Cuprins

1 Elemente de algebra **9**

1.1 Permutări, Aranjamente, Combinări 9

1.2 Binomul lui Newton 10

1.3 Matrice 11

1.3.1 Operaţii cu matrice 12

1.3.2 Determinanţi de ordin $n,\ n > 3$ 13

1.4 Rangul unei matrice 17

1.5 Determinarea matricei inverse 19

1.6 Sisteme algebrice liniare 23

1.7 Algoritmul lui Gauss 24

1.8 Aplicaţii 29

2 Geometrie analitică **33**

2.1 Conice 33

2.1.1 Intersecţia dintre o conică şi o dreaptă 33

2.1.2 Cercul 34

2.1.3 Elipsa 35

2.1.4 Hiperbola 37

2.1.5 Parabola 38

2.2 Repere în spaţiu 39

2.3 Mărimi scalare şi vectoriale 39

2.3.1 Operaţii cu vectori 40

2.3.2 Produsul scalar a doi vectori 41

2.3.3 Produsul vectorial a doi vectori 42
2.4 Planul în spaţiu 43
2.4.1 Ecuaţia dreptei în spaţiu 46
2.4.2 Poziţiile relative ale dreptelor şi planelor 47
2.4.3 Arii şi volume în spaţiu 49
2.5 Suprafeţe de gradul doi 50
2.5.1 Cuadrice 52
2.6 Aplicaţii ale geometriei analitice în ştiinţă şi în practica inginerească 56
2.7 Aplicaţii 57

3 Analiză matematică **61**
3.1 Legatura dintre matematică şi restul ştiinţelor 61
3.2 Funcţii reale de o variabilă reală 63
3.2.1 Noţiunea de funcţie 63
3.2.2 Clasificarea funcţiilor 63
3.2.3 Operaţii cu funcţii 65
3.3 Tipuri de funcţii 66
3.3.1 Funcţia polinomială 66
3.3.2 Funcţia putere 67
3.3.3 Funcţia exponenţială 67
3.3.4 Funcţia logaritmică 69
3.3.5 Funcţiile trigonometrice 70
3.4 Şiruri de numere reale 75
3.4.1 Proprietăţi ale şirurilor convergente 77
3.4.2 Operaţii cu şiruri convergente 78
3.4.3 Numărul e 79
3.4.4 Şiruri recurente 80
3.5 Limita unei funcţii 81
3.5.1 Operaţii cu funcţii care au limită finită 82
3.6 Funcţii continue 83

3.7 Derivata unei funcţii 85
3.7.1 Derivate de ordin superior 92
3.7.2 Proprietăţi ale funcţiilor derivabile 92
3.8 Extreme locale 93
3.9 Asimptote 95
3.10 Reprezentarea grafică a funcţiilor 97
3.11 Funcţii reale de două variabile 100
3.12 Funcţii de trei sau mai multe variabile 103
3.13 Derivate parţiale 103
3.13.1 Derivate parţiale de ordin superior 105
3.14 Limita funcţiilor de mai multe variabile reale 106
3.15 Noţiunea de continuitate pentru funcţii reale de mai multe variabile reale . 108
3.16 Diferenţiabilitatea funcţiilor de mai multe variabile 109
3.17 Derivatele parţiale ale funcţiilor compuse 113
3.18 Puncte de extrem pentru funcţii de mai multe variabile 114
3.18.1 Extreme condiţionate 117
3.19 Aplicaţii 119

4 Elemente de teoria aproximării 123

4.1 Serii de numere şi funcţii 123
4.1.1 Serii de puteri 125
4.1.2 Operaţii cu serii de puteri 126
4.1.3 Seria Taylor 126
4.2 Aproximarea datelor prin metode de interpolare 132
4.2.1 Semnificaţia noţiunii de interpolare 133
4.2.2 Polinomul de interpolare al lui Lagrange 133
4.2.3 Polinomul de interpolare al lui Newton 135
4.3 Metoda celor mai mici pătrate (Ajustări) 137
4.4 Categorii ale metodei celor mai mici pătrate 139
4.4.1 Metoda celor mai mici pătrate neponderate 140

4.4.2 Metoda celor mai mici pătrate ponderate . . . 145
4.5 Aplicaţii . . . 148

5 Calculul integral 153

5.1 Primitive . . . 153
5.2 Metode de determinare ale primitivelor . . . 156
5.3 Integrala definită-interpretarea geometrică . . . 162
5.3.1 Proprietăţi ale integralei definite . . . 165
5.3.2 Integrale improprii . . . 167
5.4 Determinarea lungimii curbelor . . . 170
5.5 Determinarea ariilor suprafeţelor . . . 173
5.6 Determinarea volumelor corpurilor de rotaţie . . . 177
5.7 Integrale care depind de un parametru . . . 178
5.8 Integrale multiple . . . 180
5.8.1 Integrala dublă . . . 180
5.8.2 Calculul integralei duble . . . 181
5.9 Proprietăţile integralei duble . . . 190
5.10 Aplicaţii ale integralei duble . . . 191
5.11 Aplicaţii . . . 195

6 Ecuaţii diferenţiale 199

6.1 Aplicaţii care conduc la ecuaţii diferenţiale ordinare . . . 199
6.2 Noţiuni fundamentale . . . 201
6.3 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi rezolvabile efectiv . . . 205
6.3.1 Ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile . . . 205
6.3.2 Ecuaţii diferenţiale omogene în sensul lui Euler . . . 207
6.3.3 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi . . . 209
6.3.4 Ecuaţii diferenţiale de tip Bernoulli . . . 212
6.3.5 Ecuaţii diferenţiale de tip Ricatti . . . 213
6.4 Aplicaţii ale ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întâi . . . 214
6.4.1 Răcirea unui lichid . . . 214

6.4.2 Dinamica unei populaţii 214
6.4.3 Ecuaţia tractricei 217
6.4.4 Creşterea plantelor în medii controlate 219
6.4.5 Disiparea căldurii printr-o conductă 221
6.5 Ecuaţii diterenţiale de ordin superior rezolvabile efectiv 223
6.5.1 Problema pendulului matematic 223
6.5.2 Ecuaţia de tipul $y^{(n)} = f(x)$ 224
6.5.3 Ecuaţii de tipul: $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ 225
6.5.4 Ecuaţii de tipul $F(x,\ y^{(k)},\ y^{(k+1)},\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0,\ 1 \leq k \leq n$ 226
6.5.5 Ecuaţii de tipul $F\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0$ 226
6.5.6 Ecuaţii de tipul $F(y, xy', x^2y'', \ldots, x^ny^{(n)}) = 0$ 227
6.6 Ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi 228
6.6.1 Probleme practice care conduc la ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi 228
6.6.2 Ecuaţii diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi 229
6.6.3 Ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi 231
6.7 Sisteme de ecuaţii diferenţiale 235
6.7.1 Modelul populaţiilor 235
6.8 Sisteme de ecuaţii diferenţiele cu coeficienţi constanţi 236
6.8.1 Metoda reducerii la o ecuaţie diferenţială de ordinul n 237
6.8.2 Metoda ecuaţiei caracteristice 238
6.9 Aplicaţii 244

7 Probabilităţi **249**

7.1 Noţiuni de bază 249
7.2 Relaţii şi operaţii cu evenimente 251
7.3 Noţiunea de probabilitate. Proprietăţi 252
7.4 Probabilităţi condiţionate 255

7.5 Scheme clasice de probabilităţi . . . 259
7.5.1 Schema lui Poisson . . . 259
7.5.2 Schema lui Bernoulli (binomială sau a bilei revenite) . . . 260
7.5.3 Schema lui Bernoulli cu mai multe stări (polinomială) . . . 261
7.5.4 Schema bilei nerevenite . . . 262
7.6 Variabile aleatoare. Definiţie. Operaţii . . . 263
7.7 Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare . . . 265
7.8 Densitatea de repartiţie a unei variabile aleatoare continue . . . 268
7.9 Reprezentări grafice ale funcţiei de probabilitate . . . 271
7.10 Repartiţii clasice discrete . . . 272
7.11 Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare . . . 273
7.11.1 Valoarea medie (Speranţa matematică) . . . 273
7.11.2 Mediana . . . 276
7.11.3 Modulul . . . 278
7.11.4 Dispersia unei variabile aleatoare . . . 279
7.12 Principalele repartiţii clasice discrete . . . 282
7.13 Elemente de statistica măsurătorilor . . . 284
7.13.1 Distribuţia Gauss şi proprietăţile ei . . . 285
7.14 Funcţii speciale, densităţi şi funcţii de repartiţie . . . 288
7.15 Aplicaţii . . . 310

8 Produsul gnuplot şi aplicaţiile sale 317
8.1 Descrierea pachetului de programe . . . 317
8.1.1 Comenzi importante . . . 321
8.1.2 Calcule realizate cu produsul gnuplot . . . 327
8.1.3 Exemple de reprezentări grafice . . . 332

9 Anexe 339
9.1 Anexa la Capitolul 1 . . . 339
9.2 Anexa la Capitolul 2 . . . 345
9.3 Anexa la Capitolul 3 . . . 357

9.3.1 Secanta şi tangenta la o curbă în sensul analizei matematice 359
9.3.2 Derivata după o direcţie 361
9.4 Anexa la Capitolul 5 361
9.4.1 Integrala triplă 363
9.5 Anexa la Capitolul 7 364

Index **366**

Bibliografie **372**

Capitolul 1

Elemente de algebra

În acest capitol se vor reaminti unele noţiuni de algebră cunoscute, uneori folosindu-se o nouă metodă de rezolvare a problemelor apărute. Aceste noţiuni de algebră au o deosebita importanţa pentru capitolele următoare precum şi din punct de vedere al aplicaţiilor practice directe ale acestora.

1.1 Permutări, Aranjamente, Combinări

Se consideră $A = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$ o mulţime cu n elemente, $n \in \mathbf{N}$

Definiţia 1.1.1 *Prin* **permutări de** n **elemente** *ale mulţimii A se înţelege mulţimea tuturor grupărilor ce se pot forma cu n elemente astfel încât două grupări diferă între ele prin ordinea elementelor.*

Numărul permutărilor unei mulţimi cu n elemente se notează cu P_n şi formula de calcul este $P_n = n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.

Definiţia 1.1.2 *Prin* **aranjamente de** n **elemente luate câte** k, $(n,\ \ k \in \mathbf{N}^*,\ \mathbf{n \geq k})$ *se înţelege mulţimea tuturor grupărilor ce se pot forma din cele n elemente astfel încât:*

(i) fiecare grupare să conţină k elemente distincte;

(ii) două grupări diferă între ele prin natura şi ordinea elementelor.

Numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k se notează cu A_n^k şi
$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$ sau

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definiţia 1.1.3 *Prin* **combinări de** n **elemente luate câte** k, $(n,\ k \in \mathbf{N},\ \mathbf{n \geq k})$ *se înţelege mulţimea tuturor grupărilor ce se pot forma din cele* n *elemente astfel încât :*

(i) fiecare grupare să conţină k *elemente distincte;*

(ii) două grupări diferă între ele prin natura elementelor.

Numărul combinărilor de n elemente luate câte k se notează cu C_n^k şi
$C_n^k = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\dots k}$ sau

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Câteva dintre cele mai uzuale proprietăţi ale combinărilor sunt:

(i) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

(ii) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Exerciţiul 1.1.1 *Să se demonstreze afirmaţiile de mai sus.*

1.2 Binomul lui Newton

Expresia de calcul a binomului lui Newton este:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-k} a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n \qquad (1.1)$$

Termenul general al binomului este: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, iar C_n^k este *coeficientul binomial* al binomului lui Newton.
Proprietăţi ale coeficineţilor binomiali ai binomului lui Newton:

(i) Coeficienţii binomiali ai termenilor egali depărtaţi de extreme sunt egali.

(ii) Suma coeficienţilor binomiali este 2^n $(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n)$.

(iii) Suma coeficienţilor binomiali de ordin par este egală cu suma coeficienţilor de ordin impar şi este egală cu 2^{n-1} ($C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$).

Pentru demonstrarea celei de-a două proprietăti se consideră în relaţia (1.1) pentru $a = b = 1$

Exemplul 1.2.1 *Să se afle coeficientul lui* x^8 *din dezvoltarea* $\left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)^{10}$.

Rezolvare: Termenul general al dezvoltării este $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ adică

$$T_{k+1} = C_{10}^k (3x^2)^{10-k} \left(-\frac{2}{x}\right)^k = C_{10}^k (-1)^k 3^{10-k} 2^k x^{20-3k}.$$

Pentru a determina coeficientul lui x^8 trebuie să se determin k; adică să se rezolve ecuaţia exponenţială $x^{20-3k} = x^8 \iff k = 4$. Coeficientul lui x^8 este $C_{10}^4 3^6 2^4$.

1.3 Matrice

Fie o companie care procesează m tipuri de materii prime obţinând n tipuri de produse finite. Se notează cu a_{ij} cantitatea de materie primă i, $i = \overline{1,m}$ necesară producerii unei unităţi din produsul j, $j = \overline{1,n}$. Tabloul dreptunghiular:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

arată modul în care se consumă materia primă. Astfel linia i arată cum se distribuie materia primă i pentru producerea unei unităţi din fiecare produs. Coloana j arată cât din fiecare materie primă este necesară pentru producerea unei unităţi de produs j.

Definiţia 1.3.1 *Fie* m, n *două numere reale,* $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ *şi* $m \times n$ *numere reale date sub forma (1.2), se spune că tabloul (1.2) este o* **matrice de tipul** $m \times n$.

Fie M şi N două mulţimi. Din punct de vedere matematic matricea este o funcţie $\mathcal{M} : M \times N \to \mathbf{R}$ care asociază în mod unic oricărei perechi de elemente (i, j) numărul real a_{ij}.

Notaţii: Multimea tuturor matricelor cu m linii şi n coloane cu elemente numere reale se notează $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$. Elementele mulţimii se notează cu majuscule ($A,\ B,$ etc.) Elementul generic al matricei A este a_{ij}.

Matricea cu toate elementele nule se numeşte matrice nulă şi se notează cu $\mathbf{O}$. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$. *Matricea transpusă* matricei A se notează $\tilde{A}$ şi se obţine prin inversarea liniilor cu coloanele matricei A.

(i) dacă $n = 1$ matricea obţinută se numeşte matrice coloană;

(ii) dacă $m = 1$ matricea obţinută se numeşte matrice linie;

(iii) dacă $m = n$ matricea obţinută se numeşte matrice pătrată.

1.3.1 Operaţii cu matrice

Fie $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m};j=\overline{1,n}}$ şi $B = (b_{ij})_{i=\overline{1,m};j=\overline{1,n}}$

(i) se spune că două matrice sunt egale dacă sunt de acelaşi tip şi $a_{ij} = b_{ij}$ oricare ar fi $i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$.

(ii) *Adunarea matricelor:* $A+B = C$, $C = (c_{ij})_{i=\overline{1,m};j=\overline{1,n}}$ unde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Adunarea matricelor este: comutativă, asociativă şi elementul neutru este matricea nulă.

(iii) *Înmulţirea matricelor cu un scalar:* Fie $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{i=\overline{1,m};j=\overline{1,n}}$.

(iv) *Înmulţirea a două matrice:* Deoarece matricele ca obiect matematic sunt funcţii iar pentru a compune două funcţii, codomeniul primeia trebuie să coincidă cu domeniul celei de-a doua, nu se pot înmulţi orice fel de matrice. Mai exact trebuie ca numărul de coloane a primei matrice să coincidă cu numărul de linii a celei de-a doua. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. Atunci $C = A \times B$ unde $C \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbf{R})$ cu
$C = (c_{ij})_{i=\overline{1,m};j=\overline{1,p}};\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

Exerciţiul 1.3.1 *Să se dea un exemplu de două matrice A şi B pentru care $A \cdot B \neq B \cdot A$.*

1.3.2 Determinanţi de ordin $n,\ n > 3$

În cele ce urmează se va defini determinantul de ordin $n,\ n > 3$ Calculul determinanţilor de ordin doi şi trei este descris în Anexa acestui capitol. Rezolvarea directă a unui sistem liniar de ecuaţii algebrice de ordin n presupune calcule destul de laborioase. Pornind de la analiza formulelor care dau determinanţii de ordin 2 sau 3 se va defini determinantul de ordin n; apoi folosind determinanţii de ordin n se obţin formule de tip Cramer pentru rezolvarea sistemelor de n ecuaţii liniare cu n necunoscute. Se constată că termenii determinanţilor de ordinul doi sau trei sunt produse de elemente aparţinând la linii şi coloane distincte. În plus orice astfel de produs este termen în formula determinantului. Considerăm o matrice pătratică de ordinul n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Pentru a forma toate produsele posibile de n elemente aparţinând la linii şi coloane distincte este necesar să folosim permutările de n elemente. Fie $\sigma \in S_n$ atunci termenul corespunzător acestei permutări este $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$. Determinantul ataşat matricei (1.3) este:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.4}$$

formula de calcul a determinantului de ordin n este

$$detA = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \tag{1.5}$$

Observaţia 1.3.1 *Suma din relaţia (1.5) are $n!$ termeni.*

Deoarece aplicarea definiţiei de mai sus este greoaie în cazul în care determinantul este de ordin mare pentru calculul efectiv al determinantului se vor folosi proprietăţile acestuia.

Proprietăţile determinanţilor

Fie matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Propoziţia 1.3.1 *Determinantul matricei A este egal cu determinantul matricei transpuse $\overline{A}$.*

Observaţia 1.3.2 *Orice proprietate a determinantului valabilă pentru liniile sale este adevărată şi pentru coloanele sale.*

Propoziţia 1.3.2 *Dacă toate elementele unei linii a unei matrice pătratice sunt nule atunci determinantul matricei este nul.*

Propoziţia 1.3.3 *Dacă într-o matrice pătratică schimbăm două linii între ele atunci obţinem o matrice a cărei determinant este opusul determinantului matricei iniţiale.*

Propoziţia 1.3.4 *Dacă două linii ale unei matrice coincid atunci determinantul matricei este nul.*

Propoziţia 1.3.5 *Fie $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ şi matricea A de forma:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

atunci,

$$detA = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Spre deosebire de înmulţirea unei matrice cu un scalar, când trebuie ca toate elementele matricei să fie înmulţite cu scalarul respectiv, pentru cazul înmulţirii unui determinat cu un scalar este suficient ca o linie sau o coloană să fie înmulţită cu scalarul respectiv.

Propoziţia 1.3.6 *Dacă două linii ale unei matrice sunt proporţionale atunci determinantul matricei este nul.*

Proprietatea de mai sus este consecinţă a celor două precedente.

Propoziţia 1.3.7 *Fie o matrice pătratică de ordinul n de forma:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \dots & a'_{in} + a''_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

atunci

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Propoziţia 1.3.8 *Determinantul unei matrice pătratice nu-şi schimbă valoarea dacă la elementele unei linii se adaugă elementele altei linii înmulţite în prealabil cu un număr $k \in \mathbf{R}$; adică:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{i1} & a_{12} + ka_{i2} & \dots & a_{1n} + ka_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

O altă modalitate de calcul a determinanţior de ordin n.

Procedeul de calcul ce va fi descris în cele ce urmează reduce calculul determinantului de ordinul n la calculul unui număr de determinanţi de ordin $n-1$. Fie determinantul:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinantul de ordin $n-1$ care se obţine suprimând linia i şi coloana j din determinantul d se numeşte *minorul elementului* a_{ij} şi se notează cu d_{ij}. Numărul

$$\delta_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}$$

se numeşte *complementul algebric* al elementului a_{ij} în determinantul d.

Teorema 1.3.1 *Fie d un determinant de ordinul n. Atunci pentru orice i, $i = \overline{1,n}$, are loc egalitatea:*

$$d = a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2} + \ldots + a_{in}\delta_{in} \tag{1.6}$$

Observaţia 1.3.3 *În teorema de mai sus s-a calculat determinantul d dezvoltând după elementele liniei i. Datorită proprietăţilor determinantilor dezvoltarea se poate face după orice linie respectiv, orice coloană.*

Deci calculul determinantului de ordin n se reduce la calculul a n determinanţi de ordin $n-1$. Pentru a avea cât mai puţini determinanţi de ordinul $n-1$ de calculat se dezvoltă determinantul de ordin n după elementele liniei sau coloanei care are cele mai multe zerouri.

Exemplul 1.3.1 *Să se calculeze determinantul:*

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Dezvoltând după linia a doua rezultă

$$d = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

deoarece două linii coincid.

Determinanţi Vandermonde

Prin determinant de tip Vandermonde se înţelege un determinant de tipul:

$$V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \vdots & & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

Acest tip de determinanţi se calculează după formula:

$$V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j).$$

1.4 Rangul unei matrice

Se consideră o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Se aleg din matricea A elementele care se găsesc la intersecţia a r linii şi r coloane. Se formează un determinant de ordinul r numit *minor de ordinul r* al matricei A. Numărul minorilor de ordin r care se pot obţine din matricea A este de $C_m^r C_n^r$.

Definiţia 1.4.1 *Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o matrice nenulă. Se spune că matricea A are rangul r (rang $A = r$) dacă A are un minor nenul de ordinul r iar toţi minorii lui A de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt nuli.*

Observaţia 1.4.1 Prin convenţie rangul matricei nule este zero.

(i) $rang\ A \leq min\{m, n\}$;

(ii) *rangul produsului a două matrice este mai mic sau egal cu rangul fiecărei matrice.*

Pentru determinarea rangului unei matrice se cunosc mai multe metode. În continuare se va prezenta metoda transformărilor elementare. Se numesc transformări elementare următoarele operaţii care se fac cu liniile (coloanele) unei matrice:

(i) Schimbarea a două linii (coloane) între ele;

(ii) Înmulţirea elementelor unei linii (coloane) cu un număr real nenul;

(iii) Adunarea la elementele unei linii (coloane) elementele altei linii (coloane) înmulţite cu un număr real nenul.

Matricele obţinute prin transformări elementare se numesc *matrice echivalente.*

Teorema 1.4.1 *Matricele echivalente au acelaşi rang.*

Determinarea rangului constă în parcurgerea următorilor paşi:

(i) Se efectuează transformări elementare asupra matricei A până se obţine o matrice echivalentă cu A (notată $\tilde{A}$) care să aibă elemente nenule doar pe prima diagonală;

(ii) Rangul matricei A este egal cu numărul elementelor nenule de pe prima diagonală a matricei $\tilde{A}$.

Exemplul 1.4.1 *Să se determine rangul matricei:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Pentru a determina matricea echivalentă care are elemente nenule doar pe prima diagonală se pot face trensformări elementare şi pe linii şi pe coloane.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -C_1+C_2 \\ -C_1+C_3 \\ -C_1+C_4 \\ -C_1+C_5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3L_1+L_2 \\ \\ -5L_1+L_4 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} L_4+L_5 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} C_3 \longleftrightarrow C_6 \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -6C_2+C_3 \\ -2C_2+C_4 \\ -2C_2+C_5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_3 \longleftrightarrow L_4 \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deoarece există trei elemente nenule pe prima diagonală, rangul matricei A este 3.

1.5 Determinarea matricei inverse

Nu orice matrice are inversă. Se poate vorbi despre determinarea inversei doar pentru matricele pătratice.

Definiţia 1.5.1 *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dacă determinantul ataşat matricei A este nenul (nul), matricea A se numeşte* **nesingulară (singulară)**.

Se notează cu I_n matricea pătratică de ordinul n:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiţia 1.5.2 *Fie A o matrice pătratică de ordinul n. Se spune că matricea A este inversabilă dacă există o matrice B pătratică de ordinul n astfel încât*

$$AB = BA = I_n$$

Teorema 1.5.1 *Inversa unei matrice dacă există este unică şi se notează cu A^{-1}.*

Demonstraţie: Presupunem că există B şi C două inverse ale matricei A.

$$AB = BA = I_n, \quad AC = CA = I_n \Longrightarrow \ B \times |AB = AC$$

$\Longrightarrow B(AB) = (BA)C$, deoarece $AB = BA = I_n$ rezultă $B = C$. Deci, dacă există, matricea inversă este unică.

Teorema 1.5.2 *Matricea pătratică A este inversabilă dacă şi numai dacă A este nesingulară.*

Inversa unei matrice (dacă există) se poate determina prin mai multe metode. În continuare se va determina inversa folosind transformările elementare.

Pentru a determina rangul unei matrice prin metoda transformărilor elementare se pot face transformări elementare şi pe linii şi pe coloane, în cazul determinării inversei unei matrice se lucrează sau pe linii sau pe coloane. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice nesingulară. În continuare se va lucrea pe linii. Lângă matricea A se ataşează matricea I_n despărţite între ele printr-o bară verticală. Se urmăreşte ca prin transformări elementare pe linii să obţinem în stânga barei matricea I_n şi ceea ce va fi în dreapta barei va fi matricea inversă matricei A.

Observaţia 1.5.1 *Dacă se va lucra pe coloane atunci matricea I_n se aşează sub matricea A şi se urmăreşte să se obţină matricea I_n deasupra barei orizontale care separă pe A de I_n, iar matrice inversă este sub bara orizontală.*

Exemplul 1.5.1 *Să se determine inversa matricei:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: Deoarece matricea A este nesingulară, adică $detA = 2 \neq 0$, rezultă că există inversa sa. Se va determina inversa prin metoda transformărilor elementare pe linii.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2L_2 + L_1 \\ -2L_2 + L_3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -0 & -2 & 1 \end{array}\right) -2L_1 + L_3 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \frac{1}{2}L_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Matricea inversă este:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exemplul 1.5.2 *Să se determine inversa matricei:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: Deoarece marticea A este nesingulară, adică $detA = 4 \neq 0$, rezultă că există inversa sa. Se va determina inversa prin metoda transformărilor elementare pe coloane.

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \frac{1}{2}C_1 \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) - C_1 + C_2 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \frac{1}{2}C_2 \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) - C_2 + C_3 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Deci, inversa matricei A este matricea:

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Exerciţiul 1.5.1 *Să se rezolve ecuaţia matriceală:*

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right) X = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 6 \end{array}\right) \tag{1.10}$$

unde $X = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right)$.

Rezolvare: Dacă matricea pătratică (notată cu A) are inversă, rezolvarea ecuaţiei (1.10) se reduce la determinarea inversei matricei şi apoi înmulţirea la dreapta a ecuaţiei (1.10) cu inversa. Deoarece determinantul matricei pătrate este -2, matricea e nesingulară şi există inversa dată de matricea de mai jos:

$$-\frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{array}\right)$$

Urmărind paşii descrişi mai sus se obţine:

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ \overline{2} \end{pmatrix}.$$

O altă metodă de rezolvare a ecuaţiei (1.10) este aceea de a scrie ecuaţia matriceală sub forma unui sistem algebric liniar. În paragraful următor se abordează problema rezolvarii sistemelor algebrice liniare.

1.6 Sisteme algebrice liniare

Forma generală a unui sistem algebric liniar de m ecuaţii cu n necunoscute este următoarea:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.11}$$

Coeficienţii sistemului algebric sunt a_{ij} cu $i = \overline{1,m}$ şi $j = \overline{1,n}$; matricea de m linii şi n coloane formată din coeficienţii sistemului se numeşte *matricea sitemului*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$b_i,\ i = \overline{1,m}$ se numesc *termeni liberi* iar matricea coloană

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

se numeşte matricea termenilor liberi; necunoscutele sistemului sunt x_i $i = \overline{1,n}$ iar *matricea necunoscutelor* este:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};$$

sistemul (1.11) se scrie:

$$AX = B.$$

Existenţa şi unicitatea soluţiei sistemului nu depinde de o relaţie între numărul necunoscutelor şi numărul ecuaţiilor. Dacă numărul ecuaţiilor este mai mare strict decât numărul necunoscutelor sistemul se numeşte *supradeterminat*; dacă numărul ecuaţiilor este egal cu numărul necunoscutelor atunci sitemul se numeşte *echilibrat* iar dacă numărul ecuaţiilor este mai mic strict decât numărul necunoscutelor sitemul se numeşte *subdeterminat*. Un sistem de numere $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ se numeşte *soluţie a sistemului* (1.11) dacă toate ecuaţiile sistemului sunt verificate, adică,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = \overline{1,m}$$

Din punct de vedere al compatibilităţii sistemului se spune că:

1. sistemul este *compatibil* dacă are soluţie;

   (i) dacă soluţia este unică sistemul este *compatibil determinat*,

   (ii) dacă soluţia este multiplă atunci sistemul se numeşte *compatibil nedeterminat*;

2. dacă sistemul nu are soluţie se numeşte *incompatibil*.

Există mai multe metode de rezolvare a sistemelor algebrice liniare. În continuare va fi descris algoritmul lui Gauss de rezolvare a sistemelor algebrice liniare. Acest algoritm se pretează transcrierii într-un cod de calcul.

1.7 Algoritmul lui Gauss

Definiţia 1.7.1 Sistemele echivalente *sunt sistemele care au aceeaşi soluţie.*

Algoritmul lui Gauss constă într-o succesiune de paşi care conduc la sisteme liniare echivalente cu primul cu scopul de a obţine un sistem liniar a cărui matrice să aibă elemente nenule doar deasupra primei diagonale.
Rezolvarea sistemului prin algoritmul lui Gauss presupune parcurgerea următoarelor etape:

(i) Se elimină necunoscuta x_1 din toate ecuaţiile începând cu a doua obţinându-se un sistem echivalent cu primul;

(ii) Din sistemul echivalent se elimină necunoscuta x_2 din a treia ecuaţie rezultând un alt sistem echivalent;

(iii) Se repetă pasul 2. pentru necunoscutele $x_3,\ x_4,\ \ldots$.

Algoritmul are un număr finit de paşi. Se presupune că suntem la pasul r şi $r = m$ şi toţi coeficienţii din ecuaţiile $r+1,\ r+2,$ ... sunt nuli. Sistemul (1.11) devine:

$$\begin{cases} a_{11}^{(r)}x_1 & +a_{12}^{(r)}x_2+ & \ldots & +a_{1n}^{(r)}x_n & = b_1^{(r)} \\ & a_{22}^{(r)}x_2+ & \ldots & +a_{2n}^{(r)}x_n & = b_2^{(r)} \\ & \vdots & & & \\ & a_{rr}^{(r)}x_r+ & \ldots & +a_{rn}^{(r)}x_n & = b_r^{(r)} \\ & & & 0 & = b_{r+1}^{(r)} \\ & & & \vdots & \\ & & & 0 & = b_m^{(r)} \end{cases} \tag{1.12}$$

Teorema 1.7.1 *Fie sistemul (1.12). Dacă $a_{ii}^{(r)} \neq 0$ oricare ar fi $i = \overline{1,\ n}$ şi rang $A = r$ atunci condiţia necesară şi suficientă ca sistemul (1.12) să aibă soluţie este ca $b_k^{(r)} = 0$, oricare ar fi $k = \overline{r+1,\ m}$.*

Dacă condiţia din teorema de mai sus nu este îndeplinită atunci evident s-a ajuns la o contradicţie şi deci sistemul este incompatibil. În caz contrar pentru citirea soluţiei se procedează astfel necunoscutele $x_{r+1},\ x_{r+2},\ \ldots, x_n$ primesc valori arbitrare şi apoi folosind sistemul (1.12) pornind de la sfârşit spre început se determină în mod unic $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r$. Sistemele omogene se trateaza la fel ca şi cele neomogene. Pentru aplicarea practică a

algoritmului folosim următorul tabel

x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n	TL
a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\dots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$					$\vdots$
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	$\dots$	a_{nn}	b_n
a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1n}	b_1
	a'_{22}	a'_{23}	$\dots$	a'_{2n}	b'_2
	$\vdots$				$\vdots$
			$a'_{n-1,n-1}$	$a'_{n-1,n}$	b_{n-1}
				a'_{nn}	b'_n

unde pentru trecerea de la un nivel la altul se folosesc transformări elementare. Pentru uşurinţa calculelor este de preferat ca să avem coeficientul sistemului din colţul stânga sus egal cu 1 sau -1; pentru aceasta se pot inversa liniile între ele respectiv coloanele între ele.

Exemplul 1.7.1 *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 6 \end{cases} \tag{1.13}$$

Rezolvare: Se foloseşte algoritmul lui Gauss. Pentru simplificarea calculelor în matricea sistemului se va inversa prima coloana cu coloana a patra.

x_4	x_2	x_3	x_1	TL	
1	2	-1	2	4	$(-2),(-4),(-2)$
2	3	-1	4	6	
4	5	-3	8	12	
2	3	-2	3	6	
1	2	-1	2	4	
0	-1	1	0	-2	$(-3),(-1)$
0	-3	1	0	-4	
0	-1	0	-1	-2	
1	2	-1	2	4	
0	-1	1	0	-2	
0	0	-2	0	2	$L_3 \longleftrightarrow L_4$
0	0	-1	-1	0	
1	2	-1	2	4	
0	-1	1	0	-2	
0	0	-1	-1	0	(-2)
0	0	-2	0	2	
1	2	-1	2	4	
0	-1	1	0	-2	
0	0	-1	-1	0	
0	0	0	2	2	

se obţine sistemul:

$$\begin{cases} x_4 + 2x_2 - x_3 + 2x_1 = 4 \\ -x_2 + x_3 = -2 \\ -x_3 - x_1 = 0 \\ 2x_1 = 2 \end{cases} \tag{1.14}$$

$x_1 = 1$ se obţine din rezolvarea ultimei ecuaţii şi apoi pornind de jos în sus se obţine: $x_3 = -1,\ x_2 = 1,\ x_4 = -1$. Deci soluţia sistemului este mulţimea $S = \{(1, 1, -1, -1)\}$. Exemplul de mai sus ilustrează cazul compatibil determinat.

Exemplul 1.7.2 *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 7 \end{cases} \tag{1.15}$$

x_1	x_2	x_3	TL	
1	2	3	4	$(-2), (-3)$
2	1	-1	3	
3	3	2	7	
1	2	3	4	
0	-3	-7	-5	(-1)
0	-3	-7	-5	
1	2	3	4	
0	-3	-7	-5	
0	0	0	0	

se obţine sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ -3x_2 - 7x_3 &= -5 \\ 0x_3 &= 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

Din ultima ecuaţie rezultă că x_3 poate lua orice valoare, deci, $x_3 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Înlocuind pe x_3 în celelalte două ecuaţii şi determinându-l pe x_2 din a doua ecuaţie şi apoi pe x_1 din prima rezultă $x_2 = \dfrac{5 - 7\lambda}{3}$ şi $x_1 = \dfrac{2 + 5\lambda}{3}$ oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{R}$. Deci, soluţia sistemului este: $S = \left\{ \left(\dfrac{2 + 5\lambda}{3},\ \dfrac{5 - 7\lambda}{3},\ \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Exemplul acesta ilustrează cazul sistemelor compatibile nedeterminate.

Exemplul 1.7.3 *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{cases} \tag{1.17}$$

x_1	x_2	x_3	TL	
1	2	3	4	$(-2), (-3)$
2	4	6	3	
3	1	-1	1	
1	2	3	4	
0	0	0	-5	$L_2 \longleftrightarrow L_3$
0	-5	-10	-11	
1	2	3	4	
0	-5	-10	-11	
0	0	0	-5	

se obţine sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ -5x_2 - 10x_3 &= -11 \\ 0 &= -5 \end{cases} \tag{1.18}$$

Din ultima ecuaţie rezultă că nu există $x_3 \in \mathbb{R}$ care să verifice ultima ecuaţie. Deci s-a ajuns la o contradicţie, deci sistemul (1.17) este incompatibil.

1.8 Aplicaţii

1. Din elementele mulţimii $A = \{4,\ 5\}$ să se formeze toate permutările posibile.

2. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

$$(a)\ 9! - 8!\quad (b)\ \frac{213!}{211!}\quad (c)\ \frac{n!}{(n-2)!}\quad (d)\ \frac{(n-3)!}{(n-5)!}$$

3. Să se rezolve ecuaţiile:

$$\text{(a)}\frac{(n+2)!}{n!} = 72!,\quad \text{(b)}\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{12n!}{(n-2)!}.$$

4. În câte moduri se pot aşeza pe un raft cinci cărţi?

5. Un tren de persoane are şapte vagoane. În câte moduri pot fi aranjate vagoanele pentru a forma trenul?

6. Să se scrie toate aranjamentele de câte 3 elemente ale mulţimii $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$.

7. O grupă de studenţi trebuie să programeze patru examene în opt zile. În câte moduri se poate face aceasta? Dar dacă ultimul examen se va fixa în mod obligatoriu în ziua a opta?

8. Cei 20 de studenţi ai unei grupe au de schimbat fotografii între ei. Câte fotografii au fost necesare dacă fiecare student oferă fotografii tuturor celorlalţi colegi?

9. Să se calculeze:
$$\frac{A_n^5 + A_n^6}{A_n^4}.$$

10. Dintr-un efectiv de 30 de studenţi se va forma un comitet de 5 studenţi în câte moduri se poate face această selecţie?

11. În câte moduri se pot forma echipe de 4 studenţi şi un profesor, dintr-un efectiv de 25 de studenţi şi 4 profesori?

12. Să se calculeze:
$$(a)\ C_{10}^8,\quad (b)\ C_{100}^0 + C_{100}^{99},\quad (c)\ C_{10}^8 + C_{10}^2.$$

13. Din 11 persoane, dintre care 7 sunt bărbaţi, se formează o delegaţie alcătuită din 6 oameni din care cel puţin 2 femei. În câte moduri se poate forma această delegaţie?

14. Folosind binomul lui Newton să se calculeze:
$$(a)\ (x^2 - a)^6,\quad (b)\ (\sqrt{a} - \sqrt{b})^4,\quad (c)\ (2\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})^5.$$

15. Să se determine termenul al cincelea al dezvoltării $(\sqrt{2a} - \sqrt{ab})^7$.

16. Să se determine termenul din dezvoltarea $(\sqrt{x} + y)^9$ care îl conţine pe x^3.

17. Fie
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze:

(a) $A+B$, AB şi BA;

(b) A^2, B^2 şi A^2-B^2;

(c) $AB-BA$.

18. Să se calculeze determinanţii:

(a) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} -9 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & 5 \\ -3 & -4 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$

(j) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 9 & 0 & 36 & 45 & 121 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 32 & 45 & 76 & 67 & 99 \\ 999 & 1 & 23 & 34 & 64 \end{vmatrix}$ (k) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

19. Să se determine rangul matricelor:

$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad (b)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad (c)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

20. Să se studieze existenţa inversei, dacă există, să se determine inversa matricelor:

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

21. Să se rezolve ecuaţia matriceală:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

22. Să se rezolve sistemele:

$$(a)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \quad (b)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 12x_2 + 11x_3 = -1 \\ 4x_1 - 15x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases} \quad (d)\ \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 13 \\ 4x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 18 \\ 3x_1 - 13x_2 + 19x_3 = 22 \end{cases}$$

$$(e)\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad (f)\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

23. Să se determine α astfel încât sistemul următor să aibă soluţii nenule şi în acest caz să se rezolve:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + (\alpha - 1)x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 = 0 \end{cases}$$

Capitolul 2

Geometrie analitică

Un mod foarte util de reprezentare a realităţii înconjurătoare este oferit de geometrie şi în special de geometria analitică. Acest capitol se va ocupa de reprezentarea dreptei în plan (vezi Anexa Capitolul 2) şi spaţiu, de conice şi cuadrice. Pentru studiul în spaţiu al dreptei se va folosi noţiunea de vector.

2.1 Conice

Se numeşte *conică* mulţimea punctelor din plan ale căror coordonate satisfac ecuaţia algebrică de gradul al doilea:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{2.1}$$

Dacă ecuaţia conicei conţine doar un produs de doi factori de gradul întâi, atunci conica se numeşte degenerată.

2.1.1 Intersecţia dintre o conică şi o dreaptă

Pentru a determina punctele de intersecţie dintre o conică şi o dreapta trebuie rezolvat sistemul format din ecuaţia conicei şi ecuaţia dreptei. Dacă:

(i) sistemul nu are soluţii, atunci conica şi dreapta nu au puncte comune;

(ii) sistemul are două soluţii distincte, atunci dreapta intersectează conica în două puncte distincte;

(iii) sistemul are exact o soluţie, atunci dreapta intersectează conica doar într-un punct, altfel spus dreapta este tangentă la conică. Pentru determinarea dreptei tangente la conică se parcurg următorii paşi:

1. Se rezolvă sistemul format din ecuaţia dreptei si ecuaţia conicei. Din ecuaţia dreptei se exprimă una dintre necunoscute, se inlocuieşte în ecuaţia conicei obţinându-se o ecuaţie de gradul doi.
2. Pentru a avea un singur punct de intersecţie se impune condiţia ca discriminantul ecuaţiei de gradul doi să fie zero.

Forma generală a ecuaţiei tangentei la o curbă în punctul $M_0(x_0, y_0)$ se obţine prin dedublarea ecuaţiei conicei şi are forma:

$$Axx_0 + B(x_0y + y_0x) + Cy_0y + D(x_0 + x) + E(y_0 + y) + F = 0 \tag{2.2}$$

2.1.2 Cercul

Definiţia 2.1.1 *Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix (numit centru) se numeşte* **cerc**. *Cercul cu centrul în punctele de coordonate $C(a, b)$ şi rază CM este reprezentat în Figura 2.1.*

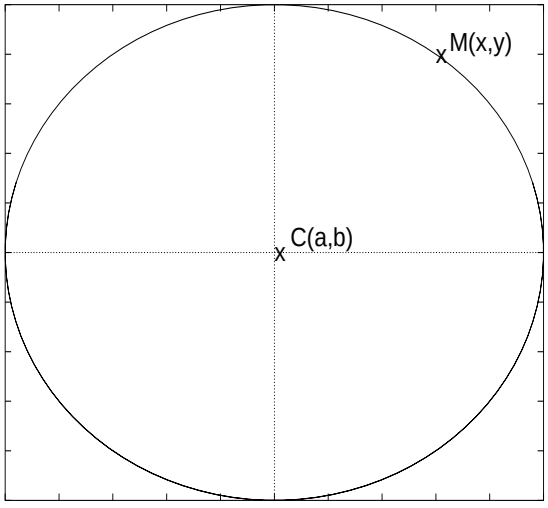


Figura 2.1: Cercul de centru C(a,b) şi punctul M(x,y) situat pe circunferinţa sa.

Dacă se cunoaşte centrul cercului $C(a,b)$ şi raza cercului r atunci ecuaţia cercului este:

$$\mathcal{C}: \quad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{2.3}$$

Fie $M_0(x_0,y_0)\in\mathcal{C}$, atunci ecuaţia tangentei la cerc in M_0 este:

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

Dreapta perpendiculară pe tangenta la cerc în M_0 se numeşte normală la cercul $\mathcal{C}$ în punctul M_0 şi are forma

$$\frac{x-x_0}{x_0-a}=\frac{y-y_0}{y_0-b}.$$

Ecuaţiile parametrice ale cercului $\mathcal{C}$ sunt:

$$\begin{cases} x= & a+r\cos\theta \\ y= & b+r\sin\theta \end{cases}$$

Coordonate polare

Coordonatele polare definite cu ajutorul coordonatelor carteziene au forma:

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ tg\ \theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

unde r este distanţa dintre punctul de coordonate (x,y) şi origine, iar θ este unghiul dintre axa Ox şi dreapta determinată de origine şi punctul de coordonate (x,y) măsurat în sens invers acelor de ceasornic. Folosind coordonatele polare, în coordonate carteziene punctul (x,y) este dat de egalităţile:

$$\begin{cases} x= & r\cos\theta \\ y= & r\sin\theta \end{cases}.$$

2.1.3 Elipsa

Definiţia 2.1.2 *Locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanţelor la două puncte fixe (numite focare) este constantă se numeşte* **elipsă**.

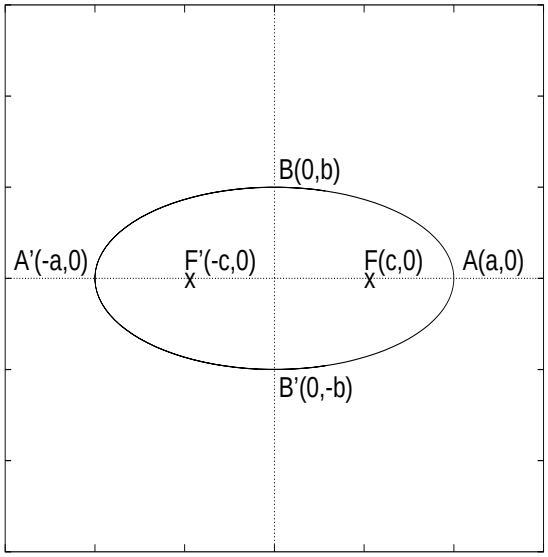


Figura 2.2: Elipsa cu focarele de coordonate $F(c,0)$ şi $F'(-c,0)$.

În Figura 2.2 este reprezentată elipsa cu focarele de coordonate $F(c,0),\ F'(-c,0)$ şi vârfurile de coordonate $A(a,0),\ A'(-a,0)$.

Din punct de vedere geometric definiţia elipsei se scrie astfel,

$$MF + MF' = 2a$$

explicitând egalitatea precedentă rezultă

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

Prin două ridicări succesive la pătrat şi notând $a^2 - c^2 = b^2$ se obţine ecuaţia elipsei centrată în origine

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.4}$$

Axele de coordonate taie elipsa în punctele $A(a,0),\ A'(-a,0),\ B(0,b),\ B'(0,-b)$. Segmentul $AA' = 2a$ se numeşte axa mare a elipsei, iar segmentul $BB' = 2b$ se numeşte axa mică a elipsei. Fie M_0 un punct de pe elipsă, ecuaţia tangentei la elipsă în punctul M_0 este:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Tangenta şi normala la elipsă în punctul M_0 sunt bisectoarele unghiurilor determinate de suporturile razelor focale ale punctului M_0. Dacă în ecuaţia elipsei numitorul mai mare este sub y^2 rezultă ca axa mare este pe Oy şi nu pe Ox. Prin excentricitatea elipsei se înţelege raportul $\frac{c}{a}$ şi se notează cu e. Dacă e este foarte aproape de 1 atunci se spune ca elipsa este foarte excentrică, iar daca e este foarte aprope de 0, elipsa este *"aproape"* cerc, cele două axe fiind aproximativ egale.

2.1.4 Hiperbola

Definiţia 2.1.3 *Locul geometric al punctelor din plan pentru care modulul diferenţei distanţelor la două puncte fixe (numite focare) este constant se numeşte* **hiperbolă**.

În Figura 2.3 este reprezentată hiperbola cu focarele de coordonate $F(c,0)$, $F'(-c,0)$ şi vâfurile $A(a,0)$ şi $A'(-a,0)$.

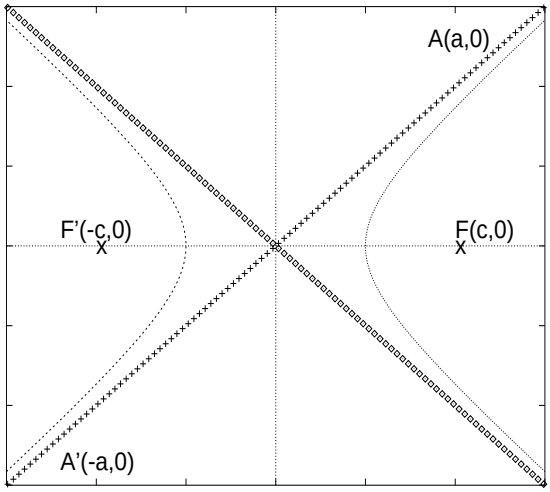


Figura 2.3: Hiperbola echilateră cu focarele F(c,a) si F´(-c,a).

Matematic definiţia hiperbolei se scrie

$$|MF - MF'| = 2a$$

explicitând egalitatea precedentă rezultă

$$|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}|=2a$$

Prin două ridicări succesive la pătrat, notând cu $b^2=c^2-a^2$ rezultă

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2.5}$$

Tangenta la hiperbolă în punctul $M_0(x_0,y_0)$ este curba de ecuaţie:

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

O importantă proprietate a hiperbolei este schiţată în desenul precedent. Se consideră dreptunghiul de lungime $2a$ şi lăţime $2b$ centrat în origine. Dreptele care se obţin prelungind diagonalele acestui dreptunghi sunt asimptotele hiperbolei; acestea au ecuaţiile: $y=\frac{b}{a}$ respectiv $y=-\frac{b}{a}$.

2.1.5 Parabola

Definiţia 2.1.4 *Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix numit focar şi de o dreptă fixă numită dreaptă directoare se numeşte parabolă.*

În Figura 2.4 este reprezentată parabola cu focarul $F(\frac{p}{2},0)$ şi dreapta directoare de ecuaţie $x=-\frac{p}{2}$. Matematic definiţia se transpune:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}\ \Rightarrow$$

$$y^2=2px \tag{2.6}$$

Tangenta la parabolă în punctul $M_0(x_0,y_0)$ este dreapta de ecuaţie:

$$yy_0=p(x+x_0).$$

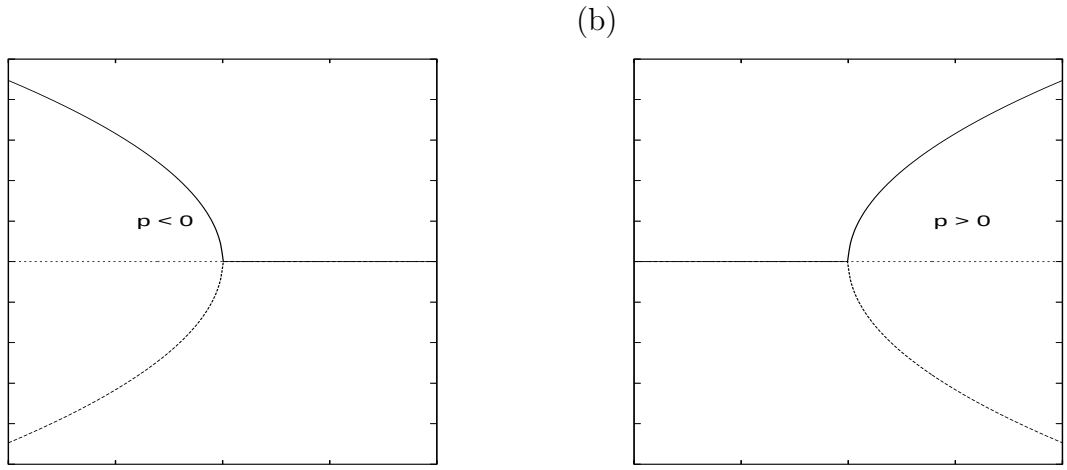


Figura 2.4: Parabola: (a) $p < 0$, (b) $p > 0$.

2.2 Repere în spaţiu

Definiţia 2.2.1 *Trei axe $Ox,\ Oy, Oz$ cu aceeaşi origine O perpendiculare două câte două formază un reper ortogonal $Oxyz$ în spaţiu.*

Prin intermediul unui reper ortogonal $Oxyz$, oricărui triplet de numere reale (x, y, z) i se asociază un unic punct $M(x, y, z)$. Reciproc, dacă M este un punct oarecare din spaţiu şi $x,\ y,\ z$ sunt coordonatele proiecţiilor punctului pe axele $Ox,\ Oy$ şi Oz punctului M îi corespunde tripletul (x, y, z).

Distanţa dintre două puncte în spaţiu

Într-un reper ortogonal considerăm punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Distanţa dintre punctele M_1M_2 este

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \tag{2.7}$$

2.3 Mărimi scalare şi vectoriale

Folosind noţiunile de fizică învăţate în liceu, se stie că, masa timpul, lungimea, temperatura unui corp izotrop, intensitatea curentului electric sunt unic determinate de modulul (numărul de unităti de măsură) lor, deci sunt **mărimi scalare**. Forţa, viteza, acceleraţia,

deplasarea, inducţia magnetică sunt *vectori* pentru că sunt unic determinaţi dacă se cunosc: direcţia, sensul, originea şi modulul. Noţiunea de vector a fost introdusă de Carl Friedrich Gauss - matematician, fizician şi astronom german. Folosindu-se noţiuni de fizică elementare studiate în liceu se va introduce noţiunea de vector. Reprezentarea unui vector $\vec{a}$ în spaţiu într-un sistem cartezian este:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \tag{2.8}$$

unde $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ sunt versori (vectori de modul unu), iar $a_x,\ a_y,\ a_z$ reprezintă valorile proiecţiilor vectorului $\vec{a}$ pe axele $Ox,\ Oy$, respectiv Oz. Vectorii sunt utili pentru studiul dreptei şi al planului în spaţiu, a cuadricelor precum şi pentru înţelegerea unor noţiuni de analiză matematică care vor fi prezentate în următoarele capitole.

2.3.1 Operaţii cu vectori

(i) *Egalitatea a doi vectori:* Doi vectori sunt egali dacă au aceeaşi direcţie, sens şi modul.

(ii) *Adunarea:* Fie vectorii $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ şi $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Prin adunarea a doi vectori vom obţine un vector de forma:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}, \tag{2.9}$$

prin urmare, adunarea vectorilor este comutativă şi asociativă;

(iii) *Scăderea:* Fie vectorii $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ şi $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Prin scăderea a doi vectori se obţine un vector de forma:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k}, \tag{2.10}$$

deci scăderea vectorilor nu este comutativă;

(iv) *Înmulţirea cu un scalar:* Fie λ o constantă reală (scalar) şi vectorul $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$. Prin înmulţirea unui vector cu un scalar se obţine un alt vector de forma,

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}. \tag{2.11}$$

2.3.2 Produsul scalar a doi vectori

Fie doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ concurenţi, α fiind unghiul dintre ei, având modulele $|\vec{a}|$ şi $|\vec{b}|$.

Definiţia 2.3.1 *Produsul scalar a celor doi vectori este numărul definit de relaţia*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \alpha \tag{2.12}$$

Exerciţiul 2.3.1 *Folosind relaţia (2.12) să se arate că:*

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0,\ \vec{i} \cdot \vec{k} = 0,\ \vec{k} \cdot \vec{j} = 0,$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$$

Exemplul 2.3.1 *Fie vectorul $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, să se calculeze modulul.*

Rezolvare Ţinându-se cont de exerciţiul (2.3.1) se obţine

$$\begin{aligned} \vec{a}\,\vec{a} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\,(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = \\ &= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \end{aligned} \tag{2.13}$$

deci modulul vectorului $\vec{a}$ este exprimat de relaţia,

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Definiţia 2.3.2 *Dacă $a_x,\ a_y,\ a_z$ şi $b_x,\ b_y,\ b_z$ sunt proiecţiile vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ pe cele trei axe de coordonate, atunci produsul scalar al celor doi vectori este dat de relaţia,*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{2.14}$$

Pe baza relaţiilor (2.12) şi (2.14) ,unghiul dintre doi vectori este exprimat de formula,

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}} \tag{2.15}$$

Observaţia 2.3.1 *Fie vectorii $\vec{a},\ \vec{b}$ şi $\vec{c}$,*

(i) doi câte doi vectori sunt ortogonali (perpendiculari) dacă şi numai dacă produsul lor scalar este nul;

(ii) Produsul scalar este distributiv faţă de adunarea vectorilor:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c};$$

(iii) Produsul scalar al vectorilor nu este asociativ:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Exerciţiul 2.3.2 *Să se determine trei vectori pentru care să verifice afirmaţiile din Observaţia 2.3.1.*

Exemplul 2.3.2 *Se dau vectorii* $\vec{a} = 1\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$ *şi* $\vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + 0\,\vec{k}$. *Se cere să se determine unghiul dintre cei doi vectori.*

Rezolvare: Unghiul dintre cei doi vectori se calculează prin aplicarea relaţiei (2.15)

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + 0}{\sqrt{(1+0+0)\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0\right)}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

deci unghiul dintre cei doi vectori este $\frac{\pi}{6}$.

2.3.3 Produsul vectorial a doi vectori

Definiţia 2.3.3 *Produsul vectorial a doi vectori* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *este un vectorul* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ *cu proprietăţile:*

(i) originea comună cu a vectorilor $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$*;*

(ii) directia perpendiculară pe planul format de cei doi vectori;

(iii) sensul vectorului $\vec{c}$ *este dat de regula "burghiului" (se roteşte de la stânga spre dreapta vectorul* $\vec{a}$ *peste* $\vec{b}$ *sub unghiul cel mai mic, sensul de înaintare al burghiului este sensul vectorului produs vectorial);*

(iv) modulul $|c| = |a|\,|b|\,\sin\alpha$, *unde* α *este unghiul dintre cei doi vectori.*

Din Definiţia 2.3.3 rezultă că:

(i) modulul vectorului $\vec{c}$ reprezintă aria paralelogramului care are ca şi laturi vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$;

(ii) produsul vectorial nu este comutativ.

Exerciţiul 2.3.3 *Folosind definiţia produsului vectorial:*

1. *Daţi exemple de doi vectori pentru care produsul vectorial nu este comutativ.*

2. *Să se arate că:*

   (i) $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$;

   (ii) $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k},\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$;

   (iii) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$;

3. *Să se arate că:*

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{2.16}$$

Pentru a verifica relaţia (2.16) trebuie să se ţina cont de Exerciţiul 2.3.3.

2.4 Planul în spaţiu

Un plan în spaţiu este determinat în mod unic de trei puncte necoliniare sau de o dreaptă şi un punct care nu aparţine dreptei.

Se consideră un reper cartezian cu originea O şi două puncte din spaţiu $M(a, b, c)$ şi $N(x, y, z)$ astfel încât triunghiul MON să fie dreptunghic în O adică $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$. Produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{ON}$ este nul, deci:

$$ax + by + cz = 0; \tag{2.17}$$

Relaţia (2.17) reprezintă ecuaţia planului care trece prin origine şi este perpendicular pe $\overrightarrow{OM}$.

Euaţia unui plan ce trece prin punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ şi este perpendicular pe direcţia $\vec{n}(a, b, c)$ este

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{2.18}$$

Ecuaţia

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{2.19}$$

reprezintă *ecuaţia generală a planului.*

Dacă se cunosc coordonatele a trei puncte necoliniare, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, ecuaţia planului determinat de acestea este,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.20}$$

Condiţia de coplanaritate a patru puncte $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ şi $M_3(x_3, y_3, z_3)$ este:

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.21}$$

Dacă se cunosc punctele de interesecţie dintre plan şi axele de coordonate $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ atunci ecuaţia planului determinat de cele trei puncte este,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{2.22}$$

Ecuaţia (2.22) se numeşte *ecuaţia planului prin tăieturi.*

Pentru a se realiza legătura dintre geometria analitică şi cea vectorială se vor folosi următoarele noţiuni.

(i) Fie $M(a, b, c)$ un punct în spaţiu. Vectorul $\overrightarrow{OM}$ se numeşte *vectorul de poziţie al punctului* M. Fie $A(a, b, c)$ şi $B(a', b', c')$ două puncte din spaţiu, atunci vectorul de poziţie al punctului de coordonate $(a' - a, b' - b, c' - c)$ este $\overrightarrow{AB}$.

(ii) Fie o dreaptă d din spaţiu si M un punct din spaţiu astfel încât $\overrightarrow{OM} \parallel d$. Vectorul $\overrightarrow{OM}$ se numeşte *vector director al dreptei d.* Dacă $|\overrightarrow{OM}| = 1$, atunci $\overrightarrow{OM}$ se numeşte *versor director al dreptei d.*

(iii) Proiecţiile vectorului director ale unei drepte pe axele de coordonate se numesc *parametrii directori ai dreptei* respective.

(iv) Unghiurile formate de dreaptă cu sensurile pozitive ale axelor de coordonate se numesc *unghiurile directoare* ale dreptei notate cu α (cu axa Ox), β (cu axa Oy), γ (cu axa Oz) iar cosinusurile acestor unghiuri se numesc *cosinusurile directoare* ale dreptei.

Teorema 2.4.1 *Se consideră în spaţiu punctul M_0 şi un vector de poziţie nenul $\overrightarrow{ON}$. Ecuaţia vectorială a planului care conţine punctul M_0 şi este perpendicular pe vectorul de poziţie $\overrightarrow{ON}$ se exprimă cu ajutorul produsului scalar al vectorilor, astfel:*

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{ON} = 0 \tag{2.23}$$

Teorema 2.4.2 *Fie $\overrightarrow{OM}$ vectorul de poziţie al punctului $M(a, b, c)$ şi $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ unghiurile sale directoare, atunci*

$$\cos\alpha = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\gamma = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \tag{2.24}$$

Din relaţiile (2.24) rezultă că:

(i) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$;

(ii) punctul M are coordonatele, $M(|\overrightarrow{OM}|\cos\alpha,\ |\overrightarrow{OM}|\cos\beta,\ |\overrightarrow{OM}|\cos\gamma)$.

Un vector de poziţie perpendicular pe plan se numeşte *vector normal* la plan. Vectorul de poziţie $\overrightarrow{OM}(a, b, c)$ este vector normal la planul $ax + by + cz + d = 0$.

Exemplul 2.4.1 *Să se determine ecuaţia unui plan perpendicular pe o dreaptă d, aflat la distanţa p faţă de origine, dacă se cunosc cosinusurile directoare ale dreptei.*

Rezolvare: Fie $d \perp \mathcal{P}$ şi $d(d, \mathcal{P}) = p$. Versorul de componente $(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ este perpendicular pe plan şi puncul $P(p\cos\alpha,\ p\cos\beta,\ p\cos\gamma) \in \mathcal{P}$. Dacă $M(x, y, z) \in \mathcal{P}$, atunci $\overrightarrow{PM}(x - p\cos\alpha,\ y - p\cos\beta,\ z - p\cos\gamma)$. Deoarece $\overrightarrow{PM}$ este perpendicular pe versorul de componente $(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ rezultă că

$$\cos\alpha(x - p\cos\alpha) + \cos\beta(y - p\cos\beta) + \cos\gamma(z - p\cos\gamma) = 0,$$

adică

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{2.25}$$

Relaţia (2.25) reprezintă *ecuaţia normală a planului*. Dacă $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$, planul dat de ecuaţia $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ este paralel cu Oz şi ecuaţia devine: $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$. Această ecuaţie în planul xOy reprezintă o dreaptă situată la distanţa p de origine care face cu axa Ox unghiul α şi cu axa Oy unghiul β.

2.4.1 Ecuaţia dreptei în spaţiu

Dreapta în spaţiu este determinată de: intersecţia dintre două plane neparalele, două puncte distincte, un punct al ei şi vectorul director al dreptei.

1. Drepta determinată ca şi intersecţia dintre două plane neparalele. Fie planele de ecuaţii $\mathcal{P}$:$ax + by + cz + d = 0$ şi $\mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$, atunci ecuaţia dreptei este dată de sistemul de ecuaţii format din ecuaţiile celor două plane.

2. Ecuaţia dreptei care trece prin două puncte distincte. Fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$, atunci
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}; \tag{2.26}$$

3. Ecuaţia dreptei determinată de un punct al ei şi de vectorul director al dreptei. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi $\vec{v}(l, m, n)$, atunci *ecuaţiile parametrice ale dreptei* sunt:
$$\begin{cases} x = & x_0 + \lambda l \\ y = & y_0 + \lambda m \\ z = & z_0 + \lambda n \end{cases}, \ \forall\lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \tag{2.27}$$

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{2.28}$$

ecuaţiile (2.28) se numesc *ecuaţiile canonice ale dreptei.* Din (2.26), (2.27), (2.28) rezultă:

$$\begin{cases} x = & x_1+\lambda(x_2-x_1) \\ y = & y_1+\lambda(y_2-y_1) \\ z = & z_1+\lambda(z_2-z_1) \end{cases} \tag{2.29}$$

2.4.2 Poziţiile relative ale dreptelor şi planelor

Poziţia relativă a două drepte în spaţiu

Pentru a studia poziţia relativă a două drepte în spaţiu se consideră dreptele d_1 şi d_2 care au vectorii directori corespunzători $\vec{v_1}(l_1,m_1,n_1)$ şi $\vec{v_2}(l_2,m_2,n_2)$. Unghiul dintre cele două drepte este unghiul dintre cei doi vectori directori, astfel pe baza produsului scalar exprimat de relaţia (2.15), cosinusul unghiului dintre cele două drepte este exprimat astfel,

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\pm\sqrt{(l_1^2+m_1^2+n_1^2)(l_2^2+m_2^2+n_2^2)}}. \tag{2.30}$$

Poziţia unei drepte faţă de un plan

Pentru a descrie poziţia unei drepte faţă de un plan se consideră dreapta de ecuaţie $d:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ şi planul $\mathcal{P}$: $ax+by+cz+d=0$. Pentru a studia poziţia dreptei faţă de plan trebuie rezolvat sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda l \\ y=y_0+\lambda m \\ z=z_0+\lambda n \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases} \Longrightarrow \tag{2.31}$$

$$ax_0+by_0+cz_0+d+\lambda(al+bm+cn)=0 \tag{2.32}$$

(i) Dacă $al+bm+cn\neq 0$ rezultă $\lambda=-\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{al+bm+cn}$ înlocuind în (2.31) se obţin coordonatele punctului de intersecţie dintre plan şi dreaptă.

(ii) Dacă $al+bm+cn=0$ şi $ax_0+by_0+cz_0+d\neq 0$ rezultă că dreapta şi planul sunt paralele.

(iii) Dacă $al + bm + cn = 0$ şi $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ atunci dreapta $d \subset \mathcal{P}$, deoarece din prima egalitate rezultă că dreapta d este perpendiculară pe normala la plan şi din a doua egalitate rezultă că puncul M aparţine planului şi dreptei.

Unghiul format de o dreaptă cu un plan

Se consideră dreapta $d : \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ şi planul $\mathcal{P}$: $ax + by + cz + d = 0$. Se notează cu φ unghiul dintre dreaptă şi plan; vectorul normal la plan este $\overrightarrow{ON}(a, b, c)$ iar vectorul director al dreptei d este $\vec{v}(l, m, n)$, atunci

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{ON}, \vec{v}) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\overrightarrow{ON} \cdot \vec{v}}{|\overrightarrow{ON} \cdot \vec{v}} \Leftrightarrow \\ \sin\varphi &= \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(l^2 + m^2 + n^2)}} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Dreapta d este perpendiculară pe planul $\mathcal{P}$ dacă şi numai dacă:

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}.$$

Dreapta d este paralelă cu planul $\mathcal{P}$ (sau inclusă în plan) dacă şi numai dacă:

$$al + bm + cn = 0.$$

Distanţa de la un punct la un plan

Fie punctul de coordonate $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi planul dat de ecuaţia normală $\mathcal{P} : \; x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, atunci distanţa de la punctul M_0 la planul $\mathcal{P}$ este:

$$d(d, P) = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|. \tag{2.34}$$

Dacă planul este dat de ecuaţia $ax + by + cz + d = 0$ atunci distanţa de la punctul M_0 la planul $\mathcal{P}$ este:

$$d(d, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{2.35}$$

Măsura unghiului dintre două plane

Definiţia 2.4.1 *Măsura* **unghiului dintre două plane** *este măsura unghiului dintre normalele celor două plane.*

Se consideră planele $\mathcal{P}_1 : a_1x + b_1y + c_1z = 0$ şi $\mathcal{P}_2 : a_2x + b_2y + c_2z = 0$. Vectorii normali ai celor două plane sunt $v_1(a_1, b_1, c_1)$ respectiv $v_2(a_2, b_2, c_2)$, se notează cu φ unghiul dintre cele două plane atunci,

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\pm\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}}. \tag{2.36}$$

Semnul $\pm$ se datorează faptului că cele două plane formează patru unghiuri, două ascuţite şi două optuze.

(i) Cele două plane sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

(ii) Cele două plane sunt paralele dacă şi numai dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$ (a_1 şi a_2, b_1 şi b_2, respectiv, c_1 şi c_2 pot fi simultan nule).

2.4.3 Arii şi volume în spaţiu

Distanţa de la un punct la un plan determinat de trei puncte necoliniare

Dacă planul este determinat de trei puncte necoliniare $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ şi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct exterior planului, atunci distanţa de la M_0 la planul determinat de $M_1,\ M_2,\ M_3$ este

$$d(M_0, (M_1, M_2, M_3)) = \frac{|\Delta_1x_0 - \Delta_2y_0 + \Delta_3z_0 - \Delta|}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}, \tag{2.37}$$

unde $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$,respectiv Δ sunt coeficienţii lui $x,\ y,\ z$ şi termenul liber din ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.38}$$

deci,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Aria triunghiului în spaţiu determinat de vârfurile sale

Fie punctele necoliniare $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ şi $M_3(x_3, y_3, z_3)$, atunci aria triunghiului $M_1M_2M_3$ este:

$$\sigma(M_1M_2M_3) = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}. \tag{2.39}$$

Proiecţiile punctelor $M_1,\ M_2,\ M_3$ pe planul xOy sunt punctele $M_1'(x_1, y_1, 0)$, $M_2'(x_2, y_2, 0)$ şi $M_3'(x_3, y_3, 0)$. Se notează cu φ unghiul determinat de planul (M_1, M_2, M_3) cu planul xOy, atunci $\sigma(M_1M_2M_3)\cos\varphi = \sigma(M_1'M_2'M_3')$. Aria triunghiului în planul xOy este $\sigma(M_1'M_2'M_3') = \frac{1}{2}|\Delta_3|$, $\cos\varphi = \dfrac{\Delta_3}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}$ deci are loc relaţia (2.39).

Volumul tetraedrului determinat de vârfurile sale

Fie patru puncte necoplanare $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ şi $M_3(x_3, y_3, z_3)$, atunci volumul tetraedrului *(corpul geometric format prin intersecţia a patru plane)* determinat de cele patru puncte este exprimat de

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}\right| \tag{2.40}$$

2.5 Suprafeţe de gradul doi

Mulţimea tuturor punctelor ale căror coordonate carteziene satisfac o ecuaţie de forma:

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2.41}$$

şi care verifică anumite condiţii iniţiale se numeşte *suprafaţă*. Un exemplu de astfel de condiţie este ca funcţia să fie continuă în toate variabilele sale. Dacă funcţia F este liniară în $x,\ y,\ z$ (adică $x,\ y,\ z$ să fie la puterea întâia şi să nu conţină termeni de tipul

$xy,\ xz,\ zx,\ xyz$) atunci relaţia (2.41) devine $ax + by + cz + d = 0$ cu $a,\ b,\ c$ nu toţi nuli reprezintă un plan. Dacă F este o funcţie de gradul doi, adică:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (2.42)$$

În urma unor transformări ale axelor de coordonate (translaţii, rotaţii sau o compunere alor) ecuaţia algebrică (2.42) se va transforma într-o ecuaţie de gradul doi în care o parte din termenii ecuaţiei vor dispare. De exemplu, există o rotaţie a axelor de coordonate astfel încât termenii care au coeficienţii $a_{12},\ a_{13},\ a_{23}$ se vor anula. O astfel de transformare se numeşte *transformarea principală a axelor de coordonate.* În acest caz se obţine o ecuaţie de tipul

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (2.43)$$

Ecuaţia (2.43) se poate simplifica şi prin alte transformări ale axelor de coordonate (translaţii). Funcţie de structura coeficienţilor se poate ajunge la forme mult simplificate ale ecuaţiei (2.43). Orice ecuaţie de gradul doi se poate aduce la una din cele şaptesprezece ecuaţii speciale formate din cel mult patru termeni [21]. Trei dintre aceste ecuaţii au formele:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$$

unde $a,\ b,\ c$ sunt constante nenule. Aceste ecuaţii nu au soluţii reale si nu reprezintă figuri geometrice. Din cele patrusprezece forme rămase nouă sunt cuadrice singulare şi au ecuaţiile:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \iff$ punctul $(0, 0, 0)$;
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \iff$ o dreaptă, axa Oz
3. $\frac{x^2}{a^2} = 0 \iff$ planul yOz;
4. $\frac{x^2}{a^2} = 1 \iff$ două plane paralele cu yOz la distanţa $\pm\, a$;
5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \iff$ două plane ce intersectează perpendicular planul xOy după dreptele $y = \pm\frac{b}{a}x$;

6. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff$ suprafaţa cilindrică hiperbolică a cărei intersectie cu plane perpendiculare pe axa Oz reprezintă hiperbole paralele si congruente cu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ din planul xOy;

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff$ suprafaţa cilindrică eliptică a cărei intersectie cu plane perpendiculare pe axa Oz reprezintă elipse paralele si congruente cu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ din planul xOy. Dacă $a = b$ elipsele devin cercuri.

8. $x^2 - 2py = 0 \iff$ suprafaţa cilindrică parabolică a cărei intersecţie cu plane perpendiculare pe axa Oz reprezintă parabole paralele cu $x^2 - 2py = 0$ din planul xOy;

9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \iff$ suprafaţă conică de gradul doi a cărei intersecţie cu plane perpendiculare pe axa Oz reprezintă elipse sau cercuri dacă $a = b$.

Ecuaţiile de la punctul 1. şi 2. nu sunt suprafeţe în sensul obişnuit. Ecuaţiile menţionate la puncttele 3.-9. reprezintă conice care se desfăsoară în plan. Din cele şaptesprezece tipuri de ecuaţii la care se poate ajunge au mai rămas cinci care reprezintă *cuadricele nesingulare*.

2.5.1 Cuadrice

Pentru a denumi cele cinci suprafeţe rămase, trebuie să ţinem cont de intersecţia dintre suprafaţă şi un plan paralel cu o axa de coordonate (de exemplu Oz) şi de intersecţia suprafeţei cu un plan perpendicular pe acestă axa. După cum prima intersecţie este o elipsă, parabolă sau hiperbolă vom avea elipsoid, hiperboloid, respectiv paraboloid. A doua intersecţie ne va indică eliptic sau hiperbolic (adjectivul parabolic nu se foloseşte, deoerece nu există suprafaţă nesingulară de gradul doi cu o astfel de secţiune transversală). În cele menţionate mai sus nu se face deosebire intre secţiuni eliptice sau circulare. Un elipsoid poate fi şi o sferă, iar un paraboloid eliptic poate avea o secţiune circulară. Astfel suprafeţele nesingulare sunt: elipsoidul, paraboloidul eliptic, paraboloidul hiperbolic, hiperboloidul cu o pânză sau hiperboloidul cu două pânze.

Elipsoidul

Elipsoidul are ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{2.44}$$

Elipsoidul este o cuadrică cu centru. Dacă $a = b = c$ atunci se obţine o suprafaţă sferică. Pentru reprezentarea grafică sunt necesare ecuaţiile parametrice ale elipsoidului:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta\sin\varphi \\ y = b\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\cos\varphi \end{cases}, \tag{2.45}$$

unde $\varphi \in [0, \pi]$ şi $\theta \in [0, 2\pi]$

Paraboloidul eliptic

Paraboloidul eliptic are ecuaţia,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0. \tag{2.46}$$

Intersecţia cu plane paralele cu Oz sunt parabole iar intersecţia cu plane perpendiculare pe Oz sunt elipse. Pentru reprezentarea grafică sunt necesare ecuaţiile parametrice ale paraboloidului eliptic:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{u}\,\cos(v) \\ y = b\sqrt{u}\,\sin(v) \\ z = u. \end{cases}, \tag{2.47}$$

unde $v \in [0, 2\pi]$ şi $u \in [0, h]$.

Paraboloidul hiperbolic

Paraboloidul hiperbolic are ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0. \tag{2.48}$$

Intersecţia cu plane paralele cu Oz sunt parabole şi intersecţia cu plane perpendiculare pe Oz sunt hiperbole. O altă formă a ecuaţiei paraboloidului hiperbolic este

$$z = xy.$$

Pentru reprezentarea grafică sunt necesare ecuaţiile parametrice ale paraboloidului hiperbolic:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = uv \end{cases} . \tag{2.49}$$

Hiperboloidul cu o pânză

Hiperboloidul cu o pânză are ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{2.50}$$

Intersecţia cu plane paralele cu Oz sunt hiperbole şi intersecţia cu plane perpendiculare pe Oz sunt elipse. Pentru reprezentarea grafică sunt necesare ecuaţiile parametrice ale hiperboloidului cu o pânză:

$$\begin{cases} x(u,v) = a\sqrt{1+u^2}\cos v \\ y(u,v) = b\sqrt{1+u^2}\sin v \\ z(u,v) = c\,u \end{cases} , \tag{2.51}$$

unde $v \in [0, 2\pi)$.

Hiperboloidul cu două pânze

Hiperboloidul cu două pânze are ecuaţia:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{2.52}$$

Intersecţia cu plane paralele cu Oz sunt hiperbole şi intersecţia cu plane perpendiculare pe Oz duse la distanţa $|z| > c$ sunt elipse. Pentru reprezentarea grafică sunt necesare ecuaţiile parametrice ale hiperboloidului cu două pânze:

$$\begin{cases} x(u,v) = a\sqrt{1+u^2}\cos v \\ y(u,v) = b\sqrt{1+u^2}\sin v \\ z(u,v) = c\,u \end{cases} , \tag{2.53}$$

unde $v \in [0, 2\pi)$. În Figura 2.5-(a) este reprezentat grafic hiperboloidul cu o pâză pentru valorile $a = 1,\ b = 3,\ c = 9$, iar variabilele u şi v aparţin intervalelor $u \in [-1.25, 1.25]$,

(a) (b)

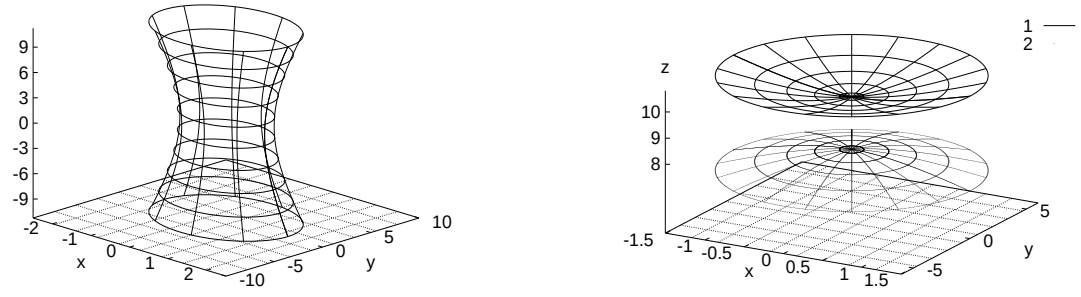


Figura 2.5: (a) Reprezentare grafică a ecuaţiilor parametrice (2.51) pentru hiperboloidul cu o pânză, (b) Reprezentare grafică a ecuaţiilor parametrice (2.53) pentru hiperboloidul cu două pânze.

(a) (b)

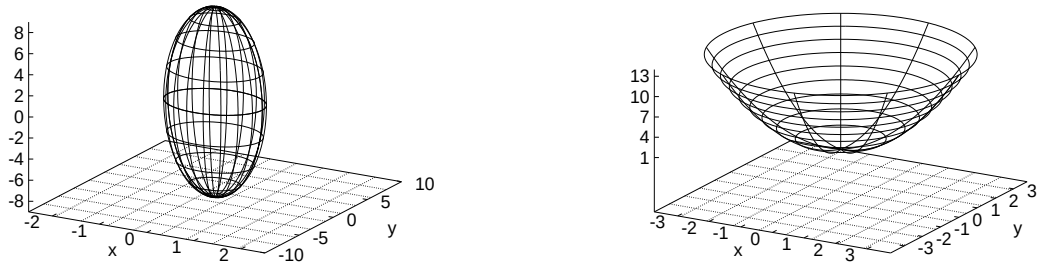


Figura 2.6: (a) Reprezentare grafică a ecuaţiilor parametrice (2.45) pentru elipsoid, (b) Reprezentare grafică a ecuaţiilor parametrice (2.47) pentru paraboloidul eliptic.

respectiv $v \in [0, 2\pi]$. În Figura 2.5-(b) este reprezentat grafic hiperboloidul cu două pânz pentru valorile $a = 1,\ b = 4,\ c = 9$, iar variabilele u şi v aparţin intervalelor $u \in [-1.2, 1.2]$, respectiv $v \in [0, \pi]$. În Figura 2.6-(a) este reprezentat grafic elipsoidul pentru valorile $a = 1,\ b = 3,\ c = 9$, iar variabilele u şi v aparţin intervalelor $u \in [0, 2\pi]$, respectiv $v \in [0, 2\pi]$. În Figura 2.6-(b) este reprezentat grafic paraboloidul eliptic pentru valorea $a = 1$, iar variabilele u şi v aparţin intervalelor $u \in [1, 14]$, respectiv $v \in [0, 2\pi]$.

2.6 Aplicaţii ale geometriei analitice în ştiinţă şi în practica inginerească

Modelele geometrice de formare a imaginilor în instrumentele optice (oglinzi, lentile, dioptri, etc.) folosesc din plin noţiunile din geometria analitică. În conformitate cu legile lui Kepler din mecanica cerească planetele se rotesc în jurul Soarelui pe orbite eliptice, Soarele fiind situat într-un focar. Sateliţii naturali sau artificiali ai planetei Pământ se învârt pe orbite eliptice unde de această dată într-un focar al elipsei este situat Pământul. Din fizica atomică se cunoaşte că toti electronii atomici se *"rotesc"* pe traiectorii circulare sau eliptice faţă de nucleu.

Pentru proiectarea şi realizarea unor construcţii cu acustică deosebită *(lipsite de reverberaţia sunetului)* sunt folosite proprietăţile elipsodului, spre exemplu galeria Mormon Tabernacle din clădirea Capitoliului a Statele Unite ale Americii, în sensul că zona de audiţie se află într-unul din focarele elipsoidului.

Formele oglinzilor telescoapelelor optice sunt descrise de paraboloide sau hiperboloide astfel încât toate razele de lumină care provin de pe boltă cerească se concentrează în focar. În termeni fizico-inginereşti focarul unui instrument optic este definit ca imaginea punctului de la infinit.

Pe aceleaşi principii sunt construite toate antenele parabolice folosite în emisia şi recepţia undelor electromagnetice cu aplicaţii deosebite în transmisiunile radio si de televiziune.

În lumea medicală, aparatura modernă de investigare morfologică a organelor umane sau animale foloseşte tehnica de propagare a ultrasunetelor. Geometria sistemele de detecţie a semnalelor ultrasonice cu ajutorul cărora se formează imaginea zonei investigate se bazează pe proprietătile de focalizare a conicelor şi cuadricelor.

Merită menţionat modul în care sunt proiectate acoperişurile unor clădiri cu arhitectura deosebită, cum ar fi gări, săli de sport, de spectacole, sau galerii de artă. Atât din motive tehnice cât şi estetice acestea sunt proiectate pe baza proprietătilor geometrice ale conicelor şi cuadricelor.

2.7 Aplicaţii

Este instructiv şi util ca rezolvarea oricărei probleme de geometrie să înceapă cu desenarea figurilor corespunzătoare.

1. Să se arate că punctele $A(0,-2),\ B(1,1)$ şi $C(2,4)$ sunt coliniare.

2. Fie punctele $A(2,3)$ şi $B(3,5)$. Să se determine panta dreptei AB şi coordonatele punctului C pe axa Ox astfel încât $m(\widehat{ABC}) = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Dreapta d are panta 2 şi conţine punctul $A(1,1)$. Să se afle punctele lui d care se află la distanţa 1 faţă de punctul A.

4. Se dă triunghiul Δ ABC cu vârfurile $A(-1,3),\ B(2,-1),\ C(3,6)$. Să se găsească:
   (a) ecuaţia dreptei AC; (b) ecuaţia paralelei prin B la AC;
   (c) ecuaţia mediatoarei segmentului BC; (d) ecuaţia medianei din C;
   (e) ecuaţia înălţimii din C.

5. Pentru a produce $x\ m^3$ de cherestea într-un atelier se cheltuiesc y unităţi monetare, dependenţa fiind dată în tabelul următor:

x	0	30	60	90	120
y	212	222	232	242	252

   Să se determine funcţia de gradul întâi asociată acestui tabel ţinându-se cont de relaţia (9.16). Câţi lei se cheltuiesc pentru a se produce 42 m^3 de cherestea.

6. Se dau punctele de coordonate, $A\left(-\dfrac{4}{5},2\right),\ B\left(-\dfrac{2}{5},4\right),\ C(1,5)$. Să se găsească ecuaţia dreptei AB şi să se verifice dacă punctele $A,\ B,\ C$ sunt coliniare.

7. Ştiind că $M(3,4)$ este piciorul perpendicularei coborâte din origine pe dreaptă d, să se scrie ecuaţia dreptei d.

8. Se dau punctele $A(1,1),\ B(2,3)$ şi dreapta $d:\ x-4y+7=0$. Să se determine coordonatele punctului $C \in d$ astfel încât triunghiul ABC să fie isoscel cu baza AB.

9. Să se determine coordonatele cercului circumscris triunghiului determinat de dreptele: $d_1:\ 4x-y+2=0,\ d_2:\ x-4y-8=0,\ d_3:\ x+4y-8=0$.

10. Fiind dat fasciculul de drepte $(1-t)x+(2-t)y+t-3=0,\ t\in\mathbb{R}$ se cere să se determine: vârful facsiculului şi dreapta din fascicul care taie axele Ox şi Oy respectiv în M şi N astfel încât $OM^2\cdot ON^2=4(OM^2+ON^2)$.

11. Se consideră fasciculul de drepte de vârf $M(5,0)$. O dreaptă arbitrară din fascicul taie dreptele $d_1:\ y-2=0$ şi $d_2:\ y-3=0$, respectiv în M_1 şi M_2. Să se arate că paralela dusă prin M_1 la OM_2 trece printr-un punct fix.

12. Dreptele $d_1: x-3y+4=0$ şi $d_2: 2x_y-5=0$ determină patru unghiuri. Să se găsească măsura unghiului al cărui interior conţine originea.

13. Se dau dreptele
$$d_1:\begin{cases} x=1+2t,\\ y=1-t,\ t\in\mathbb{R}\end{cases}$$
şi $d_2:\ x-y+1=0$. Să se determine măsurile unghiurilor dintre d_1, respectiv d_2 şi axa Ox.

14. Se consideră dreptele $d_1:\ 3x+4y-6=0,\ d_2:\ 3x+4y+5=0$. Să se arate că sunt paralele şi să se calculeze distanţa dintre ele.

15. Considerând triunghiul format de dreptele din problema 4, să se determine aria triunghiului.

16. Să se determine ariile următoarelor suprafeţe:
$$(a)\begin{cases} -x+2y & \le 2\\ 3x-2y & \le 6\\ x+y & \le 3\\ x\ge 0, \quad y & \ge 0\end{cases}\qquad (b)\begin{cases} 2x+y & \le 10\\ x+2y & \le 8\\ 4x-y & \ge 5\\ x\ge 0, \quad y & \ge 0\end{cases}$$

17. Să se determine ecuaţiile cercurilor date prin:

    (a) centrul cercului $C(2,-3)$ şi raza cercului $r=7$;

    (b) centrul cercului $C(1,1)$ şi o tangentă la cerc $d:\ 3x+4y+8=0$;

    (c) extremităţile unui diametru $A(3,2),\ B(-1,6)$;

(d) punctele $A(3,1),\ B(-1,3)$ şi drepta $d:\ 3x-y-2=0$ ce conţine centrul;

(e) punctele $A(-1,5),\ B(-2,-2),\ C(5,5)$.

18. Să se determine centrul şi raza cercurilor date prin ecuaţiile:

$$(a)\ x^2+y^2=9,\quad (b)\ x^2+3y+y^2+8y=2,\quad (c)\ x^2+y^2+6y=6.$$

19. Să se determine ecuaţiile elipselor date prin:

(a) focare $F'(-1,0),\ F(1,0)$ şi axa mare $a=5$;

(b) focare $F'(-2,0),\ F(2,0)$ şi axa mica $b=3$

20. Să se determine focarele şi vârfurile elipselor de ecuaţii:

$$(a)\ x^2+2y^2=10,\quad (b)\ 2x^2+6y^2=20,\quad (c)\ 16x^2+4y^2=4.$$

21. Să se determine ecuatiile hiperbolelor date prin:

(a) focare $F'(-3,0),\ F(3,0)$ şi axa mare $a=10$;

(b) focare $F'(-2,0),\ F(2,0)$ şi axa mică $b=3$

22. Să se determine focarele şi vârfurile hiperbolelor de ecuaţii:

$$(a)\ x^2-4y^2=10,\quad (b)\ 2x^2-2y^2=20,\quad (c)\ 16x^2-2y^2=4.$$

23. Să se determine ecuaţiile parabolelor date prin:

(a) focarul $F(1,0)$ şi vârful $O(0,0)$;

(b) focarul $F(1,0)$ şi directoarea $x=2$.

24. Să se determine focarele, vârful şi axa directoare a parabolelor de ecuaţii:

$$(a)\ y^2=2x,\quad (b)\ y^2=-5x.$$

25. Să se recunoască curbele de ecuaţii:

(a) $x^2+2y^2+4x+y=2$, (b) $3x^2+6y^2=1$, (c) $7x^2-9y^2=10$,
(d) $x^2-4y+2x=4$, (e) $y^2-3x+6y=9$, $(f)\ xy=1$.

26. Se dau vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Să se construiască vectorii $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ şi să se demonstreze că $(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}$.

27. Fiind daţi vectorii perpendiculari $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, cu $|\vec{a}|=5$ şi $|\vec{b}|=12$, să se calculeze $|\vec{a}+\vec{b}|$ şi $|\vec{a}-\vec{b}|$.

    Indicaţie: Se calculează $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2$ şi se ţine cont de faptul că vectorii sunt ortogonali. La fel se procedează şi pentru diferenţă.

28. Se dă vectorul $\vec{a}$ de modul 2 care face unghiurile $\alpha=\frac{\pi}{4},\ \beta=\frac{\pi}{3},\ \gamma=\frac{2\pi}{3}$ cu axele de coordonate. Să se calculeze proiecţiile vectorului pe axele de coordonate.

29. Să se calculeze cosinuşii directori ai vectorului $\vec{a}(12,-15-16)$.

30. Să se determine λ astfel încât vectorul $a=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}+\lambda\vec{k}$ să aibă modul unu.

31. Să se calculeze produsul vectorial al vectorilor $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ $\vec{b}=-\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ şi să se verifice dacă vectorul obţinut este perpendicular pe $\vec{a}$ respectiv $\vec{b}$.

32. Să se scrie ecuaţia planului determinat de punctele de coordonate $A(1,-1,3)$, $B(-2,2,1)$ şi $C(-1,2,1)$.

33. Să se arate că punctele $A(1,2,-1),\ B(0,1,5),\ C(-1,2,1)$ şi $D(2,1,3)$ sunt coplanare.

33. Să se calculeze volumul tetraedrului determinat de punctele $A(2,3,1),\ B(4,1,-2)$, $C(6,3,7),\ D(-5,-4,8)$ şi înălţimea dusă din vâful D.

34. Se dau dreptele $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$ şi $d_2:\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}$. Se cere:

    (a) să se calculeze unghiul dintre cele două drepte;

    (b) să se calculeze distanţa dintre ele;

    (c) să se determine planul ce trece prin punctul $M(1,0,1)$ şi este perpendicular pe d_2.

Capitolul 3

Analiză matematică

3.1 Legatura dintre matematică şi restul ştiinţelor

Legile care guvernează şiinţele naturii sunt exprimate prin relaţii între două sau mai multe mulţimi. Aceste legi, în general, sunt elaborate pe baza unui model rezultat din una din următoarele situaţii:

(i) rezultatele numerice furnizate de experimente sunt folosite pentru formularea unor relaţii empirice;

(ii) se folosesc legi sau principii ştiinţifice cunoscute care împreună cu observaţiile actuale conduc la teorii noi care le generalizează pe cele precedente. Ulterior aceste rezultate sunt verificate prin experimente şi măsurători mult mai elaborate.

Legile ştiinţifice sunt date prin intermediul unor formule ce exprimă relaţii de cauzalitate între mărimile fizico-chimice, etc., rezultate din experimente, codificate prin simboluri. Dacă acest lucru nu este posibil, se poate realiza o dependenţă sub formă tabelară sau grafică. Dacă mărimile analizate sunt legate între ele astfel încât una dintre acestea este unic determinată când se cunosc celelalte mărimi se spune că variabilele ataşate mărimilor analizate sunt descrise de o funcţie. Biologia, fizica, chimia precum şi ştiinţele inginereşti folosesc în mod sistematic dependenţe de tip funcţional.

Exemplul 3.1.1 *Într-un interval de timp t se studiază curba descrisă de un corp (de exemplu o minge) aruncată cu viteza iniţială v_0. Aruncarea se face fără frecare cu aerul,*

într-un câmp gravitaţional, unghiul sub care se face aruncarea pe direcţie oblică este α *faţă de axa* Ox*.*

Din mecanica clasică se ştie că deplasarea corpului pe direcţia Ox este o mişcare uniformă cu viteza $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, iar pe direcţia Oy este o mişcare uniform încetinită cu viteza iniţială $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. Prin urmare legile de mişcare pe direcţiile Ox, respectiv Oy sunt exprimate de ecuaţiile:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha\, t \tag{3.1}$$

$$y(t) = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}. \tag{3.2}$$

Prin eliminarea variabilei t se obţine ecuaţia traiectoriei care este o parabolă de ecuaţie

$$y(x) = tg\,\alpha\, x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2. \tag{3.3}$$

Traiectoria deplasării corpului pentru valorile $v_0 = 10\ m/s,\ \alpha = \frac{\pi}{4}$ şi $g = 9.81\ m/s^2$ este reprezentată în Figura 3.1.

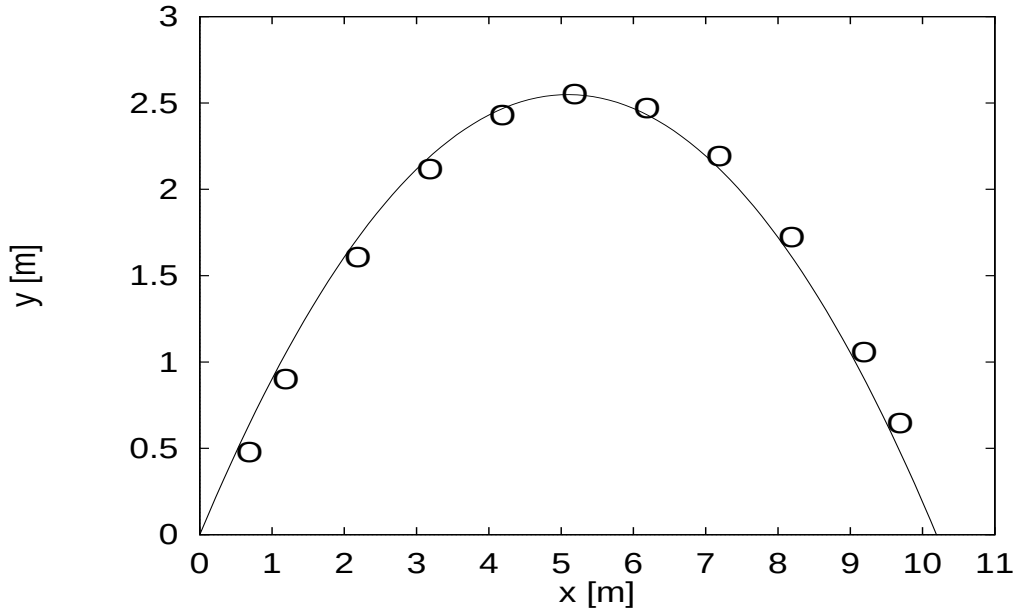


Figura 3.1: Traiectoria unui corp aruncat pe direcţie oblică în câmp gravitaţional.

3.2 Funcţii reale de o variabilă reală

Obiectivul principal al analizei matematice constă în elaborarea şi fundamentarea noţiunii de funcţie precum şi al limitei, continuităţii, derivabilităţii, diferenţiabilităţii, integrabilităţii funcţiilor, etc. Importanţa acestor concepte constă în aceea că din punct de vedere practic toate fenomenele, legile şi principiile care sunt întâlnite în ştiinţele aplicative şi fundamentale folosesc noţiunea de funcţie şi studiul acesteea ca un puternic instrument de investigare.

3.2.1 Noţiunea de funcţie

Definiţia 3.2.1 *Fie X şi Y două mulţimi oarecare. Se spune că $f : X \to Y$ este o funcţie dacă pentru oricare $x \in X$ există şi este unic $y \in Y$ astfel încât $f(x) = y$.*

Mulţimea X se numeşte *domeniul de definiţie* al functiei f, mulţimea Y se numeşte *codomeniul funcţiei*, *f este legea de definiţie* a funcţiei, x se numeşte *argumentul sau variabila independentă* iar $y = f(x)$ *valoarea funcţiei sau variabila dependentă*. Pentru stabilirea domeniului de definiţie al unei funcţii se are în vedere mulţimea valorilor pentru care are sens legea de definiţie.

Exemplul 3.2.1 *Să se determine domeniul de definiţie al funcţiilor:*

Rezolvare:

$$a)\ f(x) = \frac{7x+9}{x-3} \qquad b)\ f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

Existenţa primei legi de definiţie este legată de valorile pentru care se anulează numitorul, deci domeniul de definiţie este $D = \mathbb{R}\backslash\{3\}$. Pentru cea de-a doua lege de definiţie se are în vedere existenţa radicalului şi semnul funcţiei de gradul doi, deci $D = [-2, 2]$.

Definiţia 3.2.2 *Fie funcţia $f : X \to Y$. Prin graficul funcţiei f se înţelege mulţimea punctelor din plan $Gr[f] = \{(x, f(x)) \mid x$ din domeniul de definiţie al funcţiei $f\}$.*

3.2.2 Clasificarea funcţiilor

Fie $f : X \to Y$ o funcţie cu $X,\ Y \subseteq \mathbb{R}$.

Definiţia 3.2.3 *Funcţia f este* **mărginită** *dacă există $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ astfel încât $a \leq f(x) \leq b$ oricare ar fi $x \in X$.*

Definiţia 3.2.4 *Funcţia f este* **periodică** *dacă există o valoare $T \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x+T) = f(x)$ oricare ar fi $x \in X$.*

Cel mai mic număr din domeniul de definiţie notat cu T având această proprietate se numeşte *perioada funcţiei f*. Orice multiplu al perioadei funcţiei f este perioadă a funcţiei.

Definiţia 3.2.5 *Funcţia f este* **crescătoare** *dacă oricare ar fi $x_1,\ x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) \leq f(x_2)$.*

Definiţia 3.2.6 *Funcţia f este* **descrescătoare** *dacă oricare ar fi $x_1,\ x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Definiţia 3.2.7 *Funcţia f este* **monotonă** *dacă este crescătoare sau descrescătoare pe întreg domeniul de definiţie.*

Definiţia 3.2.8 *Funcţia f este* **pară** *dacă:*

(i) domeniul de definiţie este un interval simetric faţă de origine;

(ii) $f(-x) = f(x)$ oricare ar fi $x \in X$.

Definiţia 3.2.9 *Funcţia f este* **impară** *dacă:*

(i) domeniul de definiţie este un interval simetric faţă de origine;

(ii) $f(-x) = -f(x)$ oricare ar fi $x \in X$.

Definiţia 3.2.10 *(Inversa unei funcţii) Fie $X,\ Y \subseteq \mathbb{R}$. Dacă printr-o lege f i se asociază oricărui element $x \in X$ elementul $y \in Y$ şi invers pentru orice element $y \in Y$ există şi este unic $x \in X$ atunci se spune că f este inversabilă şi cea de-a doua funcţie se numeşte* **inversa** *funcţiei f.*

Inversa funcţiei f se va nota prin $f^{-1} : Y \to X,\ f^{-1}(y) = x$. Graficul funcţie inverse (atunci când există funcţie inversă) şi graficul funcţiei directe sunt simetrice faţă de prima bisectoare.

3.2.3 Operaţii cu funcţii

Fie $f : X \to Y,\ g : A \to B$ două funcţii $A,\ B,\ X,\ Y \subseteq \mathbb{R}$ şi $A \cap X \neq \emptyset$.

(i) *Suma funcţiilor* f şi g este funcţia:

$$f + g : A \cap X \to C \subseteq \mathbf{R},\ \ (f+g)(x) = f(x) + g(x),\ \text{oricare ar fi } x \in A \cap X;$$

(ii) *Diferenţa funcţiilor* f şi g este funcţia:

$$f - g : A \cap X \to C \subseteq \mathbf{R},\ \ (f-g)(x) = f(x) - g(x),\ \text{oricare ar fi } x \in A \cap X;$$

(iii) *Produsul funcţiilor* f şi g este funcţia:

$$f \cdot g : A \cap X \to C \subseteq \mathbf{R},\ \ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ \text{oricare ar fi } x \in A \cap X;$$

(iv) *Câtul funcţiilor* f şi g este funcţia:

$$\frac{f}{g} : D \to C \subseteq \mathbf{R},\ \ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ \text{oricare ar fi } x \in D,$$
$$D = A \cap X \setminus \{x \in A \mid g(x) = 0\};$$

(v) *Compunerea a două funcţii.* Fie mulţimile $X,\ Y,\ Z \subseteq \mathbb{R}$ şi funcţiile $f : X \to Y$ şi $g : Y \to Z$. Prin funcţia compusă asociată lui f şi g se înţelege funcţia $g \circ f : X \to Z$ dată de legea $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ oricare ar fi $x \in X$.

Exemplul 3.2.2 *Să se determine:* $f \circ g$ *şi* $g \circ f$ *pentru* $f(x) = x^3 - 2$ *şi* $g = x + 3$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \\ &= (x+3)^3 - 2 = x^3 + 9x^2 + 27x + 25 \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= (x^3 - 2) + 3 = x^3 + 1.\end{aligned}$$

Deci compunerea funcţiilor nu este comutativă. Dacă f este o funcţie care admite inversă, atunci $(f \circ f^{-}1)(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$ oricare ar fi x din domeniul de definiţie.

3.3 Tipuri de funcţii

Algebra şi analiza matematică definesc clase de funcţii elementare care sunt folosite ca instrumente importante în descrierea analitică a modelelor fenomenologice ce fac parte integrantă din ştiinţele fundamentale, precum şi ale celor inginereşti. Pe baza definiţiilor introduse în secţiunea 3.2.3 în procesul de modelare matematică al fenomenelor investigate şi a legilor fizico-chimice, se elaborează relaţii analitice între mărimi, uneori chiar complicate, care conţin funcţii elementare.

3.3.1 Funcţia polinomială

Funcţia polinomială de gradul întâi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = ax + b,\ a \neq 0$. Graficul funcţiei este dreapta de ecuaţie $y = ax + b$. Funcţia de gradul întâi este folosită pentru modelarea proceselor a căror viteză de creştere sau descreştere este constantă în timp.
Funcţia de gradul al doilea (funcţia pătratică) este $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$. Din punct de vedere geometric graficul acestei funcţii este o parabolă. În Exemplul 3.1.1, traiectoria corpului aruncat cu viteză iniţială pe direcţie oblică este descrisă de o funcţie a cărei reprezentare grafică este o parabolă.
Funcţia polinomială de gradul trei (funcţia cubică) este $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$. În general această funcţie este întâlnită în analiza fenomenelor care au un grad pronunţat de asimetrie faţă de axa Oy.
Funcţia polinomială de gradul patru este întâlnită în modelarea fenomenelor de emitere a radiaţiei electromagnetice a corpului negru cu implicaţii în conceptul de existenţă a cuantelor de energie, de curgerea lichidelor vâscoase prin conducte de secţiuni variabile, respectiv a corecţiei de fond cosmic a semnalelor fizico-chimice provenite din fenomenele de interacţiune a radiaţiei electromagnetice cu substanţa.
Funcţia polinomială de gradul n este $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$.
Funcţia raţională este câtul a două polinoame:

$$f : D \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}, \tag{3.4}$$

unde $D = \mathbb{R}\backslash\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ anulează numitorul}\}$.

3.3.2 Funcţia putere

Forma generală a funcţiei putere este

$$f(x) = x^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

Pentru $\alpha \in \mathbb{Z}$ funcţia f se numeşte *raţională.*
Pentru $\alpha \in \mathbb{Q}$ funcţia se numeşte *iraţională* astfel dacă $\alpha = \dfrac{1}{p},\ p \in \mathbb{N}^*$ rezultă $f(x) = \sqrt[p]{x}$;
In raport cu paritatea lui p domeniul funcţiei este:

(i) $\mathbb{R}$ dacă p este impar;

(ii) $[0, \infty)$ dacă p este par.

3.3.3 Funcţia exponenţială

Exemplele următoare vor evidenţia importanţa funcţiei exponenţiale.

Exemplul 3.3.1 *Se presupune că un număr mic de bacterii sunt plasate pe o lamelă de microscop ce se află într-un mediu biologic care să le favorizeze dezvoltarea. Cu ajutorul microscopului optic la fiecare* 10 *minute se estimează numărul bacteriilor nou apărute. Evoluţia acestor culturi este descrisă de relaţia exponenţială* $y = \alpha e^{\beta t}$. *În Figura 3.2-(a), pentru intervalul de timp* $t \in [0, 60]$ *minute şi valorile* $\alpha = 10$, $\beta = 0.05$ *este reprezentată evoluţia creşterii numărului de bacterii.*
Un alt exemplu de fenomen care evoluează după o funcţie exponenţială ($y = \alpha e^{\beta t}$) *se regăseşte şi în legea generală a dezintegrării radioactive pentru izotopul radioactiv al toriului* $^{231}_{90}Th$ *ce face parte din seria radioactivă a actiniului cu aplicaţii directe în ştiinţa mediului şi ecologie.*

Pornind de la un set de măsurători, parametrii α şi β reprezintă numărul de nuclee iniţiale N_0, respectiv constanta de dezintegrare λ ce exprimă probabilitatea de dezintegrare a nucleelor în unitatea de timp [2], deci,

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \tag{3.6}$$

(a) (b)

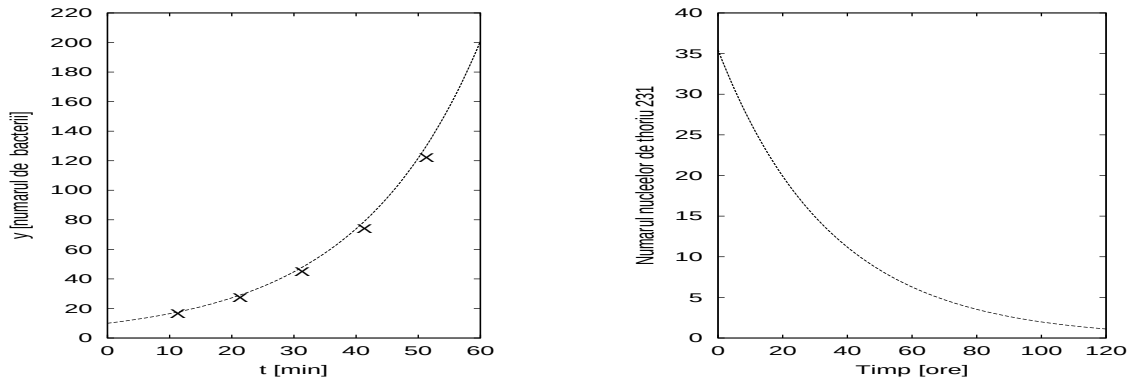


Figura 3.2: (a) Evoluţia în timp a numărului de bacterii, (b) Legea dezintegrării radioizotopului $^{231}_{90}Th$, N_0=35.45, λ=0.029/ora, $T_{1/2}$=24.03 ore.

Valoarea $T_{1/2}$ reprezintă timpul de înjumătăţire definit ca timpul după care numai jumătate din numărul de nuclee sunt nedezintegrate. În Figura 3.2-(b) este reprezentată grafic această dependenţă de tip exponenţial.

Observaţia 3.3.1 *În baza acestor exemple se poate studia orice fenomen care respectă faptul că media ratei de creştere sau descreştere este proporţională cu cantitatea de substanţă existentă la fiecare moment.*

De asemenea, folosind funcţia exponenţială se poate modela gradul de extindere a unei parcele de pădure cu implicaţii directe în analiza procesului de îndesire a copacilor şi a modului de păstrare a unei dezvoltări rezonabile.
Fenomenele amintite mai sus sunt modelate din punct de vedere matematic de funcţia

$$f : \mathbf{R} \to (0, \infty), \quad f(x) = e^x. \tag{3.7}$$

În unele tratate de specialitate precum şi în aplicaţiile de calcul se foloseşte notaţia $\exp(x)$ în loc de e^x. Legea de definiţie (3.7) reprezintă cazul particular al funcţiei exponenţiale,

$$f : \mathbf{R} \to (0, \infty), \quad f(x) = a^x \ \text{ oricare ar fi } a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}. \tag{3.8}$$

În Figura 3.3 sunt reprezentate graficele funcţiei $y = a^x$, $x \in [-2, 5]$ pentru $a = 0.5$, respectiv $a = 1.5$.

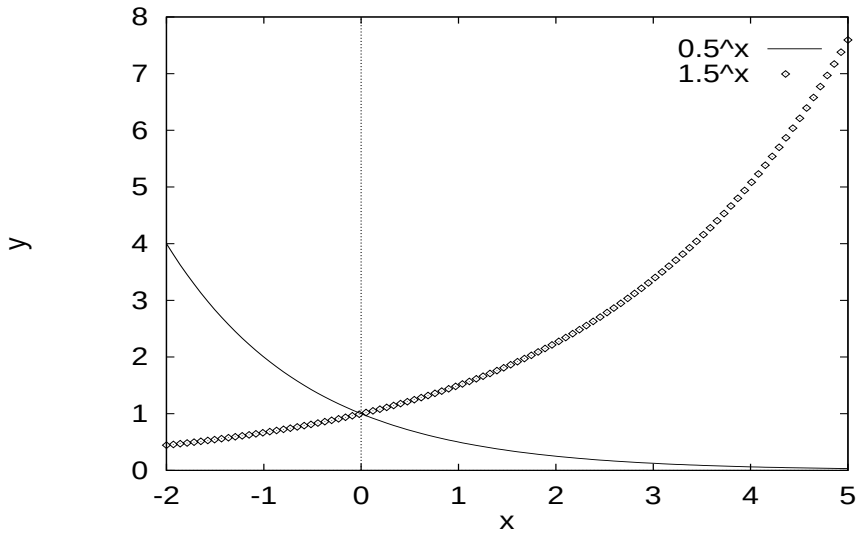


Figura 3.3: Reprezentarea grafică a funcţiei $y = a^x$.

Din graficul funcţiei exponenţiale se constată că:

(i) pentru $a \in (0, 1)$ funcţia este monoton descrescătoare de la $+\infty$ la 0, intersectează axa Oy în punctul $(0, 1)$ şi are asimptotă orizontală la $+\infty$ axa Ox;

(ii) pentru $a \in (1, \infty)$ funcţia este monoton crescătoare de la 0 la ∞, intersectează axa Oy în punctul $(0, 1)$ şi are asimptotă orizontală la $-\infty$ axa Ox.

Din cele afirmate mai sus rezultă că funcţia exponentială este mărginită inferior, indiferent de valoarea parametrului a.

Exerciţiul 3.3.1 *Să se demonstreze afirmaţiile de mai sus.*

3.3.4 Funcţia logaritmică

Funcţia logaritmică este definită astfel,

$$f : (0, \infty) \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \log_a(x), \quad a > 0, \ a \neq 1, \tag{3.9}$$

unde a reprezintă baza funcţiei logaritm. Această funcţie fiind echivalentă cu relaţia,

$$a^{f(x)} = x. \tag{3.10}$$

Folosind (3.10) rezultă $x = a^{\log_a x}$. Prin urmare funcţia logaritmică este inversa funcţiei exponenţiale. Pentru logaritmul în baza 10 (*logaritm zecimal*) si logaritmul în baza e,

(*logaritm natural*), se folosesc notaţiile:

$$\log_{10} x = \lg x, \quad \log_e x = \ln x.$$

Schimbarea bazei

Fie $y = \log_a(x)$ şi $z = \log_b(x)$, se impune stabilirea unei relaţii între y şi z. Se foloseşte proprietăţile funcţiei exponenţiale şi se obţine $a^y = x$ şi $b^z = x$, deci $a^y = b^z$. Se logaritmează în baza a ultima relaţie şi se obţine

$$\log_a(x) = \log_a(b) \log_b(x). \tag{3.11}$$

În Figura 3.4 este reprezentată funcţia logaritmică în intervalul $x \in (0, 100]$, pentru bazele $a = 0.5$ şi 10.

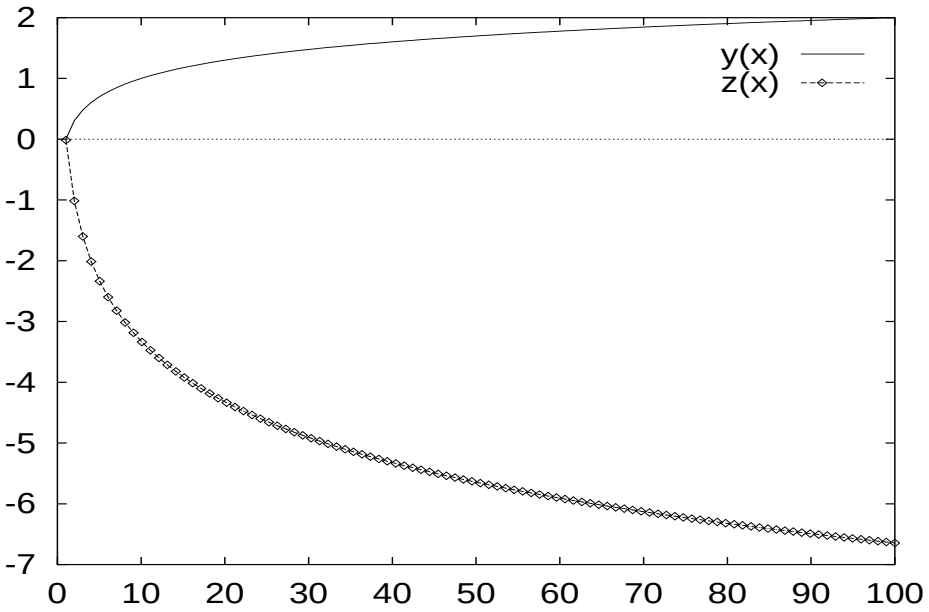


Figura 3.4: Reprezentarea grafică a funcţiilor $y(x) = \log_{10} x$, $z(x) = \log_{0.5} x$.

3.3.5 Funcţiile trigonometrice

Pentru a introduce funcţiile trigonometrice se folosesc noţiuni din fizica studiată în liceu. Se consideră mişcarea uniformă pe o traiectorie circulară a unui punct material a cărui

poziţie curentă este concretizată de punctul de coordonate $M(x, y)$, în conformitate cu Figura 3.5. În sistemul de referinţă poziţia punctului este descrisă în mod univoc de raza vectoare $\overline{OM}$ de lungime R şi de unghiul $\alpha = \widehat{MOP}$ exprimat în radiani. Este cunoscut faptul că unghiul de un radian este definit ca unghiul la centru cercului ce subântinde un arc de cerc care are lungimea egală cu raza cercului. Lungimea arcului de cerc ce subântinde unghiul $\widehat{MOP}$ este exprimată de valoare $R\alpha$. Viteza de deplasare v pe traiectoria circulară este dată de $v = \dfrac{R\alpha}{t}$, iar viteza unghiulară $\omega = \dfrac{\alpha}{t}$, unde t reprezintă timpul necesar parcurgerii arcului de cerc, deci $\alpha = \omega\, t$. În cazul parcurgerii unui cerc întreg, adică $\alpha = 2\,\pi$, $t = T$, viteza unghiulară devine $\dfrac{2\,\pi}{T}$.

Observaţia 3.3.2 *Dacă la momentul $t = 0$ punctul material $M(x, y)$ se află pe cerc într-un punct determinat de un unghi φ_0, atunci argumentul funcţiilor sinus şi cosinus este exprimat de suma $\omega t + \varphi_0$, valoarea φ_0 se numeşte unghi de defazaj.*

În baza observaţiei precedente lungimile proiecţiilor $x(t)$, respectiv $y(t)$ ale punctului material sunt descrise de evoluţiile în timpul t ale punctelor P şi Q,

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos(\omega t + \varphi_0) \\ y(t) &= R\sin(\omega t + \varphi_0). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Prin urmare comportamentul cinematic al punctului $M(x, y)$ pe traiectoria circulară va fi caracterizat în mod echivalent de funcţiile x şi y care au valorile mărginite în intervalul $[-R, R]$. În mecanica clasică mişcarea punctelor P şi Q este numită mişcare oscilatorie armonică.

În Figura 3.6 sunt reprezentate deplasările punctelor P şi Q pentru valorile $\omega = 10\ rad/s$, $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $R = 2\ m$ pentru intervalul $t \in [0, 1]$ secunde.

Funcţia sinus

Funcţia sinus are forma:

$$f : \mathbf{R} \to [-1, 1], \quad f(x) = \sin x \tag{3.13}$$

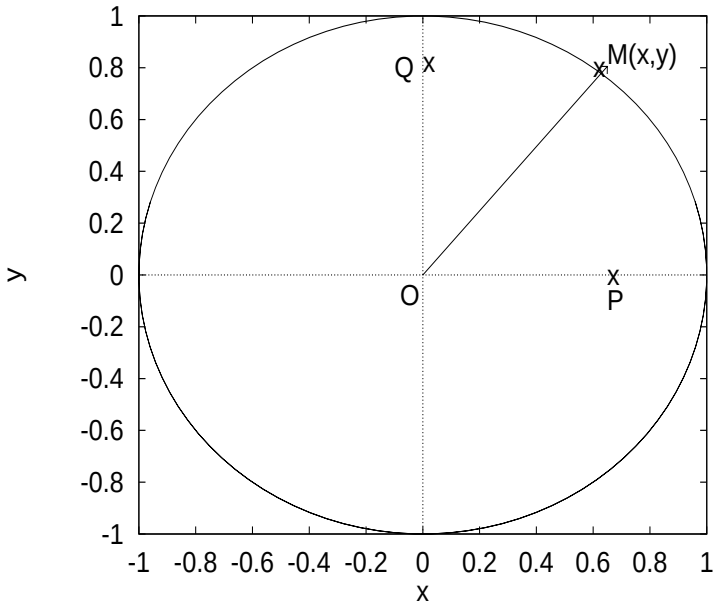


Figura 3.5: Deplasarea pe cerc a punctului material $M(x, y)$ şi proiecţiile punctului pe sistemul de coordonate xOy.

Figura 3.7-(a) conţine reprezentarea grafică a funcţiei $y = \sin(x)$ în intervalul $x \in [-\pi, \pi]$.

Exerciţiul 3.3.2 *Să se demonstreze că funcţia sinus are perioada* 2π *şi este impară, adică* $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$ *şi* $\sin(-x) = -\sin(x)$, *oricare ar fi* $x \in \mathbb{R}$.

Funcţia sinus nu este inversabilă pe tot domeniul de definiţie Dacă se restrânge domeniul la intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ funcţia obţinută are inversă şi inversa sa se numeşte arcsinus,

$$f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) = \arcsin(x). \tag{3.14}$$

În Figura 3.7-(b) este dată reprezentarea grafică a funcţiei $y = \arcsin(x)$ în intervalul $x \in [-1, 1]$.

Funcţia cosinus

Funcţia cosinus are forma:

$$f : \mathbf{R} \to [-1, 1], \quad f(x) = \cos x. \tag{3.15}$$

În Figura 3.8-(a) este reprezentată grafic funcţia $y = \cos(x)$ în intervalul $x \in [-\pi, \pi]$.

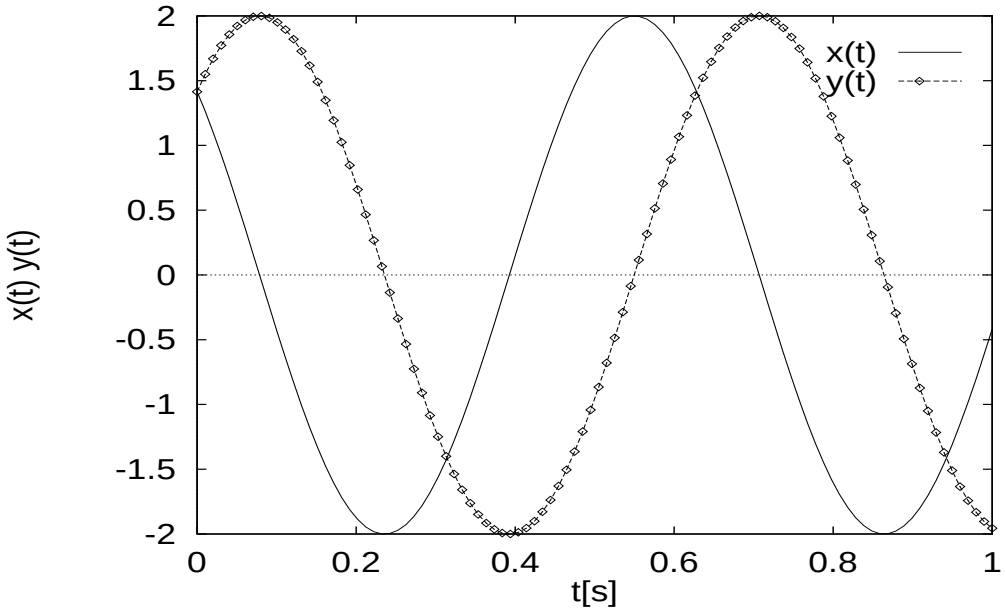


Figura 3.6: Evoluţia in timp a punctelor P şi Q.

Exerciţiul 3.3.3 *Să se demonstreze că funcţia cosinus are perioada* 2π *şi este pară adică,* $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ *şi* $\cos(x) = \cos(-x)$, *oricare ar fi* $x \in \mathbb{R}$.

Funcţia cosinus nu este inversabilă pe tot domeniul de definiţie. Dacă se restrânge domeniul la intervalul $[0, \pi]$ funcţia obţinută are inversă şi inversa sa se numeşte arccosinus,

$$f : [-1, 1] \to [0, \pi], \quad f(x) = \arccos(x). \tag{3.16}$$

În Figura 3.8-(b) este reprezentată grafic funcţia $y = \arccos(x)$ în intervalul $x \in [-1, 1]$.

Funcţia tangentă şi arctangentă

Funcţia tangentă are forma:

$$f : \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = tgx = \frac{\sin x}{\cos x}. \tag{3.17}$$

În Figura 3.9-(a) este reprezentată grafic funcţia $y = tg(x)$ pentru $x \in [0, \pi]$.

Exerciţiul 3.3.4 *Să se demonstreze că funcţia tangentă are perioada* π *şi este impară, adică,* $tg(x) = tg(x + \pi)$ *şi* $tg(-x) = -tg(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Funcţia tangentă nu este inversabilă pe tot domeniul de definiţie. Dacă se restrânge domeniul la intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ funcţia obţinută este inversabilă şi inversa sa se numeşte

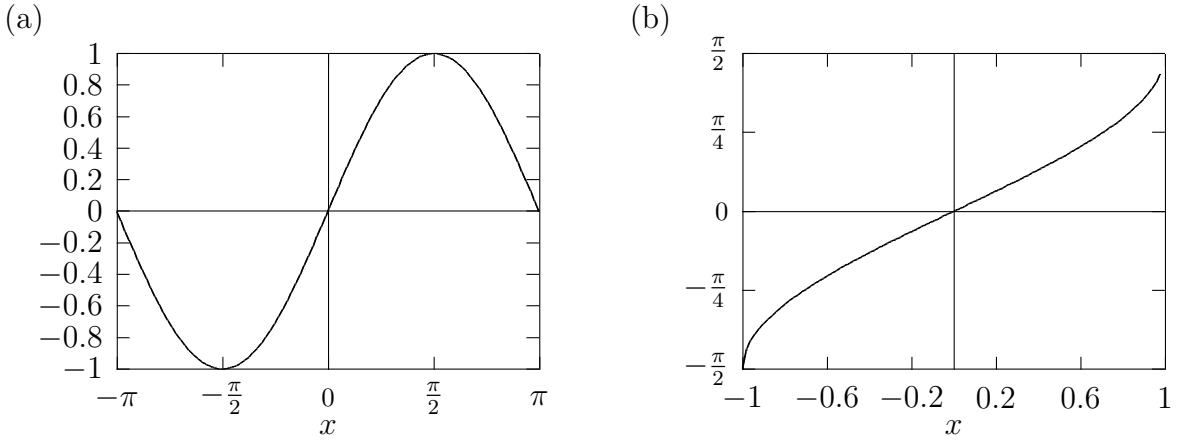


Figura 3.7: Reprezentarea grafică a funcţiilor $y = \sin(x)$ şi $y = \arcsin(x)$.

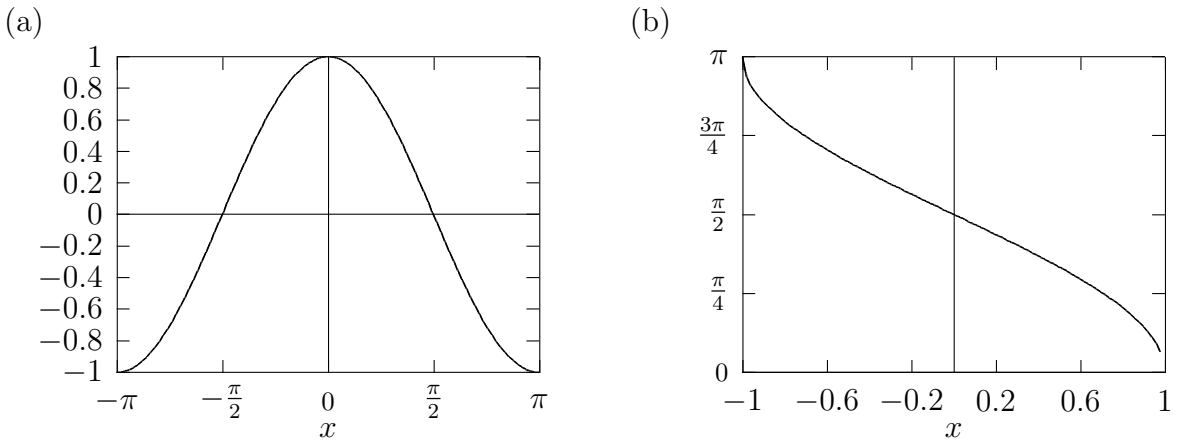


Figura 3.8: Reprezentarea grafică a funcţiilor $y = \cos(x)$ şi $y = \arccos(x)$.

arctangentă:

$$f : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right), \quad f(x) = \operatorname{arctg}\ x. \tag{3.18}$$

În Figura 3.9-(b) este redată reprezentarea grafică a funcţiei $y = arctg(x)$ în intervalul $x \in [-10, 10]$.

Funcţia cotangentă şi arccotangentă

Funcţia cotangentă are forma:

$$f : \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}. \tag{3.19}$$

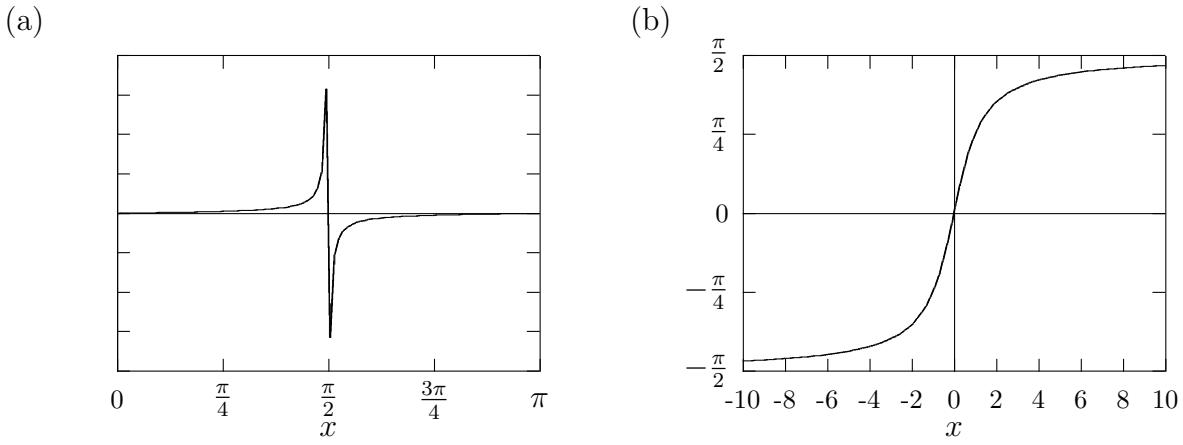


Figura 3.9: Reprezentarea grafică a funcţiilor $y = tg(x)$ şi $y = arctg(x)$.

În Figura 3.10-(a) este reprezentată grafic funcţia $y = ctg\, x$ în intervalul $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exerciţiul 3.3.5 *Să se demonstreze că funcţia cotangentă este periodică de perioadă π şi este impară, adică, $ctg(x) = ctg(x + \pi)$ şi $ctg(-x) = -ctg(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.*

Funcţia cotangentă nu este inversabilă pe tot domeniul de definiţie. Dacă se restrânge domeniul la $(0, \pi)$, funcţia obţinută are inversă şi inversa sa se numeşte arccotangentă,

$$f : \mathbf{R} \to (0, \pi), \quad f(x) = arcctg(x). \tag{3.20}$$

Daca se ţine cont de relaţia trigonometrică $ctg(x) = tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ atunci avem $y(x) = ctg(x)$, respectiv $y(x) = tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Deci funcţia $arcctg$ se exprimă prin relaţia

$$arcctg(x) = \frac{\pi}{2} - arctg(x). \tag{3.21}$$

În Figura 3.10-(b) este prezentată reprezentarea grafică a funcţiei $y = arcctg(x)$ în intervalul $x \in [-10, 10]$.

3.4 Şiruri de numere reale

Există multe probleme de geometrie, algebră şi de matematică aplicată care utilizează şiruri. Se amintesc progresiile aritmetice şi geometrice, şirul poligoanelor regulate cu n laturi înscrise într-un cerc, şirul rezultatelor intermediare dintr-un procedeu numeric, *etc.*

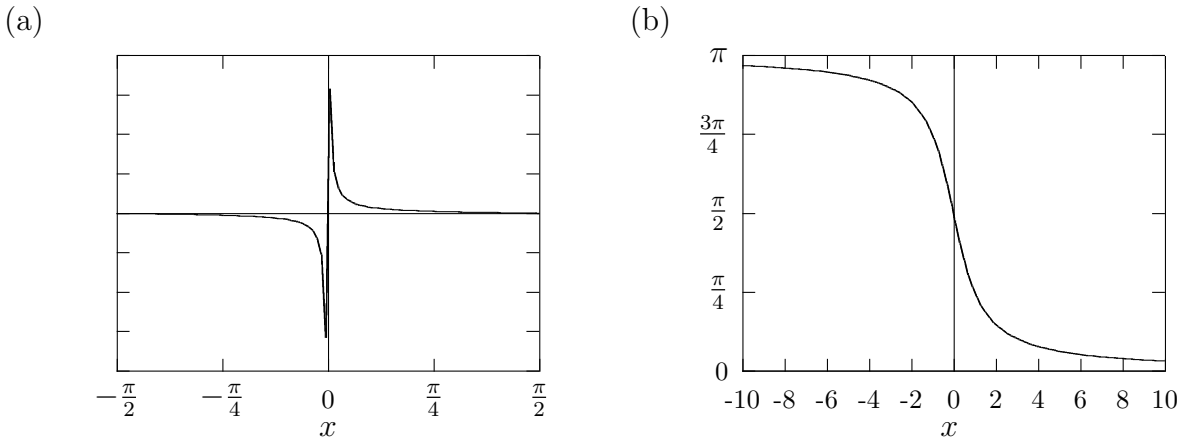


Figura 3.10: Reprezentarea grafică a funcţiilor $y = ctg(x)$ şi $y = arcctg(x)$.

Intuitiv, un şir de elemente înseamnă "un element după altul" fiecare având un număr de ordine.

Definiţia 3.4.1 *Printr-un* **şir** *infinit de numere reale se înţelege o funcţie* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Spre exemplu $f(n) = \frac{1}{n}$. Se va folosi următoarea notaţie $f(n) = a_n$, iar şirul dat de relaţia $\frac{1}{n}$ se va nota $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Termenul general al şirului este a_n.

Definiţia 3.4.2 *Un şir* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este mărginit dacă există* $a,\ b \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $a \leq a_n \leq b$ *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$.

Numărul a se numeşte margine inferioară a şirului, iar b se numeşte margine superioară a şirului.

Definiţia 3.4.3 *Un şir* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este* **monoton crescător** *dacă* $a_n \leq a_{n+1}$ *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$.

Definiţia 3.4.4 *Un şir* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este* **monoton descrescător** *dacă* $a_n \geq a_{n+1}$ *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$.

Definiţia 3.4.5 *Un şir este* **monoton** *dacă este crescător sau descrescător.*

Definiţia 3.4.6 *Fie* a *un număr real. Se numeşte vecinătate a punctului* a *orice mulţime* $V \subset \mathbb{R}$ *care conţine un interval deschis centrat în* a.

În Figura 3.11 este dată, în mod intuitiv, semnificaţia vecinătăţii punctului a.

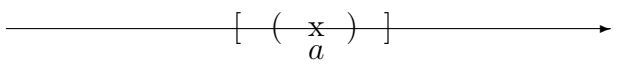


Figura 3.11: Vecinătatea punctului a situat pe axa numerelor reale.

Definiţia 3.4.7 *Se spune că şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *are* **limita** $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *dacă în afara oricărei vecinătăţi a punctului a există un număr finit de termeni ai şirului.*

Orice şir cu limită finită este *convergent*. Şirurile care nu au limită sau au limită infinită se numesc *divergente*.
Notaţii pentru limitele de şiruri:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{sau} \quad a_n \to a \text{ când } n \to \infty$$

Teorema 3.4.1 *Dacă şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limită atunci ea este unică.*

În cele urmează se vor da câteva exemple de şiruri:

$$(a)\ a_n = \frac{1}{n},\ n \geq 1; \qquad (b)\ a_n = n^2,\ n \geq 0; \qquad (c)\ a_n = 2005, n \geq 7.$$

Cazul (c) reprezintă un şir constant.

3.4.1 Proprietăţi ale şirurilor convergente

Propoziţia 3.4.1 *Orice şir constant este convergent.*

Propoziţia 3.4.2 *Dacă şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent şi are limita* a*, atunci şi şirul* $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent şi are limita* $|a|$*.*

Propoziţia 3.4.3 *Dacă şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent şi are limita* a *şi dacă* $a_n \geq \alpha$ *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$ *atunci* $a \geq \alpha$*.*

Propoziţia 3.4.4 *Dacă şirurile* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sunt convergente şi au limitele* a*, respectiv* b *şi* $a_n \leq b_n$ *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$ *atunci* $a \leq b$*.*

3.4.2 Operaţii cu şiruri convergente

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şiruri convergente astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ atunci:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$, dacă $b_n \neq 0$, oricare at fi $n \in \mathbb{N}$ şi $b \neq 0$.

Teorema 3.4.2 *Orice şir monoton şi mărginit este convergent.*

În cazurile în care se studiază convergenţa unui şir este indicat să se folosească teorema precedentă (şi nu definiţia şirurilor convergente). Deci, se studiază pe rând monotonia şi mărginirea şirului.

Pentru calculul limitei unui şir se înlocuieşte valoarea lui n cu ∞.

Exemplul 3.4.1 *Sa se determine limitele şirurilor:*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(-2n+7)$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^7+5}{2n^7+n^6}$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty}(-5)^n$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln 2+\ln 3+\ldots+\ln n}{n}$ (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{q}, \forall q>0$

Rezolvare:

(a) Înlocuind n cu ∞ se obţine $-\infty$;

(b) Se foloseşte relaţia (9.30) şi se obţine limita $\dfrac{1}{2}$;

(c) Utilizând relaţia (9.29) se observă că nu există limită;

(d) Înlocuind direct se ajunge la excepţia $\dfrac{\infty}{\infty}$; pentru a rezolva problema se va folosi Teorema Cesaro-Stoltz. Se alege $a_n = \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n$, $b_n = n$ prima ipoteză a teoremei se verifică. Se calculează:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\ln(n+1)}{1} = \infty.$$

Deci aplicând Teorema 9.3.1 rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2+\ln 3+\ldots+\ln n}{n} = \infty.$$

(e) Se înlocuieşte n cu ∞ şi se ţine cont de regulile de calcul de mai sus.

3.4.3 Numărul e

Fie şirul $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ oricare ar fi $n > 0,\ n \in \mathbb{N}$. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent. Pentru aceasta se studiază mărginirea şi convergenţa sa.

(i) *Mărginirea:* Este echivalent cu a determina două numere reale a şi b astfel încât $a \leq a_n \leq b_n$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Dezvoltând termenul general al şirului după binomul lui Newton se obţine:

$$\begin{aligned} a_n \quad = \quad & 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \\ & + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Se observă că toate parantezele sunt pozitive deci

$$a_n \geq 2. \tag{3.22}$$

Pentru a stabili o margine superioară se observă că fiecare paranteză este mai mică strict ca şi 1 deci:

$$\begin{aligned} a_n &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \Longleftrightarrow \\ a_n &\leq 1 + 2 = 3 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Din (3.22) şi (3.23) rezultă că

$$2 \leq a_n \leq 3$$

deci şirul a_n este mărginit.

(ii) *Monotonia:* Pentru aceasta se va estima diferenţa: $a_{n+1} - a_n$. Dezvoltând pe a_n şi a_{n+1} şi folosind binomul lui Newton se obţine:

$$a_{n+1} - a_n \quad = \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots +$$

$$+ \quad \frac{1}{n!}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right]$$
$$+ \quad \frac{1}{(n+1)!}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\right]. \tag{3.24}$$

Deoarece $\frac{p}{n+1} < \frac{p}{n}$ oricare ar fi $p = \overline{1, n-1}$ rezultă,

$$1-\frac{p}{n+1} > 1-\frac{p}{n} \text{ oricare ar fi } p = \overline{1, n-1} \tag{3.25}$$

Din (3.24) şi (3.25) rezultă că $a_{n+1} - a_n \geq 0$ oricare ar fi $n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$, deci şirul este monoton crescător.

Din cele demonstrate mai sus rezultă că şirul este monoton şi mărginit adică convergent.

Limita acestui şir a fost calculată pentru prima dată de matematicianul Leonhard Euler şi notată prin simbolul e, deci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{3.26}$$

Numărul e este un număr iraţional, deci cu o infinitate de zecimale, cuprins între 2 şi 3 cu valoarea aproximativă $e \approx 2.71828182845904523536\ldots$.

Până acum s-au considerat şiruri date explicit, adică particularizând pe n se obţine fiecare termen al şirului. În practică de cele mai multe ori şirurile sunt date implicit, adică termenul de rang n se determină folosind termenii dinaintea sa pe baza unei relaţii de recurenţă. În funcţie de numărul termenilor şirului folosit pentru determinarea termenului de rang n există recurenţă de diverse ranguri.

Exerciţiul 3.4.1 *Folosind relaţia (3.11) să se arate că:*

$$a)\ \lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0.434294\ldots, \quad b)\ x = e^{\ln x}.$$

3.4.4 Şiruri recurente

Definiţia 3.4.8 *Dacă termenul de rang n depinde de termenii anteriori a_{n-1}, $a_{n-2}, \ldots, a_{k-1}$ cu $k \geq 1$ fixat se spune că şirul este generat de o recurenţă de rang k.*

Exemplul 3.4.2 *Să se determine termenul general al şirului dat de relaţia de recurenţă* $a_{n+1} = 2 \cdot a_n, \quad a_1 = 3$ *şi să se calculeze limita sa.*

Rezolvare: Pentru determinarea termenului general al şirului se procedează astfel:

$$\begin{aligned} a_2 &= 2 \cdot a_1 \\ a_3 &= 2 \cdot a_2 \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= 2 \cdot a_{n-a} \\ a_n &= 2 \cdot a_{n-1} \end{aligned}$$

Înmulţind egalităţile de mai sus între ele membru cu membru se obţine $a_n = 2^{n-1} \cdot a_1 \iff a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. Şirul este convergent şi are limita ∞.

3.5 Limita unei funcţii

În practică majoritatea proceselor studiate implică analiza unor fenomene în jurul anumitor puncte dinainte fixate. Din punct de vedere matematic acest proces este descris de noţiunea de limită a unei funcţii într-un punct. De cele mai multe ori este de interes comportamentul unei mărimi, exprimate de o funcţie, într-un punct. Din diverse motive nu se poate obţine direct valoarea mărimii respective pe punctul de interes. Dacă se cunoaşte comportamentul mărimii studiate într-o mulţime de puncte din vecinătatea punctului în cauză, printr-un proces de trecere la limită se obţin informaţii despre valoarea mărimii studiate. Din punct de vedere matematic nu se poate determina limita unei mărimi studiate în orice punct ci numai în punctele de acumulare ale mulţimii pe care se studiază fenomenul.

Definiţia 3.5.1 *Fie* $D \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ *şi* $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. *Punctul* α *se numeşte punct de acumulare pentru mulţimea* D *dacă în orice vecinătate a lui* α *există cel puţin un punct din* $D \setminus \alpha$.

Definiţia 3.5.2 *Se spune că funcţia* $f : D \to \mathbb{R}$ *are limita* l *în punctul* x_0, x_0 *fiind punct de acumulare pentru* D *dacă oricare ar fi o vecinătate* V *a lui* l *există o vecinătate* U *a lui* α *astfel încât oricare ar fi* $x \in D \cap U, \ x \neq \alpha$ *rezultă că* $f(x) \in V$.

Spre deosebire de cazul limitei şirurilor, în cazul limitei funcţiilor există posibilitatea "apropierii" de punctul unde se studiază limita prin valori mai mici (limita la stânga) şi prin valori mai mari (limita la dreapta).

Notaţii:

$$\text{limita la stânga lui } x_0: \qquad \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_s(x_0)$$

$$\text{limita la dreapta lui } x_0: \qquad \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d(x_0)$$

Observaţia 3.5.1 *Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ are limită în punctul x_0 punct de acumulare pentru D, dacă şi numai dacă*

$$l_s(x_0) = l_d(x_0).$$

Exemplul 3.5.1 *Să se studieze limita în punctul $x = 0$ pentru funcţia: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} x, & dacă \quad x \leq 0, \\ x + 3, & dacă \quad x > 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

Se calculează $l_s(0) = 0$ şi $l_d(0) = 3$. Limita la dreapta este diferită de limita la stânga deci funcţia nu are limită în punctul $x = 0$.

3.5.1 Operaţii cu funcţii care au limită finită

Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$ funcţii care au limită în punctul x_0, punct de acumulare pentru D atunci:

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to 0} g(x)$;

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to 0} g(x)$;

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$.

3.6 Funcţii continue

Ideea de continuitate a unei funcţii s-a desprins din reprezentările intuitive asupra proceselor în desfăşurarea cărora apar salturi, rupturi. Noţiunea matematică de continuitate cere o definiţie precisă, care să conducă prin raţionamente corecte la determinarea proprietăţilor funcţiilor continue, importante în aplicaţii. Conceptul de funcţie continuă s-a definit relativ târziu şi este datorat în principal matematicienilor A. Cauchy, B. Boltzano şi G. Darboux. Spre deosebire de limită, noţiunea de continuitate a unei funcţii se studiază în punctele domeniului de definiţie a funcţiei.

Definiţia 3.6.1 *Se spune că funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $a \in D$ dacă oricare ar fi şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ convergent către punctul a, $a_n \in D$, şirul $(f(a_n))_{n\geq 0}$ este convergent şi şirul are limita $f(a)$.*

Fie funcţia definită astfel,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{25}{4}x, & \text{dacă} \quad x \in [2,4] \\ x^3 + 2x^2 - 8, & \text{dacă} \quad x \in (4,6] \end{cases}$$

În Figura 3.12 este reprezentat grafic funcţia f în intervalul $x \in [2,6]$ şi este evidenţiată discontinuitatea acesteea în punctul $x = 4$.

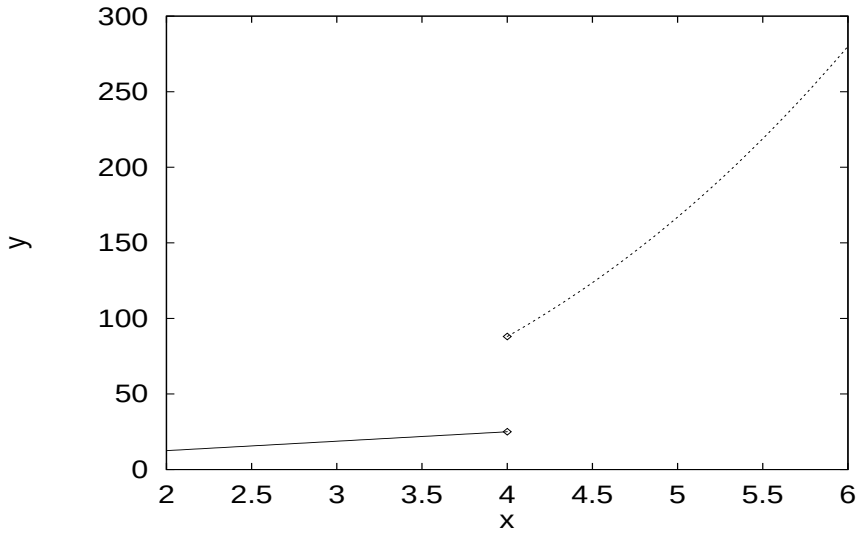


Figura 3.12: Evidenţierea discontinuităţii funcţiei în punctul $x = 4$.

Definiţia 3.6.2 *O funcţie este continuă pe o mulţime de puncte dacă este continuă pe toate punctele mulţimii.*

O funcţie este continuă pe punctele izolate ale domeniului de definiţie; adică dacă domeniul de definiţie al unei funcţii este de forma $D = (a, b] \cup \{x_0\}$ rezultă că funcţia este continuă în x_0. O funcţie este continuă în punctul x_0 dacă şi numai dacă limita la dreapta este egală cu limita la stânga şi cu valoarea funcţiei pe punctul respectiv, adică

$$l_s(x_0) = l_d(x_0) = f(x_0).$$

O funcţie care nu este continuă pe domeniul de definiţie se numeşte discontinuă.

Exemplul 3.6.1 *Să se studieze continuitatea funcţiei:* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x + 2\alpha x, & dacă \quad x \leq 1 \\ 3\alpha x, & dacă \quad x > 1 \end{cases}$$

funcţie de parametrul α.

Rezolvare:

Oricare ar fi $x \in (\infty, 1) \cup (1, \infty)$ funcţia f este continuă pe punctul respectiv. Problema se pune în punctul $x = 1$. Limita la stânga în $x = 1$ este $l_s(1) = \alpha^2 + 2\alpha$ iar limita la dreapta este $l_d(1) = 3\alpha$; valoarea funcţiei în $x = 1$ este $f(1) = \alpha^2 + 2\alpha$. Pentru ca funcţia să fie continuă în punctul $x = 1$ trebuie ca $\alpha^2 + 2\alpha = 3\alpha$. Deci, pentru $\alpha = 0$ sau $\alpha = 1$ funcţia este continuă şi în $x = 1$.

Propoziţia 3.6.1 *Fie* $f,\ g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *funcţii continue pe* D, *atunci:*

(i) $f + g$ *este o funcţie continuă pe* D;

(ii) $f \cdot g$ *este o funcţie continuă pe* D;

(iii) $\dfrac{f}{g}$ *este o funcţie continuă pe* D *(afirmaţia are sens doar dacă* g *nu se anulează pe* D*).*

Propoziţia 3.6.2 *Dacă o funcţie este continuă într-un punct, atunci modulul funcţiei respective este o funcţie continuă în punctul respectiv.*

Propoziţia 3.6.3 *Orice funcţie continuă într-un interval închis este mărginită şi îşi atinge marginile.*

3.7 Derivata unei funcţii

Din punct de vedere ştiinţific un proces este studiat prin comportamentul său în timp şi/sau spaţiu. De cele mai multe ori se urmăreşte rata cu care se modifică procesul respectiv în timp. Câteva exemple de astfel de procese sunt: viteza instantanee a unui punct material, rata de creştere a unui organism viu, variaţia rezistivităţii unui fir conductor în raport cu temperatura atunci când este încălzit, rata de dizolvare a unei substanţe în raport cu timpul, etc. Matematic toate aceste procese sunt modelate prin introducerea noţiunii de derivată a unei funcţii.

Se revine la problema mişcării unui corp în câmp gravitaţional caracterizat de acceleraţia g, descrisă în cadrul secţiunii 3.1, dar de această dată se consideră căderea liberă în vid (nu se iau în considerare efectele datorate rezistenţei aerului). Dacă timpul t se socoteşte de la începutul căderii atunci spaţiul s parcurs în acest timp se exprimă prin relaţiei (3.2) unde unghiul $\alpha = \frac{\pi}{2},\ v_0 = 0$, axa Oy fiind de orientare opusă. Astfel,

$$s(t) = \frac{gt^2}{2}. \tag{3.27}$$

În continuare se analizează modul în care se poate exprima viteza corpului la un moment t. Pentre aceasta se consideră că la momentul t corpul se află în poziţia M de pe axa verticală $0y$, iar la timpul $t + \Delta t$ în poziţia M'. Creşterea spaţiului MM' în intervalul de timp Δt se notează prin Δs. Se înlocuieşte variabila timp prin $t + \Delta t$ în relaţia (3.27) şi se obţine

$$s + \Delta s = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2. \tag{3.28}$$

Se ţine cont de relaţia (3.27) şi se obţine,

$$\Delta s = \frac{g}{2}(2t\Delta t + \Delta t^2). \tag{3.29}$$

Se împarte relaţia (3.29) la Δt şi se obţine viteza medie de cădere v_m corespunzătoare porţiunii MM',

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = g\,t + \frac{g}{2}\Delta t. \tag{3.30}$$

Din analiza ultimei relaţii se constată că viteza se modifică împreună cu variaţia Δt şi se caracterizează cu atât mai bine căderea corpului cu cât intervalul Δt va fi mai mic.

Definiţia 3.7.1 *Se numeşte* **viteza instantanee** v *a corpului la momentul* t*, limita către care tinde viteza medie* v_m *în intervalul* Δt *când* Δt *tinde către* 0*, deci*

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(g\, t + \frac{g}{2} \Delta\, t \right) = g\, t. \tag{3.31}$$

Prin urmare se poate considera că mişcarea este pe deplin determinată dacă este cunoscută ecuaţia de mişcare $s = s(t)$. Funcţia $v = v(t)$ se numeşte ecuaţia vitezei. Mişcarea variată este descrisă şi de altă mărime fizică numită acceleraţie, $a = a(t)$, care se defineşte ca limita raportului dintre variaţia vitezei şi cea a timpului atunci când $\Delta t \to 0$. Dacă funcţia asociată acceleraţiei este constantă atunci mişcarea este considerată uniform variată.

Exerciţiul 3.7.1 *Procedând analog, pornind de la relaţia (3.31), să se deducă legea acceleraţiei pentru cădera liberă în câmp gravitaţional .*

Din puct de vedere matematic derivata unei funcţii într-un punct este dată de următoarea definiţie.

Definiţia 3.7.2 *Fie* $f : D \to \mathbb{R}$ *şi* x_0 *un punct de acumulare al intervalului* D*. Se spune că* **funcţia are derivată** *în punctul* x_0 *dacă există limita:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{3.32}$$

Dacă limita (3.32) este finită spunem că funcţia f *este* **derivabilă** *în punctul* x_0*.*

Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct. Nu orice funcţie continuă într-un punct este derivabilă în acel punct. Exemplu pentru ultima afirmaţie este funcţia modul $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ în punctul $x = 0$.

Interpretarea geometrică a derivatei unei funcţii într-un punct

Fie funcţia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi x_0 un punct din intervalul $[a, b]$. Se consideră o variaţie Δx a punctului x_0 astfel încât $x_0 + \Delta x \in [a, b]$, atunci variaţia funcţiei f între punctele x_0 şi $x_0 + \Delta x$ este

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

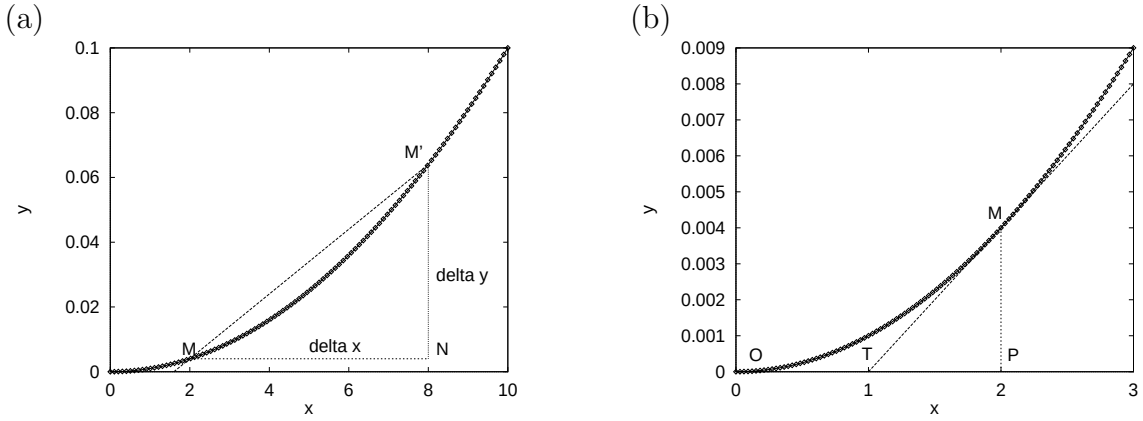


Figura 3.13: (a) Funcţia $f(x) = 0.001\,x^2$ definită pe intervalul $[0, 10]$, şi secanta acesteea; (b) Efectul de "zoom" al aceleeaşi funcţii definită pe intervalul $[0, 3]$ şi tangenta asociată.

În Figura 3.13-(a) punctul M are coordonatele $(x_0, f(x_0))$ şi M' are coordonatele $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Panta dreptei MM' este

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Dacă variaţia Δx (este foarte mică) tinde la 0 atunci prin trecerea la limită se obţine

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Din punct de vedere geometric atunci când $\Delta x \to 0$ dreapta secantă MM' devine tangentă la grafic în punctul M (vezi Anexa la Capitolul 3).

Exerciţiul 3.7.2 *Creşterea numerică a unei culturi de bacterii în timp (ore) este descrisă de funcţia* $y(t) = \frac{1}{2}\,t^2 + 1$*;*

(a) Să se reprezinte grafic funcţia $y = y(t)$*;*

(b) Să se determine creşterea pentru intervalul $t \in [2, 2.01]$*;*

(c) Să se determine viteza de înmulţire a bacteriilor în acelaşi interval;

(d) Să se determine viteza instantanee de crestere pentru $t = 2$ *ore.*

Exerciţiul 3.7.3 *Legea mişcării a două puncte materiale este exprimată de relaţiile* $y(t) = \frac{(t+1)^3}{t+2}$ *şi* $y(t) = t + t\,cos^2\,t$*;*

(a) Să se reprezinte grafic legile mişcării în intervalul $t \in [0, 10]\, s$*;*

(b) Să se determine viteza punctelor materiale la $t = 1.6\, s$*, respectiv* $t = 3\, s$*;*

(c) Să se determine legile acceleraţiei punctelor materiale şi să se reprezinte grafic.

Exerciţiul 3.7.4 *Un oraş asiatic este lovit de o epidemie de gripă. Oficialităţile estimează că la* t *(zile) după începerea epidemiei numărul persoanelor îmbolnăvite poate fi estimat de funcţia* $y(t) = 120\, t^2 - 2\, t^3$*, atunci când* $0 \leq t \leq 40$*;*

(a) Să se reprezinte grafic funcţia ce descrie fenomenul de îmbolnăvire în timpul dat;

(b) Să se reprezinte grafic funcţia ce exprimă rata de îmbolnăvire (viteza);

(c) Să se calculeze ratele de îmbolnăvire la timpii $t = 10$*,* $t = 20$*, şi* $t = 40$ *zile;*

Operaţii cu funcţii derivabile

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$.

(i) *Derivata produsului dintre o funcţie şi o constantă:* Fie $f : d \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $k \in \mathbb{R}$ o constantă reală, atunci

$$(kf)' = kf'. \tag{3.33}$$

(ii) *Derivata sumei a două funcţii:* Fie $f,\, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile pe D, atunci

$$(f \pm g)' = f' \pm g'. \tag{3.34}$$

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ atunci

$$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

(iii) *Derivata produsului a două funcţii:* Fie $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile pe D, atunci

$$(fg)' = f'g + g'f. \tag{3.35}$$

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ atunci:

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0),\end{aligned}$$

deci egalitatea de la punctul (3.35) este demonstrată.

(iv) *Derivata câtului a două funcţii:* Fie $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile pe $\mathbb{R}$, astfel încât g să nu se anuleze pe D, atunci

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}. \tag{3.36}$$

Se notează $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, atunci

$$\begin{aligned}f(x) &= h(x)g(x) \\ f'(x) &= h'(x)g(x) + h(x)g'(x) \implies \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Ultima relaţie se obţine prin înlocuirea lui h cu expresia sa în egalitatea (3.37) după care se explicitează h'.

(v) *Derivarea funcţiilor compuse:* Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile pe $\mathbb{R}$, se notează cu $h(x) = (f \circ g)(x)$ funcţia compusă. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci

$$\begin{aligned}h'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0}{x - x_0} \\ &= f'(g(x_0))g'(x_0)\end{aligned}$$

Deci,

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x), \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R} \tag{3.38}$$

(vi) *Derivata funcţiei inverse:* Fie funcţia $f : \mathbb{R}\to \mathbb{R}$ o funcţie inversabilă şi derivabilă pe D. Fie $x,\ x_0 \in D$ şi $y,\ y_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$ şi $f(x_0) = y_0$ adică $x = f^{-1}(y)$

şi $x_0 = f^{-1}(y_0)$, atunci

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}(y_0)\right)' &= \lim_{x\to x_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}\\ &= \lim_{y\to y_0}\frac{x-x_0}{y-y_0} = \lim_{y\to y_0}\frac{1}{\underline{\dfrac{f(x)-f(x_0}{x-x_0}}}\\ &= \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)},\end{aligned}$$

deci,

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} \tag{3.39}$$

oricare ar fi $x \in D$ astfel încât $f(x) = y$.

Exemplul 3.7.1 *Folosind definiţia (3.7.2) să se determine derivata funcţiilor*

$$(a)\ f(x) = x^n,\quad (b)\ f(x) = \frac{1}{x}\quad (c)\ f(x) = \sin x.$$

Rezolvare: (a) Se aplică definiţia

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} =\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\ldots+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1})}{x-x_0} =\\ &= nx_0^{n-1}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

La fel se procedează pentru celălate cazuri.

În Tabelul 3.1 sunt date formulele derivatelor principalelor funcţii elementare şi funcţii compuse.

Exerciţiul 3.7.5 *În baza unor raţionamente similare cu cele prezentate în Exemplele 3.7.1 să se deducă rezultatele prezentate în Tabelul 3.1.*

Pentru a deriva funcţia logaritm cu baza diferită de e, se aplică relaţia (3.11) de schimbare a bazei şi apoi se derivează.

Exerciţiul 3.7.6 *Fie u o funcţie compusă de variabilă x. Prin aplicarea relaţiilor (3.38) şi (3.39) să se deducă formulele de derivare a funcţiilor compuse conţinute în coloana a treia din Tabelul 3.1.*

Tabelul 3.1: Formulele de derivare ale funcţiilor elementare şi compuse

Funcţia	Derivata funcţiei	Funcţia compusă
c	0	
x	1	
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
e^x	e^x	$e^{u(x)} = u'(x)e^{u(x)}$
a^x, $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$a^x \ln a$	$(a^{u(x)}) = u'(x)a^{u(x)} \ln a$
$\sin x$	$\cos x$	$(\sin u(x))' = u'(x)\cos(u(x))$
$\cos x$	$-\sin x$	$(\cos u(x))' = -u'(x)\sin(u(x))$
tgx	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$(tg\ u(x))' = \frac{u'(x)}{\sin^2(u(x))}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\cos^2 x}$	$(ctg\ (u(x)))' = -\frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin(u(x)))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos(u(x)))' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$arctg\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$(arctg(u(x))' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$
$\operatorname{arcctg}\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctg\ u(x))' = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$
$sec\, x = \frac{1}{\cos\ x}$	$\frac{\sin\ x}{\cos^2\ x}$	$\frac{u'(x)\sin\ u(x)}{\cos^2\ u(x)}$
$csec\, x = \frac{1}{\sin\ x}$	$-\frac{\cos\ x}{\sin^2\ x}$	$-\frac{u'(x)\cos\ u(x)}{\sin^2\ u(x)}$
$\sinh\ x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$	$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	$\frac{1}{2}u'(x)(e^{u(x)} + e^{-u(x)})$
$\cosh\ x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$	$\frac{1}{2}u'(x)(e^{u(x)} - e^{-u(x)})$

3.7.1 Derivate de ordin superior

Viteza instantanee reprezintă rata de schimbare a poziţiei, adică derivata spaţiului în funcţie de timp. Se pune în continuare problema determinării ratei de schimbare a vitezei ca funcţie de timp, adică din punct de vedere matematic se calculează derivata vitezei ca şi funcţie de timp; ceea ce înseamnă derivata de ordinul doi a spaţiului, adica se derivează spaţiul în raport cu timpul iar rezultatul se derivează tot ca şi funcţie de timp. Din punct de vedere fizic derivata vitezei este acceleraţia, adică derivata de ordinul al doilea a spaţiului în funcţie de timp este acceleraţia.
Deci, din punct de vedere matematic determinarea derivatei de ordin superior a unei funcţii este un proces iterativ.
Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pentru determinarea derivatei de ordinul doi a funcţiei f se derivează (dacă acest lucru este posibil, din punct de vedere al existenţei derivatei) derivata de ordinul întâi a funcţiei f. Procedeul se repetă (în măsura în care se poate din punct de vedere al existenţei derivatelor) până se determină derivata de ordinul dorit.

Observaţia 3.7.1 *Există funcţii care se pot deriva de un număr finit de ori precum şi funcţii care se pot deriva de un număr infinit de ori.*

Fie f o funcţie derivabilă de n ori pe domeniul de definiţie a funcţiei. Derivata de ordin n se notează cu $f^{(n)}$ şi

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'(x),$$

oricare ar fi x din domeniul de definiţie a funcţiei.
Funcţiile polinomiale sunt funcţii derivabile de o infinitate de ori pe domeniul de definiţie a funcţiei.

3.7.2 Proprietăţi ale funcţiilor derivabile

Prin analiza derivatelor unei funcţii se obţin informaţii despre extremele funcţiei, punctele în care funcţia îşi schimbă concavitatea, asimptotele funcţiei precum şi forma graficului funcţiei.

3.8 Extreme locale

Definiţia 3.8.1 *Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Funcţia f are un punct de* **maxim (minim)** *local în punctul $x_0 \in D$ dacă există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât*

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall\, x \in U \cup D \tag{3.41}$$

$$(f(x) \geq f(x_0), \quad \forall\, x \in U \cup D) \tag{3.42}$$

Punctele de minim respectiv de maxim local se numesc puncte de **extrem local**.

Teorema 3.8.1 (Fermat) *Fie $f : D \subseteq R \to R$ derivabilă pe D şi $x_0 \in D$ punct de extrem pentru funcţia f atunci $f'(x_0) = 0$*

Demonstraţie: Se presupune că x_0 este punct de maxim local. Se ţine cont că f este derivabilă în x_0 atunci

$$f'_d(x_0) = f'_s(x_0) = f'(x_0).$$

Deci,

$$x < x_0 \quad f'_s(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \tag{3.43}$$

$$x > x_0 \quad f'_d(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \tag{3.44}$$

Atunci, $0 \leq f'(x_0) \geq 0$, adică $f'(x_0) = 0$.
La fel se demonstrează şi în cazul în care x_0 este punct de minim local.

Teorema 3.8.2 (Rolle) *Dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe intervalul $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) şi $f(a) = f(b)$, atunci există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.*

Demonstraţie: Deoarece f este continuă pe $[a, b]$ atunci funcţia îşi atinge marginile pe intervalul pe $[a, b]$. Rezultă că există $m,\ M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \leq f(x) \leq M$ oricare ar fi $x \in [a, b]$. Dacă $m = M$ rezultă că funcţia f este constantă şi deci derivata sa este identic nulă pe (a, b). Dacă $M > m$ şi $f(a) = f(b)$ există un maxim (minim) local în $c \in (a, b)$. Aplicând teorema lui Fermat rezultă că $f'(c) = 0$.

Teorema 3.8.3 (Lagrange) *Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă pe (a,b), atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât,*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad \textit{(Formula creşterilor finite).} \tag{3.45}$$

Demonstraţie: Se consideră funcţia auxiliară $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definită astfel,

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a).$$

Se observă că F îndeplineşte condiţiile teoremei lui Rolle. Deci există $c \in (a,b)$ astfel încât $F'(c) = 0$ deci, relaţia (3.45) este satisfăcută.
Pe baza proprietăţilor de mai sus rezultă:

(i) Dacă o funcţie reală are derivată nulă pe domeniul de definiţie atunci funcţia este constantă.

(ii) Fie o funcţie reală derivabilă pe domeniul de definiţie. Dacă derivata nu se anulează pe domeniul de definiţie, atunci derivata are semn constant pe domeniul de definiţie.

Prima derivată a funcţiei este folosită pentru determinarea monotoniei funcţiei.
Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe intervalul $I \subset D$.
Dacă $f'(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in I$, atunci f este monoton crescătoare pe I.
Dacă $f'(x) \leq 0$ oricare ar fi $x \in I$, atunci f este monoton descrescătoare pe I.

Observaţia 3.8.1 *Dacă derivatele a două funcţii reale cu valori reale sunt egale, atunci cele două funcţii diferă printr-o constantă pe domeniul lor de definiţie.*

Cea de-a doua derivată a funcţiei este folosită pentru determinarea concavităţii respectiv a convexităţii funcţiei. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe intervalul $I \subset D$.

Definiţia 3.8.2 *Se spune că funcţia f este* **convexă** *pe I dacă tangenta în orice punct al intervalului I la graficul funcţiei se află "sub" graficul funcţiei. Funcţia f este* **concavă** *pe I dacă tangenta în orice punct al intervalului I la graficul funcţiei se află "deasupra" graficului funcţiei. Se numeşte* **punct de inflexiune** *punctul în care funcţia îşi schimbă concavitatea.*

Teorema 3.8.4 *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie de două ori derivabilă pe intervalul $I \subset D$ şi dacă $f''(x) \geq 0$ atunci fucţia f este convexă pe I. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe intrevalul $I \subset D$ şi dacă $f''(x) \leq 0$ atunci funcţia f este concavă pe I.*

Punctele de inflexiune se află printre rădăcinile derivatei a doua.

3.9 Asimptote

Din punct de vedere practic s-a observat că există fenomene modelate de funcţii ale căror grafice se apropie foarte mult de o dreaptă dar nu o intersectează niciodată. Aceste funcţii modelează de obicei fenomene de saturaţie sau relaxare întâlnite cu precădere în ştiinţele aplicative.

Definiţia 3.9.1 *Se numeşte asimptotă la o curbă, dreapta tangentă la curbă în punctul de la infinit.*

În raport cu poziţia asimptotei faţă de axele de coordonate există asimptote orizontale, verticale şi oblice.

Asimptote orizontale

Pentru a studia existenţa asimptotelor orizontale trebuie ca funcţia să fie definită pe un interval nemărginit.

Definiţia 3.9.2 *Se spune că funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ are asimptotă orizontală dreapta $y = l$ la $+\infty$ (respectiv la $-\infty$) dacă*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad (\textit{respectiv } \lim_{x \to -\infty} f(x) = l), \quad (l \textit{ finit}).$$

Exemplul 3.9.1 *Să se determine asimptotele orizontale pentru funcţiile f, g, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:*

$$(a)\ f(x) = e^x, \qquad (b)\ g(x) = \frac{3x^2 - 6}{x^2 + 1}, \qquad (c)\ h(x) = x.$$

Rezolvare:

(a) Pentru a determina asimptotele orizontale trebuie determinate limitele la $+\infty$ şi la $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Deci, dreapta de ecuaţie $y = 0$ este asimptotă orizontală a funcţiei f la $-\infty$ dar nu şi la $+\infty$.

(b)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-6}{x^2+1} = 3, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-6}{x^2+1} = 3$$

Deci, dreapta de ecuaţie $y = 3$ este asimptotă orizontală a funcţiei g la $\pm\infty$.

(c)

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Funcţia h nu are asimptote orizontale.

Asimptote verticale

Pentru determinarea asimptotelor verticale în punctul $x = a$ se calculează $\lim_{x\to a} f(x)$. Dacă limita este infinită atunci dreapta $x = a$ este asimptotă verticală pentru funcţia f.

Observaţia 3.9.1 *Se poate ca* $\lim_{x\to a} f(x)$ *să fie infinită doar la stânga sau la dreapta lui* a*, atunci asimptotă verticală este dreapta de ecuaţie* $x = a$ *doar la dreapta sau la stânga pentru funcţia în discuţie.*

Asimptote oblice

Dacă o funcţie are asimptotă orizontală la $+\infty$ sau $-\infty$ atunci nu mai poate avea asimptote oblice la $\pm\infty$.

Definiţia 3.9.3 *Dreapta* $y = mx + n$ *este asimptotă oblică pentru funcţia* $f : \mathbb{R}\to \mathbb{R}$ *dacă:*
(i) există şi este finită limita $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$*;*
(ii) există şi este finită limita $\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = n$.

Exemplul 3.9.2 *Să se studieze existenţa asimptotelor pentru funcţia* $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}.$$

Rezolvare: Se observă că $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, deci nu există asimptote orizontale. Pentru determinarea existenţei asimptotelor oblice se calculează $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ şi $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = -2$. Deci dreapta de ecuaţie $y = x - 2$ este asimptotă oblică la $\pm\infty$. Datorită faptului că funcţia nu este definită pentru $x = 2$ s-ar putea să existe asimptote verticale. Deoarece $\lim_{x\nearrow 2} f(x) = +\infty$ şi $\lim_{x\searrow 2} f(x) = -\infty$ rezultă că dreapta de ecuaţie $x = 2$ este asimptotă verticală la stânga la $+\infty$ şi la dreapta la $-\infty$.

3.10 Reprezentarea grafică a funcţiilor

Reprezentarea grafică a modelului matematic corespunzător unui anumit fenomen analizat este de multe ori mai sugestivă şi instructivă decât o exprimare pur analitică sau tabelară. În ştiinţele aplicate reprezentarea grafică a fenomenelor prin funcţii analitice este o practică curentă. Conceptul de grafic al funcţiei f a fost exprimat de Definiţia 3.2.2. O realizare *"aproximativă"* a graficului unei funcţii poate conduce la o slabă înţelegere sau chiar greşită a fenomenului analizat. Pentru a se evita astfel de situaţii se inpune parcurgerea următoarelor etape:

(i) determinarea mulţimii pe care este definit fenomenul precum şi intersecţia cu axele de coordonate;

(ii) studiul asimptotelor funcţiei;

(iii) studiul continuităţii;

(iv) determinarea punctelor de extrem;

(v) determinarea intervalelor din domeniul de definiţie pentru care funcţia este concavă şi/sau convexă;

(vi) realizarea tabelului de variaţie al funcţiei;

(vii) reprezentarea grafică.

Spre exemplificarea celor afirmate mai sus se va reprezenta grafic funcţia,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right). \tag{3.46}$$

În statistica matematică funcţia (3.46) este des întâlnită în prelucrarea datelor rezultate din experimente, fiind numită densitatea de repartiţie normală, [2], şi va fi tratată pe larg în Capitolul 7 . Parametrii b şi a reprezintă valoarea medie a distribuţiei iar a^2 este abaterea medie pătratică faţă de valoarea b. Această funcţie se bucură de proprietatea remarcabilă că integrala acesteea pe întreaga axă reală este egala cu unitatea [2]. În continuare sunt parcurse toate etapele necesare reprezentării grafice a funcţiei (3.46).

(i) *Determinarea domeniului de definiţie al funcţiei şi a intersecţiei graficului cu axele de coordonate.* Domeniul de definiţie este întreaga axa reală. Graficul funcţiei intresectează axa Oy în punctul de coordonate $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\right)$ şi nu intersectează axa Ox;

(ii) *Studiul asimptotelor funcţiei.* Se calculează limitele $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ precum şi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, deci dreapta de ecuaţie $y = 0$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei spre $+\infty$ şi $-\infty$;

(iii) *Studiul continuităţii funcţiei.* Funcţia este continuă pe tot domeniul de definiţie;

(iv) *Studiul derivatei întâi a funcţiei.* În urma calculului primei derivate se obţine,

$$f'(x) = -\frac{x-b}{a^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}.$$

Punctul de extrem are abscisa $x = b$ la stânga valorii $x = b$, funcţia fiind crescătoare, iar la dreapta sa funcţia este descrescătoare;

(v) *Studiul derivatei a doua a funcţiei.* În urma calculului se obţine,

$$f"(x) = \frac{1}{a^3\sqrt{2\pi}} \left[\frac{(x-b)^2}{a^2} - 1\right] e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}.$$

Punctele în care se anulează derivata a doua se obţin din rezolvarea ecuaţiei de gradul al doilea,

$$x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0,$$

ale cărei soluţii sunt $x = b - a$, respectiv $x = b + a$. Funcţia este convexă la stânga lui $b - a$ şi la dreapta lui $b + a$, iar între cele două valori funcţia este concavă;

(vi) *Tabelul de variaţie a funcţiei.*

x	$-\infty$		$b-a$		b		$b+a$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{a\sqrt{2\pi e}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}$	$\searrow$	$\frac{1}{a\sqrt{2\pi e}}$	$\searrow$	0

(vii) *Trasarea graficului funcţiei.* Graficul densităţii de repartiţie normale pentru $a = 1$ şi $b = 5$ este reprezentat în Figura 7.1-(a).

Exerciţiul 3.10.1 *Să se reprezinte grafic funcţiile:*

(a) $y = (x+2)^2(x-1)^3$ (b) $y = \sin^3 x + \cos^3$ (c) $y = \sin 2x + 2\cos x$

(d) $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-1}$ (e) $y = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+1}$ (f) $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

(g) $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-a}}, a > 0$ (h) $y = \sqrt{\dfrac{a^3-x^3}{3x}}, a > 0$ (i) $y = e^{\frac{1}{x-c}}$

(j) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ (k) $y = \dfrac{x}{300}(x^2-45)(x^2-10)$ (l) $y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Odată cu dezvoltarea tehnicilor de calcul în literatura de specialitate există o mulţime de pachete de programe destinate reprezentării grafice în două sau trei dimensiuni (2D, 3D) a funcţiilor descrise analitic sau numeric. Dintre acestea amintim doar pachetele software **Origin, Maple** ori **gnuplot** produse de firmele $Microcal^{TM}$, *Waterloo Maple Software*, respectiv *GNU Project*. Primele două se folosesc numai pe bază de licenţă, cel de al treilea este gratuit pentru mediile ştiinţifice şi academice şi poate fi descărcat de pe site-ul *ftp://ftp.gnuplot.info/pub/gnuplot*. Descrierea pachetului de programe **gnuplot** este redată pe larg în ultimul capitol.

Exerciţiul 3.10.2 *Prin utilizarea unuia dintre produsele amintite mai sus să se reprez-*

inte grafic funcţiile definite în Exerciţiul 3.10.1 pe intervalele:

(a) $x \in [-3, 3]$ (b) $x \in [0, 2\pi]$ (c) $x \in [0, 2\pi]$

(d) $x \in [-2, 2]$ (e) $x \in [-10, 16]$ (f) $x \in [-10, 10]$

(g) $x \in [-10, 0] \cup [5, 15], a = 5$ (h) $x \in [0, 10], a = 10$ (i) $x \in [-10, 10) \cup (10, 30], c = 10$

(j) $x \in [-5, 5]$ (k) $x \in [-10, 10]$ (l) $x \in \left[-\frac{1}{2\pi}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2\pi}\right]$.

3.11 Funcţii reale de două variabile

De cele mai multe ori în ştiinţele fundamentale sau aplicative o anumită mărime de interes depinde de mai mulţi parametrii. De exemplu, cantitatea de căldură absorbită de un corp anizotrop, concentraţia unei soluţii neomogene sau exprimarea cantitativă a procesului de creştere a unei culturi agricole sau arborifere. Toate acestea depind de timp şi spaţiu. În aceste cazuri legătura matematică dintre parametrii implicaţi este dată de o *funcţie de mai multe variabile.*

La fel ca şi în cazul funcţiilor de o singură variabilă, studiul funcţiilor de mai multe variabile presupune: determinarea limitei funcţiei pe punctele de interes, studiul continuităţii funcţiei, studiul punctelor de extrem, precum şi reprezentarea grafică a suprafeţelor. Reprezentarea grafică a suprafeţelor este una din preocupările de bază ale ştiinţelor aplicative ce se poate realiza cu ajutorul pachetelor software amintite în paragraful precedent.

În cele ce urmează se consideră funcţii *de două variabile reale*, ceea ce înseamnă că oricărei perechi ordonate de puncte (x, y) dintr-o submulţime D a planului i se asociază un unic număr real $f(x, y)$.

Exemplul 3.11.1 *Să se determine valorile funcţiilor de mai jos în punctul de coordonate* $(-1, 4)$

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2, \tag{3.47}$$

$$g(x, y) = 2x\sqrt{y}. \tag{3.48}$$

Rezolvare: Se observă că $f(-1, 4) = (-1)^2 + 3(4)^2 = 49$, respectiv $g(-1, 4) = 2(-1)\sqrt{4} = -4$. Pentru legea de definiţie (3.47) *domeniul de definiţie* este întregul plan real iar pentru funcţia definită de relaţia (3.48), domeniul de definiţie este $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \geq 0\}$.

Codomeniul funcţiei este orice mulţime care include mulţimea valorilor funcţiei. Dacă $z = f(x, y)$, x şi y sunt *variabilele independente* ale funcţiei f, iar valorile lui z formează mulţimea *valorilor dependente*.

Exemplul 3.11.2 *Să se determine domeniul de definiţie al funcţiei:*

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{x^2 + (y - 1)^2}$$

Rezolvare: Pentru ca legea de definiţie a funcţiei f să aibă sens, trebuie excluse punctul $(0, 1)$ (anulează numitorul) si mulţimea $\{(x, y) \mid y < x^2\}$ (pentru existenţa radicalului). Mulţimea tuturor punctelor din spaţiu ce îndeplinesc condiţia $z = f(x, y)$ determină o suprafaţă. Deoarece fiecărui punct (x, y) din domeniu îi corespunde o singură valoare z, fiecare dreaptă perpendiculară pe planul xOy intersectează suprafaţa în cel mult un punct. Desenarea suprafeţelor în diverse perspective se realizează pe baza noţiunilor de geometrie proiectivă şi este de cele mai multe ori dificil de realizat fără ajutorul calculatorului. Cartografii sugerează un mod mai simplu de a desena suprafeţe. Fiecare plan orizontal $z = c$ intersectează suprafaţa după o curbă. Proiecţia acestei curbe în planul xOy se numeşte *curbă de nivel*. O altă definiţie a curbei de nivel se formulează astfel:

Definiţia 3.11.1 *Curba de nivel reprezintă locul geometric al tuturor punctelor din planul xOy pentru care $f(x, y)$ are aceeaşi valoare.*

În Figura 3.14 este reprezentată grafic funcţia $z = \dfrac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$ pentru $x, y \in [-20, 20]$ precum şi câteva linii de nivel în planul xOy. În literatura de specialitate aceasta se numeşte şi funcţia *sinc*. În Figura 3.15 este redat graficul funcţiei $z = e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} \sin(x\sqrt{|y|})$ pentru $x, y \in [-4, 4]$ precum şi câteva linii de nivel în planul xOy.

Exerciţiul 3.11.1 *Să se reprezinte grafic curbele de nivel pentru suprafaţa $z = y^2 - x^2$. Pentru $z = -2, -1, 0, 1, 2$ fixat în planul xOy să se demonstreze că liniile de nivel sunt hiperbole.*

Curbele de nivel sunt folosite pentru a uni pe hărţi puncte care au aceleaşi caracteristici. Dacă se face referire la distribuţia temperaturii în plan, curbele care unesc punctele cu aceeaşi temperatură se numesc *izoterme*. Dacă se analizează intensitatea cutremurelor pe

(a) (b)

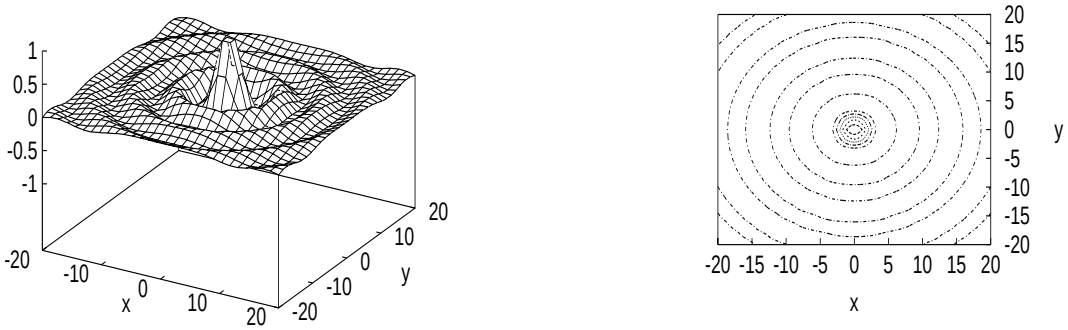


Figura 3.14: (a) Funcţia $z = \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$, (b) Curbele de nivel pentru aceeaşi funcţie în planul xOy.

(a) (b)

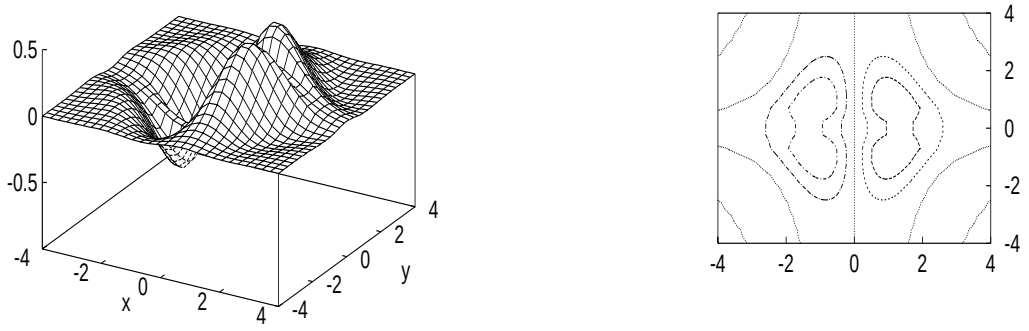


Figura 3.15: (a) Funcţia $z = e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} \sin(x\sqrt{|y|})$, (b) Curbele de nivel pentru aceeaşi funcţie în planul xOy.

un anumit domeniu geografic, curbele care unesc punctele unde cutremurul a avut aceeaşi intensitate se numesc curbe *izoseismice*.

3.12 Funcţii de trei sau mai multe variabile

Există mărimi în ştiinţele fundamentale sau aplicative care depind de trei sau mai multe variabile. Spre exemplu temperatura pe un areal extins depinde de locaţie, adică de trei variabile (x, y, z), ceea ce conduce la o funcţie de trei variabile. Viteza cu care se răceşte un amestec anizotrop depinde de poziţia punctului din spaţiu şi de timp, adică de patru variabile (x, y, z, t). Media unei grupe de 30 de studenţi depinde de mediile ficărui student din grupă $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ x_{30}$, adică o funcţie de 30 de variabile.
Funcţiile de trei variabile pot fi reprezentate prin desenarea *suprafeţelor de nivel.* Funcţiile de patru sau mai multe variabile nu pot fi vizualizate deoarece simţurile umane pot percepe fenomene sau evoluţii cel mult în $3D$. Domeniul pentru o funcţie de trei sau mai multe variabile este tripletul sau *n-uplul* pentru care legea de definiţie are sens şi valoarea funcţiei pe respectivul punct este un număr real.

Exemplul 3.12.1 *Să se determine domeniul de definiţie al funcţiilor:*

$$a)\ f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2-8},\quad b)\ g(x,y,z,t)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+t^2-16}}.$$

Rezolvare:

a) Pentru existenţa radicalului domeniul funcţiei f trebuie să conţină punctele din plan pentru care $x^2+y^2+z^2\geq 8$, deci punctele din exteriorul sferei cu centrul $(0,0,0)$ şi rază $2\sqrt{2}$.

b) Pentru determinarea domeniului funcţiei g trebuie ca numitorul fracţiei să nu se anuleze şi să aibă sens radicalul.

3.13 Derivate parţiale

Fie o funcţie de două variabile x şi y. Dacă y este considerat constant, $y=y_0$, atunci $f(x,y_0)$ poate fi privită ca o funcţie de o singură variabilă x, iar h o variaţie finită a

argumentului x. Derivata acestei funcţii în $x = x_0$ se numeşte *derivată parţială a lui f în raport cu x* în punctul (x_0, y_0), fiind cu $f_x(x_0, y_0)$ şi definită de relaţia:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{3.49}$$

Analog, *derivata parţială a lui f în raport cu y* în (x_0, y_0) este notată cu $f'_y(x_0, y_0)$ şi definită de

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{3.50}$$

Pentru determinarea derivatei parţiale a unei funcţii în raport cu o variabilă pe un punct se folosesc regulile de derivare obişnuite.

Exemplul 3.13.1 *Fie funcţia $f(x, y) = x^2y + 3y^2$. Să se determine $f'_x(1, 3)$ şi $f'_y(1, 3)$.*

Rezolvare: Pentru determinarea $f'_x(x, y)$ se consideră y constant şi se derivează funcţia f în raport cu x, adică

$$f'_x(x, y) = 2xy$$

şi deci $f'_x(1, 3) = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$.

Analog,

$$f'_y(x, y) = x^2 + 6y,$$

deci $f'_y(1, 3) = 1^2 + 6 \cdot 3 = 19$.

Notaţii: Fie $z = f(x, y)$. În literatura de specialitate se întâlnesc următoarele notaţii:

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \qquad f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

$$f'_x(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}, \qquad f'_y(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}.$$

Interpretarea geometrică

Se consideră o suprafaţă de ecuaţie $z = f(x, y)$ şi punctul de coordonate $A(x_0, y_0)$ conţinut în planul xOy. În Figura 3.16-(a) se consideră planul $y = y_0$ paralel cu planul xOz ce intersectează suprafaţa după curba QPR (segmentul AP perpendicular pe planul xOy), iar $f_x(x_0, y_0)$ reprezintă panta tangentei dreptei (t) la curba respectivă în punctul din spaţiu de coordonate $P(x_0, y_0, z_0)$. Analog, planul $x = x_0$ din Figura 3.16-(b), paralel cu

planul yOz intersectează suprafaţa după curbă MPL (segmentul BP perpendicular pe planul xOy), valoarea $f_y(x_0, y_0)$ reprezintă panta dreptei (t) tangentei la curba respectivă în punctul din spaţiu de coordonate $P(x_0, y_0, z_0)$. Din punct de vedere practic derivata parţială în raport cu o anumită variabilă poate fi interpretată ca rata de modificare a unei mărimi atunci când restul variabilelor rămân constante.

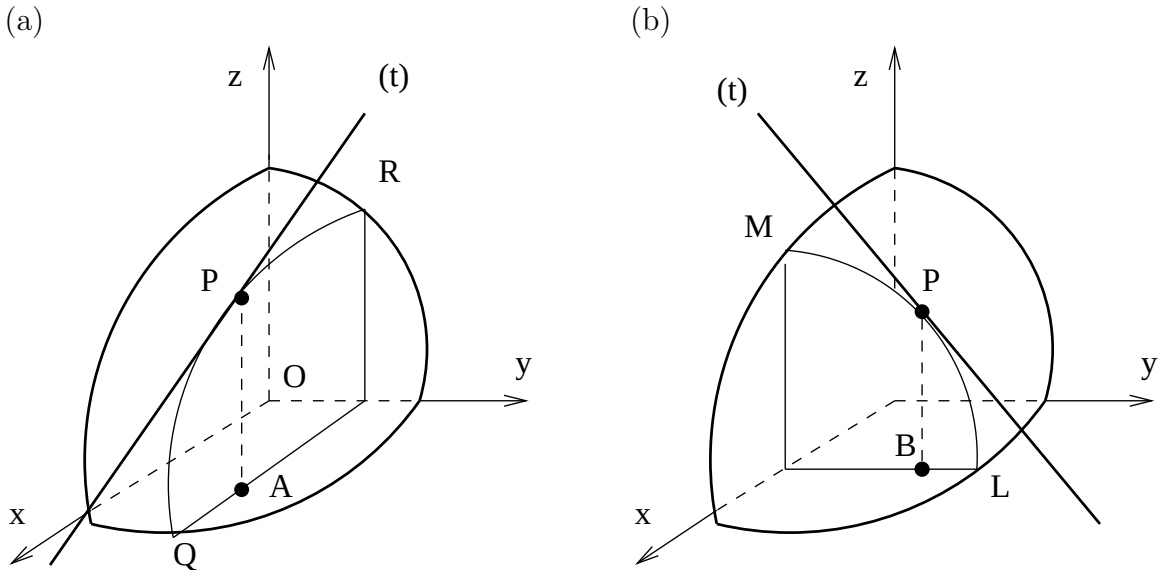


Figura 3.16: Semnificaţia geometrică a derivatei parţiale de ordinul întâi (a) derivata în funcţie de variabila x, (b) derivata în funcţie de variabila y.

3.13.1 Derivate parţiale de ordin superior

Deoarece derivata parţială a unei funcţii de mai multe variabile este la rândul său o altă funcţie de două sau mai multe variabile ea poate fi derivată parţial în raport cu aceste variabile obţinându-se derivatele parţiale de ordinul doi. Spre exemplu, în cazul unei funcţii de două variabile există patru derivate parţiale de ordinul doi.

Notaţii:

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \\ f''_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Exemplul 3.13.2 *Să se determine derivatele parţiale de ordinul doi pentru funcţia* $f(x,y) = y\cos x + e^y x^2 + \ln(xy)$.

Rezolvare: Derivatele parţiale de ordinul întâi sunt:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= -y\sin x + 2xe^y + \frac{1}{x}, \\ f'_y(x,y) &= \cos x + x^2 e^y + \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Derivatele parţiale de ordinul doi sunt

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= -y\cos x + 2e^y - \frac{1}{x^2}, \\ f''_{yy} &= x^2 e^y - \frac{1}{y^2}, \\ f''_{xy} &= -\sin x + 2xe^y, \\ f''_{yx} &= -\sin x + 2xe^y. \end{aligned}$$

Observaţia 3.13.1 *După cum se observă în exemplul de mai sus* $f_{xy} = f_{yx}$. *Acest lucru nu este întotdeauna adevărat, dar în marea majoritate a exemplelor întâlnite în acest curs are loc egalitatea. (A se vedea Observaţia 3.15.2).*

Derivatele parţiale de ordin trei şi mai mare se determină în mod analog (dacă există). Spre exemplu, derivatele parţiale de ordinul trei pentru o funcţie cu două variabile sunt în număr de opt. Una dintre derivatele parţiale de ordinul trei este

$$f'''_{xyz} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}.$$

Derivatele parţiale de tipul f''_{xy} şi f'''_{xyz}, adică cele în care derivarea se face în raport cu mai multe variabile se numesc *derivate parţiale mixte*.

3.14 Limita funcţiilor de mai multe variabile reale

În continuare se generalizează notiunea de limita (vezi Definiţia 3.5.2) pentru funcţii de mai multe variabile. Fie (a,b) un punct din planul xOy şi f o funcţie de două variabile reale. Scopul este de a analiza funcţia f atunci când punctul (x,y) se apropie de puncul

(a, b) indiferent pe ce drum (există o infinitate de moduri în care (x, y) se poate apropia de (a, b)). Notaţia matematică pentru afirmaţia de mai sus este:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

În cele ce urmează se defineşte limita unei funcţii reale de două variabile fără a ţine cont de drumul pe care (x, y) tinde la (a, b).

Definiţia 3.14.1 *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi (a, b) un punct din interiorul lui D. Funcţia f are limita L, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ oricare ar fi (x, y) astfel încât $0 < |(a, b) - (x, y)| < \delta$ şi se notează $\lim_{(x,y)\to(a,b)} = L$.*

Pentru interpretarea Definiţiei 3.14.1 se consideră vectorii ce trec prin punctele de origine a sistemului de coordonate şi punctele (x, y), respectiv (a, b). Distanţa dintre vârfurile celor doi vectori formaţi în acest mod se exprimă cu ajutorul teoremei lui Pitagora astfel: $|(a, b) - (x, y)| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$. Punctele din spaţiu care verifică inegalitatea $0 < |(a, b) - (x, y)| < \delta$ sunt cele din interiorul cercului de centru (a, b) şi rază δ.

Observaţia 3.14.1 *Definiţia 3.14.1 poate fi extinsă la funcţii de trei sau mai multe variabile.*

Dacă funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ((a, b) un punct din interiorul lui D) are limită, atunci indiferent de drumul pe care (x, y) tinde la (a, b) valoarea limitei nu se modifică. Dacă valoarea limitei se modifică în funcţie de drumul ales atunci funcţia nu are limită în punctul respectiv.

Exemplul 3.14.1 *Să se calculeze limita* $\lim_{(x,y)\to(2,3)} (e^2 + xy)$.

Rezolvare: Prin înlocuire se obţine,

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} (e^2 + xy) = e^2 + 6.$$

Exemplul 3.14.2 *Să se arate că funcţia,*

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

nu are limită în origine.

Rezolvare: Funcţia este definită oriunde în plan mai puţin în origine. În toate punctele de pe axa Ox diferite de origine funcţia ia valoarea $f(x,0)=1$. Limita lui $f(x,y)$ când $(x,y)\to(0,0)$ de-a lungul axei Ox este

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0)=1.$$

În toate punctele de pe axa Oy diferite de origine funcţia ia valoarea $f(0,y)=-1$. Limita lui $f(x,y)$ când $(x,y)\to(0,0)$ de-a lungul axei Oy este

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0)=-1.$$

Limita funcţiei ia valori diferite în funcţie de drumul pe care se apropie de origine, deci funcţia nu are limită în origine.

3.15 Noţiunea de continuitate pentru funcţii reale de mai multe variabile reale

Se generalizează noţiunea de continuitate (vezi 3.6.1) pentru funcţii de mai multe variabile. Fie (a,b) un punct din domeniul de definiţie al funcţiei f.

Definiţia 3.15.1 *Se spune că funcţia $f(x,y)$ este continuă pe punctul (a,b) dacă:*
(i) funcţia este definită pe (a,b);
(ii) funcţia are limită în (a,b);
(iii) valoarea funcţiei coincide cu limita funcţiei pe punctul respectiv.
Deci, funcţia este continuă pe puctul (a,b) dacă:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} = f(a,b).$$

După cum se poate observa, cerinţele pentru ca o funcţie reală de mai multe variabile să fie continuă sunt similare cu cele pentru o funcţie reală cu o singură variabilă. Intuitiv, pentru ca o funcţie să fie continuă pe un punct trebuie să nu aibă salturi sau să nu fie nemărginită pe punctul în care i se studiază continuitatea.
La fel ca şi în cazul funcţiilor de o singură variabilă, suma, produsul şi câtul (atunci când nu se anulează numitorul) a două funcţii continue este tot o funcţie continuă. Deci, funcţiile polinomiale de două sau mai multe variabile sunt funcţii continue.

Exerciţiul 3.15.1 *Să se arate că funcţia* $f(x,y) = x^3y^2 + 3xy + 7$ *este continuă pe toate punctele planului* xOy.

Exemplul 3.15.1 *Să se studieze continuitatea funcţiei* $f(x,y) = \dfrac{3x+7y}{y-4x^2}$.

Rezolvare: Funcţiile raţionale reprezintă raportul dintre două funcţii polinomiale şi sunt continue pe toate punctele planului unde nu se anulează numitorul. Domeniul de definiţie este planul xOy mai puţin punctele de pe parabola $y - 4x^2 = 0$.

Observaţia 3.15.1 *Compunerea a două funcţii continue este tot o funcţie continuă.*

Definiţia 3.15.2 *Se spune că o funcţie de mai multe variabile este continuă pe o mulţime dacă este continuă pe toate punctele mulţimii respective.*

Observaţia 3.15.2 *Dacă derivatele parţiale* f''_{xy} *şi* f''_{yx} *sunt continue pe o mulţime deschisă atunci* $f''_{xy} = f''_{yx}$ *pe mulţimea respectivă.*

3.16 Diferenţiabilitatea funcţiilor de mai multe variabile

Pentru o funcţie reală de o singură variabilă diferenţiabilitatea unei funcţii f într-un punct x coincidea cu existenţa derivatei f'. Acest lucru din punct de vedere geometric este echivalent cu faptul că există tangenta la grafic în punctul x.
Cum se poate imagina acest concept în cazul funcţiilor reale de mai multe variabile reale?
Prin generalizare, dreptei tangente într-un punct la curbă i se va asocia planul tangent. Acesta presupune mai mult decât existenţa derivatelor parţiale. Planul tangent trebuie să fie "reprezentativ" pentru graficul funcţiei în orice direcţie nu doar pe anumite direcţii.
O altă întrebare care apare: *Cine va juca rolul derivatei pentru o funcţie cu două sau mai multe variabile?*
Pentru a răspunde la această întrebare se face referire la secţiunea 2.3 unde s-a introdus noţiunea de produs scalar a doi vectori precum şi la noţiunea de gradient al unei funcţii.

Definiţia 3.16.1 *Fie funcţia $f(r) = f(x, y, z)$, derivabilă pe întreg domeniul său de definiţie. Gradientul funcţiei f, notat prin ∇f, este un vector definit astfel:*

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{k}. \tag{3.52}$$

Variaţia infinitezimală $d\vec{r}$ a vectorului $\vec{r}$ poate fi exprimată de relaţia (2.8) prin $d\,\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$, unde dx, dy, dz reprezintă variaţiile infinitezimale după direcţiile x, y, respectiv pe z. Aceasta implică introducerea variaţiei infinitezimale, df a funcţiei f, care poate fi exprimată ca produsul scalar dintre vectorul de poziţie $d\vec{r}$ şi gradientul funcţiei f, ∇f, furnizat de relaţia (3.52). Deci,

$$\begin{aligned} d\,f &= \left(\vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (\vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Dacă se alege direcţia $d\,r$ astfel încât vectorul $d\,\vec{r}$ să fie tangent la o suprafaţă de nivel, adică $f = const$, atunci $df = 0$. Deci vectorul ∇f este perpendicular pe suprafeţele de nivel. Dacă însă vectorul $d\,\vec{r}$ face cu gradientul un unghi ϑ, atunci $d\,f = \nabla f \cdot d\,\vec{r} = |\nabla f\,||\,d\,\vec{r}|\cos\vartheta$. Funcţia creşte cel mai rapid în direcţia gradientului, când $\vartheta = 0$. Cum vectorul $d\,\vec{r}$ în spaţiu descrie direcţia s atunci $|d\,\vec{r}| = d\,s$, (a se vedea paragraful 9.3.2) prin urmare

$$\frac{d\,f}{d\,s} = |\nabla f| \cos\vartheta. \tag{3.54}$$

Gradientul unei funcţii reale de mai multe variabile reprezintă un instrument modern cu ajutorul căruia se generalizează noţiunea de derivată a unei funcţii reale de o singură variabilă. Fie f o funcţie reală de două variabile reale x şi y care admite derivate parţiale f'_x şi f'_y pe tot domeniul său de definiţie. Astfel în baza formalismului de mai sus derivatele parţiale f'_x, f'_y calculate în punctul de coordonate (x_0, y_0) sunt componetele vectorului ∇f calculat în punctul de coordonate (x_0, y_0).

Exemplul 3.16.1 *Fie funcţia $f(x, y) = 4x^2 - xy + 3y^2$ şi direcţia s exprimată de vectorul $\vec{s} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$. Se calculează derivata funcţiei f după direcţia s în punctul de coordonate $(2, -1, f(2, -1)$.*

Rezolvare: Se aplică (3.54). Pentru calcularea gradientului funcţiei f se foloseşte relaţia (3.52) astefel, $\frac{df}{ds} = |(8x-y)\vec{i} + (-x+6y)\vec{j}|\cos\vartheta$, vectorul gradient are expresia $\nabla f(2,-1) = 17\vec{i} - 8\vec{j}$. Ţinând cont de relaţia (2.13), modulul vectorului gradient este exprimat de valoarea $\sqrt{17^2+8^2}$. Cosinusul unghiului dintre vectorii $\vec{s}$ şi $\nabla f(2,-1)$ este exprimat de relaţia

$$\cos\vartheta = \frac{17\times 4 - 24}{\sqrt{17^2+8^2}\sqrt{4^2+3^2}}, \quad \text{deci} \quad \frac{df}{ds} = \frac{44}{5}.$$

Teorema 3.16.1 *Dacă o funcţie $f(x,y)$ are derivate parţiale continue pe o mulţime deschisă care conţine punctul (a,b), atunci f este diferenţiabilă în (a,b).*

Interpretarea geometrică

Se consideră suprafaţa $z = f(x,y)$, aceasta se poate scrie

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0 \tag{3.55}$$

Definiţia 3.16.2 *Fie suprafaţa $F(x,y,z) = k$, k o constantă reală. Dacă F este diferenţiabilă în punctul $P(x_0,y_0,z_0)$ cu $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, atunci planul care trece prin punctul P şi este perpendicular pe vectorul $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ se numeşte* **planul tangent la suprafaţă în punctul** P.

Pentru a se determina ecuaţia planului perpendicular pe o suprafăţă în punctul (x_0,y_0,z_0) se aplica Teorema 2.4.1 şi ecuaţia (2.23) astfel,

$$\overrightarrow{\nabla F}(x_0,y_0,z_0)\cdot\overrightarrow{OP} = 0.$$

Vectorul $\overrightarrow{OP}$ se exprimă astfel, $\overrightarrow{OP} = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}$, deci în urma calculării produsului scalar dintre vectorii $\overrightarrow{\nabla F}(x_0,y_0,z_0)$ şi $\overrightarrow{OP}$ se obţine, ecuaţia planului tangent la suprafaţă în punctul P,

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0. \tag{3.56}$$

În particular dacă suprafaţa este dată de $z = f(x,y)$ şi dacă se ţine cont de (3.55), se obţine $F'_z(x_0,y_0,z_0) = -1$ şi deci ecuaţia planului tangent (3.56) se va scrie:

$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{3.57}$$

Exemplul 3.16.2 *Să se arate că funcţia* $f(x,y) = xe^y + x^2y$ *este diferenţiabilă în orice punct. Să se determine ecuaţia planului tangent la suprafaţa* f *în punctul de coordonate* $(2, 0, f(2,0))$.

Rezolvare: Derivatele parţiale ale funcţiei sunt:

$$f'_x = e^y + 2xy, \quad f'_y = xe^y + x^2.$$

Derivatele parţiale sunt continue pe toate punctele planului xOy, deci funcţia este diferenţiabilă peste tot. Gradientul funcţiei este

$$\nabla f = (e^y + 2xy)\cdot\vec{i} + (xe^y + x^2)\cdot\vec{j} \implies \nabla f(2,0) = (e^0 + 2\cdot 2\cdot 0)\cdot\vec{i} + (2\cdot e^0 + 2^2)\cdot\vec{j} = 1\cdot\vec{i} + 6\cdot\vec{j}.$$

Se aplică (3.57) pentru determinarea ecuaţiei planului tangent la suprafaţă în punctul de coordonate $(2, 0, 2)$,

$$\begin{aligned} z &= f(2,0) + \nabla f(2,0)\cdot(x-2, y-0) = \\ &= 2 + (\vec{i} + 6\vec{j})\cdot\Big((x-2)\vec{i} + (y-0)\vec{j}\Big) \\ &= 2 + x - 2 + 6y = x + 6y. \end{aligned}$$

În Figura 9.12-(b) este ilustrată semnificaţia geometrică a planului tangent la o suprafaţă $z = f(x,y)$

Exemplul 3.16.3 *Fie* $z = f(x,y) = 2x^3 + xy - y^3$. *Să se calculeze variaţia funcţiei între punctele* $(2,1)$ *şi* $(2.03, 0.98)$ *şi diferenţiala funcţiei în punctul* $(2,1)$.

Rezolvare: Variaţia lui z este $\Delta z = \Delta f = f(2.03, 0.98) - f(2,1) = 2\cdot 2.03^3 + 2.03\cdot 0.98 - 0.98^3 - 2\cdot 2^3 - 2\cdot 1 + 1^3 = 0.779062$.

Se poate accepta în stiinţele înginereşti că dx poate fi aproximat de $\Delta x = 2.03 - 2 = 0.03$, respectiv dy de $\Delta y = 1 - 0.98 = 0.02$, atunci dz va fi aproximat de

$$dz = (6x^2 + y)0.03 + (x - 3y^2)(-0.02) \tag{3.58}$$

Se evaluează (3.58) în punctul $(2,1)$ şi se obţine

$$\begin{aligned} dz &= (6\cdot 4 + 1)\cdot 0.03 + (2-3)\cdot(-0.02) \\ &= 0.77. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Diferenţa de rezultate se explică prin faptul că derivatele parţiale au fost calculate pentru punctul $(2,1)$ iar $dx \approx \Delta x$ şi $dy \approx \Delta y$.

3.17 Derivatele parţiale ale funcţiilor compuse

Se consideră funcţiile reale y şi x de variabilă reală t pentru care există $y(x(t))$.

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt},$$

Ultima egalitate are loc datorită compunerii funcţiilor. Pentru a deriva funcţii compuse se pun în evidenţă următoarele cazuri:

(a) Fie $z = f(x, y)$, iar x şi y sunt funcţii de t, $z = z(t)$.

Teorema 3.17.1 *Fie x şi y două funcţii diferenţiabile în t şi $z = f(x, y)$ diferenţiabilă în $(x(t), y(t))$. Atunci $z = f(x(t), y(t))$ este diferenţiabilă în t şi*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{3.60}$$

Relaţia (3.60) exprimă de fapt derivata funcţiei z în punctele de coordonate $(x(t), y(t))$. Cu alte cuvinte raportul dintre diferenţiala funcţiei şi diferenţiala argumentului este tocmai derivata funcţiei z în raport cu t.

Exemplul 3.17.1 *Se dă funcţia $z = x^3 + y$ unde $x(t) = 2t$ şi $y(t) = t^3$. Să se calculeze $\frac{dz}{dt}$.*

Rezolvare: Metoda I:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} && (3.61)\\ &= 3x^2 2 + 3t^2 && (3.62)\\ &= 24t^2 + 3t^2 = 27t^2. \end{aligned}$$

Metoda II: Determinarea derivatei din exemplul de mai sus se putea realiza direct înlocuind pe x şi y în expresia lui $z \implies$, $z = 9t^3 \implies \frac{dz}{dt} = 27t^2$. De cele mai multe ori această metodă nu poate fi aplicată şi atunci se va aplica Teorema 3.17.1.

(b) Fie $z = f(x, y)$ iar x şi y sunt funcţii de t şi s, $z = z(t, s)$.

Teorema 3.17.2 *Fie funcţiile $x = x(s,t)$ şi $y = y(s,t)$ care admit derivate parţiale în punctul (s,t) şi $z = f(x,y)$ diferenţiabilă în $(x(s,t), y(s,t))$. Atunci derivatele parţiale ale funcţiei z sunt date de:*

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \quad şi \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Regulile de derivare parţială a funcţiilor compuse se pot extinde şi pentru cazul funcţiilor de trei sau mai multe variabile.

Exemplul 3.17.2 *Dacă $z = x^2 + y$, $x = 2s + 7t$ şi $y = 5st$. Să se găsească $\frac{\partial z}{\partial t}$ şi $\frac{\partial z}{\partial s}$.*

Rezolvare: Cele două derivate parţiale de ordinul întâi ale funcţiei z sunt date de:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\ &= (2x)2 + 1.(5t) \\ &= 4s + 19t;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= (2x)7 + 1(5s) \\ &= 33s + 68t.\end{aligned}$$

3.18 Puncte de extrem pentru funcţii de mai multe variabile

În cele ce urmează se va extinde noţiunea de punct de extrem de la funcţii de o singură variabilă. Pentru început se va lua în considerare o funcţie reală de două variabile. Fie $z = f(x,y)$ o funcţie definită pe un domeniu D şi (x_0, y_0) un punct din D.

Definiţia 3.18.1 *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie şi (x_0, y_0) un punct din D,*

(i) dacă $f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$ oricare ar fi (x,y) din domeniul D, atunci (x_0, y_0) este **punct de maxim** *pentru funcţia f.*

(ii) dacă $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ *oricare ar fi* (x, y) *din domeniul* D*, atunci* (x_0, y_0) *este* **punct de minim** *pentru funcţia* f*.*

(iii) punctul (x_0, y_0) *este* **punct de extrem** *pentru funcţia* f *dacă este punct de maxim sau de minim pentru funcţie.*

Dacă în definiţia precedentă se cere ca inegalităţile să fie satisfăcute doar pe o parte din domeniul de definiţie atunci se obţin noţiunile de *maxim local*, *minim local,* respectiv *extrem local* pentru funcţia f. În anumite condiţii asupra domeniului (închis şi mărginit), funcţia îşi atinge punctele de extrem.

Punctele de extrem ale unei funcţii se găsesc printre punctele critice care sunt de trei tipuri:

(i) *Puncte de frontieră*, cele care se găsesc "la marginea" domeniului de definiţie a funcţiei;

(ii) *Punctele staţionare*, cele în care se anulează gradientul funcţiei, adică $\nabla f(x, y) = 0$;

(iii) *Punctele singulare*, cele care sunt în interiorul domeniului şi în care funcţia nu este diferenţiabilă, de exemplu punctele unde graficul funcţiei are "colţuri ascuţite" (rază de curbură mică).

Pentru a se enunţa un criteriu cu ajutorul căruia să se decidă când un punct din domeniul funcţiei este punct de extrem se introduce matricea hessiană ataşată unei funcţii de mai multe variabile. Se consideră funcţia $f = f(x_1, x_2, \ \cdots, \ x_n)$ care admite derivate parţiale de ordinul doi pe domeniul său de definiţie. Atunci matricea hessiană ataşată funcţiei f este:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(x, y) & f''_{x_1x_2}(x, y) & \cdots & f''_{x_1x_n}(x, y) \\ f''_{x_2x_1}(x, y) & f''_{x_2x_2}(x, y) & \cdots & f''_{x_2x_n}(x, y) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f''_{x_nx_1}(x, y) & f''_{x_nx_2}(x, y) & \cdots & f''_{x_nx_n}(x, y) \end{pmatrix} \tag{3.63}$$

Se vor folosi următoarele notaţii:

$$D_1 = f''_{x_1x_1}(x_0, y_0), \quad D_2 = \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(x, y) & f''_{x_1x_2}(x, y) \\ f''_{x_2x_1}(x, y) & f''_{x_2x_2}(x, y) \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(x_0,y_0) & f''_{x_1x_2}(x_0,y_0) & f''_{x_1x_3}(x_0,y_0) \\ f''_{x_2x_1}(x_0,y_0) & f''_{x_2x_2}(x_0,y_0) & f''_{x_2x_3}(x_0,y_0) \\ f''_{x_3x_1}(x_0,y_0) & f''_{x_3x_2}(x_0,y_0) & f''_{x_3x_3}(x_0,y_0) \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(x_0,y_0) & f''_{x_1x_2}(x_0,y_0) & f''_{x_1x_3}(x_0,y_0) & f''_{x_1x_4}(x_0,y_0) \\ f''_{x_2x_1}(x_0,y_0) & f''_{x_2x_2}(x_0,y_0) & f''_{x_2x_3}(x_0,y_0) & f''_{x_2x_4}(x_0,y_0) \\ f''_{x_3x_1}(x_0,y_0) & f''_{x_3x_2}(x_0,y_0) & f''_{x_3x_3}(x_0,y_0) & f''_{x_3x_4}(x_0,y_0) \\ f''_{x_4x_1}(x_0,y_0) & f''_{x_4x_2}(x_0,y_0) & f''_{x_4x_3}(x_0,y_0) & f''_{x_4x_4}(x_0,y_0) \end{vmatrix}, \cdots,$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(x,y) & f''_{x_1x_2}(x,y) & \cdots & f''_{x_1x_n}(x,y) \\ f''_{x_2x_1}(x,y) & f''_{x_2x_2}(x,y) & \cdots & f''_{x_2x_n}(x,y) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f''_{x_nx_1}(x,y) & f''_{x_nx_2}(x,y) & \cdots & f''_{x_nx_n}(x,y) \end{vmatrix}$$

Teorema 3.18.1 *Punctul staţionar (x_0, y_0) este punct de minim, respectiv de maxim pentru o funcţie f care admite derivate parţiale de ordinul doi continue într-o vecinătate a punctului staţionar (x_0, y_0) dacă toţi $D_i > 0$ oricare ar fi $i = \overline{1,n}$, respectiv $D_1 < 0,\ D_2 > 0,\ D_3 < 0,\ \cdots$*

Dacă există un i astfel încât $D_i = 0$ nu se ştie dacă punctul staţionar este punct de extrem sau nu.

Algoritmul de determinare a punctelor de extrem presupune parcurgerea următoarelor etape:

(i) Determinarea punctelor staţionare;

(ii) Determinarea matricei hessiane;

(iii) Calcularea valorilor D_i, $i = \overline{1,n}$ pentru fiecare punct staţionar în parte;

(iv) Luarea deciziei (folosind Teorema 3.18.1).

Exemplul 3.18.1 *Să se determine extremele funcţiei $f(x,y) = x^2 - 2x + \dfrac{y^2}{4}$.*

Rezolvare: Pentru determinarea punctelor staţionare se calculează derivatele parţiale de ordinul întâi:

$$f'_x = 2x - 2, \quad f'_y = \frac{y}{2}.$$

Punctele staţionare sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ \dfrac{y}{2} = 0 \end{cases},$$

adică punctul $(1, 0)$ este punct staţionar pentru funcţia f.

Matricea hessiană asociată funcţiei f este

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \implies H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$D_1 = 2 > 0$ şi $D_2 = 1 > 0$, deci punctul $(1, 0)$ este punct de minim pentru funcţia f.

3.18.1 Extreme condiţionate

Există cazuri când determinarea punctelor de extrem ale unei funcţii reale de mai multe variabile reale este condiţionată de existenţa unor relaţii suplimentare numite *legături* între variabilele funcţiei.

Se cere determinarea extremelor funcţiei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ atunci când variabilele funcţiei satisfac relaţiile:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{3.64}$$

unde funcţiile f şi φ_i, $i = \overline{1, n}$ verifică toate condiţiile ce asigură existenţa extremelor.

Rezolvarea problemei se reduce la determinarea extremelor unei funcţii F obţinută din funcţia f în care cele m variabile sunt exprimate din (3.64) în funcţie de celelalte $n - m$ variabile.

Exemplul 3.18.2 *Să se determine distanţa minimă dintre origine şi suprafaţa* $z^2 = x^2y + 4$.

Rezolvare: Fie $P(x, y, z)$ un punct de pe suprafaţă. Pătratul distanţei dintre origine şi P este $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Din punct de vedere al extremelor condiţionate, funcţia al cărei minim se cere să se

calculeze este $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ condiţionat de legătura $z^2 = x^2y + 4$.

Ţinând cont de modul în care a fost definită suprafaţa şi de modul de definire a distanţei, funcţia a cărei minim se studiază este:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4.$$

Urmând paşii algoritmului descris se obţine,

(i) Determinarea punctelor staţionare:

$$f_x = 2x + 2xy \text{ şi } f_y = 2y + x^2 \Longrightarrow$$

$$2x + 2xy = 0 \text{ şi } 2y + x^2 = 0.$$

Rezolvând sistemul de mai sus se obţin punctele staţionare $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -1)$ şi $(-\sqrt{2}, -1)$.

(ii) Determinarea hessianei:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}.$$

(iii)-(iv) Determinarea valorilor D_i.

$$f_{xx}(0, 0) = 2, \quad D(0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \Longrightarrow$$

$(0, 0)$ este punct de minim.

$$f_{xx}(\sqrt{2}, -1) = 0, \quad D(\sqrt{2}, -1) = \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

deoarece $D_1 = 0$ nu se poate preciza natura punctului staţionar $(\sqrt{2}, -1)$,

$$f_{xx}(-\sqrt{2}, -1) = 0, \quad D(-\sqrt{2}, -1) = \begin{vmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = -8,$$

deoarece $D_1 = 0$ nu se poate preciza natura punctului staţionar $(\sqrt{2}, -1)$.

Distanţa minimă dintre origine şi suprafaţa $z^2 = x^2y + 4$ este $d = \sqrt{4} = 2$.

3.19 Aplicaţii

1. Să se determine domeniul de definiţie al funcţiilor:

$$(a)\ f(x)=\frac{x+1}{x-1} \qquad (b)\ f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x} \qquad (c)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$
$$(d)\ f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad (e) f(x)=\frac{x}{x^2-4} \qquad (f)\ f(x)=\frac{x}{x^3-1}$$
$$(g)\ f(x)=\frac{1}{x^2-4x+2} \qquad (h)\ f(x)=e^{\frac{1}{x^2-2}} \qquad (i)\ f(x)=\frac{x\sqrt{x-1}}{x^2-1}$$
$$(j)\ f(x)=\sqrt{1-\cos x} \qquad (k)\ f(x)=\sqrt{\sin x} \qquad (l)\ f(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

2. Să se calculeze următoarele limite de şiruri:

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{5^n} \qquad (b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3^n+1}{4^n+1} \qquad (c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n}{3n^2+2}$$
$$(d)\ \lim_{n\to\infty}\left(10+\frac{1}{n}\right)^2 \qquad (e)\ \lim_{n\to\infty}\left(10+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad (f)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

3. Să se calculeze următoarele limite de funcţii:

$$(a)\ \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^3-x}{x^2} \qquad (b)\ \lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1}) \qquad (c)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$(d)\ \lim_{x\to 3}\sqrt{x^3-x} \qquad (e)\ \lim_{x\to\infty}(-x^3+x^2) \qquad (f)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$$
$$(g)\ \lim_{x\searrow 0}\log_2 x \qquad (h)\ \lim_{x\nearrow 1}\log_3\frac{x}{x-1} \qquad (i)\ \lim_{x\to\infty}xe^{-x}$$
$$(j)\ \lim_{x\to-\infty}x^2e^x \qquad (k)\ \lim_{x\to 3}(13-4x)^{\frac{1}{x-3}} \qquad (l)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$$

Indicaţie: Se vor folosi următoarele limite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x}=0,\ a>1,\ n \text{ întreg}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r,\ r\in\mathbb{R}.$$

4. Să se arate că

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Rezolvare: Reprezentarea grafică folosită pentru determinarea limitei funcţiei $\dfrac{\sin x}{x}$ când $x\to 0$ este data în Figura 3.17.

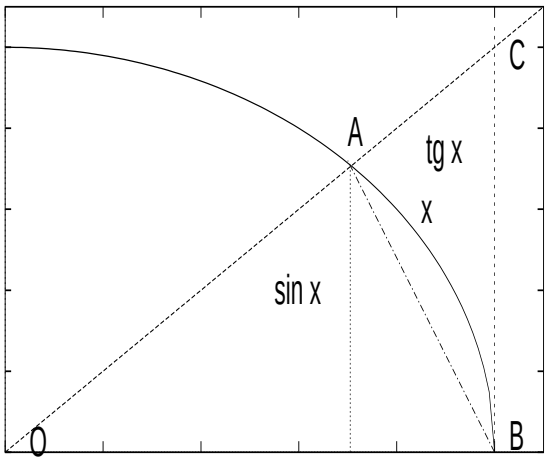


Figura 3.17: Demonstrarea geometrică a limitei funcţiei $\frac{sin\, x}{x}$ când $x \to 0$.

Din analiza figurii 3.17 rezultă că aria triunghiului $\triangle OAB$ este mai mică decât aria sectorului de cerc OAB care la rândul său este mai mică decât aria triunghiului $\triangle OBC$. Deci, $\sin x < x < tg\, x$ pentru $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Se împarte prin $\sin x$ rezultă

$$\cos x < \frac{\sin\, x}{x} < 1$$

şi se trece la limită, rezultă $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\, x}{x} = 1$. Din cele de mai sus se obţine:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\,(ax)}{ax} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin\, x} = 1. \tag{3.65}$$

5. Să se determine asimptotele funcţiilor:

$$a)\ f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \qquad b)\ f(x) = \frac{1}{e^x - 1} \qquad c)\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3x-5}$$

6. Să se studieze continuitatea funcţiilor:

$$(a)\ f(x) = x^3 - \sqrt{x^2+2} \qquad (b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă} \quad x \neq 0 \\ 2, & \text{dacă} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$(c)\ f(x) = \begin{cases} a, & \text{dacă} \quad x < 0 \\ 2x+1, & \text{dacă} \quad x \geq 0 \end{cases}, \qquad (d)\ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x < 0 \\ x, & \text{dacă} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$a \in (-\infty, \infty)$

7. Să se calculeze derivatele funcţiilor:

$$(a)\ f(x)=x^2-x+3 \qquad (b)\ f(x)=x^{100}+3x^{50}-9 \qquad (c)\ f(x)=x\cos x$$

$$(d)\ f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x} \qquad (e)\ f(x)=-\frac{x}{2x^2+5x+2} \qquad (f)\ h(x)=e^{2x}+e^{-2x}$$

$$(g)\ f(x)=\sqrt{-4x} \qquad (h)\ f(x)=\sin^2 x+\cos 2x \qquad (i)\ f(x)=\frac{1}{4}tg^4x+\frac{1}{2}ctg^2x$$

8. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f(x)=x+\sqrt{x}$ în punctul $x_0=4$.

9. Să se arate că funcţia $y=e^x\cos x$ satisface egalitatea $y''-2y'+2y=0$.

10. Să se arate că funcţia

$$u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

verifică relaţia $u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=0$ (ecuaţia lui Laplace în spaţiu).

11. Folosind una din aplicaţiile software cunoscute să se reprezinte grafic curbele, suprafeţele şi curbele de nivel pentru:

$$(a)\ f(x)=x^3+x^2 \qquad (b)\ f(x)=arctg\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$$

$$(c)\ f(x,y)=y^2-x^2 \qquad (d)\ f(x,y)=\frac{1}{3}\sqrt{36-9x^2-4y^2}$$

12. Să se determine domeniul de definiţie al funcţiilor:

$$(a)\ f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}, \quad (b)\ f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$$

13. Se dă funcţia $f(x,y)=x^2y-\sqrt{y}$. Să se determine valorile:

$$(a)\ f(2,1) \qquad (b)\ f(3,0)$$
$$(c)\ f(1,4) \qquad (d)\ f(a,a^4)$$
$$(e)\ f(\frac{1}{x},x^4) \qquad (f)\ f(2,-4)$$

14. Să se determine derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi pentru funcţiile:

$$(a)\ f(x,y)=(2x-y)^4 \qquad (b)\ f(x,y)=e^x\cos y$$
$$(c)\ f(x,y)=e^{xy} \qquad (d)\ f(x,y,z)=x+y+\cos z$$
$$(e)\ f(x,y,z)=\frac{x^2}{z}+y \qquad (f)\ f(x,y,z)=xyz$$

15. Să se determine limita sau să se arate că nu există limită pentru funcţiile de mai jos:

$$(a)\ \lim_{(x,y)\to(1,3)}(3x^2y - xy^3) \qquad (b)\ \lim_{(x,y)\to(-2,1)}(y^3 - xy + 3y^2)$$
$$(c)\ \lim_{(x,y)\to(-1,2)}\frac{xy - y^3}{(x+y+1)^2} \qquad (d)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x^4-y^4}$$

16. Să se determine gradientul pentru funcţiile:

$$(a)\ f(x,y) = x^2y + 4xy \quad (b)\ f(x,y,z) = xz\ln(x+y+z)$$

17. Să se determine punctele (x,y) în care planul tangent la suprafaţa $z = x^2 - 6x + 2y^2 - 10y + 2xy$ este orizontal.

18. Să se determine $\dfrac{dw}{dt}$ dacă:

$$(a)\ w = x^2y^3;\ \ x = t^3,\ y = t^2$$
$$(b)\ w = x^2y;\ \ \ x = st,\ y = s - t.$$

19. Să se determine punctele de extrem pentru funcţiile:

$$(a)\ f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4x \qquad (b)\ f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 1$$
$$(c)\ f(x,y) = xy^2 - 6x^2 - 3y^2 \qquad (d)\ f(x,y) = xy$$
$$(e)\ f(x,y,z) = xyz \qquad (f)\ f(x,y,z) = x + yx - z$$

20. Să se determine extremele funcţiei $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ dacă $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{4}$.

21. Să se determine triunghiul de arie maximă dintre triunghiurile de perimetru $2p$.

Indicaţie: Se notează cu $x,\ y,\ z$ lungimile laturilor unui triunghi cu perimetrul $2p$. Aria triunghiului este dată de expresia

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)},\ \ \text{(formula lui Heron)}.$$

Se vor determina punctele de extrem pentru funcţia

$$f(x,y,z) = p(p-x)(p-y)(p-z)$$

cu legătura $x+y+z = 2p$. Se va obţine că triunghiul de arie maxima este triunghiul echilateral cu latura $\dfrac{2p}{3}$.

Capitolul 4

Elemente de teoria aproximării

4.1 Serii de numere şi funcţii

Seriile sunt deosebit de importante în ştiinţele cu caracter aplicativ. Pe baza teoriei seriilor de numere şi de funcţii, în cadrul Analizei numerice sunt dezvoltate diverse metode de calcul cu aplicaţii directe în tehnicile de modelare ale fenomenelor ce fac obiectul ştiinţelor fundametale şi al celor aplicative.

Definiţia 4.1.1 *Printr-o serie infinită (sau pe scurt serie) se înţelege o expresie de forma* $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ *sau prescurtat* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, *unde* a_i *sunt termenii unui şir de numere.*

Pentru serii limita superioară a indicelui de sumare nu este finită, deci se mai spune că seria este o sumă cu o infinitate de termeni.

Noţiunea de serie este cunoscută încă din antichitate apărând ca un paradox al gândirii formale deoarece se părea că "valoarea" seriei este mai mare decât orice număr. Din punct de vedere matematic afirmaţia din propoziţia precedentă este falsă. Există serii care au suma finită. Noţiunea matematică care lămureşte faptul că suma unei serii este finită sau nu, este aceea de *convergenţă*. În continuare se dă un exemplu de serie convergentă respectiv divergentă, fără a demonstra afirmaţiile.

Exemplul 4.1.1 *Seria*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{12^i} = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \dots,$$

este convergentă şi are suma $\frac{12}{11}$.
În timp ce seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots,$$

este divergentă.

Pe lângă seriile de numere exemplificate mai sus, în matematica modernă s-a introdus şi conceptul de serii de funcţiie, având un rol covârşitor în analiza funcţiilor. De pildă, se cunoaşte că nu toate funcţiile au primitivă. În aceste cazuri numai prin dezvoltarea integrantului în serie de funcţii se poate determina cu o precizie suficient de bună primitiva. Trebuie apelat la această tehnică deoarece noţiunea de integrală a unei funcţii pe un anumit domeniu, din punct de vedere geometric are semnificaţia unei arii sau volum, valori care din punct de vedere practic au o semnificaţie importantă. Cu ajutorul lor se pot enunţa proprietăţile unor funcţii pentru care se cunoaşte numai un număr mic de valori, se pot deci găsi valori aproximative ale unor funcţii şi se poate aprecia astfel precizia unei metode de calcul.

Exemplul 4.1.2 *Relaţia*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} = \sin x + \frac{\sin(2x)}{2^2} + \frac{\sin(3x)}{3^2} + \ldots.$$

exprimă o serie de funcţii.

Forma generală a unei serii de funcţii este dată de

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x). \tag{4.1}$$

Expresia (4.1) are următoarea semnificaţie:

(i) Funcţiile $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $n = \overline{1,n}$ sunt cunoscute şi definite pe intervalul din domeniul valorilor;

(ii) Pentru orice x se consideră funcţia de aproximare (*suma parţială*) definită pentru orice n finit, $F_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ \ldots \ + f_n(x)$;

(iii) Pentru orice x dintr-un interval I, şirul $F_n(x)$ este convergent, adică

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

Această funcţie este *limita seriei de funcţii* (sau suma seriei), iar intervalul I este *intervalul de convergenţă* . Diferenţa dintre funcţia limită şi o sumă parţială se numeşte *rest* şi se notează cu $r_n(x)$, deci $r_n(x) = F(x) - F_n(x)$. Dacă seria converge, $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

4.1.1 Serii de puteri

Seriile de puteri sunt cazuri particulare de serii de funcţii în care funcţiile sunt puteri ale variabilei multiplicate cu un factor constant, $f_n(x) = a_n x^n$. Forma generală a unei serii de puteri este:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{4.2}$$

Sumele parţiale $F_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ sunt polinoame şi sunt definite pentru orice x. Intervalul de convergenţă al seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ trebuie studiat pentru fiecare caz în parte. Se poate întâmpla ca seria să fie peste tot convergentă, adică pentru orice $x \in R$, sau să fie convergentă doar într-un punct.

Exemplul 4.1.3 *(a) Seria*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n = x + 4x^2 + 27x^3 + 256x^4 + \ldots$$

nu este convergentă în nici un punct cu excepţia punctului $x = 0$.

(b) Seria

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

este peste tot convergentă.

Observaţia 4.1.1 *Fie o funcţie* f *care admite dezvoltarea în serie de puteri de ordinul* n. *Dacă funcţia este pară atunci* $a_1 = a_3 = \ldots = a_{2k+1} = \ldots = 0$, *iar dacă funcţia este*

impară, $a_2 = a_4 = \ldots = a_{2k} = \ldots = 0$

Demonstraţie: *Dacă funcţia este pară* $f(x) = f(-x)$*, aplicând relaţia (4.2) şi reducând termenii asemenea se obţine:*

$$2a_1x + 2a_2x^2 + \ldots + 2a_{2k+1}x^{2k+1} + \ldots = 0$$

oricare ar fi x *număr real. Deci,* $a_1 = a_3 = \ldots = a_{2k+1} = \ldots = 0$.

Exerciţiul 4.1.1 *Să se verifice Observaţia 4.1.1 pentru cazul* f *impară.*

4.1.2 Operaţii cu serii de puteri

Se consideră două serii formale de puteri:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots \text{ şi} \\ \sum_{i=1}^{\infty} &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_nx^n + \ldots \end{aligned}$$

Atunci

(i) *Suma seriilor* are forma:

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots \quad f(x) + g(x); \quad (4.3)$$

(ii) *Produsul seriilor* are forma:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_nx^n + \ldots$$

unde c_k este coeficientul lui x^k din $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n) \cdot (b_0 + b_1x + + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_nx^n)$;

4.1.3 Seria Taylor

Până acum s-a pus problema determinării sumei unei serii atunci când se cunoaşte termenul general al seriei. De multe ori însă problema se pune invers. Anumite probleme

sunt modelate de funcţii care sunt greu de studiat în mod direct. O posibilă soluţie este aceea de a aproxima funcţia cu o serie de puteri care va uşura studiul fenomenului de interes. Seriile Taylor sunt un caz particular al seriilor de puteri, coeficienţii a_n având o formă specială:

$$\sum_{0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \tag{4.4}$$

relaţia precedentă fiind ordonată după puterile lui $x - x_0$. Se presupune că o funcţie f poate fi aproximată de o serie de puteri de tipul celei din (4.4). Atunci, formal, funcţia f se va scrie

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \tag{4.5}$$

Pentru determinarea formei coeficienţilor a_n, se consideră că există o vecinătate a lui x_0, $[x_0 - H, x_0 + H]$, în care funcţia admite derivata de ordinul n. Pe baza acestor doua ipoteze se impune determinarea coeficienţilor a_0, a_1, ..., a_n. Prin urmare,

(i) Pentru $x = x_0$ rezultă $a_0 = f(x_0)$;

(ii) Prin derivarea relatiei (4.5) termen cu termen, rezultă

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \ldots + na_n(x-x_0)^{n-1}. \tag{4.6}$$

Se înlocuieşte $x = x_0$ în relaţia (4.6) şi se obţine:

$$a_1 = f'(x_0);$$

(iii) Prin derivarea termen cu termen a relaţiei (4.6), rezultă:

$$f^{(2)}(x) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2}, . \tag{4.7}$$

Se înlocuieşte $x = x_0$ în relaţia (4.7) şi se obţine:

$$a_2 = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2};$$

(iv) Analog, înlocuind pe x cu x_0 în derivatele de ordinul 3, 4, $\cdots$, n a membrului drept al relaţiei (4.5) pentru restul de coeficienţi se obţin valorile

$$a_3 = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}, \quad a_4 = \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}, \quad \ldots \quad , \; a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

În acest mod relaţia (4.5) devine,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x). \quad (4.8)$$

Egalitatea (4.8) reprezintă *dezvoltarea în serie Taylor de ordinul n al funcţiei f în jurul lui* x_0. Pentru a dezvolta în serie Taylor în jurul unui punct o funcţie definită pe un interval închis trebuie ca:

(i) funcţia şi toate derivatele ei până la ordinul n să fie continue pe intervalul închis;

(ii) derivata de ordinul $n + 1$ există în fiecare punct al intervalului deschis.

În formula (4.8) s-a introdus un termen suplimentar notat cu $r_n(x)$ numit *rest*. Semnificaţia acestuia provine din analiza diferenţei dintre $f(x)$ şi suma celor $n + 1$ termeni ai seriei Taylor, rezultând în mod evident că pentru o valoare oarecare a lui x din intervalul $[x_0 - H, x_0 + H]$, $H > 0$, ca să aibă loc într-adevăr dezvoltarea (4.8), este necesar şi suficient ca termenul suplimentar $r_n(x)$ al formulei Taylor, pentru orice valoare din intervalul menţionat să tindă la zero când $n \to \infty$. Atunci când se acceptă dezvoltarea în serie Taylor a unei funcţii date în vecinătatea unei valori este important să se analizeze convergenţa restului $r_n(x)$ în acea vecinătate. În cele ce urmează sunt prezentate exemple de dezvoltare în serie Taylor într-o vecinătate a originii pentru funcţiile mai des utilizate.

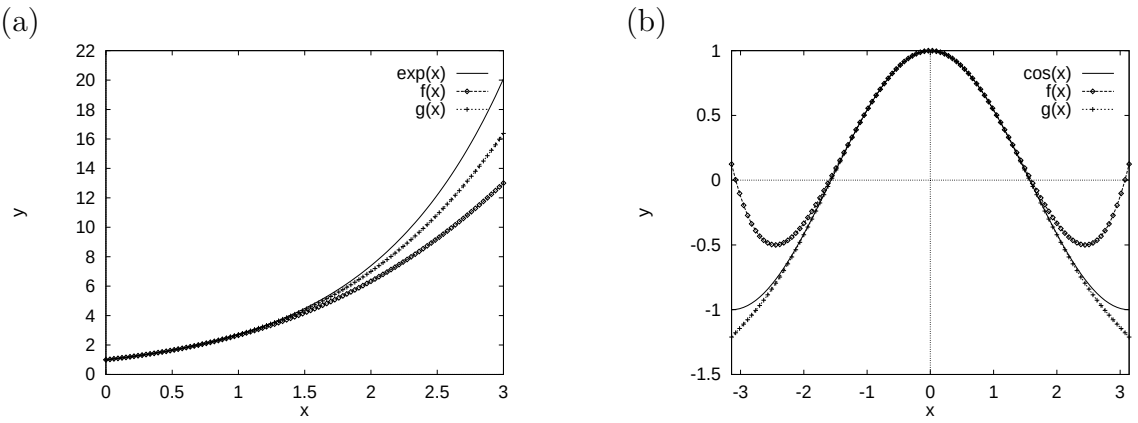


Figura 4.1: (a) Funcţia e^x, f şi g - suma primilor patru, respectiv cinci termeni, (b) Funcţia cos, f şi g - suma primilor trei respectiv, patru termeni.

Exemplul 4.1.4 *Să se dezvolte în serie Taylor în jurul lui* 0 *funcţia* $f(x) = a^x$, $a > 0,\ a \neq 1$.

Rezolvare: Derivatele funcţiei f şi valorile funcţiei în punctul $x_0 = 0$ sunt următoarele:

$$\begin{aligned} f'(x) &= a^x \ln a \implies f'(0) = \ln a, \\ f^{(2)}(x) &= a^x \ln^2 a \implies f^{(2)}(0) = \ln^2 a, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= a^x \ln^n a \implies f^{(n)}(0) = \ln^n a. \end{aligned}$$

Deci dezvoltarea în serie Taylor în vecinătatea originii este:

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \frac{\ln^3 a}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + \ldots \tag{4.9}$$

Dacă $a = e$ se obţine:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{4.10}$$

În Figura 4.1-(a) este reprezentată grafic funcţia e^x şi aproximaţia Taylor pentru $x \in [0, 3]$.

Exemplul 4.1.5 *Să se dezvolte în serie Taylor în jurul lui* 0 *funcţia* $f(x) = \cos x$.

Rezolvare: Deoarece cosinusul este funcţie pară rezultă că $a_1 = a_3 = \ldots = 0$. Derivatele funcţiei f şi valorile funcţiei în punctul 0 sunt următoarele:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x \implies f'(0) = 0, \\ f^{(2)}(x) &= -\cos x \implies f'(0) = -1, \\ f^{(3)}(x) &= \sin x \implies f'(0) = 0, \\ f^{(iv)}(x) &= \cos x \implies f'(0) = 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Deci dezvoltarea în serie Taylor într-o vecinătate a punctului $x = 0$ este:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{4.11}$$

În Figura 4.1-(b) este reprezentată grafic funcţiei cos şi aproximaţia Taylor pentru $x \in [-\pi, \pi]$.

Exemplul 4.1.6 *Să se dezvolte în serie Taylor în jurul lui* 0 *funcţia* $f(x) = \sin x$.

Rezolvare: Se procedează ca şi la exemplul precedent, dar se ţine cont că sinusul este funcţie impară, şi se obţine:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \tag{4.12}$$

Exemplul 4.1.7 *Să se dezvolte în serie Taylor în jurul lui* 0 *funcţia* $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: Derivatele funcţiei f şi valorile funcţiei în punctul 0 sunt următoarele:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Longrightarrow f'(0) = \alpha, \\
f^{(2)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Longrightarrow f^{(2)}(0) = \alpha(\alpha-1), \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \Longrightarrow \\
f^{(n)}(0) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1).
\end{aligned}$$

Deci dezvoltarea în serie Taylor într-o vecinătate a originii este:

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots \\
&+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Pentru valoarea particulară $\alpha = \dfrac{1}{2}$ se obţine:

$$\sqrt{1+x} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2(n-1)-1)}{2 \cdot 4 \cdot (2n)} x^n + \cdots, \tag{4.14}$$

iar pentru $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ se obţine,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2(n-1)+1)}{2^n \cdot n!} x^n + \cdots, \tag{4.15}$$

iar dacă $\alpha = -1$ seria devine,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \tag{4.16}$$

Pentru a dezvolta în serie Taylor de ordinul n în jurul lui 0 o funcţie de forma $\dfrac{f}{g}$, unde f si g admit reprezentări în serie Taylor de ordinul n în jurul punctului 0 trebuie avută în vedere observaţia următoare.

Observaţia 4.1.2 *Fie A şi B două polinoame de grad p, respectiv q, polinomul B având termen liber nenul, atunci există $k \geq 0$ şi există şi sunt unice două polinoame Q şi R astfel încât*

$$A = BQ + x^{k+1}R. \tag{4.17}$$

Polinomul Q se numeşte cât, iar polinomul R se numeşte restul împărţirii lui A la B până la ordinul k. Se consideră

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + R(f,n)x^n \text{ şi} \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_nx^n + R(g,n)x^n,\ b_0 \neq 0, \end{aligned}$$

unde $R(f,n)$ respectiv $R(g,n)$ reprezintă restul dezvoltării în serie Taylor a funcţiei f respectiv g. Se notează cu $A = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$ şi cu $B = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_nx^n$. Din (4.17) rezultă că există Q şi $x^{k+1}R$ astfel încât

$$\begin{aligned} A &= QB + x^{n+1}R \iff \\ f &= Qg + R(f,n)x^n - QR(g,n)x^n + x^{n+1}R \implies \\ \frac{f}{g} &= Q + R\left(\frac{f}{g}, n\right)x^n \end{aligned}$$

Exemplul 4.1.8 *Să se dezvolte în serie Taylor de ordinul cinci în jurul lui 0 funcţia $f(x) = tg\,x$.*

Rezolvare: Pentru dezvoltarea acestei funcţii în jurul valorii $x_0 = 0$ se ţine cont de faptul că funcţia tangentă este impară şi deci se va determina dezvoltarea de ordinul 5. Din (4.11) şi (4.12) rezultă

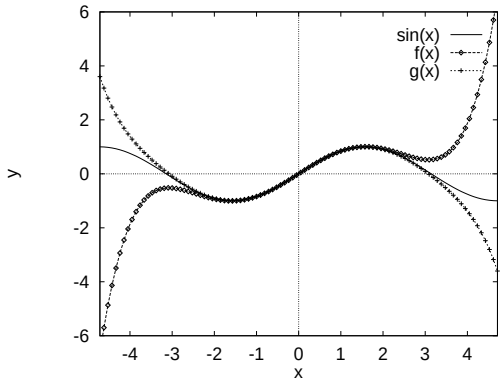
$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots \end{aligned}$$

În urma împărţirii celor două polinoame rezultă, $Q = x + \dfrac{x^3}{5} + \dfrac{2}{15}x^5$ şi $x^5R = \dfrac{2}{15}x^5 - \dfrac{x^7}{72}$. Deci,

$$tgx = x + \frac{x^3}{5} + \frac{2}{15}x^5 + \ldots$$

În Figura 4.2 este reprezentat grafic funcţia sinus şi aproximaţia Taylor pentru $x \in \left[-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, respectiv funcţia $(1+x)^\alpha$ şi aproximaţia Taylor pentru $x \in [0,5]$.

(a)



(b)

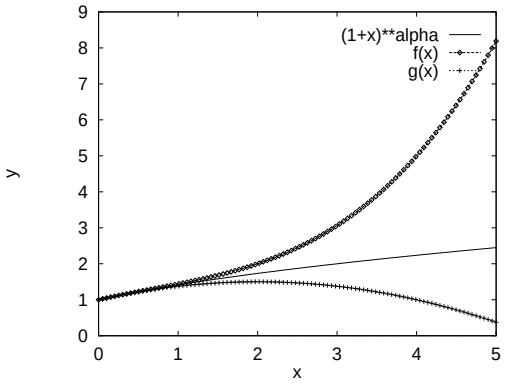


Figura 4.2: (a) Funcţia sinus, aproximaţiile f şi g - suma primilor, trei respectiv, patru termeni, (b) Funcţia $(1+x)^{\alpha}$, pentru $\alpha = \frac{1}{2}$, aproximaţiile f şi g - suma primilor patru, respectiv trei termeni.

Observaţia 4.1.3 *Din analiza graficelor reprezentate în Figurile 4.1 şi 4.2 se constată că aproximaţiile sunt suficient de bune într-o vecinătate suficient de restrânsă a valorii $x = 0$. Din punct de vedere grafic se poate constata că pentru valori depărtate de origine aproximaţiile sunt mai puţin exacte. Acest lucru are o însemnătate practică deosebită. Sunt cazuri în care într-un model oarecare apare o funcţie pentru care din diverse motive practice trebuie să se lucreze cu dezvoltarea sa în serie Taylor (dacă această dezvoltare există); înainte de a aborda calculul efectiv trebuie să se aleagă vecinătatea potrivită în care se va dezvoltă funcţia.*

4.2 Aproximarea datelor prin metode de interpolare

În practica experimentală atunci când se determină o lege sau se analizează un fenomen se obţin seturi de valori care exprimă interdependenţa dintre mărimile măsurate. Practic aceste seturi de valori rezultă din citirea unor instrumente (vernierul şublerului, voltmetru, ampermetru, teodolit, etc.) printr-un proces de eşantionare a semnalelor. Punctele experimentale sunt obţinute sub forma unor semnale analogice, digitale sau mai nou acestea sunt redate de o interfaţă analogic-digitală interconectată între instrumentele de măsură şi calculator. Din punct de vedere fundamental, legile şi fenomenele sunt redate sub forma unor funcţii. Obiectivul principal al acestei secţiuni constă tocmai în construirea

unor funcţii care *aproximează* suficient de bine setul de valori experimentale *şi trec* prin punctele experimentale.

4.2.1 Semnificaţia noţiunii de interpolare

Se dă un set de puncte experimentae $(x_i, y_i),\ i = \overline{1,n}$. Se vor aproxima aceste puncte cu o funcţie $y = f(x)$ astfel încât $y_i = f(x_i),\ i = \overline{1,n}$. Un astfel de procedeu de apoximare se numeşte interpolare. Deoarece polinoamele sunt cele mai simple funcţii ce le avem la dispoziţie funcţia $y = f(x)$ se va aproxima în vecinătatea *nodurilor* $x_0,\ x_1, \ldots, x_n$ printr-un polinom. Se cunoaşte din algebră că prin $n+1$ puncte (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) trece un singur polinom $P_n(x)$ de grad n. Acest polinom se va alege ca funcţie de aproximare pentru setul de puncte experimentale $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \ldots, (x_n, y_n)$. Pentru determinarea lui exactă există mai multe metode.
În continuare vom defini polinoamele de interpolare de tip Lagrange şi Newton deoarece acestea sunt cele mai des utilizate polinoame de interpolare.

4.2.2 Polinomul de interpolare al lui Lagrange

Fie $x \in [a, b]$ şi $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$, $n+1$ noduri distincte ale intrevalului $[a, b]$. Formula de interpolare a lui Lagrange este:

$$f(x) = L_n(x) + R_n(f, x),$$

unde L_n este polinomul de interpolare al lui Lagrange şi $R_n(f, x)$ este restul formulei de aproximare. Polinomul de interpolare al lui Lagrange are următoarea formă:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)} f(x_i) \tag{4.18}$$

Oricât de bine s-ar încerca aproximărea funcţiei f tot nu se va *"cădea"* peste funcţia f. Funcţia f şi polinomul de interpolare vor fi diferite (vor coincide numai pe noduri). Cu cât diferenţa dintre f şi L_n este mai mică cu atât aproximaţia este mai bună.

Observaţia 4.2.1 *Cu cât gradul polinomului P este mai mare cu atât aproximarea funcţiei f este mai bună. Cu toate acestea trebuie avut în vedere şi faptul că dacă se consideră un*

polinom de ordin foarte mare volumul de calcule creşte considerabil. Acest lucru se poate rezolva numai cu ajutorul unui program de calcul.

Dacă se doreşte să se aproximeze o funcţie f pe un intreval $[a, b]$ cu un polinom de gradul întâi trebuie avut în vedere faptul că aproximăm funcţia cu segmentul de dreaptă care uneşte punctele $(a, f(a))$ şi $(b, f(b))$ şi se obţine

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Polinomul de interpolare al lui Lagrange de ordinul doi pentru nodurile $x_0,\ x_1,\ x_2$ este de forma:

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \tag{4.19}$$

Exemplul 4.2.1 *Să se determine polinomul de interpolare Lagrange de gradul doi corespunzător setului de puncte experimentale:* $(1, 3),\ (1.5, 4),\ (2, 4.44)$.

Rezolvare: Aplicând (4.19) se obţine

$$\begin{aligned} L_2(x) &= 6.00(x - 1.5)(x - 2) - 16.00(x - 1)(x - 2) + 8.88(x - 1)(x - 1.5) = \\ &= -1.12\,x^2 + 4.80\,x - 0.68. \end{aligned}$$

Exemplul 4.2.2 *Să se determine polinomul de interpolare Lagrange de gradul patru corespunzător setului de puncte experimentale:* $(1, 3),\ (1.25, 3.5),\ (1.5, 4),\ (1.75, 4.22),\ (2, 4.44)$.

Rezolvare: Aplicând (4.19) se obţine

$$\begin{aligned} L_4(x) &= 2.0\,(x - 1.25)\,(x - 1.5)\,(x - 1.75)\,(x - 2) - \\ &- 149.333333\,(x - 1)\,(x - 1.5)\,(x - 1.75)\,(x - 2) \\ &+ 256.0\,(x - 1)\,(x - 1.25)\,(x - 1.75)\,(x - 2) - \\ &- 180.053333\,(x - 1)\,(x - 1.25)\,(x - 1.5)\,(x - 2) + \\ &+ 47.36\,(x - 1)\,(x - 1.25)\,(x - 1.5)\,(x - 1.75) = \\ &= 5.973333\,x^4 - 35.840000\,x^3 + 78.026667\,x^2 \\ &- 71.36\,x + 26.2. \end{aligned} \tag{4.20}$$

În Figura 4.3 sunt reprezentate grafic cele două polinoame Lagrange de interpolare din Exemplele 4.2.1, respectiv 4.2.2.

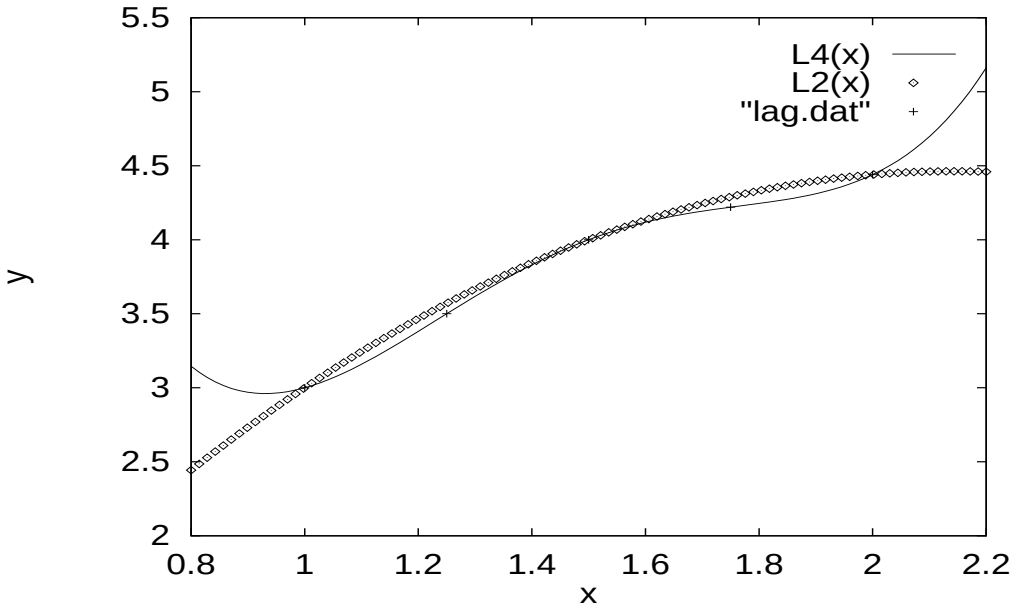


Figura 4.3: Polinomul de interpolare Lagrange, L_2 definit pe punctele $(1,3),\ (1.5,4),\ (2,4.44)$, L_4 definit pe punctele $(1,3),\ (1.25,3.5),\ (1.5,4),\ (1.75,4.22),\ (2,4.44)$.

4.2.3 Polinomul de interpolare al lui Newton

Fie $x \in [a,b]$ şi $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ n+1$ noduri distincte ale intervalului $[a,b]$. Pentru a putea scrie expresia polinomului de interpolare al lui Newton trebuie introdusă noţiunea de diferenţă divizată.

Diferenţa divizată de ordinul întâi este dată de expresia

$$[x_0, x_1; f] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}. \tag{4.21}$$

Recursiv se defineşte diferenţa divizată de ordinul doi

$$[x_0, x_1, x_2; f] = \frac{[x_1, x_2; f] - [x_0, x_1; f]}{x_2 - x_0} \tag{4.22}$$

respectiv diferenţa divizată de ordinul n.

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; f] = \frac{[x_1, \ldots, x_n; f] - [x_0, \ldots, x_{n-1}; f]}{x_n - x_0} \tag{4.23}$$

Formula de interpolare a lui Newton este:

$$f(x) = N_n(f;x) + R_n(f,x),$$

cu

$$\begin{aligned} N_n(f;x) &= f(x_0) + (x-x_0)[x_0,x_1;f] + (x-x_0)(x-x_1)[x_0,x_1,x_2;f] + \ldots + \\ &+ (x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})[x_0,x_1,\ldots,x_n;f], \end{aligned} \tag{4.24}$$

unde $N_n(f;x)$ este polinomul de intrepolare al lui Newton şi $R_n(f,x)$ restul formulei de interpolare a lui Newton.

Exemplul 4.2.3 *Să se determine polinomul de interpolare al lui Newton de gradul al treilea corespunzător setului de puncte exeperimentale:* $(0,1)$, $(0.33,1.391)$, $(0.66,1.935)$, $(1,2.718)$.

Rezolvare: Aplicând (4.19) se obţine

$$\begin{aligned} N_3(f;x) &= 1 + 1.185(x-0) + 0.698(x-0)(x-0.33) \\ &= +0.387(x-0)(x-0.33)(x-0.66). \end{aligned} \tag{4.25}$$

În Figura 4.4 sunt redate grafic punctele experimentale, respectiv polinomul de interpolare Newton exprimat de relaţia (4.25).

Observaţia 4.2.2 *Din analiza graficelor din Figurile 4.3 şi 4.4 se pot obţine următoarele concluzii:*

(i) polinoamele de interpolare Lagrange, respectiv Newton trec prin nodurile cu ajutorul cărora au fost determinate;

(ii) calitatea aproximărilor prin polinoamele L_2 şi L_4 sunt diferite, aceasta provenind din faptul că mulţimile de noduri sunt diferite cu toate că fac parte din acelaşi interval de definiţie a celor două polinoame;

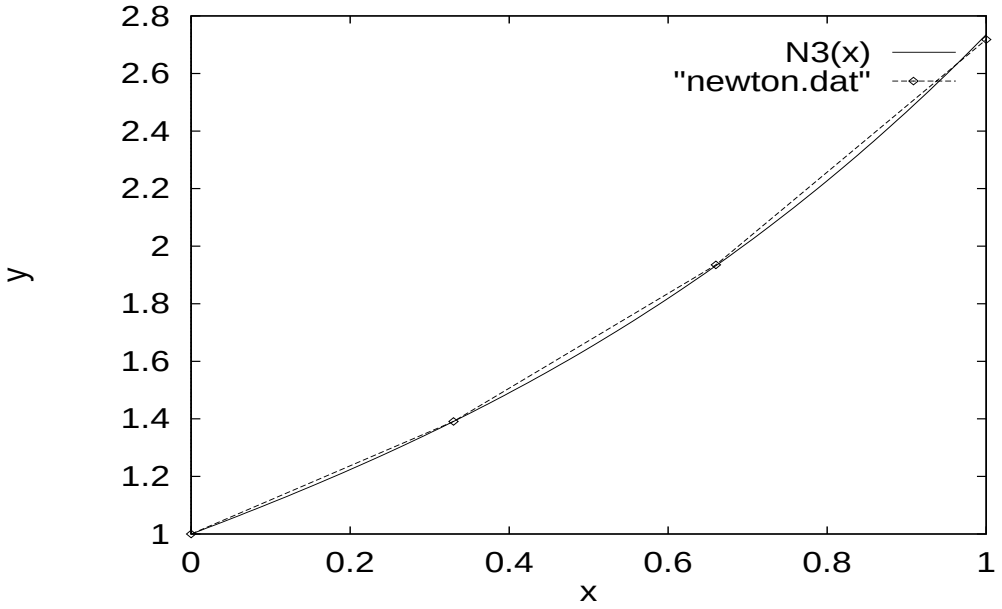


Figura 4.4: Polinomul de interpolare Newton, N_3 definit pe punctele $(1,3)$, $(1.5,4)$, $(2,4.44)$, L_4 definit pe punctele $(0,1)$, $(0.33,1.391)$, $(0.66,1.935)$, $(1,2.718)$.

4.3 Metoda celor mai mici pătrate (Ajustări)

Datele experimentale sunt afectate de erori de observaţie (accidentale, involuntare) cum ar fi citirea greşită a unui instrument de măsură (şubler, termometru, voltmetru etc.), erori sistematice de măsură cauzate de clasa redusă a preciziei sau a rezoluţiei limitate, a dispozitivului de analiză (cristal analizor, detector, etc.) sau erori de înregistrare cauzate spre exemplu de trunchierea cifrelor semnificative de către o interfaţă analog-digitală existentă în lanţul de măsură.

Cunoaşterea parametrilor ce apar într-o ecuaţie este importantă în:

(i) utilizarea sau etalonarea unui aparat de măsură,

(ii) evidenţierea unei legi determinate pe baze experimental-teoretice.

Pentru cazul (i), parametrii care intervin în astfel de ecuaţii sunt mărimi de interes practic, unde determinarea lor reprezintă scopul în sine al experimentului efectuat. Evident, în acest caz este justificată analiza preciziei la care conduce metoda de aproximare.

Pentru cazul (ii), astfel de parametrii pot fi:

a) panta a şi termenul liber b al unei dependenţe dintre diametrul şi înălţimea unor

trunchiuri de pin. Parametrii de interes mai sus menţionaţi sunt descrişi de ecuaţia:

$$y(x) = a\,x + b, \tag{4.26}$$

unde x reprezintă diametrul trunchiurilor de pin şi a panta dreptei.

b) constanta de dezintegrare λ şi N_0 numărul de nuclee nedezintegrate la timpul $t = 0$, asociată unui specii nucleare. Parametrii de interes mai sus menţionaţi sunt descrişi de ecuaţia (3.6).

Atunci când cel ce efectuează o experienţă se bazează mai ales pe intuiţia sa pentru descrierea unei dependenţe, încearcă să găsească o "potrivire" cu datele experimentale. Uneori acestuia îi este greu să-şi învingă tendinţa de a atribui ponderi exagerate unor valori din şirul valorilor experimentale. Spre exemplu, se acordă atenţie sporită punctelor de la extremităţi, deşi se ştie că valorile intermediare sunt tot atât de demne de încredere. Această tendinţă este dăunătoare în cazurile în care punctele extreme sunt greu accesibile măsurătorilor.

Prin metoda celor mai mici pătrate se pot atribui ponderi egale sau diferite diverselor puncte rezultate dintr-un experiment dat. După ce s-a stabilit tipul de ecuaţie ce va fi folosit şi ponderile asociate datelor, nu există perspective de a obţine o ecuaţie mai satisfăcătoare decât cea obţinută prin aplicarea metodei celor mai mici pătrate. Cu toate acestea, ecuaţia obţinută nu determină cea mai bună formă analitică (liniară, pătratică sau de alt tip) pentru reprezentarea datelor existente. Ea furnizează cel mult valorile cele mai probabile ale parametrilor care intervin într-o ecuaţie de o formă presupusă aprioric. Prin urmare există posibilitatea de a elabora mai multe ecuaţii ataşate aceluiaşi set de date experimentale prin metoda celor mai mici pătrate. Dintre acestea, forma efectiv aleasă depinde în general de unele consideraţii teoretice, de voinţa sau chiar intuiţia utilizatorului.

Estimarea parametrilor prin metoda celor mai mici pătrate realizează un proces de *netezire* a datelor experimentale obţinând o reducere a erorilor descrise mai sus, deci aceasta este o metodă complementară a tehnicilor de interpolare.

4.4 Categorii ale metodei celor mai mici pătrate

Metoda celor mai mici pătrate constă în aproximarea unui set de puncte experimentale (x_i, y_i) $i = \overline{1, N}$ printr-o funcţie f astfel încât suma pătratelor distanţelor de la punctul (x_i, y_i) la punctul $(x_i, f(x_i))$ pentru $i = \overline{1, N}$ să fie minimă. Propriu-zis pornind de la o funcţie de o anumită formă, se vor determina parametrii ce definesc funcţiile ţinându-se cont că suma pătratelor distanţelor de la punctele experimentale la graficul funcţiei să fie minimă. Literatura de specialitate cunoaşte două categorii de estimare a parametrilor de interes. Aceştia sunt conţinuţi în expresii liniare, respectiv neliniare.

(a) **Cazul liniar** se bazează pe admiterea unor relaţii de tipul:

(i)
$$F(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + ... + a_m f_m(x) \tag{4.27}$$
care aproximează setul de date experimentale $(x_i, y_i)_{i=\overline{1,N}}$, unde funcţiile $\{f_k\}_{k=\overline{0,m}}$ sunt cunoscute. Uneori funcţiile au forma particulară $f_k = x^k$, $k = \overline{0, m}$ şi atunci
$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m, \tag{4.28}$$
valorile x_i pot fi distribuite chiar şi aleator.

(ii) Alt caz este acela al funcţiilor ortonormate, adică produsul scalar a oricăror două dintre aceste funcţii verifică condiţia
$$[\phi_j(x)\phi_k(x)] = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad i = j \\ 0, & \text{dacă} \quad i \neq j \end{cases},$$
astfel
$$F(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + ... + a_m\phi_m(x). \tag{4.29}$$

(b) **Cazul neliniar** are ca obiect determinarea parametrilor de interes conţinuţi într-o ecuaţie ce nu poate fi liniarizată în raport cu aceştia.

În general sunt două procedee distincte utilizate în procesul de colectare a datelor. Primul se referă la posibilitatea realizării unei achiziţii repetate de un număr suficient de ori a

spectrului experimental. În acest caz, fiecare punct experimental poate fi caracterizat de o valoare medie. Fiecărei valori i se poate ataşa o pondere a sa precum şi o abatere de la valoarea medie. Alteori din motive rezultate din experiment acest lucru nu este posibil. Metoda celor mai mici pătrate face obiectul prelucrării acestor tipuri de măsurători experimentale. Adesea aceste măsurători sunt supuse unor erori descrise în general de o distribuţie gaussiană[13, 28].

4.4.1 Metoda celor mai mici pătrate neponderate

Pentru ilustrarea metodei celor mai mici pătrate, se va considera exemplul descris de relaţia (4.26). Se cere determinarea unei relaţii între înălţimea trunchilor de pin funcţie de diametrul acestora folosind o dependenţă liniară,

$$y = a_x x + b_x, \tag{4.30}$$

unde b_x reprezintă înălţimea corespunzătoare diametrului minim. În conformitate cu metoda celor mai mici pătrate, dreapta căutată este determinată astfel încât suma pătratelor distanţelor de la ea la punctele experimentale să fie minimă. Urmând procedeul uzual şi cel mai puţin dificil se admite că abaterile ale căror sumă a pătratelor este minimă se măsoară paralel cu axa Oy. Se presupune că măsurătorile lui x sunt exacte şi numai valorile variabilei dependente y sunt susceptibile de erori. Dacă experimentul este descris de perechile $(x_i, y_i)_{i=\overline{1,N}}$ care au toate aceeaşi precizie, valorile parametrilor a_x şi b_x se vor determina în cele ce urmează.

Pătratul distanţei dintre un punct experimental (x_i, y_i) şi punctul $(x_i, f(x_i))$ este

$$(x_i - x_i)^2 + (y_i - f(x_i))^2 = (y_i - a_x x_i - b_x)^2.$$

Suma pătratelor distanţelor pentru toate punctele experimentale este:

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - a_x x_i - b_x)^2 \tag{4.31}$$

Scopul este acela de a minimiza suma (4.31); deci se vor determina constantele a_x, b_x astfel încât funcţia

$$Q(a_x, b_x) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - a_x x_i - b_x)^2 \tag{4.32}$$

să îşi atingă minimul. În literatura de specialitate s-a arătat că funcţia (4.32) admite un minim. Funcţia Q este numită funcţie obiectiv, de merit sau reziduală. Punctul de minim pentru (4.32) este punct staţionar pentru sistemul:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial Q}{\partial a_x} & = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b_x} & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} a_x \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b_x \sum_{i=1}^{N} x_i & = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ a_x \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i + b_x N & = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} y_i \end{array}\right. \tag{4.33}$$

Pentru simplificarea scrierii în continuare în loc de $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}$ se va scrie doar $\sum$. Prin rezolvarea sistemului liniar şi neomogen (4.33) ataşat problemei formulate, parametrii a_x şi b_x sunt daţi de relaţiile:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \\ b_x &= \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Numărul a_x se numeşte *coeficient de regresie* şi din punct de vedere practic semnifică dependenţa directă dintre înălţime şi funcţia definită de diametrul trunchilor de copaci. Se pune întrebarea următoare. *Există şi o corelare între funcţia definită de diametru şi înălţime similară ca formă cu prima?*

În acest caz presupunem existenţa unei relaţii de tipul:

$$x = a_y y + b_y. \tag{4.35}$$

Urmând acelaşi raţionament se pot determina parametrii a_y şi b_y. Aceştia sunt exprimaţi de relaţiile:

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2} \\ b_y &= \frac{\sum y_i^2 \sum x_i - \sum y_i \sum x_i y_i}{N\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2} \end{aligned} \tag{4.36}$$

Numărul a_y se numeşte tot coeficient de regresie şi stabileşte relaţia dintre funcţia ce depinde de diametru şi înălţime. Din punct de vedere grafic cele două drepte (4.30) şi (4.35) se vor intersecta în punctul de coordonate $(\bar{x}, \bar{y})$ ce reprezintă centrul de greutate ale mulţimilor de puncte din planul xOy şi au aspectul unei "foarfeci". Cu cât deschiderea este mai mică cu atât mai dependente din punct de vedere stohastic sunt cele două variabile aleatoare x şi y. Cele două braţe ale "foarfecei" se vor închide complet dacă toate punctele experimentale aparţin dreptei. Gradul de dependenţă, care se determină pe baza dreptelor de regresie este exprimat cantitativ de *coeficientul de corelaţie*, r_{xy} definit astfel,

$$r_{xy} = \sqrt{a_x a_y} = \frac{\sum y_i x_i - \frac{1}{N}\sum x_i \sum y_i}{\sqrt{\sum x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum x_i\right)^2}\sqrt{\sum y_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum y_i\right)^2}}. \tag{4.37}$$

Acest coeficient de corelaţie indexcoeficient de corelaţie nu depinde de unităţile de măsură ale caracteristicilor şi poate lua valori cuprinse în intervalul $[-1, 1]$. Dacă $r_{xy} = 0$, nu există nici o relaţie între variabilele x şi y.

Un alt punct de vedere al descrierii coeficientului de corelare derivă din analiza valorilor medii $(\bar{x}, \bar{y})$. Deoarece valoarea medie a abaterilor fiecărei valori de pe abscisă, respectiv ordonată de la valorile lor medii este nulă, atunci aceasta nu poate servi ca o măsură cantitativă. Ca urmare pentru analiza abaterilor de la valoarea medie se folosesc abaterile medii pătratice, adică media pătratelor abaterilor de la valorile medii exprimate de relaţiile,

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum x_i\right)^2}{N-1}, \quad \sigma_y^2 = \frac{\sum y_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum y_i\right)^2}{N-1}. \tag{4.38}$$

În funcţie de abaterile medii pătratice, *coeficientul de corelaţie* r_{xy} se poate exprima şi astfel,

$$r_{xy} = a_x \frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \tag{4.39}$$

Exemplul 4.4.1 *Se măsoară diametrul mediu x şi înălţimea y pentru zece trunchiuri de pin. Perechile de valori măsurate (x_i, y_i) exprimate în cm, respectiv în m sunt (10.6,8.6), (14.0,11.5), (18.1,12.4), (23.2,15.6), (25.0,15.1), (26.4,17.7), (30.5,18.9), (32.5,18.6), (36.6,21.3), (40.1,24.3). Folosind metoda celor mai mici pătrate să se aproximeze setul de puncte prin dreapta $y = ax + b$ şi să se determine coeficientul de corelaţie.*

Rezolvare: Prin aplicarea formulelor (4.34) şi (4.39) se obţin valorile $a = 0.488421$, $b = 3.85247$, respectiv $r_{xy} = 0.998$. Se constată din valoarea coeficientului de corelaţie r_{xy} că interdependenţa valorilor măsurate poate fi descrisă suficient de bine de o relaţie liniară. In Figura 4.5-(a) sunt reprezentate în mod grafic valorile măsurate precum şi dependenţa liniară a acestora.

Exemplul 4.4.2 *Se aplică relaţia (3.6) ce exprimă legea generală a dezintegrării radioactive pentru izotopul radioactiv al toriului* $^{231}_{90}Th$ *ce face parte din seria radioactivă a actiniului pornind de la un set de măsurători. Folosind metoda celor mai mici pătrate să se determine constanta de dezintegrare şi timpul de înjumătăţire* $T_{1/2}$.

Rezolvare: Determinarea parametrilor de interes fizic, numărul de nuclee iniţiale N_0, constanta de dezintegrare λ ce exprimă probabilitatea de dezintegrare în unitatea de timp şi timpul de înjumătăţire $T_{1/2}$ se determină printr-o procedură simplă de liniarizare a relaţiei amintite, urmată de folosirea metodei celor mai mici pătrate. Liniarizarea constă în logaritmarea relaţiei (3.6) şi se obţine:

$$\ln N(t) = -\lambda t + \ln N_0.$$

Se notează $Y(t) = \ln N(t)$ şi $\gamma = \ln N_0$, după care se aplică metoda celor mai mici pătrate pentru funcţia obiectiv:

$$Y(t) = -\lambda t + \gamma.$$

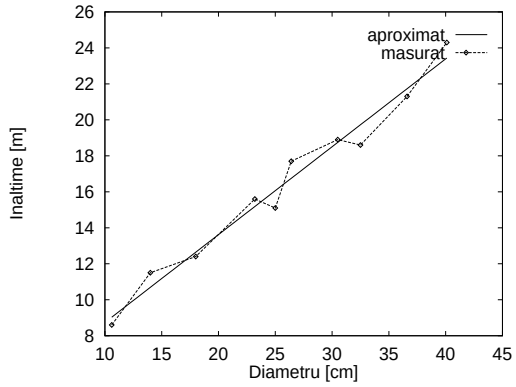
Reprezentarea grafică este dată în Figura 4.5-(b).

Observaţia 4.4.1 *Din analiza rezultatelor obţinute din Exemplele 4.2.1, 4.2.2, 4.4.1 şi 4.4.1 se poate trage concluzia că polinoamele de interpolare Lagrange şi Newton trec prin nodurile pe care au fost determinate în timp ce dependenţele analitice obţinute prin metoda celor mai mici pătrate nu consideră ca necesară această condiţie.*

În continuare se generalizează rezultatele metodei celor mai mici pătrate pentru cazul când funcţia F este de tipul (4.27). Folosind metoda celor mai mici pătrate determinăm coeficienţii $a_0,\ a_1, ...,\ a_m$ unde $m < n$. Diferenţele dintre valorile aproximate şi cele experimentale sunt notate cu r_i,

$$r_i = F(x_i) - y_i \quad i = \overline{0, n}. \tag{4.40}$$

(a)



(b)

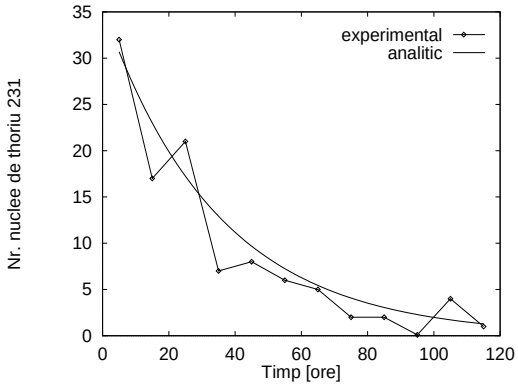


Figura 4.5: (a) Dependenţa liniară a înălţimii trunchilor de pin în funcţie de diametru, (b) Legea dezintegrării radioizotopului $^{231}_{90}Th$, valori experimentale şi aproximarea acestora printr-o dependenţă exponenţială, N_0=35.45, λ=0.029, $T_{1/2}$=24.03 ore.

Coeficienţii $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_m$ se vor determina prin minimizarea funcţiei obiectiv $Q(a_0, a_1...a_m)$ care este definită ca suma pătratelor elementelor r_i. Prin derivarea parţială a funcţiei obiectiv în raport cu $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_m$ se obţine sistemul liniar şi neomogen de ecuaţii,

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} f_k(x_i)f_0(x_i) + a_1 \sum_{i=1}^{n} f_k(x_i)f_1(x_i) + ... + a_m \sum_{i=1}^{n} f_k(x_i)f_m(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f_k(x_i)y_i \quad k = \overline{0, m} \tag{4.41}$$

Cele $m+1$ ecuaţii normale pot fi transcrise în forma matriceală

$$\begin{bmatrix} \sum_i [f_0(x_i)]^2 & \sum_i f_0(x_i)f_1(x_i) & \dots & \sum_i f_0(x_i)f_m(x_i) \\ \sum_i f_1(x_i)f_0(xi) & \sum_i [f_1(x_i)]^2 & \dots & \sum_i f_1(x_i)f_m(x_i) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_i f_m(x_i)f_0(x_i) & \sum_i f_m(x_i)f_1(x_i) & \dots & \sum_i [f_m(x_i)]^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i f_0(x_i)y_i \\ \sum_i f_1(x_i)y_i \\ \vdots \\ \sum_i f_m(x_i)y_i \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

Pentru relaţia (4.28) sistemul de ecuaţii ataşat are următoarea formă particulară

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \dots & \sum_i x_i^m \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 & \dots & \sum_i x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_i x_m & \sum_i x_i^{m+1} & \sum_i x_i^{m+2} & \dots & \sum_i x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_i x_i^m y_i \end{bmatrix}. \tag{4.43}$$

Rezolvarea sistemului de ecuaţii poate fi realizată cu ajutorul metodei matricei inverse (dacă matricea coeficienţilor nu este singulară), respectiv a metodei de eliminare Gauss

tratată în primul capitol. Celelalte categorii ale metodei celor mai mici pătrate sunt date în Anexă. Se analizează cazul în care funcţia F este dată de relaţia (4.29). Dacă funcţia F este cunoscută numai în punctele x_i $(i = 1, 2, ...n;\ n > m)$, atunci se porneşte de la funcţia obiectiv,

$$Q(a_0, a_1,\ ...,\ a_m) = \sum_{i=1}^{n} \left[a_0\phi_0(x_i) + ... + a_m\phi_m(x_i) - y_i\right]^2. \tag{4.44}$$

Dacă funcţia F este cunoscută pentru orice $x \in [a, b]$ şi semnalul fizic este exprimat analitic prin $y = y(x)$ atunci funcţia obiectiv este definită de relaţia următoare,

$$Q(a_0, a_1,\ ...,\ a_m) = \int_a^b \left[a_0\phi_0(x) + ... + a_m\phi_m(x) - y(x)\right]^2 dx. \tag{4.45}$$

În ambele cazuri coeficienţii $a_0, a_1, ..., a_m$ se determină astfel încât funcţionala Q să fie minimă. Se notează cu $[\phi_j\phi_k]$ suma $\sum_{i=1}^{n} \phi_j(x_i)\phi_k(x_i)$, respectiv integrala $\int_a^b \phi_j(x)\phi_k(x)\,dx$ şi cu $[y\phi_k]$ suma $\sum_{i=1}^{n} y(x_i)\phi_k(x_i)$, respectiv integrala $\int_a^b y(x)\phi_k(x)\,dx$ şi se obţin următoarele ecuaţii:

$$\begin{cases} a_0\left[\phi_0^2\right] & + & a_1\left[\phi_0\phi_1\right] & + & a_2\left[\phi_0\phi_2\right] & + & \dots & + & a_m\left[\phi_0\phi_m\right] & = \left[y\phi_0\right] \\ a_0\left[\phi_1\phi_0\right] & + & a_1\left[\phi_1^2\right] & + & a_2\left[\phi_1\phi_2\right] & + & \dots & + & a_m\left[\phi_1\phi_m\right] & = \left[y\phi_1\right] \\ \dots & + & \dots & + & \dots & + & \dots & + & \dots & = \dots \\ a_0\left[\phi_m\phi_0\right] & + & a_1\left[\phi_m\phi_1\right] & + & a_2\left[\phi_m\phi_2\right] & + & \dots & + & a_m\left[\phi_m^2\right] & = \left[y\phi_k\right] \end{cases}. \tag{4.46}$$

Determinarea parametrilor $a_0, a_1, ..., a_m$ conţinuţi în ecuaţiile normale este foarte simplă dacă sistemul $\{\phi_k\}_{\overline{0,m}}$ este ortonormat. Soluţiile sistemului (4.46) sunt $a_i = [y\phi_i]\,,\ i = \overline{0, m}$. Cele mai cunoscute sisteme ortonormate sunt descrise de funcţii trigonometrice sau de polinoame speciale [4, 8].

4.4.2 Metoda celor mai mici pătrate ponderate

Este important de amintit faptul că în Exemplul 4.4.2 liniarizarea relaţiei (3.6) s-a făcut prin logaritmarea ambilor membri, iar noua variabilă dependentă este $Y = \ln N(t)$. Pentru datele iniţiale y_i s-a acceptat că erorile sunt descrise de o distribuţie normală, acest lucru nu mai este adevărat pentru noua variabilă [13]. Aplicând direct metoda celor mai mici pătrate s-ar putea ca din studiul minimului funcţiei obiectiv să nu se determine cei

mai buni parametri vis a vis de realitatea cazului considerat. Acest inconvenient poate fi remediat printr-un procedeu de ponderare globalizată. Raportul $\Delta Y_i/\Delta y_i$ poate fi exprimat astfel

$$\frac{\Delta Y_i}{\Delta y_i} \approx \frac{dY_i}{dy_i} = \frac{1}{y_i}. \tag{4.47}$$

În acest caz particular ţinând cont de relaţia (4.47), trecerea de la pătratul diferenţei dintre valoarea experimentală şi cea aproximativă a ordonatei de rang i înainte şi după substituţie este exprimată de

$$(\Delta y_i)^2 \approx y_i^2 (\Delta Y_i)^2.$$

Factorul de ponderare definit prin W_i în acest caz are valoarea y_i^2. Prin simpla generalizare, ponderarea globală W_i aplicată diverselor substituţii utilizate în scopul liniarizării, poate fi definită astfel,

$$W_i = \left(\frac{1}{dY_i/dy_i} \right)^2. \tag{4.48}$$

Pentru înţelegerea valabilităţii acestei proceduri să considerăm un alt set de valori experimentale reprezentate în Figura 4.6. În practica curentă un set de valori cu acest comportament este aproximat global prin distribuţii consacrate cum ar fi de tip Gauss sau Cauchy. În Figurile 4.6-(a) şi 4.6-(b) sunt date aproximările globale ale celor două distribuţii ponderate şi neponderate ($W_i = 1$). Se poate constata că aproximaţiile în care s-au adoptat ponderări globale ($W_i \neq 1$) sunt de mai mare încredere. De menţionat faptul că în cazul distribuţiei Cauchy dacă se utilizează metoda neponderată rezultatele pot fi considerate ca total neacceptabile. În Tabelele 4.1, 4.2 şi 4.3 sunt reprezentate trei exemple de seturi de funcţii des întâlnite. Ele descriu în mod global semnale de interes practic a căror parametri se pot determina prin utilizarea metodei celor mai mici pătrate ponderate. Prin substituţii adecvate se transformă în ecuaţii de tipul $Y = AX$, $Y = AX + B$, respectiv $Y = AX^2 + BX + C$. Suplimentar tabelele conţin ponderile şi comentariile corespunzătoare fiecărei funcţii.

Exemplul 4.4.3 *Pentru cazul $Y = AX$, parametrul A pentru fiecare ecuaţie din Tabelul 4.1 este dat de relaţia*

$$A = \frac{W_i X_i Y_i}{W_i X_i^2}. \tag{4.49}$$

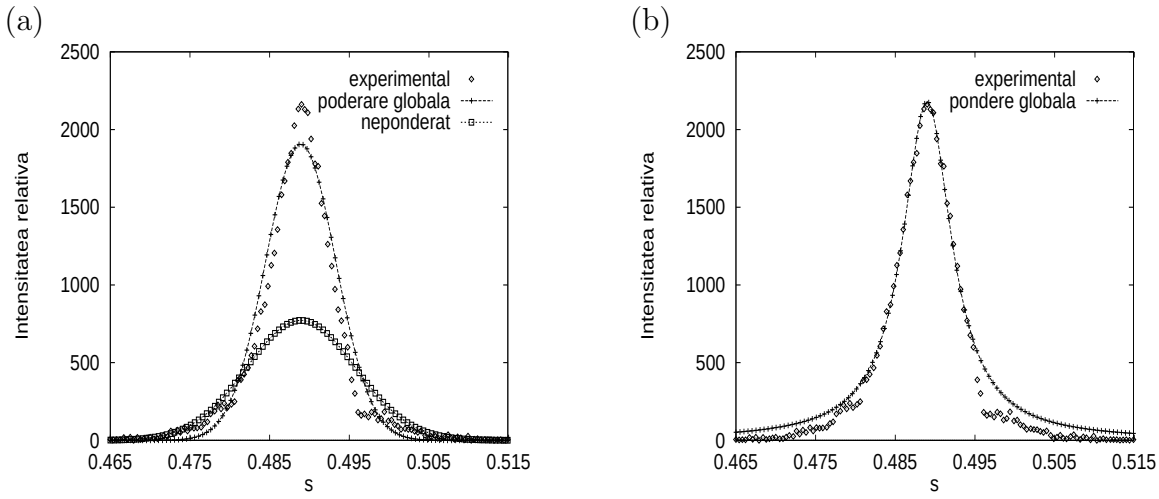


Figura 4.6: Aproximarea globală a setului de valori experimentale, (a) Distribuţia Gauss, $W \neq 1$ pentru $a = 1906.42,\ b = 0.48881,\ c = -0.38539 \times 10^{-4}$ şi $W = 1$ pentru $a = 772.011,\ b = 0.48884,\ c = -0.932942 \times 10^{-4}$. (b) Distribuţia Cauchy $W \neq 1$ pentru $a = 32.64392,\ b = -0.48891,\ c = 0.4587 \times 10^{-3}$.

Exemplul 4.4.4 *Pentru cazul $Y = AX + B$ parametrii A şi B ai funcţiilor prezentate în Tabelul 4.2 sunt furnizaţi de următorii determinanţi:*

$$A = \frac{\begin{vmatrix} \sum_i W_i X_i Y_i & \sum_i W_i X_i \\ \sum_i W_i X_i & \sum_i W_i \end{vmatrix}}{C} \qquad B = \frac{\begin{vmatrix} \sum_i W_i X_i^2 & \sum_i W_i X_i Y_i \\ \sum_i W_i X_i & \sum_i W_i Y_i \end{vmatrix}}{C} \tag{4.50}$$

unde

$$C = \begin{vmatrix} \sum_i W_i X_i^2 & \sum_i W_i X_i \\ \sum_i W_i X_i & \sum_i W_i \end{vmatrix} \tag{4.51}$$

Exemplul 4.4.5 *Pentru cazul $Y = Ax^2 + Bx + C$ valorile coeficienţilor $A,\ B$ şi C ai formelor pătratice ce descriu funcţiile prezentate din Tabelul 4.3 sunt calculate de următorii determinanţi:*

$$A = \begin{vmatrix} \sum_i W_i X_i^2 Y_i & \sum_i W_i X_i^3 & \sum_i W_i X_i^2 \\ \sum_i W_i X_i^2 Y_i & \sum_i W_i X_i^2 & \sum_i W_i X_i \\ \sum_i W_i Y_i & \sum_i W_i X_i & \sum_i W_i \end{vmatrix} / D \qquad B = \begin{vmatrix} \sum_i W_i X_i^4 & \sum_i W_i X_i^2 Y_i & \sum_i W_i X_i^2 \\ \sum_i W_i X_i^3 & \sum_i W_i X_i & \sum_i W_i X_i \\ \sum_i W_i X_i^2 & \sum_i W_i X_i & \sum_i W_i \end{vmatrix} / D$$

$$C = \begin{vmatrix} \sum_i W_i X_i^4 & \sum_i W_i X_i^3 & \sum_i W_i X_i^2 Y_i \\ \sum_i W_i X_i^3 & \sum_i W_i X_i^2 & \sum_i W_i X_i Y_i \\ \sum_i W_i X_i^2 & \sum_i W_i X_i & \sum_i W_i Y_i \end{vmatrix} / D \qquad D = \begin{vmatrix} \sum_i W_i X_i^4 & \sum_i W_i X_i^3 & \sum_i W_i X_i^2 \\ \sum_i W_i X_i^3 & \sum_i W_i X_i^2 & \sum_i W_i X_i \\ \sum_i W_i X_i^2 & \sum_i W_i X_i & \sum_i W_i \end{vmatrix}$$

Se urmăreşte enunţarea unui criteriu pentru definirea unei concordanţe între datele experimentale şi aproximarea globală a acestora realizată prin metoda celor mai mici pătrate, pentru cazul când din punct de vedere practic setul de puncte experimentale nu este descris aprioric de o anumită relaţie. Se presupune că un anumit set de puncte a fost aproximat printr-o parabolă unde se poate întreba dacă ultimul termen cx^2 este suficient sau mai trebuie adăugat un alt termen suplimentar cum ar fi dx^3 ? Pentru a lua o decizie în acest sens în literatura de specialitate există aşa numitul criteriul Gauss care se bazează pe abaterea medie pătratică. Criteriul lui Gauss afirmă că ecuaţia care se potriveşte cel mai bine face minim raportul dintre suma pătratelor abaterilor valorilor observate de la valorile calculate şi diferenţa dintre numărul n al perechilor de valori observate şi numărul m de constante arbitrar implicate, adică

$$\Omega = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i^{exp} - y_i^{calc}\right)^2}{n - m}. \tag{4.52}$$

Acest criteriu nu are rolul să determine cel mai adecvat model ci stabileşte care din cele două reprezentări ataşate modelului este cea mai exactă.

4.5 Aplicaţii

1. Să se dezvolte în serie Taylor în vecinătatea valorii $x = 0$ următoarele funcţii:

   (a) $f(x) = \sin^2 x$ (b) $f(x) = \cos^2 x$ (c) $f(x) = \sin^3 x$

   (d) $f(x) = \cos^3 x$ (e) $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (f) $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

   (g) $f(x) = \ln(1 + x),\ |x| < 1$ (h) $f(x) = \arcsin x$ (i) $f(x) = \arccos x$

   (j) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ (k) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ (l) $f(x) = e^{x^2}$.

2. Să se reprezinte grafic funcţiile şi aproximaţiile Taylor conţinute în exerciţiul **1.** în diverse vecinătăţi ale punctului x=0. Apoi să se analizeze în mod grafic semnificaţia numărului de termeni din sumele de aproximare.

3. Să se determine polinoamele de interpolare de tip Lagrange pentru următoarele seturi de puncte experimentale:

   $(a)\ (0,5),\ (1,4.8),\ (1.5,5)\quad (b)\ (2,0),\ (2.4,0.8)\quad (c)\ (0,-5),\ (0.3,-4.9),\ (0.5,-5),\ (1,0).$

4. Să se determine polinoamele de interpolare de tip Newton pentru următoarele seturi de puncte experimentale:

   $$(a)\quad (1,5),\ (1.45,5.5)\quad (b)\ (2,0.5),(2.02,0.7)\ (2.4,0.88)$$
   $$(c)\quad (0,-5),\ (0.4,-4.8),\ (0.55,-5.5),\ (1,0)$$

5. Să se reprezinte pe acelaşi grafic polinoamele de interpolare Lagrange şi Newton pentru fiecare caz din exerciţiile **3.** şi **4.**

6. Folosind metoda celor mai mici pătrate pentru setul de puncte experimentale:

   $$(2,1);\ (3,5);\ (3.5,1);\ (4,0)$$

   să se determine setul de parametrii dacă funcţia obiectiv are următoarele forme:

   $$(a)\ f(x)=ax+b,\quad (b)\ f(x)=ax^2+bx+c,\ (c)\ f(x)=ae^x+b$$

7. Să se determine o dependenţă liniară pentru setul de puncte

   $$(2,10),\ (3,12),\ (6,17),\ (7,18),\ (10,22)$$

   unde x reprezintă numărul de ani şi y reprezintă diametrul unui brad.

Tabelul 4.1:

Funcţia	*Y=*	*X=*	*A=*	*W=*	*Comentariu*
$y = ax$	y	x	a	1	
$y = a/x$	y	$1/x$	a	1	$x \neq 0$
$y = ax^r$	y	x^r	a	1	r *cunoscut*
					$x > 0$ *când* $r \notin \mathbf{Z}$
$y = a \ln x$	y	$\ln x$	a	1	$x > 0$
$y = a \sin x$	y	$\sin x$	a	1	$x > 0$
$y = a \sin^r x$	y	$\sin^r x$	a	1	r *cunoscut*
$y = \sin ax$	$\arcsin y$	x	a	$1 - y^2$	$-1 < y < 1$
$y = \sin ax^r$	$\arcsin y$	x^r	a	$1 - y^2$	$-1 < y < 1$; r *cunoscut*
					$x > 0$ *când* $r \notin \mathbf{Z}$
$y = e^{ax}$	$\ln y$	x	a	y^2	$y > 0$
$y = e^{a/x}$	$\ln y$	$1/x$	a	y^2	$y > 0$; $x \neq 0$
$y = e^{ax^r}$	$\ln y$	x^r	a	y^2	$y > 0$; r *cunoscut;*
					$x > 0$ *când* $r \notin \mathbf{Z}$
$y = x^{ax}$	$\ln y$	$x \ln x$	a	y^2	$y > 0; x > 0$
$y = x^{ax^r}$	$\ln y$	$x^r \ln x$	a	y^2	$y > 0; x > 0; r$ *cunoscut*
$y = xe^{ax}$	$\ln(y/x)$	x	a	$(y/x)^2$	$(y/x) > 0$
$y = x^s e^{ax^r}$	$\ln(yx^{-s})$	x^r	a	$y^2 x^{-2s}$	$y^{-s} > 0$; r *şi* s *cunoscuţi;*
					$x > 0$ *când* $r \notin \mathbf{Z}$

Tabelul 4.2:

Funcţia	*Y=*	*X=*	*A=*	*B=*	*W=*	*Comentariu*
$y = ax + b$	y	x	a	b	1	
$y = a/x + b$	y	$1/x$	a	b	1	$x \neq 0$
$y = ax^r + b$	y	x^r	a	b	1	r *cunoscut;* $x > 0$ *când* $r \notin \mathbf{Z}$
$y = a \ln x + b$	y	$\ln x$	a	b	1	$x > 0$
$y = ax^r + bx^s$	yx^{-s}	x^{r-s}	a	x^{2s}	1	r *şi* s *cunoscuţi;* $x > 0$ *când* r *sau* $s \notin \mathbf{Z}$ *sau ambele* $\notin \mathbf{Z}$
$y = \dfrac{1}{ax + b}$	$1/y$	x	a	b	y^4	$y \neq 0$
$y = \dfrac{x}{a + bx}$	$1/y$	$1/x$	a	b	b	$x \neq 0;\ y \neq 0$
$y = ba^x$	$\ln y$	x^r	$\ln a$	$\ln b$	y^2	$y > 0$
$y = ba^{1/x}$	$1/x$	$\ln a$	$\ln b$	y^2	y^2	$x > 0;\ y > 0$
$y = ba^{x^r}$	$\ln y$	x^r	$\ln a$	$\ln b$	y^2	$x \neq 0;\ r$ *cunoscut*
$y = be^{ax}$	$\ln y$	x	a	$\ln a$	y^2	$y > 0$
$y = be^{a/x}$	$\ln y$	$1/x$	a	$\ln b$	y^2	$x \neq 0;\ y > 0$
$y = be^{ax^r}$	$\ln y$	x^r	a	$\ln b$	y^2	$y > 0;\ r$ *cunoscut* $x > 0$ *când* $r \notin \mathbf{Z}$
$y = bxe^{ax}$	$\ln y$	$x \ln x$	a	$\ln b$	y^2	$x > 0;\ y > 0$
$y = bx^{a/x}$	$\ln y$	$\dfrac{1}{x} \ln x$	a	$\ln b$	y^2	$x > 0;\ y > 0$
$y = bxe^{ax^r}$	$\ln y$	$x^r \ln x$	a	$\ln b$	y^2	$x > 0;\ y > 0;$ r *cunoscut*
$y = bx^a$	$\ln y$	$\ln x$	a	$\ln b$	y^2	$x > 0;\ y > 0$

Tabelul 4.3:

Funcţia	$Y=$	$X=$	$A=$	$B=$	$C=$	$W=$	*Comentariu*
$H = a + \frac{b}{u} + cu$	Hu	u	c	a	b	u^{-2}	*ecuaţia Deemter;* $u \neq 0$;
$y = ae^{(x-b)^2/c}$	$\ln y$	x	$1/c$	$-2b/c$	$\ln a + b^2/c$	y^2	$y > 0$; *distribuţia Gauss*
$y = ae^{(b-\ln x)^2/c}$	$\ln y$	$\ln x$	$1/c$	$-2b/c$	$\ln a + b^2/c$	y^2	$x > 0$; $y > 0$; *distribuţia normal logaritmică*
$y = \frac{1}{a(x-b)^2 + c}$	$\ln 1/y$	x	a	$-2ab$	$c + ab^2$	y^4	$y > 0$; *distribuţia Lorenz*
$y = \frac{1}{a(x+b)^2 + c}$	$\ln 1/y$	x	a	$2ab$	$c + ab^2$	y^4	$y > 0$ *distribuţia Cauchy*

Capitolul 5

Calculul integral

Determinarea ariei unei suprafeţe (probleme de cuadratură), determinarea volumului unui corp (probleme de cubatură) sunt unele dintre cele mai des întîlnite aplicaţii ale calculului integral. Pentru a putea rezolva acest gen de probleme se introduc noţiunile de primitivă şi integrală pentru funcţiile de o singură variabilă, urmând ca în partea a doua a acestui capitol să se generalizeze noţiunea de integrală şi pentru funcţii de mai multe variabile.

5.1 Primitive

Operaţia inversă celei de derivare este aceea a determinării unei primitive pentru o funcţie dată. Întrebarea care se pune este: *Ce funcţie are ca şi derivată funcţia f?*

Definiţia 5.1.1 *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie. Se spune că funcţia $F : D \to \mathbb{R}$ este o* **primitivă** *a funcţiei f dacă:*

(i) F este derivabilă pe D;

(ii) $F'(x) = f(x)$ oricare ar fi $x \in D$.

Pe baza Definiţiei 5.1.1 rezultă:

(i) Primitiva unei funcţii nu este unică;

(ii) Primitivele aceleeaşi funcţii diferă printr-o constantă;

(iii) Orice funcţie continuă pe un interval admite primitive;

(iv) Fie $f : D \to \mathbb{R}$, D un interval. Dacă imaginea lui D prin f ($f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$) nu este un interval atunci funcţia nu admite primitive.

Definiţia 5.1.2 *Mulţimea tuturor primitivelor unei funcţii se numeşte* **integrala nedefinită** *a funcţiei şi se notează astfel* $\int f(x)\,dx$

Deci,

$$\int f(x)dx = F(x) + \mathcal{C}, \quad \mathcal{C} \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

Operaţia de calculare a primitivelor unei funcţii se numeşte *integrare*. În continuare se va arăta de ce operaţia inversă derivării este integrarea. Se diferenţiază funcţia F se obţine

$$\begin{aligned} dF(x) &= f(x)dx \ \forall\ x \in D \implies \\ \int dF(x) &= \int f(x)dx. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Din relaţiile (5.1) şi (5.2) rezultă că

$$\int dF(x) = F(x) + \mathcal{C}, \quad \forall\ \mathcal{C} \in \mathbb{R},$$

Exemplul 5.1.1 *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definită prin:*

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{dacă } x < 4 \\ 2, & \text{dacă } x \geq 4 \end{cases} \tag{5.3}$$

Să se arate că funcţia nu admite primitive.

Rezolvare: Funcţia nu admite primitive deoarece imaginea funcţiei este mulţimea $\{-2, 2\}$ care nu este un interval.

Teorema 5.1.1 *Dacă* $f : D \to \mathbb{R}$ *şi* $g : D \to \mathbb{R}$ *două funcţii care admit primitive,* k *o constantă reală şi funcţiile* $f + g$ *respectiv* kf *admit de asemenea primitive şi*

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \tag{5.4}$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \tag{5.5}$$

În Tabelul 5.1 sunt prezentate primitivele unor funcţii mai des folosite.

Tabelul 5.1 Primitive de funcţii

Funcţia	Primitiva
$f : D \subset (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^a,\ a \neq -1$	$\int x^a\,dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + \mathcal{C}$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}$
$f : D \subset \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + \mathcal{C}$
$f : D \subset \mathbb{R}\backslash\{-a,a\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2-a^2},\ a \neq 0$	$\int \dfrac{1}{x^2-a^2}\,dx = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert + \mathcal{C}$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2+a^2},\ a \neq 0$	$\int \dfrac{1}{x^2+a^2}\,dx = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + \mathcal{C}$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + \mathcal{C}$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + \mathcal{C}$
$f : D \subset \mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},$ $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = tgx + \mathcal{C}$
$f : D \subset \mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}\ \ f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = -ctgx + \mathcal{C}$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}},\ a \neq 0$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + \mathcal{C}$
$f : D \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}},$ $a > 0,\ D \subset (-\infty,-a)$ sau $D \subset (a,\infty)$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\rvert + \mathcal{C}$
$f : D \subset (-a,a) \to \mathbb{R},\ a > 0,\ \ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\dfrac{x}{a} + \mathcal{C}$

5.2 Metode de determinare ale primitivelor

Metoda de determinare a primitivelor unei funcţii trebuie aleasă în funcţie de forma funcţiei a cărei primitivă se calculează.

Integrarea prin părţi

Teorema 5.2.1 *Dacă $f, g : D \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii derivabile cu derivate continue, atunci funcţiile fg, $f'g$, fg' admit primitive şi are loc relaţia*

$$\int fg'dx = fg - \int gf'dx \tag{5.6}$$

Modul de alegere al funcţiilor f şi g depinde de forma acestora. În continuare sunt date câteva exemple tip.

Exemplul 5.2.1 *Se vor determina primitivele funcţiilor:*

$$(a)\ f(x) = \ln x \qquad (b)\ f(x) = xe^x$$
$$(c)\ f(x) = x\sin\ x \qquad (d)\ f(x) = x^2\sqrt{x^2+1}$$

(a)

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= \int (x)'\ln x dx = x\ln x - \int dx \\ &= x\ln x - x + \mathcal{C},\ \forall\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= \int x(e^x)'dx = xe^x - \int e^x dx \\ &= (x-1)e^x\mathcal{C},\ \forall\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int x\sin x dx &= \int x(-\cos x)'dx = -x\cos x + \int \cos x dx \\ &= -x\cos x + \sin x + \mathcal{C},\ \forall\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+x^2}dx &= \int x^2\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int x^4\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx + \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx \\ &= \int x^3(\sqrt{x^2+1})'dx + \int x^2(\sqrt{x^2+1})'dx \\ &= x^3\sqrt{x^2+1} - \int 3x^2\sqrt{x^2+1}dx + x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}dx \implies \\ 4\int x^2\sqrt{x^2+1}dx &= x^3\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}dx + x\sqrt{x^2+1} \qquad (5.7)\end{aligned}$$

Pentru a calcula $\int \sqrt{x^2+1}dx$ se procedează ca mai sus si se obţine

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + \mathcal{C},\ \forall\, \mathcal{C} \in \mathbb{R} \qquad (5.8)$$

Din (5.7) şi (5.8) rezultă

$$\int x^2\sqrt{1+x^2}dx = \frac{x^3}{4}\sqrt{x^2+1} + \frac{x}{8}\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{4}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + \mathcal{C},\ \forall\, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

Schimbarea de variabilă

În multe exemple funcţia $h : D \to \mathbb{R}$ care se va integra poate fi pusă sub forma

$$h(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \text{ oricare ar fi } x \in D$$

unde $\varphi : D \to J$ este o funcţie derivabilă şi $f : J \to \mathbb{R}$. Dacă f admite o primitivă F atunci $h(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = (F \circ \varphi)'(x)$ oricare ar fi $x \in D$. Determinarea unei primitive a funcţiei h se reduce la determinarea unei primitive a funcţiei f, care de cele mai multe ori necesită calcule mai simple.

Teorema 5.2.2 *Fie D şi J două intervale din $\mathbb{R}$, $\varphi : D \to J$ şi $f : J \to \mathbb{R}$ două funcţii cu proprietăţile:*
(i) φ derivabilă pe D,
(ii) f admite primitive (F o primitivă a sa).
Atunci $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite primitive şi $F \circ \varphi'$ este o primitivă a lui $(f \circ \varphi) \cdot \varphi$, adică

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = (F \circ \varphi)(x). \qquad (5.9)$$

Tabelul 5.2 Alte primitive de funcţii, $\varphi : D \to \mathbb{R}$

Funcţia	Primitiva
$\int \varphi^a(x)\varphi'(x)\,dx = \frac{\varphi^{a+1}(x)}{a+1} + \mathcal{C}$	$a \in \mathbb{R}\backslash\{1\},\ \varphi(D) \subset (0,\infty)$
$\int a^{\varphi(x)}\varphi'(x)\,dx = \frac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + \mathcal{C}$	$a \in (0,\infty),\ a \neq 1$
$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \ln\lvert\varphi(x)\rvert + \mathcal{C}$	$\varphi(x) \neq 0,\ \forall x \in D$
$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{\varphi(x)-a}{\varphi(x)+a}\right\rvert + \mathcal{C}$	$\varphi(x) \neq \pm a\ \forall\ x \in D,\ a \neq 0$
$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a} arctg\frac{\varphi(x)}{a} + \mathcal{C}$	$a \neq 0$
$\int \sin(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = -\cos(\varphi(x)) + \mathcal{C}$	
$\int \cos(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \sin(\varphi(x)) + \mathcal{C}$	
$\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2(\varphi(x))}\,dx = tg(\varphi(x)) + \mathcal{C}$	$\varphi(x) \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\},\ \forall\ x \in D$
$\int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2(\varphi'(x))}\,dx = -ctg(\varphi(x)) + \mathcal{C}$	$\varphi(x) \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\ \}\forall\ x \in D$
$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + a^2}}\,dx = \ln(\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) + a^2}) + \mathcal{C}$	$a \neq 0$
$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) - a^2}}\,dx = \ln\lvert\varphi(x) + \sqrt{\varphi(x) - a^2}\rvert + \mathcal{C}$	$a > 0,\ \varphi(D) \subset (-\infty, -a)$ sau $\varphi(D) \subset (a,\infty)$
$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^2 - \varphi^2(x)}}\,dx = \arcsin\frac{\varphi(x)}{a} + \mathcal{C}$	$a > 0,\ \varphi(D) \subset (-a, a)$
$\int tg(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = -\ln\lvert\cos(\varphi(x))\rvert + \mathcal{C}$	$\varphi(x) \notin \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\},\ \forall\ x \in D$
$\int cotg(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \ln\lvert\sin(\varphi(x))\rvert + \mathcal{C}$	$\varphi(x) \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},\ \ \forall\ x \in D$

În Tabelul 5.2 sunt prezentate primitivele funcţiilor compuse mai des utilizate.

Exemplul 5.2.2 *Să se determine primitivele funcţiilor:*

$$\begin{array}{lll} (a)\ f(x)=\dfrac{6x^2+2x}{2x^3+x^2+5} & (b)\ f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} & (c)\ f(x)=\dfrac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} \\ (d)\ f(x)=\dfrac{1}{\sin x} & (e)\ f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{\cos x} & (f)\ f(x)=\sqrt{x^2-3x+2} \end{array} \tag{5.10}$$

(a) Se notează $t=2x^3+x^2+5$, prin diferenţiere se obţine $dt=(6x+2x)dx$ rezultă:

$$\begin{aligned} I_1=\int \frac{6x^2+2x}{2x^3+x^2+5}dx &= \int \frac{dt}{t} \\ &= \ln|t|+\mathcal{C},\ \text{înlocuind} \implies \\ I_1 &= \ln|2x^3+x^2+5|+\mathcal{C},\ \forall\ \mathcal{C}\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

(b) Se notează $t=e^x$, prin difernţiere se obţine $dt=e^x dx$

$$\begin{aligned} I_2=\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx &= \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \arcsin t+(\mathcal{C}),\ \text{înlocuind} \implies \\ I_2 &= \arcsin e^x+\mathcal{C},\ \forall\ \mathcal{C}\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

(c) Se notează $t=1+\sin^2 x$, diferenţiind se obţine $dt=2\sin x\cos x dx=\sin(2x)dx$

$$\begin{aligned} I_3=\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x}dx &= \int \frac{dt}{t} \\ &= \ln t+\mathcal{C},\ \text{înlocuind} \implies \\ I_3 &= \ln(1+\sin^2 x)+\mathcal{C},\ \forall\ \mathcal{C}\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

(d)

$$I_4=\int \frac{1}{\sin x}dx=\int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx \tag{5.11}$$

Se notează $t=\cos x$, prin diferenţiere se obţine $dt=-\sin x dx$. Din relaţia (5.11)

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{dt}{t^2-1}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+(\mathcal{C}),\ \text{înlocuind} \implies \\ I_4 &= \frac{1}{2}\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+\mathcal{C},\ \forall\ \mathcal{C}\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} I_5 &= \int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx = \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx - \int \sin x \cos x dx \\ &= -tg(\cos x) + \frac{1}{2}\cos^2 x + \mathcal{C},\ \forall\, \mathcal{C} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(f)

$$I_6 = \sqrt{x^2-3x+2}dx = \sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}} \tag{5.12}$$

Se notează $t = x - \dfrac{3}{2}$, diferenţiind se obţine $dt = dx$. Se foloseşte (5.12) şi se obţine:

$$\begin{aligned} I_6 &= \int \sqrt{t^2 - \frac{1}{8}}dt \\ &= \int t(\sqrt{t^2-\frac{1}{8}})'dt - \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt \\ &= t\sqrt{t^2-\frac{1}{8}} - \int \sqrt{t^2-\frac{1}{8}}dt - \ln\left(t + \sqrt{t^2-\frac{1}{8}}\right) \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{1}{2}t\sqrt{t^2-\frac{1}{8}} - \frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{t^2-\frac{1}{8}}\right) \text{ înlocuind } \Longrightarrow \\ &= \frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2-3x+2} - \frac{1}{2}\ln\left(x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right) + \mathcal{C},\ \forall\, \mathcal{C} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Integrarea funcţiilor raţionale

Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ unde P este un polinom de grad p şi Q este un polinom de grad q astfel încât $Q(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in D$.

(i) Dacă $p < q$ atunci pentru a determina primitivele funcţiei f se descompune polinomul Q în factori folosindu-se rădacinile acestuia. Se disting următoarele cazuri.

a) Polinomul Q are rădacinile reale şi distincte $x_1,\ x_2,\ \ldots\ , x_p$. Atunci

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_q}{x-x_q} \tag{5.13}$$

Determinarea coeficienţilor A_k, $k = \overline{1,p}$ se se realizează prin folosirea metodei coeficienţilor nedeterminaţi. Pentru acesta se aduce la acelaşi numitor în membrul drept al relaţiei (5.13), după care se identifică coeficienţii polinoamelor de la numărătorul membrului drept şi stâng din relaţia (5.13).

b) Polinomul Q are rădacina x_k multiplă de ordinul r şi $q-r$ rădăcini simple. Atunci

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_{q-r}}{x-x_{q-r}}+\\ &+ \frac{A_{q-r+1}}{x-x_k}+\frac{A_{q-r+2}}{(x-x_k)^2}+\frac{A_{q-r+3}}{(x-x_k)^3}+\ldots+\frac{A_q}{(x-x_k)^r}\end{aligned} \tag{5.14}$$

c) Polinomul Q are şi rădacini complexe. Factorii corespunzători rădacinilor complexe conjugate vor fi

$$Q(x)=(x^2+a_1x+a_2)(x^2+b_1x+b_2)\ldots$$

atunci

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+a_1x+a_2}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+b_1x+b_2}+\ldots \tag{5.15}$$

(ii) Dacă $p\geq q$, pentru a determina primitivele funcţiei f trebuie împărţit polinomul P la Q şi funcţia f va fi suma dintre un polinom şi o altă funcţie raţională pentru care gradul număratorului este mai mic decât gradul numitorului. Integrarea noii funcţii raţionale se reduce la cazul (i).

Exemplul 5.2.3 *Să se determine primitivele funcţiilor:*

$$(a)\ \frac{1}{x^3+x^5}\quad (b)\ \frac{x^4+1}{x^3+1}$$

(a) Rădăcnile polinomului de la numitor sunt $x=0$ rădăcină triplă şi $x^2+1=0$ nu are rădacini reale. Atunci

$$\frac{1}{x^3+x^5}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}+\frac{ex+f}{x^2+1} \tag{5.16}$$

Aducând la acelaşi numitor în membrul drept se obţine:

$$1=ax^2(x^2+1)+bx(x^2+1)+c(x^2+1)+(ex+f)x^3$$

Din ultima egalitate sitemul de ecuaţii algebrice are forma:

$$\begin{cases} a+e=0\\ b+f=0\\ a+c=0\\ b=0\\ c=1\end{cases} \tag{5.17}$$

a cărui soluţie este:

$$a = 1,\ b = 0,\ c = 1,\ e = 1,\ f = 0.$$

Deci, $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2+1}$. Integrând se obţine:

$$\int \frac{1}{x^3+x^5}dx = \ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|} - \frac{1}{2x^2} + \mathcal{C},$$

oricare ar fi $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

(b) Aplicându-se procedeul descris la (ii) se obţine

$$\frac{x^4+1}{x^3+1} = x + \frac{-x+1}{x^3+1}.$$

Pentru a descompune în fracţii simple fracţia $\frac{-x+1}{x^3+1}$ se procedează ca şi la exemplul (a) şi se obţine

$$f(x) = x + \frac{2}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{2x-1}{x^2-x+1} \implies$$
$$\int \frac{x^4+1}{x^3+1}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \mathcal{C},$$

oricare ar fi $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 5.2.1 *Să se determine primitivele următoarelor functii:*

(a) $\frac{1}{x^r},\ r \neq 1$; (b) $\sqrt[3]{x}$; (c) $\sqrt[m]{x},\ m \in \mathbb{N}^*$

(d) $ax^2 + \frac{1}{x} - \frac{b}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}$; (e) $x^m e^x,\ m \in \mathbb{N}^*$; (f) $x^n \sin x,\ n \in \mathbb{N}^*$;

(g) $x^n \cos x,\ n \in \mathbb{N}^*$; (h) $\frac{3x^2-4}{x^3-4x+7}$; (i) $\frac{3-5x}{1+x^2}$;

(j) $\sin x \cos x$; (k) $(1-x^4)x^3$; (l) $\frac{4x^2-7x+25}{x^3-6x^2+3x+10}$;

(m) $\frac{1}{\sin x}$; (n) $\frac{1-\sin x}{\sin x(1-\cos x)}$; (o) $\frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x}$;

(p) $\sin^2 x \cos^4 x$; (r) $\frac{1}{\sin x \sin 2x}$; (s) $\frac{1}{\sin x \cos 2x}$

5.3 Integrala definită-interpretarea geometrică

Fie o suprafaţă de teren agricol sau forestier mărginit de trapezul curbiliniu reprezentată în Figura 5.1. Se presupune că această suprafaţă este cultivată cu un anumit tip de

graminee sau de copaci. Se presupune că se cunoaste aprioric cantitatea de cereale sau volomul de masă lemnoasă pe unitaţea de suprafaţă. Problema ce se ridică este aceea de a determina într-un mod suficient de exact producţia corespunzătoare suprafeţei delimitate de trapezul curbiliniu care de fapt reprezintă produsul dintre densitatea de graminee sau de masă lemnoasă şi suprafaţa totală. Folosind geometria nu se cunoaşte o formulă suficient de exactă pentru determinarea ariei unei suprafeţe neregulate. Din punct de vedere geometric, suprafaţa în cauză poate fi împărţită în histograme suficient de înguste unde suma ariilor acestora ar putea aproxima suprafaţa Figurii 5.1. Punctele diviziunii $[a, b]$ se notează

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b. \tag{5.18}$$

Baza dreptunghiurilor $i,\ i = \overline{1..n}$ este egală cu $x_{i+1} - x_i$ notată cu Δx_i şi înălţimea este egală cu $y_i = f(x_i)$. Suprafaţa dreptunghiului i va fi

$$y_i \Delta x_i = f(x_i)\Delta x_i.$$

Prin însumarea ariilor tuturor dreptunghiurilor se obţine o valoare aproximativă a ariei A a trapezului curbiliniu

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i \ \text{ sau } \ A \approx \sum_{i=0}^{i-1} f(x_i)\Delta x_i. \tag{5.19}$$

Valoarea exactă a a ariei A se obţine prin trecere la limită

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} y_i \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i. \tag{5.20}$$

Simbolul pentru integrală $\int$ a fost introdus de matematicianul german Leibnitz şi provine de la stilizarea literei S.

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se consideră o diviziune a intervalului $[a, b]$, $a = x_0, \cdots, x_n = b$ notată cu Δ, $|\Delta| = max\{x_{i+1} - x_i \mid i = \overline{0, n-1}\}$. Se consideră în fiecare interval $[x_i, x_{i+1}]$ un punct arbitrar ξ_i, astfel încât,

$$x_i < \xi i < x_{i+1}\ (i = \overline{0, n-1}) \ \text{ şi se notează } \ \sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i). \tag{5.21}$$

Suma σ_n se numeşte *sumă Reimann.*

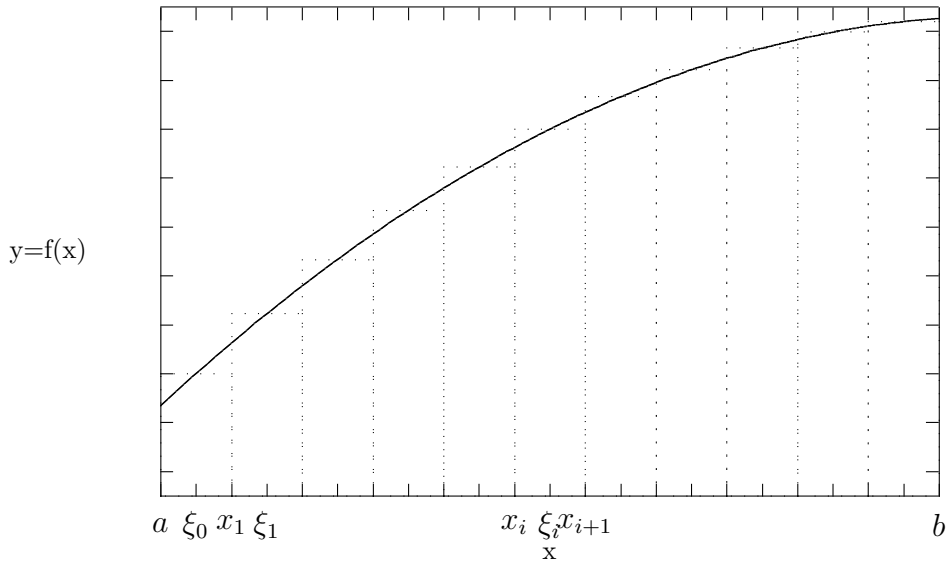


Figura 5.1: Interpretarea geometrică a noţiunii de integrală.

Definiţia 5.3.1 *Fie o funcţie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *se numeşte* **integrabilă Riemann** *sau pe scurt* **integrabilă** *dacă* $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ *există independent de alegerea punctelor intermediare* ξ_i.

Limita din definiţia precedentă se numeşte integrala definită a funcţiei f pe intervalul $[a, b]$ şi de notează cu

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Numerele a şi b se numesc limita inferioară, respectiv superioară a integralei. Când limitele sunt constante, integrala definită reprezintă un număr. Determinarea integralei unei funcţiei (atunci când aceasta există) pe baza definiţiei precedente este greoaie. Pentru a se evita acest calcul se va folosi primitiva funcţiei respective.

Formula fundamentală a calculului integral-Formula Leibnitz-Newton

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Acestă funcţie admite primitive. Se consideră $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f. Se consideră o divizune a intervalului $[a, b]$ şi un sistem de puncte intermediare ξ_i, $i = \overline{0, n}$. Se va evalua suma Riemann σ_n. Pentru orice $i = \overline{0, n-1}$ se va aplica teorema lui Lagrange funcţiei $F : [x_i, x_{i+1}] \to \mathbb{R}$. Atunci există $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ astfel încât

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) \quad = \quad F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \iff$$

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) \quad = \quad f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{5.22}$$

Se adună relaţiile (5.22) pentru $i = \overline{0, n-1}$ şi se obţine:

$$F(x_n) - F(x_0) = \sigma_n.$$

Prin trecere la limită se obţine $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$. Formula Leibnitz-Newton are forma:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{5.23}$$

5.3.1 Proprietăţi ale integralei definite

În continuare sunt amintite cele mai uzuale proprietăţi ale integralei definite. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, atunci

(i)
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx; \tag{5.24}$$

(ii) dacă $c \in (a, b)$ are loc

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{5.25}$$

Descompunerea integralei intr-o sumă de integrale, folosindu-se descompunerea intervalului de integrare, are aplicaţii la calculul porţiunilor de arie situate deasupra şi sub axa Ox alegându-se ca punctul c un zero al funcţiei.

Exemplul 5.3.1 *Să se determine* $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$.

Rezolvare:

$$I = \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = 2 - 2 = 0. \tag{5.26}$$

(iii) Dacă $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$ are loc

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{5.27}$$

(iv) Dacă c este un scalar are loc $\sum cf(\xi_i)\,\Delta x_i$ şi deci apare ca şi factor al limitei,

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx. \tag{5.28}$$

Este cunoscut faptul că orice funcţie continuă pe un interval închis îşi atinge marginea superioară M, respectiv marginea inferioară m. Dacă funcţia are numai valori pozitive, atunci din definiţia integralei rezultă inegalitatea,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a), \tag{5.29}$$

adică aria mărginită de curba cuprinsă între ariile a două dreptunghiuri $m(b-a)$ şi $M(b-a)$. Trebuie deci să existe o valoare μ cuprinsă între m şi M astfel încât $\mu(b-a)$ sa fie egal cu $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Reprezentarea grafică a acestei analize este redată în Figura 5.2. Funcţa f fiind continuă, există un punct $x=\xi\in[a,b]$, asfel încât $\mu=f(\xi)$ si deci $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(\xi)$. La fel ca în cazul teoremei lui Lagrange, din calculul diferenţial exprimat de relaţia (3.45), punctul ξ poate fi exprimat prin relaţia $a+\theta(b-a)$, unde θ este o valoare cuprinsă între 0 şi 1, deci

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= (b-a)f(\xi), \quad \text{unde } \xi\in[a,b],\\ &= (b-a)f[a+\theta(b-a)], \quad \text{unde } 0\le\theta\le 1.\end{aligned} \tag{5.30}$$

Dacă funcţia f este continuă în intervalul $[a,b]$, atunci integrala $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ se poate exprima ca produsul dintre lungimea intervalului, $b-a$ şi valoarea funcţiei într-un anumit punct al intervalului. Afirmaţia precedentă poate fi folosită şi pentru evaluarea integralelor definite ale funcţiilor ce nu pot fi integrate prin metode elementare sau a căror integrare este dificilă.

Observaţia 5.3.1 *Fie funcţiile f, g şi h integrabile pe intervalul $[a,b]$ dacă are loc $f(x)\le g(x)\le h(x)$, oricare ar fi $x\in[a,b]$, atunci*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b h(x).$$

Aplicabilitatea observaţiei precedente este demonstrată de următorul exemplu.

Exemplul 5.3.2 *Să se determine* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}$.

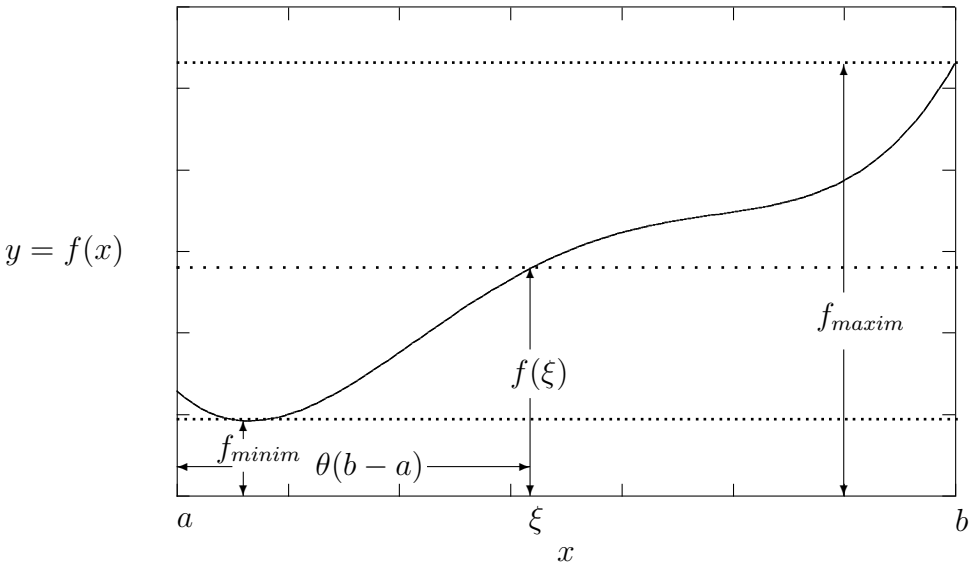


Figura 5.2: Reprezentarea geometrică a teoremei de medie din calculul integral.

Rezolvare: Integrala nu poate fi calculată prin metode clasice, dar funcţia satisface inegalităţile,

$$1 - x^2 \leq \exp(-x^2) \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Se efectuează calcule şi se obţine că $0.458 = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} = \int_0^{1/2} (1-x^2)\,dx \leq \int_0^{1/2} \exp(-x^2)\,dx \leq \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} = [arctg\alpha]_0^{1/2} = 0.464$. În acest mod s-a determinat cu o precizie satisfăcătoare valoarea integralei $\int_0^{1/2} \exp(-x^2)\,dx$ care este cuprinsă între valorile 0.458 şi 0.464.

5.3.2 Integrale improprii

Până acum s-a avut în vedere integrarea funcţiilor continue definite pe intervale închise. Problema care se pune în continuare este aceea a integrarii funcţiilor nemărginte sau a celor definite pe intervale nemărginite. Integrala improprie se defineşte ca limita unei integrale proprii. Dacă limita respectivă va fi finită atunci, integrala improprie se numeşte *convergentă*, altfel integrala improprie se numeşte *divergentă*.

Integrarea funcţiilor continue definite pe intervale deschise sau nemărginite

Fie $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă definită pe intervalul $(a,b]$. Integrala $\int_a^b f(x)dx$ nu se poate calcula folosindu-se definiţia integralei definite deoarece funcţia nu este definită pe punctul a. Pentru a se evita această situaţie se restrânge intervalul de definiţie la intervalul $[a+\varepsilon,b]$. Folosindu-se metodele cunoscute se determină

$$I_\varepsilon=\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \tag{5.31}$$

Prin trecere la limită $\varepsilon\to 0$ se va determina integrala improprie

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}I_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \tag{5.32}$$

Exemplul 5.3.3 *Se dă funcţia* $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$, $\alpha\neq 0$. *Să se studieze convergenţa integralei*

$$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx.$$

Rezolvare: Se calculează

$$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}I_\varepsilon=\lim_{\varepsilon to 0}\int_\varepsilon^1\frac{1}{x^\alpha}\,dx=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha})\right]=\frac{1}{1-\alpha}.$$

Ultima egalitate are loc deoarece $\lim\limits_{\varepsilon^{1-\alpha}}=0$, oricare ar fi $\alpha\neq 1$. Deci, integrala este convergentă.

Observaţia 5.3.2 *Dacă funcţia* f *este definită pe un interval de forma* $[a,b)$, *atunci*

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}I_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx \tag{5.33}$$

Exemplul 5.3.4 *Să se studieze convergenţa integralei*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}tgx\,dx.$$

Rezolvare: Se foloseşte observaţia precedentă şi se obţine:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}tgx\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}tgx\,dx=-\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\infty,$$

deci integrala este divergentă.

Observaţia 5.3.3 *Dacă funcţia este definită pe un interval de forma* (a, b)*, atunci,*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx \tag{5.34}$$

Exemplul 5.3.5 *Să se studieze convergenţa integralei* $\int_2^3 \frac{1}{(x-2)(x-3)}\, dx$.

Rezolvare: Se calculează:

$$\int_2^3 \frac{1}{(x-2)(x-3)}dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{2+\varepsilon}^{3-\varepsilon} \frac{1}{(x-2)(x-3)}dx = (\ln|x-3| - \ln|x-2|)\Big|_{2+\varepsilon}^{3-\varepsilon} = -\infty,$$

deci integrala este divergentă. Dacă funcţia este definită pe toată axa reală atunci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x)dx \tag{5.35}$$

Exemplul 5.3.6 *Să se studieze convergenţa integralei* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{\omega \to \infty} \left[\int_{-\omega}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\omega} \frac{dx}{1+x^2} \right] = \\ &= \lim_{\omega \to \infty} [\arctan(0) - \arctan(-\omega) + \arctan(\omega) - \arctan(0)] = \pi, \end{aligned}$$

deci integrala este convergentă.

La fel se determină convergenţa celorlate cazuri de integrale improprii definite pe intervale nemărginite la dreapta sau la stânga.

Exemplul 5.3.7 *Să se determine convergenţa integralei* $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha},\ \alpha > 0,\ \alpha \neq 0.$

Rezolvare:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{\omega \to \infty} I(\omega) = \lim_{\omega to \infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{\omega \to \infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} (\omega^{1-\alpha} - 1) \right].$$

Dacă $\alpha > 1$ atunci $I = \frac{1}{a-1}$ şi integrala este convergentă. Dacă $0 < a < 1$ atunci $I = -\infty$ şi integrala este divergentă. Figura 5.3 redă forma grafică a funcţiilor ce fac obiectul integralelor improprii din Exemplele 5.3.3 şi 5.3.7. Din reprezentarea grafică a funcţiei $\frac{1}{x^2}$ se poate imagina caracterul divergent al integralei improprii în cazul când $x \in [1, \infty)$, iar din Figura 5.3-(b) se poate constata că aria mărginită de funcţia $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ şi dreapta de ecuaţie $y = 0$ este finită.

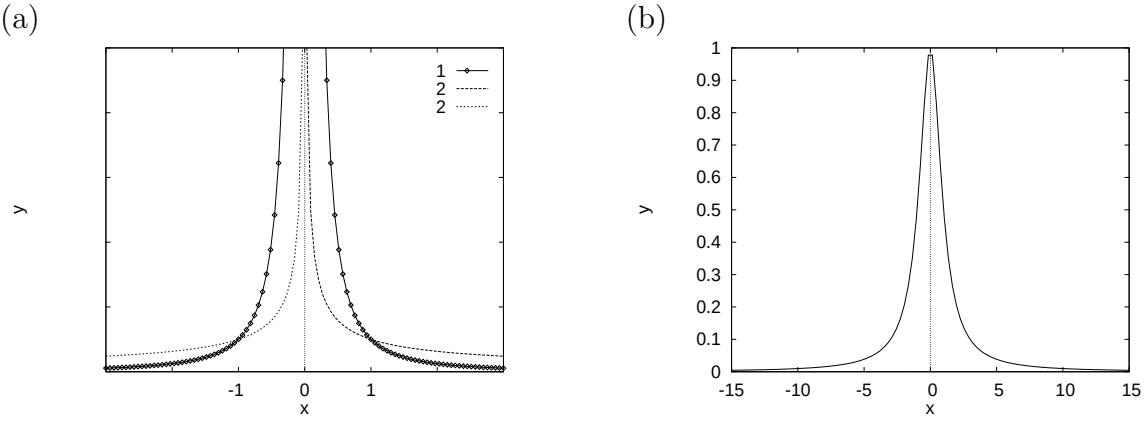


Figura 5.3: Reprezentarea grafică a calculului integralelor improprii, (a) comportarea grafică a funcţiilor (1) - $1/x^2$ şi (2) - $1/x^\alpha$, $\alpha = 2/3$ în vecinătatea originii, (b) Aria aflată sub distribuţia Cauchy $1/(1+x^2)$.

5.4 Determinarea lungimii curbelor

In tehnică calculul lungimii curbelor şi al suprafeţelor mărginite poartă numele de rectificare, respectiv coplanare. Pentru orice mobil ce se deplasează pe o traiectorie curbă este firesc să se pună problema calculării lungimii curbei pe care are loc deplasarea. De fapt marea majoritate a mobilelor întâlnite în natură se deplasează pe traiectorii curbilinii. De-a lungul oricărei curbe plane sau în spaţiu se poate aşeza un fir subţire neextensibil, lungimea firului se consideră a fi lungimea porţiunii de curbă măsurate. Pentru a preciza această reprezentare se consideră curba din Figura 5.4, împărţită în n părti prin punctele de diviziune $P_0, \ldots, P_n$ şi se aproximează curba prin linia poligonală obţinută prin unirea acestor puncte. Prin trecerea la limită se obţine formula de calcul a lungimii unui arc de curbă. Aproximarea este cu atât mai bună cu cât numărul punctelor de diviziune este mai mare. Punctul de diviziune P_i are coordonatele $(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, \ \ldots \ n$, lungimea s_i a coardei $P_{i-1}P_i$ se obţine din teorema lui Pitagora $s_i = \Delta x_i \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$ iar lungimea liniei poligonale va fi

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}. \tag{5.36}$$

Din Teorema lui Lagrange există un punct ξ_i în intervalul $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ astfel încât raportul $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i)$ şi deci $s_i = \Delta x_i \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}$. Fiecarei diviziuni a intervalului

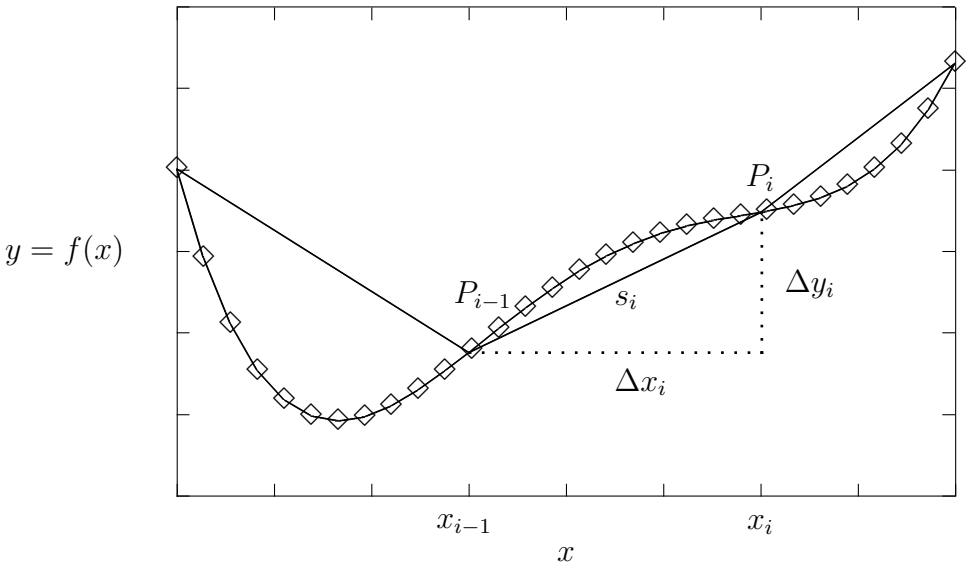


Figura 5.4: Lungimea arcului unei curbe plane.

$[a, b]$, $x_0 = a$, $x_n = b$ îi corespunde o linie poligonală de lungime s_n. Atunci când se folosesc diviziuni din ce în ce mai fine astfel încât cel mai mare interval de diviziune Δx_i tinde la zero când n tinde la infinit, şirul lungimilor liniilor poligonale s_n are limită. Această limită este lungimea arcului de curbă considerat. Dacă limita există, curba se numeşte rectificabilă. Deci lungimea arcului de curbă se calculează:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx. \tag{5.37}$$

Sub radicalul din relaţia (5.37) apare pătratul derivatei funcţiei $y = f(x)$. De aici rezultă că o condiţie necesară de rectificabilitate este ca funcţia f să aibă derivata continuă. Atunci când limita inferioară de integrare este fixă şi limita superioară variabilă, lungimea arcului este funcţie de limita superioară $s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [y'(t)]^2}\, dt$. Diferenţiala ds a acestei funcţii se numeşte element de arc, iar lungimea arcului este integrala elementului de arc.

Folosind relaţia (5.36) se deduce formula lungimii arcului de curbă atunci curba este exprimată parametric de ecuaţiile,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{5.38}$$

Din relaţia (3.45) au loc egalităţile $\dfrac{\Delta x(t_i)}{\Delta t_i} = x'(\xi_i)$, $\dfrac{\Delta y(t_i)}{\Delta t_i} = y'(\xi_i)$, unde $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$. Se înlocuieşte în relaţia (5.36) $\Delta x(t_i)$ şi $\Delta y(t_i)$ se trece la limită atunci când $\Delta x(t_i) \to 0$ şi $\Delta y(t_i) \to 0$ şi se obţine

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt. \tag{5.39}$$

În coordonate polare, ecuaţiile parametrice ale unei curbe sunt descrise de relaţiile

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\, \cos\theta, \\ y(\theta) = r(\theta)\, \sin\theta. \end{cases} \tag{5.40}$$

Exerciţiul 5.4.1 *Pe baza considerentelor de mai sus să se arate că lungimea arcului de curbă în coordonate polare este exprimată de relaţia*

$$s(t) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + \left(\frac{d\, r}{d\, \theta}\right)^2}\, d\theta. \tag{5.41}$$

Exemplul 5.4.1 *Să se determine lungimea cercului cu centrul în origine şi de rază r.*

Rezolvare: Ecuaţia cercului cu centrul în punctul de coordonate O(0,0) şi rază r este $y^2 + x^2 = r^2$. Deoarece cercul este simetric faţă de axa Ox lungimea cercului va fi dublul lungimii semicercului superior. Semicercul superior este simetric faţă de axa Oy; deci lungimea cercului va fi multiplu de lungimea arcului de cerc situat în primul cadran. Funcţia care descrie arcul de cerc din primul cadran este definită pe intervalul $[0, r]$ şi are expresia $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Se foloseşte formula de calcul a lungimii arcului de curbă şi se obţine lungimea cercului

$$s = 4 \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx,$$

se substituie $z = \dfrac{x}{r}$ şi se obţine: $s = 4r \displaystyle\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = 4r\, [\arctan z]_0^1 = 2\pi r.$

Exemplul 5.4.2 *Să se determine lungimea unui arc de cicloidă.*

Rezolvare: *Cicloida* este curba descrisă de un punct de pe cerc atunci când acesta se rostogoleşte de-a lungul unei axe. Ecuaţiile parametrice ale cicloidei sunt:

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases} \tag{5.42}$$

Pentru determinarea lungimii arcului de cicloidă se foloseşte relaţia (5.39). Derivând cele două ecuatii se obţine: $x'(t) = a(1-\cos t)$, $y'(t) = a\sin t$ iar elementul de arc este dat de $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt = 2a\sin\dfrac{t}{2}\,dt$. Prin integrare elementului de arc pe intervalul $[0, 2\pi]$ se obţine $s = 2a\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 8a$. Deci lungimea cicloidei este egală cu de patru ori diametrul cercului care generează cicloida prin rostogolire. În Figura 5.5 este reprezentată grafic cicloida pentru $a = 1$ iar $t \in [0, 4\pi]$.

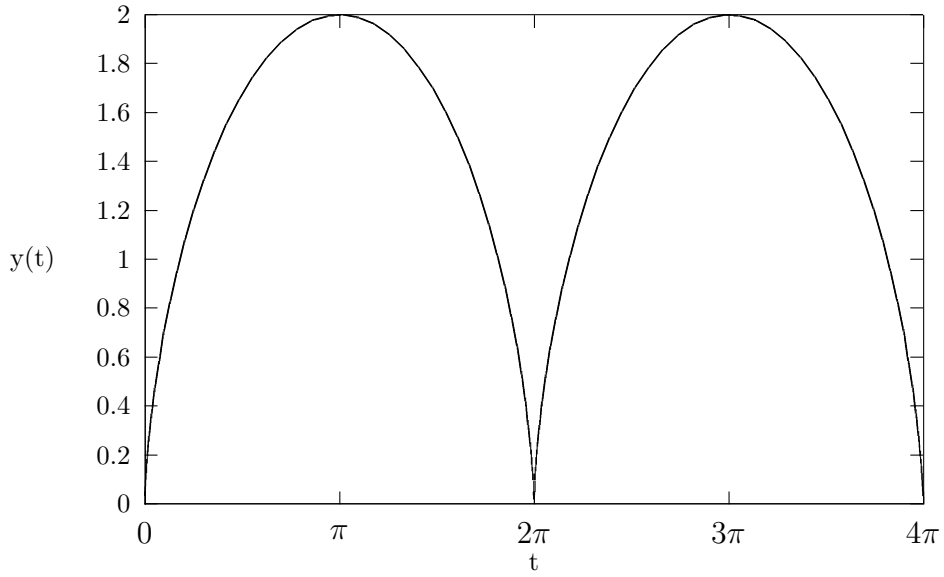


Figura 5.5: Arcul de cicloidă

5.5 Determinarea ariilor suprafeţelor

Calculul ariilor situate în plan

În conformitate cu interpretarea geometrică a integralei definite exprimate în secţiunea 5.3 ariile figurilor curbilinii din plan sunt exprimate cu ajutorul noţiunii de integrală.

Exemplul 5.5.1 *Se consideră elipsa descrisă de ecuaţia (2.4) şi un punct $M(x, y)$ situat pe elipsă. Folosindu-se notaţiile din Figura 5.6-(a), să se determine aria trapezului curbiliniu $BOKM$ şi a sectorului OMB unde segmentul KM este perpendicular pe axa Ox.*

Rezolvare: Din ecuaţia elipsei se obţine $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Aria trapezului curbiliniu $BOKM$, A_1 este dată de relaţia

$$A_1 = \frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{ab}{2}\arcsin xa + \frac{b}{2a}x\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{xy}{2}. \quad (5.43)$$

Întrucât ultimul termen al relaţiei (5.43) reprezintă aria triunghiului OKM, rezultă că aria sectorului OMB, $A_2 = \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}$. Pentru $x = a$ se obţine aria sfertului de elipsă $\frac{\pi ab}{4}$, din motive de simetrie aria elipsei este egală cu πab. Pentru cerc ($a = b = r$) se obţine formula cunoscută $A = \pi r^2$.

Exemplul 5.5.2 *Se consideră hiperbola descrisă de relaţia (2.5) şi punctul $M(x, y)$ de pe hiperbolă. Folosindu-se notaţiile din Figura 5.6-(b) să se determine aria figurilor curbilinii AKM, OAM şi $OAML$ unde segmentul MK este perpendicular pe axa Ox.*

Rezolvare: Din ecuaţia hiperbolei se obţine $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Aria figurii AKM este exprimată de relaţia,

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})\right]_a^x \\ &= \frac{1}{2}xy - \frac{ab}{2}\ln\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Deoarece $\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} = \frac{y}{b}$, expresia ariei este $A_1 = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$. Aria figurii curbilinii OAM, $A_2 = \frac{ab}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$. Aria figurii $OAML$ este exprimată de relaţia $A_3 = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}ab\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$.

Calculul ariilor mărginite de două curbe

Dacă o suprafaţă este mărginită de două curbe, a căror reprezentare este dată de graficul funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, şi de dreptele de ecuaţii $x = a$, $x = b$, atunci aria suprafeţei este

$$F = \int_a^b |f(x)\, dx - g(x)\,|\, dx. \quad (5.45)$$

Exemplul 5.5.3 *Fie curbele $y^2 = 9x$ şi $y = x^2 - 4x + 6$. Să se determine aria suprafeţei situată între cele două curbe.*

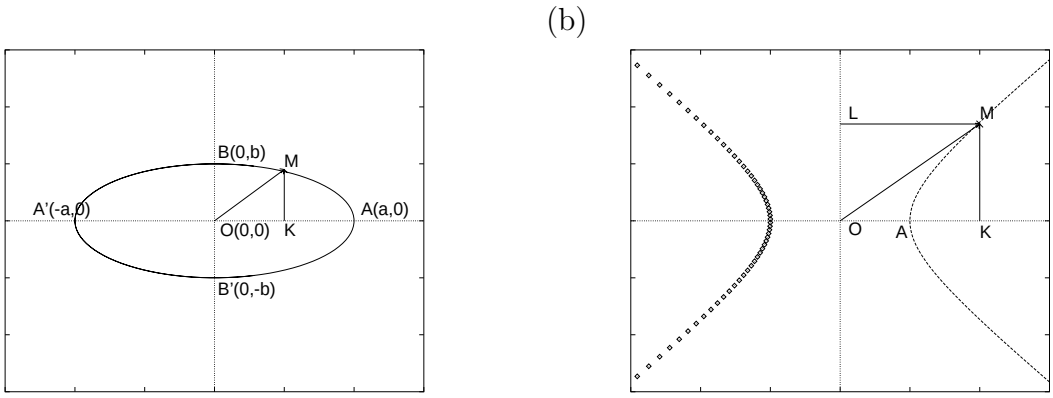


Figura 5.6: (a) Trapezul curbiliniu BOKM şi sectorul OMB; (b) Figurile curbilinii AKM, OAM şi OAML.

Rezolvare: Rezolvând sistemul format din ecuaţiile celor două curbe se obţin punctele de intersecţie ale curbelor: $(1,3)$, $(4,6)$. Se aplică relaţia (5.45) şi se obţine aria suprafeţei $F = \int_1^4 |3x^{\frac{1}{2}} - x^2 + 4x - 6|\, dx = \left[2x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 6x\right]_1^4 = 5$. În Figura 5.7 este reprezentată suprafaţa rezultată din mărginirea celor două curbe. O variantă intuitivă de a evita calculul unei integrale dintr-o funcţie care conţine modulul, este aceea de a determina punctele de intersecţie ale celor două curbe şi de a folosi un produs software pentru a reprezenta grafic curbele pe intervalul de interes. Din grafic se vede care funcţie este mai mare şi astfel se poate evita modulul.

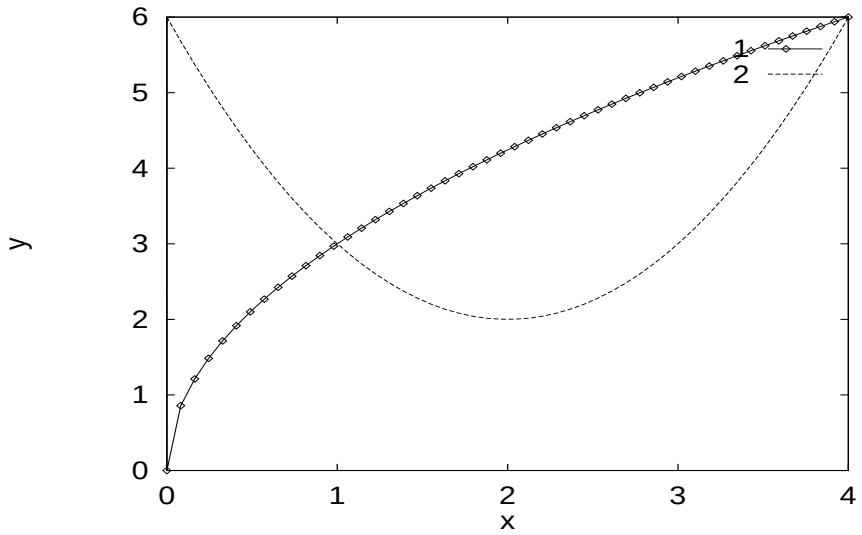


Figura 5.7: Aria mărginită de curbele $y^2 = 9x$ şi $y = x^2 - 4x + 6$.

Determinarea ariilor suprafeţelor corpurilor de rotaţie

Se consideră curba $y = f(x),\ x \in [a, b]$. Se va determina aria suprafeţei obţinute prin rotaţia curbei $y = f(x)$ în jurul axei Ox marginită de planele $x = a$ şi $x = b$. Pentru determinarea acestei arii se consideră diviziunea intervalului $[a, b]$ $a = x_1,\ \cdots,\ x_n = b$. Folosindu-se nodurile diviziunii se consideră arcele de curbă determinate de acestea şi coardele subîntinse de aceste arce. Aria suprafeţei căutate este aproximată de ariile laterale ale trunchiurilor de con determinate cu ajutorul punctelor diviziunii. Aria laterală a trunchiului de con este $\pi s(r_1 + r_2)$ unde r_1 şi r_2 reprezintă razele bazelor. Aria laterală a trunchiului de con determinat de coarda cu capetele $(x_i, f(x_i))$ şi $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ este A_i dată de $A_i = \pi[f(x_i) + f(x_{i+1})]\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \pi[f(x_i) + f(x_i)]\Delta x_i\sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$. Se aplică teorema de medie din calculul difernţial (egalitatea (3.45)) şi se obţine că există $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ astfel încât $f(\xi_i) = \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$. Suma ariilor laterale ale trunchiurilor de con va fi exprimată de relaţia,

$$A_l = \pi \sum_{i=1}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})]\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}.$$

Prin creşterea numărului punctelor de diviziune ale intervalului $[a, b]$ suma ariilor trunchiurilor de con va furniza o aproximaţie mai bună a ariei laterale a corpului de rotaţie. Dacă curba este rectificabilă când $n \to \infty$ şi $\Delta x_i \to 0$, şirul sumelor ariilor laterale ale trunchiurilor de con are ca limită o integrală definită. Aria laterală va fi exprimată de relaţia,

$$A_l = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \tag{5.46}$$

Calculul ariei suprafeţei laterale va fi exemplificat pentru determinrea ariei suprafeţei sferei, suprafeţei calotei sferice şi a suprafeţei zonei sferice.

Exemplul 5.5.4 *Să se determine aria suprafeţei sferei, suprafeţei calotei sferice şi a suprafeţei zonei sferice, pentru o sferă centrată în origine de rază r.*

Rezolvare: Se aplică relaţia (5.46) şi se obţine aria suprafeţei sferice

$$A_l = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\frac{r\, dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4\pi r[x]_0^r = 4\pi r^2.$$

Aria calotei sferice se determină în mod similar, deosebirea este că limitele de integrare vor fi ξ şi r. In acest mod aria calotei este data de $2\pi rh$ unde $h = r - \xi$.
Aria suprafeţei zonei sferice se determină în mod similar dar în acest caz limitele de integrare vor fi ξ_1 şi ξ_2 iar aria suprafeţei căutate este $2\pi r(\xi_2 - \xi_1)$.

5.6 Determinarea volumelor corpurilor de rotaţie

Se consideră curba $y = f(x),\ x \in [a, b]$. Se va determina volumul corpului suprafeţei obţinute prin rotaţia curbei $y = f(x)$ în jurul axei Ox mărginită de planele $x = a$ şi $x = b$. Pentru determinarea volumului se consideră diviziunea intervalului $[a, b]$ $a = x_1,\ \cdots,\ x_n = b$. Se poate imagina o porţiune din corpul de rotaţie definită de înălţimea $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$. Elementul de volum poate fi asimilat printr-un mic cilindru al cărui volom este $\pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$ unde punctul $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Se consideră că volumul V al corpului de rotaţie este aproximat de suma $V \approx \pi \sum_{i=1}^{N} f^2(\xi_i)\Delta x_i$. Valoarea exactă a volumului corpului de rotaţie va fi exprimat de limita $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \pi \sum\limits_{i=1}^{N} f^2(\xi_i)\Delta x_i$. Valoarea acestei limite reprezintă tocmai volumul corpului de rotaţie, adică

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{5.47}$$

Exemplul 5.6.1 *Să se calculeaze volumul V al unui con circular de rază r şi înălţime h.*

Rezolvare: Generatoarea conului este descrisă de dreapta de ecuaţie $y = \dfrac{r}{h}x$ care se roteşte cu unghiul 2π în jurul axei Ox. Prin aplicarea formulei (5.47) se obţine

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}. \tag{5.48}$$

Exemplul 5.6.2 *Se determină volumul corpului obţinut prin rotirea arcului superior al elipsei cu unghiul 2π în jurul axei Ox.*

Rezolvare: Ecuaţia arcului superior este $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ volumul elipsoidului de rotaţie este exprimat de relaţia,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\, dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx = \\ &= 2\pi \frac{b^2}{a^2}\left[(a^2 x - \frac{x^3}{3})\right]_0^a = \frac{4\pi a b^2}{3}. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Exemplul 5.6.3 *Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea arcului de cicloidă în jurul axei Ox pe intervalul $[0, 2\pi]$.*

Rezolvare: Se folosesc ecuaţiile parametrice ale elipsei (5.42) şi se obţine $dx = a(1 - \cos t)\, dt$. Se aplică formula (5.47) şi se obţine

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\, dt = \pi a^3 \left[\frac{5}{2}t - 4\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin^3 t \right]_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3. \quad (5.50)$$

5.7 Integrale care depind de un parametru

Pentru calcularea integralei unei funcţii de două variabile este necesară determinarea integralei funcţiilor ce depind de un parametru. Se poate ca funcţia care va fi integrată să depinde de un parametru şi de asemenea limitele de integrare să depindă de acelaşi parametru. Se consideră funcţia $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$. Se presupune că pentru fiecare $y \in [c, d]$ funcţia $f(\cdot, y)$ este integrabilă pe $[a, b]$ în sens propriu sau impropriu. Dacă $\alpha : [c, d] \to [a, b]$ şi $\beta : [c, d] \to [a, b]$ sunt două funcţii, atunci are sens funcţia $F : [c, d] \to \mathbb{R}$

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)dx. \quad (5.51)$$

Exemplul 5.7.1 *Se dau funcţiile:*

$$(a)\ f : [1, 2] \times [3, 4] \to \mathbf{R}, \quad f(x, y) = x + y$$
$$(b)\ f : [y^2, y^2 + 1] \times [1, 2] \to \mathbf{R}, \quad f(x, y) = x + y$$

Să se integreze funcţiile în raport cu x.

Rezolvare:

(a)
$$F(y) = \int_1^2 (x + y)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + yx|_1^2 = y + \frac{3}{4}$$

(b)
$$F(y) = \int_{y^2}^{y^2+1} (x + y)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{y^2}^{y^2+1} + yx|_{y^2}^{y^2+1} = y^2 + y + \frac{1}{2}.$$

Teorema 5.7.1 *Fie funcţia* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *continuă pe* $[a,b] \times [c,d]$ *şi funcţiile* $\alpha : [c,d] \to [a,b]$ *şi* $\beta : [c,d] \to [a,b]$ *continue pe* $[c,d]$. *Atunci funcţia*

$$F : [c,d] \to \mathbf{R} \quad F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

este continuă pe $[c,d]$.

Teorema 5.7.2 *Fie funcţia* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *continuă pe* $[a,b] \times [c,d]$, *dacă* f *admite derivată parţială în raport cu* y *continuă pe* $[a,b] \times [c,d]$ *şi funcţiile* $\alpha : [c,d] \to [a,b]$ *şi* $\beta : [c,d] \to [a,b]$ *derivabile pe* $[c,d]$, *atunci funcţia* $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ $F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$ *este derivabilă pe* $[c,d]$ *şi*

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y). \tag{5.52}$$

Egalitatea (5.52) se numeşte formula lui Leibnitz.

Teorema 5.7.3 *Dacă funcţia* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *continuă pe* $[a,b] \times [c,d]$, *atunci are loc relaţia*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy. \tag{5.53}$$

Exemplul 5.7.2 *Să se calculeze*

$$F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} arctg(ytgx)dx, y \geq 0$$

Rezolvare: Pentru a determina integrala se va aplica (5.52) funcţie dată de legea $f(x,y) = \frac{1}{tgx} arctg(y\,tgx)$; $\lim_{x\to 0} f(x,y) = y$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x,y) = 0$ Funcţia este derivabilă în raport cu y pentru orice $x \in [0,]$ şi $f'_y = \frac{1}{1+y^2tg^2x}$ pentru $x \neq 0$, $\lim_{x\to 0} f'_y(x,y) = 1$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f'_y(x,y) = 0$. Derivata este continuă în raport cu ambele variabile pentru $y \neq 0$ şi $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Se aplică formula lui Leibnitz funcţiei f şi se obţine

$$\begin{aligned} f'(y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+y^2tg^2x}dx \quad (t = tgx) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2t}\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}\frac{1}{y+1} \end{aligned}$$

Prin integrare, se obţine $F(y) = \frac{\pi}{2}\ln(y+1) + (\mathcal{C})$. Pentru $y \to 0$ se obţine $F(0) = C$ dar $F(0) = 0$ rezultă $C = 0$, deci $F(y) = \frac{\pi}{2}\ln(y+1)$.

5.8 Integrale multiple

În continuare se va aborda noţiunea de integrală pentru funcţii de mai multe variabile. Integralele multiple au aplicaţii dintre cele mai importante în stiinţele aplicative.

5.8.1 Integrala dublă

Se consideră funcţia de două variabile $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continuă. Se pune problema integrării acestei funcţii pe domeniul de definiţie. Integrala definită s-a introdus ca limita unor sume de produse în care un factor este lungimea unui interval de diviziune, Δx_i iar celălalt valoarea ordonatei $f(\xi_i)$, unde ξ_i un punct din acest interval. Când numărul intervalelor diviziunii creşte nemărginit atunci lungimea intervalului de diviziune tinde la zero. În locul intervalului $[a, b]$ se consideră în acest nou caz un domeniu G cuprins în domeniul de definiţie al funcţiei de două variabile $z = f(x, y)$ şi de aceasta dată se împarte acest domeniu în n subdomenii G_i de arii ΔG_i, unde $\bigcup_{i=1}^{n} G_i = G$ şi $G_i \bigcap G_j = 0,\ j = \overline{1, n}$. Se presupune ca funcţia f este mărginită în G şi fie $\gamma_i = inf\{f(x, y) \mid (x, y) \in G_i\}$ şi $\Gamma_i = sup\{f(x, y) \mid (x, y) \in G_i\}$. Se formează cu ajutorul acestor mărimi sumele integrale inferioară, respectiv superioară. Atunci când se folosesc diviziuni din ce în ce mai fine, $n \to \infty$ şirul sumelor superioare şi şirul sumelor inferioare tind către aceeaşi limită. Tot către aceeaşi limita va tinde şi şirul sumelor $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta G_i$ independent de alegerea punctului (ξ_i, η_i) în subdomeniul G_i. Această limită a şirurilor menţionate se numeşte integrală dublă a funcţiei $z = f(x, y)$ în domeniul G se notează cu

$$\iint_G f(x, y)\, dG = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta G_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i \Delta G_i \tag{5.54}$$

Dacă funcţia f este mărginită şi continuă în intervalul G, atunci ea este integrabilă.

Interpretarea geometrică a integralei duble

S-a arătat că integrala definită pentru funcţiile de o singură variabilă reprezintă din punct de vedere geometric aria suprafeţei mărginite de curba definită de funcţia f pe intervalul de definiţie. Analog, se consideră funţia $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continuă şi pozitivă în domeniul de definiţie, integrala funcţiei reprezintă volumul corpului delimitat de suprafaţa $z = f(x, y)$

şi domeniul G. ΔG_i sunt elementele de arie din planul xOy si sunt exprimate în coordonate carteziene prin produsul $dx\,dy$, respectiv în coordonate polare prin $rdr\,d\varphi$. În fiecare din aceste elemente de suprafaţă, funcţia îşi atinge valoarea minimă $\gamma = m_i$, respectiv valoarea maximă $\Gamma_i = M_i$. Fiecare produs $m_i\Delta G_i$ reprezintă volumul unui cilindru având ca bază pe G_i şi ca înălţime m_i. În mod corespunzător, fiecare produs $M_i\Delta G_i$ reprezintă volumul unui cilindru din Figura 5.8 cu aceeaşi bază G_i dar înălţime M_i. Volumul mărginit de suprafaţa $z = f(x, y)$ satisface condiţia, $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta Gi \leq V \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta Gi$. Prin trecerea la subdiviziuni pentru $n \to \infty$, şirul sumelor inferioare este crescător iar şirul sumelor superioare este descrescător. Ambele şiruri vor avea aceeaşi limită.

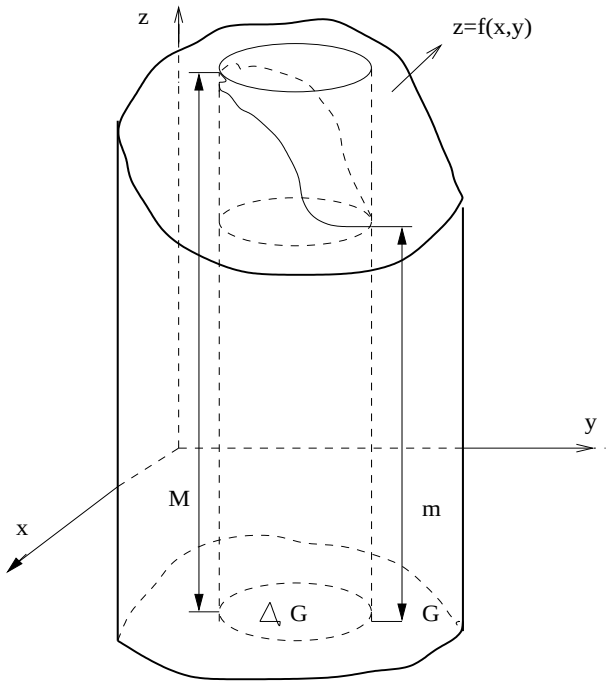


Figura 5.8: Volumul determinat de suprafaţa $z = f(x, y)$ şi G.

5.8.2 Calculul integralei duble

Pentru determinarea integralei duble se poate aplica definiţia acestora, ([3], [8], [20]) dar funcţie de particularităţile domeniului de definiţie calculul integralelor duble se poate reduce la calculul integralelor cu parametru. In raport cu domeniul de definiţie al funcţiei se poate realiza următoarea clasificare.

Definiţia 5.8.1 *Fie funcţia $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dacă domeniul G are forma*

$$G = \{(x, y) \ | a \leq x \leq b, \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}, \tag{5.55}$$

unde funcţiile $\varphi_1, \ \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt continue, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, oricare ar fi $x \in [a, b]$, atunci **domeniul** *G se numeşte* **simplu după axa** *Oy.*

Definiţia 5.8.2 *Fie funcţia $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dacă domeniul G are forma*

$$G = \{(x, y) \ | \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \ c \leq y \leq d\}, \tag{5.56}$$

unde funcţiile $\psi_1, \ \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ sunt continue, $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$, oricare ar fi $y \in [c, d]$, atunci **domeniul** *D se numeşte* **simplu după axa** *Ox.*

Există cazul particular în care domeniul de definiţie este dreptunghi; pentru acest caz se aplică următoarea teoremă:

Teorema 5.8.1 *(Domeniul de definiţie este dreptunghi) Fie funcţia $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continuă pe G unde $G = [a, b] \times [c, d]$. Dacă*

(i) f este integrabilă pe G,

(ii) oricare ar fi $y \in [c, d]$ fixat există integrala

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)dx.$$

Atunci F este integrabilă pe $[c, d]$ şi

$$I = \iint_G f(x, y)dxdy = \int_c^d F(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy. \tag{5.57}$$

Exemplul 5.8.1 *Să se determine*

$$I = \iint_G \frac{64 - 8x + y^2}{16} \, dxdy$$

pentru $G = \{(x, y) | \ 0 \leq x \leq 4, \ 0 \leq y \leq 8\}$, (vezi Figura 5.11).

Rezolvare: Pentru determinarea integralei se aplică Teorema 5.8.1 şi se obţine

$$\begin{aligned} I &= \int_0^8 \left(\int_0^4 \frac{64 - 8x + y^2}{16} dx \right) dy = \\ &= \int_0^8 \left(\frac{y^2}{4} + 12 \right) dy = \\ &= \frac{416}{3}. \end{aligned} \tag{5.58}$$

Se poate integra întâi in raport cu y şi apoi in raport cu x şi se obţine:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 \left(\int_0^8 \frac{64 - 8x + y^2}{16} dy \right) dx = \\ &= \int_0^4 \left(\frac{128}{3} - 4x \right) dy = \\ &= \frac{416}{3}. \end{aligned} \tag{5.59}$$

Observaţia 5.8.1 *În cazul în care funcţia este continuă şi definită pe un domeniu simplu în raport cu ambele axe, nu contează ordinea de integrare (intâi în raport cu x şi apoi cu y sau viceversa).*

În cazul în care domeniul de definiţie al funcţie este simplu în raport cu o axa, ordinea de integrare este dictată de tipul domeniului. Există cazuri pentru care domeniul nu este simplu în raport cu nici una din axe dar se poate descompune în domenii simple în raport cu axele de coordonate. Calculul integralei duble se reduce la încadrarea domeniului de definiţie intr-unul din cazurile de mai sus.

Teorema 5.8.2 *(Domeniul de definiţie este simplu în raport cu Oy) Fie funcţia $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, marginită pe G unde $G = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, simplu în raport cu axa Oy. Dacă*

(i) f este integrabilă pe G,

(ii) oricare ar fi $x \in [a, b]$ fixat există integrala

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Atunci F este integrabilă pe $[a,b]$ şi

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \tag{5.60}$$
$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy.$$

Ultima integrală din (5.60) reprezintă o notaţie.

Exemplul 5.8.2 *Să se calculeaze integrala dublă $\iint_G (x+y)\, dxdy$, G fiind domeniul delimitat de dreptele de ecuaţii $x=0$, $y=1$ şi $x+y=3$.*

Rezolvare: Domeniul de integrare reprezentat de triunghiul ABC din Figura 5.9-a poate fi privit ca un domeniu simplu în raport cu axa Oy. Se aplică Teorema 5.8.2, pentru x fixat, integrala în raport cu y se face între limitele $\varphi_1(x)=1$ şi $\varphi_2(x)=3-x$, astfel

$$F(x) = \int_1^{3-x} (x+y)\, dy = \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^{3-x} = x(3-x) + \frac{1}{2}(3-x)^2 - (x+\frac{1}{2}) = 4 - x - \frac{1}{2}x^2.$$

Funcţia $F(x)$ se integrează apoi în raport cu x. Limitele de integrare se obţin din $x=3-y$ pentru $y=3$ şi $y=1$, deci $x \in [0,2]$ Valoarea integralei este $\int_0^2 \left(4 - x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 8 - 2 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3}$, deci

$$\int_0^2 \int_1^{3-x} (x+y)\, dydx = \frac{14}{3}.$$

Teorema 5.8.3 *(Domeniul de definiţie este simplu în raport cu Ox) Fie funcţia $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, marginită pe G unde*

$$G = \{(x,y) \ | \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y),\ c \le y \le d\},$$

simplu în raport cu axa Ox. Dacă

(i) f este integrabilă pe G,

(ii) oricare ar fi $y \in [c,d]$ fixat există integrala

$$F(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

(a) (b)

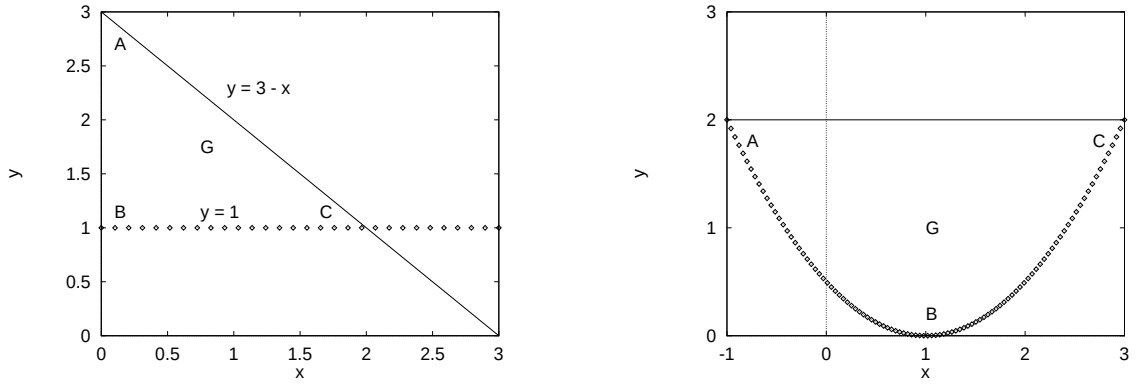


Figura 5.9: Domeniile de integrare ABC pentru: (a) funcţia $f(x,y) = x + y$, $x = 0$, $y = 1$ şi $x + y = 3$; (b) funcţia $f(xy) = xy$, $(x-1)^2 = 2y$ şi $y = 2$.

Atunci F este integrabilă pe $[c,d]$ şi

$$\begin{aligned}\iint_G f(x,y)dxdy &= \int_c^d F(y)dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right) dy = \\ &= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \end{aligned} \tag{5.61}$$

Exemplul 5.8.3 *Se calculează integrala dublă*

$$I = \iint_G xy\,dxdy$$

unde domeniul G este definit de curbele $(x-1)^2 = 2y$ si $y = 2$.

Rezolvare: Frontiera domeniului G este definită de curbele $y = 2$ şi $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$ care se intersectează in punctele $P_1(-1,2)$ şi $P_2(3,2)$. Domeniul este reprezentat în Figura 5.9-b şi este simplu în raport cu axa Ox. Se aplică Teorema 5.8.3 pentru $1-\sqrt{2y} \le x \le 1+\sqrt{2y}$, $0 \le y \le 2$ şi se obţine

$$F(y) = \int_{-\sqrt{2y}+1}^{+\sqrt{2y}+1} xy\,dx = \left[y\frac{x^2}{2}\right]_{-\sqrt{2y}+1}^{+\sqrt{2y}+1} = \frac{1}{2}y(\sqrt{2y}+1)^2 - \frac{1}{2}y(1-\sqrt{2y})^2 = 2\sqrt{2y^3}.$$

Apoi,

$$\int_0^2 F(y)dy = 2\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{y^3}\,dy = 2\sqrt{2}\left[\frac{2}{5}y^2\sqrt{y}\right]_0^2 = \frac{32}{5},$$

deci

$$I = \int_0^2\int_{1-\sqrt{2y}}^{1+\sqrt{2y}} xy\,dx\,dy = \frac{32}{5}.$$

Prin schimbarea ordinei de integrare (domeniul poate fi privit şi ca un domeniu simplu în raport cu Oy) se obţine:

$$F(x)=\int_{\frac{1}{2}(x-1)^2}^{2} xy\,dx=\left[x\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}(x-1)^2}^{2}=2x-\frac{1}{8}x(x-1)^4=-\frac{1}{8}x^5+\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{15}{8}x.$$

Apoi

$$I=\int_{-1}^{3}F(x)\,dx=\left[-\frac{x^6}{48}+\frac{x^5}{10}-\frac{3x^4}{16}+\frac{x^3}{6}+\frac{15x^2}{16}\right]_{-1}^{3}=\frac{32}{5}$$

Rezultatul este ecelaşi prin schimbarea ordinei de integrare.

După cum s-a vazut din exemplul precedent, există cazuri în care domeniul de definiţie poate fi privit ca un domeniu simplu după Ox respectiv după Oy. Un astfel de exemplu este reprezentat în Figura 5.10. Frontiera domeniului de integrare G are în comun cu dreptunghiul $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ punctele A_1, A_2, B_1, B_2. Punctele A_1 şi A_2 împart frontiera în două părţi: $A_1B_1A_2$ care este imaginea funcţiei $y=y_1(x)$ şi punctele $A_1B_2A_2$ care este imaginea funcţiei $y=y_2(x)$. În mod analog punctele B_1 şi B_2 împart frontiera în părţile $B_1A_1B_2$ cu ecuaţia $x=x_1(y)$ şi $B_1A_2B_2$ cu ecuaţia $x=x_2(y)$. Pentru $x=\xi_i$ fixat, $y_1(\xi_i)$ şi $y_2(\xi_i)$ sunt extremităţile unui interval $y_1(\xi_i)\le y\le y_2(\xi_i)$ în care funcţia de o variabilă $f(\xi_i,y)$ poate fi integrată. Valoarea integralei $\varphi(\xi_i)=\displaystyle\int_{y_1(\xi_1)}^{y_2(\xi_2)}f(\xi_i,y)\,dy$ este pentru valoarea fixată $x=\xi_i$ o constantă şi pentru valori diferite $a_1\le x\le a_2$ o funcţie $\varphi(x)$ care în anumite condiţii impuse frontierei domeniului este continuă. Pentru $y=\eta_1$ fixat, integrala $\psi(\eta_1)=\displaystyle\int_{x_1(\eta_1)}^{x_2(\eta_2)}f(x,\eta_1)\,dx$ este constantă iar pentru valori diferite ale lui y, o funcţie continuă de y, $\psi(y)$. Se poate demonstra că prin integrarea funcţiei $\varphi(x)$ în raport cu x cât şi prin integrarea lui $\psi(y)$ în raport cu y se obţine aceeaşi valoare şi anume integrala dublă. Intuitiv acest lucru rezultă din aceea că $\varphi(x)$ si $\psi(y)$ reprezintă ariile secţiunilor paralele cu planul xz, respectiv yz duse prin corpul mărginit de suprafaţa $z=f(x,y)$.

$$\iint_G f(x,y)\,dG=\int_{x=a_1}^{x=a_2}\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\,dy\right)dx=\int_{y=b_1}^{y=b_2}\left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\,dx\right)dy \quad (5.62)$$

Observaţia 5.8.2 *Prin generalizarea relaţiei (5.21) pentru integrala dublă se introduce*

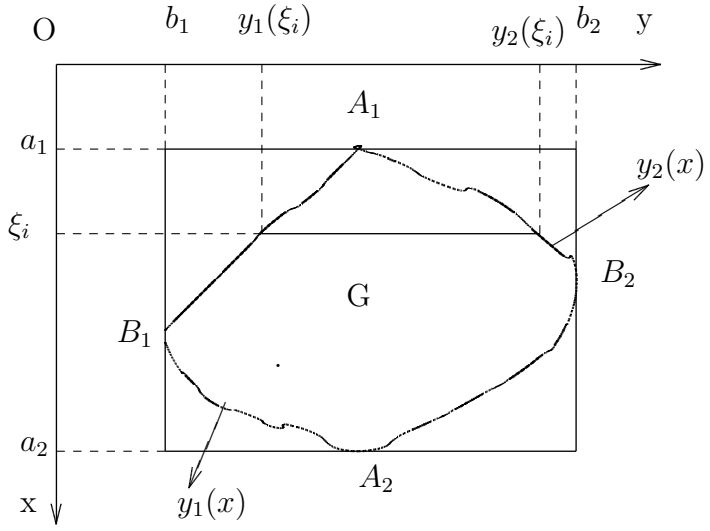


Figura 5.10: Descompunerea frontierei domeniului de integrare G.

suma σ în sens Reimann pentru punctele din planul xOy, $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta G_i$ atunci,

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta G_i \tag{5.63}$$

Exemplul 5.8.4 *Folosindu-se relaţia (5.63) să se calculeze valoarea aproximativă a integralei,*

$$\iint_G \frac{64 - 8x + y^2}{16}$$

pentru $G = \{(x, y) |\ 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 8\}$.

Rezolvare: Suprafaţa determinată de curba $f(x, y) = \dfrac{64 - 8x + y^2}{16}$ pe domeniul G este reprezentată în Figura 5.11. Se consideră punctele de coordonate $(\xi_i, \eta_i) \in G$ şi valorile funcţiei $f(\xi_i, \eta_i)$

$$(\xi_1, \eta_1) = (1, 1) \Longrightarrow\ f(\xi_1, \eta_1) = \frac{57}{16},\quad (\xi_2, \eta_2) = (1, 3) \Longrightarrow\ f(\xi_2, \eta_2) = \frac{65}{16},$$
$$(\xi_3, \eta_3) = (1, 5) \Longrightarrow\ f(\xi_3, \eta_3) = \frac{81}{16},\quad (\xi_4, \eta_4) = (1, 7) \Longrightarrow\ f(\xi_4, \eta_4) = \frac{105}{16},$$
$$(\xi_5, \eta_5) = (3, 1) \Longrightarrow\ f(\xi_5, \eta_5) = \frac{41}{16},\quad (\xi_6, \eta_6) = (3, 3) \Longrightarrow\ f(\xi_6, \eta_6) = \frac{49}{16},$$
$$(\xi_7, \eta_7) = (3, 5) \Longrightarrow\ f(\xi_7, \eta_7) = \frac{65}{16},\quad (\xi_8, \eta_8) = (3, 7) \Longrightarrow\ f(\xi_8, \eta_8) = \frac{89}{16}.$$

Daca se consideră că fiecare punct (ξ_i, η_i) se află în centrul subdomeniilor ΔG_i de arie egala cu 4 unităţi pătrate, atunci valoarea aproximativă a volumului corpului cilindric

mărginit de suprafaţa $f(x,y)$ şi domeniul G este exprimată de relaţia,

$$\int\int_G f(x,y)\,dG \approx \sigma = \sum_{k=1}^{8} f(\xi_i,\eta_i)\Delta G_i = \\ = \frac{4(57+65+81+105+41+49+65+89)}{16} = 138. \quad (5.64)$$

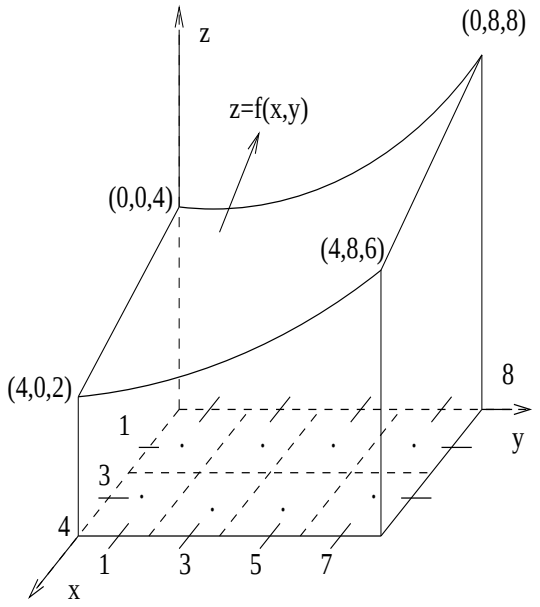


Figura 5.11: Reprezentarea grafică a corpului cilindric mărginit de suprafaţa $(64-8x+y^2)/16$ şi de domeniul $G=\{(x,y)|\ (0\le 4,\ 0\le y\le 8\}$.

Observaţia 5.8.3 *Dacă se compară rezultatul obţinut la Exemplul 5.63*

$$\iint_G \frac{64-8x+y^2}{16}\,dG = 138,$$

cu cel obţinut la Exemplul 5.8.1

$$\iint_G \frac{64-8x+y^2}{16}\,dG = \frac{416}{3} \approx 138.6$$

se observă că valorea rezultate din calculul exact este comparabilă cu cea obţinută in urma calculului aproximativ. Dacă s-ar fi luat un număr mai mare de puncte rezultatul aproximativ ar fi fost mai apropiat de cel exact.

Exemplul 5.8.5 *Se consideră elipsa de ecuaţie (2.4) din planul xOy. Pe mărginile conturului acesteea trece un cilindru drept care este intersectat de planul de ecuaţie* $z = f(x,y) = mx + ny + c$ *reprezentat în Figura 5.12 . Parametrul c este astfel ales ca planul z să nu intersecteze planul xOy din afara elipsei. Să se determine volumul corpului cilindric descris mai sus.*

Rezolvare: Volumul acestui cilindru este exprimat cu ajutorul integralei duble

$$\iint_G (mx + ny + c)\, dG,$$

unde G este domeniul mărginit de curbele $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Volumul este dat de

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{+a} \left[\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} (mx + ny + c)\, dy \right] dx = \\ &= \int_{-a}^{+a} \left[mxy + \frac{ny^2}{2} + cy \right]_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx = \\ &= \int_{-a}^{+a} 2\frac{b}{a}(mx + c)\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \\ &= 2\frac{b}{a}\left[m\int_{-a}^{+a} x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx + c\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \right] \end{aligned}$$

Prima integrala după semnul egal este nulă deoarece integrantul este impar în intervalul $[-a, a]$. Cea de a doua integrală se calculează cu ajutorul substituţiei $x = a\sin z$, astfel, $dx = a\cos z\, dz$, deci integrala este egală cu $\frac{\pi a^2 c}{2}$. Ca urmare volumul cilindrului este exprimat de valoarea integralei duble, $V = \pi abc$.

Observaţia 5.8.4 *Există cazuri în care este necesară trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare. Pentru aceasta*

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases},$$

elementul de arie dG are forma $dG = r\, dr\, d\varphi$. *Prin trecerea la coordonate polare se obţine,*

$$\iint_G \Psi(r,\varphi)\, dG = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \Psi(r,\varphi) r\, dr\, d\varphi. \tag{5.65}$$

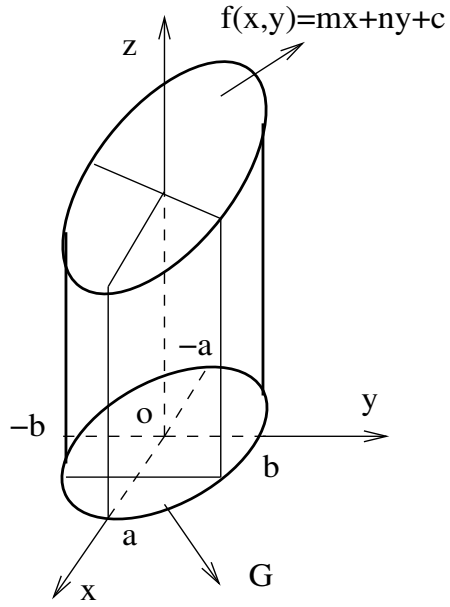


Figura 5.12: Cilindrul eliptic intersectat de un plan oblic.

5.9 Proprietăţile integralei duble

Se vor aminti câteva dintre proprietăţile integralei duble care vor fi folosite pentru simplificarea calculului integralei duble.

Aditivitatea integralei duble

Fie $f, g : G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcţii integrabile pe G, atunci

$$\iint_G (f+g)dxdy = \iint_G fdxdy + \iint_G gdxdy. \tag{5.66}$$

Omogenitatea integralei duble

Fie $f : G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe G, $c \in \mathbb{R}$, atunci

$$\iint_G cfdxdy = c\iint_G fdxdy. \tag{5.67}$$

Aditivitatea integralei duble faţă de domeniul de definiţie

Fie G o mulţime mărginită şi inchisă, $f : G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe G. Dacă $G = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ şi f este integrabilă pe G_1 şi G_2, atunci

$$\iint_G f(x)dxdy = \iint_{G_1} fdxdy + \iint_{G_2} fdxdy. \tag{5.68}$$

5.10 Aplicaţii ale integralei duble

Determinarea ariei unui domeniu

Fie $G \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit, atunci aria lui G, notată cu $\sigma(G)$ este dată de

$$\sigma(G) = \iint_G 1 dxdy. \tag{5.69}$$

Exemplul 5.10.1 *Să se determine aria suprafeţei delimitate de dreptele de ecuaţii:* $x = 0,\ y = 0$ *şi* $x + 2y - 4 = 0$.

Rezolvare: Domeniul de integrare descris de cele două curbe este redat în Figura 5.13. Domeniul este simplu în raport cu axa Ox. Aria suprafeţei triunghiului OAB este dată de valoarea,

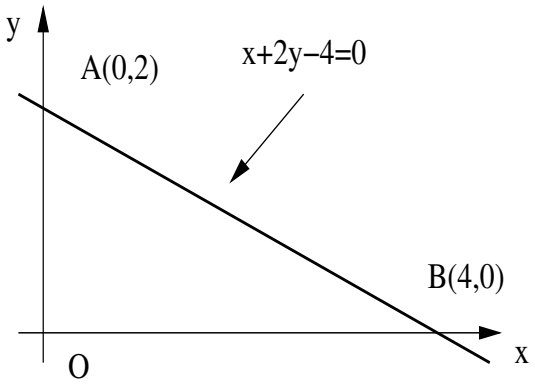


Figura 5.13: Ilustrarea grafică a domeniului de integrare descris de ecuaţiile $x = 0,\ y = 0$, respectiv $x + 2y - 4 = 0$.

$$\begin{aligned} \sigma(OAB) &= \iint_{OAB} 1 dxdy = \int_0^2 dy \int_0^{4-2y} 1 dx = \\ &= \int_0^2 (4 - 2y) dy = (4y - y^2)\Big|_0^2 = 4. \end{aligned}$$

Exemplul 5.10.2 *Să se determine aria suprafeţei delimitate de curbele de ecuaţii:* $y = x^2$ *şi* $y = x$.

Rezolvare: Domeniul de integrare descris de cele două curbe este prezentat în Figura 5.14.

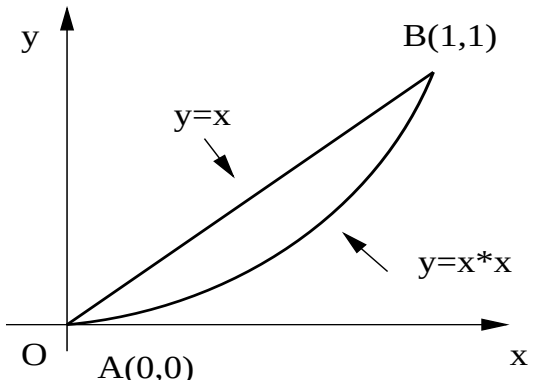


Figura 5.14: Ilustrarea grafică a domeniului de integrare descris de ecuaţiile $y = x^2$ şi $y = x$.

Punctele de intersecţie ale parabolei şi dreptei sunt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$$

Domeniul $G = \{(x, y) \mid y \leq x \leq \sqrt{y},\ 0 \leq y \leq 1\}$ este simplu în raport cu axa Ox. Deci aria cautată este exprimata de valoarea,

$$\begin{aligned} \text{aria} &= \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} 1dx = \\ &= \int_0^2 (\sqrt{y} - y)dy = \left(\frac{2}{3}y^{3/2} - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Calculul volumelor

Folosindu-se interpretarea geometrică a integralei duble, volumul, V al unui corp cilindric cu generatoarea paralelă cu axa Oz, baza domeniul G, limitat superior de suprafaţa $z = f(x, y)$ este

$$V = \iint_G f(x, y)dxdy. \tag{5.70}$$

Exemplul 5.10.3 *Să se determine volumul corpului mărginit de* $z = 0,\ y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x},\ x + z = 4,\ x \in [0, 4]$.

Rezolvare: Suprafaţa care delimitează superior cilindrul este $z = 4 - x$; domeniul G din planul xOy este $\{(x, y) \mid x \in [0, 4],\ y \in [\sqrt{x}, 2\sqrt{x}]\}$. Volumul corpului cilindric este:

$$V = \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4 - x)dydx = \frac{128}{15}.$$

Determinarea ariei suprafeţelor

Fie suprafaţa dată de ecuaţia $z = f(x, y)$. Funcţia $f : G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admite derivate parţiale şi acestea sunt continue pe domeniul de definiţie al funcţiei f, atunci aria suprafeţei z este

$$\mathrm{S} = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}. \tag{5.71}$$

Observaţia 5.10.1 *Formule analoage cu (5.71) se obţin pentru cazurile în care suprafaţa este dată* $y = f(x, z)$ *sau* $x = f(y, z)$.

Masa unei plăci cu feţe plane de grosime d **şi de densitate** $\rho(x, y) > 0$**.**

Se ştie că masa reprezintă produsul dintre densitate şi volum (vezi Anexa la Capitolul 5). Formula de calcul a masei este

$$\mathrm{M} = d \iint_G \rho(x, y)dxdy. \tag{5.72}$$

În continuare se va considera o placă de grosime constantă egală cu unitatea.

Coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane G

Coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane G de densitate $\rho(x, y)$ sunt exprimate de relaţiile,

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_G x\rho(x, y)dxdy, \tag{5.73}$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_G y\rho(x, y)dxdy, \tag{5.74}$$

unde M reprezintă masa plăcii.

Exemplul 5.10.4 *Să se determine masa şi coordonatele centrului de greutate pentru placa omogenă,*$\rho(x, y) = k$ *şi de grosime constantă, definită de ecuaţiile:* $x^2 + y^2 \leq a^2,\ x^2 + y^2 \geq ax, y \geq 0$, *cu* $a > 0$ *corespunzătoare semicercurilor C1, repectiv C2 redate în Figura 5.15-(a).*

Rezolvare: Deoarece expresiile ce definesc domeniul $D1$ conţine combinaţia $x^2 + y^2$ este convenabil să se treacă la coordonate polare pentru efecuarea integralei duble. Domeniul

$D1$ este limitat de interiorul cercului $x^2 + y^2 = a^2$ şi de exteriorul cercului de ecuaţie $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$.

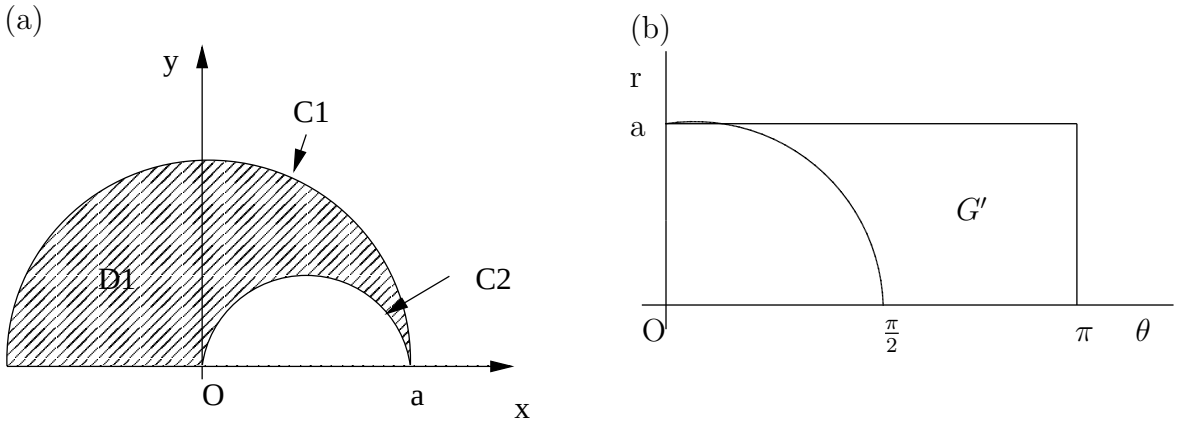


Figura 5.15: (a) Forma geometrică a plăcii, (b) Domeniul G' corespunzător coordonatelor polare.

Domeniul astfel obţinut este definit prin reuniunea a două domenii disjuncte $G_1' = \{(r,\theta) \mid a\cos\theta \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$ şi $G_2' = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le a,\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi\}$, $G' = G_1' \cup G_2'$ şi este redat în Figura 5.15-(b). Se aplică formula de schimbare de variabilă (Observaţia 5.8.4) şi se obţine:

$$\begin{aligned} M &= \iint_G k dx dy = k \iint_{G'} r dr d\theta = \\ &= k \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{a\cos\theta}^{a} r dr + k \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^a r dr = \frac{3}{8} k a^2 \pi. \end{aligned} \tag{5.75}$$

Pentru determinarea coordonatelor centrului de greutate se aplică (5.73), (5.74) şi (5.75) şi se obţine: $x_G = -\frac{a}{6}$ şi $y_G = \frac{14a}{9\pi}$.

Momentele de inerţie ale unei plăci în raport cu axele de coordonate Ox şi Oy

Este cunoscut din mecanica clasică că energia cinetică E_k de mişcare a unui corp de masă m si viteză v este readată de formula $E_k = \frac{mv^2}{2}$. Dacă acelaşi corp se roteşte în jurul axei Ox cu viteza unghiulară ω atunci energia cinetică este exprimată de o relaţie similară cu observaţia ca în locul vitezei se introduce viteza unghiulară iar in cel al masei aşa numitul moment de inerţie. Această afirmaţie se bazează pe faptul că între viteza liniară, v şi cea unghiulară ω există relaţia $v = \omega r$. Formele integrale ale momentelor de inerţie

corespunzătoare rotirii plăcii în jurul axelor de coordonate sunt exprimate de relaţiile,

$$I_x = \iint_G y^2 \rho(x,y)dxdy, \tag{5.76}$$

$$I_y = \iint_G x^2 \rho(x,y)dxdy. \tag{5.77}$$

Pentru o întelegere completă a relaţiilor de mai sus a se vedea Anexa la Capitolul 5. Momentul de inerţie al plăcii în raport cu axă Oz, I_z este exprimată de $I_z = I_x + I_y$. Din punct de vedere dinamic momentul de inerţie este o carateristică importantă a corpurilor ce se rotesc în jurul unei axe oarecare, deoarece energia cinetică necesară procesului de rotaţie depinde atât de modul cum este distribuită masa, cât şi de viteza unghiulară.

5.11 Aplicaţii

1. Să se determine primitivele următoarelor functii:

$$(a)\ f(x) = x^{45}$$
$$(b)\ f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}$$
$$(c)\ f(x) = x\cos(x)$$
$$(d)\ f(x) = \ln(x)$$
$$(e)\ f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x},\ (x = e^t)$$
$$(f)\ f(x) = \frac{1}{x^5}$$
$$(g)\ f(x) = \frac{1}{e^x+1},\ (x = -\ln t)$$
$$(h)\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}},\ (x+1 = t^2)$$
$$(i)\ f(x) = \frac{1}{x^2}\ln^3 x.$$

2. Să se calculeze ariile suprafeţelor delimitate de curbele de mai jos:

$$(a)\ x = 4,\ y = 0,\ y = x^2+3$$
$$(b)\ x^2+y^2 \geq 2,\ x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0$$
$$(c)\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \leq 1,\ y \leq x^2,\ x \geq 0$$

3. Să se calculeze lungimile următoarelor segmente de curbe:

$$(a)\ y = x^2 + 4\cos x,\ x \in [0, 2]$$
$$(b)\ y = e^x,\ x \in [-1, 5]$$
$$(c)\ y = \ln x,\ x \in [2, 4]$$

4. Să se calculeze volumul corpurilor obţinute prin rotirea în jurul axei Ox a curbelor date de:

$$(a)\ y = x + 3, x \in [0, 2]$$
$$(b)\ y = \sqrt{4 - x^2},\ x \in [-1, 2]$$
$$(c)\ y = \frac{1}{x^2 + x},\ x \in [1, 2]$$

5. Să se calculeze următoarele integralele duble:

$$(a)\ f(x, y) = 2x + 3y,\ G = \{(x, y)|\ 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3\}$$
$$(b)\ f(x, y) = 4 - x^2 - y,\ G = \{(x, y)|\ 0 \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$$
$$(c)\ f(x, y) = xy^3,\ G = \{(x, y)|\ 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}$$
$$(d)\ f(x, y) = \sin(x + y),\ G = \{(x, y)|\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \frac{\pi}{2}\}$$
$$(e)\ f(x, y) = xy\sqrt{1 + x^2},\ G = \{(x, y)|\ 0 \le x \le \sqrt{3},\ 1 \le y \le 2\}$$
$$(f)\ f(x, y) = \frac{3}{4}(4 - x - 2y),\ G = \{(x, y)|\ 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 2 - \frac{x}{2}\};$$

6. Se dă funcţia scară

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 3,\ \ 0 \le y \le 1 \\ 2 & 0 \le x \le 3,\ \ 1 \le y \le 2 \\ 3 & 0 \le x \le 3,\ \ 2 \le y \le 3 \end{cases}$$

Să se determine $\iint_G f(x, y)dxdy$, unde $G = \{(x, y)|\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3\}$.

7. Să se determine volumul corpului determinat de:

$$(a)\ z = x + y + 1,\ G = \{(x, y)\ |\ 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 3\}$$
$$(b)\ z = 4x + 10y,\ G = \{(x, y)\ |\ 3 \le x \le 5,\ -x \le y \le x^2\}$$

8. Să se determine coordonatele centrului de greutate pentru o placă de forma unui sfert de disc circular de rază a, densitatea plăcii este proporţională cu distanţa de la centrul cercului.

   Indicaţie: Distanţa de la centrul cercului (origine) la un punct aleator din plan este $\sqrt{x^2+y^2}$, deci densitatea plăcii este: $\rho(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$, unde k este constanta de proporţionalitate. Forma plăcii (sfert de disc) sugerează trecerea la coordonate polare şi se obţine masa plăcii:

$$M = k\int_0^{\pi/2}\int_0^a rrdrd\theta = \frac{k\pi a^3}{6}$$

   Coordonatele centrului de greutate sunt:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{k}{M}\int_0^{\pi/2}\int_0^a (r\cos\theta)r^2 d\theta = \frac{3a}{2\pi} \\ y_G &= \frac{k}{M}\int_0^{\pi/2}\int_0^a (r\cos\theta)r^2 d\theta = \frac{3a}{2\pi} \end{aligned}$$

   Datorită simetriei plăcii este firesc ca $x_G = y_G$.

9. Să se determine volumul corpului din primul octan ($x \geq 0\ , y \geq 0,\ z \geq 0$ mărginit superior de suprafaţa de ecuaţie $z = x^2 + y^2$ si cilindrul a cărui bază este dată de curba de ecuaţie $x^2 + y^2 = 4$ din planul $z = 0$.

   Indicaţie: Domeniul corespunzător este $G = \{(x,y)|\ 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2},\ 0 \leq y \leq 2\}$. Se va calcula

$$\iint_G x^2 + y^2 dxdy.$$

10. Să se determine masa plăcii delimitate de

$$\{(x,y,z)|\ 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2\}$$

    şi a cărei densitate este exprimată de funcţia $f(x,y,z) = x^2yz$.

11. Să se determine masa şi coordonatele centrului de greutate pentru plăcile:

$$(a)\ x \in [0,4],\ y \in [0,3],\quad \rho(x,y) = y+1$$
$$(b)\ x \in [0,\pi],\ y \in [0,\quad \sin x]\ \rho(x,y) = y$$
$$(c)\ y = \frac{1}{x},\ y = x,\ y = 0,\ x = 2,\quad \rho(x,y) = x$$
$$(d)\ y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1,\quad \rho(x,y) = 2 - x + y$$

12. Să se determine momentele de inerţie în raport cu axele Ox şi Oy:

$$(a)\ y = \sqrt{x}, x = 9,\ y = 0,\ \rho(x,y) = x + y$$
$$(d)\ y = x^2,\ y = 4,\ \rho(x,y) = y.$$

Capitolul 6

Ecuaţii diferenţiale

Numeroase fenomene ce fac obiectul ştiinţelor fundamentale şi aplicative sunt descrise din punct de vedere matematic prin intermediul unor ecuaţii care conţin funcţia necunoscută şi derivatele acesteea.

Definiţia 6.0.1 *O ecuaţie în care necunoscuta este o funcţie şi care conţine şi derivatele funcţiei necunoscute se numeşte* **ecuaţie diferenţială**.

Definiţia 6.0.2 *Dacă funcţia necunoscută este de o singură variabilă* **ecuaţia diferenţială** *se numeşte* **ordinară**.

6.1 Aplicaţii care conduc la ecuaţii diferenţiale ordinare

Modelul matematic al răcirii unui lichid.

Studiul răcirii unui lichid presupune determinarea temperaturii T a lichidului în timpul t, adică determinarea unei funcţii $T = T(t)$. Acest fenomen este modelat de o ecuaţie care conţine temperatura T şi rata de modificare a acesteea în timp $\frac{dT}{dt}$,

$$\frac{dT}{dt} = \alpha T + \beta, \tag{6.1}$$

unde constantele reale α şi β definesc caracteristicile intrinseci ale experimentului. Se observă că ecuaţia de mai sus nu poate fi rezolvată prin aplicarea directă a unui procedeu

de integrare deoarece membrul drept al ecuaţiei (6.1) conţine funcţia necunoscută T. Ecuaţia (6.1) este o *ecuaţie diferenţială ordinară liniară* deoarece funcţia necunoscută apare doar la puterea întâi.

Observaţia 6.1.1 *În procesul de rezolvare a ecuaţiei (6.1) trebuie ţinut cont şi de aspectul practic al problemei atunci când se face analiza parametrilor α şi β. Din punct de vedere practic atunci când lichidul este în contact termic cu un mediu a cărui temperatură este inferioară lichidului, lichidul se va răci şi trebuie ca $\alpha < 0$. Pe de altă parte temperatura lichidului nu poate coborî sub temperatura mediului ambiant care este $\beta > 0$.*

O aplicaţie imediată a modelului de mai sus este determinarea timpului după care un lichid fierbinte (ceai, cafea) poate fi pus în vânzare fără a se crea probleme consumatorilor. Rezolvarea acestei probleme va fi tratată în paragraful 6.4.1

Modelul unor reacţii chimice

Fie două substanţe A şi B care reacţionează între ele. Reacţia dintre acestea produce o nouă substanţă C. Se fac următoarele presupuneri:

(i) rata cu care se formează un mol de tip C este proporţională cu numărul de moli A şi B;

(ii) numărul iniţial de moli din substanţele A şi B este a, respectiv b;

(iii) un mol din substanţa A se combină cu un mol din substanţa B obţinâdu-se doi moli din substanţa C.

Se notează:

(i) N numărul de moli din substanţa C la momentul t;

(ii) n_a, n_b numărul de moli din substanţele A, repectiv B la momentul t;

Deci numărul de moli de tip A şi B nereacţionaţi la momentul t vor fi $a-n_a = \dfrac{N}{2}$, respectiv $b-n_b = \dfrac{N}{2}$. Ţinându-se cont că orice reacţie chimică are un caracter probabilistic, rezultă

că rata de formare a moleculelor C va fi exprimată în funcţie de produsul $n_a n_b$, deci modelul asociat reacţiei chimice va fi descris de ecuaţia diferenţială,

$$\frac{dN}{dt} = k\left(a - \frac{N}{2}\right)\left(b - \frac{N}{2}\right). \tag{6.2}$$

Ecuaţia (6.2) este o *ecuaţie diferenţială ordinară neliniară* deoarece funcţia necunoscută apare la o putere mai mare decât 1.

Legea dezintegrării naturale a substanţelor radioactive.

Viteza de dezintegrare naturală a unei substanţe radioactive la un moment dat este proporţională cu cantitatea de substanţă nedezintegrată în acel moment. Se notează cu $m(t)$ masa de substanţă radioactivă la momentul t. La un interval de timp Δt masa substantei se va diminua cu valoarea Δm. Atunci masa de substanţă radioactivă existentă la momentul $t + \Delta t$ va fi $m(t) - \Delta m(t)$, deci rata de dizintegrare se va exprima prin relaţia,

$$\frac{m - \Delta m - m}{t + \Delta t - t} = \lambda m \iff \frac{dm}{dt} = -\lambda m, \tag{6.3}$$

unde λ reprezintă constanta de dezintegrare şi este specifică fiecărui radioizotop.

6.2 Noţiuni fundamentale

Definiţia 6.2.1 *Se numeşte* **ecuaţie diferenţială de ordinul** n *o ecuaţie de forma:*

$$F(x, y(x), y'(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \tag{6.4}$$

unde $F : D \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pe domeniul* D, $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este funcţia necunoscută de* n *ori derivabilă pe intervalul* I.

Observaţia 6.2.1 *Dacă derivata funcţiei necunoscute de ordin cel mai mare este* $y^{(n)}$ *atunci ordinul ecuaţiei diferenţiale este* n.

O ecuaţie diferenţială poate fi scrisă sub mai multe forme. Ecuaţia (6.4) reprezintă *forma generală* a ecuaţiei diferenţiale de ordinul n. Considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul n scrisă sub forma

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \tag{6.5}$$

unde $f : D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe domeniul D. Ecuaţia (6.5) reprezintă *forma normală* sau explicită a ecuaţiei diferenţiale de ordinul n.

Definiţia 6.2.2 *Prin* **soluţie a ecuaţiei diferenţiale** *(6.4) se înţelege o funcţie* $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(I interval) care verifică:*

(i) φ *este derivabilă de* n *ori pe* I*;*

(ii) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi^{(2)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \in D$ *oricare ar fi* $x \in I$*;*

(iii) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi^{(2)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$ *oricare ar fi* $x \in I$*.*

Graficul funcţiei φ este o curbă plană numită *curbă integrală.*

Definiţia 6.2.3 Soluţia generală *a ecuaţiei diferenţiale (6.4) este o funcţie ce depinde de* x *şi de* n *constante independente* $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ *şi se scrie sub forma* $y = y(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n)$.

Observaţia 6.2.2 *Din punct de vedere geometric soluţia generală reprezintă o familie de curbe integrale ce depinde de* n *parametri. Particularizând constantele din soluţia generală se obţin* **soluţiile particulare** *ale ecuaţiei diferenţiale.*

Exemplul 6.2.1 *Fie ecuaţia diferenţială de ordinul întâi,*

$$y' = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}. \tag{6.6}$$

Rezolvare: Funcţia din membrul doi este definită şi continuă pe intervalul $I \in (-3, 3)$. Integrând (6.6) se obţine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y = \arcsin \frac{x}{3} + C, \quad \text{unde} \quad \left|\frac{x}{3}\right| \leq 1, \tag{6.7}$$

oricare ar fi $C \in \mathbb{R}$.

În conformitate cu Observaţia 6.2.2, în Figura 6.1-(a) sunt redate trei din curbele integrale (corespunzătoare soluţiei generale (6.7)) pentru $C = -1,\ C = 0$ şi $C = 1$. Această constatare este bazată pe Observaţia 3.8.1. Deoarece $y' > 0$, soluţiile ecuaţiei diferenţiale (6.6) vor fi funcţii crescătoare. Reprezentarea grafică a membrului drept al ecuaţiei diferenţiale (6.6) este redată în Figura 6.1-(b). În practică de multe ori se pune problema rezolvării unei ecuaţii diferenţiale ştiind că soluţia trebuie să satisfacă anumite condiţii, ca de pildă:

(a) (b)

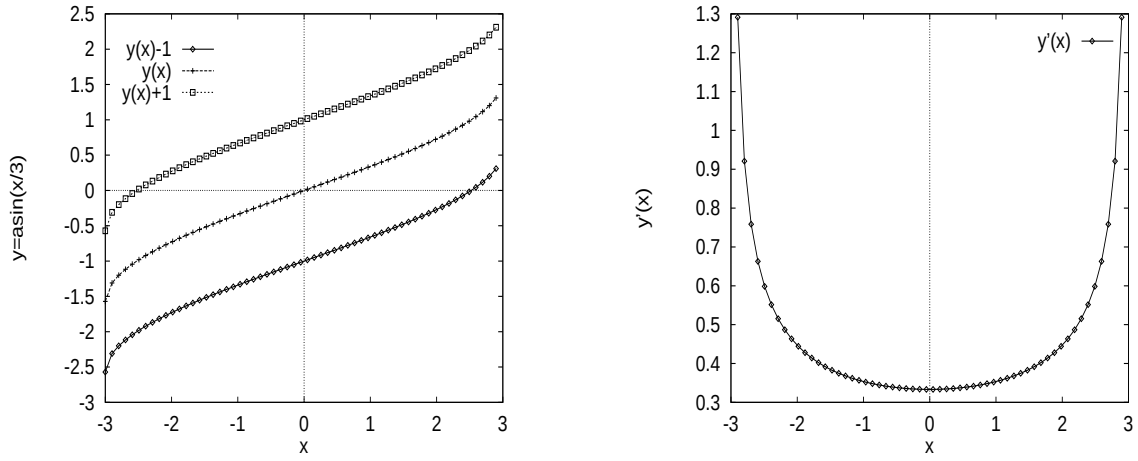


Figura 6.1: (a) Reprezentarea grafică a soluţiei ecuaţiei diferenţiale (6.6) pentru $C = -1,\ 0,\ 1$; (b) - funcţia $\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

(i) temperatura iniţială a lichidului să fie T_0, $(T(0) = T_0)$, pentru soluţia ecuaţiei (6.1);

(ii) numărul iniţial de moli din subtanţa C să fie 0, $(N(0) = 0)$, pentru soluţia ecuaţiei (6.2) .

Deci, în plus se cere ca din soluţia generală să se selecteze acele curbe care verifică condiţiile impuse. In funcţie de natura condiţiilor avem problemele de tip Cauchy şi problemele bilocale.

Problema lui Cauchy

Se consideră ecuaţia diferenţială (6.5) şi numerele reale $x_0,\ y_0',\ y_0^{(2)},\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$ *astfel încât punctul* $(x_0,\ y_0',\ y_0^{(2)},\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}) \in D$. *Se cere să se determine soluţia ecuaţiei (6.5) care verifică condiţiile:*

$$\left.\begin{array}{ll} y(x_0) & = y_0 \\ y'(x_0) & = y_0' \\ y^{(2)}(x_0) & = y_0^{(2)} \\ \vdots & \\ y^{(n-1)}(x_0) & = y_0^{(n-1)} \end{array}\right\} \text{condiţii iniţiale sau condiţii Cauchy.} \tag{6.8}$$

Problema Cauchy are forma:

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) &= f(x, y(x), y'(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0' \\ y^{(2)}(x_0) &= y_0^{(2)} \\ \vdots & \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{6.9}$$

Exemple de probleme Cauchy:

(i) Modelul matematic al variaţiei temperaturii unui lichid :

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} &= \alpha T + \beta \\ T(0) &= T_0; \end{cases} \tag{6.10}$$

(ii) Modelul unor reacţii chimice:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} &= k\left(a - \dfrac{N}{2}\right)\left(b - \dfrac{N}{2}\right) \\ N(0) &= 0. \end{cases} \tag{6.11}$$

Observaţia 6.2.3

1. *Din punct de vedere geometric problema se reduce la determinarea curbei integrale care trece prin punctul de coordonate (x_0, y_0), pentru o problemă Cauchy corespunzătoare unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi;*

2. *Dacă funcţia f verifică anumite condiţii problema Cauchy are soluţie unică.*

Problmema bilocală

Fie $f : [a, b] \times D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, α şi β numere reale. Se cere să se determine soluţia ecuaţiei

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \tag{6.12}$$

unde $a,\ b,\ y_0,\ y_1$ sunt numere reale şi $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ verifică condiţiile:

$$\left.\begin{array}{ll} y(a) &= \alpha \\ y(b) &= \beta \end{array}\right\} \text{ condiţii bilocale.} \tag{6.13}$$

Formularea **problemei bilocale** este următoarea:

$$\begin{cases} y''(x) &= f(x, y(x), y'(x)) \\ y(a) &= \alpha \\ y(b) &= \beta \end{cases} \tag{6.14}$$

Exemplul 6.2.2 *Efectiv o problemă bilocală se poate formula astfel:*

$$\begin{cases} y''(x) &= 0 \\ y(1) &= 2 \\ y(2) &= 3 \end{cases} . \tag{6.15}$$

Studiul ecuaţiilor diferenţiale este interesant din punct de vedere al comportamentului soluţiilor ecuaţiei diferenţiale. De cele mai multe ori ecuaţiile diferenţiale nu se pot rezolva efectiv analitic ci numai prin tehnici numerice. Informaţii suplimentare despre comportamentul soluţiilor se obţin folosind teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale (care nu face obiectul acestei cărţi).

În cele ce urmează interesul se va opri asupra studiului soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale rezolvabile efectiv.

6.3 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi rezolvabile efectiv

Forma normală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi este

$$y'(x) = f(x, y(x)). \tag{6.16}$$

6.3.1 Ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile

Definiţia 6.3.1 *Se spune că* **ecuaţia** *(6.16) este* **cu variabile separabile** *dacă există* $P(x)$ *şi* $Q(y)$ *două funcţii astfel încât* $f(x, y) = P(x)Q(y)$.

Ecuaţia diferenţială cu variabile separabile este de forma:

$$y' = P(x)Q(y) \quad \text{sau} \tag{6.17}$$

$$P_1(x)Q_1(y)dy + P_2(x)Q_2(y)dx = 0, \tag{6.18}$$

unde $P_1,\ Q_1,\ P_2,\ Q_2$ sunt funcţii date şi funcţia necunoscută este continuă împreună cu prima derivată. Pentru a rezolva o ecuaţie diferenţială de forma (6.17) există posibilitatea transcrierii acesteea într-o formă echivalentă în care într-un membru al ecuaţiei va apare doar y şi în celălalt membru va apare doar x.

$$\begin{aligned} y' &= P(x)Q(y) \iff \\ \frac{dy}{dx} &= P(x)Q(y),\ Q(y)\neq 0, \iff \qquad (6.19) \\ \frac{dy}{Q(y)} &= P(x)dx. \qquad (6.20) \end{aligned}$$

Integrând membru cu membru ecuaţia (6.20), rezultă

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx.$$

În urma efectuării calculelor rezultă o familie de curbe integrale ce depind de parametrul C, adică se obţine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale.

Dacă ecuaţia este dată sub forma (6.18) şi dacă $P_2(x)Q_2(y)\neq 0$ atunci (6.18) este echivalentă cu (6.19) unde $P(x) = -\dfrac{P_2(x)}{P_1(x)}$ şi $Q(x) = \dfrac{Q_2(y)}{Q_1(y)}$.

Exemplul 6.3.1 *Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale :*

$$(a)\ xy' = y^2, \qquad (b)\ \frac{1}{x}y' = x(y^2+1)$$

Rezolvare:

(a) În urma separării variabilelor se obţine:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^2} &= \frac{1}{x} \\ \frac{dy}{y^2} &= \frac{dx}{x} \\ \int \frac{dy}{y^2} &= \int \frac{dx}{x}, \iff \\ -\frac{1}{y} &= \ln|x| + C,\ \forall\ C\in\mathbb{R} \qquad (6.21) \end{aligned}$$

Deci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este

$$y(x) = \frac{1}{\ln x + C},\ \forall\ x\in I \text{ şi } \forall\ C\in\mathbb{R},$$

unde I este ales astfel încât fracţia să aibă sens;

(b) În urma separării variabilelor se obţine:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^2+1} &= x^2, \iff \\ \frac{dy}{y^2+1} &= x^2dx, \implies \\ \int \frac{dy}{y^2+1} &= \int x^2dx, \text{ adică} \\ \text{arctg } y &= \frac{x^3}{3}+C, \ \forall\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Deci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este

$$\text{arctg } y(x) = \frac{x^3}{3}+C, \ \forall\ x \in I \text{şi } \forall\ C \in \mathbb{R},$$

unde I este ales astfel încât soluţia să existe.

În cazul (a) soluţia ecuaţiei este dată în formă explicită în timp ce în cazul (b) soluţia este exprimată în formă implicită.

6.3.2 Ecuaţii diferenţiale omogene în sensul lui Euler

Se consideră ecuaţia diferenţială de forma:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{6.23}$$

unde $P,\ Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Definiţia 6.3.2 *Se spune că o* **funcţie** $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *este* **omogenă în sensul lui Euler** *de grad n, dacă oricare ar fi* $k > 0$ *şi oricare ar fi* $(x,y) \in D$ *are loc*

$$f(kx, ky) = k^n f(x,y).$$

Exerciţiul 6.3.1 *Să se arate că funcţia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ *este omogenă de gradul al doilea.*

Definiţia 6.3.3 *Ecuaţia (6.23) se numeşte* **omogenă în sensul lui Euler** *dacă* P *şi* Q *sunt funcţii omogene cu acelaşi grad de omogenitate.*

Ecuaţia diferenţială (6.23) poate fi scrisă sub forma:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{6.24}$$

Se face substituţia $u = \dfrac{y}{x}$, de unde rezultă $y' = u + xu'$. Se înlocuieşte în ecuaţia (6.24) şi se obţine o ecuaţie cu variabile separabile de forma

$$\frac{u'}{f(u) - u} = \frac{1}{x}.$$

Deci ecuaţia omogenă în sensul lui Euler s-a transformat într-o ecuaţie cu variabile separabile.

Exemplul 6.3.2 *Să se rezolve ecuaţiile:*

$$(a)\ y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \qquad (b)\ y' = \frac{y - x}{y + x}.$$

Rezolvare:

(a) Se face schimbarea de variabilă $u = \dfrac{y}{x}$ şi se obţine ecuaţia cu variabile separabile $xu' = e^u$. Ecuaţia este echivalentă cu

$$\begin{aligned} \frac{du}{e^u} &= \frac{dx}{x} \text{ şi integrând membru cu membru } \Longrightarrow \\ -e^{-u} &= \ln(x \cdot C) \iff \\ e^{-u} &= \frac{1}{\ln(C \cdot x)} \end{aligned} \tag{6.25}$$

oricare ar fi x dintr-un interval bine ales şi oricare ar fi $C \in \mathbb{R}$. Relaţia (6.25) furnizează soluţia ecuaţiei cu variabile separabile în formă implicită. Pentru a obţine soluţia ecuaţiei diferenţiale omogene în sensul lui Euler în formă explicită, se logaritmează relaţia (6.25). Apoi prin înlocuirea lui u se obţine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y(x) = -x \ln\left(\ln \frac{1}{xC}\right),$$

oricare ar fi x dintr-un interval bine ales şi oricare ar fi $C \in \mathbb{R}$.

(b) Prin împărţirea cu x a numărătorului şi numitorului membrului drept al ecuaţiei şi notând $u = \dfrac{y}{x}$ se obţine ecuaţia cu variabile separabile

$$\frac{u + 1}{u^2 + 1} du = -\frac{dx}{x}. \tag{6.26}$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii în formă implicită este

$$\ln \frac{(u^2+1)C}{x} + \text{arctg}u = 0, \tag{6.27}$$

oricare ar fi x într-un interval bine ales şi oricare ar fi $C \in \mathbb{R}$. Înlocuind pe u se obţine soluţia generală în formă implicită

$$\ln \frac{(x^2+y^2)C}{x^3} + \text{arctg}\frac{y}{x} = 0,$$

oricare ar fi x într-un interval bine ales şi oricare ar fi $C \in \mathbb{R}$.

6.3.3 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi

Definiţia 6.3.4 *Se numeşte* **ecuaţie diferenţială liniară** *de ordinul întâi o ecuaţie de forma:*

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{6.28}$$

unde P şi Q sunt funcţii continue date.

Observaţia 6.3.1 *Dacă $Q(x) = 0$ ecuaţia (6.28) se numeşte* **ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă**.

Deoarece ecuaţiile liniare şi omogene pot fi privite ca şi ecuaţii cu variabile separabile, rezolvarea lor a fost studiată în paragraful 6.3.1.
Rezolvarea **ecuaţiilor diferenţiale liniare neomogene** de ordinul întâi presupune parcurgerea următoarelor etape.

I. Rezolvarea ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei (6.28). Soluţia generală a ecuaţiei omogene este:

$$y(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds}, \ \forall\, C \in \mathbb{R} \tag{6.29}$$

numită şi *soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene*;

II. Determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene. Determinarea soluţiei particulare se va realiza folosind metoda variaţiei constantei sau metoda lui Lagrange. Se va considera constanta C din relaţia (6.29) ca o funcţie de x şi se va

determina acea funcţie $C = C(x)$ pentru care relaţia (6.29) verifică ecuaţia neomogenă. Deci forma soluţiei particulare este:

$$y(x) = C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds}, \ \forall\ C \in \mathbb{R}. \tag{6.30}$$

Pentru a determina pe $C(x)$ se derivează în raport cu x relaţia (6.30), se înlocuieşte în (6.28) şi se obţine:

$$\begin{aligned} C'(x) &= Q(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(s)ds}, \text{ integrând } \Longrightarrow \\ C(x) &= \int_{x_0}^{x} Q(t)\exp\left(\int_{x_0}^{t} P(s)ds\right)dt. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Deci soluţia particulară a ecuaţiei (6.28) este

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds} \int_{x_0}^{x} Q(t)\exp\left(\int_{x_0}^{t} P(s)\,ds\right)dt. \tag{6.32}$$

III. Determinarea soluţiei generale a ecuaţiei (6.28). Datorită liniarităţii ecuaţiei (6.28) soluţia generală a acesteea este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene (6.29) şi soluţia particulară a ecuaţiei neomogene (6.32). Deci,

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{-\int_{x_0}^{x} P(s)\,ds} + \\ &+ e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds} \int_{x_0}^{x} Q(t)\exp\left(\int_{x_0}^{t} P(s)ds\right)dt,\ \forall\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Exemplul 6.3.3 *Să se rezolve:*

$$(a)\ y' - 2xy = x^3, \qquad (b)\ xy' + y = e^x,\ y(a) = b.$$

Rezolvare:

(a) Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene $y' - 2xy = 0$. Aceasta este o ecuaţie cu variabile separabile şi are soluţia generală

$$y(x) = Ce^{x^2} \tag{6.34}$$

oricare ar fi $C \in \mathbb{R}$. Folosind metoda variaţiei constantei se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma:

$$y(x) = C(x)e^{x^2}. \tag{6.35}$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială rezultă,

$$C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = x^3. \tag{6.36}$$

Integrând se obţine

$$C(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} \tag{6.37}$$

Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene este

$$y(x) = -\frac{x^2+1}{2}. \tag{6.38}$$

Soluţia generală a ecuaţiei neomogene se obţine însumând relaţiile (6.34) şi (6.38),

$$y(x) = Ce^{x^2} - \frac{x^2+1}{2} \ \forall\ C \in \mathbb{R};$$

(b) Spre deosebire de exemplul precedent acum scopul este rezolvarea problemei Cauchy:

$$\begin{cases} xy' + y &= e^x \\ y(a) &= b \end{cases} \tag{6.39}$$

Pentru aceasta se determină soluţia generală a ecuaţiei neomogene $xy' + y = e^x$ şi apoi din familia de curbe integrale obţinute se va determina cea care trece prin punctul de coordonate (a, b). Procedând ca şi la punctul (a) s-a determinat soluţia generală a ecuaţiei neomogene

$$y(x) = \frac{C}{x} + \frac{e^x}{x}, \tag{6.40}$$

oricare ar fi $C \in \mathbb{R}$. Pentru a găsi curba integrală care trece prin punctul (a, b) se determină valoarea lui C astfel încât $y(a) = b$, adică,

$$\begin{aligned} b &= \frac{C}{a} + \frac{e^a}{a} \implies \\ C &= ab - e^a. \end{aligned}$$

Deci soluţia problemei Cauchy se obţine înlocuind valoarea lui C în (6.40), astfel rezultă

$$y(x) = \frac{ab - e^a}{x} + \frac{e^x}{x}.$$

6.3.4 Ecuaţii diferenţiale de tip Bernoulli

Definiţia 6.3.5 *O ecuaţie diferenţială de ordinul întâi de forma*

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \tag{6.41}$$

unde $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, p *şi* q *sunt două funcţii date continue pe un interval* I, *se numeşte* **ecuaţie diferenţială de tip Bernoulli**.

Prin substituţia $u = y^{1-\alpha}$ ecuaţia (6.41) se transformă într-o ecuaţie diferenţială liniară de forma

$$u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x).$$

Exemplul 6.3.4 *Să se rezolve*

$$(a)\ y' + \frac{1}{x}y = -xy^2, \qquad (b)\ y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$$

Rezolvare:

(a) Împărţind cu y^2 ambii membri ai ecuaţiei, se obţine:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = -x, \text{ se notează cu } u = \frac{1}{y} \implies \tag{6.42}$$

$$-u' + \frac{1}{x}u = -x \tag{6.43}$$

Ecuaţia (6.42) este liniară de ordinul întâi în u. Se procedează ca şi în cazurile anterioare, soluţia generală este $u = Cx + x^2$ oricare ar fi $C \in \mathbb{R}$. Ţinând cont de (6.42), soluţia generală a ecuaţiei de tip Bernoulli este

$$y(x) = \frac{1}{Cx + x^2},\ \forall\ C \in \mathbb{R}.$$

(b) Folosind substituţia $u = \sqrt{y}$ şi procedând ca şi cazul precedent se obţine soluţia generală a ecuaţiei

$$y(x) = \left(Cx^2 + \frac{x^2}{2}\ln|x|\right)^2,\ \forall\ C \in \mathbb{R}.$$

6.3.5 Ecuaţii diferenţiale de tip Ricatti

Definiţia 6.3.6 *O ecuaţie diferenţială de ordinul întâi de forma,*

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0 \tag{6.44}$$

unde p, q şi r sunt funcţii date continue pe un interval I, se numeşte **ecuaţie diferenţială de tip Ricatti**.

Observaţia 6.3.2 *În general o ecuaţie de tip Ricatti nu se poate rezolva efectiv. Dacă se cunoaşte o soluţie particulară y_1 a ecuaţiei diferenţiale atunci prin substituţia $u = y - y_1$ ecuaţia se va transforma într-o ecuaţie de tip Bernoulli.*

Exemplul 6.3.5 *Să se rezolve*

$$(a)\ y' - y^2 - \frac{y}{x} + 9x^2 = 0,\ y_1 = 3x \qquad b)\ y' - y^2\cot x + \sin^2 x = 0,\ y_1 = \sin x$$

Rezolvare:

(a) Pentru a determina soluţia generală a ecuaţiei de tip Ricatti se foloseşte soluţia particulară şi se realizează schimbarea de variabilă $u = y - 3x$. Rezultă ecuaţia Bernoulli având ca necunoscută funcţia u

$$u' - \left(6x + \frac{1}{x}\right)u = u^2. \tag{6.45}$$

Dacă în ecuaţia (6.45) se face schimbarea de variabilă $v = \dfrac{1}{u}$, se obţine ecuaţia diferenţială liniară având ca necunoscută funcţia v,

$$-v' - \left(6x + \frac{1}{x}\right)v = 1, \tag{6.46}$$

care are soluţia generală,

$$v(x) = \frac{1}{6x}(6Ce^{-3x^2} - 1),\ \forall C \in \mathbb{R}. \tag{6.47}$$

Din relaţia (6.47) precum şi din schimbările de variabilă efectuate s-a obţinut soluţia generală a ecuaţiei Ricatti:

$$y(x) = \frac{6x}{6Ce^{-3x^2} - 1} + 3x,\ \forall\ C \in \mathbb{R};$$

(b) Procedând ca şi în cazul (a) soluţia generală a ecuaţiei Ricatti este

$$y(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{3\cos^2 x}{3C - \cos^3 x},\ \forall\ C \in \mathbb{R}.$$

6.4 Aplicaţii ale ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întâi

În paragrafele următoare se vor prezenta modele practice rezolvabile efectiv bazate pe ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.

6.4.1 Răcirea unui lichid

Conţinutul unei ceşti de cafea are temperatura iniţială de $100°C$. Temperatura mediului ambiant este de $19°C$. După cât timp lichidul din ceaşcă va avea $30°C$?
Modelarea matematică s-a facut în paragraful 6.1. În ecuaţia (6.1) considerăm $\alpha = -1$ şi $\beta = 19$. Pentru a determina timpul după care lichidul ajunge la temperatura de $19°C$ trebuie găsită funcţia $T = T(t)$ care ne dă variaţia temperaturii în timp, ceea ce se reduce la rezolvarea problemei Cauchy:

$$\begin{cases} T' &= -T + 19 \\ T(0) &= 100 \end{cases} \tag{6.48}$$

Soluţia problemei (6.48) este

$$T(t) = 19 + 81e^{-t}. \tag{6.49}$$

Ştiind că temperatura care se cere este 30°C, pentru a determina timpul se rezolvă ecuaţia algebrică cu necunoscuta t

$$30 = 19 + 81e^{-t}.$$

Soluţia ecuaţiei este $t = \ln \dfrac{81}{11} \simeq 1.99$ minute. Deci după aproximativ două minute cafeaua va avea temperatura dorită.

6.4.2 Dinamica unei populaţii

Din punct de vedere matematic orice colecţie de obiecte care are cel puţin o proprietate comună formează o *populaţie*. De pildă mulţimea copacilor corespunzătoare unei suprafeţe de pădure, populaţia bacteriilor dintr-un mediu, populaţia peştilor dintr-un lac, etc. În continuare populaţia se va nota cu p. Scopul va fi determinarea evoluţiei populaţiei ca funcţie de timp, adică determinarea funcţiei $p = p(t)$. Rata totală de creştere a populaţiei la momentul t este definită de relaţia $\dfrac{p'(t)}{p(t)} = r(t, p)$. Aceasta este o generalizare a variaţiei

relative a funcţiei p. Ca şi ipoteză de lucru se consideră un sistem închis adică nu au loc migraţii şi nici interacţiuni cu alte populaţii. Problema care se pune este aceea de a determina evoluţia populaţiei, adică funcţia p, dacă se cunoaşte mărimea populaţiei la momentul iniţial t_0. Matematic, problema se reduce la determinarea soluţiei problemei Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{p'(t)}{p(t)} &= r(t,p) \\ p(t_0) &= p_0 \end{cases} \tag{6.50}$$

Se va studia problema (6.50) în cazurile când rata de creştere este constantă, respectiv variabilă.

(i) **Rata de creştere este constantă**, $r(t,p) = \alpha$. Problema (6.50) este echivalentă cu:

$$\begin{cases} \dfrac{p'(t)}{p(t)} &= \alpha \\ p(t_0) &= p_0, \quad (p_0 > 0) \end{cases} \tag{6.51}$$

Soluţia problemei Cauchy de mai sus este

$$p(t) = p_0 e^{\alpha t}. \tag{6.52}$$

Dacă $\alpha > 0$ atunci $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = \infty$, ceea ce înseamnă că există o creştere nelimitată a populaţiei analizate.

Dacă $\alpha < 0$ atunci $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = 0$, ceea ce înseamnă că populaţia se stinge. Figura 6.2 redă din punct de vedere grafic alura curbelor ce descriu evoluţia populaţiilor pentru o valoare pozitivă, respectiv negativă a ratei de creştere α. În Figura 6.2 (a) şi (b) este reprezentat procesul de anihilare a unei populaţii atunci când rata de descreştere este $\alpha = -0.02$ *nr. elem./an*, într-un interval de timp $t \in [0, 300]$ *ani*, respectiv procesul de creştere a populaţiei cu rata $\alpha = 0.02$ *nr. elem./an* în intervalul de timp $t \in [0, 100]$ *ani*. În ambele cazuri s-a considerat aceeaşi valoare a populaţiei la momentul $t = 0$, $p_0 = 1000$ *elemente*.

(ii) În cazul când **rata de creştere este variabilă** se consideră modelul unei populaţii limitate superior de valoarea ξ, adică $p(t) < \xi$, iar pentru cazul în care $p(t) \geq \xi$ rata de creştere a populaţiei devine negativă. Rata de creştere pentru o populaţie

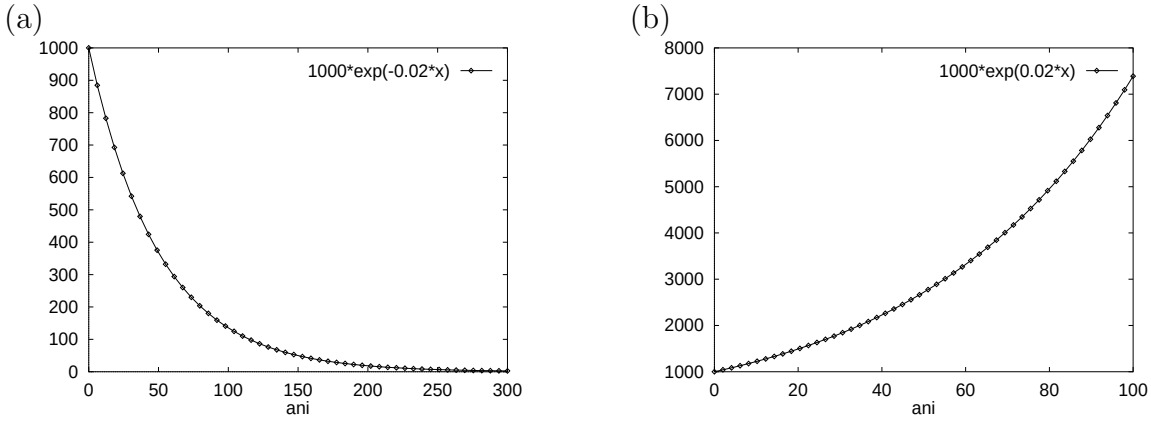


Figura 6.2: Ilustrarea grafică a funcţiei ce descrie evoluţia în timp a unei populaţii.

cu rată de creştere limitată poate fi descrisă de o funcţie de forma,

$$r(t,p) = \beta(\xi - p), \text{ unde } \beta > 0. \tag{6.53}$$

Atunci se obţine ecuaţia diferenţială

$$p' = \beta\xi p - \beta p^2. \tag{6.54}$$

Ecuaţia (6.54) se numeşte *ecuaţia logistică* a unei populaţii cu creştere limitată. Se notează $\beta\xi = \alpha$, β fiind coeficientul fricţiunilor sociale. Ecuaţia (6.54) este echivalentă cu

$$p' = (\alpha - \beta p)p \tag{6.55}$$

unde nu apare explicit variabila t. O astfel de ecuaţie se numeşte *ecuaţie autonomă*. Soluţiile constante ale unei ecuaţii autonome se numesc *soluţii echilibru*. Soluţia echilibru pentru ecuaţia (6.55) este $p(t) = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Pentru a studia evoluţia populaţiei se raportează numărul iniţial de indivizi din populaţie p_0 la soluţia de echilibru.

(a) $p_0 < \dfrac{\alpha}{\beta}$. Dacă numărul iniţial de indivizi este mai mic decât $\dfrac{\alpha}{\beta}$ soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} p' &= (\alpha - \beta p)p \\ p(0) &= p_0 \end{cases} \tag{6.56}$$

va fi o funcţie crescătoare limitată de soluţia echilibru. Acest lucru este evidenţiat în Figura 6.3-(a) pentru valorile $\alpha = 10,\ \beta = 2$ şi $p_0 = 2$.

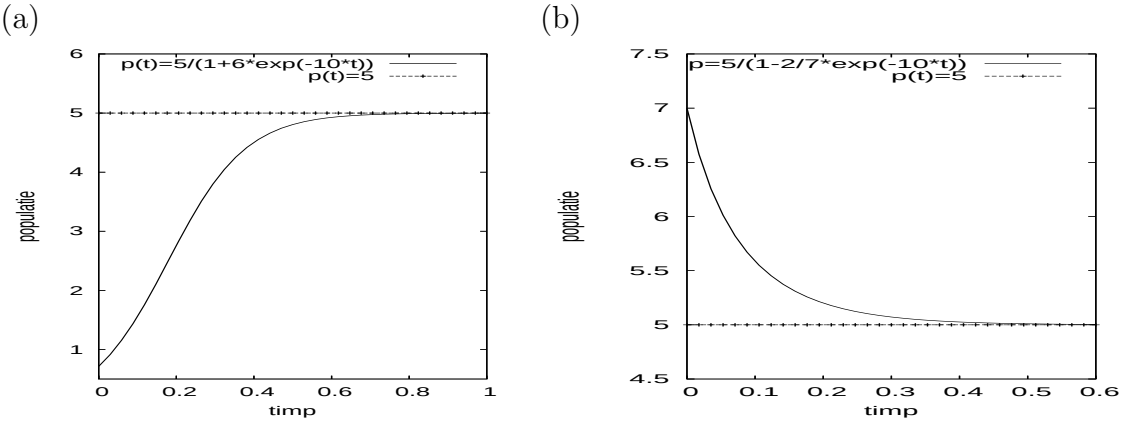


Figura 6.3: Ilustrarea grafică a funcţiei ce descrie evoluţia în timp a unei populaţii caz particular.

(b) $p_0 > \dfrac{\alpha}{\beta}$. Dacă numărul iniţial de indivizi este mai mare decât $\dfrac{\alpha}{\beta}$ soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} p' &= (\alpha - \beta p)p \\ p(0) &= p_0 \end{cases} \tag{6.57}$$

va fi o funcţie descrescătoare limitată de soluţia echilibru. Acest lucru este evidenţiat în Figura 6.3-(b) pentru valorile $\alpha = 10,\ \beta = 2$ şi $p_0 = 7$.

Dacă se doreşte popularea unui areal cu o anumită specie, indiferent de numărul iniţial al indivizilor, populaţia se va îndrepta spre soluţia echilibru. În concluzie, numărul iniţial de indivizi va trebui ales în funcţie de soluţia echilibru pe care ne-o dorim şi de timpul pe care îl avem la dispoziţie pentru ca populaţia să ajungă la soluţia echilibru.

Observaţia 6.4.1 *Pentru populaţii de dimensiuni mici termenul $-\beta p^2$ poate fi neglijat, iar pentru populaţii de dimensiuni mari cantitatea $-\beta p^2$ se numeşte termenul de "fricţiune a populaţiei"*

6.4.3 Ecuaţia tractricei

Se consideră un corp legat de un fir inextensibil de lungime a. Corpul este tras de celălalt capăt al firului de-a lungul unei traiectorii paralele cu axa Ox în conformitate cu desenul din Figura 6.4-(a). Prin urmare în această mişcare firul este întins pe direcţia tangentei la curba ce descrie traiectoria corpului. Se pune problema determinării ecuaţiei traiectoriei

corpului. Problema a fost studiată de o seamă de iluştri cercetători dintre care amintim Cristian Huygens, Tschirnhaus, Johann şi Jacob Bernoulli, etc. Această problemă este întâlnită în multe cazuri practice, de pildă, atunci când se analizează traiectoriile după care se deplasează remorca unui camion atunci când îşi schimbă direcţia de mers cu 90°, traiectoria după care este trasă la ţărm o barcă de către o persoană care se deplasează de-a lungul ţărmului, traiectoria după care este tras un buştean din pădure atunci când tractorul are o deplasare rectilinie sau traiectoria după care se deplasează un câine ţinut în lesă de stăpânul său atunci când acesta se deplasează în mod rectiliniu. Curba după care are loc deplasarea poartă denumirea de *tractrice*. Această denumire provine din cuvântul latinesc *tractus* care înseamnă a trage, a remorca, fiind apoi preluat şi în limba română cu acelaşi înţeles. Din motive de simplitate se va trata problema în coordonate polare. Prin

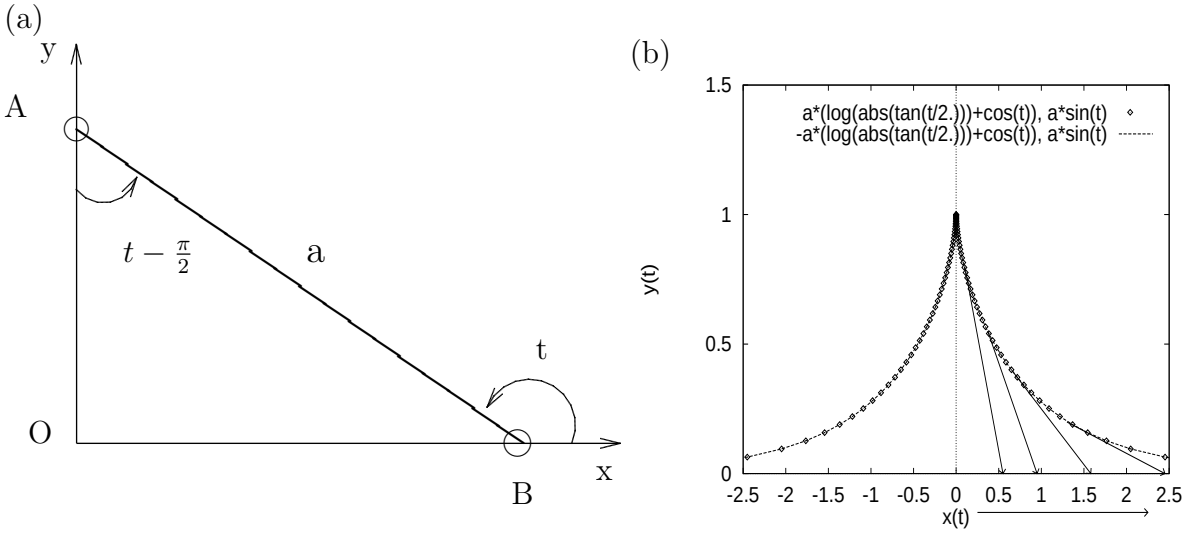


Figura 6.4: Ilustrarea grafică a construcţei tractricei, (a) - definirea modelului fizic, (b) - reprezentarea ecuaţiei traiectoriei.

urmare în conformitate cu Figura 6.4-(a), ecuaţia parametrică corespunzătoare direcţiei Oy este exprimată astfel,

$$OA = y(t) = a\sin(\widehat{ABO}) = a\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = a\sin t, \tag{6.58}$$

Deplasarea de-a lungul axei Ox este exprimată prin intermediul relaţiei,

$$\mathrm{tg}(\widehat{ABO}) = \mathrm{tg}(\pi - t) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{6.59}$$

Deci

$$\begin{aligned} -\frac{\sin t}{\cos t} &= \frac{y'(t)}{x'(t)} \iff \\ x'(t) &= -y'(t)\frac{\cos(t)}{\sin(t)} \end{aligned}$$

Ţinând cont de relaţia (6.58) se obţine,

$$x'(t) = -a\frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} \tag{6.60}$$

Integrând se obţine

$$x(t) = -a\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\frac{du}{\sin u} + \cos t.$$

Integrala din expresia precedentă se calculează pe baza substituţiei $z = \mathrm{tg}\dfrac{u}{2}$, prin urmare ecuaţia parametrică a deplasării corpului pe direcţia Ox este exprimată de relaţia,

$$x(t) = -a\left(\cos t + \ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right|\right). \tag{6.61}$$

În Figura 6.4-(b) este redată traiectoria tractricei, precum şi dreptele tangente la curbă descrise de firul de tracţiune. Eliminând parametrul t din relaţiile (6.58) şi (6.61) se obţine ecuaţia carteziană a tractricei,

$$x = a\mathrm{sech}^{-1}\left(\frac{y}{a}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}. \tag{6.62}$$

6.4.4 Creşterea plantelor în medii controlate

Un cultivator de plante tehnice doreşte să aibă o producţie de o anumită înălţime la o anumită dată calendaristică. Rata naturală de creştere a plantelor poate fi însă accelerată şi prin utilizarea luminii artificiale pentru reducerea perioadei de întuneric atunci când creşterea nu are loc. Se notează cu $x = x(t)$ funcţia care exprimă înălţimea plantelor la momentul t. Procesul se poate modela prin introducerea ratei de creştere a plantelor,

$$\frac{dx}{dt} = 1 + u(t), \tag{6.63}$$

unde $u(t)$ este creşterea realizată de lumina artificială. Se presupune că la momentul iniţial $t = 0$ rata de creştere este zero şi se doreşte o creştere de două unităţi după un

interval de timp egal cu unitatea, adică

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(1) &= 2. \end{aligned} \tag{6.64}$$

Creşterea suplimentară datorată luminii artificiale produce costuri suplimentare care trebuie menţinute minime. Funcţia de cost [12] în acest caz se defineşte astfel,

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt. \tag{6.65}$$

Trebuie determinată funcţia de control u ce va reprezenta o soluţie a ecuaţiei (6.63), va respecta (6.64) şi va minimiza funcţia de cost definită de relaţia (6.65). Pentru a determina funcţia x pornind de la ecuaţia (6.63) trebuie să se integreze ambii membri ai ecuaţiei între 0 şi t ţinând cont de relaţia (6.64),

$$\begin{aligned} \int_0^t x'(s)ds &= \int_0^t (1+u(s))ds \iff \\ x(s)|_0^t &= \int_0^t (1+u(s))ds \iff \\ x(t) &= \int_0^t (1+u(s))ds, \text{ pentru } t=1 \implies \\ 2 &= \int_0^1 (1+u(s))ds \implies \end{aligned} \tag{6.66}$$

Deci

$$\int_0^1 u(s)ds = 1. \tag{6.67}$$

Pe de altă parte, trebuie minimizate costurile generate de utilizarea luminii artificiale, deci

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^1 \frac{1}{2}[(u(s)-1)^2 + 2u(s) - 1]ds \iff \\ J(u) &= \int_0^1 \frac{1}{2}(u(s)-1)^2 ds + \int_0^1 u(s)ds - \int_0^1 \frac{1}{2}ds, \text{ folosind (6.67)} \implies \\ J(u) &= \int_0^1 \frac{1}{2}(u(s)-1)^2 ds + \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{6.68}$$

Pentru a minimiza pe J trebuie ca funcţia de sub integrala din membrul doi al relaţiei (6.68) să fie 0, deci controlul este $u(s) = 1$. Folosind controlul astfel determinat precum şi relaţia (6.66) creşterea plantelor în mediul controlat este dată de relaţia

$$x(t) = 2t.$$

6.4.5 Disiparea căldurii printr-o conductă

Exemplul 6.4.1 *O conductă ce transportă agent termic având raza secţiunii* $OA = r_1 = 0.1$ *m este izolată termic cu o mantie cilindrică izolatoare termic a cărei grosime este exprimată de raza* $OB = r_2 = 0.2$ *m în conformitate cu Figura 6.5. Temperatura conductei şi a agentului termic este* $T_1 = 160^\circ C$*, iar temperatura mediului ambiant este* $T_2 = 30^\circ C$*. Se cere:*

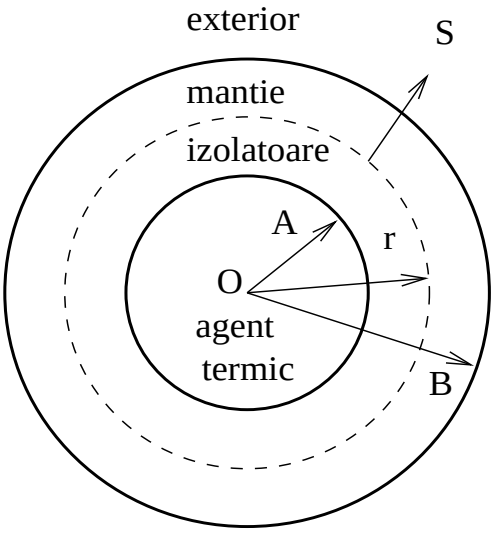
(i) Legea de variaţie în regim staţionar (debit constant) a temperaturii în interiorul mantiei izolatoare?;

(ii) Ce cantitate de căldură se disipă pentru fiecare metru liniar de conductă în $t = 24$ *ore ?*

Se dă coeficientul de transmisie al căldurii prin mantia izolatoare $k = 0.017 cal/grad \times m \times s$.

Rezolvare:

(a)



(b)

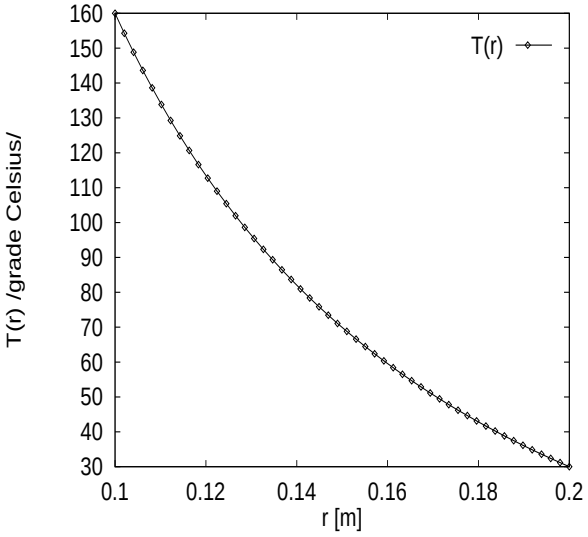


Figura 6.5: Descrierea grafică a disipării căldurii prin conductă; (a) - secţiunea transversală a conductei şi a stratului izolator, (b) - reprezentarea variaţiei temperaturii în coroana circulară ce defineşte stratul izolator termic.

(i) Se notează cu $S(r)$ aria coroanei circulare a cărei rază este cuprinsă în intervalul $r \in (r_1, r_2)$ şi l lungimea conductei. Funcţia T exprimă descreşterea temperaturii

în interiorul mantiei izolatoare, iar Q cantitatea de energie (căldură) disipată în unitatea de timp. Din punct de vedere fizic şi tehnic, cantitatea de căldură Q disipată în urma variaţiei temperaturii în funcţie de variabila r, se exprimă astfel,

$$kS(r)\frac{dT}{dr} = -Q = const. \tag{6.69}$$

Semnul minus din relaţia (6.69) a fost introdus pentru exprimarea ratei negative a funcţiei de temperatură. Funcţia ce exprimă suprafaţa prin care are loc pierderea de energie este dată de $S(r) = 2\pi rl$, astfel relaţia (6.69) devine

$$dT = -\frac{Q}{2\pi kl}\frac{dr}{r} \quad \text{şi prin integrare} \quad T(r) = C - \frac{Q}{2\pi kl}\ln r. \tag{6.70}$$

Pentru a determina constantele C şi Q se folosesc condiţiile:

(a) pentru $r_1 = 0.1\ m$, $T_1 = 160^\circ\ C$;

(b) pentru $r_2 = 0.2\ m$, $T_2 = 30^\circ, l = 1\ m$ se obţin valorile,

$$C = T_1 + \frac{r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{r_1(r_1 \ln r_2 - r_2 \ln r_1)} \ln r_1, \quad \text{adică} \quad C \approx -39.84^\circ C,$$

$$Q = \frac{2\pi l r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{r_1(r_1 \ln r_2 - r_2 \ln r_1)}, \quad \text{adică} \quad Q \approx 80096.3\ cal/s.$$

(ii) Pentru a se determina cantitatea de energie q disipată de fiecare metru de conductă pe durata $t = 24\ ore$, $q = 24 \times 3600 \times Qt \approx 80096\ cal \approx 80.1\ Kcal \approx 0.08\ Mcal \approx 0.00008\ Gcal$.

Observaţia 6.4.2 *Exemplul 6.4.1 are o importanţă deosebită din punct de vedere economic în procesul de transport al agentului termic. Acesta depinde direct de grosimea şi calitatea materialului din care este confecţionată mantia, exprimată prin coeficientul de transmisie a căldurii, precum şi de lungimea conductei. Figura 6.5-(b) redă alura funcţiei T. Din analiza calitativă a acesteea se poate constata că cel puţin jumătate din căldura disipată are loc în prima parte a coroanei circulare ce descrie secţiunea mantiei izolatoare.*

6.5 Ecuaţii diterenţiale de ordin superior rezolvabile efectiv

În general ecuaţiile diferenţiale de ordin superior se rezolvă prin aplicarea unor tehnici de coborâre a ordinului.

6.5.1 Problema pendulului matematic

Fie un punct material de masă m suspendat de un fir inextensibil de lungime l în conformitate cu Figura 6.6. Dacă punctul material a fost scos din poziţia de echilibru marcată prin punctul C, acesta va oscila între punctele A şi C datorită componentei tangenţiale a greutaţii, notată cu G_t. Acest sistem mecanic poartă numele de *pendul matematic*. Problema care se pune este de a determina ecuaţia de mişcarea a pendulului matematic. Mişcarea punctului material va fi descrisă de mulţimea valorilor unghiu-

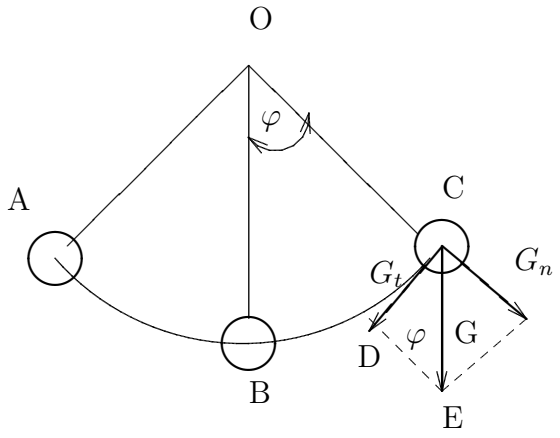


Figura 6.6: Modelul fizic al oscilaţiei pendulului matematic.

lui φ, adică de funcţia $\varphi = \varphi(t)$. Lungimea arcului $\overset{\frown}{BC}$ este exprimată de produsul φl, prin urmare viteza unghiulară a punctului material este $\omega = l\varphi'$. Acceleraţia este $a = \dfrac{d\omega}{dt} = l\dfrac{d\varphi'}{dt} = l\varphi''$. Componenta tangenţială a greutăţii este $G_t = -mg\sin\varphi$. Semnul minus al forţei tangenţiale se datorează faptului că aceasta se opune mişcării. Din legea a doua a lui Newton rezultă $ml\varphi'' = -mg\sin\varphi$. Se consideră aproximaţia micilor oscilaţii, adică $\sin\varphi \approx \varphi$, deci ecuaţia de mişcare a punctului material este dată de soluţia ecuaţiei

diferenţiale

$$\varphi'' = -\frac{g}{l}\varphi, \tag{6.71}$$

cunoscută în literatura de specialitate ca şi *ecuaţia micilor oscilaţii*. Ecuaţia (6.71) este o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea.

6.5.2 Ecuaţia de tipul $y^{(n)} = f(x)$

Se presupune că f este o funcţie continuă pe un interval. Pentru a determina soluţia ecuaţiei

$$y^{(n)} = f(x) \tag{6.72}$$

va trebui să se integreze succesiv ambii membri ai ecuaţiei de n ori,

$$\begin{aligned}
\left(y^{(n-1)}\right)' &= f(x) \iff \\
\int_{x_0}^{x} \left(y^{(n-1)}\right)' dx &= \int_{x_0}^{x} f(t)dt \iff \\
y^{(n-1)} &= \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C_1,\ \forall\ C_1 \in \mathbb{R},\ \text{integrând încă o data} \implies \\
y^{(n-2)} &= \int_{x_0}^{x} \left\{ \int_{x_0}^{t} f(s)ds + C_1 \right\} dt + C_2 = \\
&= \int_{x_0}^{x} (x-s)f(s)ds + C_1(x-x_0) + C_2,\ \forall\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Procedând analog, rezultă:

$$y^{(n-(k+1))}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^k}{k!} f(s)ds + C_1 \frac{(x-x_0)^k}{k!} + C_2 \frac{(x-x_0)^k}{(k-1)!} + \ldots + C_{k+1}, \tag{6.73}$$

oricare ar fi $C_1,\ C_2,\ \ldots, C_{k+1} \in \mathbb{R}$.

Observaţia 6.5.1 *Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n este o familie de curbe integrale care depinde de n constante, notate* $C_1,\ C_2,\ \ldots, C_n$.

Exemplul 6.5.1 *Să se rezolve ecuaţia* $y^{(3)} = x$.

Integrând ecuaţia de la x_0 la x se obţine:

$$\begin{aligned}
y''(x) &= \int_{x_0}^{x} t dt + C_1 \iff \\
y''(x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} + C_1
\end{aligned} \tag{6.74}$$

Integrând (6.74) de la x_0 la x se obţine

$$\begin{aligned} y'(x) &= \int_{x_0}^{x} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} + C_1 \right) dt + C_2 \iff \\ y'(x) &= \frac{x^3}{6} - \frac{x_0^3}{6} - \frac{x_0^2(x-x_0)}{2} + C_1(x-x_0) + C_2 \end{aligned} \tag{6.75}$$

Integrând (6.75) de la x_0 la x se obţine

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{x_0}^{x} \left(\frac{t^3}{6} - \frac{x_0^3}{6} - \frac{x_0^2(t-x_0)}{2} + C_1(t-x_0) + C_2 \right) dt + C_3 \iff \\ y(x) &= \frac{x^4}{24} - \frac{x_0^4}{24} + \left(C_1 - \frac{a^2}{2} \right) \frac{x^2 - x_0^2}{2} + \frac{x_0^3(x-x_0)}{3} - \\ &\quad -C_1 x_0(x-x_0) + C_2(x-x_0) + C_3 \iff \\ y(x) &= \frac{x^4}{24} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \end{aligned} \tag{6.76}$$

oricare ar fi $C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R}$. Deci forma generală a soluţiei ecuaţiei (6.76), depinde de trei constante reale. Ecuaţia se poate rezolva aplicând formula (6.73).

6.5.3 Ecuaţii de tipul: $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$

Pentru a rezolva acest tip de ecuaţii diferenţiele se face substituţia $y' = p$, iar soluţia se va căuta sub forma $p = p(y)$. Ţinând cont de substituţia făcută pentru a obţine ecuaţia în p, este nevoie de

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = p'p \\ y^{(3)} &= p'(p''p + (p')^2). \end{aligned}$$

Dacă ordinul ecuaţiei este mai mare decât trei se procedează ca şi mai sus.

Exemplul 6.5.2 *Să se rezolve ecuaţia* $xy'' - \dfrac{(y')^2}{y} - yy' = 0$.

Rezolvare: Se face schimbarea de variabilă $y' = p$ şi ecuaţia devine,

$$pp' - \frac{p^2}{y} - yp = 0 \tag{6.77}$$

Se observă că $p = 0$ este soluţie, adică $y = C$, $C \in \mathbb{R}$ soluţie pentru ecuaţia iniţială. Împărţind cu $p \neq 0$ ecuaţia (6.77) se obţine o ecuaţie liniară de ordinul întâi neomogenă în care funcţia necunoscută este p şi variabila este y. Soluţia ecuaţiei

$$p' - \frac{p}{y} - y = 0$$

este

$$p = C_1 y + y^2,$$

oricarea ar fi $C_1 \in \mathbb{R}$. Pentru a determina funcţia y se rezolvă ecuaţia,

$$y' = C_1 y + y^2, \ \forall \ C_1 \in \mathbb{R}$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile şi are soluţia:

$$\frac{y}{y + C_1} = C_2 e^{C_1 x}, \ \forall C_1, \ C_2 \in \mathbb{R}.$$

6.5.4 Ecuaţii de tipul $F(x, \ y^{(k)}, \ y^{(k+1)}, \ \ldots, \ y^{(n)}) = 0$, $1 \leq k \leq n$

Pentru a rezolva acest tip de ecuaţii diferenţiele se face substituţia $u = y^{(k)}$ şi ecuaţia se transformă într-o ecuaţie diferenţială de tipul $F(x, \ u, \ u', \ \ldots, \ u^{(n-k)}) = 0$.

Exemplul 6.5.3 *Să se rezolve ecuaţia* $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

Rezolvare: Prin schimbarea de variabilă $y' = u$ se obţine ecuaţia diferenţială omogenă în sensul lui Euler

$$u' = \frac{u}{x} \ln \frac{u}{x}. \tag{6.78}$$

Rezolvând această ecuaţie se obţine soluţia generală $u = xe^{C_1 x} + C_1 x$, oricare ar fi $C_1 \in \mathbb{R}$. Revenind la schimbarea de variabilă se obţine soluţia generală a ecuaţiei iniţiale,

$$y = \frac{e^{C_1 x}}{C_1} \left[x - \frac{1}{C_1} \right] + \frac{C - 1x^2}{2} + C_2, \ \ \forall \ C_1, \ C_2 \in \mathbb{R}$$

6.5.5 Ecuaţii de tipul $F\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0$

omogenă în raport cu $y, \ y', \ \ldots, \ y^{(n)}$ Soluţia ecuaţiei se obţine pe un domeniu în care nu se anulează y. Se face schimbarea de variabilă $u = \frac{y'}{y}$ şi se obţine,

$$\frac{y''}{y} = u' + u^2 \tag{6.79}$$

$$\frac{y''}{y} = u'' + u'u + 2uu' + u^3 \tag{6.80}$$

Folosind relaţiile (6.79) şi (6.80) ecuaţia se va transforma într-o ecuaţie de tip Bernoulli dacă ecuaţia iniţială era de ordinul doi, altfel va trebui coborât în continuare ordinul ecuaţiei diferenţiale folosind metodele prezentate mai sus.

Exemplul 6.5.4 *Să se rezolve ecuaţia* $xyy'' + xy' - yy' = 0$.

Rezolvare: Se găseşte soluţia pe un domeniu în care soluţia ecuaţiei nu se anulează. Se împarte ecuaţia cu y^2, se face notaţia $u = \dfrac{y'}{y}$ şi se ţine cont de relaţiile (6.79) respectiv (6.80). Ecuaţia diferenţială se transformă într-o ecuaţie de tip Bernoulli,

$$xu' + 2xu^2 - u = 0 \tag{6.81}$$

a cărei soluţie este funcţia $u = C_1 x,\ \forall C_1 \in \mathbb{R}$. Înlocuind pe u cu y şi rezolvând ecuaţia diferenţială cu variabile separabile

$$\frac{y'}{y} = C_1 x,$$

se obţine soluţia generală a ecuaţiei iniţiale,

$$y = C_2 e^{C_1 x^2},\ \forall\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

6.5.6 Ecuaţii de tipul $F(y, xy', x^2y'', \ldots, x^n y^{(n)}) = 0$

Pentru rezolvarea acestui tip de ecuaţii diferenţiale se folosesc schimbările de variabile:

$$\begin{aligned} x > 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = e^t \\ x < 0 \quad &\Longrightarrow \quad x = e^{-t} \end{aligned}$$

Folosind această schimbare de variabilă funcţia necunoscută va avea ca şi variabilă pe t, $y = y(t)$ şi pentru $x > 0$ rezultă $t = \ln x$. Folosind regula de derivare a funcţiilor compuse se obţine:

$$xy' = \frac{dy}{dt} \tag{6.82}$$

$$x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}. \tag{6.83}$$

Exemplul 6.5.5 *Să se rezolve ecuaţia diferenţială* $x^2(2yy'' - (y')^2) = 2xyy'$.

Rezolvare: Dacă se face schimbarea de variabilă $x = e^t$ şi dacă se ţine cont de relaţiile (6.82) şi (6.83), se va obţine ecuaţia

$$2yy'' = (y')^2,$$

care este de tipul celor studiate în secţiunea 6.5.3. Rezolvând această ecuaţie şi revenind la variabilele iniţiale se obţine soluţia generală a ecuaţiei,

$$2\sqrt{y} = C_1 x + C_2,\ \forall\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

6.6 Ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi

Un caz particular al ecuaţiilor diferenţiale îl constituie cele cu coeficienţi constanţi. Rezolvarea acestora se reduce la rezolvarea unei ecuaţii algebrice.

6.6.1 Probleme practice care conduc la ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi

Exemplul 6.6.1 *Un rezervor conţine* **a** *litri de apă. Apoi în rezervor se adaugă* **b** *kilograme de sare în loc de* **c** *de kilograme de sare. Pentru a se corecta greşeala se va înlocui o cantitate din soluţia salină cu apă. Se amestecă continuu astfel încât conţinutul rezervorului să devină omogen. Dacă pe minut din rezervor se scot* **d** *litri din soluţia salină şi se înlocuiesc cu* **d** *litri de apă, după cât timp în rezervor vor fi* **c** *kilograme de sare?*

Rezolvare: Modelarea problemei constă în determinarea unei ecuaţii care să reflecte modificarea cantităţii de sare din rezervor la momentul t. Se notează cu $y = y(t)$ cantitatea de sare din rezervor la momentul t. Deoarece într-un minut d litri de soluţie salină sunt înlocuiţi cu **d** litri de apă, într-un interval Δt vor fi înlocuiţi $d\Delta t$ litri de soluţie. Pierderea de sare din soluţie o vom nota cu Δy şi va fi de forma $\Delta y = -\dfrac{d\Delta t}{a} y$. Deci

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = -\frac{d}{a} y \implies$$

ecuaţia diferenţială

$$y' + \frac{d}{a} y = 0 \tag{6.84}$$

Ecuaţia (6.84) reprezintă o ecuaţie diferenţială liniară omogenă cu coeficienţi constanţi.

6.6.2 Ecuaţii diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi este

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0, \tag{6.85}$$

unde $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$ sunt constante reale.

Pentru a rezolva ecuaţii diferenţiale de acest tip se va folosi *metoda lui Euler*. Se vor căuta soluţii particulare sub forma $y = e^{rx}$. Pentru a-l determina pe r se va înlocui în ecuaţia (6.85) şi astfel se obţine

$$\begin{aligned} r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \ldots + a_{n-1} r e^{rx} + a_n e^{rx} &= 0, \text{ împărţind cu } e^{rx} \implies \\ r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n &= 0. \end{aligned} \tag{6.86}$$

Se observă că rezolvarea ecuaţiei diferenţiale (6.85) se reduce la rezolvarea ecuaţiei algebrice (6.86). Ecuaţia (6.86) se numeşte *ecuaţia caracteristică* ataşată ecuaţiei diferenţiale (6.85). În funcţie de natura rădăcinilor ecuaţiei caracteristice se disting următoarele cazuri.

(i) Dacă rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt reale şi distincte notate cu $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n$, atunci soluţiile particulare ale ecuaţiei caracteristice sunt:

$$y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = e^{r_2 x},\ y_3 = e^{r_3 x},\ \ldots,\ y_n = e^{r_n x};$$

(ii) Dacă printre rădăcinile ecuaţiei caracteristice există şi rădăcini complexe $r_1 = \alpha + i\beta$ $r_2 = \alpha - i\beta$, atunci o astfel de pereche de rădăcini complexe produce următoarele soluţii particulare pentru ecuaţia caracteristică:

$$y_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x;$$

(iii) Dacă printre rădăcinile ecuaţiei caracteristice există rădăcina reală $r = r_1$ cu ordinul de multiplicitate p atunci soluţiile particulare corespunzătoare vor fi:

$$y_1 = e^{rx},\ y_1 = x e^{rx},\ y_1 = x^2 e^{rx},\ \ldots,\ y_1 = r^{p-1} e^{rx};$$

(iv) Dacă printre rădăcinile ecuaţiei caracteristice există şi rădăcini complexe $r_1 = \alpha + i\beta$ $r_2 = \alpha - i\beta$ cu ordinul de multiplicitate p, atunci lor le corespund următoarele $2p$ soluţii particulare:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x \\ y_3 &= xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x \\ &\vdots \\ y_{2p-1} &= x^{p-1}e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad y_{2p} = x^{p-1}e^{\alpha x}\cos\beta x. \end{aligned}$$

După ce s-au determinat cele n soluţii particulare $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ se va scrie soluţia generală a ecuaţiei,

$$y(x) = C_1y_1 + C_2y_2 + \ \ldots\ + C_ny_n \tag{6.87}$$

oricare ar fi $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n \in \mathbb{R}$

Exemplul 6.6.2 *Să se rezolve următoarele ecuaţii:*

$(a)\ y^{(3)} - 7y^{(2)} + 14y' - 8y = 0$
$(b)\ y^{(6)} - y^{(5)} + 4y^{(4)} + 2y^{(3)} + 5y^{(2)} - y' - 2y = 0$
$(c)\ y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y^{(2)} + 2y' + y = 0.$

Rezolvare:

(a) Ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei diferenţiale $y^{(3)} - 7y^{(2)} + 14y' - 8y = 0$ este

$$r^3 - 7r^2 + 14r - 8 = 0$$

şi are soluţiile $r = 1,\ r = 2$ şi $r = 4$. Deci soluţiile particulare sunt

$$y_1 = e^x,\ y_2 = e^{2x},\ y_3 = e^{4x} \implies$$

soluţia generală a ecuaţiei este

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{4x}, \quad \forall\ C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R};$$

b) Ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei diferenţiale $y^{(6)} - y^{(5)} + 4y^{(4)} + 2y^{(3)} + 5y^{(2)} - y' - 2y = 0$ este

$$r^6 - r^5 + 4r^4 + 2r^3 + 5r^2 - r - 2 = 0$$

şi are soluţiile $r = 1$ rădăcină dublă, $r = -1$ rădăcină triplă şi $r = 2$ rădăcină simplă. Deci soluţiile particulare sunt

$$y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x,\ y_3 = e^{-x},\ y_4 = xe^{-x},\ y_5 = x^2e^{-x},\ y_6 = e^{2x} \implies$$

soluţia generală a ecuaţiei este

$$y(x) = (C_1 + xC_2)e^x + (C_3 + xC_4 + x^2C_5)e^{-x} + C_6e^{2x},\ \ \forall\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5 \in \mathbb{R};$$

(c) Ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei diferenţiale $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y^{(2)} + 2y' + y = 0$ este

$$r^4 + 2r^3 + 3r^2 + 2r + 1 = 0$$

şi are soluţiile $r = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ şi $r = \dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ambele cu ordinul de multiplicitate 2. Deci soluţiile particulare sunt:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-\frac{x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ \ y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x \\ y_3 &= xe^{-\frac{x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ \ y_4 = xe^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x \implies \end{aligned}$$

soluţia generală a ecuaţiei este

$$y(x) = (C_1 + xC_2)e^{-\frac{x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + (C_3 + xC_4)e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ \ \forall\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \in \mathbb{R};.$$

6.6.3 Ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi

Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale şi neomogene se reduce la rezolvarea ecuaţiei omogene (paragaful 6.6.2), apoi se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene. Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene şi soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Ân funcţie de forma membrului doi al ecuaţiei neomogene se poate determina forma soluţiei particulare.

(i) Membrul doi al ecuaţiei cu coeficienţi constanţi are forma $e^{ax}P_m(x)$, unde $P_m(x)$ este un polinom de gradul m în x;

1) Dacă a nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice asociată ecuaţiei diferenţiale omogene atunci soluţia particulară are forma,

$$y_p = e^{ax}Q_m(x), \tag{6.88}$$

unde $Q_m(x)$ este un polinom de gradul m în x cu coeficienţi nedeterminaţi, coeficienţii polinomului Q obţinându-se prin identificare;

2) Dacă a este rădăcină a ecuaţiei caracteristice asociată ecuaţiei diferenţiale omogene cu ordinul de multiplicitate p atunci soluţia particulară are forma,

$$y_p = e^{ax}x^pQ_m(x), \tag{6.89}$$

unde $Q_m(x)$ este un polinom de gradul m în x cu coeficienţi nedeterminaţi, coeficienţi polinomului Q obţinându-se prin identificare.

(ii) Membrul doi al ecuaţiei cu coeficienţi constanţi are forma $e^{ax}P_m(x)\cos bx$ sau $e^{ax}P_m(x)\sin bx$ unde $P_m(x)$ este un polinom de gradul m în x;

1) Dacă $a\pm ib$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice asociată ecuaţiei diferenţiale omogene atunci soluţia particulară are forma,

$$y_p = e^{ax}(Q_m(x)\cos bx + R_m(x)\sin bx), \tag{6.90}$$

unde $Q_m(x)$ şi $R_m(x)$ sunt polinoame de gradul m în x cu coeficienţi nedeterminaţi, coeficienţii lor obţinându-se prin identificare.

2) Dacă $a \pm ib$ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice asociată ecuaţiei diferenţiale omogene cu ordinul de multiplicitate p atunci soluţia particulară are forma:

$$y_p = e^{ax}x^p(Q_m(x)\cos bx + R_m(x)\sin bx), \tag{6.91}$$

unde $Q_m(x)$ şi $R_m(x)$ sunt polinoame de gradul m în x cu coeficienţii nedeterminaţi, coeficienţii lor obţinându-se prin identificare.

Exemplul 6.6.3 *Să se rezolve următoarele ecuaţii:*

$$(a)\ y^{(4)} - 2y^{(3)} + y^{(2)} = x^3, \qquad (b)\ y^{(4)} + y^{(3)} = \cos 4x,$$

Rezolvare:

(a) Ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei diferenţiale omogene $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y^{(2)} = 0$ este

$$r^4 - 2r^3 + r^2 = 0$$

şi are soluţiile $r = 0$ rădăcină dublă şi $r = 1$ rădăcină dublă. Deci soluţiile particulare sunt

$$y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = e^x,\ y_4 = xe^x \implies$$

iar soluţia generală a ecuaţiei este

$$y(x) = C_1 + C_2x + (C_3 + xC_4)e^x.$$

Deoarece 0 este soluţie a ecuaţiei caracteristice din (6.89) soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale neomogene este

$$y_p = x^2(ax^3 + bx^2 + cx + d).$$

Pentru a înlocui în ecuaţie trebuie determinate derivatele până la ordinul 4 ale soluţiei particulare.

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 \\
y_p'(x) &= 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx \\
y_p^{(2)} &= 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d \\
y_p^{(3)} &= 60ax^2 + 24bx + 6c \\
y_p^{(4)} &= 120ax + 24b, \quad \text{înlocuind în ecuaţie} \implies \\
x^3 &= 20ax^3 + (-120a + 12b)x^2 + (120a - 48b + 6c)x + 24b - 12c + 2d.
\end{aligned}$$

Identificând după puterile lui x se obţine: $a = \dfrac{1}{20},\ b = \dfrac{1}{2},\ c = 3,\ d = 12$, deci soluţia particulară a ecuaţiei neomogene este $y_p = \dfrac{1}{20}x^5 + \dfrac{1}{2}x^4 + 3x^3 + 12x^2$. Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$$y(x) = C_1 + C_2x + (C_3 + xC_4)e^x + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + 12x^2$$

oricare ar fi $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \in \mathbb{R}$;

(b) Ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei diferenţiale omogene $y^{(4)} + y^{(3)} = 0$ este

$$r^4 + r^3 = 0$$

şi are soluţiile $r = 0$ rădăcină triplă şi $r = -1$ rădăcină simplă. Deci soluţiile particulare sunt

$$y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2,\ y_4 = e^{-x} \implies$$

soluţia generală a ecuaţiei este

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-x}.$$

Deoarece $\pm 4i$ nu este soluţie a ecuaţiei caracteristice din (6.90) soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale neomogene este

$$y_p = a\cos 4x + b\sin 4x.$$

Procedând la fel ca şi în cazul precedent se obţine soluţia particulară $y_p = \dfrac{1}{1088}(4\cos 4x - \sin 4x)$. Deci soluţia generală e ecuaţiei neomogene este:

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-x} + \frac{1}{1088}(4\cos 4x - \sin 4x)$$

oricare ar fi $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \in \mathbb{R}$.

Exemplul 6.6.4 *Considerăm problema din Exemplul (6.6.1) cu* $a = 100$ *litri,* $b = 30$ *kg,* $c = 20$ *kg şi* $d = 3$ *l.*

Rezolvare: Folosind modelarea făcută, ecuaţia 6.84 devine

$$y' + \frac{3}{100}y = 0. \tag{6.92}$$

Soluţia generală a ecuaţiei este

$$y(t) = Ce^{-3/100*t},\ \forall\ C \in \mathbb{R}.$$

Iniţial avem 30 kg de sare, $y(0) = 30$ de unde $C = 30$, atunci cantitatea de sare din rezervor la momentul t este dată de

$$y(t) = 30e^{-3t/100}.$$

Pentru a determina după cât timp avem 20 kg de sare rezolvăm ecuaţia algebrică în t

$$20 = 30e^{-3t/100}$$

care are soluţia $t = -\frac{100}{3} ln \frac{2}{3} \simeq 13.51$ minute.

6.7 Sisteme de ecuaţii diferenţiale

Dacă fenomenul studiat depinde de variaţia a două sau mai multe mărimi, atunci fenomenul respectiv se va modela folosind sistemele de ecuaţii diferenţiale. De cele mai multe ori în natură se întâlnesc două sau mai multe specii care luptă pentru supravieţuire. Pentru a exemplifica sistemele de ecuaţii diferenţiale, în continuare se va studia modul în care interacţionează două populaţii.

6.7.1 Modelul populaţiilor

Considerăm două populaţii care interacţionează între ele, fapt ce va influenţa comportamentul ambelor populaţii. Există trei tipuri de interacţiuni:

(i) *Modelul pradă-prădător*: creşterea numerică a uneia dintre specii conduce la descreşterea numerică a celeilalte populaţii;

(ii) *Modelul competiţiei*: rata de creştere a fiecărei populaţii scade;

(iii) *Modelul simbiozei (sau mutualismului)*: rata de creştere a fiecărei populaţii creşte.

Modelul pradă-prădător. Sisteme de tip Lotka-Volterra

Se consideră un areal care cuprinde animale carnivore şi animale ierbivore. Animalele ierbivore vor fi prada, numărul prăzii la momentul t va fi $N(t)$. Animalele carnivore vor fi

prădătorii, numărul prădătorilor la momentul t va fi $P(t)$. Modelul matematic al evoluţiei celor două specii va fi dat de sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} &= N(a - bP) \\ \\ \dfrac{dP}{dt} &= P(cN - d) \end{cases} \tag{6.93}$$

Unde $a,\ b,\ c,\ d$ sunt constante pozitive. Pentru construirea modelului s-au avut în vedere următoarele:

(i) În absenţa prădătorilor prada creşte nelimitat (aN);

(ii) Prădătorii au efect de reducere a prăzii printr-un termen proporţional cu prada şi prădătorii ($-bNP$);

(iii) În absenţa prăzii, prădătorii scad exponenţial ($-dP$);

(iv) Contribuţia prăzii la creşterea numerică a prădătorilor este proporţională cu numărul lor (cPN).

Pentru a se studia astfel de sisteme de ecuaţii care modelează fenomene concrete, se face o scalare astfel încât termenii să fie adimensionali. Studiul sistemului (6.93) se face folosind teoria calitativă a sistemelor de ecuaţii diferenţiale şi se ajunge la concluziile că: soluţiile sistemului au un caracter periodic, creşterea prăzii duce la creşterea numărului de prădători şi diminuarea prăzii va atrage diminuarea prădătorilor.

6.8 Sisteme de ecuaţii diferenţiele cu coeficienţi constanţi

Forma generală a unui sistem de n ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi este:

$$\begin{cases} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2 \\ \vdots & \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n \end{cases} \tag{6.94}$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,\ j = \overline{1,n}$ şi f_i cu $i = \overline{1,n}$ sunt funcţii date. Dacă $f_i = 0$ oricare ar fi $i = \overline{1,n}$ atunci sistemul (6.94) este omogen. Sistemul (6.94) se poate scrie sub forma:

$$Y' = AY + B, \tag{6.95}$$

numită *forma matriceală a sistemului*, unde

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

6.8.1 Metoda reducerii la o ecuaţie diferenţială de ordinul n

Se consideră sistemul (6.94). Pentru a-l reduce la o ecuaţie diferenţială de ordinul n cu coeficienţi constanţi se procedează astfel:

(i) Se alege una din ecuaţiile sistemului (de exemplu prima) şi se derivează;

(ii) În ecuaţia obţinută la punctul (i) se înlocuieşte $y_2',\ y_3',\ \dots,\ y_n'$) folosind sistemul iniţial;

(iii) Ecuaţia diferenţială obţinută la punctul (ii) se derivează de încă $(n-2)$ ori şi se vor elimina necunoscutele $y_2,\ y_3,\ \dots,\ y_n$ precum şi derivatele lor folosind relaţiile obţinute la punctele anterioare precum şi ecuaţiile sistemului.

Exemplul 6.8.1 *Să se rezolve sistemul de ecuaţii diferenţiale,*

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 - 5y_2 \\ y_2' &= 2y_1 - y_2 \end{cases}.$$

Rezolvare: Se derivează prima ecuaţie şi se obţine:

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= y_1' - 5y_2', \text{ se înlocuieşte } y_2' \text{ din a doua ecuaţie} \Longrightarrow \\ y_1^{(2)} &= y_1' - 10y_1 + 5y_2, \text{ se exprimă } y_2 \text{ din a prima ecuaţie a sistemului} \Longrightarrow \\ y_1^{(2)} &= -9y_1. \end{aligned} \tag{6.96}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (6.96) este

$$y_1 = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x), \tag{6.97}$$

oricare ar fi $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$. Înlocuind pe y_1 astfel obţinut în prima ecuaţie a sistemului iniţial se obţine cealaltă componentă a soluţiei sistemului şi anume,

$$y_2 = \frac{1}{5}\left[-(3C_1 + C_2)\sin(3x) + (3C_2 - C_1)\cos(3x)\right], \tag{6.98}$$

oricare ar fi $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$. Forma matriceală a soluţiei sistemului este:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(3x) & \sin(3x) \\ \dfrac{3\sin(3x) + \cos(3x)}{5} & \dfrac{\sin(3x) - 3\cos(3x)}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

oricare ar fi $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

În general operaţiile de eliminare pot fi lungi şi complicate. Acestea pot fi evitate folosind metoda ecuaţiei caracteristice.

6.8.2 Metoda ecuaţiei caracteristice

Cazul omogen

Deoarece prin metoda reducerii se obţine întotdeauna o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n care admite soluţii de forma e^{rx}, atunci se vor căuta soluţii pentru sistemul

$$Y' = AY, \tag{6.99}$$

$A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, de forma

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} e^{rx}.$$

Dacă se derivează şi se înlocuieşte în (6.99), se dă factor comun în fiecare ecuaţie pe e^{rx}, care se va simplifica, se va obţine sistemul algebric,

$$\begin{cases} (a_{11} - r)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n &= 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - r)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n &= 0 \\ \vdots & \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - r)\alpha_n &= 0 \end{cases}. \tag{6.100}$$

Pentru ca sistemul (6.100) să aibă şi soluţii nenule trebuie ca determinantul sistemului să fie nul adică:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-r & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-r \end{vmatrix} = 0. \tag{6.101}$$

Ecuaţia (6.101) se numeşte *ecuaţia caracteristică ataşată sistemului* (6.99). În funcţie de natura rădăcinilor ecuaţiei caracteristice există unul din următoarele cazuri:

(i) Ecuaţia caracteristică are n rădăcini reale şi distincte, atunci soluţiile particulare vor fi de forma:

$$Y^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \vdots \\ \alpha_n^1 \end{pmatrix} e^{r_1 x}, \quad Y^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \vdots \\ \alpha_n^2 \end{pmatrix} e^{r_2 x}, \quad \dots, \; Y^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n \\ \alpha_2^n \\ \vdots \\ \alpha_n^n \end{pmatrix} e^{r_n x}, \tag{6.102}$$

constantele α se vor determina prin înlocuirea soluţiilor în sistemul (6.100);

(ii) Ecuaţia caracteristică are rădăcina $r = r_1$ cu ordinul de multiplicitate p, atunci soluţiile particulare determinate vor fi de forma:

$$Y^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \vdots \\ \alpha_n^1 \end{pmatrix} e^{r_1 x}, \quad Y^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \vdots \\ \alpha_n^2 \end{pmatrix} x e^{r_1 x}, \quad \dots, \; Y^p = \begin{pmatrix} \alpha_1^n \\ \alpha_2^n \\ \vdots \\ \alpha_n^n \end{pmatrix} x^{p-1} e^{r_1 x}; \tag{6.103}$$

(iii) Ecuaţia caracteristică are şi rădăcinile complexe $r_1 = \alpha + i\beta, \; r_2 = \alpha - i\beta$ atunci soluţiile particulare corespunzătoare sunt:

$$Y^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \vdots \\ \alpha_n^1 \end{pmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad Y^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \vdots \\ \alpha_n^2 \end{pmatrix} e^{\alpha x}\sin(\beta x). \tag{6.104}$$

La fel ca şi în cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul n cu coeficienţi constanţi soluţia generală a sistemului de ecuaţii se va scrie ca şi o combinaţie liniară a soluţiilor particulare $Y^1,\ Y^2, \ldots,\ Y^n$,

$$Y = C_1Y^1 + C_2Y^2 + \ldots + C_nY^n, \tag{6.105}$$

oricare ar fi $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n \in \mathbb{R}$.

Observaţia 6.8.1 *Pentru cazul sistemelor neomogene se procedează ca şi la ecuaţiile diferenţiale liniare de ordinul n cu coeficienţi constanţi. Adică, trebuie determinată soluţia generală a sistemului omogen şi apoi se va căuta soluţia particulară a sistemului neomogen în funcţie de forma membrului drept. Soluţia generală a sistemului neomogen va fi suma dintre soluţia generală a sistemului omogen şi soluţia particulară a sistemului omogen.*

Observaţia 6.8.2 *Pentru a aplica metoda ecuaţiei caracteristice trebuie ca sistemul să fie scris sub forma*

$$Y' = AY.$$

Exemplul 6.8.2 *Să se rezolve sistemele de ecuaţii diferenţiale:*

$$(a)\begin{cases} y_1' &= y_1 - 2y_2 - y_3 \\ y_2' &= -y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' &= y_1 - y_3 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} y_1' &= -4y_1 + 2y_2 + 5y_3 \\ y_2' &= 6y_1 - y_2 - 6y_3 \\ y_3' &= -8y_1 + 3y_2 + 9y_3 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 + 3y_2 - y_3 \\ y_3' &= -y_1 + 2y_3 + 3y_3 \end{cases}$$

Rezolvare:

(a) Ecuaţia caracteristică ataşată sistemului este:

$$\begin{vmatrix} 1-r & -2 & -1 \\ -1 & 1-r & +1 \\ 1 & 0 & -1-r \end{vmatrix} = 0 \tag{6.106}$$

şi are soluţiile $r_1 = 0,\ r_2 = -1,\ r_3 = 2$. Forma generală a primei soluţii particulare este:

$$Y^1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} e^{0x}.$$

Pentru a determina $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ se va înlocui Y^1 în sistemul de ecuaţii diferenţiale şi după efectuarea simplificărilor se va obţine sistemul algebric:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} \alpha & -2\beta & -\gamma & =0 \\ -\alpha & +\beta & +\gamma & =0 \\ \alpha & & -\gamma & =0 \end{array}\right. \tag{6.107}$$

care are soluţiile $\alpha=1,\ \beta=0,\ \gamma=1$. Deci,

$$Y^1=\left(\begin{array}{c}1\\0\\1\end{array}\right).$$

Procedând analog cea de-a doua soluţie particulară are forma:

$$Y^2=\left(\begin{array}{c}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{array}\right)e^{-x}.$$

Aplicând acelaşi procedeu pentru determinarea lui $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ a doua soluţie particulară va fi

$$Y^2=\left(\begin{array}{c}0\\2\\1\end{array}\right)e^{-x}.$$

Cea de-a treia soluţie particulară a sistemului este:

$$Y^3=\left(\begin{array}{c}3\\-2\\1\end{array}\right)e^{2x}.$$

Soluţia generală a sistemului este

$$\begin{aligned} Y &= (Y^1\ Y^2\ Y^3)\left(\begin{array}{c}C_1\\C_2\\C_3\end{array}\right)\Longleftrightarrow \\ y &= \left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 3e^{2x}\\ 0 & e^{-x} & -2e^{2x}\\ 1 & -2e^{-x} & e^{2x}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}C_1\\C_2\\C_3\end{array}\right), \end{aligned}$$

oricare ar fi $C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R}$;

(b) Ecuaţia caracteristică ataşată sistemului este:

$$\begin{vmatrix} -4-r & 2 & 1 \\ 6 & -1-r & -6 \\ -8 & 3 & 9-r \end{vmatrix} = 0 \tag{6.108}$$

şi are rădăcinile $r_1 = 2,\ r_2 = 1,\ r_3 = 1$. Forma generală a primei soluţii particulare este:

$$Y^1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Procedând la fel ca şi la punctul (a) obţinem $\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = -2$. Deci,

$$Y^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Pentru rădăcina dublă se procedează astfel. Soluţiile particulare corespunzătoare sunt:

$$Y^2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} e^x, \quad Y^3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} xe^x. \tag{6.109}$$

Datorită liniarităţii, $Y_p = Y^2 + Y^3$ este soluţie particulară de forma

$$Y^p = \begin{pmatrix} a_1x + b_1 \\ a_2x + b_2 \\ a_3x + b_3 \end{pmatrix} e^x. \tag{6.110}$$

Pentru a determina constantele se înlocuieşte în sistemul iniţial şi se va obţine un sistem algebric cu necunoscutele $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3$. După rezolvarea sistemului algebric dublu nedeterminat se va obţine,

$$Y^p = \begin{pmatrix} c_2x + c_2 + c_3 \\ 3c_2 \\ c_2x + c_3 \end{pmatrix} e^x. \tag{6.111}$$

Soluţia generală a sistemului va fi:

$$\begin{array}{lll} y_1 & = c_1e^{2x} & +(c_2x+c_2+c_3)e^x \\ y_2 & = -2c_1e^{2x} & +3c_2e^x \\ y_3 & = 2c_1e^{2t} & +(c_2x+c_3)e^x \end{array} ,$$

oricare ar fi $c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}$;

(c) Ecuaţia caracteristică ataşată sistemului este,

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 & 0 \\ -1 & 3-r & -1 \\ -1 & 2 & 3-r \end{vmatrix} = 0 \tag{6.112}$$

şi are soluţiile $r_1 = 2,\ r_2 = 3+i,\ r_3 = 3-i$. Forma generală a primei soluţii particulare este:

$$Y^1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Pentru rădăcinile complexe se procedează astfel. Soluţiile particulare corespunzătoare sunt:

$$Y^2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cos x e^{3x}, \quad Y^3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \sin x e^{3x}. \tag{6.113}$$

Datorită liniarităţii $Y_p = Y^2 + Y^3$ este soluţie particulară de forma

$$Y^p = \begin{pmatrix} a_1\cos x + b_1 \sin x \\ a_2\cos x + b_2 \sin x \\ a_3\cos x + b_3 \sin x \end{pmatrix} e^{3x}. \tag{6.114}$$

Pentru a determina constantele se înlocuieşte în sistemul iniţial şi se va obţine un sistem algebric cu necunoscutele $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3$. După rezolvarea sistemului algebric dublu nedeterminat vom obţine

$$Y^p = \begin{pmatrix} e^{3x}(\beta\cos x + \gamma \sin x) \\ e^{3x}(\beta+\gamma)\cos x + (\gamma-\beta)\sin x \\ e^{3x}(2\beta-\gamma)\cos x + (2\gamma+\beta)\sin x \end{pmatrix}. \tag{6.115}$$

Soluţia generală a sistemului va fi:

$$\begin{aligned} y_1 = &\quad \alpha e^{2x} &+e^{3x}(\beta\cos x+\gamma\sin x)\\ y_2 = &\qquad\quad\ \ &e^{3x}(\beta+\gamma)\cos x+(\gamma-\beta)\sin x\\ y_3 = &\quad \alpha e^{2x} &+e^{3x}(2\beta-\gamma)\cos x+(2\gamma+\beta)\sin x \end{aligned} \quad ,$$

oricare ar fi $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{R}$.

6.9 Aplicaţii

1. Să se determine mulţimea soluţiilor următoarelor ecuaţii:

(a) $y'=y^2$

(b) $y'=e^y$

(c) $y'=y^3+1$

(d)$y'=\sqrt{4-y^2}$

(e) $1+y^2+xyy'=0$

(f) $y'tgx-y=0$

(g) $y'-\dfrac{1}{1-x^2}y=1+x$

(h) $y'-y\mathrm{tg}y=\dfrac{1}{\cos x}$

(i) $y+(2\sqrt{xy}-x)y'=0$

(j) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$

(k) $y'=\dfrac{y^2+x^2}{xy}$

(l) $x\ln\dfrac{x}{y}dy-ydx=0$

2. O pâine scoasă din cuptor are temperatura 100°C şi ajunge la temperatura de 60°C în decurs de 20 minute, într-un mediu al cărui temperatură este de 20°C. Peste cât timp începând din momentul răcirii, pâinea va ajunge la temperatura de 25°C?

Rezolvare: Se foloseşte legea lui Newton care afirmă că viteza de răcire a unui corp cu temperatura T, aflat într-un mediu cu temperatura T_0, este proporţională cu diferenţa $T-T_0$.

$$\frac{dT}{dt}=k(T-T_0). \tag{6.116}$$

Soluţia generală a ecuaţiei este:

$$T(t) = T_0 + Ce^{kt}. \tag{6.117}$$

Pentru determinarea constantelor C şi k se folosesc condiţiile iniţiale, şi anume temperatura pâinii la momentul scoateri din cuptor ($t = 0$) este de $100°C$ şi după 20 de minute temperatura pâinii este de 60°C. Deci pentru $t = 0$ şi $T = 100$ rezultă $C = 80$. Pentru $t = 20$ şi $T = 60$ se obţine

$$e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Cu ajutorul acestor constante se determină timpul după care pâinea va avea temperatura de 25°C,

$$25 = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

Rezolvând ecuaţia rezultă $t = 80$ minute.

3. Să se determine mulţimea soluţiilor următoarelor ecuaţii:

(a) $xy' + y = e^x$

(b) $y' - 2y = -x^2$

(c) $xy' - y + x = 0$

(d) $y' + \dfrac{2y}{x^2 - 1} = 2x + 2$

(e) $(1 - x^2)y' + 2xy = 4x$

(f) $\begin{vmatrix} y' - 1 & 3x^2 \\ y - x & x^3 \end{vmatrix} = 0$

(g) $y' + y = 2e^x$

(h) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$

4. Un bazin trebuie populat cu peşti dintr-o anumită specie. Ştiind că dinamica populaţiei este modelată de ecuaţia (6.55) cu $\alpha = 100$ şi $\beta = 0.02$ Să se determine după cât timp avem 40 de peşti în bazin dacă iniţial am avut 2 peşti. Dar dacă iniţial am avut 10 peşti? Ce se observă?

5. Pentru susţinerea unui pod se construiesc picioare din beton armat de înălţime H metri în conformitate cu Figura 6.7, a căror secţiuni orizontale sunt cercuri. Ştiind că

fiecare picior suportă sarcina F exprimată în newtoni [N], greutatea specifică a materialului este $\gamma \left[\frac{N}{m^3}\right]$ şi că rezistenţa admisă este $\sigma \left[\frac{N}{m^2}\right]$. Să se determine aria secţiunilor inferioare, superioare precum şi ecuaţia curbei meridiane (la consum minim de material de construcţie).

Rezolvare: Aria secţiunii superioare este $S_0 = \frac{F}{\sigma}$ $[m^2]$. Aria secţiunii S la cota z, $S(z) > S(0) = S_0$, deoarece, în afară de sarcina F ea trebuie să suporte şi greutatea porţiunii de pod de deasupra lui. Dacă z creşte cu dz atunci S creşte cu dS şi greutatea cilindrului elementar cu înălţimea dz şi aria S trebuie să fie egală cu σdS. Deci

$$\sigma dS = \gamma S dz.$$

Această ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă are soluţia generală

$$\int_{S_0}^{S} \frac{dS}{S} = \frac{\gamma}{\sigma} \int_0^z dz \quad \text{sau} \quad S(z) = S_0 \exp\left(\frac{\gamma z}{\sigma}\right). \tag{6.118}$$

Deoarece $\frac{S}{S_0} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^2$, din relaţia (6.118) se deduce ecuaţia curbei meridiane

$$y(z) = y_0 \exp\left(\frac{\gamma z}{2\sigma}\right).$$

Înlocuind z cu H, din relaţia (6.118) rezultă aria inferioară

$$S(H) = S_0 \exp\left(\frac{\gamma H}{\sigma}\right).$$

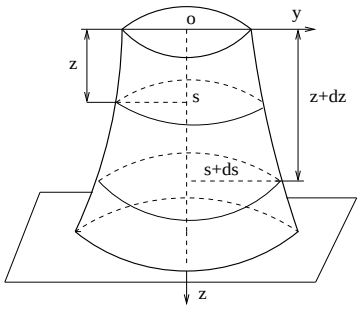


Figura 6.7: Modelul geometric al piciorului de susţinere.

6. Să se determine mulţimea soluţiilor următoarelor ecuaţii:

(a) $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$, (b) $y' + \frac{1}{x}y = -xy^2$,
(c) $y' + 2y = y^2e^x$, (d) $2xyy' - y^2 + x = 0$,
(e) $y' - y\text{tg}x = y^4 \cos x$, (f) $y' + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}$.

7. Să se determine mulţimea soluţiilor următoarelor ecuaţii diferenţiale ştiind că admit soluţiile particulare indicate:

(a) $y' - y^2 - y\ ctg\ x + \sin^2 x = 0$, $y_1 = 3x$
(b) $x^2y' + x^2y^2 + xy - 4 = 0$, $y_1 = \frac{2}{x}$

8. Să se determine mulţimea soluţiilor următoarelor ecuaţii diferenţiale:

(a) $y'' = (-y'')^2$ (b) $y'' = -\sqrt{1-(y')^2}$
(c) $y'' = \sqrt{1+(y'')^2}$ (d) $(y'')^2 = y'$
(e) $y^{(4)} = y''$ (f) $y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$
(g) $y''^2 + (y'')^2 = 1$ (h) $y'' = -\frac{1}{y^3}$
(i) $y'' = 2yy'$ (j) $2(y')^2 = y''(y-1)$
(k) $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1$ (l) $2yy'' - 3y' = 4y^2$

9. Să se determine mulţimea soluţiilor următoarelor ecuaţii diferenţiale:

(a) $y'' + y = 0$ (b) $y'' - y = 0$
(c) $y'' - 3y'' + 3y' - y = 0$ (d) $y_{(4)} - 6'' + 9y = 0$
(e) $y'' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$ (f) $y^{(5)} - 4y^{(4)} + 5y'' - 6y' - 4y = 0$
(g) $y^{(4)} - 2y'' + y'' = x$ (h) $y^{(4)} - 2y'' + y'' = e^x$
(i) $y^{(4)} - 2y'' + y'' = x + e^x$ (j) $y'' + y'' + y' + y = xe^x$
(k) $y'' + y = \sin x - \cos x$ (l) $y^{(4)} - 2y'' + y = \cos x + xe^x + 2$

10. Să se determine mulţimea soluţiilor următoarelor sisteme de ecuaţii diferenţiale:

(a) $\begin{cases} y_1' - y_2 - y_3 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_3 = 0 \\ y_3' - y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y_1' - 3y_1 - 12y_2 + 4y_3 = 0 \\ y_2' + y_1 + 3y_2 - y_3 = 0 \\ y_3' + y_1 + 12y_2 - 6y_3 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y_1' - 10y_1 + 3y_2 + 9y_3 = 0 \\ y_2' + 18y_1 - 7y_2 - 18y_3 = 0 \\ y_3' - 18y_1 + 6y_2 + 17y_3 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y_1' - 5y_1 + y_2 + 4y_3 = 0 \\ y_2' + 12y_1 - 5y_2 - 12y_3 = 0 \\ y_3' - 10y_1 + 3y_2 + 9y_3 = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y_1' + 3y_1 - 4y_2 + 2y_3 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_3 = 0 \\ y_3' - 6y_1 + 6y_2 - 5y_3 = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} y_1' + y_1 - y_2 - y_3 = e^x \\ y_2' - y_1 + y_2 - y_3 = e^{3x} \\ y_3' - y_1 - y_2 - y_3 = 4 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y_1' + 2y_1 + 4y_2 = 1 + 4x \\ y_2' + y_1 - y_2 = \dfrac{3}{2}x^2 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} y_1' + 2y_1 + y_2 = \sin x \\ y_2' - 4y_1 - 2y_2 = \cos x \end{cases}$

(i) $\begin{cases} y_1' - 5y_1 + 3y_2 = 2e^{3t} \\ y_2' - y_1 - y_2 = 5e^{-t} \end{cases}$

(j) $\begin{cases} y_1' - 2y_1 - y_2 = e^t \\ y_2' + 2y_1 = 2t \end{cases}$

(k) $\begin{cases} y_1' - 2y_1 - 4y_2 = \cos x \\ y_2' + y_1 + 2y_2 = \sin x \end{cases}$

(l) $\begin{cases} y_1' - 3y_1 + 2y_2 = 0 \\ y_2' - 2y_1 + y_2 = 15e^x\sqrt{x} \end{cases}$

Capitolul 7

Probabilităţi

Teoria probabilităţilor a apărut în secolul $XVII$ în Franţa în perioada în care matematicienii Blaise Pascal şi Pierre de Fermat corespondau asupra unor probleme provenite din jocurile de noroc: *Care va fi cota de pariu dacă din* 24 *de auncări ale unui zar trebuie să se obţină de cel puţin două ori faţa cu* 6 *puncte?*

În continuare amintim alte probleme care de-a lungul timpului au dus la dezvoltarea teoriei probabilităţilor:

• secolele $XVII - XIX$: companiile de asigurări se întrebau care este riscul ca un client să moară în următorul an;

• secolul XIX fizicienii şi-au pus problema determinării probabilistice a modului de mişcare a moleculelor;

• secolul XX în domeniul ştiinţelor naturii şi în industrie s-au pus probleme de următorul tip: Câţi bulbi deterioraţi se află într-un container cu 10000 de bulbi dacă după ce verificăm 100 constatăm ca 88 sunt buni?

7.1 Noţiuni de bază

Definiţia 7.1.1 *Realizarea unui ansamblu de condiţii corespunzător unui criteriu de cercetare propus se numeşte* **experienţă**.

Exemple de experienţe: extragerea unei cărţi de joc, aruncarea unui zar, cântărirea unui student, privitul pe fereastră, *etc.*

Definiţia 7.1.2 *Alegerea, la întâmplare, a unei condiţii dintr-un ansamblu de condiţii se numeşte* **probă**.

Definiţia 7.1.3 *Prin* **eveniment** *se înţelege orice situaţie legată de o anumită experienţă.*

Exemple de evenimente (corespunzătoare exemplelor de experienţe din definiţia 7.1.1): extragerea zecelui de pică, faţa cu numărul trei, 70 de kilograme, vreme frumoasă.

Clasificarea evenimentelor

Definiţia 7.1.4 *Prin* **eveniment simplu (sau elementar)** *se înţelege evenimentul realizat de o singură probă.*
Prin **eveniment compus** *se înţelege evenimentul realizat de mai multe probe.* **Evenimentul cert (sau sigur)** *este evenimentul care se realizează ori de câte ori se realizează experienţa şi se notează cu* E.
Evenimentul imposibil *este evenimentul care nu se realizează ori de câte ori se realizează experienţa şi se notează cu* Φ.
Eveniment aleator (sau întâmplător) *este evenimentul care uneori se produce alteori nu, atunci când se realizează experienţa şi se notează cu* $A,\ B, \ldots$
Evenimentul contrar (sau opus) *unui eveniment* A *se realizează ori de câte ori nu se realizează* A *şi se notează cu* $\overline{A}$.

Definiţia 7.1.5 *Două evenimente* $A,\ B$ *sunt* **compatibile** *dacă se pot realiza simultan. Evenimentele* $A,\ B$ *sunt* **incompatibile** *dacă nu se pot realiza în acelaşi timp.*

Definiţia 7.1.6 *Două* **evenimente** $A,\ B$ *sunt* **independente** *atunci când realizarea unui eveniment nu depinde de realizarea celuilalt eveniment.* **Evenimentele** $A,\ B$ *sunt* **dependente** *dacă realizarea unuia depinde de realizarea celuilalt.*

Pentru exemplificarea noţiunilor de mai sus considerăm experienţa aruncării unui zar şi avem:

- *evenimentul aleator* este obţinerea oricărei feţe (avem 6 astfel de evenimente);
- *evenimentul sigur* constă în obţinerea unei feţe a zarului,
- *evenimentul imposibil* va fi atunci când nu se obţine nici o faţă.

7.2 Relaţii şi operaţii cu evenimente

Fie A şi B două evenimente aleatoare.

Definiţia 7.2.1 *Spunem că* **evenimentul** A **implică evenimentul** B *dacă realizarea evenimentului* A *atrage după sine realizarea evenimentului* B *şi se notează* $\mathbf{A \subset B}$.
Prin **reuniunea** *a două evenimente* A *şi* B *se înţelege un eveniment* C *a cărui realizare constă în realizarea a cel puţin unuia dintre cele două evenimente şi se notează cu* $\mathbf{A \cup B}$.
Prin **intersecţia** *a două evenimente* A *şi* B *se înţelege un eveniment* C *a cărui realizare constă în realizarea simultană a evenimentelor* A *şi* B *şi se notează cu* $\mathbf{A \cap B}$.

Teorema 7.2.1 *(Proprietăţile operaţiilor cu evenimente) Fie* A, B, *şi* C *evenimente aleatoare legate de aceeaşi experienţă. Atunci:*

(i) $A \cup \overline{A} = E$;

(ii) $A \cap \overline{A} = \emptyset$;

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

(iv) Dacă $A \cap B = \emptyset$ *atunci evenimentele* A *şi* B *sunt incompatibile;*

(v) $A \cap E = A$;

(vi) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(vii) $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$;

(viii) $(A \cup B) = A \cup (\overline{A} \cap B)$;

(ix) $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$.

Demonstraţie: În cele ce urmează vom arăta doar afirmaţia a *(vii)* a teoremei restul rămânâd ca temă.
(vii) Folosind celelalte proprietăţi $((i) - (vi))$ avem

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) &= ((A \cap B) \cup \overline{A})) \cap ((A \cap B) \cup B) = \\ &= ((A \cup \overline{A}) \cap (\overline{A} \cup B)) \cap ((B \cup A) \cap (B \cup B)) =\end{aligned}$$

$$= (E \cap (\overline{A} \cup B)) \cap ((B \cup A) \cap B) =$$
$$= (\overline{A} \cup B) \cap B = B.$$

Definiţia 7.2.2 *Mulţimea tuturor evenimentelor corespunzătoare unei experienţe M este un* **câmp de evenimente** *dacă:*
(i) oricare ar fi $A \in M$ rezultă că $\overline{A} \in M$,
(ii) oricare ar fi evenimentele A şi B din M rezultă că $A \cup B \in M$ şi $A \cap B \in M$.

Observaţia 7.2.1 *Evenimentul sigur (E) şi evenimetul imposibil ($\emptyset$) aparţin mulţimii M.*

Definiţia 7.2.3 *O mulţime de evenimente $\{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n\}$ se numeşte* **sistem complet de evenimente** *dacă:*
(i) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$,
(ii) $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$.

Observaţia 7.2.2 *Mulţimea tuturor evenimentelor ataşate unei experienţe formează un sistem complet de evenimente.*

Considerăm experienţa aruncării unei monede. Sistemul complet de evenimente ataşat ecestei experienţe conţine următoarele evenimente: $C-$ evenimentul de a obţine cap, $S-$ evenimentul de a obţine stema, evenimentul sigur şi evenimentul imposibil.

7.3 Noţiunea de probabilitate. Proprietăţi

Considerăm experienţa aruncării unui zar. Evenimentele posibile care rezultă din această experienţă sunt: să se obţină faţa cu un punct, să se obţină faţa cu două puncte, să se obţină faţa cu trei puncte, să se obţină faţa cu patru puncte, să se obţină faţa cu cinci puncte, respectiv, să se obţină faţa cu şase puncte. Problema de care suntem interesaţi în continuare constă în determinarea şansei cu care se realizează un anumit eveniment. Şansa cu care se va realiza un eveniment se numeşte **probabilitatea acelui eveniment**.

Definiţia 7.3.1 Probabilitatea *cu care se realizează evenimentul A este dată de fracţia:*

$$\frac{\textit{numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului } A}{\textit{numărul cazurilor posibile de realizare a evenimentului } A}$$

şi se va nota cu $\mathbf{P}(\mathbf{A})$.

Teorema 7.3.1 *(Proprietăţile probabilităţilor) Fie A, B şi C trei evenimente aleatoare, atunci:*

(i) $P(E) = 1$,

(ii) $P(\emptyset) = 0$,

(iii) $0 \leq P(A) \leq 1$,

(iv) Dacă A şi B sunt evenimente independente atunci $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$,

(v) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

(vi) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(C \cap B) + P(A \cap B \cap C)$.

(vii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Demonstraţie:

(i) Probabilitatea cu care se realizează evenimentul sigur este 1 deoarece în acest caz numărul evenimentelor favorabile este acelaşi cu numărul evenimentelor posibile.

(ii) Probabilitatea cu care se realizează evenimentul imposibil este 0 deoarece în acest caz numărul evenimentelor favorabile este 0.

(iii) Întotdeauna probabilitatea cu care se realizează un eveniment este cuprinsă între 0 şi 1 deoarece fracţia care defineşte probabilitatea nu poate avea numărătorul mai mare decât numitorul (nu se poate ca numărul cazurilor favorabile să fie strict mai mare decât numărul cazurilor posibile).

(v) Folosind $(viii)$ din Teorema 7.2.1 avem

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup (\overline{A} \cap B) \implies \\ P(A \cup B) &= P(A \cup (\overline{A} \cap B)),\ A \text{ şi } (\overline{A} \cap B)) \text{ sunt incompatibile} \implies \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(\overline{A} \cap B) \end{aligned} \tag{7.1}$$

De asemenea din Teorema 7.2.1 punctul (vii) avem

$$P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) = P(B) \tag{7.2}$$

Din (7.1) şi (7.2) rezultă că $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(vi) Notăm $D = B \cup C$, atunci folosind (v) rezultă

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D). \tag{7.3}$$

Deoarece $A \cap D = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, aplicând proprietatea (v) în (7.3), rezultă $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(C \cap B) + P(A \cap B \cap C)$.

(vii) Deoarece $A \cup \overline{A} = E$ rezultă $P(A \cup \overline{A}) = 1$ şi aplicând proprietatea (vi) rezultă $1 = P(A) + P(\overline{A}) - P(A \cap \overline{A})$, dar $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Deci se obţine $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Exemplul 7.3.1 *Se aruncă un zar. Care este probabilitatea de a obţine o faţă cu un număr par de puncte?*

Rezolvare: Notăm cu A evenimentul prin care obţinem o faţă cu un număr par de puncte. Numărul cazurilor posibile este 6. Numărul cazurilor favorabile este 3, deci $P(A) = \frac{1}{2}$.

Exemplul 7.3.2 *O urnă conţine* 6 *bile albe,* 3 *bile roşii,* 5 *bile verzi şi* 3 *bile albastre. Care este probabilitatea de a extrage*

(i) *o bilă albă,*

(ii) *dar una verde,*

(iii) *dar una colorată?*

Rezolvare: Notăm cu:

A evenimentul de a extrage o bila albă,

B evenimentul corespunzător extragerii unei bile verzi

C evenimentul corespunzător extragerii unei bile colorate.

$P(A) = \frac{6}{6+3+5+3} = 0.35$, $P(B) = \frac{5}{17} = 0.29$ şi $P(C) = \frac{3+5+3}{17} = 0.65$.

Metoda II pentru punctul *(iii).* Deoarece C este evenimentul contrar lui A este mai simplu să se calculeze $P(C) = 1 - P(A) = 1 - 0.35 = 0.65$.

Exemplul 7.3.3 *Se aruncă două zaruri. Care este probabilitatea ca suma feţelor să fie un număr mai mare sau egal cu 6?*

Rezolvare: Notăm cu A evenimentul ca suma feţelor să fie mai mare decât 6. Cazurile posibile sunt:

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

Deci avem 36 de evenimente posibile. Cazurile favorabile sunt:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & (1,5) & (1,6) \\
 & & & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
 & & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
 & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array},$$

adică 26. Atunci avem: $P(A) = \dfrac{26}{36} = 0.72$

Exemplul 7.3.4 *Pe un raft sunt 25 de cărţi din care 20 sunt de botanică. Care este probabilitatea ca luând 10 cărţi la întâmplare printre acestea să fie cărţi de botanică.*

Rezolvare: Notăm cu A evenimentul de a extrage 10 cărţi de botanică.

$$P(A) = \frac{C_{20}^{10}}{C_{25}^{10}} = \frac{184756}{3268760} = 0.056$$

7.4 Probabilităţi condiţionate

Probabilitatea condiţionată este folosită pentru a descrie influenţa unui eveniment asupra altui eveniment. Altfel spus, cum se modifică probabilitatea de realizare a evenimentului A dacă se realizează evenimentul B? Până acum probabilitatea de realizare a evenimentului A era dată de raportul dintre cazurile favorabile realizării evenimentului A şi cazurile posibile. Acum avem informaţii suplimentare, şi anume, ne interesează probabilitatea cu

care se realizează evenimentul A dacă se realizează evenimentul B. Această probabilitate se notează cu $P(A|B)$.

Definiţia 7.4.1 Probabilitatea condiţionată *de realizare a evenimentului A când se realizează evenimentul B este*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{7.4}$$

Exemplul 7.4.1 *Pe un eşantion de* 100000 *de femei s-a constatat că* 89.84% *dintre ele au speranţa de viaţă de* 60*, ani în timp ce doar* $57,1\%$ *au speranţa de viaţă de* 80 *de ani. Care este probabilitatea ca o femeie de* 60 *ani să ajungă la* 80 *de ani?*

Rezolvare: Notăm cu A evenimentul corespunzător speranţei de viaţă de 80 de ani, cu B evenimentul corespunzător speranţei de viaţă de 60 de ani şi cu C evenimentul ca o femeie de 60 ani să ajungă la 80 de ani.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{57.1}{89.84} = 0.64$$

Deci doar 64% dintre femeile de 60 de ani ajung la 80 de ani.

Teorema 7.4.1 *(Proprietăţile probabilităţilor condiţionate)*

(i) Probabilităţile $P(A|B)$ şi $P(B|A)$ sunt proporţionale.

*(ii) (***Formula probabilităţii totale***) Dacă $A_1,\ A_2,\ \ldots, A_n$ formează un sistem complet de evenimente şi B este un eveniment oarecare atunci,*

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n) \tag{7.5}$$

(iii) **(Formula lui Bayes)** *Dacă $A_1,\ A_2,\ \ldots, A_n$ formează un sistem complet de evenimente şi B este un eveniment oarecare atunci,*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)} \tag{7.6}$$

(iv) **(Inegalitatea lui Boole)** *Fie $A_1,\ A_2,\ \cdots, A_n$ evenimente din câmpul M, atunci*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) \tag{7.7}$$

(v)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \tag{7.8}$$

Inegalitatea lui Boole poate fi scrisă sub forma:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1 \tag{7.9}$$

Demonstraţie:

(i) Din (7.4) avem

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A) \iff \frac{P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B|A)}{P(B)}.$$

(ii) Dacă $A_1,\ A_2,\ \ldots, A_n$ formează un sistem complet de evenimente care aparţin câmpului de evenimente M şi $B \in M$ atunci

$$\begin{aligned} B &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n) \implies \\ P(B) &= P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)) = \\ &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n) \end{aligned}$$

Folosind (7.4) obţinem

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n).$$

(iii) Din (7.4) şi (7.5) rezultă (7.6).

(v) Aplicăm de două ori (7.4), întâi pentru A_3 condiţionat de $A_1 \cap A_2$ şi apoi pentru A_2 condiţionat de A_1 şi rezultă

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

Exemplul 7.4.2 *În tabelul de mai jos sunt date procentele cu care bărbaţii (B) şi femeile (F) sunt angajaţi (A) sau şomeri (S), fiind excluşi cei care nu doresc să lucreze.*

	B	F	
A	*0.52*	*0.41*	*0.93*
S	*0.05*	*0.02*	*0.07*
	0.57	*0.43*	*1*

Determinaţi probabilitatea ca o persoană angajată să fie bărbat şi probabilitatea ca un bărbat să fie angajat?

Rezolvare: Probabilitatea ca un angajat să fie bărbat este $P(A|B) = \dfrac{0.52}{0.57} = 0.91$. Pentru a determina probabilitatea ca un bărbat să fie angajat este $P(B|A)$. Folosind (7.4) avem

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}. \tag{7.10}$$

Probabilitatea ca o persoană să fie angajată este

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap F) = P(A|B)P(B) + P(A|F)P(F). \tag{7.11}$$

Folosind proprietatea (i) din Teorema 7.4.1, egalităţile (7.10) şi (7.11) se obţine:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|F)P(F)} = \frac{0.91 \cdot 0.57}{0.91 \cdot 0.57 + 0.95 \cdot 0.43} = 0.56.$$

Exemplul 7.4.3 *Un anumit tip de buştean are următoarele calităţi:*
- lungimea corespunzătoare cu probabilitatea 96%*,*
- grosimea corespunzătoare cu probabilitatea 96%*,*
- umiditatea corespunzătoare cu probabilitatea 96%*.*
Standardele pentru buşteni cer îndeplinirea acestor cerinţe în proporţie de 90%*. Poate fi admis tipul respectiv de buştean?*

Rezolvare: Notăm cu:
A evenimentul ca lungimea să fie corespunzătoare,
B evenimentul ca grosimea să fie corespunzătoare,
C evenimentul ca umiditatea să fie corespunzătoare,
D evenimentul ca cele trei criterii să fie îndeplinite.

$$\begin{aligned} D &= A \cap B \cap C \implies \\ P(D) &= P(A \cap B \cap C), \text{ aplicând (7.9)} \implies \\ P(D) &\geq P(A) + P(B) + P(C) - 3 + 1 = 3.89 - 3 = 0.89 < 0.9. \end{aligned}$$

Deci tipul respectiv de buştean nu poate fi admis.

7.5 Scheme clasice de probabilităţi

Orice problemă de probabilităţi poate fi rezolvată fără ajutorul schemelor de probabilităţi care vor fi descrise în continuare. Însă, de multe ori, aceste "reţete", uşurează munca celor implicaţi în rezolvarea problemei.

7.5.1 Schema lui Poisson

Formularea problemei. Fie n urne care conţin bile albe şi bile negre în proporţii date. În urna U_i, $i = \overline{1,n}$ probabilitatea cu care se extrage o bilă albă este p_i, $i = \overline{1,n}$ şi q_i, $i = \overline{1,n}$ este probabilitatea cu care se extarge o bilă neagră. Se cere probabilitatea cu care se extarg k bile albe şi $n-k$ bile negre, atunci când din fiecare urnă se extrage câte o bilă.

Rezolvarea problemei: Vom rezolva problema pentru cazul $n = 3$. Notăm, cu A_i, $i = \{1,\ 2,\ 3\}$ evenimentul de a extrage o bilă albă din urna U_i, $i = \{1,\ 2,\ 3\}$. Evenimentul a cărui probabilitate o căutăm, $A-$ constă în a extrage 2 bile albe şi o bilă neagră.

$$\begin{aligned} A &= (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) \Longrightarrow \\ P(A) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3), \end{aligned} \tag{7.12}$$

Relaţia (7.12) are loc deoarece evenimentele $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}$, $A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3$ şi $\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3$ sunt incompatibile două câte două şi în ansamblu. Evenimentele $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \overline{A_1},\ \overline{A_2},\ \overline{A_3}$ sunt independente, deci avem

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \\ &= p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Observaţia 7.5.1 *Considerăm polinomul* $(p_1x + q_1)(p_2x + q_2)(p_3x + q_3) = p_1p_2p_3x^3 + (p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3)x^2 + (p_1q_2q_3 + q_1q_2p_3 + q_1p_2q_3)x + q_1q_2q_3$. *Se observă ca* $P(A)$ *este coeficientul lui* x^2 *din dezvoltarea* $(p_1x + q_1)(p_2x + q_2)(p_3x + q_3)$.

Observaţia 7.5.2 *În cazul general, probabilitatea ca din* n *extrageri să avem* k *bile albe este dată de coeficientul lui* x^k *din dezvoltarea* $(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)(p_3x+q_3)\cdots(p_nx+q_n)$.

Exemplul 7.5.1 *[17] O echipă de trei trăgători trag asupra unei ţinte. Pentru fiecare nimerire a ţintei se acordă echipei câte un punct. Probabilităţile de nimerire a ţintei pentru fiecare trăgător sunt* 0.7, 0.8 *şi* 0.9. *Care este probablititatea ca echipa să câştige un punct atunci când fiecare trăgător face doar o tragere.*

Rezolvare: Echipa va obţine un punct atunci când tinta va fi nimerită o dată, notăm cu A evenimentul corespunzător. Probabilitatea de a nimeri o dată ţinta este coeficientul lui x din dezvoltarea $(p_1x + q_1)(p_2x + q_2)(p_3x + q_3)$ unde

$$p_1 = 0.7 \quad q_1 = 0.3$$
$$p_2 = 0.8 \quad q_2 = 0.2$$
$$P_3 = 0.9 \quad q_3 = 0.1,$$

Deci, dezvoltarea este $0.504x^3 + 0.398x^2 + 0.092x + 6$. Aplicând Observaţia 7.5.2 se obţine

$$P(A) = 0.092$$

7.5.2 Schema lui Bernoulli (binomială sau a bilei revenite)

Această schemă este un caz particular al schemei lui Poisson şi se foloseşte atunci când fenomenele se repetă în condiţii identice

Formularea problemei. Condiderăm că avem n urne şi acestea conţin bile albe şi bile negre în aceeaşi proporţie. Atunci probabilitatea de a extrage o bilă albă din oricare urnă este p şi q este probabilitatea de a extrage o bilă neagră din oricare urnă. Se cere probabilitatea ca în urma efectuării a n extrageri să avem k bile albe şi $n - k$ bile negre.

Rezolvarea problemei Notăm cu A evenimentul a cărui probabilitate o căutăm. Aplicăm schema lui Poisson şi în conformitate cu Observaţia 7.5.2

$$P(A) = \text{ coeficientul lui } x^k \text{ din dezvoltarea } (px + q)^n,$$

Se aplică formula termenului general din binomul lui Newton şi avem

$$P(A) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{7.14}$$

$P(A)$ se va nota cu $P(n; k, n - k)$.

Observaţia 7.5.3 *Problema studiată mai sus se reformulează în felul următor: Fie o urnă ce conţine bile albe şi negre. Probabilitatea de a extrage o bilă albă din urnă este p. Se efecuează n extrageri, după fiecare extragere bila se aşează în urnă. Care este probabilitatea de a extrage k bile albe şi n − k bile negre?*

Exemplul 7.5.2 *Seminţele germinative ale unei plante sunt în proporţie de* 80%*. Se cere probabilitatea ca din* 5 *seminţe să răsară [17]:*
(i) 3 *seminţe;*
(ii) cel puţin trei;
(iii) cel mult două.

Rezolvare: (i) Probabilitatea ca să răsară 3 seminţe este:

$$P(5;3,2) = C_5^3(0.8)^3(0.2)^2 = 0.2$$

(ii) Probabilitatea ca să răsară cel puţin 3 seminţe este:

$$P(5;3,2) + P(5;4,1) + P(5;5,0) = 0.2 + 0.4 + 0.33 = 0.94$$

(iii) Probabilitatea ca să răsară cel mult 2 seminţe este:

$$P(5;0,5) + P(5;1,4) + P(5;2,3) = 0.057$$

7.5.3 Schema lui Bernoulli cu mai multe stări (polinomială)

Schema se aplică atunci când se urmăreşte apariţia mai multor evenimente ce formează un sistem complet de evenimente.

Formularea problemei. Considerăm o urnă care conţine bile de r culori şi se cunoaşte probabilitatea p_i cu care se extrage o bilă de culoare i, $i = \overline{1,r}$. Se fac n extrageri succesive, de fiecare dată bila extrasă introducându-se înapoi în urnă. Se cere să se determine probabilitatea cu care din cele n bile extrase k_1 vor fi de culoarea 1, k_2 vor fi de culoarea 2, respectiv, k_r vor fi de culoarea r, $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.

Soluţia problemei Probabilitatea cerută este dată de coeficientul lui $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_r^{k_r}$ din dezvoltarea

$$(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_rx_r)^n.$$

Adică

$$P(n; k_1,\ k_2, \ldots,\ k_r) = \frac{n!}{k_1!k_2! \ldots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}. \tag{7.15}$$

Exemplul 7.5.3 *[17] Conservele fabricate de o anumită intreprindere sunt supuse la două teste. Probabilităţile ca un produs să treacă de aceste teste sunt* 0.66 *şi* 0.75. *Să se determine probabilitatea ca din* 5 *produse alese la întâmplare, două să treacă ambele teste, una numai primul test, una numai al doilea test şi una să nu treacă nici un test.*

Rezolvare: Se va aplica schema polinomială pentru $n = 5,\ r = 4,\ k_1 = 2,\ k_2 = k_3 = k_4 = 1$. Notăm cu:

A_1 evenimentul ca un produs să treacă de primul test,

A_2 evenimentul ca un produs să treacă de al doilea test,

$A = A_1 \cap A_2$ evenimentul ca un produs să treacă de ambele teste,

$B = A_1 \cap \overline{A_2}$ evenimentul ca un produs să treacă numai primul test,

$C = \overline{A_1} \cap A_2$ evenimentul ca un produs să treacă numai al doilea test,

$D = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ evenimentul ca un produs să nu treacă nici un test.

Atunci,

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= 0.66, \quad P(\overline{A_1}) = 0.34, \quad P(A_2) = 0.75, \quad P(\overline{A_2}) = 0.25 \\
P(A) &= P(A_1)P(A_2) = 0.66 \cdot 0.75 = 0.495 \\
P(B) &= P(A_1)P(\overline{A_2}) = 0.66 \cdot 0.25 = 0.165 \\
P(C) &= P(\overline{A_1})P(A_2) = 0.34 \cdot 0.75 = 0.255 \\
P(D) &= P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = 0.34 \cdot 0.25 = 0.085
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Din (7.15) rezultă

$$P(5; 2, 1, 1, 1) = \frac{5!}{2!1!1!1!} 0.495^2 \cdot 0.165 \cdot 0.225 \cdot 0.085 = 0.046$$

7.5.4 Schema bilei nerevenite

Formularea problemei. Fie o urnă care conţine a bile albe şi b bile negre ($a + b = N$). Se fac n extrageri fără a se introduce bila înapoi în urnă. Se cere probabilitatea ca după

n extrageri ($n < N$) să avem α bile albe şi β bile negre.

Rezolvarea problemei Notăm cu A evenimentul ca după n extrageri să avem α bile albe şi β bile negre. Numărul cazurilor posibile este C_N^n. Pentru a determina cazurile favorabile trebuie să ţinem cont că pentru ficare grupare de α bile albe bilele negre se pot alege în C_b^β moduri. La rândul lor cele α bile albe se pot alege în C_a^α. Deci, numărul cazurilor favorabile este $C_a^\alpha \cdot C_b^\beta$. Atunci

$$P(A) = P(a, b; \alpha, \beta) = \frac{C_a^\alpha \cdot C_b^\beta}{C_N^n} \tag{7.17}$$

Exemplul 7.5.4 *La un concurs într-o tabără studenţească se înscriu* 10 *de băieţi şi* 12 *de fete. Se aleg la întâmplare* 10 *studenţi. Care este probabilitatea ca în grup să fie* 3 *băieţi şi* 7 *fete?*

Rezolvare: Se aplică schema bilei nerevenite:

$$P(10, 12; 3, 7) = \frac{C_{10}^3 \cdot C_{12}^7}{C_{22}^{10}} = \frac{4320}{29393} = 0.15$$

7.6 Variabile aleatoare. Definiţie. Operaţii

Definiţia 7.6.1 *Prin* **variabilă aleatoare** *se înţelege o funcţie definită pe mulţimea evenimentelor legate de o experienţă, cu valori în* $\mathbb{R}$.

Fie X o variabilă aleatoare care ia valorile x_i cu probabilitatea p_i, $i = \overline{1, n}$. Variabila aleatoare se reprezintă sub forma unui tabel cu două linii şi n coloane, astfel încât

(i) pe prima linie sunt valorile x_i, $i = \overline{1, n}$ ordonate crescător,

(ii) pe cea de-a doua linie sunt probabilităţile p_i corespunzătoare valorilor x_i.

Variabilele aleatoare se notează cu X, Y, *etc.* Tabelul de mai jos se numeşte **repartiţia (distribuţia) variabilei aleatoare** X şi se notează

$$X \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \quad \text{sau} \quad X \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix} \quad i = \overline{1, n} \tag{7.18}$$

şi elementele celei de-a doua linii îndeplinesc condiţia

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{7.19}$$

Exemplul 7.6.1 *Se consideră experienţa ce constă în aruncarea unui zar. Să se scrie variabila aleatoare ce reprezintă numărul de puncte care pot apare la aruncarea zarului.*

Rezolvare: Probabilitatea cu care poate să apară oricare din feţe este $\frac{1}{6}$. Repariţia variabilei aleatoare este

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Definiţia 7.6.2 *Variabila aleatoare pentru care mulţimea valorilor este un interval finit sau infinit se numeşte* **variabilă aleatoare continuă**.

Variabilele alatoare care nu sunt continue se numesc **variabile aleatoare discrete.**

Teorema 7.6.1 *Fie* $X\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$, $i = \overline{1,n}$ *şi* $Y\begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}$, $j = \overline{1,m}$ *variabile aleatoare.*

(i) Dacă $a \in \mathbb{R}$ *atunci* $aX\begin{pmatrix} ax_i \\ p_i \end{pmatrix}$ $i = \overline{1,n}$ *şi* $a + X\begin{pmatrix} a + x_i \\ p_i \end{pmatrix}$ $i = \overline{1,n}$

(ii) Dacă $r \in \mathbb{R}$ *atunci* $X^r\begin{pmatrix} x_i^r \\ p_i \end{pmatrix}$ $i = \overline{1,n}$

(iii) Dacă X *şi* Y *sunt variabile aleatoare independente atunci,* $X + Y\begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_i q_j \end{pmatrix}$

(iv) $X \cdot Y\begin{pmatrix} x_i y_j \\ p_i q_j \end{pmatrix}$ $i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$

Exemplul 7.6.2 *Se dau variabilele aleatoare independente*

$$X\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \text{ şi } Y\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $2 + X,\ 3Y,\ Y^3,\ X + Y, XY$.

Rezolvare: Se aplică Teorema 7.6.1 şi se obţine

$$2 + X\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{rl}
3Y & \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \\
X+Y & \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 7 & 7 & 9 \\ 0.35 & 0.35 & 0.05 & 0.05 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} = \\
= & \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0.35 & 0.4 & 0.15 & 0.1 \end{pmatrix} \\
X \cdot Y & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 12 & 10 & 20 \\ 0.35 & 0.35 & 0.05 & 0.05 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} = \\
= & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 10 & 12 & 20 \\ 0.35 & 0.35 & 0.05 & 0.1 & 0.05 & 0.1 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

7.7 Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare

Fie X o variabilă aleatoare, iar x un număr real. Să se determine probabilitatea evenimentului ca argumentul variabilei aleatoare să ia valori mai mici decît x. Pentru a descrie o variabilă aleatoare discretă se foloseşte repartiţia variabilei aleatoare. Pentru a descrie o variabilă aleatoare continuă trebuie cunoscută probabilitatea cu care aceasta ia valori într-un interval de forma $(-\infty, x)$, adică trebuie cunoscută funcţia de repartiţie sau de distribuţie.

Definiţia 7.7.1 Funcţia de repartiţie *a unei variabile aleatoare X este probabilitatea cu care variabila aleatoare X ia valori mai mici decât un număr real x, adică*

$$F(x) = P(X < x). \tag{7.20}$$

Teorema 7.7.1 *(Proprietăţile funcţiei de repartiţie)*

(i) $0 \leq F(x) \leq 1$;

(ii) $F(-\infty) = 0$;

(iii) $F(\infty) = 1$;

(iv) $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$;

(v) $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = a)$;

(vi) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) - P(X = a) + P(X = b)$;

(vii) $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = b)$;

(viii) Funcţia F este crescătoare.

Demonstraţie: (i) Funcţia de repartiţie pe un punct x definindu-se ca probabilitatea de realizare a unui eveniment este întotdeauna cuprinsă între 0 şi 1.
(ii) $F(-\infty) = P(X < -\infty) = P(\emptyset) = 0$.
(iii) $F(\infty) = P(X < \infty) = P(E) = 1$.
(iv) Notăm cu A evenimentul ca $X < a$, cu B evenimentul ca $X < b$ şi cu C evenimentul ca $a \leq X < b$. Atunci $B = A \cup C$ şi $A \cap C = \emptyset$ şi

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) + P(C) \iff \\ P(C) &= P(B) - P(A) \iff \\ P(a \leq X < b) &= P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

(v) Folosind notaţiile de la demonstrarea punctului (iv) avem $C = (a < X < b) \cup (X = a)$. Din punctul (iv) rezultă:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(a < X < b) + P(X = a) \\ P(C) &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Din ultimele două egalităţi rezultă $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = a) + P(X = b)$.
(vi) Folosind notaţiile de la punctul (iv) avem $C \cup (X = b) = (a < X < b) \cup (X = a)$, deci

$$\begin{aligned} P(C) + P(X = b) &= P((a < X \leq b) \cup (X = a)) \implies \\ P(a < X \leq b) &= F(b) - F(a) - P(X = a) \end{aligned}$$

(vii) Avem $(a \leq X \leq b) = (a \leq X < b) \cup (X = b)$, de unde

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a \leq X < b) + P(X = b) \\ &= F(b) - F(a) + P(X = b) \end{aligned}$$

(viii) Fie $a < b$, din punctul (iv) avem $F(b) - F(a) = P(a \leq X < b) \geq 0$ echivalent cu $F(b) > F(a)$.

Observaţia 7.7.1 *Fie variabila aleatoare*

$$X \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

atunci funcţia de repartiţie se calculează după formula:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{pentru} \quad x \leq x_1 \\ p_1 & \textit{pentru} \quad x_1 < x \leq x_2 \\ p_1 + p_2 & \textit{pentru} \quad x_2 < x \leq x_3 \\ \vdots & \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} & \textit{pentru} \quad x_{n-1} < x \leq x_n \\ 1 & \textit{pentru} \quad x_n < x \end{cases} \tag{7.21}$$

Afirmaţia de mai sus este adevărată deoarece $F(x_{k+1}) = P(X < x_{k+1}) = P((X = x_1) \cup (X = x_2) \cup \cdots \cup (X = x_k)) = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$.

Exemplul 7.7.1 *Folosind rezultatele obţinute la Exerciţiul 7.6.2 să se determine funcţiile de repartiţie pentru variabilele aleatoare $X + Y$ şi XY şi să se calculeze $P(X + Y < 5)$ şi $P(2 \leq XY \leq 10)$.*

Rezolvare: Funcţia de repartiţie pentru variabila aleatoare $T = X + Y$ este

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad x \leq 3 \\ 0.35 & \text{pentru} \quad 3 < t \leq 5 \\ 0.75 & \text{pentru} \quad 5 < t \leq 7 \\ 0.9 & \text{pentru} \quad 7 < t \leq 9 \\ 1 & \text{pentru} \quad 9 < t \end{cases} \tag{7.22}$$

Funcţia de repartiţie pentru variabila aleatoare $Z = X \cdot Y$ este

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leq 2 \\ 0.35 & \text{pentru } 2 < z \leq 4 \\ 0.7 & \text{pentru } 4 < z \leq 6 \\ 0.75 & \text{pentru } 6 < z \leq 10 \\ 0.85 & \text{pentru } 10 < z \leq 12 \\ 0.9 & \text{pentru } 12 < z \leq 20 \\ 1 & \text{pentru } 20 < z \end{cases} \tag{7.23}$$

Pentru a calcula $P(X+Y<5)$ aplicăm definiţia funcţiei de repartiţie şi (7.22) şi obţinem $P(X+Y<5) = F(5) = 0.35$.

Pentru a calcula $P(2 \leq XY \leq 10)$ aplicăm Teorema 7.7.1 punctul (vii) şi (7.23) şi obţinem $P(2 \leq XY \leq 10) = F(10) - F(2) + P(X = 10) = 0.75 - 0 + 0.1 = 0.85$

7.8 Densitatea de repartiţie a unei variabile aleatoare continue

Fie X o variabilă aleatoare continuă definită pe un interval, F funcţia de repartiţie corespunzătoare variabilei aleatoare. Se presupune că funcţia de repartiţie este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Definiţia 7.8.1 *Se numeşte* **densitate de probabilitate sau densitate de repartiţie**, *o funcţie f care verifică $F'(x) = f(x)$.*

Teorema 7.8.1 *Funcţia densitate de probabilitate $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ are următoarele proprietăţi:*

(i) $f(x) \geq 0$ *oricare ar fi* $x \in [a,b]$;

(ii) $\int_a^b f(x)dx = 1$

Demonstraţie:

(i) Deoarece funcţia de repartiţie F este crescătoare (Teorema 7.7.1 punctul (viii)), derivata

sa este pozitivă, adică $f(x) = F(x) > 0$, oricare ar fi $x \in [a, b]$.
(ii) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = 1 - 0$.

Observaţia 7.8.1 *Dacă intervalul de definiţie al funcţiei f este $(-\infty, \infty)$ propietatea (ii) din Teorema 7.8.1 se scrie* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Definiţia 7.8.2 *O funcţie oarecare $f : I \to \mathbb{R}$ este densitate de probabilitate dacă verifică condiţiile (i) şi (ii) din Teorema 7.8.1 (I este un interval real).*

Dacă X este o variabilă aleatoare continuă definită cu ajutorul funcţiei densitate de repartiţie f atunci **repartiţia variabilei aleatoare continue** X este

$$X \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x \in I}$$

Teorema 7.8.2 *Fie X o variabilă aleatoare continuă. Atunci*

$$P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \tag{7.24}$$

Egalitatea (7.24) are loc deoarece $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leq X < x_2)$.
Funcţia de repartiţie pentru o variabila aleatoare continuă este

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \text{dacă} \quad X \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x \in [a,b]} \tag{7.25}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad \text{dacă} \quad X \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{R}} \tag{7.26}$$

Exemplul 7.8.1 *Se dă funcţia*

$$f : [0, 4] \to (-\infty, \infty), \quad f(x) = \frac{1}{60}(7x + 1),$$

Se cere:
(i) Să se arate că f este densitate de probabilitate;
(ii) Să se determine funcţia de repartiţie pentru variabila aleatoare X generată de densitatea de probabilitate f;
(iii) Să se determine $P(X < 3)$ şi $P(1 \leq X < 3)$.

Rezolvare: (i) Deoarece $f(x) = \frac{1}{60}(7x+1) \geq 0$, oricare ar fi $x \in [0,4]$ şi

$$\int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{60}\left(\frac{7}{2}x^2 + x\right)\Big|_0^1 = 1$$

rezultă că f este o densitate de probabilitate.

(ii) Din (7.25) rezultă

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{60}\left(\frac{7}{2}t^2 + t\right)\Big|_0^x = \frac{x}{60}\left(\frac{7}{2}x + x\right).$$

(iii) $P(X < 3) = F(3) = \frac{23}{40}$; $P(1 \leq X < 3) = F(3) - F(1) = \frac{1}{2}$.

Exemplul 7.8.2 *Se dă funcţia* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} a\cos(x), & \text{dacă } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se determine:

(i) $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât* g *să fie o densitate de probabilitate;*

(ii) Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare X *care are ca densitate de repartiţie funcţia* g*.*

Rezolvare: (i) Din modul de definiţie al funcţiei g dacă $a \geq 0$ atunci g este întotdeauna pozitivă.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx &= \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\cos(x)dx + \int_{\pi/2}^{\infty} 0dx = \\ &= 0 + 2a + 0 = 2a = 1 \end{aligned}$$

Deci pentru $a = \frac{1}{2}$ funcţia g este densitate de probabilitate.

(ii) Funcţia de repartiţie pentru g este

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x 0dt = 0, \quad \text{oricare ar fi } x \in \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right); \\ G(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^x cos(t)dt = \frac{1}{2}(\sin x + 1), \text{ oricare ar fi } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \\ G(x) &= \int_{\pi/2}^x 0dt = 0, \quad \text{oricare ar fi } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \infty\right). \end{aligned} \tag{7.27}$$

Deci funcţia de repartiţie este

$$G(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } \left(-\infty<x<\dfrac{\pi}{2}\right]\\ \dfrac{1}{2}(\sin x+1), & \text{dacă } -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \text{dacă } \left[\dfrac{\pi}{2}<x<\infty\right)\end{cases}$$

7.9 Reprezentări grafice ale funcţiei de probabilitate

Funcţia de probabilitate a unei variabile aleatoare discrete

Fie dată variabila aleatoare discretă

$$X\begin{pmatrix}x_i\\ p_i\end{pmatrix}_{\sum_{i=1}^{n}p_i=1}.$$

În planul xOy considerăm pe axa Ox valorile argumentului x_i, iar pe Oy coordonatele corespunzătoare valorilor p_i. Figura astfel creată constituie reprezentarea grafică a variabilei aleatoare discrete X. Dacă se unesc punctele $M_i(x_i,P_i)$, $i=\overline{1,n}$ cu segmente de dreaptă atunci curba obţinută se va numi **curba de distribuţie** a variabilei aleatoare X. Această curbă va fi utilă pentru observarea caracteristicilor variabilelor aleatoare.

În statistică se foloseşte şi alt mod de reprezentare grafică a variabilei aleatoare X. Se consideră valorile x_i echidistante şi se ia drept unitate de lungime intervalul $x_i-x_{i-1}=1$. În acest caz ordonata p_i reprezintă aria dreptunghiului de lăţime x_i-x_{i-1} şi de lungime p_i. De obicei se consideră dreptunghiuri care au abscisa mijlocului lăţimii egală cu x_i. O astfel de reprezentare grafică se numeşte **histograma** variabilei aleatoare X. Se observă că unind mijloacele bazei superioare a dreptunghiurilor care formează histograma se obţine curba de distribuţie a variabilei aleatoare.

Observaţia 7.9.1 *Ţinând seama de relaţia*

$$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$$

aria histogramei este egală cu unitatea.

A se vedea Figura 7.28.

Densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare continue

Se consideră variabila aleatoare continuă

$$X\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x\in I}.$$

Reprezentarea grafică a funcţiei densitate de probabilitate f va fi **curba de distribuţie** a variabilei aleatoare X. A se vedea Figura 7.1.

7.10 Repartiţii clasice discrete

Repartiţia lui Poisson.

Fie X variabila aleatoare ce reprezintă numărul bilelor albe ce pot fi extrase din urne în cazul schemei lui Poisson,

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ P_0 & P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{pmatrix}$$

unde P_i reprezintă coeficientul lui $x^i,\ i=\overline{1,n}$ din dezvoltarea $(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)\cdots(p_nx+q_n)$. Tabloul de mai sus reprezintă o variabilă aleatoare deoarece

$$\begin{aligned}(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)\cdots(p_nx+q_n) &= P_0+P_1x+P_2x^2+\cdots P_nx^n,\ \forall\ x\in\mathbb{R}\Longrightarrow\\ (p_1+q_1)(p_2+q_2)\cdots(p_n+q_n) &= P_0+P_1+P_2+\cdots P_n \text{ pentru } x=1. \qquad (7.28)\end{aligned}$$

Se ştie că $p_i+q_i=1$ oricare ar fi $i=\overline{1,n}$. Atunci din (7.28) avem $P_0+P_1+P_2+\cdots P_n=1$.

Repartiţia lui Bernoulli Fie X variabila aleatoare ce reprezintă numărul bilelor albe ce pot fi extrase în cazul schemei lui Bernoulli,

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ C_n^0p^0q^n & C_n^1p^1q^{n-1} & C_n^2p^1q^{n-2} & \cdots & C_n^np^nq^0 \end{pmatrix}$$

Tabloul de mai sus reprezintă o variabilă aleatoare deoarece $1=(p+q)^n=C_n^0p^0q^n+C_n^1p^1q^{n-1}+C_n^2p^1q^{n-2}+\cdots+C_n^np^nq^0$.

Legea evenimentelor rare. Este folosită în biologie pentru fenomenele care au probabilitatea de apariţie mică dar constantă. Astfel de fenomene sunt: repartiţia unor celule în pătratele reţelei, moartea bacteriilor supuse radiaţiei α şi β, infestarea fructelor cu larve, şi altele. Variabila aleatoare corespunzătoare evenimentelor rare este:

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

unde $P(X=k)=p_k=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ oricare ar fi $k\in\mathbb{N}$.

Tabloul de mai sus reprezintă o variabilă aleatoare deoarece $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}p_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$. Dezvoltarea în serie Taylor a lui $e^{\lambda}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$. Deci $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}p_k=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$.

7.11 Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare

Repartiţia unei variabile aleatoare ne arată probabilitatea cu care apare o anumită valoare. Studiul unui fenomen descris de variabila aleatoare X este greu de realizat doar pe baza analizei valorilor şi probabilităţii de apariţie a acestor valori. În continuare se vor prezenta valori numerice folosite pentru caracterizarea fenomenului descris de variabila aleatoare X.

7.11.1 Valoarea medie (Speranţa matematică)

Definiţia 7.11.1 *Fie X o variabilă aleatoare discretă descrisă de repartiţia*

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Valoarea medie a variabilei aleatoare discrete *X este*

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i \tag{7.29}$$

Definiţia 7.11.2 *Fie X o variabilă aleatoare continuă descrisă de repartiţia*

$$X\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x\in I},$$

unde f este o densitate de probabilitate. **Valoarea medie a variabilei aleatoare continue** X *este*

$$M(X) = \int_I f(x)dx. \tag{7.30}$$

Teorema 7.11.1 *Fie X o variabilă aleatoare.*

(i) Media variabilei aleatoare este cuprinsă între cea mai mică şi cea mai mare valoare a variabilei aleatoare;

(ii) Dacă $X \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, *atunci $M(X) = a$ oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$;*

(iii) Dacă $a \in \mathbb{R}$ este o constantă, atunci $M(aX) = aM(X)$;

(iv) Dacă X şi Y sunt două variabile aleatoare independente atunci $M(X+Y) = M(X)+M(Y)$;

(v) Dacă X şi Y sunt două variabile aleatoare independente atunci $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$

Demonstraţie:

(i) Din definiţia mediei şi a modului de scriere al variabilei aleatoare se obţine:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n \geq x_1(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) = x_1 \tag{7.31}$$

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n \leq x_n(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) = x_n \tag{7.32}$$

(iii)Variabila aleatoare aX are forma

$$aX \begin{pmatrix} ax_1 & ax_2 & \cdots & ax_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Se aplică definiţia şi se obţine $M(aX) = a\sum_{i=1}^{n} x_ip_i = aM(x)$.

(iv) Fie

$$X \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=\overline{1,n}}, \quad Y \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j=\overline{1,m}} \Longrightarrow X+Y \begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_iq_j \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M(X+Y) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)p_iq_j = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_ip_iq_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_jp_iq_j = \\ &= \sum_{i=1}^{n}x_ip_i\sum_{j=1}^{m}q_j + \sum_{i=1}^{n}p_i\sum_{j=1}^{m}y_jq_j = \\ &= \sum_{i=1}^{n}x_ip_i + \sum_{j=1}^{m}y_jq_j = \iff \\ M(X+Y) &= M(X)+M(Y) \end{aligned}$$

Ultima egalitate are loc deoarece $\sum_{i=1}^{n}p_i = 1$ şi $\sum_{j=1}^{m}q_j = 1$.

(v) La lel ca şi la punctul (iv) avem

$$\begin{aligned} M(XY) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iy_jp_iq_j = \\ &= \sum_{i=1}^{n}p_ix_i\sum_{j=1}^{m}y_jq_j \iff \\ M(XY) &= M(X)M(Y) \end{aligned} \tag{7.33}$$

Observaţia 7.11.1 *Se poate constata că:*

(i) Valoarea medie a unei variabile discrete X, prin modul cum s-a introdus, reprezintă o medie aritmetică ponderată a valorilor x_i cu ponderile p_i.

(ii) Centrul de greutate al suprafeţei mărginite de densitatea de probabilitate f, axa Ox şi dreptele verticale definite capetele intervalului de definiţie al densităţii de probabilitate are abscisa egală cu $M(X)$.

Exemplul 7.11.1 *Să se calculeze valoarea medie pentru variabilele aleatoare:*

$$(a) \quad X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix};$$

$$(b)\quad Y\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix},\quad f(x)=\begin{cases} 0, & dacă\ \ -\infty < x < -1 \\ x+1, & dacă\ \ -1 < x \leq 0 \\ -x+1, & dacă\ \ 0 < x \leq 1 \\ 0, & dacă\ \ 1 < x < +\infty \end{cases}$$

Rezolvare:

(a) Media variabilei aleatoare discrete X este $M(X)=\dfrac{12}{6}=2$.

(b) Media variabilei aleatoare continue Y este:

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)=\int_{-\infty}^{-1} 0dx+\int_{-1}^{0}(x+1)xdx+\int_{0}^{1}(-x+1)xdx+\int_{1}^{\infty} 0dx=0$$

Exemplul 7.11.2 *Se planifică producţia unei ferme agricole şi se presupune că la diferite date va dispune de x_i muncitori cu o probabilitate p_i şi va putea realiza productivităţile muncii y_i cu probabilitatea corespunzătoare q_i. Care este producţia fermei la o dată oarecare? Cum se calculează valoarea medie a producţiei pe întreg timpul planificat.*

Rezolvare: Excepţie făcând o constantă producţia se obţine ca produsul dintre numărul de muncitori şi productivitatea muncii, adică la un moment dat producţia este x_iy_j cu probabilitatea p_ip_j, deoarece evenimentele care determină numărul muncitorilor şi productivitatea muncii sunt independente. Atunci, producţia este $Q=kx_iy_j$ cu probabilitatea x_iy_j.

Variabilele aleatoare

$$X\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix},\quad Y\begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}$$

fiind independente avem

$$M(kXY)=kM(X)M(Y).$$

7.11.2 Mediana

Definiţia 7.11.3 *Se numeşte* **mediana** *unei variabile aleatoare X, notată cu M_e, acea valoare pentru care probabilitatea ca variabila aleatoare să ia valori mai mici ca M_e este egală cu probabilitatea ca variabila aleatoare să ia valori mai mari ca şi M_e.*

Deci mediana este dată de relaţia

$$P(X < M_e) = P(X > M_e). \tag{7.34}$$

Folosind definiţia funcţiei de repartiţie F avem

$$\begin{aligned} P(X < x) &= F(x) \\ P(X > x) &= 1 - F(x). \end{aligned}$$

Din egalităţile de mai sus şi (7.34) rezultă

$$F(M_e) = \frac{1}{2}. \tag{7.35}$$

Observaţia 7.11.2 *Din punct de vedere grafic mediana este acea valoare pentru care histograma este împărţită de dreapta $x = M_e$ în două suprafeţe de arii egale.*

Dacă

$$X \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

este o variabilă aleatoare discretă, pentru determinarea valorii mediane se procedează după cum urmează:

(i) Dacă variabila aleatoare are un număr impar de valori $n = 2k+1$ atunci $M_e = x_{k+1}$;

(ii) Dacă variabila aleatoare are un număr par de valori $n = 2k$, atunci orice valoare cuprinsă în *intervalul median* (x_k, x_{k+1}) se poate considera valoare mediană. Se obişnuieşte ca $M_e = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Dacă

$$X \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x \in [a,b]},$$

este o variabilă aleatoare discretă, pentru determinarea valorii mediane se rezolvă ecuaţia

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \iff \\ \int_a^{M_e} f(x)dx &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Deoarece F este o funcţie continuă şi crescătoare soluţia ultimei ecuaţii este unică.

Exemplul 7.11.3 *Se dau variabilele aleatoare*

$$(a)\ X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4.3 & 5 & 7 & 8 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.05 & 0.05 & 0.1 \end{pmatrix},\quad (b)\ Y\begin{pmatrix} x \\ \dfrac{4x+1}{18} \end{pmatrix}_{x\in[1,3]}.$$

Să se determine valorile mediane.

Rezolvare: (a) Pentru variabila aleatoare discretă X care are un număr par (6) de valori intervalul median este $(4.3, 5)$ şi deci orice valoare din acest interval poate fi considerată valoare mediană. Se consideră ca şi valoare mediană mijlocul intervalului $(4.3, 5)$, $M_e = 4.65$.

(b) Pentru variabila aleatoare continuă Y

$$\int_1^x \frac{4t+1}{18}dt = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{18}t - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Se rezolvă ecuaţia dată de ultima egalitate şi se obţine

$$x_1 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{97}}{4} \notin [1,3],\ x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{97}}{4} \approx 2.21$$

Deci valoarea mediană este $M_e = 2.21$.

7.11.3 Modulul

Definiţia 7.11.4 *Prin* **modulul (valoarea modală)** *unei variabile aleatoare se înţelege acea valoare pentru care probabilitatea, respectiv densitatea de probabilitate este maximă. Modulul se notează cu* M_0.

Exemplul 7.11.4 *Să se determine modulul pentru variabile aleatoare definite în Exemplul 7.11.3*

Rezolvare: (a) În variabila aleatoare X valoarea cu probabilitatea cea mai mare este $M_0 = 4.3$.

(b) Densitatea de probabilitate pentru variabila aleatoare Y este $f(x) = \dfrac{4x+1}{18}$, $x \in [1,3]$. Maximul acestei funcţii crescătoare este atins în punctul $x = 3$ si $f(3) = \dfrac{13}{18} = 0.72$. Deci $M_0 = 3$.

Observaţia 7.11.3 *Caracteristicile numerice studiate mai sus (media, mediana şi modulul) exprimă tendinţa centrală a unei variabile aleatoare şi nu dau informaţii asupra gradului de împrăştiere a datelor, respectiv a concentraţiei valorilor variabilei.*

7.11.4 Dispersia unei variabile aleatoare

Abaterea medie pătratică

Se consideră o populaţie de bărbaţi adulţi compusă în proporţii egale din indivizi de $2m$ şi de $1.4m$. Înălţimea medie este de $1.7m$ ceea ce la o primă analiză poate părea în regulă, dar se observă că indivizii selectaţi sunt fie foarte înalţi, fie foarte mici! O încercare de a lămuri problema ar fi să se studieze cât de mult se abat de la medie valorile unei variabile aleatoare.

Se consideră variabila aleatoare

$$X \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{\sum_{i=1}^{n} p_i = 1}$$

cu media $M(X)$. Variabila aleatoare *abaterea de la medie a variabilei aleatoare* X se va nota cu

$$X - M(X) \begin{pmatrix} x_i - M(X) \\ p_i \end{pmatrix}_{\sum_{i=1}^{n} p_i = 1} \tag{7.36}$$

Media variabilei aleatoare $X - M(X)$ este

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = 0,$$

ceea ce este adevărat pentru orice variabilă aleatoare şi deci nu are nici un fel de semnificaţie. Pentru a studia împrăştierea valorilor vom folosi dispersia unei variabile aleatoare.

Definiţia 7.11.5 Dispersia *variabilei aleatoare X este media pătratelor abaterii de la medie:*

$$D^2(X) = M([X - M(X)]^2) \tag{7.37}$$

Aplicând proprietăţile mediei se obţine:

$$D^2(X) = M(X^2 - 2XM(X) + [M(X)]^2) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

În calcule se va folosi formula

$$D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \tag{7.38}$$

Definiţia 7.11.6 *Dacă X este o variabilă aleatoare continuă*

$$X \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x\in[a,b]} \Longrightarrow D^2(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - \left[\int_a^b xf(x)dx\right]^2 \tag{7.39}$$

Exemplul 7.11.5 *Să se calculeze dispersia pentru variabilele aleatoare date în Exemplul 7.11.3.*

Rezolvare: (a) Pentru variabila aleatoare discretă

$$X^2 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 18.49 & 25 & 49 & 64 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.05 & 0.05 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$M(X) = 4.28$ şi $M(X^2) = 20.45$, deci dispersia este $D^2(X) = 20.45 - 18.32 = 2.13$.
(b) Pentru variabila aleatoare continuă avem

$$D^2(X) = \int_1^3 x^2 \frac{4x+1}{18}dx - \left[\int_1^3 x\frac{4x+1}{18}dx\right]^2 = \frac{133}{27} - \frac{3364}{729} = \frac{227}{729}.$$

Teorema 7.11.2 *Fie X o variabilă aleatoare.*

(i) Dispersia unei variabile aleatoare este un număr pozitiv;

(ii) Dispersia unei variabile aleatoare constante este 0*;*

(iii) Fie $a \in \mathbb{R}$, atunci $D^2(aX) = a^2D^2(X)$;

(iv) Fie X şi Y două variabile aleatoare independente, atunci $D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$;

(v) Fie $a \in \mathbb{R}$, atunci $D^2(a+X) = D^2(X)$.

Demonstraţie:

(i) Folosind definiţia dispersiei rezultă că $D^2(X) \geq 0$;

(ii) Fie $a \in \mathbb{R}$, atunci $D^2(a) = M(a^2) - (M(a))^2 = 0$;

(iii) Fie $a \in \mathbb{R}$, atunci $D^2(aX) = M((aX)^2) - (M(aX))^2 = a^2M(X^2) - a^2(M(X))^2 = a^2D^2(X)$ (din (7.38));

(iv) Se folosesc proprietăţile mediei unei variabile aleatoare şi se obţine:

$$\begin{aligned} D^2(X+Y) &= M((X+Y)^2) - (M(X+Y))^2 = \\ &= M(X^2) - (M(X))^2 + M(Y^2) - (M(Y))^2 \iff \\ D^2(X+Y) &= D^2(X) + D^2(Y) \end{aligned}$$

(v) Din (iii) şi (iv) rezultă că $D^2(a+X) = D^2(X)$ oricare ar fi a o constantă reală.

Din definiţia dispersiei se constată că ea are ca şi dimensiune pătratul dimensiunii variabilei aleatoare considerate, ceea ce în practică devine incomod dacă ne referim la semnificaţia dispersiei ca o măsură a împrăştierii variabilei X. Pentru aceasta se va introduce următoarea noţiune.

Definiţia 7.11.7 Abaterea medie pătratică (abaterea standard) *se notează cu* $D(X)$ *sau* $\sigma(x)$ *şi este rădacina pătrată a dispersiei, adică*

$$D(X) = \sqrt{D^2(X)} \tag{7.40}$$

Exemplul 7.11.6 *Să se determine abaterea standard pentru variabilele aleatoare date la Exemplul 7.11.3.*

Rezolvare:

(a) Dispersia variabilei aleatoare discrete

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4.3 & 5 & 7 & 8 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.05 & 0.05 & 0.1 \end{pmatrix}$$

s-a determinat în Exemplul 7.11.5 şi deci abaterea standard este:

$$D(X) = \sqrt{2.13} = 1.46$$

(b) Dispersia variabilei aleatoare continue

$$Y\left(\begin{array}{c} x \\ \dfrac{4x+1}{18} \end{array}\right)_{x\in[1,3]}$$

s-a determinat în Exemplul 7.11.5 şi deci abaterea standard este:

$$D(X)=\sqrt{\frac{227}{729}}=0.56.$$

7.12 Principalele repartiţii clasice discrete

Repartiţia lui Poisson

Fie variabila aleatoare dată de repartiţia lui Poisson

$$X\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ P_0 & P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{array}\right)$$

Pentru a calcula caracteristicile numerice considerăm variabila aleatoare ataşată fiecărei urne U_i

$$X\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ p_i & q_i \end{array}\right)$$

oricare ar fi $i\in\overline{1,n}$, atunci

$$\begin{aligned} X_1+X_2 &= \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ q_1 & p_1 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ q_2 & p_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 2 \\ q_1q_2 & q_1p_2 & p_1q_2 & p_1p_2 \end{array}\right) \iff \\ X_1+X_2 &= \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ q_1q_2 & p_1q_2+q_1p_2 & p_1p_2 \end{array}\right) \end{aligned} \tag{7.41}$$

Se observă că relaţia (7.41) reprezintă repartiţia ataşată schemei lui Poisson cu două urne. La fel se arată că $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$, deci:

$$\begin{aligned} M(X) &= M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)\iff \\ M(X) &= p_1+p_2+\cdots+p_n \end{aligned} \tag{7.42}$$

Se foloseşte acelaşi raţionament şi se obţine

$$D^2(X)=D^2(X_1)+D^2(X_2)+\ldots+D^2(X_n) \tag{7.43}$$

Pentru urna U_i avem

$$X_i^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_i & p_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_i & p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_i^2 + 2q_ip_i & p_i^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$D^2(X_i) = p_i^2 - p_i = p_iq_i. \tag{7.44}$$

Din (7.43) şi (7.44) rezultă

$$D^2(X) = \sum_{i=1}^{n} p_iq_i \quad \text{şi} \quad D(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_iq_i} \tag{7.45}$$

Repartiţia lui Bernoulli

Fie X variabila aleatoare ce reprezintă numărul bilelor albe ce pot fi extrase în cazul schemei lui Bernoulli,

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ C_n^0p^0q^n & C_n^1p^1q^{n-1} & C_n^2p^1q^{n-2} & \cdots & C_n^np^nq^0 \end{pmatrix} \tag{7.46}$$

Media, dispersia şi abaterea standard pentru repartiţia lui Bernoulli se pot obţine particularizând media, dispersia şi abaterea standard pentru repartiţia lui Poisson:

$$M(X) = np \tag{7.47}$$

$$D^2(X) = npq \tag{7.48}$$

$$D(X) = \sqrt{npq} \tag{7.49}$$

Legea evenimentelor rare.

Variabila aleatoare corespunzătoare evenimentelor rare este:

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

unde $P(X = k) = p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Se arată că:

$$M(X) = \lambda \tag{7.50}$$

$$D^2(X) = \lambda \tag{7.51}$$

$$D(X) = \sqrt{\lambda} \tag{7.52}$$

Observaţia 7.12.1 *Pentru cazul repartiţiei corespunzătoare legii evenimentelor rare media şi dispersia sunt egale.*

7.13 Elemente de statistica măsurătorilor

Problema de bază a oricărei experienţe cantitative sau a unei măsurători este de a determina în mod direct sau indirect ceea ce se numeşte "valoarea adevărată" a unei cantităţi, de pildă aria unei suprafeţe oarecare de teren, volumul unei mase lemnoase, concentraţia unei soluţii , etc. Riguros vorbind, nu se poate măsura niciodată valoarea adevărată a unei anumite mărimi, se poate obţine numai o aproximaţie a ei. Prin perfecţionarea metodelor de măsură se pot obţine aproximaţii din ce în ce mai bune, dar intotdeauna există o limită dincolo de care perfecţionările nu au putut sau nu pot trece. Este deci de dorit să se cunoască în fiecare caz ce relaţie există între valoarea măsurată şi cea adevărată.
Pentru obţinerea acestei informaţii este importantă cunoaşterea legii de distribuţie după frecvenţe, numită şi legea de distribuţie a probabilităţii pentru rezultatele măsurătorilor. În procesul de măsură rezultatele fac obiectul unei liste de valori experimentale. Problema care se ridică este aceea de a exprima valoarea adevărată adică cea mai probabilă. Din analiza listei rezultate se poate realiza o analiză a frecvenţelor de apariţie a diverselor valori experimentale. Reprezentarea grafică a valorilor experimentale în funcţie de frecvenţa de apariţie este descrisă de o histogramă care va avea ca înfăşurătoare o curba sub forma unui clopot mai mult sau mai puţin simetric. Se admite că se pot realiza un număr suficient de mare de măsurători astfel înfăşurătoarea histogramei se va transforma într-o curba suficient de netedă care din punct de vedere statistic va descrie forma legii de distribuţie a frecvenţelor. Cei mai importanţi parametri ai funcţiei densitate de repartiţie sunt valoarea medie $M(X)$ (*momentul de ordinul întâi*) şi dispersia $D^2(X)$, (*momentul de ordinul al doilea*). Uneori media şi dispersia variabilei aleatoare X sunt notate prin μ, respectiv σ^2.
În Figura 7.1 sunt reprezentate formele generale ale densităţii de repartiţie, respectiv a funcţiei de repartiţie.

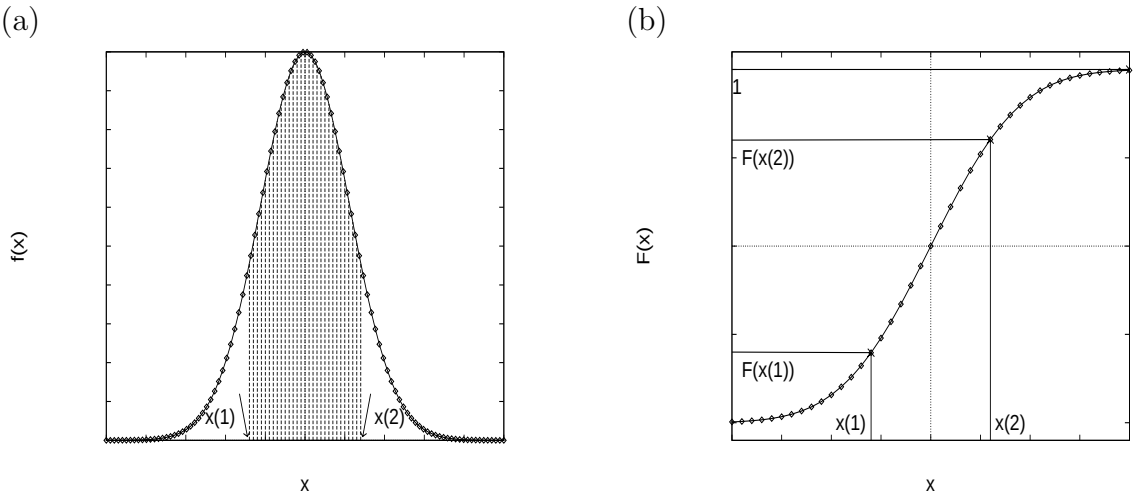


Figura 7.1: Repartiţia unei variabile aleatoare continue: (a) $f(x)$ - densitatea de repartiţie, (b) $F(x)$ - funcţia de repartiţie.

7.13.1 Distribuţia Gauss şi proprietăţile ei

Un caz particular şi unul dintre cele mai des utilizate este acela al distribuţiei normale. În cazul distribuţiei Gauss (normale) densitatea de repartiţie este exprimată de relaţia,

$$f(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right). \tag{7.53}$$

În continuare se amintesc cele mai importante proprietăţi ale distribuţiei normale.

(i) Funcţia f este o densitate de repartiţie.

Pentru aceasta se calculează integrala

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\lambda^2\right) d\lambda, \tag{7.54}$$

unde s-a aplicat substituţia

$$\lambda = \frac{x-b}{\sqrt{2}a}, \tag{7.55}$$

se notează $\mathcal{I} = I^2$ şi se trece la coordonatele polare r, ψ. Prin schimbarea de variabile $r^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\psi = \arctan\dfrac{\beta}{\alpha}$. Elementul diferenţial $d\alpha\, d\beta$ devine $r dr\, d\psi$, astfel se obţine

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha^2+\beta^2)}\, d\alpha\, d\beta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr. \tag{7.56}$$

Printr-o nouă schimbarea de variabilă $r^2 = z$, integrala precedentă devine

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty e^{-z}\, dz = 1, \quad \text{deci}, \quad I = 1. \tag{7.57}$$

(ii) Valoarea medie, $M(X)$, a variabilei aleatoare X sau momentul de ordinul întâi este egal cu b. Folosind definiţia mediei unei variabile aleatoare rezultă:

$$M(X) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right) dx. \tag{7.58}$$

Prin substituţia (7.55) şi prin folosirea formulelor de integrare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2}\, dx = \sqrt{\pi}, \quad \text{respectiv} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}\, dx = 0$$

se obţine

$$\mu = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(z + \frac{b}{a\sqrt{2}}\right) e^{-z^2}\, dz = b. \tag{7.59}$$

(iii) Dispersia variabilei aleatoare X sau momentul de ordinul al doilea notat cu $D^2(X)$ este definită de

$$D^2(X) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-b)^2 \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right) dx. \tag{7.60}$$

Pentru calculul integralei (7.60) se foloseşte (7.55), deci

$$\sigma^2 = \frac{2a^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda^2}\, d\lambda = -\frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d(e^{-\lambda^2}). \tag{7.61}$$

Prin integrarea ultimei relaţii se obţine $\sigma^2 = a^2$.

Valoarea medie şi dispersia descriu complet această repartiţie. Valoarea maximă a repartiţiei Gauss are coordonatele $\left(\mu, \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\right)$, iar cele două puncte de inflexiune ale curbei au abscisele situate la valoarile $\mu - \sigma$, respectiv $\mu + \sigma$. Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare repartizate normal este exprimată de relaţia

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-b)^2}{2a^2}\right) dt. \tag{7.62}$$

Pentru calcularea integralei (7.62) se face substituţia $\lambda = \frac{t-b}{a}$, astfel se obţine

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \exp\left(\frac{-\lambda^2}{2}\right) d\lambda. \tag{7.63}$$

Se consideră cazul când $x < b$, prin urmare $F(x)$ poate fi exprimată ca şi diferenţa următoarelor două integrale:

$$\int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda = \int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda - \int_{\frac{x-b}{a}}^{0} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) d\lambda. \tag{7.64}$$

Se notează integralele din membrul al doilea prin I_1, respectiv I_2. Pentru calcularea integralei I_1 se face substituţia $\lambda = \sqrt{2}y$, astfel se obţine

$$I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}. \tag{7.65}$$

Pentru calcularea integralei I_2 se aplică aceeaşi substituţie, deci

$$I_2 = \sqrt{2} \int_{\frac{x-b}{a\sqrt{2}}}^{0} e^{-y^2} dy \tag{7.66}$$

Este cunoscut faptul că funcţia erorilor [7] - [23] notată prin $erf(\alpha)$ este definită de relaţia

$$erf(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-x^2}\, dx, \quad \text{pentru} \quad \alpha > 0. \tag{7.67}$$

iar $erf(\alpha) = -erf(-\alpha)$, deci integrala I_2 poate fi exprimată în funcţie de $erf\left(\frac{x-b}{a\sqrt{2}}\right)$, astfel

$$I_2 = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2} erf\left(\frac{x-b}{a\sqrt{2}}\right). \tag{7.68}$$

Prin urmare funcţia de repartiţie normală poate fi exprimată de relaţia

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x-b}{a\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{7.69}$$

Se consideră cazul când $x > b$. Analog relaţia (7.63) poate fi descompusă în două integrale, prima având limitele de integrare între $(-\infty, 0]$, respectiv $\left[0, \frac{x-b}{a}\right]$. Prin parcurgerea unor calcule similare cazului precedent pentru funcţia de repartiţie se obţine acelaşi rezultat. În baza acestor considerente, probabilitatea ca o variabilă aleatoare să fie cuprinsă între două valori x_1, respectiv x_2 este furnizată de relaţia

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2}\left[erf\left(\frac{x_2-b}{a\sqrt{2}}\right) - erf\left(\frac{x_1-b}{a\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{7.70}$$

Relaţia (7.70) poate fi folosită pentru estimarea probabilităţii ca o variabilă aleatoare distribuită normal să fie cuprinsă în intervale remarcabile. În Tabelul 7.1 sunt reprezentate probabilităţile variabilei aleatoare X în funcţie de diverse intervale a funcţiei de repartiţie.

Tabelul 7.1: Probabilităţi ale variabilei aleatoare X

Limite pe axa Ox		Partea din aria	Aria suprafeţei
$\mu - \lambda\sigma$	$\mu + \lambda\sigma$	suprafeţei totale	rămase
x_1	x_2	(%)	(%)
$\mu - \sigma$	$\mu + \sigma$	68.26	31.74
$\mu - 2\sigma$	$\mu + 2\sigma$	95.44	4.56
$\mu - 3\sigma$	$\mu + 3\sigma$	99.73	0.27
$\mu - 1.96\sigma$	$\mu + 1.96\sigma$	95	5
$\mu - 2.58\sigma$	$\mu + 2.58\sigma$	99	1
$\mu - 3.29\sigma$	$\mu + 3.29\sigma$	99.9	0.1

Exemplul 7.13.1 *Fie o repartiţie normală asociată unei variabile aleatoare pentru care valoarea medie este* 20 *şi dispersia este* 25*. Să se determine care este probabilitatea ca variabila aleatoare* x *să ia valori în intervalele* $[25, 35)$ *şi* $[5, 35)$*.*

Rezolvare: Se folosesc proprietăţile funcţiei de repartiţie, (7.70) şi se obţine:

$$P(25 \leq X < 35) = F(35) - F(25) = \frac{1}{2}\left[erf\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) - erf\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = 0.1573,$$

respectiv pentru cel de al doilea

$$P(5 \leq X < 35) = F(35) - F(5) = erf\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 0.9973.$$

Densităţile de repartiţie discrete sau continue, întâlnite cel mai des în practica statistică [7] precum si funcţiile de repartiţie asociate sunt prezentate în continuare.

7.14 Funcţii speciale, densităţi şi funcţii de repartiţie

Pentru a descrie cele mai des întâlnite densitaţi de repartiţie şi funcţiile asociate este necesară cunoaşterea unor funcţii speciale care intervin în definiţiile acestora. A se vedea anexa acestui capitol.

Definiţia 7.14.1 *Densitatea de repartiţie Beta este*

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0,\ x>1,\\ \dfrac{1}{\beta(x;p,q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1} & 0\le x\le 1,\end{cases} \tag{7.71}$$

unde funcţia β a fost descrisă de relaţia (9.46).

Definiţia 7.14.2 *Densitatea de repartiţie χ^2 este*

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0,\\ \dfrac{1}{2^{\frac{\lambda}{2}}\sigma^{\lambda}\Gamma(\frac{\lambda}{2})}x^{\frac{\lambda}{2}-1}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & x\ge 0,\end{cases} \tag{7.72}$$

unde funcţia Γ a fost definită de relaţia (9.44).

Definiţia 7.14.3 *Densitatea de repartiţie ´f´ (Fisher) este*

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0,\\ \dfrac{\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}(\dfrac{\nu_1}{\nu_2})^{\frac{\nu_1}{2}}\dfrac{x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} & x>0,\ \nu_1,\nu_2\in\mathbb{N}^*.\end{cases} \tag{7.73}$$

Definiţia 7.14.4 *Densitatea de repartiţie Γ se defineşte astfel,*

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0,\\ \dfrac{1}{\Gamma(\rho)}\lambda^{\rho}x^{\rho-1}e^{-\lambda x} & x\ge 0,\ \lambda,\ \rho>0.\end{cases} \tag{7.74}$$

Definiţia 7.14.5 *În paragraful 7.5.4 pe baza relaţiei (7.17) s-a descris probabilitatea asociată schemei bilei nerevenite. Pe baza acesteea se defineşte densitatea de repartiţie hipergeometrică,*

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{C_{N_1}^{[x]}C_{N_2}^{n-[x]}}{C_{N_1+N_2}^{n}} & n\le N_1+N_2,\ [x]=1,\ 2,\ldots,n.\end{cases} \tag{7.75}$$

unde $[x]$ reprezintă partea întregă a lui x adică $0<x-[x]<1$. Ramura a doua a densităţii de repartiţie hipergeometrică devine,

$$f(x)=\frac{N_1!}{(N_1-[x])![x]!}\frac{N_2!}{(N_2-n+[x])!(n-[x])!}\frac{(N_1+N_2-n)!n!}{(N_1+N_2)!}. \tag{7.76}$$

Observaţia 7.14.1 *Din analiza relaţiilor (7.75) şi (7.17) se constată următoarea echivalenţă:* $[x]=\alpha$, $n-[x]=\beta$, $N_1=a$ *şi* $N_2=b$.

Definiţia 7.14.6 *Densitatea de repartiţie ´t´ (Student) se defineşte astfel,*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7.77}$$

Definiţia 7.14.7 *Constanta γ a lui Euler reprezintă valoarea limitei,*

$$\gamma = \lim_{m\to\infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{m} - \ln m\right] \approx 0.5773157. \tag{7.78}$$

În cele ce urmează vor fi date densităţile şi funcţiile de repartiţie uzuale, precum şi reprezentările lor grafice.

Densitatea de repartiţie arcsinus

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{r^2 - x^2}} \ |x| < r.$$

Funcţia de repartiţie este

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{r}, \ |x| < r.$$

Media este $M(X) = 0$ şi dispersia $D^2(X) = \dfrac{r^2}{2}$

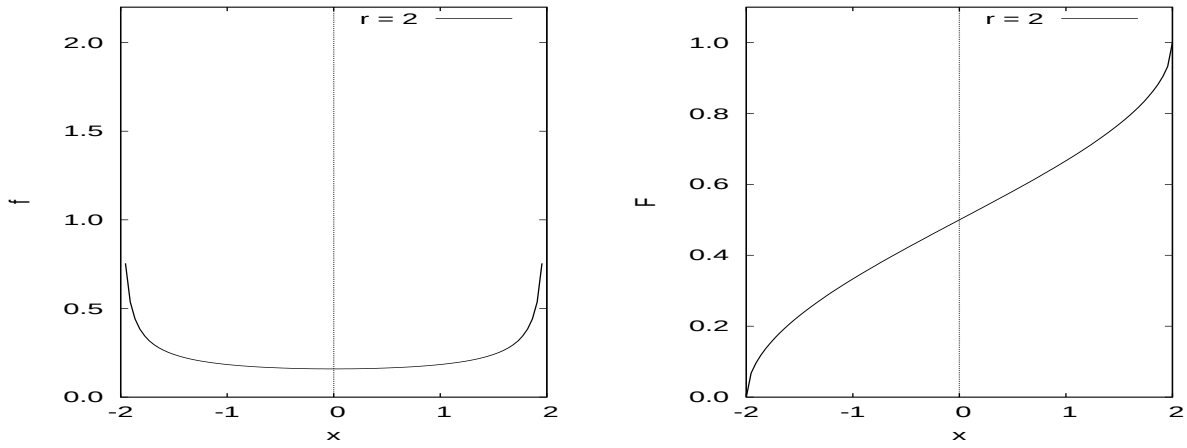


Figura 7.2: Densitatea şi funcţia de repartiţie arcsinus.

Densitatea de repartiţie Beta

$$f \text{ este dată de (7.71)}$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F \text{ este dată de } \beta(x; p, q)$$

Media este $M(X) = \dfrac{p}{p+q}$, dispersia este $D^2(X) = \dfrac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$.

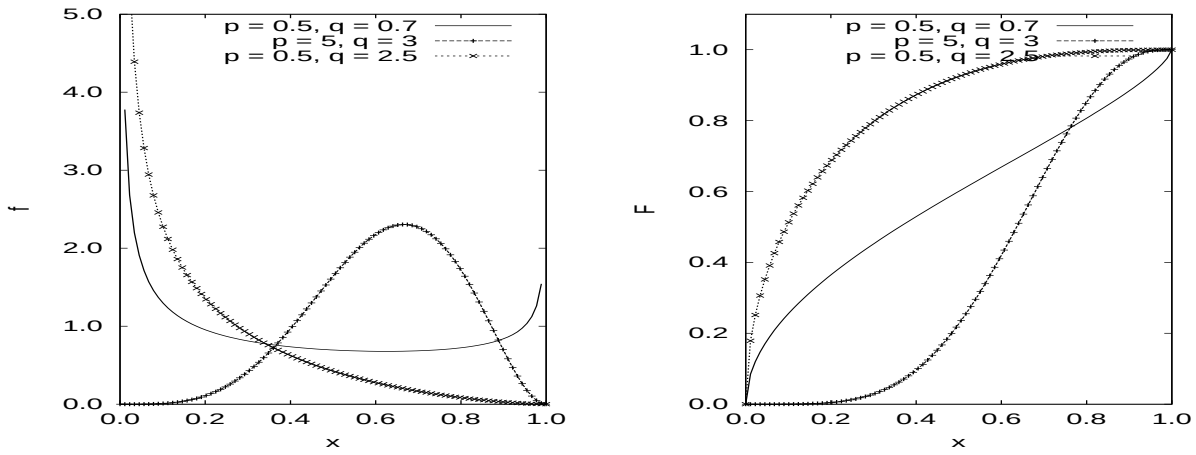


Figura 7.3: Densitatea şi funcţia de repartiţie Beta.

Densitatea de repartiţie binomială

$$f(x) = \frac{n!}{(n-[x])![x]!} p^{[x]}(1-p)^{n-[x]}, \quad 0 < p < 1$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \sum_i \mathcal{F}(x_i)$$

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} f(0) & x < 1, \\ f(x) + F(x-1) & x \geq 1. \end{cases} \tag{7.79}$$

Media este $M(X) = np$, dispersia este $D^2(X) = np(1-p)$.

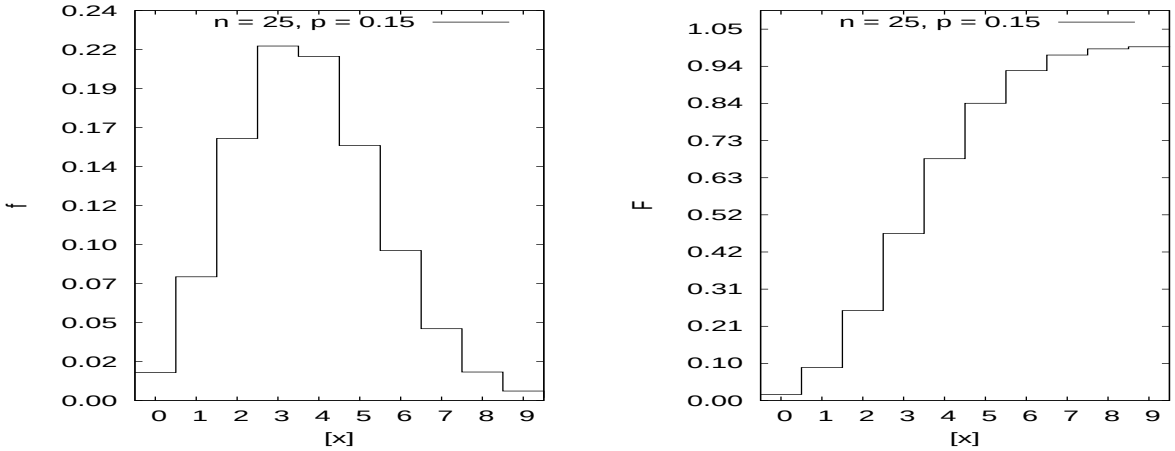


Figura 7.4: Densitatea şi funcţia de repartiţie binomială.

Densitatea de repartiţie Cauchy

$$f(x) = \frac{b}{\pi\left[b^2 + (x-a)^2)\right]}, \quad b > 0$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x-a}{b}$$

Media este $M(X) = a$, dispersia este $D^2(X)$ nu există.

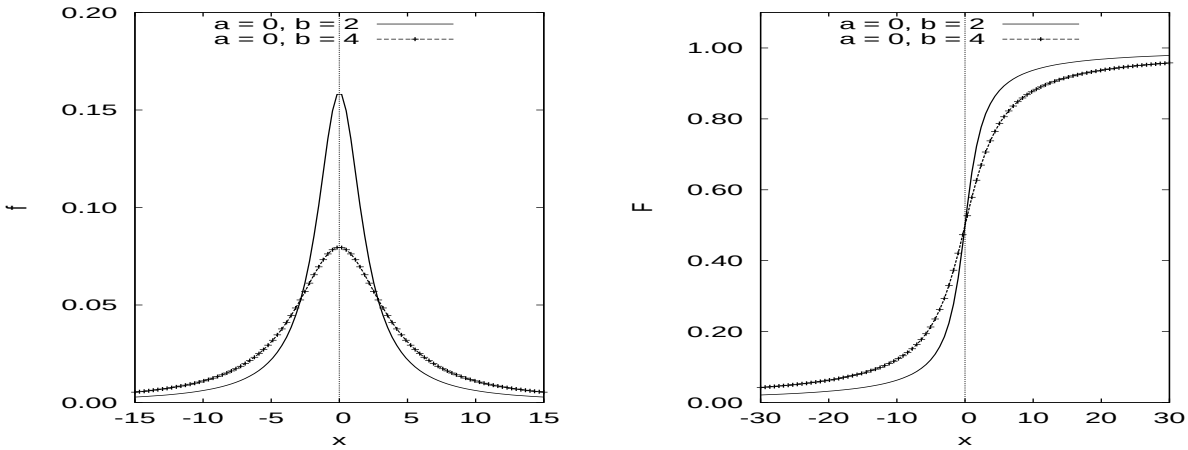


Figura 7.5: Densitatea şi funcţia de repartiţie Cauchy.

Densitatea de repartiţie χ^2

$f(x)$ este dată de (7.72)

Funcţia de repartiţie este:

$$F \text{ este dată de } \sum_i \mathcal{F}(x_i)$$

Media este $M(X) = 2\sigma^2 \dfrac{\Gamma(\frac{\lambda}{2}+1)}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})}$, dispersia este $D^2(X) = 2\lambda\sigma^4,\ \lambda \in \mathbb{N}^*$.

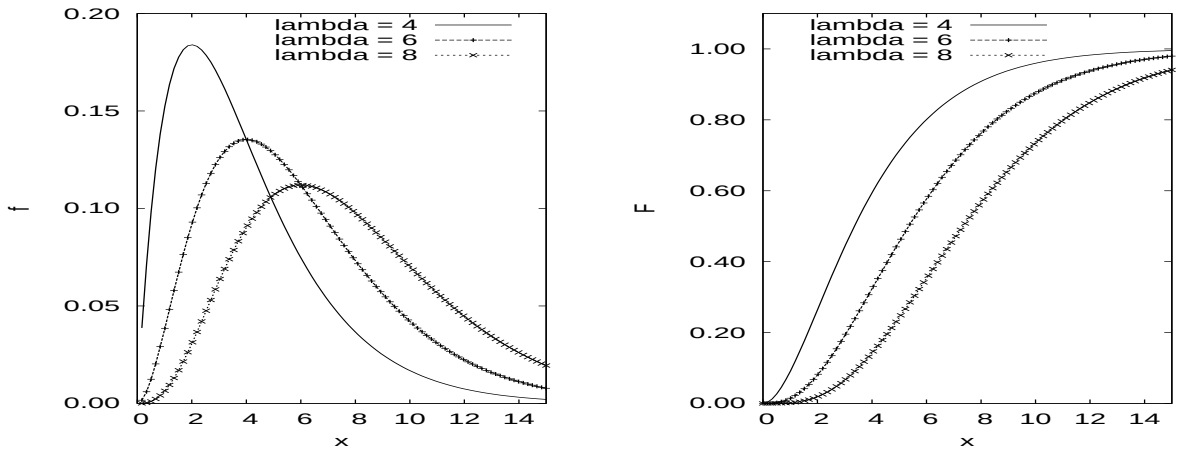


Figura 7.6: Densitatea şi funcţia de repartiţie χ^2.

Densitatea de repartiţie Erlang

$$f(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{(n-1)} e^{-\lambda x}$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}\left(1 + \lambda x + \frac{1}{2}\lambda^2 x^2\right)$$

Media este $M(X) = \dfrac{n}{\lambda}$, dispersia este $D^2(X) = \dfrac{n}{\lambda^2}$.

Densitatea de repartiţie Gumbel

$$f(x) = \alpha e^{\left(-\alpha(x-u) - e^{-\alpha(x-u)}\right)}$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \exp\left(-e^{-\lambda(x-u)}\right)$$

Media este $M(X) = u + \dfrac{\gamma}{\alpha}$, dispersia este $D^2(X) = \dfrac{\pi^2}{6\alpha^2}$.

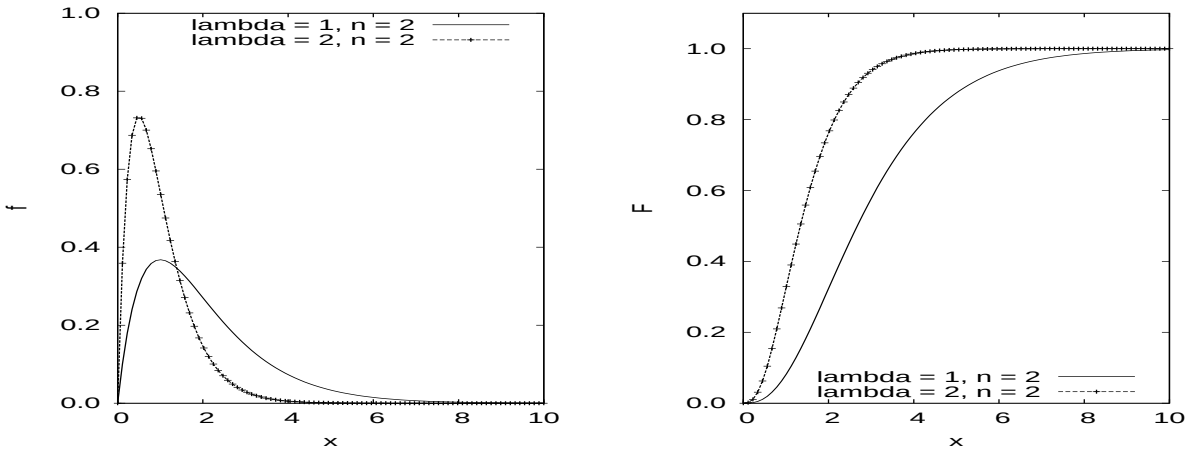


Figura 7.7: Densitatea şi funcţia de repartiţie Erlang.

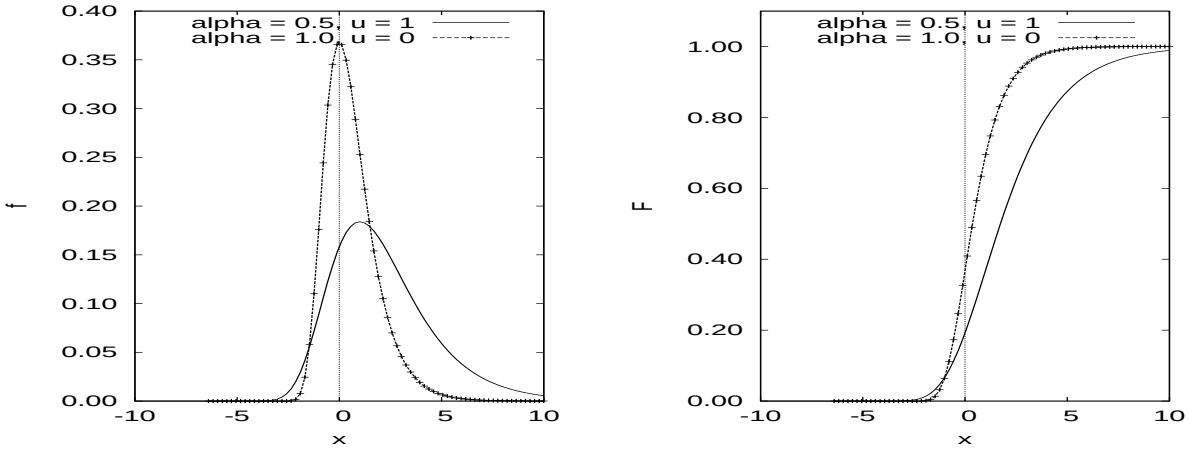


Figura 7.8: Densitatea şi funcţia de repartiţie Gumbel.

Densitatea de repartiţie Fisher

$$f \text{ este dată de (7.73)}$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \sum_i \mathcal{F}(x_i)$$

Media este

$$M(X) = \begin{cases} 1 & \nu_2 < 2 \\ \dfrac{\nu_2}{\nu_2 - 2} & \nu_2 > 2 \end{cases},$$

dispersia este

$$D^2(X) = \begin{cases} 1 & \nu_2 \leq 4 \\ \dfrac{2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 4)} M^2(X) & \nu_2 > 4 \end{cases}.$$

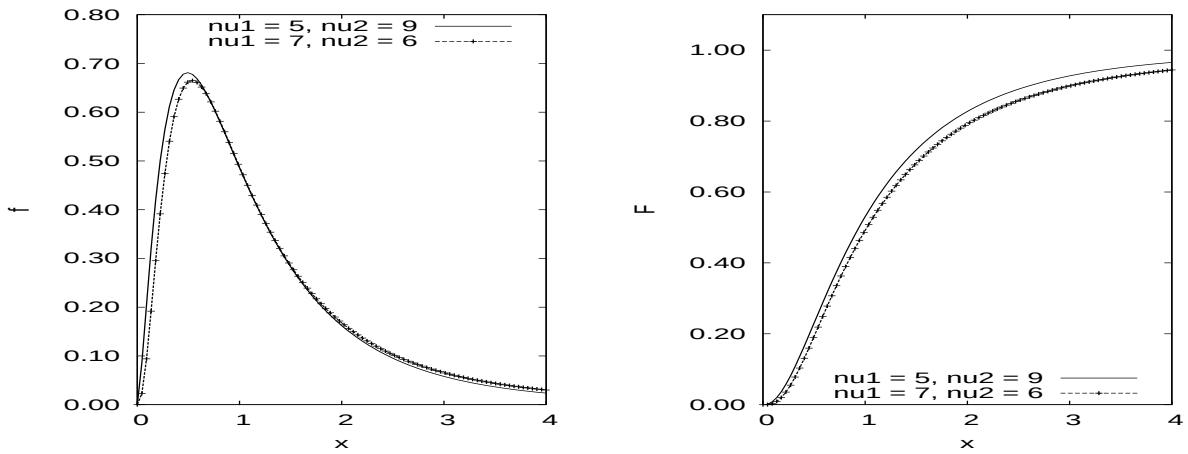


Figura 7.9: Densitatea şi funcţia de repartiţie ´f´ Fisher.

Densitatea de repartiţie Gamma

$$f \text{ este dată de (7.74)}, \ \rho, \ \lambda > 0$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \sum_i \mathcal{F}(x_i)$$

Media este $M(X) = \dfrac{\rho}{\lambda}$, dispersia este $D^2(X) = \dfrac{\rho}{\lambda^2}$.

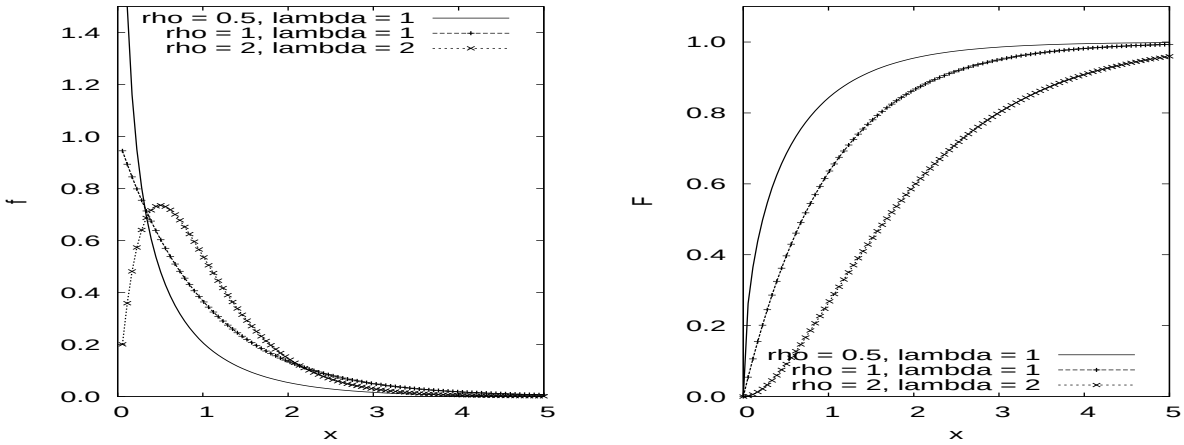


Figura 7.10: Densitatea şi funcţia de repartiţie Gamma.

Densitatea de repartiţie geometrică

$$f(x) = exp\left(\ln p + [x] ln(1-p)\right),\ 0 < p < 1$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \sum_i \mathcal{F}(x_i)$$

Media este $M(X) = \dfrac{1-p}{p}$, dispersia este $D^2(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

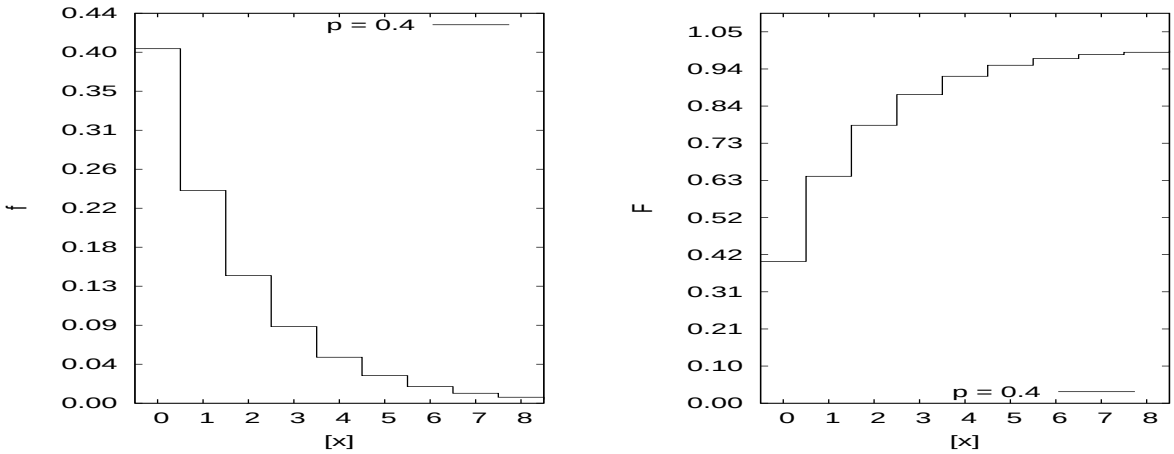


Figura 7.11: Densitatea şi funcţia de repartiţie geometrică.

Densitatea de repartiţie $'1/2'$ normală

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right]$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Media este $M(X) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}$, dispersia este $D^2(X) = 1$.

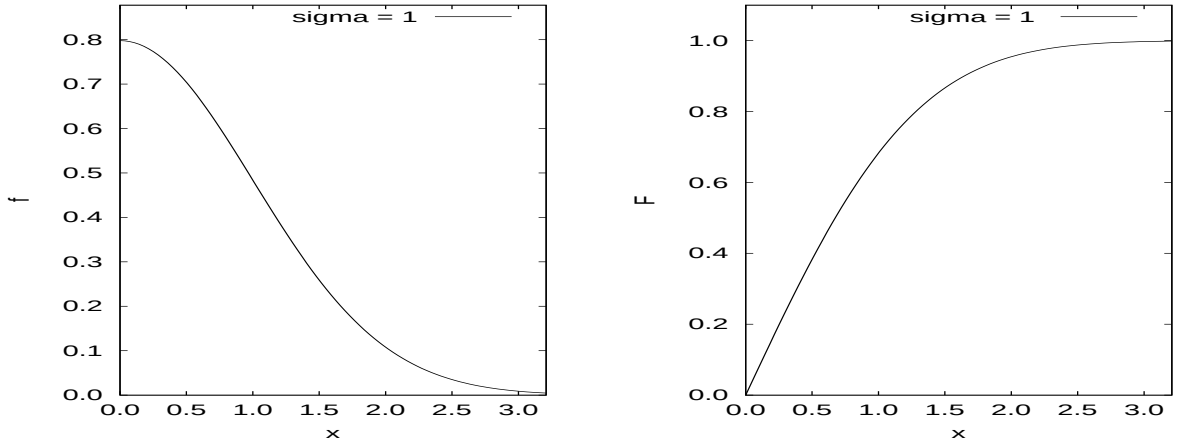


Figura 7.12: Densitatea şi funcţia de repartiţie ´1/2´ normală (Gauss).

Densitatea de repartiţie hipergeometrică

$$f \text{ este dată de (7.76)}, \quad p = \frac{N_1}{N_1 + N_2},\ q = 1 - p$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \sum_i \mathcal{F}(x_i)$$

Media este $M(X) = np$, dispersia este $D^2(X) = npq\left(\frac{N_1 + N_2 - n}{n-1}\right)$.

Densitatea de repartiţie Laplace

$$f(x) = \frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|x-a|}{b}\right)$$

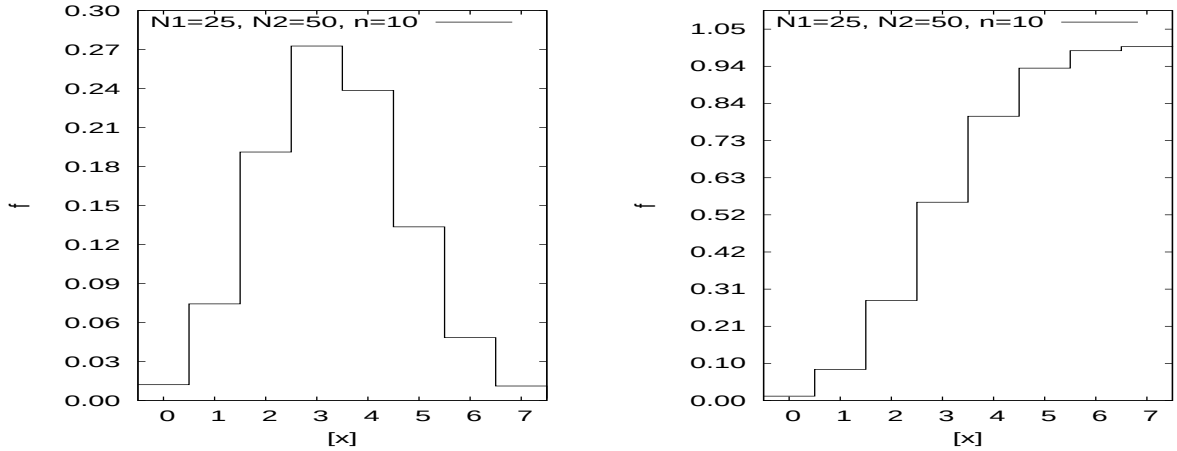


Figura 7.13: Densitatea şi funcţia de repartiţie hipergeometrică.

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \mathcal{L}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\exp\left(\dfrac{x-a}{b}\right) & x < a, \\ 1 - \dfrac{1}{2}\exp\left(-\dfrac{x-a}{b}\right) & x \geq a. \end{cases}$$

Media este $M(X) = a$, dispersia este $D^2(X) = 2b^2$.

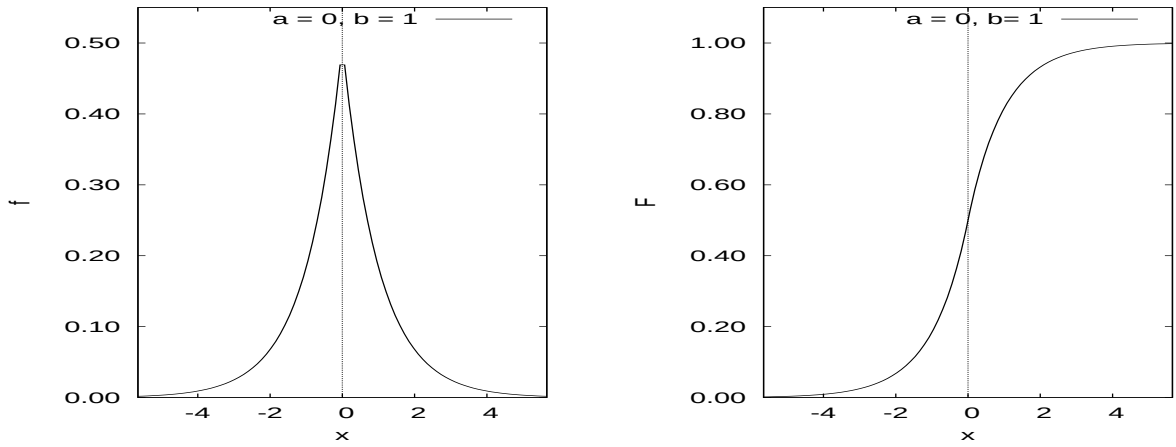


Figura 7.14: Densitatea şi funcţia de repartiţie Laplace.

Densitatea de repartiţie logistică

$$f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda(x-a)}}{\left(1 + e^{-\lambda(x-a)}\right)^2}, \quad \lambda > 0$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(x-a)}}$$

Media este $M(X) = a$, dispersia este $D^2(X) = \dfrac{\pi^2}{3\lambda^2}$.

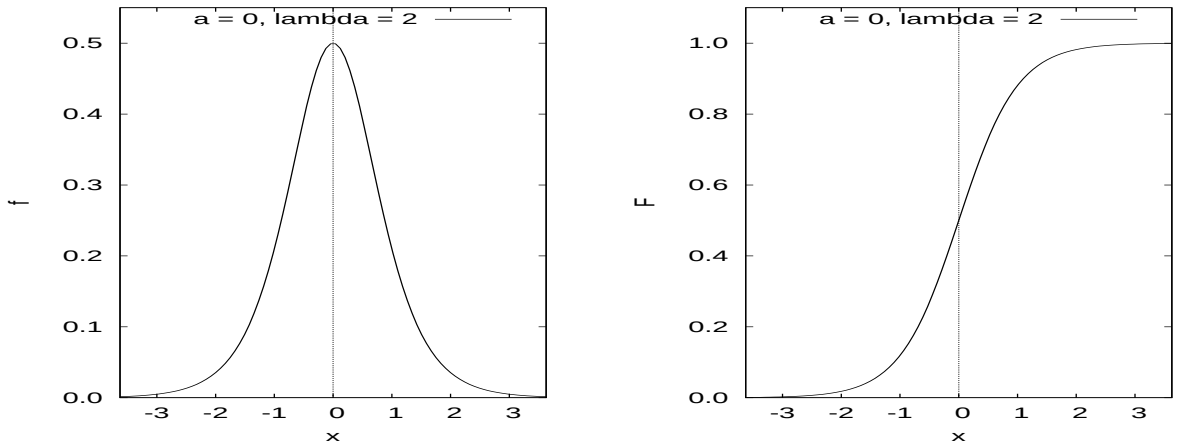


Figura 7.15: Densitatea şi funcţia de repartiţie logistică.

Densitatea de repartiţie logaritmnormală

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} erf\left(\frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Media este $x > 0,\ M(X) = e^{\mu}$, dispersia este $D^2(X) = \displaystyle\int_0^{\infty} (x - e^{\mu})^2 f(x)\, dx$.

Densitatea de repartiţie Maxwell

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} a^3 x^2 e^{-a^2 x^2}$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \sum_i \mathcal{F}(x_i)$$

Media este $M(X) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}a}$, dispersia este $D^2(X) = \dfrac{3 - \frac{8}{\pi}}{a^2}$.

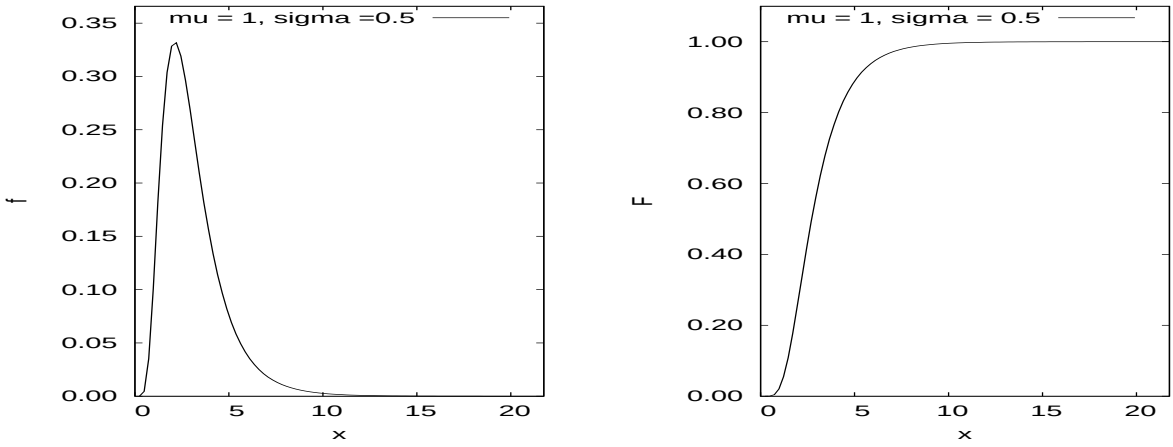


Figura 7.16: Densitatea şi funcţia de repartiţie logaritmnormală.

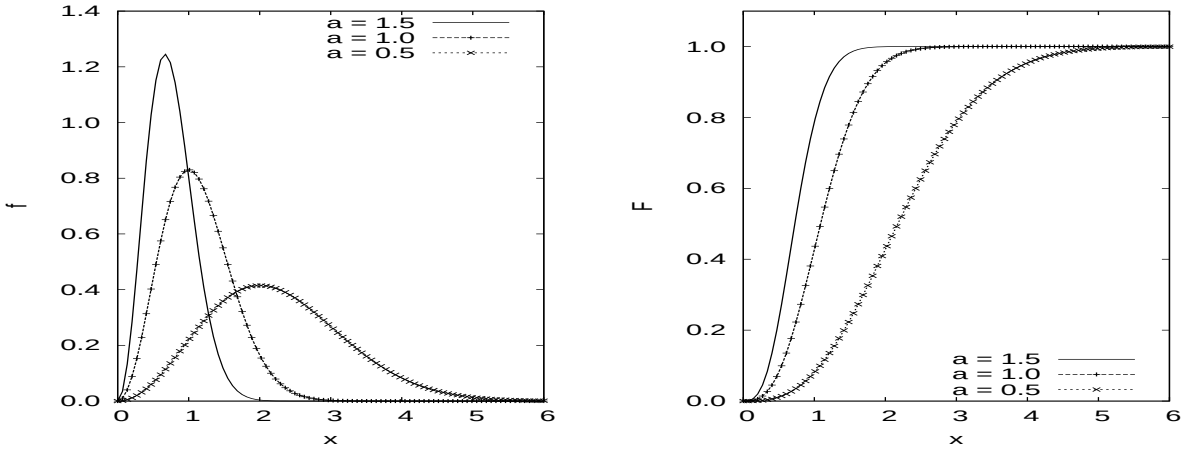


Figura 7.17: Densitatea şi funcţia de repartiţie Maxwell.

Densitatea de repartiţie binomial negativă

$$f(x) = \frac{(r+[x]-1)!}{[x]!(r-1)!}p^r(1-p)^{[x]}, \quad 0 < [x] < r$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \sum_i \mathcal{F}(x_i)$$

Media este $M(X) = \dfrac{r(1-p)}{p}$, dispersia este $D^2(X) = \dfrac{M(X)}{p}, 0 < p < 1, r \in \mathbb{N}^*$.

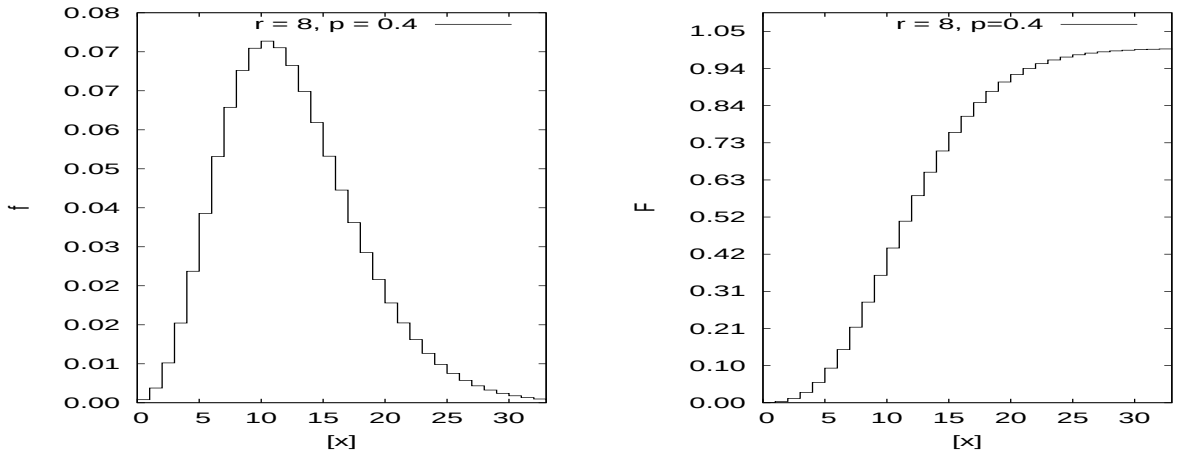


Figura 7.18: Densitatea şi funcţia de repartiţie binomial negativă.

Densitatea de repartiţie exponenţial negativă

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Media este $M(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, dispersia este $M^2(X)$.

Densitatea de repartiţie Pareto

$$f(x) = \frac{b}{x}\left(\frac{a}{x}\right)^b, \quad x \geq a$$

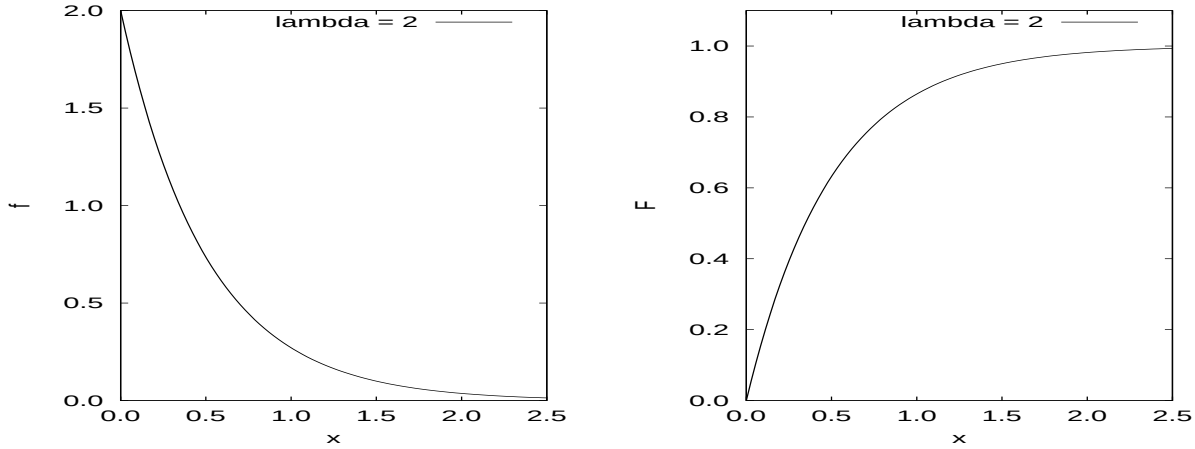


Figura 7.19: Densitatea şi funcţia de repartiţie exponenţial negativă.

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^b$$

Media este $M(X) = \dfrac{ab}{b-1}$, dispersia este $D^2(X) = \dfrac{a^2 b}{(b-1)^2(b-2)}$.

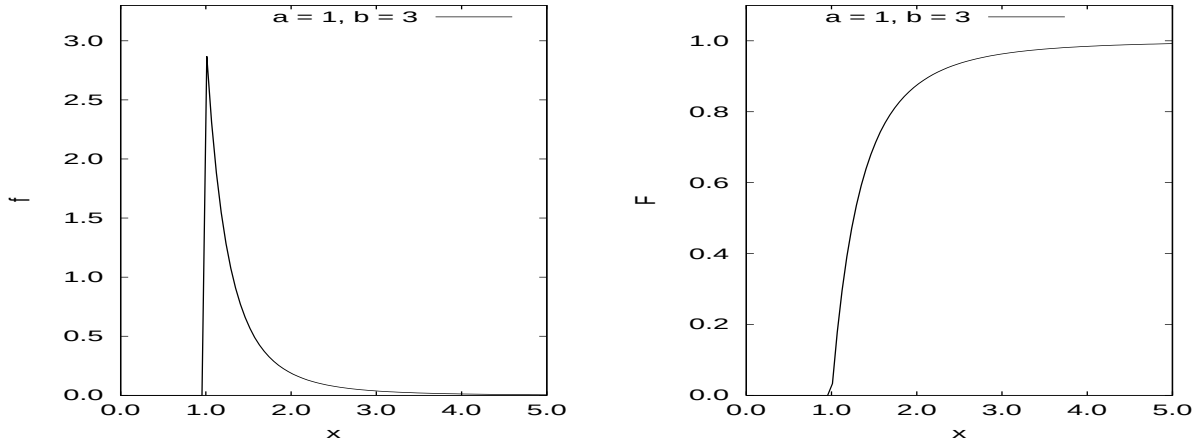


Figura 7.20: Densitatea şi funcţia de repartiţie Pareto.

Densitatea de repartiţie Poisson

$$f(x) = \frac{m^{[x]}}{[x]!} e^{-m}, \quad x > 0$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \sum_i \mathcal{F}(x_i)$$

Media este $M(X) = m$, dispersia este $D^2(X) = m$.

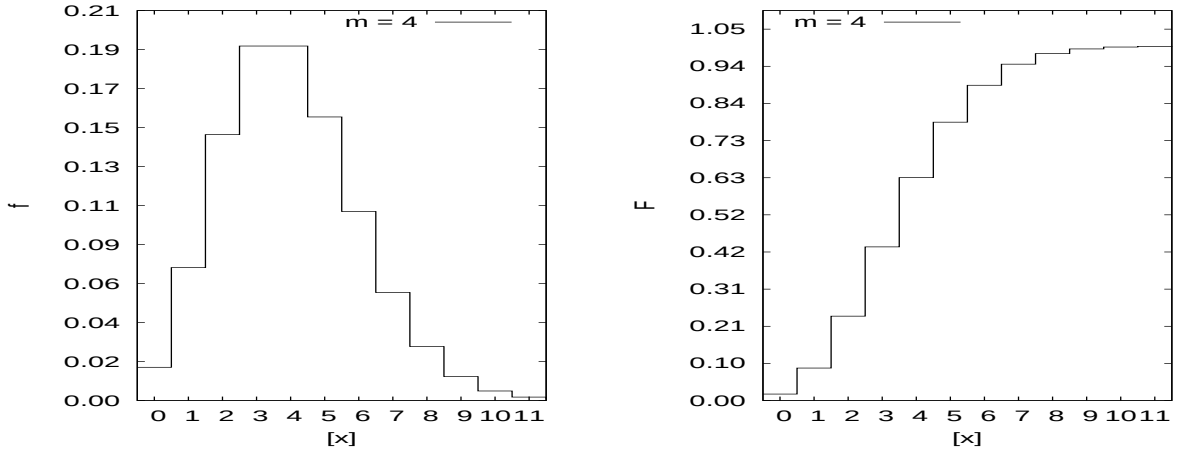


Figura 7.21: Densitatea şi funcţia de repartiţie Poisson.

Densitatea de repartiţie Rayleigh

$$f(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}, \quad \lambda > 0$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x^2}$$

Media este $M(X) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}}$, dispersia este $D^2(X) = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{\lambda}$.

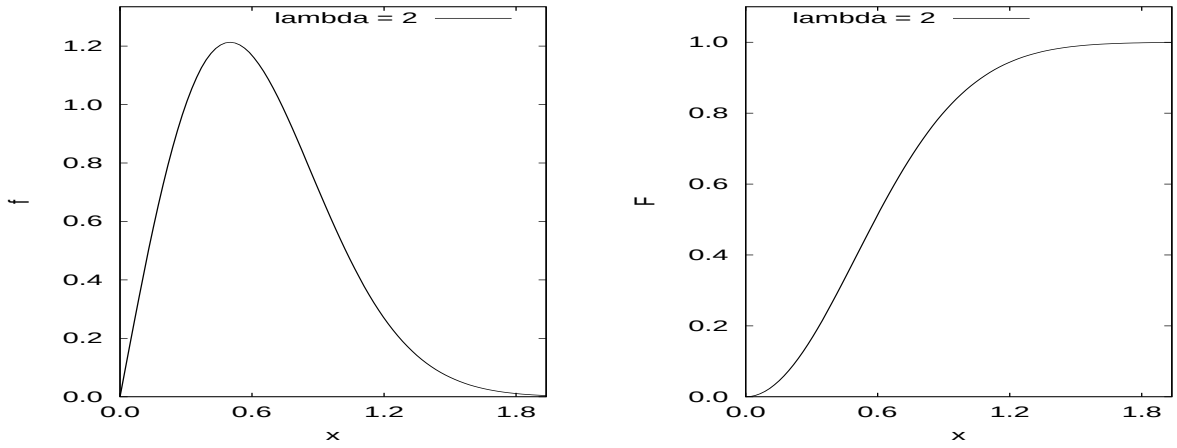


Figura 7.22: Densitatea şi funcţia de repartiţie Rayleigh.

Densitatea de repartiţie sinus

$$f(x) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)^2, \quad a, n > 0$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \frac{x}{a} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)}{2\pi n}$$

Media este $M(X) = \frac{a}{2}$, dispersia este $D^2(X) = \frac{a^2}{3}\left(1 - \frac{3}{2n^2\pi^2}\right) - \frac{a^2}{4}$.

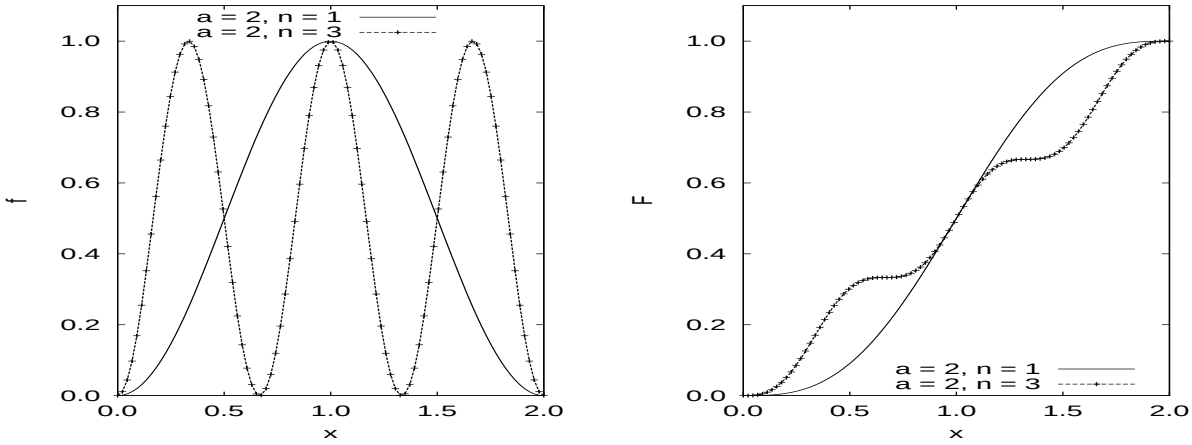


Figura 7.23: Densitatea şi funcţia de repartiţie sinus.

Densitatea de repartiţie Student

f este dată de (7.77)

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \sum_i \mathcal{F}(x_i)$$

Media este $M(X) = 0$, dispersia este $D^2(X) = \frac{\nu}{\nu - 2}$.

Densitatea de repartiţie triunghi

$$f(x) = \frac{1}{g} - \frac{|x - m|}{g^2}, \quad g > 0$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{x - m}{g} - \frac{x - m}{2g^2}|x - m|$$

Media este $M(X) = m$, dispersia este $D^2(X) = \frac{g^2}{6}$.

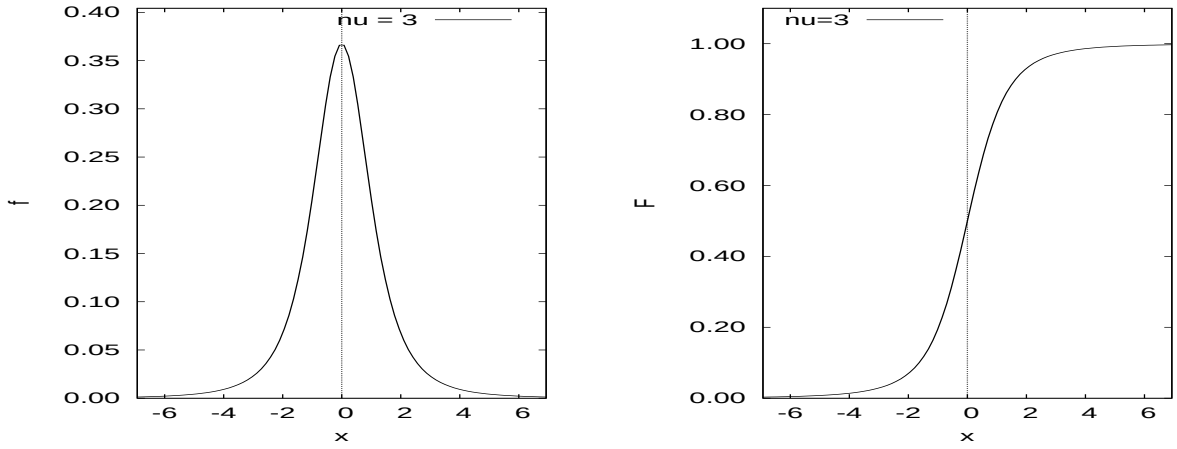


Figura 7.24: Densitatea şi funcţia de repartiţie Student.

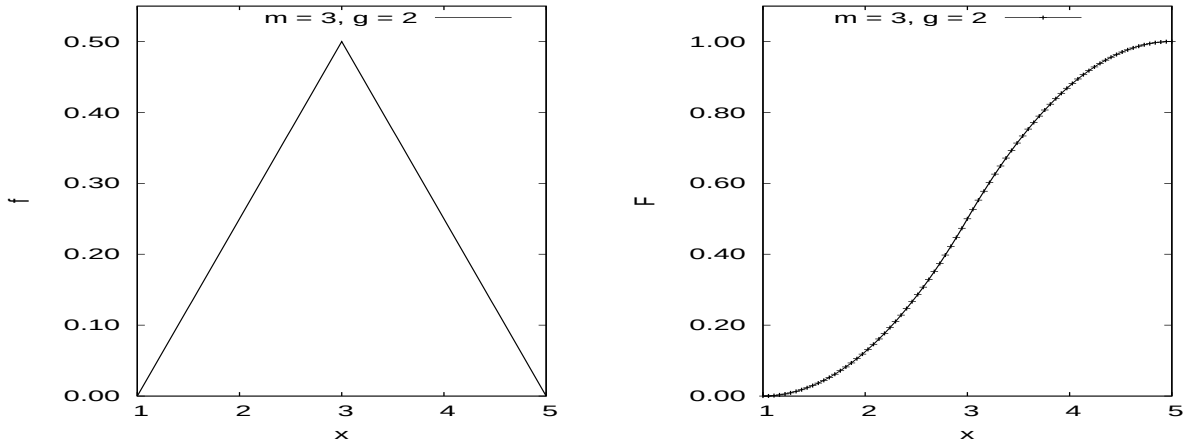


Figura 7.25: Densitatea şi funcţia de repartiţie în triunghi.

Densitatea de repartiţie uniformă

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a, b]$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

Media este $M(X) = \frac{a+b}{2}$, dispersia este $D^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

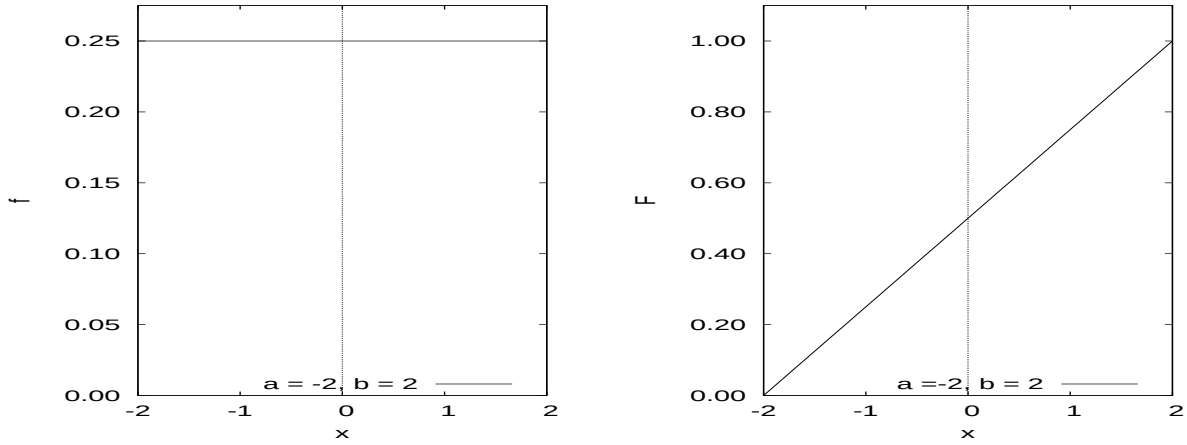


Figura 7.26: Densitatea şi funcţia de repartiţie uniformă.

Densitatea de repartiţie Weibul

$$f(x) = n\lambda x^{n-1} e^{-\lambda x^n}, \ x, \ \lambda, \ n > 0$$

Funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x^n}$$

Media este $M(X) = \frac{\lambda^{-\frac{1}{n}}\Gamma(\frac{1}{n})}{n}$, dispersia este $D^2(X) = \frac{2\lambda^{-\frac{2}{n}}\Gamma(\frac{2}{n})}{n} - M^2(X)$.

Exemplul 7.14.1 *În conformitate cu afirmaţiile de mai sus se consideră o mare masă lemnoasă rezultată în urma exploatării unui parchet de conifere. În vederea valorificării superioare a masei lemnoase formate din $n = 1000$ buşteni se introduc criteri de calitate. Masa lemnoasă se grupează în $k = 35$ clase de calitate, astfel o clasă este caracterizată de media sa, $\overline{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, respectiv prin limitele sale. Limitele fiecărei clase*

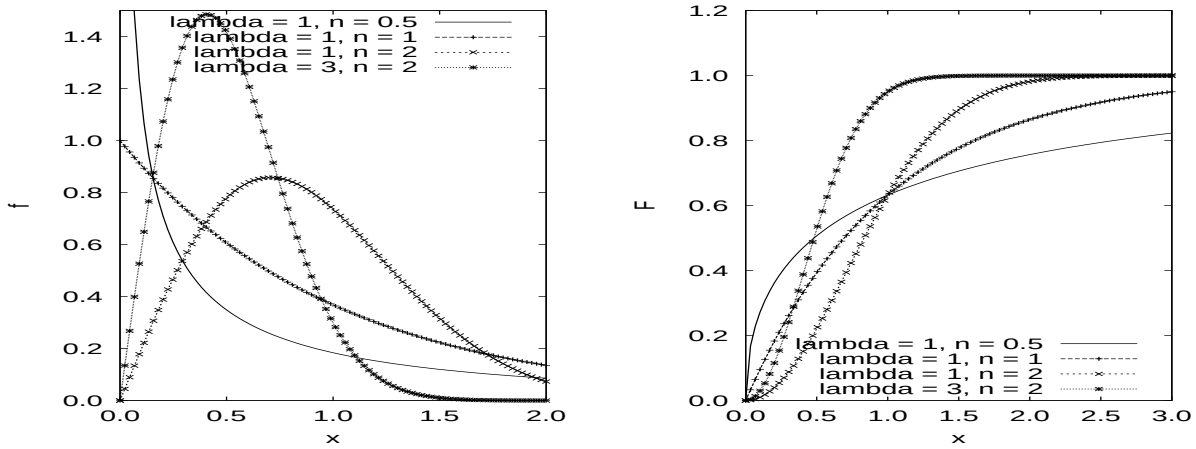


Figura 7.27: Densitatea şi funcţia de repartiţie Weibul.

sunt caracterizate de mulţimea valorilor $\{\overline{x}_i - 0.4, \overline{x}_i + 0.4\}_{\overline{i=1,k}}$. *Criteriul de calitate al fiecarei clase de buşteni este caracterizat de diametrul mediu, numărul de noduri pe metru, culoarea şi forma fibrei, concentraţia de umiditate, densitatea fibrei lemnoase, etc. Clasele sunt ordonate după criterile de calitate care sunt reprezentate de notele medii* $\overline{x_i}$ *de la 1 la 15 cu pasul de 0.4. Să se determine histograma corespunzătoare, media şi dispersia.*

Rezolvare: Frecvenţele de apariţie a claselor formate din cei n buşteni sunt exprimate de mulţimea de valori $\left\{\frac{h_i}{n}\right\}_{\overline{i=1,k}}$. Corespondenţa celor două mulţimi de valori formează o histogramă redată în Figura 7.28. În acest caz valoarea medie $M(X)$ şi dispersia $D^2(X)$ sunt exprimate de relaţiile,

$$M(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} h_i x_i, \tag{7.80}$$

$$D^2(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} h_i (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k} h_i x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} h_i x_i\right)^2\right]. \tag{7.81}$$

Histograma este aproximată analitic prin unul din procedeele amintite. Calitatea aproximării analitice a histogramei este caracterizată de testul χ^2 exprimat de relaţia:

$$\chi^2(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left[f^{(a)}(x_i) - f^{(e)}(x_i)\right]^2}{\sigma_i^2}, \tag{7.82}$$

unde $f^{(a)}$ este funcţia de aproximaţie ce depinde de parametrii $p_1,\ p_2, \ldots, p_n,\ \ f^{(e)}(x_i)$ care sunt mediile valorilor măsurate, σ_i sunt dispersiile fată de mediile rezultate din procesul repetitiv de măsurare a fiecărei valori iar n reprezintă numărul perechilor de puncte

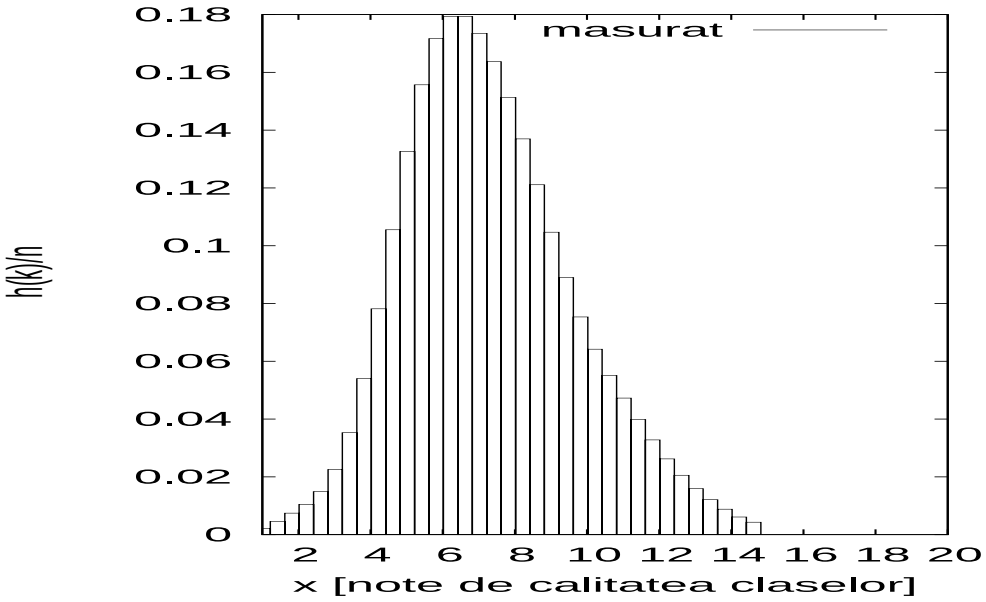


Figura 7.28: Distribuţia frecvenţelor în clase sub formă de histograme.

măsurate. Figurile 7.29 - 7.30 redau rezultatele procesului de aproximare a valorilor măsurate prin utilizarea densitaţilor de repartiţie normală, logaritmnormală, Gumbel şi logistică. Parametrii ce descriu fiecare repartiţie precum şi valorile $\chi^2(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ pentru $\sigma_i = 1$ sunt redate în Tabelul 7.2. Atunci când se are ca obiectiv aplicarea procedeului statistic pentru determinarea valorii medii adică a celei mai apropiate de cea adevartă, utilzatorul este pus în situaţia delicată de a alege cea mai adecvată formă analitică pentru densitate de repartiţie. După obţinerea curbei discrete de distribuţie a frecvenţelor de apariţie a măsuratorilor individuale, se impune determinarea celei mai bune funcţii de distribuţie. Funcţia ce aproximează poate fi determinată prin metoda celor mai mici pătrate ponderate prezentate în secţiunea 4.4.2 sau acolo unde funcţia de aproximare nu se poate liniariza se impune folosirea unor metode mai laborioase ce nu fac obiectul acestei lucrări [2]. În urma analizei Tabelului 7.2 se pot determina cele mai de încredere valori ale mediei, respectiv ale dispersiei rezultate din procesul de aproximare a histogramei. Din analiza valorilor χ^2 a rezultat următoarea relaţie de ordonare $\chi^2(\text{Gumbel}) < \chi^2(\text{lognormală}) < \chi^2(\text{logistică}) < \chi^2(\text{normală})$, acest lucru atestă că din punct de vedere statistic rezultatele măsuratorilor sunt cel mai bine descrise de densitatea de repartiţie Gumbel.

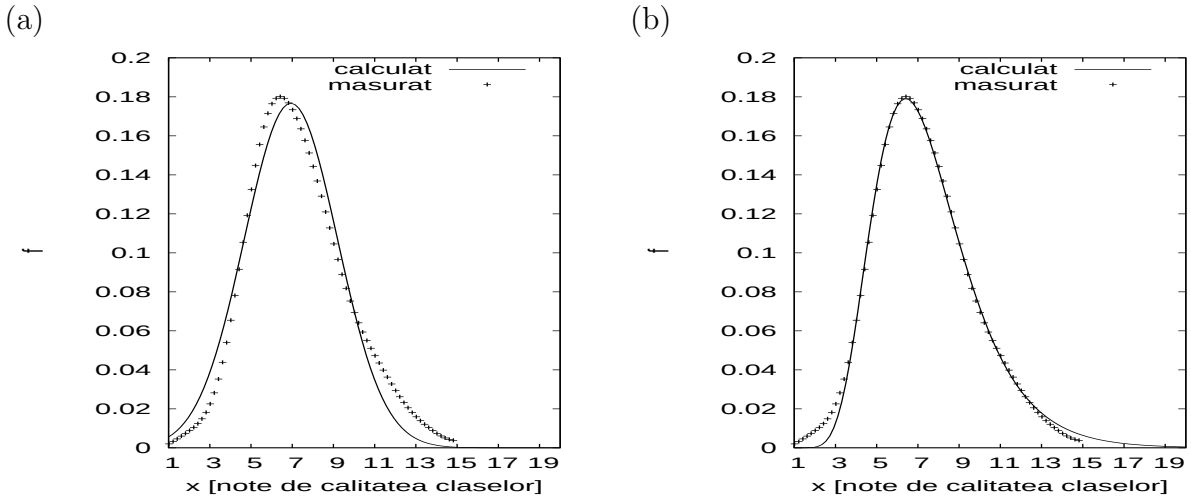


Figura 7.29: Aproximarea prin distribuţiile: (a) normală, (b) lognormală.

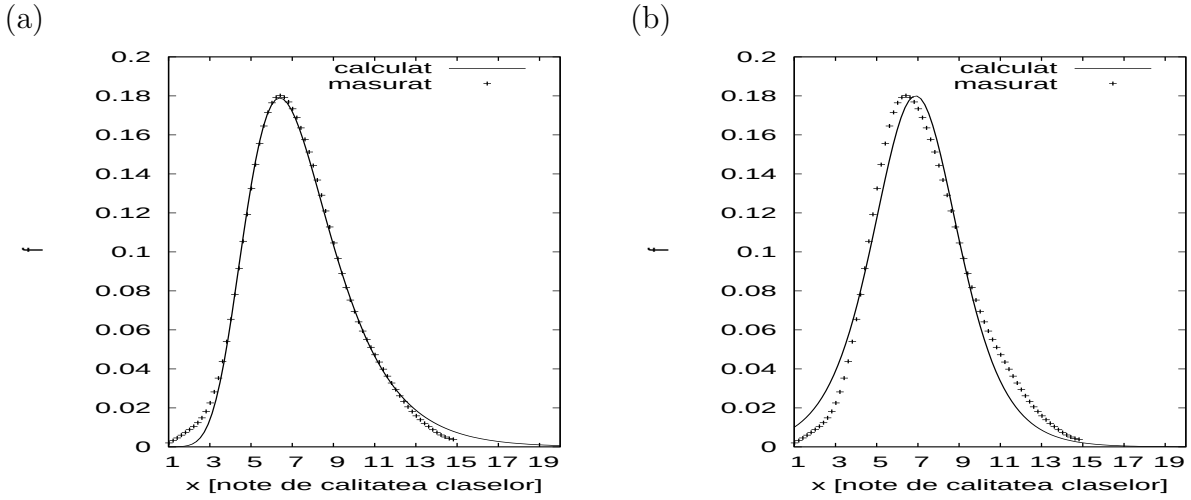


Figura 7.30: Aproximarea prin distribuţiile: (a) Gumbel, (b) logistică.

Tabelul 7.2: Parametrii distribuţiilor analizate

Repartiţia discretă	$M(X) = 7.82$	$D^2(X) = 5.25$	
Repartiţia normală	$m = 6.95$ $M(X) = m$	$\sigma = 2.26$ $D^2(X) = \sigma^2 = 5.096$	$\chi^2(m, \sigma) = 0.00808$
Repartiţia lognormală	$m = 1.97$ $M(X) = e^m = 7.145$	$\sigma = 0.329$ $D^2(X) = 6.471 =$ $= \int_1^{20}(x - M)^2 f(x)\, dx$	$\chi^2(m, \sigma) = 0.00103$
Repartiţia Gumbel	$u = 6.396$ $M(X) = u + \frac{\gamma}{\alpha} = 7.58$	$\alpha = 0.486$ $D^2(X) = \frac{\pi^2}{6\alpha^2} = 6.95$	$\chi^2(u, \alpha) = 0.00099$
Repartiţia logistică	$\lambda = 0.72$ $M(X) = a$	$a = 6.891$ $D^2(X) = \frac{\pi^2}{3\lambda^2} = 6.344$	$\chi^2(\lambda, a) = 0.00733$

7.15 Aplicaţii

1. O persoană va telefona la 4 numere diferite. Fiecare număr este format o singură dată. Notăm cu A_i evenimentul ca la apelul i să primească răspuns. Cum se scriu evenimentele:
   (a) primeşte răspuns la toate apelurile;
   (b) nu primeşte răspuns la nici un apel;
   (c) primeşte răspuns la cel mult un apel;
   (d) la un singur apel nu primeşte răspuns;
   (e) primeşte răspuns la două apeluri;
   (f) primeşte răspuns la trei apeluri;
   (g) nu primeşte răspuns la primul apel şi la încă unul din celelalte trei iar la celelalte doua apeluri primeşte răspuns.

2. Într-o pepinieră sunt trei tipuri de puieţi. Notăm cu A evenimentul ca puietul ales să fie pin, cu B evenimentul ca puietul ales să fie brad şi cu C evenimentul ca puietul

ales să fie zadă (larice). În ce constau evenimentele:

(a) $A \cap B \cap C$;

(b) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(c) $A \cup B \cup C$.

Sunt compatibile evenimentele:

(d) A şi B şi C;

(e) $(A \cap B)$ şi $(A \cap C)$;

(f) $(A \cup B)$ şi $(\overline{A} \cup B)$

(g) $(A \cap B)$ şi $(B \cup C)$.

3. Alegem la întâmplare o carte dintr-un pachet de 52 de cărti de joc. Care este probabilitatea ca să extragem un rege?

4. Care este probabilitatea de a alege o vocală din alfabet?

5. Într-un dulap sunt 5 cămăşi de culori diferite, şi anume, roşie, verde, albastră, albă şi neagră. Care este probabilitatea de a extrage de două ori consecutiv o cămaşă verde? (După prima extragere cămaşa se va pune la loc.)

6. Un studiu arată că la 9 din 10 studenţi le place pizza. Care este probabilitatea ca la trei studenţi aleşi la întâmplare să le placă pizza?

7. Pentru un anumit tip de ţesut probabilitatea cu care se selectează celulele aflate în diferite faze de evoluţie este: interfază 0.5, profază 0.1, metafază 0.05, anafază 0.2 şi telofază 0.15. Se fac 5 recoltări, care este probabilitatea ca toate celulele selectate să fie în metafază? Dar probabilitatea ca cel puţin o celulă să fie în metafază?

8. Într-o săptămână un pescar iscusit pescuieşte 700 de peşti din care 201 sunt crapi, 12 sunt somni, 289 sunt bibani, 78 sunt şalău şi 132 sunt caraşi. Care este probabilitatea de a alege, la întâmplare 4 crapi? Dar dacă alegem la întâmplare 12 peşti, care este probabilitatea ca să nu alegem nici un biban şi nici un somn?

9. Pe un raft sunt 4 cărţi de matematică şi 3 de botanică. Care este probabilitatea ca pe raft cărţile de matematică să stea una lângă alta?

10. Se alege o carte la întâmplare dintr-un pachet de 52 de cărţi de joc. Care este probabilitatea de a extrage un as de negru?

11. Un profesor organizează două teste. 25% dintre studenţi trec ambele teste şi 42% dintre studenţi trec doar primul test. Cât la sută dintre studenţii care au trecut primul test îl trec şi pe al doilea?

12. O urnă conţine bile albe şi negre. Sunt extrase două bile fără a le pune înapoi. Probabilitatea de a selecta o bilă albă şi una neagră este 0.43 iar pentru a selecta o bilă neagră este 0.47. Care este probabilitatea de a selecta o bilă albă la a doua extragere dacă prima bilă extrasă a fost neagră.

13. Probabilitatea ca un student să lipsească într-o zi de vineri este 0.03. Care este probabilitatea ca un student să fie absent dacă azi e vineri?

14. În universitate 58% dintre studenţi joacă fotbal iar 39% dintre studenţi joacă volei şi fotbal. Care este probabilitatea ca un student să joace volei dacă joacă fotbal.

15. Aruncând două zaruri să se calculeze probabilitatea ca suma punctelor de pe feţe să fie un număr s care satisface relaţia

$$7 \leq s \leq 9.$$

Dar pentru cazul

$$6 < s < 12?$$

16. Fie două urne U_1 şi U_2 care conţin acelaşi număr de bile

	Albe	Negre
U_1	4	4
U_2	1	7

Se face o extragere din una din urne, la întâmplare şi se constată ca bila scoasă a fost neagră. Care este probabilitatea ca bila să fi fost scoasă din urna U_2?

Indicaţie Evenimantele care apar în această experienţă sunt:

A_1 evenimentul de a extrage bilă din urna U_1;

A_2 evenimentul de a extrage bilă din urna U_2;

A evenimentul de a extrage o bilă neagră.

Evenimentul

$$A = (A_1 \cap A) \cup (A_2 \cap A)$$

A_1 şi A_2 formează un sistem complet de evenimente. Problema cere determinarea probabilităţii condiţionate $P(A_2|X)$. Se va folosi formula lui Bayes şi se va obţine $P(A_2|X) = \frac{7}{11}$.

17. Într-o cutie sunt 5 pachete a câte 20 de ţigări. În primul pachet este o ţigară ruptă, în al doilea sunt 2 ţigări rupte, în al treilea sunt 3 ţigări rupte şi în al patrulea sunt 4 ţigări rupte. Din fiecare pachet se ia câte o ţigară.
(a) Care este probabilitatea ca să se ia trei ţigări rupte şi una neruptă?
(b) Care este probabilitatea ca să se ia trei ţigări nerupte şi una ruptă?
(c) Care este probabilitatea ca să se ia cel puţin trei ţigări nerupte?

18. Se aruncă 2 zaruri de 10 ori. Care este probabilitatea ca să obţinem suma 7 exact de trei ori?

19. Se dau 4 urne. Prima urnă conţine 3 bile albe şi 4 bile negre, a doua urnă conţine 2 bile albe şi 5 bile negre, a treia urnă conţine 6 bile albe şi 2 bile negre şi a patra urnă conţine 4 bile albe şi 3 bile negre. Din prima urnă se fac 3 extrageri punându-se de fiecare dată bila înapoi în urnă, iar din celelalte trei urne se face câte o extragere. Care este probabilitatea extragerii a 2 bile albe şi una neagră din prima urnă, sau a 2 bile albe şi una neagră din următoarele 3 urne?

20. Într-o echipă sunt 25 de muncitori. Dintre aceştia 7 sunt şoferi. În vederea efectuării unor munci de amenajare a unei suprafeţe de teren se aleg la întâmplare 7 muncitori. Care este probabilitatea ca în acest grup să fie 3 şoferi? Care este probabilitatea ca grupul ales să conţină cel mult 4 şoferi?

21. Un soldat trage asupra unei ţinte de 4 ori. Probabilitatea cu care soldatul nimereşte ţinta este 0.6.

(a) Care este probabilitatea ca soldatul să nimerească de fiecare dată ţinta?

(b) Care este probabilitatea ca soldatul să nimerească de cel mult 3 ori ţinta?

22. Un client cumpără dintr-un magazin 6 bucăţi de ciocolată de acelaşi tip, 10 cutii de bomboane de acelaşi fel şi 9 pachete de biscuiţi de acelaşi fel pentru a pregăti 5 pachete de sortimente de dulciuri. Care este probabilitatea ca un pachet să conţină 3 pachete de ciocolată şi 4 pachete de biscuiţi?

23. Se dă variabila aleatoare

$$X\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Se cere:

(a) repartiţia variabilei X^3;

(b) repartiţia variabilei $X+1$;

(c) repartiţia variabilei $2X$;

(d) repartiţia variabilei X^{-1}.

24. Se aruncă două zaruri. Se notează cu S numărul total de puncte ce apar. Să se scrie repartiţia variabilei aleatoare asociate acestei experienţe.

25. Se dau variabilele aleatoare

$$X\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \quad Y\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Să se scrie repartiţia variabilelor aleatoare $X+Y$ şi $X\cdot Y$.

26. Ce repartiţie are suma variabilelor aleatoare independente:

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p^2 & \frac{5}{3}p & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad Y\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ q^2 & \frac{7}{4}p & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

27. Să se scrie funcţiile de repartiţie asociate variabilelor aleatoare din problemele 25. şi 26.

28. Se dă variabila aleatoare

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Se cere:

(a) valoarea medie a variabilei aleatoare;

(b) modulul variabilei aleatoare;

(c) mediana variabilei aleatoare;

(d) funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare;

(e) $P(X \leq 1)$ şi $P(1 \leq X \leq 5)$.

29. Se dau variabilele aleatoare independente

$$X\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0.4 & 0.3p & 0.3 \end{pmatrix} \quad Y\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze:

(a) $M(X)$, $M(Y)$, $D^2(X)$, $D^2(Y)$; (b) $M(X+Y)$, $D^2(X+Y)$;

(c) $M(X \cdot Y)$, $D^2(X \cdot Y)$.

30. La o fermă consumul zilnic de furaje este considerat normal (nu depăşeşte raţia fixată) cu o probabilitate de 70%.

(a) Să se scrie variabila aleatoare corespunzătoare consumului normal de furaje într-un interval de o săptămână.

(b) Să se scrie funcţia de repartiţie corespunzătoare.

(c) Să se calculeze probabilitatea ca raţia să fie depăşită în 2 zile, dar nu mai mult de 4 zile.

31. Se consideră funcţia $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = a(3x^2 - 1)$.

(a) Să se determine a astfel încât funcţia f să fie o densitate de probabilitate.

(b) Să se determine funcţia de repartiţie.

(c) Să se calculeze $P(1 \leq X < 2)$ şi $P\left(X < \frac{3}{2}\right)$.

32. Dispunem de un lot de 200 de produse dintre care 26 sunt rebuturi. Se aleg la întâmplare 5 produse.

(a) Să se determine variabila aleatoare ce exprimă numărul de rebuturi corespunzător celor 5 piese selectate.

(b) Să se scrie funcţia de repartiţie corespunzătoare.

(c) Care este probabilitatea evenimentului de a avea cel mult 3 rebuturi?

33. Într-o fabrică controlul pieselor este făcut printr-o selecţie repetată de $n = 25$ piese. Datele statistice dau rebuturi cu probabilitatea $p = 0.1$. Să se determine variabila aleatoare X care reprezintă numărul de rebuturi folosind legea evenimentelor rare ($\lambda = n \cdot p$).

34. Într-o perioadă de vârf o centrală telefonică primeşte 600 de chemări pe oră. Ştiind că centrala poate da 25 de legături pe minut. Să se calculeze probabilitatea ca chemând un număr de telefon să nu-l putem obţine timp de un minut.

Indicaţie. Se va folosi legea evenimentelor rare. λ reprezintă numărul de chemări pe minut $\dfrac{600}{60}$ şi se va determina $P(X > 25) = 0.059$.

35. (a) Să se verifice dacă următoarea funcţie poate fi densitate de probabilitate:

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \text{ şi } \quad a > 0$$

(b) Să se determine media, mediana, modulul dispersia şi abaterea standard pentru variabila aleatoare de la punctul (a).

36. O variabilă aleatoare cu repartiţia normală are valorile $m = 12$ şi $\sigma = 3$. Se cere:

(a) Probabilitatea ca variabila aleatoare să ia valori mai mici decât 4.

(b) Probabilitatea ca variabila aleatoare să ia valori mai mici decâ-4.

(c) Probabilitatea ca variabila aleatoare să ia valori în intervalul $[10, 15]$.

Capitolul 8

Produsul gnuplot şi aplicaţiile sale

În domeniile tehnice şi ştiinţifice reprezentarea grafică a unor funcţii analitice sau discrete constituie o preocupare importantă. Aceasta poate fi motivată prin percepţia vizuală a rezultatelor obţinute dintr-un anumit experiment sau model.
O mare parte din figurile care apar în carte sunt realizate folosind produsul *gnuplot*. Acest capitol are ca obiectiv descrierea unor comenzi folosite pentru realizarea reprezentărilor grafice. De exemplu, este mult mai facil să se analizeze grafic rezultatul unei aproximări globale al unui set de date experimentale în funcţie de valoarea testului χ^2 descris de relaţia (7.82). Atunci când datele experimentale de analizat sunt reprezentate prin funcţii de două variabile sau seturi de câte trei puncte, practic este imposibil de a analiza procesul descris fără o reprezentare a acestora în spaţiul tridimensional. Un alt caz intâlnit destul de des în activitatea didactică şi stiinţifică este analiza unor fenomene ce sunt descrise de proiecţia unor suprafeţe în plan cum ar fi extragerea unor informaţii din studiul izoliniilor.

8.1 Descrierea pachetului de programe

Produsul *gnuplot* a fost elaborat prima dată de către cercetătorii americani C. Kelley şi T. Willians în anul 1986 şi a fost destinat desenării unor varietăţi mari de funcţii analitice cât şi reprezentării datelor conţinute în fişiere de date. De la început produsul a fost gândit pentru a putea fi implementat pe diverse sisteme de operare cu precădere pentru cele din mediul academic (UNIX, LINUX, DOS, WINDOWS) producând o diversitate largă

de formate pentru fişierele de ieşire. Produsul este proprietatea grupului software GNU cu suport financiar guvernamental şi care pentru domeniile academice şi de cercetatre guvernametală este distribuit în mod gratuit [29].

Începând cu anul 1989 produsul *gnuplot* poate crea fişiere de ieşire de tip LaTeX[15]. În ultimele versiuni elaborate a fost implementat şi algoritmul Levenberg-Marquard destinat procedeelor de aproximare globală a seturilor de valori experimentale prin funcţii de una şi două variabile.

Produsul se bazează pe un set de comenzi (numai litere mici) introduse de la tastatură sau prin intermediul mouse-lui în mediul WINDOWS. Editarea comenzilor poate fi realizată cu orice editor de tip ASCII (Notepad, Edit, joe, etc.). Comenzile matematice care descriu funcţiile de interes sunt similare cu cele din limbajele de programare consacrate C, FORTRAN, PASCAL sau BASIC. O parte din funcţiile matematice şi operatorii acceptaţi sunt prezentate în Tabelele 8.1 şi 8.2. Sunt cunoscute şi alte produse cu aceeaşi destinaţie cum ar fi ORIGIN, GRAPHER, SIGMAPLOT, LOTUS, MAPLE, MATHEMATICA etc., dar pentru care utilizatorul trebuie să posede licenţă de utilizare în conformitatea cu legile internaţionale în vigoare. Produsul *gnuplot* poate citi în format definit sau implicit fişiere de organizare secvenţială ale căror câmpuri pot fi numere reale sau complexe. Fişierele de intrare sunt utilizate pentru reprezentarea grafică în două, respectiv trei dimensiuni în diverse stiluri a funcţiilor tabelare. Din Tabelul 8.1 rezultă că produsul conferă posibilitatea utilizatorului să folosească diverse categorii de funcţii matematice cum ar fi algebrice, trigonometrice directe şi inverse, hiperbolice şi speciale (Γ, erf $rand$, Bessel sferice de ordin intreg , etc). Astfel, există posibilitatea construirii diverselor funcţii analitice de una sau două variabile. Pe lângă acestea produsul *gnuplot* are implementat o gamă largă de operatori logici. Semnificaţia acestora este redată în Tabelul 8.2. Pe baza funcţiilor analitice şi a operatorilor logici se poate construi un limbaj propriu cu ajutorul căruia se dezvoltă chiar algoritmi de calcul ale căror rezultate finale vor fi reprezentate grafic. Setul de instrucţiuni poate constitui un fişier de comenzi indirecte care poate fi salvat şi relansat ulterior. Fişierele grafice realizate pot fi salvate într-o multitudine de formate şi pot fi ulterior incluse în documente. Exemple elocvente în acest sens vor fi prezentate în finalul capitolului.

Tabelul 8.1: Funcţiile matematice acceptate de produsul *gnuplot*.

Funcţia	Tip argument	valoarea furnizată
$abs(x)$	$x \in R$	valoarea absolută a lui x, $\|x\|$ acelaşi tip de reprezentare
$abs(x)$	$x \in \mathcal{C}$	modulul $x \in \mathcal{C}$, $\sqrt{(\Re(x)^2 + \Im(x)^2)}$
$acos(x)$	$x \in R$	$\cos^{-1} x$ funcţia cosinus inversă, radiani
$arg(x)$	$x \in C$	faza argumentului x, radiani
$asin(x)$	$x \in R$	$\sin^{-1} x$ funcţia sinus inversă, radiani
$atan(x)$	$x \in R$	$\tan^{-1} x$ funcţia tangentă inversă, x exprimat în radiani
$besj0(x)$	radiani	funcţia Bessel sferică de ordinul 0, $j_0(x)$
$besj1(x)$	radiani	funcţia Bessel sferică de ordin 1, $j_1(x)$
$besy0(x)$	radiani	funcţia Bessel de ordin 0, $y_0(x)$
$besy1(x)$	radiani	funcţia Bessel de ordin 1, $y_1(x)$
$ceil(x)$	$x \in R$	cel mai mic întreg mai mare ca x
$cos(x)$	radiani	funcţia cosinus
$cosh(x)$	radiani	funcţia cosinus hiperbolic
$erf(x)$	$x \in R$	funcţia de eroare pentru distribuţia Gauss rel. (7.67)
$exp(x)$	$x \in R$	funcţia eponenţială
$floor(x)$	$x \in R$	cel mai mare întreg dar mai mic decât x
$gamma(x)$	$x \in R$	$\Gamma(\Re x)$, funcţia *gamma* a lui Euler rel .(9.44)
$imag(x)$	$x \in C$	partea imaginară a unui număr complex
$int(x)$	$x \in R$	partea intreagă pozitivă
$log(x)$	$x \in R$	logaritmul natural, $x > 0$
$log10(x)$	$x \in R$	logaritmul în baza 10, $x > 0$
$rand$		şirul numerelor aleatoare conţinute în interval [0,1]
$real(x)$	$x \in C$	partea reală a unui număr complex
$sgn(x)$	$x \in R$	1 dacă $x > 0$, 0 dacă $x = 0$, -1 dacă $x < 0$
$sin(x)$	radiani	funcţia sinus
$sinh(x)$	$x \in R$	sinus hiperbolic de x
$sqrt(x)$	$x \in R$	$\sqrt{x}$
$tan(x)$	radiani	tangenta
$tanh(x)$	radiani	tangenta hiperbolică

Tabelul 8.2: Operatorii binari acceptaţi de produsul *gnuplot*

Simbol	Mod de scriere	Semnificaţie
**	$a**b$	a la puterea b
*	$a*b$	a înmulţit cu b
/	a/b	$b \neq 0$, a împărţit la b
%	$a\%b$	a, b întregi, clasa de resturi modulo b
+	$a+b$	a adunat cu b
−	$a-b$	b scăzut din a
==	$a == b$	egalitatea dintre a şi b
!=	$a! = b$	$a \neq b$
^	$a \hat{} b$	a, b valori binare, operatorul logic *or* exclusiv
|	$a\|b$	a, b valori binare, operatorul logic *or* inclusiv
&&	$a\&\&$	a, b întregi, operatorul logic *and*
||	$a\|\|b$	a, b întregi, operatorul logic *or*
? :	$r = a?b : c$	b, c, r întregi, operatorul *ternar* definit astfel
		dacă condiţia a este adevărată ($a \neq 0$) atunci $r = b$ altfel
		$r = c$
!	$a!$	$a \in N$, factorial de n
	Alţi operatori definiţi pe numere binare	
∼	$\sim a$	a reprezentare binară, toţi biţii 0
		şi 1 se poziţionează pe 1 respectiv 0
!	$!a$	a reprezentare binară, negaţia logică

8.1.1 Comenzi importante

Orice comandă poate fi editată pe unul sau mai multe rânduri, ultimul caracter al rândului ce se continuă trebuie să fie "backslash"-ul (\). Argumentele conţinute între acolade sunt considerate ca opţionale. Bara verticală | denotă caracterul exclusiv al argumentelor. Caracterele cuprinse intre "< respectiv >" denota valorile argumentelor ce trebuie să fie introduse. Prin introducerea comenzi *help ?* urmată de numele comenzii se obţine o scurtă descriere a acesteea. În continuare se descriu cele mai uzuale comenzi.

load "numefisier" (în total 11 caractere, exclusiv punctul) poate încărca o succesiune de comenzi create aprioric implicând prin aceasta o economie de timp;

cd " $<$ *numedirector* $>$ " conferă posibilitatea schimbării directorului;

clear determină ştergerea ecranului curent al terminalului de lucru;

save "nume fişier" determină salvarea unei succesiuni de comenzi într-un fişier;

pause $<$ *time* $>$ {" $<$ *string* $>$ "}, suprimă pentru un timp dat execuţiile succesive, unde $<$ *timp* $>$ exprimat în secunde poate fi un întreg ori o expresie, astfel pentru valoarea -1 se continuă procesul numai după acţionarea tastei enter (Carrige Return), şirul $<$ *string* $>$ reprezintă un literal introdus de utilizator;

plot ori **splot** este una dintre comenzile cele mai importante, aceasta realizează reprezentarea grafică în două, respectiv trei dimensiuni, o primă sintaxă a acestora este:

```
plot {ranges} {<function> | {"<datafile>" {using ...}}}
     {title} {style} {, <function> {title} {style}...}
splot {ranges} {<function> | {"<datafile>" {index i} {using ...}}}
     {title} {style} {, <function> {title} {style}...}
```

unde $<$ *function* $>$ este o funcţie matematică, aceasta poate fi şi sub formă parametrică, " $<$ *datafile* $>$ " este numele unui fişier ce trebuie să conţină cel puţin două coloane. Sintaxa extinsă comenzilor *plot*, respectiv *splot* este:

```
plot "datafile" { using { <ycol> |<xcol>:<ycol> |<xcol>:<ycol>:<ydelta> |
<xcol>:<ycol>:<ylow>:<yhigh> | <xcol>:<ycol>:<ylow>:<yhigh>:<boxwidth> }
{"<scanf string>"} } ...
splot "datafile" { using { <xcol>:<ycol>:<zcol> | <zcol> }
```

```
{"<scanf string>"} } ...
```

unde parametrii $< xcol >$, $< ycol >$, şi $< zcol >$ descriu modul de selectare a coloanelor atribuite variabilelor x, y respectiv z din fişierul specificat.
ydelta (+/- error) se foloseşte atunci când se doreşte reprezentarea barelor de eroare şi atunci trebuie să apară ca a treia coloană de valori sau *ylow* şi *yhigh* ca a treia şi a patra coloană, fie trei comenzi:

```
plot "data.dat" using 1:2:3:4 with errorbars
plot "data.dat" using 3:2:6 with errorbars
plot "data.dat" using 3:4:8:7 with errorbars
```

prima realizează reprezentarea grafică pentru valorile x, y, ylow, şi yhigh din coloanele 1, 2, 3, 4, a doua citeşte pe x, y şi ydelta din coloanele 3, 2 respectiv 6, a treia citeşte x, y, ylow şi yhigh din coloanele 3,4, 8 respectiv 7
$< boxwidth >$ este folosită pentru transformarea barelor de eroare în dreptunghiuri, pentru aceasta în coloana a cincea trebuie specificată lărgimea dreptunghiului ataşat fiecărei valori, *scanf* descrie formatele (similare ca sintaxa celor din limbajul C) de citire şi atribue coloanele din fişierul de intrare. Acest software are posibilitatea de reprezentare grafică în stiluri diferite şi anume prin linii, puncte ($+$ x $\diamond$ $\square$ $\circ$, etc.), linii şi puncte, săgeţi (impulsuri), puncte fine (dots), bare de eroare, scară si histograme.
title " $< title >$ " descrie titlul generic al graficului;
replot redesenează pe ecranul monitorului graficul precedent;
În completarea reprezentării grafice există comenzi suplimentare care sunt introduse prin comanda *set*.
Săgeţile care pot indica anumite zone din grafic se pot realiza prin comanda,

```
set arrow {<tag>} {from <sx>,<sy>{,<sz>}}{to <ex>,<ey>{,<ez>}} {{no}head}
set noarrow {<tag>}
show arrow
```

unde $< tag >$ este un întreg ce identifică fiecare săgeată. Parametrii $< sx >, < sy >$,{, $< sz >$},$< ex >, < ey >$ {, $< ez >$} specifică punctele de coordonate ale poziţiei iniţiale

respectiv finale a săgeţii. Comanda *set noarrow* anulează desenarea acestora.
Încadrarea desenului realizat se poate face cu comanda *set border*
Atunci când reprezentarea unui set de puncte se realizează prin linii, între punctele experimentale există mai multe posibilităti de interpolare (liniară, funcţii spline cubice, respectiv bspline) a valorilor conţinute între două puncte succesive folosind comanda,

```
set cntrparam { { linear | cubicspline | bspline } | points <n> |
order <n>  | levels { [ auto ] <n> |discrete <z1>,<z2>, ... |
incremental {<start>, <incr>{, <end>} } }
```

unde *points* $< n >$ specifică numărul de valori generate între două puncte adiacente, *order* $< n >$ specifică ordinul polinomial al aproximaţiei *bspline*, *levels* descriu parametrii săi de discretizare şi incrementare, ei sunt folosiţi atunci când se utilizează comanda *splot*, suprafeţei obţinute i se poate ataşa un număr de linii de nivel. Aceste opţiuni sunt introduse cu comnada *set contour*, care realizează desenarea liniilor de nivel.
Inscripţionarea valorilor pe axele graficului se realizează cu comanda,

```
set format {<axes>} {"<format-string>"}
show format
```

unde $< axes >$ poate fi ‘x‘, ‘y‘, ‘z‘, ‘xy‘ sau niciuna, formatele sunt cele utilizate în limbajul C. În reprezentarea tridimensională suprimarea sau desenarea curbelor ce nu se văd poate fi realizată prin comenzile *set hidden*3*d*, respectiv *set nohidden*3*d*.
Poziţionarea indicativelor corespunzătoare fiecărei curbe sau suprafeţe se realizează cu comanda *set key* $< x >, < y >, < z >$, unde $< x >, < y > \{, < z >\}$ reprezintă aproximativ punctul de coordonate al legendei. Există posibilitatea reprezentării grafice în scară logaritmică, acest lucru se realizează prin comanda *set logscale* $< axes >< base >$ unde $< axes >$ poate fi ‘x‘, ‘y‘, şi ‘z‘, iar $< base >$ indică baza logaritmului utilizat. Rezultatul reprezentării grafice poate fi redat pe ecranul monitorului sau salvat într-un format anume într-un fişier, cu ajutorul comenzii *set output* ” $< filename >$ ” sau redat pe imprimantă prin comanda *set output* $|lpr - nume\ imprimanta$. Al doilea tip de reprezentări grafice acceptate de produsul *gnuplot* este acela al funcţiilor parametrice prin utilizarea comenzii *set parametric*. În cazul reprezentării bidimensionale funcţia parametrică este definită

de o pereche de funcţii corespunzătoare celor două variabile, iar in cazul 3-d, suprafaţa este descrisă astfel $x = f(u, v),\ y = g(u, v)$ şi $z = h(u, v)$. Un alt gen de reprezentare este cel în coordonate polare, prin comanda *set polar*. În acest caz variabila independentă este unghiul iar lungimea razei vectoare este variabila dependentă. Lungimea razei vectoare este realizată prin comanda *set rrange* $< rmin >$: $< rmax >$, unde argumentele $< rmin >$ şi $< rmax >$ reprezintă limitele intervalului. Acurateţea (rezoluţia) reprezentării grafice pentru un semnal analitic depinde de procesul de eşantionare, acesta poate fi stabilit prin comanda *set samples* $< samples_1 >$, $< samples_2 >$. Dimensiunile reprezentării grafice se realizează prin comanda $setsize\{< xscale >, < yscale >\}$ unde $< xscale >$ şi $< yscale >$ sunt factori de scală ai celor două axe. Dimensiunea implicită este de 5×3 inchi adică 12.7×7.6 cm. Una dintre cele mai importante comenzi se referă la formatul fişierului de ieşire ce conţine reprezentarea realizată, aceasta fiind dată de *set terminal* $< terminal - type >$. Prin această comandă se poate identifica şi tipul imprimantei pe lânga cel al formatului. Pe lânga formatele specifice tuturor produselor de grafică ce pot fi realizate sub sistemul de operare DOS sau WINDOWS acest software mai posedă trei formate cel mai des utilizate în mediul academic şi cel ştiinţific şi anume LaTeX, psLaTeX şi *postscript*. Sintaxa completă pentru ultimul terminal este:

```
set terminal postscript{<mode>}{<color>} {<dashed>}
{"<fontname>"} {<fontsize>}
```

unde$< mode >$ este landscape (297×210) mm, portrait (210×297) mm şi postscript encapsulat. Argumentele $< fontname >$ şi $< fontsize >$ specifică tipul de fonturi precum şi dimensiunea acestora.
Comenzile *set xtics*, *set ytics* şi *set ztics* determină intervalele şi pasul de inscripţionare pe axe. Sintaxa acestor comenzi este

```
set xtics { {<start>, <incr>{, <end>}} |
{({"<label>"} <pos> {, {"<label>"} <pos>}...)} }
set noxtics
show xtics
```

unde parametrii $< start >$, $< incr >, < end >$ specifică valorile de început, pasul utilizat în procesul reprezentării grafice asociat fiecărei axe şi valoarea finală.
În reprezentarea 3-d este important ca vizualizarea suprafeţelor să fie cât mai expresivă, în acest sens se poate folosi comanda *set view*. Sintaxa acesteia este:

```
set view <rot_x> {,{<rot_z>}{,{<scale>}{,<scale_z>}}}
```

unde $< rot_x >$ şi $< rot_z >$ controlează unghiul de rotire (în grade) după axele x respectiv y. Informaţiile referitoare la semnificţia axelor se realizează prin comenzile

```
set xlabel {"<label>"} {<xoff>}{,<yoff>}
set ylabel {"<label>"} {<xoff>}{,<yoff>}
```

unde $< xoff >$ şi $< yoff >$ determină poziţia literalelor.
Când se doreşte reprezentarea grafică a unor porţiuni din fişier se folosesc comenzile *set xrange* $[< xmin > \ : \ < xmax >]$, unde $< xmin >$ şi $< xmax >$ defineşte intervalul de reprezentare. Aşa cum s-a prezentat în Tabelele 8.1 şi 8.2 există posibilitatea efectivă de a defini expresii matematice combinate cu date conţinute în fişiere cum ar fi cele de mai jos.

```
w=2
q=floor(tan(pi/2 -0.1))
f(x)=sin(w*x)
sinc(x) = sin(pi*x)/(pi*x)
delta(t) = (t == 0)
ramp(t) = (t > 0) ? t : 0
min(a,b) = (a < b) ? a : b
comb(n,k) = n!/(k!*(n-k)!)
len3d(x,y,z) = sqrt(x*x+y*y+z*z)
pop(x) = 103*exp((1965-x)/10)
plot [1960:1990] opulation.dat pop(x)
unde fisierul population.dat poate contine datele:
# Populatia din  Antarctica incepand cu anul 1965 (comentariu)
1965   103
```

```
1970    55
1975    34
1980    24
1985    10
```

Se revine la determinarea celei mai bune valori exprimat prin valoarea $\chi^2(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ descrisă de relaţia (7.82). Produsul *gnuplot* are implementată metoda de determinare a celor mai buni parametrii $p_1, p_2, \ldots, p_n$ care este realizează pe baza algoritmului Levenberg-Marquard prezentat în lucrările [2, 14]. Linia de comandă are sintaxa:

```
FIT_LIMIT=0.1e-07
fit {[xrange] {[yrange]}} <function> "<datafile>" via
"<parameter file>"|<var1> {,<var2>,...}
```

unde: [xrange], [yrange],$< function >$, "$< datafile >$", $< parameterfile >$, $< var1 >$, $< var2 >$ reprezintă intervalul variabilelor x şi y, fişierul de date ce conţine sub forma tabelară a datele ce urmează să fie aproximate, fucţia analitică de una sau două variabile cu care se aproximează, parametrii care intervin în procesul de aproximare care pot fi scrişi secvential, sau pot face obiectul unui fişier de date. Utilizatorul trebuie să estimeze valorile iniţiale ale parametrilor $p_1, p_2, \ldots, p_n$, valori care de cele mai multe ori pot fi estimate cel puţin ca ordin de mărime. Trebuie facută precizarea că în conformitate cu definiţia testului χ^2 exprimat de relaţia (7.82) se pot introduce şi dispersiile σ_i fată de fiecare valoare y_i sau z_i. Acest lucru se specifică cu atributul *using* care descrie în cazul bidimensional coloanele x_i, y_i, σ_i respectiv pentru funcţii de trei variabile x_i, y_i, z_i, σ_i.
Indentificatorul FIT_LIMIT conduce procesul iterativ de determinare a celor mai bune valori a parametrilor $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Procesul iterativ are loc până când $\chi^2 \leq FIT_LIMIT$.
Produsul *gnuplot* are implementat pe lângă instrucţiuni de atribuire şi de calcul altele două comenzi des întânite cum sunt if şi $print$. Sintaxa acestora este redată în exemplele următoare:

Exemplul 8.1.1 *Succesiunea de instrucţiuni introdusă din tastatură,*

```
pi=3
if (pi != acos(-1)) print "Nu este adevarat"; pi = acos(-1);
print " Valoarea aproximativa a lui pi este ",pi
```

duce la apariţia pe ecran a mesajelor,

```
Nu este adevarat
Valoarea aproximativa a lui pi este 3.14159265358979
```

Exemplul 8.1.2 *Fie funcţia,*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dacă } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{dacă } 1 \le x < 2, \end{cases}$$

Să se transpună funcţia f în conformitate cu funcţiile şi operatorii logici descrişi în Tabelele 8.1 şi 8.2.

Rezolvare: Se transpune în instrucţiunea,

```
f(x) = 0 <= x && x , 1 ? sin (x), 1 <= x && x <2 ? 1/x
```

8.1.2 Calcule realizate cu produsul gnuplot

În domeniul ştiinţei materialelor, biofizicii, biochimiei, etc., sunt şi metode spectrale în care din punct de vedere experimental se achiziţionează derivata răspunsului spectral. Datorită existenţei mai multor compuşi în materialul investigat în răspunsul spectral apare contribuţia fiecăruia. Modelul matematic este descris de o sumă de derivate a funcţiei Gauss,

$$\frac{f(x)}{dx} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i(x-b_i)}{c_i^2} \exp\left[-\frac{(x-b_i)^2}{2c_i^2}\right] \tag{8.1}$$

iar răspunsul integral este redat de funcţia f,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \exp\left[-\frac{(x-b_i)^2}{2c_i^2}\right]. \tag{8.2}$$

După cum se poate constata parametrii modelului a_i, b_i şi c_i nu pot fi determinati prin metoda celor mai mici pătrate deoarece relaţiile (8.1) şi (8.2) nu pot fi liniarizate în funcţie de parametrii de interes. Pentru $N = 4$, caracteristicile răspunsului spectral rezultat din procesul de aproximare ataşat modelului sunt realizate de succesiunea de instrucţiuni,

```
set terminal postscript portrait 24
FIT_LIMIT = 1e-15
#########################################################
###              Raspunsul spectral derivat           ###
###       Parametrii iniţiali a1, b1...a4, b4, c4     ###
###       sunt cititi din fisierul resd.par           ###
#########################################################
gauss1d(x)=-a1*(x-b1)/c1/c1*exp(-0.5*(x-b1)*(x-b1)/c1/c1)
gauss2d(x)=-a2*(x-b2)/c2/c2*exp(-0.5*(x-b2)*(x-b2)/c2/c2)
gauss3d(x)=-a3*(x-b3)/c3/c3*exp(-0.5*(x-b3)*(x-b3)/c3/c3)
gauss4d(x)=-a4*(x-b4)/c4/c4*exp(-0.5*(x-b4)*(x-b4)/c4/c4)
gaussd(x)=gauss1d(x)+gauss2d(x)+gauss3d(x)+gauss4d(x)
fit gaussd(x) "resd.dat" via "resd.par"
#########################################################
###  fisierul resd.par contine valorile finale        ###
###   ale parametrilor a1,b1,c1,..., a4,b4,c4         ###
#########################################################
set key
set xlabel "x"
set ylabel "f(derivat)"
set output "resderiv.ps"
plot [2600:3800] gauss1d(x) title "1" w linespoints,\
gauss2d(x) title "2" w linespoints,gauss3d(x) title "3" w \
linespoints, gauss4d(x) title "4" w linespoints,gaussd(x) \
title "5"  w linespoints,"resderiv.dat" u 1:5 title "6" w lines
pause -1 "Actionati tasta ENTER"
#########################################################
###              Raspunsul spectral integral          ###
###       Parametrii iniţiali a1, b1...a4, b4,c4      ###
###       sunt cititi din fisierul resa.par           ###
```

```
#########################################################
gauss1a(x)=a1*exp(-0.5*(x-b1)*(x-b1)/c1/c1)
gauss2a(x)=a2*exp(-0.5*(x-b2)*(x-b2)/c2/c2)
gauss3a(x)=a3*exp(-0.5*(x-b3)*(x-b3)/c3/c3)
gauss4a(x)=a4*exp(-0.5*(x-b4)*(x-b4)/c4/c4)
gaussa(x)=gauss1a(x)+gauss2a(x)+gauss3a(x)+gauss4a(x)
fit gaussa(x) "resa.dat" via "resa.par"
#########################################################
###  fisierul resa.par contine valorile finale       ###
###   ale parametrilor a1,b1,c1,..., a4,b4,c4        ###
#########################################################
#             graficele raspunsului integrat            #
#########################################################
set ylabel "f=f1+f2+f3+f4"
set output "resabs.ps"
plot gauss1a(x) title "1" w linespoints,\
gauss2a(x) title "2" w linespoints,gauss3a(x) title "3" \
w linespoints,gauss4a(x) title "4" w linespoints,gaussa(x)\
title "gaussa" title "5" w lines,"resa.dat" title "6"  w points
pause -1 "Actionati tasa ENTER"
#########################################################
```

În Figura 8.1 (a) şi (b) este redat răspunsul spectral derivat pentru compuşii analizaţi, respectiv cel integrat. Parametrii a_i, b_i şi c_i reprezintă amplitudinea, poziţia centrul de greutate al distribuţiei, respectiv lărgimea spectrală corespunzătoare fiecărui component în parte. Tabelul 8.3 conţine valorile iniţiale, finale, respectiv incertitudinile $\pm\delta_i$ ce aproximează răspunsul spectral experimental.

Exemplul 8.1.3 *Se consideră un set de date de tip x_i, y_i, z_i care exprimă distribuţia vaporilor de apă din atmosferă în funcţie de temperatură şi densitate. Modelul matematic*

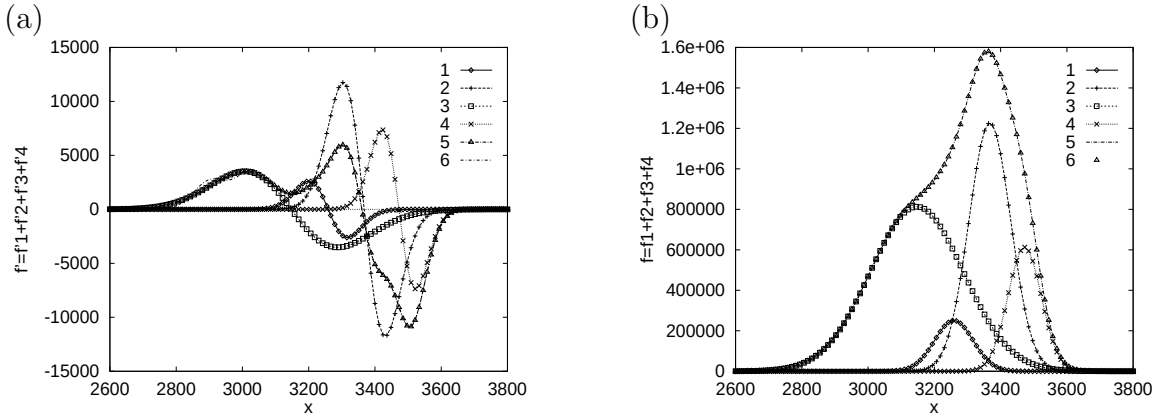


Figura 8.1: Răspunsul spectral; (a) - derivat, (b) - integral, **1,4** - cele patru componente, **5** - suma analitică a componentelor spectrale, **6** - răspunsul spectral experimental.

Tabelul 8.3: Parametrii iniţiali, finali şi incertitudinile $\pm\delta_i, \overline{i=1,12}$ a celor patru distribuţii Gauss rezultaţi după 30 de iteraţii ale răspunsului spectral

Parametrii	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2
iniţiali	200000	2950	50	17500	2925	85
finali	250976	3258.96	58.197	813083	3147.18	140.089
$\pm\delta_i, \overline{i=1,6}$	64233	9.89	3.43	21140	0.7072	1.387
Parametrii	a_3	b_3	c_3	a_4	b_4	c_4
iniţiali	475000	330	80	450000	3450	100
finali	1226399	3367.52	63.277	612808	3472	50.4151
$\pm\delta_i, \overline{i=7,12}$	38150.50	1.36	2.712	39123.9	1.6156	0.619

al acestei distribuţii este redat de relaţia,

$$h(x,y) = \sqrt{r^2 - |x - x_0|^{2.2} - |y - y_0|^{1.8}} + z_0$$

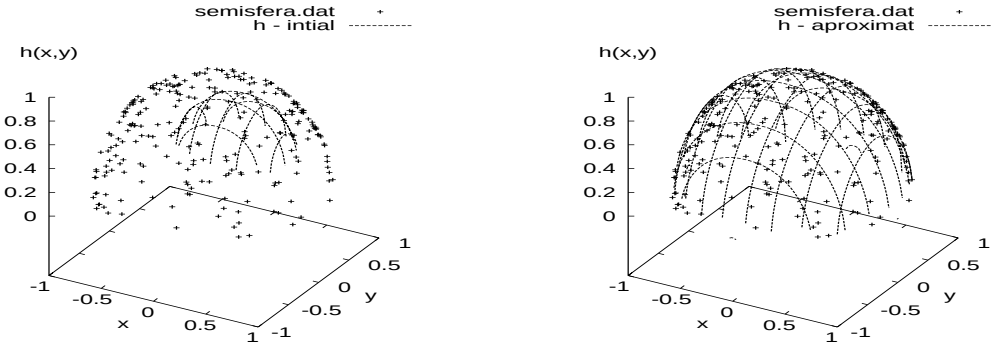
Parametrii de interes care descriu modelul sunt $x_0,\ y_0,\ z_0$ *şi* r *Să se determine cele mai bune valori ale acestor parametrii dacă valorile iniţiale ale parametrilor sunt* $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0.2$, $z_0 = 0.3$ *şi* $r = 0.5$.

Rezolvare: Setul de instrucţiuni care determină cele mai bune valori ale parametrilor sunt:

```
FIT_LIMIT = 1e-5 FIT_MAXITER=50 print "\n Demonstrarea tehnicii de
fitare 3D " print "\n fisierul hemisphr.dat conţine valorile
inaltime functie" print "\n de densitate şi temperatura." print
"\n Nmarul maxim de iteratii este FIT_MAXITER = 50." ###### h(x,y)
= sqrt(r*r - (x-x0)**2.2 - (y-y0)**1.8) + z0 ##### set terminal
postscript portrait 24 set xlabel "x" set ylabel "y" set zlabel
"h(x,y)" set ztics 0,0.2,1 set ytics -1,0.5,1 set xtics -1,0.5,1
set zrange [0:1] set yrange [-1:1] set xrange [-1:1] h(x,y) =
sqrt(r*r - (abs(x-x0))**2.2 - (abs(y-y0))**1.8) + z0 x0 = 0.1 y0 =
0.2 z0 = 0.3 r=0.5 # reprezentarea  grafica a modelului initial
functie de datele experimentale set output "hemis1.ps" splot
emisphr.datusing 1:2:3 title "semisfera.dat", h(x,y) \ title
"h - intial" pause -1 "Actioneaza tasta ENTER" # instructiunea ce
determina procesul de aproximare fit h(x,y) "hemisphr.dat" using
1:2:3:(1) via r, x0, y0, z0 set output "hemis2.ps" splot
emisphr.dat using 1:2:3 title "semisfera.dat", h(x,y) \ title
"h - aproximat" print "\n Cele mai bune valori ale parametrilor:"
print "\n r = ",r print "\n x0 = ",x0 print "\n y0 = ",y0 print
"\n z0 = ",z0 print "\n Sfarsitul executiei" pause -1 "Actioneaza
tasta ENTER"
```

În urma execuţiei secvenţei de instrucţiuni pe ecran se obţin valorile $x_0 = -0.00031$, $y_0 = 0.000599$, $z_0 = 0.002538$ şi $r = 1.00193$. În Figurile 8.2 (a) şi (b) sunt redate datele

iniţiale, respectiv cel obţinute după aproximare globală.



(a) (b)

Figura 8.2: Reprezentarea grafică 3D a modelului;(a) - initial, (b) - după aproximare.

8.1.3 Exemple de reprezentări grafice

Cu ajutorul produsului *gnuplot* se pot realiza desene şi harţi. În Figura 8.3 sunt redate poziţiile centrelor universitare şi stiinţifice de pe mapamond unde produsul *gnuplot* este folosit pe scară largă.

În continuare sunt redate un set de figuri însotite de calculele aferente care le definesc. Astfel Figurile 8.4, 8.8 redau graficele funcţiilor analitice $f(x) = 6 \exp x^2 + 1$, $f(x) = \sin\, x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ respectiv $f(x) = max(\sin(x), min(x^2, x^3)) + \dfrac{1}{2}$. Figura 8.5 redă graficul tridimensional al funcţia *Ackerman* definită astfel,

$$ack(n,m) = \begin{cases} n+1 & \text{dacă} \quad m = 0 \\ ack(m-1,1) & \text{dacă} \quad n = 0 \\ ack(m-1, ack(mn-1)) & \text{dacă} \quad m \neq 0. \end{cases}$$

Figura 8.9 redă reprezentarea bidimensională a funcţiei întregi ce exprimă cel mai mare divizor comun al numerelor cuprinse între 1 şi 60. Figurile 8.6 şi 8.10 redau grafic în reprezentare parametrică funcţii analitice în 2 şi 3D. Figura 8.11 redă semnificaţia grafică a valorilor $\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n$ din relaţia (7.82) în conformitate cu barele de eroare. Figura 8.12 redă modalitatea de calcul aproximativ al integralei funcţiei de eroare, $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \exp -x^2$ pentru intevalul finit $[\alpha, \alpha]$ unde $\alpha = 5$.

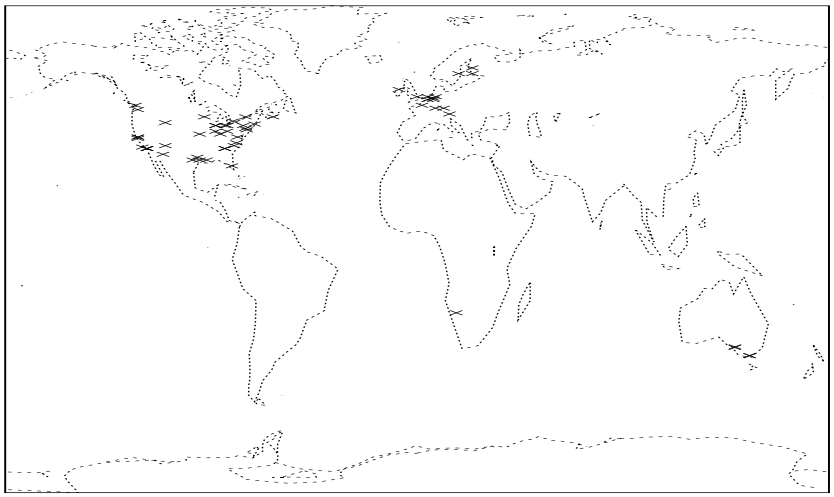


Figura 8.3: Harta lumii desfăşurată în plan; semnul X indică locurile de pe mapamond unde este utilizat cu precadere produsul *gnuplot*.

```
set terminal postscrip portrait 24
set output "eg6.ps"
set format y "%g"
set format x "%5.1f"
set xlabel " x "
set ylabel " y"
set label "Data" at -5,-5 right
set arrow from -5,-5 to -3.3,-6.7
set key -4,8
set xtic -10,5,10
plot [-10:10] [-10:10] "eg3.dat" \
title "1" with linespoints 1 7, \
6*exp(-x*x)+1  title "2" \
with lines 4
```

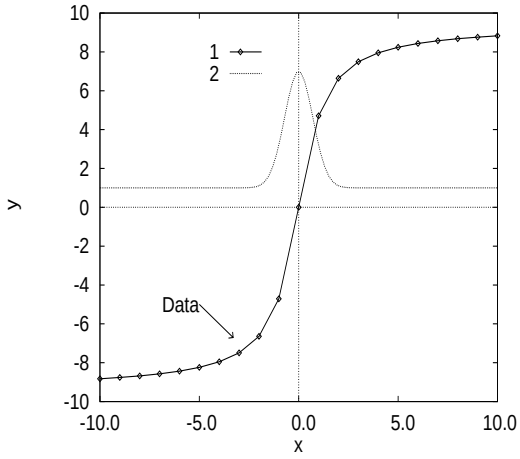


Figura 8.4: (**1**) - spectrul experimental, (**2**) - $f(x) = 6e^{-x^2} + 1$.

```
set terminal postscrip portrait 24
set output "akerman.ps"
set nokey
ack(m,n) = (m == 0) ? n + 1 : (n == 0) \
? ack(m-1,1) : ack(m-1,ack(m,n-1))
set xrange [0:3]
set yrange [0:3]
set isosamples 4
set samples 4
set nokey
splot ack(x, y)
pause -1 "Actioneaza tasta enter\
pentru a continua"
```

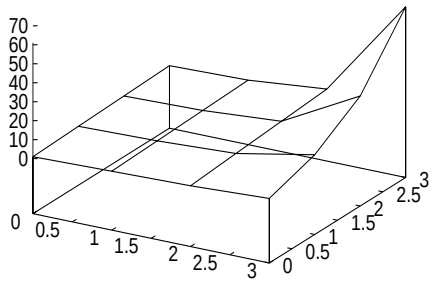


Figura 8.5: Funcţia Ackerman $z = ack(x, y)$.

```
set terminal postscript portrait 24
set parametric
set isosamples 50,20
set urange [0:2*pi]
set vrange [0:2*pi]
set output "inele.ps"
set nokey
splot cos(u)+.5*cos(u)*cos(v),sin(u)+\
.5*sin(u)*cos(v),.5*sin(v) \
title "1" with lines,\
1+cos(u)+.5*cos(u)*cos(v),.5*sin(v),\
sin(u)+ .5*sin(u)*cos(v) \
title "2" with lines
pause -1 "Actioneaza tasta enter\
pentru a continua"
```

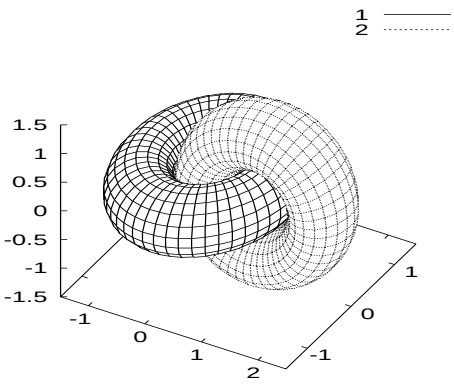


Figura 8.6: Reprezentarea parametrică a două inele toroidale legate.

```
set terminal postscrip portrait 24
set output "polar.ps"
set noborder
set clip
set polar
set dummy x
set samples 160
set xrange [0:2*pi]
plot cos(2*x)
pause -1 "Actioneaza tasta enter\
pentru a continua"
```

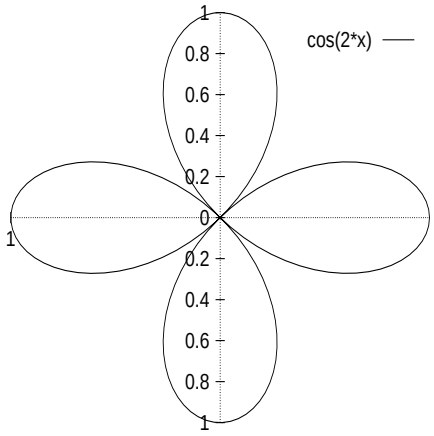


Figura 8.7: Funcţia polară $f(x) = \cos(2x)$.

```
set terminal postscrip portrait 24
set output "minmax.ps"
min(x,y) = (x < y) ? x : y
max(x,y) = (x > y) ? x : y
plot sin(x) title "1" w lines,\
x**2 title "2" w linespoints,\
x**3 title "3" w linespoints, \
max(sin(x),min(x**2, x**3))+0.5\
title "4" w linespoints
pause -1 "Actioneaza tasta enter \
pentru a continua"
```

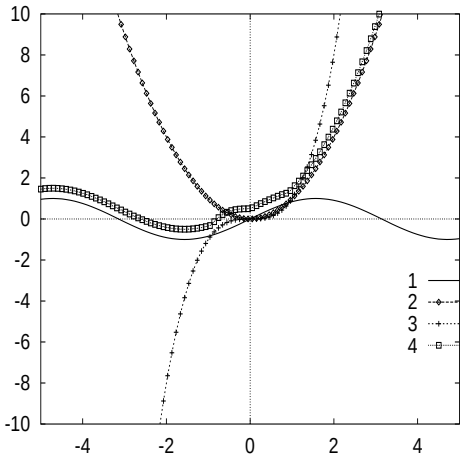


Figura 8.8: (**1**) $y = \sin(x)$, (**2**) $y = x^2$, (**3**) $y = x^3$, (**4**) $y(x) = max(sin(x), min(x^2, x^3)) + 0.5$.

```
set terminal postscrip portrait 24
set output "gcd.ps"
min(x,y) = (x < y) ? x : y
max(x,y) = (x > y) ? x : y
gcd(x,y) = gcd1(rnd(max(x,y)),\
rnd(min(x,y)))
gcd1(x,y) = (y == 0) ? x : \
gcd1(y, x - x/y * y)
rnd(x) = int(x+0.5)
set samples 59
set xrange [1:59]
set auto
set nokey
plot gcd(x, 60)
pause -1 "Actioneaza tasta enter \
pentru a continua"
```

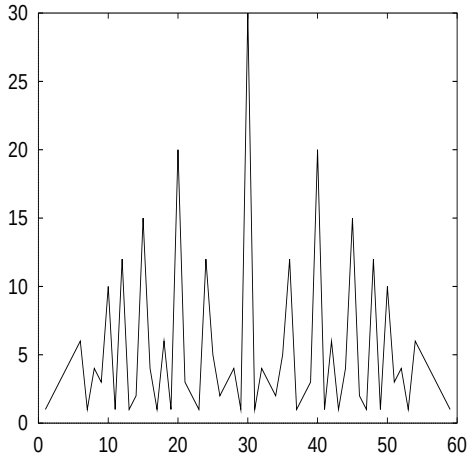


Figura 8.9: Funcţia cel mai mare divizor comun $gcd(x, 60)$.

```
set terminal postscrip portrait 24
set output "param.ps"
set parametric
set dummy t
set autoscale
set samples 160
set xrange [-3:3]
set yrange [-3:3]
plot -t,t title "1" w lines,\
cos(t),cos(2*t) title "2"\
 w linespoints,\
2*cos(t),sin(t) title "3"\
 w linespoints,\
-cosh(t),sinh(t) title "4" \
w linespoints
```

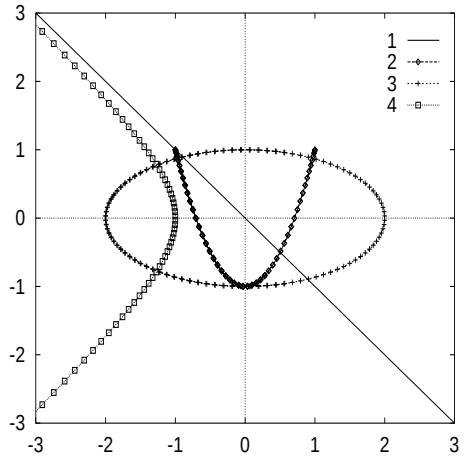


Figura 8.10: Funcţii reprezentate parametric.

```
set terminal postscrip portrait 24
set output "errorbar.ps"
set xrange [-3:65]
set yrange [ 4:14]
set title "Plot data file twice to \
get lines and errorbars"
plot "err.dat" title "1" with lines,\
 "err.dat" using 1:2:3:4 title "2" \
with errorbars
```

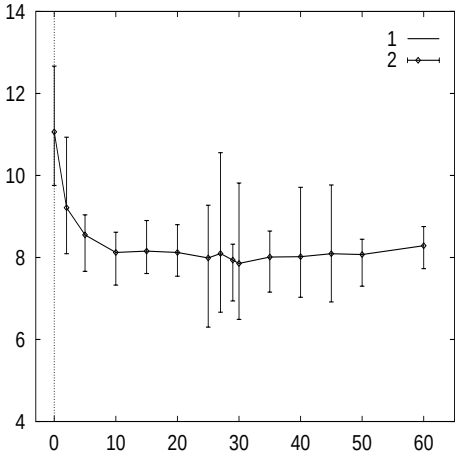


Figura 8.11: (**1**) - semnalul fără bare de eroare, (**2**) - cu bare de eroare $(ylow, yhigh)$.

```
set terminal postscrip portrait 24
set output "erf.ps"
f(x) = exp(-x**2)
delta = 0.2
integral_f(x) = (x>0)? \
integral1a(x):-integral1b(x)
integral1a(x) = (x<=0)?0:\
(integral1a(x-delta)+delta*f(x))
integral1b(x) = (x>=0)?0:\
(integral1b(x+delta)+delta*f(x))
integral2_f(x,y) = (x<y)?\
integral2(x,y):-integral2(y,x)
integral2(x,y) = (x>y)?0:\
(integral2(x+delta,y)+delta*f(x))
set samples 50
plot [-5:5] f(x) title "1" \
w linespoints,\
2/sqrt(pi)*integral_f(x) \
title "2",\
"erf.out" title "3"
pause -1 "Actioneaza orice tasta \
pentru a continua"
```

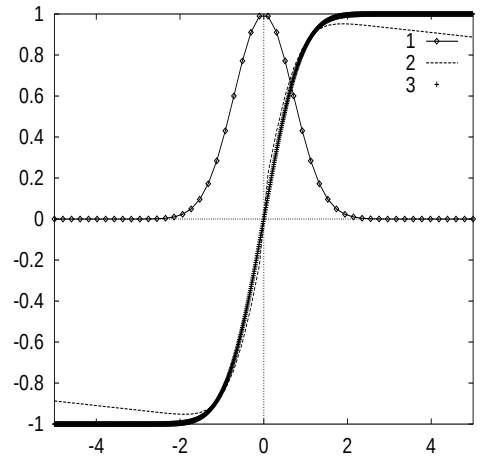


Figura 8.12: (**1**) - Distribuţia Gauss $f(x) = exp(-x^2)$, (**2**) - funcţia erorilor $erf(x)$ calculată cu comenzile *gnuplot*, (**3**) - funcţia erorilor, Tabelul 8.1.

Capitolul 9

Anexe

În acest capitol sunt amintite noţiuni presupuse cunoscute asupra cărora nu se insistă la curs precum şi noţiuni care depăşesc nivelul cursului dar care vor fi utile în activitatea practică.

9.1 Anexa la Capitolul 1

Permutari

Se consideră cazul în care $A = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. O funcţie bijectivă $\sigma : A \to A$ se numeşte permutare de garadul n. Se notează cu S_n mulţimea tuturor permutărilor de gradul n; numărul elementelor mulţimii S_n este $n!$ si elementele mulţimii se noteaza cu $\alpha,\ \beta,\ \ldots$. Reprezentarea sub formă de tablou a unei astfel de funcţii este:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Exemplul 9.1.1 *Să se scrie mulţimea tuturor permutărilor de gradul* 3
Fie $A = \{1, 2, 3\}$.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiţia 9.1.1 *Fie $\sigma \in S_n$. Se spune că permutarea σ conţine o inversiune dacă există $i, j \in \{1, 2, \dots n\}$ $i < j$ astfel încât $\sigma(i) > \sigma(j)$.*

Numărul total de inversiuni ale unei permutări se notează cu $m(\sigma)$.

Definiţia 9.1.2 *Signatura unei permutări se notează cu $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$. Dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$ permutarea se numeşte pară iar dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$ permutarea se numeşte impară.*

Exemplul 9.1.2 *Să se studieze paritatea permutării γ din exemplul 9.1.1.*

Numărul inversiunilor permutării γ este 3; rezultă ca γ este permutare impară.

Determinantul de ordinul 2.

Fie sistemul liniar de ecuaţii algebrice:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases} \tag{9.1}$$

Rezolvând sistemul (9.1) prin oricare din metodele cunoscute şi dacă $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ se obţine:

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \tag{9.2}$$

Matricea coeficienţilor sistemului (9.1) se va nota cu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ Se observă că numitorul din egalităţile (9.2) este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală a matricei A din care se scade produsul elementelor de pe diagonala secundară a matricei A. Acest număr se va nota cu $detA$ şi se va numi determinantul matricei A sau determinant de ordin doi deoarece matricea A este matrice pătratică de ordinul doi. Acest număr se notează astfel,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Egalităţile (9.2) se scriu sub forma:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Egalităţile de mai sus se numesc *formulele lui Cramer*.

Determinantul de ordinul 3.

În mod analog se introduce determinantul de ordin trei care intervine în rezolvarea unui sistem algebric liniar de trei ecuaţii cu trei necunoscute. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{cases} \tag{9.3}$$

Determinantul asociat matricei sistemului (9.3) este:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{9.4}$$

numit determinant de ordinul trei. Acest număr se poate calcula folosind regula triunghiului sau regula lui Sarrus.

Regula lui Sarrus

1. Se formeaza tabloul alcătuit din liniile determinantului (9.4) şi sub ele se scriu prima si a doua linie (în această ordine), rezultând un tablou cu 5 linii şi trei coloane.

2. Se înmulţesc elementele de pe prima diagonală si cele de pe liinile paralele cu ea (astfel încât fiecare produs să aibă trei factori $a_{11}a_{22}a_{33},\ a_{12}a_{23}a_{31},\ a_{13}a_{21}a_{32}$).

3. Se înmulţesc elementele de pe a doua diagonală si cele de pe liinile paralele cu ea (astfel încât fiecare produs să aibă trei factori $a_{13}a_{22}a_{31},\ a_{12}a_{21}a_{33},\ a_{11}a_{23}a_{32}$.).

4. Teremenii obţinuţi la punctul 2 se iau cu plus iar cei obţinuţi la punctul 3. se iau cu semn schimbat şi se efectuează suma.

Regula triunghiului

1. Se consideră determinantul exprimat de relaţia (9.4);

2. Se inmulţesc elementele de pe prima diagonală şi cele care sunt vârfurile unor triunghiuri care au baza paralelă cu prima diagonală ($a_{11}a_{22}a_{33},\ a_{12}a_{23}a_{31},\ a_{13}a_{21}a_{32}$);

3. Se inmulţesc elementele de pe a doua diagonală şi cele care sunt vârfurile unor triunghiuri care au baza paralelă cu a doua diagonală ($a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.);

4. Termenii obţinuţi la punctul 2 se iau cu plus iar cei obţinuţi la punctul 3 se iau cu semn schimbat şi se efectuează suma.

Indiferent prin ce metodă calculăm determinantul de ordin trei rezultatul este acelaşi, astfel determinantul (9.4) este egal cu: $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Determinarea rangului unei matrice "de la mare la mic".

Se alege unul din minorii de ordin cel mai mare care se poate găsi ţinând cont de dimensiunile matricei $r = rang\ A \leq min\{m, n\}$. Dacă acesta este nenul atunci rangul matricei este r. Dacă este nul se caută un minor de ordin $r-1$ care să fie nenul. Dacă toţi minorii de ordin $r-1$ sunt nuli atunci se caută un minor de ordin $r-2$ care să fie nenul. În momentul în care se găseşte un minor nenul, ordinul acestuia va fi rangul matricei A.

Determinarea rangului unei matrice "de la mic la mare".

Dacă există un minor de ordin unu nenul rezultă ca rangul matricei este cel puţin unu. Pentru a fi unu trebuie ca toţi minorii de ordin doi să fie nuli; în caz contrar rangul matricei va fi cel putin doi; pentru a fi doi trebuie ca toţi minorii de ordin trei să fie nuli. Procedeul se repetă pină când se găseşte un minor de ordin $r < min\{m, n\}$ nenul şi toţi

minorii de ordin $r+1$ sunt nuli sau $r = min\{m, n\}$.
Pentru a stabili care din cele două metode descrise mai sus se va aplica trebuie analizată matricea astfel încât să se ajungă la rezultat cu cât mai puţine calcule.

Algoritmul de determinare a inversei unei matrice.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Se testează existenţa inversei: dacă $detA = 0$ matricea nu are inversă, altfel $detA \neq 0$ trecem la pasul următor;

2. Se calculeză elementele matricei adjuncte. Matricea adjunctă matricei A se notează cu A^* şi are forma,
$$A^* = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \dots & \delta_{n1} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \dots & \delta_{n2} \\ \vdots & & & \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix}, \tag{9.5}$$
unde δ_{ij} este complementul algebric al elementului a_{ij} din matricea A.

3. Scrierea matricei inverse:
$$A^{-1} = \frac{1}{detA} A^*$$

4. Verificare: Se face proba adica $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Sisteme de ecuaţii algebrice liniare

Pentru a studia existenţa şi unicitate soluţiei sistemului (1.11) este nevoie de matricea extinsă a sistemului de ecuaţii:
$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Teorema 9.1.1 *(Kronecker Capelli) Sistemul (1.11) este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse.*

Minorul care dă rangul matricei sistemului ($rang\ A = r$) se numeşte *minor principal*. Orice minor de rang $r+1$ obţinut prin bordarea minorului principal cu elemente din $\bar{A}$ se numeşte *minor caracteristic*.

Teorema 9.1.2 (*Rouché*) *Sistemul de ecuaţii (1.11) este compatibil dacă şi numai dacă toţi minorii carcteristici sunt nuli.*

Dacă $rang\ A = r \leq min\{m, n\}$ atunci necunoscutele care intră în componenţa minorului principal se numesc *necunoscute principale* (celelalte se numesc *necunoscute secundare*) şi ecuaţiile care intră în componenţa minorului principal se numesc ecuaţii principale (restul se numesc ecuaţii secundare).
Cazul $r = n = m$ şi $detA \neq 0$ Se notează cu d_j determinantul obţinut prin înlocuirea coloanei j din determinantul sistemului cu coloana termenilor liberi.

Teorema 9.1.3 *(Regula lui Cramer) Folosind notaţiile de mai înainte sistemul (1.11) are soluţie unică, anume:*

$$x_1 = \frac{d_1}{d},\ x_2 = \frac{d_2}{d},\ \ldots,\ x_n = \frac{d_n}{d}.$$

Cazul $rang\ = r < min\{m,\ n\}$ Ipoteză de lucru. Minorul principal are ordinul r şi este format din coeficienţii corespunzători primelor r necunoscute şi primelor r ecuaţii. Necunoscutele secundare se trec în dreapta şi sistemul (1.11) devine:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} \ldots - a_{1,n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} \ldots - a_{2,n}x_n \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} \ldots - a_{r,n}x_n \end{cases} \tag{9.6}$$

Necunoscutele secundare primesc valori arbitrare $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{n-r}$ determinându-se celelalte necunoscute funcţie de acestea. Se lucrează doar cu ecuaţiile principale; urmând ca după ce s-a determinat soluţia să se înlocuiască în ecuaţiile secundare pentru verificare. Sistemul (9.6) se situează în cazul precedent şi se aplică regula lui Cramer. În acest caz sistemul este compatibil nedeterminat; având o nedeterminare de ordin numărul necunoscutelor secundare, adică $n - r$.

Sisteme algebrice linare şi omogene

Definiţia 9.1.3 *Prin sistem omogen se întelege sistemul care are toţi termenii liberi nuli.*

Sistemele omogene au întotdeauna soluţie şi anume soluţia banală.

Observaţia 9.1.1 *Dacă sistemul este omogen, numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute şi determinantul matricei sistemului este nenul, atunci sistemul omogen are soluţie unică şi anume soluţia banală.*

Dacă determinantul sistemului este nul sau rangul matricei sistemului este mai mic sau egal cu $min\{m,\ n\}$ atunci se procedează la fel ca şi la rezolvarea sistemelor neomogene.
Algoritmul general de rezolvare al sistemelor algebrice liniare:

1. Se studiază compatibilitatea sistemului;

   (i) dacă sistemul este incompatibil justificăm răspunsul;

   (ii) dacă este compatibil se trece la pasul 2.

2. Alegem necunoscutele respectiv ecuaţiile principale şi secundare iar sitemului astfel obţinut îi aplicăm regula lui Cramer;

3. Se scrie soluţia sistemului.

9.2 Anexa la Capitolul 2

Coordonate carteziene în plan

Axioma riglei: Fie $\mathcal{P}$ un plan, $d \in \mathcal{P}$ o dreaptă în plan, $O,\ A$ două puncte distincte ale dreptei d. Se admite că există o funcţie bijectivă $f : d \to \mathcal{P}$, $f(M) = x$ care verifică:

(i) $f(O) = 0, \quad f(A) > 0,$

(ii) $PQ = |f(P) - f(Q)|$, oricare ar fi $P,\ Q \in d$.

unde PQ reprezintă distanţa dintre P şi Q.

Definiţia 9.2.1 *Funcţia f se numeşte* **sistem de coordonate pe dreapta** *d. Dreapta d plus un sistem de coordonate se numeşte* **axa de coordonate**. *O se numeşte originea sistemului de coordonate. Sensul de la O la A se numeşte* **sens pozitiv**. *Numărul x se numeşte abscisa punctului M.*

Prin convenţie, în loc de $f(M) = x$ se va scrie $M(x)$ şi se va citi *"punctul M de abscisă x"* sau *"M de x"*. Sensul pozitiv se notează prin săgeată în conformitate cu Figura 9.1.

Figura 9.1: Sistem de coordonate unidimensional.

Fie $(O_x,\ O_y)$ o pereche ordonată de axe ortogonale în $\mathcal{P}$ cu originea comună, O şi sensurile pozitive ale axelor notate prin săgeţi. Ansamblul descris mai sus se numeşte *reper cartezian în planul $\mathcal{P}$* şi se notează cu xOy, O fiind originea reperului cartezian, reprezentat în Figura 9.2.

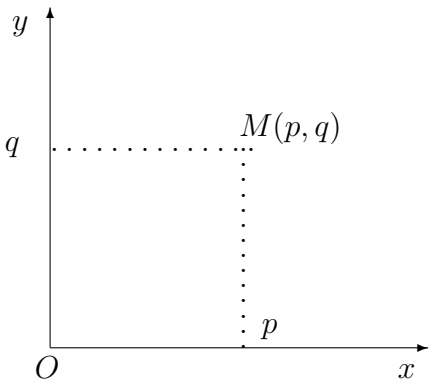


Figura 9.2: Descrierea unui punct $M(P, Q)$ în plan.

Funcţia $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^2,\ f(M) = (x, y)$ este bijectivă şi se numeşte *sistem de coordonate cartezian* definit de reperul xOy pe planul $\mathcal{P}$. Prin convenţie, în loc de $f(M) = (x, y)$ se va scrie $M(x, y)$ şi se va citi *"punctul M de abscisă x şi ordonată y"* sau *"M de x şi y"*. Axa Ox se numeşte axa absciselor, iar axa Oy se numeşte axa ordonatelor.

Observaţia 9.2.1 *Axele de coordonate împart planul în patru regiuni, numite cadrane, (vezi Figura 9.3):*

$$\begin{aligned} \textit{cadranul I} &= \{M(x,y) \mid x > 0,\ y > 0\}, \\ \textit{cadranul II} &= \{M(x,y) \mid x < 0,\ y > 0\}, \\ \textit{cadranul III} &= \{M(x,y) \mid x < 0,\ y < 0\}, \\ \textit{cadranul IV} &= \{M(x,y) \mid x > 0,\ y < 0\}. \end{aligned}$$

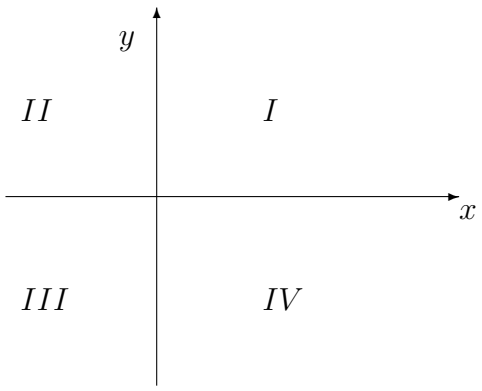


Figura 9.3: Împărţirea planului în cadrane.

Distanţa dintre două puncte

Fie $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$ două puncte distincte din planul $\mathcal{P}$, (Vezi Figura 9.4). Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul M_1M_2R se obţine

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{9.7}$$

Egalitatea (9.7) are loc indiferent de poziţia punctelor M_1 şi M_2.

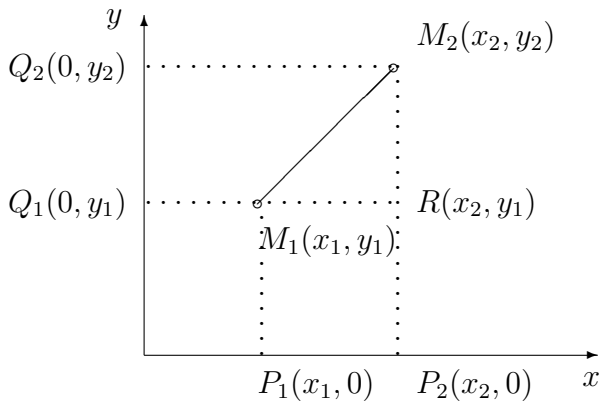


Figura 9.4: Distanţa dintre două puncte M_1, M_2 din plan.

Mijlocul segmentului M_1M_2 are coordonatele:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Panta unei drepte oblice

Prin *dreaptă orizontală* se înţelege o dreaptă paralelă cu axa Ox. Toate punctele unei dreapte orizontale au aceeaşi ordonată. Prin *dreapta verticală* se întelege o dreaptă paralelă cu axa Oy. Toate punctele unei drepte orizontale au aceeaşi abscisă. *Dreptele oblice* sunt cele care nu sunt nici verticale şi nici orizontale.
Fie d o dreaptă oblică (Vezi Figura 9.5). Ducem o dreaptă paralelă cu d care să treacă prin origine şi prin centrul cercului unitate.

Se notează cu $\Theta = \widehat{POA}$.

Definiţia 9.2.2 *Numărul real* $tg\Theta$ *se numeşte* **panta dreptei** d *şi se notează cu* m_d.

Teorema 9.2.1 *Fie* d *o dreaptă oblică şi* $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ *două puncte care aparţin dreptei* d, *atunci panta dreptei* d *este dată de relaţia*

$$m_d = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{9.8}$$

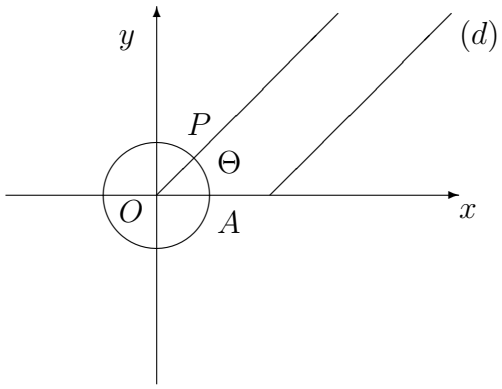


Figura 9.5: Semnificaţia pantei unei drepte oarecare.

Demonstraţie:

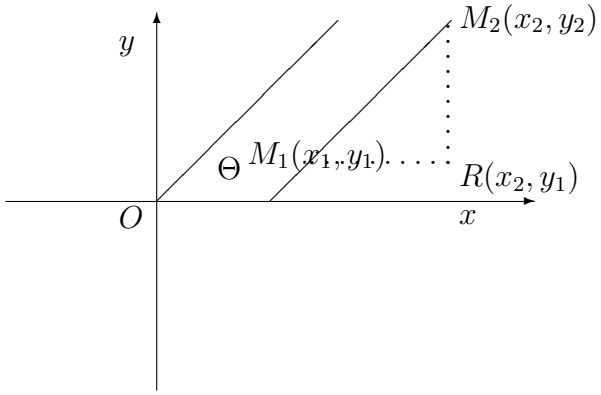


Figura 9.6: Demonstrarea teoremei 9.2.1.

Se foloseşte Figura 9.6;

$$m_d = tg\Theta = tg(\widehat{M_2M_1R}) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Dreptele orizontale au panta 0; iar dreptele verticale nu au pantă.

Teorema 9.2.2 *Fie două drepte d_1, d_2 de pante m_1, m_2. Dreptele sunt paralele dacă şi numai dacă pantele lor sunt egale ($m_1 = m_2$).*

Teorema 9.2.3 *Fie două drepte d_1, d_2 de pante m_1, m_2. Dreptele sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $m_1 \cdot m_2 = -1$.*

O dreptă este determinată în mod unic de două puncte distincte. Funcţie de informaţiile existente se poate scrie ecuaţia dreptei sub mai multe forme:

Ecuaţia dreptei determinată de un punct şi de pantă

Dacă se cunoasc coordonatele unui punct al dreptei $M(x_M, y_M)$ şi panta dreptei m_d, atunci dreapta determinată de punct şi pantă are ecuaţia:

$$d: \ m_d = \frac{y - y_M}{x - x_M} \tag{9.9}$$

Pentru a verifica dacă un punct aparţine unei drepte trebuie înlocuite coordonatele punctului în ecuaţia dreptei. Dacă se ajunge la o egalitate atunci punctul aparţine dreptei. În caz contrar punctul nu aparţine dreptei.

Ecuaţia dreptei determinată de două puncte distincte

Fie $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ două punte distincte. Din analiza coordonatelor punctelor se disting trei cazuri:

(i) $x_1 = x_2 \implies$ cele două puncte determină o dreaptă verticală care are ecuaţia $x = x_1$;

(ii) $y_1 = y_2 \implies$ cele două puncte determină o dreaptă orizontală care are ecuaţia $y = y_1$;

(iii) nici unul din cazurile precedente, deci dreaptă determinată de puncte este oblică şi cunoscând două punte distincte se determină panta dreptei

$$m_d = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{9.10}$$

Considerând punctul $M_1(x_1, y_1)$ şi un punct curent al dreptei $M(x, y)$ panta dreptei d se scrie:

$$m_d = \frac{y - y_1}{x - x_1}. \tag{9.11}$$

Din (9.10) şi (9.11) se obţine:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{9.12}$$

Ecuaţia de mai sus este *ecuaţia dreptei determinată de două puncte* $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$. Efectuând calculele ecuaţia (9.12) se scrie sub forma:

$$ax+by+c=0, \tag{9.13}$$

unde $a,\ b,\ c$ se determină prin efectuarea calculelor. Din faptul că $M_1,\ M_2 \in d$ şi $M(x,y)\in d$ rezultă că:

$$\begin{cases} ax_1+by_1+c &= 0\\ ax_2+by_2+c &= 0\\ ax+by+c &= 0 \end{cases} \tag{9.14}$$

Relaţiile (9.14) descriu un sistem omogen cu necunoscutele $a,\ b,\ c$ care nu pot fi toate 0; deci, trebuie ca determinantul sistemului să fie nul; adică, ecuaţia dreptei oblice determinate de două puncte distincte se mai poate scriesub forma:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{9.15}$$

Condiţia de coliniaritate a trei puncte este o consecinţă directă a relaţiei (9.15). Fie $M_1(x_1,y_1),\ M_2(x_2,y_2),\ M_3(x_3,y_3)$ trei puncte distincte, acestea sunt coliniare dacă şi numai dacă:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{9.16}$$

Ecuaţia dreptei determinată de punctele $A(a,0),\ B(0,b),\ ab\neq 0$ este

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{9.17}$$

Ecuaţia (9.17) se numeşte *ecuaţia dreptei prin tăieturi.*

Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie d o dreaptă din plan de ecuaţie $ax+by+c=0$ şi M_0 un punct ce nu aparţine dreptei d. Distantă de la punctul M_0 la dreapta d se notează cu $d(M_0,d)=MM_0$, (Vezi Figura 9.7).

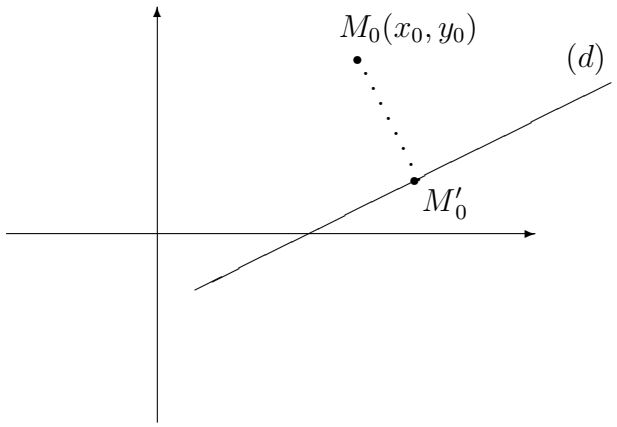


Figura 9.7: Distanţa de la un punct M_0 la o dreaptă oarecare.

Deoarece dreapta d şi dreapta $M_0'M_0$ sunt perpendiculare şi panta dreptei d este $m_d=-\dfrac{a}{b}$ rezultă că $m_{M_0'M_0}=\dfrac{b}{a}$. Ecuaţia dreptei $M_0'M_0$ este $y-y_0=\dfrac{b}{a}(x-x_0)$. Pentru a afla distanţa dintre punct şi dreapta trebuie să se afle coordonatele punctului de intersecţie M_0'. Rezolvând sistemul format din ecuaţia dreptei d şi a dreptei $M_0'M_0$ se obţine:

$$x_{M_0'}=\frac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2},\quad y_{M_0'}=\frac{a^2y_0-abx_0-bc}{a^2+b^2}$$

Folosind formula distanţei dintre două puncte se obţine:

$$d(M_0,d)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{9.18}$$

Dacă dreapta d este dată de două puncte distincte $A(x_A,y_A)$ şi $B(x_b,y_b)$, atunci distanţa de la punctul $M(x_M,y_M)$ la dreapta AB este exprimată de modulul relaţiei

$$d(M,AB)=\frac{\begin{vmatrix} x_M & y_M & 1\\ x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\end{vmatrix}}{\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}} \tag{9.19}$$

Calculul ariei unui triunghi

Se va calcula aria unui triunghi cunoscând coordonatele vârfurilor: $A(x_A, y_A), B(x_b, y_b)$ şi $C(x_C, y_C)$. Se ştie că aria unui triunghi este semiprodusul dintre lungimea unei laturi şi lungimea înălţimii din vârful opus. Din relaţia (9.19) se obţine aria triunghiului ABC, notată cu $\sigma(ABC)$

$$\sigma(ABC) = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} \right| \tag{9.20}$$

Coordonatele punctului ce împarte un segment într-un raport dat

Fie punctele $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$ pe dreapta d. Fie $M(x, y)$ un punct pe dreapta d ce împarte segmentul M_1M_2 în raportul k, (Vezi Figura 9.8),

$$\frac{M_1M}{M_2M} = k \quad (k \neq 1)$$

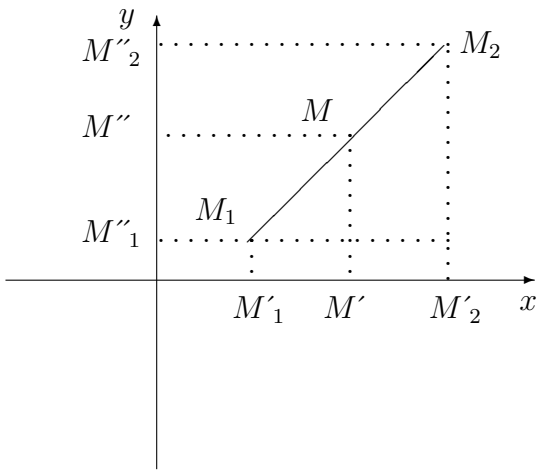


Figura 9.8: Demonstrarea teoremei 9.2.1.

Datorită paralelismului se formează triunghiuri asemenea şi se obţine:

$$\frac{M´_1M´}{M´_2M´} = k, \quad \frac{M\ p´_1M˝}{M˝_2M˝} = k \Longleftrightarrow k = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \quad k = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

În urma efectuării calculelor se obţine:

$$x = \frac{x_1 + x_2 k}{1+k}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 k}{1+k} \tag{9.21}$$

Dacă $k > 0$ punctul $M \in (M_1M_2)$, dacă $k < 0$ punctul $M \in M_1M_2 \setminus [M_1M_2]$

Calculul măsurii unghiului dintre două drepte neperpendiculare

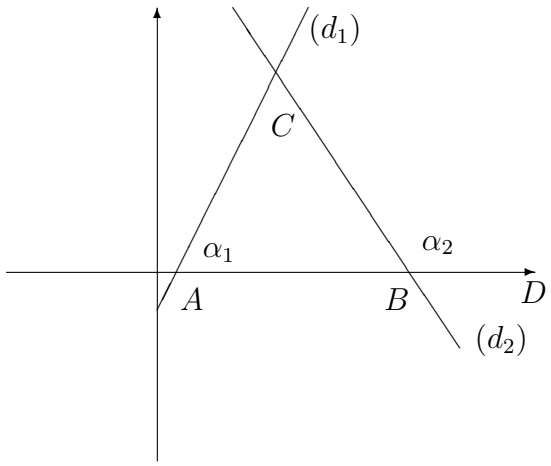


Figura 9.9: Intersecţia a două drepte neperpendiculare.

Se caută măsura unghiului $\widehat{ACB}$ ştiindu-se ecuaţiile dreptelor $d_1,\ d_2$ respectiv pantele $m_1,\ m_2$. Folosind măsura unghiului exterior unui triunghi se obţine, $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DBC}) - m(\widehat{CAB})$, deci

$$tg(\widehat{ACB}) = \frac{tg(\widehat{DBC}) - tg(\widehat{CAB})}{1 + tg(\widehat{DBC})tg(\widehat{CAB})}.$$

Trecând la pante, şi notând $\theta = \widehat{ACB}$ se obţine:

$$tg(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \tag{9.22}$$

Dacă $\theta = 0$ rezultă $m_1 = m_2$, adică dreptele sunt paralele. Dacă dreptele sunt perpendiculare atunci unghiurile ce se formează între cele două drepte sunt de 90° şi nu mai trebuie aplicată relaţia (9.22).

Raportul în care o dreaptă împarte un segment dat

Fie k raportul în care dreapta $d:\ ax+by+c=0$ împarte segmentul M_1M_2 determinat de punctele $M_1(x_1,y_1)$ şi $M_2(x_2,y_2)$. Spre deosebire de cazul precedent acum trebuie determinat raportul $k=\dfrac{M_1M}{M_2M}$. Coordonatele punctului M sunt date de (9.21) şi înlocuind în ecuaţia dreptei d se obţine:

$$\begin{aligned} a\frac{x_2k+x_1}{1+k} &+ b\frac{y_2k+y_1}{1+k}+c=0 \Longleftrightarrow \\ k &= -\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c} \end{aligned} \tag{9.23}$$

Intersecţia şi reuniunea a două drepte

Fie $d_1:\ a_1x+b_1y+c_1=0$ şi $d_2:\ a_2x+b_2y+c_2=0$ Din punct de vedere al intersecţie a două drepte există următoarele cazuri:

(i) $d_1 \parallel d_2 \iff d_1\bigcap d_2=\emptyset \iff \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$

(ii) $d_1\equiv d_2 \iff d_1\bigcap d_2=d_1 \iff \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$

(iii) $d_1\perp d_2 \iff d_1\bigcap d_2=\{M\} \iff a_1a_2+b_1b_2=0$

(iv) nici unul din cazurile de mai sus, adică cele două drepte se intersectează fară a fi perpendiculare.

Pentru a determina punctul de intersecţie a două drepte trebuie rezolvat sistemul algebric format din ecuaţiile celor două drepte, şi anume:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

Se consideră trei drepte de ecuaţii $d_1:\ a_1x+b_1y+c_1=0$, $d_2:\ a_2x+b_2y+c_2=0$ şi $d_2:\ a_3x+b_3y+c_3=0$. Condiţia ca aceste drepte să fie concurente este ca sistemul format din ecuaţiile lor să fie compatibil.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$$

sistemul este de trei ecuaţii şi două necunoscute. Pentru a fi compatibil trebuie ca rangul matricii sistemului să fie egal cu rangul matricii extinse, adică:

$$rang \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 2 \tag{9.24}$$

Fascicul de drepte

Definiţia 9.2.3 *Prin fascicul de drepte se înţelege mulţimea tuturor dreptelor ce trec printr-un punct fix numit vârf.*

Atunci când se cunoaşte vârful fasciculului $V(x_V, y_V)$ ecuaţia fasciculului este:

$$y - y_V = \lambda(x - x_V),\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{9.25}$$

iar dacă vârful este originea atunci ecuaţia (9.25) devine:

$$y = \lambda x,\quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ecuaţia fasciculului de drepte se poate scrie şi dacă se cunosc ecuaţiile a două drepte din fascicul : $d_1 :\ a_1x + b_1y + c_1 = 0$ şi $d_2 :\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (numite drepte directoare a fascicului):

$$(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0. \tag{9.26}$$

Separarea planului în regiuni

Orice dreapta $d :\ ax + by + c = 0$ împarte planul în două regiuni:

$$\mathcal{P}^+ = \{(x, y) \in \mathcal{P} \mid ax + by + c > 0\} \tag{9.27}$$

$$\mathcal{P}^- = \{(x, y) \in \mathcal{P} \mid ax + by + c < 0\}, \tag{9.28}$$

numite semiplane. Pentru stabilirea semnului unei regiuni se consideră un punct din regiunea respectivă, se înlocuiesc coordonatele sale în expresia $ax + by + c$, dacă numărul obţinut este pozitiv semnul regiunii va fi $+$, dacă numărul obţinut este negativ rezultă că semnul regiunii respective este $-$. Dacă un semiplan are semn pozitiv celălalt semiplan are semiplan negativ şi reciproc. Atunci când dreapta nu trece prin origine, pentru usurarea calculului se considera ca punct reprezentativ originea.

Exemplul 9.2.1 *Să se rezolve inecuaţia* $x + y + 1 \geq 0$.

Rezolvare: Problema se reduce la determinarea regiunii din plan care verifică $x + y + 1 \geq 0$. Punctele de intersecţie ale dreptei $x + y + 1 = 0$ cu axele de coordonate sunt $(0, -1),\ (-1, 0)$ (Vezi Figura 9.10).

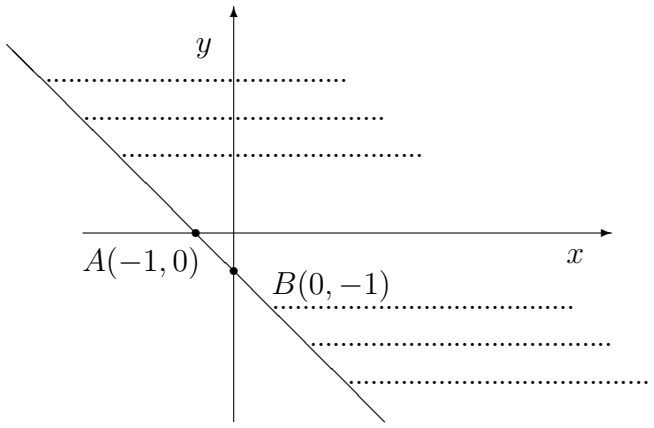


Figura 9.10: Separarea planului în regiuni.

Se determină semnul regiunii din plan care conţine originea, obţine $+$. Mulţimea punctelor care sunt soluţie a inecuaţiei este semiplanul ce conţine originea împreuna cu punctele dreptei $x + y + 1 = 0$.

9.3 Anexa la Capitolul 3

Reguli de calcul

$$\infty + \infty = \infty; \quad \pm\infty + a = \pm\infty; \quad \infty \cdot a = sgn(a) \cdot \infty,\ a \neq 0;$$

$$\frac{\infty}{a} = sgn(a) \cdot \infty,\ a \neq 0; \quad \frac{a}{\pm\infty} = 0\ \forall\ a \in \mathbf{R};$$

$$\frac{1}{+0} = +\infty; \quad \frac{1}{-0} = -\infty.$$

unde pentru $a \neq 0$,

$$sgn(a) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } a < 0, \\ 1 & \text{dacă } a > 0. \end{cases}$$

Cazuri de nedeterminare

$$\frac{0}{0}; \quad 0 \cdot \infty; \quad \infty - \infty; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 1^{\infty}; \quad 0^0; \quad \infty^0.$$

Calculul limitelor de şiruri

(i) Şirul $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{n\infty} q^n = \begin{cases} \text{nu există} & \text{dacă } q \leq -1, \\ 0 & \text{dacă } -1 < q < 1, \\ 1 & \text{dacă } q = 1, \\ \infty & \text{dacă } q > 1. \end{cases} \tag{9.29}$$

(ii) Şirul $\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ unde
P este un polinom de grad p şi Q este un polinom de grad q.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q} = \begin{cases} \infty & \text{dacă } p > q \text{ şi } a_0 b_0 > 0 \\ -\infty & \text{dacă } p > q \text{ şi } a_0 b_0 < 0 \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{dacă } p = q \\ 0 & \text{dacă } p < q \end{cases} \tag{9.30}$$

(iii) Şiruri de tipul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 9.3.1 *(Cesaro-Stoltz) Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şiruri de numere reale. Dacă:*

(i) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescător şi nemărginit;

(ii) există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$, ($l$ poate fi şi $\pm\infty$).

Atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = l$.

9.3.1 Secanta şi tangenta la o curbă în sensul analizei matematice

În capitolul 2 s-a tratat din punct de vedere geometric noţiunea de secantă şi tangentă corespunzătoare unor figuri si corpuri geometrice. De aceasta dată aceste noţiuni se vor studia folosind noţiunea de funcţie şi trecerea la limită.

Fie curba (C) de ecuaţie $y = 0.001\,x^2$ definită in intervalul $[-4, 10]$ reprezentată în Figura 9.11. Din $O(0,0)$ se trasează secantele $(S2)$, $(S4)$, $(S6)$, $(S8)$ şi $(S10)$ care intersectează de asemenea curba (C) şi în punctele de coordonate $(2, 0.004)$, $(4, 0.016)$, $(6, 0.036)$, $(8, 0.64)$, respectiv $(10, 0.1)$. Altfel spus din originea sistemului de coordonate se poate imagina un fascicul de drepte cu vâful în origine. Dreptele fasciculului vor intersecta curba într-un punct generic (S). Dreptele fasciculului se vor numi secante la curbă.

Definiţia 9.3.1 *Se numeşte tangenta la curba (C) în punctul de coordonate $(0,0)$, poziţia limită a acelei secante pentru care al doilea punct de intersecţie al secantei cu curba se va confunda cu originea.*

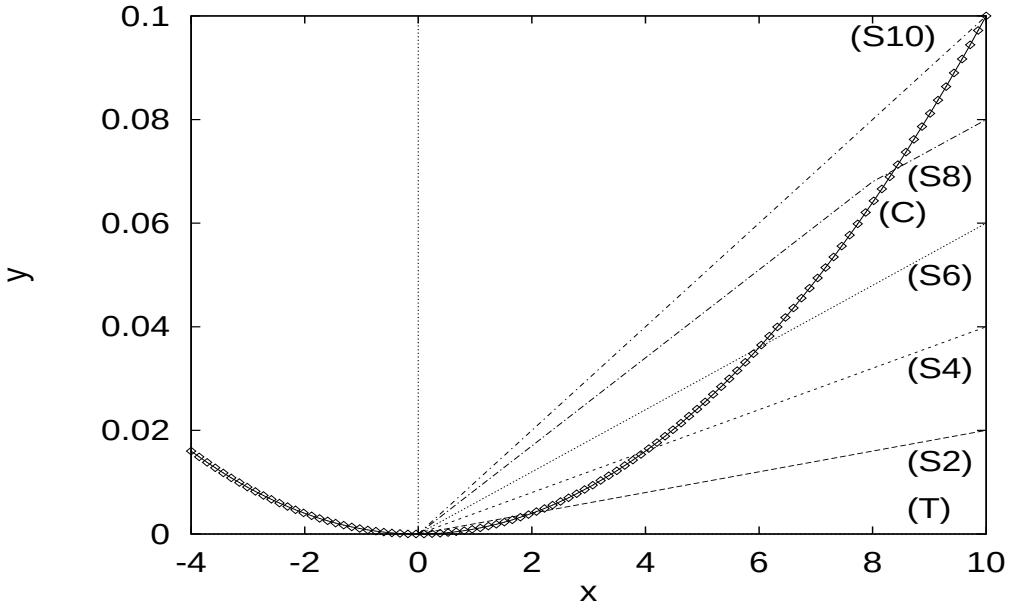


Figura 9.11: Drepte secante şi tangenta la parabola de ecuaţie $y = 0.001\,x^2$ definită in intervalul $[-4, 10]$.

Fie două puncte M şi M' care aparţin curbei de ecuaţie $y = a\,x^2$. Poziţia secantei MM' faţă de sistemul de axe xOy este descrisă de coeficientul unghiular definit de tangenta unghiului $\varphi = \widehat{M'MN}$. Pentru exprimarea coeficientului unghiular, adică a valorii $tg\,\varphi$ se consideră cele două puncte M şi M' de pe segmentul de curbă, cărora li se asociază valorile absciselor x şi $x + \Delta\,x$, respectiv ordonatele y şi $y + \Delta\,y$, astfel variaţia lui y în funcţie de x devine,

$$y + \Delta\,y = a(x + \Delta\,x)^2. \tag{9.31}$$

Variaţiile $\Delta x,\ \Delta\,y$ în Figura 3.13-(a) sunt descrise de segmentele perpendiculare $M'N$ şi MN de lungimi $\Delta\,y$, respectiv $\Delta\,x$. Coeficientul unghiular $tg\,\varphi$ al *secantei* MM' se determină din triunghiul dreptunghic $\triangle\,MM'N$. Ţinându-se cont de relaţia (9.31), lungimea catetei $M'N$ se exprimă prin relaţia,

$$\Delta\,y = a(2x\,\Delta x + \Delta\,x^2), \tag{9.32}$$

deci valoarea coeficientului unghiular al *secantei* se exprimă astfel,

$$tg\,\varphi = \frac{\Delta\,y}{\Delta\,x} = 2ax + a\Delta x. \tag{9.33}$$

Pentru obţinerea valorii efective a coeficientului unghiular al *tangentei* MM' din Figura 3.13 este uşor de înţeles ca trebuie să se treacă la limită când $\Delta\,x\ \to 0$, astfel rezultă,

$$tg\,\alpha = \lim_{\Delta\,x \to 0}(2ax + a\Delta\,x) = 2ax, \tag{9.34}$$

unde α este unghiul $\widehat{MTP}$.

Observaţia 9.3.1 *Sensul definiţiei (9.3.1) constă în aceea că triunghiul $MM'N$ devine oricât de mic atunci când coarda MM' este suficient de mică.*

Din analiza Figurii 3.13-(b) rezultă o metodă simplă pentru construirea efectivă a tangentei la parabolă. Astfel din triunghiul $\triangle\,MNP$, segmentul TP se exprimă astfel,

$$TP = \frac{y}{tg\,\alpha} = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2}, \tag{9.35}$$

deci *T este jumătatea segmentului OP.* Astfel, pentru a obţine tangenta la parabolă în punctul M, este suficient să se împărtă în două părţi egale segmentul OP şi să se unească

mijlocul cu punctul M.

În cazul unei curbe oarecare de ecuaţie $y = f(x)$ coeficientul unghiular al tangentei se stabileşte în mod asemănator. Creşterii Δx a abscisei îi corespunde creşterea Δy a ordonatei şi câtul $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ exprimă coeficientul unghiular al *secantei*, $tg\,\alpha$. Coeficientul unghiular al *tangentei* se obţine prin trecere la limită când $\Delta x \to x$, deci

$$tg\,\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\,\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{9.36}$$

9.3.2 Derivata după o direcţie

Direcţia s poate fi descrisă de vectorul director al dreptei determinate de punctele $Q(x_0, y_0, z_0)$ şi $P(x, y, z)$. Poziţia vectorului director faţă de axele de coordonate este dată de unghiurile directoare $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

Exerciţiul 9.3.1 *Să se determine derivata după direcţia s în funcţie de cosinuşii directori.*

Rezolvare: Între coordonatele punctelor Q şi P există relaţiile, $x = x_0 + s\cos\alpha$, $y = y_0 + s\cos\beta$ şi $z = z_0 + s\cos\gamma$, astfel $dx = \cos\alpha ds$, $dy = \cos\beta ds$, $dz = \cos\gamma ds$ În acest context pe baza relaţiei (3.53) derivata funcţiei f după direcţia s este exprimată de relaţia,

$$\frac{d\,f}{d\,s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\,\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\,\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\,\gamma. \tag{9.37}$$

Formulele cosinusurilor directoare au fost date de Teorema 2.4.2. În Figura 9.12-(a) este ilustrată semnificaţia derivatei funcţiei f în punctul (x_0, y_0, z_0) după direcţia s în cazul particular în care s este conţinută în planul xOy.

Observaţia 9.3.2 *Relaţia (3.54) arată că derivata functiei f pe o anumită direcţie s este egală cu proiecţia gradientului pe acea direcţie.*

9.4 Anexa la Capitolul 5

Masa unei plăci cu feţe plane de grosime d şi de densitate $\rho(x, y) > 0$.

Se consideră volumele finite $V_i = d\Delta x_i \Delta y_i$, atunci masa ΔM_i a fiecărui volum V_i este exprimată de produsul $d\,\rho(x_i, y_i)\,\Delta x_i \Delta y_i$, Prin urmare forma integrala a masei este expri-

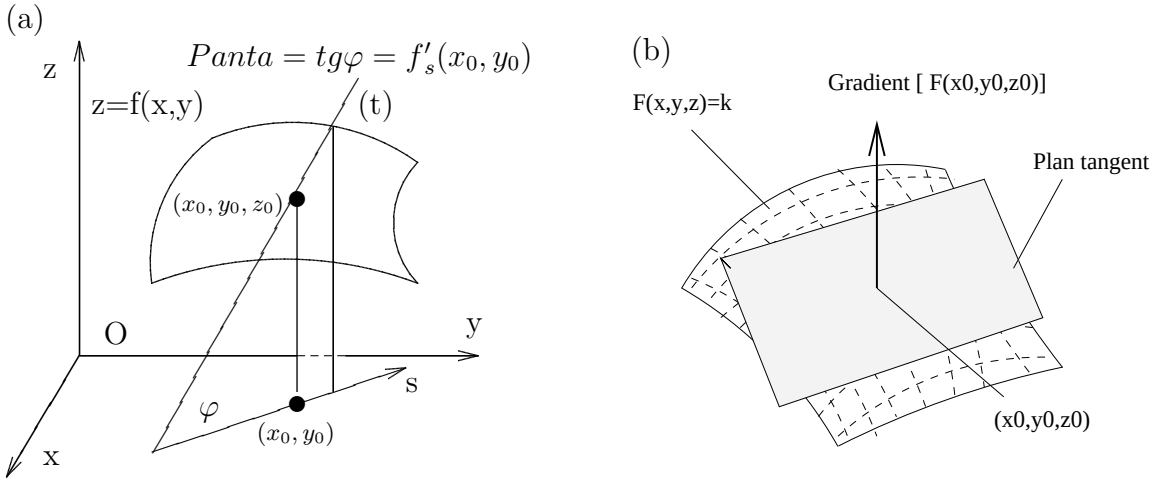


Figura 9.12: (a) Ilustrarea grafică a derivatei după o direcţia s, (b) - reprezentarea geometrică a planului tangent la suprafaţa $z = f(x, y$ în punctul (x_0, y_0, z_0).

mată de relaţia,

$$\mathrm{M} = d \iint_G \rho(x, y) dxdy. \tag{9.38}$$

Coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane G

Coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane G sunt exprimate de momentul de ordinul unu al funcţiei de densitate $\rho(x, y)$, astfel acestea sunt exprimate de relaţiile (5.73), (5.74). A se vedea Capitolul 7.

Momentele de inerţie ale unei plăci în raport cu axele de coordonate Ox **şi** Oy

Se consideră un element de masă Δm_i situat la distanţa r_i, faţă de origine a cărei proiecţie pe axa Ox este x_i. Atunci momentul de inerţie asociat elementului de masă Δm, notat prin ΔI_i este exprimat de relaţia, $\Delta I_i = x_i^2 \, \Delta m_i = x_i^2 \rho(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i$, unde x_i, y_i sunt coordonatele unui punct din interiorul dreptunghiului cu laturile Δx_i, respectiv Δy_i. Atunci forma integrală a momentelor de inerţie corespunzătoare rotirii plăcii în jurul axelor de coordonate sunt exprimate de relaţiile: (5.76), (5.77). Dacă centrul de greutate al unei plăci este exprimat de momentul de ordinul unu al densităţii $\rho(x, y)$, momentul de inerţie este redat de momentul de ordinul al doilea.

9.4.1 Integrala triplă

Fie o $f : G \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Se consideră o divizîune a mulţimii G, formată din mulţimile $G_i \subset G$, $\bigcup G_i = G$ şi $Gi \bigcap G_j = 0, i \neq j$. Se consideră $g_i = inf\{f(x,y,z) \mid (x,y,z) \in G_i\}$ şi $G_i = sup\{f(x,y,z) \mid (x,y,z) \in G_i\}$, se formează sumele integrale inferioare $\sum_{i=1}^{n} g_i \Delta Gi$, sumele integrale superioare $\sum_{i=1}^{n} G_i \Delta G_i$ şi sumele integrale $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta G_i$. Dacă şirurile sumelor integrale inferioare şi superioare converg către aceeaşi limită, atunci şi şirul sumelor integrale va converge către aceeaşi limită care se numeşte integrală triplă a funcţiei $f(x,y,z)$ pe domeniul R, adică

$$\iiint_G f(x,y,z)\, dG = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g_i \Delta R_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} G_i \Delta R_i. \tag{9.39}$$

În cazul integralei triple domeniul de integrare nu mai poate fi reprezentat geometric ca o porţiune a spaţiului, o interpretare geometrică nu mai este posibilă în acest caz. Din punct de vedere mecanic, valoarea integralei poate fi interpretată ca masa unui corp de forma oarecare, $f(x,y,z)$ fiind considerată ca repartiţia densităţii corpului. Calculul integralelor triple se pot de asemenea face prin integrări succesive în raport cu fiecare din variabilele $x,\ y,\ z$. Limitele de integrare depind de forma frontierei domeniului R, deci

$$\iiint f(x,y,z)\, dR = \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right] dy \right\} dx. \tag{9.40}$$

Transformarea integralelor triple

Există cazuri în care este recomandată schimbarea de coordonate de la cele carteziene la alt sistem de coordonate. Sistemele de coordonate folosite cel mai frecvent sunt sistemele de coordonate polare, cilindrice şi sferice. Pentru a se deduce elementul de volum ΔG se ţine cont de faptul că noile coordonate $u,\ v,\ w$ sunt legate de cele vechi $x,\ y\ z$ prin funcţiile $x = \varphi(u,v,w)$, $y = \psi(u,v,w)$ şi $z = \zeta(x,y,z)$ derivabile, cu derivatele parţiale continue. Atunci când determinantul Jacobian, D, nu este identic nul, funcţia $f(x,y,z)$ se tranformă într-o funţie $F(u,v,w)$ şi elementul de volum dG se transformă în $|D|\, dudvdw$.

Pentru *coordonate cilindrice*

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Jacobianul este dat de determinantul

$$D_c = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \tag{9.41}$$

Pentru *coordonate sferice*

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

Jacobianul D_s, este exprimat de determinantul,

$$D_s = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta, \tag{9.42}$$

deci dG se transformă în $rdr\,d\varphi\,dz$, respectiv $r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$ adică

$$\begin{aligned} \int\int_R\int f(x,y,z)\,dR &= \int_{z_1}^{z_2}\int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)}\int_{r_1(\varphi,z)}^{r_2(\varphi,z)} F(r,\varphi,z)r\,drd\varphi dz = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1(\varphi}^{\theta_2(\varphi)}\int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} F(r,\theta,\varphi)\,r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \tag{9.43}$$

9.5 Anexa la Capitolul 7

Funcţia Gamma (Γ)

Funcţia Gamma a fost introdusă ca răspuns la următoarea problemă. Există o funcţie pentru care valorile întregi şi pozitive ale argumentului să-i corespundă valorile $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 1\cdot 2 = 2$, $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, $...n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$. Leonhard Euler a rezolvat aceasta problema cu ajutorul integralelor improprii. Funcţia este cunoscută în literatura de specialitate ca funcţia gamma a lui Euler şi este exprimată de integrala,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \quad \text{pentru } x > 0. \tag{9.44}$$

Funcţia Γ nu are zerouri în intervalul $(-\infty, +\infty)$ şi este continuă cu excepţia punctelor $0,\ -1,\ -2, \ldots$ în care admite poli de ordinul întâi. Polii se pot recunoaşte mai cu seamă din definiţia echivalentă funcţiei Γ exprimată de Gauss,

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= x^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\right] = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}, x \neq 0,\ -1,\ -2, \ldots \end{aligned} \tag{9.45}$$

Din relaţia $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ şi din valoarea $\Gamma(1) = 1$ rezultă pentru argumente întregi ale funcţiei relaţia, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$. De asemenea au loc şi relaţiile: $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$, $\Gamma(\frac{1}{2}+x)\Gamma(\frac{1}{2}-x) = \dfrac{\pi}{\cos \pi x}$ şi $\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\dfrac{\pi}{x \sin \pi x}$.

Integrala Beta

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad p,q > 0. \tag{9.46}$$

Relaţia (9.46) se integrează prin părţi şi se obţine,

$$\beta(p,q) = \frac{(p-1)(q-1)}{p+q-1}\beta(p-1,q-1). \tag{9.47}$$

Deoarece $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1) = (p-1)!$, atunci pentru $p, q \in \mathbb{N}^*$ are loc relaţia,

$$\beta(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{9.48}$$

Index

A

abaterea standard, 281

ajustări, 137

algoritmul lui Gauss, 24, 25

aranjamente, 9

aria

- unui domeniu, 191
- suprafeţelor, 193
- suprafeţelor corpurilor de rotaţie, 176
- unei suprafeţe mărginite de curbe, 174
- unei suprafeţe plane, 173

asimptotă, 95

- oblică, 96
- orizontală, 95
- verticală, 96

B

binomul lui Newton, 10

C

câmp de evenimente, 252

centrul de greutate al unei plăci plane, 193

cerc, 34

coeficientul de corelare, 142

combinări, 10

concentraţia unei soluţii, 284

constanta de dezintegrare, 143

criteriul lui Gauss, 148

curbă de nivel, 101

D

densitate de probabilitate, 268

derivata, 86

diferenţă divizată, 135

diferenţiala unei funcţii, 110

dispersia, 279, 286

distribuţia

- Gauss, 285

E

ecuaţia
caracteristică, 239
micilor oscilaţii, 224
ecuaţia dreptei
în plan, 350
în spaţiu, 46
ecuaţie
autonomă, 216
logistică, 216
ecuaţie diferenţială, 201
de tip Bernoulli, 212
cu variabile separabile, 205
de ordinul întâi, 212
de tip Ricatti, 213
liniară, 209
omogenă în sensul lui Euler, 207
soluţie, 202
soluţie generală, 202
elipsă, 35
elipsoidul, 53
eveniment, 250
simplu, 250
evenimente
compatibile, 250
independente, 250
experienţă, 249

F

fascicul de drepte, 356
funcţia de repartiţie, 265
funcţia erorilor, 287
funcţia Gamma, 364
funcţie, 63
concavă, 94
continuă, 83, 84, 108
convexă, 94
crescătoare, 64
descrescătoare, 64
grafic, 63
impară, 64
inversă, 64
mărginită, 64
monotonă, 64
obiectiv, 141, 144
omogenă în sensul lui Euler, 207
pară, 64
periodică, 64

G

gnuplot, 317

H

hiperbolă, 37

hiperboloidul

cu două pânze, 54

cu o pânză, 54

histogramă, 307

I

integrala

dublă-aditivitatea, 190

dublă-aditivitatea faţa de domeniu, 190

dublă-omogenitatea, 190

Beta, 365

ce depind de parametru, 178

convergentă, 167

definită, 162

divergentă, 167

dublă, 180, 181

nedefinită, 154

triplă, 363

integrarea

funcţiilor raţionale, 160

prin părţi, 156

intervalul de convergenţă, 125

inversiune, 340

L

limită

de funcţie, 81

de funcţie de două variabile, 107

limita

de şir, 77

lungimea unui arc de curbă, 170

M

margine

inferioară, 76

superioară, 76

masa unei plăci plane, 193

matrice, 12

înmulţire, 12

adunare, 12

inversabilă, 20

rang, 17

singulară, 19

mediana, 276

metoda celor mai mici pătrate, 137

neponderate, 140

ponderate, 145
metoda lui Euler, 229
modelul competiţiei, 235
modelul pradă-prădător, 235
modelul simbiozei, 235
modulul, 278
momentul de inerţie, 194

P

panta dreptei, 348
parabolă, 38
paraboloidul
eliptic, 53
hiperbolic, 53
permutări, 9
planul tangent la o suprafaţă, 111
polinomul de interpolare a lui
Lagrange, 133
Newton, 136
primitiva unei funcţii, 153
probă, 250
probabilitate
condiţionată, 256
definiţie, 252
produs
scalar, 42
vectorial, 42
punct
de extrem, 115
de maxim, 114
de maxim local, 93
de minim, 115
de acumulare, 81
de minim local, 93
punct de extrem, 115

R

repartiţia
arcsinus, 290
Beta, 288
binomial negativă, 301
binomială, 291
Cauchy, 292
chi, 289
Erlang, 293
exponenţial negativă, 301
Fisher, 289
Gamma, 289
geometrică, 296
Gumbel, 293, 308

hipergeometrică, 289
Laplace, 297
logistică, 298
lognormală, 300
Maxwell, 299
normală (Gauss), 308
Pareto, 301
Poisson, 302
Rayleigh, 303
sinus, 303
Student, 290
triunghi, 304
uniformă, 306
Weibul, 306
reper ortogonal, 39

S

schema
bilei nerevenite, 262
lui Bernoulli, 260
lui Bernoulli cu mai multe stări (polinomială), 261
lui Poisson, 259
schimbarea de variabilă, 157
serie
de puteri, 125
infinită, 123
Taylor, 128
signatura unei permutări, 340
sir
mărginit, 76
monoton, 76
monoton crescător, 76
monoton descrescător, 76
recurent, 80
sir de numere reale, 76
sistem complet de evenimente, 252
sistem omogen, 345
sisteme algebrice liniare, 23, 343
sisteme echivalente, 24
software-ul gnuplot, 317
soluţie echilibru, 216

T

tangenta la curbă, 359
tractrice, 218

V

valoarea medie, 273, 286
variabilă aleatoare, 263
continuă, 264

discretă, 264
vecinătate a unui punct, 76
vector, 40
viteza instantanee, 86
volumul
corpurilor, 192
corpurilor de rotaţie, 177

Bibliografie

[1] M. Abramowich and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dower, New York, 1965.

[2] N. Aldea şi Florica Aldea, *Tehnici de analiza semnalelor fizico-chimice*, Ed. Risoprint, Cluj-Napoca 2001.

[3] N. Boboc, *Analiză matematică,* Univ. Bucureşti, 1988.

[4] T. A. Beu, *Calcul numeric în C*, Grupul Microinformatica, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 1999.

[5] N. Ceapoiu, *Metode statistice aplicate în experienţele agricole şi biologie*, Ed. Agro-Silvică, Bucuteşti, 1968.

[6] S. Chiriţă, *Probleme de matematici superioare*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[7] G. Ciucu, V. Craiu, I. Săcuiu, *Probleme de teoria probabilităţilor,* Ed. Tehnică, 1974.

[8] G. M. Fihtenholţ, *Calcul diferenţial şi integral*, (3 volume), I(1963), II(1964), III(1965), Ed. Tehnică Bucureşti, (traducere din limba rusă).

[9] A. C. Fowler, *Mathematical models in applied sciences*, Cambridge University Press, 1989.

[10] Ch. Grinstead, L. Snell, *Introduction to Probability*, AMS, 1997.

[11] N.M. Ghiunter şi R. O. Cuzmin, *Culegere de probleme de matematici superioare*, traducere din limba rusă, Ed. Tehnică, 1953.

[12] Leslie Hocking, *Optimal Control: An Introduction to the Theory with Applications*, Oxford University Press, 1991.

[13] R. de Levie, *When, Why and How to Use Weighted Least Squares*, J. Chem. Educ., 63 (1986) 10.

[14] D. Marquardt, An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters, *J. SIAM*, 11 (1963) 431.

[15] D. Kotz, *LaTeXand GNUPLOT Plotting Program*, 1991 (documentaţie preluată din Internet).

[16] Gh. Micula şi Paraschiva Pavel, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale prin probleme şi exerciţii*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1989.

[17] Maria Micula, *Matematici aplicate în agronomie*, Ed. Transilvania Press, Cluj-Napoca, 1997.

[18] N. Mihailă, *Introducere în probabilităţi şi statistică matematică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.

[19] J. D.Murray, *Mathematical biology*, Springer-Verlag, Berlin,1989.

[20] M. Nicolescu, *Analiză matematică*, (3 volume) I(1957), II(1958), III(1960), Ed. Tehnică Bucureşti.

[21] V. Postelnicu şi S. Coatu, *Mica enciclopedie matematică* (traducere din lb. germană), Editura Tehnică, Bucureşti 1980.

[22] E. Rogai, *Exemple şi probleme de ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Ed. Tehnică, 1965.

[23] I. M. Rîjic şi I. S. Gradştein, *Tabele de integrale sume, serii si produse*, Ed. Tehnică 1955.

[24] M. Roşculeţ, *Analiză matematică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978.

[25] I.A. Rus, *Ecuaţii diferenţiale, ecuaţii integrale şi sisteme dinamice*, Ed. Transilvania Press, Cluj-Napoca, 1996.

[26] M. Tenenbaum, H. Pollard, *Ordinary Dofferential Equations*, Harper and Row, 1984.

[27] S. Varberg, D. Purcell and E. Rigdon *Calculus*, Prentice Hall, 1999.

[28] A. G. Worthing şi J. Geffner, *Prelucrarea datelor experimentale*, (traducere din lb. engleză) Editura Tehnică, 1959.

[29] T. Williams and C. Kelley, *GNUPLOT An Interactiv Plotting Program*, prepared by D. Crawford version 3.7, (documentaţie preluată din Internet)