

РЕШЕНИЯ

К ЗАДАНИЯМ
ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ
ПИСЬМЕННОГО
ЭКЗАМЕНА
ПО МАТЕМАТИКЕ

В **9** классе

Афанасьев В.Н.

МАТЕМАТИКА

9 класс

РЕШЕНИЯ К ЗАДАНИЯМ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ

из книги:

Л.И. ЗВАВИЧ
Д.И. АВЕРЬЯНОВ
Б.П. ПИГАРЕВ
Т.Н. ТРУШАНИНА

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ
ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА
ПО МАТЕМАТИКЕ В 9 КЛАССЕ**

М.: ПРОСВЕЩЕНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ I

стр.

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	5
УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ	37
СТЕПЕНИ И КОРНИ, ПРОГРЕССИИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ	76
ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ, КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН	111
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	151
ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ	182

ЧАСТЬ II

УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ	214
НЕРАВЕНСТВА	241
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ. ДЕЛИМОСТЬ. ИНДУКЦИЯ	272
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	303
ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ	321
ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ПРОГРЕССИИ	356

**ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ИЗ ПОСОБИЯ
«ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПИСЬМЕННОГО
ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ В 9 КЛАССЕ»**

ЧАСТЬ I

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Вычислите наиболее удобным способом (1.101 – 1.107):

№ 1.101.

а) $4\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} \cdot 3 - 9\frac{1}{6}$;

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

б) $\frac{13}{15} - 2\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 \cdot 2\frac{2}{5} = \frac{13}{15} - \frac{5}{2} \cdot 4 + 2 \cdot \frac{12}{5} = \frac{13}{15} - 10 + \frac{24}{5} = \frac{13}{15} + \frac{72}{15} - 10 = \frac{85}{15} - 10 = \frac{17}{3} - \frac{30}{3} = -\frac{13}{3} = -4\frac{1}{3}$.

Ответ: $\left\{-4\frac{1}{3}\right\}$.

№ 1.102.

а) $2\frac{3}{4} + \left(3\frac{1}{5} - 3\frac{7}{10}\right) \cdot 1\frac{1}{4}$;

Заметим, что $3\frac{1}{5} - 3\frac{7}{10} = \frac{1}{5} - \frac{7}{10} = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{2\frac{1}{8}\right\}$.

б) Переведем десятичные дроби в обыкновенные:

$$\begin{aligned} \left(2,125 \cdot 1\frac{15}{17} - 1\frac{7}{12}\right) : 7,25 &= \left(2\frac{1}{8} \cdot 1\frac{15}{17} - \frac{19}{12}\right) : 7\frac{1}{4} = \\ &= \left(\frac{17}{8} \cdot \frac{32}{17} - \frac{19}{12}\right) : \frac{29}{4} = \left(4 - \frac{19}{12}\right) \cdot \frac{4}{29} = \frac{29}{12} \cdot \frac{4}{29} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

№ 1.103.

а) $\left(1\frac{18}{25} - 9,12 - 7,4 \cdot \left(-6\frac{1}{3}\right)\right) : 5\frac{1}{3}$;

Ответ: $\{7,4\}$.

$$\begin{aligned} \text{б)} \left(-6\frac{7}{8} + 1,375 - 5\frac{1}{2} \cdot 0,73 \right) : (-1,73) &= (-6,875 + 1,375 - 5,5 \cdot 0,73) : (-1,73) = \\ &= (-5,5 - 5,5 \cdot 0,73) : (-1,73) = 5,5(1 + 0,73) : 1,73 = 5,5. \end{aligned}$$

Ответ: $\{5,5\}$.

№ 1.104.

$$\text{а)} \left(7,42 \cdot \frac{5}{9} - (-11,48) : 1\frac{4}{5} \right) : 0,35;$$

Ответ: $\{30\}$.

$$\begin{aligned} \text{б)} \left(-5,17 : 1\frac{3}{4} + 1,67 \cdot \frac{4}{7} \right) \cdot \left(-1\frac{1}{11} \right) &= \\ &= \left(-5,17 : \frac{7}{4} + 1,67 \cdot \frac{4}{7} \right) \cdot \left(-\frac{12}{11} \right) = \left(-5,17 \cdot \frac{4}{7} + 1,67 \cdot \frac{4}{7} \right) \cdot \left(-\frac{12}{11} \right) = \\ &= \frac{4}{7} (-5,17 + 1,67) \cdot \left(-\frac{12}{11} \right) = \frac{4}{7} \cdot 3,5 \cdot \frac{12}{11} = \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{12}{11} = \frac{24}{11}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \frac{24}{11} \right\}$.

№ 1.105.

$$\begin{aligned} \text{а)} \left(0,319 \cdot \left(-\frac{2}{7} \right) - 1,781 : 3,5 \right) : 0,048 &= \\ &= - \left(0,319 \cdot \frac{2}{7} + 1,781 : \frac{7}{2} \right) : \frac{48}{1000} = -\frac{2}{7} \cdot (0,319 + 1,781) \cdot \frac{1000}{48} = \\ &= -\frac{2}{7} \cdot 2,1 \cdot \frac{250}{12} = -\frac{2}{7} \cdot \frac{21}{10} \cdot \frac{125}{6} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{125}{6} = -\frac{25}{2} = -12,5. \end{aligned}$$

Ответ: $\{-12,5\}$.

$$\text{б)} \left(0,014 \cdot 1\frac{2}{3} - 0,286 : (-0,6) \right) : (0,025);$$

Ответ: $\{-20\}$.

№ 1.106.

$$\begin{aligned} \text{а)} 0,815 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) - \frac{1}{6} \cdot (-4,385) + 0,815 \cdot \frac{1}{6} - (-4,385) \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) &= \\ &= 0,815 \cdot \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \right) + 4,385 \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3} \right) = -\frac{1}{2} (0,815 + 4,385) = -0,5 \cdot 5,2 = -2,6. \end{aligned}$$

Ответ: $\{-2,6\}$.

$$\text{б)} (-14,09) \cdot 2\frac{1}{6} - 6,31 \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right) - 2\frac{1}{6} \cdot 6,31 + \left(-1\frac{1}{2}\right) \cdot (-14,09);$$

Ответ: $\{-13,6\}$.

№ 1.107.

$$\text{а)} 74,7 \cdot \frac{2}{21} + (-105,3) \cdot 2\frac{3}{7} - (-105,3) \cdot \frac{2}{21} - 2\frac{3}{7} \cdot 74,7;$$

Ответ: $\{-420\}$.

$$\begin{aligned} \text{б)} 6\frac{1}{10} \cdot 2,391 - 0,109 \cdot 1\frac{5}{6} - 1\frac{5}{6} \cdot 2,391 + 0,109 \cdot 6\frac{1}{10} &= \\ &= 6\frac{1}{10}(2,391 + 0,109) - 1\frac{5}{6}(0,109 + 2,391) = \left(\frac{61}{10} - \frac{11}{6}\right) \cdot 2,5 = \frac{256}{60} \cdot \frac{5}{2} = \\ &= \frac{128}{12} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{10\frac{2}{3}\right\}$.

Вычислите, используя где возможно формулы сокращенного умножения (1.108 – 1.117):

№ 1.108.

$$\begin{aligned} \text{а)} 4,17^2 - \left(7,42^2 + 3\frac{1}{4} \cdot 0,41\right) &= \\ &= 4,17^2 - 7,42^2 - 3,25 \cdot 0,41 = (4,17 - 7,42)(4,17 + 7,42) - 3,25 \cdot 0,41 = \\ &= -3,25 \cdot 11,59 - 3,25 \cdot 0,41 = -3,25 \cdot 12 = -39. \end{aligned}$$

Ответ: $\{-39\}$.

$$\text{б)} 5\frac{12}{25} \cdot 2,8 - (6,64^2 - 3,84^2);$$

Ответ: $\{-14\}$.

№ 1.109.

$$\text{а)} (17,31^2 - 12,69^2) - (29,81^2 - 0,19^2);$$

Ответ: $\{-750\}$.

$$\begin{aligned} \text{б)} (7,84^2 - 12,16^2) + (25,66^2 - 5,66^2) &= (7,84 - 12,16)(7,84 + 12,16) + \\ &+ (25,66 - 5,66)(25,66 + 5,66) = -4,32 \cdot 20 + 20 \cdot 31,32 = 20 \cdot 27 = 540. \end{aligned}$$

Ответ: $\{540\}$.

№ 1.110:

$$\text{а)} 0,45^3 - 1,45^3 - 0,45 \cdot 1,45 = (0,45 - 1,45) \cdot (0,45^2 + 0,45 \cdot 1,45 + 1,45^2) -$$

$$= -0,45 \cdot 1,45 = -(0,45^2 + 2 \cdot 0,45 \cdot 1,45 + 1,45^2) = -(0,45 + 1,45)^2 = -1,9^2 = -3,61.$$

Ответ: $\{-3,61\}$.

б) $0,507^3 + 0,493^3 - 0,507 \cdot 0,493$;

Ответ: $\{0,000196\}$.

№ 1.111.

а) $\left(\frac{3}{64} \cdot 5\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) : \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + (-1)^5 = \left(\frac{3}{64} \cdot \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\right) : \left(-\frac{1}{27}\right) - 1 =$
 $= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \cdot (-27) - 1 = -\frac{1}{2} \cdot (-27) - 1 = 4\frac{1}{4} - 1 = 1\frac{1}{4} = 1,25.$

Ответ: $\{1,25\}$.

б) $\left(12\frac{3}{4} \cdot 2 - 27\right) : \left(-\frac{3}{4}\right)^3$;

Ответ: $\left\{3\frac{5}{9}\right\}$.

№ 1.112.

а) $\frac{0,46^3 - 0,26^3}{0,20} - 3 \cdot 0,26 \cdot 0,46$;

Ответ: $\{0,04\}$.

б) $\frac{0,12^3 - 0,28^3}{0,16} - 0,12 \cdot 0,28 = \frac{(0,12 - 0,28)(0,12^2 + 0,12 \cdot 0,28 + 0,28^2)}{0,16} -$
 $= -0,12 \cdot 0,28 = -(0,12^2 + 2 \cdot 0,12 \cdot 0,28 + 0,28^2) = -(0,12 + 0,28)^2 = -0,4^2 = -0,16.$

Ответ: $\{-0,16\}$.

№ 1.113.

а) $0,3^{-3} + \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} + (-0,5)^{-2} \cdot \frac{3}{4} + (-1)^{-8} \cdot 6 = \left(\frac{10}{3}\right)^3 + \frac{7}{3} + (-2)^2 \cdot \frac{3}{4} + 6 =$
 $= \frac{1000}{27} + \frac{63}{27} + 3 + 6 = \frac{1063}{27} + \frac{243}{27} = \frac{1306}{27} = 48\frac{10}{27}.$

Ответ: $\left\{48\frac{10}{27}\right\}$.

б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} + \left(\frac{6}{17}\right)^0 \cdot \frac{1}{8} - 0,25^{-2} \cdot 16$;

Ответ: $\left\{-262\frac{5}{8}\right\}$.

№ 1.114.

а) $\frac{12,5^3 + 1,2^3}{13,7} - 12,5^2 - 1,2^2;$

Ответ: $\{-15\}$.

б) $\frac{1}{3} \cdot (0,87^3 + 2,13^3) + 3 \cdot 0,87 \cdot 2,13 =$
 $= \frac{1}{3} \cdot (0,87 + 2,13)(0,87^2 - 0,87 \cdot 2,13 + 2,13^2) + 3 \cdot 0,87 \cdot 2,13 =$
 $= 0,87^2 - 2 \cdot 0,87 \cdot 2,13 + 2,13^2 = (0,87 + 2,13)^2 - 3^2 = 9.$

Ответ: $\{9\}$.

№ 1.115.

а) $\frac{7,46^3 + 6,26^3}{13,72} - 7,46 \cdot 6,26 = 7,46^2 - 2 \cdot 7,46 \cdot 6,26 + 6,26^2 = 1,2^2 = 1,44.$

Ответ: $\{1,44\}$.

б) $\frac{2,5^3 - 4,4^3}{1,9} + 2,5^2 + 4,4^2;$

Ответ: $\{-11\}$.

№ 1.116.

а) $\frac{0,3}{2^{-2} + 5^{-2}} - \left(\left(2 \frac{1}{14} \right)^{-2} - \left(1 \frac{14}{15} \right)^{-2} \right);$

Ответ: $\{1\}$.

б) $3 \cdot \left(\left(2 \frac{1}{6} \right)^{-2} - \left(1 \frac{6}{7} \right)^{-2} \right) - \frac{1}{2^{-2} + 3^{-2}} = 3 \cdot \left(\left(\frac{6}{13} \right)^2 - \left(\frac{7}{13} \right)^2 \right) - \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} =$
 $= 3 \cdot \left(\frac{6}{13} - \frac{7}{13} \right) \left(\frac{6}{13} + \frac{7}{13} \right) - \frac{36}{13} = -\frac{3}{13} - \frac{36}{13} = -3.$

Ответ: $\{-3\}$.

№ 1.117.

а) $0,12 : \left(\left(4 \frac{2}{7} \right)^{-2} - \left(3 \frac{3}{4} \right)^{-2} \right) - 0,028^3 \cdot (-0,0028)^{-2};$

Ответ: $\{-10\}$.

б) $\left(-1 \frac{7}{8} \right) : (1,2^{-2} - 1,5^{-2}) + (-0,275)^3 \cdot 0,0275^{-2} = -\frac{15}{8} : \left(\left(\frac{5}{6} \right)^2 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right) -$

$$\begin{aligned}
 & -0,275^3 \cdot 0,275^{-2} \cdot 0,1^{-2} = -\frac{15}{8} : \left(\left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3} \right) \right) - 0,275 \cdot 100 = \\
 & = -\frac{15}{8} : \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} \right) - 27,5 = -\frac{15}{8} \cdot 4 - 27,5 = -7,5 - 27,5 = -35.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\{-35\}$.

Выполните действия (1.118 – 1.123):

№ 1.118.

а) $4^{1,5} - 0,5^{-1} : 0,008^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{3}{2}} - 2 : 0,2 = 2^3 - 10 = -2.$

Ответ: $\{-2\}$.

б) $9^{0,5} + 0,064^{\frac{2}{3}} \cdot 1,6^{-1};$

Ответ: $\{3,1\}$.

№ 1.119.

а) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-2} + 144^{\frac{1}{2}};$

Ответ: $\left\{24\frac{1}{4}\right\}.$

б) $196^{\frac{1}{2}} - \left(-\frac{5}{14}\right)^{-2} = 14 - \left(\frac{14}{5}\right)^2 = \frac{14 \cdot 25 - 14^2}{25} = \frac{14 \cdot (25 - 14)}{25} =$
 $= \frac{14 \cdot 11}{25} = \frac{154}{25} = 6\frac{4}{25}.$

Ответ: $\left\{6\frac{4}{25}\right\}.$

№ 1.120.

а) $(-2,9) : \left(\left(1\frac{3}{17} \right)^{-1} + 0,36^{-2,5} \cdot 0,6^6 \right);$

Ответ: $\{-2\}$.

б) $\left(\left(1\frac{7}{9} \right)^{-2,5} \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^4 - 1,65^0 \right) \cdot (-0,68) = \left(\left(\frac{9}{16} \right)^{2,5} \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^4 - 1,65^0 \right) \cdot (-0,68) =$
 $= \left(\left(\frac{3}{4} \right)^5 \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^4 - 1 \right) \cdot (-0,68) = \left(\frac{3}{4} - 1 \right) \cdot (-0,68) = \frac{0,68}{4} = 0,17.$

Ответ: $\{0,17\}$.

№ 1.121.

$$\begin{aligned} \text{а) } (-0,6) \cdot \left(0,0081^{\frac{1}{2}} + \left(1\frac{1}{9} \right)^{-2} \right) : 1\frac{5}{13} &= -\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{9}{100} + \frac{81}{100} \right) : \frac{18}{13} = \\ &= -\frac{3}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{13}{18} = -0,39. \end{aligned}$$

Ответ: $\{-0,39\}$.

$$\text{б) } 3,5 \cdot \left(0,027^{\frac{1}{3}} - \left(1\frac{3}{7} \right)^{-1} \right) : \left(-2\frac{6}{11} \right);$$

Ответ: $\left\{ \frac{11}{20} \right\}$.

№ 1.122.

$$\begin{aligned} \text{а) } \left(0,48^0 + \left(1\frac{9}{16} \right)^{\frac{3}{2}} : 0,8^{-4} \right) \cdot 0,81^{-\frac{1}{2}} &= \left(1 + \left(\frac{25}{16} \right)^{\frac{3}{2}} : \left(\frac{4}{5} \right)^{-4} \right) \cdot \left(\frac{100}{81} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(1 + \left(\frac{5}{4} \right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^4 \right) \cdot \frac{10}{9} = \left(1 + \frac{4}{5} \right) \cdot \frac{10}{9} = \frac{9}{5} \cdot \frac{10}{9} = 2. \end{aligned}$$

Ответ: $\{2\}$.

$$\text{б) } \left(0,49^{-1,5} : \left(1\frac{3}{7} \right)^4 + 0,64^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(3\frac{1}{13} \right);$$

Ответ: $\{6\}$.

№ 1.123.

$$\text{а) } \left(1,44^{\frac{3}{2}} : \left(-\frac{5}{6} \right)^{-2} - \left(1\frac{61}{64} \right)^{-\frac{1}{3}} \right) \cdot (-12)^3;$$

Ответ: $\{-691,2\}$.

$$\begin{aligned} \text{б) } \left(0,36^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-1\frac{2}{3} \right)^{-3} - 0,008^{\frac{2}{3}} \right) : (-0,8)^2 &= \left((0,6)^{-1} \cdot \left(-\frac{3}{5} \right)^3 - (0,2)^2 \right) : 0,64 = \\ &= \left(\frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5} \right)^3 - \frac{1}{25} \right) : \frac{16}{25} = \left(-\frac{9}{25} - \frac{1}{25} \right) \cdot \frac{25}{16} = -\frac{10}{25} \cdot \frac{25}{16} = -\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ -\frac{5}{8} \right\}$.

Не пользуясь микрокалькулятором, сравните два числа и укажите какое-нибудь число, заключенное между ними (если такое существует) (1.124 – 1.126):

№ 1.124.

$$\text{а) } \frac{1993}{1994} - 1 = \frac{1993}{1994} - \frac{1994}{1994} = -\frac{1}{1994} > -\frac{1}{1993} = 1 - \frac{1994}{1993}.$$

Между этими числами лежит число, например, $-\frac{1}{1993,5}$.

$$\text{б) } \frac{1995}{1994} = 1 + \frac{1}{1994} > 1 + \frac{1}{1995} = 2 - \frac{1994}{1995}.$$

Между этими числами лежит число, например, $\left(1 + \frac{1}{1994,5}\right)$.

№ 1.125.

$$\text{а) } \frac{1}{26} - \frac{1}{27} = \frac{1}{26 \cdot 27} > \frac{1}{27^2} > \frac{1}{27 \cdot 28} = \frac{1}{27} - \frac{1}{28}.$$

$$\text{б) } \frac{1}{18} - \frac{1}{17} = -\frac{1}{17 \cdot 18} > -\frac{1}{17^2} > -\frac{1}{17 \cdot 16} = \frac{1}{17} - \frac{1}{16}.$$

№ 1.126.

$$\text{а) } \left(1 - \frac{11}{13}\right)^{-1} = \frac{13}{24} = 1 - \frac{11}{24} < 1 - \frac{11}{25} = \frac{14}{25} = 0,56.$$

Число $1 - \frac{11}{24,5} = 1 - \frac{22}{49} = \frac{27}{49}$ лежит между ними.

$$\text{б) } 0,45 = \frac{9}{20} = 1 - \frac{11}{20} > 1 - \frac{11}{19} = \frac{8}{19} = \left(2 - \frac{3}{8}\right)^{-1}.$$

Число $1 - \frac{11}{19,5} = \frac{17}{39}$ лежит между ними.

№ 1.127. Сравните числа:

$$\text{а) Ответ: } \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 > 0,9^2 - 0,9^3.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } 1,1^3 - 1,1^2 \vee \left(\frac{8}{7}\right)^3 - \left(\frac{8}{7}\right)^2 &\Leftrightarrow \left(\frac{8}{7}\right)^2 - \left(\frac{11}{10}\right)^2 \vee \left(\frac{8}{7}\right)^3 - \left(\frac{11}{10}\right)^3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{8}{7} - \frac{11}{10}\right)\left(\frac{8}{7} + \frac{11}{10}\right) \vee \left(\frac{8}{7} - \frac{11}{10}\right)\left(\left(\frac{8}{7}\right)^2 + \frac{8 \cdot 11}{70} + \left(\frac{11}{10}\right)^2\right) \Leftrightarrow \frac{3}{70}\left(\frac{8}{7} + \frac{11}{10}\right) \vee \\ &\vee \frac{3}{70}\left(\left(\frac{8}{7}\right)^2 + \frac{88}{70} + \left(\frac{11}{10}\right)^2\right) \Leftrightarrow \frac{157}{70} \vee \left(\frac{8}{7}\right)^2 + \frac{88}{70} + \left(\frac{11}{10}\right)^2 \Leftrightarrow 0 \vee \left(\frac{8}{7}\right)^2 - \frac{69}{70} + \left(\frac{11}{10}\right)^2. \end{aligned}$$

Очевидно, знак $\vee$ обозначает "меньше" ($<$), т.к. $\left(\frac{8}{7}\right)^2 > 1$, $\left(\frac{11}{10}\right)^2 > 1$,

а $\frac{69}{70} < 1$. Таким образом, $\left(\frac{8}{7}\right)^2 - \frac{69}{70} + \left(\frac{11}{10}\right)^2 > 0$.

Ответ: $1,1^3 - 1,1^2 < \left(\frac{8}{7}\right)^3 - \left(\frac{8}{7}\right)^2$.

№ 1.128. Какому из двух чисел соответствует точка координатной прямой, менее удаленная от точки $M(1)$:

а) 1,05 или $(1,05)^{-1}$

$$(1,05)^{-1} = \left(\frac{21}{20}\right)^{-1} = \frac{20}{21}.$$

$$1 - \frac{20}{21} = \frac{1}{21} < \frac{1}{20} = 1,05 - 1.$$

Ответ: ближе к точке $M(1)$ находится число $(1,05)^{-1}$.

б) $\frac{12}{13}$ или $\left(\frac{12}{13}\right)^{-1}$;

Ответ: ближе к точке $M(1)$ находится число $\frac{12}{13}$.

Преобразуйте в обыкновенную несократимую дробь разность чисел m и p (1.129 – 1.130):

№ 1.129.

а) $m = 0,6875$; $p = \frac{11}{15}$;

$$0,6875 - \frac{11}{15} = \frac{6875}{10000} - \frac{11}{15} = \frac{11 \cdot 25^2}{(25 \cdot 4)^2} - \frac{11}{15} = \frac{11}{16} - \frac{11}{15} = -\frac{11}{240}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{11}{240}\right\}$.

б) $m = \frac{23}{17}$; $p = 1,4375$;

Ответ: $\left\{-\frac{23}{272}\right\}$.

№ 1.130.

а) $m = -6\frac{44}{125}$; $p = -6,344$;

Ответ: $\left\{-\frac{1}{125}\right\}$.

б) $m = -1,776$; $p = -1\frac{96}{125}$;

$$-1,776 - \left(-1\frac{96}{125}\right) = 1\frac{96}{125} - 1\frac{776}{1000} = \frac{96}{125} - \frac{97}{125} = -\frac{1}{125}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{125}\right\}$.

Представьте число a в виде несократимой дроби и проверьте, является ли неравенство верным при данном значении a (1.131 – 1.133):

№ 1.131.

а) $a = \frac{1260}{2240}$, $8a - 4,7 > 0$;

$$a = \frac{1260}{2240} = \frac{63 \cdot 20}{112 \cdot 20} = \frac{9 \cdot 7}{16 \cdot 7} = \frac{9}{16}. \quad 8a - 4,7 = \frac{9}{16} \cdot 8 - 4,7 = -0,2 < 0$$

Ответ: Неравенство неверно.

б) $a = \frac{462}{742}$, $5,2 - 9a < 0$;

Ответ: $a = \frac{33}{53}$, неравенство верно.

№ 1.132.

а) $a = \frac{540}{945}$, $|a - 1| < \frac{1}{2}$;

Ответ: $a = \frac{4}{7}$, неравенство верно.

б) $a = \frac{2250}{4050}$, $|a - 1| > \frac{1}{2}$;

$$a = \frac{2250}{4050} = \frac{45 \cdot 50}{81 \cdot 50} = \frac{5 \cdot 9}{9 \cdot 9} = \frac{5}{9} \left| \frac{5}{9} - 1 \right| = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}.$$

Ответ: $a = \frac{5}{9}$, неравенство неверно.

№ 1.133.

а) $a = \frac{1008}{1848}$, $2a + \frac{1}{a} < 3$;

Ответ: $a = \frac{6}{11}$, неравенство верно.

$$\text{б) } a = \frac{1188}{2772}, a + \frac{2}{a} > 3;$$

$$a = \frac{1188}{2772} = \frac{11 \cdot 108}{11 \cdot 252} = \frac{27 \cdot 4}{63 \cdot 4} = \frac{3}{7}.$$

$$a + \frac{2}{a} = \frac{3}{7} + \frac{14}{3} = \frac{3}{7} + 4\frac{2}{3} > 3.$$

Ответ: Неравенство верно.

Сравните две дроби и представьте меньшую из них в виде десятичной, округленной до тысячных (1.134 – 1.135):

№ 1.134.

$$\text{а) } \frac{5}{3} \vee \frac{11}{7} \Leftrightarrow \frac{35}{21} \vee \frac{33}{21} \Rightarrow \frac{5}{3} > \frac{11}{7} \approx 1,571.$$

$$\text{б) } \frac{3}{7} \text{ и } \frac{7}{15}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{7}{15} > \frac{3}{7} \approx 0,429.$$

№ 1.135.

$$\text{а) } -1\frac{2}{7} \text{ и } -1\frac{4}{13}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{9}{7} > -\frac{17}{13} \approx -1,308.$$

$$\text{б) } -2\frac{14}{17} \vee -2\frac{7}{9} \Leftrightarrow -\frac{14}{17} \vee -\frac{7}{9} \Leftrightarrow \frac{7}{9} \vee \frac{14}{17} \Leftrightarrow \frac{119}{153} \vee \frac{126}{153} \Rightarrow -2\frac{7}{9} > -2\frac{14}{17} \approx -2,824.$$

Расположите алгебраические выражения $a+b$, $a-b$, ab и $a:b$ в порядке возрастания их числовых значений при заданных значениях a и b (1.136 – 1.138):

№ 1.136.

$$\text{а) } a = -0,8 = -\frac{4}{5}; b = \frac{2}{3}.$$

$$a+b = -\frac{2}{15}; a-b = -\frac{22}{15}; a \cdot b = -\frac{8}{15}; a:b = -\frac{12}{10}.$$

Отсюда $a-b < a:b < a \cdot b < a+b$.

$$\text{б) } a = -1,8; b = 1\frac{1}{3}.$$

Ответ: $a-b < a \cdot b < a:b < a+b$.

№ 1.137.

а) $a = 1,8 = \frac{9}{5}$; $b = \frac{11}{15}$.

$$a + b = \frac{38}{15}; \quad a - b = \frac{16}{15}; \quad a \cdot b = \frac{33}{25}; \quad a : b = \frac{27}{11}.$$

Очевидно, $a - b < a \cdot b < a + b < a : b$.

б) $a = 1,7$; $b = \frac{9}{14}$.

Ответ: $a - b < a \cdot b < a + b < a : b$.

№ 1.138.

а) $a = -1\frac{3}{7} = -\frac{10}{7}$; $b = 0,6 = \frac{3}{5}$.

$$a + b = -\frac{29}{35}; \quad a - b = -\frac{71}{35}; \quad a \cdot b = -\frac{30}{35}; \quad a : b = -\frac{50}{21}.$$

Отсюда, $a : b < a - b < a \cdot b < a + b$.

б) $a = -2\frac{1}{6}$; $b = 0,7$.

Ответ: $a : b < a - b < a \cdot b < a + b$.

Расположите алгебраические выражения $(a - b)^2$, ab , $a : b$ в порядке убывания их числовых значений при заданных значениях a и b (1.139 – 1.140):

№ 1.139.

а) $a = 2,75$; $b = 1\frac{1}{6}$.

Ответ: $a \cdot b > (a - b)^2 > a : b$.

б) $a = \frac{1}{3}$; $b = 0,95 = \frac{19}{20}$.

$$(a - b)^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{19}{20}\right)^2 = \left(-\frac{37}{60}\right)^2 = \frac{1369}{3600} > \frac{1}{3};$$

$$a \cdot b = \frac{19}{60} < \frac{1}{3}; \quad a : b = \frac{20}{57} > \frac{19}{60}. \quad \text{Ясно, что } (a - b)^2 > a : b > a \cdot b.$$

№ 1.140.

а) $a = -2\frac{8}{9} = -\frac{26}{9}$; $b = -1,2 = -\frac{6}{5}$.

$$(a-b)^2 = \left(-\frac{26}{9} + \frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{-130+54}{45}\right)^2 = \left(-\frac{76}{45}\right)^2 = \frac{5776}{2025};$$

$$a \cdot b = \frac{156}{45} = \frac{52}{15} > 3; \quad a : b = \frac{130}{54} < \frac{52}{15}.$$

Отсюда, $a \cdot b > (a-b)^2 > a : b$.

$$\text{б) } a = -\frac{3}{7}; \quad b = -1,2.$$

Ответ: $(a-b)^2 > a \cdot b > a : b$.

Расположите в порядке убывания числа (1.141 – 1.142):

№ 1.141.

$$\text{а) Так как } \frac{4}{3} > 1, \text{ то } \left(\frac{4}{3}\right)^2 > \left(\frac{4}{3}\right)^0 > \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} > \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$$

$$\text{б) Поскольку } \frac{2}{3} < 1, \text{ то } \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} > \left(\frac{2}{3}\right)^2 > \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

№ 1.142.

$$\text{а) } \frac{6}{5} = 1,2 > 1, \text{ то } \frac{5}{6} = (1,2)^{-1}.$$

$$\text{Отсюда } (-1,2)^2 > \left(\frac{6}{5}\right)^0 > 1,2^{-1} > \left(\frac{5}{6}\right)^2.$$

$$\text{б) Ответ: } (-0,75)^{-2} > 0,75^0 > \left(\frac{4}{3}\right)^{-1} > \left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

Сравните числа (1.143 – 1.144):

№ 1.143.

$$\text{а) Ответ: } (-1,1)^{-2} + 1,1 < \left(\frac{10}{11}\right)^{-2} + \frac{10}{11}.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{10}{9} + \left(\frac{10}{9}\right)^{-2} \vee \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^{-2} &\Leftrightarrow \frac{10}{9} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 \vee \frac{9}{10} + \left(\frac{10}{9}\right)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{10}{9} - \left(\frac{10}{9}\right)^2 \vee \frac{9}{10} - \left(\frac{9}{10}\right)^2 &\Leftrightarrow \frac{10}{9} \left(1 - \frac{10}{9}\right) \vee \frac{9}{10} \left(1 - \frac{9}{10}\right) \Leftrightarrow -\frac{10}{81} \vee \frac{9}{100}. \end{aligned}$$

Следовательно, знак $\vee$ означает "меньше" ($<$).

$$\text{Ответ: } \frac{10}{9} + \left(\frac{10}{9}\right)^{-2} < 0,9 + 0,9^{-2}.$$

№ 1.144.

$$\begin{aligned} \text{а) } -1917^2 + 1913^2 \vee -1999^2 + 1995^2 &\Leftrightarrow -4 \cdot (1917 + 1913) \vee \\ &\vee -4 \cdot (1999 + 1995) \Leftrightarrow 1999 + 1995 \vee 1917 + 1913. \end{aligned}$$

Следовательно, знак $\vee$ означает "больше" ($>$).

$$\text{Ответ: } -1917^2 + 1913^2 > -1999^2 + 1995^2.$$

$$\text{б) Ответ: } 1919^2 - 1993^2 < 1917^2 - 1991^2.$$

Найдите два последовательных целых числа, между которыми заключено данное число (1.145 – 1.146):

№ 1.145.

$$\text{а) } 0,027^{\frac{2}{3}} - 0,027^{-\frac{2}{3}} = 0,9^2 - 0,9^{-2} = 0,81 - \frac{100}{81}.$$

Очевидно, что данное число находится между 0 и -1.

$$\text{б) } 0,49^{-\frac{1}{2}} - 0,49^{\frac{3}{2}};$$

Ответ: между 1 и 2.

№ 1.146.

$$\text{а) } \left(1\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^{-4};$$

Ответ: между 2 и 3.

$$\begin{aligned} \text{б) } 1,8^{-3} - \left(1\frac{4}{5}\right)^2 &= \left(\frac{5}{9}\right)^3 - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{125}{729} - \frac{81}{25} = \frac{125}{729} - 3 - \frac{6}{25} < \\ < \frac{1}{5} - 3 - \frac{6}{25} < \frac{1}{5} - 3 - \frac{1}{5} = -3. \end{aligned}$$

Значит, число находится между -3 и -4.

Упростите выражение (1.147 – 1.160):

№ 1.147.

$$\text{а) } \frac{a+x}{x} + \frac{x}{a-x} = \frac{(a+x)(a-x) + x^2}{x(a-x)} = \frac{a^2 - x^2 + x^2}{x(a-x)} = \frac{a^2}{x(a-x)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^2}{x(a-x)}.$$

$$\text{б) } \frac{2a}{a-1} - \frac{2a}{a+1};$$

$$\text{Ответ: } \frac{4a}{a^2-1}$$

№ 1.148.

а) $\frac{2x-2y}{y} \cdot \frac{3y}{x^2-y^2};$

Ответ: $\frac{6}{x+y}.$

б) $\frac{a+x}{a} : \frac{3a+3x}{a^2} = \frac{a+x}{a} \cdot \frac{a^2}{3(a+x)} = \frac{a}{3};$

Ответ: $\frac{a}{3}.$

№ 1.149.

а) $\left(\frac{x+3}{x^2-3x} + \frac{x-3}{x^2+3x} \right) \cdot \frac{9x-x^3}{x^2+9} = \left(\frac{x+3}{x(x-3)} + \frac{x-3}{x(x+3)} \right) \cdot \frac{x(9-x^2)}{x^2+9} =$
 $= \left(\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} \right) \cdot \frac{9-x^2}{x^2+9} = \frac{(x+3)^2 + (x-3)^2}{x^2-9} \cdot \frac{9-x^2}{x^2+9} = \frac{2(x^2+9) \cdot (9-x^2)}{(x^2-9)(x^2+9)} = -2.$

Ответ: $\{-2\}.$

б) $\left(\frac{y-1}{2y+2} - \frac{y+1}{2y-2} \right) : \frac{y}{4-4y^2};$

Ответ: $\{8\}.$

№ 1.150.

а) $\left(\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} \right) : \frac{2x}{9-x^2};$

Ответ: $\{-6\}.$

б) $\left(\frac{t+2}{4-2t} + \frac{2-t}{4+2t} \right) \cdot \frac{2t^2-8}{t^2+4} = \frac{(2+t)^2 + (2-t)^2}{4-t^2} \cdot \frac{t^2-4}{t^2+4} =$
 $= \frac{2(t^2+4)(t^2-4)}{(4-t^2)(t^2+4)} = -2.$

Ответ: $\{-2\}.$

№ 1.151.

а) $\frac{2a}{a+1} + \left(\frac{3}{(a-1)^2} - \frac{3}{a^2-1} \right) : \frac{3}{a^2-2a+1} = \frac{2a}{a+1} + \left(\frac{1}{(a-1)^2} - \frac{1}{(a-1)(a+1)} \right) \cdot$
 $\cdot (a-1)^2 = \frac{2a}{a+1} + \left(1 - \frac{a-1}{a+1} \right) = \frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a+1} = \frac{2(a+1)}{a+1} = 2.$

Ответ: $\{2\}.$

$$\text{б)} \left(\frac{2}{b^2 - 4} - \frac{2}{b^2 + 4b + 4} \right) : \frac{2}{(b+2)^2} - \frac{2b}{b-2};$$

Ответ: $\{-2\}$.

№ 1.152.

$$\text{а)} \frac{b^2 + 8b + 16}{b} \cdot \left(\frac{b}{(b+4)^2} + \frac{b}{16 - b^2} \right) + \frac{8}{b-4};$$

Ответ: $\{0\}$.

$$\text{б)} \left(\frac{1}{c^2 - 9} + \frac{1}{c^2 + 6c + 9} \right) : \frac{1}{(3-c)^2} + \frac{c+9}{c+3} = \left(\frac{1}{(c-3)(c+3)} + \frac{1}{(c-3)^2} \right) \cdot$$

$$(c-3)^2 + \frac{c+9}{c+3} = \frac{c-3}{c+3} + 1 + \frac{c+9}{c+3} = \frac{2c+6}{c+3} + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Ответ: $\{3\}$.

№ 1.153.

$$\text{а)} \frac{y}{y+2} + \left(\frac{1}{4-y^2} - \frac{1}{4-4y+y^2} \right) : \frac{2}{(y-2)^2} = \frac{y}{y+2} - \left(\frac{1}{(y-2)(y+2)} + \frac{1}{(y-2)^2} \right) \cdot$$

$$\frac{(y-2)^2}{2} = \frac{y}{y+2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y-2}{y+2} + 1 \right) = \frac{y}{y+2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{y+2} = 0.$$

Ответ: $\{0\}$.

$$\text{б)} \frac{x^2 - 10x + 25}{2x} \cdot \left(\frac{x}{x^2 - 25} - \frac{x}{(x-5)^2} \right) + \frac{5}{5+x};$$

Ответ: $\{0\}$.

№ 1.154.

$$\text{а)} \frac{b^2 - 1}{3b^2 - 4b + 1} \cdot \frac{3b - 1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{(b-1)(b+1)}{(3b-1)(b-1)} \cdot \frac{3b-1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{b+1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{b+2}{b}.$$

Ответ: $\frac{b+2}{b}$.

$$\text{б)} \frac{4c^2 - 1}{2c^2 + c - 1} : \frac{2c+1}{c+2} - \frac{1}{c+1};$$

Ответ: $\{1\}$.

№ 1.155.

$$\text{а)} \left(\frac{d^3 - 8}{d^2 - 4} - \frac{6d}{d+2} \right) : \left(1 - \frac{4}{d+2} \right)^2;$$

Ответ: $d + 2$.

$$\begin{aligned} \text{б) } & \left(\frac{b^3 + 1}{b^2 - 1} + \frac{3b}{b - 1} \right) \cdot \left(1 - \frac{2b}{b + 1} \right)^2 = \left(\frac{(b + 1)(b^2 - b + 1)}{(b - 1)(b + 1)} + \frac{3b}{b - 1} \right) \cdot \left(\frac{1 - b}{b + 1} \right)^2 = \\ & = \left(\frac{b^2 - b + 1}{b - 1} + \frac{3b}{b - 1} \right) \cdot \left(\frac{b - 1}{b + 1} \right)^2 = \frac{b^2 + 2b + 1}{b - 1} \cdot \frac{(b - 1)^2}{(b + 1)^2} = \frac{(b + 1)^2 (b - 1)^2}{(b - 1)^2 (b + 1)^2} = b - 1. \end{aligned}$$

Ответ: $b - 1$.

№ 1.156.

$$\begin{aligned} \text{а) } & \left(c - \frac{c^3 + 8}{2c + c^2} \right) \cdot \frac{c}{(c - 2)^2} + \frac{2}{2 - c} = \frac{2c^2 + c^3 - c^3 - 8}{(2 + c)} \cdot \frac{c}{(c - 2)^2} - \frac{2}{c - 2} = \\ & = \frac{2(c^2 - 4)}{(c + 2)(c - 2)^2} - \frac{2}{c - 2} = \frac{2(c - 2)(c + 2)}{(c + 2)(c - 2)^2} - \frac{2}{c - 2} = \frac{2}{c - 2} - \frac{2}{c - 2} = 0. \end{aligned}$$

Ответ: $\{0\}$.

$$\text{б) } \frac{(a + 3)^2}{a} : \left(\frac{a^3 - 27}{a^2 - 3a} - a \right) - \frac{a}{3};$$

Ответ: $\{1\}$.

№ 1.157.

$$\begin{aligned} \text{а) } & \left(1 - \frac{2b}{a + 2b} \right) : \left(\frac{2b - a}{a + 2b} \cdot \left(1 + \frac{a}{a - 2b} \right) \right) = \frac{a + 2b - 2b}{a + 2b} : \left(\frac{2b - a}{a + 2b} \cdot \frac{a - 2b + 2b}{a - 2b} \right) = \\ & = \frac{a}{a + 2b} : \left(\frac{-2(a - b)}{a + 2b} \right) = \frac{a}{a + 2b} \cdot \frac{a + 2b}{-2(a - b)} = \frac{a}{2(b - a)}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{a}{2(b - a)}$.

$$\text{б) } \frac{3a + m}{3a - m} : \left(1 - \frac{3a}{3a - m} \right) : \left(1 - \frac{m}{3a + m} \right);$$

Ответ: $-\frac{3a}{m}$.

№ 1.158.

$$\text{а) } \left(\frac{5c^2 - c}{25c^2 - 10c + 1} + \frac{4}{1 - 25c^2} \right) : \left(1 - \frac{3}{5c - 1} \right) - \frac{c}{5c + 1};$$

Ответ: $\frac{1}{5c + 1}$.

$$\begin{aligned}
 & \text{б) } \left(\frac{16a^2 - 24a + 9}{9 - 16a^2} + \frac{1}{4a^2 + 3a} \right) \cdot \left(3 - \frac{7a}{a-1} \right) - \frac{1}{a} = \\
 & = \left(\frac{(4a-3)^2}{(3-4a)(3+4a)} + \frac{1}{a(4a+3)} \right) \cdot \frac{3a-3-7a}{a-1} - \frac{1}{a} = \left(\frac{3-4a}{3+4a} + \frac{1}{a(3+4a)} \right) \cdot \\
 & \cdot \frac{-(3+4a)}{a-1} - \frac{1}{a} = \frac{3a-4a^2+1}{a(3+4a)} \cdot \frac{-(3+4a)}{a-1} - \frac{1}{a} = \frac{4a^2-3a-1}{a(a-1)} - \frac{1}{a} = \frac{(4a+1)(a-1)}{a(a-1)} - \\
 & - \frac{1}{a} = \frac{4a+1}{a} - \frac{1}{a} = 4 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 4.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\{4\}$.

№ 1.159.

$$\text{а) } \left(\frac{3ab}{4a^2 + 12ab + 9b^2} - \frac{a}{2a+3b} \right) \cdot (2 + 3a^{-1}b)^2;$$

Ответ: $\{-2\}$.

$$\begin{aligned}
 & \text{б) } \left(\frac{m}{5m-2c} + \frac{2mc}{25m^2 - 20mc + 4c^2} \right) \cdot (1 - 0,4mc^{-1})^2 = \\
 & = \left(\frac{m}{5m-2c} + \frac{2mc}{(5m-2c)^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{2c}{5m} \right)^2 = \frac{5m^2 - 2mc + 2mc}{(5m-2c)^2} \cdot \frac{(5m-2c)^2}{5m^2} = \\
 & = \frac{5m^2(5m-2c)^2}{25m^2(5m-2c)^2} = \frac{1}{5}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{5} \right\}$.

№ 1.160.

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \frac{a^2-1}{a^2+3} \cdot ((a+1)(a-1)^{-2} + (a-1)(a+1)^{-2}) = \frac{(a-1)(a+1)}{a^2+3} \cdot \left(\frac{a+1}{(a-1)^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{a-1}{(a+1)^2} \right) = \frac{(a-1)(a+1)}{a^2+3} \cdot \frac{(a+1)^3 + (a-1)^3}{(a-1)^2(a+1)^2} = \frac{2a^3+6a}{(a^2+3)(a-1)(a+1)} = \frac{2a}{a^2-1}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2a}{a^2-1}$.

$$\text{б) } (3d^2+1) : ((d+1)^2(d-1)^{-1} - (d-1)^2(d+1)^{-1});$$

Ответ: $\frac{d^2-1}{2}$.

Упростите выражение и найдите все значения переменной, при которых выражение принимает заданное значение k (1.161 – 1.164):

№ 1.161.

а) $\left((a+1)^{-2} - 1\right) \cdot \frac{a+1}{a+2} + \frac{1}{a^2+a}, \quad k=1;$

Ответ: $\frac{1-a}{a}$. Выражение принимает значение $k=1$ при $a = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{б) } & \left(1 - (2b-1)^{-2}\right) : \frac{b-1}{2b-1} - \frac{1}{2b^2-b} = \left(1 - \frac{1}{(2b-1)^2}\right) \cdot \frac{2b-1}{b-1} - \frac{1}{b(2b-1)} = \\ & = \frac{(2b-1)^2-1}{(2b-1)^2} \cdot \frac{2b-1}{b-1} - \frac{1}{b(2b-1)} = \frac{(2b-2) \cdot 2b}{(2b-1)(b-1)} - \frac{1}{b(2b-1)} = \frac{4b}{2b-1} - \frac{1}{b(2b-1)} = \\ & = \frac{4b^2-1}{b(2b-1)} = \frac{2b+1}{b}. \end{aligned}$$

При $k = -2$ $\frac{2b+1}{b} = -2$. Отсюда $b = -\frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{2b+1}{b}$. Выражение принимает значение $k = -2$ при $b = -\frac{1}{4}$.

№ 1.162.

$$\begin{aligned} \text{а) } & \left(1 - \left(\frac{x-1}{x}\right)^2\right) : \left(1 - \left(\frac{x-1}{x}\right)^{-2}\right) + \frac{2}{x} = \frac{x^2 - (x-1)^2}{x^2} : \left(1 - \frac{x^2}{(x-1)^2}\right) + \frac{2}{x} = \\ & = \frac{2x-1}{x^2} : \frac{(x-1)^2 - x^2}{(x-1)^2} + \frac{2}{x} = \frac{2x-1}{x^2} : \frac{-2x+1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x} - \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = \frac{-x^2+4x-1}{x^2}. \end{aligned}$$

При $k = 3$ $\frac{-x^2+4x-1}{x^2} = 3$ или $4x^2 - 4x + 1 = 0$. Отсюда $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{-x^2+4x-1}{x^2}$. Выражение принимает значение $k = 3$ при

$$x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{б) } \left(\frac{a}{a+1} - \left(\frac{a}{a+1}\right)^{-1}\right) : \left(2a - \frac{a}{a+1}\right) + \frac{2}{a}, \quad k=1;$$

Ответ: $\frac{2a-1}{a^2}$. Выражение принимает значение $k=1$ при $a=1$.

№ 1.163.

$$a) \left(\frac{q^3 + 8}{q^3 + 4q^2 + 4q} - \frac{2}{q+2} \right) \cdot (q-2)^{-2}, \quad k = \frac{1}{3};$$

Ответ: $\frac{1}{q(q+2)}$. Выражение принимает значение $k = \frac{1}{3}$ при $q_1 = -3$ и $q_2 = 1$.

$$b) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+3p+9p^2} + \frac{9p^3-p}{27p^3-1} \right) : (3p+1)^{-2} = \left(\frac{1}{3(1+3p+9p^2)} + \frac{p(9p^2-1)}{(3p-1)(9p^2+3p+1)} \right) \cdot (3p+1)^2 = \left(\frac{1}{3(9p^2+3p+1)} + \frac{p(3p+1)}{9p^2+3p+1} \right) \cdot (3p+1)^2 = \frac{1+9p^2+3p}{3(9p^2+3p+1)} \cdot (3p+1)^2 = \frac{(3p+1)^2}{3}.$$

$$\text{При } k = \frac{16}{3}, \frac{(3p+1)^2}{3} = \frac{16}{3} \text{ и } (3p+1) \pm 4. \quad p_1 = -\frac{5}{3} \text{ и } p_2 = 1.$$

Ответ: $\frac{1}{3}(3p+1)^2$. Выражение принимает значение $k = \frac{16}{3}$ при $p_1 = -\frac{5}{3}$ и $p_2 = 1$.

№ 1.164.

$$a) \left(\frac{8m^3-2m}{1+8m^3} + \frac{1}{4m^2-2m+1} \right) : (2m-1)^{-2}, \quad k = 9;$$

Ответ: $(2m-1)^2$. Выражение принимает значение $k = 9$ при $m_1 = -1$ и $m_2 = 2$.

$$b) \left(\frac{n^3-64}{n^3-8n^2+16n} + \frac{4}{n-4} \right) \cdot (n+4)^{-2} = \left(\frac{(n-4)(n^2+4n+16)}{n(n-4)^2} + \frac{4n}{n(n-4)} \right) : (n+4)^2 = \frac{n^2+4n+16+4n}{n(n-4)} : (n+4)^2 = \frac{(n+4)^2}{n(n-4)(n+4)^2} = \frac{1}{n(n-4)}.$$

При $k = 0,2 = \frac{1}{5}$ $\frac{1}{n(n-4)} = \frac{1}{5}$ или $n(n-4) = 5$. Получаем уравнение $n^2 - 4n - 5 = 0$. Его корни $n_1 = -1$ и $n_2 = 5$.

Ответ: $\frac{1}{n(n-4)}$. Выражение принимает значение $k = 0,2$ при $n_1 = -1$ и $n_2 = 5$.

Представьте выражение в виде многочлена стандартного вида и найдите его значение при заданных значениях переменных (1.165 – 1.168):

№ 1.165.

а) $(a - 2b)(a + 2b)(a^2 + 4b^2)$ при $a = \sqrt{7}$, $b = \sqrt[4]{3}$;

Ответ: $a^4 - 16b^4 = 1$.

б) $(3n - p)(3n + p)(9n^2 + p^2) = (9n^2 - p^2)(9n^2 + p^2) = 81n^4 - p^4$.

При $n = \sqrt[4]{2}$ и $p = \sqrt{5}$ $81n^4 - p^4 = 81 \cdot 2 - 25 = 137$.

Ответ: $81n^4 - p^4 = 137$.

№ 1.166.

а) $(2m^2 + 3n)(4m^4 - 6m^2n + 9n^2) - 28n^3 = (2m^2)^3 + (3n)^3 - 28n^3 = 8m^6 - n^3$. При $m = -\sqrt{3}$ и $n = 6$ $8m^6 - n^3 = 8 \cdot 3^3 - 6^3 = 2^3 \cdot 3^3 - 6^3 = 6^3 - 6^3 = 0$.

Ответ: $8m^6 - n^3 = 0$.

б) $(5c - 2p^2)(25c^2 + 10cp^2 + 4p^4) - 126c^3$ при $c = -22$, $p = \sqrt{11}$;

Ответ: $-c^3 - 8p^6 = 0$.

№ 1.167.

а) $(2x - y)(2x + y)(16x^4 + 4x^2y^2 + y^4)$ при $x = -\sqrt{2}$, $y = \sqrt[3]{6}$;

Ответ: $64x^6 - y^6 = 476$.

б) $(a - 2b)(a + 2b)(a^4 + 4a^2b^2 + 16b^4) = (a^2 - 4b^2)(a^4 + 4a^2b^2 + 16b^4) = a^6 - 64b^6$. При $a = \sqrt{5}$ и $b = -\sqrt[3]{3}$ $a^6 - 64b^6 = 5^3 - 64 \cdot 3^2 = 125 - 576 = -451$.

Ответ: $a^6 - 64b^6 = -451$.

№ 1.168.

а) $(3a + b^2)(9a^2 - 3ab^2 + b^4) - b^6 = (3a)^3 + (b^2)^3 - b^6 = 27a^3 + b^6 - b^6 = 27a^3$. При $a = -\sqrt[3]{0,12}$, $b = 2\sqrt[3]{4}$ $27a^3 = -27 \cdot 0,12 = -3,24$.

Ответ: $27a^3 = -3,24$.

б) $(x^2 - 2a)(x^4 + 2ax^2 + 4a^2) + 8a^3$ при $a = \sqrt[3]{0,14}$, $x = -\sqrt[3]{10}$;

Ответ: $x^6 = 100$.

Разложите многочлен на множители и найдите его значение при заданных значениях букв (1.169 – 1.170):

№ 1.169.

а) $2a^2 + 3a - 2ab - 3b$ при $a = -1,5$, $b = 4\frac{8}{11}$;

Ответ: $(a - b)(2a + 3) = 0$.

б) $2c^2 - 5c + 2cd - 5d = c(2c - 5) + d(2c - 5) = (2c - 5)(c + d)$. При $c = 2,5$ и $d = -8\frac{6}{17}$ выражение равно 0 (первый сомножитель равен нулю).

Ответ: $(2c - 5)(c + d) = 0$.

№ 1.170.

а) $6x^2 + 6xy - 12x - 12y = 6x(x + y) - 12(x + y) = (x + y)(6x - 12)$. При $x = 6\frac{8}{25} = 6,32$ и $y = -6,32$ выражение равно 0.

Ответ: $(x + y)(6x - 12) = 0$.

б) $5a^2 - 5ab + 15a - 15b$ при $a = 4,88$, $b = 4\frac{22}{25}$;

Ответ: $(a - b)(5a + 15) = 0$.

Вычислите значение выражения (1.171 – 1.174):

№ 1.171.

а) $p^3 + 64m^3$ при $p = 5,5$, $m = -1\frac{3}{8}$;

Ответ: $\{0\}$.

б) $\frac{1}{8}a^3 - m^3 = \left(\frac{a}{2} - m\right)\left(\frac{a^2}{4} + \frac{am}{2} + m^2\right)$. При $a = -3,2$ и $m = -1\frac{3}{5} = -1,6$

сомножитель $\left(\frac{a}{2} - m\right) = 0$.

Ответ: $\{0\}$.

№ 1.172.

а) $8p^3 + d^6 = (2p + d^2)(4p^2 - 2pd^2 + d^4)$. При $p = -10\frac{1}{8}$ и $d = 4,5$

сомножитель $(2p + d^2)$ равен $\left(-20\frac{1}{4} + 4,5^2\right) = (-20,25 + 20,25) = 0$.

Ответ: $\{0\}$.

б) $b^6 - 27a^3$ при $b = -3,5$, $a = 4\frac{1}{12}$;

Ответ: $\{0\}$.

№ 1.173.

а) $9a^2 - b^2$, если $3a + b = 2\frac{2}{3}$, а $3a - b = 2,25$;

Ответ: $\{6\}$.

б) $c^2 - 4d^2$, если $c - 2d = -1\frac{1}{7}$ и $c + 2d = 1,75$;

$$c^2 - 4d^2 = (c - 2d)(c + 2d) = -1\frac{1}{7} \cdot 1,75 = -\frac{8}{7} \cdot 1\frac{3}{4} = -\frac{8}{7} \cdot \frac{7}{4} = -2.$$

Ответ: $\{-2\}$

№ 1.174.

а) $0,16m^2 - k^2$, если $0,4m - k = 4,4$ и $0,4m + k = (2,2)^{-1}$;

$$0,16m^2 - k^2 = (0,4m - k)(0,4m + k) = 4,4 \cdot (2,2)^{-1} = \frac{4,4}{2,2} = 2.$$

Ответ: $\{2\}$.

б) $c^2 - 0,36p^2$, если $c + 0,6p = (0,7)^{-1}$ и $c - 0,6p = 2,8$;

Ответ: $\{4\}$.

Разложите многочлены на множители и найдите все значения x , при которых оба многочлена принимают значение нуль (1.175 – 1.176):

№ 1.175.

а) $16x - x^3$ и $x^2 + 7x + 12$;

Ответ: $\{-4\}$.

$$\left. \begin{aligned} \text{б) } 9x - x^2 - 18 &= -(x - 3)(x - 6) \\ 2x^3 - 18x &= 2x(x^2 - 9) = 2x(x - 3)(x + 3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 3.$$

Ответ: $\{3\}$.

№ 1.176.

а) $3x^3 - 27x = 3x(x^2 - 9) = 3x(x - 3)(x + 3)$.

$$24x - 5x^2 - x^3 = -x(x - 3)(x + 8);$$

Оба многочлена обращаются в нуль при $x = 0$ и $x = 3$.

Ответ: $\{0; 3\}$.

б) $2x^2 - 7x + 6$ и $20x - 5x^3$;

Ответ: $\{2\}$.

№ 1.177. Пусть a, b, c, d — положительные числа. Вычислите:

а) $\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$, если $a + b = b + c = c + d$. Отсюда следует, что $a = c$

и $b = d$. Поэтому $\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{c^2 + d^2}{c^2 + d^2} = 1$.

Ответ: $\{1\}$.

б) $\frac{c}{a} + \frac{b}{d}$, если $ab = bc = cd$. Следовательно, $a = c$ и $b = d$.

Тогда $\frac{c}{a} + \frac{b}{d} = \frac{c}{c} + \frac{d}{d} = 2$.

Ответ: $\{2\}$.

Упростить выражение (1.178 — 1.184):

№ 1.178.

а) $\left(2a^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{a^{\frac{7}{6}} \cdot \frac{1}{32} a^{-\frac{2}{3}}} \right)^{-8}$

Ответ: $\frac{2^{12}}{a^4}$.

б) $\sqrt[5]{9b^6} : \left(\frac{1}{3b^3} \right)^{-\frac{3}{20}} \cdot \left(\frac{b^5}{3} \right)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{2}{5}} \cdot b^{\frac{6}{5}} \cdot (3^{-1} b^{-3})^{\frac{3}{20}} \cdot b^{\frac{5}{4}} \cdot 3^{-\frac{1}{4}} =$
 $= 3^{\frac{2}{5}} \cdot 3^{-\frac{3}{20}} \cdot 3^{-\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{6}{5}} \cdot b^{-\frac{9}{20}} \cdot b^{\frac{5}{4}} = 3^0 \cdot b^{\frac{40}{20}} = b^2$.

Ответ: b^2 .

№ 1.179.

а) $\left(\frac{16}{c} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot (0,5c^{-2})^{\frac{2}{15}} : \sqrt[5]{2c^7} = 2^{\frac{4}{3}} c^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{2}{15}} \cdot c^{-\frac{4}{15}} \cdot 2^{-\frac{1}{5}} \cdot c^{-\frac{7}{5}} = 2c^{-2}$.

Ответ: $2c^{-2}$.

б) $\left(3d^{\frac{3}{4}} : \sqrt[3]{d^{\frac{1}{4}} \cdot 81d^{-\frac{3}{2}}} \right)^{-6}$

Ответ: $9d^{-7}$.

№ 1.180.

$$a) (xy^{-2})^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{x \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[12]{(xy^{-2})^{-5}}}.$$

Ответ: $\frac{x^2}{y}.$

$$б) \frac{\sqrt[3]{a^2 \sqrt{b}}}{\sqrt[4]{(a^{-1}b^2)^{-3}}} : (ab^{16})^{-\frac{1}{12}} = \frac{\left(a^2 b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{-1}b^2\right)^{-\frac{3}{4}}} \cdot (ab^{16})^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{6}} a^{-\frac{3}{4}} b^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{12}} b^{\frac{4}{3}} = b^3.$$

Ответ: $b^3.$

№ 1.181.

$$a) \frac{\sqrt[3]{b^2 \sqrt[4]{ab^2}}}{(ab^{-2})^{\frac{3}{4}}} : \left(a^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-2} = \left(b^2 \cdot (ab^2)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (ab^{-2})^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(a^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{2}{3}}\right)^2 =$$

$$= b^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{12}} \cdot b^{\frac{1}{6}} \cdot a^{-\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-\frac{4}{3}} = b^{\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{1}{12} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3}} = b^1 \cdot a^0 = b.$$

Ответ: $b.$

$$б) \frac{\left(x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{-\frac{1}{8}}\right)^2}{\sqrt[3]{y^4 \sqrt{x^2 y}}} \cdot (x^{-2} y^7)^{\frac{1}{6}}.$$

Ответ: $x^{-2} y.$

№ 1.182.

$$a) \left(\frac{a + 2a^{\frac{1}{2}} + 1}{a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{2}}} + 1 \right) \cdot \left(1 - a^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Ответ: $1 + \frac{1}{a}.$

$$б) \left(\frac{b^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{1}{2}} - 2}{b - 1} - 2 \right) \cdot \left(1 + b^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{b^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{1}{2}} - 2 - 2b + 2}{\left(b^{\frac{1}{2}} - 1\right) \left(b^{\frac{1}{2}} + 1\right)} \cdot \frac{b^{\frac{1}{2}} + 1}{b^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{b^{\frac{1}{2}} \left(b - 2b^{\frac{1}{2}} + 1 \right)}{\left(b^{\frac{1}{2}} - 1 \right) b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(b^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2}{b^{\frac{1}{2}} - 1} = b^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{b} - 1.$$

Ответ: $\sqrt{b} - 1$.

№ 1.183.

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{3}{2}}}{a + 2a^{\frac{1}{2}} + 1} - \sqrt{a} \right) : \frac{1 - a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}} = a^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - a}{\left(a^{\frac{1}{2}} + 1 \right)^2} - 1 \right) : \frac{a^{\frac{1}{2}} - 1}{a} = \\ & = a^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\left(1 - a^{\frac{1}{2}} \right) \left(1 + a^{\frac{1}{2}} \right) - \left(a^{\frac{1}{2}} + 1 \right)^2}{\left(a^{\frac{1}{2}} + 1 \right)^2} \right) \times \frac{a}{a^{\frac{1}{2}} - 1} = a^{\frac{1}{2}} \frac{\left(1 - a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} - 1 \right) a}{\left(a^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \left(a^{\frac{1}{2}} - 1 \right)} = \\ & = - \frac{2a^2}{a - 1} = \frac{2a^2}{1 - a}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2a^2}{1 - a}$.

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & \left(\frac{2 + 2b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} + b^{-\frac{1}{2}} \right) : \frac{\sqrt{b}}{b - 2\sqrt{b} + 1} = \left(\frac{2 \left(1 + b^{\frac{1}{2}} \right)}{b^{\frac{1}{2}} \left(b^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \left(b^{\frac{1}{2}} + 1 \right)} + \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}} \right) : \frac{\left(b^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2}{b^{\frac{1}{2}}} = \\ & = \frac{2 + b^{\frac{1}{2}} - 1}{b^{\frac{1}{2}} \left(b^{\frac{1}{2}} - 1 \right)} \cdot \frac{\left(b^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(b^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \left(b^{\frac{1}{2}} - 1 \right)}{b} = \frac{b - 1}{b}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{b - 1}{b}$.

№ 1.184.

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & \left(\frac{1 + \sqrt[3]{d}}{1 - \sqrt[3]{d}} + d^{-\frac{1}{3}} \right)^{-1} \cdot \left(1 + d^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{2}{3}} \right) = \left(\frac{1 + d^{\frac{1}{3}}}{d^{\frac{1}{3}} \left(d^{\frac{2}{3}} - 1 \right)} + \frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} \right)^{-1} \cdot \left(1 + d^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{2}{3}} \right) = \\
 & = \left(\frac{1}{d^{\frac{1}{3}} \left(d^{\frac{2}{3}} - 1 \right)} + \frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} \right)^{-1} \cdot \left(1 + d^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{2}{3}} \right) = \left(\frac{1 + d^{\frac{1}{3}} - 1}{d^{\frac{1}{3}} \left(d^{\frac{2}{3}} - 1 \right)} \right)^{-1} \cdot \left(1 + d^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{2}{3}} \right) = \\
 & = \left(d^{\frac{1}{3}} - 1 \right) \cdot \left(d^{\frac{2}{3}} + d^{\frac{1}{3}} + 1 \right) = d - 1.
 \end{aligned}$$

Ответ: $d - 1$.

$$\text{б) } \left(\frac{\frac{2}{b^{\frac{2}{3}}} - 1}{\frac{2}{b^{\frac{2}{3}}} - b^{\frac{2}{3}}} + b^{-\frac{2}{3}} \right)^{-1} : \frac{1 - \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Ответ: $\frac{b}{1 - b}$.

Упростите выражение и найдите его значение при заданном значении переменной (1.185 – 1.189):

№ 1.185.

$$\text{а) } \left(1 - d^{-\frac{1}{4}} \right) \left(d^{\frac{1}{2}} + d^{\frac{1}{4}} \right) \left(d^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \text{ при } d = 3.$$

Ответ: $d - 1 = 2$.

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & b = 7. \left(b^{\frac{1}{4}} - 1 \right) \left(b^{-\frac{1}{4}} + 1 \right) \left(b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{3}{4}} \right) = \left(b^{\frac{1}{4}} - 1 \right) \left(1 + b^{\frac{1}{4}} \right) \left(1 + b^{\frac{1}{2}} \right) = \\
 & = \left(b^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \left(b^{\frac{1}{2}} + 1 \right) = b - 1 = 6.
 \end{aligned}$$

Ответ: $b - 1 = 6$.

№ 1.186.

$$\begin{aligned} \text{а) } a = 5. \left(a + a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} \right) \left(1 - a^{-\frac{1}{3}} \right) &= \left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + 1 \right) a^{\frac{1}{3}} \left(1 - a^{-\frac{1}{3}} \right) = \\ &= \left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + 1 \right) \left(a^{\frac{1}{3}} - 1 \right) = a - 1 = 4. \end{aligned}$$

Ответ: $a - 1 = 4$.

$$\text{б) } \left(c^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{1}{3}} \right) \left(c^{\frac{1}{3}} - 1 + c^{-\frac{1}{3}} \right) \text{ при } c = 3.$$

Ответ: $c + 1 = 4$.

№ 1.187.

$$\begin{aligned} \text{а) } m = 4. \left(1 - m^{-\frac{1}{3}} + m^{-\frac{2}{3}} \right) \left(m + m^{\frac{2}{3}} \right) &= \left(1 - m^{-\frac{1}{3}} + m^{-\frac{2}{3}} \right) m^{\frac{2}{3}} \left(m^{\frac{1}{3}} + 1 \right) = \\ &= \left(m^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{1}{3}} + 1 \right) \left(m^{\frac{1}{3}} + 1 \right) = m + 1 = 5. \end{aligned}$$

Ответ: $m + 1 = 5$.

$$\text{б) } \left(p^{\frac{2}{3}} + p + p^{\frac{4}{3}} \right) \left(p^{-\frac{1}{3}} - p^{-\frac{2}{3}} \right) \text{ при } p = 6.$$

Ответ: $p - 1 = 5$.

№ 1.188.

$$\text{а) } \left(\frac{c^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{3}{4}}}{1 - c^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} - c^{-\frac{1}{4}} \text{ при } c = 1,6 \cdot 10^{-3}.$$

Ответ: $c^{-\frac{1}{2}} = 25$.

$$\text{б) } c = 2,7 \cdot 10^{-2}. \left(\frac{a^{\frac{1}{3}} + a}{a^{\frac{4}{3}} - 1} \right)^{-1} + a^{-\frac{1}{3}} = \frac{\left(a^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \left(a^{\frac{2}{3}} + 1 \right)}{a^{\frac{1}{3}} \left(1 + a^{\frac{2}{3}} \right)} + \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{a^{\frac{2}{3}} - 1 + 1}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0,027} = 0,3.$$

Ответ: $a^{\frac{1}{3}} = 0,3$.

№ 1.189.

$$\begin{aligned} \text{а) } a &= 3^{\frac{1}{3}}. \quad a^{-\frac{1}{2}} + \frac{a^{-\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{a + a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{-\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{2}} \left(a + a^{\frac{1}{2}} \right)} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{1 - a}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} + 1 \right)} = \\ &= \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{\left(1 - a^{\frac{1}{2}} \right) \left(1 + a^{\frac{1}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{2}} \left(1 + a^{\frac{1}{2}} \right)} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{1 - a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} = 0,3. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{a} = 0,3$.

$$\text{б) } b^{-\frac{3}{2}} - \frac{b^{-1} - 1}{b^{\frac{1}{2}} - b} \quad \text{при } b = 2\frac{6}{7}.$$

Ответ: $-\frac{1}{b} = -0,35$.

Докажите, что многочлен не может принимать отрицательных значений ни при каких значениях переменной (1.190 – 1.191):

№ 1.190.

$$\text{а) } 4x^2 + 1 - 4x = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 \geq 0.$$

$$\text{б) } 1 + 9x^2 - 6x = 1 - 6x + 9x^2 = (1 - 3x)^2 \geq 0.$$

№ 1.191.

$$\text{а) } 25x^4 - 30x^3 + 9x^2 = x^2(25x^2 - 30x + 9) = x^2(5x - 3)^2 \geq 0.$$

$$\text{б) } 4x^2 - 28x^3 + 49x^4 = x^2(4 - 28x + 49x^2) = x^2(2 - 7x)^2 \geq 0.$$

Докажите, что значение выражения не зависит от значений входящих в него букв (1.192 – 1.193):

№ 1.192.

$$\begin{aligned} \text{а) } a(a - b)(a + b) - (a + b)(a^2 - ab + b^2) + b^3 + ab^2 &= a(a^2 - b^2) + ab^2 - \\ - (a^3 + b^3) + b^3 &= a^3 - ab^2 + ab^2 - a^3 - b^3 + b^3 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & (c-d)(c^2+cd+d^2)+d(c-d)^2-(c^2-cd)(c+2d)=c^3-d^3+(c-d) \cdot \\ & \cdot (d(c-d)-c(c+2d))=c^3-d^3+(c-d)(cd-d^2-c^2-2cd)=c^3-d^3- \\ & -(c-d)(c^2+cd+d^2)=c^3-d^3-c^3+d^3=0. \end{aligned}$$

№ 1.193.

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & 2(d+c)(2d-c)-(3c-d)^2+2(5c+2d)(c-d)+d^2=4d^2-c^2- \\ & -(9c^2-6cd+d^2)+2(5c^2+2cd-5cd-2d^2)+d^2=4d^2-c^2-9c^2+6cd-d^2+ \\ & +10c^2-6cd-4d^2+d^2=0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & 14ab+(2a+b)^2-(4b+a)(5a-2b)+(a-3b)(a+3b)=14ab+4a^2+ \\ & +4ab+b^2-(20ab+5a^2-8b^2-2ab)+a^2-9b^2=4a^2+18ab+b^2-5a^2- \\ & -18ab+8b^2+a^2-9b^2=0. \end{aligned}$$

№ 1.194.

а) Вычислите $x:y$, если $(2x):(3y)=5:6$.

$$\frac{2x}{3y} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

Ответ: $x:y=1,25$.

б) Вычислите $a:b$, если $(5a):(2b)=3:4$.

Ответ: $a:b=0,3$.

№ 1.195.

а) Вычислите $(x+2y-z):(2x+3z)$, если $x:y:z=1:3:5$. Из

пропорции следует, что $y=3x$ и $z=5x$. Получаем $\frac{x+2y-z}{2x-3z} =$

$$= \frac{x+6x-5x}{2x+15x} = \frac{2}{17}.$$

Ответ: $\frac{2}{17}$.

б) Вычислите $(2y-z):(3x+y+z)$, если $x:y:z=2:3:4$. Из пропорции следует, что неизвестные x, y, z можно представить в виде $x=2a$, $y=3a$ и $z=4a$, где a — любое не равное нулю число.

$$\frac{2y-z}{3x+y+z} = \frac{6a-4a}{6a+3a+4a} = \frac{2}{13}.$$

Ответ: $\frac{2}{13}$.

№ 1.196.

а) Вычислите $\frac{x^2 + 2xy}{2xy - y^2}$, если $x : y = 3 : 2$.

Ответ: $\left\{-\frac{3}{8}\right\}$.

б) Вычислите $\frac{x^2 - xy + y^2}{2x^2 + y^2}$, если $x : y = 2 : 5$.

Пусть $x = 2a$ и $y = 5a$, ($a \neq 0$).

$$\frac{x^2 - xy + y^2}{2x^2 + y^2} = \frac{4a^2 - 10a^2 + 25a^2}{8a^2 + 25a^2} = \frac{19}{33}.$$

Ответ: $\left\{\frac{19}{33}\right\}$.

Найдите все целые m , при которых значение данной дроби является целым числом (1.197 – 1.198):

№ 1.197.

а) $\frac{1}{4 + 5m}$. Значение дроби будет целым числом тогда и только тогда, когда знаменатель будет равен 1 или -1 . Отсюда $m = -1$ и $m = -\frac{3}{5}$.

Ответ: $m = -1$.

б) $\frac{1}{3m + 8}$.

Ответ: $m = -3$.

№ 1.198.

а) $\frac{m + 2}{4 - m^2}$.

Ответ: $m = 1$ или $m = 3$.

б) $\frac{5 - m}{m^2 - 25} = \frac{5 - m}{(m + 5)(m - 5)}$. Дробь будет целым числом при

($m + 5 = \pm 1$. Отсюда $m = -4$ и $m = -6$).

Ответ: $m = -4$ или $m = -6$.

Докажите, что при всех положительных значениях переменной выполняется неравенство:

№ 1.199.

а) $a^{\frac{1}{2}} + 4a^3\sqrt{a} \geq 4a^2$ ($a > 0$). Представим неравенство в виде $4a^3a^{\frac{1}{2}} - 4a^2 + a^{\frac{1}{2}} \geq 0$. Исследуем выражение: $4a^3a^{\frac{1}{2}} - 4a^2 + a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left(4a^3 - 4a^{\frac{3}{2}} + 1\right) = a^{\frac{1}{2}}\left(2a^{\frac{3}{2}} - 1\right)^2 \geq 0$. Последнее очевидно, т.к. произведение неотрицательных чисел неотрицательно. Отсюда $4a^3a^{\frac{1}{2}} - 4a^2 + a^{\frac{1}{2}} \geq 0$. Что и требовалось доказать.

б) $9b^{\frac{9}{2}} + b\sqrt{b} \geq 6b^3 \Leftrightarrow 9b^{\frac{9}{2}} - 6b^3 + b^{\frac{3}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow b^{\frac{3}{2}}\left(9b^{\frac{6}{2}} - 6b^{\frac{3}{2}} + 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow b^{\frac{3}{2}}\left(3b^{\frac{3}{2}} - 1\right) \geq 0$. ($b > 0$). Последнее неравенство очевидно, следовательно, верно и исходное неравенство.

**УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА,
СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ**

Решите уравнение (1.201 – 1.210):

№ 1.201.

а) $\frac{x}{x-4} - \frac{1}{x+1} = \frac{2-x}{x+1} + \frac{3}{x-4};$

Ответ: $\left\{3; \frac{3}{2}\right\}.$

б) $\frac{2}{2x-1} + \frac{3}{x-3} = \frac{x+1}{x-3} + \frac{x}{2x-1};$ ОДЗ: $x \neq \frac{1}{2}; x \neq 3.$

$$\frac{2-x}{2x-1} + \frac{3-x-1}{x-3} = 0 \Leftrightarrow \frac{(2-x)(x-3) + (2-x)(2x-1)}{(2x-1)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2-x)(x-3+2x-1)}{(2x-1)(x-3)} = 0 \Rightarrow (2-x)(3x-4) = 0.$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\left\{2; \frac{4}{3}\right\}.$

№ 1.202.

а) $\frac{4x-6}{x+2} - \frac{x}{x+1} = \frac{9}{(x+1)(x+2)};$ ОДЗ: $x \neq -1; x \neq -2.$

$$\frac{(4x-6)(x+1) - x(x+2)}{(x+2)(x+1)} - \frac{9}{(x+1)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 6x + 4x - 6 - x^2 - 2x - 9}{(x+2)(x+1)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x - 15 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 3 \cdot 15}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{4 \pm 14}{6};$$

$$x_1 = -\frac{5}{3}; \quad x_2 = 3.$$

Ответ: $\left\{-\frac{5}{3}; 3\right\}.$

б) $\frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{(x-1)(x+3)};$

Ответ: $\left\{-2; \frac{1}{2}\right\}.$

№ 1.203.

а) $\frac{5}{2x+3} + \frac{3-2x}{x+2} = 10$; $\Delta 3: x \neq -\frac{3}{2}; x \neq -2$.

$$\frac{5(x+2) + (3-2x)(3+2x) - 10(2x+3)(x+2)}{(2x+3)(x+2)} = 0 \Rightarrow$$

$$5x + 10 + 9 - 4x^2 - 10(2x^2 + 3x + 4x + 6) = 0.$$

$$5x + 19 - 4x^2 - 20x^2 - 70x - 60 = 0$$

$$24x^2 + 65x + 41 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-65 \pm \sqrt{65^2 - 4 \cdot 24 \cdot 41}}{48} = \frac{-65 \pm \sqrt{4225 - 3936}}{48} = \frac{-65 \pm 17}{48};$$

$$x_1 = -1; x_2 = -\frac{41}{24}.$$

Ответ: $\left\{-1; -\frac{41}{24}\right\}$.

б) $\frac{x-3}{x} + \frac{x+5}{x-3} = 3$;

Ответ: $\{-1; 9\}$.

№ 1.204.

а) $\frac{3x-1}{7} - \frac{2x+1}{2} = \frac{x}{14} - 1$;

Ответ: $\left\{\frac{5}{9}\right\}$.

б) $\frac{2x-1}{5} - \frac{x}{15} = \frac{3x+1}{3} + 1 \Leftrightarrow 3(2x-1) - x = 5(3x+1) + 15 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 6x - 3 - x - 15x - 5 - 15 = 0 \Leftrightarrow -10x - 23 = 0 \Rightarrow x = -\frac{23}{10} = -2,3.$$

Ответ: $\{-2,3\}$.

№ 1.205.

а) $(3x+1)^2 + (4x-1)^2 = (5x-2)^2 \Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 + 16x^2 - 8x + 1 =$
 $= 25x^2 - 20x + 4 \Leftrightarrow 18x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{9}.$

Ответ: $\left\{\frac{1}{9}\right\}$.

б) $(5x-1)^2 + (12x+1)^2 = (13x-1)^2$;

Ответ: $\left\{-\frac{1}{40}\right\}$.

№ 1.206.

а) $(x-1)\left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) = 0;$

Ответ: $\{-1; 1\}$.

б) $x\left(1 + \frac{5}{x-2} + \frac{1}{(x+1)(x-2)}\right) = 0;$ ОДЗ: $x \neq -1; x \neq 2$

$$\frac{x((x+1)(x-2)+5(x+1)+1)}{(x+1)(x-2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x^2+x-2x-2+5x+5+1)}{(x+1)(x-2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^2+4x+4) = 0 \Leftrightarrow x(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -2.$$

Ответ: $\{0; -2\}$.

№ 1.207.

а) $\frac{1}{x^2+2x+4} + \frac{1}{x-2} = \frac{x^2-2x+4}{x^3-8};$ ОДЗ: $x \neq 2$.

$$\frac{x-2+x^2+2x+4}{(x-2)(x^2+2x+4)} - \frac{x^2-2x+4}{x^3-8} = 0 \Leftrightarrow \frac{5x-2}{x^3-8} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}.$$

Ответ: $\left\{\frac{2}{5}\right\}$.

б) $\frac{x^2+3x+9}{x^3+27} - \frac{1}{x+3} = \frac{2}{x^2-3x+9};$

Ответ: $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

№ 1.208.

а) $\frac{2(x^2-2x+7)}{4x^2-25} = \frac{1-7x}{(5-2x)(2x+5)};$

Ответ: $\{3\}$.

б) $\frac{3(x-1)^2}{(2-3x)(3x+2)} = \frac{3x^2-7x+3}{9x^2-4};$ ОДЗ: $x \neq \pm \frac{2}{3}$.

$$\frac{3x^2-6x+3}{4-9x^2} + \frac{3x^2-7x+3}{4-9x^2} = 0 \Rightarrow 6x^2-13x+6=0.$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169-4 \cdot 36}}{12} = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{12} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12};$$

$$x_1 = \frac{3}{2}; x_2 = \frac{2}{3} \text{ — не подходит по ОДЗ.}$$

Ответ: $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

№ 1.209.

а) $\frac{x^2 - 4x - 8}{5x - x^2} = \frac{x^2 - 3x - 7}{x(x-5)}$; ОДЗ: $x \neq 0$; $x \neq 5$.

$$\frac{x^2 - 4x - 8}{5x - x^2} + \frac{x^2 - 3x - 7}{5x - x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 7x - 15}{5x - x^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 15 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \frac{7 \pm 13}{4};$$

$x_1 = 5$ — не подходит по ОДЗ

$$x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

б) $\frac{x^2 + 2x - 4}{x^2 - 16} = \frac{2x^2 + 9x}{(4-x)(x+4)}$;

Ответ: $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

№ 1.210.

а) $\frac{x^2 - 4}{x^3 - 27} = \frac{1 - 2x}{27 - x^3}$;

Ответ: $\{-1\}$.

б) $\frac{4x + 3}{x^3 + 8} = \frac{x - 2x^2 + 5}{8 + x^3}$; ОДЗ: $x \neq -2$

$$\frac{4x + 3 - x + 2x^2 - 5}{x^3 + 8} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4};$$

$x_1 = -2$ — не подходит по ОДЗ.

$$x_2 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

№ 1.211. Найдите все неотрицательные решения уравнения:

а) $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-3} = x$; ($x \geq 0$).

Ответ: $\{0; 2 + \sqrt{5}\}$.

$$\text{б)} \quad \frac{x^2}{2x-1} - x = \frac{6x}{x-5}; \quad \text{ОДЗ: } x \neq \frac{1}{2}; x \neq 5$$

$$x \left(\frac{x}{2x-1} - \frac{6}{x-5} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \frac{x^2 - 5x - 12x + 6 - (2x-1)(x-5)}{(2x-1)(x-5)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \frac{x^2 - 17x + 6 - 2x^2 + 11x - 5}{(2x-1)(x-5)} = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 + 6x - 1) = 0.$$

$$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9+1} = -3 \pm \sqrt{10};$$

$$x_2 = -3 + \sqrt{10} > 0,$$

$$x_3 = -3 - \sqrt{10} < 0.$$

$$\text{Ответ: } \{0; -3 + \sqrt{10}\}.$$

№ 1.212. Найдите все положительные решения уравнения:

$$\text{а)} \quad \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2-x-4} - \frac{x}{x^2-x-4} = 0; \quad \text{ОДЗ: } x \neq -1;$$

$$x^2 - x - 4 \neq 0.$$

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-1}{x^2-x-4} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2-x-4+x+1)}{(x+1)(x^2-x-4)} = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2-3) = 0$$

$$x_1 = 1,$$

$$x_2 = -\sqrt{3},$$

$$x_3 = \sqrt{3}.$$

$$\text{Ответ: } \{1; \sqrt{3}\}.$$

$$\text{б)} \quad \frac{x+2}{2x-1} - \frac{4}{2x-1} = -\frac{x}{x^2-2x-6} + \frac{2}{x^2-2x-6}; \quad (x > 0).$$

$$\text{Ответ: } \{2; \sqrt{7}\}.$$

№ 1.213. Найдите все решения уравнения, принадлежащие отрезку $[-0,5; 2]$:

$$\text{а)} \quad \frac{7}{x+2} + \frac{2}{x-1} = \frac{2}{x+1} + \frac{7}{x-2};$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

$$\text{б)} \quad \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{2x}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x^2}; \quad \text{ОДЗ: } x \neq 0; x \neq -1.$$

$$\frac{2x+2}{(x+1)^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{2x}{(x+1)^2} - \frac{x+1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - (x+1)^2}{x^2(x+1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0.$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2};$$

Очевидно, $1 + \sqrt{2} > 2$, т.к. $\sqrt{2} > 1$. Далее представим $x = 1 - \sqrt{2}$ в

$$\text{виде } x = \frac{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})} = -\frac{1}{(1 + \sqrt{2})} > -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \{1 - \sqrt{2}\}.$$

Найдите все x , при которых значения выражений равны, и если таких x больше одного, то укажите среди них наибольшее по абсолютной величине (1.214 – 1.215):

№ 1.214.

$$\text{а) } \frac{2x+3}{3-5x-2x^2} = \frac{4+x}{9-x^2}; \quad \text{ОДЗ: } |x| \neq 3; \quad 3-5x-2x^2 \neq 0.$$

$$\frac{2x+3}{(x+3)(1-2x)} + \frac{4+x}{(x+3)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+3)(x-3) + (x+4)(1-2x)}{(x+3)(x-3)(1-2x)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 6x - 9 - 2x^2 - 8x + x + 4 = 0 \Leftrightarrow -10x - 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

$$\text{б) } \frac{x+1}{x^2+4x+4} \text{ и } \frac{3x+1}{3x^2+4x-4};$$

$$\text{Ответ: } \left\{-\frac{2}{3}\right\}.$$

№ 1.215.

$$\text{а) } \frac{x^2+2x+4}{x+20} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-2}; \quad \text{ОДЗ: } x \neq -20; \quad x \neq 2$$

$$(x-2)(x^2+2x+4) = (x^2-1)(x+20) \Leftrightarrow x^3 - 8 = x^3 - x + 20x^2 - 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20x^2 - x - 12 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 20 \cdot 12}}{40} = \frac{1 \pm 31}{40}.$$

$$x_1 = -\frac{3}{4};$$

$$x_2 = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{-\frac{3}{4}; \frac{4}{5}\right\}, \quad \frac{4}{5}.$$

$$\text{б) } \frac{x-9}{x^2+x+1} \text{ и } \frac{x-1}{(x+2)^2};$$

$$\text{Ответ: } \left\{-5; -\frac{7}{5}\right\}, -5.$$

Решите уравнение (1.216 – 1.217):

№ 1.216.

$$\text{а) } (1-2x)(4x^2+2x+1) = (2-2x)(4+4x)(x+2);$$

$$\text{Ответ: } \left\{-\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right\}.$$

б)

$$\begin{aligned} (8x-16)(x^2-1) &= (4x^2-2x+1)(2x+1) \Leftrightarrow 8x^3-16x^2-8x+16 = 8x^3+1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 16x^2+8x-15 &= 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+16 \cdot 15}}{16} = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{16} = \frac{-4 \pm 16}{16}. \end{aligned}$$

$$x_1 = -\frac{5}{4};$$

$$x_2 = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{-\frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right\}.$$

№ 1.217.

$$\begin{aligned} \text{а) } 8x - (2+x^2)(2-x^2) &= (x^2-2x)^2 + 4x^3 \Leftrightarrow 8x-4+x^4 = x^4-4x^3+ \\ + 4x^2+4x^3 &\Leftrightarrow 4x^2-8x+4 = 0 \Leftrightarrow (x-1) = 0 \Rightarrow x = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \{1\}.$$

$$\text{б) } (1+x^2)^2 + 12x = (x^2-3x)(x^2+3x);$$

$$\text{Ответ: } \left\{-\frac{1}{11}; -1\right\}.$$

Решите уравнение и сравните каждый его корень с данным числом p (1.218 – 1.219):

№ 1.218.

$$\begin{aligned} \text{а) } p = \frac{1}{2}; (2x-3)(2x+3) - (x+6)(1-2x) &= 3x(2x-7) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2-9 - (x-2x^2+6-12x) - 3x(2x-7) &= 0 \Leftrightarrow 4x^2-9+2x^2+11x-6- \\ - 6x^2+21x &= 0 \Leftrightarrow 32x-15 = 0. \end{aligned}$$

$$x = \frac{15}{32} < \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{15}{32} < p$.

б) $(x+4)(3x-2) - (3x-1)(3x+1) = 2x(11-3x); \quad p = -0,5;$

Ответ: $x = -\frac{7}{12} < p$.

№ 1.219.

а) $\frac{(x+1)x}{3} - \left(\frac{x}{4} - 1\right)(2+x) = -\frac{x}{3} \cdot \frac{9-x}{4}; \quad p = -1\frac{1}{3};$

Ответ: $x = -\frac{24}{19} > p$.

б) $p = 2\frac{1}{3}; \quad \frac{x^2+9x}{6} + \left(\frac{x}{2} + 1\right)\left(2 - \frac{x}{5}\right) = \frac{(1+x)^2}{15} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{6} - \frac{3x}{2} + x + 2 - \frac{x^2}{10} - \frac{x}{5} = \frac{1}{15} + \frac{2x}{15} + \frac{x^2}{15} \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^2}{10} - \frac{x^2}{15}\right) - \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{5} + \frac{2x}{15}\right) +$$

$$+ 2 - \frac{1}{15} = 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2 - 3x^2 - 2x^2}{30} - \frac{15x + 6x + 4x}{30} + \frac{29}{15} = 0 \Leftrightarrow -25x + 58 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{58}{25} = 2\frac{8}{25} < 2\frac{8}{24} = 2\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = 2\frac{8}{25} < p$.

Решите уравнение указанным способом (1.220 – 1.225):

№ 1.220.

а) $4(x^2 - x)^2 + 9(x^2 - x) + 2 = 0$, замена переменной; Пусть $x^2 - x = t$. Тогда получаем уравнение $4t^2 + 9t + 2 = 0$.

$$t_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 32}}{8} = \frac{-9 \pm 7}{8}.$$

$$t_1 = -2; \quad t_2 = -\frac{1}{4}$$

$$x^2 - x = -2 \quad x^2 - x = -\frac{1}{4}$$

$$x^2 - x + 2 = 0 \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

$$D = 1 - 8 = -7 < 0 \quad x = \frac{1}{2}.$$

Нет решений.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

б) $(2x^2 - x + 1)^2 - 2(2x^2 - x + 1) + 1 = 0$, замена переменной.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}; 0\right\}$.

№ 1.221.

а) $2 \cdot \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2 - 7 \cdot \frac{x+3}{x-1} + 5 = 0$, замена переменной.

Ответ: $\left\{\frac{11}{3}\right\}$.

б) $5 \cdot \left(\frac{2+x}{1-x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2+x}{1-x} - 3 = 0$, замена переменной.

Пусть $\frac{2+x}{1-x} = t$. Тогда $5t^2 + 2t - 3 = 0$.

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+15}}{5} = \frac{-1 \pm 4}{5}, \quad t_1 = -1; \quad t_2 = \frac{3}{5}.$$

$$t_1 = -1;$$

$$t_2 = \frac{3}{5}$$

$$\frac{2+x}{1-x} = -1$$

$$\frac{2+x}{1-x} = \frac{3}{5}$$

$$2+x = -1+x$$

$$10+5x = 3-3x$$

Нет решений ($x \in \emptyset$)

$$x = -\frac{7}{8}$$

Ответ: $\left\{-\frac{7}{8}\right\}$.

№ 1.222.

а) $\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2 - 1 = 0$, разложение на множители.

Ответ: $\{2; -1\}$.

б) $\left(\frac{5x-2}{2x^2}\right)^2 + \frac{2-5x}{2x^2} = 0$, разложение на множители.

$$\frac{5x-2}{2x^2} \cdot \left(\frac{5x-2}{2x^2} - 1\right) = 0; \quad \text{ОДЗ: } x \neq 0.$$

$$\frac{(5x-2)(5x-2-2x^2)}{4x^4} = 0 \Rightarrow 5x-2=0, \quad x_1 = \frac{2}{5}.$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0, \quad x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}.$$

$$x_2 = \frac{1}{2}; \quad x_3 = 2.$$

Ответ: $\left\{\frac{2}{5}; \frac{1}{2}; 2\right\}.$

№ 1.223.

а) $4\left(\frac{x+1}{x^2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{x+1}{x^2} + 1 = 0$, замена переменной.

Пусть $\frac{x+1}{x^2} = t$, тогда $4t^2 + 5t + 1 = 0 \Rightarrow t_1 = -1; \quad t_2 = -\frac{1}{4}$

$$t_1 = -1;$$

$$t_2 = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{x+1}{x^2} = -1$$

$$\frac{x+1}{x^2} = -\frac{1}{4}$$

$$x+1 = -x^2$$

$$4x+4 = -x^2$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$D = 1 - 4 = -3 < 0$$

$$(x+2)^2 = 0$$

Нет решений.

$$x = -2$$

Ответ: $\{-2\}.$

б) $\left(\frac{2-x^2}{x}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2-2}{x} + 1 = 0$, замена переменной.

Ответ: $\{-1; 2\}.$

№ 1.224.

а) $6 \cdot \left(\frac{2x+3}{3x+2}\right)^2 - 13 \cdot \frac{2x+3}{3x+2} + 6 = 0$, замена переменной.

Пусть $\frac{2x+3}{3x+2} = t$, тогда $6t^2 - 13t + 6 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{12} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12}; \quad t_1 = \frac{2}{3}; \quad t_2 = \frac{3}{2}$$

$$t_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2x+3}{3x+2} = \frac{2}{3}$$

$$t_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2x+3}{3x+2} = \frac{3}{2}$$

$$6x+9 = 6x+4$$

$$4x+6 = 9x+6$$

Нет решений.

$$x = 0$$

Ответ: $\{0\}$.

б) $3 \cdot \left(\frac{x+3}{1-3x}\right)^2 + 10 \cdot \frac{x+3}{1-3x} + 3 = 0$, замена переменной.

Ответ: $\left\{\frac{3}{4}\right\}$.

№ 1.225.

а) $4 \cdot \left(2x - \frac{1}{6}\right)^4 + 7 \cdot \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 - 2 = 0$, замена переменной;

Пусть $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 = t$. Очевидно $t \geq 0$. Тогда получаем уравнение

$$4t^2 + 7t - 2 = 0. \text{ Находим его корни:}$$

$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{8} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{-7 \pm 9}{8}.$$

$t_1 = -2$ — не удовлетворяет условию $t \geq 0$.

$$t_2 = \frac{1}{4}. \text{ Отсюда } \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad 2x - \frac{1}{6} = \pm \frac{1}{2}.$$

$$x_1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right\}$.

б) $9 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{5}{6}\right)^4 + 14 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{5}{6}\right)^2 - 8 = 0$, замена переменной.

Ответ: $\left\{-3; -\frac{1}{3}\right\}$.

Решите систему уравнений (1.226 — 1.242):

№ 1.226.

а)
$$\begin{cases} 3x + 4y = -22 \\ 7x - 3y = 35 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3, а второе на 4 и сложим их:

$$\begin{cases} 9x + 12y = -66 \\ 28x - 12y = 140 \end{cases} \Rightarrow 37x = 74, \quad x = 2.$$

Значение y находим, например, из первого уравнения:

$$y = \frac{1}{4}(-22 - 3x) = \frac{1}{4}(-22 - 6) = -7.$$

Ответ: $(2; -7)$.

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - 5y = -21 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases};$$

Ответ: $(-3; 3)$.

№ 1.227.

$$\text{а) } \begin{cases} x + 4y = 1 \\ 4x + y = 8 \end{cases};$$

Ответ: $\left(\frac{31}{15}; -\frac{4}{15}\right)$.

$$\text{б) } \begin{cases} -3x + y = 2 \\ x - 3y = 1 \end{cases};$$

Умножим первое уравнение на 3 и сложим его со вторым:

$$\begin{cases} -9x + 3y = 6 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow -8x = 7, \quad x = -\frac{7}{8}, \quad y = 2 + 3x = 2 + 3 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) = -\frac{5}{8}.$$

Ответ: $\left(-\frac{7}{8}; -\frac{5}{8}\right)$.

№ 1.228.

$$\text{а) } \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 7x + y = 1 \end{cases} \cdot 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 21y = 49 \\ 7x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow 20y = 48, \quad y = \frac{12}{5}.$$

$$x = 7 - 3y = 7 - 3 \cdot \frac{12}{5} = -\frac{1}{5}.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{5}; \frac{12}{5}\right)$.

$$\text{б) } \begin{cases} -3x + 9y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases};$$

Ответ: $\left(\frac{25}{3}; -\frac{8}{3}\right)$.

№ 1.229.

$$\text{а) } \begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases};$$

Ответ: $\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

$$6) \begin{cases} x - 5y + 2 = 0 \\ -2x + y - 1 = 0 \end{cases} \cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 10y + 4 = 0 \\ -2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow -9y + 3 = 0, \quad y = \frac{1}{3}.$$

$$x = 5y - 2 = \frac{5}{3} - 2 = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

№ 1.230.

$$a) \begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 7x + 4y = 2 \end{cases} \cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4y = 24 \\ 7x + 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow 13x = 26, \quad x = 2.$$

$$y = \frac{1}{4}(2 - 7x) = -3.$$

Ответ: $(2; -3)$.

$$6) \begin{cases} 5x + 9y = 3 \\ -4x + 3y = 18 \end{cases};$$

Ответ: $(-3; 2)$.

№ 1.231.

$$a) \begin{cases} \frac{x - 2y}{3} + \frac{2x + y}{6} = 1 \\ \frac{-x + 2y}{6} + \frac{2x + y}{2} = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Обозначим $x - 2y = 6u$ и $2x + y = 6v$. Получим систему

$$\begin{cases} 2u + v = 1 \\ -u + 3v = \frac{2}{3} \end{cases}. \text{ Выразим из первого уравнения } v = 1 - 2u \text{ и подставим}$$

$$\text{во второе: } -u + 3(1 - 2u) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow -7u + 3 = \frac{2}{3}, \quad u = \frac{1}{3}, \quad v = 1 - 2u = \frac{1}{3}.$$

Переходя к замене, получаем систему: $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 7x + y = 2 \end{cases}$

Из нее находим $x = \frac{6}{5}$ и $y = -\frac{2}{5}$.

Ответ: $\left(\frac{6}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

$$6) \begin{cases} \frac{x + 3y}{4} - \frac{4x - 2y}{3} = -1\frac{1}{6} \\ \frac{x + 3y}{6} + \frac{2x - y}{4} = \frac{7}{12} \end{cases};$$

Ответ: $\left(\frac{23}{25}; -\frac{3}{25}\right)$.

№ 1.232.

а) $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ x^2 + 3xy + 9 = 0 \end{cases};$

Ответ: $\left\{(3; -2), \left(\frac{6}{5}; -\frac{29}{10}\right)\right\}$.

б) $\begin{cases} 3y + x + 1 = 0 \\ 2x^2 - xy - y = 35 \end{cases}$. Выразим из первого уравнения

$y = -\frac{1}{3}(x+1)$ и подставим во второе: $2x^2 + \frac{1}{3}(x+1)^2 = 35 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x^2 + 2x^2 + 2x + 1 = 105 \Leftrightarrow 7x^2 + 2x - 104 = 0$.

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 7 \cdot 104}}{7} = \frac{-1 \pm \sqrt{729}}{7} = \frac{-1 \pm 27}{7}$.

$x_1 = -4$, $x_2 = \frac{26}{7}$.

$y_1 = -\frac{1}{3}(-4+1) = 1$; $y_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{26}{7}+1\right) = -\frac{11}{7}$.

Ответ: $\left\{(-4; 1), \left(\frac{26}{7}; -\frac{11}{7}\right)\right\}$.

№ 1.233.

а) $\begin{cases} (x-3)(y+2) = 0 \\ 2x^2 - y + 5x = 0 \end{cases};$

Ответ: $\left\{(3; 27), (-2; -2), \left(-\frac{1}{2}; -2\right)\right\}$.

б) $\begin{cases} (2x+4)(y+5) = 0 \\ xy + y^2 = -1 \end{cases}$. Из первого уравнения находим, что

$y = -5$ и тогда из второго уравнения $-5x + 25 = -1$, $x = \frac{26}{5}$. Либо (из первого уравнения) $x = -2$ и $y^2 - 2y + 1 = 0$, $y = 1$.

Ответ: $\left\{\left(\frac{26}{5}; -5\right), (-2; 1)\right\}$.

№ 1.234.

а) $\begin{cases} (x+1)(2y-1) = 0 \\ 4xy - x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$. Из первого уравнения имеем $x = -1$ или

$$y = \frac{1}{2}.$$

В первом случае второе уравнение сводится к виду $-4y - 1 - 2y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = 0$, $y = -1$.

Во втором случае второе уравнение приобретает вид $2x - x^2 - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \frac{1}{2} = 0$ — нет решений.

Ответ: $(-1; -1)$.

б) $\begin{cases} (2x-5)(y+2) = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 4 \end{cases}$

Ответ: $\{(2; -2), (0; -2)\}$.

№ 1.235.

а) $\begin{cases} \frac{x+5}{y-3} = 0 \\ 2y^2 + x^2 - y = 40 \end{cases}$; ОДЗ: $y \neq 3$.

Решение первого уравнения $x = -5$. Подставляя его во второе уравнение, находим $2y^2 - y + 25 = 40 \Leftrightarrow 2y^2 - y - 15 = 0$.

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{1 \pm 11}{4}.$$

$$y_1 = -\frac{5}{2}; \quad y_2 = 3 \quad \text{— не подходит по ОДЗ.}$$

Ответ: $\left(-5; -\frac{5}{2}\right)$.

б) $\begin{cases} \frac{2y-3}{x+2} = 0 \\ x^2 + xy + 4y^2 = 10 \end{cases}$;

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

№ 1.236.

а) $\begin{cases} \frac{x-y-2}{x-3} = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 2xy = 13 \end{cases}$; ОДЗ: $x \neq 3$.

Из первого уравнения очевидно, что $x = y + 2$. Подставляем его во второе уравнение:

$$2(y+2)^2 + y^2 - 2y(y+2) = 13 \Leftrightarrow 2(y+2)(y+2-y) + y^2 = 13 \Leftrightarrow$$

$$y^2 + 4y + 8 = 13 \Leftrightarrow (y+2)^2 = 9 \Rightarrow$$

$y = -2 \pm 3$. $y_1 = -5$, $x_1 = -5 + 2 = -3$, $y_2 = 1$, $x_2 = 3$ — не подходит по ОДЗ.

Ответ: $(-3; -5)$.

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{x+2y+3}{y-1} = 0 \\ x^2 + 4xy + 5y^2 = 10 \end{cases};$$

Ответ: $(-1; -1)$.

№ 1.237.

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 7y = 1 \\ (3x + 7y)(x - 3y) = 11 \end{cases};$$

Ответ: $(5; -2)$.

$$\text{б) } \begin{cases} 8x - 3y = 1 \\ (x + 2y)(8x - 3y) = 12 \end{cases}$$

Подставим значение $(8x - 3y)$ из первого уравнения во второе. Получим

$$\begin{cases} 8x - 3y = 1 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим $x = 12 - 2y$ и подставим в первое:

$$8(12 - 2y) - 3y = 1 \Leftrightarrow 19y = 95 \quad y = 5.$$

Теперь $x = 12 - 2 \cdot 5 = 2$.

Ответ: $(2; 5)$.

№ 1.238.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{5}{6} \\ (2x - 3y)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = \frac{45}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ (2x - 3y)(3x + 2y) = 135 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5 \cdot (3x + 2y) = 135 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 2y = 27 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 2 \\ + \\ \cdot 3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 10 \\ 9x + 6y = 81 \end{cases} \Rightarrow$$

$$13x = 91, x = 7. \quad 3y = 2x - 5 = 14 - 5 = 9, \quad y = 3.$$

Ответ: $(7; 3)$.

$$6) \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = \frac{1}{2} \\ (6x + 4y)\left(x + \frac{y}{2}\right) = -12 \end{cases};$$

Ответ: $(-8; 15)$.

№ 1.239.

$$a) \begin{cases} (2x + y)^2 - (2x - y)^2 = 16 \\ 3x - y = 1 \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\left(-\frac{2}{3}; -3\right), (1; 2)\right\}$.

$$\begin{aligned} 6) \begin{cases} 4x + y + 1 = 0 \\ (y - x)^2 - (y + x)^2 = 20 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = -1 \\ (y - x + y + x)(y - x - y - x) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = -1 \\ 2y \cdot (-2x) = 20 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - 4x \\ xy = -5 \end{cases} \Rightarrow x(-1 - 4x) = -5 \Rightarrow 4x^2 + x - 5 = 0, \\ x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{5}{4}. & \\ y_1 = -1 - 4 = -5, \quad y_2 = -1 + 5 = 4. & \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{(1; -5), \left(-\frac{5}{4}; 4\right)\right\}$.

№ 1.240.

$$\begin{aligned} a) \begin{cases} xy = 12 \\ 2x + 2y - xy = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 12 \\ 2x + 2y - 12 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 12 \\ x = -y + 7 \end{cases} \Rightarrow \\ (-y + 7)y = 12 &\Leftrightarrow y^2 - 7y + 12 = 0, \end{aligned}$$

$$y_1 = 3, \quad x_1 = \frac{12}{3} = 4;$$

$$y_2 = 4, \quad x_2 = \frac{12}{4} = 3.$$

Ответ: $\{(3; 4), (4; 3)\}$.

$$6) \begin{cases} x + 3xy + y = -19 \\ xy + 6 = 0 \end{cases}.$$

Ответ: $\{(-3; 2), (2; -3)\}$.

№ 1.241.

$$a) \begin{cases} \frac{4}{x-2} + \frac{3}{y+1} = 5 \\ x - 3y = 4 \end{cases}; \quad \text{ОДЗ: } x \neq 2, \quad y \neq -1.$$

Выразим $x = 3y + 4$ и подставим в первое уравнение:

$$\frac{4}{3y+4-2} + \frac{3}{y+1} = 5 \Leftrightarrow \frac{4}{3y+2} + \frac{3}{y+1} - 5 = 0.$$

При $y \neq -\frac{2}{3}$ получаем $4(y+1) + 3(3y+2) - 5(3y+2)(y+1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 13y + 10 - 5(3y^2 + 2y + 3y + 2) = 0 \Leftrightarrow 15y^2 + 12y = 0,$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = -\frac{4}{5}. \quad x_1 = 4 + 3y_1 = 4, \quad x_2 = 4 - 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}.$$

Ответ: $\left\{ (4; 0), \left(\frac{8}{5}; -\frac{4}{5} \right) \right\}.$

б)
$$\begin{cases} 3x + y = -4 \\ \frac{7}{x+2} - \frac{10}{y} = 6; \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ (0; -4), \left(-\frac{29}{18}; \frac{5}{6} \right) \right\}.$

№ 1.242.

а)
$$\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{9}{y} = 7 \\ \frac{x-2}{5} - \frac{2y-1}{10} = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{16}{7}; -\frac{12}{7} \right), (1; -3) \right\}.$

б)
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{11}{y} = 2 \\ \frac{2y+1}{6} + \frac{x+4}{2} = \frac{4}{3} \end{cases}; \text{ ОДЗ: } x \cdot y \neq 0.$$

$$\begin{cases} \frac{y+11x}{xy} = 2 \\ 2y+1+3(x+4)=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+11x=2xy \\ 2y+3x=-5 \end{cases}.$$

Выражаем $y = -\frac{1}{2}(3x+5)$ и подставляем в первое уравнение:

$$-\frac{1}{2}(3x+5) + 11x = -x(3x+5) \Leftrightarrow -3x-5+22x+6x^2+10x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 29x - 5 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-29 \pm \sqrt{841 + 120}}{12} = \frac{-29 \pm \sqrt{961}}{12} = \frac{-29 \pm 31}{12}.$$

$$x_1 = -5, \quad y_1 = -\frac{1}{2}(-3 \cdot 5 + 5) = 5,$$

$$x_2 = \frac{1}{6}, \quad y_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 5\right) = -\frac{11}{4}.$$

Ответ: $\left\{(-5, 5), \left(\frac{1}{6}, -\frac{11}{4}\right)\right\}.$

Найдите все пары $(x; y)$, удовлетворяющие условию (1.243 – 1.244):

№ 1.243.

а) $(10 - 2x - 3y)^2 + (-x + 5y - 8)^2 = 0.$

Ответ: $(2; 2).$

б) $(-3x + 4y - 15)^2 + (2x - y + 5)^2 = 0.$ Сумма двух неотрицательных выражений равна нулю, следовательно, оба слагаемых одновременно равны нулю, то есть составляют систему:

$$\begin{cases} -3x + 4y - 15 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 4y = 15 \\ 2x - y = -5 \end{cases}.$$

Решая ее, находим $x = -1$ и $y = 3.$

Ответ: $(-1; 3).$

№ 1.244.

а) $\left(\frac{-3x + y + 4}{2}\right)^2 + \left(\frac{x + 3y - 1}{5}\right)^2 = 0.$

Так как оба квадрата неотрицательны, а их сумма равна нулю, то они одновременно равны нулю:

$$\begin{cases} -3x + y + 4 = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y = -4 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \cdot 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y = -4 \\ 3x + 9y = 3 \end{cases} \Rightarrow 10y = -1,$$

$$y = -\frac{1}{10}. \quad x = 1 - 3y = \frac{13}{10}.$$

Ответ: $\left(\frac{13}{10}; -\frac{1}{10}\right).$

б) $\left(\frac{x + 2y - 1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2x - y - 5}{4}\right)^2 = 0;$

Ответ: $\left(\frac{11}{5}; -\frac{3}{5}\right).$

Решите неравенство (1.245 – 1.263):

№ 1.245.

а) $2\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{2-x}{6} > \frac{3x-2}{2}.$

Умножим неравенство на 6:

$$12x - 4 + 2 - x > 9x - 6 \Leftrightarrow 2x > -4, \quad x > -2.$$

Ответ: $(-2; +\infty).$

б) $\frac{x+4}{5} - \frac{3x-1}{2} \leq 2(x-1);$

Ответ: $[1; +\infty).$

№ 1.246.

а) $\frac{3x+7}{8} - \frac{2x+1}{3} \geq \frac{1+x}{2};$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{19}\right].$

б) $\frac{4-5x}{3} < \frac{7x+1}{12} - 2x \Leftrightarrow 4 \cdot (4-5x) < 7x+1-24x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 16 - 20x < 1 - 17x \Leftrightarrow 15 < 3x, \quad x > 5.$$

Ответ: $(5; +\infty).$

№ 1.247.

а) $0,2x - \frac{x}{4} \leq \frac{1}{3} \cdot 0,2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0,2x - 0,2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \leq 0 \Leftrightarrow$

$$0,2\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right) \leq 0 \Leftrightarrow -0,05\left(x - \frac{1}{3}\right) \leq 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{3} \geq 0, \quad x \geq \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right).$

б) $0,3x - \frac{x}{3} > \frac{1}{2} \cdot 0,3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}.$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right).$

№ 1.248.

а) $\left(0,7 - \frac{3}{4}\right)x > (-20)^{-1};$

Ответ: $(-\infty; 1).$

б) $\left(0,3 - \frac{2}{5}\right)x \leq (-10)^{-1}.$ Умножим неравенство на отрицательное

№ 1.252.

$$\text{a) } -2x^2 + 9x + 5 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 9x - 5 < 0 \Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 5) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 5.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{1}{2}; 5\right).$$

$$\text{б) } 3x^2 - 8x + 4 > 0.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty).$$

№ 1.253.

$$\text{a) } 15x^2 + 8x + 1 \geq 0.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{5}; +\infty\right).$$

$$\text{б) } -12x^2 + 17x - 6 > 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 17x + 6 < 0 \Leftrightarrow 12\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} < x < \frac{3}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right).$$

$$\text{№ 1.254. а) } (5x - 8)(5 - 3x) > 0.$$

$$\text{Методом интервалов находим } \frac{8}{5} < x < \frac{5}{3} \left(\frac{8}{5} < \frac{5}{3}, \text{ т.к. } 24 < 25 \right).$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{8}{5}; \frac{5}{3}\right).$$

$$\text{б) } (5x + 6)(-7 - 6x) \leq 0;$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{6}{5}\right) \cup \left(-\frac{7}{6}; +\infty\right).$$

№ 1.255.

$$\text{а) } \left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{1993}{1994}\right) < 0.$$

$$\text{Заметим, что } \frac{3}{4} < \frac{1993}{1994}, \text{ т.к. } \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}, \text{ а } \frac{1993}{1994} = 1 - \frac{1}{1994}.$$

$$\text{Поэтому по методу интервалов } \frac{3}{4} < x < \frac{1993}{1994}.$$

Ответ: $\left(\frac{3}{4}; \frac{1993}{1994}\right)$.

б) $\left(x + \frac{5}{4}\right)\left(x + \frac{1995}{1994}\right) < 0$;

Ответ: $\left(-\frac{5}{4}; -\frac{1995}{1994}\right)$.

№ 1.256.

а) $(x+2)(2-x) > (x+2)(x+4)$;

Ответ: $(-2; -1)$.

б) $(3-x)(2x+1) \leq (x+3)(3-x) \Leftrightarrow (3-x)(2x+1) - (3-x)(x+3) \leq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (3-x)(2x+1-x-3) \leq 0 \Leftrightarrow (3-x)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-2) \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$
 или $x \geq 3$.

Ответ: $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

№ 1.257.

а) $(4-3x)(3x+4) \geq (2+9x)(x+8) \Leftrightarrow 16-9x^2 \geq 2x+9x^2+16+72x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 18x^2+74x \leq 0 \Rightarrow -\frac{37}{9} \leq x \leq 0$.

Ответ: $\left[-\frac{37}{9}; 0\right]$.

б) $(4x-1)(9-x) > (2x-3)(2x+3)$;

Ответ: $\left(0; \frac{37}{8}\right)$.

№ 1.258.

а) $(2+7x)^2 < (4-3x)^2$;

Ответ: $\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{5}\right)$.

б) $(1-5x)^2 \geq (11+3x)^2 \Leftrightarrow (1-5x)^2 - (11+3x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (1-5x-11-3x)(1-5x+11+3x) \geq 0 \Leftrightarrow -(10+8x)(12-2x) \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (4x+5)(x-6) \geq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{5}{4} \text{ или } x \geq 6$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right] \cup [6; +\infty)$.

№ 1.259.

а) $12-2x^2 \leq 18$;

Ответ: $x \in R$.

число -10 . При этом знак неравенства поменяется и мы получим $-(3-4)x \geq 1, x \geq 1$.

Ответ: $[1; +\infty)$.

№ 1.249.

$$\text{а) } \frac{x+1}{4} - \frac{4x+1}{5} \leq \frac{7-3x}{10} \Leftrightarrow 5(x+1) - 4(4x+1) \leq 2(7-3x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -11x + 1 \leq 14 - 6x, \quad x \geq -\frac{13}{5}.$$

Ответ: $\left[-\frac{13}{5}; +\infty\right)$.

$$\text{б) } \frac{5-2x}{9} \geq \frac{x+2}{15} - \frac{7x-1}{5}.$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

№ 1.250.

$$\text{а) } (4x-7)(x+3) > (2x-5)(5+2x) \Leftrightarrow 4x^2 - 7x + 12x - 21 + (5-2x) \cdot$$

$$(5+2x) > 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 5x - 21 + 25 - 4x^2 > 0 \Leftrightarrow 5x + 4 > 0, \quad x > -\frac{4}{5}.$$

Ответ: $\left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

$$\text{б) } (1-9x)(x+2) \leq (5+3x)(5-3x);$$

Ответ: $\left[-\frac{23}{17}; +\infty\right)$.

№ 1.251.

$$\text{а) } (x-3)(x+3) \geq \left(4 - \frac{1}{2}x\right)(1-2x);$$

Ответ: $\left[\frac{26}{17}; +\infty\right)$.

$$\text{б) } (2+x)(2-x) < (0,5x+1)(2x-3) \Leftrightarrow 4-x^2 < x^2+2x-1,5x-3 \Leftrightarrow$$

$$2x^2+0,5x-7 > 0 \Leftrightarrow 2(x+2)\left(x-\frac{7}{4}\right) > 0.$$

$$x < -2, \quad x > \frac{7}{4}.$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{7}{4}; +\infty\right)$.

б) $12x^2 + 12x + 3 < 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 < 0 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 < 0$ — нет решений.

Ответ: $x \in \emptyset$.

№ 1.260.

а) $16 - 40x + 25x^2 > 0 \Leftrightarrow (4 - 5x)^2 > 0 \Rightarrow x \neq \frac{4}{5}$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

б) $28x \geq 4 + 49x^2$;

Ответ: $\left\{\frac{2}{7}\right\}$.

№ 1.261.

а) $(2x + 7)^2 - (2 + 7x)^2 < 0$;

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

б) $(8 - 3x)^2 - (8x - 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (8 - 3x - 8x + 3)(8 - 3x + 8x - 3) \leq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (11 - 11x)(5 + 5x) \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \text{ или } x \geq 1$.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

№ 1.262.

а) $\left(\frac{2x+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{12-x}{4}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2x+9}{3} - \frac{12-x}{4}\right)\left(\frac{2x+9}{3} + \frac{12-x}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (8x + 36 - 36 + 3x)(8x + 36 + 36 - 3x) > 0 \Leftrightarrow 11x(5x + 72) > 0 \Rightarrow x < -\frac{72}{5}$

или $x > 0$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{72}{5}\right) \cup (0; +\infty)$.

б) $\left(\frac{x-20}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{9x-5}{3}\right)^2$;

Ответ: $\left[-\frac{10}{3}; \frac{10}{3}\right]$.

№ 1.263.

а) $\left(\frac{2x+15}{2}\right)^2 < \left(\frac{5x+24}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{4x+30}{4}\right)^2 - \left(\frac{5x+24}{4}\right)^2 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (4x + 30)^2 - (5x + 24)^2 < 0 \Leftrightarrow (4x + 30 - 5x - 24)(4x + 30 + 5x + 24) < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (6-x)(9x+54) < 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+6) > 0 \Rightarrow x < -6 \text{ или } x > 6.$$

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$.

$$\text{б) } \left(\frac{5x-8}{4}\right)^2 - \left(\frac{3x+4}{2}\right)^2 < 0;$$

Ответ: $(-\infty; -16) \cup (0; +\infty)$.

Найдите область определения функции (1.264 – 1.268):

№ 1.264.

$$\text{а) } y = \frac{\sqrt{7x+1}}{x};$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{7}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

$$\text{б) } y = \frac{x}{\sqrt{5-3x}}; \text{ Функция определена, когда } 5-3x > 0, \text{ т.е. } 3x < 5,$$

$$x < \frac{5}{3}.$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$.

№ 1.265.

$$\text{а) } y = \sqrt{3-5x-2x^2}. \text{ Область определения данной функции } 3-5x-2x^2 \geq 0. \text{ Решая это неравенство, находим: } 2x^2+5x-3 \leq 0; \\ \left(x_1 = -3; x_2 = \frac{1}{2}\right) - 3 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left[-3; \frac{1}{2}\right]$.

$$\text{б) } y = \sqrt{2x^2-9x+9};$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup [3; +\infty)$.

№ 1.266.

$$\text{а) } y = \frac{1+x}{\sqrt{2+3x-5x^2}}. \text{ ОДЗ: } 2+3x-5x^2 > 0.$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-3x-2 < 0 \Rightarrow 5\left(x+\frac{2}{5}\right)(x-1) < 0 \Rightarrow -\frac{2}{5} < x < 1.$$

Ответ: $\left(-\frac{2}{5}; 1\right)$.

б) $y = \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 4x + 1}}$;

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

№ 1.267.

а) $y = \sqrt{1 - (2x + 3)^2}$;

Ответ: $[-2; -1]$.

б) $y = \frac{1}{\sqrt{(1 - 3x)^2 - 4}}$; ОДЗ: $(1 - 3x)^2 - 4 > 0$.

Решаем неравенство

$$(3x - 1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (3x - 1 - 2)(3x - 1 + 2) > 0 \Leftrightarrow 3(x - 1)(3x + 1) > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x < -\frac{1}{3} \text{ или } x > 1.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

№ 1.268.

а) $y = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$. ОДЗ: $x^2 - 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 > 0$. Не-

равенство справедливо при $x \neq 3$.

Ответ: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

б) $y = 5 - \sqrt{10x - 26 - x^2}$;

Ответ: $\{5\}$.

Решите неравенство (1.269 – 1.274):

№ 1.269.

а) $\frac{3 - 2x}{2 + x} > 0$; ОДЗ: $x \neq -2$.

Перепишем неравенство в виде $\frac{2x - 3}{x + 2} < 0$.

Воспользовавшись методом интервалов находим, что неравенство справедливо при $-2 < x < \frac{3}{2}$.

Ответ: $\left(-2; \frac{3}{2}\right)$.

б) $\frac{7-x}{4x+6} < 0$;

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (7; +\infty)$.

№ 1.270.

а) $\frac{2+4x}{x-0,5} \leq 0$;

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

б) $\frac{x-4,5}{9+2x} \geq 0$; ОДЗ: $x \neq -4,5$.

Методом интервалов определяем $x < -4,5$ или $x \geq 4,5$.

Ответ: $(-\infty; -4,5) \cup [4,5; +\infty)$.

№ 1.271.

а) $\frac{7x+3}{x+3} \geq \frac{-x}{2(x+3)}$; ОДЗ: $x \neq -3$.

Приведем дроби к общему знаменателю: $\frac{7x+3}{x+3} + \frac{x}{2(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{14x+6+x}{2(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{15x+6}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5x+2}{x+3} \geq 0.$$

Методом интервалов определяем $x < -3$ или $x \geq -\frac{2}{5}$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup \left[-\frac{2}{5}; +\infty\right)$.

б) $\frac{3}{3x-2} \leq \frac{5x-2}{2(3x-2)}$;

Ответ: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{8}{5}; +\infty\right)$.

№ 1.272.

а) $\frac{4+x}{2x-3} < \frac{5+3x}{3-2x}$; ОДЗ: $x \neq \frac{3}{2}$.

Преобразуем неравенство к виду: $\frac{4+x}{2x-3} + \frac{5+3x}{2x-3} < 0$, приведем

дроби к общему знаменателю: $\frac{9+4x}{2x-3} < 0$ и решим методом интер-

валов: $-\frac{9}{4} < x < \frac{3}{2}$.

Ответ: $\left(-\frac{9}{4}; \frac{3}{2}\right)$.

б) $\frac{3x+7}{x-2} > \frac{x-4}{2-x}$;

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) \cup (2; +\infty)$.

№ 1.273.

а) $\frac{2x+4}{7-5x} > \frac{3-2x}{5x-7}$;

Ответ: $\left(-\infty; \frac{7}{5}\right)$.

б) $\frac{x+7}{3-4x} \leq \frac{1-x}{4x-3}$; ОДЗ: $x \neq \frac{3}{4}$.

Преобразуем неравенство к виду: $\frac{1-x}{4x-3} + \frac{x+7}{4x-3} \geq 0$, приведем

дроби к общему знаменателю: $\frac{8}{4x-3} \geq 0$ и получим $x > \frac{3}{4}$.

Ответ: $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

№ 1.274.

а) $\frac{9}{4+2x} > -3$; ОДЗ: $x \neq -2$.

Далее $\frac{9}{2x+4} + 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{9+6x+12}{2x+4} > 0 \Leftrightarrow \frac{6x+21}{2x+4} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2x+7}{x+2} > 0 \Rightarrow x < -\frac{7}{2}$ или $x > -2$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{7}{2}\right) \cup (-2; +\infty)$.

б) $\frac{5}{x+1} > 2$;

Ответ: $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

Среди решений данного уравнения найдите те, которые удовлетворяют данному неравенству (1.275 – 1.278):

№ 1.275.

$$a) \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = 2, \quad x^2 + 5x - 6 < 0.$$

Условие задачи можно переписать в виде системы:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = 2 \\ x^2 + 5x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1+2x}{x(x+1)} - 2 = 0 \\ (x-1)(x+6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+1-2x(x+1)}{x(x+1)} = 0 \\ (x-1)(x+6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + x + 1 = 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ -6 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \\ -6 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$$

$$b) \frac{3}{x+1} + \frac{4}{x} + 2 = 0, \quad -x^2 - 2x + 8 > 0.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$$

№ 1.276.

$$a) (x+3)^2 + (x+1)^2 = 20, \quad (3x+1)(x-2) \geq 0.$$

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (x+1)^2 = 20 \\ (3x+1)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 9 + x^2 + 2x + 1 - 20 = 0 \\ (3x+1)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 5 = 0 \\ x \leq -\frac{1}{3} \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \\ x \leq -\frac{1}{3} \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x = -5.$$

$$\text{Ответ: } \{-5\}.$$

$$b) (3-x)^2 + (1-x)^2 = 20, \quad (x-4)(5x+1) \leq 0.$$

$$\text{Ответ: } x \in \emptyset.$$

№ 1.277.

$$a) \frac{3}{x^2 - 5x} + \frac{1}{5-x} = \frac{x-3}{x}, \quad \frac{2x-1}{6} > \frac{5}{2} - \frac{x+1}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \{4\}.$$

$$6) \frac{2}{x^2+6x} + \frac{3}{x} = \frac{2x+9}{x+6}, \quad \frac{x+4}{5} + \frac{13+2x}{6} < 3,5.$$

$$\begin{cases} \frac{2}{(x+6)x} + \frac{3}{x} - \frac{2x+9}{x+6} = 0 \\ \frac{x+4}{5} + \frac{13+2x}{6} < 3,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2+3(x+6)-(2x+9)x}{x(x+6)} = 0 \\ 6(x+4)+5(13+2x) < 3,5 \cdot 30 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+3x+18-2x^2-9x=0 \\ x \neq 0 \\ x \neq -6 \\ 6x+24+65+10x-105 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-10=0 \\ x \neq 0 \\ x \neq -6 \\ 16x-16 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 2 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow x = -5.$$

Ответ: $\{-5\}$.

№ 1.278.

$$a) (x^2-2)(x+2) = x^3+8, \quad x^2+7x < 0.$$

$$\begin{cases} (x^2-2)(x+2) - (x^3+8) = 0 \\ x^2+7x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x^2-2) - (x+2)(x^2-2x+4) = 0 \\ x(x+7) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+2)(x^2-2-x^2+2x-4) = 0 \\ -7 < x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(2x-6) = 0 \\ -7 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \\ -7 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -2.$$

Ответ: $\{-2\}$.

$$6) 1-x^3 = (x-1)(5-x^2), \quad 4x^2-9 \geq 0.$$

Ответ: $\{-6\}$.

Решите уравнение и выясните, какому из двух неравенств удовлетворяет корень уравнения (1.279 – 1.280):

№ 1.279.

$$a) \frac{1-2x}{12} = 1 + \frac{5x-4}{18}, \quad x^2-3 \geq 0 \text{ или } x^2-3 < 0.$$

Ответ: $x = -\frac{25}{16}$ удовлетворяет неравенству $x^2-3 < 0$.

$$6) \frac{5+3x}{16} - \frac{2-x}{6} = \frac{1}{2}, \quad 2-x^2 < 0 \text{ или } 2-x^2 \geq 0.$$

$$3(5+3x)-8(2-x)=24 \Leftrightarrow 15+9x-16+8x-24=0 \Leftrightarrow 17x-25=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{25}{17}.$$

$$x^2 = \left(\frac{25}{17}\right)^2 = \frac{625}{289} = 2 \frac{47}{289} > 2. \text{ Следовательно, решение уравне-}$$

ния удовлетворяет неравенству $2 - x^2 < 0$.

Ответ: $x = \frac{25}{17}$ удовлетворяет неравенству $2 - x^2 < 0$.

№ 1.280.

а) $2(x+2) - \frac{5-3x}{6} + 1 = 0$, $x^3 + 3x^2 - 4 < 0$ или $x^3 + 3x^2 - 4 \geq 0$.

Решим уравнение: $12(x+2) - (5-3x) + 6 = 0 \Leftrightarrow 12x + 24 - 5 + 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow 15x + 25 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$.

Представим $x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2 + 4x + 4) = (x-1)(x+2)^2$ (сначала угадываем корень $x=1$, а затем делим многочлен $x^3 + 3x^2 - 4$ уголком на $(x-1)$). Очевидно, корень $x = -\frac{5}{3}$ удовлетворяет неравенству $x^3 + 3x^2 - 4 < 0$.

Ответ: $x = -\frac{5}{3}$ удовлетворяет неравенству $x^3 + 3x^2 - 4 < 0$.

б) $\frac{3x+2}{4} - 3 = 6(x-1)$, $x^3 - 4x^2 + 3 \geq 0$ или $x^3 - 4x^2 + 3 < 0$.

Ответ: $x = \frac{2}{3}$ удовлетворяет неравенству $x^3 + 3x^2 - 4 \geq 0$.

Среди всех x , при которых данное выражение $P(x)$ обращается в нуль, найдите такие, чтобы выполнялось неравенство (1.281 – 1.282):

№ 1.281.

а) $P(x) = (x-4)(x-1)(2x+3)$, $3x^2 - 4x - 14 > 0$.

Решением уравнения $P(x) = 0$ являются корни $x_1 = 4$, $x_2 = 1$,

$x_3 = -\frac{3}{2}$. Теперь оценим выражение $3x^2 - 4x - 14$ при разных x :

$$\left. \begin{array}{ll} x_1 = 4, & 3 \cdot 16 - 16 - 14 = 18 > 0 \\ x_2 = 1, & 3 - 4 - 14 = -15 < 0 \\ x_3 = -\frac{3}{2}, & \frac{9}{4} - 6 - 14 = -14\frac{3}{4} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 4.$$

Ответ: $\{4\}$.

б) $P(x) = (x-2)(2x+1)(x+3)$, $4x^2 + 17x + 5 < 0$.

Ответ: $\left\{-3; -\frac{1}{2}\right\}$.

№ 1.282.

а) $P(x) = (x+3)(4x^2 - 12x + 9)$, $-6x^2 + x + 13 < 0$.

$$P(x) = (x+3)(2x-3)^2 \Rightarrow x_1 = -3, \quad x_2 = \frac{3}{2}.$$

$$x_1 = -3, \quad -6 \cdot 9 - 3 + 13 = -44 < 0$$

$$x_2 = \frac{3}{2}, \quad -6 \cdot \frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 13 = -\frac{27}{2} + \frac{3}{2} + 13 = -12 + 13 = 1 > 0$$

Следовательно, неравенству удовлетворяет $x = -3$.

Ответ: $\{-3\}$.

б) $P(x) = (2x^2 + 3x - 2)(1 - 2x)$, $2 - x - 10x^2 > 0$.

Ответ: $x \in \emptyset$.

Найдите все значения x , при которых выражение имеет смысл.

Найдите все значения x , при которых значение выражения равно нулю (1.283 – 1.285):

№ 1.283.

а) $x\sqrt{x^2 + 7x - 18}$.

$$\text{ОДЗ: } x^2 + 7x - 18 \geq 0 \Leftrightarrow (x+9)(x-2) \geq 0 \Rightarrow x \leq -9 \text{ или } x \geq 2.$$

$x\sqrt{(x+9)(x-2)} = 0 \Rightarrow x = -9 \text{ или } x = 2$. Значение $x = 0$ не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $x \in (-\infty; -9] \cup [2; +\infty)$; $\{-9, 2\}$.

б) $x\sqrt{11 + 10x - x^2}$.

Ответ: $x \in [-1; 11]$; $\{-1; 0; 11\}$.

№ 1.284.

а) $\frac{x^2 - x}{\sqrt{3 - 12x}}$; ОДЗ: $3 - 12x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{4}$.

$$\frac{x^2 - x}{\sqrt{3 - 12x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{\sqrt{3 - 12x}} \Rightarrow x = 0 \quad (x = 1 \text{ не подходит по ОДЗ}).$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$; $\{0\}$.

б) $\frac{9 - x^2}{\sqrt{5 + 2x}}$;

Ответ: $x \in \left(-\frac{5}{2}; +\infty\right)$; $\{3\}$.

№ 1.285.

а) $\frac{x^2+2x+1}{\sqrt{9-4x^2}}$; ОДЗ: $9-4x^2 > 0 \Leftrightarrow 4x^2 < 9 \Rightarrow |x| < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$.

$$\frac{x^2+2x+1}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{9-4x^2}} = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right); \{-1\}$.

б) $\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{4x^2-6x}}$; ОДЗ: $4x^2-6x > 0 \Leftrightarrow x(2x-3) > 0 \Rightarrow x < 0$

или $x > \frac{3}{2}$.

$$\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{4x^2-6x}} = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{4x^2-6x}} = 0$$

— нет решений, т.к. $x=1$ не входит в ОДЗ.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right); \{\emptyset\}$.

Решите двойное неравенство (1.286 — 1.289):

№ 1.286.

а) $\frac{4}{7} < \frac{1-3x}{4} \leq 1,15$;

Ответ: $\left[-\frac{6}{5}; -\frac{3}{7}\right)$.

б) $-0,88 \leq \frac{2x+3}{5} < \frac{1}{3}$. Умножим двойное неравенство на 5:

$-0,88 \leq 2x+3 < \frac{5}{3}$. Далее вычтем 3 из всех частей неравенства:

$-7,4 \leq 2x < \frac{5}{3} - 3 \Leftrightarrow -7\frac{2}{5} \leq 2x < -\frac{4}{3}$. Деля на 2, получаем

$-\frac{37}{10} \leq x < -\frac{2}{3}$.

Ответ: $\left[-3,7; -\frac{2}{3}\right)$.

№ 1.287.

а) $-1\frac{1}{6} \leq \frac{4x-5}{9} < -0,24$;

Ответ: $[-1,375; 0,71)$.

№ 1.285.

а) $\frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{9 - 4x^2}}$; ОДЗ: $9 - 4x^2 > 0 \Leftrightarrow 4x^2 < 9 \Rightarrow |x| < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$.

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{9 - 4x^2}} = \frac{(x + 1)^2}{\sqrt{9 - 4x^2}} = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right); \{-1\}$.

б) $\frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{4x^2 - 6x}}$; ОДЗ: $4x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x(2x - 3) > 0 \Rightarrow x < 0$

или $x > \frac{3}{2}$.

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{4x^2 - 6x}} = \frac{(x - 1)^2}{\sqrt{4x^2 - 6x}} = 0$$

— нет решений, т.к. $x = 1$ не входит в ОДЗ.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right); \{\emptyset\}$.

Решите двойное неравенство (1.286 — 1.289):

№ 1.286.

а) $\frac{4}{7} < \frac{1 - 3x}{4} \leq 1,15$;

Ответ: $\left[-\frac{6}{5}; -\frac{3}{7}\right)$.

б) $-0,88 \leq \frac{2x + 3}{5} < \frac{1}{3}$. Умножим двойное неравенство на 5:

$$-0,88 \leq 2x + 3 < \frac{5}{3}. \text{ Далее вычтем } 3 \text{ из всех частей неравенства:}$$

$$-7,4 \leq 2x < \frac{5}{3} - 3 \Leftrightarrow -7\frac{2}{5} \leq 2x < -\frac{4}{3}. \text{ Деля на } 2, \text{ получаем}$$

$$-\frac{37}{10} \leq x < -\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\left[-3,7; -\frac{2}{3}\right)$.

№ 1.287.

а) $-1\frac{1}{6} \leq \frac{4x - 5}{9} < -0,24$;

Ответ: $[-1,375; 0,71)$.

б) $0,15 < \frac{7-5x}{6} \leq 1\frac{4}{9}$. Умножим двойное неравенство на -6 . При

этом знаки неравенства изменятся на обратные: $-0,9 > 5x - 7 \geq -\frac{26}{3}$.

Прибавим 7 ко всем частям неравенства $7 - 0,9 > 5x \geq 7 - \frac{26}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq 5x < 6,1$. Разделим неравенство на 5 и получим $-\frac{1}{3} \leq x < 1,22$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3}; 1,22\right)$.

№ 1.288.

а) $1,75 < 4x - x^2 < 4$;

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup \left(2; \frac{7}{2}\right)$.

б) $-\frac{13}{4} < x^2 + 3x - 1 < 3$. Двойное неравенство эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 1 + \frac{13}{4} > 0 \\ x^2 + 3x - 1 - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + \frac{9}{4} > 0 \\ x^2 + 3x - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 > 0 \\ (x-1)(x+4) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{3}{2} \\ -4 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 < x < -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} < x < 1 \end{cases}.$$

Ответ: $\left(-4; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; 1\right)$.

№ 1.289.

а) $0 < 1 - 2x - 3x^2 \leq 2$;

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x - 3x^2 > 0 \\ 1 - 2x - 3x^2 - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 < 0 \\ 3x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(3x-1) < 0 \\ x \in R \text{ (} x \text{ — любое действительное)} \end{cases} \Rightarrow -1 < x < \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$.

б) $-3 \leq 2x^2 - x < 1$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Решите систему неравенств (1.290 – 1.294):

№ 1.290.

$$\text{a) } \begin{cases} (x+2)(2-x) < (x+3)(4-x) \\ \frac{3+x}{4} + \frac{1-2x}{6} \geq 1 \end{cases};$$

Ответ: $(-8; -1]$.

$$\text{б) } \begin{cases} (x-1)(x+5) \geq (x-3)^2 \\ \frac{5+2x}{3} - \frac{5x-1}{6} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 5x - 5 \geq x^2 - 6x + 9 \\ 2(5+2x) - 5x + 1 < 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x \geq 14 \\ 10 + 4x - 5x + 1 < 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{5} \\ -x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{5} \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{7}{5}.$$

Ответ: $\left[\frac{7}{5}; +\infty\right)$.

№ 1.291.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{8x-1}{15} - \frac{7x-2}{10} > \frac{1}{3} \\ (2x+1)^2 \leq x(4x+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(8x-1) - 3(7x-2) > 10 \\ 4x^2 + 4x + 1 \leq 4x^2 + 3x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x - 2 - 21x + 6 - 10 > 0 \\ x + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x > 6 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{6}{5} \\ x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow x < -\frac{6}{5}.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{6}{5}\right)$.

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{5x-3}{12} + \frac{7-2x}{8} \leq 1\frac{1}{3}; \\ x(9x-5) > (1-3x)^2 \end{cases};$$

Ответ: $\left[1; \frac{17}{4}\right]$.

№ 1.292.

$$\text{a) } \begin{cases} -3x^2 + 8x + 3 > 0 \\ \frac{7-2x}{5} < \frac{x}{2} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 8x - 3 < 0 \\ 2(7-2x) < 5x + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(3x+1) < 0 \\ 14 - 4x < 5x + 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < x < 3 \\ 9x > 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{9} < x < 3.$$

Ответ: $\left(\frac{4}{9}; 3\right)$.

б) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 \geq 0 \\ \frac{3x+1}{4} \geq \frac{5}{3}x + \frac{1}{2} \end{cases};$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$.

№ 1.293.

а) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^2 - 2x \geq 0 \\ 7,2 \cdot (1,5 - x) < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x \geq 0 \\ 1,5 - x < \frac{6}{7,2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-6) \geq 0 \\ \frac{3}{2} - \frac{5}{6} < x \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 6 \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x \geq 6.$$

Ответ: $[6; +\infty)$.

б) $\begin{cases} 2 - 4,5x^2 > 0 \\ -\frac{5}{6}x - 1,4 \leq \frac{1}{2}(x + 3,2) \end{cases};$

Ответ: $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

№ 1.294.

а) $\begin{cases} \frac{x+4}{2} - \frac{4-3x}{4} < \frac{1}{6}; \\ 3x^2 + 7x - 6 \leq 0 \end{cases};$

Ответ: $\left[-3; -\frac{2}{3}\right)$.

б) $\begin{cases} \frac{7x-2}{3} - \frac{5x+1}{2} < -1 \\ 4x^2 - 7x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(7x-2) - 3(5x+1) < -6 \\ (x-2)(4x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 14x - 4 - 15x - 3 + 6 < 0 \\ x < -\frac{1}{4} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < -\frac{1}{4} \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < -\frac{1}{4} \text{ или } x > 2.$$

Ответ: $\left(-1; -\frac{1}{4}\right) \cup (2; +\infty).$

№ 1.295. Найдите все значения x , при которых одновременно выполняются оба неравенства:

а) $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$ и $3 + 5x - 2x^2 \leq 0$.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}.$

б) $2 - 5x - 3x^2 \geq 0$ и $3x^2 + 5x - 2 \geq 0$.

По условию задачи неравенства образуют систему:

$$\begin{cases} 2 - 5x - 3x^2 \geq 0 \\ 3x^2 + 5x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 5x - 2 \leq 0 \\ 3x^2 + 5x - 2 \geq 0 \end{cases}.$$

Эта система имеет решение тогда и только тогда, когда

$3x^2 + 5x - 2 = 0$. Решая уравнение находим $x_1 = -2$ или $x_2 = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\left\{-2; \frac{1}{3}\right\}.$

Среди всех x , удовлетворяющих первому неравенству, найдите все значения, не удовлетворяющие второму неравенству (1.296 – 1.297):

№ 1.296.

а) $3x^2 + 10x + 3 \geq 0$, $3x^2 + 10x + 3 > 0$.

Все x , не удовлетворяющие неравенству $3x^2 + 10x + 3 > 0$ удовлетворяют обратному неравенству $3x^2 + 10x + 3 \leq 0$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} 3x^2 + 10x + 3 \geq 0 \\ 3x^2 + 10x + 3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + 10x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \text{ или } x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left\{-3; -\frac{1}{3}\right\}.$

б) $5x^2 + 4x - 1 \leq 0$, $5x^2 + 4x - 1 < 0$.

Ответ: $\left\{-1; \frac{1}{5}\right\}.$

№ 1.297.

а) $2x^2 - 9x + 4 \leq 0$, $(x - 4)(1 - 2x) > 0$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}; 4\right\}$.

б) $-2x^2 - 3x + 9 \geq 0$, $(x + 3)(2x - 3) < 0$.

Все значения x , не удовлетворяющие неравенству $(x + 3) \cdot (2x - 3) < 0$ удовлетворяют обратному неравенству $(x + 3)(2x - 3) \geq 0$. По условию те же x должны удовлетворять первому неравенству.

Получаем систему:

$$\begin{cases} -2x^2 - 3x + 9 \geq 0 \\ (x + 3)(2x - 3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x - 9 \leq 0 \\ (x + 3)(2x - 3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3)(2x - 3) \leq 0 \\ (x + 3)(2x - 3) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 3)(2x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \text{ или } x_2 = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\left\{-3; \frac{3}{2}\right\}$.

Докажите утверждение (1.298 – 1.299):

№ 1.298.

а) Если $a > b$, а $b > 2$, то $10a > 3b + 14$. Так как $a > b$, то $10a > 10b$. Представим $10b = 3b + 7b$. По условию $b > 2$ и $3b + 7b > 3b + 14$. Получаем, что $10b > 3b + 14$. Окончательно, $10a > 10b > 3b + 14$, откуда следует, что $10a > 3b + 14$. Что и требовалось доказать.

б) Если $a < b$, а $b < 3$, то $13a < 4b + 27$.

$a < b \Leftrightarrow 13a < 13b = 4b + 9b < 4b + 3 \cdot 9 = 4b + 27 \Rightarrow 13a < 4b + 27$.
Что и требовалось доказать.

№ 1.299.

а) При $a > 0$ $\frac{a + 3}{2} \geq \frac{6a}{a + 3}$.

Предположим, что неравенство $\frac{a + 3}{2} \geq \frac{6a}{a + 3}$ справедливо. По условию задачи знаменатель дроби положителен ($a > 0$). Умножим неравенство на положительное число $2(a + 3)$. Получим неравенство $(a + 3)^2 \geq 12a$. Преобразуем его к виду $a^2 - 6a + 9 \geq 0$, т.е. $(a - 3)^2 \geq 0$. Получаем справедливое неравенство. Так как мы использовали только эквивалентные преобразования, то справедливо и исходное неравенство $\frac{a + 3}{2} \geq \frac{6a}{a + 3}$. Что и требовалось доказать.

б) При $b > 0$ $\frac{4b}{2b + 1} \leq \frac{2b + 1}{2}$.

Предположим, что неравенство не верно, следовательно, верно обратное неравенство $\frac{4b}{2b+1} > \frac{2b+1}{2}$. Умножим его на положительное число $2(2b+1)$ и получим $8b > (2b+1)^2 \Leftrightarrow 8b > 4b^2 + 4b + 1 \Leftrightarrow 0 > 4b^2 - 4b + 1 \Leftrightarrow 0 > (2b-1)^2$.

Получаем противоречие. Значит наше предположение о несправедливости исходного неравенства $\frac{4b}{2b+1} \leq \frac{2b+1}{2}$ не верно. То есть это неравенство справедливо, что и требовалось доказать.

**СТЕПЕНИ И КОРНИ,
ПРОГРЕССИИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ**

Выполните указанные действия (1.301 – 1.309):

№ 1.301.

а) $(\sqrt{18} - \sqrt{98})^2 + (7\sqrt{98})^2$;

Ответ: {179}.

б) $(\sqrt{20} - \sqrt{180})^2 + (5\sqrt{2})^2 = (\sqrt{20}(1 - \sqrt{9}))^2 + 25 \cdot 2 =$
 $= 20 \cdot (1 - 3)^2 + 50 = 20 \cdot 4 + 50 = 130$.

Ответ: {130}.

№ 1.302.

а) $\sqrt{\sqrt{8} - \sqrt{7}} \cdot \sqrt{\sqrt{8} + \sqrt{7}} = \sqrt{(\sqrt{8} - \sqrt{7})(\sqrt{8} + \sqrt{7})} = \sqrt{(\sqrt{8})^2 - (\sqrt{7})^2} =$
 $= \sqrt{8 - 7} = 1$.

Ответ: {1}.

б) $\sqrt{\sqrt{27} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{27} + \sqrt{2}}$;

Ответ: {5}.

№ 1.303.

а) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \sqrt{8}\right) \cdot \sqrt{24} + 18\sqrt{2} - 12\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right) \cdot$
 $\cdot \sqrt{6} + 18\sqrt{2} - 12\sqrt{3} = 6 - 6\sqrt{18} + 6\sqrt{12} + 18\sqrt{2} - 12\sqrt{3} = 6 - 18\sqrt{2} + 12\sqrt{3} +$
 $+ 18\sqrt{2} - 12\sqrt{3} = 6$.

Ответ: {6}.

б) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{32} - \frac{1}{3}\sqrt{3} + 4\sqrt{15}\right) \cdot \sqrt{12} - 4\sqrt{6} - 24\sqrt{5}$;

Ответ: {-2}.

№ 1.304.

а) $\left(\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{5}} - 2\sqrt{2}\right) : \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + 4\sqrt{10}$;

Ответ: {2}.

б) $\left(\frac{4}{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3\frac{1}{3}}\right) : \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = -\left(\frac{4}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{\frac{10}{3}}\right) \cdot \sqrt{3} +$

$$+\sqrt{6}+\sqrt{10}=-4-\sqrt{6}-\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{10}=-4.$$

Ответ: $\{-4\}$.

№ 1.305.

$$\text{a) } (2\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 + (1+2\sqrt{15})^2 = 4 \cdot 5 - 4\sqrt{15} + 3 + 1 + 4\sqrt{15} + 4 \cdot 15 = 84.$$

Ответ: $\{84\}$.

$$\text{б) } (3\sqrt{2}-\sqrt{7})^2 - (3\sqrt{14}-1)^2;$$

Ответ: $\{-102\}$.

№ 1.306.

$$\text{a) } \left(\sqrt{2}+3\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \sqrt{0,36} + \sqrt{1,69} = 2 + 6 + \frac{9}{2} + 0,6 + 1,3 = 8 + 4,5 + 1,9 = 14,4.$$

Ответ: $\{14,4\}$.

$$\text{б) } \left(2\sqrt{5}-\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2 + \sqrt{0,64} + \sqrt{1,21};$$

Ответ: $\{18,1\}$.

№ 1.307.

$$\text{a) } \sqrt{0,04} - (\sqrt{7} - 2\sqrt{2})(\sqrt{8} + \sqrt{7});$$

Ответ: $\{1,2\}$.

$$\text{б) } \sqrt{0,09} - (\sqrt{11} - 2\sqrt{3})(\sqrt{11} + \sqrt{12}) = 0,3 - (\sqrt{11} - \sqrt{12})(\sqrt{11} + \sqrt{12}) =$$

$$= 0,3 - (11 - 12) = 0,3 + 1 = 1,3.$$

Ответ: $\{1,3\}$.

№ 1.308.

$$\text{a) } (2-\sqrt{3})^2(7+4\sqrt{3}) + 3\sqrt{12}\frac{1}{4} = (4-4\sqrt{3}+3)(7+4\sqrt{3}) + 3\sqrt{\frac{49}{4}} =$$

$$= (7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3}) + 3 \cdot \frac{7}{2} = 48 - 48 + \frac{21}{2} = \frac{23}{2}.$$

Ответ: $\left\{\frac{23}{2}\right\}$.

$$\text{б) } (\sqrt{5}-2)^2(9+4\sqrt{5}) - 2\sqrt{5}\frac{4}{9};$$

Ответ: $\left\{-\frac{11}{3}\right\}$.

№ 1.309.

а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} - \sqrt[5]{243}$;

Ответ: $\{-1\}$.

б) $\frac{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{9}}{\sqrt[12]{9}} + \sqrt[7]{128} = 9^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}} + \sqrt[7]{2^7} = 9^{\frac{1}{2}} + 2 = 3 + 2 = 5$.

Ответ: $\{5\}$.

Упростите выражение (1.310 – 1.311):

№ 1.310.

а) $\left(\frac{1}{2\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{2\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) (b - 4a) = \frac{2\sqrt{a} - \sqrt{b} - 2\sqrt{a} - \sqrt{b}}{4a - b} \cdot (b - 4a) =$
 $= \frac{-2\sqrt{b}(b - 4a)}{4a - b} \cdot (b - 4a) = 2\sqrt{b}$.

Ответ: $2\sqrt{b}$.

б) $\left(\frac{1}{\sqrt{a} - 3\sqrt{b}} + \frac{1}{3\sqrt{b} + a} \right) (9b - a)$;

Ответ: $-2\sqrt{a}$.

№ 1.311.

а) $\frac{a - 16b}{(\sqrt[4]{a} - 2\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + 2\sqrt[4]{b})} - 4\sqrt{b}$;

Ответ: $\sqrt{a}$.

б) $\frac{81x - y}{(3\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(3\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})} - \sqrt{y} = \frac{(9\sqrt{x} - \sqrt{y})(9\sqrt{x} + \sqrt{y})}{9\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \sqrt{y} =$
 $= 9\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{y} = 9\sqrt{x}$.

Ответ: $9\sqrt{x}$.

Определите, между какими двумя последовательными натуральными числами находится данное число (1.312 – 1.314):

№ 1.312.

а) $\frac{4}{3}\sqrt{63}$.

Представим $\frac{4}{3}\sqrt{63} = \frac{4}{3}\sqrt{9 \cdot 7} = 4\sqrt{7}$. Квадрат этого числа равен

$16 \cdot 7 = 112$ и лежит между $11^2 = 121$ и $10^2 = 100$. То есть

$$10 < \frac{4}{3}\sqrt{63} < 11.$$

Ответ: $\{10; 11\}$.

б) $\frac{3}{4}\sqrt{112}$;

Ответ: $\{7; 8\}$.

№ 1.313.

а) $3\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$;

Ответ: $\{2; 3\}$.

б) $2\sqrt[3]{\frac{7}{2}}$.

Представим $2\sqrt[3]{\frac{7}{2}} = \sqrt[3]{8 \cdot \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{28}$. Ясно, что $3 = \sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{28} <$

$< \sqrt[3]{64} = 4$. Таким образом $3 < 2\sqrt[3]{\frac{7}{2}} < 4$.

Ответ: $\{3; 4\}$.

№ 1.314.

а) $(7 + \sqrt{13}) \cdot \frac{1}{2}$;

Ответ: $\{5; 6\}$.

б) $(10 + \sqrt{17}) \cdot \frac{1}{3}$.

Так как $16 < 17 < 25$, то, извлекая корень из всех частей двойного неравенства, получим $4 < \sqrt{17} < 5$. Прибавим 10 ко всем частям неравенства: $14 < 10 + \sqrt{17} < 15$. Разделим все на 3: $\frac{14}{3} < (10 + \sqrt{17}) \cdot \frac{1}{3} < 5$.

Поскольку $4 = \frac{12}{3} < \frac{14}{3}$, то $4 < (10 + \sqrt{17}) \cdot \frac{1}{3} < 5$.

Ответ: $\{4; 5\}$.

Сравните числа, не пользуясь таблицами и микрокалькулятором (1.315 – 1.316):

№ 1.315.

а) $2\sqrt{5} - 1$ и $6 - \sqrt{5}$;

Ответ: $2\sqrt{5} - 1 < 6 - \sqrt{5}$.

б) $\sqrt{7} - 1$ и $9 - 3\sqrt{7}$.

Сравним $\sqrt{7} - 1 \vee 9 - 3\sqrt{7} \Leftrightarrow \sqrt{7} + 3\sqrt{7} \vee 9 + 1 \Leftrightarrow 4\sqrt{7} \vee 10$.
Возводя в квадрат, получим $112 \vee 100$. То есть знак $\vee$ означает «больше» ($>$).

Ответ: $\sqrt{7} - 1 > 9 - 3\sqrt{7}$.

№ 1.316.

а) $\left(3\sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$ и $\left(3\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$.

Запишем $\left(3\sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 \vee \left(3\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow \left(27 - 6 + \frac{1}{3}\right) \vee \left(18 + 6 + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 21\frac{1}{3} \vee 24\frac{1}{2}$. То есть знак $\vee$ означает «меньше» ($<$).

Ответ: $\left(3\sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 < \left(3\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$.

б) $\left(2\sqrt{5} + \sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2$ и $\left(2\sqrt{7} - \sqrt{\frac{1}{7}}\right)^2$;

Ответ: $\left(2\sqrt{5} + \sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2 > \left(2\sqrt{7} - \sqrt{\frac{1}{7}}\right)^2$.

№ 1.317. Расположите числа в порядке возрастания (без использования таблиц и МК):

а) $\sqrt{0,3}$; $0,3$; $(\sqrt{5} - 1)^2$;

Ответ: $\sqrt{0,3} < 0,3 < (\sqrt{5} - 1)^2$.

б) $\sqrt{1,7}$; $1,7$; $(3 - \sqrt{7})^2$.

Так как $1,7 > 1$, то $\sqrt{1,7} < 1,7$. Оценим $(3 - \sqrt{7})^2 = 9 - 6\sqrt{7} + 7 = 16 - 6\sqrt{7}$. Покажем, что $16 - 6\sqrt{7} < 1$. Для этого надо показать, что $6\sqrt{7} > 15$. Возведя это неравенство в квадрат, получим очевидное неравенство $252 > 225$. Итак, $(3 - \sqrt{7})^2 < 1 < \sqrt{1,7} < 1,7$.

Ответ: $(3 - \sqrt{7})^2 < \sqrt{1,7} < 1,7$.

Проверьте равенство (1.318 – 1.319):

№ 1.318.

$$\text{а) } \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{6}-1} = \frac{\sqrt{6}+1}{15+10\sqrt{2}};$$

$$\begin{aligned} \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{6}-1} &= \frac{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-1)(3+2\sqrt{2})} = \frac{9-8}{(\sqrt{6}-1)(3+2\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{6}+1) \cdot 1}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)(3+2\sqrt{2})} = \\ &= \frac{\sqrt{6}+1}{(6-1)(3+2\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6}+1}{5 \cdot 15+10\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{15+6\sqrt{6}};$$

$$\begin{aligned} \frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} &= \frac{(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(5+2\sqrt{6})} = \frac{25-24}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(5+2\sqrt{6})} = \\ &= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2}) \cdot 1}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})(5+2\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(5-2)(5+2\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{15+6\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

№ 1.319.

$$\text{а) } (2+\sqrt{5})^2 + \sqrt{(4\sqrt{5}-11)^2} = 20.$$

$$\begin{aligned} (2+\sqrt{5})^2 + \sqrt{(4\sqrt{5}-11)^2} &= 4+4\sqrt{5}+5+|4\sqrt{5}-11|= \\ &= 4+4\sqrt{5}+5+|11-4\sqrt{5}| = 9+4\sqrt{5}+11-4\sqrt{5} = 20. \end{aligned}$$

$$|11-4\sqrt{5}| = 11-4\sqrt{5} \text{ так как } 11 > 4\sqrt{5} \text{ (или } 121 > 80 \text{)}.$$

$$\text{б) } (1+\sqrt{7})^2 + \sqrt{(2\sqrt{7}-10)^2} = 18.$$

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{7})^2 + \sqrt{(2\sqrt{7}-10)^2} &= 1+2\sqrt{7}+7+|2\sqrt{7}-10|= \\ &= 8+2\sqrt{7}+|10-2\sqrt{7}| = 8+2\sqrt{7}+10-2\sqrt{7} = 18. \end{aligned}$$

$$|10-2\sqrt{7}| = 10-2\sqrt{7} \text{ так как } 10 > 2\sqrt{7} \text{ (или } 100 > 28 \text{)}.$$

Докажите, что число a является корнем уравнения (1.320–1.321):

№ 1.320.

$$\text{а) } x^2 + x\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 0, \quad a = 1 - \sqrt{3}.$$

Представим значение a в уравнение $x^2 + x\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 0$:

$$(1 - \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3} - 3 + \sqrt{3} - 1 = 0.$$

Получим верное равенство. Таким образом a — корень данного уравнения.

$$\text{б) } x^2 - x\sqrt{5} - 4 - 2\sqrt{5} = 0, \quad a = 2 + \sqrt{5}.$$

$$(2 + \sqrt{5})^2 - (2 + \sqrt{5})\sqrt{5} - 4 - 2\sqrt{5} = 4 + 4\sqrt{5} + 5 - 2\sqrt{5} - 5 - 4 - 2\sqrt{5} = 0.$$

Что и требовалось доказать.

№ 1.321.

$$\text{а) } x(6 - x^2) = 4, \quad a = \sqrt{3} - 1.$$

Представим a в уравнение $x(6 - x^2) = 4$:

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - 1)(6 - (\sqrt{3} - 1)^2) &= (\sqrt{3} - 1)(6 - 3 + 2\sqrt{3} - 1) = \\ &= (\sqrt{3} - 1)(2 + 2\sqrt{3}) = 2(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 2(3 - 1) = 4. \end{aligned}$$

Получим верное равенство ($4 = 4$). Значит a — корень данного уравнения.

$$\text{б) } (x^2 - 17)x = 4, \quad a = 2 - \sqrt{5}.$$

$$\begin{aligned} ((2 - \sqrt{5})^2 - 17)(2 - \sqrt{5}) &= (4 - 4\sqrt{5} + 5 - 17)(2 - \sqrt{5}) = \\ &= (-8 - 4\sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 4(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = 4(5 - 4) = 4 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

№ 1.322. Решите неравенство:

$$\text{а) } (1 - \sqrt{2})x \geq 2 - 2\sqrt{2};$$

Ответ: $(-\infty; 2]$.

$$\text{б) } (2\sqrt{2} - 3)x \leq (\sqrt{2} - 1)^2$$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{2} - 3)x \leq 2 - 2\sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow (2\sqrt{2} - 3)x \leq 3 - 2\sqrt{2}$. Умножим обе части неравенства на положительное число $(2\sqrt{2} + 3)$.

Получим

$$(8 - 9)x \leq 9 - 8 \Leftrightarrow -x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Ответ: $[-1; +\infty)$.

№ 1.323. Найдите все целые решения двойного неравенства:

$$\text{а) } \frac{2}{3}\sqrt{18} < x < 15\sqrt[3]{0,027}$$

$2\sqrt{2} < x < 15 \cdot 0,3 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < x < 4,5$. Очевидно, $2\sqrt{2} < 3$, т.к. $8 < 9$. Отсюда $x = 3$ или $x = 4$.

Ответ: $x = 3$ или $x = 4$.

$$\text{б) } 15\sqrt[3]{0,008} < x < \frac{3}{2}\sqrt{12};$$

Ответ: $\{4,5\}$.

Докажите, что данное выражение является корнем уравнения $x^2 = 1$ и найдите значение этого выражения (1.324 – 1.325):

№ 1.324.

$$\text{а) } (2 - \sqrt{5})\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}.$$

Корнем уравнения $x^2 = 1$ являются значения ± 1 . Найдем значение

$$\begin{aligned} \left((2 - \sqrt{5})\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} \right)^2 &= (2 - \sqrt{5})^2 (9 + 4\sqrt{5}) = (4 - 4\sqrt{5} + 5)(9 + 4\sqrt{5}) = \\ &= (9 - 4\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5}) = 81 - 80 = 1. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Так как $2 < \sqrt{5}$, то $(2 - \sqrt{5})\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = -1$.

Ответ: $\{-1\}$.

$$\text{б) } (2\sqrt{2} - 3)\sqrt{17 + 12\sqrt{2}};$$

Ответ: $\{-1\}$.

№ 1.325.

$$\text{а) } \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Найдем значение } \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \right)^2 &= \frac{2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{4 - 3} + 2 - \sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{4 - 2}{2} = 1. \text{ Что и требовалось доказать.} \end{aligned}$$

Так как $\sqrt{2 + \sqrt{3}} > \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, то $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = 1$.

Ответ: $\{1\}$.

$$\text{б) } \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3 - \sqrt{8}} + \sqrt{3 + \sqrt{8}}};$$

Ответ: $\{1\}$.

Составьте приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются следующие числа (1.326 – 1.327):

№ 1.326.

а) $3 - \sqrt{5}$, $3 + \sqrt{5}$.

По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ или $\frac{c}{a} = (3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 9 - 5 = 4$.

Далее $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ или $\frac{b}{a} = -(3 - \sqrt{5} + 3 + \sqrt{5}) = -6$. Отсюда приведенное уравнение имеет вид $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Ответ: $x^2 - 6x + 4 = 0$.

б) $2 + \sqrt{7}$, $2 - \sqrt{7}$.

Ответ: $x^2 - 4x - 3 = 0$.

№ 1.327.

а) $2\sqrt{3} - \sqrt{2}$, $2\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Ответ: $x^2 - 4\sqrt{3}x + 10 = 0$.

б) $5\sqrt{2} - \sqrt{7}$, $5\sqrt{2} + \sqrt{7}$.

По теореме Виета

$$\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 = (5\sqrt{2} - \sqrt{7})(5\sqrt{2} + \sqrt{7}) = 50 - 7 = 43;$$

$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) = -5\sqrt{2} + \sqrt{7} - 5\sqrt{2} - \sqrt{7} = -10\sqrt{2}$. Получаем уравнение $x^2 - 10\sqrt{2}x + 43 = 0$.

Ответ: $x^2 - 10\sqrt{2}x + 43 = 0$.

Пусть a_1 и a_n соответственно первый и n -й члены арифметической прогрессии, n – число ее членов, S_n – сумма n первых членов, d – разность прогрессии, а b_1 и b_n соответственно первый и n -й члены геометрической прогрессии, n – число ее членов, S_n – сумма n первых членов, q – знаменатель прогрессии. По трем данным прогрессии найдите значения двух остальных (1.328 – 1.345):

№ 1.328.

а) $a_1 = 8$, $a_n = 104$, $d = 3$.

Так как $a_n = a_1 + (n - 1)d$, то $n = 1 + \frac{a_n - a_1}{d} = 1 + \frac{104 - 8}{3} = 1 + 32 = 33$;

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{8 + 104}{2} \cdot 33 = 56 \cdot 33 = 1848.$$

Ответ: $n = 33$, $S_n = 1848$.

б) $a_1 = 5$, $a_n = -163$, $d = -7$.

Ответ: $n = 25$, $S_n = -1975$.

№ 1.329.

а) $a_1 = 5$, $a_n = 509$, $n = 100$.

Ответ: $d = \frac{56}{11}$, $S_n = 25700$.

б) $a_1 = 7$, $a_n = -385$, $n = 50$.

Из соотношения $a_n = a_1 + (n-1)d$ находим

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{-385 - 7}{50 - 1} = -\frac{392}{49} = -8;$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{7 - 385}{2} \cdot 50 = -189 \cdot 50 = -9450.$$

Ответ: $d = 8$, $S_n = -9450$.

№ 1.330.

а) $a_1 = 4$, $a_n = 100$, $S_n = 1716$.

Из формулы $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ находим $n = \frac{2S_n}{a_1 + a_n} = \frac{2 \cdot 1716}{4 + 100} = 33$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \text{ откуда } d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{100 - 4}{33 - 1} = \frac{96}{32} = 3.$$

Ответ: $n = 33$, $d = 3$.

б) $a_1 = 96$, $a_n = 4$, $S_n = 1200$.

Ответ: $n = 24$, $d = -4$.

№ 1.331.

а) $a_1 = 137$, $d = -7$, $n = 23$.

Ответ: $a_n = -17$, $S_n = 1380$.

б) $a_1 = 11$, $d = 8$, $n = 17$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 11 + 16 \cdot 8 = 11 + 128 = 139.$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{11 + 139}{2} \cdot 17 = 75 \cdot 17 = 1275.$$

Ответ: $a_n = 139$, $S_n = 1275$.

№ 1.332.

а) $a_1 = 25$, $d = -2$, $S_n = 168$.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = a_1 n + \frac{d}{2} n^2 - \frac{d}{2} n. \text{ Из условия}$$

$S_n = 168$ получаем уравнение $25n - n^2 + n = 168$ или $n^2 - 26n + 168 = 0$. Решая его, находим $n_1 = 12$ и $n_2 = 14$.

$$a_{n_1} = a_1 + (n_1 - 1)d = 25 + 11 \cdot (-2) = 3.$$

$$a_{n_2} = a_1 + (n_2 - 1)d = 25 + 13 \cdot (-2) = -1.$$

Ответ: либо $n = 12$ и $a_n = 3$, либо $n = 14$ и $a_n = -1$.

б) $a_1 = 5$, $d = 2$, $S_n = 192$.

Ответ: $n = 12$, $a_n = 27$.

№ 1.333.

а) $a_1 = -5$, $n = 23$, $S_n = 1909$.

Из формулы $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ находим

$$a_n = \frac{2S_n}{n} - a_1 = \frac{2 \cdot 1909}{23} + 5 = 2 \cdot 83 + 5 = 171.$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{171 + 5}{22} = 8.$$

Ответ: $a_n = 171$, $d = 8$.

б) $a_1 = 81$, $n = 34$, $S_n = 510$.

Ответ: $a_n = -51$, $d = -4$.

№ 1.334.

а) $d = -7$, $n = 23$, $a_n = -149$.

Ответ: $a_1 = 5$, $S_n = -1656$.

б) $d = 3$, $n = 15$, $a_n = 50$.

$$a_1 = a_n - (n - 1)d = 50 - 14 \cdot 3 = 50 - 42 = 8.$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{8 + 50}{2} \cdot 15 = 29 \cdot 15 = 435.$$

Ответ: $a_1 = 8$, $S_n = 435$.

№ 1.335.

а) $d = 2$, $n = 50$, $S_n = 2650$.

Ответ: $a_1 = 4$, $a_n = 102$.

б) $d = -3$, $n = 40$, $S_n = 620$.

Из формулы $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ получаем

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2S_n}{n} - (n-1)d \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot 620}{40} + 39 \cdot 3 \right) = \frac{1}{2} (31 + 117) = 74.$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 74 + 39 \cdot (-3) = 74 - 117 = -43.$$

Ответ: $a_1 = 74$, $a_n = -43$.

№ 1.336.

а) $d = 3$, $a_n = 59$, $S_n = 610$.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{(a_n - d(n-1)) + a_n}{2} \cdot n = a_1 \cdot n - \frac{d}{2} (n-1)n =$$

$$= \left(a_n + \frac{d}{2} \right) n - \frac{d}{2} n^2. \quad \text{Подставляя значения, приходим к уравнению}$$

$$-\frac{3}{2} n^2 + \left(59 + \frac{3}{2} \right) n = 610 \quad \text{или} \quad 3n^2 - 121 + 1220 = 0. \quad n_1 = 20, \quad n_2 = \frac{61}{3}$$

— не подходит, т.к. n — целое.

$$a_1 = a_n - (n-1)d = 59 - 19 \cdot 3 = 59 - 57 = 2.$$

Ответ: $n = 20$, $a_1 = 2$.

№ 1.337.

а) $n = 25$, $a_n = -12$, $S_n = 900$;

Ответ: $a_1 = 84$, $d = -4$.

б) $n = 52$, $a_n = 106$, $S_n = 2860$.

$$a_1 = \frac{2S_n}{n} - a_n = \frac{2 \cdot 2860}{52} - 106 = 110 - 106 = 4.$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{106 - 4}{52 - 1} = \frac{102}{51} = 2.$$

Ответ: $a_1 = 4$, $d = 2$.

№ 1.338.

а) $b_1 = 0,5$, $b_n = 256$, $q = 2$;

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow q^{n-1} = \frac{b_n}{b_1}. \quad 2^{n-1} = \frac{256}{0,5} = 512 \Rightarrow n-1 = 9, \quad n = 10.$$

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 0,5 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 0,5 \cdot 1023 = 511,5.$$

Ответ: $n = 10$, $S_n = 511,5$.

б) $b_1 = 80, \quad b_n = 5, \quad q = 0,5;$

Ответ: $n = 5, \quad S_n = 155.$

№ 1.339.

а) $b_1 = 90, \quad b_n = 3\frac{1}{3}, \quad n = 4;$

Ответ: $q = \frac{1}{3}, \quad S_n = 133\frac{1}{3}.$

б) $b_1 = \frac{1}{3}, \quad b_n = 81, \quad n = 6;$

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{b_n}{b_1}} = \sqrt[5]{81 \cdot 3} = 3.$$

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = \frac{729 - 1}{6} = \frac{728}{6} = \frac{364}{3} = 121\frac{1}{3}.$$

Ответ: $q = 3, \quad S_n = 121\frac{1}{3}.$

№ 1.340.

а) $b_1 = 2, \quad b_n = 1024, \quad S_n = 2046;$

Ответ: $q = 2, \quad n = 10.$

б) $b_1 = 512, \quad b_n = 1, \quad S_n = 1023;$

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{b_1 q^n - b_1}{q - 1} = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{b_n q - b_n + b_n - b_1}{q - 1} =$$

$$= \frac{b_n(q - 1) + b_n - b_1}{q - 1} = b_n + \frac{b_n - b_1}{q - 1}.$$

Отсюда $q = 1 + \frac{b_n - b_1}{S_n - b_n} = 1 + \frac{1 - 512}{1023 - 1} = 1 - \frac{511}{1022} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad 1 = 512 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 9, \quad n = 10.$$

Ответ: $q = \frac{1}{2}, \quad n = 10.$

№ 1.341.

а) $b_1 = 243, \quad q = -\frac{2}{3}, \quad n = 6;$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 243 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = -\frac{243 \cdot 32}{243} = -32.$$

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{b_1 q^n - b_1}{q - 1} = \frac{243 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^6 - 243}{-\frac{2}{3} - 1} = \frac{32 \cdot \frac{2}{3} - 243}{-\frac{5}{3}} =$$

$$= \frac{243 \cdot 3 - 64}{5} = \frac{665}{5} = 133.$$

Ответ: $b_n = -32$, $S_n = 133$.

б) $b_1 = -\frac{3}{2}$, $q = 2$, $n = 7$;

Ответ: $b_n = -96$, $S_n = 190\frac{1}{2}$.

№ 1.342.

а) $b_1 = 3$, $q = 2$, $S_n = 93$;

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{b_1 q^n - b_1}{q - 1} = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}. \text{ Отсюда}$$

$$b_n = \frac{1}{q} (b_1 + S_n (q - 1)) = \frac{1}{2} (3 + 93 \cdot 1) = \frac{96}{2} = 48.$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad 48 = 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = 16, \quad n = 5.$$

Ответ: $b_n = 48$, $n = 5$.

б) $b_1 = 6$, $q = -2$, $S_n = -510$;

Ответ: $b_n = -768$, $n = 8$.

№ 1.343.

а) $q = 0,5$, $n = 6$, $b_n = 3$.

$$b_1 = \frac{b_n}{q^{n-1}} = \frac{3}{(0,5)^5} = 3 \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96.$$

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 96 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 96 \cdot \frac{\frac{1}{64} - 1}{-\frac{1}{2}} = 96 \cdot \frac{64 - 1}{32} = 3 \cdot 63 = 189.$$

Ответ: $b_1 = 96$, $S_n = 189$.

б) $q = 3$, $n = 5$, $b_n = 486$;

Ответ: $b_1 = 6$, $S_n = 726$.

№ 1.344.

а) $q = 2$, $n = 11$, $S_n = 1023,5$;

Ответ: $b_1 = 0,5$, $b_n = 512$.

$$\text{б) } q = \frac{1}{3}, \quad n = 5, \quad S_n = 121.$$

$$b_1 = S_n \frac{q-1}{q^n-1} = 121 \cdot \frac{\frac{1}{3}-1}{\left(\frac{1}{3}\right)^5-1} = 121 \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{243}} = 121 \cdot \frac{2 \cdot 81}{243-1} = \\ = \frac{121 \cdot 2 \cdot 81}{242} = 81.$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{81}{81} = 1.$$

Ответ: $b_1 = 81$, $b_n = 1$.

№ 1.345.

$$\text{а) } q = 0,5, \quad b_n = 3, \quad S_n = 93;$$

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{b_1 q^n - b_1}{q - 1} = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}. \text{ Отсюда выражаем}$$

$$b_1 = b_n \cdot q - (q - 1)S_n = 3 \cdot 0,5 - (-0,5) \cdot 93 = 1,5 + 46,5 = 48.$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad 3 = 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 4, \quad n = 5.$$

Ответ: $b_1 = 48$, $n = 5$.

$$\text{б) } q = 3, \quad b_n = 54, \quad S_n = 80 \frac{2}{3};$$

$$\text{Ответ: } b_1 = \frac{2}{3}, \quad n = 5.$$

Пусть b_1 — первый член бесконечной геометрической прогрессии, q — ее знаменатель и S — сумма членов. По двум данным прогрессии найдите значение третьего (1.346 — 1.348):

№ 1.346.

$$\text{а) } b_1 = -20, \quad q = \frac{1}{7}.$$

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{-20}{1-\frac{1}{7}} = -\frac{140}{7-1} = -\frac{70}{3} = -23 \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ответ: } S = -23 \frac{1}{3}.$$

$$\text{б) } b_1 = 16, \quad q = -\frac{1}{4};$$

Ответ: $S = 12\frac{4}{5}$.

№ 1.347.

а) $q = -\frac{5}{8}$, $S = 80$.

Из формулы $S = \frac{b_1}{1-q}$ находим $b_1 = S(1-q) = 80\left(1 + \frac{5}{8}\right) = 130$.

Ответ: $b_1 = 130$.

б) $q = \frac{3}{7}$, $S = 42$;

Ответ: $b_1 = 24$.

№ 1.348.

а) $b_1 = 15$, $S = 18$.

Ответ: $q = \frac{1}{6}$.

б) $b_1 = 18$, $S = 15$;

Из формулы $S = \frac{b_1}{1-q}$ находим, что $q = 1 - \frac{b_1}{S} = 1 - \frac{18}{15} = 1 - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}$.

Ответ: $q = -\frac{1}{5}$.

Напишите формулу n -го члена и суммы n первых членов арифметической (a_n) или геометрической (b_n) прогрессии, если (1.349 – 1.352):

№ 1.349.

а) $a_2 + a_5 = 41$, $a_1 a_3 = 144$.

Необходимо найти a_1 и d . Равенства должны выполняться одновременно, следовательно, можно составить систему:

$$\begin{cases} a_2 + a_5 = 41 \\ a_1 a_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + d) + (a_1 + 4d) = 41 \\ a_1(a_1 + 2d) = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 5d = 41 \\ a_1^2 + 2da_1 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{41 - 2a_1}{5} \\ a_1^2 + 2 \frac{41 - 2a_1}{5} a_1 = 144 \end{cases} \Rightarrow 5a_1^2 + 82a_1 - 4a_1^2 = 720 \Leftrightarrow a_1^2 + 82a_1 - 720 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1 = -90$ или $a_1 = 8$.

Из первого уравнения последней системы находим при $a_1 = -90$,

$$d = \frac{41 - 2(-90)}{5} = \frac{41 + 180}{5} = \frac{221}{5}. \text{ При } a_1 = 8, \quad d = \frac{41 - 2 \cdot 8}{5} = \frac{25}{5} = 5.$$

Теперь выписываем a_n и S_n :

Либо $a_n = -90 + \frac{221}{5}(n-1) = -90 + 44,2(n-1) = -134,2 + 44,2n$ и

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = a_1 \cdot n + d \frac{n(n-1)}{2} = -90n + \frac{221}{5} \cdot \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= -90n + 22,1n(n-1) = -112,1n + 22,1n^2.$$

Либо $a_n = 8 + 5(n-1) = 3 + 5n$ и

$$S_n = 8n + 5 \frac{n(n-1)}{2} = 8n + 2,5(n^2 - n) = 5,5n + 2,5n^2.$$

Ответ: либо $a_n = -134,2 + 44,2n$ и $S_n = -112,1n + 22,1n^2$.

либо $a_n = 3 + 5n$ и $S_n = 5,5n + 2,5n^2$.

б) $b_3 - b_2 = 12, \quad 2b_3 + b_4 = 96$.

Составим систему

$$\begin{cases} b_1 q^2 - b_1 q = 12 \\ 2b_1 q^2 + b_1 q^3 = 96 \end{cases}.$$

Разделим второе уравнение на первое и сократим на $b_1 q$. По-

лучим $\frac{2q + q^2}{q - 1} = \frac{96}{12} = 8$. Приходим к квадратному уравнению

$$2q + q^2 = 8q - 8 \Leftrightarrow q^2 - 6q + 8 = 0 \Rightarrow q_1 = 2, \quad q_2 = 4.$$

Если $q = 2$, то $b_1 = \frac{12}{q^2 - q} = \frac{12}{4 - 2} = 6$.

Тогда $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 6 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n$; $S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 6 \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 6 \cdot (2^n - 1)$.

Если $q = 4$, то $b_1 = \frac{12}{16 - 4} = 1$.

В этом случае $b_n = 4^{n-1}$; $S_n = \frac{4^n - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

Ответ: либо $b_n = 3 \cdot 2^n$ и $S_n = 6(2^n - 1)$

либо $b_n = 4^{n-1}$ и $S_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

№ 1.350.

а) $b_1 = 8b_4, \quad b_5 = \frac{3}{16}$.

По условию $b_1 = 8b_1 \cdot q^3$ или $q = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$.

Далее $b_1 \cdot q^4 = \frac{3}{16}$.

Отсюда $b_1 = 3$. Теперь запишем $b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 6 \cdot 2^{-n}$;

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 3 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 6 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 6(1 - 2^{-n}).$$

Ответ: $b_n = 6 \cdot 2^{-n}$; $S_n = 6(1 - 2^{-n})$.

б) $a_2 + 2a_4 = 27$, $a_{17} = 50$.

Запишем систему:

$$\begin{cases} (a_1 + d) + 2(a_1 + 3d) = 27 \\ a_1 + 16d = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1 + 7d = 27 \\ a_1 + 16d = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1 + 7d = 27 \\ 3a_1 + 48d = 150 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7d - 48d = 27 - 150 \Rightarrow -41d = -123 \Rightarrow d = 3.$$

Отсюда $a_1 = 50 - 16d = 50 - 48 = 2$. Теперь $a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$;

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2 + 3n - 1}{2} \cdot n = \frac{3n + 1}{2} \cdot n.$$

Ответ: $a_n = 3n - 1$; $S_n = \frac{n(3n + 1)}{2}$.

№ 1.351.

а) $a_2 a_5 = 112$, $\frac{a_1}{a_5} = 2$;

Ответ: либо $a_n = 18 - 2n$ и $S_n = 17n - n^2$,

либо $a_n = 2n - 18$ и $S_n = n^2 - 17n$.

б) $a_3 a_4 = 28$, $\frac{a_1}{a_5} = 13$.

Запишем систему:

$$\begin{cases} (a_1 + 2d)(a_1 + 3d) = 28 \\ \frac{a_1}{a_1 + 4d} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 2d)(a_1 + 3d) = 28 \\ a_1 = 13a_1 + 52d \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(-\frac{13}{3}d + 2d\right)\left(-\frac{13}{3}d + 3d\right) = 28 \\ 3a_1 = -13d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(-\frac{7d}{3}\right)\left(-\frac{4d}{3}\right) = 28 \\ a_1 = -\frac{13}{3}d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d^2 = 9 \\ a_1 = -\frac{13}{3}d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 3 \\ a_1 = -13 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} d = -3 \\ a_1 = 13 \end{cases}.$$

Пусть $d = 3$, тогда

$$a_n = -13 + 3(n-1) = 3n - 16;$$

$$S_n = \frac{-13 + 3n - 16}{2} \cdot n = \frac{3n - 29}{2} \cdot n.$$

Пусть $d = -3$, тогда

$$a_n = 13 - 3(n-1) = 16 - 3n;$$

$$S_n = \frac{13 + 16 - 3n}{2} \cdot n = \frac{29 - 3n}{2} \cdot n.$$

Ответ: либо $a_n = 3n - 16$ и $S_n = \frac{3n - 29}{2} n$,

либо $a_n = 16 - 3n$ и $S_n = \frac{29 - 3n}{2} n$.

№ 1.352.

а) $b_3 b_4 = 27$, $\frac{b_{19}}{b_{17}} = 9$.

$$\frac{b_1 \cdot q^{18}}{b_1 \cdot q^{16}} = 9 \Rightarrow q^2 = 9 \text{ и } q_1 = +3, \quad q_2 = -3.$$

Далее $b_1 q^2 \cdot b_1 q^3 = 27 \Rightarrow b_1^2 = \frac{27}{q^5}$.

При $q = 3$ $b_1^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{3}$ или $b_1 = -\frac{1}{3}$.

Отсюда либо $b_n = \frac{1}{3} \cdot 3^{n-1} = 3^{n-2}$ и $S_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{1}{6} (3^n - 1)$,

либо $b_n = -\frac{1}{3} \cdot 3^{n-1} = -3^{n-2}$ и $S_n = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = -\frac{1}{6} (3^n - 1)$.

При $q = -3$ $b_1^2 = -\frac{1}{9}$ — нет решений.

Ответ: либо $b_n = 3^{n-2}$; $S_n = \frac{1}{6} (3^n - 1)$,

либо $b_n = -3^{n-2}$; $S_n = -\frac{1}{6} (3^n - 1)$.

б) $b_4 b_5 = 2$, $\frac{b_{17}}{b_{15}} = 0,25$;

Ответ: либо $b_n = 32\left(\frac{1}{2}\right)^n$; $S_n = 32\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$,

либо $b_n = -32\left(\frac{1}{2}\right)^n$; $S_n = -32\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

№ 1.353. В арифметической прогрессии вычислите:

а) $a_7^2 + 2a_7a_5 + a_5^2 - (a_8 + a_4)^2$;

Ответ: $\{0\}$.

б) $4a_9^2 - 4a_1a_9 + a_1^2 - a_{17}^2$.

$$4a_9^2 - 4a_1a_9 + a_1^2 - a_{17}^2 = (2a_9 - a_1)^2 - (a_1 + 16d)^2 = \\ = (2a_1 + 16d - a_1)^2 - (a_1 + 16d)^2 = (2a_1 + 16d)^2 - (a_1 + 16d)^2 = 0.$$

Ответ: $\{0\}$.

№ 1.354.

а) Найдите седьмой член арифметической прогрессии, если $a_3 + a_{11} = 20$.

$$a_3 + a_{11} = a_1 + 2d + a_1 + 10d = 2a_1 + 12d = 2(a_1 + 6d) = 2a_7 = 20.$$

Отсюда $a_7 = 10$.

Ответ: $\{10\}$.

б) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если $b_3 + b_4 = 2(b_4 + b_5)$.

$$b_1q^2 + b_1q^3 = 2(b_1q^3 + b_1q^4). \quad \text{Сократив на } b_1q^2, \text{ получим} \\ 1 + q = 2(q + q^2). \quad \text{Сократив на } (1 + q), \text{ находим } 1 = 2q \Rightarrow q = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

№ 1.355.

а) В арифметической прогрессии сумма первых пятнадцати ее членов на 8 меньше суммы первых двенадцати ее членов. Найдите a_{14} и S_{27} .

По условию $S_{15} - S_{12} = -8$. Составим уравнение

$$\frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 - \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = -8 \Leftrightarrow 15a_1 + 15a_{15} - 12a_1 - 12a_{12} = -16 \Leftrightarrow \\ 3a_1 + 15(a_1 + 14d) - 12(a_1 + 11d) = -16 \Leftrightarrow 6a_1 + 78d = -16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6(a_1 + 13d) = -16 \Leftrightarrow a_1 + 13d = a_{14} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3}.$$

$$S_{27} = \frac{a_1 + a_{27}}{2} \cdot 27 = \frac{a_1 + a_1 + 26d}{2} \cdot 27 = (a_1 + 13d) \cdot 27 = a_{14} \cdot 27 = -\frac{8}{3} \cdot 27 = -72.$$

Ответ: $a_{14} = -\frac{8}{3}$; $S_{27} = -72$.

б) Сумма первого, четвертого и тринадцатого членов арифметической прогрессии равна -23 . Найдите a_6 и S_{11} .

Составим уравнение $a_1 + a_4 + a_{13} = -23$

$$a_1 + (a_1 + 3d) + (a_1 + 12d) = -23 \Leftrightarrow 3a_1 + 15d = -23 \Leftrightarrow$$

$$3(a_1 + 5d) = 3a_6 = -23 \Rightarrow a_6 = -\frac{23}{3}.$$

$$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{a_1 + a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = (a_1 + 5d) \cdot 11 =$$

$$= a_6 \cdot 11 = -\frac{23}{3} \cdot 11 = -\frac{253}{3}.$$

Ответ: $a_6 = -\frac{23}{3}$; $S_{11} = -\frac{253}{3}$.

№ 1.356.

а) В геометрической прогрессии $b_2 = \sqrt[7]{2^6}$, $b_3 = 2$. Найдите $\frac{S_{14}}{S_7}$.

Ответ: $\{3\}$.

б) В геометрической прогрессии $b_3 = 3$, $b_4 = \sqrt[9]{3^{10}}$. Найдите $\frac{S_9}{S_{18}}$.

$$q = \frac{b_4}{b_3} = \frac{3^{\frac{10}{9}}}{3} = 3^{\frac{1}{9}}. \quad \frac{S_9}{S_{18}} = \frac{1 - q^9}{1 - q^{18}} = \frac{1 - 3}{1 - 3^2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

№ 1.357.

а) Второй член геометрической прогрессии составляет 20 % от ее первого члена. Сколько процентов составляет пятый ее член от третьего?

По условию задачи $\frac{b_2}{b_1} \cdot 100\% = 20\%$. Отсюда $q = \frac{b_2}{b_1} = 0,2$.

$$\frac{b_5}{b_3} \cdot 100\% = \frac{b_1 q^4}{b_1 q^2} \cdot 100\% = q^2 \cdot 100\% = 0,04 \cdot 100\% = 4\%.$$

Ответ: 4 %.

б) Второй член геометрической прогрессии составляет 110 % от ее первого члена. Сколько процентов составляет ее шестой член от четвертого?

Ответ: 121 %.

№ 1.358.

а) Банк дает своим вкладчикам 25 % годовых. Чему станет равен вклад 100 000 р. через 2 года?

Ответ: 156 250 р.

б) Снижение себестоимости товара равна 5 % в год. Первоначальная себестоимость товара равна 10 000 р. Чему станет равной его себестоимость через 2 года?

Пусть себестоимость товара равна A_0 . Тогда снижение себестоимости составит $A_0 \cdot 0,05$. Через год себестоимость товара станет $A_1 = A_0 - A_0 \cdot 0,05 = A_0(1 - 0,05)$. Аналогично, еще через один год себестоимость составит

$$A_2 = A_1(1 - 0,05) = A_0(1 - 0,05)^2 = 10000 \cdot 0,95^2 = 9025 \text{ рублей.}$$

Ответ: 9025 р.

№ 1.359.

а) Найдите квадрат разности девятого и седьмого членов арифметической прогрессии, если произведение восьмого и четвертого ее членов на 27 меньше произведения седьмого и пятого ее членов.

$$\begin{aligned} a_7 \cdot a_5 + a_8 \cdot a_4 = 27 &\Leftrightarrow (a_1 + 6d)(a_1 + 4d) - (a_1 + 7d)(a_1 + 3d) = 27 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_1^2 + 6a_1d + 4a_1d + 24d^2 - a_1^2 - 7a_1d - 3a_1d - 21d^2 = 27 &\Leftrightarrow 3d^2 = 27 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d^2 = 9. \end{aligned}$$

$$(a_9 - a_7)^2 = (2d)^2 = 4d = 4 \cdot 9 = 36.$$

Ответ: $\{36\}$.

б) Второй член арифметической прогрессии в 3 раза больше девятого ее члена. Найдите сумму первых двадцати четырех членов этой прогрессии.

$$\text{По условию } a_2 = 3a_9 \text{ или } a_1 + d = 3(a_1 + 8d) \Leftrightarrow 2a + 23d = 0$$

$$\begin{aligned} S_{24} = a_1 \cdot n + \frac{(n-1)n}{2}d &= 24a_1 + \frac{23 \cdot 24}{2}d = 24a_1 + 12 \cdot 23d = \\ = 12 \cdot (2a_1 + 23d) &= 0. \end{aligned}$$

Ответ: $\{0\}$.

№ 1.360.

а) В арифметической прогрессии 59, 55, 51 ... найдите сумму всех ее положительных членов.

Последний положительный член этой прогрессии найдем из условия

$a_n = a_1 + (n-1)d > 0$. Очевидно, $d = -4$, то есть $a_n = 59 - 4(n-1)$.
Имеем $59 - 4(n-1) > 0$, где n — максимальное целое. После упрощения $63 - 4n > 0$. Отсюда $n = 15$ и $a_{15} = 3$. Теперь находим сумму положительных (первых пятнадцати) членов этой прогрессии:

$$S = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{59 + 3}{2} \cdot 15 = 31 \cdot 15 = 465.$$

Ответ: $\{465\}$.

б) В арифметической прогрессии $-63, -58, -53, \dots$ найдите сумму всех ее отрицательных членов.

Ответ: $\{-429\}$.

№ 1.361.

а) В арифметической прогрессии девять членов, первый из которых $8,5$, а последний $10,9$. Напишите все члены этой прогрессии и найдите их сумму.

$$a_1 = 8,5, \quad a_9 = 10,9.$$

$$S = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{8,5 + 10,9}{2} \cdot 9 = 9,7 \cdot 9 = 87,3.$$

$$a_9 - a_1 = 8d = 10,9 - 8,5 = 2,4 \Rightarrow d = 0,3.$$

Прогрессия имеет вид: $8,5; 8,8; 9,1; 9,4; 9,7; 10,0; 10,3; 10,6; 10,9$.

Ответ: $(8,5; 8,8; 9,1; 9,4; 9,7; 10,0; 10,3; 10,6; 10,9); S = 87,3$.

б) В геометрической прогрессии пять положительных членов, первый из которых $1,5$, а последний 24 . Напишите все члены этой прогрессии и найдите их сумму.

$$b_1 = 1,5; \quad b_5 = 24.$$

$$\frac{b_5}{b_1} = q^4 = \frac{24}{1,5} = 16 \Rightarrow q = 2 \quad (\text{т.к. все члены прогрессии положительные и } b_1 > 0).$$

Прогрессия имеет вид: $1,5; 3; 6; 12; 24$.

$$S = 1,5 \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 1,5(32 - 1) = 46,5.$$

Ответ: $(1,5; 3; 6; 12; 24); S = 46,5$.

№ 1.362.

а) В бесконечной геометрической прогрессии $b_2 = 0,3$, $b_3 = -0,2$. Найдите сумму этой прогрессии.

$$q = \frac{b_3}{b_2} = -\frac{0,2}{0,3} = -\frac{2}{3}. \quad b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{0,3}{-\frac{2}{3}} = -\frac{0,9}{2} = -0,45.$$

$$S = \frac{b_1}{1-q} = -\frac{0,45}{1+\frac{2}{3}} = -\frac{0,45 \cdot 3}{5} = -0,27.$$

Ответ: $\{-0,27\}$.

б) В арифметической прогрессии $a_2 = 3,1$, $a_3 = 2,7$. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

$$d = a_3 - a_2 = 2,7 - 3,1 = -0,4; \quad a_1 = a_2 - d = 3,1 + 0,4 = 3,5.$$

$$S_{10} = a_1 \cdot n + \frac{d}{2}(n-1) \cdot n = 3,5 \cdot 10 - 0,2 \cdot 9 \cdot 10 = 35 - 18 = 17.$$

Ответ: $\{17\}$.

№ 1.363.

а) Найдите отношение суммы бесконечной геометрической прогрессии к сумме квадратов ее членов, если $b_2 = 2$, и $q = -\frac{1}{2}$.

Пусть b'_1 , и q' — первый член и знаменатель геометрической прогрессии, состоящей из квадратов членов данной прогрессии. Тогда $b'_1 = b_1^2$, и $q' = q^2$.

$$\text{Пусть } S' = \frac{b'_1}{1-q'} = \frac{b_1^2}{1-q^2}. \quad \frac{S}{S'} = \left(\frac{b_1}{1-q} \right) : \left(\frac{b_1^2}{1-q^2} \right) = \frac{1+q}{b_1};$$

$$\text{Так как } b_1 = \frac{b_2}{q}, \text{ то } \frac{S}{S'} = \frac{q(1+q)}{b_2} = \frac{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{8}\right\}$.

б) Найдите отношение суммы бесконечной геометрической прогрессии к сумме ее членов с нечетными номерами, если $b_1 = 3$, и $q = \frac{1}{3}$.

Прогрессия с нечетными номерами имеет вид $b_1 + b_1q^2 + b_1q^4 + b_1q^6 + \dots$, ее знаменатель равен q^2 , а первый член b_1 . Сумма этой прогрессии $S' = \frac{b_1}{1-q^2}$.

$$\text{Сумма исходной прогрессии } S = \frac{b_1}{1-q}. \text{ Отсюда } \frac{S}{S'} = 1+q = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

№ 1.364.

а) В арифметической прогрессии $a_n = 37,7 - 0,3n$. Найдите наибольший отрицательный член этой прогрессии.

Наибольший отрицательный член прогрессии — это первый отрицательный член. Таким образом нужно найти наименьшее целое n , такое что $a_n = 37,7 - 0,3n < 0$.

Отсюда $n > \frac{37,7}{0,3} = \frac{337}{3} = 125\frac{2}{3}$. То есть $n = 126$.

$$a_{126} = 37,7 - 0,3 \cdot 126 = 37,7 - 37,8 = -0,1.$$

Ответ: $\{-0,1\}$.

б) В арифметической прогрессии $a_n = 0,7n - 35,1$. Найдите наименьший положительный член этой прогрессии.

Ответ: $\{0,6\}$.

№ 1.365.

а) В арифметической прогрессии $a_n = 51 - 3n$. Найдите сумму всех положительных членов этой прогрессии.

Ответ: $\{408\}$.

б) В арифметической прогрессии $a_n = 5n - 100$. Найдите сумму всех отрицательных членов этой прогрессии.

Последний отрицательный член $a_{19} = -5$, т.к. $a_{20} = 0$.

$$a_1 = 5 - 100 = -95. S_{19} = \frac{a_1 + a_{19}}{2} \cdot 19 = \frac{-95 - 5}{2} \cdot 19 = -950.$$

Ответ: $\{-950\}$.

№ 1.366.

а) Докажите, что ординаты точек графика функции $y = 0,3x + 1$, имеющих абсциссами натуральные числа от 1 до 10, составляют арифметическую прогрессию, найдите ее сумму.

Ответ: $\{26,5\}$.

б) Докажите, что ординаты точек графика функции $y = 2 - 0,7x$, имеющих абсциссами натуральные числа от 2 до 9, составляют арифметическую прогрессию, найдите ее сумму.

Пусть $x = n$, причем $2 \leq n \leq 9$. Тогда для любого n $y_{n+1} - y_n = 2 - 0,7(n+1) - 2 + 0,7n = -0,7 = d$. По определению d — разность арифметической прогрессии.

$$S = \frac{a_2 + a_9}{2} \cdot 8 = \frac{2 - 0,7 \cdot 2 + 2 - 0,7 \cdot 9}{2} \cdot 8 = (4 - 7,7) \cdot 4 = -14,8.$$

Ответ: $\{-14,8\}$.

№ 1.367.

а) Градусные меры углов α_n составляют арифметическую прогрессию, у которой $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 35^\circ$. Найдите $\cos \alpha_{55}$.

$$d = \alpha_2 - \alpha_1 = 35^\circ - 30^\circ = 5^\circ.$$

$$\alpha_{55} = \alpha_1 + d \cdot 54 = 35^\circ + 5^\circ \cdot 54 = 30^\circ + 270^\circ = 300^\circ.$$

$$\cos 300^\circ = \cos(300^\circ - 360^\circ) = \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

б) Градусные меры углов α_n составляют арифметическую прогрессию, у которой $\alpha_1 = 10^\circ$, $\alpha_2 = 15^\circ$. Найдите $\sin \alpha_{44}$.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

№ 1.368.

а) Найдите пятый член арифметической прогрессии, если первый ее член равен $2\sqrt{5} - 11$, а третий $2 - 3\sqrt{5}$.

$$2d = a_3 - a_1 = 2 - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 11 = 13 - 5\sqrt{5}.$$

$$a_5 = a_1 + 4d = 2\sqrt{5} - 11 + 2 \cdot (13 - 5\sqrt{5}) = 15 - 8\sqrt{5}.$$

Ответ: $\{15 - 8\sqrt{5}\}$.

б) Найдите пятый член геометрической прогрессии, если третий ее член равен $2\sqrt{2} - 6$, а четвертый $4 - 6\sqrt{2}$.

$$q = \frac{b_4}{b_3} = \frac{4 - 6\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 6} = \sqrt{2}. \quad b_5 = b_4 q = (4 - 6\sqrt{2})\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 12.$$

Ответ: $\{4\sqrt{2} - 12\}$.

№ 1.369.

а) Сумма первых восьмидесяти трех членов арифметической прогрессии равна 5623. Найдите сумму первых восьмидесяти трех членов такой прогрессии, каждый член которой на 2 больше соответствующего члена данной прогрессии (ответ обоснуйте).

Ответ: $\{5789\}$.

б) Сумма первых ста семи членов арифметической прогрессии равна 4835. Найдите сумму первых ста семи членов такой прогрессии, каждый член которой на 3 меньше соответствующего члена данной прогрессии. (ответ обоснуйте).

Если члены исходной прогрессии обозначить a_n , то члены новой прогрессии будут $a'_n = a_n - 3$. Сумма новой прогрессии

$S'_n = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_{107} = a_1 - 3 + a_2 - 3 + \dots + a_{107} - 3 = S_n - 3 \cdot 107$. По условию $S_n = 4835$. Отсюда $S'_n = 4835 - 3 \cdot 107 = 4514$.

Ответ: $\{4514\}$.

№ 1.370.

а) В арифметической прогрессии сумма первых шестидесяти пяти членов равна 1223. Найдите сумму первых шестидесяти пяти членов такой прогрессии, каждый член которой составляет 30 % соответствующего члена данной прогрессии. (ответ обоснуйте).

По условию каждый член новой прогрессии (a'_n) равен $0,3 \cdot a_n$, где a_n — члены исходной прогрессии. Сумма первых шестидесяти пяти членов новой прогрессии

$$\begin{aligned} S'_{65} &= a'_1 + a'_2 + \dots + a'_{65} = 0,3 \cdot a_1 + 0,3 \cdot a_2 + \dots + 0,3 \cdot a_{65} = \\ &= 0,3 \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{65}) = 0,3 \cdot S_n = 0,3 \cdot 1223 = 366,9. \end{aligned}$$

Ответ: $\{366,9\}$.

б) Сумма первых восьмидесяти пяти членов геометрической прогрессии равна 2227. Найдите сумму первых восьмидесяти пяти членов такой прогрессии, каждый член которой составляет 40 % соответствующего члена данной прогрессии (ответ обоснуйте).

Ответ: $\{890,8\}$.

№ 1.371.

а) Докажите, что последовательность, заданная формулой общего члена $a_n = 3n - 77$, является арифметической прогрессией и найдите сумму всех ее отрицательных членов.

Ответ: $\{-950\}$.

б) Докажите, что последовательность, заданная формулой общего члена $a_n = 83 - 4n$, является арифметической прогрессией и найдите сумму всех ее положительных членов.

Покажем, что для любого натурального числа n разность соседних членов последовательности постоянна (по определению это разность арифметической прогрессии). В самом деле $a_{n+1} - a_n = 83 - 4(n+1) - 83 + 4n = -4$, что и требовалось доказать.

Последний положительный член прогрессии — это

$$a_{20} = 83 - 4 \cdot 20 = 3.$$

$$\text{Отсюда } S_{20} = \frac{a_1 + a_{19}}{2} \cdot 20 = 10 \cdot (83 - 4 + 3) = 820.$$

Ответ: $\{820\}$.

№ 1.372.

а) Найдите первый член арифметической прогрессии, если ее разность равна 8, а сумма первых двадцати членов равна сумме следующих за ними десяти членов этой прогрессии.

Ответ: $\{-49\}$.

б) Найдите разность арифметической прогрессии, если первый ее член равен 69, а сумма первых десяти членов равна сумме следующих за ними двадцати членов этой прогрессии.

Сумма следующих двадцати членов равна разности $S_{30} - S_{10}$.

По условию задачи $S_{30} - S_{10} = S_{10}$. Отсюда $2S_{10} = S_{30}$.

$$\begin{aligned} \text{Получаем уравнение } 2 \cdot \frac{(a_1 + a_{10})}{2} \cdot 10 &= \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 \Leftrightarrow 2(a_1 + a_1 + 9d) = \\ &= 3(a_1 + a_1 + 29d) \Leftrightarrow 4a_1 + 18d = 6a_1 + 87d \Leftrightarrow -2a_1 = 69d \Rightarrow \\ \Rightarrow d &= -\frac{2a_1}{69} = -\frac{2 \cdot 69}{69} = -2. \end{aligned}$$

Ответ: $\{-2\}$.

№ 1.373.

а) Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 7, а сумма квадратов всех ее членов 14. Найдите b_1 и b_2 .

Сумма квадратов членов прогрессии равна $S' = \frac{b_1^2}{1 - q^2}$, где b_1 и

q — соответственно первый член и знаменатель исходной прогрессии.

По условию

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{b_1}{1 - q} = 7 \\ \frac{b_1^2}{1 - q^2} = 14 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1}{1 - q} = 7 \\ \frac{b_1}{1 - q} \cdot \frac{b_1}{1 + q} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1}{1 - q} = 7 \\ 7 \cdot \frac{b_1}{1 + q} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 7(1 - q) \\ b_1 = 2(1 + q) \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow 7(1 - q) &= 2(1 + q) \Leftrightarrow q = \frac{5}{9}; b_1 = 2\left(1 + \frac{5}{9}\right) = \frac{28}{9}. \end{aligned}$$

$$b_2 = b_1 q = \frac{28}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{140}{81}.$$

Ответ: $b_1 = \frac{28}{9}; b_2 = \frac{140}{81}$.

б) Сумма бесконечной геометрической прогрессии в 1,75 раза больше суммы кубов всех ее членов. Найдите знаменатель прогрессии, если $b_1 = 1$.

Ответ: $\{0,5\}$.

№ 1.374.

а) Знаменатель геометрической прогрессии равен $-0,5$, а первый ее член 64 . Найдите сумму квадратов первых восьми членов этой прогрессии.

$$\text{Искомая сумма равна } S_n = b_1^2 \cdot \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2}.$$

Подставляя значения, получим

$$\begin{aligned} S_8 &= 64^2 \cdot \frac{1 - (-0,5)^{16}}{1 - (-0,5)^2} = 12^{12} \cdot \frac{1 - 2^{-16}}{1 - 0,25} = \frac{2^{12} - 2^{-4}}{0,75} = \frac{2^{16} - 1}{0,75 \cdot 16} = \\ &= \frac{(2^8 - 1)(2^8 + 1)}{12} = \frac{255 \cdot 257}{12} = \frac{85 \cdot 257}{4} = \frac{21845}{4} = 5461,25. \end{aligned}$$

Ответ: $\{5461,25\}$.

б) Первый член геометрической прогрессии равен $\frac{9}{32}$, а знаменатель 2 . Найдите сумму величин, обратных первым двадцати членам этой прогрессии.

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{349525}{49152} \right\}.$$

№ 1.375.

а) В арифметической прогрессии, состоящей из двадцати членов, сумма десяти членов с четными номерами на 80 больше, чем сумма десяти членов с нечетными номерами. Найдите разность прогрессии.

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = a_1 + a_1 + 2d + \dots + a_1 + 18d = \\ &= 10a_1 + 2d(1 + 2 + \dots + 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = a_1 + d + a_1 + 3d + \dots + a_1 + 19d = \\ &= 10a_1 + d(1 + 3 + \dots + 19) \end{aligned}$$

По условию $S_2 = 80 + S_1$. Получаем уравнение

$$\begin{aligned} 10a_1 + d(1 + 3 + \dots + 19) &= 80 + 10a_1 + 2d(1 + 2 + \dots + 9) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underbrace{d(1 + 3 + 5 + \dots + 19)}_{10} - \underbrace{d(2 + 4 + \dots + 18)}_9 &= 80 \Leftrightarrow \underbrace{d(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{10} = 80 \Rightarrow \\ \Rightarrow 10d &= 80 \text{ или } d = 8. \end{aligned}$$

Ответ: $\{8\}$.

б) В геометрической прогрессии, состоящей из тридцати членов, сумма пятнадцати членов с нечетными номерами в 3 раза меньше, чем сумма всех членов прогрессии. Найдите знаменатель прогрессии.

$$S = 3S_1. \quad b_1 \cdot \frac{1 - q^{30}}{1 - q} = 3b_1 \cdot \frac{1 - (q^2)^{15}}{1 - q^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1 - q} = \frac{3}{(1 - q)(1 + q)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + q = 3, \quad q = 2.$$

Ответ: $\{2\}$.

№ 1.376.

а) Длины сторон прямоугольного треугольника образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите синус меньшего угла этого треугольника.

Пусть стороны треугольника равны a , $a + d$, $a + 2d$ ($d > 0$). По теореме Пифагора

$$a^2 + (a + d)^2 = (a + 2d)^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ad - 3d^2 = 0 \Rightarrow a = -d \text{ или } a = 3d.$$

Первое значение не подходит, т.к. $a > 0$. Остается $a = 3d$. Синус меньшего угла равен $\frac{a}{a + d} = \frac{3d}{5d} = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\left\{\frac{3}{5}\right\}$.

б) Длины сторон прямоугольного треугольника образуют убывающую геометрическую прогрессию. Найдите косинус большего острого угла треугольника.

Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right\}$.

№ 1.377.

а) Градусные меры углов прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найдите тангенс меньшего острого угла треугольника.

Ответ: $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

б) Градусные меры углов треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найдите тангенс меньшего угла треугольника, если градусная мера его большего угла составляет 75° .

Пусть наименьший угол треугольника равен α . Тогда два других угла равны соответственно $\alpha + d$ и $\alpha + 2d$ ($d > 0$), причем по условию $\alpha + d = 75^\circ$.

Сумма углов треугольника равна 180° : $\alpha + \alpha + d + \alpha + 2d = 180^\circ$.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha + 2d = 75^\circ \\ 3\alpha + 3d = 180^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2d = 75^\circ \\ \alpha + d = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow d = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ.$$

$$\alpha = 60^\circ - d = 45^\circ. \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

Ответ: $\{1\}$.

№ 1.378.

а) Первый член арифметической прогрессии равен 111, а разность -6 . Какое наименьшее число последовательных членов этой прогрессии, начиная с первого, надо взять, чтобы их сумма была отрицательной?

Ответ: $\{39\}$.

б) Первый член арифметической прогрессии равен -100 , а разность 8 . Какое наименьшее число последовательных членов прогрессии надо взять, чтобы их сумма, начиная с первого, была положительной?

$$S_n = -100n + \frac{8}{2}(n-1) \cdot n > 0.$$

Таким образом нужно решить в целых числах данное неравенство.

$$4n^2 - 4n - 100n > 0 \Leftrightarrow n^2 - 26n > 0 \Leftrightarrow n(n-26) > 0.$$

Так как $n > 0$, то решением этого неравенства будет $n > 26$.

Минимальное $n = 27$.

Ответ: $\{27\}$.

№ 1.379.

а) Найдите сумму всех двузначных чисел, кратных пяти.

Данные числа образуют арифметическую прогрессию $10, 15, 20, \dots, 95$. У этой прогрессии $a_1 = 10$ и $d = 5$.

Число членов этой последовательности равно 18. Находим из уравнения $\left(n - 1 = \frac{a_n - a_1}{d}\right)$.

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{10 + 95}{2} \cdot 18 = 105 \cdot 9 = 945.$$

Ответ: $\{945\}$.

б) Найдите сумму всех двузначных чисел, кратных трем.

Ответ: $\{1665\}$.

№ 1.380.

а) При каких значениях x числа $1 + x$, $x^2 + 4$, $2x + 9$, $9x$ являются четырьмя последовательными членами арифметической прогрессии?

Согласно свойству арифметической прогрессии

$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2(x^2 + 4) = 1 + x + 2x + 9 \\ 2(2x + 9) = x^2 + 4 + 9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ x^2 + 5x - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

Ответ: $\{2\}$.

б) При каких значениях x числа $2x$, $5 - x$, $7 + x$, $20 - 4x$, являющиеся четырьмя последовательными членами геометрической прогрессии?

По свойству геометрической прогрессии $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (5-x)^2 = 2x \cdot (7+x) \\ (7+x)^2 = (5-x)(20-4x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - 10x + x^2 = 14x + 2x^2 \\ 49 + 14x + x^2 = 100 - 20x - 20x + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 24x - 25 = 0 \\ 3x^2 - 54x + 51 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

Ответ: $\{1\}$.

№ 1.381.

а) При каких значениях k числа $2k-1$, $2k+1$, $9k$, $k+26$ являются четырьмя последовательными членами геометрической прогрессии?

Ответ: $\{1\}$.

б) При каких значениях k числа $2k-2$, k^2+1 , $4k$, $3k^2-1$ являются четырьмя последовательными членами арифметической прогрессии?

Ответ: $\{2\}$.

№ 1.382.

а) Второй член арифметической прогрессии составляет 88 % от первого. Сколько процентов от первого члена составляет пятый член этой прогрессии?

Ответ: 52 %.

б) Второй член арифметической прогрессии составляет 107 % от первого. Сколько процентов от первого члена составляет десятый член этой прогрессии?

По условию $a_2 = 1,07 \cdot a_1 \Leftrightarrow a_1 + d = 1,07a_1 \Rightarrow d = 0,07a_1$.

$$a_{10} = a_1 + 9d = a_1 + 9 \cdot 0,07a_1 = a_1(1 + 0,63) = 1,63a_1.$$

Таким образом $\frac{a_{10}}{a_1} \cdot 100\% = 1,63 \cdot 100\% = 163\%$.

Ответ: 163 %.

№ 1.383.

а) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если отношение суммы первых ее девяти членов к сумме следующих за ними девяти членов этой же прогрессии равно 512.

$$S_{1-9} = b_1 \cdot \frac{1-q^9}{1-q}; \quad S_{10-19} = b_{10} \cdot \frac{1-q^9}{1-q} = b_1 q^9 \cdot \frac{1-q^9}{1-q}.$$

$$\frac{S_{1-9}}{S_{10-19}} = q^{-9} = 512 \Rightarrow q = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

б) Найдите разность арифметической прогрессии, если сумма первых ее ста членов на пятьдесят больше, чем сумма следующих за ними ста членов этой же прогрессии.

$$\frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 - \frac{a_{101} + a_{200}}{2} \cdot 100 = 50. \quad a_1 + a_{100} - a_{101} - a_{200} = 1.$$

$$a_1 + a_1 + 99d - a_1 - 100d - a_1 - 199d = 1. \quad -200d = 1 \Rightarrow d = -\frac{1}{200}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{200}\right\}.$

№ 1.384.

а) В арифметической прогрессии $\frac{a_{170}}{a_2} = 15$. Найдите $\frac{a_{21}}{a_{12}}$.

Ответ: $\left\{\frac{31}{22}\right\}.$

б) В арифметической прогрессии $\frac{a_{133}}{a_5} = 17$. Найдите $\frac{a_{25}}{a_{47}}$.

$$\frac{a_1 + 132d}{a_1 + 4d} = 17 \Leftrightarrow a_1 + 132d = 17a_1 + 68d \Leftrightarrow 16a_1 = 64d, \quad a_1 = 4d.$$

$$\frac{a_{25}}{a_{47}} = \frac{a_1 + 24d}{a_1 + 46d} = \frac{4d + 24d}{4d + 46d} = \frac{28d}{50d} = \frac{14}{25}.$$

Ответ: $\left\{\frac{14}{25}\right\}.$

№ 1.385.

а) В геометрической прогрессии $\frac{b_{18} + b_{19}}{b_8 + b_7} = 13$. Найдите отношение суммы первых двадцати четырех ее членов к сумме первых ее двенадцати членов.

$$\frac{b_1 \cdot q^{17} + b_1 \cdot q^{18}}{b_1 \cdot q^5 + b_1 \cdot q^6} = 13 \Leftrightarrow \frac{q^{12} + q^{13}}{1 + q} = 13 \Rightarrow q^{12} = 13.$$

$$\frac{S_{24}}{S_{12}} = \frac{b_1 \frac{1 - q^{24}}{1 - q}}{b_1 \frac{1 - q^{12}}{1 - q}} = \frac{1 - q^{24}}{1 - q^{12}} = \frac{(1 - q^{12})(1 + q^{12})}{1 - q^{12}} = 1 + q^{12} = 1 + 13 = 14.$$

Ответ: $\{14\}.$

б) В геометрической прогрессии отношение суммы первых ее восемнадцати членов к сумме первых ее девяти членов равно 7.

Найдите $\frac{b_{18} - b_{16}}{b_9 - b_7}$.

Ответ: $\{6\}$.

№ 1.386.

а) Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии в 3 раза больше ее первого члена. Найдите $\frac{b_5}{b_7}$.

Ответ: $\left\{\frac{9}{4}\right\}$.

б) Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии в 1,5 раза меньше ее первого члена. Найдите $\frac{b_{10}}{b_7}$.

$$1,5 \cdot b_1 \frac{1}{1-q} = b_1 \Rightarrow 1,5 = 1 - q \Rightarrow q = -0,5.$$

$$\frac{b_{10}}{b_7} = q^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{8}\right\}$.

№ 1.387.

а) Сколько надо взять последовательных натуральных чисел, кратных трем, начиная с 3, чтобы их сумма была равна 165?

Ответ: $\{10\}$.

б) Сколько надо взять последовательных натуральных чисел, кратных 7, начиная с 7, чтобы их сумма была равна 252?

Данная последовательность является арифметической прогрессией, у которой $a_1 = 7$ и $d = 7$. Для $S_n = 252$ необходимо найти n :

$$252 = 7n + 7 \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow 504 = 14n + 7n^2 - 7n \Leftrightarrow 7n^2 + 7n - 504 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 72 = 0.$$

$n_1 = 8$, $n_2 = -9$ — не подходит, т.к. n — натуральное число ($n > 0$). Окончательно $n = 8$.

Ответ: $\{8\}$.

№ 1.388. Последовательность (a_n) задана формулой своего n -го члена:

а) $a_n = \frac{3n+1}{2n+5}$. Найдите a_5 и номера члена последовательности,

равного $1\frac{12}{37}$.

Ответ: $a_5 = 1\frac{1}{15}$; $n = 16$.

б) $a_n = \frac{8n-3}{2n+7}$. Найдите a_6 и номер члена последовательности,

равного $3\frac{6}{37}$.

$$a_6 = \frac{8 \cdot 6 - 3}{2 \cdot 6 + 7} = \frac{48 - 3}{12 + 7} = \frac{45}{19} = 2\frac{7}{19}.$$

$$\frac{8n-3}{2n+7} = 3\frac{6}{37} = \frac{117}{37}. \quad 37 \cdot (8n-3) = 117 \cdot (2n+7) \Rightarrow n = 15.$$

Ответ: $a_6 = 2\frac{7}{19}$; $n = 15$.

№ 1.389.

а) В геометрической прогрессии первый член равен $\sqrt{2}$, а седьмой $\sqrt{128}$. Найдите восьмой член прогрессии.

$$b_1 = \sqrt{2}, \text{ а } b_7 = b_1 \cdot q^6 = \sqrt{2}q^6 = \sqrt{128} \Rightarrow q^6 = \sqrt{64} = 8 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2}.$$

$$b_8 = b_1 \cdot q^7 = \sqrt{2} \cdot (\pm\sqrt{2})^7 = \pm(\sqrt{2})^8 = \pm 2^4 = \pm 16.$$

Ответ: $b_8 = 16$ или $b_8 = -16$.

б) В геометрической прогрессии первый член равен $\sqrt{3}$, а пятый $\sqrt{243}$. Найдите шестой член прогрессии.

Ответ: $b_6 = 27$ или $b_6 = -27$.

№ 1.390.

а) В геометрической прогрессии первый член равен $\sqrt{3}$, а третий $\sqrt{27}$. Найдите четвертый член прогрессии.

$$b_1 = \sqrt{3}, \text{ а } b_3 = b_1 \cdot q^2 = \sqrt{3}q^2 = \sqrt{27} \Rightarrow q^2 = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow q = \pm\sqrt{3}.$$

$$b_4 = b_1 \cdot q^3 = \sqrt{3} \cdot (\pm\sqrt{3})^3 = \pm 9.$$

Ответ: $b_4 = 9$ или $b_4 = -9$.

б) В геометрической прогрессии первый член равен $\sqrt{2}$, а девятый $\sqrt{512}$. Найдите десятый член прогрессии.

Ответ: $b_{10} = 32$ или $b_{10} = -32$.

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ, КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

№ 1.401. Определите, какие из указанных точек принадлежат графику данной функции (ответ обоснуйте):

а) $y = x + x^{0.5} + 1$; $A(-4; -5)$, $B(0; 1)$, $C(4; 7)$, $D(4; 8)$;

Ответ: B и C .

б) $y = x + x^{-0.5}$; $A(-4; -4.5)$, $B(0; 0)$, $C(1; 2)$, $D\left(1; \frac{1}{2}\right)$;

$D[y] = (0; +\infty)$, т.е. ОДЗ данной функции $x > 0$. Отсюда следует, что точки A и B не принадлежат графику функции.

Подставим координаты остальных точек:

$2 = 1 + 1$ — верно, значит $C \in y(x)$.

$\frac{1}{2} = 1 + 1$ — неверно, значит $D \notin y(x)$.

Ответ: C .

№ 1.402. При каких значениях a график данной функции проходит через данную точку K :

а) $y = ax^2 - 5x - 3$; $K(-1; 3)$;

Ответ: $a = 1$.

б) $y = 3x^2 + ax - 1$; $K(-2; 1)$;

График функции $f(x)$ (совокупность точек с координатами $(x; y)$) проходит через данную точку тогда и только тогда, когда координаты точки, подставленные в уравнение $y = f(x)$, превращают его в верное равенство.

Подставим координаты точки K в уравнение и решим его:

$1 = 3(-2)^2 + a(-2) - 1 \Leftrightarrow 1 = 12 + 2a - 1 \Rightarrow a = 5$.

Ответ: $a = 5$.

№ 1.403.

а) Найдите $y\left(\frac{1}{2}\right)$, если $y = \frac{3x}{2x+1} + \frac{5x-1}{3x-1}$.

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2} + 1} + \frac{5 \cdot \frac{1}{2} - 1}{3 \cdot \frac{1}{2} - 1} = \frac{3}{2+2} + \frac{5-2}{3-2} = \frac{3}{4} + 3 = 3\frac{3}{4}.$$

Ответ: $\left\{3\frac{3}{4}\right\}$.

б) Найдите $y\left(\frac{1}{3}\right)$, если $y = \frac{7x}{3x-2} + \frac{2x+5}{2x-1}$;

Ответ: $\left\{-19\frac{1}{3}\right\}$.

№ 1.404.

а) Пусть $f(x) = x^2 - 3$. Найдите $f(1 - \sqrt{3}) + f(1 + \sqrt{3})$.

Ответ: $\{2\}$.

б) Пусть $f(x) = 7 - x^2$. Найдите $f(1 - \sqrt{2}) + f(1 + \sqrt{2})$.

$$f(1 - \sqrt{2}) + f(1 + \sqrt{2}) = 7 - (1 - \sqrt{2})^2 + 7 - (1 + \sqrt{2})^2 = 14 - 1 + 2\sqrt{2} - 2 - 1 - 2\sqrt{2} - 2 = 14 - 6 = 8.$$

Ответ: $\{8\}$.

№ 1.405.

а) Пусть $\varphi(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - \frac{x^2 - 8x + 16}{4 - x}$. Найдите $\varphi\left(\frac{3}{7}\right)$.

Представим $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = \sqrt{(x-2)^2} - \frac{(4-x)^2}{4-x} = |x-2| - (4-x) = |x-2| - 4 + x; \quad (x \neq 4).$$

$$\varphi\left(\frac{3}{7}\right) = \left|\frac{3}{7} - 2\right| - 4 + \frac{3}{7} = \left|-\frac{11}{7}\right| - 4 + \frac{3}{7} = \frac{11}{7} + \frac{3}{7} - 4 = 2 - 4 = -2.$$

Ответ: $\{-2\}$.

б) Пусть $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{3 - x} - \sqrt{x^2 - 8x + 16}$. Найдите $f\left(\frac{5}{9}\right)$.

Ответ: $\{-1\}$.

№ 1.406.

а) Пусть $\alpha(x) = \frac{x^2}{x-3}$. Найдите $\alpha(x_0 + 0,2) - \alpha(x_0)$, где $x_0 = 1$.

Ответ: $\{-0,3\}$.

б) Пусть $\beta(x) = \frac{x-2}{x^2}$. Найдите $\beta(x_0 - 0,1) - \beta(x_0)$, где $x_0 = 3$.

$$\begin{aligned} \beta(3 - 0,1) - \beta(3) &= \beta(2,9) - \beta(3) = \frac{2,9 - 2}{2,9^2} - \frac{3 - 2}{3^2} = \frac{0,9}{2,9^2} - \frac{1}{9} = \frac{\frac{9}{10}}{\left(\frac{29}{10}\right)^2} - \frac{1}{9} = \\ &= \frac{90}{29^2} - \frac{1}{9} = \frac{90}{841} - \frac{1}{9} = \frac{810 - 841}{841 \cdot 9} = -\frac{31}{7569}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{-\frac{31}{7569}\right\}$.

Найдите все значения аргумента, при которых $f(x) = f(a)$
(1.407–1.409):

№ 1.407.

а) $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$, $a = 5$.

Решаем уравнение $\frac{x^2}{x+3} = \frac{5^2}{5+3} = \frac{25}{8}$ (ОДЗ: $x \neq -3$).

$$8x^2 = 25x + 75 \Leftrightarrow 8x^2 - 25x - 75 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(8x+15) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 = 5 \text{ или } x_2 = -\frac{15}{8}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{15}{8}; 5\right\}$.

б) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$, $a = 2$.

Ответ: $\{2; 3\}$.

№ 1.408.

а) $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1}$, $a = 3$. ОДЗ: $|x| \neq 1$.

Ответ: $\left\{-\frac{3}{5}; 3\right\}$.

б) $f(x) = \frac{5}{3x} - \frac{2}{x+3}$, $a = -1$. ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq -3$.

Составим уравнение $\frac{5}{3x} - \frac{2}{x+3} = -\frac{5}{3} - \frac{2}{-1+3} = -\frac{5}{3} - 1 = -\frac{8}{3}$.

$$5(x+3) - 6x = -8x(x+3) \Leftrightarrow 8x^2 + 23x + 15 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(8x+15) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 = -1 \text{ или } x_2 = -\frac{15}{8}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{15}{8}; -1\right\}$.

№ 1.409.

а) $f(x) = \frac{3x-1}{x+2} - x$, $a = 0,4$;

Ответ: $\left\{0,4; \frac{11}{12}\right\}$.

б) $f(x) = 2x - \frac{x-1}{3x+2}$, $a = 0,25$;

Ответ: $\left\{-\frac{4}{11}; 0,25\right\}$.

№ 1.410.

а) Пусть $\varphi(x) = x - 3 + \frac{1-4x}{x}$. Докажите, что $\varphi(2,5) = \varphi(0,4)$.

Преобразуем $\varphi(x) = x - 3 + \frac{1}{x} - 4 = x + \frac{1}{x} - 7$. Из вида функции

$\varphi(x)$ очевидно, что $\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$. В самом деле $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}} - 7 = \frac{1}{x} + x - 7 = \varphi(x)$. Заметим, что $2,5 = \frac{1}{0,4}$, а так как $\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, то $\varphi(2,5) = \varphi(0,4)$. Что и требовалось доказать.

б) Пусть $\gamma(x) = \frac{3x-1}{x} - 2 - x$. Докажите, что $\gamma(0,8) = \gamma(1,25)$.

Доказывается аналогично варианту а).

Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций (1.411 – 1.412):

№ 1.411.

а) $y = x^2 + \frac{1}{x-4}$ и $y = \frac{4x-15}{x-4}$;

Ответ: $\{-2; 2\}$.

б) $y = x^2 - \frac{2}{x-3}$ и $y = \frac{9x-29}{x-3}$; ОДЗ: $x \neq 3$.

Решаем уравнение $x^2 - \frac{2}{x-3} = \frac{9x-29}{x-3} \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{x-3} = \frac{9(x-3)-2}{x-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{x-3} = 9 - \frac{2}{x-3} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = -3$ или $x_2 = 3$ — не подходит по ОДЗ.

Ответ: $\{-3\}$.

№ 1.412.

а) $y = x^2 - 3x + 1$ и $y = x + 7$.

Решаем уравнение $x^2 - 3x + 1 = x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{10}$.

Ответ: $\{2 - \sqrt{10}; 2 + \sqrt{10}\}$.

б) $y = 2x + 3$ и $y = \frac{1}{x}$;

Ответ: $\left\{ \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right\}$.

Найдите ординаты точек пересечения графиков функций (1.413–1.414):

№ 1.413.

а) $y = \frac{1}{x}$ и $y = 8x - 2$;

Точки пересечения графиков удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{x} = 8x - 2 \quad (x \neq 0) \Rightarrow 8x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4} \text{ или } x_2 = \frac{1}{2}.$$

Подставляем эти значения в любое из уравнений и получаем

$$y_1 = -4; \quad y_2 = 2.$$

Ответ: $\{-4; 2\}$.

б) $y = \frac{3}{x}$ и $y = 3x + 8$;

Ответ: $\{-1; 9\}$.

№ 1.414.

а) $y = x^3 - 5x + 1$ и $y = x^3$.

Решаем уравнение $x^3 - 5x + 1 = x^3 \Leftrightarrow -5x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$.

Подставляем, например, во второе уравнение $y = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$.

Ответ: $\left\{ \frac{1}{125} \right\}$.

б) $y = 3x - 1 - x^3$ и $y = 1 - x^3$;

Ответ: $\left\{ \frac{19}{27} \right\}$.

Найдите координаты общих точек графиков функций (1.415–1.416):

№ 1.415.

а) $y = x^2 - 3x - 1$ и $y = 2 - 5x^2$.

Сначала находим абсциссы, а затем ординаты точек пересечения графиков функций.

$$x^2 - 3x - 1 = 2 - 5x^2 \Leftrightarrow 6x^2 - 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \text{ или } x_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 2 - 5 = -3. \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad y_2 = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Ответ: } (1; -3) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right).$$

$$\text{б) } y = 3x^2 - 7x - 2 \text{ и } y = 2x^2 - 5x + 6;$$

$$\text{Ответ: } (-2; 24) \cup (4; 18).$$

№ 1.416.

$$\text{а) } y = \frac{3+x}{x-1} \text{ и } y = 2x+1;$$

$$\text{Ответ: } (2; 5) \cup (-1; -1).$$

$$\text{б) } y = \frac{5-x}{x-2} \text{ и } y = x-1;$$

$$\text{Ответ: } (-1; -2) \cup (3; 2).$$

№ 1.417. Докажите, что графики данных функций не имеют общих точек:

$$\text{а) } y = x^2 - 7x + 3 \text{ и } y = -x^2 - 11x - 2.$$

$$\text{Решим уравнение } x^2 - 7x + 3 = -x^2 - 11x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 5 = 0.$$

$$\text{Дискриминант этого уравнения } D = 16 - 40 = -24 < 0.$$

Следовательно, уравнение не имеет действительных корней, а графики — общих точек.

$$\text{б) } y = \frac{2}{x-1} \text{ и } y = x-3;$$

$$\text{Решим уравнение } \frac{2}{x-1} = 3-x \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 5}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2 + 1}{x-1} = 0.$$

Это уравнение действительных корней не имеет, т.к. числитель выражения никогда не обращается в ноль. Значит у графиков функций нет общих точек.

Найдите все такие a , что (1.418 — 1.419):

№ 1.418.

$$\text{а) } 2f(a) - 3f\left(\frac{1}{a}\right) = 0,5, \text{ где } f(x) = 3x - \frac{7}{x}.$$

$$\text{Ответ: } a = -10.$$

$$\text{б) } 7f(a) + 2f\left(\frac{1}{a}\right) = 4,5, \text{ где } f(x) = 2x - \frac{7}{x}.$$

Подставляем значение функции $f(x)$ в точках a и $\frac{1}{a}$ в уравнение. Получаем $7\left(2a - \frac{7}{a}\right) + 2\left(\frac{2}{a} - 7a\right) = 4,5 \Leftrightarrow 14a - \frac{49}{a} + \frac{4}{a} - 14a = 4,5 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\frac{45}{a} = 4,5 \Rightarrow a = -10.$

Ответ: $a = -10.$

№ 1.419.

а) $\varphi(a) = \varphi(-a)$, где $\varphi(x) = 3x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 5.$

$$3a^4 + a^3 - 2a^2 - 3a + 5 = 3a^4 - a^3 - 2a^2 + 3a + 5 \Leftrightarrow 2a^3 - 6a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(a^2 - 3) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_{2,3} = \pm\sqrt{3}.$$

Ответ: $\{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}.$

б) $\gamma(-a) + \gamma(a) = 0$, где $\gamma(x) = 2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 7x;$

Ответ: $\{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}.$

При каких значениях b точка графика с абсциссой x_0 лежит на оси абсцисс (1.420 – 1.421):

№ 1.420.

а) $y = bx^2 - 3x - 2b + 1, \quad x_0 = -0,9;$

Ответ: $\left\{3\frac{13}{119}\right\}.$

б) $y = 3x^2 + 2bx - x + b, \quad x_0 = -0,7.$

Точка лежит на оси абсцисс, если ее ордината равна нулю ($y(x) = 0$).

Подставим x_0 в уравнение $y(x) = 0$ и решим его относительно b :

$$3 \cdot 0,49 - 1,4b + 0,7 + b = 0 \Rightarrow 2,17 = 0,4b \Rightarrow b = 5,425.$$

Ответ: $\{5,425\}.$

№ 1.421.

а) $y = \frac{x-b}{3x+1} + bx, \quad x_0 = -1\frac{1}{3};$

$$\frac{-\frac{4}{3}-b}{-4+1} - \frac{4b}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} + b - 4b = 0, \quad b = \frac{4}{9}.$$

Ответ: $\left\{\frac{4}{9}\right\}.$

б) $y = \frac{2x+b}{5x-1} - bx, \quad x_0 = 2\frac{1}{5};$

Ответ: $\left\{ \frac{22}{105} \right\}$.

Найдите нули функции (1.422 – 1.423):

№ 1.422.

а) $\varphi(x) = x + \frac{3}{4x+13}$;

Ответ: $\{-3; -0,25\}$.

б) $\gamma(x) = 2x - \frac{3}{4x+1}$. ОДЗ: $x \neq -\frac{1}{4}$.

Решаем уравнение $2x - \frac{3}{4x+1} = 0 \Rightarrow 8x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{3}{4}$.

Ответ: $\left\{ -\frac{3}{4}; \frac{1}{2} \right\}$.

№ 1.423.

а) $t(x) = (x^2 - 25) \left(\frac{2}{x+5} + \frac{1}{x} \right)$. ОДЗ функции: $x \neq -5, x \neq 0$.

Решаем уравнение $t(x) = 0$:

$(x-5)(x+5) \left(\frac{2}{x+5} + \frac{1}{x} \right) = 0$. Это уравнение равносильно сово-

купности $\begin{cases} (x-5)(x+5) = 0 \\ \frac{2}{x+5} + \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \quad x \neq -5 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \frac{2x+x+5}{x(x+5)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$.

Ответ: $\left\{ -\frac{5}{3}; 5 \right\}$.

б) $p(x) = (x^2 - 3x) \left(\frac{2}{x-3} + \frac{5}{x+3} \right)$.

Ответ: $\left\{ 0; \frac{9}{7} \right\}$.

Найдите область определения функции и те значения аргумента, при которых $f(x) = a$ (1.424 – 1.428):

№ 1.424.

а) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $a = 3$;

Ответ: $[-5; 5]$; $x = \pm 4$.

б) $f(x) = \sqrt{x^2 - 144}$, $a = 5$.

Функция определена при $x^2 - 144 = 5$. Функция определена при $x^2 - 144 \geq 0$, т.е. $|x| \geq 12$. Решим уравнение $\sqrt{x^2 - 144} = 5$. Возведя в квадрат обе части уравнения, получим $x^2 - 144 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 169 \Rightarrow \Rightarrow x_{1,2} = \pm 13$.

Ответ: $(-\infty; -12] \cup [12; +\infty)$; $x = \pm 13$.

№ 1.425.

а) $f(x) = \frac{3x-7}{x^2-9}$, $a = 0,5$.

Функция определена при $|x| \neq 3$.

$$\frac{3x-7}{x^2-9} = 0,5 \Rightarrow 6x-14 = x^2-9 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Rightarrow x_1=1; x_2=5.$$

Ответ: $|x| \neq 3$; $x_1=1$; $x_2=5$.

б) $f(x) = \frac{5x+3}{x^2-1}$, $a = 4\frac{1}{3}$;

Ответ: $|x| \neq 1$; $x_1=2$; $x_2=-\frac{11}{13}$.

№ 1.426.

а) $f(x) = x\sqrt{3x-1}$, $a = 0$;

Ответ: $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; $x = \frac{1}{3}$

б) $f(x) = (x-1)\sqrt{x-2}$, $a = 0$.

Функция определена при $x \geq 2$.

$$(x-1)\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Rightarrow x=2, \text{ т.к. } x=1 \text{ не входит в}$$

область определения функции.

Ответ: $[2; +\infty)$; $x = 2$.

№ 1.427.

а) $f(x) = \frac{(x-1)\sqrt{5x-3}}{x-7}$, $a = 0$;

Функция определена при $x \geq \frac{3}{5}$ и $x \neq 7$.

$$\frac{(x-1)\sqrt{5x-3}}{x-7} = 0 \Rightarrow x=1; x=\frac{3}{5}.$$

Ответ: $\left[\frac{3}{5}; 7\right) \cup (7; +\infty)$; $x_1=1$; $x_2=\frac{3}{5}$.

$$\text{б) } f(x) = \frac{(5-x)\sqrt{7-3x}}{x+1}, \quad a = 0.$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -1) \cup \left[-1; \frac{7}{3}\right]; \quad x = \frac{7}{3}.$$

№ 1.428.

$$\text{а) } f(x) = \frac{3x}{x^2 + 3}, \quad a = 0,75.$$

Функция определена при любом действительном x , т.к. знаменатель не обращается в ноль.

$$\frac{3x}{x^2 + 3} = 0,75 \Leftrightarrow x^2 + 3 = 4x \Rightarrow x_1 = 1; \quad x_2 = 3.$$

$$\text{Ответ: } x \in R; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 3.$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 2}, \quad a = \frac{1}{3};$$

$$\text{Ответ: } x \in R; \quad x \in \emptyset.$$

Найдите область значения функции (1.429 – 1.432):

№ 1.429.

$$\text{а) } y = -x^2 + 5x + 1;$$

$$\text{Ответ: } \left[-\infty; \frac{29}{4}\right].$$

$$\text{б) } y = x^2 - 7x - 5.$$

Представим $y = (x-3,5)^2 - 17,25$. Ясно, что y меняется от $-17,25$ до $+\infty$.

$$\text{Ответ: } [-17,25; +\infty).$$

№ 1.430.

$$\text{а) } y = (3x-5)(1-x).$$

Представим функцию в виде

$$\begin{aligned} y &= -3\left(x - \frac{5}{3}\right)(x-1) = -3\left(\left(x - \frac{4}{3}\right) - \frac{1}{3}\right)\left(\left(x - \frac{4}{3}\right) + \frac{1}{3}\right) = \\ &= -3\left(\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right) = -3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}. \quad y \leq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \left[-\infty; \frac{1}{3}\right].$$

$$\text{б) } y = (5-x)(3-2x).$$

$$\text{Ответ: } \left[-\frac{49}{8}; +\infty\right).$$

№ 1.431.

а) $y = (x-1)^2 + (2x-3)^2$;

$$y = (x-1)^2 + (2x-3)^2 = x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 12x + 9 = 5x^2 - 14x + 10 = \\ = 5\left(x^2 - \frac{14}{5}x + 2\right) = 5\left(\left(x - \frac{7}{5}\right)^2 + \frac{1}{25}\right) = 5\left(x - \frac{7}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}.$$

Таким образом $y \geq \frac{1}{5}$.

Ответ: $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

б) $y = (2x-1)^2 - (3x-1)^2$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right]$.

№ 1.432.

а) $y = x - (2x-1)^2$;

Ответ: $\left(-\infty; \frac{9}{16}\right]$.

б) $y = 3x - (x+2)^2$.

Преобразуем $y = 3x - x^2 - 4x - 4 = -x^2 - x - 4 = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{15}{4}$.

Следовательно $y \leq \frac{15}{4}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{15}{4}\right]$.

№ 1.433.

а) Пусть $\varphi(x) = x^2 + 1$. Решите уравнение $\varphi(3t-1) = \varphi(1-2t)$.

Ответ: $t_1 = 0$; $t_2 = 0,4$.

б) Пусть $\gamma(x) = x^2 - 2$. Решите уравнение $\gamma(t+5) = \gamma(2-4t)$.

Уравнение имеет вид $(t+5)^2 - 2 = (2-4t)^2 - 2$.

После упрощения $t^2 + 10t + 25 = 4 - 16t + 16t^2 \Leftrightarrow 15t^2 - 26t - 21 = 0$.

$$t_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 15 \cdot 21}}{15} = \frac{13 \pm 22}{15}; \quad t_1 = -\frac{3}{5}, \quad t_2 = \frac{7}{3};$$

Ответ: $\left\{-\frac{3}{5}; \frac{7}{3}\right\}$.

№ 1.434.

а) Пусть $f(x) = x + \frac{3}{x}$. Найдите общие точки графиков функций $y = f(x+2)$ и $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Решим уравнение } f(x+2) &= f(x): (x+2) + \frac{3}{x+2} = x + \frac{3}{x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 + \frac{3}{x+2} - \frac{3}{x} &= 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x+2) + 3x - 3(x+2)}{x(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 4x - 6}{x(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-1)}{x(x+2)} &= 0 \Rightarrow x_1 = -3; \quad x_2 = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Далее } y_1 = f(x_1) = -3 + \frac{3}{-3} = -4; \quad y_2 = f(x_2) = 1 + \frac{3}{1} = 4.$$

Ответ: $(-3; -4) \cup (1; 4)$.

б) Пусть $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$. Найдите общие точки графиков функций $y = f(4x)$ и $y = f(x)$.

Ответ: $(-1; -10) \cup (1; 10)$.

№ 1.435. Найдите координаты тех точек графика функции, для которых абсцисса равна ординате:

а) $y = x^2 + 6x + 4$;

Ответ: $(-1; -1) \cup (-4; -4)$.

б) $y = x^2 - 7x + 9$.

Решаем уравнение

$$x = x^2 - 7x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 9 = 0, \quad x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 9} = 4 \pm \sqrt{7}.$$

$$x_1 = y_1; \quad x_2 = y_2.$$

Ответ: $(4 - \sqrt{7}; 4 - \sqrt{7}) \cup (4 + \sqrt{7}; 4 + \sqrt{7})$.

№ 1.436.

а) Найдите координаты точек графика функции $y = x + \frac{3}{x}$, отстоящих от оси ординат на 1,5.

Ответ: $(-1,5; -3,5) \cup (1,5; 3,5)$.

б) Найдите координаты точек графика функции $y = 2x - \frac{1}{x}$, отстоящих от оси ординат на 2,5.

Абсциссы данных точек равны $\pm 2,5$. Подставляя их в уравнение, находим ординаты $y(2,5) = 2 \cdot 2,5 - \frac{1}{2,5} = 5 - 0,4 = 4,6$;

$$y(-2,5) = -5 + 0,4 = -4,6.$$

Ответ: $(2,5;4,6) \cup (-2,5;-4,6)$.

№ 1.437.

а) Найдите координаты точек графика функции

$$y = 2x + \sqrt{9x^2 - 16}, \text{ отстоящих от оси ординат на } \frac{5}{3}.$$

Абсциссы данных точек равны $\pm \frac{5}{3}$. Найдем ординаты:

$$y\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{10}{3} + \sqrt{25 - 16} = -\frac{10}{3} + 3 = -\frac{1}{3};$$

$$y\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{10}{3} + 3 = \frac{19}{3}.$$

Ответ: $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; \frac{19}{3}\right)$.

б) Найдите координаты точек графика функции

$$y = \sqrt{25 - 16x^2} - 5x, \text{ отстоящих от оси ординат на } 0,75.$$

Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; \frac{31}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

№ 1.438.

а) Найдите координаты точек графика функции $y = x^2 - 2x - 7$, отстоящих от оси абсцисс на 8.

Ответ: $(-3;8) \cup (1;-8) \cup (5;8)$.

б) Найдите координаты точек графика функции $y = -x^2 + 6x - 7$, отстоящих от оси абсцисс на 2.

Ординаты данных точек равны ± 2 . Решая пару уравнений $-x^2 + 6x - 7 = \pm 2$, находим абсциссы точек:

$$-x^2 + 6x - 7 = 2 \Rightarrow x_{1,2} = 3$$

$$-x^2 + 6x - 7 = -2 \Rightarrow x_3 = 1; x_4 = 5.$$

Ответ: $(3;2) \cup (1;-2) \cup (5;-2)$.

№ 1.439.

а) Найдите координаты точек графика функции $y = x + \frac{3}{x}$, отстоящих от оси абсцисс на 4.

$$x + \frac{3}{x} = \pm 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{x} = 4 \\ x + \frac{3}{x} = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 3 \\ x_3 = -1, x_4 = -3 \end{cases}$$

Ответ: $(-1;-4) \cup (-3;-4) \cup (1;4) \cup (3;4)$.

б) Найдите координаты точек графика функции $y = 4x - \frac{1}{x}$, отстоящих от оси абсцисс на 3.

Ответ: $(-1;-3) \cup \left(-\frac{1}{4};3\right) \cup \left(\frac{1}{4};-3\right) \cup (1;3)$.

Постройте график функции $y = kx + b$ и укажите не менее трех точек, лежащих на этом графике (1.440 – 1.443):

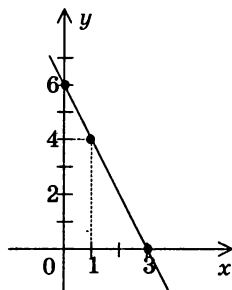
№ 1.440.

а) $k = 3$, $b = -5$. $y = 3x - 5$

Ответ: на графике лежат точки $(0;-5) \cup \left(\frac{5}{3};0\right) \cup (1;-2)$.

б) $k = -2$, $b = 6$. $y = -2x + 6$.

При $x = 0$, $y = 6$; при $y = 0$, $x = 3$; при $x = 1$, $y = 4$.



Ответ: графику принадлежат точки $(0;6) \cup (3;0) \cup (1;4)$.

№ 1.441.

а) $k = -2$ и график проходит через точку $M(-3;8)$.

Функция $y = (x)$ имеет вид $y = -2x + b$.

Найдем b . Для этого подставим координаты точки M в уравнение:

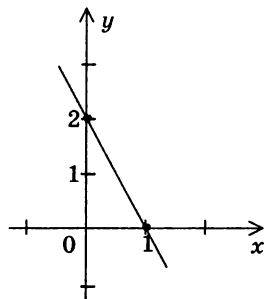
$$8 = -2 \cdot (-3) + b \Rightarrow b = 2.$$

Искомая функция есть $y = -2x + 2$.

При $x = 0$, $y = 2$; при $y = 0$, $x = 1$;

при $x = -3$, $y = 8$.

Нарисуем график:



Ответ: графику принадлежат точки $(0;2) \cup (1;0) \cup (-3;8)$.

б) $b = -1$ и график проходит через точку $K(-1; 5)$.

Функция имеет вид $y = -6x - 1$.

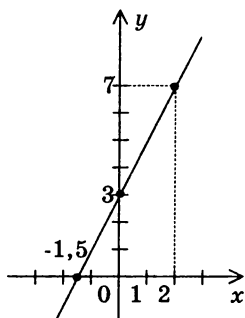
Ответ: точки, лежащие на графике $(0; -1) \cup \left(-\frac{1}{6}; 0\right) \cup (-1; 5)$.

№ 1.442.

а) Прямая параллельна прямой $y = 2x$ и проходит через точку $K(2; 7)$.

Семейство прямых, параллельных прямой $y = 2x$, дается формулой $y = 2x + b$. Все эти прямые имеют коэффициент $k = 2$. Величину b находим из условия прохождения графика функции через точку K :

$7 = 2 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 3$. Таким образом $y = 2x + 3$.



Ответ: графику принадлежат точки $(0; 3) \cup \left(-\frac{3}{2}; 0\right) \cup (2; 7)$.

б) Прямая параллельна прямой $y = -3x$ и проходит через $P(1; 4)$.

Ответ: графику функции $y = -3x + 7$ принадлежат точки $(0; 7) \cup \left(\frac{7}{3}; 0\right) \cup (1; 4)$.

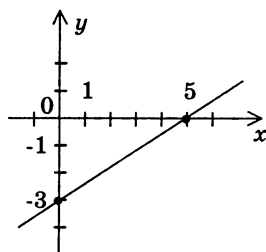
№ 1.443. График пересекает оси координат в точках:

а) $A(0; -3)$, $B(5; 0)$.

В общем виде $y = kx + b$. Из условия принадлежности точек A и B графику функции имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} -3 = k \cdot 0 + b \\ 0 = k \cdot 5 + b \end{cases} \Rightarrow b = -3; k = \frac{3}{5}.$$

Итак, $y = \frac{3}{5}x - 3$. Помимо точек A и B на графике лежит, например, точка $(10; 3)$. Строим график, проводя прямую через точки A и B :



б) $M(0; 5)$, $K(-2; 0)$;

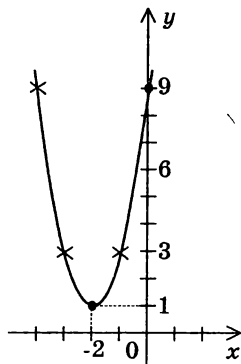
Ответ: график функции $y = \frac{5}{2}x + 5$ помимо точек M и K содержит, например, точку $\left(\frac{2}{5}; 6\right)$.

Постройте график функции $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, записав аналитическое задание функции y (1.444 – 1.447):

№ 1.444.

а) $a = 2$, $x_0 = -2$, $y_0 = 1$.

$y = 2(x + 2)^2 + 1$. Вершина параболы находится в точке $(-2; 1)$. С осью OY парабола пересекается в точке $(0; 9)$. График получается параллельным переносом графика функции $y = 2x^2$ из точки $(0; 0)$ в точку $(-2; 1)$:



б) $a = -1$, $x_0 = 3$, $y_0 = 4$.

Функция $y = -(x - 3)^2 + 4$. Вершина параболы находится в точке $(3; 4)$. Точка пересечения с осью OY $(0; -5)$. График получается сдвигом графика $y = -x^2$ на вектор $(3; 4)$.

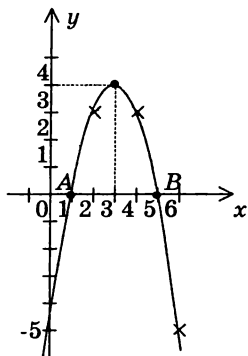
№ 1.445.

а) $a = 1$ и график проходит через точки $M(-2; 0)$, $K(4; 0)$;

Ответ: $y = (x - 1)^2 - 9$.

б) $a = -1$ и график проходит через точки $A(1; 0)$, $(5; 0)$;

В общем виде $y = -(x - x_0)^2 + y_0$. Значения x_0 и y_0 находим, решая систему уравнений, получающуюся при подстановке координат точек A и B в уравнение.



$$\begin{cases} -(1 - x_0)^2 + y_0 = 0 \\ -(5 - x_0)^2 + y_0 = 0 \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем: $-1 + 2x_0 + 25 - 10x_0 = 0$.

$$8x_0 = 24 \Rightarrow x_0 = 3.$$

$$y_0 = (1 - x_0)^2 = (1 - 3)^2 = 4.$$

Итак, $y(x) = -(x - 3)^2 + 4$. Рисуем график:

График идентичен графику задачи 1.44.б.

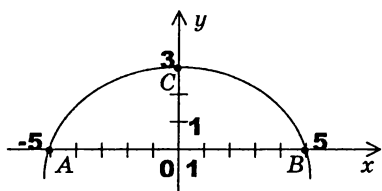
№ 1.446. График пересекает оси координат в точках:

а) $A(-5; 0)$, $B(5; 0)$, $C(0; 3)$;

Значения a , x_0 , y_0 находим, решая систему уравнений, образующуюся после подстановки координат точек A , B , C в уравнение

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

$$\begin{cases} a(-5 - x_0)^2 + y_0 = 0 \\ a(5 - x_0)^2 + y_0 = 0 \\ ax_0^2 + y_0 = 3 \end{cases}.$$



Вычитая из первого уравнения второе, получаем: $20x_0a = 0$. Так как $a \neq 0$, то $x_0 = 0$. Из третьего уравнения $-y_0 = 3$ при $x_0 = 0$.

$$a = \frac{-y_0}{(-5 - x_0)^2} = -\frac{3}{25}.$$

Окончательно $y(x) = -\frac{3}{25}x^2 + 3$.

Ответ: $y = -\frac{3}{25}x^2 + 3$.

б) $K(-2; 0)$, $P(2; 0)$, $T(0; -4)$;

Ответ: $y(x) = x^2 - 4$.

№ 1.447.

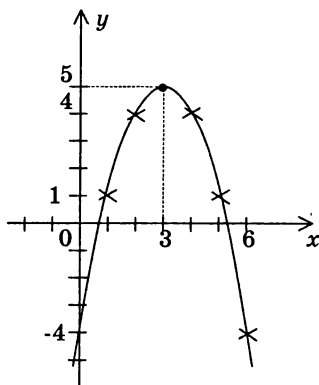
а) Вершиной графика является точка $M(2; 4)$ и график проходит через точку $A(1; 5)$.

Ответ: $y = (x - 2)^2 + 4$.

б) Вершиной графика является точка $K(3; 5)$ и график проходит через точку $B(2; 4)$.

Из условия ясно, что $x_0 = 3$ и $y_0 = 5$, т.к. в точке K находится вершина параболы. Уравнение параболы имеет вид $y = a(x - 3)^2 + 5$. Величину a находим, подставляя координаты точки B : $4 = a(2 - 3)^2 + 5 \Rightarrow a = -1$.

Итак $y(x) = -(x - 3)^2 + 5$. Рисуем график:

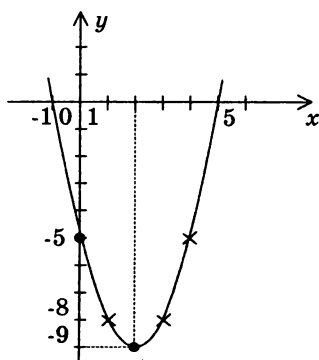


Постройте график функции и укажите интервалы ее знакопостоянства (1.448 – 1.451):

№ 1.448.

а) $y = x^2 - 4x - 5$.

Представим функцию в виде $y = (x+1)(x-5)$. Очевидно, $y < 0$ при $x \in (-1; 5)$ и $y > 0$ при $x \in (5; +\infty) \cup (-\infty; -1)$. Чтобы нарисовать график представим функцию в виде $y = (x-2)^2 - 9$. Точки пересечения графика с осями координат $(0; -5) \cup (-1; 0) \cup (5; 0)$.



б) $y = -x^2 - 2x + 3$.

$y = (x+3)(1-x) = -(x+1)^2 + 4$.

Ответ: $y < 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; $y > 0$ при $x \in (-3; 1)$.

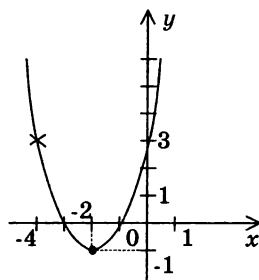
№ 1.449.

а) $y = x^2 + 4x + 3$.

$y = (x+3)(x+1) = (x+2)^2 - 1$.

Ответ: $y > 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$;

$y < 0$ при $x \in (-3; -1)$.



б) $y = -x^2 + 6x - 5$.

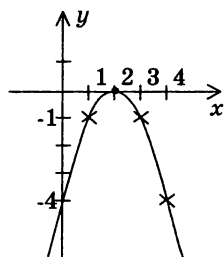
$y = -(x-1)(x-5) = -(x-3)^2 + 4$.

Ответ: $y > 0$ при $x \in (1; 5)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$.

№ 1.450.

а) $y = -x^2 + 4x - 4$.

$y = -(x-2)^2$. $y < 0$ при $x \neq 2$.



Ответ: $y > 0$ при $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$;

$$\text{б) } y = 2x^2 - 4x + 3.$$

$y = 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = 2(x-1)^2 + 1$. Таким образом $y > 0$ при любом x .

Ответ: $y > 0$ при $\forall x \in R$.

№ 1.451.

$$\text{а) } y = -\frac{1}{2}x^2 - x.$$

$$y = -\frac{1}{2}x(x+2) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}.$$

Ответ: $y > 0$ при $x \in (-2; 0)$;

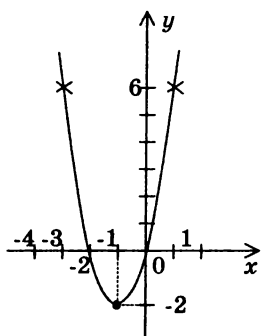
$y < 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

$$\text{б) } y = 2x^2 + 4x.$$

$$y = 2x(x+2) = 2(x+1)^2 - 2.$$

Ответ: $y > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$;

$y < 0$ при $x \in (-2; 0)$.



Постройте график функции и укажите с его помощью промежутки монотонности функции (1.452 – 1.455):

№ 1.452.

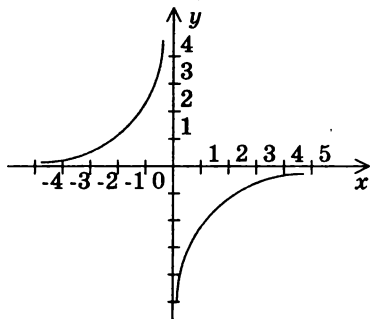
$$\text{а) } y = x^2 - 6x + 9;$$

$$y = (x-3)^2.$$

Ответ: функция убывает на $(-\infty; 3]$, возрастает на $[3; +\infty)$.

$$\text{б) } y = -\frac{2}{x}.$$

График функции – гиперболоа. В точке $x = 0$ функция не определена.



Ответ: функция возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.

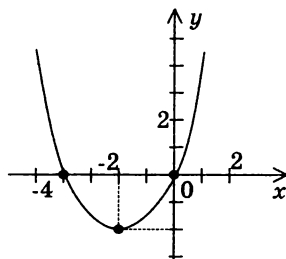
№ 1.453.

а) $y = \frac{3}{x}$;

Ответ: функция убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.

б) $y = 0,5x^2 + 2x$.

$$y = \frac{1}{2}(x^2 + 4x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2.$$



Ответ: функция убывает на $(-\infty; -2]$ и возрастает на $[-2; +\infty)$.

№ 1.454.

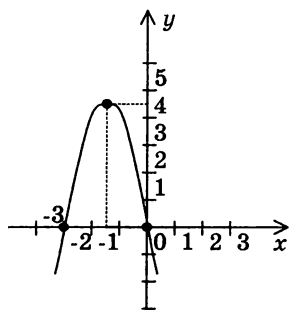
а) $y = -\frac{1}{2x}$;

Ответ: функция возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.

б) $y = -2x^2 - 6x$.

$$y = -2(x^2 + 3x) = -2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}.$$

Ответ: функция возрастает на $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$ и убывает на $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.



№ 1.455.

а) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 0,5$;

$$y = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) = -\frac{1}{2}(x-1)^2.$$

Ответ: функция возрастает на $(-\infty; 1]$ и убывает на $[1; +\infty)$.

б) $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$;

$$y = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 9) = \frac{1}{3}(x-3)^2.$$

Ответ: функция убывает на $(-\infty; 3]$ и возрастает на $[3; +\infty)$.

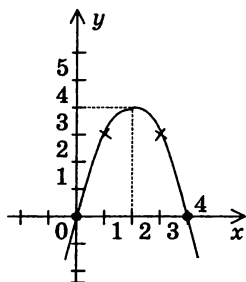
Постройте график функции при указанных значениях x и определите область значений этой функции при этих x (1.456 – 1.458):

№ 1.456.

а) $y = x^2 - 2x - 3$, где $x \in (-\infty; +\infty)$;

$$y = (x-1)^2 - 4 \Rightarrow y \in [-4; +\infty).$$

Ответ: $y \in [-4; +\infty)$.



б) $y = -x^2 + 4x$, где $x \in (-\infty; +\infty)$;

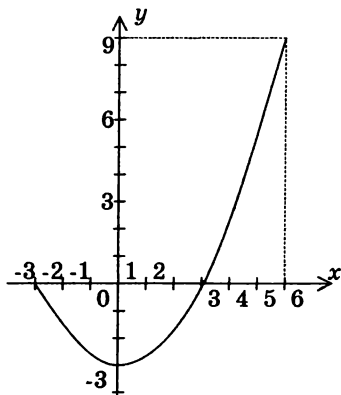
$$y = -(x-2)^2 + 4 \Rightarrow y \in (-\infty; 4].$$

Ответ: $y \in (-\infty; 4]$.

№ 1.457.

а) $y = \frac{1}{3}x^2 - 3$, где $x \in [-3; 6]$;

График — часть параболы. Из рисунка видно, что $y \in [-3; 9]$.



Ответ: $y \in [-3; 9]$.

б) $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$, где $x \in [-4; 2]$;

Ответ: $y \in [-6; 2]$.

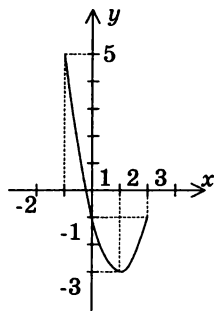
№ 1.458.

а) $y = 2x^2 - 4x - 1$, где $x \in [-1; 2]$;

$$y = 2(x^2 - 2x + 1) - 3 = 2(x-1)^2 - 3.$$

Максимум достигается в точке $(-1; 5)$, минимум — в точке $(1; -3)$.

Ответ: $y \in [-3; 5]$.



б) $y = 3x - 0,5x^2$, где $x \in [2; 7]$.

$$y = -0,5(x^2 - 6x) = -0,5(x^2 - 6x + 9) + 4,5 = -0,5(x - 3)^2 + 4,5 \dots$$

Ответ: $y \in [-3,5; 4,5]$.

Не выполняя построения графиков функций, постройте прямую, проходящую через общие точки этих графиков, и задайте аналитически уравнение этой прямой (1.459 – 1.460):

№ 1.459.

а) $y = x^2 - 2x - 3$ и $y = -x^2 + 2x - 1$;

Ответ: $y = -2$.

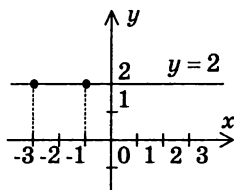
б) $y = x^2 + 4x + 5$ и $y = -x^2 - 4x - 1$.

Для нахождения общих точек решаем уравнение

$$x^2 + 4x + 5 = -x^2 - 4x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -3.$$

Подставляем значения x_1 и x_2 в любое уравнение и находим ординаты точек: $y_1 = (-1)^2 + 4(-1) + 5 = 2$; $y_2 = (-3)^2 + 4(-3) + 5 = 2$.

Следовательно, уравнение прямой есть $y = 2$.



Ответ: $y = 2$.

№ 1.460.

а) $y = x^2 - 2x$ и $y = 4x - x^2$;

Ответ: $y = x$.

б) $y = 2x^2 - 5x$ и $y = x^2 - 2x$.

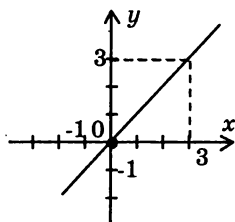
Решаем уравнение $2x^2 - 5x = x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$.

Находим $y_1 = 0$ и $y_2 = 3^2 + 2 \cdot 3 = 9$.

График прямой $y = kx + b$ проходит через точки $(0; 0)$ и $(3; 9)$. Параметры k и b находим из системы

$$\begin{cases} 0 = k \cdot 0 + b \\ 9 = k \cdot 3 + b \end{cases} \Rightarrow b = 0; k = 3.$$

То есть уравнение прямой $y = 3x$.



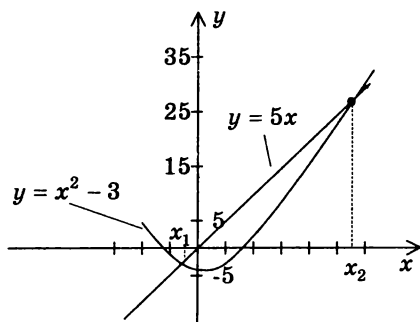
Решите графически уравнение (1.461 – 1.466):

№ 1.461.

а) $x^2 - 3 = 5x$

Строим графики функций

$y = x^2 - 3$ и $y = 5x$ на-
ходим точки пересечения. Абс-
циссы этих точек и будут ре-
шением уравнения.

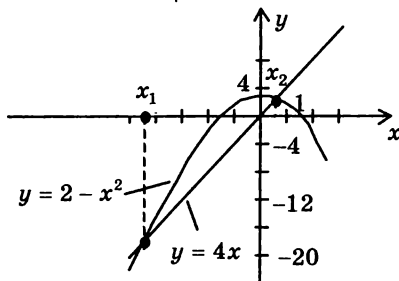


Ответ: $x_1 \approx -0,5$, $x_2 \approx 5,5$.

б) $2 - x^2 = 4x$

Строим графики функций

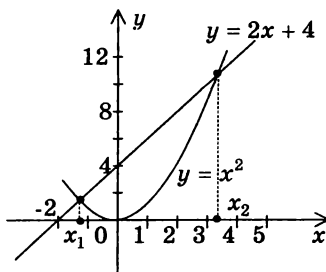
$y = 2 - x^2$ и $y = 4x$



Ответ: $x_1 \approx -4,5$, $x_2 \approx 0,4$.

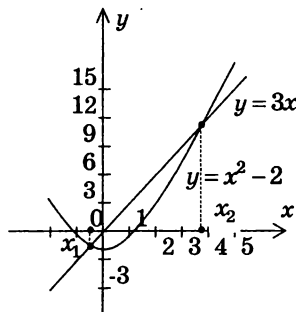
№ 1.462.

а) $x^2 = 2x + 4$



Ответ: $x_1 \approx -1,2$, $x_2 \approx 3,2$.

б) $x^2 - 2 = 3x$

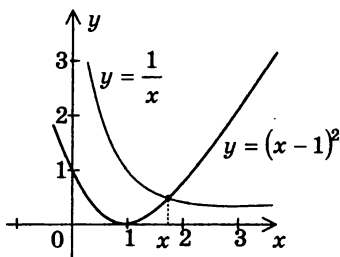


Ответ: $x_1 \approx -0,5$, $x_2 \approx 3,5$.

№ 1.463.

а) $\frac{1}{x} = (x-1)^2$

Строим графики функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = (x-1)^2$ и находим точку их пересечения.



Ответ: $x \approx 1,75$.

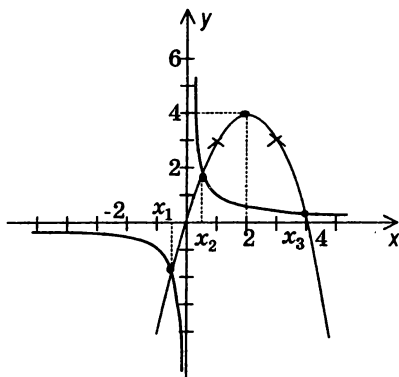
б) $(x+1)^2 = -\frac{2}{x}$.

Ответ: $x = -2$.

№ 1.464.

а) $\frac{1}{x} = 4x - x^2$

Строим графики функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = 4x - x^2 = -(x-2)^2 + 4$.



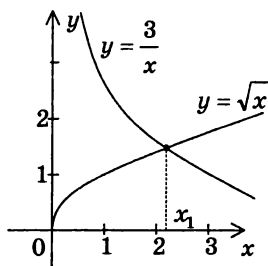
Ответ: $x_1 \approx -0,4$; $x_2 \approx 0,5$; $x_3 \approx 3,9$.

б) $x^2 - 6x = -\frac{3}{x}$.

Ответ: $x_1 \approx -0,7$; $x_2 \approx 0,8$; $x_3 \approx 5,9$.

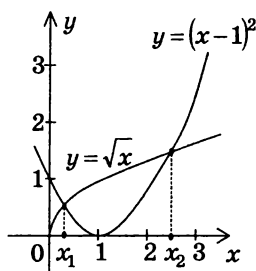
№ 1.465.

а) $\sqrt{x} = \frac{3}{x}$



Ответ: $x_1 \approx 2,1$.

б) $(x-1)^2 = \sqrt{x}$;

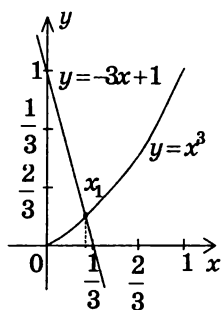


Ответ: $x_1 \approx 0,25$; $x_2 \approx 2,25$.

№ 1.466.

а) $x^3 = -3x + 1$

Строим графики функций $y = x^3$ и $y = -3x + 1$



Ответ: $x_1 \approx 0,3$.

б) $x^3 = -x - 3$

Ответ: $x_1 \approx -1,2$.

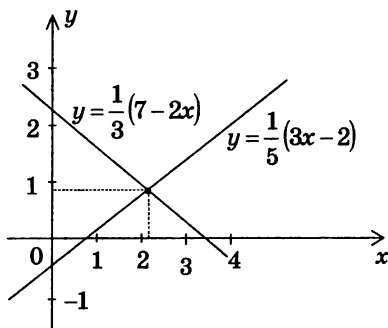
Решите графически систему уравнений (1.467 – 1.472):

№ 1.467.

а)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$$

Преобразуем систему к виду
$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}(7 - 2x) \\ y = \frac{1}{5}(3x - 2) \end{cases}$$
 и построим гра-

фики функций $y = \frac{1}{3}(7 - 2x)$ и $y = \frac{1}{5}(3x - 2)$.



Ответ: $x_1 \approx 2,1$, $y_1 \approx 0,9$.

б)
$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 \approx 1,1$, $y_1 \approx 0,4$.

№ 1.468.

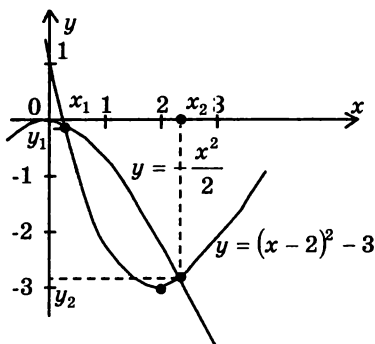
а)
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 2x + 1 \end{cases};$$

Ответ: $x_1 \approx -0,35$, $y_1 \approx 0,1$; $x_2 \approx 1,4$, $y_2 \approx 1,9$.

б)
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 \\ y = x^2 - 4x + 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = -\frac{x^2}{2} \\ y = (x - 2)^2 - 3 \end{cases};$$

Ответ: $x_1 \approx 0,25$, $y_1 \approx -0,1$;
 $x_2 \approx 2,3$, $y_2 \approx -2,7$.



№ 1.469.

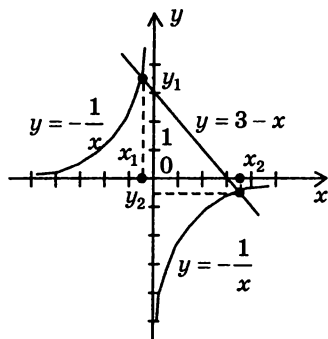
$$a) \begin{cases} x - y = 5 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 \approx -0,5$, $y_1 \approx -5,5$;

$x_2 \approx 5,5$, $y_2 \approx 0,5$.

$$б) \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = -1 \end{cases};$$

Преобразуем систему к виду $\begin{cases} y = 3 - x \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$ и нарисуем графики.



В силу того, что система симметрична относительно замены x на y (т.е. если $x = a$, $y = b$ есть решение системы, то $x = b$, $y = a$ тоже есть решение системы), достаточно было бы найти одно из решений.

Ответ: $x_1 \approx -\frac{1}{3}$, $y_1 \approx 3\frac{1}{3}$;

$x_2 \approx 3\frac{1}{3}$, $y_2 \approx -\frac{1}{3}$.

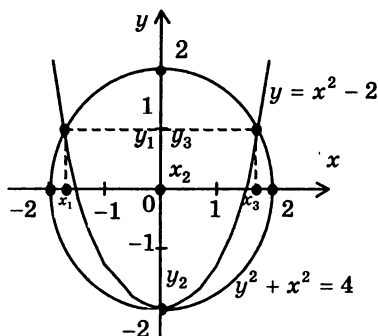
№ 1.470.

$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y - x^2 + 2 = 0 \end{cases};$$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$; Строим окружность радиуса 2 и параболу $y = x^2 - 2$.

Ответ: $x_1 \approx -1,7$, $y_1 = 1$;

$x_2 = 0$, $y_2 = -2$;



$$x_3 \approx 1,7, y_3 = 1.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases};$$

Ответ: $x_1 \approx -1,1, y_1 \approx 2,8;$

$$x_2 = 3, y_2 = 0.$$

№ 1.471.

$$\text{а) } \begin{cases} yx = -1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases};$$

Строим гиперболу $y = -\frac{1}{x}$ и окружность с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 2.

Ответ: $x_1 \approx -1,9, y_1 \approx 0,5;$

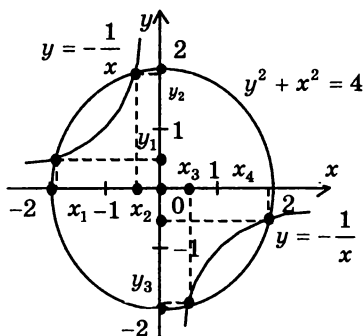
$$x_2 \approx -0,5, y_2 \approx 1,9;$$

$$x_3 \approx 0,5, y_3 \approx -1,9;$$

$$x_4 \approx 1,9, y_4 \approx -0,5.$$

$$\text{б) } \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases};$$

Ответ: $x_1 \approx 3,5, y_1 \approx 1,8.$



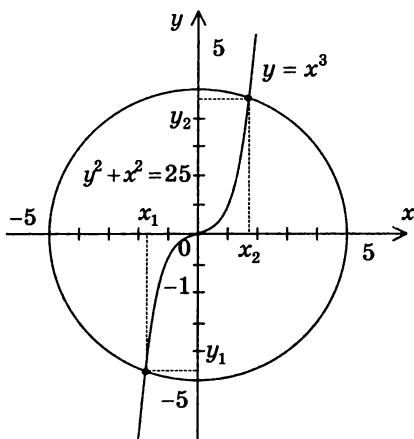
№ 1.472.

$$\text{а) } \begin{cases} y - x^3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases};$$

Строим параболу $y = x^3$ и окружность $x^2 + y^2 = 25$.

Ответ: $x_1 \approx -1,7, y_1 \approx -4,7;$

$$x_2 \approx 1,7, y_2 \approx 4,7;$$



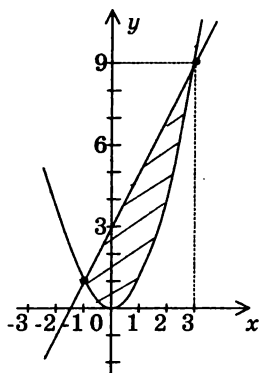
$$\text{б) } \begin{cases} y + x^3 = 0 \\ 2x - 3y - 6 = 0 \end{cases};$$

Ответ: $x_1 \approx 1,05, y_1 \approx -1,3$

Изобразите фигуру, ограниченную графиками функций (выделите ее штриховкой). Точки границы фигуры считайте принадлежащими фигуре (1.473 – 1.475):

№ 1.473.

а) $y = x^2$ и $y = 2x + 3$. Укажите координаты точки этой фигуры, имеющей наибольшую ординату.



Ответ: (3; 9).

б) $y = x^2$ и $y = 6 - x$. Укажите координаты точки этой фигуры, имеющей наименьшую абсциссу.

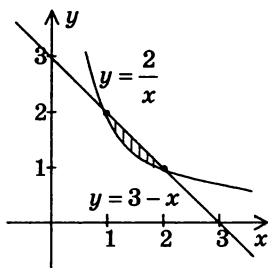
Ответ: (-3; 9).

№ 1.474.

а) $y = -\frac{3}{x}$ и $y = x + 4$. Укажите точку этой фигуры, имеющую наименьшую ординату.

Ответ: (-3; 1).

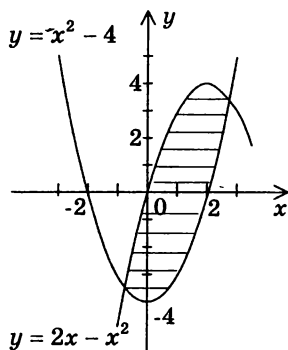
б) $y = \frac{2}{x}$ и $y = 3 - x$. Укажите точку этой фигуры, имеющую наибольшую абсциссу.



Ответ: (2; 1).

№ 1.475.

а) Фигура ограничена графиками функций $y = x^2 - 4$ и $y = 2x - x^2$. Найдите длину отрезка оси ординат, заключенного внутри этой фигуры. Длина отрезка оси ординат, заключенные внутри этой фигуры равна 4.



Ответ: $\{4\}$.

б) Фигура ограничена графиками функций $y = 9 - x^2$ и $y = x^2 + 3x$. Найдите длину отрезка оси абсцисс, заключенного внутри этой фигуры.

Ответ: $\{3\}$.

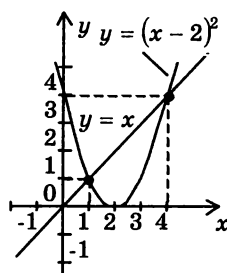
Постройте график функции и укажите на нем все точки, координаты которых удовлетворяют указанному условию. Найдите координаты этих точек (1.476 – 1.480):

№ 1.476.

а) $y = x^2 - 4x + 4$, абсцисса равна ординате.

Указанное условие равносильно уравнению $y = x$. Решая систему $\begin{cases} y = (x - 2)^2 \\ y = x \end{cases}$, находим точки.

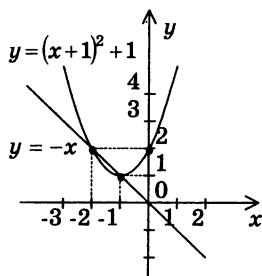
Ответ: $(1; 1) \cup (4; 4)$.



б) $y = x^2 + 2x + 2$, сумма абсциссы и ординаты равна нулю.

Условие равносильно уравнению $x + y = 0$. Решая систему $\begin{cases} y = x^2 + 2x + 2 \\ y = -x \end{cases}$, находим координаты точек.

Ответ: $(-2; 2) \cup (-1; 1)$.



№ 1.477.

а) $y = x^2 - 3$, частное от деления абсциссы на ординату равно 0,5.

Получаем систему
$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 3 = 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3. y_1 = 2 \cdot (-1) = -2; y_2 = 2 \cdot 3 = 6.$$

График постройте самостоятельно.

Ответ: $(-1; -2) \cup (3; 6)$.

б) $y = 5 - x^2$, сумма абсциссы и ординаты равна 3.

Решая систему
$$\begin{cases} y = 5 - x^2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$
, находим ответ.

Ответ: $(-1; 4) \cup (2; 1)$.

№ 1.478.

а) $y = 2x + 3$, ордината равна квадрату абсциссы.

Получаем систему уравнений:
$$\begin{cases} y = 2 + x \\ y = x^2 \end{cases}$$

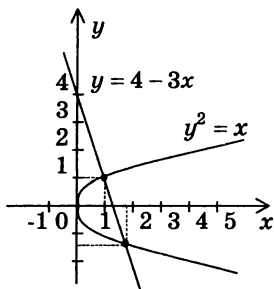
Ответ: $(-1; 1) \cup (3; 9)$.

б) $y = 4 - 3x$, абсцисса равна квадрату ординаты.

Решаем систему
$$\begin{cases} y = 4 - 3x \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 4 - 3y^2 \Leftrightarrow 3y^2 + y - 4 = 0 \Rightarrow y_1 = 1;$$

$$y_2 = -\frac{4}{3}. x_1 = 1^2 = 1, x_2 = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}.$$



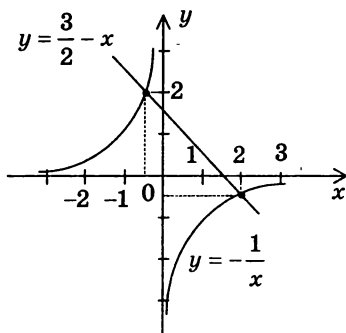
Ответ: $(1; 1) \cup \left(\frac{16}{9}; -\frac{4}{3}\right)$.

№ 1.479.

а) $y = -\frac{1}{x}$, сумма абсциссы и

ординаты равна 1,5.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{x} \\ x + y = 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot y = -1 \\ y = \frac{3}{2} - x \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow x\left(\frac{3}{2} - x\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \quad \Rightarrow x_1 = -0,5, \quad x_2 = 2.$$

$$y_1 = -\frac{1}{-0,5} = 2; \quad y_2 = -\frac{1}{2} = -0,5.$$

Ответ: $(-0,5; 2) \cup (2; -0,5).$

б) $y = \frac{2}{x}$, частное абсциссы и ординаты равно 32.

$$\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ \frac{x}{y} = 32 \end{cases}.$$

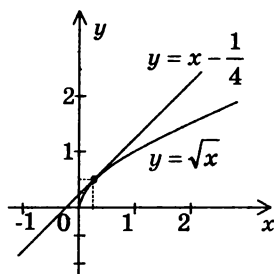
Ответ: $\left(-8; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(8; \frac{1}{4}\right).$

№ 1.480.

а) $y = \sqrt{x}$, разность абсциссы и ординаты равна $-0,25$.

$$\text{Решаем систему } \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x - y = -0,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x \\ x \geq 0, y \geq 0 \\ x = -\frac{1}{4} + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = y - \frac{1}{4} \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ и } x = \frac{1}{4}.$$



Ответ: $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right).$

б) $y = x^{-1}$, ордината на $\frac{5}{6}$ больше абсциссы.

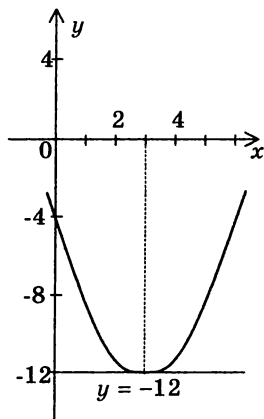
$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y - x = \frac{5}{6} \end{cases}.$$

Ответ: $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right).$

№ 1.481. Найдите уравнение прямой, параллельной оси абсцисс и имеющей с графиком данной функции ровно одну общую точку. Сделайте чертеж:

а) $y = x^2 - 6x - 3$.

$y = (x - 3)^2 - 12$. Искомая прямая проходит через вершину параболы и описывается уравнением $y = -12$.



Ответ: $y = -12$.

б) $y = -x^2 + 2x + 4$

Ответ: $y = 5$.

На графике функции укажите все точки, равноудаленные от осей координат. Найдите координаты этих точек (аналитически и графически по вашему выбору) (1.482 – 1.483):

№ 1.482.

а) $y = -2x^2 + 5x$.

Условие задачи эквивалентно уравнению $|y| = |x|$.

Получаем систему $\begin{cases} y = -2x^2 + 5x \\ |y| = |x| \end{cases}$, которая распадается на со-

вокупность систем $\begin{cases} y = -2x^2 + 5x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2x^2 + 5x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x^2 + 5x \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 2, y = 2 \\ x = 3, y = -3 \end{cases}$

Ответ: $(0; 0) \cup (2; 2) \cup (3; -3)$.

б) $y = x^2 - 6x$

Ответ: $(0; 0) \cup (5; -5) \cup (7; 7)$.

№ 1.483.

а) $y = -4x^{-1}$;

Условие задачи эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{x} \\ |y| = |x| \end{cases} \text{ . Так как из первого уравнения ясно, что } x \text{ и } y \text{ имеют}$$

разные знаки, то второе уравнение раскрываем в виде $y = -x$. Получаем

систему $\begin{cases} y = -\frac{4}{x} \\ y = -x \end{cases}$, из которой находим $x^2 = 4$ или $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Соответственно $y_1 = 2$; $y_2 = -2$.

Ответ: $(-2; 2) \cup (2; -2)$.

б) $y = -x^3$.

Решая систему $\begin{cases} y = -x^3 \\ |y| = |x| \end{cases}$ (x и y имеют разные знаки), получаем

$$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1; y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = -1.$$

Ответ: $(-1; 1) \cup (0; 0) \cup (1; -1)$.

Найдите корни квадратного трехчлена и проверьте для них теорему Виета (проверку запишите аналитически) (1.484 – 1.485):

№ 1.484.

а) $\frac{3}{7}x^2 - \frac{15}{7}x - 1$.

Решим уравнение $3x^2 - 15x - 7 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 84}}{6} = \frac{15 \pm \sqrt{309}}{6} .$$

Проверяем теорему Виета:

$$x_1 + x_2 = \frac{15 + \sqrt{309}}{6} + \frac{15 - \sqrt{309}}{6} = \frac{30}{6} = \frac{15}{3} .$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(15 + \sqrt{309})(15 - \sqrt{309})}{36} = \frac{225 - 309}{36} = \frac{-84}{36} = -\frac{7}{3} .$$

Ответ: $\left\{ \frac{15 + \sqrt{309}}{6}, \frac{15 - \sqrt{309}}{6} \right\}$.

$$\text{б) } \frac{2}{5}x^2 - \frac{14}{5}x + 1.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{7 + \sqrt{39}}{2}; \frac{7 - \sqrt{39}}{2} \right\}.$$

№ 1.485.

$$\text{а) } -\frac{2}{7}x^2 + \frac{1}{7}x + 2.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1 + \sqrt{113}}{4}; \frac{1 - \sqrt{113}}{4} \right\}.$$

$$\text{б) } -\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{3}{5}.$$

Решим уравнение $3x^2 + 5x - 9 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 108}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{133}}{6}.$$

Проверяем теорему Виета:

$$x_1 + x_2 = \frac{-5 + \sqrt{133}}{6} + \frac{-5 - \sqrt{133}}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}.$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-5 + \sqrt{133})(-5 - \sqrt{133})}{36} = \frac{25 - 133}{36} = \frac{108}{36} = 3.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{-5 + \sqrt{133}}{6}; \frac{-5 - \sqrt{133}}{6} \right\}.$$

Найдите корни квадратного трехчлена и разложите его на линейные множители (1.486 – 1.487):

№ 1.486.

$$\text{а) } 3x^2 - 11x - 34.$$

Решим уравнение $3x^2 - 11x - 34 = 0$.

$$\text{Получаем } x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{17}{3}.$$

$$\text{Раскладываем трехчлен: } 3\left(x + 2\right)\left(x - \frac{17}{3}\right) = (x + 2)(3x - 17)$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -2; \frac{17}{3} \right\}; (x + 2)(3x - 17).$$

$$\text{б) } 2x^2 + 17x + 26.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -2; -\frac{13}{2} \right\}; (x + 2)(2x + 13).$$

№ 1.487.

а) $-\frac{5}{3}x^2 + x + 12$.

Ищем корни уравнения $-5x^2 + 3x + 36 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 3x - 36 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 720}}{10} = \frac{3 \pm 27}{10}; \quad x_1 = -\frac{12}{5}, \quad x_2 = 3.$$

$$-\frac{5}{3}x^2 + x + 12 = -\frac{5}{3}(x-3)\left(x + \frac{12}{5}\right) = \left(1 - \frac{x}{3}\right)(5x + 12).$$

Ответ: $\left\{-\frac{12}{5}; 3\right\}; \left(1 - \frac{x}{3}\right)(5x + 12)$.

б) $-2x^2 + 2,5x + 13$.

Ответ: $\{-2; 3,25\}; (x + 2)(6,5 - 2x)$.

Определите, при каких из указанных значений x данный квадратный трехчлен принимает положительные значения, отрицательные значения, равен нулю (1.488 – 1.489):

№ 1.488.

а) $3x^2 + 5x - 8$, при $x_1 = 1$, $x_2 = -2\frac{2}{3}$, $x_3 = -3\frac{1}{3}$, $x_4 = 0,9$,

$x_5 = 1 + \sqrt{7}$.

$$\text{Разложим } 3x^2 + 5x - 8 = 3\left(x - 1\right)\left(x + \frac{8}{3}\right) = 3\left(x - 1\right)\left(x + 2\frac{2}{3}\right).$$

Ясно, что при x_1 и x_2 многочлен равен нулю. При x_3 и x_5 он положителен; при x_4 — отрицателен.

Ответ: при x_1 и x_2 равен нулю; при x_3 и x_5 положителен; при x_4 — отрицателен.

б) $-2x^2 + 7x + 9$, при $x_1 = -1$, $x_2 = 4,5$, $x_3 = 4,6$, $x_4 = 3\frac{1}{3}$,

$x_5 = -1 - \sqrt{3}$.

Ответ: положительное при x_4 ; отрицательное при x_3 и x_5 ; ноль при x_1 и x_2 .

№ 1.489.

а) $-9x^2 + 7x$, при $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{7}{9}$, $x_3 = \frac{13}{18}$, $x_4 = 1 + \sqrt{7}$,

$x_5 = \sqrt{3} - 5$.

$$-9x^2 + 7x = 9x\left(\frac{7}{9} - x\right).$$

Методом интервалов определяем знак многочлена. При x_1 и x_2 он равен нулю;

$$x_3 = \frac{13}{18} < \frac{14}{18} = \frac{7}{9}. \text{ Значит при } x_3 \text{ знак положительный.}$$

Очевидно $x_4 = 1 + \sqrt{7} > \frac{7}{9}$ и при x_4 знак отрицательный.

$x_5 < 0$ и при x_5 знак отрицательный.

Ответ: при x_1 и x_2 равен нулю; при x_3 положительный; при x_4 и x_5 — отрицательный.

$$\text{б) } 8x^2 - 11x, \text{ при } x_1 = 1\frac{3}{8}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1\frac{7}{16}, \quad x_4 = 2 + \sqrt{3}, \\ x_5 = \sqrt{2} - 11.$$

Ответ: нуль при x_1 и x_2 ; положительный при x_3 , x_4 и x_5 .

Разложите квадратный трехчлен на линейные множители с целыми коэффициентами (1.490 — 1.491):

№ 1.490.

$$\text{а) } 5x^2 - 11x - 42.$$

$$5x^2 - 11x - 42 = 5x(x + 2) - 21(x + 2) = (x + 2)(5x - 21)$$

Ответ: $(x + 2)(5x - 21)$.

$$\text{б) } 7x^2 - 2x - 24.$$

$$7x^2 - 2x - 24 = 7x(x - 2) + 12(x - 2) = (x - 2)(7x + 12).$$

Ответ: $(x - 2)(7x + 12)$.

№ 1.491.

$$\text{а) } -3x^2 + 6x + 24.$$

$$-3x^2 + 6x + 24 = -3(x^2 - 2x - 8) = -3[(x - 1)^2 - 9] = -3(x - 4)(x + 2) = \\ = 3(4 - x)(x + 2).$$

Ответ: $3(4 - x)(x + 2)$.

$$\text{б) } -6x^2 + 70x - 200.$$

Ответ: $2(x - 5)(20 - 3x)$.

Сократите дробь и вычислите ее значение при $x = x_0$ (1.492 – 1.493):

№ 1.492.

а) $\frac{10x^2 - 13x - 3}{-2x^2 + x + 3}$, $x_0 = -6,2$.

$$\frac{10x^2 - 13x - 3}{-2x^2 + x + 3} = \frac{(5x+1)(2x-3)}{(x+1)(3-2x)} = -\frac{5x+1}{x+1}.$$

$$f(x_0) = \frac{30}{-5,2} = -\frac{150}{26} = -\frac{75}{13}.$$

Ответ: $-\frac{5x+1}{x+1}$; $-\frac{75}{13}$.

б) $\frac{-15x^2 + 13x - 2}{3x^2 - 8x + 4}$, $x_0 = 4,2$.

Ответ: $\frac{1-5x}{x-2}$; $-\frac{100}{11}$.

№ 1.493.

а) $\frac{9x^2 - 6x + 1}{6x^2 + x - 1}$, $x_0 = -1\frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{3x-1}{2x+1}$; $\frac{27}{8}$.

б) $\frac{8x^2 - 2x - 1}{16x^2 + 8x + 1}$, $x_0 = -1\frac{1}{4}$.

$$\frac{8x^2 - 2x - 1}{16x^2 + 8x + 1} = \frac{(4x+1)(2x-1)}{(4x+1)^2} = \frac{2x-1}{4x+1};$$

$$f(x_0) = \frac{-\frac{5}{2}-1}{-5+1} = \frac{-5-2}{-8} = \frac{7}{8}.$$

Ответ: $\frac{2x-1}{4x+1}$; $\frac{7}{8}$.

№ 1.494. Докажите, что данные два квадратных трехчлена имеют общий корень, и найдите его:

а) $14x^2 + 19x - 3$ и $-14x^2 + 37x - 5$.

Разложим данные выражения на множители:

$$14x^2 + 19x - 3 = (2x+3)(7x-1),$$

$$-14x^2 + 37x - 5 = (5 - 2x)(7x - 1).$$

Очевидно, общий корень равен $\frac{1}{7}$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{7}\right\}$.

б) $-15x^2 + 4x + 4$ и $15x^2 + x - 2$.

Ответ: $\left\{-\frac{2}{5}\right\}$.

№ 1.495. При каких значениях a данный квадратный трехчлен имеет корень: $x = x_0$.

а) $-3x^2 + x - a$, $x_0 = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $a = -\frac{2}{3}$.

б) $5x^2 + 2x + a$, $x_0 = \frac{1}{5}$.

Подстановка корня $x = x_0$ в уравнение $5x^2 + 2x + a = 0$ дает верное равенство. Отсюда находим a :

$$5\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} + a = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} + a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{5}$$

Ответ: $\left\{-\frac{3}{5}\right\}$.

№ 1.496. При каких значениях b данные два квадратных трехчлена имеют общий корень:

а) $x^2 - 4$ и $x^2 + bx$.

Первое уравнение имеет корни $x_{1,2} = \pm 2$. При подстановке их во второе уравнение оно обязано стать верным равенством.

Получаем $4 \pm 2b = 0 \Rightarrow b = \pm 2$.

Ответ: $\{-2; 2\}$.

б) $x^2 - b$ и $x^2 + 5x$.

Ответ: $\{0; 25\}$.

Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена. Найдите значение выражения $u(x_1; x_2)$ (1.497 — 1.498):

№ 1.497.

а) $x^2 - 7x - 1$, $u(x_1; x_2) = x_1 - \frac{x_1^2}{x_1 + x_2}$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = 7$ и $x_1 \cdot x_2 = -1$.

Преобразуем $u(x_1; x_2)$:

$$u(x_1; x_2) = \frac{x^2 + x_1 x_2 - x_1^2}{x_1 + x_2} = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = -\frac{1}{7}$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{7}\right\}$.

б) $x^2 - 5x + 1$, $u(x_1; x_2) = \frac{x_2^2}{x_1 + x_2} - x_2$.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$.

№ 1.498.

а) $x^2 - 4x + 1$, $u(x_1; x_2) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$.

Ответ: $\{16\}$.

б) $x^2 + 5x - 3$, $u(x_1; x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -5$ и $x_1 \cdot x_2 = -3$.

$$u(x_1; x_2) = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -3 \cdot (-5) = 15.$$

Ответ: $\{15\}$.

№ 1.499.

а) При каких значениях a квадратный трехчлен $2x^2 + x + a$ принимает только положительные значения?

Преобразуем $2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} + a$. Ясно, что квадратный трехчлен будет всегда положителен, если $a < \frac{1}{8}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$.

б) При каких значениях b квадратный трехчлен $-x^2 + 6x + b$ принимает только отрицательные значения?

Ответ: $(-\infty; -9)$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

№ 1.501.

а) Дано: $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите: $\cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

Из основного тригонометрического тождества

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ находим $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$. В данном диапазоне углов α $\cos \alpha > 0$, следовательно $\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{12}{5}.$$

Ответ: $\left\{\frac{12}{13}; \frac{12}{5}\right\}$.

б) Дано: $\cos \alpha = 0,6$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите: $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$.

Ответ: $\left\{\frac{4}{5}; \frac{4}{3}\right\}$.

№ 1.502.

а) Дано: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите: $\sin \alpha$.

Ответ: $\{0,8\}$.

б) Дано: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{24}{7}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите: $\cos \alpha$.

По условию задачи $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{24}{7}.$$

Возводя в квадрат, получим

$$\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \left(\frac{24}{7}\right)^2 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{\left(\frac{24}{7}\right)^2}{1 + \left(\frac{24}{7}\right)^2} = \frac{24^2}{7^2 + 24^2}.$$

Окончательно, $\cos \alpha = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25} = 0,96$.

Ответ: $\{0,96\}$.

№ 1.503.

а) Дано: $\sin \alpha = 0,28$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите: $\sin 2\alpha$.

Раскроем синус двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 2 \cdot 0,28 \sqrt{1 - 0,0784} = 2 \cdot 0,28 \cdot 0,96 = 0,5376.$$

Ответ: $\{0,5376\}$.

б) Дано: $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите: $\sin 2\alpha$.

Ответ: $\left\{\frac{120}{169}\right\}$.

№ 1.504.

а) Дано: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите: $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Ответ: $\left\{\frac{24}{25}; -\frac{336}{527}\right\}$.

б) Дано: $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите: $\cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 5,76}} = \frac{1}{2,6} = \frac{5}{13}.$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - \left(\frac{12}{5}\right)^2}{\frac{24}{5}} = -\frac{119}{120}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{5}{13}; -\frac{119}{120}\right\}$.

№ 1.505.

а) Дано: $\operatorname{ctg} \alpha = 0,5$. Найдите: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2.$$

Используем формулу тангенса разности углов:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

б) Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = 3$. Найдите: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

№ 1.506.

а) Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = 4$. Найдите: $\operatorname{tg}2\alpha$.

Ответ: $\left\{\frac{8}{15}\right\}$.

б) Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$. Найдите: $\operatorname{ctg}2\alpha$.

$$\operatorname{ctg}2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\frac{1}{9} - 1}{\frac{2}{3}} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

№ 1.507.

а) Дано: $\cos\alpha = 0,8$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите: $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - (0,8)^2} = 0,6.$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) &= \sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (0,6 + 0,8) = 0,7 \cdot \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Ответ: $\{0,7 \cdot \sqrt{2}\}$.

б) Дано: $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите: $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

Ответ: $\left\{\frac{17}{26}\sqrt{2}\right\}$.

№ 1.508.

а) Дано: $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Найдите: $\cos(90^\circ + \alpha)$.

В данном диапазоне углов α $\sin \alpha > 0$. По формулам приведения

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{12}{13}\right\}$.

б) Дано: $\sin \alpha = 0,6$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Найдите: $\sin(270^\circ - \alpha)$.

Ответ: $\{-0,8\}$.

№ 1.509.

а) Дано: $\cos \alpha = 0,8$, $\sin \beta = \frac{12}{13}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Найдите: $\sin(\alpha + \beta)$.

Ответ: $\left\{\frac{63}{65}\right\}$.

б) Дано: $\sin \alpha = 0,6$, $\cos \beta = 0,28$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Найдите: $\cos(\alpha - \beta)$.

Так как $\cos \alpha > 0$ и $\sin \beta > 0$ (углы лежат в первой четверти), то

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8, \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - (0,28)^2} = 0,96.$$

По формуле косинуса разность углов

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0,8 \cdot 0,28 + 0,6 \cdot 0,96 = 0,8.$$

Ответ: $\{0,8\}$.

№ 1.510.

а) Дано: $\operatorname{tg} \alpha = 3$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 1$. Найдите: $\operatorname{tg} \beta$.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

$$\text{Подставим численные значения: } 1 = \frac{3 + \operatorname{tg} \beta}{1 - 3 \operatorname{tg} \beta} \Rightarrow 1 - 3 \operatorname{tg} \beta = 3 + \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = -0,5.$$

Ответ: $\{-0,5\}$.

б) Дано: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 3$. Найдите: $\operatorname{ctg} \beta$.

Ответ: $\{7\}$.

№ 1.511.

а) Найдите значение выражения $\frac{\sin \alpha - 3 \cos \alpha}{5 \sin \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -2$.

Ответ: $\{-0,1\}$.

б) Найдите значение выражения $\frac{\cos \alpha + 2 \sin \alpha}{\cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

$$\frac{\cos \alpha + 2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 + 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 + 2 \operatorname{tg} \alpha = 1 + 2 \cdot 3 = 7.$$

Ответ: $\{7\}$.

Докажите тождества (1.512 – 1.527):

№ 1.512.

$$\text{а) } \frac{\sin \alpha + \cos(270^\circ + \alpha)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = 2;$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha + \cos(270^\circ + \alpha)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} &= \frac{\sin \alpha + \cos(270^\circ + \alpha - 360^\circ)}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha + \cos(\alpha - 90^\circ)}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha + \cos(90^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha + \sin \alpha}{\sin \alpha} = 2. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

$$\text{б) } \frac{2(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)}{\cos 4\alpha - \sin(270^\circ - 4\alpha)} = 1;$$

$$\begin{aligned} \frac{2(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)}{\cos 4\alpha - \sin(270^\circ - 4\alpha)} &= \frac{2 \cos 4\alpha}{\cos 4\alpha + \sin(4\alpha - 270^\circ)} = \\ &= \frac{2 \cos 4\alpha}{\cos 4\alpha + \sin(4\alpha + 90^\circ)} = \frac{2 \cos 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 4\alpha} = 1. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

№ 1.513.

$$\text{а) } \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \cos \alpha;$$

Докажите самостоятельно.

$$\text{б) } \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = -\sin \alpha.$$

Применим формулу разности косинусов

№ 1.503.

а) Дано: $\sin \alpha = 0,28$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите: $\sin 2\alpha$.

Раскроем синус двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 2 \cdot 0,28 \sqrt{1 - 0,0784} = 2 \cdot 0,28 \cdot 0,96 = 0,5376.$$

Ответ: $\{0,5376\}$.

б) Дано: $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите: $\sin 2\alpha$.

Ответ: $\left\{\frac{120}{169}\right\}$.

№ 1.504.

а) Дано: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите: $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Ответ: $\left\{\frac{24}{25}; -\frac{336}{527}\right\}$.

б) Дано: $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите: $\cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 5,76}} = \frac{1}{2,6} = \frac{5}{13}.$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - \left(\frac{12}{5}\right)^2}{\frac{24}{5}} = -\frac{119}{120}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{5}{13}; -\frac{119}{120}\right\}$.

№ 1.505.

а) Дано: $\operatorname{ctg} \alpha = 0,5$. Найдите: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2.$$

Используем формулу тангенса разности углов:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = 2 \sin \frac{\frac{\pi}{6} + \alpha + \frac{\pi}{6} - \alpha}{2} \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{6} - \alpha - \frac{\pi}{6} - \alpha}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

Что и требовалось доказать.

№ 1.514.

а) $2 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha = 1$.

Применим формулу косинуса двойного угла

$$2 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Что и требовалось доказать.

б) $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$.

Докажите самостоятельно.

№ 1.515.

а) $(1 + \operatorname{tg} x)^2 - 2 \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$$(1 + \operatorname{tg} x)^2 - 2 \operatorname{tg} x = 1 + 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \text{ Что и требовалось доказать.}$$

б) $(1 + \operatorname{ctg} x)^2 - \frac{1}{\sin^2 x} = 2 \operatorname{ctg} x$.

Докажите самостоятельно.

№ 1.516.

а) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \cdot \sin 2\alpha = 2$;

Докажите самостоятельно.

б) $(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \cdot \sin 2\alpha = 2 \cos 2\alpha$.

$$(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \cdot \sin 2\alpha = \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \sin 2\alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \sin 2\alpha =$$

$$= \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \sin 2\alpha = 2 \cos 2\alpha. \text{ Что и требовалось доказать.}$$

№ 1.517.

а) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$.

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha}}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Что и требовалось доказать.

$$б) \frac{ctg\alpha - 1}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha};$$

Докажите самостоятельно.

№ 1.518.

$$а) \frac{\cos^4\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = ctg^2\alpha;$$

Докажите самостоятельно.

$$б) \frac{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha.$$

$$\frac{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha.$$

Что и требовалось доказать.

№ 1.519.

$$а) 1 - \frac{\sin 2\alpha \sin\alpha}{2\cos\alpha} = \cos^2\alpha;$$

$$1 - \frac{\sin 2\alpha \sin\alpha}{2\cos\alpha} = 1 - \frac{2\sin\alpha \cos\alpha \sin\alpha}{2\cos\alpha} = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha.$$

Что и требовалось доказать.

$$б) 1 - \frac{\sin 2\alpha \cos\alpha}{2\sin\alpha} = \sin^2\alpha.$$

Докажите самостоятельно.

№ 1.520.

$$а) \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 0,5} = 2\sin\alpha;$$

Докажите самостоятельно.

$$б) \frac{\sin 2\alpha + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - 0,5} = 2\cos\alpha.$$

$$\frac{\sin 2\alpha + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - 0,5} = \frac{2\sin\alpha \cos\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha - 0,5} = \frac{2\cos\alpha(\sin\alpha - 0,5)}{\sin\alpha - 0,5} = 2\cos\alpha.$$

Что и требовалось доказать.

№ 1.521.

$$a) \frac{1 + tg\beta}{1 + ctg\beta} = tg\beta.$$

$$\frac{1 + tg\beta}{1 + ctg\beta} = \frac{1 + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 + \frac{\cos \beta}{\sin \beta}} = \frac{\frac{\cos \beta + \sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{\sin \beta + \cos \beta}{\sin \beta}} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = tg\beta.$$

Что и требовалось доказать.

$$б) \frac{1 - ctg\alpha}{1 - tg\alpha} = -ctg\alpha;$$

Докажите самостоятельно.

№ 1.522.

$$a) \frac{\sin 3\alpha + \sin \alpha}{\cos 3\alpha + \cos \alpha} = tg 2\alpha$$

Докажите самостоятельно.

$$б) \frac{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 4\alpha} = ctg\alpha.$$

$$\frac{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 4\alpha} = \frac{2\cos 5\alpha \cdot \cos \alpha}{2\cos 5\alpha \cdot \sin \alpha} = ctg\alpha.$$

Что и требовалось доказать.

№ 1.523.

$$a) \frac{\sin(\alpha - \beta) + 2 \cos \alpha \sin \beta}{2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)} = tg(\alpha + \beta);$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha - \beta) + 2 \cos \alpha \sin \beta}{2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)} &= \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta + 2 \cos \alpha \sin \beta}{2 \cos \alpha \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = tg(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

$$б) \frac{\sin(\alpha + \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta}{2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha + \beta)} = tg(\alpha - \beta);$$

Докажите самостоятельно.

№ 1.524.

$$a) \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta;$$

Докажите самостоятельно.

$$б) \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \\ &= 2 \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

№ 1.525.

$$a) \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$\text{Заметим, что } \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Докажем, что } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Представим $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ через функции половинного аргумента.

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

$$б) \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \pi \right);$$

Докажите самостоятельно.

№ 1.526.

$$a) \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin 2\alpha.$$

Докажите самостоятельно.

$$б) \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos 2\alpha.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\cos^2 \alpha$:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \sin 2\alpha = \cos 2\alpha.$$

Что и требовалось доказать.

№ 1.527.

$$a) \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha};$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + (1 + \cos \alpha)^2}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = \\ &= \frac{2(1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

$$б) \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha};$$

Докажите самостоятельно.

Упростите выражение (1.528 – 1.555):

№ 1.528.

а) $\frac{\sin 3x + \sin x}{\sin 2x}$.

Применим формулу суммы синусов

$$\frac{\sin 3x + \sin x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin 2x \cos x}{\sin 2x} = 2 \cos x.$$

Ответ: $2 \cos x$.

б) $\frac{\cos 4x + \cos 2x}{\cos 3x}$;

Ответ: $2 \cos x$.

№ 1.529.

а) $\frac{\sin 5x - \sin x}{\cos 3x}$.

Ответ: $2 \sin 2x$.

б) $\frac{\cos 3x - \cos x}{\sin x}$;

$$\frac{\cos 3x - \cos x}{\sin x} = \frac{-2 \sin 2x \sin x}{\sin x} = -2 \sin 2x.$$

Ответ: $-2 \sin 2x$.

№ 1.530.

а) $\frac{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha}$.

$$\frac{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \cos \alpha.$$

Ответ: $\cos \alpha$.

б) $\frac{\sin \alpha - \sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha}$;

Ответ: $\sin \alpha$.

№ 1.531.

а) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{2 \cos^2 \alpha}$.

Ответ: $\operatorname{tg}^2 \alpha$.

б) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{2 \sin^2 \alpha}$.

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{2 \sin^2 \alpha} = \frac{1 + (2 \cos^2 \alpha - 1)}{2 \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}^2 \alpha$.

№ 1.532.

а) $\frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha}.$

$$\frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \sin \alpha.$$

Ответ: $\sin \alpha$.

б) $\frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha}.$

Ответ: $\cos \alpha$.

№ 1.533.

а) $\frac{1 - \sin 2\alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}.$

Ответ: $\sin \alpha - \cos \alpha$.

б) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}.$

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha$$

Ответ: $\sin \alpha + \cos \alpha$.

№ 1.534.

а) $\frac{1 + \sin(\pi + \alpha)}{1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)};$

$$\frac{1 + \sin(\pi + \alpha)}{1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{1 - \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} = 1.$$

Ответ: $\{1\}$.

б) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 1}{\sin(\pi - \alpha) + 1};$

Ответ: $\{-1\}$.

№ 1.535.

а) $\left(1 + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) \sin^2 \alpha;$

Ответ: $\operatorname{tg}^2 \alpha$.

б) $\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right) \cos^2 \alpha.$

$$\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right) \cos^2 \alpha = (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}^2 \alpha$.

№ 1.536.

$$\text{a) } \frac{2 \cos \alpha - \sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha + \cos^2 \alpha}.$$

$$\frac{2 \cos \alpha - \sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (1 - \sin \alpha)}{1 - \sin \alpha} = 2 \cos \alpha.$$

Ответ: $2 \cos \alpha$.

$$\text{б) } \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{\cos \alpha - 1};$$

Ответ: $-2 \sin \alpha$.

№ 1.537.

$$\text{a) } \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin 2x - 1};$$

Ответ: $\{-1\}$.

$$\text{б) } \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin 2x + 1};$$

$$\frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin 2x + 1} = \frac{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin 2x + 1} = \frac{1 + \sin 2x}{1 + \sin 2x} = 1.$$

Ответ: $\{1\}$.

№ 1.538.

$$\text{a) } \frac{1 - \cos(2\pi - 2\alpha)}{1 - \cos^2 \alpha}.$$

$$\frac{1 - \cos(2\pi - 2\alpha)}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 2.$$

Ответ: $\{2\}$.

$$\text{б) } \frac{1 - \cos(\pi - 2\alpha)}{1 - \sin^2 \alpha};$$

Ответ: $\{2\}$.

№ 1.539.

$$\text{a) } \frac{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

Ответ: $\sin^2 \alpha$.

$$б) \frac{tg^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{1 + ctg^2\alpha}.$$

$$\frac{tg^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{1 + ctg^2\alpha} = \frac{ctg^2\alpha}{1 + ctg^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \cos^2\alpha.$$

Ответ: $\cos^2\alpha$.

№ 1.540.

$$а) \frac{1 - \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\cos^2(\pi - x)}.$$

$$\frac{1 - \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\cos^2(\pi - x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = tg^2 x.$$

Ответ: $tg^2 x$.

$$б) \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1}{\sin^2(\pi + x)};$$

Ответ: $-ctg^2 x$.

№ 1.541.

$$а) \frac{1}{\cos^2\alpha} - tg\beta ctg\beta.$$

Ответ: $tg^2\alpha$.

$$б) ctgatg\alpha - \frac{1}{\sin^2\beta}.$$

$$ctgatg\alpha - \frac{1}{\sin^2\beta} = 1 - \frac{1}{\sin^2\beta} = \frac{\sin^2\beta - 1}{\sin^2\beta} = \frac{-\cos^2\beta}{\sin^2\beta} = -ctg^2\beta.$$

Ответ: $-ctg^2\beta$.

№ 1.542.

$$а) \sin(\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)tg\alpha;$$

$$\sin(\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)tg\alpha = \sin\alpha + \cos\alpha \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\sin\alpha.$$

Ответ: $2\sin\alpha$.

$$6) \sin \alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right);$$

Ответ: $2 \cos \alpha$.

№ 1.543.

$$a) \operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

Ответ: $-\cos^2 \alpha$.

$$6) \operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha - (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha.$$

Ответ: $-\sin^2 \alpha$.

№ 1.544.

$$a) \frac{2 \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 2\alpha}.$$

$$\frac{2 \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 2\alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 2\alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1}{2 \cos^2 \alpha}$$

Ответ: $\frac{1}{2 \cos^2 \alpha}$.

$$6) \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 2\alpha};$$

Ответ: $\frac{1}{2 \sin^2 \alpha}$.

№ 1.545.

$$a) (1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2;$$

Ответ: $\frac{2}{\cos^2 \alpha}$.

$$6) (1 - \operatorname{ctg} \alpha)^2 + (1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2;$$

$$(1 - \operatorname{ctg} \alpha)^2 + (1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 1 - 2 \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 + 2 \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha =$$

$$= 2(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \frac{2}{\sin^2 \alpha}.$$

Ответ: $\frac{2}{\sin^2 \alpha}$.

№ 1.546.

$$a) \sin \varphi \cos 2\varphi + \cos \varphi \sin 2\varphi.$$

$$\sin \varphi \cos 2\varphi + \cos \varphi \sin 2\varphi = \sin(\varphi + 2\varphi) = \sin 3\varphi.$$

Ответ: $\sin 3\varphi$.

б) $\cos 3\varphi \cos \varphi + \sin 3\varphi \sin \varphi$;

Ответ: $\cos 2\varphi$.

№ 1.547.

а) $\sin \alpha \sin(\alpha + \beta) + \cos \alpha \cos(\alpha + \beta)$;

Ответ: $\cos \beta$.

б) $\sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \sin \beta \cos(\alpha + \beta)$.

$$\sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \sin \beta \cos(\alpha + \beta) = \sin((\alpha + \beta) - \beta) = \sin \alpha.$$

Ответ: $\sin \alpha$.

№ 1.548.

а) $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha$.

$$\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha = (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 - 2 \sin^2 \alpha +$$

$$+ 2 \sin^2 \alpha = 1.$$

Ответ: $\{1\}$.

б) $\cos 2\alpha - \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha$.

Ответ: $\{-1\}$.

№ 1.549.

а) $\frac{2 \sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} - 2 \cos \alpha$;

Ответ: $\{2\}$.

б) $2 \sin \alpha + \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha}$.

$$2 \sin \alpha + \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} = 2 \sin \alpha + 2 \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} = 2 \sin \alpha + 2 \cdot \frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{1 + \sin \alpha} =$$

$$= 2 \sin \alpha + 2(1 - \sin \alpha) = 2.$$

Ответ: $\{2\}$.

№ 1.550.

а) $1 + \sin(\pi + \alpha) \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) - \cos^2 \alpha$.

$$1 + \sin(\pi + \alpha) \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) - \cos^2 \alpha = 1 + (-\sin \alpha) \sin \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - 1 = 0.$$

Ответ: $\{0\}$.

б) $\sin^2 \alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos(\pi + \alpha) - 1$;

Ответ: $\{0\}$.

№ 1.551.

а) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 1$;

Ответ: $\{1\}$.

б) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = 0.$$

Ответ: $\{0\}$.

№ 1.552.

а) $\frac{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}$.

$$\frac{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

б) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{\cos \alpha - 1 + \sin^2 \alpha}$.

Ответ: $2 \operatorname{tg} \alpha$.

№ 1.553.

а) $\sin \alpha - \frac{\cos^2(180^\circ - \alpha)}{\cos(\alpha - 270^\circ)}$.

Ответ: $\frac{1}{\sin \alpha}$.

б) $\cos \alpha - \frac{\cos^2(\alpha - 90^\circ)}{\sin(\alpha - 90^\circ)}$.

$$\cos \alpha - \frac{\cos^2(\alpha - 90^\circ)}{\sin(\alpha - 90^\circ)} = \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Ответ: $\frac{1}{\cos \alpha}$.

№ 1.554.

а) $\left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}\right)^2 - \sin^2 \alpha$.

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}\right)^2 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha.$$

Ответ: $\cos^2 \alpha$.

б) $(tg\alpha \cos \alpha)^2 + (ctg\alpha \sin \alpha)^2 - \cos^2 \alpha$.

Ответ: $\sin^2 \alpha$.

№ 1.555.

а) $\frac{\sin^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha}{\sin 2\alpha}$;

Ответ: $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

б) $\frac{\cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\sin 2\alpha}$.

$$\frac{\cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

№ 1.556.

а) Определите знаки тригонометрических функций следующих углов: 134° , 1048° , $\frac{9\pi}{7}$, $\frac{110\pi}{13}$. Угол 134° лежит во второй четверти.

Поэтому $\sin 134^\circ > 0$, $\cos 134^\circ < 0$, $\operatorname{tg} 134^\circ < 0$. Угол $1048^\circ = 3 \cdot 360^\circ - 32^\circ$ лежит в четвертой четверти. Значит $\sin 1048^\circ < 0$, $\cos 1048^\circ > 0$,

$\operatorname{tg} 1048^\circ < 0$. Угол $\frac{9\pi}{7} = \pi + \frac{2}{7}\pi$ принадлежит третьей четверти так что

$\sin \frac{9\pi}{7} < 0$, $\cos \frac{9\pi}{7} < 0$ и $\operatorname{tg} \frac{9\pi}{7} > 0$. Угол $\frac{110\pi}{13} = 4 \cdot 2\pi + \frac{6}{13}\pi$ лежит в первой четверти. Следовательно, все тригонометрические функции больше нуля.

Ответ: $\sin 134^\circ > 0$, $\cos 134^\circ < 0$, $\operatorname{tg} 134^\circ < 0$;

$\sin 1048^\circ < 0$, $\cos 1048^\circ > 0$, $\operatorname{tg} 1048^\circ < 0$;

$\sin \frac{9\pi}{7} < 0$, $\cos \frac{9\pi}{7} < 0$, $\operatorname{tg} \frac{9\pi}{7} > 0$;

$\sin \frac{110\pi}{13} > 0$, $\cos \frac{110\pi}{13} > 0$, $\operatorname{tg} \frac{110\pi}{13} > 0$.

б) Определите знаки тригонометрических функций следующих углов: 201° , 1121° , $\frac{8\pi}{15}$, $\frac{17\pi}{5}$.

Ответ: $\sin 201^\circ < 0$, $\cos 201^\circ < 0$, $\operatorname{tg} 201^\circ > 0$;

$$\sin 1151^\circ > 0, \cos 1151^\circ > 0, \operatorname{tg} 1151^\circ > 0;$$

$$\sin \frac{8\pi}{15} > 0, \cos \frac{8\pi}{15} < 0, \operatorname{tg} \frac{8\pi}{15} < 0;$$

$$\sin \frac{17\pi}{5} < 0, \cos \frac{17\pi}{5} < 0, \operatorname{tg} \frac{17\pi}{5} > 0.$$

№ 1.557.

а) Может ли синус некоторого угла быть равным $2,6$; $-0,6$; $\frac{\sqrt{5}}{2}$?

Функция синус по модулю не превосходит 1.

Числа $2,6$ и $\frac{\sqrt{5}}{2}$ больше единицы и не могут быть синусом не-
которого угла. Число $-0,6$ может.

Ответ: нет; да; нет.

б) Может ли косинус некоторого угла быть равным $-1,4$; $0,4$; $\frac{\sqrt{8}}{3}$?

Ответ: нет; да; да.

Вычислите значение выражения ($1.558 - 1.571$):

№ 1.558.

а) $1 + \cos 120^\circ$.

$$1 + \cos 120^\circ = 1 + \cos(90^\circ + 30^\circ) = 1 - \sin 30^\circ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

б) $1 - \cos 120^\circ$;

Ответ: $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

№ 1.559.

а) $\cos^2 67,5^\circ - \sin^2 67,5^\circ$;

Ответ: $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

б) $\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ$.

$$\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ = -\cos 2 \cdot 75^\circ = -\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

№ 1.560.

а) $\left(\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} \right)^2$.

$$\left(\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} \right)^2 = \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

б) $\left(2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \right)^{-1}$;

Ответ: $\{2\}$.

№ 1.561.

а) $\left(\sin 10^\circ \cos 50^\circ + \sin 50^\circ \cos 10^\circ \right)^2$;

Ответ: $\left\{ \frac{3}{4} \right\}$.

б) $\left(\cos 35^\circ \cos 10^\circ - \sin 35^\circ \sin 10^\circ \right)^2$.

$$\left(\cos 35^\circ \cos 10^\circ - \sin 35^\circ \sin 10^\circ \right)^2 = \cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

№ 1.562.

а) $\frac{\cos 15^\circ \sin 20^\circ - \sin 15^\circ \cos 20^\circ}{2 \sin 5^\circ}$.

$$\frac{\cos 15^\circ \sin 20^\circ - \sin 15^\circ \cos 20^\circ}{2 \sin 5^\circ} = \frac{\sin(20^\circ - 15^\circ)}{2 \sin 5^\circ} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

б) $\frac{\sin 26^\circ \sin 20^\circ + \cos 26^\circ \cos 20^\circ}{2 \cos 6^\circ}$.

Ответ: $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

№ 1.563.

а) $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}}$;

Ответ: $\left\{ \frac{\sqrt{3}}{6} \right\}$.

б) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}$.

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}} = 2 \cdot \operatorname{ctg} \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 2.$$

Ответ: $\{2\}$.

№ 1.564.

а) $\frac{\sin \frac{7\pi}{18} - \sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{7\pi}{18} - \cos \frac{\pi}{9}}$.

$$\frac{\sin \frac{7\pi}{18} - \sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{7\pi}{18} - \cos \frac{\pi}{9}} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{5\pi}{36}}{-2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{5\pi}{36}} = -\frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = -1.$$

Ответ: $\{-1\}$.

б) $\frac{\sin \frac{5\pi}{18} + \sin \frac{2\pi}{9}}{\cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{2\pi}{9}}$;

Ответ: $\{1\}$.

№ 1.565.

а) $\frac{\sin^2 26^\circ - \sin^2 64^\circ}{\sin 19^\circ \cos 19^\circ}$;

Ответ: $\{-2\}$.

б) $\frac{\cos^2 33^\circ - \cos^2 57^\circ}{\sin 12^\circ \cos 12^\circ}$.

$$\frac{\cos^2 33^\circ - \cos^2 57^\circ}{\sin 12^\circ \cos 12^\circ} = 2 \frac{\cos^2 33^\circ - \sin^2 33^\circ}{2 \sin 12^\circ \cos 12^\circ} = 2 \frac{\cos 66^\circ}{\sin 24^\circ} = 2 \frac{\sin 24^\circ}{\sin 24^\circ} = 2.$$

Ответ: $\{2\}$.

№ 1.566.

a) $\frac{\cos 59^\circ - \cos 1^\circ}{\sin 59^\circ - \sin 1^\circ}.$

$$\frac{\cos 59^\circ - \cos 1^\circ}{\sin 59^\circ - \sin 1^\circ} = \frac{-2 \sin 30^\circ \sin 29^\circ}{2 \cos 30^\circ \sin 29^\circ} = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}.$

б) $\frac{\cos 89^\circ + \cos 1^\circ}{\sin 89^\circ + \sin 1^\circ}.$

Ответ: $\{1\}.$

№ 1.567.

a) $\sin \frac{\pi}{18} + \sin \frac{5\pi}{18} - \cos \frac{\pi}{9};$

Ответ: $\{0\}.$

б) $\cos \frac{17\pi}{36} + \cos \frac{7\pi}{36} - \cos \frac{5\pi}{36}.$

$$\cos \frac{17\pi}{36} + \cos \frac{7\pi}{36} - \cos \frac{5\pi}{36} = 2\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{36} - \cos \frac{5\pi}{36} = \cos \frac{5\pi}{36} - \cos \frac{5\pi}{36} = 0.$$

Ответ: $\{0\}.$

№ 1.568.

a) $\frac{1}{(\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 80^\circ)^{\frac{1}{2}}}.$

$$\frac{1}{(\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 80^\circ)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 80^\circ} = \sqrt{\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{ctg} 10^\circ} = \sqrt{1} = 1.$$

Ответ: $\{1\}.$

б) $\frac{1}{(\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 70^\circ)^{\frac{1}{3}}}.$

Ответ: $\{1\}.$

№ 1.569.

a) $\frac{1}{4\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}}.$

Ответ: $\{1\}.$

$$б) \frac{1}{2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8}}.$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ответ: $\{1\}$.

№ 1.570.

$$а) \left(\sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)^2.$$

$$\left(\sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{16}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{3}{16} \right\}$.

$$б) \left(\cos \frac{5\pi}{6} \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)^2;$$

Ответ: $\left\{ \frac{3}{16} \right\}$.

№ 1.571.

$$а) \sin(10^\circ + \alpha) \cos(20^\circ - \alpha) + \cos(10^\circ - \alpha) \sin(20^\circ - \alpha);$$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

$$б) \cos(50^\circ + \alpha) \cos(20^\circ + \alpha) + \sin(50^\circ + \alpha) \sin(20^\circ + \alpha).$$

$$\begin{aligned} \cos(50^\circ + \alpha) \cos(20^\circ + \alpha) + \sin(50^\circ + \alpha) \sin(20^\circ + \alpha) &= \cos((50^\circ + \alpha) - (20^\circ + \alpha)) = \\ &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Существует ли данное выражение при каждом из указанных значений α (1.572 – 1.573):

№ 1.572.

$$а) \frac{\sin 3\alpha}{\sin 4\alpha + \sin 2\alpha}; \quad \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}, \pi;$$

Ответ: существует при $\frac{\pi}{12}$ и не существует при $\frac{\pi}{2}, \pi$;

б) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha}; \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}.$

Выражение существует, когда знаменатель дроби не обращается в ноль.

При $\alpha = \frac{\pi}{12} \sin \frac{6\pi}{12} - \sin \frac{2\pi}{12} = 1 - \sin \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$

При $\alpha = \frac{\pi}{4} \sin \frac{6\pi}{4} - \sin \frac{2\pi}{4} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$

При $\alpha = \frac{\pi}{2} \sin \frac{6\pi}{2} - \sin \frac{2\pi}{2} = 0 - 0 = 0.$

Ответ: существует при $\frac{\pi}{12}$ и $\frac{\pi}{4}$ и не существует при $\frac{\pi}{2}.$

№ 1.573.

а) $\frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha}; 22,5^\circ, 45^\circ, 90^\circ.$

При $22,5^\circ$ и 45° знаменатель дроби не равен нулю, следовательно, выражение существует. При $\alpha = 90^\circ \sin 2\alpha = 0$ и выражение не существует.

Ответ: существует при $22,5^\circ$ и 45° и не существует при $90^\circ.$

б) $\frac{\sin 6\alpha}{\cos 3\alpha}; 15^\circ, 30^\circ, 180^\circ.$

Ответ: существует при 15° и 180° и не существует при $30^\circ.$

Расположите в порядке возрастания (1.574 — 1.577):

№ 1.574.

а) $\sin 30^\circ, \sin 60^\circ, \sin 210^\circ;$

Ответ: $\sin 210^\circ < \sin 30^\circ < \sin 60^\circ.$

б) $\cos 30^\circ, \cos 60^\circ, \cos 210^\circ;$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$

$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

Ответ: $\cos 210^\circ < \cos 60^\circ < \cos 30^\circ.$

№ 1.575.

а) $\sin 40^\circ$, $\sin 80^\circ$, $\sin 200^\circ$.

$\sin 200^\circ < 0$, а $\sin 40^\circ > 0$ и $\sin 80^\circ > 0$. Так как функция синус возрастает на отрезке $[0^\circ; 90^\circ]$, то $\sin 40^\circ < \sin 80^\circ$.

Ответ: $\sin 200^\circ < \sin 40^\circ < \sin 80^\circ$.

б) $\cos 40^\circ$, $\cos 80^\circ$, $\cos 200^\circ$;

Ответ: $\cos 200^\circ < \cos 80^\circ < \cos 40^\circ$.

№ 1.576.

а) $\operatorname{tg} 40^\circ$, $\operatorname{tg} 80^\circ$, $\operatorname{tg} 160^\circ$.

Ответ: $\operatorname{tg} 160^\circ < \operatorname{tg} 40^\circ < \operatorname{tg} 80^\circ$.

б) $\operatorname{ctg} 40^\circ$, $\operatorname{ctg} 80^\circ$, $\operatorname{ctg} 160^\circ$;

Так как функция котангенс монотонно убывает на промежутке $(0^\circ; 180^\circ)$, то $\operatorname{ctg} 160^\circ < \operatorname{ctg} 80^\circ < \operatorname{ctg} 40^\circ$.

Ответ: $\operatorname{ctg} 160^\circ < \operatorname{ctg} 80^\circ < \operatorname{ctg} 40^\circ$.

№ 1.577.

а) $\sin \frac{4\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$.

$$\sin \frac{4\pi}{3} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0; \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\sin \frac{4\pi}{3} < \cos \frac{\pi}{2} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$.

б) $\cos \frac{7\pi}{6}$, $\sin \pi$, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$;

Ответ: $\cos \frac{7\pi}{6} < \sin \pi < \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$.

Вычислите значение выражения при данном значении α (1.578–1.583);

№ 1.578.

а) $\frac{1 - \cos \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ при $\alpha = \frac{2\pi}{3}$;

Ответ: $\left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.

$$\text{б) } \frac{1 + \cos \alpha}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \text{ при } \alpha = \frac{2\pi}{3};$$

$$\frac{1 + \cos \alpha}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

№ 1.579.

$$\text{а) } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - 1 \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{12}.$$

$$\begin{aligned} (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - 1 &= \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 1 = 1 - \sin 2\alpha - 1 = \\ &= -\sin 2\alpha = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$$

$$\text{б) } (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 1 \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{8};$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

№ 1.580.

$$\text{а) } \frac{\cos^2(\alpha - \pi) - \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin 2\alpha} \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{12};$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \sqrt{3} \right\}.$$

$$\text{б) } \frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin^2(\pi + \alpha)} \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{8}.$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin^2(\pi + \alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

$$\text{Ответ: } \{1\}.$$

№ 1.581.

$$\text{а) } 1 - \sin \alpha \operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

$$1 - \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = 1 - \cos \alpha \cos \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{3}{4} \right\}.$

б) $1 - \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

Ответ: $\left\{ \frac{3}{4} \right\}.$

№ 1.582.

а) $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$ при $\alpha = 30^\circ$.

Ответ: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$

б) $\frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha}$ при $\alpha = 30^\circ$.

$$\frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\left\{ \sqrt{3} \right\}.$

№ 1.583.

а) $\cos 4\alpha \cos 3\alpha + \sin 4\alpha \sin 3\alpha$ при $\alpha = \frac{7\pi}{6}$.

$$\begin{aligned} \cos 4\alpha \cos 3\alpha + \sin 4\alpha \sin 3\alpha &= \cos(4\alpha - 3\alpha) = \cos \alpha = \cos \frac{7\pi}{6} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$

б) $\sin 5\alpha \cos 4\alpha - \cos 5\alpha \sin 4\alpha$ при $\alpha = \frac{4\pi}{3}$;

Ответ: $\left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$

Преобразуйте выражение в произведение (1.584 – 1.586):

№ 1.584.

а) $\sin 2\alpha + 1 + \cos 2\alpha$;

Ответ: $2\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)$.

б) $1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$.

$$1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = 2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

Ответ: $2\sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)$.

№ 1.585.

а) $1 - 2\cos 2\alpha + \cos 2\alpha$.

$$1 - 2\cos 2\alpha + \cos 2\alpha = (1 + \cos 2\alpha) - 2\cos\alpha = 2\cos^2\alpha - 2\cos\alpha = \\ = 2\cos\alpha(\cos\alpha - 1).$$

Ответ: $2\cos\alpha(\cos\alpha - 1)$.

б) $1 + 2\cos\alpha + \cos 2\alpha$;

Ответ: $2\cos\alpha(\cos\alpha + 1)$.

№ 1.586.

а) $\cos\alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha$;

Ответ: $\sin 2\alpha(1 + 2\sin\alpha)$.

б) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$.

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = (\cos\alpha + \cos 3\alpha) + \cos 2\alpha = 2\cos 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha = \\ = \cos 2\alpha(1 + 2\cos\alpha)$$

Ответ: $\cos 2\alpha(1 + 2\cos\alpha)$.

Определите наибольшее и наименьшее значения выражения (1.587 – 1.589):

№ 1.587.

а) $\sqrt{2}\sin\alpha + \sqrt{2}\cos\alpha$.

$$\sqrt{2}\sin\alpha + \sqrt{2}\cos\alpha = \sqrt{2}(\sin\alpha + \cos\alpha) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right) = \\ = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$$

Так как функция синус меняется от 1 до -1, то выражение меняется от 2 до -2.

Ответ: $\{2; -2\}$.

б) $\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$.

Ответ: $\{2; -2\}$.

№ 1.588.

а) $\sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha$.

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha \right) = 2 \left(\sin \alpha \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha \right) = \\ &= 2 \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right).\end{aligned}$$

Ясно, что значения выражения меняется от 2 до -2.

Ответ: $\{2; -2\}$.

б) $\sqrt{2} \cos \alpha - \sqrt{2} \sin \alpha$.

Ответ: $\{2; -2\}$.

№ 1.589.

а) $\frac{3 + 7 \cos \alpha}{10}$;

Ответ: $\{1; -0,4\}$.

б) $\frac{3 - 7 \sin \alpha}{10}$.

При $\sin \alpha = -1$ выражение максимально и равно 1.

При $\sin \alpha = 1$, выражение минимально и равно $\frac{3-7}{10} = -0,4$.

Ответ: $\{1; -0,4\}$.

Докажите, что при допустимых значениях α значение выражения не зависит от α . Какие из указанных значений α являются допустимыми (1.590 — 1.598)?

№ 1.590.

а) $\frac{2(1 - \sin^2 \alpha)}{\sin 2\alpha} - \operatorname{ctg} \alpha$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \pi$, $\alpha = 2\pi$.

$$\frac{2(1 - \sin^2 \alpha)}{\sin 2\alpha} - \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2 \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 0.$$

При всех значениях α $\sin 2\alpha$ обращается в ноль. Следовательно, допустимых значений нет.

Ответ: ни одно значение α не является допустимым.

б) $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \pi$, $\alpha = 2\pi$.

Ответ: ни одно из указанных значений α не допустимо.

№ 1.591.

а) $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha$; $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 90^\circ$.

Ответ: допустимы 0° и 45° .

б) $\sin^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$; $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 90^\circ$.

$$\sin^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

При $\alpha = 0^\circ$ функция котангенс не определена. При остальных определена.

Ответ: допустимы 30° и 90° .

№ 1.592.

а) $\frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 1}{\sin 2\alpha}$; $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 1}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha - 1}{\sin 2\alpha} = \frac{1 + \sin 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha} = 1.$$

При $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\sin 2\alpha$ обращается в ноль. Выражение определено только при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: допустимо $\frac{\pi}{4}$.

б) $\frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - 1}{\cos 2\alpha} + \operatorname{tg} 2\alpha$; $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: допустимы 0 и $\frac{\pi}{2}$.

№ 1.593.

а) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \sin 2\alpha$; $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 135^\circ$, $\alpha = 180^\circ$.

Ответ: допустимо 135° .

б) $(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha) \sin 2\alpha + 4 \cos^2 \alpha$; $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$.

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha) \sin 2\alpha + 4 \cos^2 \alpha &= \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha = \\ &= 2 \sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2. \end{aligned}$$

При $\alpha = 90^\circ$ не определен $\operatorname{tg} \alpha$, а при $\alpha = 180^\circ$ не определен $\operatorname{ctg} \alpha$. При $\alpha = 45^\circ$ выражение определено.

Ответ: допустимо 45° .

№ 1.594.

$$a) \frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\alpha}; \quad \alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha + \sqrt{2}\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{2}.$$

Выражение не определено при $\alpha = 0$, когда $\sin\alpha = 0$.

Ответ: допустимы $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$.

$$b) \frac{\sin\alpha + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\cos\alpha}; \quad \alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: допустимы 0 и $\frac{\pi}{4}$.

№ 1.595.

$$a) \frac{\sqrt{2}\sin\alpha + 2\cos(45^\circ + \alpha)}{\cos\alpha}; \quad \alpha = 135^\circ, \quad \alpha = 90^\circ, \quad \alpha = 180^\circ.$$

Ответ: допустимы 135° и 180° .

$$b) \frac{\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos(30^\circ - \alpha)}{\sin\alpha}; \quad \alpha = 135^\circ, \quad \alpha = 90^\circ, \quad \alpha = 180^\circ.$$

$$\frac{\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos(30^\circ - \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}\cos\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha} = -1.$$

Выражение не определено при $\alpha = 180^\circ$, т.к. $\sin\alpha = 0$.

Ответ: допустимы 135° и 90° .

№ 1.596.

$$a) \left(\frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right); \quad \alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

$$\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right) = \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1.$$

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\cos\alpha = 0$ и выражение не определено.

Ответ: допустимы 0 и $\frac{\pi}{3}$.

$$b) \left(\frac{1}{\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\right); \quad \alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: допустимы $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{2}$.

№ 1.597.

а) $\frac{\cos 2\alpha + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$; $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: допустимы 0 и $\frac{\pi}{4}$.

б) $\frac{\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$; $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1.$$

При $\alpha = 0$ $\cos^2 \alpha = 1$ и выражение не определено, т.к. его знаменатель обращается в ноль.

Ответ: допустимы $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$.

№ 1.598.

а) $\frac{2 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$; $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{2 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = 2 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha + 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1.$$

При $\alpha = 0$ функция $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ не определена, значит, не определено и все выражение в целом. В остальных случаях выражение определено.

Ответ: допустимы $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{2}$.

б) $\frac{\operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{ctg} 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha}$; $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: ни одно из указанных значений α не является допустимым.

№ 1.599. Определите, верно ли неравенство:

а) $\cos(149^\circ + x) \cos x + \sin(149^\circ + x) \sin x < 0$;

Ответ: неравенство верно.

б) $\sin(287^\circ - x) \cos x + \cos(287^\circ - x) \sin x < 0$.

$$\sin(287^\circ - x) \cos x + \cos(287^\circ - x) \sin x = \sin((287^\circ - x) + x) = \sin 287^\circ < 0,$$

т.к. угол 287° лежит в четвертой четверти.

Ответ: неравенство верно.

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

№ 1.601.

а) Океанский лайнер отправился в рейс. Когда он отошел от берега на 180 миль, за ним вылетел самолет с экстренной почтой. Скорость самолета в 10 раз больше скорости лайнера. На каком расстоянии от берега самолет догонит лайнер?

Ответ: 200 миль.

б) Велосипедист выехал из пункта А. Когда он был на расстоянии 200 м от него, за ним вдогонку отправился мотоциклист. Скорость мотоциклиста в 2 раза больше скорости велосипедиста. На каком расстоянии от пункта А мотоциклист догонит велосипедиста?

Пусть скорость велосипедиста равна V . Тогда скорость мотоциклиста $2V$. Пусть мотоциклист был в пути время t . Тогда он проехал расстояние $2V \cdot t$. Оно равно искомому. За это же время велосипедист проехал расстояние $V \cdot t$. По условию $2V \cdot t = 200 + Vt$. Отсюда $V \cdot t = 200$ м. Искомое расстояние равно $2V \cdot t = 2 \cdot 200 \text{ м} = 400 \text{ м}$.

Ответ: 400 м.

№ 1.602.

а) Скорость судна в стоячей воде 50 км/ч. На путь от А до В по течению реки оно тратит 3 ч, а на обратный путь 4,5 ч. Какова скорость течения реки?

Пусть скорость течения реки равна $V \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Скорость судна относительно берега при движении по течению $(50 + V) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а при движении против течения $(50 - V) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. По условию прямой и обратный пути равны: $(50 + V) \cdot 3 = (50 - V) \cdot 4,5$. Отсюда находим $V = 10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ответ: $10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Скорость течения реки 5 км/ч. На путь от М до N по течению реки судно тратит 3 ч, а на обратный путь 4,5 ч. Какова скорость судна в стоячей воде?

Ответ: $25 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.603.

а) С туристической базы вышел пешеход, его скорость 4 км/ч. Через 4,5 ч по той же дороге выехал автомобиль со скоростью 76 км/ч. На каком расстоянии от базы автомобиль догонит пешехода?

Ответ: 19 км.

б) Спортсмен, бегущий по шоссе со скоростью 16 км/ч, миновал населенный пункт на 20 мин раньше велосипедиста, следующего в том же направлении. Через сколько времени велосипедист догонит бегуна, если скорость бегуна на 5 км/ч меньше скорости велосипедиста?

Скорость велосипедиста $16 \frac{\text{км}}{\text{ч}} + 5 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Пусть искомое время равно t ч. Оно равно времени, которое велосипедист проехал от населенного пункта до места встречи. Это же расстояние пешеход преодолел за время $t + \frac{20}{60}$ ч $= \left(t + \frac{1}{3}\right)$ ч, т.к. миновал населенный пункт на 20 мин. раньше. Приравнявая пути, преодоленные велосипедистом и пешеходом, получим уравнение $21 \cdot t = 16 \left(t + \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 5t = \frac{16}{3} \Leftrightarrow t = \frac{16}{3}$ ч $= 1 \frac{1}{15}$ = 1 час 4 мин.

Ответ: 1 час 4 мин.

№ 1.604.

а) Расстояние по реке между пунктами А и В равно 84 км. Из этих пунктов одновременно навстречу друг другу вышли две моторные лодки, собственные скорости которых различаются в 1,8 раза. Через 3 ч они встретились. Найдите собственные скорости лодок.

Пусть собственная скорость одной лодки будет $x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, тогда собственная скорость другой $1,8x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Относительная скорость лодок есть $x + 1,8x = 2,8x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. По условию $\frac{84}{2,8x} = 3$. Отсюда $x = \frac{84}{2,8 \cdot 3} = 10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Скорость другой лодки $1,8x = 18 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ответ: $10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; $18 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Расстояние по реке между двумя пунктами равно 60 км. Из этих пунктов одновременно навстречу друг другу вышли две моторные лодки, собственные скорости которых различаются в 1,5 раза. Через 2 ч они встретились. Найдите собственные скорости лодок.

Ответ: $12 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; $18 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.605.

а) Путь от города до поселка автомобиль проезжает за 2,5 ч. Если он увеличит скорость на 20 км/ч, то за 2 ч он проедет путь на 15 км больший, чем расстояние от города до поселка. Найдите это расстояние.

Ответ: 125 км.

6) Из Москвы в Санкт – Петербург выехал автобус. Спустя 1 ч вслед за ним вышла легковая машина, скорость которой на 20 км/ч больше скорости автобуса. Машина обогнала автобус и через 5 ч после своего выхода находилась впереди него на 70 км. Найдите скорость автобуса.

Пусть скорость автобуса равна $V \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Скорость легковой машины будет $(V + 20) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Машина находилась в пути 5 ч, а автобус $(5 + 1) = 6$ ч. По условию $(V + 20) \cdot 5 - V \cdot 6 = 70 \Leftrightarrow V = 30 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ответ: $30 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.606.

а) Из порта одновременно вышли два катера, один — на юг, другой — на север. Через 3 ч расстояние между ними составило 96 км. Найдите скорость первого катера, если она на 10 км/ч больше скорости второго катера.

Пусть скорость первого катера равна $V \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Тогда скорость второго катера $(V - 10) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. По условию задачи

$$V \cdot 3 + (V - 10) \cdot 3 = 96 \Leftrightarrow 6V = 126 \Leftrightarrow V = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Ответ: $21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Моторная лодка плыла по течению реки 3 ч, а на тот же путь против течения реки моторная лодка затратила 5 ч. Какова скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 10 км/ч?

Ответ: $40 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.607.

а) Легковой и грузовой автомобили проезжают расстояние между двумя сельскими пунктами соответственно за 3 ч и 5 ч. Определите их скорости, если скорость легкового автомобиля на 20 км/ч больше скорости грузового.

Ответ: $50 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; $30 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Катер проходит одно и то же расстояние по течению реки за 3 ч, а против течения — за 3,5 ч. Найдите скорость течения реки, если скорость катера в стоячей воде 25 км/ч.

Пусть скорость течения реки равна $V \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Тогда скорость катера

по течению будет $(25 + V) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а против течения $(25 - V) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. По условию задачи $(25 + V) \cdot 3 = (25 - V) \cdot 3,5 \Leftrightarrow 6,5V = 25 \cdot 0,5 \Leftrightarrow V = \frac{25}{13} = 1 \frac{12}{13} \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ответ: $1 \frac{12}{13} \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.608.

а) Каменщик должен выложить две стены из кирпича. На первую стену уходит на 2000 кирпичей больше, чем на вторую, а на обе стены уходит 6200 кирпичей. Сколько кирпичей уйдет на каждую стену?

Пусть на первую стену уходит x кирпичей, тогда на вторую уйдет $(x + 2000)$ кирпичей. По условию $x + (x + 2000) = 6200 \Leftrightarrow 2x = 8200 \Leftrightarrow x = 4100$ кирпичей. На вторую стену уйдет $x - 2000 = 2100$ кирпичей.

Ответ: 4100 — на первую, 2100 — на вторую.

б) Две бригады изготовили 116 деталей, причем первая бригада изготовила на 4 детали больше, чем вторая. Сколько деталей изготовила каждая бригада?

Ответ: 60 — первая, 56 — вторая.

№ 1.609.

а) Трое рабочих сделали 105 тумбочек. Первый рабочий сделал в 2 раза больше тумбочек, чем второй и третий вместе, а второй рабочий — на 5 больше, чем третий. Сколько тумбочек сделал каждый?

Ответ: 1-й — 70, 2-й — 20, 3-й — 15.

б) На станции технического обслуживания трое автомехаников отремонтировали 68 автомобилей. Первый починил на 10 автомобилей меньше, чем второй, а третий — на 15 больше, чем второй. Сколько автомобилей починил каждый механик?

Пусть второй автомеханик отремонтировал x автомобилей, тогда первый отремонтировал $(x - 10)$ авто, а третий $(x + 15)$ машин. По условию $x + (x - 10) + (x + 15) = 68 \Leftrightarrow 3x = 63 \Leftrightarrow x = 21$ автомобиль. Соответственно $(x - 10) = 11$ авто и $(x + 15) = 36$ авто.

Ответ: 1-й — 11, 2-й — 21, 3-й — 36.

№ 1.610.

а) Пешеход рассчитал, что, двигаясь с определенной скоростью, он пройдет намеченный путь за 2,5 ч. Но, увеличив скорость на 1 км/ч, он прошел этот путь за 2 ч. Найдите длину пути.

Пусть длина пути равна S , а предполагаемая скорость пешехода $V \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. По условию $S = V \cdot 2,5$ и $S = (V + 1) \cdot 2$. Получаем уравнение

$$V \cdot 2,5 = (V + 1) \cdot 2 \Leftrightarrow 0,5V = 2 \Leftrightarrow V = 4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}. \text{ Теперь находим путь}$$

$$S = 4 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot 2,5 \text{ ч} = 10 \text{ км}.$$

Ответ: 10 км.

б). Расстояние между двумя пунктами поезд проходит по расписанию за 7 ч. Через 6 ч после отправления он снизил скорость на 10 км/ч, поэтому в конечный пункт пришел с опозданием на 10 мин. Найдите первоначальную скорость поезда.

$$\text{Ответ: } 70 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

№ 1.611.

а) Один насос наполнил бассейн объемом 2000 м^3 , а другой насос за это же время наполнил бассейн объемом 2100 м^3 . Какова производительность каждого насоса, если один из них накачивает на 4 м^3 в час больше, чем другой?

$$\text{Ответ: } 80 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}; 84 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}.$$

б) Один насос за некоторое время наполнил бассейн, а другой насос за это же время наполнил бассейн объемом на 100 м^3 больше. Определите объемы бассейнов, если один из насосов накачивает в час 80 м^3 , а другой — 90 м^3 .

Пусть объем первого бассейна равняется $V \text{ м}^3$. Тогда объем второго бассейна будет $(V + 100) \text{ м}^3$. Производительность первого насоса $80 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$, а второго — $90 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$. Так как время работы насосов одинаково,

$$\text{то } \frac{V}{80} = \frac{V + 100}{90} \Leftrightarrow 90V = 80V + 8000 \Leftrightarrow V = 800 \text{ м}^3.$$

$$(V + 100) = 900 \text{ м}^3.$$

Ответ: 800 м^3 , 900 м^3 .

№ 1.612.

а) Бассейн заполняется водой, поступающей через две трубы. Одна труба может заполнить бассейн за 12 ч, а другая — за 20 ч. За сколько часов заполнится бассейн двумя трубами, работающими одновременно?

Первая труба накачивает в час $\frac{1}{12}$ часть бассейна, а вторая —

$$\frac{1}{20} \text{ часть. Вместе за час они накачивают } \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{32}{240} = \frac{2}{15} \text{ части}$$

бассейна. Весь бассейн обе трубы заполняют за $\frac{1}{\frac{2}{15}} = \frac{15}{2} = 7,5$ час.

Ответ: 7,5 час.

б) Вода, поступающая в первую трубу, может наполнить бассейн за 6 ч, а вода, вытекающая из второй трубы, может его опорожнить за 15 ч. За сколько часов наполнится бассейн, если обе трубы будут одновременно открыты?

Ответ: 10 ч.

№ 1.613.

а) При выполнении контрольной работы по математике 12% учеников не выполнили ни одного задания, 32% допустили ошибки, а остальные 14 человек решили задания верно. Сколько всего учеников в классе?

Ответ: 25.

б) На заводе были изготовлены легковые и грузовые машины, причем 35% всех изготовленных машин — легковые. Определите число изготовленных машин, если грузовых изготовлено на 240 больше, чем легковых.

Пусть было изготовлено x легковых машин. Грузовых машин было изготовлено $(x + 240)$. Значит всего было изготовлено $(2x + 240)$ машин. По условию легковые машины составляют долю $\frac{x}{2x + 240} = 0,35$. Отсюда находим x : $x = 0,7x + 84 \Leftrightarrow x = 280$. Общее

число машин составляет $(2x + 240) = 560 + 240 = 800$ штук.

Ответ: 800.

№ 1.614.

а) Определите первоначальную стоимость продукта, если после подорожания соответственно на 120%, 200% и 100% его конечная стоимость составила 264 р.

Пусть продукт стоил первоначально x р. После первого подорожания его стоимость стала $x + \frac{120\%}{100\%} \cdot x = 2,2x$ р. После второго подорожания стоимость стала $2,2x + \frac{200\%}{100\%} \cdot 2,2x = 2,2x \cdot 3,0$ р. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что после третьего подорожания стоимость товара составила $2,2x \cdot 3,0 \cdot 2,0 = 264$ р. Отсюда $x = 20$ р.

Ответ: 20 р.

б) Предприниматель купил акции и через год продал их по номинальной стоимости, получив прибыль, причем полученная им сумма составила 11 500 р. Сколько акций было куплено предпринимателем, если прибыль составляет 15% от стоимости акции и равна 150 р.?

Пусть стоимость 1 акции была равна x . Прибыль на нее составила $\frac{15\%}{100\%} \cdot x = 150$ р. Отсюда $x = 1000$ р. Конечная стоимость акции $(x + 150 \text{ р.}) = 1150$ р. Общая полученная сумма была 11 500 р. Следовательно, куплено 10 акций.

Ответ: 10.

№ 1.615.

а) Лекарственная ромашка теряет при сушке 84% массы. Сколько килограммов ромашки нужно собрать, чтобы получить 8 кг сухого растения?

Пусть нужно собрать x кг ромашки. Ее сухой вес составил $x - 0,84x = 0,16x$ кг. По условию $0,16x = 8 \text{ кг} \Leftrightarrow x = 50 \text{ кг}$.

Ответ: 50 кг.

б) При добавлении воды к раствору его объем увеличился на 42% и стал равным 71 л. Определите первоначальный объем раствора.

Ответ: 50 л.

№ 1.616.

а) Первое число равно 0,6, а второе 0,2. Сколько процентов первое число составляет от суммы этих чисел?

Ответ: 75 %.

б) Первое число равно 3,6, а второе 9. На сколько процентов второе число больше первого?

Второе число больше первого на $9 - 3,6 = 5,4$. Это составляет от первого числа $\frac{5,4}{3,6} \cdot 100\% = 150\%$.

Ответ: на 150 %.

№ 1.617.

а) Ученики девятых и десятых классов посадили 176 деревьев. Сколько деревьев посадили десятиклассники, если они посадили на 20% больше деревьев, чем девятиклассники?

Пусть девятиклассники посадили x деревьев, тогда десятиклассники посадили $(x + 0,2x) = 1,2x$ деревьев. Всего было посажено $x + 1,2x = 2,2x = 176$ деревьев. Отсюда $x = 80$ и $1,2x = 96$ деревьев.

Ответ: 96.

б) Ученики седьмых и восьмых классов получили в библиотеке 168 учебников, причем восьмиклассники получили на 10% книг больше, чем семиклассники. Сколько учебников получили семиклассники?

Ответ: 80.

№ 1.618.

а) Собрали 100 кг грибов, влажность которых составила 99%. Когда грибы подсушили, их влажность снизилась до 98%. Какова стала их масса?

Ответ: 50 кг.

б) Собрали 100 кг ягод. После сортировки 60% собранных ягод были отправлены в магазин для продажи. В магазине 11 % поступивших ягод испортилось, поэтому они не поступили в продажу. Сколько килограммов ягод было продано?

В магазин было отправлено 60 % или $100 \text{ кг} \cdot 0,6 = 60 \text{ кг}$ ягод. В продажу поступило $100 \% - 11 \% = 89 \%$ ягод. От 60 кг это составляет $0,89 \cdot 60 \text{ кг} = 53,4 \text{ кг}$.

Ответ: 53,4 кг.

№ 1.619.

а) В спортивном лагере в трех домах живет 149 человек. В третьем доме на 2 человека больше, чем в первом, а в первом и во втором вместе на 43 человека больше, чем в третьем. Сколько человек живет в каждом доме?

Пусть в первом доме живет x человек, а во втором y человек. В третьем доме живет $(x + 2)$ человека. По условию $y + x + (x + 2) = 149$. Кроме того $x + y = 43 + (x + 2)$. Отсюда $y = 45$. Из первого уравнения $2x = 147 - y = 102 \Leftrightarrow x = 51$ человек. В третьем доме живет $(x + 2) = 53$ человека.

Ответ: 51, 45, 53.

б) В трех универсальных магазинах работает 168 человек. Во втором магазине работает на 4 человека больше, чем в третьем магазине, а в третьем магазине на 7 человек больше, чем в первом магазине. Сколько человек работает в каждом магазине?

Ответ: 50, 61, 57.

№ 1.620.

а) На изготовление свитера, шапки и шарфа израсходовали 555 г шерсти, причем на шапку ушло в 5 раз меньше шерсти, чем на свитер, и на 5 г больше, чем на шарф. Сколько шерсти израсходовали на каждое изделие?

Ответ: 400 г — на свитер, 80 г — на шапку, 75 г — на шарф.

б) В трех корпусах туристической базы живет 119 человек. В первом корпусе живет на 4 человека больше, чем во втором, и на 3 человека меньше, чем в третьем. Сколько человек живет в каждом корпусе?

Пусть в первом корпусе живет x человек, тогда во втором корпусе живет $(x - 4)$ человека, а в третьем — $(x + 3)$. По условию $x + (x - 4) + (x + 3) = 119 \Leftrightarrow 3x = 120 \Leftrightarrow x = 40$ человек. $(x - 4) = 36$ человек, $(x + 3) = 43$ человека.

Ответ: 40, 36, 43.

№ 1.621.

а) На вопрос учеников о прошедшей контрольной работе учитель ответил: «Пятерок больше, чем двоек, на 3, троек на 1 меньше, чем четверок, а четверок в 4 раза больше, чем двоек». Сколько человек получили пятерки и сколько четверки, если в классе 32 ученика?

Пусть было получено x двоек. Пятерок получено $(x+3)$, четверок $4x$, а троек $(4x-1)$. По условию $x+(x+3)+4x+(4x-1)=32 \Leftrightarrow 10x=30 \Leftrightarrow x=3$. Пятерок получено $(x+3)=6$, четверок $4x=12$.

Ответ: пятерки – 6, четверки – 12.

б) На выставке кошек были представлены кошки сибирской, ангорской, персидской и сиамской пород. Сиамских кошек было в 2 раза больше, чем ангорских, персидских было в 1,5 раза больше, чем сиамских, а сибирских было на 13 меньше, чем персидских. Сколько было кошек каждой породы, если всего было представлено 77 кошек?

Ответ: 10 ангорских, 20 сиамских, 30 персидских, 17 сибирских.

№ 1.622.

а) В трех поселках живут 6000 жителей. Во втором поселке вдвое больше жителей, чем в первом, а в третьем на 500 жителей меньше, чем во втором. Сколько жителей во втором поселке?

Ответ: 2 600.

б) Три цеха завода изготовили 4200 деталей. Второй цех изготовил в 3 раза больше деталей, чем третий, а первый столько, сколько изготовили вместе второй и третий. Сколько деталей изготовил каждый цех?

Пусть третий цех изготовил x деталей. Второй цех изготовил $3x$ деталей, а первый – $(x+3x)=4x$ деталей. По условию $x+3x+4x=4200 \Leftrightarrow 8x=4200 \Leftrightarrow x=525$ деталей. $3x=1575$ деталей, $4x=2100$ деталей.

Ответ: 1-й – 2 100, 2-й – 1 575, 3-й – 525.

№ 1.623.

а) Один из углов треугольника в 2 раза больше второго, а третий угол больше первого на 30° . Каковы углы треугольника?

Пусть первый угол треугольника равен x° , тогда второй будет $0,5 \cdot x^\circ$. Третий угол $(x^\circ + 30^\circ)$. В сумме они составляют 180° . $x + 0,5x + (x + 30^\circ) = 180^\circ \Leftrightarrow 2,5x = 150, x = 60^\circ$. $0,5x = 30^\circ$, $(x^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$.

Ответ: 60° , 30° , 90° .

б) Один из углов треугольника в 3 раза меньше второго, а третий угол на 20° больше первого. Каковы эти углы?

Ответ: 32° , 96° , 52° .

№ 1.624.

а) Одна из сторон прямоугольника на 20 см больше другой. Если меньшую сторону увеличить вдвое, а большую втрое, то периметр нового прямоугольника станет равным 240 см. Найдите стороны данного прямоугольника.

Ответ: 12 см и 32 см.

б) Одна из сторон прямоугольника на 25 см меньше другой. Если большую сторону уменьшить в 4, а меньшую в 3 раза, то периметр

нового прямоугольника будет равен 30 см. Найдите стороны данного прямоугольника.

Пусть одна сторона прямоугольника равна x см, тогда другая будет $(x - 25)$ см. По условию $2 \cdot \frac{x}{4} + 2 \cdot \frac{x - 25}{3} = 30$. $3x + 4x - 100 = 15 \cdot 12 \Leftrightarrow 7x = 280 \Leftrightarrow x = 40$. Меньшая сторона $(x - 25) = 15$ см.

Ответ: 40 см и 15 см.

№ 1.625.

а) Два угла равнобедренного треугольника пропорциональны числам 2 и 5. Найдите углы треугольника.

Пусть один угол будет равен 2ϕ , а второй 5ϕ . Если угол 2ϕ находится при вершине равнобедренного треугольника, то $2\phi + 2 \cdot 5\phi = 180^\circ \Rightarrow \phi = 15^\circ$. Тогда углы равны $5\phi = 75^\circ$, 75° и $2\phi = 30^\circ$.

Если при вершине находится угол 5ϕ , то $5\phi + 2 \cdot 2\phi = 180^\circ \Rightarrow \phi = 20^\circ$. Углы составят $2\phi = 40^\circ$, 40° , $5\phi = 100^\circ$.

Ответ: 75° , 75° , 30° или 40° , 40° , 100° .

б) Две стороны равнобедренного треугольника пропорциональны числам 6 и 8, а его периметр равен 440 см. Найдите стороны треугольника.

Ответ: 120 см, 160 см, 160 см или 132 см, 132 см, 176 см.

№ 1.626.

а) У Вити было на 10 р. больше, чем у Маши. Когда Витя потратил половину своих денег, у него стало на 15 р. меньше, чем у Маши. Сколько денег было у Маши и Вити вместе первоначально?

Ответ: 40 р. — у Маши, 50 р. — у Вити.

б) У Толи и Гриши вместе было 100 р. После того как каждый из них потратил половину своих денег, у Гриши стало на 10 р. больше, чем у Толи. Сколько денег было у каждого первоначально?

Пусть у Гриши было x р., а у Толи y р. $x + y = 100$ р. $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 10$ р.

Получаем систему $\begin{cases} x + y = 100 \\ x - y = 20 \end{cases} \Rightarrow x = 60, y = 40$.

Ответ: 40 р. — у Толи, 60 р. — у Гриши.

№ 1.627.

а) Сбербанк в конце года начисляет 20% к сумме, находящейся на счету в начале года. Каким станет первоначальный вклад в 500 р. через 3 года?

К концу первого года на счету будет $500 \text{ р.} + 0,2 \cdot 500 \text{ р.} = 1,2 \cdot 500 \text{ р.}$
К концу второго года будет $1,2 \cdot (1,2 \cdot 500 \text{ р.})$. К концу третьего года $1,2^3 \cdot 500 \text{ р.} = 1,728 \cdot 500 = 864 \text{ р.}$

Ответ: 864 р.

6) Сбербанк в конце года начисляет 20% к сумме, находящейся на счету в начале года. Каким станет первоначальный вклад в 1200 р. через 4 года?

Ответ: 2 488 р. 32 к.

№ 1.628.

а) Покупатель пришел в магазин, имея с собой 500 р. На вторую покупку он потратил денег в 2 раза больше, чем на первую, а на третью в 4 раза больше, чем на две предыдущие вместе. После этого у него осталось 140 р. Сколько денег покупатель истратил на каждую покупку?

Ответ: 24 р. — на 1-ю, 48 р. — на 2-ю, 288 р. — на 3-ю.

б) Делая в магазине покупки, мальчик за первую заплатил в 4 раза больше, чем за вторую, а за третью — в 10 раз больше, чем за первую и вторую вместе. После этого у него осталось 1350 р. Сколько стоила каждая покупка, если вначале у него было 3000 р.?

Пусть вторая покупка стоит x рублей. Тогда первая стоит $4x$ р., а третья $10(x + 4x) = 50x$. Все покупки стоят $3000 \text{ р.} - 1350 \text{ р.} = 1650 \text{ р.}$
Получаем уравнение $x + 4x + 50x = 1650 \Leftrightarrow x = 30 \text{ р.}$,
 $4x = 120 \text{ р.}$, $50x = 1500 \text{ р.}$

Ответ: 120 р. — за 1-ю, 30 р. — за 2-ю, 1500 р. — за 3-ю.

№ 1.629.

а) Один раствор содержит 20% (по объему) соляной кислоты, а второй — 70% кислоты. Сколько литров первого и второго растворов нужно взять, чтобы получить 100 л 50%-ного раствора соляной кислоты?

Предположим, что мы взяли x л 20 % раствора кислоты. Тогда 70 % кислоты надо взять $(100 - x)$ л. В 20 % растворе содержится $0,2 \cdot x$ л. чистой кислоты, а в 70 % — $(100 - x) \cdot 0,7$ л чистой кислоты. Всего $0,2 \cdot x + (100 - x) \cdot 0,7 = 50$. Отсюда $x = 40$ л. 70 % кислоты надо взять $(100 - x) = 60$ л.

Ответ: 40 л. — 1-го, 60 л. — 2-го.

б) Имеется кусок сплава меди с оловом массой 15 кг, содержащий 40% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав содержал 30% меди?

Ответ: 5 кг.

№ 1.630.

а) Из города А в город В, расстояние между которыми составляет 20 км, одновременно вышли 2 пешехода. Скорость одного из них была на 1 км/ч больше скорости другого, поэтому он затратил на весь путь на 60 мин меньше. Какова скорость каждого пешехода?

Ответ: $5 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; $4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

6) Из города A в город B выехали велосипедист и мотоциклист. Скорость велосипедиста на 10 км/ч меньше скорости мотоциклиста, поэтому он затратил на весь путь на 6 ч больше. С какой скоростью ехал мотоциклист, если расстояние между городами 120 км?

Пусть скорость мотоциклиста $V \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Скорость велосипедиста $(V - 10) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. На весь путь мотоциклист затратил $\frac{120 \text{ км}}{V \frac{\text{км}}{\text{ч}}}$ часов, а ве-

лосипедист $-\frac{120 \text{ км}}{(V - 10) \frac{\text{км}}{\text{ч}}}$ ч. По условию $\frac{120}{V - 10} - \frac{120}{V} = 6$. Получаем

уравнение $120V - 120(V - 10) = 6V(V - 10) \Leftrightarrow V^2 - 10V - 1200 = 0$
 $V_1 = 20, V_2 = -10$ — не подходит, т.к. $V > 0$.

Отсюда скорость мотоциклиста $20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ответ: $20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.631.

а) Товарный поезд был задержан в пути на 18 мин, а затем на расстоянии в 60 км наверстал это время, увеличив скорость на 10 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

Ответ: $40 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Мотоциклист проехал 40 км от пункта A до пункта B . Возвращаясь обратно со скоростью на 10 км/ч меньше первоначальной, он затратил на путь на 20 мин больше. Найдите первоначальную скорость мотоциклиста.

Пусть первоначальная скорость мотоциклиста равна $V \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Поездка от пункта A до пункта B заняла $\frac{40}{V}$ часов. Обратная дорога из B

в A заняла $\frac{40}{V - 10}$. По условию $\frac{40}{V - 10} - \frac{40}{V} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3V \cdot 40 - 3(V - 10) \cdot 40 = V(V - 10) \Leftrightarrow V^2 - 10V - 1200 = 0 \Rightarrow V_1 = 40,$
 $V_2 = -30$ — не подходит, т.к. $V > 0$.

Таким образом, скорость мотоциклиста $40 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ответ: $40 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.632.

а) Теплоход прошел 4 км против течения реки и затем прошел еще 33 км по течению, затратив на весь путь 1 ч. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если скорость течения реки равна 6,5 км/ч.

Пусть скорость теплохода в стоячей воде равна $V \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Тогда его скорость против течения реки (относительно берега) будет $(V - 6,5) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а по течению $(V + 6,5) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. По условию,

$$\frac{4}{V - 6,5} + \frac{33}{V + 6,5} = 1 \Rightarrow 4V + 26 + 33V - 214,5 = V^2 - 42,25 \Leftrightarrow V^2 - 37V + 146,25 = 0$$

$$V_{1,2} = 18,5 \pm \sqrt{342,25 - 146,25} = 18,5 \pm \sqrt{196} = 18,5 \pm 14$$

$V_1 = 32,5 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $V_2 = 4,5 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Скорость V_2 не подходит, т.к. она меньше скорости течения реки и теплоход не мог бы плыть вверх по течению. Итак, скорость теплохода $32,5 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ответ: $32,5 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Моторная лодка прошла 25 км по течению реки и 3 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Какова скорость течения реки, если известно, что она не превосходит 5 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде равна 12 км/ч?

Ответ: $5 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.633.

а) Теплоход прошел по течению реки 48 км и столько же обратно, затратив на весь путь 5 ч. Определите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки 4 км/ч.

Ответ: $20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Глиссер, собственная скорость которого равна 20 км/ч, прошел расстояние по реке, равное 60 км, и вернулся обратно. Определите скорость течения реки, если на весь путь глиссер затратил 6,25 ч.

Пусть скорость течения реки равна $V \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Составим уравнение

$$\frac{60}{20 + V} + \frac{60}{20 - V} = 6,25 \Rightarrow 1200 - 60V + 1200 + 60V = 6,25(400 - V^2)$$

$$384 = 400 - V^2 \Rightarrow V = \sqrt{16} = 4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Ответ: $4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.634.

а) Пешеход должен был пройти 12 км за определенный срок, но он был задержан с выходом на 1 ч, поэтому ему пришлось увеличить скорость на 1 км/ч. С какой скоростью шел пешеход?

Пусть расстояние в 12 км пешеход должен был пройти со скоростью $V \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. На это он затратил бы время $\frac{12}{V}$ часов. Фактически он

шел со скоростью $(V+1) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и затратил время $\frac{12}{V+1}$ ч. По условию

$$\frac{12}{V} - \frac{12}{V+1} = 1 \Rightarrow 12V + 12 - 12V = V^2 + V \Leftrightarrow V^2 + V - 12 = 0,$$

$V_1 = 3, V_2 = -4$ — не подходит, т.к. $V > 0$. Таким образом, пешеход шел со скоростью $(V+1) = 4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ответ: $4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Велосипедист проехал с определенной скоростью путь в 10 км от города до турбазы. Возвращаясь обратно, он снизил скорость на 5 км/ч. На весь путь туда и обратно было затрачено 1 ч 10 мин. Найдите скорость, с которой велосипедист ехал от турбазы до города.

Ответ: $15 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.635.

а) Моторная лодка прошла по течению реки 8 км, а против течения 3 км, затратив на весь путь 0,75 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

Ответ: $14 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Моторная лодка прошла по течению реки 20 км, а против течения 30 км. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки 3 км/ч, а на весь путь затрачено 6 ч 40 мин.

Пусть собственная скорость лодки равна $V \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. По течению реки

лодка плыла $\frac{20}{V+3}$ часа, а против течения — $\frac{30}{V-3}$. По условию

$$\begin{aligned} \frac{20}{V+3} + \frac{30}{V-3} &= 6 \frac{2}{3}. \text{ Приходим к уравнению } 20(V-3) + 30(V+3) = \\ &= \frac{20}{3}(V^2 - 9) \Leftrightarrow 50V + 30 = \frac{20}{3}V^2 - 60 \Leftrightarrow 15V + 27 = 2V^2 \Leftrightarrow 2V^2 - 15V - 27 = 0, \end{aligned}$$

$$V_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 216}}{4} = \frac{15 \pm 21}{4}.$$

$V_1 = 9$, $V_2 = -\frac{3}{2}$ — не подходит, т.к. $V > 0$. Итак, скорость лодки

$$9 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Ответ: $9 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.636.

а) Расстояние между двумя пристанями равно 24 км. Двигаясь вниз по течению, катер проходит это расстояние на 30 мин быстрее, чем в обратном направлении. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

Ответ: $14 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Яхта прошла по течению реки 9 км и такой же путь против течения. Путь по течению занял на 2 ч меньше, чем путь против течения. Найдите скорость яхты в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: $6 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.637.

а) Автомобиль был задержан в пути на 0,2 ч, а затем на расстоянии в 60 км навестал это время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найдите начальную скорость автомобиля.

Пусть начальная скорость автомобиля равна $V \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Если бы автомобиль двигался с прежней скоростью V , то проехал 60 км за время $\frac{60}{V}$ часов. Но он двигался со скоростью $(V + 15) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и проехал этот отрезок пути за время $\frac{60}{V + 15}$ ч, которое на 0,2 ч меньше, чем $\frac{60}{V}$ ч.

Получаем уравнение $\frac{60}{V} - \frac{60}{V + 15} = 0,2 \Rightarrow 60V + 900 - 60V = 0,2V(V + 15) \Leftrightarrow V^2 + 15V - 4500 = 0$,

$V_1 = 60 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $V_2 = -75 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ — не подходит, т.к. $V > 0$. Поэтому

начальная скорость автомобиля равна $60 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ответ: $60 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) В 9 ч баржа отправилась из пункта А, в пункт Б, который находится в 60 км выше по течению, чем А. Спустя 2 ч после прибытия в Б баржа поплыла обратно и прибыла в пункт А в 19 ч 20 мин

того же дня. Определите время, в которое баржа прибыла в пункт Б, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: в 14 ч.

№ 1.638.

а) Байдарка проплыла по течению реки 4 км, а против течения 6 км, затратив на весь путь 2 ч. Найдите скорость байдарки по течению, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

Ответ: $8 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Планер, пролетев 15 км по направлению ветра, развернулся и пролетел 10 км против ветра, затратив на весь путь 1 ч. Найдите скорость планера против ветра, если скорость ветра равна 5 км/ч.

Ответ: $20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.639.

а) Некто ехал на автомобиле по проселочной дороге с постоянной скоростью. Из-за плохого состояния дороги ему пришлось задержаться на 6 мин. Затем он увеличил скорость на 4 км/ч и ликвидировал опоздание на перегоне в 36 км. Найдите первоначальную скорость автомобиля.

Ответ: $36 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Экскурсионный теплоход должен был пройти 70 км с некоторой скоростью. Однако первую половину пути он двигался со скоростью на 3 км/ч меньшей расчетной, а вторую половину пути со скоростью на 4 км/ч больше расчетной. На весь путь теплоход затратил 2 ч 55 мин. Какова расчетная скорость теплохода?

Пусть расчетная скорость теплохода равна $V \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Первую половину пути он прошел за время $\frac{35}{V-3}$ часа, а вторую — за $\frac{35}{V+4}$. По условию

$$\frac{35}{V-3} + \frac{35}{V+4} = 2 \frac{55}{60} \Rightarrow 35V + 140 + 35V - 105 = 2 \frac{11}{12} (V-3)(V+4) \Leftrightarrow$$

$$70V + 35 = \frac{35}{12} (V^2 + V - 12) \Leftrightarrow 24V + 12 = V^2 + V - 12 \Leftrightarrow V^2 - 23V - 24 = 0 \Rightarrow$$

$$V_1 = 24 \frac{\text{км}}{\text{ч}}, V_2 = -1 \frac{\text{км}}{\text{ч}} - \text{не имеет физического смысла.}$$

Ответ: $24 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.640.

а) Моторный катер, собственная скорость которого 8 км/ч, прошел по реке расстояние, равное 15 км, вниз по течению и такое же

расстояние вверх по течению. Найдите скорость течения реки, если время, затраченное на весь путь, равно 4 ч.

Ответ: $2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Спортивная лодка прошла расстояние 45 км вверх по течению реки и такое же расстояние вниз по течению, затратив всего 14 ч. Определите собственную скорость лодки, если скорость течения реки 2 км/ч.

Ответ: $7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.641.

а) Катер прошел по течению реки 5 км, а против течения 12 км, затратив на весь путь время, нужное для прохождения 18 км по озеру. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Пусть собственная скорость катера равна $V \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. По течению реки катер плыл $\frac{5}{V+3}$ часов, а против течения $\frac{12}{V-3}$ часов. По условию весь путь занял $\frac{18}{V}$ часов. Получаем уравнение:

$$\frac{5}{V+3} + \frac{12}{V-3} = \frac{18}{V} \Rightarrow 5V(V-3) + 12V(V+3) = 18(V^2 - 9) \Leftrightarrow V^2 - 12V - 162 = 0 \Rightarrow$$

$$V_1 = 27 \frac{\text{км}}{\text{ч}}, V_2 = -6 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \text{ — не имеет физического смысла.}$$

Ответ: $27 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Моторная лодка прошла по течению реки 10 км, а против течения 15 км, затратив на весь путь 1 ч 10 мин. Найдите скорость лодки по течению, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

Ответ: $24 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.642.

а) Расстояние между городами равно 200 км. Мотоциклист проезжает это расстояние на 5 ч быстрее велосипедиста. Найдите их скорости, если скорость велосипедиста на 20 км/ч меньше скорости мотоциклиста.

Пусть скорость мотоциклиста равна $V \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, тогда скорость велосипедиста будет $(V-20) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. По условию $\frac{200}{V-20} - \frac{200}{V} = 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 200V - 200V + 4000 = 5V(V - 20) \Leftrightarrow V^2 - 20V - 800 = 0 \Rightarrow V_1 = 40 \frac{\text{км}}{\text{ч}},$$

$V_2 = -20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ — не имеет физического смысла.

Скорость велосипедиста $(V - 20) = 20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ответ: $40 \frac{\text{км}}{\text{ч}}, 20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Теплоход с туристами прошел по течению реки 10 км и против течения 8 км, затратив на весь путь 3 ч. Найдите скорость теплохода по течению и против течения, если скорость самого течения 3 км/ч.

Ответ: $10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}, 4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.643.

а) Две бригады рабочих должны к некоторому сроку изготовить по 300 деталей. Первая бригада, изготовляя в день на 10 деталей больше второй, затратила на выполнение задания на 1 день меньше. Сколько деталей в день изготовляла каждая бригада?

Пусть первая бригада изготавливает в день x деталей. Тогда вторая изготавливает $(x - 10)$ деталей в день. Первая бригада работала $\frac{300}{x}$ дней, а вторая $\frac{300}{x - 10}$ дней. По условию $\frac{300}{x - 10} - \frac{300}{x} = 1 \Rightarrow \Rightarrow 300x - 300(x - 10) = x(x - 10) \Leftrightarrow x^2 - 10x - 3000 = 0 \Rightarrow x_1 = 60, x_2 = -50$ — не имеет смысла.

Таким образом первая бригада изготавливает 60 деталей в день. Вторая бригада — $(x - 10) = 50$ деталей в день.

Ответ: 1-я — 60, 2-я — 50.

б) На обработку одной детали первый рабочий затрачивает на 1 мин меньше, чем второй. Сколько деталей обработает каждый из них за 0,7 ч, если первый обрабатывает за это время на одну деталь больше, чем второй.

Ответ: 1-й — 7, 2-й — 6.

№ 1.644.

а) Оператор ЭВМ, работая вместе с учеником, обрабатывает задачу за 2 ч 54 мин. Сколько времени потребовалось бы каждому из них на обработку задачи в отдельности, если ученику нужно для этого на 2 ч больше, чем оператору.

Ответ: 4 ч — оператору, 6 ч — ученику.

б) Заболевшую машинистку заменили две ученицы — практикантки, причем одной из них нужно на перепечатку рукописи в 3 раза больше времени, чем заболевшей машинистке, а второй — в 2 раза. За сколько времени каждая из трех машинисток может перепечатать рукопись, если известно, что ученицы, работая вдвоем, могут выполнить эту работу за 6 ч?

Пусть машинистка перепечатывает рукопись за x ч. Тогда первая практикантка перепечатывает ее за $3x$ ч., а вторая — за $2x$ ч. Первая практикантка перепечатывает за час $\frac{1}{3x}$ часть рукописи, а вторая — $\frac{1}{2x}$ часть. Вместе они перепечатывают в час $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2x} = \frac{5}{6x}$ часть рукописи. Следовательно, вся работа займет у них $\frac{1}{\frac{5}{6x}} = \frac{6x}{5}$ часов, что

по условию равно 6 ч. Таким образом $\frac{6x}{5} = 6 \Rightarrow x = 5$ ч. То есть машинистка перепечатывает рукопись за 5 ч, 1-я ученица — за $3x = 15$ ч., 2-я ученица — за $2x = 10$ ч.

Ответ: за 5 ч. — машинистка, за 15 ч. — 1-я ученица, за 10 ч. — 2-я ученица.

№ 1.645.

а) Один рабочий затрачивает на изготовление болта на 6 мин меньше, чем второй. Сколько болтов может изготовить каждый из них за 7 ч, если первый обрабатывает за это время на 8 болтов больше?

Пусть первый рабочий затрачивает на изготовление болта x мин, тогда второй будет затрачивать $(x+6)$ мин. За 7 часов (т.е. за 420 мин.) первый рабочий изготовит $\frac{420}{x}$ болтов, а второй $\frac{420}{x+6}$ болтов.

По условию $\frac{420}{x} - \frac{420}{x+6} = 8$. Отсюда находим x : $420x + 2520 - 420x = 8x(x+6) \Leftrightarrow x^2 + 6x - 315 = 0 \Rightarrow x_1 = 15, x_2 = -21$ — не имеет смысла.

Таким образом первый рабочий изготавливает за 7 часов $\frac{420}{15} = \frac{420}{15} = 28$ болтов. По условию второй рабочий изготовит на 8 болтов меньше, т.е. 20 болтов.

Ответ: 1-й — 28, 2-й — 20.

б) Ученик тратит на обработку одной болванки на 12 мин больше, чем мастер. Сколько болванок обработает каждый из них за 6 ч, если ученик обрабатывает за это время на 5 болванок меньше, чем мастер?

Ответ: 10 — ученик, 15 — мастер.

№ 1.646.

а) Бассейн, содержащий 30 м^3 воды, сначала был опорожнен, а затем снова наполнен до прежнего уровня, для чего потребовалось 8 ч. Сколько времени заполнялся бассейн, если вливающий воду насос перекачивает в час на 4 м^3 меньше, чем выливающий?

Ответ: 5 ч.

б) Бассейн объемом 1 м^3 заполняется двумя насосами одновременно. Первый насос перекачивает за 1 ч на 1 м^3 больше, чем второй. Найдите время, за которое каждый насос в отдельности может наполнить бассейн, если первому насосу нужно для этого на 5 мин меньше, чем второму.

Пусть производительность первого насоса $x \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$. Тогда производительность второго — $(x-1) \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$. Первый насос заполняет бассейн объемом 1 м^3 за $\frac{1}{x}$ часов, а второй — за $\frac{1}{x-1}$ ч. 5 мин = $\frac{1}{12}$ ч. По условию $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{12} \Rightarrow x^2 - x + 12 = 0$. Получаем $x = 4$ ($x = -3$ не подходит по смыслу). Производительность первого насоса $4 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$ и он накачивает бассейн за $\frac{1}{4}$ часа, т.е. 15 мин. Производительность второго насоса $(x-1) = 3 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$. Он накачивает бассейн за $\frac{1}{3}$ ч. = 20 мин.

Ответ: за 15 мин — 1-й, за 20 мин. — 2-й.

№ 1.647.

а) Две бригады, работая совместно, закончили посадку деревьев за 4 дня. Сколько дней потребовалось бы на эту работу каждой бригаде в отдельности, если одна из них может выполнить работу на 15 дней быстрее другой?

Пусть первой бригаде требуется на посадку x дней, тогда по условию второй бригаде требуется на это $(x+15)$ дней. В день первая бригада сажает $\frac{1}{x}$ часть посадки, а вторая $\frac{1}{x+15}$ часть. Вместе они сажают в день $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{2x+15}{x^2+15x}$ часть. Значит, вся работа займет у них $\frac{1}{\frac{2x+15}{x^2+15x}} = \frac{x^2+15x}{2x+15}$ дней, что по условию равно 4 дням. Полу-

чаем уравнение $\frac{x^2+15x}{2x+15} = 4 \Rightarrow x^2 + 15x = 8x + 60 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 60 = 0$, $x = 5$ ($x = -12$ не подходит). Таким образом, первой бригаде требуется 5 дней, а второй — $(5+15) = 20$ дней.

Ответ: 5; 20.

б) Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить оклейку комнаты обоями за 6 ч. За какое время каждый из них может оклеить

эту комнату обоями, работая в отдельности, если один из них тратит на это на 5 ч меньше, чем другой?

Ответ: 10 ч, 15 ч.

№ 1.648.

а) Борис и Леонид наполняли газом воздушные шарик, причем Борису требовалось на наполнение одного шарика на 1 мин меньше, чем Леониду. Сколько шариков может надуть каждый из них за 0,5 ч, если за это время Борис надувает на один шарик больше, чем Леонид?

Ответ: Борис — 6, Леонид — 5.

б) Для того чтобы связать один ряд шарфа, Наташе требуется на 2 мин больше, чем Оле. Сколько рядов может связать каждая из них за час, если за это время Наташа вяжет на 1 ряд меньше, чем Оля?

Пусть Оля вяжет один ряд x мин., тогда Наташе требуется для этого $(x + 2)$ мин. За 60 мин (1 час) Оля свяжет $\frac{60}{x}$ рядов, а Наташа

$\frac{60}{x+2}$ рядов. По условию $\frac{60}{x} - \frac{60}{x+2} = 1$.

$60x + 120 - 60x = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 120 = 0 \Rightarrow x = 10$ ($x = -12$ не подходит). Таким образом, Оля за час свяжет $\frac{60}{x} = \frac{60}{10} = 6$ рядов, а

Наташа $\frac{60}{x+2} = \frac{60}{12} = 5$ рядов.

Ответ: Оля — 6, Наташа — 5.

№ 1.649.

а) Двое рабочих, из которых второй начинает работать на 1,5 дня позже первого, могут отремонтировать квартиру за 7 дней. Если бы ремонт выполнял каждый в отдельности, то первому потребовалось бы на 3 дня больше, чем второму. За сколько дней каждый из них, работая в отдельности, может выполнить ремонт квартиры?

Пусть первому рабочему на ремонт квартиры требуется x дней, тогда $(x - 3)$ дней требуется для этого второму рабочему. Первый работал 7 дней и сделал $\frac{7}{x}$ часть работы. Второй работал $7 - 1,5 = 5,5$

дней и сделал $\frac{5,5}{x-3}$ часть работы. Вместе они выполнили всю работу,

т.е. $\frac{7}{x} + \frac{5,5}{x-3} = 1$.

Отсюда получаем уравнение $2x^2 - 41x + 42 = 0$ и находим $x_1 = 14, x_2 = \frac{3}{2}$. Но величина $(x - 3)$ должна быть положительной и x_2 не подходит. Таким образом, первый рабочий может сделать ремонт за 14 дней, а второй — за $14 - 3 = 11$ дней.

Ответ: 1-й — за 14, 2-й — за 11.

б) Один цех завода должен был изготовить 810 фанерных щитов, а второй 900 таких же щитов Первый выполнил всю работу, затратив на это на 3 дня больше, чем второй Сколько щитов в день делали в каждом цехе, если во втором делали в день на 4 щита больше, чем в первом?

Ответ: 1-й — 20, 2-й — 24.

№ 1.650.

а) Два экскаватора, работая совместно, могут вырыть котлован за 48 ч. За какое время каждый из них может вырыть котлован, работая в отдельности, если первому нужно для этого на 40 ч больше, чем второму?

Ответ: 1-й — за 120 ч., 2-й — за 80 ч.

б) Две трубы, работая вместе, наполнили бассейн за 12 ч. Первая труба, работая в отдельности наполняет бассейн на 18 ч быстрее, чем вторая. За сколько часов наполняет бассейн вторая труба?

Пусть вторая труба наполняет бассейн за x часов. Тогда первая труба наполняет его за $(x - 18)$ часов. Производительность первой

трубы $\frac{1}{x - 18}$ часть бассейна в час, а второй — $\frac{1}{x}$ часть в час. Об-

щая производительность труб $\frac{1}{x - 18} + \frac{1}{x} = \frac{2x - 18}{x^2 - 18x}$ часть бассейна в

час. Весь бассейн наполнится за $\frac{1}{\frac{2x - 18}{x^2 - 18x}} = \frac{x^2 - 18x}{2x - 18}$ часов. По усло-

вию это 12 ч. Получаем уравнение $\frac{x^2 - 18x}{2x - 18} = 12 \Rightarrow x^2 - 18x =$

$$= 24x - 216 \Leftrightarrow x^2 - 42x + 216 = 0 \Rightarrow x_1 = 36, x_2 = 6.$$

Так как величина $(x - 18)$ должна быть больше нуля, то x_2 не подходит. То есть вторая труба наполняет бассейн за 36 ч.

Ответ: 36 ч.

№ 1.651.

а) Бригада рабочих должна была изготовить в определенный срок 272 холодильника. Через 10 дней после начала работы бригада стала изготавливать в день на 4 холодильника больше, чем предполагалось. За один день до срока было изготовлено 280 холодильников. Сколько холодильников в день должна была изготавливать бригада по плану?

Пусть бригада по плану должна была изготавливать x холодильников в день. Изготовив $(10 - x)$ холодильников бригада стала изготавливать $(x + 4)$ холодильника в день. По плану бригада должна была работать $\frac{272}{x}$ дней, а фактически работала $\left(\frac{272}{x} - 1\right)$ день. Из них с

производительностью $(x + 4)$ она работала $\left(\frac{272}{x} - 1 - 10\right) = \frac{272}{x} - 11$

дней и изготовила $\left(\frac{272}{x} - 11\right)(x + 4)$ холодильников. По условию

$10x + \left(\frac{272}{x} - 11\right)(x + 4) = 280$. Упрощая это выражение, приходим к

уравнению $x^2 + 52x - 1088 = 0$. Решая, находим $x = 16$ ($x = -68$ не подходит).

Ответ: 16 холодильников в день.

б) Бригада рабочих обязалась изготовить 432 шины для колес. Однако 4 рабочих заболели и не вышли на работу. Каждому из оставшихся пришлось изготовлять на 9 шин в день больше, чтобы выполнить обязательство. Сколько рабочих числилось в бригаде?

Ответ: 16 рабочих.

№ 1.652.

а) Два грузчика разгружали вагоны с продуктами. Первый разгружал на 50 ц в день больше второго и разгрузил 300 ц, при этом он работал на 2 дня меньше второго. Второй грузчик разгрузил 250 ц. Сколько дней работал каждый?

Ответ: 1-й — 3, 2-й — 5.

б) На строительстве железной дороги работали две путевые бригады. Первая бригада ежедневно прокладывала на 40 м путей больше второй и проложила 270 м пути. Вторая бригада работала на 2 дня больше первой и проложила 250 м. Сколько дней работала каждая бригада?

Пусть первая бригада прокладывала в день x м. пути. Тогда вторая — $(x - 40)$ м. каждый день. Первая бригада работала $\frac{270}{x}$ дней, а

вторая $\frac{250}{x - 40}$. По условию $\frac{250}{x - 40} - \frac{270}{x} = 2 \Rightarrow 250x - 270x + 10800 = 2x(x - 40) \Leftrightarrow -20x + 10800 = 2x^2 - 80x \Leftrightarrow x^2 - 30x - 5400 = 0$

$x_1 = 90, x_2 = -60$ — не подходит. Таким образом первая бригада работала $\frac{270}{90} = 3$ дня, а вторая $3 + 2 = 5$ дней.

Ответ: 1-я — 3, 2-я — 5.

№ 1.653.

а) Два сборщика винограда, работая вместе, собрали виноград с определенного участка за 12 ч. Первый сборщик, работая один, может собрать с этого участка виноград на 10 ч быстрее второго. За какое время каждый сборщик может выполнить работу?

Пусть первый сборщик может собрать весь виноград за x часов, тогда второй — за $(x + 10)$ часов. Производительность первого сбор-

щика $\frac{1}{x}$ часть участка в час, а второго — $\frac{1}{x+10}$ часть участка в час.

Вместе они в час собирают $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10}$ часть участка. Весь участок они

соберут за $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10}} = \frac{x^2 + 10x}{2x + 10}$ часов. По условию это 12 ч.

$$\frac{x^2 + 10x}{2x + 10} = 12 \Rightarrow x^2 + 10x = 24x + 120 \Leftrightarrow x^2 - 14x - 120 = 0.$$

Получаем $x = 20$ ($x = -6$ не подходит). Второй сборщик может выполнить работу за $x + 10 = 30$ часов.

Ответ: 1-й — за 20 ч., 2-й — за 30 ч.

б) Два компьютера, работая совместно, могут выполнить определенный объем работы за 3,75 ч. Работая отдельно, один из них выполнил бы эту работу на 4 ч быстрее другого. Сколько времени потребовалось бы каждому компьютеру для выполнения работы?

Ответ: 6 ч., 10 ч.

№ 1.654.

а) Аквариум наполняется водой, поступающей в него через две трубки, за 3 ч. За сколько часов может наполнить аквариум первая трубка, если ей требуется для этого на 2,5 ч меньше, чем вторая?

Ответ: за 5 ч.

б) Двое рабочих вместе могут убрать помещение за 2 ч. Первому рабочему, если бы он убирал помещение один, потребовалось бы на 3 ч больше, чем второму. За какое время может убрать помещение первый рабочий?

Ответ: за 6 ч.

№ 1.655.

а) В школьном кооперативе две бригады должны были изготовить по 180 книжных полок. Первая бригада в час изготовляла на 2 полки больше, чем вторая, и поэтому закончила работу на 3 ч раньше. За сколько часов каждая бригада выполнила задание?

Ответ: 1-я — за 15 ч., 2-я — за 18 ч.

б) На фабрике за смену в первом цехе сшили 320 костюмов, а во втором — 270 костюмов. В первом цехе шили в час на 2 костюма меньше, чем во втором, и работали на 5 ч больше. Сколько костюмов в час шили в первом цехе?

Пусть производительность труда в первом цехе была x костюмов в час, тогда во втором — $(x+2)$ костюма в час. Первый цех работал $\frac{320}{x}$ часов, а второй — $\frac{270}{x+2}$. По условию $\frac{320}{x} - \frac{270}{x+2} = 5$. Получаем уравнение $320x + 640 - 270x = 5x(x+2) \Leftrightarrow 50x + 640 = 5(x^2 + 2x) \Leftrightarrow 10x + 128 = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 - 8x - 128 = 0$.

Решая, находим $x = 16$ ($x = -8$ не подходит). Таким образом в первом цехе шили 16 костюмов в час.

Ответ: 16 костюмов.

№ 1.656.

а) Два порталных крана, работая вместе, разгрузили баржу за 6 ч. За какое время может разгрузить баржу, работая отдельно, каждый кран, если одному из них нужно для этого на 9 ч меньше, чем другому?

Пусть первый кран может разгрузить баржу за x часов, тогда второй — за $(x + 9)$ часов. Производительность первого крана $\frac{1}{x}$ части баржи в час, а другого — $\frac{1}{x + 9}$ части баржи в час. Вместе они разгружают $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 9} = \frac{2x + 9}{x^2 + 9x}$ части баржи в час. Всю баржу они разгрузят за $\frac{1}{\frac{2x + 9}{x^2 + 9x}} = \frac{x^2 + 9x}{2x + 9}$ ч. По условию это 6 ч. Получаем уравнение $\frac{x^2 + 9x}{2x + 9} = 6 \Rightarrow x^2 + 9x = 12x + 54 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 54 = 0$.

Решая, находим $x = 9$ ($x = -6$ не подходит). То есть первый кран разгружает баржу за 9 часов, а второй — за $(x + 9) = 18$ часов.

Ответ: 9 ч., 18 ч.

б) Два грузовика, работая вместе, перевозили зерно в течение 4 ч. За какое время перевезет то же количество зерна каждый грузовик в отдельности, если первому нужно для этого на 6 ч больше, чем второму?

Ответ: 1-й — за 12 ч., 2-й — за 6 ч.

№ 1.657.

а) Две бригады рабочих при совместной работе затратили на асфальтирование участка дороги 4,8 ч. Сколько времени потребуется на асфальтирование этого участка каждой бригаде в отдельности, если одной на эту работу требуется на 4 ч больше, чем другой?

Ответ: 12 ч., 8 ч.

б) Две бригады работников сельскохозяйственного кооператива пропололи по 280 грядок каждая, причем первая бригада, пропалывая в день на 30 грядок меньше, чем вторая, работала на 3 дня больше. Сколько дней работала на прополке каждая бригада?

Пусть первая бригада пропалывала в день x грядок, тогда вторая — $(x + 30)$ грядков в день. Первая бригада работала $\frac{280}{x}$ дней, а вторая — $\frac{280}{x + 30}$. По условию $\frac{280}{x} - \frac{280}{x + 30} = 3$. Приходим к уравнению

$$280x + 8400 - 280x = 3x(x + 30) \Leftrightarrow 2800 = x^2 + 30x \Leftrightarrow x^2 + 30x - 2800 = 0.$$

$x = 40$ ($x = -70$ не подходит). Таким образом, первая бригада работала $\frac{280}{x} = \frac{280}{40} = 7$ дней, а вторая $(7 - 3) = 5$ дня.

Ответ: 1-я — 7 ч., 2-я — 4 ч.

№ 1.658.

а) Автобус, выехав из пункта A , движется на север и приезжает в пункт B . Затем, повернув на запад, он едет в пункт C . Каково расстояние между A и C , если расстояние между A и B на 8 км, а расстояние между B и C на 1 км меньше расстояния между A и C ?

Пусть расстояние между A и C равно x км. Легко видеть, что точки A , B и C образуют прямоугольный треугольник, причем $AB = (x - 8)$ км, а $BC = (x - 1)$ км. По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 + BC^2$ или $x^2 = (x - 8)^2 + (x - 1)^2$. Упрощая, получаем уравнение $x^2 - 18x + 65 = 0$.

Находим $x_1 = 13$, $x_2 = 5$ — не подходит, т.к. длина $AB = (x - 8)$ получается отрицательной. Итак $AC = 13$ км.

Ответ: 13 км.

б) Гипотенуза прямоугольного треугольника больше одного из его катетов на 6 см, а другой катет на 3 см больше первого. Найдите стороны треугольника.

Ответ: 9 см, 12 см, 15 см.

№ 1.659.

а) Один из катетов прямоугольного треугольника меньше гипотенузы на 2 см. Сумма величин трех сторон равна 12 см. Найдите эти стороны.

Пусть длина одного катета равна x см. Тогда длина гипотенузы $(x + 2)$ см. Длина второго катета $12 - x - (x + 2) = 10 - 2x$. По теореме Пифагора $(x + 2)^2 = x^2 + (10 - 2x)^2$. После упрощения получаем уравнение $x^2 - 11x + 24 = 0$.

Находим $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, но если один катет равен 8 см, то другой $(10 - 2 \cdot 8) = -6$, что невозможно. Отсюда $x = 3$ см, гипотенуза $(x + 2) = 5$ см, второй катет $(10 - 2x) = 4$ см.

Ответ: 3 см, 4 см, 5 см.

б) Сумма длин гипотенузы и одного из катетов равна 9 см, а другой катет равен 3 см. Найдите гипотенузу и неизвестный катет.

Ответ: гипотенуза — 5 см, катет — 4 см.

№ 1.660.

а) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 5 см. Найдите его катеты, если один больше другого в 2 раза.

Ответ: $\sqrt{5}$ см, $2\sqrt{5}$ см.

б) В прямоугольнике одна сторона равна 9 см. Найдите его диагональ, если она больше второй стороны прямоугольника в 2 раза.

Пусть длина второй стороны прямоугольника равна x см. По условию длина диагонали $2x$ см. Две смежные стороны прямоугольника и диагональ образуют прямоугольный треугольник. По теореме Пифагора $(2x)^2 = x^2 + 9^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 81$, $x^2 = 27$ и $x = 3\sqrt{3}$ см. Диагональ равна $2x = 6\sqrt{3}$ см.

Ответ: $6\sqrt{3}$ см.

№ 1.661.

а) В равнобедренной трапеции большее основание равно 8 см. Площадь трапеции равна 20 см^2 , меньшее основание в 2 раза меньше высоты трапеции. Найдите ее боковую сторону.

Пусть меньшее основание трапеции равно x см. Высота трапеции по условию будет $2x$ см. Площадь трапеции равна произведению высоты на полусумму оснований. Получаем уравнение $2x \cdot \frac{8+x}{2} = 20 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 16x + 2x^2 = 40 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 20 = 0.$$

$x_1 = 2$, $x_2 = -10$ — не подходит по смыслу. Высота трапеции равна $2x = 4$ см. Если опустить высоту на большее основание из вершины меньшего основания, то боковая сторона будет являться гипотенузой образовавшегося прямоугольного треугольника. Один катет — это высота трапеции, равная 4 см, второй катет — это половина разности длин оснований трапеции $\frac{8 \text{ см} - 2 \text{ см}}{2} = 3 \text{ см}$. Из теоремы Пифагора

длина боковой стороны составляет $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

Ответ: 5 см.

б) Одна из диагоналей ромба в 0,75 раз больше другой. Площадь ромба равна 96 см^2 . Найдите сторону ромба.

Пусть одна диагональ ромба равна x см, а другая $0,75x$ см. Площадь ромба составляет половину произведения длин диагоналей, то есть $\frac{1}{2} \cdot x \cdot 0,75x = 96 \Leftrightarrow x^2 = 256$ и $x = 16$ см. Вторая диагональ будет $0,75 \cdot 16 = 12$ см. Сторону ромба найдем из теоремы Пифагора

$$\sqrt{\left(\frac{16}{2}\right)^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Ответ: 10 см.

№ 1.662.

а) Площадь прямоугольного треугольника равна 180 см^2 . Найдите катеты треугольника, если один катет больше другого на 31 см.

Ответ: 40 см, 9 см.

б) Площадь прямоугольника равна 84 см^2 . Найдите стороны прямоугольника, если одна сторона меньше другой на 5 см.

Пусть одна сторона прямоугольника равна x см, а другая таким образом будет $(x - 5)$ см. Площадь прямоугольника есть произведение его сторон. Получаем уравнение $x(x - 5) = 84 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 84 = 0$.

$x_1 = 12, x_2 = -7$ — не подходит. Одна сторона равна 12 см, а другая $(x - 5) = 12 - 5 = 7$ см.

Ответ: 7 см, 12 см.

№ 1.663.

а) В прямоугольном треугольнике один из катетов на 3 см меньше гипотенузы, а другой на 6 см меньше гипотенузы. Найдите площадь этого треугольника.

Ответ: 54 см^2 .

б) Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 20 см, а один катет составляет 75% другого.

Пусть длина одного катета равна x см, тогда длина другого составит $0,75x$. По теореме Пифагора $x^2 + (0,75x)^2 = 20^2 \Leftrightarrow x^2 + 0,5625x^2 = 400 \Leftrightarrow x^2 = 256$. Площадь прямоугольника равна по-

ловине произведения катетов, т.е. $S = \frac{1}{2}x \cdot 0,75x = \frac{3}{8}x^2 = \frac{3}{8} \cdot 256 = 3 \cdot 32 = 96 \text{ см}^2$.

Ответ: 96 см^2 .

№ 1.664.

а) В прямоугольном треугольнике сумма гипотенузы и одного из катетов равна 16 см, а другой катет равен 8 см. Найдите гипотенузу, первый катет и площадь треугольника.

Пусть первый катет равен x см, тогда гипотенуза будет равна $(16 - x)$ см. По теореме Пифагора $8^2 + x^2 = (16 - x)^2 \Leftrightarrow 64 + x^2 = 256 - 32x + x^2 \Leftrightarrow 32x = 192 \Leftrightarrow x = 6$. Гипотенуза равна $(16 - x) = 10$. Площадь треугольника $S = \frac{1}{2}8 \cdot 6 = 24 \text{ см}^2$.

Ответ: 10 см, 6 см, 24 см^2 .

б) В прямоугольном треугольнике сумма катетов равна 17 см, а длина гипотенузы 13 см. Найдите катеты и площадь этого треугольника.

Ответ: 12 см, 5 см, 30 см^2 .

№ 1.665.

а) От турбазы до озера 8 км. Дорога сначала идет в гору, затем лесом, потом под гору. До озера туристы шли 1 ч 27 мин, а обратно 1 ч 51 мин. Скорость их в гору 4 км/ч, лесом 5 км/ч, а под гору 6 км/ч. Сколько километров туристы шли лесом в одном направлении?

Пусть от турбазы до озера подъем в гору составляет x км, путь по лесу y км, а спуск с горы, таким образом, составит $(8 - x - y)$ км. Зная скорости на этих отрезках пути, найдем время путешествия от турбазы до озера:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{8 - x - y}{6} = 1 \frac{27}{60}. \quad \text{В обратном направлении подъем в гору}$$

составит $(8 - x - y)$ км, путь по лесу y км и спуск с горы x км. Общее время возвращения туристов $\frac{8 - x - y}{4} + \frac{y}{5} + \frac{x}{6} = 1 \frac{51}{60}$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{15(8 - x - y)}{60} + \frac{12y}{60} + \frac{10x}{60} = \frac{111}{60} \\ \frac{15x}{60} + \frac{12y}{60} + \frac{10(8 - x - y)}{60} = \frac{87}{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 5x = 9 \\ 2y + 5x = 7 \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, находим $y = 2$.

То есть путь по лесу в одном направлении составлял 2 км.

Ответ: 2 см.

б) Из города в деревню вышел пешеход. Через 45 мин после его выхода в том же направлении выехал велосипедист. Спустя полчаса он был на расстоянии 2,5 км позади пешехода, а еще через полчаса велосипедист был на полкилометра от деревни дальше, чем пешеход. Какова скорость пешехода и велосипедиста, если расстояние от города до деревни 30 км?

Пусть скорость пешехода равна $x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а скорость велосипедиста $y \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. К моменту выезда велосипедиста пешеход прошел $\frac{45}{60} \cdot x = \frac{3}{4}x$ км. Еще через 0,5 часа он прошел в сумме $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)x = \frac{5}{4}x$ км. Велосипедист за 0,5 часа проехал $\frac{1}{2}y$ км. По условию $\frac{5}{4}x - \frac{1}{2}y = 2,5$ или $5x - 2y = 10$. Еще через полчаса путь пешехода составил $\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}x = \frac{7}{4}x$ км, а путь велосипедиста $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)y = y$ км. Так как велосипедист к этому времени был дальше от деревни, чем пешеход, то $\frac{7}{4}x - y = \frac{1}{2}$ или $7x - 4y = 2$.

Получаем систему уравнений $\begin{cases} 5x - 2y = 10 \\ 7x - 4y = 2 \end{cases}$. Умножим первое уравнение на 2 и вычтем из него второе: $3x = 18 \Leftrightarrow x = 6$ км. То есть скорость пешехода $6 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Находим скорость велосипедиста

$$y = \frac{1}{2}(5x - 10) = 10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Ответ: скорость пешехода $6 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, велосипедиста — $10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 1.666.

а) Произведение двух чисел равно 10, а их сумма составляет 70% от произведения. Найдите эти числа.

Пусть одно число равно a , а другое b . По условию $a \cdot b = 10$ и $(a + b) = 0,7ab = 0,7 \cdot 10 = 7$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} ab = 10 \\ a + b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(7 - a) = 10 \\ b = 7 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 7a + 10 = 0 \\ b = 7 - a \end{cases} \Rightarrow a_1 = 5, a_2 = 2.$$

Находим $b_1 = 2, b_2 = 5$.

То есть это числа 5 и 2.

Ответ: 5; 2.

б) Если разделить возраст старшего брата на возраст младшего, то получится $\frac{8}{7}$, а сумма их возрастов равна 30. Сколько лет каждому брату?

Ответ: 16 и 14.

№ 1.667.

а) Во время соревнования по стрельбе одна из команд поразила на 72 мишени больше другой. Определите, сколько мишеней поразила каждая команда, если отношение количества мишеней, пораженных одной командой, к количеству мишеней, пораженных другой, равно отношению суммы мишеней, пораженных первой командой, и утроенного количества мишеней, пораженных второй командой, к разности мишеней, пораженных каждой командой.

Ответ: 1-я — 108, 2-я — 36.

б) Одна баскетбольная команда забросила на 36 мячей больше другой. Определите, сколько мячей забросила каждая команда, если отношение суммы мячей, забитых выигравшей командой, и утроенного количества мячей, заброшенных проигравшей командой, к количеству мячей, забитых выигравшей командой, равно отношению разности забитых мячей к количеству мячей, заброшенных проигравшей командой.

Пусть одна команда забросила x мячей, а другая y мячей. По условию $x - y = 36$. Ясно, что x мячей забросила выигравшая команда.

По условию задачи $\frac{x + 3y}{x} = \frac{x - y}{y}$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 36 \\ 1 + 3\frac{y}{x} = \frac{x}{y} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 36 + y \\ 2 - \frac{x}{y} + 3\frac{y}{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 36 + y \\ 2xy - x^2 + 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2(36+y)y - (36+y)^2 + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow 72y + 2y^2 - 1296 - 72y - y^2 + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 = 324 \Rightarrow y = 18 \quad (y = -18 \text{ не подходит по смыслу}).$$

Отсюда $x = 36 + y = 36 + 18 = 54$.

Ответ: 54 и 18.

№ 1.668.

а) Масса туриста с рюкзаком в 5 раз больше массы одного рюкзака. Определите массы рюкзака и туриста в отдельности, если сумма масс двух рюкзаков и массы туриста равна 120 кг.

Ответ: 80 кг — масса туриста, 20 кг — масса рюкзака.

б) Шесть метров новой веревки имеют такую же массу, как и пять метров старой. Найдите массу одного метра новой и старой веревки в отдельности, если 13 м новой и 12 м старой веревки вместе весят 5 кг 480 г.

Пусть метр новой веревки весит x кг, а метр старой y кг. По условию $6 \cdot x = 5 \cdot y$ и $13 \cdot x + 12y = 5,48$. Выражаем из первого уравнения

$$y = \frac{6}{5}x \quad \text{и подставляем во второе:} \quad 13x + 12 \cdot \frac{6}{5}x = 5,48 \Leftrightarrow$$

$$65x + 72x = 27,4 \Leftrightarrow x = 0,2 \text{ кг. } y = \frac{6}{5}x = 0,24 \text{ кг.}$$

Ответ: 240 г — 1 м старой веревки, 200 г — 1 м новой.

№ 1.669.

а) Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 1, а в остатке 16. Если же к квадрату разности цифр этого числа прибавить произведение его цифр, то получится заданное число. Найдите это число.

Представим двузначное число в виде $10 \cdot n + m$, где $1 \leq n \leq 9$ и $0 \leq m \leq 9$. m и n — натуральные числа. По условию задачи $10n + m = 1 \cdot n \cdot m + 16$. Далее $(m - n)^2 + mn = 10n + m$. Получаем

$$\text{систему } \begin{cases} 10n + m = nm + 16 \\ 10n + m = (m - n)^2 + mn \end{cases}. \text{ Вычитая из второго уравнения пер-}$$

вое, получаем $(m - n)^2 = 16$.

Таким образом, $m - n = \pm 4$. Если $m = n + 4$, то $10n + (n + 4) = n(n + 4) + 16 \Leftrightarrow n^2 - 7n + 12 = 0$, $n_1 = 3$, $n_2 = 4$.

$m_1 = 7$, $m_2 = 8$. То есть это числа 37 или 48. Если $m = n - 4$, то $10n + (n - 4) = n(n - 4) + 16 \Leftrightarrow n^2 - 15n + 20 = 0$.

$$n_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{145}}{2} \text{ — не являются натуральными числами.}$$

Ответ: 37 или 48.

б) Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же из квадрата суммы

цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найдите это число.

Ответ: 63.

№ 1.670.

а) Площадь прямоугольника равна 60 см^2 , а его диагональ равна 13 см. Найдите периметр прямоугольника.

Ответ: 34 см.

б) Площадь прямоугольника равна 72 см^2 , а его периметр равен 36 см. Найдите стороны прямоугольника.

Пусть стороны прямоугольника равны x см и y см. По условию $x \cdot y = 72$ и $2x + 2y = 36$. Из второго уравнения $x = 18 - y$. Подставим его во второе уравнение $y(18 - y) = 72 \Leftrightarrow y^2 - 18y + 72 = 0$
 $y_1 = 12, y_2 = 6$.

Находим $x_1 = 18 - 12 = 6$ и $x_2 = 18 - 6 = 12$.

То есть стороны прямоугольника равны 6 см и 12 см.

Ответ: 6 см и 12 см.

№ 1.671.

а) За 5 м одной и 5 м другой ткани было заплачено 100 денежных единиц. Найдите стоимость 1 м каждой ткани, если 4 м одной стоит столько же, сколько 6 м другой.

Пусть метр одной ткани стоит x денежных единиц, а метр другой — y денежных единиц. Из условия задачи составляем систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 5y = 100 \\ 4 \cdot x = 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ x = \frac{3}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2}y + y = 20 \Leftrightarrow 5y = 40 \Leftrightarrow y = 8.$$

Находим $x = \frac{3}{2}y = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12$. Таким образом, стоимость тканей 12 ед и 8 ед.

Ответ: 12 ед, 8 ед.

б) За 8 кг апельсинов и 8 кг яблок было заплачено 256 денежных единиц. Найдите стоимость 1 кг продукта, если известно, что 2 кг апельсинов стоят столько же, сколько 6 кг яблок.

Ответ: 24 ед. — 1 кг апельсинов, 8 ед. — 1 кг яблок.

ЧАСТЬ II

УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

№ 2.101. а) Решите уравнение $345x^2 + 137x - 208 = 0$ и сравните его больший корень с числом $0, (63)$.

Перепишем уравнение в приведенной форме:

$$x^2 + \frac{(345-208)}{345}x - \frac{208}{345} = 0 \Rightarrow (\text{по теореме Виета}): x_1 = -1; x_2 = \frac{208}{345}.$$

Переведем число $0, (63)$ в простую дробь:

$$\begin{aligned} 0, (63) &= 63 \cdot 10^{-2} + 63 \cdot 10^{-4} + 63 \cdot 10^{-6} + \dots = 63 \cdot (10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + \dots) = \\ &= 63 \cdot \frac{10^{-2}}{1 - 10^{-2}} = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}, \text{ воспользовавшись формулой для суммы} \end{aligned}$$

бесконечной убывающей геометрической прогрессии.

$$\text{Сравним } \frac{208}{345} \vee \frac{7}{11} \Leftrightarrow 2288 < 2415 \Rightarrow x_2 < 0, (63).$$

$$\text{Ответ: } \left\{ 1; \frac{208}{345} \right\}; \frac{208}{345} < 0, (63).$$

б) Решите уравнение $132x^2 - 247x + 115 = 0$ и сравните его меньший корень с числом $0, (87)$.

$$\text{Ответ: } \left\{ 1; \frac{115}{132} \right\}; \frac{115}{132} < 0, (87).$$

№ 2.102. а) Решите уравнение $2x^2 + 3x - 17 = 2(2 - \sqrt{7})^2 + 3(2 - \sqrt{7}) - 17$ и укажите какое-нибудь рациональное число, заключенное между его корнями. $x_1 = 2 - \sqrt{7}$, а $x_1 + x_2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{7} - \frac{7}{2}$; $x_2 < -\frac{3}{4} < x_1$.

$$\text{Ответ: } \{2 - \sqrt{7}; \sqrt{7} - 3,5\}, \text{ например, } -0,75.$$

б) Решите уравнение $4x^2 - 9x - 11 = 4(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 9(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - 11$ и укажите все целые числа, заключенные между его корнями.

$$\text{Ответ: } \left\{ \sqrt{2} + \sqrt{3}; \frac{9}{4} - \sqrt{2} - \sqrt{3} \right\}; \text{ числа } \{0; 1; 2; 3\}.$$

Решите уравнение (2.103. – 2.107.):

$$\text{№ 2.103. а) } (x^2 - 2x - 1)^2 + 3x^2 - 6x - 13 = 0$$

Обозначим $t = x^2 - 2x - 1$, тогда: $t^2 + 3t - 10 = 0 \Rightarrow t_1 = -5; t_2 = 2$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 = -5 \\ x^2 - 2x - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 4 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D < 0 & x = \emptyset \\ x_1 = -1; & x_2 = 3 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-1; 3\}$.

$$\text{б) } (x^2 - 7x + 13)^2 - (x - 3)(x - 4) = 1.$$

Ответ: $\{3; 4\}$.

$$\text{№ 2.104. а) } (x - 2)(x + 1)(x + 4)(x + 7) = 63.$$

$$\text{Обозначим } t = x + \frac{5}{2}, \text{ тогда: } \left(t^2 - \frac{9}{4}\right)\left(t^2 - \frac{81}{4}\right) = 63 \Leftrightarrow t^4 - \frac{45}{2}t^2 - \frac{279}{16} = 0$$

$$t^2 = \frac{93}{4} \Rightarrow t = \pm \frac{\sqrt{93}}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{93}}{2}; x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{93}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{-5 \pm \sqrt{93}}{2} \right\}.$$

$$\text{б) } \left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x}\right)(x + 4)(x + 6) = 12.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{-11 \pm \sqrt{73}}{2} \right\}.$$

$$\text{№ 2.105. а) } \frac{6}{(x-1)(x+3)} - \frac{24}{(x-2)(x+4)} = 1.$$

$$\text{Обозначим } t = x^2 + 2x, \text{ тогда: } \frac{6}{t-3} - \frac{24}{t-8} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 7t = 0 \\ t \neq 3; t \neq 8 \end{cases} \Rightarrow t_1 = 0;$$

$$t_2 = -7 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 0 \\ x^2 + 2x = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0; & x_2 = -2 \\ D < 0 \end{cases}.$$

Ответ: $\{0; -2\}$.

$$\text{б) } 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{2}; 2 \right\}.$$

$$\text{№ 2.106. а) } \frac{x\sqrt{5} - 4}{3x - \sqrt{5}} = \frac{2x - \sqrt{5}}{3x\sqrt{5} - 5}$$

Умножив обе части на $\sqrt{5}$ получаем:

$$\frac{x\sqrt{5}-4}{3x-\sqrt{5}} = \frac{2x-\sqrt{5}}{3x\sqrt{5}-5} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-4\sqrt{5} = 2x-\sqrt{5} \\ x \neq \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{5}.$$

Ответ: $\{\sqrt{5}\}$.

$$\text{б) } \frac{2x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+2} = \frac{2x\sqrt{3}-3}{4x+\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\left\{\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

$$\text{№ 2.107. а) } \frac{44}{4-x^2} + \frac{2x+7}{x-2} = \frac{3-x}{x+2}.$$

Уравнение равносильно системе: $\begin{cases} -44 + (2x+7)(x+2) = (3-x)(x-2) \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x - 24 = 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 8 = 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Rightarrow x = -4.$$

Ответ: $\{-4\}$.

$$\text{б) } \frac{x}{x+1} - \frac{9x+13}{x^2-2x-3} = \frac{5}{3-x}.$$

Ответ: $\{8\}$.

№ 2.108. Выясните, являются ли уравнения равносильными:

$$\text{а) } \frac{2}{x^2-x+1} = \frac{1}{1+x} + \frac{2x-1}{x^3+1} \text{ и } |2x-1| = 3.$$

$$\text{Решим второе уравнение: } |2x-1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 1-2x = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2x-1 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 2. x_1 = -1$ не входит в ОДЗ первого уравнения, поэтому эти уравнения не равносильны.

Ответ: нет.

$$\text{б) } \frac{2}{4x^2+2x+1} = \frac{1}{1-2x} - \frac{4x+1}{1-8x^3} \text{ и } |4x+1| = 3.$$

Ответ: нет.

Решите уравнение (2.109. – 2.114.):

$$\text{№ 2.109. а) } |1+3x| - |x-1| = 2-x.$$

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ -1-3x+(x-1)=2-x \end{cases} \cup \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \\ 1+3x+(x-1)=2-x \end{cases} \cup \begin{cases} x > 1 \\ 1+3x-(x-1)=2-x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -4; x_2 = 0,4.$$

Ответ: $\{-4; 0,4\}$.

$$\text{б) } \left| 5 + \frac{x}{2} \right| + |3 + 2x| + 2x = 0.$$

Ответ: $\{-16; -4\}$.

№ 2.110. а) $|x| - x + 2 = |2x - 2|$.

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x < 0 \\ -x - x + 2 = 2 - 2x \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x - x + 2 = 2 - 2x \end{cases} \cup \begin{cases} x > 1 \\ x - x + 2 = 2x - 2 \end{cases} \Rightarrow x \leq 0 \cup x = 2.$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \{2\}$.

$$\text{б) } 2|x| - |x + 3| + x + 3 = 0.$$

Ответ: $\{0\}$.

№ 2.111. а) $|7x - 12| - |7x - 11| = 1$.

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x < \frac{11}{7} \\ 12 - 7x + 7x - 11 = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{11}{7} \leq x \leq \frac{12}{7} \\ 12 - 7x - 7x + 11 = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x > \frac{12}{7} \\ 7x - 12 - 7x + 11 = 1 \end{cases} \Rightarrow x \leq \frac{11}{7}.$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{11}{7}\right]$.

$$\text{б) } |16 - 9x| - |9x - 5| = 11.$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{5}{9}\right]$.

№ 2.112. а) $|x^2 - 3x| + x = 2$.

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x < 0 \cup x > 3 \\ x^2 - 3x + x = 2 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 3x - x^2 + x = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{3}; x_2 = 2 - \sqrt{2}.$$

Ответ: $\{1 - \sqrt{3}; 2 - \sqrt{2}\}$.

$$\text{б) } x^2 + 7x + 4 = |3x + 2|.$$

Ответ: $\{-5 - \sqrt{19}; -2 + \sqrt{2}\}$.

№ 2.113. а) $x^2 - 5x - |x - 6| + 9 = 0$.

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x < 6 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 6 \\ x^2 - 6x + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 3.$$

Ответ: $\{1; 3\}$.

б) $|x^2 + 4x + 3| - x - 3 = 0$.

Ответ: $\{0; -3; -2\}$.

№ 2.114. а) $\left(\frac{x + |x|}{x + 1}\right)^2 + \frac{2x}{x + 1} - 6 = 0$.

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x < 0 \\ \frac{2x}{x+1} = 6 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ \left(\frac{2x}{x+1}\right)^2 + \frac{2x}{x+1} - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(t = \frac{2x}{x+1}\right) \Rightarrow t_1 = 6 \quad t_2 = -3 \quad t_3 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\{-1,5\}$.

б) $\left(\frac{x - 4}{|x - 3| - 1}\right)^2 + \frac{2x - 8}{x - 2} - 8 = 0$.

Ответ: $\{0; 2,4\}$.

№ 2.115. Найдите все положительные решения уравнения:

а) $x^{\frac{1}{15}} - 8x^{\frac{3}{5}} = 2\sqrt[3]{x}$.

Обозначим: $t = x^{\frac{1}{15}}$, тогда: $t - 8t^9 = 2t^5 \Leftrightarrow t(8t^8 + 2t^4 - 1) = 0 \Rightarrow t_1 = 0$

$$t_2^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^{\frac{4}{15}} = 2^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{128\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{128\sqrt{2}}\right\}$.

б) $x^2\sqrt{x} - 33\sqrt{x}\sqrt[3]{x} + 32x^{-\frac{5}{6}} = 0$

Ответ: $\{1; 8\}$.

Решите уравнение (2.116. – 2.129.):

№ 2.116. а) $2x\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 20$.

Перепишем уравнение в виде: $2x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} = 20$. Обозначим $t = x^{\frac{2}{3}}$, тогда: $2t^2 - 3t - 20 = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{5}{2} \Rightarrow \emptyset$ $t_2 = 4 \Rightarrow x = \pm 8$.

Ответ: $\{\pm 8\}$

б) $3x \cdot \sqrt[3]{x^2} + 2x \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 5$

Ответ: $\{1\}$

№ 2.117. а) $\sqrt{2x+5} - \sqrt{2x} = 1$.

Уравнение равносильно системе:
$$\begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ 2x \geq 0 \\ 2x+5 = 1+2x+2\sqrt{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Ответ: $\{2\}$

б) $2\sqrt{x-3} + \sqrt{x+1} = 2$.

Ответ: $\{3\}$

№ 2.118. а) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5}$.

Уравнение равносильно системе:
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{(x+4)(x-1)} = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 5.$$

Ответ: $\{5\}$

б) $\sqrt{6+4x-x^2} = 4-x$.

Ответ: $\{1\}$.

№ 2.119. а) $x^2 + 2\sqrt{x^2 + 3x + 11} = 4 - 3x$.

Обозначим $t = \sqrt{x^2 + 3x + 11} \geq 0 \Rightarrow t^2 + 2t - 15 = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = -2$.

Ответ: $\{-2; -1\}$.

б) $x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 9} = 3$.

Ответ: $\{0; 1\}$.

№ 2.120. а) $(x+1)\sqrt{1+4x-x^2} = x^2 - 1.$

$x = -1$ не является корнем, так как $1 + 4 \cdot (-1) - (-1)^2 < 0$. Разделив обе части уравнения на $x+1$, получаем: $\sqrt{1+4x-x^2} = x-1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x-3)=0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x=3.$

Ответ: $\{3\}$.

б) $(x^2 - 8x)\sqrt{7-x} = x(x^2 - 9x + 8)$

Ответ: $\{0; 3\}$.

№ 2.121. а) $\sqrt{x^2 + 4x - 5} + \sqrt{2x + 10} = \sqrt{x^2 + 6x + 5}.$

Уравнение равносильно системе:
$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 \geq 0 \\ x^2 + 6x + 5 \geq 0 \\ 2x + 10 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + 4x - 5} \cdot \sqrt{2x + 10} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = -5; x_2 = 1.$

Ответ: $\{-5; 1\}$.

б) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = x+2.$

Ответ: $\{-1\}$.

№ 2.122. а) $\frac{1}{2\sqrt{3x-2}-3} + \frac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}-1} = 3.$

Обозначим $t = \sqrt{3x-2} \geq 0$, тогда: $\frac{1}{2t-3} + \frac{t}{t-1} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2 - 13t + 10 = 0 \\ t \neq 1 \\ t \neq \frac{3}{2} \end{cases}$

$\sqrt{3x-2} = 2 \Rightarrow x_1 = 2$ и $\sqrt{3x-2} = \frac{5}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{19}{16}.$

Ответ: $\left\{\frac{19}{16}; 2\right\}.$

б) $\sqrt{12 - \frac{2}{x} - \frac{4x+1}{x+4}} = \frac{2}{x} + \frac{4x+1}{x+4}$

Ответ: $\{1; 8\}$.

№ 2.123. а) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} + \frac{3}{2} = 0$.

Обозначим $t = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$, тогда: $t - \frac{1}{t} + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 + 3t - 2 = 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \Rightarrow t_1 = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \emptyset$ и $t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 0$.

Ответ: $\{0\}$.

б) $\frac{x-4}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x-4} = \frac{8}{3}$

Ответ: $\left\{16; \frac{73 - \sqrt{145}}{18}\right\}$.

№ 2.124. а) $t^2 + 5t + 6 = 15 \frac{t^2 + 3t + 6}{t^2 + t}$.

Обозначим $x = t + 1,5$, тогда $x^4 - 17,5x^2 - \frac{891}{16} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{81}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{9}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow t_1 = -6; t_2 = 3$.

Ответ: $\{-6; 3\}$.

б) $2u^4 + u^2(u+2) - 3(u+2)^2 = 0$

Ответ: $\{-1; 2\}$.

№ 2.125. а) $(x^2 + 2x)^2 - (x+2)(2x^2 - x) = 6(2x-1)^2$.

Обозначим $t = x(x+2)$, тогда: $t^2 - t(2x-1) - 6(2x-1)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{(2x-1) \pm 5(2x-1)}{2} \Rightarrow (x(x+2) + 2(2x-1))(x(x+2) - 3(2x-1)) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 + 6x - 2)(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{11}; x_3 = 1; x_4 = 3$.

Ответ: $\{1; 3; -3 \pm \sqrt{11}\}$.

б) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 4\frac{x+1}{x} + 3\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = 0$

Ответ: $\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 3\right\}$.

№ 2.126. а) $\frac{x^2+4}{x} + \frac{x}{x^2+3x+4} + \frac{11}{2} = 0$.

Обозначим $t = \frac{x^2+4}{x}$, тогда: $t + \frac{1}{t+3} + \frac{11}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 + 17t + 35 = 0 \\ t \neq -3 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x^2+4}{x} = -\frac{7}{2} \\ \frac{x^2+4}{x} = -5 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2+7x+8=0 \Rightarrow \emptyset \\ x \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+5x+4=0 \Rightarrow x_1=-4; x_2=-1 \\ x \neq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $\{-4; -1\}$.

$$6) \frac{4(x^2+1)}{x^2-10x+1} - \frac{5x}{x^2+1} + 3,5 = 0$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{3}; 1; 3\right\}$.

№ 2.127. а) $(x^2 - 6x - 9)^2 = x(x^2 - 4x - 9)$.

Обозначим $t = x^2 - 5x - 9$, тогда: $(t - x)^2 = x(t + x) \Leftrightarrow t(t - 3x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x - 9) \cdot (x^2 - 8x - 9) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{61}}{2}; x_3 = -1; x_4 = 9.$$

Ответ: $\left\{-1; 9; \frac{5 \pm \sqrt{61}}{2}\right\}$.

$$6) \frac{x^2 - 12x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \frac{4x}{x^2 - 10x + 15}$$

Ответ: $\{3; 5; 9 \pm \sqrt{66}\}$.

№ 2.128. а) $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$.

Обозначим $t = 4x^2 - 9x + 7$, тогда: $\frac{4x}{t+x} + \frac{3x}{t-x} = 1 \Rightarrow t(t-7x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (4x^2 - 9x + 7)(4x^2 - 16x + 7) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{7}{2}.$$

Ответ: $\{0,5; 3,5\}$.

$$6) \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{10}{9}$$

Ответ: $\{-3; 1\}$.

№ 2.129. а) $2 \cdot \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 = \frac{x^2-1}{x^2-4}$.

Перепишем уравнение в виде: $\left(\frac{x-1}{x+2} - \frac{x+1}{x-2}\right)\left(\frac{2(x-1)}{x+2} + \frac{x+1}{x-2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{-18x(x^2 - x + 2)}{((x+2)(x-2))^2} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Ответ: $\{0\}$.

$$б) \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+5}\right)^2 = \frac{2x^2 + 2x}{x^2 + 4x - 5}$$

Ответ: $\left\{-\frac{5}{7}\right\}$.

№ 2.130. а) Докажите, что для выполнения равенства

$$\frac{30}{x^2 - 1} - \frac{13}{x^2 + x + 1} = \frac{7 + 18x}{x^3 - 1}$$

необходимо, чтобы $|2x - 5| = 13$. Является ли данное условие достаточным?

Запишите первое уравнение в виде: $\frac{x^2 - 5x - 36}{(x+1)(x^3 - 1)} = 0 \Rightarrow x_1 = -4;$

$x_2 = 9$.

Второе уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ 5 - 2x = 13 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 2x - 5 = 13 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = -4; x_2 = 9$. Поскольку решения совпадают, то данное условие необходимое и достаточное.

Ответ: да.

б) Докажите, что для выполнения равенства $|2x - 5| = 1$ достаточно, чтобы $\frac{2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{x - 4}{x^2 + 2x} = 0$. Является ли данное условие необходимым?

Первое уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x < 2,5 \\ x = 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 2,5 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 3$.

Второе уравнение приведем к общему знаменателю и получаем: $\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)(x+2)} = 0 \Rightarrow x = 3$. Так как решение второго уравнения является решением первого неравенства, но не наоборот, то данное условие является только достаточным.

Ответ: нет.

№ 2.131. а) $\|2x - 3| - 1| = x$.

Ответ: $\left\{4; \frac{2}{3}\right\}$

б) $\|x + 2| + x| = 1$.

Уравнение эквивалентно системе:

$$\begin{cases} |x + 2 + x| = 1, & x \geq -2 \\ |-2 - x + x| = 1, & x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2x = 1, & x \geq -1 \\ -2 - 2x = 1, & -2 \leq x < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$.

№ 2.132. а) $|x|x| - 2| = (x - 1)^2$.

Уравнение эквивалентно системе:

$$\begin{cases} |x^2 - 2| = (x - 1)^2, & x \geq 0 \\ |-x^2 - 2| = (x - 1)^2, & x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = (x - 1)^2, & x \geq \sqrt{2} \\ 2 - x^2 = (x - 1)^2, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2 + 2 = (x - 1)^2, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1 + \sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right\}$.

б) $|(x + 1)x| - x| = 1$.

Ответ: $\{1 - \sqrt{2}; -1; 1\}$.

№ 2.133. а) $\frac{1}{|x^2 - 5x + 6|} = \frac{|x - 1,5|}{x^2 - 5x + 6}$.

Уравнение эквивалентно системе:
$$\begin{cases} 1 = 1,5 - x, & x < 1,5 \\ 1 = x - 1,5, & 1,5 \leq x < 2 \\ -1 = x - 1,5, & 2 < x < 3 \\ 1 = x - 1,5, & x > 3 \end{cases} \Rightarrow x = 0,5.$$

Ответ: $\{0,5\}$.

$$б) \frac{|2x-1|}{8-x-x^2} = \frac{4}{|x^2+x-8|}.$$

Ответ: $\{-1, 5\}$.

№ 2.134. а) $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{3}.$

Ответ: $\left\{ \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6} \right\}.$

б) $\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{3x}.$ Обозначим $a = x - \sqrt{1-x^2}; b = x + \sqrt{1-x^2}.$

Тогда: $\frac{a}{b} = \frac{2(b-a)}{3(a+b)}.$ Сделаем замену: $z = \frac{a}{b} \Rightarrow z = \frac{2(1-z)}{3(1+z)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z^2 + 5z - 2 = 0 \\ z \neq -1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow z_1 = -2; z_2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}} = -2 \\ \frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\sqrt{1-x^2} \\ 2x = 4\sqrt{1-x^2} \\ x + \sqrt{1-x^2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x^2 = 1 \\ x \leq 0 \\ 5x^2 = 4 \\ x \geq 0 \\ x + \sqrt{1-x^2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{10}}; x_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\left\{ -\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{2}{\sqrt{5}} \right\}.$

№ 2.135. а) $\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} = \frac{x}{2}.$

Сделаем преобразования: $\frac{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})^2}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})} = \frac{x}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-4} = 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

Ответ: $\{2\}.$

б) $\sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = \frac{12}{\sqrt{x+5}}.$

Ответ: $\{3; 4\}$

$$\text{№ 2.141. а) } \frac{x+1}{2x-3} + \frac{x-3}{3x-2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{x^2-2x-3}{6x^2-13x+6}}.$$

$$\text{О.Д.З. } \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{6x^2-13x+6} \geq 0 \\ \frac{x+1}{2x-3} + \frac{x-3}{3x-2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(x-3)}{(2x-3)(3x-2)} \geq 0 \\ \frac{5x^2-8x+7}{(2x-3)(3x-2)} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2x-3} \geq 0 \\ \frac{x-3}{3x-2} \geq 0 \end{cases}.$$

Тогда уравнение можно переписать в виде:

$$\left(\sqrt{\frac{x+1}{2x-3}} - \sqrt{\frac{x-3}{3x-2}} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2x-3} = \frac{x-3}{3x-2} \Rightarrow x = -11 \\ x \leq -1 \cup x \geq 3 \end{cases}$$

Ответ: $\{-11\}$.

$$\text{б) } \frac{4x-4}{x+2} - 4\sqrt{\frac{5x+2}{x+2}} + \frac{5x+2}{x-1} = 0.$$

Ответ: $\{-20\}$.

Решите систему уравнений (2.142. – 2.165.):

$$\text{№ 2.142. а) } \begin{cases} 2y - x = 8 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}.$$

$$\text{Запишем в виде: } \begin{cases} x = 2y - 8 \\ (2y - 8)^2 + (2y - 8)y + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 8 \\ 7y^2 - 40y + 57 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 8 \\ y_1 = \frac{19}{7}; y_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{18}{7}; x_2 = -2$$

Ответ: $\left(-\frac{18}{7}; \frac{19}{7}\right); (-2; 3).$

$$\text{б) } \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 6 \end{cases}.$$

Ответ: $(1; 4); \left(\frac{19}{6}; \frac{11}{6}\right).$

$$\text{№ 2.143. а) } \begin{cases} x^2 - y = 0,75 \\ y^2 + x = 0,75 \end{cases}.$$

Преобразуем к виду:

$$+ \begin{cases} x^2 - y = 0,75 \\ y^2 + x = 0,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0,75 \\ (x+y)(x-y-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0,75 \\ x+y = 0 \\ x^2 - y = 0,75 \\ x-y-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + x = 0,75 \\ x+y = 0 \\ x^2 - x = -0,25 \\ y = x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}; y_1 = \frac{3}{2}; x_2 = \frac{1}{2}; y_2 = -\frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{1}{2}; y_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

б) $\begin{cases} x^2 + xy = 4y \\ y^2 + xy = 4x \end{cases}$

Ответ: $(0; 0); (2; 2)$.

№ 2.144. а) $\begin{cases} x+y-xy = 1 \\ x^3 - y^3 = 13(x-y) \end{cases}$

Запишем в виде:

$$\begin{cases} x+y-xy = 1 \\ (x-y)(x^2+xy+y^2-13) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-xy = 1 \\ x-y = 0 \\ x+y-xy = 1 \\ x^2+xy+y^2-13 = 0 \end{cases}$$

Первая система: $\begin{cases} y = x \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1; y = 1$.

Вторая система: вычтем из 2-го уравнения первое:

$$\begin{cases} x+y-xy = 1 \\ (x+y)^2 - (x+y) - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1+xy \\ x+y = -3 \\ x+y = 1+xy \\ x+y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3-x \\ -3 = 1-x(x+3) \\ y = 4-x \\ 4 = 1+x(4-x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4; y_1 = 1 \\ x_2 = 1; y_2 = -4 \\ x_3 = 1; y_3 = 3 \\ x_4 = 3; y_4 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $(-4; 1); (1; -4); (1; 3); (3; 1); (1; 1)$.

б) $\begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$

Ответ: $(2; 3); (3; 2)$.

№ 2.145. а)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 y + xy^3 = 10 \end{cases}.$$

Система равносильна системе:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}.$$

Умножим 2-е уравнение на 2 и прибавим и вычтем из первого:

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 9 \\ (x-y)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pm 3 \\ x-y = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2; y_1 = 1 \\ x_2 = -1; y_2 = -2 \\ x_3 = 1; y_3 = 2 \\ x_4 = -2; y_4 = -1 \end{cases}.$$

Ответ: $(-2; -1); (-1; -2); (1; 2); (2; 1).$

б)
$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 27x^3 - y^3 = 28 \end{cases}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; -3\right); (1; -1).$

№ 2.146. а)
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ 6x^2 - xy - 12y^2 = 0 \end{cases}.$$

Разделим 2-е уравнение на y^2 (легко проверить, что $y = 0$ не является решением системы) и обозначим $t = \frac{x}{y}$. Тогда:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ 6t^2 - t - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ \frac{x}{y} = -\frac{4}{3} \\ x^2 + 2y^2 = 17 \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2\sqrt{2}; y_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ x_2 = 2\sqrt{2}; y_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \\ x_3 = -3; y_3 = -2 \\ x_4 = 3; y_4 = 2 \end{cases}$$

Ответ: $\left(2\sqrt{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right); (3; 2); (-3; -2); \left(-2\sqrt{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$

б)
$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 13(x - y) = 0 \end{cases}.$$

Ответ: $\left(-\frac{26}{5}; -\frac{13}{5}\right); (0; 0); (2; 3).$

№ 2.147. а)
$$\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 37 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 26 \end{cases}.$$

Уравнения являются однородными, поэтому преобразуем систему так, чтобы правая часть была 0:

$$\begin{aligned} & 26 \cdot \begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 37 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 37 \\ -48x^2 - 48xy + 15y^2 = 0 \end{cases} \\ & + \\ & -37 \cdot \end{aligned}$$

Поделим 2-е уравнение на x^2 (легко видеть, что $x = 0$ не является решением системы) и обозначим $t = \frac{y}{x}$, тогда $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 37 \\ 5t^2 - 16t - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 37 \\ \frac{y}{x} = -\frac{4}{5} \\ x^2 + xy + 2y^2 = 37 \\ \frac{y}{x} = 4 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -5; y_1 = 4; x_2 = 5; y_2 = -4; x_3 = -1; y_3 = 4;$$

$$x_4 = 1; y_4 = 4.$$

Ответ: $(-5; 4); (5; -4); (-1; -4); (1; 4).$

$$6) \begin{cases} x^2 - 4y^2 = 9 \\ xy + 2y^2 = 3 \end{cases}$$

Ответ: $\left(5\sqrt{\frac{3}{7}}; \sqrt{\frac{3}{7}}\right); -\left(5\sqrt{\frac{3}{7}}; -\sqrt{\frac{3}{7}}\right).$

№ 2.148. а) $\begin{cases} \frac{1}{x+3y} + y = 5 \\ \frac{y}{x+3y} = 6 \end{cases}$

Ответ: $(-8,5; 3); \left(-5\frac{2}{3}; 2\right).$

$$6) \begin{cases} \frac{1}{x-y} + x + 1 = 0 \\ \frac{x}{x-y} + 2 = 0 \end{cases} \text{ . Сделаем замену: } t = \frac{1}{x-y}, \text{ тогда:}$$

$$\begin{cases} t + x = -1 \\ xt = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - x \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-y} = -2 \\ x = 1 \\ \frac{1}{-2-y} = 1 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1; y_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -2; y_2 = -3 \end{cases}$$

Ответ: $(1; 1,5); (-2; -3)$.

№ 2.149. а)
$$\begin{cases} 2(x+y) = 3xy \\ x^2 + y^2 - x - y = 2 \end{cases}$$

Ответ: $(2; 1); (1; 2); \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{3}; \frac{-1-\sqrt{5}}{3}\right); \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{3}; \frac{-1+\sqrt{5}}{3}\right)$.

б)
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{7}{2} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Система уравнений симметрична по отношению к перестановкам $x \leftrightarrow y$, поэтому сделаем замену: $a = x + y$; $b = xy$. Тогда:

$$\begin{cases} \frac{a(a^2 - 3b)}{b} = \frac{7}{2} \\ \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \neq 0 \\ a^2 - 6a - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 = -1 & b_1 = -2 \\ a_2 = 7 & b_2 = 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -2 \\ x + y = 7 \\ xy = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - x \\ x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 7 - x \\ x^2 - 7x + 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = -2; y_1 = 1 \\ x_2 = 1; y_2 = -2 \end{bmatrix}$$

Ответ: $(-2; 1); (1; -2)$.

№ 2.150. а)
$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} - \frac{y^3}{x} = \frac{15}{2} \\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Во втором уравнении обозначим $t = \frac{x}{y}$ и решим его:

$$t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - 3t - 2 = 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \Rightarrow t_1 = 2; t_2 = -\frac{1}{2}$$

В итоге получаем две системы:

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} - \frac{y^3}{x} = \frac{15}{2} \\ \frac{x}{y} = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{x^3}{y} - \frac{y^3}{x} = \frac{15}{2} \\ \frac{x}{y} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Из первой системы: $x_1 = 2; y_1 = 1; x_2 = -2; y_2 = -1$.

Из второй системы: $x_3 = -1$; $y_3 = 2$; $x_4 = 1$; $y_4 = -2$.

Ответ: $(2; 1)$; $(-2; -1)$; $(-1; 2)$; $(1; -2)$.

$$б) \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

Ответ: $(3\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(3\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $(-3\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(-3\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

№ 2.151. а)
$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 82 \\ xy + 3 = 0 \end{cases}$$

Сделаем замену: $a = x^2 + y^2$; $b = xy$, тогда:

$$\begin{cases} a^2 - 2b^2 = 82 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 4 \\ xy = -3 \end{cases}$$

В итоге имеем две системы уравнений:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-x \\ x^2-2x-3=0 \\ y=-2-x \\ x^2+2x-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1; y_1=3 \\ x_2=3; y_2=-1 \\ x_3=1; y_3=-3 \\ x_4=-3; y_4=1 \end{cases}$$

Ответ: $(3; -1)$; $(-1; 3)$; $(-3; 1)$; $(1; -3)$.

б)
$$\begin{cases} xy + x - y = 1 \\ x^2y - xy^2 = -6 \end{cases}$$

Ответ: $(1; -2)$; $(2; -1)$; $(1; 3)$; $(-3; -1)$.

№ 2.152. а)
$$\begin{cases} \frac{1}{2x-3y} + \frac{2}{3x-2y} = \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2x-3y} - \frac{4}{3x-2y} = 1 \end{cases}$$

Сделаем замену: $a = \frac{1}{2x-3y}$; $b = \frac{1}{3x-2y}$, тогда:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \begin{cases} a+2b = \frac{3}{4} \\ 3a-4b = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5a = \frac{5}{2} \\ a+2b = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x-3y} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3x-2y} = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y = 2 \\ 3x-2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 20 \\ 2x-3y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 4; y = 2 \end{aligned}$$

Ответ: $(4; 2)$.

$$6) \begin{cases} \frac{1}{x+y} - \frac{10}{x-y} = 1 \\ \frac{1}{x+y} - \frac{2}{x-y} = -\frac{3}{5} \end{cases}.$$

Ответ: $(-3; 2)$.

№ 2.153. а) $\begin{cases} 3y + x = 2 \\ \left| x - \frac{1}{y} \right| = 2 \end{cases}.$

Система равносильна системе уравнений: $\begin{cases} x = 2 - 3y \\ \left| 2 - 3y - \frac{1}{y} \right| = 2 \end{cases}$. Решим

$$2\text{-е уравнение: } \left| 2 - 3y - \frac{1}{y} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3y - \frac{1}{y} = 2 \\ 2 - 3y - \frac{1}{y} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 = -1 \\ 3y^2 - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \emptyset \\ y_1 = \frac{1}{3}; y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1.$$

Ответ: $(-1; 1); \left(1; \frac{1}{3}\right)$.

$$б) \begin{cases} 1 - y = \frac{4}{x} \\ |2x - 3y| = 7 \end{cases}.$$

Ответ: $(2; -1); \left(3; -\frac{1}{3}\right)$.

№ 2.154. а) $\begin{cases} 3x - |x - 2y| = 4 \\ x^2 + xy - 3y = 2 \end{cases}.$

Ответ: $(1,6; 0,4); (2; 2)$.

$$б) \begin{cases} x|x + 5y| - 16y^2 = 5xy \\ x^2y - y^3 = 15 \end{cases}.$$

Исходя из определения модуля числа имеем две системы урав-

$$\text{нений: } \begin{cases} x < -5y \\ -x^2 - 5xy - 16y^2 = 5xy \\ x^2y - y^3 = 15 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x \geq -5y \\ x^2 + 5xy - 16y^2 = 5xy \\ x^2y - y^3 = 15 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x < -5y \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 10\left(\frac{x}{y}\right) + 16 = 0 \\ x^2y - y^3 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5y \\ \frac{x}{y} = -2 \\ x^2y - y^3 = 15 \end{cases} \cup \begin{cases} x < -5y \\ \frac{x}{y} = -8 \\ x^2y - y^3 = 15 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \sqrt[3]{5};$$

$$x_1 = -2\sqrt[3]{5} \Rightarrow \emptyset \quad y_2 = \sqrt[3]{\frac{5}{21}}; \quad x_2 = -8\sqrt[3]{\frac{5}{21}}.$$

Вторая система уравнений равносильна системе:

$$\begin{cases} x \geq -5y \\ x = \pm 4y \\ x^2y - y^3 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4; y_1 = 1 \\ x_2 = 4; y_2 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $(-4; 1); (4; 1); \left(-8\sqrt[3]{\frac{5}{21}}; \sqrt[3]{\frac{5}{21}}\right).$

№ 2.155. а)
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1 \\ 5x^2 + 2,5y^2 + 3x - 4y = 4 \end{cases}.$$

Заменим систему уравнений равносильной системой:

$$\begin{aligned} & 5 \cdot \begin{cases} 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1 \\ 5x^2 + 2,5y^2 + 3x - 4y = 4 \end{cases} \\ & + \begin{cases} -x - 2y = -3 \\ 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y = -3 \\ 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & -2 \cdot \begin{cases} 5x^2 + 2,5y^2 + 3x - 4y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 2(3 - 2y)^2 + y^2 + 3 - 2y - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 9y^2 - 28y + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7}{9}; y_1 = \frac{10}{9} \\ x_2 = -1; y_2 = 2 \end{cases}$$

Ответ: $(-1; 2); \left(\frac{7}{9}; \frac{10}{9}\right).$

б)
$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + 12x - 7y + 8 = 0 \\ 2x^2 - y^2 + 8x + 35y + 10 = 0 \end{cases}.$$

Ответ: $(-2; -0,5); (-2; 4).$

№ 2.156. а)
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 2,5 \end{cases}.$$

Перепишем систему в виде:
$$\begin{cases} y = -x + 10 \\ \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 - 2,5\sqrt{\frac{x}{y}} + 1 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 10 \\ \frac{x}{y} = 4 \\ y = -x + 10 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8; y_1 = 2 \\ x_2 = 2; y_2 = 8 \end{cases}.$$

Ответ: (2; 8); (8; 2).

$$\text{б)} \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \\ xy = 4 \end{cases}.$$

Ответ: (4; 1).

№ 2.157. а)
$$\begin{cases} \sqrt{x + 3y + 1} = 2 \\ \sqrt{2x - y + 2} = 7y - 6 \end{cases}.$$

Возведем обе части уравнений в квадрат. При этом могут появиться лишние корни, которые отбросим путем подстановки в исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} x = 3 - 3y \\ 2x = 49y^2 - 83y + 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 3y \\ 49y^2 - 77y + 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0; y_1 = 1 \\ x_2 = \frac{9}{7}; y_2 = \frac{4}{7} \end{cases}.$$

Вторая пара решений не удовлетворяет исходной системе.

Ответ: (0; 1).

$$\text{б)} \begin{cases} \sqrt{x - y + 5} = 3 \\ \sqrt{x + y + 5} = 11 - 2x \end{cases}.$$

Ответ: (5; 1).

№ 2.158. а)
$$\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{x^2 + xy} = 3 \\ x + y + x^2 + xy = 5 \end{cases}.$$

Ответ: (4; -3); (0,25; 3,75).

$$\text{б)} \begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} - \sqrt{x - y} = 4 \\ \frac{1}{\sqrt{x - y}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Обозначим $a = \sqrt{x^2 - y^2} \geq 0$; $b = \sqrt{x - y} \geq 0$, тогда:

$$\begin{cases} a-b=4 \\ \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=4 \\ ab=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=4 \\ b^2+4b-12=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1=6; b_1=2 \\ a_2=-2; b_2=-6 \end{bmatrix}.$$

Так как $a, b \geq 0$, то: $\begin{cases} \sqrt{x^2-y^2}=6 \\ \sqrt{x-y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9 \\ x-y=4 \end{cases} \Rightarrow x_1=\frac{13}{2}; y_1=\frac{5}{2}.$

Ответ: $(6,5; 2,5)$.

№ 2.159. а) $\begin{cases} x^2 + xy + x = 10 \\ y^2 + xy + y = 20 \end{cases}.$

Складывая уравнения перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} x^2 + xy + x = 10 \\ (x+y)^2 + (x+y) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + x = 10 \\ x+y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = -2; y_1 = -4 \\ x_2 = \frac{5}{3}; y_2 = \frac{10}{3} \end{bmatrix}.$$

Ответ: $(-2; -4); \left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right).$

б) $\begin{cases} x^2 = 13x + 4y \\ y^2 = 4x + 13y \end{cases}.$

Ответ: $(0; 0); (17; 17); (12; -3); (-3; 12).$

№ 2.160. а) $\begin{cases} \frac{2x-2}{x-y} - \frac{3y}{x+y} = 3 \\ \frac{6x-6y}{x-1} + \frac{5x+5y}{y} = 7 \end{cases}.$

Сделаем замену переменных: $a = \frac{x-1}{x-y}; b = \frac{y}{x+y}$, тогда:

$$\begin{cases} 2a-3b=3 \\ \frac{6}{a} + \frac{5}{b} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3b=3 \\ 5a+6b=7ab \\ a \neq 0; b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2a-3}{3} \\ 14a^2 - 48a + 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{x-1}{x-y} = 3 \\ \frac{y}{x+y} = 1 \end{bmatrix} \cup$$

$$\cup \begin{bmatrix} \frac{x-1}{x-y} = \frac{3}{7} \\ \frac{y}{x+y} = -\frac{5}{7} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x=0 \\ 4x+3y=7 \\ 12y=-5x \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1=0; y_1=\frac{1}{3} \\ x_2=\frac{28}{11}; y_2=-\frac{35}{33} \end{bmatrix}.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right); \left(\frac{28}{11}; -\frac{35}{33}\right).$

$$6) \begin{cases} \frac{3x-1}{y+1} - \frac{3y-1}{x+1} = 2 \\ \frac{3y+3}{3x-1} + \frac{2x+2}{3y-1} = 1 \end{cases}.$$

Ответ: $(0,6; -0,2); \left(-\frac{17}{5}; -\frac{43}{15}\right)$.

$$\text{№ 2.161. а) } \begin{cases} \frac{1}{x-2y} + \frac{4}{3x+y} = \frac{6}{xy} \\ \frac{2}{x-2y} - \frac{1}{3x+y} = \frac{3}{xy} \end{cases}$$

Ответ: $(-14; 2,8)$.

$$6) \begin{cases} \frac{1}{xy-x^2-1} - \frac{1}{y^2-2x} = 0 \\ \frac{1}{xy-x^2-1} + \frac{2}{y^2-2x} = \frac{3}{x-y-1} \end{cases}.$$

Вычтем из второго уравнения первое, получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{xy-x^2-1} = \frac{1}{y^2-2x} \\ \frac{1}{y^2-2x} = \frac{1}{x-y-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-2x = xy-x^2-1 \\ y^2-2x = x-y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+1) = 0 \\ 3x = y^2+y+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ (y-1)^2 = 0 \\ x = -1 \\ y^2 + y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1; y_1 = 1.$$

Ответ: $(1; 1)$.

$$\text{№ 2.162. а) } \begin{cases} xy = 12 \\ y(x+z) = 32 \\ x(y+z) = 27 \end{cases}$$

Раскрывая скобки и учитывая первое уравнение, перепишем

$$\text{систему в виде: } \begin{cases} xy = 12 \\ yz = 20 \\ xz = 15 \end{cases}. \text{ Разделив второе и третье уравнение на}$$

$$\text{первое, получим: } \begin{cases} xy = 12 \\ 3z = 5x \\ 4z = 5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3; y_1 = 4; z_1 = 5 \\ x_2 = -3; y_2 = -4; z_2 = -5 \end{cases}.$$

Ответ: $(3; 4; 5); (-3; -4; -5)$.

$$6) \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 1 \\ \frac{x+z}{xz} = \frac{2}{3} \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Ответ: (6; 1,2; 2).

$$\text{№ 2.163. а)} \begin{cases} \frac{|x|}{y} - y = \frac{y-x}{y} + 4x \\ y^2 + 2x = 2|x| - y + 2 \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

$$\begin{cases} x < 0 \\ y = -4x - 1 \\ y^2 + y - 2 = -4x \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}+1}{4}; y = \sqrt{3}.$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{2x}{y} - y = 1 + 4x \Rightarrow x = \frac{1}{5}; y = -2 \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Ответ: (0,2; -2); $\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{4}; \sqrt{3}\right)$.

$$6) \begin{cases} x^2 - 2|y| = 2y - x + 6 \\ xy - |y| = y + 3x \end{cases}$$

Ответ: (0; -1,5); (-3; 1,8).

$$\text{№ 2.164. а)} \begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x+2y} = 2x \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x+2y} = 2y \end{cases}$$

Сделаем замену переменных: $a = \sqrt{x+y} \geq 0$; $b = \sqrt{x+2y} \geq 0$,

$$\text{тогда: } \begin{cases} a - b = 2 \cdot (2a^2 - b^2) \\ a + b = 2 \cdot (b^2 - a^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 2(2a^2 - b^2) \\ (a+b)(2b-2a-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ 2a^2 - 2a = 0 \\ b = a + \frac{1}{2} \\ 2a^2 - 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0; b_1 = 0 \\ a_2 = 1; b_2 = -1 \\ a_3 = 0; b_3 = \frac{1}{2} \\ a_4 = 1; b_4 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=\frac{1}{4} \end{cases} \cup \begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=\frac{9}{4} \end{cases}$$

В итоге имеем :

$$x_1 = 0; y_1 = 0; x_2 = -\frac{1}{4}; y_2 = \frac{1}{4}; x_3 = -\frac{1}{4}; y_3 = \frac{5}{4}$$

Ответ: $(0; 0); \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right); \left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

$$\text{б)} \begin{cases} \sqrt{2x-y} - \sqrt{y} = x-y \\ \sqrt{2x-y} + \sqrt{y} = x \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0); (2; 4); (4; 4); (2; 0)$.

№ 2.165. а)
$$\begin{cases} x+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{xy}=2 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \end{cases}$$

Ответ: $(25; 9); \left(\frac{49}{4}; \frac{81}{4}\right)$.

$$\text{б)} \begin{cases} (x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=185 \\ (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=65 \end{cases}$$

Обозначим: $a = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$; $b = xy$, тогда:

$$\begin{cases} (a^2+b)a=185 \\ (a^2-b)a=65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 65(a^2+b)=185(a^2-b) \\ (a^2-b)a=65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{12}{25}a^2 \\ a^3=125 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=5 \\ xy=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=1 \\ xy=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ xy=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ y^2+y-12=0 \\ x=y-1 \\ y^2-y-12=0 \end{cases}$$

В итоге имеем:

$$x_1 = -3; y_1 = -4; x_2 = 4; y_2 = 3; x_3 = -4; y_3 = -3; x_4 = 3; y_4 = 4.$$

Ответ: $(4; 3); (3; 4); (-4; -3); (-3; -4)$.

НЕРАВЕНСТВА

Сколько целочисленных значений может принимать выражение (2.201. – 2.202.):

№ 2.201. а) $6a - 5b$, если $-1\frac{1}{3} < a < 4$; $-3 < b < 2,4$.

Умножая первое неравенство на 6, получаем: $-8 < 6a < 24$. Умножая второе неравенство на -5 , получаем: $-12 < -5b < 15$. Складывая неравенства, получаем: $-20 < 6a - 5b < 39$.

$$N = 38 - (-19) + 1 = 58.$$

Ответ: $\{58\}$.

б) $2,4n - 7m$, если $-3 < n < -0,5$; $-\frac{2}{7} < m < 4$?

Ответ: $\{36\}$.

№ 2.202. а) $2n - \frac{3}{m}$, если $-4 < n < 0,8$; $\frac{1}{7} < m < 0,3$.

Так как во втором неравенстве $m > 0$, то, поделив на m неравенство, получим: $\frac{10}{3} < \frac{1}{m} < 7$. В результате имеем систему нера-

$$\text{венств: } + \begin{cases} -8 < 2n < 1,6 \\ -21 < -\frac{3}{m} < -10 \end{cases} \Rightarrow -29 < 2n - \frac{3}{m} < -8,4; \quad N = -9 - (-28) + 1 = 20.$$

Ответ: $\{20\}$.

б) $\frac{1}{x} - 5y$, если $-\frac{1}{4} < x < -\frac{2}{9}$; $-0,4 < y < 3$.

Ответ: $\{17\}$.

№ 2.203. а) Значение выражения $\frac{6a}{b-1}$ — целое число, делящееся на 9.

Найдите его, если $1,5 < a < 2,5$; $0,1 < b < 0,4$. Из первого неравенства:

$$9 < 6a < 15. \text{ Из второго неравенства: } -0,9 < b - 1 < -0,6 \Rightarrow -\frac{5}{3} < \frac{1}{b-1} <$$

$-\frac{10}{9}$. Умножим неравенство на $6a$ (по условию $6a > 0$), тогда:

$$-\frac{5}{3} \cdot 6a < \frac{6a}{b-1} < -\frac{10}{9} \cdot 6a \Rightarrow -25 < \frac{6a}{b-1} < -10 \Rightarrow \frac{6a}{b-1} = -18.$$

Ответ: $\{-18\}$.

б) Значение выражения $\frac{1,4+a}{b}$ — целое число. Найдите его, если

$$-1,1 < a < 2,2; -4 < b < -2\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\{-1\}$.

Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения (2.204. — 2.205.):

№ 2.204. а) $b - 0,4a^2$, если $-5 \leq a \leq -1,5$; $-0,5 \leq b \leq 2,4$.

Так как при $a < 0$ a^2 — монотонно убывающая функция, то:
 $2,25 \leq a^2 \leq 25 \Rightarrow -10 \leq -0,4a^2 \leq -0,9 \Rightarrow -10,5 \leq b - 0,4a^2 \leq 1,5$.

Ответ: 1,5 и -10,5.

б) $m^2 - \frac{4}{n}$, если $-3 \leq m \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $1,6 \leq n \leq 2$.

Ответ: 7 и -2.

№ 2.205. а) $a + 4ab$, если $-2 \leq a \leq -1$; $-0,22 \leq b \leq -0,1$.

Умножая второе неравенство на 4, получаем:
 $-0,88 \leq 4b \leq -0,4 \Rightarrow 0,12 \leq 4b + 1 \leq 0,6$. Умножая полученное неравенство на a ($a < 0$), получаем: $0,6a \leq a + 4ab \leq 0,12a$. В итоге получаем:
 $-1,2 \leq a + 4ab \leq -0,12$.

Ответ: -0,12 и -1,2.

б) $c - pc$, если $-2 \leq c \leq -\frac{1}{7}$; $1,7 \leq p \leq 2,8$.

Ответ: 3,6 и 0,1.

Докажите утверждение (2.206. — 2.207.):

№ 2.206. а) если $-2 < a < -0,5$; $-1 < m < \frac{2}{3}$; $-5 < p < -2\frac{1}{4}$, то $\frac{a}{3m-2p} > -\frac{4}{3}$.

Из второго и третьего неравенств получаем:

$$+ \begin{cases} -3 < 3m < 2 \\ 4,5 < -2p < 10 \end{cases} \Rightarrow 1,5 < 3m - 2p < 12 \Rightarrow \frac{1}{12} < \frac{1}{3m-2p} < \frac{2}{3}. \text{ Умножая на}$$

a ($a < 0$), получаем:

$$+ \begin{cases} \frac{2}{3}a < \frac{a}{3m-2p} < \frac{a}{12} \\ -2 < a < -0,5 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{3m-2p} > -\frac{4}{3}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

б) Если $-4 < m < 1$; $5\frac{1}{6} < n < 5,5$; $-0,8 < a < -\frac{1}{3}$, то $\frac{m+6n}{a} < -3375$.

Из первых двух неравенств: $27 < m + 6n < 34$.

$$\text{Из третьего неравенства: } -3 < \frac{1}{a} < -\frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{34}{a} < \frac{m+6n}{a} < \frac{27}{a} \\ -0,8 < a < -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m+6n}{a} < -\frac{27 \cdot 5}{4} = -33,75. \text{ Что и требовалось доказать.}$$

№ 2.207. а) Если $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 \leq 0$, то $-1 \leq x - y \leq 11$.

Преобразуем неравенство к виду: $(x-3)^2 + (y+2)^2 \leq 9$. Геометрически это внутренность круга с $R = 3$ и центром $(3; -2)$. Из нера-

$$\text{венства следует, что: } \begin{cases} |x-3| \leq 3 \\ |y+2| \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ -5 \leq y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ -1 \leq -y \leq 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 \leq x - y \leq 11.$$

б) Если $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 \leq 0$, то $1 \leq y - x \leq 9$.

Преобразуем неравенство к виду: $(x+2)^2 + (y-3)^2 \leq 4$. Геометрически это внутренность круга с $R = 2$ и центром $(-2; 3)$. Из нера-

$$\text{венства следует, что: } \begin{cases} |x+2| \leq 2 \\ |y-3| \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 0 \\ 1 \leq y \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq -x \leq 4 \\ 1 \leq y \leq 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \leq y - x \leq 9.$$

№ 2.208. Оцените значение выражения:

а) ab , если $-0,4 < a < 0,6$; $-1,5 < b < 2,25$.

$$\text{Рассмотрим два случая: } \begin{cases} -1,5 < b < 0 \\ 0,6b < ab < -\frac{4}{3}b \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 0 \leq b < \frac{9}{4} \\ -\frac{2}{9}b < ab < 0,6b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -0,9 < ab < \frac{2}{3} \\ -1 < ab < 1,35 \end{cases} \Rightarrow -1 < ab < 1,35.$$

Ответ: $-1 < ab < 1,35$.

б) $m(n+3)$, если $-1,6 < m < 1,81$; $-5,2 < n < -1,2$.

Ответ: $-4 < m(n+3) < 3,52$.

№ 2.209. а) Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит прямоугольнику $ABCD$: $A(-3; 8)$; $B(-3; -1)$; $C(5; -1)$; $D(5; 8)$. Какие значения для таких точек M может принимать выражение $2x^2 - 3y$?

Координаты точек внутри прямоугольника удовлетворяют условию: $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ -1 \leq y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 2x^2 \leq 50 \\ -24 \leq -3y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow -24 \leq 2x^2 - 3y \leq 53$.

Ответ: $[-24; 53]$.

б) Пусть точка $N(x; y)$ принадлежит прямоугольнику $EFPK$: $E(2; -5)$; $F(2; 3)$; $K(-6; -5)$; $P(-6; 3)$. Какие значения для таких точек N может принимать выражение $4x + y^2$?

Ответ: $[-24; 33]$.

Докажите неравенство и определите значения переменных, при которых достигается равенство (2.210. – 2.211.):

№ 2.210. а) $a^2 + \frac{4}{1+a^2} \geq 3$.

Ответ: при $a = \pm 1$.

б) $\frac{|x|}{2} + \frac{18}{|x|+2} \geq 5$.

Приведем выражение к виду: $\frac{x^2 - 8|x| + 16}{2(|x|+2)} \Leftrightarrow \frac{(|x|-4)^2}{2(|x|+2)} \geq 0$ для любого x .

Знак равенства соответствует: $|x| = 4 \Rightarrow x = \pm 4$.

Ответ: при $x = \pm 4$.

№ 2.211. а) $6x + \frac{3}{32x} \leq -1,5$ при $x < 0$.

Приведем выражение к виду: $\frac{64x^2 + 16x + 1}{32x} \Leftrightarrow \frac{(8x+1)^2}{32x} \leq 0$ при $x < 0$.

Знак равенства соответствует $x = -\frac{1}{8}$.

Ответ: при $x = -\frac{1}{8}$.

б) $2,5a + \frac{8}{125a} \geq 0,8$ при $a > 0$.

Ответ: при $a = 0,16$.

Докажите, что при любых численных значениях букв выполняется неравенство (2.212. – 2.216.):

№ 2.212. а) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1 \geq 0$.

Преобразуем выражение к виду:

$$(x - y)^2 + 2(x - y) + 1 \Leftrightarrow (x - y + 1)^2 \geq 0 \text{ для любых } x \text{ и } y.$$

б) $x^2 + 4y^2 + 4y - 4x + 5 \geq 0$.

Преобразуем выражение к виду:

$$(x - 2)^2 + (2y + 1)^2 \geq 0 \text{ для любых } x \text{ и } y.$$

№ 2.213. а) $a^2 + b^2 - 2ab(a + b) + 2a^2b^2 \geq 0$.

Преобразуем выражение к виду:

$$a^2(1 - 2b + b^2) + b^2(1 - 2a + a^2) = a^2(1 - b)^2 + b^2(1 - a)^2 \geq 0 \text{ для любых } a \text{ и } b.$$

б) $m^2(n^2 + 4) - 4m^2n + 2mn - 4m + 1 \geq 0$.

Преобразуем выражение к виду:

$$(m(n - 2))^2 + 2m(n - 2) + 1 \Leftrightarrow (m(n - 2) + 1)^2 \geq 0 \text{ для любых } m \text{ и } n.$$

№ 2.214. а) $3x^2 + y^2 + 8x + 4y - 2xy + 22 \geq 0$.

Рассматривая x как параметр, а y как переменную, найдем дискриминант квадратного трехчлена: $y^2 + 2(2 - x)y + 3x^2 + 8x + 22$.

$$\frac{D}{4} = (2 - x)^2 - (3x^2 + 8x + 22) = -2(x + 3)^2 \leq 0.$$

При положительном коэффициенте при y^2 это условие означает, что квадратный трехчлен принимает неотрицательное значение.

б) $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \geq 0$.

Рассматривая y как параметр, а x как переменную, найдем дискриминант квадратного трехчлена: $x^2 + 2(y + 1)x + 3y^2 + 6y + 3$.

$$\frac{D}{4} = (y + 1)^2 - (3y^2 + 6y + 3) = -2(y + 1)^2 \leq 0.$$

При положительном коэффициенте при x^2 это условие означает, что квадратный трехчлен принимает неотрицательное значение.

№ 2.215. а) $\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2 \geq \frac{ab + bc + ca}{3}$.

Умножив обе части неравенства на 2, получим:

$$\frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca}{9} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2}{9} \geq 0,$$

которое выполняется при всех значениях a, b, c .

б) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$.

Умножив обе части неравенства на 2, получим:

$(ab - bc)^2 + (ab - ca)^2 + (bc - ca)^2 \geq 0$, которое выполняется при всех a, b, c .

№ 2.216. а) $x + |x + 2| + |2x - 1| \geq 3$.

Согласно определению модуля раскроем левую часть неравенства, обозначив $y = x + |x + 2| + |2x - 1|$:

$$\begin{cases} x < -2 \\ y = -1 - 2x \end{cases} \cup \begin{cases} -2 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ y = -4x + 1 \end{cases}.$$

Из первого и третьего неравенства следует $y > 3$, а, следовательно, исходное неравенство справедливо.

б) $|x - 1| - |3x + 3| \leq 3 - |x|$.

Перепишем неравенство в виде:

$$y = |x - 1| - |3x + 3| + |x| \leq 3.$$

Раскрывая модули, получим:

$$\begin{cases} x < -1 \\ y = x + 4 \end{cases} \cup \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ y = -2 - 5x \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ y = -2 - 3x \end{cases} \cup \begin{cases} x > 1 \\ y = -x - 4 \end{cases} \Rightarrow y_{1\max} = 3;$$

$y_{2\max} = 3$; $y_{3\max} = -2$; $y_{4\max} = -5$. Все $y_{i\max} \leq 3$, поэтому исходное неравенство справедливо.

№ 2.217. Докажите, что при любых положительных значениях a, b, c выполняется неравенство:

а) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}}$.

Обозначим $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$; $y = \frac{1}{\sqrt{b}}$; $z = \frac{1}{\sqrt{c}}$, тогда:

$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0$, что выполняется при всех x, y, z .

б) $ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \geq 6abc$. Разделим обе части неравенства на $abc > 0$ и обозначим $x = \frac{a}{c}$; $y = \frac{b}{c}$: $x + y + \frac{y}{x} + \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{1}{y} - 6 =$

$$= \left(x + \frac{1}{x} - 2\right) + \left(y + \frac{1}{y} - 2\right) + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} - 2\right) = \frac{(x - 1)^2}{x} + \frac{(y - 1)^2}{y} + \frac{(x - y)^2}{xy} \geq 0.$$

Таким образом, исходное неравенство справедливо.

№ 2.218. а) Докажите, что если $a^2 + b^2 = 8$, то $|a + b| \leq 4$.

Перепишем уравнение в виде: $a^2 = 8 - b^2 \Rightarrow a_{\min} = -2\sqrt{2}$;

$$a_{\max} = 2\sqrt{2}.$$

Аналогично $b_{\min} = -2\sqrt{2}$; $b_{\max} = 2\sqrt{2}$.

$$a^2 + b^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = 8+2ab \\ -2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \leq b \leq 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow (8+2ab)_{\max} = 16 \Rightarrow |a+b| \leq 4.$$

б) Докажите, что если $a+b \geq 6$, то $a^2 + b^2 \geq 18$.

Обозначим: $x = a+b$; $y = a^2 + b^2$, тогда

$$y = 2a^2 - 2xa + x^2 \Rightarrow y_{\min} = y\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \geq 18.$$

Следовательно, $a^2 + b^2 \geq 18$.

Решите неравенство (2.219. – 2.230.):

№ 2.219. а) $\frac{(x^2 - 7x - 8)(x - 8)^3}{(x + 2)^2(5 - x)} \geq 0$.

Разложим на множители $x^2 - 7x - 8 = (x - x_1)(x - x_2) = (x - 8)(x + 1)$,

тогда $\frac{(x - 8)^4(x + 1)}{(x + 2)^2(5 - x)} \geq 0$.

Решая методом интервалов, получаем:



Звездочкой отмечены корни, которые встречаются четное число раз.

Ответ: $[-1; 5) \cup \{8\}$.

б) $\frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{(x + 7)^3(3 - x)} \leq 0$.

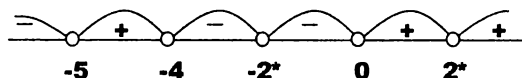
Ответ: $(-\infty; -7) \cup [0; 1) \cup (3; +\infty)$.

№ 2.220. а) $\frac{(x^2 + 2x - 8)(x^3 - 4x)}{x^2 + 7x + 10} > 0$.

Раскладывая на множители квадратные трехчлены, получаем:

$$\frac{(x + 4)(x - 2)^2 x(x + 2)}{(x + 2)(x + 5)} > 0. \text{ Решая методом интервалов, получим}$$

$$-5 < x < -4 \cup (0; 2) \cup (2; +\infty).$$



Ответ: $(-5; -4) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

$$\text{б) } \frac{(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 4)}{x^3 - 8} \geq 0.$$

Ответ: $[-2; 2] \cup [4; +\infty)$.

№ 2.221. а) $\frac{(2x^2 + 4x)(3x - x^2)}{(2x + 5)^3} \leq 0.$

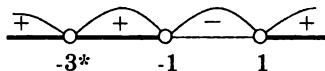
Ответ: $(-2,5; 2] \cup \{0\} \cup [3; +\infty)$.

$$\text{б) } \frac{(x+2)^4(x+3)^2}{x^2 + x - 2} > 0.$$

Раскладывая квадратный трехчлен на множители, получаем:

$$\frac{(x+2)^4(x+3)^2}{(x+2)(x-1)} > 0. \text{ Решая методом интервалов, получим:}$$

$$x < -3 \cup -3 < x < 1 \cup x > 1.$$



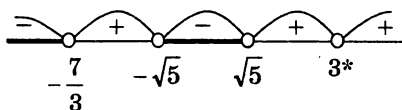
Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; +\infty)$.

№ 2.222. а) $\frac{3x+7}{5-x^2}(x-3)^2 > 0.$

Перепишем неравенство в виде: $\frac{3\left(x + \frac{7}{3}\right)(x-3)^2}{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})} < 0.$

Решая методом интервалов,

получим: $x < -\frac{7}{3} \cup (-\sqrt{5}; \sqrt{5}).$



Ответ: $\left(-\infty; -2\frac{1}{3}\right) \cup (-\sqrt{5}; \sqrt{5}).$

$$\text{б) } \frac{x^2 - 2x - 1}{(2x - 5)(x + 2)^2} \leq 0.$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}; 2,5).$

№ 2.223. а) $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1} \leq 1.$

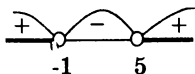
Ответ: $(-\infty; -3) \cup \{-1\} \cup (1; +\infty).$

$$\text{б) } \frac{2}{x-5} + 1 \geq \frac{2}{x+1}.$$

Переносим все члены влево и приводим к общему знаменателю,

получим: $\frac{x^2 - 4x + 7}{(x-5)(x+1)} \geq 0$.

Квадратный трехчлен $x^2 - 4x + 7 > 0$ при всех x , так как не имеет корней, тогда, решая методом интервалов, получим: $x < -1 \cup x > 5$.



Ответ: $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

№ 2.224. а) $\frac{(x-3)(2x+1)}{x} < \frac{(x+3)(x-1)}{x}$.

Переносим все члены влево, получаем:

$$\frac{x(x-7)}{x} < 0.$$

Решая методом интервалов, получаем: $x < 0 \cup 0 < x < 7$



Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 7)$.

б) $3x + \frac{x-1}{2x-1} \geq \frac{2x^2-1}{2x-1}$.

Ответ: $[0; 0,5) \cup (0,5; +\infty)$.

№ 2.225. а) $\frac{7}{3x-2-x^2} - \frac{3}{7x-4-3x^2} > 0$.

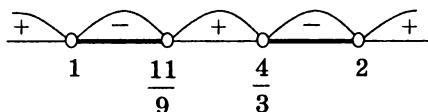
Найдем корни квадратных трехчленов:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 2.$$

$$3x^2 - 7x + 4 = 0 \Rightarrow x_3 = 1; x_4 = \frac{4}{3}. \text{ Тогда:}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)\left(x-\frac{4}{3}\right)} - \frac{7}{(x-1)(x-2)} &= \frac{-6 \cdot \left(x - \frac{11}{9}\right)}{(x-1)(x-2)\left(x-\frac{4}{3}\right)} > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{11}{9}\right)}{(x-1)(x-2)\left(x-\frac{4}{3}\right)} &< 0. \end{aligned}$$

Решая методом интервалов, получаем: $1 < x < \frac{11}{9} \cup \frac{4}{3} < x < 2$



Ответ: $\left(1; \frac{11}{9}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; 2\right)$.

$$\text{б) } \frac{1}{5x^2 - 3x - 2} + \frac{5}{1 - x^2} \leq 0.$$

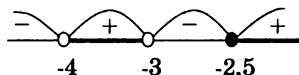
Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left[-0,4; \frac{3}{8}\right] \cup (1; +\infty)$.

№ 2.226. а) $\frac{(x+1)(x+2)}{x^2 + 7x + 12} \leq 1.$

Приведем к общему знаменателю и найдя корни квадратного трехчлена, получаем:

$$\frac{-4x - 10}{(x+3)(x+4)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x + 2,5}{(x+3)(x+4)} \geq 0.$$

Решая методом интервалов, получаем: $-4 < x < -3 \cup [-2,5; +\infty)$.



Ответ: $(-4; -3) \cup [-2,5; +\infty)$.

$$\text{б) } \frac{x^2 + 3x - 13}{(x+3)(x-2)} > 2.$$

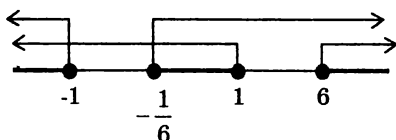
Ответ: $(-3; 2)$.

№ 2.227, а) $2 \leq \frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} \leq 9.$

Двойное неравенство равносильно системе двух неравенств:

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 1} \geq 0 \\ \frac{-6x^2 - 7x - 1}{x^2 + 1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-6) \geq 0 \\ (x+1)\left(x + \frac{1}{6}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \cup x \geq 6 \\ x \leq -1 \cup x \geq -\frac{1}{6} \end{cases} \quad \text{Нанесем}$$

на числовую ось:



Ответ: $(-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{6}; 1\right] \cup [6; +\infty)$.

$$б) 1 \leq \frac{5x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2} \leq 3.$$

Ответ: $\left[-1; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[1; \frac{5}{2}\right].$

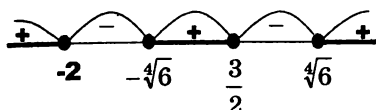
№ 2.228. а) $(x^2 - 5x + 3)(3 - x^3) < 0$

Ответ: $(1; \sqrt[3]{3}) \cup (1.5; +\infty).$

б) $(x^4 - 6)(6 - x - 2x^2) \leq 0.$

Разложим на множители: $(x - \sqrt[4]{6})(x + \sqrt[4]{6})(x^2 + \sqrt{6})(x + 2)\left(x - \frac{3}{2}\right) \geq 0.$

Решая методом интервалов, получаем: $x \leq -2 \cup -\sqrt[4]{6} \leq x \leq \frac{3}{2} \cup x \geq \sqrt[4]{6}$



Ответ: $(-\infty; -2] \cup [-\sqrt[4]{6}; 1.5] \cup [\sqrt[4]{6}; +\infty).$

№ 2.229. а) $(x^2 + 7x - 8)^2 + (x^3 + 2x - 3)^2 \leq 0.$

Данное неравенство выполняется только при условии, что:

$$\begin{cases} x^2 + 7x - 8 = 0 \\ x^3 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

Ответ: $\{1\}.$

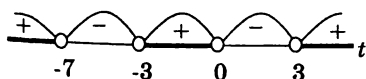
б) $(6 - x - x^2)^2 + (x^3 + x^2 - 7x + 2)^2 \leq 0.$

Ответ: $\{2\}.$

№ 2.230. а) $\frac{2}{2x^2 + x + 3} + \frac{1}{x - 1} - \frac{2}{2x + 3} + 1 > 0.$

Обозначим $2x^2 + x = t$, тогда $\frac{2}{t + 3} + \frac{5}{t - 3} + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{t(t + 7)}{(t - 3)(t + 3)} > 0.$

Решая методом интервалов, получаем:



В итоге имеем три интервала. Для первого из них:

$$2x^2 + x < -7 \Leftrightarrow 2x^2 + x + 7 < 0 \Rightarrow x = \emptyset.$$

Для второго: $\begin{cases} 2x^2 + x < 0 \\ 2x^2 + x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0.$

Для третьего: $2x^2 + x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2} \cup x > 1.$

Ответ: $(-\infty; -1,5) \cup (-0,5; 0) \cup (1; +\infty).$

б) $\frac{x^2}{4-x} + \frac{2x-8}{x^2} \geq 1.$

Ответ: $(-\infty; -4] \cup [2; 4).$

№ 2.231. Найдите сумму всех целочисленных решений неравенства.

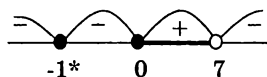
а) $\frac{x^3 + 2x^2 + 7}{7-x} \geq 1.$

Приведем к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{x(x^2 + 2x + 1)}{7-x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1)^2}{7-x} \geq 0.$$

Решая методом интервалов, получаем:

$$\begin{cases} 0 \leq x < 7 \Rightarrow N = \sum_{i=0}^6 i - 1 = 20 \\ x = -1 \end{cases}$$



Ответ: 21.

б) $\frac{x^3 + 17x}{x+8} \leq 2x.$

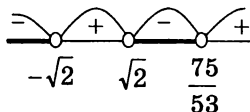
Ответ: 27.

№ 2.232. Найдите все такие x , при которых функция $f(x)$ принимает отрицательные значения.

а) $f(x) = (x^2 - 2)(53x - 75).$

$$(x^2 - 2)(53x - 75) < 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \frac{75}{53}) < 0.$$

Решая методом интервалов, получаем: $x < -\sqrt{2} \cup \sqrt{2} < x < \frac{75}{53}$



Ответ: $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \frac{75}{53}).$

б) $f(x) = (17x - 29)(x^2 - 3).$

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\frac{29}{17}; \sqrt{3}).$

№ 2.233. Найдите все значения x , при которых

а) график функции $y = 1 - \frac{4}{x-2}$ лежит ниже графика функции

$$y = \frac{5}{x^2 - 4x + 4}.$$

Ответ: $(1; 2) \cup (2; 7)$.

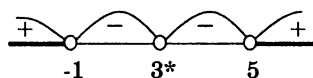
б) график функции $y = \frac{2}{x-3}$ лежит выше графика функции

$$y = \frac{8}{x^2 - 6x + 9} - 1.$$

Запишем условие в виде неравенства: $\frac{2}{x-3} > \frac{8}{x^2 - 6x + 9} - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-3)^2} > 0.$$

Решая методом интервалов, получаем:



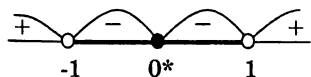
Ответ: $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

№ 2.234. Найдите все целые a , для которых выполняется неравенство

а) $f(a) \geq f(a+2)$ $f(x) = x - \frac{1}{x-1}$.

Имеем: $x - \frac{1}{x-1} \geq (x+2) - \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} \leq 0.$

Решая методом интервалов, получаем: $x = 0$



Ответ: $\{0\}$.

б) $f(a) \cdot f(a+2) < 0$, $f(x) = \frac{8}{x^2 - 1} - 1$.

Ответ: $\{-4; -2; 0; 2\}$.

Решите неравенство (2.235. – 2.242.):

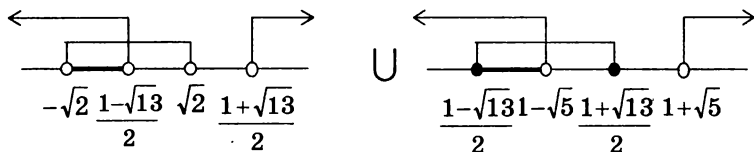
№ 2.235. а) $1 + x + |x^2 - x - 3| < 0$.

Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x < \frac{1-\sqrt{13}}{2} \cup x > \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x^2 - 2 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{1-\sqrt{13}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x^2 - 2x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ x < \frac{1-\sqrt{13}}{2} \cup x > \frac{1+\sqrt{13}}{2} \cup \begin{cases} \frac{1-\sqrt{13}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x < 1-\sqrt{5} \cup x > 1+\sqrt{5} \end{cases} \right.$$

Нанесем на числовую ось:



В итоге: $-\sqrt{2} < x < 1 - \sqrt{5}$.

Ответ: $(-\sqrt{2}; 1 - \sqrt{5})$.

б) $x^2 - 7 \geq |3x - 7|$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{-3 - \sqrt{65}}{2}\right) \cup (3; +\infty)$.

№ 2.236. а) $x^2 - 2x - 8 < 7|x - 4|$.

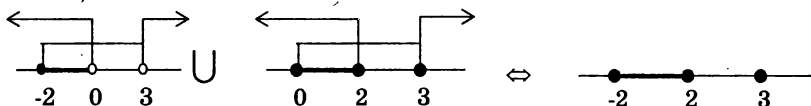
Ответ: $(-9; 4) \cup (4; 5)$.

б) $|x^2 - 3x| + 2x - 6 \leq 0$.

Неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x < 0 \cup x > 3 \\ x^2 - x - 6 \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \end{cases}$$

Решая методом интервалов, получаем:



Ответ: $[-2; 2] \cup \{3\}$.

№ 2.237. а) $1,5x - |x| + |2x - 4| \geq 4$.

Неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x < 0 \\ 0,5x \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -1,5x \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 2 \\ 2,5x \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \cup x \geq 3,2.$$

Ответ: $\{0\} \cup [3,2; +\infty)$.

б) $2x - 5 + 2|x - 3| < |x + 1|$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (0; 4)$.

№ 2.238. а) $|x - 2x^2| > 2x^2 - x$.

Неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x - 2x^2 < 0 \\ 2x^2 - x > 2x^2 - x \end{cases} \cup \begin{cases} x - 2x^2 \geq 0 \\ -2x^2 + x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

б) $|x^2 + 6x + 8| \leq -x^2 - 6x - 8$.

Ответ: $[-4; -2]$.

№ 2.239. а) $|x - 3| + |x + 1| \leq |\sqrt{5} - 3| + |\sqrt{5} + 1|$.

Неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x < -1 \\ -2x + 2 \leq 4 \end{cases} \cup \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ 4 \leq 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 3 \\ 2x - 2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x \leq 3.$$

Ответ: $[-1; 3]$.

б) $2|x| + |5 - 2\sqrt{7}| \geq 2\sqrt{7} + |5 - 2x|$.

Ответ: $[2,5; +\infty)$.

№ 2.240. а) $|x - 1 - x^2| \leq |3x - x^2 - 4|$.

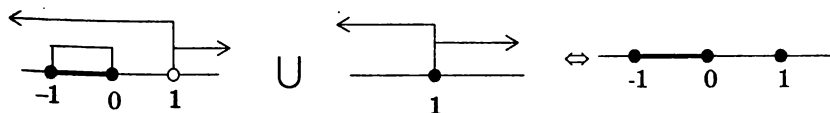
Ответ: $(-\infty; 1,5]$.

б) $|x^3 - 1| \leq 1 - x$.

Неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x < 1 \\ x^3 - x \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ x^3 + x - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x(x-1)(x+1) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)(x^2 + x + 2) \leq 0 \end{cases}.$$

Решая методом интервалов, получаем:



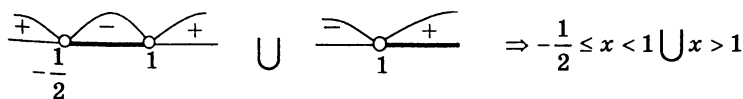
Ответ: $[-1; 0] \cup \{1\}$.

№ 2.241 а) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \geq 1$.

Неравенство равносильно объединению неравенств:

$$\frac{x+2}{x-1} \leq -1 \cup \frac{x+2}{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} \leq 0 \cup \frac{3}{x-1} \geq 0.$$

Решая методом интервалов, получаем:



Ответ: $(-0,5; 1) \cup (1; +\infty)$.

$$\text{б) } \left| \frac{2x-1}{x-2} \right| > 2.$$

Ответ: $(1,25; 2) \cup (2; +\infty)$.

№ 2.242. а) $\frac{2x^2+3}{x^2+x} + \left| \frac{4x^2+6}{x^2+x} \right| < 6.$

Неравенство равносильно системе неравенств:

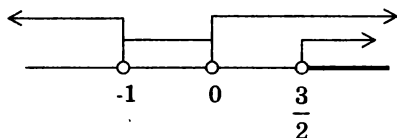
$$\begin{cases} \frac{4x^2+6}{x(x+1)} < 0 \\ \frac{-2x^2-3}{x(x+1)} < 6 \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{4x^2+6}{x(x+1)} \geq 0 \\ \frac{6x^2+9}{x(x+1)} < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) < 0 \\ \frac{8x^2+6x+3}{x(x+1)} > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x(x+1) > 0 \\ \frac{2x-3}{x(x+1)} > 0 \end{cases}.$$

Решая методом интервалов, получаем:

Ответ: $(1,5; +\infty)$.

$$\text{б) } \frac{5-|x|}{x^2+|x|-2} \geq \frac{|x|-5}{x^2-1}.$$

Ответ: $[-5; -1) \cup (1; 5]$.



№ 2.243. Найдите все целые a , удовлетворяющие условию:

$$\text{а) } \frac{a^2-7|a|+10}{a^2-6a+9} < 0.$$

Ответ: $\{-4; -3; 4\}$.

$$\text{б) } \frac{a^2+4a-5}{4-|a^2-5|} > 0.$$

Неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} a^2-5 < 0 \\ \frac{(a-1)(a+5)}{(a-1)(a+1)} > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a^2-5 \geq 0 \\ \frac{(a-1)(a+5)}{(a-3)(a+3)} < 0 \end{cases}.$$

Решая методом интервалов, получаем:



Из рисунка следует, что целые числа $-4; 0; 2$ удовлетворяют неравенству.

Ответ: $\{-4; 0; 2\}$.

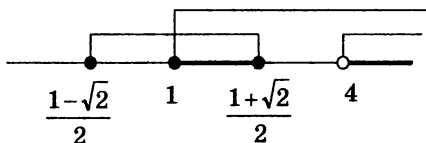
Решите систему неравенств (2.244. – 2.245.):

$$\text{№ 2.244. а) } \begin{cases} \frac{3x-2}{2} - \frac{x}{3} \geq \frac{2-x}{6} \\ x \geq \frac{1-3x^2}{x-4} \end{cases}$$

Перенеся все члены неравенств в одну сторону и приводя к общему знаменателю, получаем:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ \frac{4x^2 - 4x - 1}{x-4} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cup x > 4 \end{cases}$$

Нанесем на числовую ось:



Ответ: $\left[1; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right] \cup (4; +\infty)$.

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{x^2-7}{2x-5} > 1 \\ \frac{3x-2}{5} - \frac{6-x}{2} \geq 2x-7 \end{cases}$$

Ответ: $(1-\sqrt{3}; 2,5) \cup (1+\sqrt{3}; 4]$.

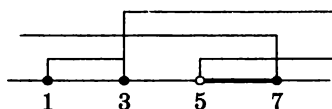
$$\text{№ 2.245. а) } \begin{cases} x \leq 3 - \frac{1}{x-1} \\ |x-1| < 4 \end{cases}$$

Ответ: $(-3; 1) \cup \{2\}$.

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \geq 0 \\ |5-x| \leq 2 \end{cases}$$

Раскрывая модуль и приводя к общему знаменателю, получаем:

$$\begin{cases} \frac{3x^2 - 12x + 9}{2(x-5)} \geq 0 \\ 5-x \geq -2 \\ 5-x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \cup x > 5 \\ x \leq 7 \\ x \geq 3 \end{cases}$$



Ответ: $\{3\} \cup (5; 7]$.

№ 2.246. Найдите все x , удовлетворяющие обоим условиям:

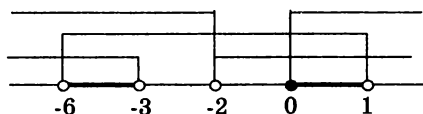
а) $|x^2 + 5x| < 6$ и $|x + 1| \geq 1$.

Раскрывая модуль, получаем:

$$\begin{cases} x^2 + 5x > -6 \\ x^2 + 5x < 6 \\ x + 1 \leq -1 \cup x + 1 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -3 \cup x > -2 \\ -6 < x < 1 \\ x \leq -2 \cup x \geq 0 \end{cases}$$

Нанесем на числовую ось:



Ответ: $(-6; -3) \cup [0; 1)$.

б) $|x + 1| < 3$ и $|x^2 - 4x| \geq 5$.

Ответ: $(-4; -1]$.

№ 2.247. а) Найдите все решения неравенства $\frac{x^2 - 4x}{x - 1} \leq 0$, для которых выполняется неравенство $(x^2 - 1)(3 - x) \geq 0$.

Запишем условие в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 4x}{x - 1} \leq 0 \\ (x^2 - 1)(3 - x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \cup (1; 4] \\ x \leq -1 \cup [1; 3] \end{cases} \Rightarrow x \leq -1 \cup (1; 3]$$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup (1; 3]$.

б) Среди решений неравенства $(x - 2)(x^2 - 2x + 1) \geq 0$ найдите такие, для которых выполняется неравенство $\frac{9 - x^2}{x + 2} \geq 0$.

Ответ: $\{1\} \cup [2; 3]$.

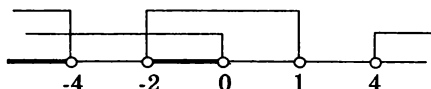
№ 2.248. Найдите все такие значения x , при которых

а) график каждой из функций $f(x) = x^2 - 3x$ и $q(x) = \frac{4 - x}{x + 2}$ лежит выше графика функции $y = x$.

Условие равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 3x > x \\ \frac{4 - x}{x + 2} > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 4) > 0 \\ \frac{(4 + x)(x - 1)}{x + 2} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \cup x > 4 \\ x < -4 \cup -2 < x < 1 \end{cases}$$

Нанесем на числовую ось:



Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-2; 0)$.

б) график каждой из функций $f(x) = \frac{5-x}{x-3}$ и $q(x) = x^2 + 8x$ лежит ниже графика функции $y = -x$.

Ответ: $(-9; 0)$.

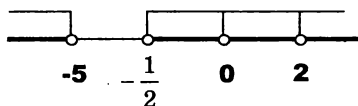
№ 2.249. Найдите все такие значения x , при которых значение хотя бы одной из данных функций:

а) $f(x) = x^2 + 5x + 3$; $q(x) = \frac{8+x}{2-x}$ больше 3.

Условие равносильно объединению неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + 5x + 3 > 3 \\ \frac{8+x}{2-x} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+5) > 0 \\ \frac{2x+1}{2-x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -5 \cup x > 0 \\ -\frac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$

Нанесем на числовую ось:



Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-\frac{1}{2}; 2)$.

б) $f(x) = 3x^2 - x + 2$; $q(x) = \frac{5-x}{x+2}$ меньше 2.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (0; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$.

Пусть $\max\{f(x), q(x)\}$ обозначает наибольшее из значений функций $f(x)$ и $q(x)$ для данного x , а $\min\{f(x), q(x)\}$ — наименьшее. Найдите все x , для которых выполняется соотношение (2.250. — 2.252.):

№ 2.250. а) $\max\left\{\frac{1}{x}; 5x - 4\right\} \geq x^2$.

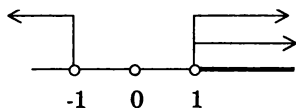
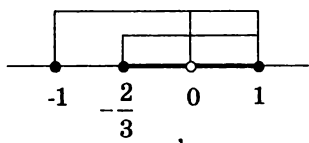
Ответ: $[0; 4]$.

б) $\min\left\{\frac{1}{x^2}; 3x^2 - 2\right\} \leq x$.

Выясним сначала, когда $\frac{1}{x^2} \geq 3x^2 - 2$. Обозначим $t = x^2$, тогда:

$$\begin{cases} t > 0 \\ \frac{3t^2 - 2t - 1}{t} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < t \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x < 0 \cup 0 < x \leq 1.$$

Тогда: $\begin{cases} -1 \leq x < 0 \cup 0 < x \leq 1 \\ 3x^2 - 2 \leq x \end{cases} \cup \begin{cases} x < -1 \cup x > 1 \\ \frac{1}{x^2} \leq x \end{cases}$



Ответ: $\left[-\frac{2}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

№ 2.251. а) $\min\{x; x^2 + 6x\} \geq 7$.

Выясним сначала, когда $|x| \geq x^2 + 6x$. Раскрывая модуль, получим:

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 7x \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 5x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -7 \leq x < 0 \cup x = 0. \text{ Тогда:}$$

$$\begin{cases} x < -7 \cup x > 0 \\ |x| \geq 7 \end{cases} \cup \begin{cases} -7 \leq x \leq 0 \\ x^2 + 6x - 7 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x < -7 \cup x \geq 7 \cup x = -7.$$

Ответ: $(-\infty; -7] \cup [7; +\infty)$.

б) $\max\{x; x^2 - 7x\} \leq 8$.

Ответ: $[-1; 8]$.

№ 2.252. а) $\min\{2x^2 - x - 4; x^2 + 3x + 1\} = 3x + 12$.

Ответ: $\{4; -\sqrt{11}\}$.

б) $\max\{x^2 + x - 5; -2x^2 + 7x + 4\} = x - 1$.

Выясним сначала, когда $x^2 + x - 5 \geq -2x^2 + 7x + 4$. Получаем:

$3x^2 - 6x - 9 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \cup x \geq 3$. Тогда:

$$\begin{cases} x \leq -1 \cup x \geq 3 \\ x^2 + x - 5 = x - 1 \end{cases} \cup \begin{cases} -1 < x < 3 \\ -2x^2 + 7x + 4 = x - 1 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \cup x = \frac{3 - \sqrt{19}}{2}.$$

Ответ: $\left\{-2; \frac{3 - \sqrt{19}}{2}\right\}$.

Найдите область допустимых значений функции (2.253. – 2.254.):

№ 2.253. а) $\sqrt{24 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 20}}$.

Получаем систему неравенств:

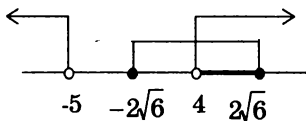
$$\begin{cases} 24 - x^2 \geq 0 \\ x^2 + x - 20 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2\sqrt{6})(x + 2\sqrt{6}) \leq 0 \\ (x + 5)(x - 4) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\sqrt{6} \leq x \leq 2\sqrt{6} \\ x < -5 \cup x > 4 \end{cases}.$$

Нанесем на числовую ось:

Ответ: $(4; 2\sqrt{6})$.

$$б) y = \sqrt{x^2 - 2x - 7} \cdot \sqrt{4 - x}.$$

Ответ: $(-\infty; 1 - 2\sqrt{2}] \cup [1 + 2\sqrt{2}; 4]$.



№ 2.254. а) $y = \frac{\sqrt{2x^2 - 5x - 3}}{x - 2 + |2 - x|}.$

Ответ: $[3; +\infty)$.

$$б) y = \sqrt{|x^2 - 6|} - x^2 - \frac{1}{9 - 9x + 2x^2}.$$

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} |x^2 - 6| - x^2 \geq 0 \\ 9 - 9x + 2x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{6} < x < \sqrt{6} \\ (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \leq 0 \\ x \neq \frac{3}{2}; x \neq 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq -\sqrt{6} \cup x \geq \sqrt{6} \\ -6 \geq 0 \\ x \neq \frac{3}{2}; x \neq 3 \end{cases}.$$

Вторая система не имеет решений, а из первой получаем:

$$-\sqrt{3} \leq x < \frac{3}{2} \cup \frac{3}{2} < x \leq \sqrt{3}.$$

Ответ: $[-\sqrt{3}; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; \sqrt{3}]$.

Решите неравенство (2.255. – 2.262.):

№ 2.255. а) $(x - 1)\sqrt{6 + x - x^2} \geq 0.$

Неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 6 + x - x^2 > 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ 6 + x - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)(x + 2) < 0 \\ x \geq 1 \\ x = -2 \cup x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < 3 \\ x \geq 1 \\ x = -2 \cup x = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \cup x = -2.$$

Ответ: $\{-2\} \cup [1; 3]$.

$$б) (16 - x^2)\sqrt{3 - x} \leq 0.$$

Ответ: $(-\infty; -4] \cup \{3\}$.

№ 2.256. а) $(x^2 + 5x - 6)^2 \sqrt{x^3 + 200} \leq 0.$

Ответ: $\{1; -2\sqrt[3]{25}\}$.

$$6) (x^2 - 8x + 15)^2 \sqrt{x^5 - 300} \leq 0.$$

Неравенство равносильно системе:

$$\left[\begin{cases} x^2 - 8x + 15 = 0 \\ x^5 - 300 > 0 \\ x^5 - 300 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} x = 3 \cup x = 5 \\ x > \sqrt[5]{300} \\ x = \sqrt[5]{300} \end{cases} \Rightarrow x = 5 \cup x = \sqrt[5]{300} \right.$$

Ответ: $\{5; \sqrt[5]{300}\}$.

$$\text{№ 2.257. а) } (x+1)\sqrt{\frac{x+4}{x+7}} \leq 0.$$

Неравенство равносильно системе:

$$\left[\begin{cases} \frac{x+4}{x+7} > 0 \\ x+1 \leq 0 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} x < -7 \cup x > -4 \\ x \leq -1 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow x < -7 \cup -4 \leq x \leq -1.$$

Ответ: $(-\infty; -7) \cup [-4; -1]$.

$$6) (x+3) \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{15-4x}} \geq 0.$$

Ответ: $[-3; 3,75]$.

$$\text{№ 2.258. а) } \frac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7} \leq \frac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}.$$

Неравенство равносильно системе:

$$\left[\begin{cases} \frac{x-2}{(2x-7)(x-5)} \geq 0 \\ x^2 + x - 12 < 0 \\ x^2 + x - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} 2 \leq x < 3,5 \cup x > 5 \\ -4 < x < 3 \\ x = -4 \cup x = 3 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq x \leq 3 \cup x = -4.$$

Ответ: $\{-4\} \cup [2; 3]$.

$$6) \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9} \leq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}.$$

Ответ: $[-4; 1] \cup \{2\}$.

$$\text{№ 2.259. а) } \sqrt{7-|3x-1|} < 2.$$

Ответ: $\left[-2; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right]$.

$$6) \sqrt{|2x+3|-2} \leq 1.$$

Неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 2 \\ |2x+3| \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 \leq -2 \cup 2x+3 \geq 2 \\ -3 \leq 2x+3 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3 \geq -3 \\ 2x+3 \leq -2 \cup \begin{cases} 2x+3 \geq 2 \\ 2x+3 \leq 3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq -2,5 \\ -0,5+3 \leq 0 \end{cases}.$$

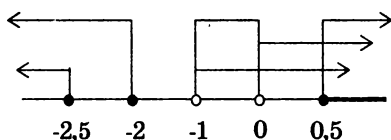
Ответ: $[-3; -2,5] \cup [-0,5; 0]$.

№ 2.260. а) $\sqrt{2 + \frac{3}{x+1}} \geq \sqrt{\frac{2}{x}}.$

Неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 2 + \frac{3}{x+1} \geq 0 \\ \frac{2}{x} \geq 0 \\ 2 + \frac{3}{x+1} \geq \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2,5}{x+1} \geq 0 \\ x > 0 \\ \frac{2(x+2)(x-0,5)}{x(x+1)} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -2,5 \cup x > -1 \\ x > 0 \\ x \leq -2 \cup -1 < x < 0 \cup x \geq 0,5 \end{cases}.$$

Нанесем на числовую ось:



Ответ: $[0,5; +\infty)$.

б) $\sqrt{1 + \frac{2}{x-2}} > \sqrt{\frac{6}{x-1}}.$

Ответ: $(2; 3) \cup (4; +\infty)$.

№ 2.261. а) $\frac{x}{2x-3} + 3\sqrt{\frac{x}{2x-3}} \geq 4.$

Обозначим $t = \sqrt{\frac{x}{2x-3}} \geq 0$, тогда: $\begin{cases} t^2 + 3t - 4 \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow t \geq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x}{2x-3}} \geq 1.$$

Полученное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \frac{x}{2x-3} \geq 0 \\ \frac{x}{2x-3} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{2x-3} \leq 0 \Rightarrow \frac{3}{2} < x \leq 3.$$

Ответ: $(1,5; 3]$.

$$\text{б) } 4\sqrt{\frac{2}{x}+3}+5 \leq \frac{3x+2}{x}.$$

$$\text{Ответ: } \left(0; \frac{1}{11}\right].$$

$$\text{№ 2.262. а) } \frac{4-2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1} > 0.$$

$$\text{Обозначим } t = \sqrt{x+1} \geq 0, \text{ тогда: } \begin{cases} \frac{2-t}{t+1} > 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < t < 2 \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+1} < 2.$$

$$\text{Неравенство равносильно системе неравенств: } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1 < 4 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 3.$$

$$\text{Ответ: } [-1; 3).$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{5-x}-3} \leq 0.$$

$$\text{Ответ: } (-4; 1].$$

Найдите все такие x , при которых функция $f(x)$ принимает отрицательные значения (2.263. – 2.264.):

$$\text{№ 2.263. а) } f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{2-x}-1}.$$

Обозначим $t = \sqrt{2-x} \geq 0$ и запишем условие в виде:

$$\begin{cases} \frac{6-t^2}{t-1} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2-x} < 1 \\ \sqrt{2-x} > \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x > 1 \cup x < -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 2 \\ x < -4 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -4) \cup (1; 2].$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-(x+1)}{x-2}.$$

$$\text{Ответ: } (-1; 0) \cup (2; +\infty].$$

$$\text{№ 2.264. а) } f(x) = \frac{x^2-6x-7}{\sqrt{(2-\sqrt{5})x-2\sqrt{5}+5}}.$$

$$\text{Ответ: } (1; \sqrt{5}).$$

$$б) f(x) = \frac{8x + 9 - x^2}{\sqrt{(\sqrt{6} - 3)x - 6 + 3\sqrt{6}}}.$$

Перепишем неравенство в виде:

$$f(x) = \frac{8x + 9 - x^2}{\sqrt{(3 - \sqrt{6})(\sqrt{6} - x)}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \cup x > 9 \\ x < \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow x < -1.$$

Ответ: $(-\infty; -1)$.

Решите неравенство (2.265. – 2.268.):

№ 2.265. а) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) < 180$.

Обозначим $t = x - 3$, тогда: $(t^2 + 2 + 3t)(t^2 + 2 - 3t) < 180 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (t^2 + 2)^2 - 9t^2 < 180 \Leftrightarrow t^4 - 5t^2 - 176 < 0 \Rightarrow t^2 < 16 \Rightarrow -4 < t < 4 \Rightarrow -1 < x < 7$.

Ответ: $(-1; 7)$.

б) $30x^2 > (x - 2)(x - 3)(x^2 - 10x + 24)$.

Ответ: $(1; 12)$.

№ 2.266. а) $\frac{|x + 3| - 2}{x^2 + 8x + 15} \geq 0$.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; -3) \cup [-1; +\infty)$.

б) $\frac{|x| + 2x - 3}{x^2 - 7x + 6} < 0$.

Неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x < 0 \\ \frac{x - 3}{(x - 1)(x - 6)} < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{x - 1}{(x - 1)(x - 6)} < 0 \end{cases} \Rightarrow x < 0 \cup 0 \leq x < 1 \cup 1 < x < 6.$$

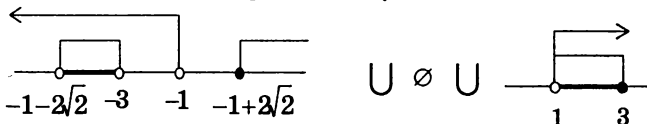
Ответ: $(-\infty; 1)(1; 6)$.

№ 2.267. а) $\frac{4}{|x + 1| - 2} \geq |x - 1|$.

Неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x < -1 \\ \frac{x^2 + 2x - 7}{x + 3} \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 1 \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} \leq 0 \end{cases}$$

Решая методом интервалов, получаем:



Ответ: $[-1 - 2\sqrt{2}; -3) \cup (1; 3]$.

$$6) \frac{7}{|x-1|-3} \geq |x+2|.$$

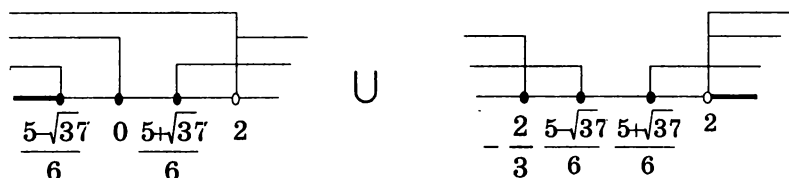
$$\text{Ответ: } [-2 - \sqrt{7}; -2) \cup (4; 5].$$

$$\text{№ 2.268. а) } \sqrt{x^2 - 4x + 4} + (\sqrt{3x^2 - 5x - 1})^2 \geq 1.$$

Неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} |x-2| + 3x^2 - 5x - 1 \geq 1 \\ 3x^2 - 5x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x(x-2) \geq 0 \\ 3x^2 - 5x - 1 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 2 \\ 3x^2 - 4x - 4 \geq 0 \\ 3x^2 - 5x - 1 \geq 0 \end{cases}.$$

Решая методом интервалов, получаем:



$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{5 - \sqrt{37}}{6}\right] \cup [2; +\infty).$$

$$6) \sqrt{x^2 - 6x + 9} + (\sqrt{4x^2 - x - 2})^2 \geq 3.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{33}}{8}\right] \cup [1; +\infty).$$

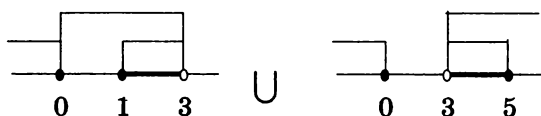
№ 2.269. Найдите все значения a , при которых:

а) ордината точки графика функции $y = |x|$ с абсциссой a не превосходит ординаты точки графика функции $y = \frac{2x}{|x-3|}$, имеющей такую же абсциссу.

Условие равносильно неравенству:

$$|a| \leq \frac{2a}{|a-3|} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a < 3 \\ \frac{a(a-1)}{a-3} \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a > 3 \\ \frac{a(a-5)}{a-3} \leq 0 \end{cases}.$$

Решая методом интервалов, получаем:



$$\text{Ответ: } [1; 3) \cup (3; 5] \cup \{0\}.$$

б) ордината точки графика функции $y = \frac{2-x^2}{|x|}$ с абсциссой a не меньше ординаты точки графика функции $y = |x+3|$, имеющей такую же абсциссу.

Ответ: $\left[-\frac{2}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

№ 2.270. а) A, B, C — точки с одинаковой абсциссой a , принадлежащие графикам функций $y = \frac{2x}{x-2}$; $y = 8-x$ и $y = \frac{7}{x}$ соответственно. Найдите все a , при которых точка C лежит на отрезке AB , не совпадая ни с одним из его концов.

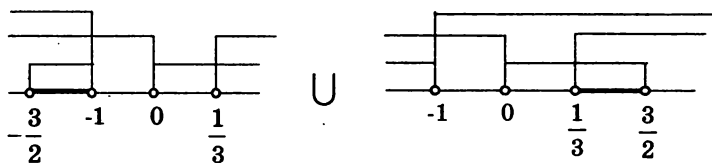
Ответ: $(1; 2) \cup (7; +\infty)$.

б) M, N, P — точки с одинаковой абсциссой b , принадлежащие графикам функций $y = |x+1|$; $y = \frac{2}{x}$ и $y = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ соответственно. Найдите все b , при которых точка P лежит вне отрезка MN , имея при этом ординату большую, чем точка M .

Условие равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{b}\right) > |b+1| \\ \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{b}\right) > \frac{2}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < -1 \\ \frac{(b+1)(2b+3)}{2b} > 0 \\ \frac{1-3b}{2b} < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} b \geq -1 \\ \frac{(b+1)(3-2b)}{2b} > 0 \\ \frac{1-3b}{2b} < 0 \end{cases}.$$

Решая методом интервалов, получаем:



Ответ: $\left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right)$.

№ 2.271. Найдите все целочисленные a , для которых:

а) не выполняется неравенство $2a^2 + 2a + 3 - \frac{21}{a^2 + a + 1} \geq 0$.

Условие равносильно выполнению неравенства:

$$2(a^2 + a) + 3 - \frac{21}{a^2 + a + 1} < 0.$$

Обозначим $t = a^2 + a$, тогда:

$$\frac{2t^2 + 5t - 18}{t + 1} < 0 \Rightarrow t < -\frac{9}{2} \cup -1 < t < 2 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + a + \frac{9}{2} < 0 \\ a^2 + a + 1 > 0 \\ a^2 + a - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow -2 < a < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = -1; 0.$$

Ответ: $\{-1; 0\}$.

б) не выполняется неравенство $a(a+2) + \frac{1}{a}\left(2 + \frac{1}{a}\right) < 6$.

Ответ: $\{-1; -2; -3\}$.

№ 2.272. Найдите сумму длин интервалов, на которых выполняется неравенство:

а) $x^2 - x < \frac{36}{x^2 - x}$.

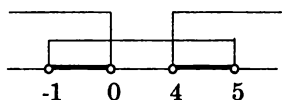
Ответ: $\{4\}$.

б) $1 + 4x - x^2 > \frac{20}{4x - x^2}$.

Обозначим $t = 4x - x^2$, тогда:

$$1 + t > \frac{20}{t} \Leftrightarrow \frac{(t+5)(t-4)}{t} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x - x^2 > -5 \\ 4x - x^2 < 0 \end{cases} \cup 4x - x^2 > 4.$$

Решая методом интервалов, получаем:



$$\Rightarrow L = 1 + 1 = 2$$

Ответ: $\{2\}$.

№ 2.273. а) Для того, чтобы выполнялось неравенство $a^2 - 3a - 70 < 0$, достаточно, чтобы $\frac{12}{a+5} > 1$.

Достаточность условия означает, что все решения второго неравенства должны содержаться в решениях первого неравенства.

Решение первого неравенства: $(a+7)(a-10) < 0 \Rightarrow -7 < a < 10$.

Решение второго неравенства: $\frac{7-a}{a+5} > 0 \Rightarrow -5 < a < 7$.

Из сравнения следует, что решения второго неравенства содержатся в решениях первого неравенства, что требовалось доказать.

б) Для того, чтобы выполнялось неравенство $3a^2 - a - 4 > 0$, необходимо, чтобы $\frac{3}{1-a} < 2$.

Необходимость условия означает, что все решения первого неравенства содержатся в решениях второго неравенства.

Решение первого неравенства: $a < -1 \cup a > \frac{4}{3}$.

Решение второго неравенства: $\frac{1+2a}{1-a} < 0 \Rightarrow a < -\frac{1}{2} \cup a > 1$.

Из сравнения следует, что решения первого неравенства содержатся в решениях второго неравенства, что требовалось доказать.

№ 2.274. а) Неравенство $5x^2 - x - 4 < 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\frac{9x+9}{1-x} > 1$.

Решение первого неравенства: $-\frac{4}{5} < x < 1$.

Решение второго неравенства: $\frac{10x+8}{1-x} > 0 \Rightarrow -\frac{4}{5} < x < 1$.

Поскольку решения совпадают, то утверждение доказано.

б) Неравенство $\frac{5x}{2x-3} > 1$ выполняется тогда и только тогда,

когда $2x^2 - x - 3 > 0$.

Решение первого неравенства: $\frac{3x+3}{2x-3} > 0 \Rightarrow x < -1 \cup x > \frac{3}{2}$.

Решение второго неравенства: $x < -1 \cup x > \frac{3}{2}$.

Поскольку решения совпадают, то утверждение доказано.

№ 2.275. а) Для того, чтобы выполнялось неравенство $\frac{4}{x^2+x+2} \leq 2$, необходимо и достаточно, чтобы $x^4 + x^3 \geq 0$.

Решение первого неравенства: $\frac{2x^2+2x}{x^2+x+2} \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \cup x \geq 0$.

Решение второго неравенства: $x^3(x+1) \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \cup x \geq 0$.

Поскольку решения совпадают, то утверждение доказано.

б) Для того, чтобы выполнялось неравенство $x^4 + 3x^3 \leq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{5}{x^2+3x+5} \leq 1$.

Решение первого неравенства: $x^3(x+1) \leq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 0$.

Решение второго неравенства: $\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 3x + 5} \geq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 0$.

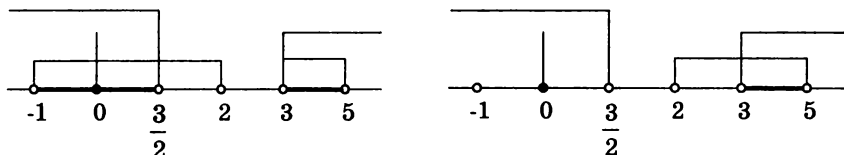
Поскольку решения совпадают, то утверждение доказано.

№ 2.276. а) Найдите все такие x , при которых выполняются ровно два неравенства из трех: $\frac{1}{x-2} - \frac{6}{x-5} > 1$; $\frac{x^2}{x-3} \geq 0$; $2x-1 < \frac{4}{3}x$.

Последовательно получаем: $\frac{1}{x-2} - \frac{6}{x-5} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-2)(x-5)} < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 < x < 5. \quad \frac{x^2}{x-3} \geq 0 \Rightarrow x = 0 \cup x > 3. \quad 2x-1 < \frac{4}{3}x \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}.$$

Нанесем решения на числовую ось:



Ответ: $(3; 5) \cup \{0\}$.

б) Найдите все такие x , при которых выполняется ровно одно неравенство из трех: $\frac{3}{x-3} + 1 > \frac{1}{6-x-x^2}$; $\frac{2}{7}x + 1 \geq 0$; $\frac{1}{|x-2|+1} > \frac{1}{3}$.

Ответ: $(-\infty; -3.5) \cup [-2; 0]$.

№ 2.277. Найдите все такие x , при которых

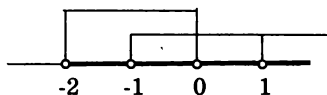
а) выполняется хотя бы одно из двух неравенств:

$$\frac{3x-1}{x+1} < x; \quad |x-2| > |3x+2|.$$

Последовательно получаем:

$$\frac{3x-1}{x+1} < x \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x+1} > 0 \Rightarrow -1 < x < 1 \cup x > 1.$$

$$|x-2| > |3x+2| \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{2}{3} \\ x > -2 \end{cases} \cup \begin{cases} -\frac{2}{3} \leq x \leq 2 \\ x < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < 0.$$



Нанесем на числовую ось:

Ответ: $(-2; 1) \cup (1; +\infty)$.

б) Одно из двух неравенств: $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{2-x} < 0$ и $\sqrt{\frac{x+3}{2x-1}} > 2$ верно, а другое — нет.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup (2; 4)$.

№ 2.278. а) Найдите все решения неравенства $\frac{12x-15}{2x^2+x} \leq 1$, не являющиеся одновременно решениями неравенства $(x-|2x-3|)(3-x) \leq 0$.

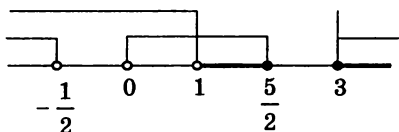
Для первого неравенства: $\frac{12x-15}{2x^2+x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2-11x+15}{2x^2+x} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)\left(x-\frac{5}{2}\right)}{x\left(x+\frac{1}{2}\right)} \geq 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2} \cup 0 < x \leq \frac{5}{2} \cup x \geq 3.$$

Для второго неравенства: $(x-|2x-3|)(3-x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ (x-1)(x-3) \geq 0 \end{cases} \cup$

$$\cup \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ (x-3)^2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x < 1 \cup x = 3.$$

Нанесем решения на числовую ось:



Ответ: $(1; 2.5] \cup (3; +\infty)$.

б) Найдите все x , при которых определены левые и правые части обоих неравенств: $\frac{2}{2x^2-9x+15} \geq \frac{1}{x}$ и $\frac{|x-1|}{9-x^2} > 0$, но ни одно из двух неравенств не выполняется.

Ответ: $\{1\} \cup (3; +\infty)$.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ. ДЕЛИМОСТЬ. ИНДУКЦИЯ

№ 2.301. Найдите число, если:

а) 25% его равны $\frac{(81,624 : 4,8 - 4,505)^2 + 125 \cdot 0,75}{\left((0,44^2 : 0,88 + 3,53)^2 - 2,75^2\right) : 0,52}$.

Вычислим выражение: $\frac{\frac{625}{4} + \frac{375}{4}}{\left(\frac{225}{16} - \frac{121}{16}\right) \cdot \frac{100}{52}} = \frac{250}{\left(\frac{25}{2}\right)} = 20$. Составим

пропорцию: $\begin{matrix} 20 & \text{—} & 25\% \\ x & \text{—} & 100\% \end{matrix} \Rightarrow x = 80$

Ответ: 80.

б) 12,5% его равны $\frac{\left((5,2^2 : 2,6 + 8,1)^2 - 6,5^2\right) : 0,025}{(60,192 : 2,4 - 1,08)^2 - 0,24 \cdot 1400}$.

Ответ: 400.

№ 2.302. Найдите положительное число, если:

а) 45% от него составляют столько же, сколько составляют 20% от числа, ему обратного.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

б) 27% от него равны 90% от его квадрата. Обозначим это число $x > 0$. Тогда: $0,27x = 0,9x^2 \Leftrightarrow x(10x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0,3$.

Ответ: 0,3.

№ 2.303. Вычислите без использования микрокалькулятора:

а) $16,678 \cdot 16,886 - 16,88 \cdot 16,884$.

$$16,678 \cdot 16,886 - 16,88 \cdot 16,884 = (16,884 - 0,006) \cdot 16,886 - (16,886 - 0,006) \cdot 16,884 = -0,006 \cdot 0,002 = -1,2 \cdot 10^{-5}.$$

Ответ: $-1,2 \cdot 10^{-5}$.

б) $127,07 \cdot 127,19 - 127,06 \cdot 127,2$

Ответ: $1,3 \cdot 10^{-3}$.

№ 2.304. Сравните значения выражений, не пользуясь микрокалькулятором:

а) 191^6 и $188 \cdot 189 \cdot 190 \cdot 192 \cdot 193 \cdot 194$.

Ответ: первое больше.

б) $27894^2 + 1618^2$ и $27895^2 + 1617^2$.

Найдем разность этих чисел:

$$(27894^2 + 1618^2) - ((27894 + 1)^2 + (1618 - 1)^2) = -2 \cdot 27894 + 2 \cdot 1618 - 2 = \\ = 2 \cdot (1617 - 27894) < 0.$$

Ответ: первое меньше.

№ 2.305. Вычислите $\sqrt[3]{p}$, если:

а) p — среднее арифметическое чисел A и B , где

$$A = \frac{158^2 + 158 \cdot 185 + 185^2}{158 + 185}, \quad B = \frac{158^2 - 158 \cdot 185 + 185^2}{185 - 158}$$

Ответ: $\frac{185}{21}$.

б) p — среднее гармоническое чисел A и B , где

$$A = \frac{288 + 224}{288^2 + 288 \cdot 224 + 224^2}, \quad B = \frac{288 - 224}{288^2 - 288 \cdot 224 + 224^2}.$$

(Средним гармоническим двух положительных чисел a и b называется x такое, что $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$).

Умножим числитель и знаменатель в A на $(288 - 224)$, в B на

$$(288 + 224), \quad \text{тогда} \quad A = \frac{288^2 - 224^2}{288^3 - 224^3}; \quad B = \frac{288^2 - 224^2}{288^3 + 224^3} \Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \\ = \frac{288^3 - 224^3 + 288^3 + 224^3}{288^2 - 224^2} = \frac{2 \cdot 288^3}{288^2 - 224^2} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{288^3}{288^2 - 224^2} = \frac{288^3}{32^3} \Rightarrow \\ \Rightarrow p = \frac{1}{9}.$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби (2.306. — 2.307.):

№ 2.306. а) $\frac{10}{\sqrt{5} - \sqrt{10} + \sqrt{20} + \sqrt{40} - \sqrt{80}}.$

Запишем в виде:

$$\frac{10}{\sqrt{5} - \sqrt{10} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{10} - 4\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{10} - \sqrt{5}} = \frac{10(\sqrt{10} + \sqrt{5})}{10 - 5} = 2(\sqrt{10} + \sqrt{5})$$

Ответ: $2(\sqrt{10} + \sqrt{5}).$

б) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{6} - \sqrt{24} - \sqrt{48} + \sqrt{108}}.$

Ответ: $-\frac{2 + \sqrt{2}}{3}.$

№ 2.307. а) $\frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1}$.

Ответ: $\frac{\sqrt[3]{5} - 1}{4}$.

б) $\frac{1}{\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3} + 4}$.

Запишем выражение в виде: $\frac{1}{(\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3} + 4)} \cdot \frac{(\sqrt[3]{3} + 2)}{(\sqrt[3]{3} + 2)} = \frac{\sqrt[3]{3} + 2}{11}$.

Ответ: $\frac{\sqrt[3]{3} + 2}{11}$.

Упростите (2.308. – 2.309.):

№ 2.308. а) $\sqrt{63} - 3\sqrt{1,75} - 0,5\sqrt{343} + \sqrt{112}$.

Преобразуем к виду: $3\sqrt{7} - \frac{3}{2}\sqrt{7} - 3,5\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$.

Ответ: $2\sqrt{7}$.

б) $\sqrt{1,25} + \sqrt{80} - \frac{1}{14}\sqrt{245} - \sqrt{180}$.

Ответ: $-2\sqrt{5}$.

№ 2.309. а) $\frac{1 - \sqrt{10}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} + \frac{7}{2\sqrt{2} + 1} - (11 - 5\sqrt{5})(2 + \sqrt{5})$.

Ответ: 2.

б) $2\sqrt{3} + 0,25(\sqrt{21} - 5)(\sqrt{7} + 3\sqrt{3}) + \frac{2\sqrt{7} - 4}{1 + \sqrt{7}}$.

Перемножая, получаем:

$$2\sqrt{3} + \frac{1}{4}(7\sqrt{3} - 5\sqrt{7} + 9\sqrt{7} - 15\sqrt{3}) - \frac{2\sqrt{7} - 4 - 14 + 4\sqrt{7}}{6} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7} -$$

$$-\sqrt{7} + 3 = 3.$$

Ответ: 3.

№ 2.310. Пусть $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = 0,5(a+b+c)$.

Найдите S , если:

а) $a = \sqrt{5}$; $b = 2$; $c = \sqrt{6}$.

Подставляя получим: $p = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{6} + 2}{2}$; $p - a = \frac{\sqrt{6} + 2 - \sqrt{5}}{2}$;

$$p - b = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{6} - 2}{2}; \quad p - c = \frac{\sqrt{5} + 2 - \sqrt{6}}{2} \Rightarrow p \cdot (p - b) \cdot (p - a) \cdot (p - c) = \\ = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{6})^2 - 4}{4} \cdot \frac{4 - (\sqrt{6} - \sqrt{5})^2}{4} = \frac{(7 + 2\sqrt{30})(2\sqrt{30} - 7)}{16} = \frac{71}{16} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{71}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{71}}{4}$.

б) $a = 3$; $b = \sqrt{10}$; $c = 2\sqrt{2}$.

№ 2.311. Найдите a^2 и a , если

а) $a = \sqrt{15 - 4\sqrt{14}} - \sqrt{15 + 4\sqrt{14}}$

Ответ: 28; $-2\sqrt{7}$.

б) $a = \sqrt{22 - 4\sqrt{30}} - \sqrt{22 + 4\sqrt{30}}$.

Преобразуем к виду: $\sqrt{(2\sqrt{3} - \sqrt{10})^2} - \sqrt{(2\sqrt{3} + \sqrt{10})^2} = -2\sqrt{10}$.

Ответ: 40; $-2\sqrt{10}$.

№ 2.312. Сравните значения выражений:

а) $\sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$ и $\frac{1}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$.

Упростим сначала: $\sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = \sqrt[3]{(\sqrt{2} - 1)^3} = \sqrt{2} - 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1.$$

Ответ: равны.

б) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ и $\sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10}$.

Ответ: равны.

№ 2.313. а) Докажите, что число $2 - \sqrt{3}$ является корнем уравнения $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$.

Запишем уравнение в виде: $(x - 1)(x^2 - 4x + 1) = 0$. Его корни: $x_1 = 1$; $x_2 = 2 + \sqrt{3}$; $x_3 = 2 - \sqrt{3}$, что требовалось доказать.

б) Докажите, что число $3 - \sqrt{2}$ не является корнем уравнения $x^3 - 7x^2 - 7x + 1 = 0$.

Запишем уравнение в виде: $(x+1)(x^2 - 8x + 1) = 0$. Подставляя, имеем: $(3 - \sqrt{2})^2 - 8(3 - \sqrt{2}) + 1 = 2\sqrt{2} - 12 \neq 0$, что требовалось доказать.

№ 2.314. а) Пусть $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - x - 7$. Покажите, что $f(2 + \sqrt{3}) + f(2 - \sqrt{3})$ — целое число.

$$\begin{aligned} \text{Перепишем } f(x) \text{ в виде: } f(x) &= 3x^3 - 3x^2 + 7x^2 - 7 + x^2 - x = \\ &= (x-1)(3x^2 + 8x + 7), \text{ тогда } f(2 + \sqrt{3}) = (1 + \sqrt{3})(3(2 + \sqrt{3})^2 + 8(2 + \sqrt{3}) + 7) = \\ &= (1 + \sqrt{3})(44 + 20\sqrt{3}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2 - \sqrt{3}) &= (1 - \sqrt{3})(3(2 - \sqrt{3})^2 + 8(2 - \sqrt{3}) + 7) = (1 - \sqrt{3})(44 - 20\sqrt{3}), \text{ от-} \\ \text{куда: } f(2 + \sqrt{3}) + f(2 - \sqrt{3}) &= 88 + 120 = 208. \end{aligned}$$

б) Пусть $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x - 3$. Покажите, что $\frac{f(3 + \sqrt{2}) + f(3 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}}$ — целое число.

Вычислим по отдельности $q(3 + \sqrt{2}) - q(3 - \sqrt{2})$ для x^3 , x^2 и x :

$$\begin{aligned} (3 + \sqrt{2})^2 - (3 - \sqrt{2})^2 &= 2\sqrt{2} \cdot 29; \quad (3 + \sqrt{2})^2 - (3 - \sqrt{2})^2 = 2\sqrt{2} \cdot 6; \quad (3 + \sqrt{2}) - \\ - (3 - \sqrt{2}) &= 2\sqrt{2}. \text{ В результате имеем: } \frac{4\sqrt{2} \cdot 29 - 14\sqrt{2} \cdot 6 + 2 \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 36. \end{aligned}$$

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби (2.315. — 2.317.):

№ 2.315. а) $\frac{1}{\sqrt[4]{2} + \sqrt{3}}$.

Преобразуем: $\frac{1}{\sqrt[4]{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt[4]{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt[4]{2})(3 + \sqrt{2})}{7}$.

Ответ: $\frac{(\sqrt{3} - \sqrt[4]{2})(3 + \sqrt{2})}{7}$.

б) $\frac{1}{\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{2}}$.

Ответ: $\frac{(\sqrt[4]{5} + \sqrt{2})(\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{2})}{3}$.

№ 2.316. а) $\frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{5}}$.

Ответ: $\frac{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})(1 + \sqrt{2})}{2}$.

$$б) \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 3}.$$

$$\text{Преобразуем: } \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 3} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3}{2(\sqrt{6} - 2)} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3)(\sqrt{6} + 2)}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(2 + \sqrt{6})}{4}.$$

$$\text{№ 2.317. а) } \frac{1}{2 + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}} . \text{ Сравните значение выражения с числом } \frac{8}{17} .$$

Преобразуем:

$$\frac{1}{2 + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}} = \frac{1}{2 + \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{5 - 2\sqrt{2}} = \frac{5 + 2\sqrt{2}}{17}.$$

$$\text{Сравним: } \frac{5 + 2\sqrt{2}}{17} \vee \frac{8}{17} \Rightarrow 2\sqrt{2} \vee 3 \Rightarrow 8 < 9 \Rightarrow \frac{5 + 2\sqrt{2}}{17} < \frac{8}{17}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{5 + 2\sqrt{2}}{17}; \frac{5 + 2\sqrt{2}}{17} < \frac{8}{17}.$$

$$б) \frac{2}{\sqrt{11 - 4\sqrt{7}} + \sqrt{63}} . \text{ Сравните значение выражения с числом } \frac{2}{9} .$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\sqrt{7} + 1}{27}; \frac{2\sqrt{7} + 1}{27} > \frac{2}{9}.$$

Упростите (2.318. – 2.321.):

$$\text{№ 2.318. а) } \sqrt{6} + \sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{11 - 2\sqrt{30}}}.$$

$$\text{Преобразуем: } \sqrt{6} + \sqrt{5} - \frac{1}{(\sqrt{6} - \sqrt{5})^2} = \sqrt{6} + \sqrt{5} - (\sqrt{6} + \sqrt{5}) = 0$$

Ответ: 0.

$$б) \sqrt{7} - \sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{9 + 2\sqrt{14}}}.$$

Ответ: 0.

$$\text{№ 2.319. а) } (3 - \sqrt{5})^2 - 6\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$$

Ответ: -4.

$$б) (2 - \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

$$\text{Преобразуем: } (2 - \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = 7 - 4\sqrt{3} - 4(2 - \sqrt{3}) = -1.$$

Ответ: -1.

$$\text{№ 2.320. а) } \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} \cdot \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Преобразуем: } \sqrt[3]{(\sqrt{2} - 1)^3} \cdot \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = 2 - 1 = 1.$$

Ответ: 1.

$$б) \frac{\sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}}{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}.$$

Ответ: 1.

$$\text{№ 2.321. а) } \frac{\sqrt{4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}}{1 + \sqrt{3}}. \text{ Сравните результат с числом } \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{5}}.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{5}}.$$

$$б) \frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}. \text{ Сравните результат с числом } 2^{\frac{5}{3}}.$$

Преобразуем:

$$\frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{5}}}{2(1 + \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}}{2(1 + \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2(1 + \sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{8} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}.$$

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{4} \sqrt[5]{2^{-\frac{5}{3}}} \Rightarrow 3 - \sqrt{5} \sqrt[5]{2^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow 72 - 32\sqrt{5} \sqrt[5]{2} \Rightarrow 70 \cdot 70 \sqrt[5]{5 \cdot 1024} \Rightarrow \\ \Rightarrow 4900 < 5120.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3 - \sqrt{5}}{4}; \frac{3 - \sqrt{5}}{4} < 2^{\frac{5}{3}}.$$

№ 2.322. Удовлетворяет ли данное число данному неравенству:

$$а) \sqrt{34 - 24\sqrt{2}} - \sqrt{34 + 24\sqrt{2}}, 7x^2 + 58x + 13 > 0.$$

$$\text{Преобразуем: } \sqrt{(3\sqrt{2} - 4)^2} - \sqrt{(3\sqrt{2} + 4)^2} = (3\sqrt{2} - 4) - (3\sqrt{2} + 4) = -8.$$

$$\text{Подставим в неравенство: } 7 \cdot 64 - 58 \cdot 8 + 13 = -3 < 0.$$

Ответ: нет.

$$б) \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}, 11x^2 + 26x - 73 \leq 0.$$

Ответ: да.

№ 3.323. Докажите, что данное число является корнем данного уравнения:

$$а) \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \quad 3t^3 + 9t - 8 = 0.$$

Подставляя и раскрывая, получаем:

$$3 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} + 3\sqrt[3]{3} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - 3\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \right) + 9 \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \right) \right) - 8 = 3 \cdot \left(\frac{8}{3} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{3}} - 3\sqrt[3]{3} \right) + 9 \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \right) - 8 = 0.$$

$$б) \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}, \quad t^3 - 12t - 20 = 0.$$

Подставляя и раскрывая, получаем:

$$(4 + 16 + 12\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{16}) - 12(\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}) - 20 = (20 + 24\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[3]{4}) - 12(\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}) - 20 = 0.$$

№ 2.324. Докажите, что одно и только одно число из пары является корнем данного уравнения:

$$а) \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \text{ и } \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}, \quad x^3 - 6x - 6 = 0.$$

Подставляя первое число, получаем:

$$(6 + 3\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4}) - 6(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) - 6 = (6 + 6\sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{2}) - 6(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) - 6 = 0.$$

Подставляя второе число, получаем:

$$(-2 + 3\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4}) - 6(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}) - 6 = (-2 + 6\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{2}) - 6(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}) - 6 = 12(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) - 8 \neq 0.$$

$$б) \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} \text{ и } \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}, \quad x^3 + 9x - 6 = 0.$$

Подставляя первое число, получаем:

$$(12 + 3\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{3}) + 9(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}) - 6 = (12 + 9\sqrt[3]{3} + 9\sqrt[3]{9}) + 9(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}) - 6 = 6 + 18(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) \neq 0$$

Подставляя второе число, получаем:

$$(6 + 3\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{9} - 3\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{3}) + 9(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}) - 6 = (6 + 9\sqrt[3]{3} - 9\sqrt[3]{9}) + 9(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}) - 6 = 0.$$

№ 2.325. Сравните без помощи микрокалькулятора и таблиц:

$$а) 1 + \sqrt[3]{2} \text{ и } \sqrt{6}.$$

Запишем:

$$1 + \sqrt[3]{2} \vee \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt[3]{2} \vee \sqrt{6} - 1 \Rightarrow 2 \vee 9\sqrt{6} - 19 \Rightarrow 21 \vee 9\sqrt{6} \Rightarrow 441 < 486 \Rightarrow \Rightarrow 1 + \sqrt[3]{2} < \sqrt{6}.$$

$$\text{Ответ: } 1 + \sqrt[3]{2} < \sqrt{6}.$$

$$б) \sqrt[3]{19} - \sqrt{3} \text{ и } 1.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt[3]{19} - \sqrt{3} < 1.$$

№ 2.326. Найдите все пары рациональных $(k; c)$, для которых выполняется равенство:

$$a) \sqrt{15 + k\sqrt{6}} = \sqrt{6} - c.$$

$$\text{Равенство равносильно системе: } \begin{cases} 15 + k\sqrt{6} \geq 0 \\ \sqrt{6} - c \geq 0 \\ (k + 2c)\sqrt{6} = c^2 - 9 \end{cases}$$

Поскольку k и c — рациональные числа, а $\sqrt{6}$ — иррациональное число, то равенство возможно только, если: $\begin{cases} c^2 - 9 = 0 \\ k + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow c_1 = -3, k_1 = 6; c_2 = 3, k_2 = -6$. Из О.Д.З подходит первая пара.

Ответ: $(6; -3)$.

$$б) \sqrt{k} - \sqrt{c} = \sqrt{5 - \sqrt{21}}.$$

Ответ: $(3,5; 1,5)$.

№ 2.237. а) Найдите пару рациональных чисел $(k; m)$, для которых $(k + m\sqrt{2})^3 = 45 - 29\sqrt{2}$, и упростите выражение $\sqrt{2} - \sqrt[3]{29\sqrt{2} - 45}$.

Ответ: $(3; -1)$ 3.

б) Найдите пару рациональных чисел $(a; b)$, для которых $(a + b\sqrt{3})^3 = 15\sqrt{3} - 26$, и упростите выражение $\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} + \sqrt{3}$. Приравнявая соответствующие коэффициенты при рациональных и иррациональных числах, получаем:

$$\begin{cases} a^3 + 9ab^2 = -26 \\ 3b^3 + 3a^2b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2 + 9b^2) = -26 \\ b(a^2 + b^2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} \cdot \frac{a^2 + 9b^2}{a^2 + b^2} = -\frac{26}{5} \\ b(a^2 + b^2) = 5 \end{cases}$$

Решим первое уравнение. Обозначим $x = \frac{a}{b}$, тогда $x \cdot \frac{x^2 + 9}{x^2 + 1} = -\frac{26}{5} \Leftrightarrow 5x^3 + 26x^2 + 45x + 26 = 0$. Преобразуем:

$$5(x^3 + 2x^2) + 16(x^2 + 2x) + 13(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(5x^2 + 16x + 13) = 0 \Rightarrow x = -2.$$

$$\text{Итак: } \begin{cases} \frac{a}{b} = -2 \\ b(a^2 + b^2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ b^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -2; b = 1.$$

$$\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} + \sqrt{3} = -(-2 + \sqrt{3}) + \sqrt{3} = 2.$$

Ответ: $(-2; 1)$ 2.

№ 2.328. Какое из двух чисел ближе к единице:

а) $2,5 \cdot \sqrt[3]{0,4}$ или $0,4 \cdot \sqrt[3]{2,5}$.

Возводя в седьмую степень числа, получим: $\left(\frac{5}{2}\right)^6$ и $\left(\frac{2}{5}\right)^6 \Rightarrow$ вто-

рое число ближе к 1.

Ответ: второе.

б) $\frac{3}{5} \sqrt[8]{\frac{2}{3}}$ или $\frac{5}{3} \sqrt[8]{0,6}$?

Ответ: первое.

Упростите выражение (2.329. – 2.335.):

№ 2.329. а) $\frac{1}{(a-3)(a-b)} + \frac{1}{(3-b)(3-a)} + \frac{1}{(b-a)(b-3)}$.

Перепишем в виде: $\frac{1}{(a-3)(a-b)} - \frac{1}{(a-b)(b-3)} + \frac{1}{(a-3)(b-3)} =$
 $= -\frac{1}{(a-3)(b-3)} + \frac{1}{(a-3)(b-3)} = 0$.

Ответ: 0.

б) $\frac{1}{(c-b)(c+4)} + \frac{1}{(b+4)(b-c)} + \frac{1}{(c+4)(b+4)}$.

Ответ: 0.

№ 2.330. а) $\frac{a^2}{(a+1)(a-c)} + \frac{1}{(c+1)(a+1)} + \frac{c^2}{(c-a)(c+1)}$.

Ответ: 1.

б) $\frac{1}{(b-3)(c-3)} - \frac{b^2}{(b-c)(3-b)} - \frac{c^2}{(3-c)(c-b)}$.

Перепишем в виде: $\frac{9}{(b-3)(c-3)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-3)} - \frac{c^2}{(b-c)(c-3)} =$
 $= \frac{9}{(b-3)(c-3)} + \frac{bc-3b-3c}{(b-3)(c-3)} = \frac{(b-3)(c-3)}{(b-3)(c-3)} = 1$.

Ответ: 1.

№ 2.331. а) $\sqrt{\frac{x}{x-a^2}} : \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}} \right)$.

Преобразуем выражение в скобках, приведя к общему знаменателю: $\frac{-4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-a^2}}{a^2}$. Тогда $\sqrt{\frac{x}{x-a^2}} : \frac{-4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-a^2}}{a^2} = -\frac{a^2}{4(x-a^2)}$.

Ответ: $-\frac{a^2}{4(x-a^2)}.$

б) $\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}} \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \right).$

Ответ: $\frac{\sqrt{a-b}}{b}.$

№ 2.332. а) $\frac{a \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}} \right)^{-1} + b \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}} \right)^{-1}}{\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2ab} \right)^{-1} + \left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2ab} \right)^{-1}}.$

Ответ: $\sqrt{ab}.$

б) $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}} \right)^{-2} - \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} \right)^{-2}.$

Приводя к общему знаменателю в обоих выражениях, получаем:

$$\left(\frac{\sqrt{a+x}(\sqrt{a}+\sqrt{x})}{2\sqrt{a} \cdot \sqrt{x}} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{a+x}(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{-2\sqrt{a} \cdot \sqrt{x}} \right)^2 = \frac{a+x}{4ax} \cdot 4\sqrt{a}\sqrt{x} = \frac{a+x}{\sqrt{ax}}.$$

Ответ: $\frac{a+x}{\sqrt{ax}}.$

№ 2.333. а) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} : \left(\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} \right)^{-1} \right)^{-2}$

Рассматривая $x-y$ как $(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2$ и преобразуя выражение в

скобках, получаем: $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} : \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{4\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$

Ответ: $\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$

б) $\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^{-2}} - \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\frac{3}{a^2} - \frac{3}{b^2}} \right)^{-1} \right) : \sqrt{ab}.$

Ответ: 1.

№ 2.334. а) $\left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} - (a-b) \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}} \right)^{-1} \right) a^{-\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{3}}.$

Ответ: $-2.$

б) $\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + b}{a^{\frac{3}{2}} - b^3} \right)^{-1} \cdot \frac{a - b^2}{a + b\sqrt{a} + b^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{a}, \text{ если } \sqrt{a} > b.$

Преобразуем выражение в скобках:

$$\frac{(\sqrt{a})^3 - b^3}{\sqrt{a} + b} \cdot \frac{(\sqrt{a})^2 - b^2}{(\sqrt{a})^2 + b\sqrt{a} + b^2} = (\sqrt{a} - b)^2, \text{ тогда } \sqrt{(\sqrt{a} - b)^2} = \sqrt{a} - b, \text{ так}$$

как $\sqrt{a} > b$ и $\sqrt{a} - b - \sqrt{a} = -b.$

Ответ: $-b.$

№ 2.335. а) $\left(\frac{\sqrt{a} - 2}{a + 2\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a} + 2}{a - 2\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a + 4} - \frac{8}{a - 4}.$

Преобразуем выражение в скобках, тогда:

$$\frac{2(a + 4)}{\sqrt{a}(a - 4)} \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a + 4} - \frac{8}{a - 4} = \frac{2a - 8}{a - 4} = 2.$$

Ответ: $2.$

б) $\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1} - x+1} \right) \cdot (x^2-1)^{\frac{1}{2}}.$

Ответ: $1.$

№ 2.336. а) Пусть $\frac{a+b}{a-2b} = \frac{2}{3}.$ Вычислите $\frac{a^2 - 2b^2}{2a^2 + 5ab + 3b^2}.$

Из равенства получаем, что $a = -7b$, подставляя в выражение,

получаем $\frac{47b^2}{66b^2} = \frac{47}{66}.$

Ответ: $\frac{47}{66}.$

б) Пусть $\frac{xy - y^2}{x^2 - xy + 4y^2} = \frac{1}{5}.$ Вычислите $\frac{2x + 5y}{y - 7x}.$

Ответ: $-0,55.$

№ 2.337. Вычислите:

а) $a^3 + 2a^2 + \frac{8}{a^2} + \frac{8}{a^3}, \text{ если } a + \frac{2}{a} = -4.$

Ответ: $-16.$

$$\text{б) } 2b^3 + 3b^2 + \frac{3}{b^2} - \frac{2}{b^3}, \text{ если } b - \frac{1}{b} = 3.$$

$$\text{Возведя в куб, получаем: } b^3 - \frac{1}{b^3} + \frac{3}{b} - 3b = 27 \Rightarrow b^3 - \frac{1}{b^3} = 36.$$

$$\text{Возведя в квадрат, получаем: } b^2 + \frac{1}{b^2} = 11.$$

$$\text{В итоге получаем: } 2 \cdot 36 + 3 \cdot 11 = 105.$$

Ответ: 105.

$$\text{№ 2.338. Пусть } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

$$\text{а) Вычислите } (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Обозначим $\frac{a_i}{b_i} = c$, тогда выражение примет вид:

$$c^2(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)^2 - c^2(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)^2 = 0$$

Ответ: 0.

$$\text{б) Вычислите } \frac{\sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}}{\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + \dots + \sqrt{a_nb_n}}, \text{ если для всех}$$

$$1 \leq k \leq n, \quad a_k > 0, \quad b_k > 0.$$

Ответ: 1.

При каких натуральных n значение данного выражения является целым числом (2.339. – 2.341.)?

$$\text{№ 2.339. а) } \left(\frac{3}{n!} + \frac{5}{(n+1)!} \right) : \left(\frac{7}{n!} - \frac{6n}{(n+1)!} \right).$$

$$\begin{aligned} & \text{Преобразуем выражение к виду: } \frac{3(n+1) \cdot n! + 5n!}{7(n+1) \cdot n! - 6n \cdot n!} = \frac{3n+8}{n+7} = \\ & = \frac{3(n+7)-13}{n+7} = 3 - \frac{13}{n+7} \Rightarrow n = 6. \end{aligned}$$

Ответ: при $n = 6$.

$$\text{б) } \left(\frac{5n}{(n+1)!} + \frac{2}{n!} \right) : \left(\frac{5}{n!} - \frac{4n}{(n+1)!} \right) ?$$

Ответ: при $n = 6$ и $n = 28$.

$$\text{№ 2.340. а) } \frac{n^2 + 5n - 8}{n + 3}.$$

Ответ: 4 и 11.

$$\text{б) } \frac{-n^2 + 2n - 31}{n + 3}.$$

Выделим целую часть: $\frac{-(n+3)^2 + 8(n+3) - 46}{n+3} = -n + 5 - \frac{46}{n+3}.$

Возможные варианты: $n = 20$ и $n = 43$.

Ответ: 20 и 43.

№ 2.341. а) $\frac{2n^2 + 5n - 5}{n + 1}.$

Выделим целую часть: $\frac{2(n+1)^2 + (n+1) - 8}{n+1} = 2n + 3 - \frac{8}{n+1}.$

Возможные варианты: $n = 1$; $n = 3$; $n = 7$.

Ответ: 1; 3 и 7.

б) $\frac{3n^2 + 4n - 3}{n + 3} ?$

Ответ: 1; 3 и 9.

№ 2.342. При каких целых n значение данного выражения является натуральным числом?

а) $\frac{2n^2 + 9n + 13}{n + 2}.$

Ответ: -1 и 1.

б) $\frac{3n^2 + 5n + 3}{n + 2} ?$

Выделим целую часть: $\frac{3(n+2)^2 - 7(n+2) + 5}{n+2} = 3n - 1 + \frac{5}{n+2}.$

Возможные варианты: $n = -1$ и $n = 3$. ($n = -3$ и $n = -7$ не подходят, поскольку тогда число целое, но не натуральное).

Ответ: -1 и 3.

№ 2.343. Найдите все такие значения k , что уравнение имеет только целые корни, и для каждого такого k укажите эти корни:

а) $kx^2 - (k^2 + 4)x + 4k = 0.$

Записываем квадратный трехчлен в виде $k(x - x_1)(x - x_2) = 0,$

получаем: $kx_1x_2 = 4k \Rightarrow x_1x_2 = 4$, а также $k(x_1 + x_2) = k^2 + 4$.

Таким образом:
$$\begin{cases} x_1x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = k + \frac{4}{k} \end{cases} \Rightarrow k = \pm 1; \pm 2; \pm 4.$$

Подставляя полученные k в систему, получаем, что: $x_1 = -1$; $x_2 = -4$ при $k = -4$ и $k = -1$; $x = -2$ при $k = -2$; $x = 2$ при $k = 2$;

$x_1 = 1$; $x_2 = 4$ при $k = 1$ и $k = 4$.

Отдельный случай $k = 0$, тогда $x = 0$.

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = -4$ при $k = -4$ и $k = -1$; $x = -2$ при $k = -2$;
 $x = 2$ при $k = 2$; $x_1 = 1$; $x_2 = 4$ при $k = 1$ и $k = 4$; $x = 0$ при $k = 0$.

б) $k(k+1)x^2 - (7k+3)x + 12 = 0$.

Ответ: $x_1 = -2$; $x_2 = -1$ при $k = -3$; $x_1 = 2$; $x_2 = 3$ при $k = 1$; $x = 1$
при $k = 3$, $x = 4$ при $k = 0$; $x = -3$ при $k = -1$.

№ 2.344. На графике функции найдите все точки, абсциссы и ординаты которых целые числа:

а) $y = \frac{x+3}{x+1}$.

Ответ: $(-3; 0)$, $(-2; -1)$, $(0; 3)$, $(1; 2)$.

б) $y = \frac{x-4}{x-1}$.

Выделяя целую часть, получаем: $y = 1 - \frac{3}{x-1}$.

Возможны варианты: $x_1 = -2$; $y_1 = 2$; $x_2 = 0$; $y_2 = 4$; $x_3 = 2$; $y_3 = -2$ и
 $x_4 = 4$; $y_4 = 0$.

Ответ: $(-2; 2)$, $(0; 4)$, $(2; -2)$, $(4; 0)$.

№ 2.345. а) Докажите, что все числа вида $x = 1 - 5n$, $y = 2 + 3n$, где $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют уравнению $3x + 5y = 13$, и найдите среди них такие, что $|x + y|$ имеет наименьшее значение.

Подставляя в уравнение, получаем: $13 + (15n - 15n) \equiv 13$.

$$|x + y| = |3 - 2n| = \min \text{ при } n = 1 \text{ и } n = 2 \Rightarrow x_1 = -4; y_1 = 5; x_2 = -9; y_2 = 8.$$

Ответ: $x = -4$; $y = 5$ и $x = -9$; $y = 8$.

б) Докажите, что все числа вида $x = 2 + 3n$, $y = 1 + 7n$, где $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют уравнению $7x - 3y = 11$, и найдите среди них такие, что $|x - y|$ имеет наименьшее значение.

Подставляя в уравнение, получаем: $11 + (21n - 21n) \equiv 11$.

$$|x - y| = |1 - 4n| = \min \text{ при } n = 0 \Rightarrow x = 2; y = 1.$$

Ответ: $x = 2$; $y = 1$.

№ 2.346. а) Докажите, что все числа вида $x = 7 - 3n$, $y = 3 + 5n$, где $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют уравнению $5x + 3y = 44$, и укажите среди них такие, что xy имеет наибольшее.

Подставляя в уравнение, получаем: $44 + (15n - 15n) \equiv 44$.

$xy = -15n^2 + 26n + 21$. Квадратный трехчлен имеет максимум при $n = \frac{13}{15}$, но поскольку $n \in \mathbb{Z}$, то следует исследовать ближайшее целое

значение абсциссы: $n = 1$. При $n = 1$ $xy = 32 \Rightarrow x = 4, y = 8$.

Ответ: $x = 4, y = 8$.

б) Докажите, что все числа вида $x = 8 + 5n, y = 3 + 11n$, где $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют уравнению $11x - 5y = 73$, и найдите среди них такие, что xy — наименьшее.

Подставляя в уравнение, получаем: $73 + (55n - 55n) \equiv 73$.

$xy = 55n^2 + 103n + 24$. Квадратный трехчлен имеет минимум при $n = -\frac{103}{110}$, но поскольку $n \in \mathbb{Z}$, то следует исследовать ближайшее

целое значение абсциссы: $n = -1$. При $n = -1$ $xy = -24 \Rightarrow x = 3, y = -8$.

Ответ: $x = 3, y = -8$.

Найдите все такие целые числа x и y , для которых выполняется условие (2.347. — 2.352.):

№ 2.347. а) $x^2 - y^2 = 4$.

Запишем в виде $(x - y)(x + y) = 4$, то есть $x - y$ и $x + y$ являются делителями 4. Возможные варианты: $\begin{cases} x - y = \pm 1 \\ x + y = \pm 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x - y = \pm 4 \\ x + y = \pm 1 \end{cases}$

$\cup \begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = -2 \end{cases} \cup \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2; y_1 = 0 \text{ и } x_2 = 2; y_2 = 0$.

Ответ: $(2; 0)$ и $(-2; 0)$.

б) $x^2 + xy = 10$.

Ответ: $(1; 9), (2; 3), (5; -3), (10; -9), (-1; -9), (-2; -3), (-5; 3), (-10; 9)$.

№ 2.348. а) $(x + y)(y - 1) = 4$.

Ответ: $(-4; 0), (-4; 5), (-1; -1), (-1; 3), (2; -3), (2; 2)$.

б) $(x - y)(x - 1) = 4$.

Возможные варианты: $\begin{cases} x - y = -1 \\ x - 1 = -4 \end{cases} \cup \begin{cases} x - y = -4 \\ x - 1 = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x - y = -2 \\ x - 1 = -2 \end{cases}$

$\cup \begin{cases} x - y = 2 \\ x - 1 = 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 1 = 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x - y = 4 \\ x - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -3; y_1 = -2; x_2 = 0; y_2 = 4;$

$x_3 = -1; y_3 = 1; x_4 = 3; y_4 = 1; x_5 = 5; y_5 = 4; x_6 = 2; y_6 = -2$

Ответ: $(-3; -2), (-1; 1), (0; 4), (2; -2), (3; 1), (5; 4)$.

№ 2.349. а) $(x - 3)(xy + 5) = 5$.

Возможные варианты: $\begin{cases} x - 3 = -1 \\ xy + 5 = -5 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 3 = -5 \\ xy + 5 = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 3 = 1 \\ xy + 5 = 5 \end{cases} \cup$

$\cup \begin{cases} x - 3 = 5 \\ xy + 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2; y_1 = -5; x_2 = -2; y_2 = 3; x_3 = 4; y_3 = 0$.

Ответ: $(-2; 3), (2; -5), (4; 0)$.

б) $(y + 1)(xy - 1) = 3$.

Ответ: $(0; -4), (1; -2), (1; 2)$.

№ 2.350. а) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$.

Ответ: $(1; 2), (-1; -2), (5; 2), (-5; -2)$.

б) $x^2 - 2xy - 3y^2 = 5$.

Разложим левую часть на множители: $(x + y)(x - 3y) = 5$.

Возможные варианты: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \cup \begin{cases} x + y = 5 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x + y = -1 \\ x - 3y = -5 \end{cases} \cup$

$\cup \begin{cases} x + y = -5 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2; y_1 = -1; x_2 = 4; y_2 = 1; x_3 = -2; y_3 = 1; x_4 = -4; y_4 = -1$.

Ответ: $(4; 1), (-4; -1), (-2; 1), (2; -1)$.

№ 2.351. а) $x^2 + 23 = y^2$.

Разложим на множители: $(x - y)(x + y) = -23$.

Возможные варианты: $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 23 \end{cases} \cup \begin{cases} x - y = 23 \\ x + y = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = -23 \end{cases} \cup$

$\cup \begin{cases} x - y = -23 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 11; y_1 = 12; x_2 = 11; y_2 = -12; x_3 = -11; y_3 = -12;$

$x_4 = -11; y_4 = 12$.

Ответ: $(-11; -12), (-11; 12), (11; -12), (11; 12)$.

б) $x^2 - 47 = y^2$.

Ответ: $(-24; -23), (-24; 23), (24; -23), (24; 23)$.

№ 2.352. а) $\begin{cases} x > y \\ 2x + y < 32 \\ x + 2y > 28 \end{cases}$

Ответ: $x = 11, y = 9$.

$$6) \begin{cases} x < y \\ 2x + 3y < 42 \\ 3x + 2y > 38 \end{cases}$$

Вычтем третье неравенство из второго:
$$\begin{cases} 0 < y - x < 4 \\ 3x + 2y > 38 \\ 2x + 3y < 42 \end{cases}$$

Возможные варианты:
$$\begin{cases} y - x = 1 \\ 3x + 2y > 38 \\ 2x + 3y < 42 \end{cases} \cup \begin{cases} y - x = 2 \\ 3x + 2y > 38 \\ 2x + 3y < 42 \end{cases} \cup \begin{cases} y - x = 3 \\ 3x + 2y > 38 \\ 2x + 3y < 42 \end{cases}$$

Из первой системы: $\frac{36}{5} < x < \frac{39}{5} \Rightarrow \emptyset$. Из второй системы:

$\frac{34}{5} < x < \frac{36}{5} \Rightarrow x = 7; y = 9$. Из третьей системы: $\frac{32}{5} < x < \frac{33}{5} \Rightarrow \emptyset$.

Ответ: $x = 7, y = 9$.

Докажите, что данное число составное (2.353. – 2.354.):

№ 2.353. а) $4^{13} - 5^6$.

Представим в виде: $2^{26} - 5^6 = (2^{13})^2 - (5^3)^2 = (2^{13} - 5^3)(2^{13} + 5^3)$, что требовалось доказать.

б) $4^{15} - 2^{16} + 1$.

Представим в виде: $2^{30} - 2 \cdot 2^{15} + 1 = (2^{15} - 1)^2$, что требовалось доказать.

№ 2.354. а) $4 \cdot 1996^2 + 8 \cdot 1996 \cdot 1997 + 3 \cdot 1997^2$.

Представим в виде: $4 \cdot (1996^2 + 2 \cdot 1996 \cdot 1997 + 1997^2) - 1997^2 = (2 \cdot (1996 + 1997))^2 - 1997^2 = (2 \cdot 1996 + 1997)(2 \cdot 1996 + 3 \cdot 1997)$, что требовалось доказать.

б) $2 \cdot 1995^2 + 9 \cdot 1995 \cdot 1999 + 4 \cdot 1999^2$.

Рассматривая выражение как квадратный трехчлен, раскладываем на множители: $(1995 + 4 \cdot 1999)(2 \cdot 1995 + 1999)$, что требовалось доказать.

№ 2.355. а) Докажите, что число, записанное семью единицами и четырьмя пятерками, взятыми в произвольной порядке, является составным.

Сумма цифр такого числа равна 27 и делится на 3 и 9, а поэтому данное число делится на 3 и 9.

б) Докажите, что число, записанное восемью семерками и пятью пятерками, взятыми в произвольной порядке, является составным.

Сумма цифр такого числа равна 81 и делится на 3 и 9, а поэтому данное число делится на 3 и 9.

№ 2.356. Докажите, что число p — простое:

а) $p = 389$.

Так как $389 < 20^2$, то достаточно проверить делимость на простые числа 20. Деление на 2, 3, 5 легко проверить, а деление на 7, 11, 13, 17 проверяется непосредственно.

б) $p = 401$.

Так как $401 < 21^2$, то достаточно проверить делимость на простые числа меньше 21. Деление на 2, 3, 5 легко проверить, а деление на 7, 11, 13, 17, 19 проверяется непосредственно.

№ 2.357. а) Найдите все простые числа p такие, что числа $p + 10$ и $p + 14$ тоже будут простыми.

Ясно, что $p = 2k + 1$, а тогда $p + 10 = 2k + 11$, $p + 14 = 2k + 15$.

$$k = 3n + 1 \text{ или } k = 3n + 2, \text{ тогда } \begin{cases} k = 3n + 1 \\ p + 10 = 6n + 13 \\ p + 14 = 6n + 17 \\ p = 6n + 3 = 3(2n + 1) - \text{составное.} \end{cases}$$

Исключение $n = 0 \Rightarrow p = 3$.

$$\begin{cases} k = 3n + 2 \\ p + 10 = 6n + 15 = 3(2n + 5) \Rightarrow \emptyset \\ p + 14 = 6n + 19 \\ p = 6n + 5 \end{cases}$$

Ответ: $p = 3$.

б) Найдите все простые числа p такие, что числа $p + 20$ и $p + 4$ тоже будут простыми.

Ответ: $p = 3$.

№ 2.358. а) Докажите, что число $(n + 1)^4 + 4$ при всех натуральных n составное.

Раскрывая скобки, получаем: $n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 5$. Разложим это выражение на произведение двух квадратных трехчленов с целыми коэффициентами: $n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 5 = (n^2 + an + 1)(n^2 + bn + 5)$. Приравнявая соответствующие коэффициенты при степени n , получаем: $(n + 1)^4 + 4 = (n^2 + 1)(n^2 + 4n + 5)$, что требовалось доказать.

б) Найдите все такие натуральные n , что число $4n^4 + 1$ простое.

Ответ: 5.

№ 2.359. а) Сложили все пятизначные числа, полученные из числа 23751 перестановками его цифр (включая и само число). Докажите, что полученная сумма делится нацело на 11111.

Запишем числа $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ в виде: $a_1 \cdot 10^4 + a_2 \cdot 10^3 + a_3 \cdot 10^2 + a_4 \cdot 10^1 + a_5$. Чисел с цифрой a_i в данной позиции будет $4!$ (перестановки оставшихся четырех цифр). Поэтому при суммировании всех чисел будем иметь: $4! \cdot \sum a_i \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 4! \cdot 18 \cdot 11111$, которое нацело делится на 11111.

б) Сложили все пятизначные числа, полученные из числа 83572 перестановками его цифр (включая и само число). Докажите, что полученная сумма не делится нацело на 111.

Из предыдущей задачи следует, что эта сумма равна $4! \cdot 25 \cdot 1111$, которое не делится на 111.

№ 2.360. а) Докажите, что сумма четырех последовательных натуральных чисел не делится на 4.

Запишем сумму $S = n + n + 1 + n + 2 + n + 3 = 4n + 6$. Поскольку $4n$ делится на 4, а 6 — нет, то и S не делится на 4.

б) Докажите, что произведение четырех последовательных натуральных чисел делится на 24.

Среди четырех последовательных целых чисел обязательно встречается число, делящееся на 4 и два четных числа. Поэтому произведение будет делиться на 8. Среди трех последовательных целых чисел обязательно встречается число, делящееся на 3, что тем более справедливо для последовательных четырех целых чисел. Таким образом, произведение будет делиться на $8 \cdot 3 = 24$.

№ 2.361 а) Произведение k подряд идущих натуральных чисел не делится на 111. При каком наибольшем k такое возможно? Поскольку $111 = 3 \cdot 37$, то максимальное $k = 36$.

Ответ: при $k = 36$.

б) При каком наименьшем n произведение любых подряд идущих n натуральных чисел делится на 242?

Ответ: при $n = 22$.

№ 2.362. Найдите наибольшее натуральное число n , при котором

а) $85!$ делится нацело на 2^n .

Ответ: 81.

б) $107!$ делится нацело на 3^n .

Чисел, делящихся на 3, будет $\frac{105}{3} = 35$, среди них чисел, делящихся на 9, будет $\frac{99}{9} = 11$, а делящихся на 27: $\frac{81}{27} = 3$, делящихся на 81 — одно число. В результате: $n = (35 - 11) + (11 - 3) \cdot 2 + (3 - 1) \cdot 3 + 4 = 50$.

Ответ: 50.

№ 2.363. а) Сколько среди взятых подряд двухсот натуральных чисел может быть таких, которые при делении на 7 дают в остатке 5? Если начинать с 1, то таких чисел будет $1 + \frac{194 - 5}{7} = 28$. Если начинать с

2, то таких чисел будет $1 + \frac{201 - 5}{7} = 29$.

Ответ: 28 или 29.

б) Сколько среди взятых подряд ста сорока двух натуральных чисел может быть таких, которые при делении на 5 дают в остатке 3?

Ответ: 28 или 29.

№ 2.364. При каких натуральных значениях n дробь является правильной и несократимой? Укажите все такие дроби.

а) $\frac{n^2 + 16n}{9n + 60}$.

Ответ: $\frac{17}{69}$ при $n = 1$.

б) $\frac{n^2 - n + 15}{7n + 3}$.

Чтобы дробь была правильной, необходимо, чтобы: $n^2 - n + 15 < 7n + 3 \Rightarrow n^2 - 8n + 12 < 0 \Rightarrow 2 < n < 6 \Rightarrow n = 3; 4; 5$. При подстановке несократимой будет дробь: $\frac{27}{31}$ при $n = 4$, $\frac{35}{38}$ при $n = 5$.

Ответ: $\frac{27}{31}$ при $n = 4$, $\frac{35}{38}$ при $n = 5$.

№ 2.365. а) Пусть остаток от деления натурального числа m на 7 равен 3. Найдите остаток от деления на 7 числа $3m^2 + 5m + 1$. Из условия $m = 7k + 3$ и тогда $3m^2 + 5m + 1 = 3 \cdot (7k)^2 + 14 \cdot (7k) + 42 + 1$. Следовательно, остаток от деления будет 1.

Ответ: 1.

б) Пусть остаток от деления натурального числа n на 9 равен 5. Найдите остаток от деления на 9 числа $4n^2 + 7n + 2$.

Ответ: 2.

№ 2.366. а) Какова будет дата (год, месяц, число и день недели) через 1000 дней после дня решения этой задачи?

б) Какова была дата (год, месяц, число и день недели) за 1000 дней до вашего экзамена?

№ 2.367. а) На часах 7 ч 28 мин 5 с. Какое время было на часах за 50000 с до данного события?

$$50000 \text{ с} = \frac{2500}{3} \text{ мин} = \frac{125}{9} \text{ час} = 13 \text{ час } 53 \text{ мин } 20 \text{ с}.$$

Время будет на часах: $7 \text{ ч } 28 \text{ мин } 5 \text{ с} - 1 \text{ ч } 53 \text{ мин } 20 \text{ с} = 7 \text{ ч } 28 \text{ мин } 5 \text{ с} - 2 \text{ ч } + 6 \text{ мин } 40 \text{ с} = 5 \text{ ч } 34 \text{ мин } 45 \text{ с}$. Если было 7 ч утра, то будет 5 ч вечера или 17 ч 34 мин 45 с.

Ответ: 17 ч 34 мин 45 с.

б) На часах 13 ч 23 мин 8 с. Какое время было на часах через 100000 с?

Ответ: 17 ч 9 мин 48 с.

№ 2.368. а) Докажите, что при всех натуральных значениях n наименьшее общее кратное чисел $n^2 + 6n + 9$ и $n + 4$ равно $n^3 + 10n^2 + 33n + 36$.

Общее кратное можно записать в виде: $(n + 3)^2 \cdot (n + 4)$. Поскольку $n + 3$ и $n + 4$ — последовательные числа, то делители $n + 3$ не могут быть делителями $n + 4$ и наоборот (поскольку разность чисел 1 меньше наименьшего делителя 2), поэтому наименьшее общее обратное будет $(n + 3)^2 \cdot (n + 4) = n^3 + 10n^2 + 33n + 36$.

б) Докажите, что при всех натуральных значениях n наибольший общий делитель чисел $n^2 + 10n + 21$ и $n^2 + 9n + 18$ равен $n + 3$. Представим квадратный трехчлен в виде: $(n + 3)(n + 7)$ и $(n + 3)(n + 6)$. $n + 6$ и $n + 7$ — последовательные числа, поэтому у них не может быть общих делителей (см. предыдущую задачу). Таким образом, наибольшим общим делителем будет $(n + 3)$.

№ 2.369. а) Найдите наибольший общий делитель чисел $\underbrace{111\dots1}_{100 \text{ единиц}}$ и

$$\underbrace{222\dots2}_{50 \text{ двоек}}.$$

Ответ: $\underbrace{111\dots1}_{50 \text{ единиц}}$.

б) Найдите наименьшее общее кратное чисел $\underbrace{111\dots1}_{150 \text{ единиц}}$ и $\underbrace{333\dots3}_{50 \text{ троек}}$.

Покажем, что $\underbrace{111\dots1}_{150 \text{ единиц}}$ делится на $\underbrace{333\dots3}_{50 \text{ троек}}$. Запишем: $111\dots1 = 10^{149} +$

$$+ 10^{148} + \dots + 10^1 + 10^0 = \frac{10^{150} - 1}{9} \quad (\text{сумма геометрической прогрессии}$$

$$\text{со знаменателем } q = 10). \quad 333\dots3 = 3 \cdot (10^{49} + \dots + 10^0) = 3 \cdot \frac{10^{50} - 1}{9}.$$

$$\text{При делении получим } \frac{10^{150} - 1}{3 \cdot (10^{50} - 1)} = \frac{(10^{50})^3 - 1}{3 \cdot (10^{50} - 1)} = \frac{10^{100} + 10^{50} + 1}{3}.$$

Число $10^{100} + 10^{50} + 1$ делится на 3, так как сумма его цифр равна 3, поэтому $\underbrace{111\dots1}_{150 \text{ единиц}}$ — наименьшее общее кратное.

Ответ: $\underbrace{111\dots1}_{150 \text{ единиц}}$.

№ 2.370. а) Выписали все натуральные числа от 1 до 933. Сколько раз записали цифру 1?

Количество единиц на конце числа будет: $\frac{930}{10} + 1 = 94$.

Количество единиц во второй позиции будет: $10 \cdot \frac{1000}{100} = 100$.

Количество единиц на месте сотен будет 100. В итоге 294 раза.

Ответ: 294 раза.

б) Выписали все натуральные числа от 1 до 837. Сколько раз записали цифру 0?

Ответ: 163 раза.

Докажите утверждения, используя, где это удобно, метод математической индукции (2.371. — 2.386.) (n — любое натуральное число, если не оговорено другое):

№ 2.371. а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)((k+1)+1)}{6}, \text{ что требовалось доказать.} \end{aligned}$$

б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \\ &= \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4}, \text{ что требовалось доказать.} \end{aligned}$$

№ 2.372. а) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$.

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + k(3k+1) + (k+1)(3(k+1)+1) = k(k+1)^2 + (k+1)(3k+4) = \\ = (k+1)((k+1)+1)^2, \text{ что требовалось доказать.}$$

$$\text{б) } 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Проверяем при $n=1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n=k$. Докажем, что оно справедливо и при $n=k+1$.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \\ = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} = \frac{(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)}{3}, \text{ что требовалось до-} \\ \text{казать.}$$

$$\text{№ 2.373. а) } \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

Замечаем, что $\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right)$, тогда левая часть запишется в виде:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right) = \\ = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{n}{4n+1}, \text{ что требовалось доказать.}$$

$$\text{б) } \frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{(5n-3)(5n+2)} = \frac{n}{10n+4}.$$

Замечаем, что $\frac{1}{(5n-3)(5n+2)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5n-3} - \frac{1}{5n+2} \right)$, тогда левая часть запишется в виде:

$$\frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{5n-3} - \frac{1}{5n+2} \right) = \\ = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5n+2} \right) = \frac{n}{10n+4}, \text{ что требовалось доказать.}$$

$$\text{№ 2.374. а) } \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Проверяем при $n=1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n=k$. Докажем, что оно справедливо и при $n=k+1$.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2 \cdot 2^k} = 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}} = 2 - \frac{(k+1)+2}{2^{k+1}},$$

что требовалось доказать.

$$\text{б) } \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}} \right).$$

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{k}{3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{2k+3}{3^{k+1}} \right) + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2k+5}{4 \cdot 3^{k+1}} =$$

$$= \frac{3}{4} \left(1 - \frac{2(k+1)+3}{3^{(k+1)+1}} \right), \text{ что требовалось доказать.}$$

№ 2.375. а) $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq 2\pi k, k -$

целое число.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$.

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin k\alpha + \sin(k+1)\alpha = \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \cdot \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \sin(k+1)\alpha =$$

$$= \frac{\sin \frac{(k+1)\alpha}{2} \left(\sin \frac{k\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{(k+1)\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{(k+1)\alpha}{2} \cdot \sin \frac{(k+2)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{(k+1)\alpha}{2} \cdot \sin \frac{((k+1)+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \text{ что требовалось доказать.}$$

б) $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq 2\pi k, k -$ целое

число.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$.

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos k\alpha + \cos(k+1)\alpha = \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \cdot \cos \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \cos(k+1)\alpha =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left(\sin \frac{(1+2k)\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \frac{(2k+3)\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{(2k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left(\sin \left(k\alpha + \frac{\alpha}{2} \right) + \sin \left(k\alpha + \frac{3}{2} \alpha \right) \right) - \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) \alpha \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{(k+1)\alpha}{2} \left(2 \cos \frac{(k+1)\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{k\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{(k+1)\alpha}{2} \cos \frac{((k+1)+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

что требовалось доказать.

№ 2.376. а) Если последовательность задана своим первым членом a_1 и рекуррентным соотношением $a_{n+1} = a_n + d$, то $a_n = a_1 + d(n-1)$. Докажите, используя метод математической индукции.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$. $a_{k+1} = a_k + d(k-1) + d = a_1 + d \cdot k = a_1 + d((k+1)-1)$, что требовалось доказать.

б) Если последовательность задана своим первым членом b_1 и рекуррентным соотношением $b_{n+1} = b_n \cdot q$, то $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. Докажите, используя метод математической индукции.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$. $b_{k+1} = b_k \cdot q = b_1 q^{k-1} \cdot q = b_1 q^k = b_1 q^{(k+1)-1}$, что требовалось доказать.

№ 2.377. а) $b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, где $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$; $q \neq 1$. Докажите, используя метод математической индукции.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$.

$b_1 + b_2 + \dots + b_k + b_{k+1} = \frac{b_1(q^k - 1)}{q - 1} + b_1 \cdot q^k = \frac{b_1(q^{k+1} - 1)}{q - 1}$, что требовалось доказать.

б) $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot d$, где $a_n = a_1 + d(n-1)$. Докажите, используя метод математической индукции.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$.

$a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} = \frac{2a_1 + d(k-1)}{2} \cdot k + a_1 + k \cdot d = \frac{2a_1(k+1) + d(k^2 + k)}{2} =$
 $= \frac{2a_1 + d((k+1)-1)}{2} \cdot (k+1)$, что требовалось доказать.

№ 2.378. а) $3^{2n} - 1$ делится на 8.

Преобразуем $3^{2n} - 1 = (3^n)^2 - 1 = (3^n - 1)(3^n + 1)$. $3^n - 1$ и $3^n + 1$ делится на 2, так как 3^n оканчивается на нечетную цифру. В то же время два этих последовательных четных чисел, а поэтому одно из них обязательно делится на 4. Таким образом, исходное число будет делиться на $4 \cdot 2 = 8$.

б) $5^{2n} - 1$ делится на 24.

Преобразуем $5^{2n} - 1 = (5^n - 1)(5^n + 1)$. Аналогично как в предыдущей задаче это число делится на 8. $5^n - 1$, 5^n и $5^n + 1$ — три последовательных чисел, поэтому какое-нибудь из этих чисел должно делиться на 3. Поскольку 5^n не делится на 3, то на 3 делится какое-нибудь из чисел $5^n - 1$; $5^n + 1$. Таким образом, исходное число будет делиться на $8 \cdot 3 = 24$.

№ 2.379. а) $5^n + 2 \cdot 3^n - 3$ кратно 8.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$: $a_{k+1} = 5^{k+1} + 2 \cdot 3^{k+1} - 3 = 5 \cdot 5^k + 6 \cdot 3^k - 3$. Вычтем $a_k = 5^k + 2 \cdot 3^k - 3 = 8m$. Получаем $4(5^k + 3^k)$. В скобках стоит сумма двух нечетных чисел, поэтому эта сумма делится на 2. Таким образом, $a_{k+1} - a_k$ делится на 8 и a_k по предположению делится на 8, а, следовательно, и a_{k+1} делится на 8, что требовалось доказать.

б) $4^{2n+1} + 3^{2n+1} - 7$ кратно 84.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$: $a_{k+1} = 4^{2k+3} + 3^{2k+3} - 7 = 64 \cdot 4^{2k} + 27 \cdot 3^{2k} - 7$. Вычтем из a_{k+1} число $a_k = 4^{2k+1} + 3^{2k+1} - 7 = 84m$. В результате $a_{k+1} - a_k = 60 \cdot 4^{2k} + 24 \cdot 3^{2k} = 12(5 \cdot 4^{2k} + 2 \cdot 3^{2k})$. Докажем, что $5 \cdot 4^{2k} + 2 \cdot 3^{2k}$ делится на 7. Проверим при $k = 1$ и допуская справедливость утверждения для $k = m$, докажем его справедливость при $k = m + 1$: $5 \cdot 16^{m+1} + 2 \cdot 9^{m+1} - 9 \cdot (5 \cdot 16^m + 2 \cdot 9^m) + 9 \cdot (5 \cdot 16^m + 2 \cdot 9^m) = 35 \cdot 16^m + 9 \cdot (5 \cdot 16^m + 2 \cdot 9^m)$, которое делится на 7, что требовалось доказать. Таким образом, исходное число $4^{2n+1} + 3^{2n+1} - 7$ делится на $12 \cdot 7 = 84$.

№ 2.380. а) $7^n + 12n - 1$ кратно 18.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$: $a_{k+1} = 7^{k+1} + 12(k+1) - 1 = 7 \cdot 7^k + 12k + 11 + 11 \cdot (7^k + 12k - 1) - 11 \cdot (7^k + 12k -$

$-1) = 18 \cdot (7^k + 8k) - 11 \cdot (7^k + 12k - 1)$, которое делится на 18. Таким образом, исходное число делится на 18.

б) $6^n + 20n - 1$ кратно 25.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$: $a_{k+1} = 6^{k+1} + 20(k+1) - 1 = 6 \cdot 6^k + 20k + 19 + 19 \cdot (6^k + 20k - 1) - 19 \cdot (6^k + 20k - 1) = 25 \cdot (6^k + 16k) - 19 \cdot (6^k + 20k - 1)$, которое делится на 25. Таким образом, исходное число делится на 25.

№ 2.381. а) Все члены последовательности (a_n) , где $a_n = 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$, делится на 17.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$: $a_{k+1} = 2^{5(k+1)+3} + 5^{k+1} \cdot 3^{k+1+2} = 2^5 \cdot 2^{5k+3} + 5 \cdot 5^k \cdot 3 \cdot 3^{k+2} - 15 \cdot (2^{5k+3} + 5^k \cdot 3^{k+2}) + 15(2^{5k+3} + 5^k \cdot 3^{k+2}) = 17 \cdot 2^{5k+3} + 15 \cdot (2^{5k+3} + 5^k \cdot 3^{k+2})$, которое делится на 17. Таким образом, исходное число делится на 17.

б) Все члены последовательности (b_n) , где $b_n = 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$, делится на 37.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$: $b_{k+1} = 2^{k+1+5} \cdot 3^{4(k+1)} + 5^{3(k+1)+1} = 162 \cdot 2^{k+5} \cdot 3^{4k} + 125 \cdot 3^{3k+1} - 125 \cdot (2^{k+5} \cdot 3^{4k} + 5^{3k+1}) + 125 \cdot (2^{k+5} \cdot 3^{4k} + 5^{3k+1}) = 37 \cdot 2^{k+5} \cdot 3^{4k} + 125 \cdot (2^{k+5} \cdot 3^{4k} + 5^{3k+1})$, которое делится на 37. Таким образом, исходное число делится на 37.

№ 2.382. а) $3^n > n + 1$.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что неравенство справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$: $3^k > k + 1 \Leftrightarrow 3^k + 1 > k + 2 \quad 3 \cdot 3^k + 1 > 2 \cdot 3^k + 1$, то есть $3^{k+1} > 3^k + 1 > k + 2$. Таким образом, $3^{k+1} > (k+1) + 1$, что требовалось доказать.

б) $2^n > n$.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что неравенство справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2^k + 1 > k + 1$, что требовалось доказать.

№ 2.383. а) при $n > 4$ $2^n > n^2$.

Проверяем при $n = 5$ и допустим, что неравенство справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$: обозначим $k = 4 + m$, где $1, 2, \dots$, тогда $2^k > k^2 \Leftrightarrow 16 \cdot 2^m > m^2 + 8m + 16$. $2^{k+1} = 32 \cdot 2^m > 16 \cdot 2^m + 12 \cdot 2^m > m^2 + 8m + 16 + 12m$ (см. 2.382. (б)) $> m^2 + 10m + 25 =$

$= (m+5)^2$. Таким образом, $2^{k+1} > (k+1)^2$ что требовалось доказать.

б) $n > 3 \quad 3^n > n^3$.

Проверяем при $n = 4$ и допустим, что неравенство справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k+1$: $n = k+1$: обозначим $k = 3 + m$, где $1, 2, \dots$, тогда $3^k > k^3 \Leftrightarrow 27 \cdot 3^m > m^3 + 9m^2 + 27m + 27$. $3^{k+1} > 81 \cdot 3^m > 27 \cdot 3^m + 3 \cdot 3^m + 37 \cdot 3^m > m^3 + 9m^2 + 27m + 27 + 3m^2 + 37m + 37 > m^3 + 12m^2 + 48m + 64 = (m+4)^3 = (k+1)^3$, что требовалось доказать. При доказательстве мы воспользовались неравенством $3^m > m^2$, $m = 1, 2, \dots$, которое доказывается аналогично 2.383. (а), а также неравенством 2.382. (а).

№ 2.384. а) $(1,5)^n \geq 1 + 0,5n$.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что неравенство справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k+1$: $1,5^{k+1} = 1,5 \cdot 1,5^k \geq 1,5(1 + 0,5k) > 1,5 + 0,5k = 1 + 0,5(k+1)$, что требовалось доказать.

б) $(0,7)^n \geq 1 - 0,3n$.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что неравенство справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k+1$: $0,7^{k+1} = 0,7 \cdot 0,7^k \geq 0,7(1 - 0,3k) > 0,7 - 0,3k = 1 - 0,3(k+1)$, что требовалось доказать.

№ 2.385. а) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} - 1$.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что неравенство справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k+1$:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{\sqrt{k+2}} > \sqrt{k+1} + \frac{1}{\sqrt{k+2}} - 1 + \sqrt{k+2} - \sqrt{k+2} = \\ &= \sqrt{k+2} + \sqrt{k+1} \left(1 - \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}} \right) - 1 > \sqrt{k+2} - 1 = \sqrt{(k+1)+1} - 1, \text{ что требо-} \end{aligned}$$

валось доказать.

б) $(1+\alpha)^n \geq 1 + \alpha n$, где $\alpha > -1$.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что неравенство справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k+1$: $(1+\alpha)^{k+1} = (1+\alpha)(1+\alpha)^k \geq (1+\alpha)(1+\alpha k) = 1 + \alpha(k+1) + \alpha^2 k > 1 + \alpha(k+1)$, что требовалось доказать.

№ 2.386. а) В выпуклом n -треугольнике ($n > 3$) $\frac{n^2 - 3n}{2}$ диагоналей.

Проверяем при $n = 4$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k+1$.

Для создания $(n+1)$ угольника достаточно какую-нибудь из сторон n -угольника представить в виде ломаной, состоящей из двух отрезков, тогда к существующим диагоналям добавятся еще $k-2$ диагонали, поэтому их количество будет $\frac{k^2 - 3k}{2} + k - 2 = \frac{(k+1)^2 - 3(k+1)}{2}$, что требовалось доказать.

б) N различных точек на прямой определяют $\frac{N(N-1)}{2}$ отрезков с концами в этих точках.

Проверяем при $n=1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n=k$. Докажем, что оно справедливо и при $n=k+1$. Новая точка будет концом или началом k новых отрезков, поэтому общее количество отрезков будет $\frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{(k+1)k}{2}$, что требовалось доказать.

Для рекуррентно заданной последовательности докажите, что ее общий член может быть задан приведенной формулой (2.387. – 2.390.):

№ 2.387. а) $a_1 = 0,25; a_{k+1} = 0,5 \left(a_k + \frac{1}{2^{k+1}} \right); a_n = \frac{n}{2^{n+1}}$.

Проверяем при $n=1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n=k$. Докажем, что оно справедливо и при $n=k+1$.

$$a_{k+1} = 0,5 \left(a_k + \frac{1}{2^{k+1}} \right) = \frac{k+1}{2^{k+2}} = \frac{k+1}{2^{(k+1)+1}}, \text{ что требовалось доказать.}$$

б) $b_1 = 1; b_{k+1} = \frac{1}{3} (b_k + 2 \cdot 3^{-k}) b_n = \frac{2n+1}{3^n}$.

Проверяем при $n=1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n=k$. Докажем, что оно справедливо и при $n=k+1$.

$$b_{k+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{2k+1}{3^k} + 2 \cdot 3^{-k} \right) = \frac{2k+3}{3^{k+1}} = \frac{2(k+1)+1}{3^{k+1}}, \text{ что требовалось доказать.}$$

№ 2.388. а) $c_1 = 2; c_{k+1} = 2(c_k + 2^k); c_n = n \cdot 2^n$.

Проверяем при $n=1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n=k$. Докажем, что оно справедливо и при $n=k+1$.

$$c_{k+1} = 2(k \cdot 2^k + 2^k) = 2 \cdot 2^k \cdot (k+1) = (k+1) \cdot 2^{k+1}, \text{ что требовалось доказать.}$$

б) $a_1 = 0; a_{k+1} = 3(a_k + 3^k) a_n = (n-1) \cdot 3^n$.

Проверяем при $n=1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n=k$. Докажем, что оно справедливо и при $n=k+1$.

$$a_{k+1} = 3((k-1) \cdot 3^k + 3^k) = k \cdot 3^{k+1} = (k+1-1) \cdot 3^{k+1}, \text{ что требовалось доказать.}$$

№ 2.389. а) $a_1 = 5$; $a_{k+1} = 2a_k - k + 1$; $a_n = 2^{n+1} + n$.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$.
 $a_{k+1} = 2(2^{k+1} + k) - k + 1 = 2^{(k+1)+1} + (k + 1)$, что требовалось доказать.

б) $c_1 = 2$; $c_{k+1} = 3c_k + 2k - 1$; $c_n = 3^n - n$.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$.
 $c_{k+1} = 3(3^k - k) + 2k - 1 = 3^{k+1} - (k + 1)$, что требовалось доказать.

№ 2.390. а) $d_1 = 2$; $d_{k+1} = 2(d_k + (2k + 1) \cdot 2^k)$ $d_n = n^2 \cdot 2^n$.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$.
 $d_{k+1} = 2(k^2 \cdot 2^k + (2k + 1) \cdot 2^k) = 2^{k+1} \cdot (k + 1)^2$, что требовалось доказать.

б) $a_1 = \frac{1}{3}$; $a_{k+1} = \frac{1}{3} \left(a_k + \frac{2k+1}{3^k} \right)$; $a_n = \frac{n^2}{3^n}$.

Проверяем при $n = 1$ и допустим, что это утверждение справедливо при $n = k$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$.

$a_{k+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{k^2}{3^k} + \frac{2k+1}{3^k} \right) = \frac{(k+1)^2}{3^{k+1}}$, что требовалось доказать.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Вычислите (2.401. – 2.410.):

№ 2.401. а) $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = \frac{1}{9}$, $\pi < \alpha < 2\pi$.

Так как $\cos \alpha > 0$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$, а $\frac{3}{4}\pi < \frac{\alpha}{2} < \pi \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} > 0$. Тогда

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

б) $\cos \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = \frac{1}{8}$, $\pi < \alpha < 2\pi$.

Ответ: $-\frac{3}{4}$.

№ 2.402. а) $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

$$\text{Раскладывая } \sin 2\alpha, \text{ получаем: } 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: 0,6.

б) $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 0,5$.

Ответ: -0,6.

№ 2.403. а) $\sin \alpha$, если $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{3} < \pi$.

Раскладывая $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, получаем:

$$\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow 5 \cos \alpha = 5\sqrt{3} \sin \alpha - 6 \Rightarrow 100 \sin^2 \alpha - 60\sqrt{3} \sin \alpha +$$

$$+ 11 = 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3\sqrt{3} \pm 4}{10}. \text{ Поскольку } \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2}{3}\pi, \text{ то } \sin \alpha > \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3} + 4}{10}$.

б) $\cos \alpha$, если $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} - \alpha < \pi$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$.

№ 2.404. а) $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$, если $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $-\frac{9\sqrt{3}}{16}$.

б) $\cos 2\alpha \operatorname{tg} 4\alpha$, если $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Обозначим $t = \cos \alpha + \sin \alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = t^2 - 1 = -\frac{1}{2}$, тогда $\cos 2\alpha \operatorname{tg} 4\alpha =$

$$\frac{2 \sin 2\alpha \cos^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)}{1 - 2 \cdot \frac{1}{4}} = -\frac{3}{2}$$

Ответ: $-1,5$.

№ 2.405. а) $\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = \frac{2}{7}$.

Раскладывая произведение косинусов в сумму, получаем:

$$\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos \alpha) = \frac{1}{2}(2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1) = -\frac{27}{98}.$$

Ответ: $-\frac{27}{98}$.

б) $\sin \alpha \sin 3\alpha$, если $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{9}$.

№ 2.406. а) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 3\alpha$, если $\cos 2\alpha = -0,2$.

Ответ: $-\frac{9}{14}$.

б) $\operatorname{ctg} \frac{3\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Преобразуем:

$$\frac{\cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos 2\alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \cos 2\alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1}{-2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha + 1} = \frac{5}{7}.$$

Ответ: $\frac{5}{7}$.

№ 2.407. а) $\frac{\cos 2\alpha + 2}{2 \sin 2\alpha - 1}$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 3$.

$$\text{Преобразуем: } \frac{4 - 2 \sin^2 \alpha}{4 \sin \alpha \cos \alpha - 1} = \frac{4(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - 2}{4 \operatorname{ctg} \alpha - (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)} = 19$$

Ответ: 19.

$$\text{б) } \frac{5 - 4 \cos \alpha}{\left(\sin \frac{\alpha}{2} - 2 \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}, \text{ если } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,52.

№ 2.408. а) $\operatorname{tg} x$, если $4 \cos 2x + 5 \sin 2x = 2 \sin^2 x$, x – угол III четверти.

Ответ: 2.

б) $\operatorname{ctg} x$, если $\sin 2x = 3 - 11 \cos^2 x$, x – угол II четверти.

Преобразуем:

$$2 \sin x \cos x = 11 \sin^2 x - 8 \Rightarrow 8 \operatorname{ctg}^2 x + 2 \operatorname{ctg} x - 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} x = \frac{-1 \pm 5}{8}.$$

Подходит $\operatorname{ctg} x = -\frac{3}{4}$, так как во II четверти $\operatorname{ctg} x < 0$.

Ответ: -0,75.

№ 2.409. а) $\operatorname{tg} 2\alpha + 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

$$\text{Преобразуем: } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = -\frac{24}{7}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{-3 \pm 5}{4}. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -2, \text{ так как } \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3}{4}\pi. \text{ В итоге } \operatorname{tg} 2\alpha + 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{66}{7}$$

Ответ: $-9\frac{3}{7}$.

б) $\operatorname{tg} 2\alpha - 5 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Ответ: $-18\frac{3}{7}$.

№ 2.410. а) $\frac{\cos 140^\circ \sqrt{\sin^2 10^\circ - \cos^3 80^\circ}}{\sin 20^\circ}$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$$б) \frac{\cos 20^\circ - 0,5}{\cos 110^\circ \sqrt{0,75 - \sin 80^\circ \cos 70^\circ}}.$$

Преобразуем:
$$\frac{2 \sin 20^\circ \sin 40^\circ}{-\sin 20^\circ \sqrt{0,75 - 0,5(0,5 + \sin 10^\circ)}} = -\frac{2 \sin 40^\circ}{\sqrt{0,5(1 - \sin 10^\circ)}}.$$

Возведя в квадрат, получаем $\frac{2(1 - \cos 80^\circ)}{0,5(1 - \sin 10^\circ)} = 4 \cdot \frac{1 - \sin 10^\circ}{1 - \sin 10^\circ} = 4$. Искомое число будет -2 .

Ответ: -2 .

Докажите тождество (2.411. – 2.414.):

№ 2.411. а)
$$\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right).$$

Преобразуем:
$$\frac{\left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right).$$

б)
$$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}.$$

Преобразуем:
$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)} = \frac{\frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)}{2}}{\frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)}{2}} = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}.$$

№ 2.412. а)
$$\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha.$$

Преобразуем:
$$\frac{\cos 2\alpha}{\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} - \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}} = \frac{\cos 2\alpha \cdot \sin^2 2\alpha}{2 \cos 2\alpha \cdot 2} = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha.$$

б)
$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha + \cos^{-1} 2\alpha.$$

Преобразуем: $\frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 2\alpha} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha + \cos^{-1} 2\alpha.$

№ 2.413. а) $\frac{\sin \alpha + \cos(2\beta - \alpha)}{\cos \alpha - \sin(2\beta - \alpha)} = \frac{1 + \sin 2\beta}{\cos 2\beta}.$

Преобразуем: $\frac{\sin \alpha + \cos 2\beta \cos \alpha + \sin 2\beta \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin 2\beta \cos \alpha + \cos 2\beta \sin \alpha} =$
 $\frac{(\cos \beta - \sin \beta)(\cos \beta + \sin \beta) \cos \alpha + \sin \alpha (\cos \beta + \sin \beta)^2}{(\cos \beta - \sin \beta)(\cos \beta + \sin \beta) \sin \alpha + \cos \alpha (\cos \beta - \sin \beta)^2} = \frac{\cos \beta + \sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta} =$
 $= \frac{1 + \sin 2\beta}{\cos 2\beta}.$

б) $\frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sin \alpha} - 2 \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$

Преобразуем:

$$\frac{\sin(2\alpha + \beta) - \sin(2\alpha + \beta) + \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

№ 2.414. а) $\sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$

Условие для α означает, что $\sin \alpha > 0.$

Преобразуем $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{|\sin \alpha|} = \frac{1}{\sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha.$

б) $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} = -\frac{2}{\cos \alpha}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$

Условие означает, что $\cos \alpha < 0.$

Преобразуем: $\frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|} + \frac{1 - \sin \alpha}{|\cos \alpha|} = \frac{2}{|\cos \alpha|} = -\frac{2}{\cos \alpha}.$

Упростите выражение (2.415. – 2.418.):

№ 2.415. а) $\frac{4 \cos \alpha}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$

Преобразуем: $\frac{4 \cos \alpha}{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} - \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{4 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{-4 \cos \alpha} = -\sin^2 \alpha.$

Ответ: $-\sin^2 \alpha.$

$$б) \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - \cos \alpha .$$

Ответ: 1.

№ 2.416. а) $\frac{\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x}{\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x} .$

Ответ: $\operatorname{ctg} 5x$.

$$б) \frac{4 \sin 2y \sin 3y}{\sin 2y + \sin 4y - \sin 6y} .$$

Преобразуем: $\frac{4 \sin 2y \sin 3y}{2 \sin 3y (\cos y - \cos 3y)} = \frac{2 \sin 2y}{2 \sin y \sin 2y} = \frac{1}{\sin y} .$

Ответ: $\frac{1}{\sin y} .$

№ 2.417. а) $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha + \frac{1}{\sin 2\alpha} .$

Преобразуем: $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha \sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \sin 2\alpha} = 2 \operatorname{ctg} \alpha .$

$$б) \frac{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha} .$$

Ответ: $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha .$

№ 2.418. а) $2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) .$

Ответ: -1 .

$$б) \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} .$$

Преобразуем:

$$\frac{\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha)}{\sin^6 \alpha - \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha)} = \frac{-2 \cos^2 \alpha}{- \cos^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha) - \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha} = \frac{2}{3} .$$

Ответ: $\frac{2}{3} .$

№ 2.419. Какие целые значения может принимать выражение:

а) $7 \cos \alpha - 3 \sin \alpha .$

Преобразуем: $\sqrt{58} \left(\frac{7}{\sqrt{58}} \cos \alpha - \frac{3}{\sqrt{58}} \sin \alpha \right)$. Обращаем внимание,

что $\left(\frac{7}{\sqrt{58}} \right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{58}} \right)^2 = 1$. Тогда найдется такой угол φ , что

$\sin \varphi = \frac{7}{\sqrt{58}} ; \cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{58}}$. Тогда выражение примет вид: $\sqrt{58} \sin(\varphi - \alpha)$,

которое принимает значение от $-\sqrt{58}$ до $\sqrt{58}$. Тогда целыми числами будут числа от -7 до 7 включительно.

Ответ: от -7 до 7 включительно.

б) $5 \cos \alpha + 4 \sin \alpha$.

Ответ: от -6 до 6 включительно.

№ 2.420. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения:

а) $3 \cos \alpha + 4 \sin \alpha$.

Ответ: 5 и -5 .

б) $5 \sin \alpha - 12 \cos \alpha$.

Сделаем такие же преобразования как в 2.419 (а). Тогда

$$5 \sin \alpha - 12 \cos \alpha = 13 \sin(\alpha - \varphi), \text{ где } \sin \varphi = \frac{12}{13}.$$

Ответ: 13 и -13 .

№ 2.421. Какое из чисел ближе к единице:

а) $2 \sin 29^\circ$ или $2 \sin 31^\circ$.

Представим: $1 = 2 \sin 30^\circ$, тогда:

$$2 \sin 30^\circ - 2 \sin 29^\circ = 4 \sin 0,5^\circ \cdot \cos 29,5^\circ$$

$$2 \sin 31^\circ - 2 \sin 30^\circ = 4 \sin 0,5^\circ \cdot \cos 30,5^\circ$$

$$\cos 29,5^\circ > \cos 30,5^\circ \Rightarrow 2 \sin 31^\circ \text{ ближе к } 1.$$

Ответ: $2 \sin 31^\circ$.

б) $\operatorname{tg} 44^\circ$ или $\operatorname{tg} 46^\circ$?

Ответ: $\operatorname{tg} 44^\circ$.

№ 2.422. а) Пусть $2 \cos 2\alpha + 7 \sin \alpha = 0$. Найдите $\sin \alpha$ и $\cos 2\alpha$.

Ответ: $-0,25$ и $0,875$.

б) Пусть $13 \cos \alpha - 2 \cos 2\alpha = 5$. Найдите $\cos \alpha$ и $\cos 2\alpha$.

$$\text{Преобразуем: } 13 \cos \alpha - 2(2 \cos^2 \alpha - 1) = 5 \Leftrightarrow 4 \cos^2 \alpha - 13 \cos \alpha + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{4}; \cos 2\alpha = -\frac{7}{8}$$

Ответ: $-0,25$ и $-0,875$.

№ 2.423. Докажите, что для всех допустимых значений α :

$$\text{а) } \frac{\sin 16\alpha}{\sin \alpha} < 16.$$

Преобразуем левую часть:

$$\frac{2 \sin 8\alpha \cos 8\alpha}{\sin \alpha} = \dots = \frac{16 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha}{\sin \alpha} =$$

$= 16 \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha < 16$, так как произведение косинусов меньше 1 ($\alpha = 0$ не подходит по ОДЗ), что требовалось доказать.

$$\text{б)} \frac{\sin 16\alpha}{\cos \alpha} + 16 > 0.$$

Преобразуем аналогично как в 2.423 (а):

$16(\sin \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha + 1) > 0$, так как произведение синуса и косинусов больше -1 ($\alpha = \frac{\pi}{2}$ не подходит по ОДЗ), что требовалось доказать.

№ 2.424. Докажите, что два равенства одновременно не выполняются ни при каких α и β :

$$\text{а)} \cos \alpha = 5 \cos \beta - 1 \text{ и } \sin \alpha = 6 \cos \beta + 3.$$

Воспользуемся тригонометрическим тождеством $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:
 $61 \cos^2 \beta + 16 \cos \beta + 12 = 0 \Rightarrow D < 0$, поэтому корней нет, а, следовательно, утверждение справедливо.

$$\text{б)} \cos \alpha = 3 \sin \beta - 2 \text{ и } \sin \alpha = 5 \sin \beta + 1.$$

Как в предыдущем примере: $34 \sin^2 \beta - 2 \sin \beta + 4 = 0 \Rightarrow D < 0$, поэтому корней нет, а, следовательно, утверждение справедливо.

№ 2.425. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ составляют арифметическую прогрессию: $d = \alpha_2 - \alpha_1$. Упростите выражение:

$$\text{а)} 1) \sin \frac{d}{2} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n);$$

$$2) \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n.$$

В первом случае при $n = 1$ получаем $\sin \frac{d}{2} \sin \alpha_1$, при $n = 2$

$$\sin \frac{d}{2} (\sin \alpha + \sin(\alpha + d)) = 2 \sin \frac{d}{2} \cos \frac{d}{2} \sin \left(\alpha + \frac{d}{2} \right) = \sin 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin \left(\alpha + \frac{d}{2} \right); \text{ при}$$

$$n = 3: \sin d \sin \left(\alpha + \frac{d}{2} \right) + \sin \frac{d}{2} \sin(\alpha + 2d) = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\alpha - \frac{d}{2} \right) - \cos \left(\alpha + \frac{3}{2} d \right) \right) + \\ + \frac{1}{2} \left(\cos \left(\alpha + \frac{3}{2} d \right) - \cos \left(\alpha + \frac{5}{2} d \right) \right) = \sin \frac{3d}{2} \cdot \sin(\alpha + d).$$

Отмечаем закономерность и предполагаем, что исходная сумма выражается формулой: $\sin \frac{nd}{2} \cdot \sin \left(\alpha + \frac{d(n-1)}{2} \right)$. Докажем ее справедливость с помощью математической индукции. Допустим, что формула справедлива при $n = k$. Докажем, что она справедлива и при

$$n = k + 1: \sin \frac{kd}{2} \cdot \sin \left(\alpha + \frac{d(k-1)}{2} \right) + \sin \frac{d}{2} \cdot \sin(\alpha + kd) = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\alpha - \frac{d}{2} \right) - \right. \\ \left. - \cos \left(\alpha + dk - \frac{d}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\cos \left(\alpha + dk - \frac{d}{2} \right) - \cos \left(\alpha + kd + \frac{d}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\alpha - \frac{d}{2} \right) - \right.$$

$-\cos\left(\alpha + kd + \frac{d}{2}\right) = \sin\frac{(k+1)d}{2} \cdot \sin\left(\alpha + \frac{d((k+1)-1)}{2}\right)$, что требовалось доказать.

Ответ: 1) $\sin\frac{(n+1)d}{2} \cdot \sin\left(\alpha + \frac{d((n+1)-1)}{2}\right)$; 2) $\frac{\sin\frac{(n+1)d}{2} \cdot \sin\left(\alpha + \frac{d(n-1)}{2}\right)}{\sin\frac{d}{2}}$.

б) 1) $\sin\frac{d}{2}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \dots + \cos\alpha_n)$;

2) $\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \dots + \cos\alpha_n$.

Ответ: 1) $\sin\frac{nd}{2} \cdot \cos\left(\alpha + \frac{(n-1)d}{2}\right)$; 2) $\frac{\sin\frac{nd}{2}}{\sin\frac{d}{2}} \cdot \cos\left(\alpha + \frac{(n-1)d}{2}\right)$.

Вычислите (2.426. – 2.430.):

№ 2.426. а) $\cos\alpha$, если $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{13}{14}$, а $\alpha - \frac{\pi}{3}$ – угол III четверти.

Преобразуем: $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha = -\frac{13}{14} \Rightarrow 7\sqrt{3}\sin\alpha =$
 $= -13 - 7\cos\alpha \Rightarrow 98\cos^2\alpha + 91\cos\alpha + 11 = 0. \quad \cos\alpha = \frac{-91 \pm 63}{2 \cdot 98}.$

$\cos\alpha = -\frac{11}{14}$ не подходит, так как в III четверти $\begin{cases} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) < 0 \\ \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha < \sqrt{3}\cos\alpha = -\frac{11\sqrt{3}}{14} \\ \sin\alpha < -\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\alpha = \frac{11}{14\sqrt{3}} \end{cases}, \text{ а } \sin\alpha = -\frac{5\sqrt{3}}{14} > -\frac{11\sqrt{3}}{14}.$

Ответ: $-\frac{1}{7}$.

б) $\sin\alpha$, если $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{5}{13}$, а $\alpha - \frac{\pi}{4}$ – угол I четверти.

Ответ: $\frac{17}{13\sqrt{2}}$.

№ 2.427. а) $\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right)$, если $\sin\left(\frac{11\pi}{10} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

б) $\sin\left(\frac{3\pi}{7} - \beta\right)$, если $\cos\left(\frac{\pi}{14} + \beta\right) = -\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Преобразуем: $\sin\left(\frac{3\pi}{7} - \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{14} + \beta\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{14} + \beta\right) = -\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{7}}{3}$.

№ 2.428. а) $tg^4\alpha + ctg^4\alpha$, если $tg\alpha - ctg\alpha = a$.

Преобразуем:

$$(tg\alpha - ctg\alpha)^2 = a^2 \Rightarrow tg^2\alpha + ctg^2\alpha = a^2 + 2 \Rightarrow (tg^2\alpha + ctg^2\alpha)^2 = (a^2 + 2)^2 =$$

$$tg^4\alpha + ctg^4\alpha + 2 = (a^2 + 2)^2 \Rightarrow tg^4\alpha + ctg^4\alpha = a^4 + 4a^2 + 2.$$

Ответ: $a^4 + 4a^2 + 2$.

б) $\sqrt{tg^3\alpha} + \sqrt{ctg^3\alpha}$, если $tg\alpha + ctg\alpha = a^2 - 2$, ($a > 2$).

Ответ: $a^3 - 3a$.

№ 2.429. а) $\sin 50^\circ (1 - 2 \cos 80^\circ)$.

Ответ: 0,5.

б) $\sin 10^\circ (0,5 + \sin 70^\circ)$.

Преобразуем:

$$0,5 \sin 10^\circ + \frac{1}{2} (\cos 60^\circ - \cos 80^\circ) = \frac{1}{4} + 0,5 (\sin 10^\circ - \sin 10^\circ).$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

№ 2.430. а) $\frac{2 \sin 10^\circ + \sin 50^\circ}{2 \sin 80^\circ - \sqrt{3} \sin 50^\circ}$.

Преобразуем: $\frac{\sin 10^\circ + 2 \sin 30^\circ \cos 20^\circ}{2(\sin 80^\circ - \sin 50^\circ \cos 30^\circ)} = \frac{\sin 10^\circ + \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ - \sin 20^\circ} =$

$$= \frac{\sqrt{3} \sin 40^\circ}{\cos 50^\circ} = \frac{\sqrt{3} \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

б) $\cos^2 70^\circ + \sin^2 25^\circ + \sqrt{2} \cos 70^\circ \cos 65^\circ$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

№ 2.431. а) Пусть $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $tg\alpha = \frac{1}{7}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $tg\beta = \frac{3}{4}$.

Докажите, что $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{4}$.

$$\text{Раскладываем: } tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{5\pi}{4}, \text{ так}$$

как $\pi < \alpha + \beta < 2\pi$.

б) Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $tg\alpha = \frac{1}{5}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, $tg\beta = \frac{2}{3}$.

Докажите, что $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{4}$.

$$\text{Раскладываем: } tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{5\pi}{4}, \text{ так}$$

как $\pi < \alpha + \beta < 2\pi$.

Докажите тождество (2.432. – 2.434.):

№ 2.432. а) $tg3\alpha = tg\alpha tg(60^\circ + \alpha) tg(60^\circ - \alpha)$.

$$\begin{aligned} \text{Раскладываем: } tg3\alpha &= \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{\sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3)} = tg\alpha \cdot \frac{2 \cos 2\alpha + 1}{2 \cos 2\alpha - 1} = \\ &= tg\alpha \cdot \frac{\cos 2\alpha - \cos 120^\circ}{\cos 2\alpha + \cos 120^\circ} = tg\alpha \cdot \frac{-\sin(\alpha - 60^\circ) \sin(\alpha + 60^\circ)}{\cos(\alpha - 60^\circ) \cos(\alpha + 60^\circ)} = tg\alpha tg(60^\circ - \alpha) \cdot \\ &\cdot tg(\alpha + 60^\circ), \text{ что требовалось доказать.} \end{aligned}$$

б) $\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha)$.

$$\begin{aligned} \text{Раскладываем: } \sin 3\alpha &= \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha) = \sin \alpha (2 \cos 2\alpha + 1) = \\ &= 2 \sin \alpha (\cos 2\alpha - \cos 120^\circ) = 4 \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha), \text{ что требо-} \\ &\text{валось доказать.} \end{aligned}$$

№ 2.433. а) $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$.

$$\text{Сделаем преобразования: } \frac{\cos 10^\circ \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{1}{4} \frac{\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \sin 30^\circ}{\cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{1}{8} \frac{\cos 10^\circ \cdot \sin 30^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{1}{16}.$$

$$\text{б) } \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -0,5.$$

Воспользуемся результатами задачи 2.425 (б):

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{\sin \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2} \frac{\sin \pi - \sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = -0,5.$$

№ 2.434. а) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1$, если $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Воспользуемся условием $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, тогда:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1.$$

$$\text{б) } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 0,5 - \sqrt{2} \cos \alpha \cos \beta, \text{ если } \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{Преобразуем: } \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} = 1 + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) =$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(\alpha - \beta) \right) = 0,5 - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) =$$

$$= 0,5 - \sqrt{2} \cos \alpha \cos \beta.$$

Пусть A , B и C — углы треугольника. Докажите тождество (2.435. — 2.436.):

$$\text{№ 2.435. а) } \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

Здесь и в дальнейшем мы будем использовать свойство углов треугольника: $A + B + C = 180^\circ$.

$$\text{Преобразуем: } \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{\cos \frac{C}{2} \left(\sin \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \right)}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A+B}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \right)}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{\cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \right)}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

$$6) \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C = 1.$$

Преобразуем: $\frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} + \frac{\cos A \cos C}{\sin A \sin C} + \frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C} =$

$$= \frac{\sin(A+B) \cos A \cos B - \sin B \cos A \cos(A+B) - \sin A \cos B \cos(A+B)}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} =$$

$$= \frac{\sin(A+B)(\cos A \cos B - \cos(A+B))}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} = \frac{\frac{1}{2} \sin(A+B)(\cos(A-B) - \cos(A+B))}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} =$$

$$= \frac{\sin(A+B) \sin A \cdot \sin B}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} = \frac{\sin C \cdot \sin A \cdot \sin B}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} = 1.$$

№ 2.436. а) $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = -4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C.$

Преобразуем: $2 \sin 2(A+B) \cos 2(A-B) + 2 \sin 2(A+B) \cos 2(A+B) =$

$$= 2 \sin C (\cos 2(A-B) + \cos 2(A+B)) = -4 \sin C \cdot \sin A \cdot \sin B.$$

$$6) \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = -4 \cos \frac{3A}{2} \cos \frac{3B}{2} \cos \frac{3C}{2}.$$

Преобразуем: $2 \sin \frac{3}{2}(A+B) \cos \frac{3}{2}(A-B) + 2 \sin \frac{3}{2}(A+B) \cos \frac{3}{2}(A+B) =$

$$= 2 \sin \frac{3}{2}(A+B) \cdot \cos \frac{3}{2} A \cos \frac{3}{2} B = -4 \cos \frac{3}{2} C \cdot \cos \frac{3}{2} A \cdot \cos \frac{3}{2} B.$$

Упростите выражение (2.437. – 2.438.):

№ 2.437. а) $\frac{1 - \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)}{(1 + \sqrt{3}) \cos x - (\sqrt{3} - 1) \sin x}.$

Ответ: $\frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{12} \right)}{\sqrt{2}}.$

б) $\frac{\sqrt{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \sin x + \cos x}{2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right)}.$

$$\begin{aligned} \text{Преобразуем: } & \frac{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\left(1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)} = \\ & = \sqrt{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \frac{1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right). \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

№ 2.438. а) $\frac{\sin 3\alpha}{1 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)} - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

Преобразуем:

$$\frac{\sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha)}{1 - \cos 2\alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha} = \frac{\sin \alpha (\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha) (\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha)}{2 \sin \alpha (\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right).$$

В итоге: $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Ответ: 0.

б) $\frac{\cos 3\alpha}{1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha\right)} - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

Ответ: 0.

Докажите неравенство (2.439. – 2.440.):

№ 2.439. а) $\sin^3 \alpha + \cos^5 \alpha \geq -1$.

Преобразуем: $\sin^3 \alpha + \cos^5 \alpha + 1 = \sin^3 \alpha + \cos^5 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha (1 + \sin \alpha) + \cos^2 \alpha (1 + \cos^3 \alpha) \geq 0$, так как $|\sin \alpha| \leq 1$ и $|\cos \alpha| \leq 1$.

Таким образом, $\sin^3 \alpha + \cos^5 \alpha \geq -1$.

б) $\cos^3 \alpha - \sin^7 \alpha \leq 1$.

Преобразуем: $\cos^3 \alpha - \sin^7 \alpha - 1 = \cos^3 \alpha - \sin^7 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha (\cos \alpha - 1) - \sin^2 \alpha (1 + \sin^5 \alpha) \leq 0$, так как $|\sin \alpha| \leq 1$ и $|\cos \alpha| \leq 1$.

Таким образом, $\cos^3 \alpha - \sin^7 \alpha \leq 1$.

№ 2.440. а) $\sqrt{\cos 70^\circ} + \sqrt[3]{\cos 20^\circ} > 1$.

Преобразуем: $\sqrt{\sin 20^\circ} + \sqrt[3]{\cos 20^\circ} - 1 = \sqrt{\sin 20^\circ} + \sqrt[3]{\cos 20^\circ} -$
 $-\sin^2 20^\circ - \cos^2 20^\circ = \sqrt{\sin 20^\circ} \left(1 - \sin^{\frac{3}{2}} 20^\circ\right) + \sqrt[3]{\cos 20^\circ} \left(1 - \cos^{\frac{3}{2}} 20^\circ\right) > 0$,

так как $0 < \sin 20^\circ < 1$ и $0 < \cos 20^\circ < 1$.

Таким образом, $\sqrt{\cos 70^\circ} + \sqrt[3]{\cos 20^\circ} > 1$.

б) $\sqrt[3]{\sin 10^\circ} + \sqrt[5]{\sin 80^\circ} > 1$.

Преобразуем: $\sqrt[3]{\sin 10^\circ} + \sqrt[5]{\cos 10^\circ} - 1 = \sqrt[3]{\sin 10^\circ} + \sqrt[5]{\cos 10^\circ} -$
 $-\sin^2 10^\circ - \cos^2 10^\circ = \sqrt[3]{\sin 10^\circ} \left(1 - \sin^{\frac{3}{2}} 10^\circ\right) + \sqrt[5]{\cos 10^\circ} \left(1 - \cos^{\frac{4}{5}} 10^\circ\right) > 0$,

так как $0 < \sin 10^\circ < 1$ и $0 < \cos 10^\circ < 1$.

Таким образом, $\sqrt[3]{\sin 10^\circ} + \sqrt[5]{\sin 80^\circ} > 1$.

Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения (2.441. – 2.442.):

№ 2.441. а) $\cos 2\alpha + 3 \sin \alpha$.

Преобразуем: $-2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha + 1$. Обозначим $t = \sin \alpha$, причем $|t| \leq 1$. Тогда квадратный трехчлен $-2t^2 + 3t + 1$ принимает максимальное значение при $t = \frac{3}{4}$, равное $2\frac{1}{8}$, а минимальное значение при $t = -1$, равное -4 .

Ответ: -4 и $2\frac{1}{8}$.

б) $\cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $-\frac{9}{16}$ и 1 .

№ 2.442. а) $\frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{1 + \sin \alpha \cos \alpha}$.

Ответ: 0 и 4 .

$$\text{б) } \frac{1 - 6 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{3 + \cos \alpha}.$$

Преобразуем: $\frac{1 - 3(1 - \cos \alpha)}{3 + \cos \alpha} = \frac{3 \cos \alpha - 2}{\cos \alpha + 3} = 3 - \frac{11}{3 + \cos \alpha}$. Минимальное значение достигается при $\cos \alpha = -1$, равное $-2,5$, а максимальное при $\cos \alpha = 1$ и равное $\frac{1}{4}$.

Ответ: $-2,5$ и $0,25$.

№ 2.443. а) решите неравенство $x^2 - x(\cos 2 + \cos 3) + \cos 2 \cdot \cos 3 < 0$ и укажите какое-нибудь рациональное число, ему удовлетворяющее.

По теореме Виета находим корни $x_1 = \cos 2$ и $x_2 = \cos 3$ и квадратный трехчлен отрицателен при $\cos 3 < x < \cos 2$. В этот интервал попадает число $-\frac{1}{2} = \cos \frac{2}{3} \pi$.

Ответ: $(\cos 3; \cos 2)$, например $-0,5$.

б) решите неравенство $x^2 - x(\sin 2 + \sin 3) + \sin 2 \cdot \sin 3 > 0$ и укажите какое-нибудь рациональное число, ему не удовлетворяющее.

Ответ: $(-\infty; \sin 3) \cup (\sin 2; +\infty)$, например $0,5$

№ 2.444. Решите неравенство и укажите какое-нибудь число, ему удовлетворяющее:

$$\text{а) } x^2 - 2x \cdot \cos 6,5 \cos 0,5 + \cos 6 \cos 7 < 0.$$

Ответ: $(\cos 7; \cos 6)$, например $\cos 6,9$.

$$\text{б) } x^2 + 2x \cdot \cos 3,5 \sin 0,5 - \sin 3 \sin 4 < 0.$$

$$\text{Преобразуем: } x^2 + x(\sin 4 - \sin 3) - \sin 3 \sin 4 < 0.$$

По теореме Виета находим корни $x_1 = -\sin 4$ и $x_2 = \sin 3$. Квадратный трехчлен отрицателен при $\sin 3 < x < -\sin 4$. (Замечание: сравнение величин $\sin 3$ и $-\sin 4$ следует проводить на единичной окружности). В этот интервал попадает число $-\sin 3,5$.

Ответ: $(\sin 3; -\sin 4)$, например $-\sin 3,5$.

№ 2.445. Сравните значения выражений:

$$\text{а) } \cos(5 - 2\alpha)\cos 2\alpha - \sin(5 - 2\alpha)\sin 2\alpha \text{ и } \sin(\alpha + 2)\cos(1 - \alpha) + \sin(1 - \alpha)\cos(\alpha + 2)$$

Преобразуем:

$$\cos(5 - 2\alpha)\cos 2\alpha - \sin(5 - 2\alpha)\sin 2\alpha = \cos(5 - 2\alpha + 2\alpha) = \cos 5.$$

$$\sin(\alpha + 2)\cos(1 - \alpha) + \sin(1 - \alpha)\cos(\alpha + 2) = \sin(\alpha + 2 + 1 - \alpha) = \sin 3.$$

$$\cos 5 \vee \sin 3 \Rightarrow \cos 5 \vee \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3\right) \Rightarrow \cos(2\pi - 5) \vee \cos\left(3 - \frac{\pi}{2}\right). \text{ Так как } 2\pi - 5$$

$$\text{и } 3 - \frac{\pi}{2} \text{ лежат в I четверти и } 3 - \frac{\pi}{2} > 2\pi - 5, \text{ то } \cos(2\pi - 5) > \cos\left(3 - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos 5 > \sin 3.$$

Ответ: первое больше.

$$\text{б) } \cos(4 + \alpha)\cos(1 + \alpha) + \sin(1 + \alpha)\sin(4 + \alpha) \text{ и}$$

$$\sin\left(5 - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(5 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Ответ: второе больше.

Докажите утверждение (2.446. – 2.448.):

№ 2.446. а) числа $\sin 5^\circ$; $0,5 \cos 25^\circ$ и $\sin 55^\circ$ составляют арифметическую прогрессию.

Для трех последовательных членов арифметической прогрессии должно выполняться условие: $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) \Rightarrow \cos 25^\circ = \sin 5^\circ +$
 $+ \sin 55^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos 25^\circ = \cos 25^\circ$, что требовалось доказать.

б) числа $\cos 20^\circ - 0,5$; $\sin 40^\circ$ и $\cos 20^\circ$ составляют геометрическую прогрессию.

Для трех последовательных членов геометрической прогрессии должно выполняться условие: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} \Rightarrow \sin^2 40^\circ =$
 $= (\cos 20^\circ - 0,5) \cdot \cos 20^\circ = (\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \cdot \cos 20^\circ = 2 \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \cos 20^\circ =$
 $= \sin^2 40^\circ$, что требовалось доказать.

№ 2.447. а) для того, чтобы $8 \cos 2\alpha - \sin 2\alpha = 4$, достаточно, чтобы $2 \cos \alpha + 3 \sin \alpha = 0$.

$$\text{Из второго уравнения } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}.$$

Из первого уравнения: $16 \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 12 \Rightarrow 6 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha -$
 $- 2 = 0$ и $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$ удовлетворяет уравнению, что требовалось доказать.

б) для того, чтобы $3 \sin \alpha + \cos \alpha = 0$, необходимо, чтобы $4 \cos 2\alpha + 7 \sin 2\alpha = -1$.

$$\text{Из первого уравнения } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}.$$

Из второго уравнения: $8 \cos^2 \alpha + 14 \sin \alpha \cos \alpha = 3 \Rightarrow 3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 14 \operatorname{tg} \alpha - 5 = 0$ и $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$ удовлетворяет уравнению, что требовалось доказать.

№ 2.448. Два выражения A и B равны при всех допустимых значениях α . Найдите также все такие значения, принимаемые выражением A , которые не принимает выражение B .

$$\text{а) } A = 2 \sin \alpha, \quad B = \frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha}.$$

$$\text{Преобразуем } B = \frac{2 \sin \alpha \cos 2\alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha)}{1 - 2 \sin^2 \alpha} = 2 \sin \alpha.$$

Если $\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $A = \pm \sqrt{2}$, а B не существует.

Ответ: $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$.

$$\text{б) } A = 2 \cos \alpha, \quad B = \frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1}.$$

$$\text{Преобразуем } B = \frac{2 \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{2 \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1)}{2 \cos^2 \alpha - 1} = 2 \cos \alpha.$$

Если $\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $A = \pm \sqrt{2}$, а B не существует.

Ответ: $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$.

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

№ 2.501. а) не решая уравнение $2x^2 - 3x - 11 = 0$, найдите $\frac{x_2}{1+x_1} + \frac{x_1}{1+x_2}$, где x_1, x_2 — его корни.

По теореме Виета: $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$; $x_1 x_2 = -\frac{11}{2}$. Преобразуем:

$$\frac{x_2}{1+x_1} + \frac{x_1}{1+x_2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 + (x_1+x_2)}{(x_1+x_2) + x_1x_2 + 1} = \frac{\frac{9}{4} + 11 + \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{11}{2} + 1} = -\frac{59}{12}.$$

Ответ: $-4\frac{11}{12}$.

б) не решая уравнение $9x^2 + 18x - 8 = 0$, найдите $x_1^3 + x_2^3$, где x_1, x_2 — его корни.

Ответ: $-13\frac{1}{3}$.

№ 2.502. а) Найдите значение выражения $\frac{x_2}{2x_2 - x_1} + \frac{x_1}{2x_1 + x_2}$, где x_1, x_2 — корни трехчлена $x^2 + 9x + 13$.

Применяя теорему Виета, находим $x_1 + x_2 = -9$; $x_1 x_2 = 13$. Преобразуем:

$$\frac{x_2}{2x_2 - x_1} + \frac{x_1}{2x_1 - x_2} = \frac{6x_1x_2 - (x_1+x_2)^2}{-2(x_1+x_2)^2 + 9x_1x_2} = \frac{6 \cdot 13 - 81}{-2 \cdot 81 + 9 \cdot 13} = \frac{1}{15}.$$

Ответ: $\frac{1}{15}$.

б) Найдите значение выражения $\frac{x_1}{x_1^2 - 1} + \frac{x_2}{x_2^2 - 1}$, где x_1, x_2 — корни трехчлена $x^2 - 18x + 11$.

Ответ: -1 .

№ 2.503. а) Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + 13x - 17 = 0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являлись бы числа $2 - x_1$ и $2 - x_2$.

Ответ: $x^2 - 17x + 13 = 0$.

б) Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 - 7x - 46 = 0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являлись бы числа $2x_1 + x_2$ и $2x_2 - x_1$.

По теореме Виета: $x'_1 + x'_2 = 2x_1 + x_2 + 2x_2 + x_1 = 3(x_1 + x_2) = 3 \cdot 7 = 21$
 $x'_1 \cdot x'_2 = (2x_1 + x_2) \cdot (2x_2 + x_1) = 2(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 = 2 \cdot 49 - 46 = 52$. В результате искомое уравнение будет: $x^2 - 21x + 52 = 0$.

№ 2.504. а) пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + 3x - 2 = 0$. Составьте квадратное уравнение, единственным корнем которого явилось бы число $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}$.

Преобразуем: $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{9 + 4}{-2} = -\frac{13}{2}$, тогда

искомое уравнение будет $\left(x + \frac{13}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 52x + 169 = 0$.

Ответ: $4x^2 + 52x + 169 = 0$.

б) пусть x_1, x_2 — корни трехчлена $x^2 - 7x + 3$. Напишите квадратный трехчлен, корнями которого являлись бы числа $\frac{x_1 + x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ и (-1) .

Ответ: $43x^2 + 36x - 7$.

№ 2.505. а) найдите a , если x_1, x_2 — корни уравнения $2x^2 + (2a - 1)x + a - 1 = 0$ — удовлетворяет соотношению $3x_1 - 4x_2 = 11$.

Ответ: 4,125 или -2 .

б) найдите a , если x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 - (a + 3)x + 3 = 0$ — удовлетворяют соотношению $\frac{x_1}{x_2} = 1,5$.

По теореме Виета получаем: $x_1 x_2 = 1,5x_2^2 = \frac{3}{a}$ и $x_1 + x_2 = 2,5x_2 = \frac{a + 3}{a}$. Итак: $x_2 = \frac{2(a + 3)}{5a} \Rightarrow \frac{3 \cdot 4(a + 3)^2}{2 \cdot 2,5 \cdot a^2} = \frac{3}{a} \Rightarrow 2a^2 - 13a + 18 = 0 \Rightarrow a_1 = 2;$
 $a_2 = 4,5$.

Ответ: 2 или 4,5.

№ 2.506. а) определите b , если один из корней уравнения $4x^2 - 15x + b = 0$ является квадратом другого.

б) Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 - 7x - 46 = 0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являлись бы числа $2x_1 + x_2$ и $2x_2 - x_1$.

По теореме Виета: $x'_1 + x'_2 = 2x_1 + x_2 + 2x_2 + x_1 = 3(x_1 + x_2) = 3 \cdot 7 = 21$
 $x'_1 \cdot x'_2 = (2x_1 + x_2) \cdot (2x_2 + x_1) = 2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 2 \cdot 49 - 46 = 52$. В результате искомое уравнение будет: $x^2 - 21x + 52 = 0$.

№ 2.504. а) пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + 3x - 2 = 0$. Составьте квадратное уравнение, единственным корнем которого явилось бы число $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2}$.

Преобразуем: $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{9 + 4}{-2} = -\frac{13}{2}$, тогда

искомое уравнение будет $\left(x + \frac{13}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 52x + 169 = 0$.

Ответ: $4x^2 + 52x + 169 = 0$.

б) пусть x_1, x_2 — корни трехчлена $x^2 - 7x + 3$. Напишите квадратный трехчлен, корнями которого являлись бы числа $\frac{x_1 + x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ и (-1) .

Ответ: $43x^2 + 36x - 7$.

№ 2.505. а) найдите a , если x_1, x_2 — корни уравнения $2x^2 + (2a - 1)x + a - 1 = 0$ — удовлетворяет соотношению $3x_1 - 4x_2 = 11$.

Ответ: 4,125 или -2.

б) найдите a , если x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 - (a + 3)x + 3 = 0$ — удовлетворяют соотношению $\frac{x_1}{x_2} = 1,5$.

По теореме Виета получаем: $x_1x_2 = 1,5x_2^2 = \frac{3}{a}$ и $x_1 + x_2 = 2,5x_2 = \frac{a + 3}{a}$. Итак: $x_2 = \frac{2(a + 3)}{5a} \Rightarrow \frac{3 \cdot 4(a + 3)^2}{2 \cdot 25 \cdot a^2} = \frac{3}{a} \Rightarrow 2a^2 - 13a + 18 = 0 \Rightarrow a_1 = 2;$
 $a_2 = 4,5$.

Ответ: 2 или 4,5.

№ 2.506. а) определите b , если один из корней уравнения $4x^2 - 15x + b = 0$ является квадратом другого.

Пусть $x_1 = x_2^2$, тогда $x_2^3 = \frac{b}{4}$ и $x_2 + x_2^2 = \frac{15}{4} \Rightarrow 4x_2^2 + 4x_2 - 15 = 0 \Rightarrow$
 $x_2 = -\frac{5}{2}$ или $x_2 = \frac{3}{2}$, а $b = -\frac{125}{2}$ или $b = \frac{27}{2}$.

Ответ: 13,5 или -62,5.

б) определите p , если сумма кубов уравнения $2x^2 - 8x + p = 0$ равна 34.

Ответ: 5.

№ 2.507. а) Найдите наибольшее значение функции $y = -x^2 + px + q$, если ее график проходит через точки $P(-1; -13)$ и $Q(3; -1)$.

Ответ: -0,75.

б) Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 + bx + c$, если ее график проходит через точки $A(-1; 10)$ и $B(2; 13)$.

Получаем систему уравнений:
$$\begin{cases} -b + c = 8 \\ 2b + c = 5 \end{cases} \Rightarrow b = -1; c = 7.$$

Наименьшее значение трехчлен примет при $x = \frac{1}{4}$ и $y_{\min} = 6\frac{7}{8}$.

Ответ: 6,875.

№ 2.508. Задайте формулой квадратичную функцию, если:

а) ее график проходит через точки $A(0; -2)$ и $B(-2; 4)$ и функция принимает значение -4, в единственной точке.

Пусть формула будет $y = ax^2 + bx + c$, тогда:

$$\begin{cases} c = -2 \\ 4a - 2b + c = 4 \\ f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ 2a - b = 3 \\ -\frac{b^2}{4a} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ b = 2a - 3 \\ 4a^2 - 20a + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ a_1 = 4,5; b_1 = 6 \\ a_2 = 0,5; b_2 = -2 \end{cases}.$$

Таким образом, получаем две формулы: $4,5x^2 + 6x - 2 = 0$ или $0,5x^2 - 2x - 2 = 0$.

Ответ: $4,5x^2 + 6x - 2 = 0$ или $0,5x^2 - 2x - 2 = 0$.

б) ее значение при $x = -1$ и при $x = 2$ совпадают, ее наибольшее значение равно 3, а график содержит точку $P(1; 1)$.

Ответ: $y = -8x^2 + 8x + 1$.

№ 2.509. а) Найдите наименьшее значение выражения $x^2 - 2xy + 8y^2$, если $x + 2y = 4$

Ответ: 7.

б) Найдите наибольшее значение выражения $-7x^2 - y^2$, если $3x - y = 1$.

Выражая y через x , получаем: $-16x^2 + 6x - 1$, которое максимум при $x = \frac{3}{16}$ и его значение $y_{\max} = -\frac{7}{16}$.

Ответ: $-\frac{7}{16}$.

№ 2.510. а) пусть $2x + 3y = 6$. Докажите, что $xy \leq 1,5$.

Выражая x через y , получаем: $x = \frac{3(2-y)}{2} \Rightarrow xy = \frac{6y-3y^2}{2}$, которое максимально при $y = 1$ и равно 1,5.

б) пусть $3x - 7y = 2$. Докажите, что $21xy + 1 \geq 0$.

Выражая y через x , получаем: $x = \frac{7y+2}{3} \Rightarrow 21xy + 1 = 49y^2 + 14y + 1$, которое минимально при $y = -\frac{1}{7}$ и равно 0. Следовательно, $21xy + 1 \geq 0$.

№ 2.511. а) Определите длины сторон прямоугольника с диагональю равной 10, имеющего наибольшую площадь.

Пусть стороны прямоугольника x и y . Тогда $x^2 + y^2 = 100$ и $xy = \max$. Если $xy = \max$, то и $x^2y^2 = \max$ (так как $x > 0$ и $y > 0$) и тогда: $x^2(100 - x^2) = \max$. Обозначим $t = x^2$, получаем $t(100 - t)$, которое максимально при $t = 50$ и равно $50 \cdot 50 = 2500$. Таким образом $x = y = 5\sqrt{2}$.

Ответ: все по $5\sqrt{2}$.

б) Определите площадь прямоугольника, периметр которого равен 28, имеющего наименьшую диагональ.

Ответ: 49.

№ 2.512. а) сумма коэффициентов квадратного трехчлена равна 2. Найдите его корни, если координаты вершины графика соответствующей ему квадратичной функции $(4; -2,5)$.

Ответ: $4 - \sqrt{5}$ и $4 + \sqrt{5}$

б) Найдите координаты вершины графика квадратичной функции, если сумма корней соответствующего ей квадратичного трехчлена равна 5, сумма квадратов корней равна 13, а сумма коэффициентов трехчлена равна (-2) .

Пусть задана квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$, тогда по

теореме Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 5$; $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = 13$; $a + b + c = -2$. Таким образом:

$$\begin{cases} b = -5a \\ c = 6a \\ a + b + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = -6 \end{cases} \Rightarrow x_b = -\frac{b}{2a} = 2,5; y_b = 0,25.$$

Ответ: (2,5; 0,25).

Определите все значения, которые может принимать выражение (2.513.–2.514):

№ 2.513. а) $3x + 4y$, если $x^2 + y^2 = 25$.

Обозначим $z = 3x + 4y \Rightarrow x = \frac{z - 4y}{3} \Rightarrow (z - 4y)^2 + 9y^2 = 225 \Rightarrow z^2 - 8yz + 25y^2 - 225 = 0$, где $-5 \leq y \leq 5$. Квадратное уравнение относительно y должно иметь корни: $y_{1,2} = \frac{4z \pm 3\sqrt{625 - z^2}}{25}$. Должно выполняться

$$\begin{aligned} \text{условие: } & \begin{cases} 625 - z^2 \geq 0 \\ 4z - 3\sqrt{625 - z^2} \geq -125 \end{cases} \cup \begin{cases} 625 - z^2 \geq 0 \\ 4z + 3\sqrt{625 - z^2} \leq 125 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 625 - z^2 \geq 0 \\ (5z \pm 100)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -25 \leq z \leq 25 \end{aligned}$$

Ответ: $[-25; 25]$.

б) $x + 3y$, если $xy = 12$.

Ответ: $(-\infty; -12] \cup [12; +\infty)$.

№ 2.514. а) $x^3 + xy$, если $x^2 - 3x + y + 6 = 0$.

Ответ: $[-3; +\infty)$.

б) $y - x^2$, если $2x^2 + y^2 = 7$.

Обозначим $z = y - x^2 \Rightarrow y = z + x^2 \Rightarrow x^4 + 2(z+1)x^2 + z^2 - 7 = 0 \Rightarrow x^2 = -(z+1) \pm \sqrt{2z+8}$, причем $x^2 \leq 3,5$. Таким образом приходим к

$$\text{системе неравенств: } \begin{cases} z + 4 \geq 0 \\ \sqrt{2z+8} \geq z + 1 \\ \sqrt{2z+8} \leq z + 4,5 \end{cases} \cup \begin{cases} z + 4 \geq 0 \\ \sqrt{2z+8} \leq -(z+1) \\ \sqrt{2z+8} \geq -z - 4,5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z \geq -4 \\ z \leq \sqrt{7} \\ z \in R \end{cases} \Rightarrow \bigcup \begin{cases} z \geq -4 \\ z \leq -\sqrt{7} \\ z \in R \end{cases} \Rightarrow -4 \leq z \leq \sqrt{7}.$$

Ответ: $[-4; \sqrt{7}]$.

№ 2.515. а) найдите коэффициенты a и b в уравнении каждой прямой $y = ax + b$, проходящей через точку $A(0; 2)$ и имеющей с параболой $y = 1 - 4x - x^2$ единственную общую точку.

Подставляя коэффициенты точки A в уравнение прямой, получаем: $b = 2 \Rightarrow y = ax + 2 \Rightarrow ax + 2 = 1 - 4x - x^2 \Leftrightarrow x^2 + (a + 4)x + 1 = 0 \Rightarrow D = (a + 4)^2 - 4 = 0 \Rightarrow a_1 = -2; a_2 = -6$.

Ответ: $a = -2; b = 2$ или $a = -6; b = 2$.

б) найдите коэффициент a в уравнение параболы $y = x^2 - ax + 3$, имеющей единственную точку с прямой $y = 2x - 1$.

Ответ: $a = -6$ или $a = 2$.

№ 2.516. Докажите, что уравнение $x^2 + bx + c = 0$ имеет 2 различных действительных корня, если:

а) $0,25 + c < 0,5b$.

Преобразуем: $\frac{1}{4}b^2 > c^2 + \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}$ при $c \geq 0$. В то же время

$$c^2 + \frac{1}{2}c + \frac{1}{4} \vee c \Rightarrow \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}b^2 > c \Rightarrow D = b^2 - 4c > 0. \text{ При } c < 0,$$

очевидно, $D = b^2 - 4c > 0$.

Следовательно, уравнение имеет два различных действительных корня.

б) $2,25 + 1,5b + c < 0$.

При $c < 0$, $D = b^2 - 4c > 0$. Рассмотрим $c \geq 0$. Преобразуем:

$$-\frac{b}{2} > \frac{3}{4} + \frac{c}{3} \Rightarrow \frac{b^2}{4} > \frac{9}{16} + \frac{c^2}{9} + \frac{c}{2}. \text{ Сравним } \frac{c^2}{9} + \frac{c}{2} + \frac{9}{16} \vee c \Rightarrow \left(\frac{c}{3} - \frac{3}{4}\right)^2 \geq 0.$$

Следовательно, $\frac{b^2}{4} > c \Rightarrow D = b^2 - 4c > 0$. Таким образом, уравнение имеет два различных действительных корня.

№ 2.517. а) графики квадратичных функций $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ пересекаются в точках с абсциссами 0 и 3.

Докажите, что если $a_1 > a_2$, то $b_1 < b_2$.

Подставляя $x = 0$, получаем $c_1 = c_2$. Подставляя $x = 3$, получаем

$3a_1 + b_1 = 3a_2 + b_2 \Rightarrow 3(a_1 - a_2) = b_2 - b_1$. Так как $a_1 > a_2$, то $b_1 < b_2$, что требовалось доказать.

б) графики квадратичных функций $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ имеют единственную общую точку, абсцисса которой равна 0.

Докажите, что если $b_1b_2 < 0$, то $a_1 = a_2$.

Подставляя $x = 0$, получаем $c_1 = c_2$. Тогда уравнение: $(a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x = 0$ должно иметь единственное решение $x = 0$. Следовательно, уравнение $(a_1 - a_2)x + b_1 - b_2 = 0$ не должно иметь решений. Если $b_1 \neq b_2$, то при $a_1 = a_2$ корней нет. Если $b_1b_2 < 0$, то $b_1 \neq b_2$ и корней не будет. Таким образом, $a_1 = a_2$.

№ 2.518. а) найдите координаты точки графика функции $y = x + 1$, сумма квадратов расстояний от которой до точки $A(4; 0)$ и до начала координат — наименьшая.

Запишем условие в виде: $f(x) = (x - 4)^2 + y^2 + x^2 + y^2 = \min \Rightarrow \Rightarrow (x - 4)^2 + (x + 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = 4x^2 - 4x + 18 = \min$.

Квадратный трехчлен имеет минимальное значение, при $x = \frac{1}{2}$ и тогда $y = \frac{3}{2}$. Таким образом, координаты точки будут $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Ответ: $M(0,5; 1,5)$.

б) на графиках функций $y = x + 3$ и $u = x - 4$ найдите точки с одинаковыми абсциссами (укажите их координаты), для которых сумма квадратов расстояний от каждой из них до точки $M(1; 2)$ — наименьшая.

Ответ: $A(1,75; 4,75)$ и $B(1,75; -2,25)$.

№ 2.519. а) определите координаты точки графика функции $y = x^2 + 3x + 5$, сумма расстояний от которой до осей координат наименьшая.

Ответ: $A(-1; 3)$.

б) определите координаты точки графика функции $y = |x - 3| + 2$, сумма квадратов расстояний, от которой до осей координат минимальная.

Запишем условие в виде: $f(x) = x^2 + (|x - 3| + 2)^2 = \min$. Задача сводится к нахождению минимального значения квадратичной функции: $f(x) = 2x^2 - 6x + 13 + 4|x - 3|$.

Рассмотрим два случая:

1) $x < 3 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 10x + 25$, которая минимальна при $x = 2,5$ принимает значение $\frac{25}{2}$;

2) $x \geq 3 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 2x + 1$, которая минимальна при $x = 3$ и принимает значение 13.

Таким образом, исходная точка будет $B(2,5; 2,5)$.

Ответ: $B(2,5; 2,5)$.

№ 2.520. а) Найдите координаты точки C на прямой $y = 4 - 2x$, такой, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC , $A(0; 0)$ и $B(2; 0)$ — наименьший.

Легко убедиться, что B лежит на прямой. По теореме синусов:

$2R = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$, причем $\sin \angle ABC$ — фиксирован, поэтому минимальное значение R соответствует минимальному значению AC , а, следовательно, и AC^2 (так как $AC > 0$). В то же время $AC^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow AC^2 = x^2 + (4 - 2x)^2 = 5x^2 - 16x + 16$. Квадратный трехчлен принимает минимальное значение при $x = \frac{8}{5}$, а тогда $y = \frac{4}{5}$.

Ответ: $C(1,6; 0,8)$.

б) Найдите координаты точки F на прямой $y = 3 - 0,5x$, такой, что длина медианы KP треугольника FKM , $M(0; 0)$ и $K(2; 0)$ — наименьшая.

Ответ: $F(4,4; 0,8)$.

№ 2.521. а) По двум взаимно перпендикулярным шоссе в направлении их пересечения одновременно начинают двигаться два автомобиля: один со скоростью 80 км/ч, другой — 60 км/ч. В начальный момент времени каждый автомобиль находится на расстоянии 100 км от перекрестка. Определите время после начала движения, через которое расстояние между автомобилями будет наименьшим? Каково это расстояние?

Пусть первый автомобиль движется по оси x , а второй — по оси y . Тогда зависимости их координат от времени будет иметь вид: $x = 100 - 80 \cdot t$; $y = 100 - 60 \cdot t$, где t — время. Минимальное расстояние между автомобилями соответствует минимуму его квадрата, который равен $f(t) = (100 - 80t)^2 + (100 - 60t)^2 = 400(25t^2 - 70t + 50)$.

Квадратный трехчлен минимален при $t = \frac{7}{5}$ и значение расстояния

$(\sqrt{f(t)})$ будет 20.

Ответ: 1 час 24 мин, 20 км.

б) Две материальные точки, находящиеся в начальный момент времени в точках $A(1; 3)$ и $B(0; -2)$, одновременно начинают двигаться в направлении точки $C(1; -2)$ с одинаковыми постоянными скоростями, равными $0,5$ ед/с, по прямым $x = 1$ и $y = -2$ соответственно. Через какое время после начала движения расстояние между точками станет наименьшим? Определите это расстояние.

Ответ: 6 с, $2\sqrt{2}$.

Найдите все значения параметра, при которых выполняется заданное условие (2.522. – 2.527.):

№ 2.522. Уравнение имеет единственный корень:

$$а) \quad ax^2 - (2a + 6)x + 3a + 3 = 0.$$

Уравнение будет иметь один корень при условии, что $a = 0$ или

$$\frac{D}{4} = (a + 3)^2 - 3a(a + 1) = -2a^2 + 3a + 9 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{3}{2}; \quad a_2 = 3.$$

Ответ: 0 ; 3 и $-1,5$.

$$б) \quad ax^2 + (4a + 2)x + 3a + \frac{3}{2} = 0.$$

Ответ: 0 ; $-0,5$ и -2 .

№ 2.523. Уравнение имеет 2 различных действительных корня:

$$а) \quad (b - 1)x^2 + 2x\sqrt{11 - b^2} + 1 = 0.$$

Ответ: $[-\sqrt{11}; 1) \cup (1; 3)$.

$$б) \quad bx^2 - 2x\sqrt{15 - b^2} - 2 = 0.$$

Условие выполняется, если $b \neq 0$ и $D > 0$, то есть:

$$\begin{cases} b \neq 0 \\ 15 - b^2 + 2b > 0 \\ 15 - b^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ b^2 - 2b - 15 < 0 \\ 15 - b^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ -3 < b < 5 \\ -\sqrt{15} \leq b \leq \sqrt{15} \end{cases}.$$

Ответ: $(-3; 0) \cup [0; \sqrt{15}]$.

№ 2.524. а) Неравенство $(a + 4)x^2 - 2ax + 2a - 6 > 0$ не выполняется ни при каком действительном x .

Условие выполняется, если $a + 4 < 0$ и $D \leq 0$, то есть:

$$\begin{cases} a + 4 < 0 \\ a^2 - 2(a + 4)(a - 3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -4 \\ a^2 + 2a - 24 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < -4 \\ a \leq -6 \cup a > 4 \end{cases} \Rightarrow a \leq -6.$$

Ответ: $a \leq -6$.

б) Неравенство $(a-3)x^2 - (a+1)x + a+1 \geq 0$ выполняется при всех действительных x .

Ответ: $a \geq 4\frac{1}{3}$.

№ 2.525. а) Квадратный трехчлен $0,5x^2 - 2x - 5a + 1$ имеет два различных действительных корня, сумма кубов которых меньше 40.

Ответ: $(-0,2; 0)$.

б) Квадратный трехчлен $-2x^2 + 4x - 3b + 1$ имеет два различных действительных корня, сумма кубов которых меньше 20.

Преобразуем: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) =$ (по теореме Виета) $= 2 \cdot \left(4 - 3\left(\frac{3}{2}b - \frac{1}{2}\right)\right) = 11 - 9b$.

В результате условие переписывается в виде:

$$\begin{cases} 11 - 9b < 20 \\ D > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > -1 \\ 4 + 2 \cdot (-3b + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > -1 \\ b < 1 \end{cases}.$$

Ответ: $(-1; 1)$.

№ 2.526. а) Сумма квадратов двух различных действительных корней уравнения $ax^2 + 4x - 3 = 0$ больше 10.

Преобразуем: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{16}{a^2} + \frac{6}{a}$. В результате

условие переписывается в виде: $\begin{cases} \frac{16}{a^2} + \frac{6}{a} > 10 \\ D > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{16}{a^2} + \frac{6}{a} > 10 \\ 4 + 3a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10a^2 - 6a - 16}{a^2} < 0 \\ a > -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < a < 0 \cup 0 < a < 1,6 \\ a > -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Ответ: $(-1; 0) \cup (0; 1,6)$.

б) Сумма квадратов двух различных действительных корней уравнения $ax^2 - 5x + 23 = 0$ меньше 21.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{25}{21}\right) \cup \left(1; 3\frac{1}{8}\right)$.

№ 2.527. а) Функция $f(x) = bx^2 - 6x + 3$ имеет наименьшее значение, и это значение меньше 2,5.

Ответ: $(0; 18)$.

б) Функция $f(x) = bx^2 + 4x + 5$ имеет наибольшее значение, и это значение больше 5,5.

$f(x)$ максимально при $x = -\frac{2}{b}$ и равно $-\frac{4}{b} + 5$. Таким образом:

$$-\frac{4}{b} + 5 > 5,5 \Leftrightarrow \frac{8+b}{b} < 0 \Rightarrow -8 < b < 0.$$

Ответ: $(-8; 0)$.

Для каждого значения параметра решите неравенство (2.528. – 2.531.):

№ 2.528. а) $ax^2 + (2a - 3)x + a + 1 \leq 0$.

Выясним сначала, когда дискриминант $D \geq 0$: $(2a - 3)^2 - 4a(a + 1) = -16a + 9 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{9}{16}$. При этом корни будут $x_1 = \frac{3 - 2a - \sqrt{9 - 16a}}{2a}$; $x_2 = \frac{3 - 2a + \sqrt{9 - 16a}}{2a}$. В результате будем иметь следующие решения:

$$\begin{cases} a < 0 \\ x \leq x_2 \cup x \geq x_1 \end{cases} \cup \begin{cases} a = 0 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < a < \frac{9}{16} \\ x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases} \cup \begin{cases} a = \frac{9}{16} \\ x = \frac{5}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} a > \frac{9}{16} \\ \emptyset \end{cases}.$$

Ответ: $(-\infty; x_2] \cup [x_1; +\infty)$ при $a < 0$; $[\frac{1}{3}; +\infty)$ при $a = 0$; $[x_1; x_2]$ при $0 < a < \frac{9}{16}$;

$\{\frac{5}{3}\}$ при $a = \frac{9}{16}$; $\emptyset$ при $a > \frac{9}{16}$, где $x_1 = \frac{3 - 2a - \sqrt{9 - 16a}}{2a}$;

$$x_2 = \frac{3 - 2a + \sqrt{9 - 16a}}{2a}.$$

б) $(a + 1)x^2 + (2a - 1)x + a + 2 > 0$.

Ответ: $(x_2; x_1)$ при $a < -1$; $\{-\infty; \frac{1}{3}\}$ при $a = -1$; $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

при $-1 < a \leq -\frac{7}{16}$, R при $a > -\frac{7}{16}$, где $x_1 = \frac{1 - 2a - \sqrt{-16a - 7}}{2a + 2}$;

$$x_2 = \frac{1 - 2a + \sqrt{-16a - 7}}{2a + 2}.$$

№ 2.529. а) $x^2 - (3a + 6)x + 2a^2 + 11a + 5 < 0$.

Ответ: $(2a + 1; a + 5)$ при $a < 4$; $\emptyset$ при $a = 4$; $(a + 5; 2a + 1)$ при $a > 4$.

б) $x^2 - (4a + 2)x + 3a^2 + 8a - 3 > 0$.

Выясним сначала, когда дискриминант $D \geq 0$:

$$D/4 = (2a + 1)^2 - 3a^2 - 8a + 3 = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow a \in R. \text{ При этом}$$

корни будут $x_1 = 2a + 1 - |a - 2|$; $x_2 = 2a + 1 + |a - 2|$. В результате по-

лучаем: $\begin{cases} a < 2 \\ x < 3a - 1 \cup x > a + 3 \end{cases} \cup \begin{cases} a \geq 2 \\ x < a + 3 \cup x > 3a - 1 \end{cases}$.

Ответ: $(-\infty; 3a - 1) \cup (a + 3; +\infty)$ при $a < 2$; $(-\infty; a + 3) \cup (3a - 1; +\infty)$ при $a \geq 2$.

№ 2.530. а) $(3a - 7) > 5a - 3$.

Решение зависит от коэффициента при x : $\begin{cases} a < \frac{7}{3} \\ x < \frac{5a - 3}{3a - 7} \end{cases} \cup \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ \emptyset \end{cases} \cup$

$$\cup \begin{cases} a > \frac{7}{3} \\ x > \frac{5a - 3}{3a - 7} \end{cases}.$$

Ответ: $x < \frac{5a - 3}{3a - 7}$ при $a < \frac{7}{3}$; нет решений при $a = \frac{7}{3}$; $x > \frac{5a - 3}{3a - 7}$ при $a > \frac{7}{3}$.

б) $(2 - 3a)x < 3a - 1$.

Ответ: $x < \frac{3a - 1}{2 - 3a}$ при $a < \frac{2}{3}$; x — любое при $a = \frac{2}{3}$; $x > \frac{3a - 1}{2 - 3a}$ при $a > \frac{2}{3}$.

№ 2.531. а) $\frac{x - a}{2x + 1} \geq 0$.

Ответ: $(-\infty; a] \cup (-0,5; +\infty)$ при $a < -0,5$; $x \neq -0,5$ при $a = -0,5$; $(-\infty; -0,5) \cup [a; +\infty)$ при $a > -0,5$.

б) $\frac{3 - 5x}{x - a} \geq 0$.

Корни числителя и знаменателя будут $\frac{3}{5}$ и a , соответственно.

Тогда методом интервалов получаем, что, если $a < \frac{3}{5}$, то $a < x \leq \frac{3}{5}$;

если $a = \frac{3}{5}$, то $\emptyset$; если $a > \frac{3}{5}$, то $\frac{3}{5} \leq x < a$.

Ответ: $(a; 0,6]$ при $a < 0,6$; $\emptyset$ при $a = 0,6$; $[0,6; a)$ при $a > 0,6$.

№ 2.532. Для каждого значения a решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ x^2 - a^2 < 0 \end{cases}.$$

Решая методом интервалов, будем иметь: $\begin{cases} x \leq 1 \cup x \geq 4 \\ -|a| < x < |a| \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \cup x \geq 4 \\ a < x < -a \\ a < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 1 \cup x \geq 4 \\ -a < x < a \\ a > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \emptyset \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < -4 \\ a < x \leq 1 \cup 4 \leq x < -a \end{cases} \cup$$

$$\cup \begin{cases} -4 \leq a < -1 \\ a < x \leq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} -1 \leq a < 0 \\ a < x < -a \end{cases} \cup \begin{cases} a = 0 \\ \emptyset \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < a \leq 1 \\ -a < x < a \end{cases} \cup \begin{cases} 1 < a \leq 4 \\ -a < x \leq 1 \end{cases} \cup$$

$$\cup \begin{cases} a > 4 \\ -a < x \leq 1 \cup 4 \leq x < a \end{cases}.$$

Ответ: $(a; 1] \cup [4; -a)$ при $a < -4$; $(a; 1]$ при $-4 \leq a < -1$; $(a; -a)$ при $-1 \leq a < 0$; $\emptyset$ при $a = 0$; $(-a; a)$ при $0 < a \leq 1$; $(-a; 1]$ при $1 < a \leq 4$; $(-a; 1] \cup [4; a)$ при $a > 4$.

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 - 6x - 7 \leq 0 \\ x^2 - a^2 > 0 \end{cases}.$$

Ответ: $\emptyset$ при $a \leq -7$ и при $a \geq 7$; $(-a; 7]$ при $-7 < a \leq -1$; $[-1; a) \cup (-a; 7]$ при $-1 < a \leq 0$; $[-1; -a) \cup (a; 7]$ при $0 < a < 1$; $(a; 7]$ при $1 \leq a < 7$.

№ 2.533. При каких значениях b система не имеет решения:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ |x - 4| < b \end{cases}.$$

Ответ: при $b \leq 1$.

$$\text{б) } \begin{cases} 16 - x^2 > 0 \\ |x - 3| > b \end{cases}.$$

Ясно, что при $b < 0$ система имеет решения. При $b \geq 0$ получаем:

$$\begin{cases} -4 < x < 4 \\ x < -b+3 \cup x > b+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+3 \geq 4 \\ -b+3 \leq -4 \\ x = \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \geq 1 \\ b \geq 7 \\ x = \emptyset \end{cases} \Rightarrow b \geq 7.$$

Ответ: при $b \geq 7$.

Найдите все значения параметра, при которых выполняется заданное условие (2.534. – 2.538.):

Замечание: для решения задач полезно схематически нарисовать параболу и указанные точки.

№ 2.534. а) Корни уравнения $(a^2 - 1)x^2 + (2a + 1)x - 3 = 0$ лежат по разные стороны от точки $x_0 = 1$.

Обозначим $f(x) = (a^2 - 1)x^2 + (2a + 1)x - 3$. Для выполнения условия достаточно, чтобы выполнялось неравенство: $(a^2 - 1)f(x_0) < 0 \Rightarrow (a^2 - 1)(a^2 + 2a - 3) < 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2(a + 1)(a + 3) < 0$. Решая методом интервалов, получаем: $-3 < a < -1$.

Ответ: $(-3; -1)$.

б) Число (-1) заключено между корнями уравнения $(4 - b^2)x^2 - (3b - 1)x + 7 = 0$.

Ответ: $(2; 5)$.

№ 2.535. а) Квадратный трехчлен $(a - 2)x^2 - 2ax + 2a - 3$ имеет два различных корня одного знака.

Ответ: $(1; 1,5) \cup (2; 6)$.

б) Корни квадратного трехчлена $(a^2 + 3a - 4)x^2 - (3a + 1)x + 1$ имеют разные знаки и расположены по разные стороны от числа 1.

Обозначим $f(x) = (a^2 + 3a - 4)x^2 - (3a + 1)x + 1$. Для выполнения условия достаточно, чтобы выполнялась система неравенств:

$$\begin{cases} (a^2 + 3a - 4)f(1) < 0 \\ (a^2 + 3a - 4) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a^2 + 3a - 4)(a^2 - 4) < 0 \\ (a + 4)(a - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + 4)(a + 1)(a - 1)(a - 2) < 0 \\ (a + 4)(a - 1) < 0 \end{cases}$$

Решая методом интервалов, получаем: $-4 < a < -2$.

Ответ: $(-4; -2)$.

№ 2.536. а) Уравнение $x^2 - (2a + 6)x + 4a + 12 = 0$ имеет по крайней мере один корень, и каждый корень уравнения меньше 1.

Обозначим $f(x) = x^2 - (2a + 6)x + 4a + 12$. Для выполнения условия достаточно, чтобы выполнялась система неравенств:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ f(1) > 0 \\ x_b = -\frac{2a+6}{2} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+3)^2 - 4a - 12 \geq 0 \\ 2a+7 > 0 \\ a+3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)(a-1) \geq 0 \\ a > -3,5 \\ a < -2 \end{cases}$$

Решая методом интервалов, получаем: $-3,5 < a \leq -3$.

Ответ: $(-3,5; -3]$.

б) Два корня уравнения $x^2 - 4ax + 1 - 2a + 4a^2 = 0$ различны и каждый из них больше 1.

Ответ: $(1; +\infty)$.

№ 2.537. а) Все решения неравенства $\frac{x-2}{x-5} < 0$ удовлетворяют неравенству $x^2 + (4-a)x - 4a + 4 > 0$.

Ответ: $\left(-\infty; 2\frac{2}{3}\right]$.

б) Неравенство $x^2 - (a-2)x - 2a - 4 < 0$ выполняются при всех x , для которых $|x+1| < 2$.

Второе неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x+1 > -2 \\ x+1 < +2 \end{cases} \Rightarrow -3 < x < 1. \text{ Обозначим } f(x) = x^2 - (a-2)x - 2a - 4. \text{ Для}$$

выполнения условия задачи достаточно, чтобы выполнялась система

$$\text{неравенств: } \begin{cases} f(-3) \leq 0 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-1 \leq 0 \\ -3a-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq a \leq 1.$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

№ 2.538. а) Множество решений неравенства $x^2 + 3x - 4 > 0$ содержит все решения неравенства $ax^2 + (8a^2 - 1)x - 8a > 0$. Первое неравенство $(x+4)(x-1) > 0$ имеет решение: $x < -4 \cup x > 1$. Обозначим $f(x) = ax^2 + (8a^2 - 1)x - 8a$. Для удовлетворения условия достаточно, чтобы выполнялась система неравенств:

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(-4) \leq 0 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ -32a^2 + 8a + 4 \leq 0 \\ 8a^2 - 7a - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (2a-1)(4a+1) \geq 0 \\ (a-1)(8a+1) \leq 0 \end{cases}$$

Решая методом интервалов, получаем: $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$

Ответ: $[0,5; 1]$.

б) Из неравенства $ax^2 - (2 + a^2)x + 2a > 0$ следует неравенство $x < -1$.

Ответ: $[-2; -1]$.

Найдите все пары $(a; b)$, для которых выполняется условие (2.539. – 2.540.):

№ 2.539. Равносильны неравенства:

а) $x^2 - x(3 - a) - 3a \leq 0$ и $|x - 2| \leq b$.

Ответ: $a = -1, b = 1$.

б) $x^2 - x(5 + b) + 5b \leq 0$ и $|x - 7| \leq a$.

Перепишем в виде: $(x - 5)(x - b) \leq 0$ и $7 - a \leq x \leq 7 + a$ при $a \geq 0$.

Неравенства будут равносильны, если будут совпадать границы:

$$\begin{cases} b < 5 \\ 7 - a = b \\ 7 + a = 5 \\ a \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} b > 5 \\ 7 - a = 5 \\ 7 + a = b \\ a \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} b = 5 \\ \emptyset \end{cases} \Rightarrow a = 2; b = 9$$

Ответ: $a = 2, b = 9$.

№ 2.540. а) Областью определения функции $y = \sqrt{ax^2 + (b^2 + 4b)x - a + 7b + 10}$ является множество M : $|x| \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$.

Областью определения y будет: $f(x) = ax^2 + (b^2 + 4b)x - a + 7b + 10 \geq 0$. Для того, чтобы множество M являлось решением неравенства достаточно:

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(-2) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 3a - 2b^2 - b + 10 = 0 \\ b^2 + 11b + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b_1 = -1; a_1 = -3 \\ b_2 = -10; a_2 = 60 \end{cases} \Rightarrow a = 60; b = -10.$$

Ответ: $a = 60, b = -10$.

б) Области определения функций $f(x) = \sqrt{(2 - x)(x + 3)}$ и

$q(x) = \sqrt{\frac{ax^2 + (a^2 - 2b)x + 4b - 16}{b}}$ совпадают.

Для каждого значения параметра решите уравнение (2.541.—2.544.):

№ 2.541. а) $\frac{(x-4)(x+a)}{x^2 - (2a-2)x - 2a + 1} = 0$.

Преобразуем: $\frac{(x-4)(x+a)}{(x+1)(x-2a+1)} = 0$. Возможные решения:

$$\cdot \begin{cases} x = 4 \\ 2a - 1 \neq 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -a \\ a \neq 1 \\ -a \neq 2a - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 & \text{при } a \neq 2,5 \\ x = -a & \text{при } a \neq 1; a \neq \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Ответ: $x = -2,5$ при $a = 2,5$; $x = 4$ при $a = 1$ и $a = \frac{1}{3}$; $x_1 = 4$; $x_2 = -a$ при остальных a .

б) $\frac{x^2 - ax - a - 1}{(x-3)(x+2a)} = 0$.

Ответ: $x = 1,5$ при $a = 0,5$; $x = -1$ при $a = -\frac{1}{3}$ и $a = 2$; $x_1 = -1$; $x_2 = a + 1$ при остальных a .

№ 2.542. а) $x|x-2| - a = 0$.

Ответ: $x = 1 - \sqrt{1-a}$ при $a < 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$ при $a = 0$; $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$, $x_3 = 1 + \sqrt{1+a}$ при $0 < a < 1$; $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ при $a = 1$; $x = 1 + \sqrt{1+a}$ при $a > 1$.

б) $|x^2 - 5x + 4| + a = 0$.

Очевидно, что $a \leq 0$, тогда при $a = 0$ $x_1 = 1$; $x_2 = 4$. При $a < 0$ получаем:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 + a = 0 \\ a < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0 \\ x^2 - 5x + 4 - a = 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{9-4a}}{2} \\ a < 0 \\ a \leq \frac{9}{4} \end{cases} \cup$$

$$\cup \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{9+4a}}{2} \\ a < 0 \\ a \geq -\frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow a < -\frac{9}{4}; x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9-4a}}{2}; a = -\frac{9}{4}, x_{1,2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{2}}{2},$$

$$x_3 = \frac{5}{2}; -\frac{9}{4} < a < 0, x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9-4a}}{2}, x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{9+4a}}{2}.$$

Ответ: $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9-4a}}{2}$ при $a < -2,25$; $x_{1,2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{2}}{2}$, $x_3 = \frac{5}{2}$ при $a = -2,25$; $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9-4a}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{9+4a}}{2}$ при $-2,25 < a < 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ при $a = 0$; решений нет при $a > 0$.

№ 2.543. а) $|2x-1| - |3+x| = x+a$.

Раскрывая модули, получаем:
$$\begin{cases} x < -3 \\ x = \frac{4-a}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} -3 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x = -\frac{2+a}{4} \end{cases} \cup \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ a = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{4-a}{2} \\ a > 10 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{a+2}{4} \\ -4 \leq a \leq 10 \end{cases} \cup \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ a = -4 \end{cases}.$$

Ответ: Решений нет при $a < -4$; $x \geq 0,5$ при $a = -4$; $x = -\frac{a+2}{4}$ при $-4 < a < 10$; $x = \frac{4-a}{2}$ при $a \geq 10$.

б) $|x-3| + |x| = ax+3$.

Ответ: $x = 0$ при $a < -2$, $-2 < a < 0$ и $a \geq 2$; $x \leq 0$ при $a = -2$; $0 \leq x \leq 3$ при $a = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{6}{2-a}$ при $0 < a < 2$.

№ 2.544. а) $\sqrt{x-a} = x-2$.

Ответ: $x = 2,5 + \sqrt{2,25-a}$ при $a < 2$; $x_{1,2} = 2,5 \pm \sqrt{2,25-a}$ при $2 \leq a < 2,25$; $x = 2,5$ при $a = 2,25$; решений нет при $a > 2,25$.

б) $\sqrt{ax} = x+4$.

Уравнение равносильно системе:
$$\begin{cases} ax \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \\ x^2 + (8-a)x + 16 = 0 \end{cases}.$$

Дискриминант $D = (8-a)^2 - 64 = -a(16-a)$. Имеем две критические точки $a = 0$ и $a = 16$. При $0 < a < 16$ корней нет. При $a = 0$ $x = -4$. При $a = 16$ $x = 4$. Отдельно рассмотрим случаи $a < 0$ и

$$a > 16: \begin{cases} a < 0 \\ -4 \leq x \leq 0 \\ x = \frac{a-8+\sqrt{a^2-16a}}{2} \end{cases} \quad x_1 = \frac{a-8-\sqrt{a^2-16a}}{2} = -4+a-\sqrt{a^2-16a} < -4$$

при $a < 0$. В то же время $x_1 x_2 = 16 \Rightarrow |x_1| \cdot |x_2| = 16$ и $x_2 < 0 \Rightarrow |x_2| = \frac{16}{|x_1|} < 4 \Rightarrow -4 < x_2 < 0$, поэтому $x = \frac{a-8+\sqrt{a^2-16a}}{2}$ является корнем.

$$\begin{cases} a > 16 \\ x \geq 0 \\ x = \frac{a-8 \pm \sqrt{a^2-16a}}{2} \end{cases}.$$

Поскольку $x_1 = \frac{a-8+\sqrt{a^2-16a}}{2} > 4$, $x_1 x_2 = 16 \Rightarrow x_2 > 0$, то есть оба корня подходят.

Ответ: $x = \frac{a-8+\sqrt{a^2-16a}}{2}$ при $a \leq 0$; решений нет при $0 < a < 16$;

$x = 4$ при $a = 16$; $x_{1,2} = \frac{a-8 \pm \sqrt{a^2-16a}}{2}$ при $a > 16$.

Для каждого значения параметра решите неравенство (2.545. – 2.546.):

№ 2.545. а) $\frac{a}{x} > x + 2$.

Преобразуем: $\frac{-x^2 - 2x + a}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - a}{x} < 0$. Найдем дис-

криминант: $D/4 = 1 + a$. Критическая точка $a = -1$. $\begin{cases} a < -1 \\ x < 0 \end{cases} \cup$

$\cup \begin{cases} a = -1 \\ x < 0 \cup x \neq -1 \end{cases}$. При $a > -1$ $x_1 = -1 - \sqrt{1+a}$; $x_2 = -1 + \sqrt{1+a}$;

$x_3 = 0$. Выясним, когда $-1 + \sqrt{1+a} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+a} \leq 1 \Rightarrow -1 < a \leq 0$.

Тогда при $-1 < a < 0$ $x < -1 - \sqrt{a+1}$ и $-1 + \sqrt{a+1} < x < 0$. При $a = 0$ $x < -2$. При $a > 0$ $x < -1 - \sqrt{a+1}$ и $0 < x < -1 + \sqrt{a+1}$.

Замечание: ход решения сильно облегчается, если схематически построить графики $x + 2$ и $\frac{a}{x}$.

Ответ: $x < 0$ при $a < -1$; $x < -1 - \sqrt{a+1}$ и $-1 + \sqrt{a+1} < x < 0$ при $-1 \leq a < 0$; $x < -2$ при $a = 0$; $x < -1 - \sqrt{a+1}$ и $0 < x < -1 + \sqrt{a+1}$ при $a > 0$.

б) $ax^2 - 2ax - 1 < 0$.

Ответ: $x < 1 - \sqrt{\frac{a+1}{a}}$ и $x > 1 + \sqrt{\frac{a+1}{a}}$ при $a \leq -1$; x — любое при $-1 < a \leq 0$; $1 - \sqrt{\frac{a+1}{a}} < x < 1 + \sqrt{\frac{a+1}{a}}$ при $a > 0$.

№ 2.546. а) $x^2 - a|x+1| > 0$.

Ответ: R при $a < 0$; $\left(-\infty; \frac{a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2}\right) \cup \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2}; +\infty\right)$ при $0 \leq a < 4$; $\left(-\infty; \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2}\right) \cup \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}; \frac{a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2}\right) \cup \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2}; +\infty\right)$ при $a \geq 4$.

б) $ax^2 + |x| + 1 > 0$.

Неравенство равносильно системе неравенств:

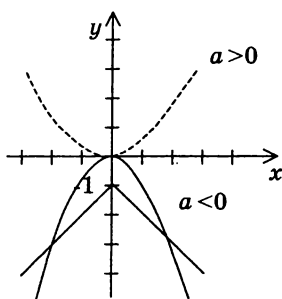
$$\begin{cases} x < 0 \\ ax^2 - x + 1 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ ax^2 + x + 1 > 0 \end{cases}.$$

Мы не будем решать эти системы, а попробуем решить исходное неравенство графически. Для этого перепишем его в виде: $ax^2 > -|x| - 1$ и построим левую и правую часть неравенства:

Замечаем, что при $a \geq 0$ $x \in R$. При $a < 0$ $x_1 < x < x_2$, где x_1 — меньший корень уравнения $ax^2 - x + 1 = 0$, а x_2 — больший корень уравнения:

$$ax^2 + x + 1 = 0. \quad \text{То есть } x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a}.$$



Ответ: $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a}; \frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a}\right)$ при $a < 0$; R при $a \geq 0$.

№ 2.547. Определите количество корней уравнения в зависимости от a :

а) $|x - |2x - 3|| = a$.

Очевидно, что $a \geq 0$. Раскроем модули: $x - |2x - 3| = \pm a \Rightarrow |2x - 3| =$

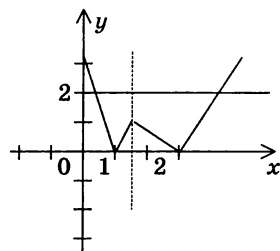
$$= x \mp a \Rightarrow \begin{cases} 2x-3 = \pm(x-a) \\ x-a \geq 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x-3 = \pm(x+a) \\ x+a \geq 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=3-a \\ x=\frac{a+3}{3} \\ x \geq +a \\ a \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=a+3 \\ x=\frac{3-a}{3} \\ x \geq -a \\ a \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3-a & \text{при } a \leq 1,5 \\ x=\frac{a+3}{3} & \text{при } a \leq 1,5 \\ x=a+3 & \text{при } a \geq 0 \\ a=\frac{3-a}{3} & \text{при } a \geq 0 \end{cases}$$

При $a=0$ два корня, при $0 < a < 1,5$ — четыре корня, при $a=1,5$ — три корня, при $a > 1,5$ — два корня.

Второй способ: графическое решение. Изобразим схематически график левой части уравнения:

$$\begin{cases} x < 1,5 & x \geq 1,5 \\ |3x-3| & |3-x| \end{cases}$$



Правая часть представится прямой линией, параллельной оси абсцисс. Из графика непосредственно следует число корней.

Ответ: нет корней при $a < 0$; 2 корня при $a=0$ и при $a > 1,5$; 3 корня при $a=1,5$; 4 корня при $0 < a < 1,5$.

$$\text{б) } |x-a| + 2|x-2| = 4.$$

Ответ: нет корней при $a < -2$ и $a > 6$; 1 корень при $a = -2$ и $a = 6$; 2 корня при $-2 < a < 6$.

№ 2.548. Найдите все значения a , при которых выполняется заданное условие. Для найденных a решите уравнение:

$$\text{а) уравнение } \frac{x^2 + |2x+6|}{x^2 + 8x + 12} = a \text{ имеет ровно 1 корень.}$$

Ответ: $x = -3$ при $a = 1$; $x = 6$ при $a = 0,25$; $x = -3\frac{1}{3}$ при $a = 0,75$.

$$\text{б) уравнение } (x-4) \cdot \sqrt{\frac{x+2}{x-4}} = a \text{ имеет ровно 2 корня.}$$

Решим эту задачу графически. При $x < 4$

$$y = -\sqrt{(x-4)(x+2)}, \text{ а при } x > 4$$

$$y = \sqrt{(x-4)(x+2)}.$$

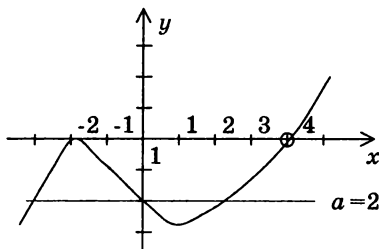
Построим

схематически график функции:

Правая часть будет представлять собой прямую, параллельную оси абсцисс. Из рисунка видно, что два корня будут в том случае, когда прямая будет касаться графика функции. Абсцисса точки касания $x = 1$, а $y = -3$, при этом $a = -3$. Абсцисса второй точки найдется из уравнения:

$$(x-4)(x+2) = 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 17 = 0 \Rightarrow x = 1 - 3\sqrt{2}.$$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 1 - 3\sqrt{2}$ при $a = -3$.



№ 2.549. Найдите все значения a , при которых система неравенств имеет единственное решение:

$$\text{а) } \begin{cases} |x-3| \leq a \\ |x-2a| \leq 5 \end{cases}.$$

Из первого неравенства следует, что $a \geq 0$, тогда система неравенств равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x-3 \geq -a \\ x-3 \leq +a \\ x-2a \geq -5 \\ x-2a \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3-a \\ x \leq a+3 \\ x \geq 2a-5 \\ x \leq 2a+5 \end{cases}.$$

Поскольку при $a > 0$ $3-a < a+3 < 2a+5$, то единственное решение будет при $a+3 = 2a-5 \Rightarrow a = 8$ и при $a+3 = 3-a \Rightarrow a = 0$

Ответ: 0 и 8.

$$\text{б) } \begin{cases} |x-1| \geq a \\ |2x+a| \leq 3 \end{cases}$$

Ответ: 5.

№ 2.550. При каких значениях a система неравенств имеет ровно одно решение? Для всех таких a найдите это решение:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 7x - 8 \leq 0 \\ |x-a| \leq 3 \end{cases}.$$

Ответ: $x = -1$ при $a = -4$; $x = 8$ при $a = 11$.

$$\text{б) } \begin{cases} |x+a| \leq 2 \\ x^2 + 8x - 9 \geq 0 \end{cases}.$$

Система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x \geq -a - 2 \\ x \leq 2 - a \\ x \leq -9 \cup x \geq 1 \end{cases}.$$

Возможные варианты: $\begin{cases} -a - 2 = -9 \\ 2 - a < 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 2 - a = 1 \\ -a - 2 > -9 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 7; a_2 = 1.$

Ответ: $x = 1$ при $a = 1$; $x = -9$ при $a = 7$.

№ 2.551. а) Найдите наименьшее целое a такое, что неравенство

$$\frac{2x+1}{4x^2+4x+5} \leq a \text{ выполняется для всех } x.$$

Ясно, что неравенство будет выполняться для всех x , если

$$a \geq \max\left(\frac{2x+1}{4x^2+4x+5}\right). \text{ Минимальное } a \text{ будет при условии:}$$

$$\frac{2x+1}{4x^2+4x+5} = a \text{ и это уравнение должно иметь один корень. Это имеет}$$

$$\text{место при } D = (4a - 2)^2 - 16a(5a - 1) = 0 \Rightarrow -16a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{4}.$$

Поскольку мы интересуемся максимумом функции, то подходит

$$a = \frac{1}{4} \text{ и, следовательно, наименьшее целое } a \text{ будет } 1.$$

Ответ: 1.

б) Найдите наибольшее целое b такое, что неравенство

$$\frac{3x-1}{9x^2-6x+5} \geq b \text{ выполняется для всех } x.$$

Ответ: -1.

Постройте график функции $y = f(x)$ и, используя его, укажите (2.552. – 2.555.):

№ 2.552. а) Промежутки возрастания

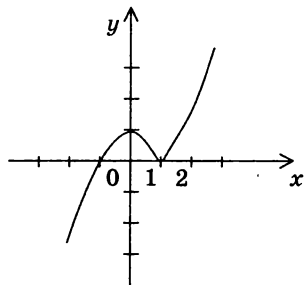
функции $f(x) = (x+1)|x-1|$. График

функции $f(x)$ состоит из двух ветвей:

$f(x) = 1 - x^2$, при $x < 1$ и $f(x) = x^2 - 1$, при $x \geq 1$.

Промежутки возрастания: $x \leq 0 \cup x \geq 1$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.



б) Множество значений функции $f(x) = x^2 - |2x - 2| - 1$.

Ответ: $[-4; +\infty)$.

№ 2.553. а) Множество значений функции $f(x) = |x^2 - 3x - 6| + 2x - 6$ и все целые значения, принимаемые функцией 4 раза.

Ответ: $[-3 - \sqrt{33}; +\infty)$; целые: 3, 4, 5 и 6.

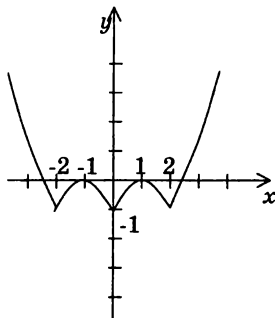
б) Промежутки убывания функции $f(x) = |2|x| - x^2| - 1$ и все значения, принимаемые функцией нечетное число раз.

Функции $f(x)$ представима в виде двух ветвей: при $x < 0$

$$f(x) = |x^2 + 2x| - 1 \quad \text{и} \quad \text{при} \quad x \geq 0$$

$f(x) = |2x - x^2| - 1$. Модуль любой функции строится путем построения графика самой функции и отражения части, лежащей ниже оси абсцисс, относительно этой оси.

Функция убывает при $x \leq -2 \cup -1 \leq x \leq 0 \cup 1 \leq x \leq 2$. Значение $y = -1$ функция принимает нечетное число раз.



Ответ: $(-\infty; -2] \cup [-1; 0] \cup [1; 2]$; значение -1 .

№ 2.554. а) Промежутки убывания функции $f(x) = 2|x^2 - 1| - 3|x + 1|$ и ее наибольшее значение на отрезке $[-1; 2]$.

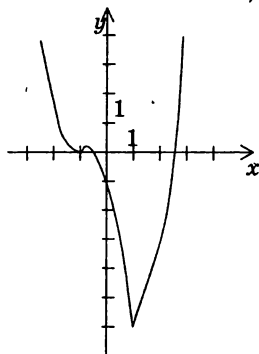
Функции $f(x)$ представима в виде трех ветвей: при $x < -1$

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 1; \quad \text{при} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$f(x) = -2x^2 - 3x - 1 \quad \text{и} \quad \text{при} \quad x > 1$$

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 5. \quad y_{\max} \quad \text{при} \quad x = -\frac{3}{4} \quad \text{и}$$

равно $\frac{1}{8}$.



Ответ: $(-\infty; -1] \cup [-0,75; 1] \cup \frac{1}{8}$.

б) Множество значений функции $f(x) = (1 - |x|)(|x - 2| - 2)$ и ее наименьшее значение на отрезке $[0; 4,5]$

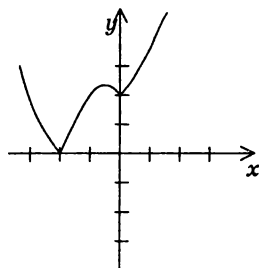
Ответ: $(-\infty; 2,25]$; $-1,75$.

№ 2.555. а) Множество значений функции $f(x) = |x^2 + 2x| - |x| + 2$ и значения, которые функция принимает ровно 3 раза.

Функции $f(x)$ представима в виде трех ветвей: при $x < -2$ $f(x) = x^2 + 3x + 2$; при $-2 \leq x \leq 0$ $f(x) = -x^2 - x + 2$; при $x > 0$ $f(x) = x^2 + x + 2$.

Из рисунка видно, что $y \geq 0$. $y = 2$ и $y = 2,25$ функция принимает 3 раза.

Ответ: $[0; +\infty)$; значения 2 и 2,25.



б) все x , при которых значение функции $f(x) = |x^2 + 2x - 3| - x^2 - 3x$ положительны, и значения, принимаемые функцией ровно 2 раза.

Ответ: при $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; \frac{1}{2})$, значение 0 и $6\frac{1}{8}$.

№ 2.556. а) Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x+2}{x+1} & \text{при } x \leq -2 \\ -x-2 & \text{при } -2 < x < 1, \text{ и, используя его, решите уравнение} \\ 6x - x^2 - 8 & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

$f(x) = a$ при $a = 0$; $a = -3$; $a = 1$.

Ответ: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; $x_3 = 4$ при $a = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 5$ при $a = -3$; $x = 3$ при $a = 1$.

б) Постройте график функции $y = f(x)$, где

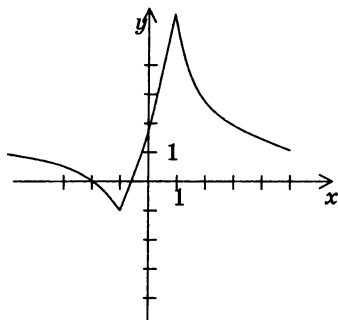
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1} - 1 & \text{при } x \leq -1 \\ 3x + 2 & \text{при } -1 < x < 1, \text{ и, используя его, определите множество значений функции, а также решите} \\ \frac{5}{x} & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

уравнение $f(x) = a$ при $a = 1$; $a = -1$.

Из рисунка видно, что $y \geq -1$ и

$f(x) = 1$ при $x_1 = -5$; $x_2 = -\frac{1}{3}$; $x_3 = 5$. $f(x) = -1$ при $x = -1$.

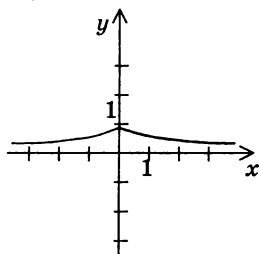
Ответ: $E(f) = [-1; +\infty)$; $x = -1$ при $a = -1$; $x_1 = 5$; $x_2 = -\frac{1}{3}$; $x_3 = -5$ при $a = 1$.



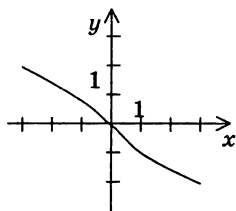
№ 2.557. Постройте график функции $y = f(x)$, если

а) $f(x) = \frac{2}{3+2x}$ при $x \geq 0$ и $f(x)$ — четная функция.

Если $f(x)$ — четная функция, то $f(-x) = f(x)$ и функция симметрична относительно оси ординат.



а)



б)

б) $f(x) = 2\sqrt{1-x} - 2$ при $x \leq 0$ и $f(x)$ — нечетная функция.

№ 2.558. а) Пусть $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ для всех x не равных 0. Найдите $f(2)$ и $f(0,5)$.

Ответ: $f(2) = 3,5$; $f(0,5) = -1$.

б) Пусть $f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{8}{x}$ для всех x не равных 0. Найдите $f(3)$ и $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

Составляем систему:
$$\begin{cases} f(3) - 3f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{8}{3} \\ f\left(\frac{1}{3}\right) - 3f(3) = -24 \end{cases} \Rightarrow f(3) = 9\frac{1}{3}; f\left(\frac{1}{3}\right) = 4.$$

Ответ: $f(3) = 9\frac{1}{3}$; $f\left(\frac{1}{3}\right) = 4$.

№ 2.559. Найдите длину наибольшего отрезка, параллельного оси Oy и лежащего внутри фигуры, ограниченной параблами:

а) $y = x^2 - 4x - 7$ и $y = 9 - x^2$.

Функции пересекаются в точках: $x^2 - 4x - 7 = 9 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 4$. Другими словами, необходимо найти максимальное значение $|x^2 - 4x - 7 - (9 - x^2)| = |2x^2 - 4x - 16|$ в диапазоне $-2 \leq x \leq 4$. Максимальное значение $|2x^2 - 4x - 16|$ достигается при

$$x_b = \frac{4}{4} = 1 \text{ и равно } 18, \text{ причем } x_b \in [-2; 4]$$

Ответ: 18.

$$б) y = x^2 - 10 \text{ и } y = 6 - 4x - x^2.$$

Ответ: 18.

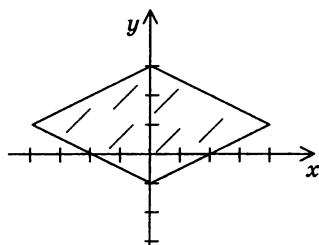
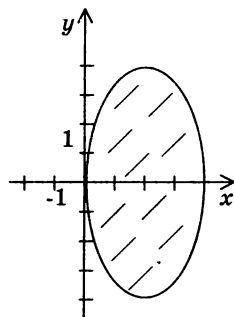
№ 2.560. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию:

$$а) |y| \leq 4x - x^2$$

$$б) |x| + 2|y - 1| \leq 4.$$

Вся координатная плоскость разбивается прямыми $x = 0$ и $y = 1$ на 4 квадрата:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \\ y \leq 3 - \frac{x}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ y \geq 1 \\ y \leq 3 + \frac{x}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ y < 1 \\ y \geq -1 - \frac{x}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ y < 1 \\ y \geq -1 + \frac{x}{2} \end{cases}.$$



№ 2.561. а) Пусть $y = x|5 - x| - 1$; x принимает значения от -2 до 6 включительно. Какие значения может принимать y ?

Функция y имеет две ветви: при $x < 5$ $y = -x^2 + 5x - 1$ и при $x \geq 5$ $y = x^2 - 5x - 1$. Максимальное значение $y = -x^2 + 5x - 1$ достигается при $x = 2,5$ и равно $5,25$. Минимальное значение $y = x^2 - 5x - 1$ достигается при $x_{\min} = 2,5$, но $x_{\min} < 5$, поэтому $y_{\min} = y(5) = -1$. На концах $y(-2) = -15$; $y(6) = 5$. В итоге $-15 \leq y \leq 5,25$.

Ответ: $[-15; 5,25]$.

б) Пусть $y = x^2 + 2x - |2x + 1|$. Какие значения может принимать y , если x изменяется от -5 до 2 включительно?

Ответ: $[-3; 6]$.

Найдите множество значений функции (2.562. – 2.563.):

№ 2.562. а) $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 4x + 7}$.

Ответ: $(0; 0,2]$.

б) $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{18}{x^2}$.

Обозначим $t = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{2}}{x}$, тогда $t^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{18}{x^2} - 6 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + \frac{18}{x^2} = t^2 + 6 \Rightarrow y \geq 6$ ($y = 6$ при $t = 0 \Rightarrow x^2 = 6$).

Ответ: $[6; +\infty)$.

№ 2.563. а) $f(x) = \sqrt{x+2} - x$.

Обозначим $t = \sqrt{x+2} \geq 0$. Тогда $f(x) = y = -t^2 + t + 2 \Rightarrow y_{\max} = 2\frac{1}{4}$

при $t = \frac{1}{2} \Rightarrow y \leq 2\frac{1}{4}$.

Ответ: $(-\infty; 2,25]$.

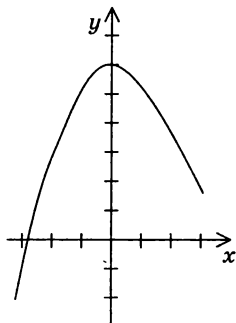
б) $f(x) = \frac{1}{x^2 + |2x - 3|}$.

Ответ: $(0; 0,5]$.

№ 2.564. Пусть $\min_{[a; b]}(f(x))$ и $\max_{[a; b]}(f(x))$ обозначают соответственно минимальное и максимальное значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Постройте график функции $y = q(a)$, где

а) $q(a) = \min_{[-1; 2]}(x^2 + 2ax + 7)$.

Выделим полный квадрат в $f(x)$:
 $f(x) = (x + a)^2 + 7 - a^2$. Положение вершины параболы $x_b = -a$ и если $-1 \leq -a \leq 2$, то $y_{\min} = 7 - a^2$. Если $-a < -1$, то $y_{\min} = f(-1) = 8 - 2a$. Если $-a > 2$, то $y_{\min} = f(2) = 11 + 4a$.



Таким образом: $q(a) = \begin{cases} 4a + 11, & \text{если } a < -2 \\ 7 - a^2, & \text{если } -2 \leq a \leq 1 \\ 8 - 2a, & \text{если } a > 1 \end{cases}$

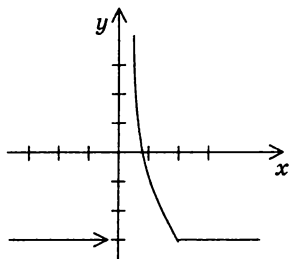
$$\text{б) } q(a) = \max_{[0; 2]} \left(\frac{x^2}{a} - x - 3 \right).$$

Рассмотрим два случая: 1) $a < 0$, тогда $x_b = \frac{a}{2}$ и $y_{\max} = f(0) = -3$;

2) $a > 0$, тогда $x_b = \frac{a}{2}$ и если $0 < \frac{a}{2} \leq 1$, то $y_{\max} = f(2) = \frac{4}{a} - 5$, если

$1 < \frac{a}{2}$, то $y_{\max} = f(0) = -3$.

$$\text{Таким образом: } q(a) = \begin{cases} -3, & \text{если } a < 0 \\ \frac{4}{a} - 5, & \text{если } 0 < a \leq 2 \\ -3, & \text{если } a > 2 \end{cases}$$



Найдите значения коэффициентов a и b и постройте график функции (2.565. – 2.566.):

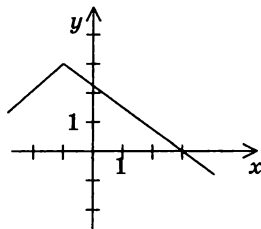
№ 2.565. а) $y = a|x + 1| + b$, если он проходит через точки $F(2; 0)$ и $M(-2; 2)$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3a + b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = -1; b = 3.$$

Таким образом, $y = 3 - |x + 1|$.

Ответ: $a = -1; b = 3$.



б) $y = |2x + b| + a$, если корнями

функции являются числа 1 и -3 .

Ответ: $a = -4; b = 2$.

№ 2.566. а) $y = a|x - 2| + b$, если он проходит через точку $M(1; -4)$, а наибольшее значение функции равно 1.

Ответ: $a = -5; b = 1$.

б) $y = a|x - 1| + x + b$, если ему принадлежат точки $A(4; 7)$ и $P(2; 1)$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3a + b = 3 \\ a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 2; b = -3.$$

Таким образом, $y = 2|x - 1| + x - 3$.

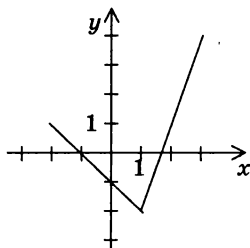


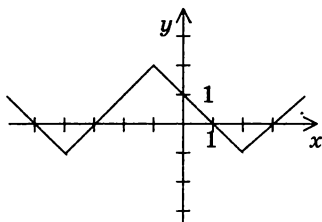
График функции состоит из двух ветвей: при $x < 1$ $y = -x - 1$ и при $x \geq 1$ $y = 3x - 5$.

Ответ: $a = 2; b = -3$.

№ 2.567. Постройте график функции $y = f(x)$ и, используя его, решите неравенство:

а) $f(x) = \|x + 1\| - 3\| - 1, f(x) \geq 0$.

Раскрывая внутренний модуль, получаем: при $x < -1$ $f(x) = |x + 4| - 1$; при $x \geq -1$ $f(x) = |x - 2| - 1$. $f(x) \geq 0$ при $x \leq -5 \cup -3 \leq x \leq 1 \cup x \geq 3$.



Ответ: $(-\infty; -5] \cup [-3; 1] \cup [3; +\infty)$.

б) $f(x) = |2 - |2x - 1|| - 2, f(x) < 0$.

Ответ: $(-1,5; 0,5) \cup (0,5; 2,5)$.

№ 2.568. Решите уравнение:

а) $f(|x|) = |f(x)|$, где $f(x) = 2|x - 1| + x$.

Ответ: $\{-2\} \cup [0; +\infty)$.

б) $f(|x| - 1) = |f(x) - 3|$, где $f(x) = 2x + |x|$.

Запишем условие: $2(|x| - 1) + ||x| - 1| = |2x + |x| - 3|$, которое равно-

сильно системе: $\begin{cases} x < 0 \\ |x + 1| - 2x - 2 = 3 - x \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - 2 = 2|x - 1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x = -3 \end{cases} \cup$

$\begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ -1 = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x = \emptyset \end{cases} \cup \begin{cases} x > 1 \\ -2 = -2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = 1; x > 1.$

Ответ: $\{-3\} \cup [1; +\infty)$.

№ 2.569. Постройте график функции $y = f(x)$ и для каждого a укажите количество общих точек этого графика и прямой $y = a$:

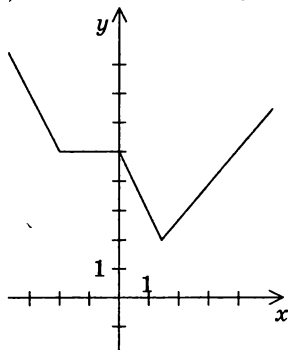
а) $f(x) = |2x - 3| + |x + 2| - |x|$.

Имеются три критических точки:

$x_1 = -2; x_2 = 0; x_3 = \frac{3}{2}$.

Раскрывая получаем:

$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & x < -2 \\ 5 & -2 \leq x \leq 0 \\ 5 - 2x & 0 < x \leq \frac{3}{2} \\ 0 & x > \frac{3}{2} \end{cases}$



$\bigcup \begin{cases} 2x - 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$. Из графика видно, что при $a < 2$ общих точек нет, при

$a = 2$ — одна общая точка, при $a > 2 \cup a \neq 5$ — две общих точки, при $a = 5$ — бесконечное число точек.

Ответ: нет точек при $a < 2$; 1 точка при $a = 2$; 2 точки при $2 < a < 5$ и $a > 5$; бесконечное число точек при $a = 5$.

$$б) f(x) = |3 - |2x + 1|| + x.$$

Ответ: нет точек при $a < -2$; 1 точка при $a = -2$; 2 точки при $-2 < a < 1$ и $a > 2,5$; 3 точки при $a = 1$ и $a = 2,5$; 4 точки при $1 < a < 2,5$.

№ 2.570. а) Докажите, что для функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$ $f(a) < f(a + 4)$ для любого действительного a .

Запишем: $f(a) - f(a + 4) = a^3 - 3a + 1 - ((a + 4)^3 - 3(a + 4) + 1) = 4 \cdot (-3a^2 - 12a - 13)$. $\frac{D}{4} = 36 - 39 < 0$, поэтому $-3a^2 - 12a - 13 < 0$ при всех a .

Следовательно, $f(a) < f(a + 4)$.

б) Докажите, что для функции $f(x) = |x|(x - 2)$ $f(a) > f(a - 3)$ для любого действительного a .

Запишем: $f(a) - f(a - 3) = |a|(a - 2) - |a - 3|(a - 5) = q(a)$.

$$q(a) = \begin{cases} -6a + 15 & a < 0 \\ 2a^2 - 10a + 15 & 0 \leq a \leq 3 \\ 6a - 15 & a > 3 \end{cases}.$$

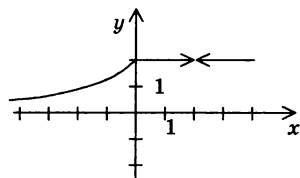
Положительность при $a < 0$ и $a > 3$ очевидна. При $0 \leq a \leq 3$ $\frac{D}{4} = 25 - 30 < 0$, поэтому $2a^2 - 10a + 15 > 0$ при всех a . Следовательно, $f(a) > f(a - 3)$ для всех действительных a .

№ 2.571. а) Постройте график функции $y = \frac{|x| + x - 4}{x - 2}$ и укажите для нее: область определения; множество значений; значения, принимаемые функцией более чем в одной точке.

Функция представляется в виде:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \geq 0 \text{ и } x \neq 2 \\ \frac{-4}{x-2}, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

$$D(y): x \neq 2. E(y): 0 < y \leq 2. y = 2$$



Ответ: $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $E(y) = (0; 2]$; значения, принимаемые более чем в 1 точке: 2.

б) Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - |x - 2|}$ и укажите для нее: область определения; значения, принимаемые функцией в двух точках; значения, принимаемые функцией в трех точках.

Ответ: $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; значения, принимаемые в двух точках: $-\frac{3}{2}$;

множество значений, принимаемых в 3 точках: $\left(-2; -\frac{3}{2}\right)$.

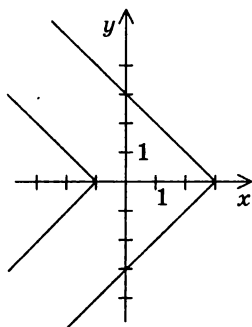
Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию (2.572. – 2.577.):

№ 2.572. а) $|x + |y| - 1| = 2$.

Замечаем, что график функции симметричен относительно оси абсцисс.

Уравнение при неотрицательных y соответствует системе:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x + y - 1 < 0 \\ y = -x - 1 \end{cases} \cup \begin{cases} y \geq 0 \\ x + y - 1 \geq 0 \\ y = 3 - x \end{cases}.$$

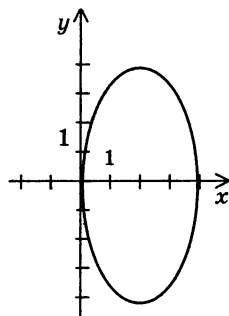


б) $|y| + x^2 - 4x = 0$.

Замечаем, что график функции симметричен относительно оси абсцисс.

Тогда равенство запишется в виде:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

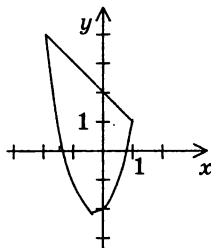


№ 2.573. а) $|y - x^2| = 2 - x - x^2$.

Раскрывая модуль, получаем:

$$\begin{cases} y < x^2 \\ y = 2x^2 + x - 2 \end{cases} \cup \begin{cases} y \geq x^2 \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow$$

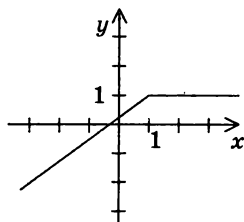
$$\Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ y = 2x^2 + x - 2 \\ y = 2 - x \end{cases}$$



$$\text{б) } |x - y| = x - 2y + 1.$$

Раскрывая модуль, получаем:

$$\begin{cases} y > x \\ y = \frac{2x+1}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} y \leq x \\ y = 1 \end{cases}$$



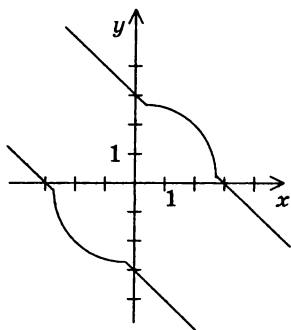
$$\text{№ 2.574. а) } |xy - 1| = x^2 + y^2 + xy - 8.$$

Раскрывая модуль, получаем:

$$\begin{cases} xy - 1 < 0 \\ (x + y)^2 = 9 \end{cases} \cup \begin{cases} xy - 1 \geq 1 \\ x^2 + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ y > \frac{1}{x} \\ y = 3 - x \\ y = -x - 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ y \leq \frac{1}{x} \\ x^2 + y^2 = 7 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 0 \\ y < \frac{1}{x} \\ y = 3 - x \\ y = -x - 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 0 \\ y \geq \frac{1}{x} \\ x^2 + y^2 = 7 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 3 \end{cases}.$$

Таким образом, график состоит из элементов двух прямых и окружности радиуса $\sqrt{7}$.



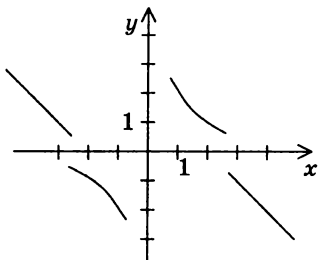
$$\text{б) } |x^2 + y^2 - 8| = 4xy - x^2 - y^2.$$

Раскрывая модуль, получаем:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 8 \\ xy = 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 8 \\ (y - x)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 < (\sqrt{8})^2 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 + y^2 \geq (\sqrt{8})^2 \\ y = x + 2 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

График состоит из элементов двух прямых вне круга с $R = 2\sqrt{2}$ и гиперболы внутри этого круга.

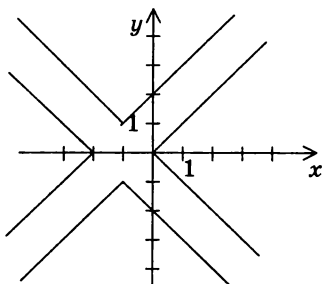


Заметим, что функция симметрична к замене $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$.

№ 2.575. а) $\|y\| - |x+1| = 1$.

Функция симметрична относительно оси абсцисс, поэтому достаточно рассмотреть $y \geq 0$. Тогда получаем:

$$y = |x+1| + 1 \cup y = |x+1| - 1.$$

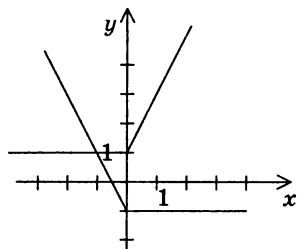


б) $\|x\| - |y| = |x+1|$.

Равенство равносильно системе:

$$y = |x| - |x+1| \cup y = |x| + |x+1|, \text{ откуда получаем:}$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ y = 1 \\ y = -2x - 1 \end{cases} \cup \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ y = -2x - 1 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 0 \\ y = -1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}.$$

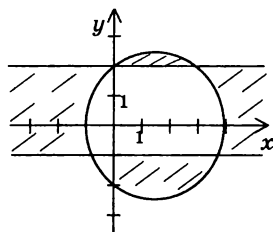


№ 2.576. а) $(y^2 - y - 2)(x^2 - 4x + y^2 - 5) \leq 0$.

Неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} y^2 - y - 2 \leq 0 \\ (x-2)^2 + y^2 \geq 9 \end{cases} \cup \begin{cases} y^2 - y - 2 \geq 0 \\ (x-2)^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 \leq y \leq 2 \\ (x-2)^2 + y^2 \geq 9 \end{cases} \cup \begin{cases} y \leq -1 \cup y \geq 2 \\ (x-2)^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$



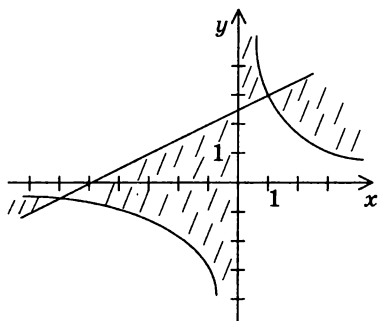
Границы области окружности с $R=3$ и с центром $(2; 0)$ и прямые $y = -1$ и $y = 2$.

б) $(xy - 3)(x - 2y + 5) \geq 0$.

Неравенство равносильно системе неравенств:

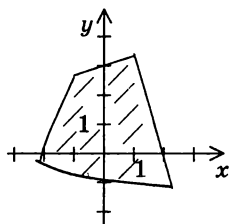
$$\begin{cases} xy - 3 \geq 0 \\ y \leq \frac{1}{2}(x+5) \end{cases} \cup \begin{cases} xy - 3 \leq 0 \\ y \geq \frac{1}{2}(x+5) \end{cases}.$$

Границы области прямая $y = \frac{1}{2}(x+5)$ и гипербола $y = \frac{3}{x}$.



№ 2.577. а) $\begin{cases} y \leq 4 - x^2 \\ x \geq y^2 - 2y - 3 \end{cases}$

Фигура получается пересечением двух парабол относительно осей x и y .



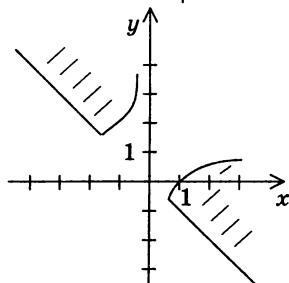
б) $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ xy \leq x - 1 \end{cases}$

Перепишем систему в виду:

$$\begin{cases} y \geq -x \\ y \leq 1 - \frac{1}{x} \end{cases} \cup \begin{cases} y \geq -x \\ y \geq 1 - \frac{1}{x} \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

Границы области прямая $y = -x$ и

гипербола $y = 1 - \frac{1}{x}$.



ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ПРОГРЕССИИ

№ 2.601. а) Докажите, что последовательность (c_n) , заданная формулой $c_n = \frac{3n-1}{5n+4}$, монотонно возрастающая и ограниченная.

Найдем разность $c_{n+1} - c_n = \frac{3(n+1)-1}{5(n+1)+4} - \frac{3n-1}{5n+4} = \frac{3n+2}{5n+9} - \frac{3n-1}{5n+4} = \frac{17}{(5n+9)(5n+4)} > 0$, то есть последовательность монотонно возрастает. Найдем разность $\frac{3}{5} - \frac{3n-1}{5n+4} = \frac{17}{5(5n+4)} > 0$ для всех n . Таким образом, $c_n < \frac{3}{5}$, то есть последовательность ограничена.

б) Докажите, что последовательность (a_n) , заданная формулой $a_n = \frac{1-3n}{3+2n}$, монотонно убывающая и ограниченная.

Найдем разность $a_{n+1} - a_n = \frac{1-3(n+1)}{3+2(n+1)} - \frac{1-3n}{3+2n} = -\frac{11}{(2n+5)(2n+3)} < 0$, то есть последовательность монотонно убывающая. Найдем разность $\frac{1-3n}{3+2n} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{2(3+2n)} > 0$, то есть $a_n > -\frac{3}{2}$ и, значит, последовательность (a_n) ограничена.

№ 2.602. а) Докажите, что последовательность (c_n) , заданная формулой $c_n = \frac{2}{1-3n}$, монотонно возрастающая и ограниченная.

Найдем разность $c_{n+1} - c_n = \frac{2}{-2-3n} - \frac{2}{1-3n} = \frac{6}{(3n-1)(3n+2)} > 0$, то есть последовательность монотонно возрастающая. Найдем разность $0 - \frac{2}{1-3n} = \frac{2}{3n-1} > 0$, то есть $c_n < 0$ и, значит, последовательность (c_n) ограничена.

б) Докажите, что последовательность (d_n) , заданная формулой $d_n = \frac{17}{2n+7}$, монотонно убывающая и ограниченная.

Найдем разность $d_{n+1} - d_n = \frac{17}{2n+9} - \frac{17}{2n+7} = -\frac{34}{(2n+9)(2n+7)} < 0$, то есть последовательность монотонно убывающая. Найдем разность

$\frac{17}{2n+7} - 0 = \frac{17}{2n+7} > 0$, то есть $d_n > 0$ и, значит, последовательность (d_n) ограничена.

№ 2.603. а) Докажите, что последовательность (a_n) , заданная формулой $a_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{2n}$, монотонно убывающая и ограниченная.

$$\begin{aligned} \text{Найдем разность } a_{n+1} - a_n &= \sqrt{2n+5} - \sqrt{2n+2} - \sqrt{2n+3} + \sqrt{2n} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{(2n+5)(2n+3)}} - \frac{2}{\sqrt{2n(2n+2)}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2n(2n+2)} - \sqrt{(2n+5)(2n+3)}}{\sqrt{(2n+5)(2n+3)2n(2n+2)}} < 0, \end{aligned}$$

то есть последовательность монотонно убывающая. Последовательность ограничена, поскольку $a_n > 0$.

б) Докажите, что последовательность (b_n) , заданная формулой

$$b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}, \text{ монотонно возрастающая и ограниченная.}$$

$$\text{Найдем отношение положительных } b_{n+1} \text{ и } b_n \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)\sqrt{n^2+1}}{n \cdot \sqrt{(n+1)^2+1}}.$$

$$\text{Сравним } \frac{(n+1)\sqrt{n^2+1}}{n\sqrt{(n+1)^2+1}} > 1 \Leftrightarrow \frac{(n+1)^2(n^2+1)}{n^2((n+1)^2+1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2((n+1)^2+1)} > 0, \text{ то}$$

есть $b_{n+1} > b_n \Rightarrow$ последовательность монотонно возрастающая. Последовательность ограниченная, поскольку $b_n < 1$.

№ 2.604. а) Докажите, что последовательность (b_n) , заданная формулой $b_n = \sqrt{n^2 + 2n + 2} - n$, монотонно убывающая и ограниченная.

Замечаем, что $b_n > 0$.

Запишем очевидное равенство: $b_n \cdot (b_n + 2n) = 2(n+1)$. Тогда $b_{n+1} \cdot (b_{n+1} + 2(n+1)) = 2(n+2)$. Вычтем из второго равенства первое: $(b_{n+1} - b_n)(b_{n+1} + b_n + 2n) + 2b_{n+1} = 2$ и, следовательно, знак $b_{n+1} - b_n$ определяется знаком $1 - b_{n+1} = (n+2) - \sqrt{n^2 + 4n + 5} > 0 \Rightarrow n+2 > \sqrt{n^2 + 4n + 5} \Rightarrow (n+2)^2 < n^2 + 4n + 5 \Rightarrow b_{n+1} < b_n$ и последовательность монотонно убывающая. Последовательность ограничена, поскольку $b_n > 0$.

б) Докажите, что последовательность (c_n) , заданная формулой $c_n = 2n - \sqrt{4n^2 + 3}$, монотонно возрастающая и ограниченная.

Замечаем, что $c_n < 0$.

Запишем очевидное равенство: $c_n(c_n - 4n) = 3$. Тогда $c_{n+1}(c_{n+1} + 4(n+1)) = 3$. Вычтем из второго равенства первое: $(c_{n+1} - c_n)(c_{n+1} + c_n - 4n) - 4c_{n+1} = 0$. $c_{n+1} < 0$; $c_{n+1} + c_n - 4n < 0 \Rightarrow c_{n+1} - c_n > 0$ и последовательность монотонно возрастающая и ограниченная, поскольку $c_n < 0$.

№ 2.605. а) Докажите, что, начиная с некоторого номера, все члены последовательности (b_n) , заданной формулой $b_n = \frac{11n-1}{3n+5}$ находятся в промежутке $[3,5; 4]$.

Запишем систему неравенств:
$$\begin{cases} \frac{11n-1}{3n+5} \geq \frac{7}{2} \\ \frac{11n-1}{3n+5} \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n-37}{2(n+5)} \geq 0 \\ \frac{-n-21}{3n+5} \leq 0 \end{cases}.$$

Система выполняется при $n \geq 37$, что требовалось доказать.

б) Докажите, что, начиная с некоторого номера, все члены последовательности (a_n) , заданной формулой $a_n = \frac{2-9n}{2n+1}$ находятся в промежутке $[-5; -4,2]$.

Запишем систему неравенств:
$$\begin{cases} \frac{2-9n}{2n+1} \geq -5 \\ \frac{2-9n}{2n+1} \leq -\frac{21}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n+7}{2n+1} \geq 0 \\ \frac{-n+31}{5(2n+1)} \leq 0 \end{cases}.$$

Система выполняется при $n \geq 31$, что требовалось доказать.

№ 2.606. а) Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = a$; $a_{n+1} = 2a_n - 1$. При каких a последовательность (a_n) является монотонно возрастающей?

Найдем разность $a_{n+1} - a_n = a_n - 1$. Методом математической индукции докажем, что $a_{n+1} - a_n > 0$ при всех n , если $a > 1$. При $n = 1$ получаем $a_2 - a_1 = a_1 - 1 = a - 1 > 0$. Предположим, что $a_{k+1} - a_k > 0$ и докажем, что $a_{k+2} - a_{k+1} > 0 \Rightarrow a_{k+2} - a_{k+1} = 2(a_{k+1} - a_k) > 0$, что требовалось доказать.

Ответ: при $a > 1$.

б) Последовательность (b_n) задана рекуррентно: $b_1 = b$, $b_{n+1} = 3b_n - 2$. При каких значения b последовательность (b_n) является монотонно убывающей?

Ответ: при $b < 1$.

№ 2.607. а) Найдите номер наибольшего члена последовательности (a_n) , если $a_n = 3 + 15n - 2n^2$.

Ответ: 4.

б) Найдите номер наибольшего члена последовательности (p_n) , если $p_n = 1 - 23n + 3n^2$.

Квадратный трехчлен $1 - 23x + 3x^2$ принимает минимальное значение при $x = \frac{23}{6} \Rightarrow n$ должно быть ближайшим к этому значению,

$$\text{поэтому } n = \left[\frac{23}{6} \right] + 1 = 4$$

Ответ: 4.

№ 2.608. а) Найдите наименьший член последовательности (c_n) , если $c_n = 4 + 3n^2 - 21n$.

Квадратный трехчлен $4 + 3x^2 - 21x$ принимает минимальное значение при $x = \frac{7}{2} \Rightarrow n_1 = \left[\frac{7}{2} \right] = 3; n_2 = \left[\frac{7}{2} \right] + 1 = 4 \Rightarrow c_{\min} = -32$.

Ответ: -32.

б) Найдите наибольший член последовательности (b_n) , если $b_n = 14n + 5 - 2n^2$.

Ответ: 29.

№ 2.609. а) Найдите наибольший член последовательности (a_n) , если

$$a_n = \frac{n^2 - 14}{2^n}.$$

Выясним, с какого номера последовательность (a_n) убывающая. При

$$n \geq 4 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2n+1}{n^2-14} \right) \text{ и } a_n > 0. \text{ Сравним } \frac{2n+1}{n^2-14} \vee 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-n^2 + 2n + 15}{n^2 - 14} = \frac{-(n-5)(n+3)}{n^2 - 14} < 0 \quad \text{при } n > 5. \quad \text{При } n = 5$$

$$a_6 = a_5 = \frac{11}{32}; a_4 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow (a_n)_{\max} = \frac{11}{32}.$$

Ответ: $\frac{11}{32}$.

б) Найдите наименьший член последовательности (b_n) , если

$$b_n = \frac{3^n}{n^2 + n}.$$

Ответ: 1,5.

№ 2.610. а) Последовательность (a_n) задана условиями: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + n$. Найдите a_{76} .

Ответ: 2854.

б) Последовательность (b_n) задана условиями: $b_1 = 2$, $b_{n+1} = \frac{n+2}{n} b_n$.

Найдите b_{124} .

Найдем закономерность. $b_n = \frac{n+1}{n-1} b_{n-1}$; $b_{n-1} = \frac{n}{n-2} b_{n-2} \Rightarrow b_{n+1} = \frac{(n+2)(n+1)n}{n(n-1)(n-2)} b_{n-2}$. Подходящая формула будет $b_n = \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$. Докажем эту формулу методом математической индукции.

При $n = 1$ формула выполняется. Предположим, что $b_k = \frac{(k+1)!}{(k-1)!}$.

Докажем, что она выполняется и при $n = k+1$:

$b_{k+1} = \frac{k+2}{k} \cdot b_k = \frac{(k+2) \cdot (k+1)!}{k \cdot (k-1)!} = \frac{(k+2)!}{k!} = \frac{((k+1)+1)!}{((k+1)-1)!}$, что требовалось доказать.

Тогда $b_{124} = \frac{125!}{123!} = 125 \cdot 124 = 15500$.

Ответ: 15500.

№ 2.611. а) Последовательность (a_n) задана условиями: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n$. Является ли число 1980 членом этой последовательности? Если да, то определите его номер.

Ответ: является. $n = 44$.

б) Последовательность (b_n) задана условиями: $b_1 = 0$, $b_{n+1} = b_n + n$. Является ли число 2080 членом этой последовательности? Если да, то определите его номер.

Поищем формулу для b_n в форме $an^2 + bn + c$, тогда должно быть $a(n+1)^2 + b(n+1) + c - an^2 - bn - c = n \Rightarrow a = \frac{1}{2}$; $b = -\frac{1}{2} \Rightarrow b_n = \frac{1}{2} n(n-1)$. Докажем эту формулу методом математической индукции.

Для $n = 1$ она выполняется, и предположим, что она выполняется при $n = k$, то есть $b_k = \frac{1}{2} k(k-1)$. Докажем, что она справедлива и для

$n = k+1$: $b_{k+1} = b_k + k = \frac{1}{2} k(k-1) + k = \frac{1}{2} k(k+1) = \frac{1}{2} (k+1)((k+1)-1)$, что

требовалось доказать. Выясним, есть ли n такое, что $\frac{1}{2} n(n-1) = 2080 \Rightarrow$

$$\Rightarrow n(n-1) = 4160 \Rightarrow n = 65.$$

Ответ: является, $n = 65$.

№ 2.612. а) В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = 100$; a_{22} — ее первый отрицательный член. Какие целые значения может принимать разность прогрессии?

$$\text{Получаем: } \begin{cases} a_{22} = a_1 + 21d = 100 + 21d < 0 \\ a_{21} = a_1 + 20d = 100 + 20d \geq 0 \end{cases} \Rightarrow d = -5.$$

Ответ: -5 .

б) В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = -85$; a_{19} — ее первый положительный член. Какие целые значения может принимать разность прогрессии?

Ответ: 5 .

№ 2.613. а) Числа $a_1, a_2, \dots, a_{21}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма членов этой прогрессии с нечетными номерами на 15 больше суммы членов с четными номерами. Найдите a_{12} , если $a_{20} = 3a_9$.

Ответ: 17 .

б) Числа $b_1, b_2, \dots, b_{19}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что удвоенная сумма членов этой прогрессии с четными номерами на 10 больше суммы всех членов. Найдите b_{13} , если $b_3 = 2b_4$.

$$\begin{aligned} \text{Разность членов с четными номерами составляет } 2d \text{ и их сумма} \\ S_1 = \frac{9 \cdot (b_{18} + b_2)}{2}, \text{ сумма всех членов прогрессии: } S = \frac{19 \cdot (b_{19} + b_1)}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{18 \cdot (b_{18} + b_2)}{2} = \frac{19 \cdot (b_{19} + b_1)}{2} + 10; \quad b_{18} + b_2 = b_{19} - d + b_1 + d = b_{19} + b_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow b_{19} + b_1 = -20. \end{aligned}$$

$$\text{Получаем систему: } \begin{cases} 2b_1 + 18d = -20 \\ b_1 + 4d = 0 \end{cases} \Rightarrow b_1 = 8, d = -2 \Rightarrow b_{13} = b_1 +$$

$$+12d = -16.$$

Ответ: -16 .

№ 2.614. а) Сумма первых 4 членов арифметической прогрессии в 5 раз меньше суммы следующих 8 членов. Найдите отношение суммы первых 8 членов прогрессии к сумме ее первых 4 членов.

$$\text{Запишем отношение } \frac{S_8}{S_4} = \frac{8a_1 + 28d}{4a_1 + 6d} = \frac{4a_1 + 14d}{2a_1 + 3d}. \text{ По условию}$$

$$S_{12} - S_4 = 5S_4 \Rightarrow S_{12} = 6S_4 \Rightarrow 12a_1 + 66d = 6 \cdot (4a_1 + 6d) \Rightarrow a_1 = 2,5d \Rightarrow \frac{S_8}{S_4} = 3.$$

Ответ: 3 .

б) Сумма первых 9 членов арифметической прогрессии равна половине суммы следующих ее 9 членов. Найдите отношение суммы первых 27 членов прогрессии к сумме ее первых 9 членов.

Ответ: 6.

№ 2.615. а) Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся на 13.

Ответ: 456876.

б) Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся на 17. Сначала найдем сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 17:

$$a_1 = 102, n = \left[\frac{999}{17} \right] - \left[\frac{100}{17} \right] = 53, a_{53} = 986 \Rightarrow S_{17} = \frac{53 \cdot (102 + 986)}{2} =$$

$= 53 \cdot 544 = 28832$. Сумма всех трехзначных чисел:

$$S = \frac{900 \cdot (100 + 999)}{2} = 494550. \quad \text{Искомая сумма будет:}$$

$$494550 - 28832 = 465718$$

Ответ: 465718.

№ 2.616. а) Найдите сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 5, но не делящихся на 7.

Выясним, сколько чисел делятся на 35 и найдем их сумму:

$$n = \left[\frac{999}{35} \right] - \left[\frac{100}{35} \right] = 28 - 2 = 26, a_1 = 105, a_{26} = 980 \Rightarrow S_{35} = \frac{26 \cdot (105 + 980)}{2} =$$

$$= 14105.$$

Выясним, сколько чисел делится на 5 и найдем их сумму:

$$n = \left[\frac{1000}{5} \right] - \left[\frac{100}{5} \right] = 180, a_1 = 100, a_{180} = 995 \Rightarrow S_5 = \frac{180 \cdot (100 + 995)}{2} = 98550.$$

Искомая сумма будет: $98550 - 14105 = 84445$.

Ответ: 84445.

б) Найдите сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 7, но не делящихся на 5.

Ответ: 56231.

№ 2.617. а) Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся на 7 и имеющих последней цифрой 3.

Ответ: 42131.

б) Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся на 11 и имеющих последней цифрой 5.

Найдем сумму чисел, делящихся на 55 и имеющих 5 на конце, то есть идущих с шагом 110: $a_1 = 165, a_8 = 935 \Rightarrow S_{55} = 4400$. Число всех

трехзначных чисел, имеющих 5 на конце будет: $n = \frac{995 - 105}{10} + 1 = 90$

и их сумма $S_5 = \frac{90(995 + 105)}{2} = 49500$. Тогда искомая сумма будет:

$$49500 - 4400 = 45100.$$

Ответ: 45100.

№ 2.618. а) Пусть P — сумма квадратов всех четных трехзначных чисел, а Q — сумма квадратов всех нечетных трехзначных чисел. Вычислите $P - Q$.

$$\begin{aligned} \text{Число четных трехзначных чисел равно } \frac{998 - 100}{2} + 1 = 450, \text{ та-} \\ \text{кое же число нечетных чисел } P - Q = 100^2 + 102^2 + \dots + 998^2 - (101^2 + \\ + 103^2 + \dots + 999^2) = -[(100 + 101) + (102 + 103) + \dots + (998 + 999)] = \\ = -\frac{900 \cdot (100 + 999)}{2} = -494550. \end{aligned}$$

Ответ: -494550.

б) Пусть A — сумма квадратов всех двухзначных чисел, дающих при делении на 3 остаток 2, а B — сумма квадратов всех двухзначных чисел, дающих при делении на 3 остаток 1. Вычислите $A - B$.

Ответ: 3240.

№ 2.619. а) (a_n) — арифметическая прогрессия; $a_1 = 10$, $d = 2$. Вычис-

лите $\frac{1}{a_1^2 - 1} + \frac{1}{a_2^2 - 1} + \frac{1}{a_3^2 - 1} + \dots + \frac{1}{a_{50}^2 - 1}$.

Ответ: $\frac{50}{981}$.

б) (a_n) — арифметическая прогрессия; $a_1 = 5$, $d = 3$. Вычислите

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{99} a_{100}}.$$

Заметим, что $\frac{1}{a_i a_{i+1}} = \frac{1}{a_i(a_i + d)} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_i + d} \right)$ и тогда искомая

сумма будет равна $\frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{100}} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5 + 99 \cdot 3} \right) = \frac{99}{1510}$.

Ответ: $\frac{99}{1510}$.

№ 2.620. Докажите, что для любой арифметической прогрессии (a_n) значение данного выражения постоянно (если оно определено):

$$\text{а) } \left(\left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_8} \right) : \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_8} \right) \right)^{-1} \cdot \frac{\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_9}}{\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_9}}.$$

$$\text{Преобразуем: } \frac{a_8 - a_3}{a_8 + a_3} \cdot \frac{a_2 + a_9}{a_9 - a_2} = \frac{a_9 - d - a_2 - d}{a_9 - d + a_2 + d} \cdot \frac{a_2 + a_9}{a_9 - a_2} = 1 - \frac{2d}{a_9 - a_2} =$$

$$= 1 - \frac{2d}{7d} = \frac{5}{7} \text{ при } a_2, a_3, a_8, a_9 \neq 0.$$

$$\text{б) } \frac{\frac{1}{a_{10}} - \frac{1}{a_3}}{\frac{1}{a_{10}} + \frac{1}{a_3}} : \left(\frac{\frac{1}{a_{11}} + \frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_{11}} - \frac{1}{a_2}} \right)^{-1}.$$

$$\text{Преобразуем: } \frac{a_3 - a_{10}}{a_3 + a_{10}} \cdot \frac{a_2 + a_{11}}{a_2 - a_{11}} = \frac{a_2 + d - a_{11} + d}{a_2 + d + a_{11} - d} \cdot \frac{a_2 + a_{11}}{a_2 - a_{11}} = 1 + \frac{2d}{a_2 - a_{11}} =$$

$$= 1 - \frac{2d}{9d} = \frac{7}{9} \text{ при } a_2, a_3, a_{10}, a_{11} \neq 0.$$

№ 2.621. а) Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии на 1,5 больше, чем сумма ее первых трех членов. Пятый член прогрессии равен ее третьему члену, умноженному на 4. Найдите ее четвертый член, если известно, что знаменатель прогрессии положителен.

$$\text{Запишем условия: } \begin{cases} S_5 = S_3 + 1,5 \\ b_5 = 4b_3 \\ q > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 \cdot \frac{1 - q^5 - 1 + q^3}{1 - q} = 1,5 \\ q^4 = 4q^2 \\ q > 0 \end{cases} \Rightarrow q = 2;$$

$$b_1 = \frac{1,5}{24} = \frac{1}{16} \Rightarrow b_4 = b_1 \cdot q^3 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,5.

б) Сумма третьего и пятого членов геометрической прогрессии равна 10, а сумма ее второго и четвертого членов равна $\frac{10}{3}$. Найдите четвертый член прогрессии.

Ответ: 3.

№ 2.622. а) Произведение первого и пятого членов геометрической прогрессии равно 12. Частное от деления второго члена на четвертый равно 3. Найдите второй член прогрессии.

$$\text{Запишем условия: } \begin{cases} b_1 \cdot b_5 = 12 \\ b_2 = 3b_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1^2 q^4 = 12 \\ 3q^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow b_1^2 = 108; q^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_2^2 = 36 \Rightarrow b_2 = \pm 6.$$

Ответ: 6 или -6.

б) Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 21, а сумма их квадратов равна 189. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

Ответ: $b_1 = 3, q = 2$ или $b_1 = 12, q = \frac{1}{2}$.

№ 2.623. а) Найдите четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.

Ответ: $-\frac{35}{3}; -\frac{140}{3}; -\frac{560}{3}; -\frac{2240}{3}$ или $7, -28, 112, -448$.

б) Найдите четыре числа, первые три из которых составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних равна 18.

Обозначим эти числа a, b, c, d , тогда условия запишутся в виде:

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ 2c = b + d \\ a + d = 21 \\ b + c = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ c = 18 - b \\ d = 36 - 3b \\ a = 3b - 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{45}{4}; a_1 = \frac{75}{4}; c_1 = \frac{27}{4}; d_1 = \frac{9}{4} \\ b_2 = 6; a_2 = 3; c_2 = 12; d_2 = 18 \end{cases}$$

Ответ: $3, 6, 12, 18$ или $\frac{75}{4}, \frac{45}{4}, \frac{27}{4}, \frac{9}{4}$.

№ 2.624. а) Сумма бесконечной геометрической прогрессии (b_n) равна 7, а сумма квадратов ее членов равна 14. Найдите b_1 и b_2 . Квадраты членов геометрической прогрессии также составляют геометрическую прогрессию с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2 ,

тогда условия запишутся:

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 7 \\ \frac{b_1^2}{1-q^2} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 7 \\ \frac{b_1}{1+q} = 2 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{5}{3}; b_1 = \frac{28}{9};$$

$$b_2 = \frac{140}{81}.$$

Ответ: $b_1 = \frac{28}{9}, b_2 = \frac{140}{81}$.

б) Сумма бесконечной геометрической прогрессии в 1,75 раза больше суммы кубов всех ее членов. Найдите знаменатель прогрессии, если ее первый член равен 1.

Ответ: 0,5.

№ 2.625. а) Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии, про которую известно, что ее второй член равен 4, а отношение суммы квадратов ее членов к сумме членов равно $\frac{16}{3}$.

Ответ: 16.

б) Найдите знаменатель бесконечной геометрической прогрессии, если ее сумма равна $\frac{4}{3}$, а сумма кубов всех ее членов равна $\frac{64}{9}$.

Кубы членов геометрической прогрессии также составляют геометрическую прогрессию с первым членом b_1^3 и знаменателем q^3 .

Тогда условия запишутся:
$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = \frac{4}{3} \\ \frac{b_1^3}{1-q^3} = \frac{64}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = \frac{4}{3} \\ \frac{b_1^2}{1+q+q^2} = \frac{16}{3} \end{cases} \Rightarrow 2q^2 + 5q +$$

$$+ 2 = 0 \Rightarrow q = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-0,5$.

№ 2.626. а) Докажите, что последовательность, сумма n первых членов которой при любом n задается формулой $S_n = 3n^2 - 5n$, является арифметической прогрессией. Найдите разность этой прогрессии.

Запишем очевидные условия:
$$\begin{cases} S_n = S_{n-1} + a_n \\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \end{cases} \Rightarrow a_{n+1} - a_n = S_{n+1} +$$

$$+ S_{n-1} - 2S_n = 3(n+1)^2 - 5(n+1) + 3(n-1)^2 - 5(n-1) - 6n^2 + 10n = 6, \quad \text{то}$$

есть $d = 6$ и не зависит от n , поэтому последовательность является арифметической прогрессией.

Ответ: 6.

б) Докажите, что последовательность, сумма n первых членов которой при любом n задается формулой $S_n = 3^n - 1$, является геометрической прогрессией. Найдите знаменатель этой прогрессии.

Запишем очевидное равенство:
$$\frac{S_{n+1} - S_n}{S_n - S_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^{n+1} - 3^n}{3^n - 3^{n-1}} =$$

$$= \frac{2}{2/3} = 3, \quad \text{то есть } q = 3 \text{ и не зависит от } n, \text{ поэтому последовательность}$$

является геометрической прогрессией.

Ответ: 3.

№ 2.627. а) Две арифметические прогрессии имеют один и тот же первый член, равный 3. Разность первой прогрессии в 2 раза больше, чем разность второй. Найдите вторые члены этих прогрессий, если сумма первых шестнадцати членов первой из них равна сумме первых двенадцати членов второй прогрессии.

Ответ: $2\frac{25}{29}$ и $2\frac{27}{29}$.

б) Две арифметические прогрессии имеют один и тот же первый член, равный 5. Разность первой в 3 раза меньше разности второй. Найдите вторые члены этих прогрессий, если сумма тридцати первых членов первой прогрессии равна сумме первых двадцати членов второй.

Обозначим разность для первой прогрессии d , тогда для второй она будет $3d$. В итоге получаем:

$$30 \cdot 5 + \frac{30 \cdot 29}{2} \cdot d = 20 \cdot 5 + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 3d \Rightarrow d = \frac{10}{27} \Rightarrow a_2 = 5 \frac{10}{27}; a_2' = a_1 + 3d = 6 \frac{1}{9}.$$

Ответ: $5 \frac{10}{27}$ и $6 \frac{1}{9}$.

№ 2.628. а) Три числа составляют арифметическую прогрессию. Если первые два оставить без изменения, а к третьему прибавить сумму двух первых, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой геометрической прогрессии.

Пусть это будут числа a, b, c , тогда:

$$\begin{cases} 2b = a + c \\ b^2 = a(a + b + c) \\ a, b, c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \frac{b}{a} = 1 + \frac{c}{a} \\ \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{b}{a}\right) = 0 \Rightarrow q = \frac{b}{a} = 3. \\ a \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: 3.

б) Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если первые два из них оставить без изменений, а из последнего вычесть первое, то полученные три числа составят арифметическую прогрессию. Найдите разность этой арифметической прогрессии, если второе из взятых чисел равно 6.

Ответ: 3.

№ 2.629. а) Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 30; четвертый, седьмой и пятый члены этой прогрессии в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию. Найдите разность арифметической прогрессии, если известно, что все ее члены различны.

Ответ: -10 .

б) Сумма первых тринадцати членов арифметической прогрессии равна 130. Известно, что четвертый, десятый и седьмой члены этой прогрессии, взятые в указанном порядке, составляют геометрическую прогрессию. Найдите первый член арифметической прогрессии при условии, что он не равен ее второму члену.

$$\text{Запишем условия: } \begin{cases} 13a_1 + \frac{13 \cdot 12}{2} \cdot d = 130 \\ (a_1 + 9d)^2 = (a_1 + 3d)(a_1 + 6d) \Leftrightarrow \\ a_1 \neq a_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 10 - 6d \\ d(a_1 + 7d) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 70 \quad d = -10. \\ d \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: 70.

№ 2.630. а) Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. известно, что пятый, восьмой, одиннадцатый члены этой прогрессии различны и являются соответственно первым, вторым, десятым членами арифметической прогрессии. Найдите первый член геометрической прогрессии.

$$\text{Запишем условия в виде: } \begin{cases} b_1 \frac{1-q^5}{1-q} = 62 \\ \frac{b_1 q^{10} - b_1 q^4}{b_1 q^7 - b_1 q^4} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \frac{1-q^5}{1-q} = 62 \\ q^3 + 1 = 9 \end{cases} \Rightarrow q = 2,$$

$$b_1 = 2.$$

Ответ: 2.

б) Три различных числа a, b, c , сумма которых равна 124 являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Одновременно эти три числа a, b и c являются соответственно третьим, тринадцатым и пятнадцатым членами арифметической прогрессии. Найдите числа a, b, c .

Ответ: $a = 100, b = 20, c = 4$.

№ 2.631. а) Числа u_1, u_2, u_3, u_4 , сумма которых равна 5, являются первыми четырьмя членами геометрической прогрессии, а числа $u_2, u_3, \frac{8}{9}u_4$ являются последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии.

$$\text{Ответ: } b_1 = \frac{8}{13}, q = \frac{3}{2} \text{ или } b_1 = \frac{64}{35}, q = \frac{3}{4}.$$

б) Числа t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 , сумма которых равна 62, являются первыми пятью членами геометрической прогрессии, а числа $t_3, \frac{5}{4}t_4, t_5$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

Найдите первый член и знаменатель указанной геометрической прогрессии.

Запишем условия в виде:

$$\begin{cases} t_1 \frac{1-q^5}{1-q} = 62 \\ \frac{5}{2} t_1 q^3 = t_1 q^2 + t_1 q^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \frac{1-q^5}{1-q} = 62 \\ 2q^2 - 5q + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow q_1 = 2; t_1 = 2; q_2 = \frac{1}{2}; t_1 = 32.$$

Ответ: $t_1 = 2, q = 2$ или $t_1 = 32, q = \frac{1}{2}$.

№ 2.632. а) Все члены геометрической прогрессии (b_n) различны. Между ее вторым и третьим членами можно вставить число z такое, что b_1, b_2, z и b_3 будут являться последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Запишем условия в виде:

$$\frac{b_3 - b_1}{b_2 - b_1} = 3 \Rightarrow \frac{b_3}{b_1} - 1 = 3 \left(\frac{b_2}{b_1} - 1 \right) \Rightarrow q^2 + 3q + 2 = 0 \Rightarrow q = 2.$$

Ответ: 2.

б) Пять различных чисел составляют арифметическую прогрессию. Если удалить ее второй и третий члены, то три оставшихся числа составят геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

№ 2.633. а) (a_n) — арифметическая прогрессия, (b_n) — геометрическая прогрессия. Известно, что $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_6 = b_3, a_1 \neq a_2$. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Запишем условия в виде:

$$\frac{b_3 - b_1}{b_2 - b_1} = 5 \Rightarrow \frac{q^2 - 1}{q - 1} = 5 \Rightarrow q^2 - 5q + 4 = 0 \Rightarrow q = 4.$$

Ответ: 4.

б) (a_n) — арифметическая прогрессия, (b_n) — геометрическая прогрессия. Известно, что $a_1 = b_1, a_3 = b_2, a_7 = b_3, a_3 \neq a_7$. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ: 2.

№ 2.634. а) В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = 35,8; a_2 = 35,5$. Найдите наибольшее значение суммы первых членов прогрессии.

Ответ: 2154.

б) В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = -41,3$; $a_2 = -39,9$. Найдите наименьшее значение суммы первых членов прогрессии.

Разность прогрессии $d = -39,9 - (-41,3) = 1,4$. $S_n = -41,3 \cdot n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 1,4 = 0,7n^2 - 42n$. Квадратный трехчлен $0,7x^2 - 42x$ имеет наименьшее значение при $x = \frac{42}{1,4} - 30 \Rightarrow S_{30} = -630$.

Ответ: -630 .

№ 2.635. а) Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполняться водой, причем в первую цистерну поступает 100 л воды в минуту, во вторую — 60 л и в третью — 80 л. Известно, что в начальный момент времени первая цистерна пуста, вторая и третья частично заполнены и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Во сколько раз количество воды в начальный момент времени во второй цистерне больше, чем в третьей?

Пусть в третьей цистерне x л воды, во второй — kx л воды, а время заполнения обозначим t , тогда равенство объемов запишется в виде: $100 \cdot t = 60 \cdot t + kx = 80 \cdot t + x \Rightarrow \begin{cases} 40t = kx \\ 20t = (k-1)x \end{cases} \Rightarrow \frac{k}{k-1} = 2 \Rightarrow k = 2$.

Ответ: в 2 раза.

б) Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполняться водой, причем в первую цистерну поступает 120 л воды в минуту, а во вторую — 40 л. Известно, что в начальный момент времени первая цистерна пуста, а объем воды в третьей цистерне в 2 раза меньше, чем во второй, и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Сколько литров воды поступает в одну минуту в третью цистерну?

Ответ: 80 л.

№ 2.636. а) Из пункта A по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему из пункта B , расположенного ниже по течению относительно пункта A , отправляется катер. Встретив плот, катер сразу поворачивает и идет вниз по течению. Какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B , если скорость катера в стоячей воде в 4 раза больше скорости течения реки?

Ответ: 0,4 пути.

б) Из пункта A по реке отправляется плот. Через час из пункта A вниз по течению отправляется катер. Найдите время, требующееся катеру, чтобы догнать плот и возвратиться в пункт A , если скорость катера в стоячей воде вдвое больше скорости течения реки.

Обозначим скорость реки v , тогда у катера скорость $2v$. За первый час плот отплыл на расстояние $v \cdot 1$ и катер относительно

плота преодолел это расстояние за $\frac{v \cdot 1}{2v} = \frac{1}{2}$ часа и оказался на расстоянии $1,5v$ от пункта А. Время до пункта А будет $\frac{1,5v}{v} = 1,5$ часа.

Итого $t = 2$ часа.

Ответ: 2.

№ 2.637. а) Расстояние между двумя городами скорый поезд проходит на 4 ч быстрее товарного и на 1 ч быстрее пассажирского. Найдите скорости товарного и скорого поездов, если известно, что скорость товарного составляет 0,625 от скорости пассажирского и на 50 км/ч меньше скорости скорого.

Пусть скорость товарного поезда равна $v \frac{\text{км}}{\text{час}}$, тогда скорость пассажирского будет $\frac{8}{5}v$, а скорого — $v + 50$. Тогда $(v + 50)t = v(t + 4) = \frac{8}{5}v(t + 1)$, где t — время прохождения данного расстояния скорым

поездом. Таким образом,
$$\begin{cases} (v + 50)t = v(t + 4) \\ 5(v + 50)t = 8v(t + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{25}{2}t \\ 3vt + 8v = 250t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t = \frac{2}{25}v \\ v = 50 \end{cases}$$

Ответ: $50 \frac{\text{км}}{\text{час}}$ и $100 \frac{\text{км}}{\text{час}}$.

б) Строительство туннеля велось в три смены с одинаковым планом проходки на каждую смену. Скорость проходки во вторую смену была в 1,2 раза больше, чем в первую, а в третью смену возросла на 0,6 м/ч по сравнению со второй. Вторая смена выполнила план проходки на 1 ч быстрее, чем первая, а третья смена выполнила половину плана на 3 ч быстрее, чем вторая смена весь план. Определите скорость проходки туннеля в первую смену.

Ответ: 2 м/час.

№ 2.638. а) Каждый из рабочих должен был изготовить 36 одинаковых деталей. Первый рабочий приступил к выполнению своего задания на 4 мин позже второго, но $\frac{1}{3}$ задания они выполнили одновременно. Полностью выполнив свое задание, первый рабочий после двухминутного перерыва снова приступил к работе и к моменту выполнения задания вторым рабочим изготовил еще две детали. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?

Пусть первый рабочий изготовил $v_1 \frac{\text{дет}}{\text{мин}}$, а второй — $v_2 \frac{\text{дет}}{\text{мин}}$ и в начале первый рабочий работал t_1 мин., тогда $t_1 v_1 = \frac{36}{3}$ (1) и $(t_1 + 4)v_2 = \frac{36}{3}$ (2). До перерыва первый рабочий проработал $3t_1$ мин. И пусть после перерыва он проработал t_2 мин, тогда $t_2 v_1 = 2$ (3) и $(3t_1 + 4 + t_2 + 2)v_2 = 36$ (4). Вычитая их (4) утроенное уравнение (2), получаем $t_2 v_2 - 6v_2 = 0 \Rightarrow t_2 = 6$ и из (3) получаем $v_1 = \frac{1}{3}$ и, подставив в (1), получаем $t_1 = 36$ и, подставляя в (2) получаем $v_2 = \frac{3}{10}$. Переводя $\frac{\text{дет}}{\text{мин}}$ в $\frac{\text{дет}}{\text{час}}$, получаем $v_1 = 20 \frac{\text{дет}}{\text{час}}$ и $v_2 = 18 \frac{\text{дет}}{\text{час}}$.

Ответ: $20 \frac{\text{дет}}{\text{час}}$ и $18 \frac{\text{дет}}{\text{час}}$.

б) В водохранилище (скоростью течения можно пренебречь) из пункта А в пункт В отправляется теплоход. Через 4 мин следом за ним отправляется "ракета" на подводных крыльях, которая догоняет теплоход на расстоянии 2 км от пункта А. Дойдя до пункта В, находящегося на расстоянии 19,5 км от пункта А, и простояв там 15 мин, "ракета" отправляется обратно и встречает теплоход в 5 км от пункта В. Определите скорости теплохода и "ракеты".

Ответ: $20 \frac{\text{км}}{\text{час}}$ и $60 \frac{\text{км}}{\text{час}}$.

№ 2.639. а) Два трактора разной мощности, работая одновременно, вспахали поле за 2 ч 40 мин. Если бы первый трактор увеличил скорость вспашки в 2 раза, а второй — в 1,5 раза, то поле было бы вспахано за 1 ч 36 мин. За какое время вспахал бы поле первый трактор, работая с первоначальной скоростью?

Ответ: 8 ч.

б) При одновременной работе двух насосов разной мощности бассейн наполняется водой за 8 ч. После ремонта насосов производительность первого из них увеличилась в 1,2 раза, а второго — в 1,6 раза, и при одновременной работе обоих насосов бассейн стал наполняться за 6 ч. За какое время наполнится бассейн при работе только первого насоса после ремонта?

Примем объем бассейна за 1.

Пусть производительность первого насоса до ремонта был x $\frac{1}{\text{час}}$, а второго — y $\frac{1}{\text{час}}$, тогда
$$\begin{cases} 8(x+y)=1 \\ 6(1,2x+1,6y)=1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{12}; 1,2x = \frac{1}{10}$$

и тогда $t = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10$ (час).

Ответ: 10 ч.

№ 2.640. а) Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объема) за 11 ч. Если бы 3 насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 ч. За сколько часов 3 насоса могут наполнить второй танкер?

Пусть объем первого танкера v_1 (л), второго — v_2 (л), и производительность одного насоса v л/час, тогда запишем условия:

$$\begin{cases} 44v = v_1 + \frac{1}{3}v_2 \\ \frac{v_1}{3v} + \frac{\frac{1}{4}v_2}{v} = 18. \end{cases} \text{ Обозначим } \frac{v_1}{v} = a, \frac{v_2}{v} = b, \text{ тогда: } \begin{cases} a + \frac{1}{3}b = 44 \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$t = \frac{v_2}{3v}$$

$$\Rightarrow b = 24 \Rightarrow t = 8 \text{ (ч)}.$$

Ответ: 8 ч.

б) Три одинаковых комбайна, работая вместе, убрали первое поле, а затем 2 из них убрали второе поле (другой площади). Вся работа заняла 12 ч. Если бы 3 комбайна выполнили половину всей работы, а затем оставшуюся часть сделал один из них, то работа заняла бы 20 ч. За какое время 2 комбайна могут убрать первое поле?

Ответ: 9 ч.

№ 2.641. а) Три каменщика (разной квалификации) выложили кирпичную стену, причем первый каменщик работал 6 ч, второй — 4 ч, а третий — 7 ч. Если бы первый каменщик работал 4 ч, второй — 2 ч и третий — 5 ч, то было бы выполнено $\frac{2}{3}$ всей работы. За сколько часов каменщики закончили бы кладку, если бы они работали все вместе одно и то же время?

Ответ: 6 ч.

б) Три бригады вспахали два поля общей площадью 96 га. Первое поле было вспахано за 3 дня, причем все три бригады работали вместе. Второе поле было вспахано за 6 дней второй и третьей бригадами. Если бы все три бригады проработали на втором поле 1 день, то оставшуюся часть второго поля первая бригада могла вспахать за 8 дней. Сколько гектаров в день вспахивает первая бригада?

Пусть $x, y, z \left(\frac{\text{га}}{\text{день}} \right)$ производительности первой, второй и третьей бригад, соответственно. Тогда площадь первого поля будет $3(x + y + z)$, а второго $6(y + z)$. Тогда:

$$\begin{cases} 3(x + y + z) + 6(y + z) = 96 \\ x + y + z + 8x = 6(y + z) \\ x = ? \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 9y + 9z = 96 \\ 9x - 5y - 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5$$

Ответ: $5 \frac{\text{га}}{\text{день}}$.

№ 2.642. а) Два туриста отправились одновременно из пунктов A и B , расстояние между которыми 33 км, навстречу друг другу. Через 3 ч 12 мин расстояние между ними сократилось до 1 км (они еще не встретились), а еще через 2 ч 18 мин первому осталось пройти до B втрое большее расстояние, чем второму до A . Найдите скорости туристов.

Пусть скорость первого туриста $x \left(\frac{\text{км}}{\text{час}} \right)$, а второго — $y \left(\frac{\text{км}}{\text{час}} \right)$,

тогда условия запишутся в виде:

$$\begin{cases} (x + y) \cdot \frac{16}{5} = 32 \\ 3 \left(33 - \frac{11}{2} y \right) = 33 - \frac{11}{2} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ x - 3y = -12 \end{cases} \Rightarrow y = 5,5; x = 4,5$$

Ответ: $4,5 \frac{\text{км}}{\text{час}}$ и $5,5 \frac{\text{км}}{\text{час}}$.

б) Из городов M и N , расстояние между которыми 70 км, одновременно выехали навстречу друг другу автобус и велосипедист и встретились через 1 ч 24 мин. Продолжая движение с той же скоростью, автобус прибыл в N и после 20 -минутной стоянки отправился в обратный рейс. Найдите скорости автобуса и велосипедиста, зная, что автобус обогнал велосипедиста через 2 ч 41 мин после первой встречи.

Ответ: $35 \frac{\text{км}}{\text{час}}$ и $15 \frac{\text{км}}{\text{час}}$.

№ 2.643. а) Пешеход вышел из пункта A в пункт B . Через $\frac{3}{4}$ ч из A в B выехал велосипедист. Когда велосипедист прибыл в пункт B , пешеходу осталось пройти $\frac{3}{8}$ всего пути. Сколько времени потратил пешеход на весь путь, если известно, что велосипедист догнал пеше —

хода на половине пути из пункта A в пункт B , а скорости велосипедиста и пешехода постоянны?

Ответ: 2 ч.

б) Теплоход отплыл из порта A в порт B . Через 7,5 ч вслед за ним из порта A вышел катер. На половине пути от A до B катер догнал теплоход. Когда катер прибыл в B , теплоходу осталось плыть 0,3 всего пути. Сколько времени потребовалось теплоходу на весь путь от A до B , если скорости катера и теплохода постоянны на протяжении всего плавания?

Пусть скорость теплохода $x \left(\frac{1}{\text{час}} \right)$, а катера — $y \left(\frac{1}{\text{час}} \right)$, а весь путь AB равен z км. Когда катер вышел из порта, расстояние между катером и теплоходом было 7,5х и катер плыл по отношению к теплоходу со скоростью $y - x$, поэтому он догнал теплоход через

$$\frac{7,5x}{y-x} \text{ часа. Тогда можно записать условия: } \begin{cases} y \cdot \frac{7,5x}{y-x} = \frac{z}{2} \\ \left(7,5 + \frac{z}{y} = 0,7z \right) \Leftrightarrow \\ \frac{z}{x} = ? \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15xy = z(y-x) \\ 7,5xy = z(0,7y-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15xy = z(y-x) \\ \frac{y-x}{0,7y-x} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2,5x \\ 25x = z \Rightarrow \frac{z}{x} = 25. \end{cases}$$

Ответ: 25 ч.

№ 2.644. а) Легковой автомобиль и грузовик испытали на проселочной дороге. При этом легковой автомобиль проехал на 12 км больше, чем грузовик, но бензин у него кончился на 0,5 ч раньше. Какая автомашина проедет дальше и на сколько при той же заправке бензином по асфальтовой дороге, если скорость на асфальте у каждой из них на 16 км/ч больше, чем на проселочной (время расхода бензина не зависит от качества дороги)?

Пусть скорость автомобиля будет $x \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$, а грузовика — $y \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$ и время автомобиля при полном расходе им бензина будет t . Тогда условие запишется в виде $x \cdot t - y(t + 0,5) = 12$. Найти следует: $(x + 16)t - (y + 16)(t + 0,5) = 12 - 8 = 4$.

Ответ: легковая на 4 км дальше.

б) Велосипедист встретил колонну автомашин и остановился, когда поравнялся с двадцать первой автомашиной. В этот момент из этой точки в одном направлении с колонной поехал мотоциклист со

скоростью в 2 раза большей, чем скорость велосипедиста. Когда мотоциклист прибыл в точку, где начинал движение велосипедист, он обогнал 4 автомобиля и сравнялся с пятым. Сколько автомобилей насчитал бы велосипедист на том же участке дороги, если бы он встретил стоящую колонну (интервалы между автомашинами равны)?

Ответ: 11 машин.

№ 2.645. а) Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно 70 км, выехал велосипедист, а через некоторое время — мотоциклист, двигавшийся со скоростью 50 км/ч. Мотоциклист догнал велосипедиста на расстоянии 20 км от пункта A . Прибыв в пункт B , мотоциклист через 48 мин выехал обратно в пункт A и встретился с велосипедистом спустя 2 ч 40 мин после выезда велосипедиста из пункта A . Найдите скорость велосипедиста.

Ответ: $25 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Два бегуна стартовали один за другим с интервалом в 2 мин. Второй бегун догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта, а пробежав от точки старта 5 км, он повернул обратно и встретился с первым бегуном. Эта встреча произошла через 20 мин после старта первого бегуна. Найдите скорость второго бегуна.

Пусть скорость первого бегуна $x \left(\frac{\text{км}}{\text{мин}} \right)$, а второго — $y \left(\frac{\text{км}}{\text{мин}} \right)$.

Тогда можно записать условия в виде:

$$\begin{cases} \frac{2x}{y-x} \cdot y = 1 \\ 20x + y \left(18 - \frac{5}{y} \right) = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2xy = y - x \\ 20x + 18y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5-9y}{10} \\ 18y^2 + 9y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \left(\frac{\text{км}}{\text{мин}} \right) = 20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Ответ: $20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 2.646. а) Из бутылки, наполненной 12%-ным раствором соли, отлили 1 л и долили бутылку водой, затем отлили еще литр и опять долили водой. В бутылке оказался 3%-ный раствор соли. Какова вместимость бутылки?

Пусть емкость бутылки x л, тогда первая концентрация соли оказалась равной $\frac{x-1}{x} \cdot 12\%$. Вторая концентрация оказалась равной

$$\frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-1}{x} \cdot 12\% = 3\% \Rightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ (л)}.$$

Ответ: 2 л.

б) Фляга наполнена 96%—ным раствором соляной кислоты. Из нее отлили 12 л кислоты и дополнили флягу водой. Затем из фляги отлили еще 18 л и снова дополнили ее водой, после чего концентрация кислоты во фляге составила 32%. Найдите объем фляги.

Ответ: 36 л.

№ 2.647. а) Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 20 км, выехал велосипедист, а через 15 мин вслед за ним со скоростью 15 км/ч отправился другой велосипедист, который, догнав первого, повернул назад и возвратился в A за 45 мин до прибытия первого велосипедиста в B . Найдите скорость первого велосипедиста.

Ответ: $10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Из M в N одновременно отправились автобус и автомобиль. Прибыв в N , автомобиль повернул назад и встретил автобус через 3 ч после отправления из M . Продолжая движение, автомобиль прибыл в M на 1 ч 15 мин позже, чем автобус в N . Зная, что скорость автобуса равна 48 км/ч, найдите расстояние MN и скорость автомобиля.

Пусть расстояние MN равно S км, а скорость автомобиля $x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$,

$$\begin{aligned} \text{тогда: } \begin{cases} 3(48 + x) = 2S \\ \frac{2S}{x} = \frac{S}{48} + \frac{4}{5} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2S = 144 + 3x \\ 96S = Sx + 60x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2S = 144 + 3x \\ x^2 - 8x - 32 \cdot 144 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = 72; S = 180. \end{aligned}$$

Ответ: 180 км, $72 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 2.648. а) Из городов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два товарных поезда. Они двигались без остановки, встретились через 24 ч после начала движения и продолжили свой путь, причем первый поезд прибыл в пункт B на 20 ч позднее, чем второй поезд прибыл в A . Сколько времени был в пути первый поезд?

Пусть расстояние AB будет S км, а скорость первого поезда $x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а второго — $y \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, тогда условия запишутся в виде:

$$\begin{cases} 24(x + y) = S \\ \frac{S}{x} = \frac{S}{y} + 20 \\ \frac{S}{x} = ? \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a = \frac{S}{x} \\ b = \frac{S}{y} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 24\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 \\ a = b + 20 \end{cases} \Rightarrow a = 60.$$

Ответ: 60 ч.

б) Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно выехали легковой и грузовой автомобили. Они встретились через 4 ч после начала движения, продолжили свой путь, и легковой автомобиль прибыл в A на 6 ч раньше, чем грузовой в B . Сколько часов в пути был грузовой автомобиль?

Ответ: 12 ч.

№ 2.649. а) Два экскаватора должны вырыть 3 одинаковых котлована. Если они будут работать вместе, то выкоют их за 2 дня. Первый экскаватор может вырыть один такой котлован на день быстрее второго. В один из дней первый экскаватор работал полдня, а второй работал весь день. Какая часть всей работы была выполнена за этот день?

Ответ: $\frac{1}{3}$.

б) Если идти шагом по поднимающемуся эскалатору, то можно подняться на 10 с раньше, чем стоя на нем. Если же не идти, а бежать вверх, то можно выиграть еще 5 с. Пассажир, стоя на эскалаторе, поднялся на половину высоты эскалатора, после чего последний остановился. Вторую половину подъема пассажир прошел шагом. Сколько времени занял у него весь подъем, если известно, что человек бежит в 2 раза быстрее, чем ходит?

Пусть скорость ходьбы человека $x \frac{м}{с}$, а скорость эскалатора —

$y \frac{м}{с}$, а его длина S м. Тогда условия запишутся в виде:

$$\begin{cases} \frac{S}{y} - \frac{S}{y+x} = 10 \\ \frac{S}{y} - \frac{S}{y-2x} = 15 \\ t = \frac{S}{2y} + \frac{S}{2x} = ? \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a = \frac{S}{x} \\ b = \frac{S}{y} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b - \frac{b}{1 + \frac{b}{a}} = 10 \\ b - \frac{b}{1 + \frac{2b}{a}} = 15 \\ \frac{1}{2}(a+b) = ? \end{cases} \Rightarrow a = 60; b = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(a+b) = 45$$

Ответ: 45 с.

№ 2.650. Из пункта A в пункт C , находящийся на расстоянии 20 км от A выехал грузовик. Одновременно с ним из пункта B , расположенного между A и C на расстоянии 15 км от A , в пункт C вышел пешеход, а из C навстречу им выехал автобус. За какое время грузовик догнал пешехода, если известно, что это произошло через полчаса после встречи грузовика с автобусом, а пешеход до встречи с авто-

бусом находился в пути втрое меньше времени, чем грузовик до своей встречи с автобусом?

Пусть скорость пешехода $v \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, грузовика — $av \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, автобуса — $bv \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Тогда условия запишутся в виде:

$$\begin{cases} \frac{20}{v(a+b)} + \frac{1}{2} = \frac{15}{v(a-1)} = t = ? \\ \frac{3 \cdot 5}{v(b+1)} = \frac{20}{v(a+b)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3a - 4 \\ \frac{20}{4v(a-1)} + \frac{1}{2} = \frac{15}{v(a-1)} \Rightarrow t = \frac{3}{4} \text{ (ч)}. \end{cases}$$

Ответ: 45 мин.

б) Из пункта A в пункт C , находящийся на расстоянии 80 км от A , выехал мотоциклист. Навстречу ему и одновременно с ним из пункта B , находящегося между A и C на расстоянии 5 км от C , выехал велосипедист, а из пункта C — автомобиль. Через какое время встретились мотоциклист и велосипедист, если известно, что это произошло через 20 мин после того, как автомобиль догнал велосипедиста, а мотоциклист до встречи с автомобилем провел в пути вдвое больше времени, чем велосипедист до того, как его догнал автомобиль?

Ответ: $\frac{5}{8}$ ч.

№ 2.651. а) Три гонщика A , B и C , стартовав одновременно, движутся с постоянными скоростями в одном направлении по кольцевому шоссе. В момент старта гонщик B находится перед гонщиком A на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины шоссе, а гонщик C перед гонщиком B на таком же расстоянии. Гонщик A впервые догнал B в тот момент, когда B закончил свой первый круг, а еще через 10 мин A впервые догнал гонщика C . Гонщик B тратит на круг на 2,5 мин меньше, чем гонщик C . Сколько времени тратил на круг гонщик A ?

Пусть скорость гонщика A — $x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, B — $y \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, C — $z \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а длина круга S км, тогда:

$$\begin{cases} \frac{4}{3} \cdot \frac{S}{x} = \frac{S}{y} \\ \left(\frac{S}{y} + \frac{1}{6} \right) (x - z) = \frac{2}{3} S \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4} x \\ z = \frac{24Sx}{32S + x} \end{cases} \Rightarrow \frac{S}{x} = \frac{1}{4} \text{ (ч)} = 15 \text{ мин.} \\ \frac{S}{y} + \frac{1}{24} = \frac{S}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 64 \left(\frac{S}{x} \right)^2 - 12 \left(\frac{S}{x} \right) - 1 = 0 \end{cases}$$

Ответ: 15 мин.

б) Три гонщика стартуют одновременно из одной точки шоссе, имеющего форму окружности, и едут в одном направлении с постоянными скоростями. Первый гонщик впервые после старта догнал второго, делая свой пятый круг, в точке диаметрально противоположной старту, а еще через полчаса после этого он вторично (не считая момента старта) обогнал третьего гонщика. Второй гонщик впервые догнал третьего через 3 ч после старта. Сколько кругов в час делает первый гонщик, если второй гонщик проходил круг не менее за 20 мин?

Ответ: 3 круга.

№ 2.652. а) От пристани A вниз по течению реки одновременно отошли плот и катер (скорость течения постоянна; скорость катера относительно воды постоянна; скорость плота относительно воды равна нулю). Катер доплыл до пристани B , вернулся к пристани A и снова отплыл к пристани B (без остановок). К пристани B плот и катер причалили одновременно, а встретились они на расстоянии 3 км от пристани A . Определите скорость течения реки, если известно, что на путь от пристани A до пристани B катер тратил на полчаса меньше времени, чем на путь от B до A .

Пусть расстояние между A и B равно S км, скорость реки — $x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, скорость катера относительно воды — $y \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Тогда условия

$$\text{можно записать в виде: } \begin{cases} \frac{2S}{x+y} + \frac{S}{y-x} = \frac{S}{x} \\ \frac{3}{x} = \frac{S}{x+y} + \frac{S-3}{y-x} \\ \frac{S}{y-x} - \frac{S}{x+y} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Из первого уравнения находим, что $y = 3x$, из второго: $S = 6$ и из третьего $x = 3 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ответ: $3 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) От пристани A к пристани B против течения реки отошел катер, собственная скорость которого (скорость в стоячей воде) в 7 раз больше скорости течения реки. Одновременно навстречу ему от пристани B , расстояние от которой до A по реке равно 20 км, отошла лодка. На каком расстоянии от B произошла встреча катера с лодкой, если известно, что через полчаса после начала движения лодке оставалось проплыть путь 4 км до места встречи и что катер затратил на путь до встречи с лодкой на 20 мин больше, чем на путь от места встречи до пункта B ?

Ответ: 8 км.

№ 2.653. а) Ответ: $50 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и $40 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B , расположенных на расстоянии 120 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C . Если бы один из них уменьшил свою скорость на 12 км/ч, а другой — на 9 км/ч, то они прибыли бы так же одновременно на станцию C , но на 2 ч позже. Найдите скорости поездов.

Пусть расстояние между B и C равно S км, скорость первого поезда (из A): — $x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а второго — $y \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Тогда условия запишутся

$$\text{в виде: } \begin{cases} \frac{S}{y} = \frac{S+120}{x} \\ \frac{S+120}{x-12} = \frac{S}{y-9} \Rightarrow \begin{cases} S(x-y) = 120y \\ S(x-y-3) = 120(y-9) \end{cases} \\ \frac{S}{y-9} - \frac{S}{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S(x-y) = 120y \\ S(x-y-3) = 120(y-9) \\ 9S = 2y(y-9) \end{cases} \text{ Поделив первое}$$

уравнение на второе, получим $4y = 3x$, подставляя в первое, получим $S = 360$ и тогда из третьего уравнения получим $y = 45$, $x = 60$.

Ответ: $60 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и $45 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 2.654. а) Из пункта A по одному и тому же маршруту одновременно выехали грузовик и легковой автомобиль. Скорость легкового автомобиля постоянна и составляет $\frac{6}{5}$ скорости грузовика. Через 30

мин за ними из того же пункта выехал мотоциклист со скоростью 90 км/ч. Найдите скорость легкового автомобиля, если известно, что мотоциклист догнал грузовик на час раньше, чем легковой автомобиль.

Пусть скорость грузовика будет $x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, тогда скорость автомобиля будет $\frac{6}{5}x$ и условия запишутся в виде: $\frac{x}{2(90-x)} + 1 = \frac{6x}{2 \cdot 5 \cdot \left(90 - \frac{6}{5}x\right)} \Rightarrow x_1 = 60; x_2 = \frac{225}{2}$ — не подходит, т.к. $x < 90 \Rightarrow y = 72$.

Ответ: $72 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Ответ: $14 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

№ 2.855. а) Ответ: 8 ч.

б) Двум токарям и ученику поручили выполнение срочной работы. Первый токарь может выполнить всю работу за время на 3 ч большее, чем то, за которое ее выполнят второй токарь и ученик, работая одновременно. Второй токарь, работая один может выполнить всю работу за то же время, за которое ее выполняют первый токарь и ученик, работая одновременно. Время, затрачиваемое вторым токарем на самостоятельное выполнение всей работы, на 8 ч меньше удвоенного времени, затрачиваемого первым токарем на самостоятельное выполнение всей работы. За какое время будет выполнена вся работа двумя токарями и учеником, работающими одновременно?

Пусть производительность первого токаря $x \frac{1}{ч}$, второго — $y \frac{1}{ч}$ и ученика — $z \frac{1}{ч}$. Всю работу примем за 1. Тогда условия запишутся:

$$\begin{cases} \frac{1}{y+z} + 3 = \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x+z} = \frac{1}{y} \\ \frac{1}{y} + 8 = 2 \cdot \frac{1}{x} \\ t = \frac{1}{x+y+z} = ? \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z = \frac{x}{1-3x} \\ y = x+z \\ y = \frac{x}{2-8x} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{6}; y = \frac{1}{4}; z = \frac{1}{12}; t = 2.$$

Ответ: за 2 ч.

№ 2.656. а) Сплавлено 40 г золота одной пробы и 60 г золота другой пробы и получено золото 62-й пробы. Какой пробы было золото первого и второго слитков, если при сплаве их поровну получается золото 61-й пробы?

Пусть первый сплав x -ой пробы, а второй — y -ой, тогда:

$$\begin{cases} 0,4x + 0,6y = 62 \\ 0,5(x + y) = 61 \end{cases} \Rightarrow x = 56; y = 66.$$

Ответ: 56-й и 66-й проб.

б) **Ответ:** 40 т и 100 т.

№ 2.657. а) **Ответ:** 170 кг.

б) Имеются два сплава, состоящие из меди, цинка и олова. Известно, что первый сплав содержит 25% цинка, а второй — 50% меди. Процентное содержание олова в первом сплаве в 2 раза выше, чем во втором. Сплавив 200 кг первого сплава и 300 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 28% цинка. Определите, сколько килограммов меди содержится в получившемся новом сплаве.

Пусть во втором сплаве $x\%$ олова, тогда в первом сплаве олова

2х%, а меди в первом сплаве: $(75 - 2x)\%$ и цинка во втором сплаве: $(50 - x)\%$. Составим уравнение: $0,25 \cdot 200 + \frac{50 - x}{100} \cdot 300 = 0,28 \cdot 500 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = 20\%$. Меди в первом сплаве: $0,35 \cdot 200 + 0,5 \cdot 300 = 220$ (кг).

Ответ: 220 кг.

№ 2.658. а) Две машинистки, работая вместе, печатают в час 44 страницы текста. Первые 25% двухсотстраничной рукописи печатала первая машинистка, затем к ней присоединилась вторая, а последние 20% текста печатала только вторая машинистка. Сколько страниц в час печатает каждая машинистка, если на перепечатывание всей рукописи ушло 6 ч 40 мин, а первая машинистка работает быстрее второй?

Пусть первая машинистка печатает $x \frac{\text{стр}}{\text{час}}$, а вторая — $y \frac{\text{стр}}{\text{час}}$, причем $x > y$. Тогда условия запишутся в виде:

$$\begin{cases} x + y = 44 \\ \frac{50}{x} + \frac{110}{x + y} + \frac{40}{y} = \frac{20}{3} \\ \frac{x}{y} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 44 \\ 12\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 28\left(\frac{x}{y}\right) + 15 = 0 \\ \frac{x}{y} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 26,4 \\ y = 17,6 \end{cases}$$

Ответ: $26,4 \frac{\text{стр}}{\text{ч}}$ и $17,6 \frac{\text{стр}}{\text{ч}}$.

б) Два экскаватора выкопали котлован объемом 2000 м^3 . Сначала первый экскаватор, работая в одиночку, выполнил 20% всей работы; затем его сменил второй и выполнил еще 30% от всего объема работы. На первую половину работы ушло на 25 ч больше, чем на вторую, когда экскаваторы работали вместе. Какой объем грунта каждый экскаватор выбирает за 1 ч, если вдвоем они выбирают 100 м^3 , а производительность первого выше, чем второго?

Ответ: $80 \text{ м}^3/\text{ч}$ и $20 \text{ м}^3/\text{ч}$.

№ 2.659. а) **Ответ:** 83.

б) Сумма квадратов цифр некоторого двузначного числа на 1 больше утроенного произведения этих цифр. После деления этого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. Найдите это двузначное число.

Пусть двузначное число будет $\overline{xy} = 10x + y$, тогда:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3xy + 1 \\ 10x + y = 7(x + y) + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 3xy - 1 = 0 \\ x = 2(y + 1) \end{cases} \Rightarrow y = 3; x = 8 \Rightarrow \text{Число } 83.$$

Ответ: 83.