv$ ___ .

e) ___ este o mediană a triunghiului DEF. $[FN] \equiv$ ___ $\equiv [ND]$.

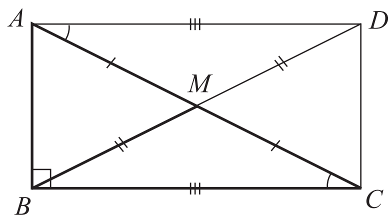
Trageți concluzia. Verificați cu ajutorul compasului.

Teorema 1 Lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

Să demonstrăm teorema 1.

Ipoteză: ΔABC, $m(\angle B) = 90°$, $[BM]$ – mediană.

Concluzie: $BM = \frac{1}{2}AC$.



Demonstrație:

① Pe semidreapta $[BM$ construim punctul D, astfel încât $[BM] \equiv [DM]$.

② $\Delta ADM \equiv \Delta CBM$
(Criteriul LUL: $[AM] \equiv [CM]$ – din ipoteză, $[BM] \equiv [DM]$ – din construcție, $\angle AMD \equiv \angle CMB$ – unghiuri opuse la vârf).

③ $AD \parallel BC$ (Unghiurile alterne interne DAM şi BCM sunt congruente conform ②).

④ $AB \perp AD$, deoarece $AB \perp BC$ şi $AD \parallel BC$. Prin urmare, ΔBAD este dreptunghic.

⑤ $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$ (Criteriul CC: $[AB]$ – catetă comună, $[AD] \equiv [BC]$ conform ②).

Prin urmare, $[AC] \equiv [BD]$ şi $BM = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC$, c.c.t.d. ►

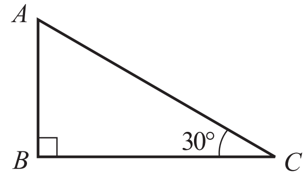
• Completați, astfel încât să obțineți reciproca teoremei 1, care, de asemenea, este adevărată: *Dacă lungimea unei mediane a unui triunghi este egală cu ..., atunci ... .*

Teorema 2 Dacă măsura unui unghi al triunghiului dreptunghic este egală cu 30°, atunci lungimea catetei opuse acestui unghi este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

Să demonstrăm teorema 2.

Ipoteză: ΔABC – dreptunghic, $m(\angle B)=90°$, $m(\angle C)=30°$.

Concluzie: $AB=0{,}5AC$.



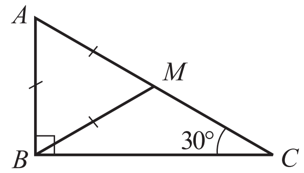
Demonstrație:

① Construim mediana $[BM]$.

② $[BM]\equiv[AM]$ (conform teoremei 1).

③ $m(\angle A)=180°-m(\angle B)-m(\angle C)=180°-90°-30°=60°$

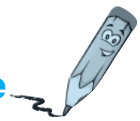
④ ΔAMB isoscel (conform ②) şi $m(\angle A)=60°$. Prin urmare, ΔAMB – echilateral (conform criteriului 8, p. 204).



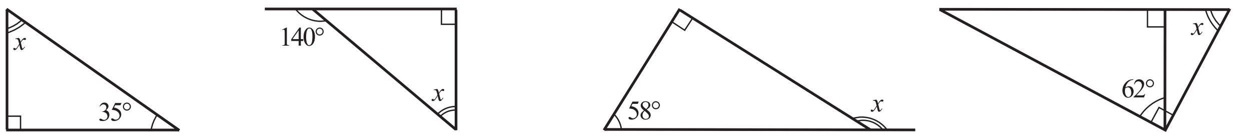
⑤ Aşadar, ΔAMB – echilateral şi $AB=AM=0{,}5AC$, c.c.t.d.

• Reciproca teoremei 2, de asemenea, este teoremă. Formulați şi demonstrați reciproca teoremei 2.

Exerciții și probleme



1. Calculați măsura unghiului notată cu x:



a) b) c) d)

2. Fie triunghiul ABC dreptunghic în B. Calculați lungimea medianei BM, dacă:

a) $AC=10$ cm; b) $AM=8$ cm;

c) $MC=\sqrt{2}$ cm; d) $BM+AC=12$ cm.

3. $[BM]$ este o mediană a triunghiului ABC dreptunghic în B. Calculați:

a) AC, dacă $BM=6$ cm;

b) AM, dacă $BM=\sqrt{5}$ cm;

c) MC, dacă $AM+BM=9$ cm;

d) $\dfrac{AC+BM}{AM}$.

4. Punctul T este mijlocul ipotenuzei PS a triunghiului dreptunghic PRS. Calculați:

a) $m(\angle S)$, dacă $m(\angle TRS)=32°$;

b) $m(\angle P)$, dacă $m(\angle PTR)=100°$;

c) $m(\angle TRP)$, dacă $m(\angle S)=40°$;

d) $m(\angle RTS)$, dacă $m(\angle PRT)=42°$.

5. Fie triunghiul ABC dreptunghic în B. Ştiind că $m(\angle C)=30°$, aflați:

a) AB, dacă $AC=16$ cm;

b) AC, dacă $AB=6$ cm;

c) AB, dacă $[AC]$ este cu 11 cm mai lungă decât $[AB]$;

d) AC, dacă $[AB]$ este cu $\sqrt{5}$ cm mai scurtă decât $[AC]$.

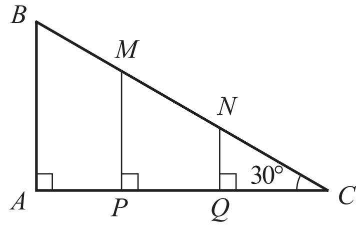
6. Punctul M este mijlocul ipotenuzei AC a triunghiului dreptunghic ABC. Ştiind că $m(\angle A)=30°$, aflați:

a) BM, dacă $BC=11$ cm;

b) BC, dacă $BM=9$ cm;

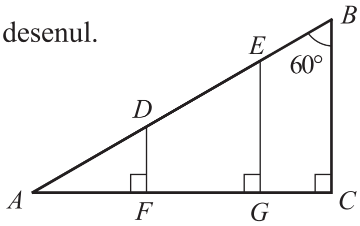
c) perimetrul triunghiului BMC, dacă $AC=16$ cm;

d) AC, dacă perimetrul triunghiului BMC este egal cu 15 cm.



7. Examinați desenul. Aflați:
a) AB, PM, QN, dacă $BM = 8$ cm, $MN = 9$ cm, $NC = 10$ cm.
b) BM, MN, NC, dacă $AB = 4\sqrt{2}$ cm, $PM = 3\sqrt{2}$ cm, $QN = 2\sqrt{2}$ cm.

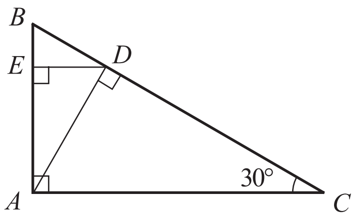
8.  ***Lucrați în perechi!*** Examinați desenul.
Aflați:
a) DF, EG, BC, dacă
$AD = DE = 4\sqrt{5}$ cm, $EB = 3\sqrt{5}$ cm;
b) AD, DE, EB, dacă
$DF = 0{,}8EG = 0{,}6BC = 4{,}8$ cm.



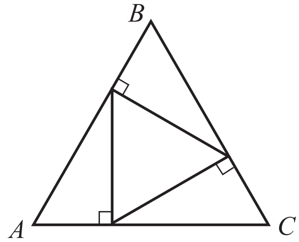
9. Aflați raza cercului care conține vârfurile unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 6 cm.

10. Aflați lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic ale cărui vârfuri aparțin unui cerc cu raza de $8\sqrt{3}$ cm.

11. Examinați desenul. Aflați:
a) ED, dacă $AC = 24$ cm;
b) AC, dacă $ED = 10$ cm.

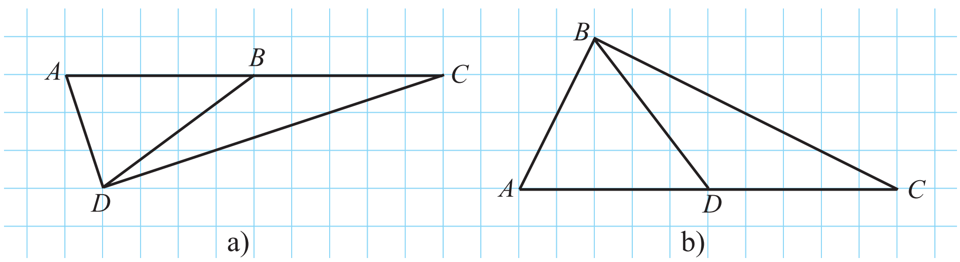


12. În triunghiul echilateral ABC a fost înscris alt triunghi echilateral (vezi desenul), ale cărui laturi sunt perpendiculare pe laturile triunghiului ABC. În ce raport vârfurile triunghiului înscris împart fiecare latură a triunghiului ABC?



13. $[BM]$ este o mediană a triunghiului ABC dreptunghic în B. Aflați aria triunghiului ABM, dacă aria triunghiului ABC este de $40\ \text{cm}^2$ și $m(\angle C) = 30°$.

14*. Examinați desenul, luând în considerare că latura unui pătrat al rețelei are lungimea de 0,5 cm. Calculați lungimea segmentului BD.
Compuneți o problemă asemănătoare.



MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

15. Decupați din carton 4 figuri identice de forma unui triunghi dreptunghic cu un unghi de 30°. Formați din ele o figură de forma unui triunghi dreptunghic cu un unghi de 30°.

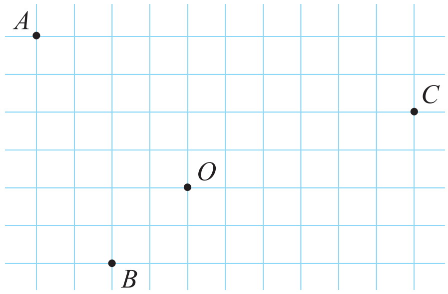
§ 6. Simetrii

6.1. Simetria față de un punct

1 a) Reproduceți desenul. Construiți punctele A_1, B_1, C_1, astfel încât punctul O să fie mijlocul segmentelor AA_1, BB_1, CC_1.

b) Considerând punctul O origine a unui sistem de axe ortogonale, aflați coordonatele punctelor A_1, B, B_1, C, C_1, dacă punctul A are coordonatele $(-2; 2)$.

c) Ce relație există între coordonatele extremităților unui segment al cărui mijloc este originea unui sistem de axe ortogonale?



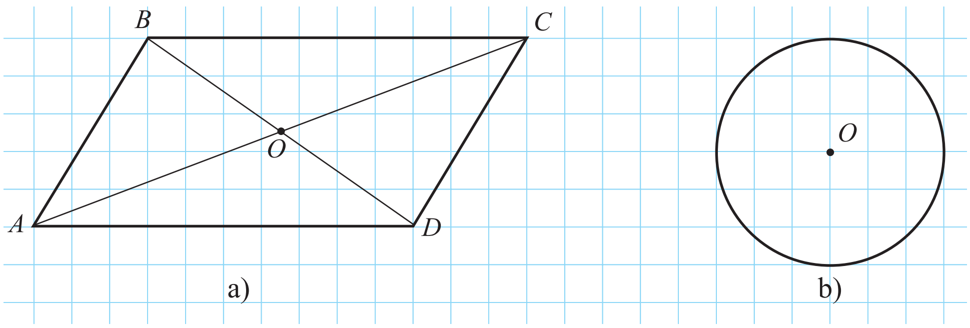
Definiții

- Punctele A și A_1 se numesc **simetrice față de punctul** O dacă punctul O este mijlocul segmentului AA_1. Punctul A se numește **simetricul punctului** A_1 **față de punctul** O și invers.
- **Simetrica unei figuri** F **față de un punct** O este mulțimea F_1, formată din simetricele tuturor punctelor figurii F față de punctul O. Figurile geometrice F și F_1 se numesc **simetrice față de punctul** O.

Teorema 1 Două figuri geometrice simetrice față de un punct sunt congruente.

• Fiind dat un segment AB și un punct O, explicați cum se construiește figura simetrică segmentului AB față de punctul O. Justificați aplicând teorema 1.

2 Reproduceți desenul.



Aplicând teorema 1, construiți simetrica figurii față de punctul O. Ce observați?

Definiție Dacă o figură geometrică F coincide cu simetrica ei față de un punct O, atunci punctul O se numește **centru de simetrie al figurii** F, iar figura F se numește **central simetrică**.

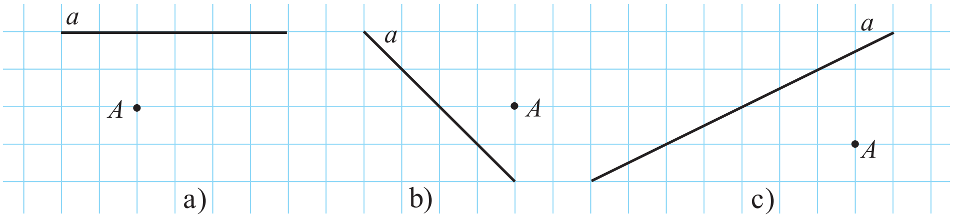
Teorema 2 Centrul cercului este centrul lui de simetrie.

Teorema 3 Punctele $A(x; y)$ și $A_1(-x; -y)$ sunt simetrice față de originea sistemului de axe ortogonale.

• Demonstrați teoremele 2–3

6.2. Simetria față de o dreaptă

1 Reproduceți desenul. Construiți un punct A_1, astfel încât dreapta a să fie mediatoare a segmentului AA_1. Câte astfel de puncte putem construi?



Definiții

- Punctele A şi A_1 se numesc **simetrice față de dreapta** a dacă dreapta a este mediatoarea segmentului AA_1.
- Punctul A se numeşte **simetricul punctului A_1 față de dreapta a** şi invers.
- **Simetrica unei figuri geometrice** F **față de o dreaptă** a este mulțimea F_1, formată din simetricele tuturor punctelor figurii F față de dreapta a. Figurile geometrice F şi F_1 se numesc **simetrice față de dreapta** a.

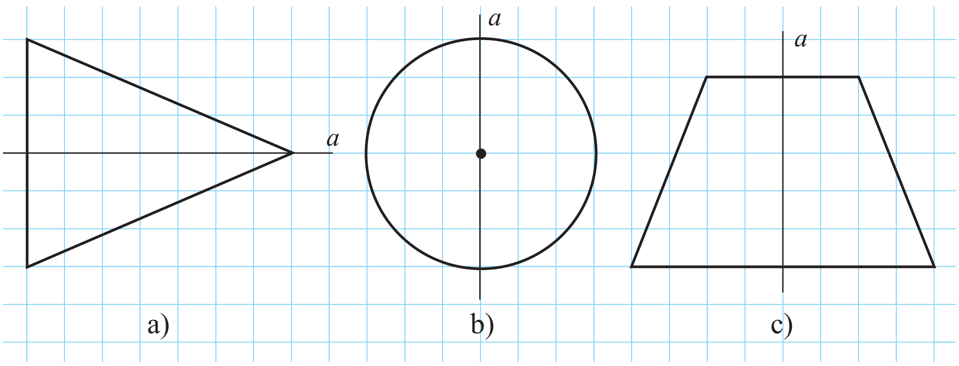
Teorema 1

Două figuri geometrice simetrice față de o dreaptă sunt congruente.

• Fiind dat un segment AB şi o dreaptă a, explicați cum se construieşte figura simetrică segmentului AB față de dreapta a. Justificați, aplicând teorema 1.

• În ce caz simetricul unui punct față de o dreaptă va coincide cu însuşi punctul?

2 Reproduceți desenul. Construiți simetrica figurii față de dreapta a. Ce observați?



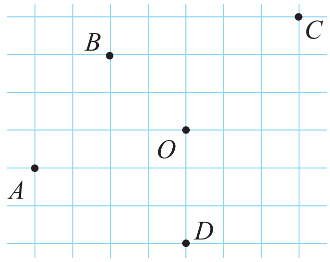
Definiție

Dacă o figură geometrică F coincide cu simetrica ei față de o dreaptă a, atunci dreapta a se numeşte **axă de simetrie a figurii** F, iar figura F se numeşte **simetrică față de dreapta** a.

- Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:
  a) „Mediatoarea segmentului este axa lui de simetrie.”
  b) „Triunghiul isoscel este o figură simetrică.”
  c) „Unghiul nu este o figură simetrică.”
  d) „Triunghiul echilateral are o axă de simetrie.”
  e) „Cercul are mai mult de 10 axe de simetrie.”

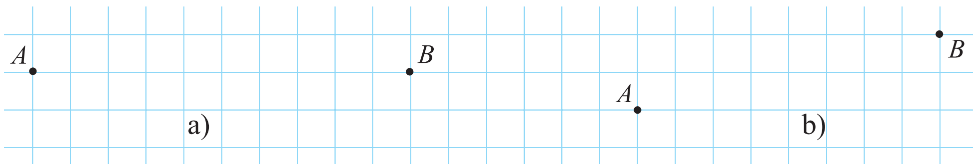
A F

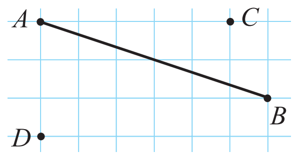
Exerciții și probleme



1. Reproduceți desenul. Construiți simetricele punctelor A, B, C, D față de punctul O.

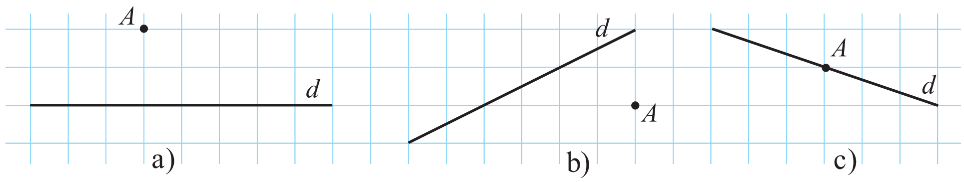
2. Reproduceți desenul. Construiți punctul O, astfel încât punctele A şi B să fie simetrice față de punctul O.



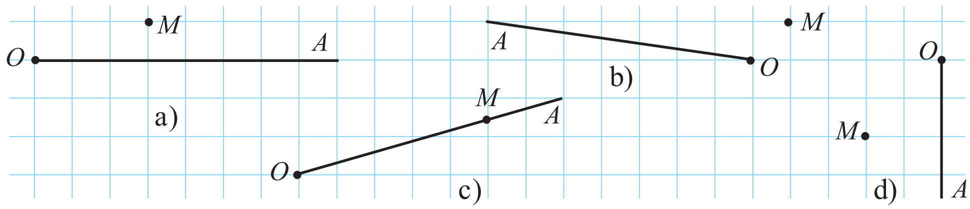


3. Reproduceți desenul. Construiți simetricul segmentului AB față de punctul:
a) C; b) D.

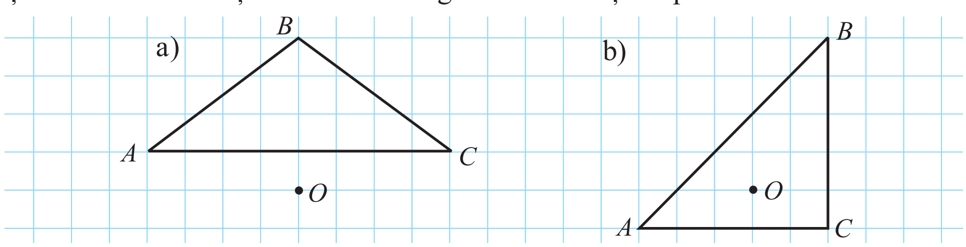
4. Reproduceți desenul. Construiți simetrica dreptei d față de punctul A.



5. Reproduceți desenul. Construiți simetrica semidreptei $[OA$ față de punctul M.

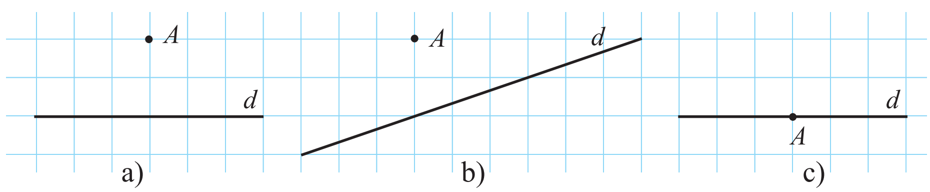


6. Reproduceți desenul. Construiți simetricul triunghiului ABC față de punctul O.

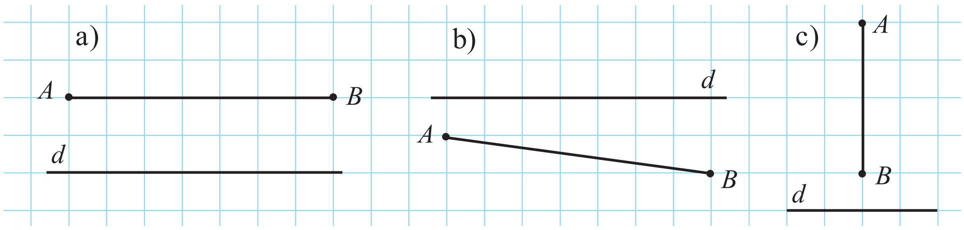


7. Aflați coordonatele simetricului punctelor $A\ (-2; 3)$, $B\ (1; 4)$, $C\ (2; -7)$ față de originea sistemului de coordonate.

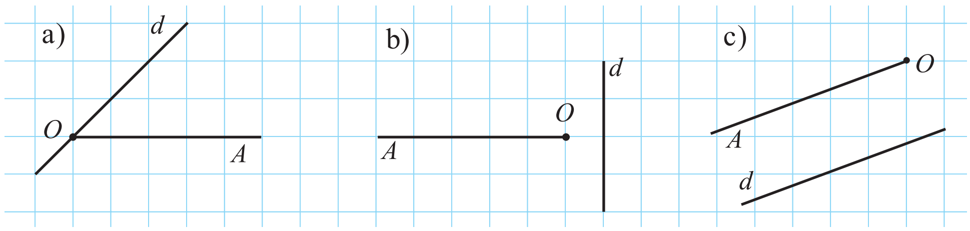
8. Reproduceți desenul. Construiți simetricul punctului A față de dreapta d.



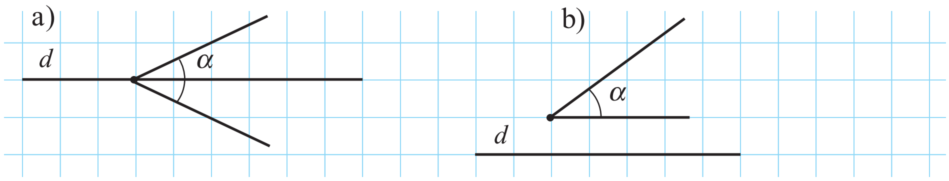
9. Reproduceți desenul. Construiți simetricul segmentului AB față de dreapta d.



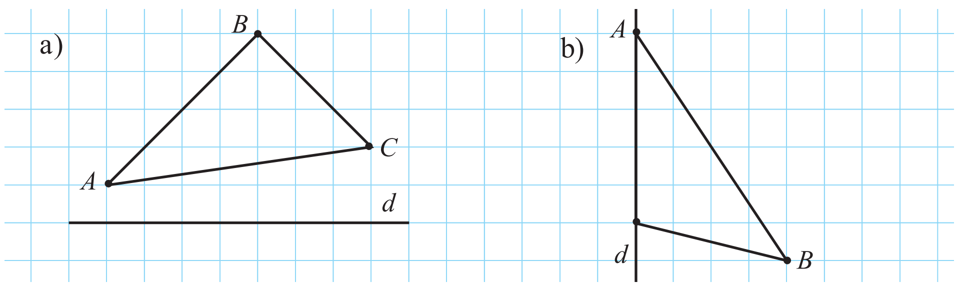
10. Reproduceți desenul. Construiți simetrica semidreptei $[OA$ față de dreapta d.



11. Reproduceți desenul. Construiți simetricul unghiului α față de dreapta d.



12. Reproduceți desenul. Construiți simetricul triunghiului ABC față de dreapta d.



13. Completați cu un număr, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată.

a) „Pătratul are ___ axe de simetrie.”

b) „Semicercul are ___ axe de simetrie.”

c) „Rombul are ___ axe de simetrie.”

d) „Triunghiul echilateral are ___ axe de simetrie.”

14. Punctele A și B sunt simetrice față de punctul M. Aflați coordonatele punctului M, dacă:

a) $A(3; 0)$ și $B(1; 4)$; b) $A(-1; 5)$ și $B(5; -1)$;

c) $A(2; 9)$ și $B(4; 7)$; d) $A(3; -11)$ și $B(0; 1)$.

15. Aflați coordonatele simetricului punctului A față de punctul B, dacă:

a) $A(1; 1)$ și $B(2; 2)$; b) $A(-2; 0)$ și $B(0; -2)$;

c) $A(2; 5)$ și $B(3; 1)$; d) $A(11; -7)$ și $B(8; -4)$.

16. Aflați coordonatele simetricului mijlocului segmentului AB față de O (0; 0), dacă:

a) $A(4; 0)$ şi $B(2; 0)$; b) $A(-2; 1)$ şi $B(1; -2)$;

c) $A(-5; 5)$ şi $B(11; 11)$; d) $A\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ şi $B(-1; 2)$.

17. Aflați simetricele punctelor A (2; 7), B (–3; 1,5), $C\ (2\sqrt{2}; -4)$ față de:

a) axa Ox; b) axa Oy.

18. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle B) = 90°$ şi $m(\angle A) = 35°$, triunghiul $A'B'C'$ – simetricul triunghiului ABC față de o dreaptă. Aflați $m(\angle A'C'B')$, dacă A' este simetricul lui A, iar B' este simetricul lui B.

19. ABC este un triunghi isoscel cu baza BC, iar AP este mediatoarea bazei. Punctele M şi N aparțin, respectiv, laturilor AB şi AC, astfel încât $MN \parallel BC$. Să se arate că punctele M şi N sunt simetrice față de AP.

20. Punctul D este simetricul punctului B față de suportul laturii AC a triunghiului ABC. Ce tipuri de triunghiuri sunt triunghiurile BCD şi ABD?

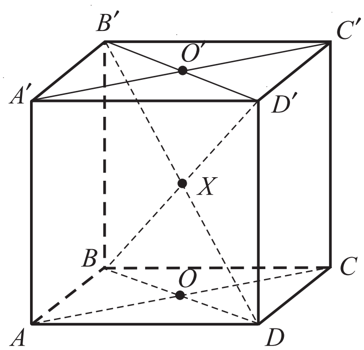
21. ABC este un triunghi cu $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm şi $BC = 4$ cm. Punctul D este simetricul punctului B față de AC, iar punctul E este simetricul punctului C față de AB. Calculați:

a) $EB + BC + CD$; b) $AE + AD$.

22. Figura formată din reuniunea dreptelor d_1, d_2, d_3 are o infinitate de centre de simetrie. Determinați poziția relativă a acestor drepte.

23. Dreptele a şi b sunt simetrice față de punctul O. Dreptele c şi d sunt concurente în O şi intersectează dreapta a în punctele A şi B, iar dreapta b – în punctele C şi D. Calculați CD, dacă $AB = 12$ cm.

24. În desen este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$,
$\{O\} = AC \cap BD$, $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$,
$\{X\} = BD' \cap B'D$.
Numiți:
a) simetricul punctului A față de punctul O;
b) simetricul punctului B față de O;
c) simetricul punctului A' față de X;
d) simetricul punctului C' față de X;
e) simetricul punctului O față de X;
f) simetricul punctului B față de X;
g) simetricul punctului D față de X;
h) punctul față de care punctele A şi C' sunt simetrice;
i) punctul față de care punctele B' şi D sunt simetrice;
j) punctul față de care punctele A şi C sunt simetrice.



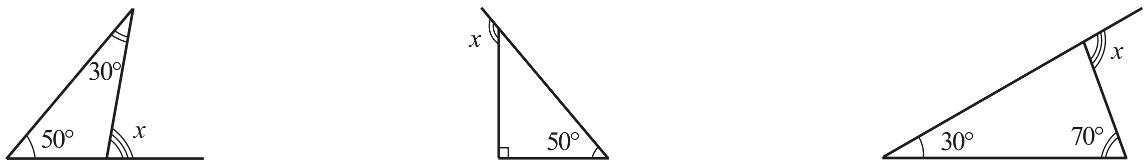
25. Demonstrați că dacă un triunghi are două axe de simetrie, atunci el este echilateral.

26.  ***Lucrați în grup!*** Proiect *Simetria în arte*.

Exerciții și probleme recapitulative

1. Fie triunghiul ABC. Aflați:
   a) $m(\angle A)$, dacă $m(\angle B)=60°$, $m(\angle C)=70°$;
   b) $m(\angle B)$, dacă $m(\angle A)=m(\angle C)=25°$;
   c) $m(\angle C)$, dacă $m(\angle A)+m(\angle B)=100°$;
   d) $m(\angle A)$, dacă $m(\angle A)=m(\angle B)=m(\angle C)$.

2. Aflați măsura unghiului notată cu x:



a) b) c)

3. Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului ABC, dacă:
   a) $m(\angle A)=30°$, $m(\angle B)=75°$;
   b) $m(\angle A)=m(\angle B)=40°$;
   c) $m(\angle A)=2m(\angle B)=70°$;
   d) $\frac{2}{3}m(\angle A)=m(\angle B)=60°$.

4. *Adevărat* sau *fals*?
   a) Dacă ortocentrul unui triunghi coincide cu un vârf al triunghiului, atunci acest triunghi este dreptunghic.
   b) Punctul de intersecție a mediatoarelor unui triunghi obtuzunghic aparține interiorului triunghiului.
   c) Centrul de greutate al triunghiului obtuzunghic nu aparține interiorului triunghiului.

5. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC, iar A_1, B_1, C_1 – mijloacele laturilor BC, AC şi, respectiv, AB. Calculați:
   a) AG şi BG, dacă $AA_1=12$ cm şi $BB_1=9$ cm;
   b) BG şi CG, dacă $BB_1=3{,}3$ cm, $CC_1=3$ cm;
   c) A_1G şi B_1G, dacă $AA_1=18$ cm şi $BB_1=15$ cm;
   d) A_1G şi C_1G, dacă $AA_1=1{,}5$ cm şi $CC_1=2{,}4$ cm.

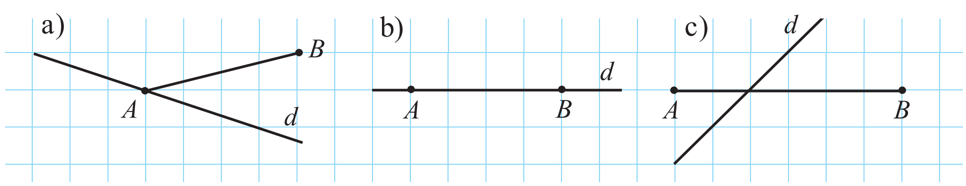
6. Punctul O este egal depărtat de laturile triunghiului ABC. Calculați:
   a) măsurile unghiurilor triunghiului ABC, dacă $m(\angle BAO)=30°$, $m(\angle COA)=125°$;
   b) $m(\angle BAO)$, $m(\angle COA)$, dacă $m(\angle A)=70°$, $m(\angle B)=100°$;
   c) $m(\angle AOB)$, $m(\angle BOC)$, dacă $m(\angle A)=50°$, $m(\angle B)=60°$;
   d) $m(\angle AOB)+m(\angle BOC)+m(\angle AOC)$.

7. Aflați măsurile celorlalte două unghiuri ale unui triunghi isoscel, dacă măsura unui unghi al triunghiului este de:
   a) 60°; b) 90°; c) 100°.

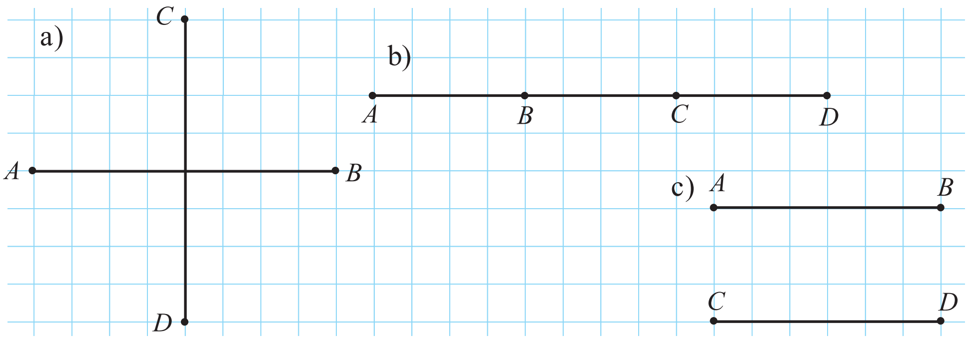
8. Stabiliți tipul triunghiului, dacă se ştie că:
   a) două mediane ale triunghiului sunt congruente;
   b) două bisectoare ale triunghiului intersectează laturile corespunzătoare ale triunghiului în mijlocul lor;
   c) o bisectoare a triunghiului este perpendiculară pe latura opusă unghiului respectiv;
   d) o bisectoare a triunghiului coincide cu o înălțime, iar altă bisectoare – cu o mediană a triunghiului;
   e) o mediană a triunghiului este de două ori mai scurtă decât latura corespunzătoare ei.

9. Calculați suma lungimilor liniilor mijlocii ale unui triunghi echilateral cu latura de 11 cm.

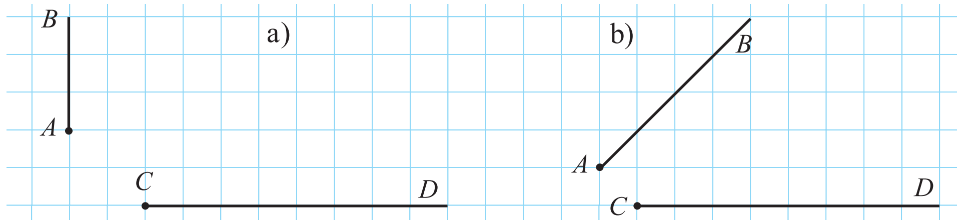
10. Reproduceți desenul. Construiți simetricul segmentului AB față de dreapta d.



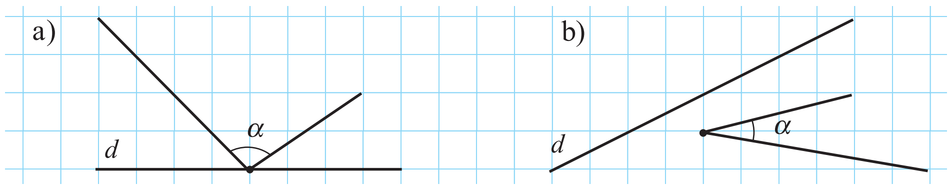
11. Reproduceți desenul. Există oare o dreaptă d față de care sunt simetrice segmentele AB şi CD? Dacă există, construiți dreapta d.



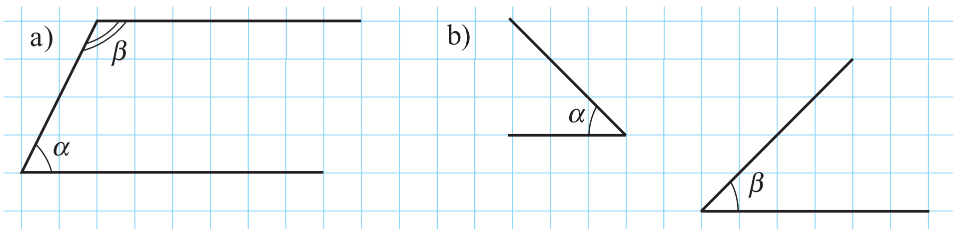
12. Reproduceți desenul. Există oare o dreaptă d față de care sunt simetrice semidreptele $[AB$ şi $[CD$? Dacă există, construiți dreapta d.



13. Reproduceți desenul. Construiți simetricul unghiului α față de dreapta d.



14. Reproduceți desenul. Există oare o dreaptă d față de care sunt simetrice unghiurile α şi β? Dacă există, construiți dreapta d.

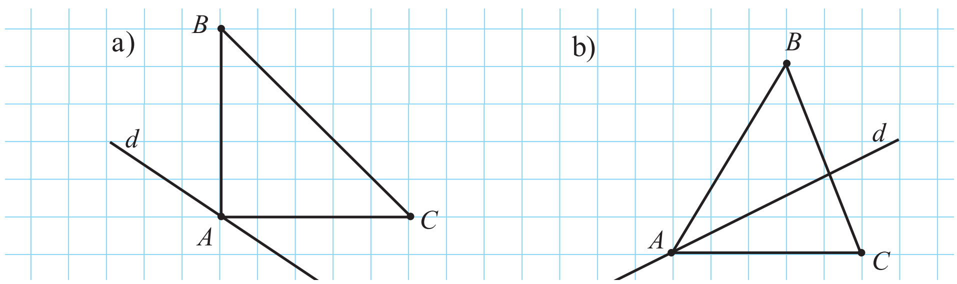


15. Scrieți unghiurile triunghiului ABC în ordinea crescătoare a măsurilor lor, dacă:

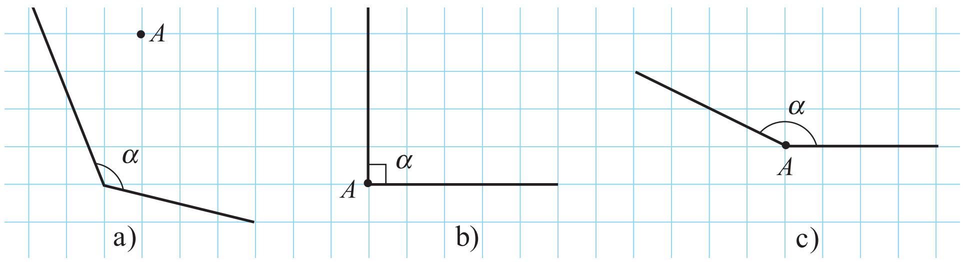
a) $AB = 9$ cm, $AC = 8{,}5$ cm, $BC = 8{,}(5)$ cm;

b) $AC = \sqrt{11}$ cm, $BC = 3\sqrt{2}$ cm, $AB = 2\sqrt{3}$ cm.

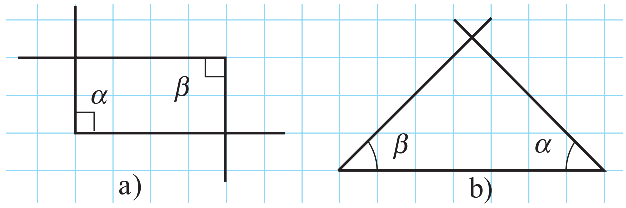
16. Reproduceți desenul. Construiți simetricul triunghiului ABC față de dreapta d.



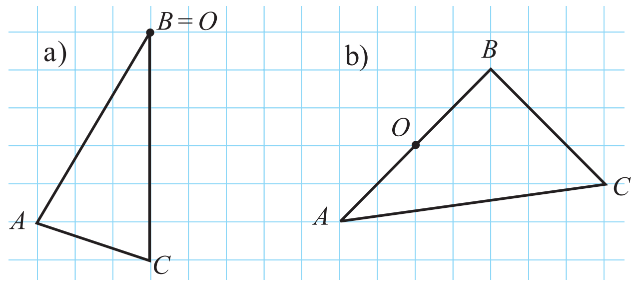
17. Reproduceți desenul. Construiți simetricul unghiului α față de punctul A.



18. Reproduceți desenul.
Există oare un punct O, astfel încât unghiurile α şi β să fie simetrice față de acest punct? Dacă există, construiți punctul O.



19. Reproduceți desenul.
Construiți simetricul triunghiului ABC față de punctul O.



20. Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului ABC, dacă măsurile unghiurilor lui sunt:
a) direct proporționale cu numerele 1, 2, 3;
b) invers proporționale cu numerele 1, 2, 4, 6.

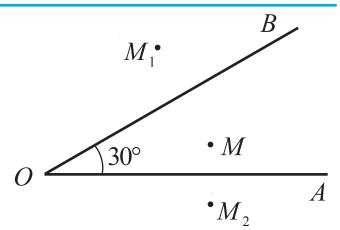
21. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC, iar A_1, B_1, C_1 – mijloacele laturilor BC, AC şi, respectiv, AB. Calculați:
a) AA_1 şi BB_1, dacă $AG = 6$ cm şi $BG = 5$ cm;
b) BB_1 şi CC_1, dacă $B_1G = 6$ cm şi $C_1G = 5$ cm;
c) A_1G şi B_1G, dacă $AG = 4{,}2$ cm şi $BG = 3{,}8$ cm;
d) AA_1 şi CC_1, dacă $AG = 1{,}2 \cdot GC = 8{,}4$ cm.

22. Aflați măsurile unghiurilor unui triunghi, dacă:
a) măsurile a două dintre unghiurile exterioare ale lui sunt egale cu 70° şi 160°;
b) măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului sunt direct proporționale cu numerele 11, 12, 13.

23. Fie $[AM]$ şi $[BN]$ bisectoare ale triunghiului echilateral ABC cu latura de $4\sqrt{5}$ cm.
Aflați perimetrul triunghiului CMN.

24. Triunghiul ABC este isoscel, cu baza $[AB]$ de 8 cm. Aflați raza cercului circumscris triunghiului AMC, dacă M este mijlocul laturii AB, iar perimetrul triunghiului ABC este de 30 cm.

25. Punctul M aparține interiorului unghiului AOB de 30°, punctele M_1 şi M_2 sunt simetricele punctului M față de laturile unghiului AOB. Aflați $m(\angle M_1OM_2)$ şi perimetrul triunghiului M_1OM_2, dacă $OM = 10$ cm.



26. Punctul O este egal depărtat de vârfurile triunghiului isoscel ABC cu baza AB. Aflați $m(\angle OBA)$, dacă $m(\angle OAC) = 20°$.

27. Demonstrați că suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui triunghi este egală cu 360°.

28. Punctele A_1, B_1, C_1 sunt simetricele punctelor A, B şi, respectiv, C faţă de punctul O. Demonstraţi că dacă punctele A, B, C sunt coliniare, atunci A_1, B_1, C_1, de asemenea, sunt coliniare.

MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

29. Decupaţi din carton o figură de forma unui triunghi dreptunghic. Tăiaţi figura în 3 figuri, fiecare în formă de triunghi, şi formaţi din ele:
a) un dreptunghi; b) un romb.

PENTRU CAMPIONI

30. Punctul E aparţine interiorului pătratului $ABCD$, astfel încât triunghiul DEC este isoscel şi $m(\angle DEC) = 150°$. Determinaţi tipul triunghiului AEB.

31. *Lucraţi în grup!* Proiect *Simetria în natură*.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 minute

Varianta 1

1. Calculaţi măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului ABC, dacă:
$m(\angle A) = 60°$, $m(\angle B) = 20°$.

2. Medianele AM şi CN ale triunghiului ABC se intersectează în punctul X.
Aflaţi perimetrul triunghiului AXC, dacă $AM = 30$ cm, $CN = 24$ cm şi $AC = 25$ cm.

3. Aflaţi înălţimea unui triunghi echilateral ABC ştiind că punctul M aparţine interiorului triunghiului ABC şi $AM = BM = CM = 8$ cm.

4. Scrieţi laturile triunghiului ABC în ordinea descrescătoare a lungimilor lor, dacă:
$\frac{m(\angle A)}{m(\angle B)} < 0{,}9$, $\frac{m(\angle C)}{m(\angle B)} > 1{,}1$.

5. Aflaţi coordonatele simetricului mijlocului segmentului AB faţă de punctul $O(0; 0)$, dacă $A(2; 6)$ şi $B(8; 0)$.

Varianta 2

1. Calculaţi măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului ABC, dacă:
$m(\angle B) = 30°$, $m(\angle C) = 80°$.

2. Medianele AM şi CN ale triunghiului isoscel ABC, cu baza BC, se intersectează în punctul X.
Aflaţi perimetrul triunghiului AXN, dacă $AM = 27$ cm, $CN = 24$ cm şi $AC = 26$ cm.

3. Aflaţi la ce distanţă de la fiecare vârf al triunghiului echilateral cu înălţimea de 8 cm este situat punctul P, dacă $PA = PB = PC$.

4. Scrieţi unghiurile triunghiului ABC în ordinea crescătoare a măsurilor lor, dacă:
$\frac{AB}{AC} > 1{,}2$, $\frac{BC}{AC} < 0{,}8$.

5. Aflaţi coordonatele simetricului mijlocului segmentului MN faţă de punctul $O(0; 0)$, dacă $M(1; -4)$ şi $N(5; 4)$.

Răspunsuri și indicații

Algebră

Capitolul 1. Numere reale

§1. 1.1. 3. a) $\frac{21}{14}=\frac{7}{2}$; $\frac{4}{18}=\frac{8}{36}$; $\frac{5}{10}=\frac{4}{8}$; $\frac{6}{8}=\frac{18}{24}$; b) $\frac{18}{27}=\frac{6}{9}$; $\frac{12}{16}=\frac{60}{80}$; $\frac{5}{8}=\frac{20}{32}$; $\frac{16}{28}=\frac{64}{112}$. **4.** a) $3\frac{1}{2}$; b) $-3\frac{2}{3}$; c) $12\frac{1}{10}$; d) $-5\frac{1}{12}$. **5.** a) $\frac{51}{5}$; b) $-\frac{23}{4}$; c) $\frac{61}{7}$; d) $-\frac{25}{1}$. **7.** a) F; b) A; c) A; d) F. **8.** b) $-\frac{625}{100}$; d) $\frac{7002}{1000}$. **9.** c) $\frac{27}{36}$; e) $\frac{9}{36}$. **10.** c) $\frac{96}{9}$; d) $-\frac{86}{4}$. **11.** $\frac{4}{9}$ din carte. **12.** 4 km. **13.** 8 sportivi. **14.** 24 km. **15.** 22 lei. **16.** a) $\frac{10}{19}$; b) $\frac{4}{21}$; c) $\frac{50}{539}$; d) $\frac{1}{2}$.

1.2. 6. a) $\frac{5}{6}=0{,}8(3)$; $1\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$; $-\frac{12}{5}=-2{,}4$; $-2\frac{1}{5}=-2{,}2$; $-2{,}(2)=-\frac{20}{9}$; b) $\frac{3}{4}=0{,}75$; $-\frac{21}{24}=-\frac{7}{8}$; $-0{,}75=-\frac{6}{8}$; $1{,}(3)=\frac{4}{3}$; $\frac{7}{8}=0{,}875$. **7.** a) $4{,}(1234)$; $-3{,}(5)$; $-9{,}878787...$; b) $0{,}0(21)$; $16{,}6363121212...$ **8.** a) $\frac{2}{5}=0{,}4$; $\frac{16}{3}=5{,}(3)$; $-2\frac{3}{8}=-2{,}375$; $1\frac{3}{7}=1{,}(428571)$; $\frac{3}{16}=0{,}1875$; $-\frac{4}{9}=-0{,}(4)$; $\frac{25}{90}=0{,}2(7)$; $-\frac{101}{90}=-1{,}1(2)$; b) $\frac{1}{8}=0{,}125$; $\frac{14}{9}=1{,}(5)$; $-3\frac{5}{6}=-3{,}8(3)$; $2\frac{5}{7}=2{,}(714285)$; $\frac{7}{18}=0{,}3(8)$; $-\frac{7}{9}=-0{,}(7)$; $\frac{34}{900}=0{,}03(7)$; $\frac{21}{990}=0{,}0(21)$. **9.** a) 2,19(63); b) 0,3(351); c) 0,4(09); d) 0,(384615); e) 4,29(6); f) 0,48(3); g) 0,4(592); h) 0,35(1). **12.** a) $0{,}6=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}=\frac{12}{20}=\frac{18}{30}$; b) $0{,}3=\frac{3}{10}=\frac{6}{20}=\frac{9}{30}=\frac{12}{40}$; c) $2{,}4=2\frac{4}{10}=\frac{24}{10}=\frac{12}{5}=\frac{36}{15}=\frac{48}{20}$; d) $1{,}8=1\frac{8}{10}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}=\frac{27}{15}=\frac{36}{20}$. **13.** a) $0{,}16=\frac{4}{25}$; $-3{,}14=-3\frac{7}{50}$; $0{,}(8)=\frac{8}{9}$; $-5{,}(7)=-5\frac{7}{9}$; $0{,}3(5)=\frac{16}{45}$; $8{,}21(6)=8\frac{13}{60}$; $-4{,}97(35)=-4\frac{4819}{4950}$; b) $-0{,}72=-\frac{18}{25}$; $5{,}36=5\frac{9}{25}$; $-0{,}(42)=-\frac{21}{50}$; $-3{,}(18)=-3\frac{2}{11}$; $0{,}5(3)=\frac{8}{15}$; $12{,}3(45)=12\frac{19}{55}$; $-7{,}6(543)=-7\frac{2179}{3330}$. **15.** a) –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5; b) 1, 2; c) –3, –2, –1, 0, 1; d) –10, –9, –8, –7; e) –25, –24, –23; f) 16, 17, 18, 19. **17.** Primul va ajunge câinele din stânga, cu aproximativ 0,26 minute mai devreme. **18.** a) $4\frac{5}{8}$; b) 2; c) 3; d) 7,(7); e) 5,6(72); f) $\frac{2}{25}$; g) 18,(63). **20.** a) 0,(387); b) 2,0(5); c) 2,5(3); d) 9,(6). **23.** a) 22,1 g; b) 0,022 kg. **25.** a) $64\frac{981}{990}$; b) $\frac{418}{500}=\frac{209}{250}$. **26.** a) $n\in\{3; 9\}$; b) $n=11$. **1.3. 6.** a) 15,1; b) 6,4; c) 78; d) 101; e) 0; f) 0,5. **7.** a) 200 km – Nord; b) 300 km – Sud; c) 350 km – Nord; d) 500 km – Sud. **8.** La etajul 2 sau la etajul 16. **9.** a) În sensul pozitiv cu 9,25 unități; b) în sensul negativ cu 8 unități. **10.** $E\left(9\frac{1}{3}\right)$. **11.** $C\left(-1\frac{1}{3}\right)$. **14.** Schickard. **15.** Cel mai repede se mișcă ghepardul, iar cel mai încet – cangurul. **19.** De exemplu: 2, 5, –10, 4, 3.

§2. 6. a) $S=\{\pm 3\}$; b) $S=\{\pm 5\}$; c) $S=\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$; d) $S=\varnothing$; e) $S=\varnothing$; f) $S=\{0\}$. **7.** a) 1,7; b) 3,9; c) 0,44; d) 0,72. **8.** a) $\sqrt{8}<3$; b) $9<\sqrt{90}$; c) $3{,}4>\sqrt{10}$; d) $\sqrt{19}<4{,}5$; e) $\sqrt{39}>6{,}2$. **9.** a) 23,45; b) 18,08; c) 89,12; d) 70,09. **13.** a) 0,(197530864); b) 0,(604938271); c) 53,(7); d) 3,36(1); e) 0,07(1); f) 6,(0247933884297520661157). **14.** a) ≈141 cm; b) ≈173 cm; c) ≈155 cm; d) ≈245 cm. **15.** a) 18,(7) cm^2; b) 6,(530864197) cm^2; c) 8,7 cm^2; d) 3,(7) cm^2. **16.** a) $\frac{2}{3}$; b) $5\frac{1}{3}$; c) $1\frac{2}{3}$; d) $2\frac{2}{3}$; e) $7\frac{1}{3}$; f) $6\frac{1}{3}$. **17.** a) $\frac{17}{30}$; b) $\frac{23}{30}$.

§3. 2. b) $\sqrt{71}>-\sqrt{80}$; c) $-\sqrt{\frac{5}{6}}<1$; d) $\sqrt{2}+3>-3\sqrt{2}$. **3.** a) +; b) –; c) –; d) –. **4.** a) $-\sqrt{5}$; c) $-2+\sqrt{3}$; e) $\sqrt{2}-\frac{1}{3}$; f) $6+2\sqrt{2}$. **5.** a) $-5\sqrt{3}$; $-3\sqrt{5}$; 3,(5); b) $-\frac{7}{4}$; $\sqrt{\frac{4}{7}}$; $\frac{4}{7}$; c) $\sqrt{20}$; $4\frac{1}{2}$; $\left|-4\frac{2}{3}\right|$. d) $-8\frac{1}{3}$; –8,3(1); –8,1(3). **8.** c) $-2\sqrt{10}$; $2\sqrt{10}$; d) $-1-\sqrt{5}$; $1+\sqrt{5}$. **9.** a) $4-\sqrt{7}$; b) $9-\sqrt{80}$; c) $2\sqrt{3}-\sqrt{6}$; d) $5-\sqrt{20}$. **11.** a) $|x|<\sqrt{6}$; b) $|x|<\frac{1}{6}$; c) $|x|>3$; d) $|x|>2{,}4$. **12.** a) $x<\frac{4}{5}$; b) $|x|<\sqrt{11}$; c) $|x|>2$; d) $|x|\geq\frac{1}{5}$. **13.** *Indicație*. Numerele sunt egale.

§4. **1.** a) 5,79; b) 4,604; c) 0,74; d) 4,9. **2.** a) $\approx 4{,}1$; b) $\approx -0{,}7$; c) $\approx 4{,}8$; d) $\approx -0{,}4$. **3.** b) $-2\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; $0{,}3\sqrt{5}$; $7\sqrt{5}$; c) $\sqrt{0{,}3}$; $2\sqrt{0{,}3}$. **5.** a) $\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{6}$; c) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; d) $\sqrt{5}$. **6.** a) 9; b) –8; c) 6; d) 15. **7.** a) 2; b) –7; c) 6; d) 11. **8.** d) 147; e) $2{,}1^5$; f) 27. **9.** a) 8; b) 9; c) 0,25; d) 0,0001. **10.** a) $2\sqrt{6}$; b) $3\sqrt{7}$; c) $7\sqrt{2}$; d) $4\sqrt{6}$; e) $10\sqrt{2}$; f) $6\sqrt{3}$. **11.** a) $\sqrt{12}$; b) $\sqrt{18}$; c) $\sqrt{180}$; d) $-\sqrt{150}$; e) $-\sqrt{112}$; f) $\sqrt{147}$. **12.** b) $-3\sqrt{5} > -4\sqrt{3}$; d) $\frac{2}{\sqrt{10}} < \frac{4}{\sqrt{20}}$; f) $\sqrt{5}-2 > 3\sqrt{5}-9$. **13.** a) $-11\sqrt{2}$; b) $4{,}6\sqrt{3}$; c) $-5\sqrt{5}$. **14.** a) $9\sqrt{10}$; b) $23\sqrt{6}$; c) $-96\sqrt{21}$; d) $39\sqrt{3}$. **15.** a) –793; b) $-\frac{53}{3}$. **16.** $34\sqrt{5}$ cm. **17.** $46\sqrt{3}$ cm. **18.** a) $S=\{\pm 4\}$; b) $S=\left\{\pm\sqrt{\frac{14}{15}}\right\}$; c) $S=\{0\}$; d) $S=\varnothing$; e) $S=\{\pm 3\}$; f) $S=\{0;\ \sqrt{5}\}$. **20.** $x=2$, $y=1$, $z=-3\sqrt{7}$.

§5. **1.** a) $A\cup B=\{-5, -2, 3, 7, 9\}$, $A\cap B=\{-5, 3, 7, 9\}$, $A\setminus B=\{-2\}$, $B\setminus A=\varnothing$. **2.** a) $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; b) $B=\{-8, -7, ..., 7, 8\}$; c) $C=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. **5.** a) 25; b) 72; c) 19. **8.** a) $A\cap B$ este mulțimea pătratelor. **9.** a) $[AE]$; b) $[AF]$; c) $[CD]$; d) $\varnothing$. **10.** a) $\{1, 2, 4, 8\}$; b) $\{3, 6, 12, 24, 48\}$; c) $\{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$; d) $\{1, 3, 5, 15\}$; e) M_{15}. **11.** a) $m=2, n=5$; b) $m=-8$, $n=9$; c) $m=11, n=5$; d) $m=6, n=9$. **12.** a) 9; b) 14; c) 0. **13.** a) $A=\{1, 2, 3, 4, 8, 9\}$, $B=\{2, 5, 6, 7, 8, 9\}$; b) $A=\{d, e, f, g, h\}$, $B=\{a, b, c, e, g\}$. **14.** a) $A=\{3, 4, 5\}$, $B=\{3, 5\}$; b) $A=\{a, b, c\}$, $B=\{a, b\}$; c) $A=\{3, 4, 6, 7\}$, $B=\{5, 6, 7\}$. **15.** 5. **16.** 25. **17.** 40%. **18.** a) $A\subset B$; b) $B\subset A$; c) $A\cap B=\{10, 20, 50, 100\}$. **19.** 7. **20.** 11. **21.** 55%. **22.** 20. **23.** 315. **24.** 120. **25.** 10.

Exerciții și probleme recapitulative. **6.** a) $1\frac{1}{5}$; b) $-0{,}5^6$. **15.** a) $6+\sqrt{6}$, $6\frac{1}{6}$, $6-\sqrt{6}$, $\frac{\sqrt{6}}{6}$, $-\frac{6}{\sqrt{6}}$, $\sqrt{6}-6$, $-6,(6)$, $-6\sqrt{6}$; b) $7\sqrt{5}$, $5\sqrt{7}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{7}$, $-\frac{7}{5}$, $-\frac{5}{\sqrt{7}}$, $-5\sqrt{7}$, $-7\sqrt{5}$. **16.** a) 8; b) –21; c) 2; d) –1; e) $-1\frac{6}{7}$; f) 5; g) 6; h) $\frac{3}{4}$. **17.** a) 2,04; b) $\frac{4}{5}$; c) 3; d) 2,04. **18.** a) $S=\{10{,}4\}$; b) $S=\{-3{,}1\}$; c) $S=\{2{,}2\}$; d) $S=\{16{,}7\}$; e) $S=\{-4{,}16\}$; f) $S=\{3{,}6\}$; g) $S=\{0{,}48\}$; h) $S=\{9{,}55\}$. **19.** a) 5; b) 4. **25.** a) $x>y$; b) $x<y$; c) $x>y$; d) $x<y$. **28.** a) $\frac{8}{15}$; b) 0,9(7); c) $\frac{7\sqrt{3}}{8}$; d) 6. **29.** $20\sqrt{5}$ cm. **30.** $4\sqrt{3}$ cm. **31.** 24 cm^2. **32.** a) 1; b) –2. **33.** a) 1; b) 1. **34.** a) 0; b) 4; c) $8\sqrt{3}$. **36.** a) 62,8; b) –33,3. **37.** a) 4; b) 0,25. **39.** a) Prețurile sunt egale; b) $\frac{31{,}1}{5} < \frac{21{,}78}{3}$, deci prețul făinii din pachetul de 5 kg este mai mic. **41.** De exemplu: a) $2^6\cdot 5^6$; b) $2^5\cdot 10^5$; c) $5^5\cdot 6^5$. **42.** a) 6; b) 1; c) 6. **43.** 2012. **44.** a) $94041648\cdot 10^5$ km. **46.** 3. **47.** 365. **48.** 437.

50. Folosim numerele 11, 12 și 21.

21	7	12	27	13
6	20	11	11	32
22	23	16	9	10
12	21	21	12	14
19	9	20	21	11

Capitolul 2. Calcul algebric

§1. **2.** a) 102; b) –500; c) 324; d) $10-7\sqrt{3}$. **3.** a) 0; b) 1,4; c) 1,4; d) 35; e) 140; f) 2,8. **4.** a) $8-2\sqrt{3}$; b) 0; c) $3-3\sqrt{3}$; d) $10\sqrt{3}-1000$. **8.** a) $5x-4y$; b) $a-2b-2$; c) $3\sqrt{2}x$; d) $1{,}5a+0{,}5b$. **16.** a) –3; b) 15; c) –30. **17.** a) $5{,}5x-7{,}6$; b) $2{,}5x-12{,}4$; c) $0{,}5x-2y+7{,}6$; d) $-3{,}5x+2y-12{,}4$; e) $-5{,}5x+7{,}6$; f) $3{,}5x-2y+12{,}4$. **19.** a) $s=2v+5$; b) $v=\frac{s-5}{2}$; c) 3,5 km/h. **20.** a) $n+(n+1)$; b) $n\cdot(n+1)$; c) $2n(2n+1)(2n+2)$; d) $(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)$. **22.** a) $t=45x+10y+15z$.

§2. **2.** $15xy$; b) $6ab$; c) $2x^2y$. **3.** a) $5xy+2{,}5xy$; b) $-\frac{1}{5}x^2+\left(-\frac{1}{5}x^2\right)$; c) $-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}y$; d) $-4x+5x$. **4.** a) $-0{,}5x^3y^2$; b) $3a^3b^3$; c) $-\sqrt{2}x^3y^2$; d) $-6a^4b^3$. **5.** a) $4y$; b) $-\frac{2}{3}xy^3$; c) $-0{,}02a^3$; d) $2{,}8a^3b^2$. **6.** a) $4a^6b^2$; b) $81x^4y^8$; c) $\frac{1}{27}x^{15}y^3$; d) $\frac{1}{64}a^4b^{20}$. **8.** a) $3xy^2$; b) $5a^2$; c) $0{,}1x^4y$; d) $\frac{1}{3}ab^2$. **9.** a) $-10x^2-5x+1$; b) $ax^2+1{,}2ax-a^2x+\frac{1}{3}a^2$. **10.** a) $2x^2y$;

b) $9a^2b^3$; c) $\frac{1}{3}x^2y^8$; d) $6a^5b^5$. **11.** a) $6{,}65x+5{,}5y$; b) $3{,}8a+9\sqrt{3}y$. **12.** 30. **13.** $-4\frac{2}{45}$. **14.** De $\frac{5}{3}$ ori. **15.** De 1,8 ori. **16.** 5 şi 62. **17.** 25, 21 şi 29. **18.** a) $n=45$; b) $m=5$. **19.** $a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$.

§3. **1.** a) $xy+xz$; b) $yz-xz$; c) $6ab-2ac$; d) $-x^2-\frac{1}{2}xy$. **2.** a) $xu+xv+yu+yv$; b) $ux+uy-vx-vy$; c) $ac-ad-bc+bd$; d) $bx+by-ax-ay$. **3.** a) –9; b) 6; c) 3; d) $3\frac{13}{16}$. **4.** 4 cm^2. **5.** a) $x^3y-\frac{1}{3}x^2y^3$; b) $\frac{4}{3}xy^4+2x^3y^2$; c) $5x^3+0{,}5x^2y-10y^2x-y^3$; d) $x^3y+\frac{1}{4}x^5+\frac{4}{3}y^2+\frac{1}{3}yx^2$. **6.** a) $2a^3+(6-\sqrt{3})a^2-5\sqrt{3}a+3$; b) a^3-b^3; c) $2b^3-3b^2+1$; d) $x^3+x^2y-xy^2-y^3$. **7.** a) $2(x-2)$; b) $a(b+1)$; c) $x(y+x)$; d) $3b(a-c)$. **8.** a) $-(3a-2)$; b) $-(8-1{,}5x)$; c) $-(\sqrt{3}+x)$; d) $-(7-2b)$. **9.** a) $6mn+6m$; b) $12by-9b$; c) $15ax+20bx$; d) $7y^5+21y^3$; e) $4x(x-1)-(1-x)$; f) $y(2-x)+9(x-2)$; g) $5(a-b)+y(b-a)^2$. **11.** a) $4x^2-12xy+9y^2$; b) $9a^2+30ab+25b^2$; c) $3x^2-2\sqrt{6}xy+2y^2$; d) $\frac{1}{9}a^2+\frac{4}{3}ax+4x^2$; e) $3+6\sqrt{3}b+9b^2$; f) $\frac{b^2}{16}-\frac{1}{6}ab+\frac{a^2}{9}$. **13.** a) $(7y+8a)(7y-8a)=49y^2-64a^2$; b) $(5x-\sqrt{7}y)(5x+\sqrt{7}y)=25x^2-7y^2$; c) $(5y-3b)(5y+3b)=25y^2-9b^2$; d) $(0{,}6a+\sqrt{2}b)(0{,}6a-\sqrt{2}b)=0{,}36a^2-2b^2$. **14.** Aria dreptunghiului este cu 10 cm^2 mai mică. **15.** Perimetrul dreptunghiului este cu $4\sqrt{3}$ cm mai mic. **16.** a) $5x^2y(2xy-5y)=10x^3y^2-25x^2y^2$; b) $-7ax\left(-\frac{1}{7}a+2a^2x\right)=a^2x-14a^3x^2$; c) $-\frac{1}{12}xy\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{4}{3}y^2\right)=-\frac{1}{16}x^3y+\frac{1}{9}xy^3$; d) $\frac{5}{6}a^2b\left(\frac{6}{5}b+6\right)$. **17.** a) $5ab(a-5b)$; b) $-6x^4y^4(3y+4x)$; c) $-xy(2-3x^2)$; d) $8y(2xy^3+3)$. **18.** 18, 19, 20. **19.** a) $5x^2-10xy+5y^2$; b) $xy+6-2x-3y$; c) $3x-yx-3y+y^2$; d) $2ab+b+2a+b^2$. **20.** a) $(3a+7)^2=9a^2+42a+49$; b) $(6a-5b)^2=36a^2-60ab+25b^2$; c) $(4x-3y)^2=16x^2-24xy+9y^2$; d) $(\sqrt{6}b+\sqrt{2}a)^2=6b^2+4\sqrt{3}ab+2a^2$. **21.** a) $(9-4\sqrt{5})$ cm^2; b) $(13+4\sqrt{3})$ cm^2. **22.** 32. **23.** 43. **24.** 8 cm. **25.** 12 cm. **28.** a) Adevărat; b) fals; c) fals. **29.** a) 14; b) 194. **30.** $\frac{99}{100}$. **31.** a) 66; b) 4354. **32.** a) 1; b) 1; c) 1024; d) 6561. **35.** 50 de bani.

§4. **3.** a) $(4x+y)^2$; b) $(3y-2x)^2$; c) $(5x+4)^2$; d) $(0{,}5a-2b)^2$. **4.** a) 1; b) $\sqrt{3}$; c) 2; d) $2\sqrt{6}$; e) $3\sqrt{2}$; f) $3\sqrt{2}$. **5.** a) $(3+2\sqrt{5})^2$; b) $(5-4\sqrt{3})^2$; c) $(9+2\sqrt{2})^2$; d) $(8-3\sqrt{3})^2$; e) $(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$; f) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$. **8.** a) $(\sqrt{3}+3\sqrt{3})^2$; b) $(\sqrt{7}+\sqrt{7})^2$; c) $(-2\sqrt{35}+\sqrt{35})^2$; d) $(3\sqrt{7}+\sqrt{7})^2$; e) $(2\sqrt{11}+\sqrt{11})^2$. **10.** a) $3\sqrt{2}-4\sqrt{2}a$; b) $2a$; c) $x-4y$; d) $2(x+\sqrt{5})^2$; e) $-4ax$. **11.** a) $(2a+y)(2a-y-1)$; b) $(3x-y)(3x-y+1)$; c) $(5b-4y)(5b+4y+1)$. **12.** a) 8; b) 62; c) $1\frac{13}{35}$. **13.** –4. **14.** 4. **16.** a) $a^2+b^2=|a|^2+|b|^2+2|a||b|-2|a||b|=(|a|+|b|)^2-(\sqrt{2|ab|})^2=$
$=(|a|+|b|-\sqrt{2|ab|})\cdot(|a|+|b|+\sqrt{2|ab|})$.

Exerciții şi probleme recapitulative. **2.** a) $1{,}5a+4{,}2b$; b) $-4x+y-2$. **3.** a) $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$; b) $b\in\mathbb{R}^*$, $a\in\mathbb{R}$; c) $b\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; d) $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $a\neq b$. **4.** a) $(n\cdot m+k)$ locuri; b) 1596 locuri. **5.** a) $2x^2y^3$. **6.** a) $7x^2y$. **7.** a) $64x^{18}y^{12}$. **8.** a) 12; b) 3; c) 20; d) -42. **9.** a) -46; b) $8-5\sqrt{2}$; c) $4\sqrt{15}+24\sqrt{3}-10\sqrt{5}-60$; d) 162. **10.** a) $y(x^2+3z)$. **11.** a) $\frac{9}{16}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{4}{81}$. **12.** a) $(2y+3x)^2=4y^2+12xy+9x^2$. **14.** a) $(15+11\sqrt{3})$ cm^2. **15.** a) $(51-14\sqrt{2})$ cm^2. **16.** a) 80. **17.** a) $-2a^2+4a+14$; b) $5x-14$. **18.** a) $(x-9y)^2$. **19.** a) Există, $a=999$; b) nu există; c) există, $a=3$; d) nu există. **20.** a) $x=-\frac{1}{2}$; b) $x\in\{\pm2\}$; c) $x\in\{-3;0\}$; d) $x\in\{-1;0;1\}$. **21.** a) $(2-\sqrt{3})$ cm; b) $(3\sqrt{5}-2)$ cm. **22.** 22. **23.** a) $\sqrt{5}$; b) $2\sqrt{21}$. **24.** 11. **25.** 14. **27.** a) 1; b) 36. **28.** 304; 92288. **29.** 0,2. **33.** $2011=1006^2-1005^2$.

Capitolul 3. Funcții

§1. **2.** a) $B(3; 1)$, $C(-1; 1)$, $D(1{,}5; 1)$, $E(2; -1)$; b) $F(-1{,}5; -1)$, $G(0; 3{,}5)$, $H(-2{,}5; -1)$, $I(-1{,}5; 3)$; c) $J(2{,}5; 4)$, $K(4; -1)$, $L(-0{,}5; -1{,}5)$, $M(-2; 0)$; d) $N(0; -1)$, $P(-2; -2{,}5)$, $Q(-3{,}5; 3{,}5)$, $R(2{,}5; -2{,}5)$. **3.** $C(-1; -0{,}5)$, $O(0; 0)$, $D(1; 0{,}5)$, $E(2; 1)$. **4.** $A(3; 0)$, $B(1{,}5; 1)$, $C(0; 2)$, $D(-1{,}5; 3)$. **5.** a) I; b) IV; c) II; d) III. **6.** a) Punctele aparțin dreptei care este paralelă cu axa Oy şi care trece prin punctul $A(2; 0)$. **7.** a) 5 u.l.; b) 25 u.l.; c) 10 u.l.; d) 17 u.l.; e) 29 u.l. **8.** a) $M(2; 4)$; b) $M(2; 2)$; c) $M(0; 3)$; d) $M(-6; 9)$. **9.** a) $A(-3; 4)$; b) $A(12; -10)$; c) $A(6; 6)$; d) $A(-9; -2{,}5)$. **10.** a) $C(1; 0)$, $D(-3; 0)$ sau $C(1; 8)$, $D(-3; 8)$; b) $C(5; 0)$, $D(2; 0)$ sau $C(5; -6)$, $D(2; -6)$. **11.** a) 45 de unități pătrate; b) 24 de unități pătrate. **12.** a) $(-2; \sqrt{5})$; b) $(7{,}4; 4)$; c) $(0{,}6; -8{,}1)$; d) $(-13; -10)$. **13.** a) $\left(3\frac{1}{4}; -4\right)$; b) $(6; 5)$; c) $(0{,}35; 8)$; d) $(-85; 58)$. **14.** a) 21 de unități pătrate; b) 54 de unități pătrate.

§2. **1.** a)

-3	2	0	1	5
3	-2	0	-1	-5

b)

-2	-1	0	1	2	3
-8	-1	0	1	8	27

2. Da. **3.** Da. **4.** a) Da; b) nu; c) nu. **5.** Nu.

10. a) $f\colon B \to A$, $f(x) = -x$; b) $f\colon A \to B$, $f(x) = \frac{1}{x}$; c) $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$; d) $f\colon \{x \mid |x| < 7,\ x \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$.
11. a) $-9{,}6$; b) 14; c) $4\sqrt{2}$; d) $-6{,}5$. **12.** a) 4; b) $-2{,}5$; c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; d) $1\frac{7}{8}$.

13. a)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

b)

x	0	1	4	9	16	25
$f(x)$	0	1	2	3	4	5

c)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7

d)

x	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	-18	-12	-6	0	6	12	18	24

14. a) $f(x) = 10x$; b) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$; c) $f(x) = x + 0{,}6$; d) $f(x) = 2^x$. **15.** a) $f(x) = 5 - x$; b) $f(x) = -|x|$; c) $f(x) = \frac{6}{x}$; d) $f(x) = -\sqrt{x}$. **16.** a) 2, 0,3; b) -4, -6, -8. **17.** $f(x) = x - \left[\frac{x}{10}\right] \cdot 10$.

§3. **5.** a) Da; b) nu; c) da. **9.** a) $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$; b) $f\colon \mathbb{R}_- \to \{1{,}5\}$, $f(x) = 1{,}5$; c) $f\colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$. **10.** a) Da; b) da; c) nu. **11.** a) Graficul este simetric față de axa Oy; b) graficul este simetric față de $O(0; 0)$. **12.** a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$; b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -|x| + 4$; c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| - 2$.

§4. **4.** a) $A(0; 8)$, $B(-10; 0)$; b) $A(0; -6{,}4)$, $B(-2; 0)$; c) $A\left(0; \frac{1}{5}\right)$, $B\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$; d) $A(0; 2)$, $B(\sqrt{2}; 0)$. **6.** a) I, III; b) II, IV; c) I, III; d) II, IV. **7.** Punctul $A(-10; -6)$ nu aparține. **8.** $m = 1{,}6 - 0{,}1t$, unde t este timpul. **9.** $r = 20 - 3x$, unde x este numărul de caiete. **11.** Viteza primei persoane. **12.** a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$; b) $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$; c) $y = -x + \sqrt{3}$; d) $f(x) = 2x - 4{,}5$. **13.** a) Drepte paralele; b) drepte concurente; c) drepte paralele; d) drepte paralele. **14.** a) Obtuz; b) ascuțit; c) ascuțit; d) obtuz. **15.** a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0{,}8x - 2$; b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 4$. **17.** 1) a) 150 m; b) 2 min.; c) 350 m; d) în perioada de timp $[3, 4]$; 3) da. **18.** a) 25 km/h; b) 2,5 min.; c) în perioada de timp $[1{,}5; 2{,}5]$; d) în perioada de timp $[3{,}5; 5]$; e) 10 km/h; f) 25 km/h. **19.** a) 39°; b) 37°; c) a 7 zi; d) 39°; e) 3 zile. **22.** a) $f(x) = 3x - 2$; b) $f(x) = 2x + 8$.

Exerciții și probleme recapitulative. **3.** a) $f(a) = 1$, $f(c) = 3$, $f(d) = 4$, $g(2) = 6$, $g(3) = 8$, $g(4) = 6$; b) $h(1) = 0$, $h(4) = 1$, $h(5) = 5$, $t(a) = f$, $t(d) = j$, $t(e) = i$. **4.** a) $f(c) = 3$, $g(2) = g(4) = 6$; b) $h(3) = h(5) = 5$, $t(a) = f$.

5. a)

x	1	3	5
$f(x)$	4	10	16

b)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	2	0	2	4

c)

x	-3	-2	1	2	3
$f(x)$	3	2	-1	-2	-3

d)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	8	3	0	–1	0	3	8

6. a) $f(1)=\frac{1}{15}$, $f(3)=\frac{1}{5}$, $f(5)=\frac{1}{3}$; b) $f(1)=1$, $f(3)=-1$, $f(5)=-3$; c) $f(1)=3$, $f(3)=1$, $f(5)=-1$; d) $f(1)=3$, $f(3)=5$, $f(5)=7$. **7.** a) $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=2x^2$; b) $f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$, $f(x)=-\frac{1}{4}x$; c) $f\colon \mathbb{Q}^*\to\mathbb{Q}^*$, $f(x)=-\frac{1}{x}$; d) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{|x|}$. **8.** a) $E=\left\{-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}\right\}$; b) $E=\{2, 1, 0, -1\}$; c) $E=\{0\}$; d) $E=\mathbb{R}_+$. **11.** a) $f\colon \{0, 1, 2, 3\}\to\mathbb{N}$, $f(x)=x^2$; b) $f\colon \{-2, -1, 0, 1, 2\}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=2x$. **14.** a) $A\left(\frac{1}{5}; 4\right)$; b) $B\left(\frac{1}{3}; -6\right)$; c) $C\left(-\frac{1}{4}; -3\right)$. **15.** c). **18.** a) $f(x)=2x-1$; b) $f(x)=2x+3$; c) $C(4; -15)$; d) $D(-5; 3)$. **19.** a) $A(4; 4)$; b) nu conține; c) $A(-25; -25)$; d) Punctele $M(a; a)$, $a\in\mathbb{R}_+$.

20. a) $f(x)=\frac{3}{25}x$; b) $f(180)=21{,}6l$, $f(0{,}5)=0{,}06l$, $f(200)=24l$; c) 37,5; 5; $4\frac{1}{6}$.

24. a) $S(x)=\begin{cases}24, & x\le 300,\\ 24+(x-300)\cdot 0{,}096, & x>300;\end{cases}$ $E(x)=\begin{cases}6, & x\le 200,\\ 6+(x-200)\cdot 0{,}24, & x>200.\end{cases}$ b) $S(100)=24$, $S(400)=33{,}6$, $E(100)=6$, $E(250)=18$, $E(300)=30$, $E(400)=54$.

Capitolul 4. Ecuații și inecuații

§1. **1.** a) $20=x+8$; b) $x=\frac{1}{3}(x+2)$. **2.** **C**. **4.** a) 0; b) –1; 1. **5.** a) O soluție; b) nu are soluții. **6.** a) O soluție; b) nu are soluții. **7.** a) Orice număr din mulțimea $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; b) 1. **8.** a) Fals; b) fals; c) fals; d) fals. **9.** a) $\mathbb{R}^*$; b) $\mathbb{R}\setminus\{4\}$; c) $\mathbb{R}$; d) $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$. **10.** a) O soluție; b) nu are soluții; c) un număr infinit de soluții. **11.** a) $\frac{7+x}{2}=7x$; b) $0{,}12x=25$. **12.** $5x-3=3x+1$. **13.** a) De exemplu, 7; b) de exemplu, $\sqrt{3}$. **16.** a) Da; b) nu; c) $S=\mathbb{R}_+$. **17.** a) $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$; b) $\mathbb{R}_+$; c) $\mathbb{R}$; d) $\mathbb{R}^*$. **22.** **C**. **23.** a) Nu; b) nu; c) da; d) da.

§2. **2.** a) $S=\{3\}$; b) $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$; c) $S=\left\{\frac{2}{15}\right\}$; d) $S=\left\{\frac{1}{28}\right\}$; e) $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$; f) $S=\{50\}$; g) $S=\{-0{,}48\}$; h) $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **3.** a) –3; b) –2,56; c) $-\frac{1}{5}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **4.** a) $S=\{3\}$; b) $S=\{4\}$; c) $S=\{7{,}36\}$; d) $S=\left\{-1\frac{3}{4}\right\}$; e) $S=\{5\}$; f) $S=\{-40\}$; g) $S=\left\{-1\frac{1}{17}\right\}$; h) $S=\{5\}$. **8.** a) $S=\{7\}$; b) $S=\{-46\}$. **9.** 3. **10.** $\frac{7}{11}$. **11.** a) 8; b) 9; c) –2; d) –5. **13.** a) 50; b) 40; c) 5; d) 3. **14.** a) $S=\{8\}$; b) $S=\left\{1\frac{1}{5}\right\}$; c) $S=\{2\}$; d) $S=\{6\}$. **17.** a) –1; b) $\frac{1}{2}$; c) 0; d) –10. **18.** a) $m\in\mathbb{R}^*$, $S=\left\{\frac{4}{m}\right\}$; b) $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $S=\left\{-\frac{2}{m+1}\right\}$; c) $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $S=\{0\}$. **19.** a) $S=\{\pm2\}$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\{-1; 5\}$; d) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; e) $S=\{-2{,}8; 3{,}2\}$; f) $S=\{-8{,}3; 16{,}3\}$; g) $S=\varnothing$; h) $S=\{-56; 44\}$.

§3. **1.** a) 6; b) 46. **3.** 6 kg; 12 kg. **4.** 30 de elevi. **5.** 10 min. **6.** 14 min. **7.** 10, 11, 12. **8.** 45. **9.** 24 *l*, 21 *l*, 16 *l*. **10.** 1,5 kg. **11.** La ora 13:00. **12.** 4 km/h. **13.** 76 de colțunași. **14.** 1,5 m. **15.** 6 km. **16.** 2,4 km. **19.** 18 cm.

§4. **2.** c) $5\le 8{,}5$; d) $-6\ge -12$. **3.** a) A; b) F; c) A; d) F; e) F. **4.** a) Da; b) nu; c) da; d) da; e) nu; f) da. **8.** a) A; b) F; c) A; d) F; e) F; f) A. **9.** a) $[2; 5)$; b) $(0; 50]$; c) $[0; 5000]$. **11.** a) $[-2; 6)$; b) $(-\infty; 3)$; c) $[1; +\infty)$; d) $[-1; 0]$; e) $(-3; +\infty)$; f) $(-\infty; 0]$. **13.** a) $a>b$; b) $a<b$; c) $a<b$; d) $a>b$. **14.** Da. **16.** a) –3 și –9; b) –1 și 2; c) 6 și 9; d) 3 și 17; e) 2 și 7; f) –3 și 5; g) –9 și 0; h) –4 și 3. **18.** a) $(-10; 7)$; b) $(-3; 78]$; c) $(-\infty; +\infty)$; d) $(-7{,}3; 3{,}5]$; e) $(-\infty; +\infty)$; f) $(-\infty; 1]$. **19.** a) $(-2; 2)$; b) $(-1; 2)$; c) $\varnothing$; d) $(0; +\infty)$; e) $\varnothing$; f) $\{7\}$. **20.** a) $[0; +\infty)$; b) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; c) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; d) $\mathbb{R}$. **23.** a) $\{2, 3, 4\}$; b) $\{-3, -2\}$; c) $\{4, 5\}$; d) $\{-3, -2\}$. **25.** c).

§5. **1.** a) $S=(6;+\infty)$; b) $S=(-\infty;-5]$; c) $S=(-\infty;3)$; d) $S=[2;+\infty)$; e) $S=(-\infty;-0{,}5)$; f) $S=\varnothing$; g) $S=(-\infty;36]$; h) $S=(-\infty;-3)$. **3.** a) $x\in\left(-\infty;-\frac{5}{8}\right)$; b) $x\in\left(1\frac{1}{4};+\infty\right)$; c) $x\in\left[-\frac{5}{8};+\infty\right)$; d) $x\in(-\infty;2]$. **4.** a) -1; b) 0; c) 4; d) -4. **5.** a) 3; b) 8; c) -3; d) 30. **6.** a) $S=\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$, $\{\sqrt{2},101\}\subset S$; b) $S=[11;+\infty)$, $101\in S$; c) $S=\left(-\infty;-\frac{1}{5}\right)$, $-21\in S$; d) $S=(-\infty;1{,}5)$, $\{-21,-\frac{1}{5},0,\sqrt{2}\}\subset S$. **7.** $x\in(-\infty;-9]$. **8.** $y\in\left(-\infty;1\frac{6}{7}\right]$. **9.** a) $S=\mathbb{R}$; b) $S=\left(-\frac{3}{4},+\infty\right)$; c) $S=(-\infty;-11]$; d) $S=\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$. **10.** a) $S=\left(-\infty;-2\frac{2}{7}\right)$; b) adevărată. **11.** a) $S=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; b) falsă. **13.** a) $BC>8$ cm; b) $0<BC\le 3{,}2$ cm. **14.** 4 cm $<c<$ 16 cm. **16.** a) $S=(2;+\infty)$; b) $S=[-3;+\infty)$. **17.** a) $x\in(-\infty;7)$; b) $x\in(-\infty;-6]$. **18.** $x\in[-5;0)$. **19.** $x\in(0;2]$. **20.** a) $S=(1;4]$; b) $S=(2;+\infty)$. **21.** a) $S=(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$; b) $S=[-5;5]$; c) $S=(-3{,}5;3{,}5)$; d) $S=(-\infty;-6)\cup(6;+\infty)$. **22.** Nu mai departe decât 13,2 km.

Exerciții și probleme recapitulative. **1.** 8. **2.** 4. **3.** a) $S=\{1\}$; b) $S=\{-1\}$; c) $S=\{-4{,}5\}$; d) $S=\{2\}$. **4.** 5 cm, 11 cm. **5.** a) $S=(-11;+\infty)$; b) $S=(-\infty;4]$; c) $S=[0;+\infty)$; d) $S=\left(-\infty;1\frac{2}{3}\right)$. **6.** a) $S=\{-2\}$; b) $S=\{1{,}75\}$; c) $S=\{15\}$; d) $S=\varnothing$. **7.** 400 lei. **9.** a) $S=\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$; b) $S=(-\infty;-1)$, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$. **10.** $\{1,2,3,4,5\}$. **12.** a) $S=\{2\}$; b) $S=\{6\}$; c) $S=\{8\}$; d) $S=\left\{1\frac{1}{5}\right\}$. **13.** a) $AA_1=12$ dm, $AB=4$ dm, $AD=8$ dm. **14.** Nu mai mare de 35 m. **16.** $S=\{-1\}$. **17.** a) $m=4$; b) $m=-2$. **18.** a) $a\in(-\infty;0)$; b) $a\in(0;+\infty)$; c) $a=0$. **19.** 160 de nuci. **20.** $S=[-3;1)$. **21.** a) $S=\{8\}$; b) $S=\{-1\}$.

Geometrie

Capitolul 1. Noțiuni geometrice fundamentale

§1. **3.** a) 1,8 cm; b) 4,6 cm; c) 14,6 cm; d) 8,2 cm. **4.** a) Da; b) da; c) nu; d) nu. **6.** $[aB\cap[bB$ sau $[aB\cap[bA$. **7.** a) K; b) N; c) N; d) M. **9.** 3. **12.** a) Adevărat; b) fals; c) fals; d) fals; e) adevărat; f) fals. **13.** a) 4; b) 6; c) 6; d) 12. **14.** a) 46,6 cm; b) 83,4 cm; c) 48,2 cm. **15.** a) În 7 moduri: a, AB, AC, BC, BA, CA, CB; b) în 13 moduri. **17.** a) 6; b) 10; c) 17.

§2. **4.** a) 3; b) 6; c) 10; d) 45. **6.** a) Necoplanare sau concurente; b) nu; c) concurente sau necoplanare; d) nu. **7.** a) Posibil; b) posibil; c) imposibil; d) posibil. **9.** a) 6; b) 8; c) 8. **10.** Posibil. De exemplu, dreptele suport ale muchiilor unei piramide triunghiulare sunt necoplanare, însă fiecare două sunt concurente. **11.** 30 cm.

§3. **4.** a) Adevărat; b) adevărat; c) fals; d) adevărat. **5.** 28 cm. **6.** 12 cm. **7.** 4 cm, 8 cm sau 12 cm, 24 cm. **10.** De 3 ori.

§4. **3.** a) 50°; b) 65°; c) 70°; d) 144°. **4.** a) $m(\angle DCE)=80°$, $m(\angle ACE)=m(\angle BCD)=100°$; b) $m(\angle ABC)=42°$, $m(\angle CBD)=m(\angle ABE)=138°$. **5.** a) 15°; b) 72°; c) 20°; d) 75°. **6.** a) 135°; b) 30°; c) 55°; d) 154°. **7.** a) 103°10′; b) 162°3′; c) 126°54′3″; d) 76°16′15″. **8.** a) 61°31′. **9.** a) 23°42′. **11.** a) 136° și 44°; b) 68° și 112°. **12.** 22° și 68°. **13.** 34° și 146°. **14.** 130° și 50°. **15.** a) Adevărat; b) fals; c) adevărat; d) adevărat. **16.** 20°, 20°, 160°, 160°. **17.** Coincid sau sunt perpendiculare. **18.** 5°.

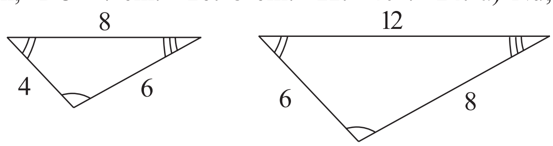
§5. **3.** a) 1; b) 0; c) 4 sau -4; d) pentru orice valoare întreagă.

Exerciții și probleme recapitulative. **4.** a) 23,1 cm; b) 12,4 cm. **6.** a) 5,4 m; b) 8 m. **7.** 3 cm. **8.** $MN=48$ cm, $KP=24$ cm. **9.** 1 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm. **10.** a) $11+7=18$; b) $3\cdot 11-4\cdot 7=5$; c) $6\cdot 11-8\cdot 7=10$. **11.** a) 3,5; b) $\frac{3}{7}$; c) $\frac{1}{3}$. **12.** a) 6; b) 10; 15; c) 5; 6. **14.** a) $[BC]$; b) $[AD]$; c) $\varnothing$; d) $[BE$; e) $[BC]$; f) $[CD$. **15.** $\frac{5}{12}$ cm sau $7\frac{1}{12}$ cm. **16.** a) Adevărat; b) fals; c) fals; d) adevărat.

Capitolul 2. Triunghiuri congruente

§1. **4.** a) 110°; b) 48°; c) 50°; d) 60°. **5.** a) 29,1 cm; b) 34,6 cm; c) 27 cm; d) 24 cm. **6.** a) 88°; b) 25°. **7.** a) $m(\angle A)=70°$, $m(\angle B)=80°$, $m(\angle C)=30°$. **8.** a) 51 cm; b) $15\sqrt{2}$ cm. **9.** a) Nu pot; b) nu pot; c) pot; d) pot. **10.** a) $\angle B$ – cel mai mare, $\angle A$ – cel mai mic. **11.** a) BC, AC, AB. **12.** 60 cm. **13.** 50,4 cm. **14.** 52,7 cm^2. **16.** a) Adevărat; b) adevărat; c) adevărat; d) fals. **17.** 17 cm, 18 cm, 19 cm. **18.** a) Fals; b) adevărat. **20.** 60°, 108°, 12°. **21.** Mai mult de 8 cm şi mai puţin de 40 cm.

§2. **5.** a) $[AC]\equiv[DF]$; b) $\angle B\equiv\angle E$. **6.** $AO=BO=8$ cm, $BC=7$ cm. **10.** 8 cm. **11.** 40°. **14.** a) Nu; b) nu. **15.** $AC=9$ cm, $BC=10$ cm. **18.** Nu (vezi cazul din desen).



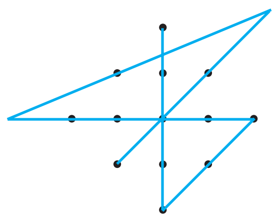
§3. **1.** $AD=9$ cm, $DC=6$ cm, $BD=6$ cm. **2.** $BD=6$ cm, $CD=5$ cm. **4.** 12 cm. **6.** 35°. **7.** 100°. **9.** $AB=7$ cm. **10.** $BE=10$ cm.

Exerciții şi probleme recapitulative. **1.** a) 72°; b) 62°; c) 99°; d) 56°. **2.** 7 cm. **3.** a) 90°; b) 148°. **5.** a) 80°; b) 36°; c) 90°; d) 90°. **6.** 20° şi 70°. **7.** 0,9 cm. **8.** 34 cm sau 38 cm. **9.** 17 cm. **10.** Cazul I: 8 cm, 10 cm; cazul II: 9 cm, 9 cm. **11.** 21°15′. **21.** a) *Indicație*. $180°-19°\cdot 9=9°$. **22.** a) 50°; b) 52°30′. **23.** *Indicație*. Utilizați inegalitatea dintre laturile unui triunghi. **24.** $\frac{2}{3}$.

Capitolul 3. Paralelism și perpendicularitate

§1. **4.** 7. **5.** 55°. **6.** 88°. **7.** a) 35; b) 20; c) 450; d) 15. **9.** $y=-\frac{2}{3}x+2$ este ecuația dreptei AB. Fie $-\frac{2}{3}x+b$ ecuația dreptei MN, unde $MN\parallel AB$. Întrucât $C(6;\,0)\in MN \Rightarrow\ \Rightarrow 0=-\frac{2}{3}\cdot 6+b\Rightarrow b=4$. Prin urmare, $y=-\frac{2}{3}x+4$ este ecuația dreptei MN. Astfel, de exemplu, pentru $x_1=0$, $x_2=3$ obținem punctele $M(0;\,4)$, $N(3;\,2)$. **10.** 42°, 42°, 42°, 42°, 138°, 138°, 138°, 138°.

14.



§2. **1.** a) 1,5 cm, 2 cm, 2,5 cm; b) $\frac{5}{16}$ cm, $\frac{3}{7}$ cm, $\frac{2}{5}$ cm; c) $\sqrt{3}$ cm, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ cm, $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ cm; d) 1,(2) cm, 1,8(3) cm, 0,9(4) cm. **2.** a) 23,(8) cm; b) $18\sqrt{3}$ cm; c) 14,(8) cm. **3.** 45°, 60°, 75°. **4.** $2\sqrt{7}$ cm. **6.** 12 cm, 14 cm, 14 cm. **7.** 10 cm, 10 cm, 12 cm. **8.** 5 cm, 5 cm, 6 cm, 6 cm. **9.** a) $AC=9$ cm, $BC=10$ cm; b) $AC=10{,}8$ cm, $AB=8{,}2$ cm; c) $AC=6\sqrt{5}$ cm, $BC=5\sqrt{5}$ cm; d) $AC=10{,}(4)$ cm, $AB=8{,}(7)$ cm. **10.** 22,(6) cm. **11.** 29,2 cm.

§3. **2.** a) $AM=8$ cm. **3.** a) $M_1(\sqrt{3};\,0)$. **4.** a) 3; b) 2. **5.** a) 7 cm; b) 60°. **6.** a) 40°; b) 100°. **7.** a) 48°; b) 55°. **8.** 3. **11.** a) $C_1(3;\,4)$; b) $B_1=C$; c) $A_1=C$. **12.** a) 35°; b) 6 cm.

§4. **3.** a) 35°; b) 40°; c) 40°26′; d) 8°30′. **5.** a) 48°; b) 55°; c) 50°; d) 20°. **8.** a) 150°; b) 30°. **10.** a) 40°; b) 80°. **14.** a) 120°; b) 15 cm.

Exerciții şi probleme recapitulative. **2.** 90°. **3.** 65°. **4.** a) Paralele; b) paralele. **5.** 112°30′. **7.** 15 cm. **8.** 55°30′. **9.** 54°30′. **10.** 19°. **16.** $MK=LN=3$ cm, $KL=6$ cm. **20.** 49°.

Capitolul 4. Proprietăți ale triunghiurilor

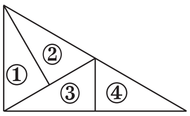
§1. **1.** a) 59°; b) 40°; c) 45°. **2.** a) 58°; b) 45°; c) 112°. **3.** a) 95°; b) 100°; c) 60°. **4.** 120°. **5.** 90°, 135°, 135°. **6.** 90°, 110°, 160°. **7.** 360°. **8.** 30°, 70°, 80°. **9.** 45°, 50°, 85°. **10.** a) 35°, 55°; b) 45°, 95°; c) 60°, 50°. **11.** 44°. **12.** 40°, 60°, 80°. **13.** a) 35°; b) 24°. **14.** 45°, 60°, 75°.

§2. **2.** a) Fals; b) fals; c) adevărat; d) fals. **5.** a) Dreptunghic; b) ascuțitunghic; c) obtuzunghic. **6.** 3 cm. **7.** a) $AO=6$ cm, $BO=8$ cm; b) $AM=6\sqrt{3}$ cm, $BN=9\sqrt{3}$ cm; c) $OM=4$ cm, $ON=5$ cm; d) $AO=2\sqrt{5}$ cm, $BO=2\sqrt{6}$ cm. **8.** a) 60°, 80°, 40°; b) $m(\angle BAM)=37°$, $m(\angle BCM)=18°$; c) $m(\angle AMC)=140°$, $m(\angle BMC)=113°$; d) $m(\angle A)=m(\angle B)=80°$, $m(\angle C)=20°$. **9.** a) $m(\angle BAM)=20°$, $m(\angle MAC)=40°$; b) $m(\angle BAM)=30°$, $m(\angle MAC)=20°$. **10.** a) 12°; b) $m(\angle ACN)=40°$, $m(\angle BCN)=25°$; c) 63°; d) 62°. **11.** a) 44°; b) 55°; c) 108°. **12.** a) $4\sqrt{7}$ cm; b) 24 cm. **14.** 50°.

§3. **2.** a) 6 cm; b) 5,5 cm; c) 10 cm; d) $\sqrt{5}$ cm. **3.** a) 50°; b) 62°; c) 50°; d) 56°. **5.** a) 92°; b) 70°; c) 70°; d) 44°. **6.** a) 6 cm; b) 4,5 cm; c) $2\sqrt{3}$ cm; d) 2,(1) cm. **7.** a) $m(\angle 1)=58°$, $m(\angle 2)=m(\angle 5)=30°30'$, $m(\angle 3)=m(\angle 4)=90°$, $m(\angle 6)=m(\angle 7)=59°30'$, $m(\angle 8)=61°$. **8.** 138°. **9.** $m(\angle 1)=130°$, $m(\angle 2)=40°$, $m(\angle 3)=25°$. **10.** $m(\angle 1)=111°$, $m(\angle 2)=69°$, $m(\angle 3)=76°30'$, $m(\angle 4)=103°30'$. **11.** a) 4 cm, 12 cm, 12 cm; b) 7 cm, 17,5 cm, 17,5 cm. **12.** $2\sqrt{2}$ cm. **13.** $CM=DM=9$ cm. **14.** 40°. **17.** 16 cm.

§4. **3.** a) 60°; b) 120°; c) 125°; d) 60°. **4.** $8\sqrt{3}$ cm. **5.** 15 cm^2. **6.** 8 cm. **7.** 6 cm. **8.** 4 cm. **9.** 7,5 cm. **10.** 21 cm. **11.** 2,8 cm. **12.** 120°, 60°. **13.** 8 cm^2. **14.** 36 cm^2. **15.** 8 cm^2.

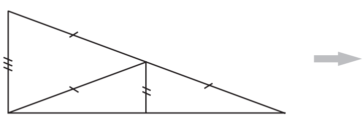
§5. **1.** a) 55°; b) 50°; c) 148°; d) 62°. **2.** a) 5 cm; b) 8 cm; c) $\sqrt{2}$ cm; d) 4 cm. **3.** a) 12 cm; b) $\sqrt{5}$ cm; c) 4,5 cm; d) 3. **4.** a) 32°; b) 40°; c) 50°; d) 84°. **5.** a) 8 cm; b) 12 cm; c) 11 cm; d) $2\sqrt{5}$ cm. **6.** a) 11 cm; b) 9 cm; c) 24 cm; d) 10 cm. **7.** a) $AB=14{,}5$ cm, $PM=9{,}5$ cm, $QN=5$ cm; b) $BM=MN=2\sqrt{2}$ cm, $NC=4\sqrt{2}$ cm. **8.** a) $DF=2\sqrt{5}$ cm, $EG=4\sqrt{5}$ cm, $BC=\dfrac{11\sqrt{5}}{2}$ cm; b) $AD=9{,}6$ cm, $DE=2{,}4$ cm, $EB=4$ cm. **9.** 3 cm. **10.** $16\sqrt{3}$ cm. **11.** a) 6 cm; b) 40 cm. **12.** $\frac{1}{2}$. **13.** 20 cm^2. **14.** a) 2,5 cm; b) 2,5 cm. **15.**



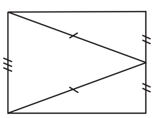
§6. **7.** $A_1(2;-3)$; $B_1(-1;-4)$; $C_1(-2;7)$. **13.** a) 4; b) 1; c) 2; d) 3. **14.** a) $M(2;2)$; b) $M(2;2)$; c) $M(3;8)$; d) $M(1{,}5;-5)$. **15.** a) $A_1(3;3)$; b) $A_1(2;-4)$; c) $A_1(4;-3)$; d) $A_1(5;-1)$. **16.** a) $M(-3;0)$; b) $M(0{,}5;0{,}5)$; c) $M(-3;-8)$; d) $M\left(\frac{1}{3};-1{,}5\right)$. **17.** a) $A_1(2;-7)$, $B_1(-3;-1{,}5)$, $C_1(2\sqrt{2};4)$; b) $A_1(-2;7)$, $B_1(3;1{,}5)$, $C_1(-2\sqrt{2};-4)$. **18.** 55°. **20.** Isoscele. **21.** a) 12 cm; b) 15 cm. **22.** Paralele echidistante (situate la aceeași distanță una de alta). **23.** 12 cm.

Exerciții și probleme recapitulative. **2.** a) 80°; b) 140°; c) 100°. **3.** a) 105°, 105°, 150°; b) 80°, 100°, 100°; c) 105°, 110°, 145°; d) 90°, 120°, 150°. **4.** a) Adevărat; b) fals; c) fals. **5.** a) $AG=8$ cm, $BG=6$ cm; b) $BG=2{,}2$ cm, $CG=2$ cm; c) $A_1G=6$ cm, $B_1G=5$ cm; d) $A_1G=0{,}5$ cm, $C_1G=0{,}8$ cm. **6.** a) 50°, 60°, 70°; b) $m(\angle BAO)=35°$, $m(\angle COA)=140°$; c) $m(\angle BOC)=115°$, $m(\angle AOB)=125°$; d) 360°. **7.** a) 60°, 60°; b) 45°, 45°; c) 40°, 40°. **8.** a) Isoscel; b) echilateral; c) isoscel; d) echilateral; e) dreptunghic. **9.** 16,5 cm. **15.** a) $\angle B$, $\angle A$, $\angle C$; b) $\angle B$, $\angle C$, $\angle A$. **20.** a) 60°, 120°, 180°; b) 240°, 72°, 48°. **21.** a) $AA_1=9$ cm; $BB_1=7{,}5$ cm; b) $BB_1=18$ cm, $CC_1=15$ cm; c) $A_1G=2{,}1$ cm; $B_1G=1{,}9$ cm; d) $AA_1=12{,}6$ cm, $CC_1=10{,}5$ cm. **22.** a) 20°, 50°, 110°; b) 50°, 60°, 70°. **23.** $6\sqrt{5}$ cm. **24.** 5,5 cm. **25.** 60°, 30 cm. **26.** 50°.

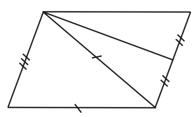
29.



a)



b)



30. Echilateral.

Cuprins

Manual

CLASA 7