

Alef.



Algebră

Funcții
și ecuații numerice



NR. ZEE

ALEF₀/ALGEBRĂ

ALEPH₀/ALGÈBRE

2^e ACT

II fonctions et équations numériques

C. GAUTIER
G. GIRARD
A. LENTIN

Agrégés
de mathématiques

L'ensemble N des nombres entiers a été étendu à des „nombres“ cardinaux transfinis, traditionnellement désignés par la lettre hébraïque aleph diversement indexée.

Aleph-zéro représente ainsi le cardinal de N lui-même. Aleph-un est le plus petit cardinal supérieur à Aleph-zéro et ainsi de suite.

Classiques Hachette, 79 Boulevard Saint-Germain, Paris

ALEF / ALGEBRĂ

II Funcții și ecuații numerice

C. GAUTIER
G. GIRARD
A. LENTIN



Editura didactică și pedagogică — București, 1973

Traducerea din limba franceză:

- ELISABETA IORGULESCU
- ANGELICĂ IORGULESCU
- AFRODITA GÂRLEANU
- ECATERINA VASILESCU
- DINU MOROIANU

Redactor: prof. PANTELIMON EUGENIA

Tehnoredactor: N. ATANASIU

8. ECUAȚII ȘI INECUAȚII DE GRADUL ÎNTÎI

8.1. *Ecuatii de gradul intii cu o necunoscută.*

8.2. *Aplicație la rezolvarea altor ecuații.*

8.3. *Inecuații de gradul intii.*

8.4. *Aplicare la rezolvarea diferitelor inecuații.*

8.1. ECUAȚII DE GRADUL ÎNTÎI CU O NECUNOSCUTĂ

8.1.1. Definiție

În ceea ce urmează, și fără o mențiune expresă a contrariului, variabila își va lua valorile în $\mathbb{R}$. Mulțimea în care se vor căuta soluțiile va fi $\mathbb{R}$.

Vom studia mai întâi un caz particular, simplu și fundamental.

Rezolvarea altor ecuații mai complicate, pe care le vom studia, se va reduce în ultimă analiză la aceea a unei ecuații de acest tip.

DEFINIȚIE. O ecuație întreagă de gradul întâi și de formă redusă, cu o necunoscută x pe $\mathbb{R}$, este o ecuație de tipul:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax + b = 0\}?$$

unde a și b sînt numere reale sau expresii algebrice care conțin parametri.

OBSERVAȚIE. O ecuație întreagă¹ de gradul întâi și de formă redusă, cu o necunoscută pe $\mathbb{Q}$, este o ecuație de tipul:

$$\{x; x \in \mathbb{Q} \text{ și } ax + b = 0\}?$$

unde a și b sint numere raționale.

8.1.2. Rezolvare

După axiomele structurii, $\mathbb{R}$ fiind un grup aditiv, oricare ar fi numărul real b , există un număr real, și numai unul, care, adăugat la b , dă zero. Acest număr este notat cu $-b$. Vom avea deci:

$$\begin{aligned} \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax + b = 0\} &= \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \\ ax + [b + (-b)] &= -b\} = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax = -b\}, \end{aligned}$$

folosind succesiv asociativitatea adunării și neutralitatea lui 0 pentru adunare.

1. $a \neq 0$

După axiomele structurii, $\mathbb{R}^*$ fiind un grup multiplicativ, ori care ar fi numărul real nenul a , există un număr real unic care, înmulțit cu a , dă 1. Vom avea deci, dacă a este nenul:

$$\begin{aligned} \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax + b = 0\} &= \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax = -b\} \\ &= \left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \left(\frac{1}{a}\right)ax = \left(\frac{1}{a}\right)(-b)\right\} \\ &= \left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x = -\frac{b}{a}\right\} \\ &= \mathbb{R} \cap \left\{-\frac{b}{a}\right\} = \left\{-\frac{b}{a}\right\}, \end{aligned}$$

folosind succesiv asociativitatea înmulțirii și neutralitatea lui 1 pentru înmulțire.

Dacă a este nenul, ecuația studiată admite deci o soluție unică:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

¹ Prin ecuație întreagă se înțelege ecuația cu coeficienți întregi.

2. $a = 0$.

Dacă $a = 0$, ecuația considerată se scrie:

$$\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } 0x + b = 0\}?$$

Se caută deci mulțimea valorilor lui x astfel ca b să fie nul. Din două cazuri, unul: sau b este nul și atunci orice număr real x este soluție, sau b nu este nul și atunci nici un număr real nu este soluție:

$$\left. \begin{array}{l} a = 0 \\ b \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } ax + b = 0\} = \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } b = 0\} = \emptyset.$$

De unde teorema:

TEOREMA. Ecuația:

$$\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } ax + b = 0\}?$$

admițe, dacă a este nenul, soluția unică

$$-\frac{b}{a}.$$

Dacă a este nul, existența soluțiilor este condiționată de anularea lui b .

8.1.3. Discuția unei ecuații parametrice

Cind coeficienții a și b sînt expresii algebrice în raport cu parametri, se poate întîmpla ca a să se anuleze pentru anumite valori ale acestor parametri. Cum a arătat discuția de la Nr. 8.1.2., valoarea lui $0x + b$ nu mai depinde de alegerea lui x și studiul se rezumă în următorul tablou:

$a \neq 0 \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } ax + b = 0\} = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$ $a = 0 \begin{cases} b \neq 0 \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } ax + b = 0\} = \emptyset \\ b = 0 \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } ax + b = 0\} = \mathbf{R} \end{cases}$
--

EXEMPLU. Fie ecuația:

$$\left\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } \frac{m-1}{m}x = m + p\right\}?$$

Această ecuație nu are sens decît pentru $m \neq 0$.

Pentru $m - 1 \neq 0$, soluția unică este: $x = \frac{m(m+p)}{m-1}$.

Dacă $m = 1$, problema devine:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } 0x = 1 + p\}?$$

Dacă $p \neq -1$, nu admite soluții.

Dacă $p = -1$, o infinitate de soluții.

Rezumatul discuției:

$$m \neq 0 \begin{cases} m \neq 1 \left\{ x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{m-1}{m} x = m + p \right\} = \left\{ \frac{m(m+p)}{m-1} \right\} \\ m = 1 \begin{cases} p \neq -1 \left\{ x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{m-1}{m} x = m + p \right\} = \emptyset. \\ p = -1 \left\{ x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{m-1}{m} x = m + p \right\} = \mathbb{R}. \end{cases} \end{cases}$$

$m = 0$, problema nu are sens.

8.1.4. Ecuații de gradul întâi cu o necunoscută pe $\mathbb{Q}$

Concluziile la care am ajuns cu privire la ecuațiile de gradul întâi pe $\mathbb{R}$ sînt valabile pentru ecuațiile de gradul întâi pe $\mathbb{Q}$, deoarece și $\mathbb{Q}$ este un grup aditiv și $\mathbb{Q}^*$ un grup multiplicativ. Mai mult, a și b fiind numere raționale, soluția unică a ecuației: $\{x; x \in \mathbb{Q} \text{ și } ax + b = 0\}$ este de asemenea un număr rațional.

Vom avea deci întotdeauna:

$$\{x; x \in \mathbb{Q} \text{ și } ax + b = 0\} = \left\{ -\frac{b}{a} \right\},$$

(cu condiția ca a să nu fie nul).

EXERCIȚII

Să se rezolve și discute ecuațiile definite în $\mathbb{R}$ prin relațiile următoare:

8.1. $(m-1)x = 2m-2$

8.2. $(m^2-1)x + m-1 = 0$

8.3. $abcx + (a-b)(b-c)(c-a) = 0$

$$8.4. (a - b)x + \frac{a - c}{b} = 0.$$

$$8.5. (a + 1)x + (b - 1) = 0$$

$$8.6. \frac{a - 1}{a + 2}x = a + b.$$

$$8.7. (a - b)x = \frac{c}{a}.$$

$$8.8. \left(1 - \frac{a}{b}\right)x + \frac{c}{a} = 0.$$

$$8.9. \frac{a + 1}{a - 1}x + \frac{a + b}{a - b} = 0.$$

$$8.10. (a - 1)(a - 2)x + (a - b) = 0.$$

$$8.11. x\sqrt{a - b} + a - b + c = 0.$$

$$8.12. \frac{a - b}{a}x = a + 1.$$

$$8.13. \frac{a - 1}{a}x = a - b.$$

$$8.14. (a - 2) = \left[\frac{a - 1}{a}c - a + b\right].$$

$$8.15. x[(a - 1)b - a] = \left[\frac{a - b}{a}c - a + 1\right].$$

8.2. APLICAȚIE LA REZOLVAREA ALTOR ECUAȚII

8.2.1. Produs de factori

Fie de rezolvat ecuația definită în $\mathbb{R}$ prin:

$$x^2 - 3x = 0.$$

Această ecuație se pune sub forma:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x(x - 3) = 0\}?$$

Pentru ca un produs să fie nul, este necesar și suficient ca unul din factorii săi să fie nul:

$$\begin{aligned}
 [x(x-3) = 0] &\Leftrightarrow [x = 0 \text{ sau } x-3 = 0]; \\
 &\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x(x-3) = 0\} \\
 &= \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x = 0\} \cup \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x-3 = 0\} \\
 &= [\mathbb{R} \cap \{0\}] \cup [\mathbb{R} \cap \{3\}] \\
 &= \{0\} \cup \{3\} = \{0, 3\}.
 \end{aligned}$$

Ecuția propusă admite deci două rădăcini: 0 și 3.

$$\begin{aligned}
 \text{ALT EXEMPLU: } &\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } (x-1)(2x+3) = (x-1)^2\} \\
 &= \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } (x-1)[2x+3-(x-1)] = 0\} \\
 &= \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } (x-1)(x+4) = 0\} \\
 &= \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } (x-1) = 0\} \cup \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } (x+4) = 0\} \\
 &= \{1\} \cup \{-4\} = \{1, -4\}.
 \end{aligned}$$

Ecuția propusă admite deci rădăcinile: 1 și -4.

8.2.2. Ecuții care conțin necunoscuta la numitor

Fie de rezolvat ecuația definită în $\mathbb{R}$ prin: $\frac{x-a}{x-2a} = \frac{x-3}{x-8}$.

Domeniul $\mathfrak{D}$ de validitate a ecuației este definit prin:

$$\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{2a; 8\}.$$

Mulțimea S a soluțiilor ecuației propuse este deci:

$$S = \left\{ x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } \frac{x-a}{x-2a} = \frac{x-3}{x-8} \right\},$$

$$S = \{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } (x-a)(x-8) = (x-3)(x-2a)\}$$

căci $x-8$ și $x-2a$ nu se anulează în $\mathfrak{D}$; se aplică teorema 3 din n° 6.2.6, și se multiplică cei doi membri succesiv prin $x-2a$ și $x-8$.

Dezvoltând calculele:

$$\begin{aligned} S &= \{x; x \in \mathbb{D} \text{ și } x^2 - ax - 8x + 8a = \\ &= x^2 - 3x - 2ax + 6a\} \end{aligned}$$

și, reducând:

$$S = \{x; x \in \mathbb{D} \text{ și } (a - 5)x = -2a\}.$$

Dacă $a = 5$: $S = \{x; x \in \mathbb{D} \text{ și } 0 \cdot x = -10\} = \emptyset$.

Dacă $a \neq 5$: $S = \{x; x \in \mathbb{D} \text{ și } (a - 5)x = -2a\}$,

$$S = \left\{x; x \in \mathbb{D} \text{ și } x = -\frac{2a}{a-5}\right\},$$

$$S = \mathbb{D} \cap \left\{-\frac{2a}{a-5}\right\}.$$

Avem mai departe două cazuri:

$$1^\circ - \frac{2a}{a-5} \in \mathbb{D}; \text{ atunci } S = \left\{-\frac{2a}{a-5}\right\}.$$

O singură soluție: $x = -\frac{2a}{a-5}$.

$$2^\circ - \frac{2a}{a-5} \notin \mathbb{D}; \text{ atunci } S = \emptyset.$$

■ Studiul valorilor lui a pentru care $\left(-\frac{2a}{a-5}\right)$ nu aparțin lui $\mathbb{D}$, a fiind diferit de 5.

Cum $\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{2a, 8\}$, singurele posibilități pentru care $-\frac{2a}{a-5}$ nu aparține lui $\mathbb{D}$ sînt:

$$-\frac{2a}{a-5} = 2a \text{ sau } -\frac{2a}{a-5} = 8.$$

Fie deci, să se determine mulțimea A a valorilor lui a pentru care avem:

$$A = \left\{a; a \in \mathbb{R} - \{5\}; -\frac{2a}{a-5} \in \{2a, 8\}\right\}.$$

$$A = \left\{a; a \in \mathbb{R} - \{5\} \text{ și } -\frac{2a}{a-5} = 2a\right\}$$

$$\cup \left\{a; a \in \mathbb{R} - \{5\} \text{ și } -\frac{2a}{a-5} = 8\right\},$$

$$A = A_1 \cup A_2 \left(\text{in adevăr: } \left[-\frac{2a}{a-5} \in \{2a, 8\}\right]\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[-\frac{2a}{a-5} = 2a \text{ sau } -\frac{2a}{a-5} = 8\right].$$

Determinarea lui A_1 . Să punem $\mathbb{R} - \{5\} = \mathfrak{D}_1$:

$$A_1 = \left\{ a; a \in \mathfrak{D}_1 \text{ și } -\frac{2a}{a-5} = 2a \right\},$$

$$A_1 = \{a; a \in \mathfrak{D}_1 \text{ și } -2a = 2a(a-5)\}$$

căci $a-5$ nu se anulează în $\mathfrak{D}_1$.

$$A_1 = \{a; a \in \mathfrak{D}_1 \text{ și } 2a(a-4) = 0\}.$$

Însă, ca un produs de factori să fie nul, este necesar și suficient ca unul din factorii săi să fie nul:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a; a \in \mathfrak{D}_1 \text{ și } 2 = 0\} \cup \{a; a \in \mathfrak{D}_1 \text{ și } a = 0\} \\ &\quad \cup \{a; a \in \mathfrak{D}_1 \text{ și } a - 4 = 0\}, \\ A_1 &= \emptyset \cup \{0\} \cup \{4\} = \{0, 4\}. \end{aligned}$$

Pentru ca $-\frac{2a}{a-5} = 2a$, este necesar și suficient ca $[a = 0 \text{ sau } a = 4]$.

Determinarea lui A_2 :

$$A_2 = \left\{ a; a \in \mathfrak{D}_1 \text{ și } -\frac{2a}{a-5} = 8 \right\}.$$

$$A_2 = \{a; a \in \mathfrak{D}_1 \text{ și } -2a = 8(a-5)\}$$

căci $a-5$ nu se anulează în $\mathfrak{D}_1$,

$$A_2 = \{a; a \in \mathfrak{D}_1 \text{ și } 10a = 40\} = \{a; a \in \mathfrak{D}_1 \text{ și } a = 4\},$$

$$A_2 = \{4\}.$$

Concluzia:

$$A = A_1 \cup A_2 = \{0, 4\} \cup \{4\} = \{0, 4\}.$$

Pentru ca $-\frac{2a}{a-5}$ să nu aparțină lui $\mathfrak{D}$, este necesar și suficient ca:

$$[a = 0 \text{ sau } a = 4].$$

■ Rezumat

$a = 5$	$S = \emptyset$ fără soluție.
$a \neq 5$	$\begin{cases} \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 4 \end{cases} & S = \left\{ -\frac{2a}{2a-5} \right\} \text{ o soluție} \\ \begin{cases} a = 0 \\ \text{sau } a = 4 \end{cases} & S = \emptyset \quad \text{fără soluție} \end{cases}$

OBSERVAȚIE. Pentru $a = 0$ sau $a = 4$, numărul $x_0 = -\frac{2a}{a-5}$ este soluția ecuației definite pe $\mathbb{R}$ prin $(a-5)x = -2a$, dar nu a ecuației propuse, de unde necesitatea de a nu uita într-o ecuație domeniul său de validitate.

8.2.3. Ecuații iraționale

Vom studia numai ecuațiile iraționale, ecuații în care figurează radicali.

EXEMPLUL 1. Să se rezolve ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x - \sqrt{x^2 - 1} = -x + 8 - \sqrt{x^2 - 1}\}?$$

Fie S mulțimea soluțiilor acestei ecuații:

$$S = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x - \sqrt{x^2 - 1} = -x + 8 - \sqrt{x^2 - 1}\}.$$

Domeniul de validitate $\mathfrak{D}$ al acestei ecuații este caracterizat prin $x^2 \geq 1$, adică prin $|x| \geq 1$:

$$\mathfrak{D} = \mathbb{R} -]-1, 1[.$$

Folosind transformările permise pe o ecuație, vom avea succesiv:

$$S = \{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } x = -x + 8\},$$

$$S = \{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } 2x = 8\},$$

$$S = \{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } x = 4\} = \mathfrak{D} \cap \{4\}.$$

Însă: $|4| > 1$. Deci: $4 \in \mathfrak{D}$; prin urmare:

$$S = \{4\}.$$

Ecuația admite singura soluție: $x = 4$.

Dacă, de exemplu, am fi avut 0,8 în loc de 8 în ecuația propusă, răspunsul ar fi fost $S = \emptyset$ și ecuația n-ar fi admis soluție.

Acest exemplu arată că, chiar pentru o ecuație ce-o putem califica „fals irațională” atunci când radicalul dispare rapid, prezența acestui radical obligă să se ia anumite precauțiuni.

EXEMPLUL II. Să se rezolve ecuația:

$$\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } \sqrt{x^2 - 1} = 2 - x\}?$$

Domeniul de validitate este caracterizat prin $|x| \geq 1$.
 Reamintim că radicalul, prin însăși definiția sa, indică un număr pozitiv sau nul.

Se știe că:

$$a = b \implies a^2 = b^2;$$

dar, în sens invers:

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 &\implies (a^2 - b^2) = 0 \implies (a + b)(a - b) = 0, \\ &\implies [a = b \text{ sau } a = -b]. \end{aligned}$$

Vom ține deci seama de semne și vom preciza:

$$[a = b \text{ și } a \geq 0] \iff [a^2 = b^2 \text{ și } a \geq 0 \text{ și } b \geq 0].$$

Problema pusă echivalează cu problema următoare:

$$\{x; x \in \mathbf{R}; |x| \geq 1 \text{ și } (\sqrt{x^2 - 1})^2 = (2 - x)^2$$

și

$$|\sqrt{x^2 - 1}| \geq 0 \text{ și } 2 - x \geq 0\} \quad (1)$$

$$\{x; x \in \mathbf{R}; |x| \geq 1 \text{ și } x^2 - 1 = (2 - x)^2$$

și

$$|\sqrt{x^2 - 1}| \geq 0 \text{ și } 2 - x \geq 0\} \quad (2)$$

Condiția $|\sqrt{x^2 - 1}| \geq 0$ este satisfăcută, prin definiție.
 Scrierea sa este de prisos.

Fie $\mathfrak{D}$ domeniul de validitate

$$\mathfrak{D} = \{x; x \in \mathbf{R}; |x| \geq 1\} = \mathbf{R} -]-1, +1[.$$

Vom avea deci să rezolvăm ecuația:

$$\{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } [x^2 - 1 = (2 - x)^2 \text{ și } 2 - x \geq 0]\}?$$

Se determină în extensie mulțimea S a soluțiilor:

$$S = \{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } x^2 - 1 = (2 - x)^2 \text{ și } 2 - x \geq 0\},$$

$$S = \{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } x^2 - 1 = (2 - x)^2\} \cap \{x; x \leq 2\},$$

$$S = \{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4\} \cap \{x; x \leq 2\},$$

$$S = \{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } 4x = 5\} \cap \{x; x \leq 2\},$$

$$S = \mathfrak{D} \cap \left\{\frac{5}{4}\right\} \cap \{x; x \leq 2\} = \left\{\frac{5}{4}\right\}.$$

Ecuatia admite singura soluție $x = \frac{5}{4}$.

Altă metodă.

Pe mulțimea $\mathfrak{D}$, $\sqrt{x^2 - 1}$ există și în virtutea faptului că:

$$a = b \implies a^2 = b^2,$$

orice soluție a ecuației propuse este soluție a ecuației:

$$\{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } x^2 - 1 = (2 - x)^2\}?$$

Fie S' mulțimea soluțiilor acestei noi ecuații.

Vom avea: $S \subseteq S'$, și:

$$S' = \left\{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } x = \frac{5}{4}\right\} = \left\{\frac{5}{4}\right\}.$$

Prin urmare:

$$S = \emptyset \text{ sau } S = \left\{\frac{5}{4}\right\}.$$

Or, pentru $x = \frac{5}{4}$, avem:

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{3}{4},$$

și pe de-altă parte:

$$2 - x = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4},$$

$\frac{5}{4}$ este deci soluția ecuației.

Această metodă constă deci în a căuta o mulțime S' care conține mulțimea S căutată și a găsi direct elementele lui S' care aparțin de asemenea lui S .

OBSERVAȚIE. Am rezolvat până în prezent ecuații amintind la fiecare etapă toate condițiile care trebuie să fie realizate. Când începem să avem o anumită experiență în rezolvarea ecuațiilor, ne putem mulțumi, în cursul calculului, să efectuăm transformări permise pe relația $f(x) = g(x)$ care definește ecuația, cu condiția expresă de a nu uita sub nici un pretext caracterul precis al cercetării efectuate, cit și condițiile impuse prin apartenența soluției la domeniul de definiție cit și acelea ce ar putea să apară în cursul transformărilor.

8.2.4. DESPRE ECUAȚIILE DE TIPUL

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \sqrt{A(x)} = B(x)\}?$$

Sub o formă generală, domeniul de validitate al ecuației:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \sqrt{A(x)} = B(x)\} \quad (E)$$

este necesar inclus în mulțimea caracterizată prin $A(x) \geq 0$.

Dacă există o soluție a lui (E), în virtutea faptului $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$, această soluție aparține lui:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } A = B^2\}. \quad (E_1)$$

Dar, pentru o asemenea soluție, A ia neapărat o valoare pozitivă sau nulă. Este deci inutil de a ține seama de restricția $A \geq 0$.

Pe de altă parte, radicalul fiind prin definiție un număr pozitiv sau nul, dacă există o soluție x a lui (E₁), vom avea:

$$A(x) - B^2(x) = 0 \Rightarrow [\sqrt{A(x)} - B(x)] [\sqrt{A(x)} + B(x)] = 0$$

deci:

$$\text{fie } \sqrt{A(x)} = B(x), \quad (E)$$

$$\text{fie } \sqrt{A(x)} = -B(x). \quad (E')$$

Cei doi termeni ai acestei alternative se exclud reciproc, în afară de cazul când $A(x) = B(x) = 0$.

În concluzie:

Rădăcinile ecuației definite în $\mathbb{R}$ prin $\sqrt{A(x)} = B(x)$ sînt rădăcinile ecuației definite prin $A(x) = [B(x)]^2$ atunci cînd $B(x)$ este pozitiv (sau nul).

$$\begin{aligned} & \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \sqrt{A(x)} = B(x)\} \\ &= \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } [A(x) = [B(x)]^2 \text{ și } B(x) \geq 0]\} \\ &= \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } A(x) = [B(x)]^2\} \cap \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } B(x) \geq 0\}. \end{aligned}$$

Ceea ce, de altfel, se mai poate rezuma prin echivalența condițiilor impuse lui x :

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B^2(x) \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

EXAMPLE:

$$\text{I. } S_1 = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } 3 - 2x + \sqrt{x^2 - x + 1} = 1 - x\}. \quad (1)$$

$$S_1 = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \sqrt{x^2 - x + 1} = x - 2\},$$

$$S_1 = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } (\sqrt{x^2 - x + 1})^2 = (x - 2)^2 \text{ și } x - 2 \geq 0,$$

$$S_1 = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - x + 1 = x^2 - 4x + 4\} \cap \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x \geq 2\},$$

$$S_1 = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x \geq 2\} \cap \{1\} = \emptyset.$$

Ecuția (1) nu are soluție.

$$\text{II. } \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \sqrt{3x - 1} = -\sqrt{x + 3}\} \quad (2)$$

Această ecuație nu are soluție căci prima expresie admite, pentru orice x când ea există, un număr pozitiv sau nul; a doua expresie admite în aceleași condițiuni un număr negativ sau nul; și aceste două numere nu sînt nule în același timp.

$$\text{III. } \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \sqrt{x + 1} = \sqrt{5x - 2}\} \quad (3)$$

Fie S_3 mulțimea soluțiilor acestei ecuații.

$$S_3 = \{x; x \in \mathbb{D}_3 \text{ și } \sqrt{x + 1} = \sqrt{5x - 2}\},$$

unde $\mathbb{D}_3$ este domeniul de validitate al ecuației (3), și este definit prin:

$$x \in \mathbb{D}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 5x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{5}.$$

$$\text{Deci: } \mathbb{D}_3 = \left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x \geq \frac{2}{5}\right\} = \left[\frac{2}{5}, +\infty\right[.$$

Ridicînd la pătrat:

$$S_3 = \{x; x \in \mathbb{D}_3 \text{ și } x + 1 = 5x - 2\},$$

$$S_3 = \left\{x; x \in \mathbb{D}_3 \text{ și } x = \frac{3}{4}\right\} = \mathbb{D}_3 \cap \left\{\frac{3}{4}\right\} = \left\{\frac{3}{4}\right\};$$

$$\text{în adevăr: } \frac{3}{4} > \frac{2}{5}.$$

$$\text{Ecuția (3) are o singură soluție: } x = \frac{3}{4}.$$

$$\text{IV. } \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \sqrt{x - 1} = \sqrt{5x - 2}\} \quad (4)$$

Fie S_4 mulțimea soluțiilor acestei ecuații.

Domeniul de validitate $\mathfrak{D}_4$ este:

$$\mathfrak{D}_4 = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x - 1 \geq 0 \text{ și } 5x - 2 \geq 0\}.$$

$$\mathfrak{D}_4 = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x \geq 1\} = [1, +\infty[.$$

$$S_4 = \{x; x \in \mathfrak{D}_4 \text{ și } x - 1 = 5x - 2\}.$$

$$S_4 = \left\{x; x \in \mathfrak{D}_4 \text{ și } x = \frac{1}{4}\right\} = \mathfrak{D}_4 \cap \left\{\frac{1}{4}\right\} = \emptyset,$$

căci

$$\frac{1}{4} < 1 \notin \mathfrak{D}_4.$$

Ecuția (4) nu are soluție.

$$V. \quad \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = 1\} \quad (5)$$

$$\mathfrak{D}_5 = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x \geq -2 \text{ și } x \geq 1\} = [1, +\infty[.$$

În virtutea implicației: $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$, orice x aparținând lui S_5 va fi astfel ca: $(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})^2 = 1^2$, și în consecință va aparține lui:

$$S_5' = \{x; x \in \mathfrak{D}_5 \text{ și } (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})^2 = 1\},$$

$$S_5' = \{x; x \in \mathfrak{D}_5 \text{ și } x + 2 + x - 1 - 2\sqrt{(x+2)(x-1)} = 1\}$$

$$S_5' = \{x; x \in \mathfrak{D}_5 \text{ și } \sqrt{(x+2)(x-1)} = x\}.$$

În virtutea aceluiași principiu, orice element al lui S_5 va fi element al lui:

$$S_5'' = \{x; x \in \mathfrak{D}_5 \text{ și } (x+2)(x-1) = x^2\},$$

$$S_5'' = \{x; x \in \mathfrak{D}_5 \text{ și } x^2 + x - 2 = x^2\},$$

$$S_5'' = \{x; x \in \mathfrak{D}_5 \text{ și } x = 2\} = \{2\}.$$

Vom avea deci:

$$S_5 \subseteq S_5' \subseteq S_5'',$$

și prin urmare: $[S_5 = \emptyset \text{ sau } S_5 = \{2\}]$.

Pentru $x = 2$, $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}$ ia valoarea:

$$\sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1,$$

deci $x = 2$ este soluția ecuației.

(6)

EXERCIȚII

Să se rezolve ecuațiile definite în $\mathbb{R}$ prin relațiile următoare:

$$8.16. \quad \frac{x}{11-x} = \frac{1-x}{x}.$$

$$8.17. \quad \frac{1 - \frac{x-2}{x+2}}{2 + \frac{x}{x+2}} = \frac{1}{4}.$$

$$8.18. (3x-2)(5x+1)(5x-1)=0.$$

$$8.19. \frac{x+5}{x-5} - \frac{x-5}{x+5} = \frac{25}{x^2-25}.$$

$$8.20. \frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}.$$

$$8.21. (3x-1)(x+1)(x-2)=0.$$

$$8.22. 1 + \sqrt{x-3} = 0.$$

$$8.23. \sqrt{x^2-4} = 1-x.$$

$$8.24. x + \sqrt{x^2-3x} = 4.$$

$$8.25. \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 2.$$

$$8.26. \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 1.$$

$$8.27. \sqrt{x-3} + \sqrt{1-x} = 0.$$

$$8.28. 1 - \sqrt{x-3} = 0.$$

$$8.29. \sqrt{x-1} = x-1.$$

$$8.30. \sqrt{x-1} + \sqrt{x-3} = x-3.$$

$$8.31. \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$8.32. \sqrt{x+6} - \sqrt{x-3} = 1.$$

$$8.33. \sqrt{x-5} = \sqrt{3x+1}.$$

Să se rezolve și să se discute în $\mathbb{R}$ ecuațiile definite prin relațiile următoare:

$$8.34. \frac{a-x}{b} - \frac{b-x}{a} = 1.$$

$$8.38. \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 2.$$

$$8.35. \frac{x-1}{a} + \frac{x-2}{b} = 2.$$

$$8.39. \frac{x}{1-a} - \frac{x}{a+1} = \frac{1}{a^2-1}.$$

$$8.36. \frac{x-a}{x-b} = \frac{x-5}{x-6}.$$

$$8.40. \frac{x+1}{ax-3} = b.$$

$$8.37. \frac{x}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b}{a} - \frac{x}{b}.$$

$$8.41. \frac{a-x}{a} = \frac{x-b}{b}.$$

$$8.42. \frac{x-a}{a-b} - \frac{3ax}{a^2-b^2} = \frac{x-a}{a+b} - \frac{ax}{a^2-b^2}.$$

$$8.43. \sqrt{x^2+ax} = x-a.$$

$$8.45. \sqrt{x^2+2x+1} = x-a.$$

$$8.44. \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = \sqrt{\frac{a+2x}{a-2x}}.$$

$$8.46. 3 + \sqrt{x^2-a} = x+4.$$

PROBLEME

8.47. *Problemă rezolvată.* Să se rezolve și să se discute în $\mathbb{R}$ ecuația definită prin relația următoare:

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{2}{x}.$$

Soluție. Fie S mulțimea soluțiilor acestei ecuații:

$$S = \left\{ x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{2}{x} \right\}.$$

Fie $\mathfrak{D}$ domeniul de validitate al ecuației. Vom avea:

$$\mathfrak{D} = \mathbb{R} - \{a, b, 0\},$$

și:

$$S = \left\{ x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{2}{x} \right\}.$$

Toate calculele fiind făcute:

$$S = \{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } (a+b)x = 2ab\},$$

$$S = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } (a+b)x = 2ab\} \cap \mathfrak{D}.$$

Dacă $(a+b) \neq 0$;

$$S = \left\{ \frac{2ab}{a+b} \right\} \cap \mathfrak{D}.$$

[Discuția se va purta acum asupra studiului exact al acestei mulțimi.

Discuție.

Dacă $(a+b) \neq 0$ și dacă $\frac{2ab}{a+b}$ aparține lui $\mathfrak{D}$, vom avea

$$S = \left\{ \frac{2ab}{a+b} \right\}.$$

Dacă $(a+b) \neq 0$ și dacă $\frac{2ab}{a+b}$ nu aparține lui $\mathfrak{D}$, vom avea $S = \emptyset$.

Rămâne să determinăm pentru ce valori ale parametrilor numărul $\frac{2ab}{a+b}$ aparține sau nu lui $\mathfrak{D}$.

Trei cazuri se pot prezenta pentru ca acest număr să fie exterior lui $\mathfrak{D}$:

$$\frac{2ab}{a+b} = 0 \text{ sau } \frac{2ab}{a+b} = a \text{ sau } \frac{2ab}{a+b} = b.$$

$$1^\circ \left[a+b \neq 0 \text{ și } \frac{2ab}{a+b} = 0 \right] \Leftrightarrow [a+b \neq 0 \text{ și } ab = 0],$$

$$\Leftrightarrow [a = 0 \text{ sau (exclusiv) } b = 0].$$

$$2^\circ \left[a+b \neq 0 \text{ și } \frac{2ab}{a+b} = a \right] \Leftrightarrow [a+b \neq 0 \text{ și } ab = a^2],$$

$$\Leftrightarrow [a+b \neq 0 \text{ și } a = b]$$

$$\text{sau } [a+b \neq 0 \text{ și } a = 0].$$

$$8^{\circ}. \left[a + b \neq 0 \text{ și } \frac{2ab}{a+b} = b \right] \Leftrightarrow [a + b \neq 0 \text{ și } a = b]$$

$$\text{sau } [a + b \neq 0 \text{ și } b = 0].$$

Dacă $(a + b) = 0$, recăpătăm $S = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } (a + b)x = 2ab\} \cap \mathfrak{D}$.

dacă $ab \neq 0$ $S = \emptyset \cap \mathfrak{D} = \emptyset$, fără soluție;

dacă $ab = 0$ $S = \mathbb{R} \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{D}$, o infinitate de soluții.

În rezumat:

$a + b \neq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} a \neq b \quad \text{O soluție } x_0 = \frac{2ab}{a+b} \\ ab \neq 0 \\ ab = 0 \text{ fără soluție} \\ a = b \text{ fără soluție} \end{array} \right.$
$a + b = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} ab \neq 0 \text{ fără soluție} \\ ab = 0 \text{ orice element } x \text{ al lui } \mathfrak{D} \text{ este soluție} \end{array} \right.$

8.48. Să se rezolve ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1\}?$$

(Să se observe că sub fiecare dintre radicali se află pătratul unei expresii iraționale.)

Să se rezolve și eventual să se discute ecuațiile definite în $\mathbb{R}$ prin relațiile următoare:

$$8.49. \frac{x}{3} - \frac{1}{3} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} = \frac{x}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{x}{6}.$$

$$8.50. x + \frac{3x-9}{5} = 4 - \frac{5x-12}{3}.$$

$$8.51. \frac{1}{2x-3} - \frac{3}{2x^2-3x} = \frac{5}{x}.$$

$$8.52. \frac{3x-7}{4x+2} = \frac{3x-14}{4x-13}. \quad 8.53. \frac{a}{b-x} = \frac{b}{a-x}.$$

$$8.54. \frac{a(a-x)}{b} + \frac{b(x-b)}{a} = x.$$

$$8.55. (x-1)(x-2) + (x-1)(x-3) = 2(x-2)(x-3).$$

$$8.56. \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = x - 17.$$

$$8.57. (x+1)^4 - (x-1)^4 = 8x(x^2+1).$$

$$8.58. (x+1)^2 - (x-1)^2 = 5x + 8(x-3).$$

$$8.59. \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{2}{x-1}.$$

$$8.60. \frac{x+1}{x-3} + \frac{2x-5}{x-3} = 3.$$

$$8.61. \frac{x^3-1}{x} = (x-2)(x+2) + \frac{11}{x}$$

$$8.62. \frac{x+7}{x-3} + \frac{4x-2}{x-5} = 5.$$

$$8.63. x^2(x+1) = 4(x+1).$$

$$8.64. (3x+2)^2 = (x+1)^2.$$

$$8.65. x^2 - 1 + 2a(x-1) = (a+1)x - a - 1.$$

$$8.66. (x-a)(x-2a)(x+a) = x^3 + 2a^3.$$

$$8.67. \frac{x-3}{ax-1} = b.$$

$$8.81. \sqrt{(x+4)(x-4)} = x-4.$$

$$8.68. \frac{x+3}{x-a} = \frac{x-2}{x-b}.$$

$$8.82. \sqrt{(x-4)(x-9)} = x-6.$$

$$8.69. \frac{a-2b-1}{x} = \frac{2a-b-1}{x-3}.$$

$$8.83. \sqrt{4 + \sqrt{x^4 + x^2}} = x-2.$$

$$8.70. \frac{x}{a} + \frac{x}{a-b} = \frac{a}{b+a}.$$

$$8.84. \sqrt{4 + \sqrt{x^4 + x^2}} = 2-x.$$

$$8.71. \sqrt{(x-1)(x-2)} = x-1.$$

$$8.85. \sqrt{x^2 - 3x + 8} = x-4.$$

$$8.72. \sqrt{x+4} + \sqrt{x} = 4.$$

$$8.86. \sqrt{4x^2 - 9} = 2x-1.$$

$$8.73. \sqrt{(x-3)(x-10)} = x-5.$$

$$8.87. \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = 3.$$

$$8.74. x + \sqrt{x^2 - 2x} = 3.$$

$$8.88. \sqrt{(x-1)(x+4)} = x-2.$$

$$8.75. \sqrt{x^2 + 1} = x-4.$$

$$8.89. \sqrt{x+1} - \sqrt{x+4} = 3.$$

$$8.76. \sqrt{x^2 - 1} = x+6.$$

$$8.90. x + \sqrt{x^2 - 4x} = 3;$$

$$x - \sqrt{x^2 - 4x} = 3.$$

$$8.77. \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = 3.$$

$$8.91. \sqrt{(x+3)(x-3)} = x-3.$$

$$8.78. \sqrt{x^2 + 4} = x-5.$$

$$8.92. \sqrt{(x-3)(x-5)} = x-6.$$

$$8.79. \sqrt{x+4} = 4x+2.$$

$$8.93. \sqrt{x^2 + 5x + 4} = x-a.$$

$$8.80. \sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5}.$$

$$8.94. 2(x+2)(x-4) = x^2-4.$$

$$8.95. (3x - 1)(5x - 4) = 25x^2 - 16.$$

$$8.96. (x - 3)(x - 5)(x - 8) = 0.$$

$$8.97. \frac{ax}{a+b} + 2ab = \frac{bx}{a-b} + a^2 - b^2.$$

$$8.98. \frac{x}{a-1} - \frac{x+1}{a+1} = \frac{x+1}{a-1} - \frac{x}{1-a^2}.$$

$$8.99. \frac{(2x-3)(2x-4)}{8} - \frac{(x+2)^2}{6} = \frac{x(x-2)}{3}.$$

$$8.100. (x-5)(x-7) + (x-5)^2 = 0.$$

$$8.101. (2x-3)(5x+1)(5-2x) = 0.$$

$$8.102. \frac{x+a}{x-a} - \frac{x+b}{x-b} = \frac{a-b}{(x-a)(x-b)}$$

$$8.103. \frac{x+a}{x+b} + \frac{x-a}{x-b} = 2.$$

$$8.104. \frac{x}{(a-b)(a-c)} + \frac{x}{(b-a)(b-c)} + \frac{x}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

$$8.105. \frac{(x-a)^2}{x^2} = \frac{x}{x+2a}. \quad 8.106. \frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{x}{b} + \frac{b}{x}.$$

$$8.107. \frac{(1+x)^2}{1+ax} = 1-x.$$

$$8.108. (a-x)(b-x) + (a+x)(c-x) - (b-x)(a-c) = 0.$$

$$8.109. \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{(x+2)(x+3)}.$$

$$8.110. \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{(x+1)(x+3)}.$$

$$8.111. \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6}.$$

$$8.112. \frac{x^2+2x+4}{x^2+3x+9} = \frac{x+2}{x+3}. \quad 8.113. \frac{x+7}{x-3} + \frac{4x-2}{x-5} = 5.$$

$$8.114. \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{4x-5}{x(x^2-1)}.$$

$$8.115. \frac{x-2}{x-3} - \frac{2x+11}{2x+9} = \frac{17}{(x-3)(2x+9)}.$$

$$8.116. \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x-2}} + x - 2 = 0.$$

8.3. INECUAȚII DE GRADUL ÎNȚII

8.3.1. Inecuație întreagă și rațională de gradul întâi

Cînd $f(x)$ și $g(x)$ sînt polinoame, inecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } f(x) > g(x)\} \quad (S)$$

se numește întreagă și rațională; domeniul său de validitate este $\mathbb{R}$. Se poate pune sub forma echivalentă:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } P(x) > 0\} \quad (S')$$

unde $P(x)$ este un polinom. Cînd $P(x)$ este un polinom de gradul întâi $ax + b$ (cu $a \neq 0$), ne rămîne de rezolvat o inecuație întreagă și rațională de gradul întâi.

DEFINIȚIE. O inecuație întreagă de gradul întâi cu o necunoscută este o inecuație de tipul:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax + b > 0\} \quad (1)$$

unde a și b sînt numere (sau expresii algebrice în raport cu parametrii).

Dacă a este nul, mulțimea $I = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax + b > 0\}$ a soluțiilor inecuației este, $\mathbb{R}$ în întregime dacă $b > 0$, $\emptyset$ dacă $b \leq 0$.

Rezolvarea inecuației: $\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax + b > 0\}$ ($a \neq 0$).

Deoarece a este diferit de zero, avem:

$$\forall x \quad ax + b = a \left(x + \frac{b}{a} \right).$$

Vom avea deci, dacă I este mulțimea soluțiilor:

$$I = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax + b > 0\} = \left\{ x; x \in \mathbb{R} \text{ și } a \left(x + \frac{b}{a} \right) > 0 \right\}.$$

După n° 6.3.4, se consideră următoarele două cazuri:

1. Dacă a este pozitiv, problema se reduce la determinarea mulțimii I astfel ca:

$$I = \left\{ x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x + \frac{b}{a} > 0 \right\} = \left\{ x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x > -\frac{b}{a} \right\}.$$

$$\text{De unde răspunsul: } I = \left] -\frac{b}{a}, +\infty \right[.$$

2. Dacă a este negativ, problema se reduce la determinarea mulțimii I astfel ca:

$$I = \left\{ x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x + \frac{b}{a} < 0 \right\} = \left\{ x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x < -\frac{b}{a} \right\}.$$

$$\text{De unde: } I = \left] -\infty, -\frac{b}{a} \right[.$$

OBSERVAȚIE. Dacă inecuația este scrisă cu ajutorul relației de ordine „ $\geq$ ”, avem:

$$I' = \{x; x \in R \text{ și } ax + b \geq 0\}.$$

$$1. \text{ Dacă } a > 0: I' = \left[-\frac{b}{a}, +\infty \right[= \left\{ x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x \geq -\frac{b}{a} \right\}.$$

$$2. \text{ Dacă } a < 0: I' = \left] -\infty, -\frac{b}{a} \right] = \left\{ x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x \leq -\frac{b}{a} \right\}.$$

EXEMPLU. Să se rezolve inecuația:

$$\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } (m+1)x + m - 3 > 4x + 1\}?$$

Se obține reducând:

$$I = \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } (m-3)x > 4-m\}.$$

1°. Dacă $m > 3, m-3 > 0$:

$$I = \left\{ x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x > \frac{4-m}{m-3} \right\} = \left] \frac{4-m}{m-3}, +\infty \right[.$$

2°. Dacă $m < 3, m-3 < 0$:

$$I = \left\{ x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x < \frac{4-m}{m-3} \right\} = \left] -\infty, \frac{4-m}{m-3} \right[.$$

3°. Dacă $m = 3$:

$$I = \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } 0 > 1\} = \emptyset.$$

8.3.2. Polinomul de gradul întâi

Lărgind cadrul preocupărilor noastre, vom studia semnul pe care-l ia polinomul de gradul întâi $ax + b$, după diferitele valori numerice atribuite variabilei x (presupunem $a \neq 0$, altfel polinomul n-ar fi de gradul întâi, s-ar reduce la o constantă).

Nu suntem obligați să rezolvăm o inecuație, dar trebuie să reținem:

1°. că numărul $-\frac{b}{a}$ separă valorile lui x care sînt soluții ale inecuației:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax + b > 0\} \quad (S)$$

de acelea care nu sînt:

2°. că numărul $-\frac{b}{a}$ este rădăcina ecuației:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax + b = 0\} \quad (E)$$

Aceste observații ne conduc să folosim încă identitatea:

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R} \quad ax + b = a \left(x + \frac{b}{a} \right)$$

pentru a face să apară în expresia polinomului $ax + b$, acest număr remarcabil $-\frac{b}{a}$, pe care-l vom numi, prin extindere rădăcina polinomului

Punînd atunci:

$$-\frac{b}{a} = p,$$

vom obține:

$$a \neq 0, \forall x \quad ax + b \equiv a(x - p),$$

de unde rezultă cu ușurință implicațiile reciproce

$$x_0 < p \iff a(x_0 - p) \text{ are semnul lui } -a.$$

$$x_0 = p \iff a(x_0 - p) \text{ este nul.}$$

$$x_0 > p \iff a(x_0 - p) \text{ are semnul lui } +a.$$

TEOREMĂ. Pentru $x = x_0$, polinomul de gradul întâi $ax + b$, $a \neq 0$, a cărui rădăcină este $-\frac{b}{a} = p$:

1°) ia semnul lui „ $-$ ” a ; dacă, și numai dacă, x_0 este mai mic decît p ;

2°) ia valoarea 0 dacă, și numai dacă x_0 este egal cu p ;

3°) ia semnul lui a dacă, și numai dacă, x_0 este mai mare ca p .

EXERCITII

Să se rezolve inecuațiile definite în R de următoarele relații:

$$8.117. 5 - 3x > x + 1. \quad 8.118. \frac{2x - 5}{3} > \frac{2 - x}{6}.$$

$$8.119. \frac{x + 1}{4} < \frac{1 - 3x}{5} + \frac{1 - x}{10}.$$

$$8.120. 2x - 6 > x + 5. \quad 8.121. x - \frac{x - 2}{3} > \frac{1}{2} + x.$$

$$8.122. 7x - \frac{x + 1}{2} < \frac{1 - 3x}{5}.$$

8.123. Să se demonstreze că:

$$\forall a \in R^+, \forall b \in R^+ \quad \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

8.124. Să se demonstreze că:

$$\forall a \in R^+, \forall b \in R^+ \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}.$$

8.125. Pentru $a > 0$ și $b > 0$, fie c numărul definit prin:

$$\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Să se demonstreze că:

$$\forall a, \forall b \quad c \leq \sqrt{ab}.$$

8.126. Să se demonstreze că:

$$\forall a \in R^+, \forall b \in R^+$$

$$\left[a + b = 1 \implies \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 + \left(b + \frac{1}{b} \right)^2 \geq \frac{25}{4} \right].$$

(Să se folosească exercițiile precedente; se va arăta că $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ și că $ab \leq \frac{1}{4}$.)

8.127. Să se demonstreze că:

$$\forall a \in R^+, \forall b \in R^+, \forall c \in R^+ \quad (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

8.4. APLICAȚIE LA REZOLVAREA ALTOR INECUAȚII

8.4.1. Produs de factori de gradul întâi

Fie de rezolvat inecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } (x - 3)(5x - 1) > 0\} \quad (\text{S})$$

Cunoaștem semnul produsului de factori dacă cunoaștem semnul fiecărui factor în parte. Or aceștia sînt binoame de gradul întâi deci le cunoaștem semnul.

Întocmim un tablou care va conține semnele celor doi factori, după valorile lui x . Prescurtarea sgn înseamnă „semnul lui“.

x	$\frac{1}{5}$		3	
$\text{sgn } (x - 3)$	—		—	+
$\text{sgn } (5x - 1)$	—	0	+	+
$\text{sgn } (x - 3)(5x - 1)$	+	0	—	+

Soluțiile inecuației sînt numerele reale care aparțin intervalelor

$$\left] -\infty, \frac{1}{5} \right[\text{ sau } \left] 3, +\infty \right[.$$

Se va avea grijă, la întocmirea unui asemenea tablou, care se poate aplica la mai mulți factori, să se claseze valorile remarcabile ale lui x în ordine crescătoare.

8.4.2. Inecuații raționale

Fie, de exemplu, să se rezolve inecuația:

$$\left\{ x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{3}{1-x} > \frac{5}{2x+1} \right\} \quad (\text{S})$$

Semnele numitorilor depind de x . Pentru a le suprima trebuie să distingem mai multe cazuri. Se procedează în felul următor:

Domeniul de definiție este $R - \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$.

Pe acest domeniu avem:

$$\begin{aligned} \frac{3}{1-x} > \frac{5}{2x+1} &\Leftrightarrow \frac{3}{1-x} - \frac{5}{2x+1} > 0. \\ &\Leftrightarrow \frac{3(2x+1) - 5(1-x)}{(1-x)(2x+1)} > 0, \\ &\Leftrightarrow \frac{11x-2}{(1-x)(2x+1)} > 0. \end{aligned}$$

Este ușor să se determine semnul acestei fracții deoarece termenii ei sînt binoame sau produs de binoame. Se întocmește un tablou.

Pentru a reaminti că $-\frac{1}{2}$ și 1 sînt excluse din domeniul de validitate, se trage, convențional, sub fiecare din aceste valori o bară dublă.

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	1
$\text{sgn}(11x-2)$	—	— 0 +	+
$\text{sgn}(1-x)$	+	+	+
$\text{sgn}(2x+1)$	—	+	+
$\text{sgn} \frac{11x-2}{(1-x)(2x+1)}$	+	— 0 +	—

Mulțimea S a soluțiilor ecuației propusă este:

$$S =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{2}{11}, 1[.$$

8.4.3. Inecuații simultane

Fie, de exemplu, să se rezolve problema:

$$\left\{ x; x \in \mathbb{R} \text{ și } -1 < \frac{x}{x-3} < x+2 \right\}?$$

Fie I mulțimea numerelor reale care răspund la următoarea problemă:

$$I = \left\{ x; x \in \mathbf{R} \quad \text{și} \quad -1 < \frac{x}{x-3} < +2 \right\}$$

$$= \left\{ x; x \in \mathbf{R} \quad \text{și} \quad \frac{x}{x-3} > -1 \right\} \cap \left\{ x; x \in \mathbf{R} \quad \text{și} \quad \frac{x}{x-3} < +2 \right\},$$

ceea ce se notează: $I = I_1 \cap I_2$.

Se rezolvă atunci cele două inecuații:

$$\left\{ x; x \in \mathbf{R} \quad \text{și} \quad \frac{x}{x-3} > -1 \right\} ? \quad (1)$$

și:

$$\left\{ x; x \in \mathbf{R} \quad \text{și} \quad \frac{x}{x-3} < +2 \right\} ? \quad (2)$$

mulțimea I căutată este intersecția mulțimilor I_1 și I_2 a soluțiilor inecuațiilor respective (1) și (2).

Cititorul va întocmi tablouri corespunzătoare și va găsi:

$$I_1 =]-\infty, \frac{3}{2}[\cup]3, +\infty[;$$

$$I_2 =]-\infty, 3[\cup]6, +\infty[.$$

Soluțiile problemei sînt date de intersecția acestor mulțimi.

Este comod să se reprezinte mulțimile grafic cu ajutorul unei axe. Se iau pe această axă valorile remarcabile ale lui x . Se bacează părțile ce trebuie excluse pentru prima prin hașurare // // // și părțile ce trebuie excluse pentru a doua prin hașurare \ \ \ \ \ (obișnuință ce ușurează verificările). Soluțiile sînt date, dacă rămîn, părțile nehașurate.



Aci rămîne:

$$x < \frac{3}{2} \quad \text{sau} \quad x > 6.$$

Deci:

$$I =]-\infty, \frac{3}{2}[\cup]6, +\infty[.$$

8.4.4. Inecuații iraționale

Dăm mai întâi următorul exemplu:

$$\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } \sqrt{2x-1} > \sqrt{x-4}\} ? \quad (1)$$

Domeniul de validitate $\mathfrak{D}$: $x \geq \frac{1}{2}$ și $x \geq 4$; fie: $x \geq 4$.

Pe $\mathfrak{D}$, cei doi membri sînt definiți și sînt pozitivi.

Or: $0 < \alpha < \beta \iff [0 < \alpha \text{ și } 0 < \beta \text{ și } \alpha^2 < \beta^2]$;

Mulțimea I a soluțiilor lui (1) este deci:

$$I = \{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } 2x-1 > x-4\} = \{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } x > -3\}$$

Întotdeauna verificată pe $\mathfrak{D}$; rămîne deci condiția: $x \geq 4$.

Se obține:

$$I = \{x; x > -3\} \cap \{x; x \geq 4\} = [4, +\infty[.$$

Alt exemplu. $\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x+3 < \sqrt{x^2+5}\} ?$

Fie I mulțimea soluțiilor acestei inecuații.

Domeniul de validitate $\mathbf{R}$.

Membrul din dreapta este întotdeauna strict pozitiv; deci, dacă $x+3$ este negativ, relația $x+3 < \sqrt{x^2+5}$ va fi întotdeauna verificată.

Vom descompune studiul mulțimii I în două părți:

$$I = \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x+3 < \sqrt{x^2+5} \text{ și } x+3 \leq 0\}$$

$$\cup \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x+3 < \sqrt{x^2+5} \text{ și } x+3 > 0\}.$$

$$I = I_1 \cup I_2.$$

1. *Determinarea lui I_1 .* După observația precedentă:

$$I_1 = \{x, x \in \mathbf{R} \text{ și } x \leq -3\} =]-\infty, -3]$$

(într-adevăr, $x_0 = 3$ aparține lui I_1 , căci avem în plus $0 < \sqrt{(9+5)}$).

2. *Determinarea lui I_2 .* Pentru $x > -3$, cei doi membri sînt pozitivi și se poate raționa ca în exemplul precedent:

$$I_2 = \{x; x > -3 \text{ și } (x+3)^2 < x^2+5\},$$

$$I_2 = \{x; x > -3 \text{ și } x^2+6x+9 < x^2+5\},$$

$$I_2 = \{x; x > -3 \text{ și } 6x < -4\},$$

$$I_2 = \left\{x; x > -3 \text{ și } x < -\frac{2}{3}\right\} = \left]-3, -\frac{2}{3}\right[.$$

Vom avea deci:

$$I = I_1 \cup I_2 =] -\infty, -3] \cup] -3, -\frac{2}{3}[,$$

$$I =] -\infty, -\frac{2}{3}[.$$

Mulțimea soluțiilor inecuației propuse este deci mulțimea numerelor reale x astfel că $x < -\frac{2}{3}$.

EXERCIȚII

Să se rezolve inecuațiile definite pe $\mathbb{R}$ de următoarele relații:

8.128. $(x-1)(1-3x) < 0$. 8.129. $(x-2)(4-3x) > 0$.

8.130. $(4x-1)(x-2)(x+1)(2-3x) > 0$.

8.131. $\frac{x}{x-2} > 3$.

8.133. $\frac{x}{x-2} < 3$.

8.132. $\frac{3x}{x-1} < -1$.

8.134. $\frac{3x-2}{5-3x} > 1$.

Să se găsească mulțimea numerelor reale care satisfac simultan relațiile următoare:

8.135. $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} > x - \frac{1}{3}$ și $\frac{x+1}{x} > \frac{x-1}{2x}$.

8.136. $\frac{x-1}{4} < \frac{x+3}{2}$ și $\frac{x+1}{x-1} > \frac{x+3}{x+1}$.

8.137. $\frac{3x}{x-1} > 4$ și $\frac{x}{x+1} < 2$.

8.138. $\frac{(x+1)(x-2)}{2x-3} > 0$ și $\frac{(1-x)(x+2)}{x} < 0$

8.139. $\frac{x\sqrt{2}-1}{x-\sqrt{2}} < 0$ și $\frac{x\sqrt{3}-1}{2x-\sqrt{3}} > 0$.

Să se rezolve inecuațiile definite pe $\mathbb{R}$ prin următoarele relații:

8.140. $\sqrt{x-1} < \sqrt{2x-3}$. 8.142. $x-3 < \sqrt{x^2+1}$.

8.141. $1 + \sqrt{x-2} > 4$. 8.143. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x} > 2$.

$$8.144. \sqrt{1-x} > \sqrt{2x-3}.$$

$$8.147. \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} > 2.$$

$$8.145. 1 - \sqrt{x-2} > 4.$$

$$8.148. 0 < \frac{4x-1}{\sqrt{16x^2+1}} < 1.$$

$$8.146. 3 - x < \sqrt{x^2+1}.$$

PROBLEME

Să se rezolve și să se discute inecuațiile definite în $\mathbb{R}$ de următoarele relații:

$$8.149. \frac{(m-3)x}{2m} > \frac{1-x}{2} - \frac{x-1}{m}.$$

$$8.150. \frac{(m+1)x}{m^2-1} > \frac{2-x}{m-1} + \frac{1+x}{m+1}.$$

$$8.151. \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} > \frac{x-a}{x-a-1} - \frac{x-a-1}{x-a-2}.$$

$$8.152. \frac{x^3+ax+a^3}{x^3+bx+b^3} > \frac{x+a}{x+b}.$$

$$8.153. \frac{ax}{(a-b)(a-c)} + \frac{bx}{(b-a)(b-c)} + \frac{cx}{(c-a)(c-b)} > 1.$$

$$8.154. \sqrt{(x+3)(x-3)} > x-3.$$

$$8.155. \sqrt{(x-3)(x-5)} > x-6.$$

$$8.156. \sqrt{2x-a-1} > \sqrt{x-a} + \sqrt{x-1}.$$

$$8.157. \sqrt{2x-a-1} > \sqrt{x-a} - \sqrt{x-1}.$$

$$8.158. \sqrt{|x^2-1|} > x-5.$$

$$8.159. |(x-3)(x-5)| > x-3.$$

$$8.160. |x| + |x-1| + |x-2| > m.$$

$$8.161. (|x|-5)(|x|-3) > 0.$$

$$8.162. (|x|-5)(|x|-3) > \frac{|x|-5}{|x|-3}.$$

$$8.163. ||x|-5| > ||3x|-3|.$$

$$8.164. \sqrt{|x-5|} > \sqrt{|x^2-10x+25|}.$$

$$8.165. (x-1)(x-2) > (|x|-1)(|x|-2).$$

8.166. Pentru ce valori ale lui m ecuația

$$\left\{ x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{x}{5} - \frac{x}{m} = 2 \right\} ? \text{ are:}$$

1° o soluție pozitivă?

2°. o soluție cuprinsă între 2 și 3?

Să se determine m pentru ca ecuația să nu aibă soluție?

8.167. Pentru ce valori ale lui m ecuația:

$$\left\{ x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{x-2}{3x-m} = 2 \right\} ?$$

are o soluție x , astfel că, succesiv:

$$x > 1; \quad x > \frac{4}{3}; \quad x > -1; \quad x > 2?$$

Poate ea să aibă ca soluție: $x = m$?

8.168. 1°. Să se rezolve ecuația următoare, în care m este un număr cunoscut:

$$\left\{ x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{x+2m}{5} + 2 = \frac{3x-m}{2} + \frac{m}{10} - \frac{m-2x}{20} \right\} ?$$

2°. Pentru ce valoare a lui m această ecuație are ca soluție:

$$x = \frac{3}{2} ?$$

3°. Care sînt valorile întregi ale lui m pentru care această ecuație admite o rădăcină cuprinsă între 2 și 5?

8.169. Să se rezolve și discute:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } (x^2 - 2)(x^2 - 3) > (m - 2)(m - 3)\}?$$

8.170. Să se demonstreze:

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}^+, \forall c \in \mathbb{R}^+$$

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq abc.$$

9. ECUAȚII DE GRADUL II CU O NECUNOSCUTĂ

9.1. Transformările polinomului de gradul II.

9.2. Ecuația de gradul II.

9.3. Relații între coeficienți și rădăcini.

9.4. Aplicație la rezolvarea altor ecuații.

9.1. TRANSFORMĂRILE POLINOMULUI DE GRADUL II

9.1.1. Polinom de gradul II

Un polinom de gradul II redus și ordonat este de forma :

$$ax^2 + bx + c.$$

Presupunem întotdeauna coeficientul a diferit de zero: pentru a nul, gradul nu mai este doi. Polinomul de gradul II conține deci, după reducere, cel mult trei termeni. I se mai spune adesea *trinom de gradul II*, denumire criticabilă, deoarece un asemenea polinom poate să nu conțină decât doi termeni, cum este cazul cu binoamele:

$$5x^2 - 3, 8x^2 + x,$$

sau unul singur, astfel cum o dovedește monomul:

$$7x^2.$$

Ca orice expresie algebrică care conține variabila x , polinomul $ax^2 + bx + c$ ia valori numerice cînd se dau valori numerice lui x . În sensul pe care cititorul îl

cunoaște deja, acest polinom definește o aplicație f a lui R în R (sau încă o funcție numerică) prin:

$$x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c,$$

$$x \in R \quad f(x) \in R$$

f este funcția polinom asociată polinomului $ax^2 + bx + c$.

Vom stabili identități relative la polinomul de gradul II; ele ne vor servi în particular la rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor de gradul II.

Reamintim că o identitate între două expresii algebrice simbolizate prin $f(x)$ și $g(x)$ este o egalitate între $f(x)$ și $g(x)$, valabilă oricare ar fi numărul real x . Vom nota această identitate prin trei liniițe (paralele), notație consacrată în exerciții.

9.1.2. Transformări de polinoame numerice de gradul II

Mai întâi câteva exemple numerice:

1. Se poate scrie: $9x^2 - 4 \equiv (3x + 2)(3x - 2)$, în virtutea unei identități uzuale.

2. Polinomul $16x^2 + 1$ nu conduce la o descompunere analogă, căci o asemenea descompunere caracterizează neapărat un polinom de forma:

$$\alpha^2 x^2 - \beta^2, \quad \alpha \in R, \quad \beta \in R.$$

3. Polinomul $2x^2 - 3$ este identic cu:

$$(x\sqrt{2} - \sqrt{3})(x\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

Este îngăduit să se economisească un simbol de rădăcină pătrată descompunând nu:

$$f(x) \equiv 2x^2 - 3,$$

ci:

$$2f(x) \equiv 4x^2 - 6 = (2x - \sqrt{6})(2x + \sqrt{6}).$$

4. Polinomul $2x^2 + 3$ nu se poate descompune într-un produs. Reținem posibilitatea de a scrie:

$$2(2x^2 + 3) \equiv 4x^2 + 6.$$

În expresia $4x^2$, x intervine prin intermediul pătrăturii monomului $2x$.

5. Polinomul $x^2 - 2x - 8$ este un trinom în care litera x intervine prin intermediul grupului:

$$\boxed{x^2 - 2x},$$

care apare cînd se dezvoltă $(x - 1)^2$:

$$(x - 1)^2 \equiv \boxed{x^2 - 2x} + 1.$$

Se oferă deci posibilitatea de a folosi ridicarea la pătrat a binomului $x - 1$ și de a scrie:

$$x^2 - 2x - 8 \equiv x^2 - 2x + 1 - 1 - 8 \equiv (x - 1)^2 - 9.$$

Este suficient pentru aceasta dea adăuga 1 care „lipsea” și de a-l scădea imediat. Astfel, am pus polinomul sub forma unei diferențe de două pătrate. Rezultă de aci că:

$$x^2 - 2x - 8 \equiv (x - 1)^2 - 9 \equiv [(x - 1) + 3] [(x - 1) - 3] \equiv (x + 2)(x - 4).$$

6. Calculînd în mod analog, se poate descompune polinomul $x^2 + 4x + 2$ și obține identitățile:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 2 &\equiv x^2 + 4x + 4 - 4 + 2 \equiv (x + 2)^2 - 2; \\ &\equiv [(x + 2) + \sqrt{2}] [(x + 2) - \sqrt{2}] \\ &\equiv (x + 2 + \sqrt{2})(x + 2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

7. Polinomul $x^2 + 6x + 19$ se poate transforma cum urmează:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 19 &\equiv x^2 + 6x + 9 + 10 \\ &\equiv (x + 3)^2 + 10. \end{aligned}$$

Se vede de aici că nu orice descompunere este posibilă plecînd de la această formă și un studiu mai adînc va confirma imposibilitatea unei descompuneri oricare ar fi ea.

8. Fie polinomul $f(x) \equiv 3x^2 - 5x + 1$.

Înmulțind cei doi membri cu 3, coeficientul lui x^2 , formăm:

$$3f(x) \equiv 9x^2 - 15x + 3,$$

spre a vedea mai bine dacă-i posibil să facem să intervină pătratul vreunui binom.

Considerăm primul termen: $3x$.

Încercăm:

$$(3x - m)^2 \equiv 9x^2 - 6mx + m^2.$$

Pentru a regăsi expresia $3f(x)$, este suficient deci să punem:

$$6m = 15, \quad \text{sau: } m = \frac{5}{2}.$$

Continuăm prin:

$$\begin{aligned} 3f(x) &\equiv 9x^2 - 15x + 3 \equiv 9x^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + \\ &\quad + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 \\ &\quad \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

Prezența semnului minus permite o descompunere într-un produs:

$$\begin{aligned} 3f(x) &\equiv \left(3x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) \left(3x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) \\ &\quad \left(3x - \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right) \left(3x - \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right). \end{aligned}$$

9. De asemenea, polinomul $f(x) \equiv 7x^2 + x + 8$ este susceptibil să suporte următoarele transformări:

$$\begin{aligned} -7f(x) &\equiv 49x^2 - 7x + 56 \\ &\equiv 49x^2 - 2 \times 7x \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 56 \\ &\quad \left(7x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{223}{4}. \end{aligned}$$

10. Pentru polinomul $f(x) \equiv -\frac{1}{3}x^2 + 16x + 5$, formăm:

$$\begin{aligned} -3f(x) &\equiv x^2 - 48x - 15 \\ &\equiv (x - 24)^2 - 591 \\ &\equiv (x - 24 + \sqrt{591})(x - 24 - \sqrt{591}). \end{aligned}$$

9.1.3. Forme particulare ale polinomului de gradul II

Să examinăm cazul general.

Fie polinomul:

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0. \quad (A)$$

Avem:

$$\forall x \quad af(x) \equiv a^2x^2 + abx + ac,$$

sau, „completînd pătratul“ lui $ax + \frac{b}{2}$:

$$\forall x \quad af(x) \equiv a^2x^2 + 2\left(a \times \frac{b}{2}\right)x + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + ac,$$

$$\forall x \quad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4}. \quad (B)$$

Numărul $4ac - b^2$ joacă un rol remarcabil în clasificarea diverselor cazuri.

În școală se obișnuiește de a considera numărul opus $b^2 - 4ac$, și de a-l numi discriminant¹ al polinomului și de a-l nota prin litera mare grecească Δ .

— **Primul caz.**

$$4ac - b^2 > 0, \text{ deci:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

$4ac - b^2$, fiind pozitiv, poate fi considerat ca pătratul unui număr pozitiv:

$$2K = \sqrt{4ac - b^2};$$

și avem:

$$af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + K^2. \quad (C_1)$$

— **Al doilea caz.**

$$4ac - b^2 < 0, \text{ deci:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0.$$

¹De la latinul: discrimin = separare. Semnul discriminantului separă diversele cazuri.

$b^2 - 4ac$, fiind pozitiv, poate fi considerat ca pătratul unui număr pozitiv:

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{\Delta};$$

și avem:

$$af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2. \quad (C_2)$$

Este posibil atunci să se descompună în produs această diferență de două pătrate:

$$af(x) \equiv \left(ax + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2}\right) \left(ax + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2}\right). \quad (D_2)$$

Al treilea caz.

$$4ac - b^2 = 0, \text{ deci:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0.$$

$$af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2. \quad (C_3)$$

Expresia $af(x)$ este pătratul unui polinom de gradul I; ea se descompune într-un produs de doi factori identici, ceea ce noi vom sublinia uzînd de o repetiție:

$$af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right) \left(ax + \frac{b}{2}\right). \quad (D_3)$$

REZUMAT

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

$$\forall x \quad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4} \quad (B)$$

$$b^2 - 4ac = \Delta$$

$$1^\circ \Delta < 0: \Delta = -4K^2, \quad \forall x \quad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + K^2 \quad (C_1)$$

$$2^\circ \Delta > 0: \Delta = (\sqrt{\Delta})^2, \quad \forall x \quad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2 \quad (C_2)$$

$$\forall x \quad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2}\right) \left(ax + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2}\right) \quad (D_2)$$

$$3^\circ \Delta = 0: \forall x \quad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 \quad (C_3)$$

$$\forall x \quad af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right) \left(ax + \frac{b}{2}\right) \quad (D_3)$$

OBSERVAȚII: 1) Identitățile:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - (a + b)x + ab \equiv (x - a)(x - b) \quad (2)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + (a + b)x + ab \equiv (x + a)(x + b) \quad (3)$$

permit, în anumite cazuri, trecerea directă și ușoară de la forma (A) la forma (D₂).

2) În exercițiile numerice, se va face în așa fel încât coeficientul lui x^2 , după înmulțire, să devină un pătrat perfect.

EXEMPLE

I. $x^2 - 7x + 12 \equiv (x - 3)(x - 4).$

II. $f(x) \equiv 12x^2 + 4x - 1,$
 $3f(x) \equiv 36x^2 + 12x - 3,$
 $3f(x) \equiv (6x + 1)^2 - 4,$
 $3f(x) \equiv (6x + 3)(6x - 1).$
 $f(x) \equiv (2x + 1)(6x - 1).$

EXERCIȚII

Fiind dat un polinom $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$, să se scrie sub forma unei sume sau diferențe de două pătrate și, eventual, sub forma unui produs de doi factori de gradul întâi.

Se dă succesiv $f(x)$:

- | | |
|-------------------------------|---|
| 9.1. $x^2 + 2x + 2.$ | 9.9. $x^2 - x - \frac{3}{2}.$ |
| 9.2. $x^2 + 2x - 1.$ | 9.10. $3x^2 + 5x - 1.$ |
| 9.3. $x^2 + x + 1.$ | 9.11. $-3x^2 - 5x + 10.$ |
| 9.4. $x^2 - x - 1.$ | 9.12. $-5x^2 + x + 1.$ |
| 9.5. $x^2 - x + 1.$ | 9.13. $ax^2 + ax + a + 1.$ |
| 9.6. $x^2 + x + \frac{1}{2}.$ | 9.14. $\frac{1}{2}x^2 + 5x - 1.$ |
| 9.7. $2x^2 + x + 1.$ | 9.15. $-5x^2 + ax + a^2.$ |
| 9.8. $5x^2 + 2x + 5.$ | 9.16. $-\frac{1}{8}x^2 + ax - \frac{a^2}{5}.$ |

9.17. $-7x^2 - ax + ab.$

9.19. $\sqrt{2}x^2 - 6x + \frac{1}{\sqrt{2}}.$

9.18. $-2x^2 - \frac{1}{4}x + 6.$

9.20. $12x^2 - 7x + 1.$

9.2. ECUAȚIA DE GRADUL II

9.2.1. Ecuția de gradul doi

O ecuație întregă și rațională se poate întotdeauna scrie sub forma:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } f(x) = 0\} \quad (E)$$

unde $f(x)$ desemnează un polinom în x redus și ordonat. Vom spune că (E) este o ecuație de gradul doi dacă polinomul $f(x)$ este de gradul al doilea:

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Oricărui polinom de gradul al doilea $f(x)$, i se poate deci asocia o ecuație de gradul al doilea, pe care o vom numi ecuație asociată polinomului:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } f(x) = 0\} \quad (A)$$

Reciproc, oricărei ecuații de gradul al doilea i se asociază un polinom.

Domeniul de validitate al unei astfel de ecuații coincidind cu $\mathbb{R}$, nu se schimbă eventualele soluții, înlocuind pe $f(x)$ prin orice expresie algebrică identică cu $f(x)$.

Mai mult, din faptul că a este presupus nenul (altfel ecuația nu ar fi de gradul al doilea), se știe că ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } af(x) = 0\} \quad (A')$$

are aceeași mulțime de soluții pe $\mathbb{R}$ ca ecuația (A) .

Această a doua formă ne va permite să folosim rezultatele secțiunii precedente.

OBSERVAȚIE. O ecuație de gradul al doilea în $\mathbb{Q}$ este de tipul:

$$\{x; x \in \mathbb{Q} \text{ și } ax^2 + bx + c = 0\},$$

unde a, b, c sînt numere raționale.

9.2.2. Rezolvarea ecuației de gradul al doilea

Fie polinomul: $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Studiem mulțimea:

$$A = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax^2 + bx + c = 0\} \quad (1)$$

sau, ceea ce revine la aceeași, mulțimea:

$$A = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } af(x) = 0\}. \quad (2)$$

În virtutea identității:

$$af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4},$$

$$A = \left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4} = 0\right\}. \quad (3)$$

Distingem mai multe cazuri după semnul numărului $\Delta = b^2 - 4ac$ care este discriminantul polinomului $ax^2 + bx + c$, primul membru al ecuației, și pe care-l vom numi discriminant al ecuației. Vom regăsi cazurile studiate în secțiunea precedentă.

1. $\Delta < 0$.

$$af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + K^2.$$

Ecuația studiată se transformă în ecuația:

$$\left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + K^2 = 0\right\} \quad (4)$$

Dar $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2$ este pozitiv sau nul și prin urmare, expresia $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + K^2$ nu poate lua decât valori mai mari sau egale cu K^2 . K fiind presupus strict pozitiv, urmează că K^2 este strict pozitiv.

Vom avea deci:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + K^2 > 0,$$

și, prin urmare:

$$A_1 = \left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + K^2 = 0\right\} = \emptyset.$$

Nu există soluție.

2. $\Delta > 0$. În acest caz, $af(x)$ se poate descompune în produs; identitățile:

$$af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2$$

$$\left(ax + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2}\right) \left(ax + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2}\right)$$

fac ca ecuația studiată să admită aceeași mulțime de soluții ca ecuația:

$$\left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \left(ax + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2}\right) \left(ax + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2}\right) = 0\right\} \quad (4')$$

care se tratează ca la nr. 8.2.1:

$$\begin{aligned} A_2 &= \left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \left(ax + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2}\right) \left(ax + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2}\right) = 0\right\} \\ &= \left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \left(ax + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2}\right) = 0\right\} \\ &\quad \cup \left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \left(ax + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2}\right) = 0\right\} \\ &= \left\{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}. \end{aligned}$$

Ecuația admite deci, în acest caz, două soluții:

$$x^I = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

sau:

$$x^{II} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

3. $\Delta = 0$. În acest caz, identitatea:

$$af(x) \equiv \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2$$

arată că ecuația (1) echivalează cu:

$$\left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \left(ax + \frac{b}{2}\right) \left(ax + \frac{b}{2}\right) = 0\right\} \quad (4'')$$

Avem:

$$\begin{aligned} A_3 &= \left\{ x; x \in \mathbf{R} \text{ și } \left(ax + \frac{b}{2} \right) \left(ax + \frac{b}{2} \right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ x; x \in \mathbf{R} \text{ și } \left(ax + \frac{b}{2} \right) = 0 \right\} \\ &\quad \cup \left\{ x; x \in \mathbf{R} \text{ și } \left(ax + \frac{b}{2} \right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ -\frac{b}{2a} \right\} \cup \left\{ -\frac{b}{2a} \right\} = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}. \end{aligned}$$

Există o soluție unică, care, anulând cei doi factori, este numită soluție dublă.

Se convine să se scrie:

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a},$$

ca să apară acest caz ca un caz particular ce ar da formulele precedente dacă s-ar înlocui acolo $\Delta = b^2 - 4ac$ prin zero.

TEOREMĂ. Ecuația: $(a \neq 0) \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } ax^2 + bx + c = 0\}^?$

1°) nu admite rădăcină dacă discriminantul său $b^2 - 4ac$ este negativ;

2°) admite, cînd discriminantul său este pozitiv, două rădăcini date de formulele:

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

3°) admite, cînd discriminantul său este nul, două rădăcini egale:

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}.$$

9.2.3. Exemple

Atunci cînd rezolvarea unei ecuații de gradul al doilea nu este sugerată de o metodă directă apropiată cazului respectiv, formulele pe care le-am stabilit permit, fie să constatăm o imposibilitate, fie să calculăm efectiv rădăcinile.

Totuși nu știu cum să insistăm mai mult asupra beneficiului ce se va trage din străduința de a se aplica nu formulele ci metoda. În orice caz, numeric sau literar, se va sesiza orice ocazie de a simplifica calculele printr-o folosire judicioasă a particularităților.

EXAMPLE. I. $\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x^2 - 15x - 35 = 0\}$?

Se pare că nu e nici o particularitate. Se pot folosi formulele:

$$a = 1, b = -15, c = -35.$$

$$b^2 - 4ac = 3^2 \times 5^2 + 4 \times 7 \times 5 = 5(45 + 28) = 5 \times 73.$$

Gruparea în factori neducând la apariția de pătrate, scriem:

$$S = \left\{ x' = \frac{15 - \sqrt{365}}{2}; x'' = \frac{15 + \sqrt{365}}{2} \right\}.$$

II. $\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } 54x^2 + 7x = 0\}$?

Primul membru al ecuației se descompune prin darea lui x ca factor.

Ecuația se scrie: $\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x(54x + 7) = 0\}$?

$$\text{Soluțiile sînt: } x' = -\frac{7}{54} \text{ și } x'' = 0.$$

Se vor trata la fel toate ecuațiile de tipul:

$$\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } ax^2 + bx = 0\}?$$

În general, atunci cînd primul membru este ușor de descompus în factori, se va folosi descompunerea pentru a rezolva ecuația.

În acest caz, ar fi o stîngăcie să folosim metoda generală de rezolvare atunci cînd scopul este descompunerea în factori.

III. $\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x^2 - (a + 2b)x + 2ab = 0\}$?

Putem aplica identitatea (x) (Observația 1, Nr. 9.1.3):

$$S = \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } (x - a)(x - 2b) = 0\},$$

$$S = \{x' = a; x'' = 2b\}.$$

Obținem rădăcini raționale în raport cu parametrii. Or formulele generale sînt raționale. Să căutăm explicația. Discriminantul este:

$$\begin{aligned} (a + 2b)^2 - 8ab &= a^2 + 4ab + 4b^2 - 8ab = a^2 - 4ab + 4b^2 = \\ &= (a - 2b)^2. \end{aligned}$$

Discriminantul este un pătrat perfect: este pătratul expresiei $a - 2b$ sau $2b - a$. Rădăcinile sînt:

$$\frac{a + 2b + a - 2b}{2} = a, \quad \frac{a + 2b + 2b - a}{2} = 2b.$$

IV. $\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } -3x^2 + 11x + 8,25 = 0\}$

Pentru a evita o greșeală de semn în aplicarea formulelor, este preferabil să se schimbe toate semnele ecuației, care devine:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } 3x^2 - 11x - 8,25 = 0\}$$

Discriminantul este: $121 + 4 \times 3 \times 8,25 = 220 = 4 \times 55$. Rădăcinile sînt deci:

$$x' = \frac{11 - 2\sqrt{55}}{2} \text{ și } x'' = \frac{11 + 2\sqrt{55}}{2}.$$

V. $\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } mx^2 + 5x - 8m = 0\}$ $m \neq 0$.

Această ecuație conține parametrul m . Formăm discriminantul:

$$\Delta = 25 - 4m(-8m) = 25 + 32m^2.$$

Δ este pozitiv pentru orice valoare a lui m . Ecuația are rădăcini date de formulele:

$$x' = \frac{-5 - \sqrt{25 + 32m^2}}{2m} \text{ și } x'' = \frac{-5 + \sqrt{25 + 32m^2}}{2m}.$$

Pentru $m = 0$, ecuația este o ecuație de gradul întâi care admite singura rădăcină:

$$x = 0.$$

Am fi putut anunța, înainte chiar de a fi calculat discriminantul, că aceasta va fi pozitivă. Formula $\Delta = b^2 - 4ac$ arată într-adevăr că:

$$ac < 0 \implies b^2 - 4ac > 0.$$

Rezultatul acestui ultim exemplu este general și permite să se enunțe:

TEOREMĂ. Cînd a și c sînt de semne contrare, ecuația:

$$(x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax^2 + bx + c = 0)?$$

admite două rădăcini.

Condiția $ac < 0$ este o condiție *suficientă* pentru ca ecuația să admită rădăcini. Ea nu este o condiție necesară.

VI. $\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } 3x^2 - 5 = 0\}$

Se scrie: $S = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } 9x^2 - 15 = 0\}$

$$= \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } (3x + \sqrt{15})(3x - \sqrt{15}) = 0\};$$

de unde:

$$S = \left\{ x' = -\frac{\sqrt{15}}{3}, x'' = +\frac{\sqrt{15}}{3} \right\}.$$

VII. $\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } 3x^2 - 34x + 6 = 0\}$

Folosim formulele: $a = 3$, $b = -34$, $c = 6$;

$$\Delta = 34^2 - 4 \times 3 \times 6 = 4 \times 17^2 - 4 \times 3 \times 6,$$

$$\Delta = 4 \times (17^2 - 18) = 4 \times 274; \sqrt{\Delta} = \sqrt{274};$$

$$x' = \frac{34 - 2\sqrt{274}}{2 \times 3} = \frac{17 - \sqrt{274}}{3}; x'' = \frac{17 + \sqrt{274}}{3}$$

Am simplificat prin 2. Observația se pretează la generalizare.

Folosirea discriminantului redus. Când coeficientul b conține în sine factorul 2, se pot simplifica formulele.

Fie $b = 2b'$.

Avem atunci: $b^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$;
de unde:

$$x' = \frac{-2b' - 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} \text{ și } x'' = \frac{-2b' + 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a}; \quad (\text{I})$$

sau, simplificând prin 2:

$$x' = \frac{-b' - \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \text{ și } x'' = \frac{-b' + \sqrt{b'^2 - ac}}{a}. \quad (\text{I bis})$$

$b'^2 - ac$ se numește discriminantul redus sau sfertul discriminantului.

Se pune: $\Delta' = b'^2 - ac$.

EXEMPLU. $\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } 5x^2 - 6x + 1 = 0\}$

$$\Delta' = 9 - 5 = 4; \text{ de unde:}$$

$$x' = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5} \text{ și } x'' = \frac{3 + 2}{5} = 1.$$

9.2.4. Compararea rădăcinilor

Am dat formulele:

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad ; \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Pentru $\Delta \neq 0$, cele două rădăcini sînt inegale. Care este cea mai mare?

Numărătorii se clasează întotdeauna în ordinea:

$$-b - \sqrt{\Delta} < -b + \sqrt{\Delta}.$$

Se poate deci conchide, după semnul lui a :

1°. Pentru $a < 0$: $x' > x''$.

2°. Pentru $a > 0$: $x' < x''$.

9.2.5. Ecuația de gradul al doilea în $\mathbb{Q}$

Tot ceea ce am văzut pînă acum este valabil pentru o ecuație de tipul:

$$\{x; x \in \mathbb{Q} \text{ și } ax^2 + bx + c = 0\}?$$

unde a, b, c sînt numere iraționale.

Dar rădăcinile x' și x'' ale polinomului $ax^2 + bx + c$ sînt numere reale. Problema pusă admite mulțimea de soluții S care satisfac:

$$\begin{aligned} S &= \{x; x \in \mathbb{Q} \text{ și } [x = x' \text{ sau } x = x'']\} \\ &= \mathbb{Q} \cap \{x', x''\}. \end{aligned}$$

Pentru a rezolva complet problema, trebuie să se determine dacă x' sau x'' sînt numere raționale.

■ *Condiția ca x' sau x'' să fie numere raționale.*

Dacă x' este rațional, există două numere întregi p și q astfel că:

$$x' = \frac{p}{q} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Am avea deci:

$$\frac{2ap}{q} = -b - \sqrt{\Delta}$$

și prin urmare:

$$\sqrt{\Delta} = -b - \frac{2ap}{q}$$

ar fi un număr rațional.

$$x' \in \mathbb{Q} \iff \sqrt{\Delta} \in \mathbb{Q}.$$

Reciproc, dacă $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{Q}$, x' este un număr rațional.
Deci:

$$x' \in \mathbb{Q} \iff \sqrt{\Delta} \in \mathbb{Q}.$$

S-ar arăta la fel că:

$$x' \in \mathbb{Q} \iff \sqrt{\Delta} \in \mathbb{Q}.$$

În concluzie:

TEOREMĂ. Ecuația de gradul al doilea în $\mathbb{Q}$:

$$\{x; x \in \mathbb{Q} \text{ și } ax^2 + bx + c = 0\}?$$

unde $a \neq 0$ și a, b, c sînt numere raționale:

1°) nu admite rădăcini dacă:

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 - 4ac < 0 \end{array} \right.$$

sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{b^2 - 4ac} \notin \mathbb{Q} \iff \end{array} \right.$$

$$\iff b^2 - 4ac \notin \{r^2; r \in \mathbb{Q}\};$$

2°) admite două rădăcini dacă:

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 - 4ac > 0 \end{array} \right.$$

și:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{b^2 - 4ac} \in \mathbb{Q} \iff \end{array} \right.$$

$$\iff b^2 - 4ac \in \{r^2; r \in \mathbb{Q}\};$$

rădăcinile sînt atunci (dacă se pune $\sqrt{b^2 - 4ac} = \rho$):

$$x' = \frac{-b - \rho}{2a}, \quad x'' = \frac{-b + \rho}{2a}$$

3°) admite, cînd discriminantul său este nul, două rădăcini egale:

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}$$

(care este un număr rațional pentru că a, b, c sînt numere raționale).

EXEMPLE

$$\text{I. } \{x; x \in \mathbb{Q} \text{ și } 5x^2 - 6x + 1 = 0\} = \left\{\frac{1}{5}, 1\right\}.$$

$$\text{II. } \{x; x \in \mathbb{Q} \text{ și } 3x^2 - 5 = 0\} = \mathbb{Q} \cap \left\{-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right\} = \emptyset.$$

$$\text{III. } \{x; x \in \mathbb{Q} \text{ și } x^2 + 2x + 1 = 0\} = \mathbb{Q} \cap \{-1\} = \{-1\}$$

(rădăcină dublă).

EXERCIȚII

Să se studieze ecuațiile definite în $\mathbb{R}$ de următoarele relații:

$$9.21. (5x - 3)(5x + 1) = 0.$$

$$9.22. (x - 3)^2 - 16 = 0.$$

$$9.23. (x + 3)^2 - 16 = 0.$$

$$9.24. x^2 + 8x + 6 = 0.$$

$$9.25. 8x^2 - 6x + 1 = 0.$$

$$9.26. x^2 - 8x + 6 = 0.$$

$$9.27. x^2 + 10x + 16 = 0.$$

$$9.28. x^2 - 10x + 16 = 0.$$

$$9.29. x^2 - 4x - 32 = 0.$$

$$9.30. x^2 - 7x + 6 = 0.$$

$$9.31. x^2 - x - 6 = 0.$$

$$9.32. 8x^2 + 6x + 1 = 0.$$

$$9.33. 6x^2 - 7x + 1 = 0.$$

$$9.34. x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{8})x + 4 = 0.$$

$$9.35. x^2 + 1,22x - 0,01 = 0.$$

$$9.36. 100x^2 - 20x + 3 = 0.$$

$$9.37. 169x^2 + 13x - 1 = 0.$$

$$9.38. x^2 - 5Rx + 6R^2 = 0.$$

$$9.39. x^2 - mx + m - 1 = 0.$$

$$9.40. x^2 - 4ax + 3a^2 = 0.$$

$$9.41. x^2 - 2(a - b)x - 4ab = 0.$$

$$9.42. (x - \sqrt{2})(2x - \sqrt{3}) = 0.$$

$$9.43. 4x^2 - 36 = 0.$$

$$9.44. 16x^2 - 25 = 0.$$

$$9.45. 7x^2 + 5x + 1 = 0.$$

$$9.46. x^2 + (1 + \pi)x + \pi = 0.$$

$$9.47. x^2 - 0,36x - 0,18 = 0.$$

$$9.48. 25x^2 - 10x + 0,5 = 0.$$

$$9.49. 121x^2 - 11x + 0,1 = 0.$$

$$9.50. \frac{5x-1}{x+2} - \frac{x-3}{x-2} = \frac{8}{3}.$$

$$9.51. x^2 - (a + 2)x + 2a = 0.$$

$$9.52. 2ax^2 - (a + 2)x + 1 = 0.$$

$$9.53. ax^2 - (a^2 + 3)x + 3a = 0.$$

$$9.54. (a^2 - b^2)x^2 - 2ax + 1 = 0.$$

$$9.55. \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{7}{12}.$$

$$9.56. \frac{4x-1}{x-1} - \frac{4x+1}{x+1} = \frac{9}{4}.$$

$$9.57. (3x-1)(2x+1) = 9x^2 - 1.$$

$$9.58. x^2 + 2(a-b)x - 4ab = 0.$$

$$9.59. x^2 + 4ax + 3a^2 = 0$$

$$9.60. (x - 3)(x - 2) = (2x - 1)(x - 3)$$

$$9.61. \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - 2a} + \frac{1}{x} = 0.$$

$$9.62. (\sqrt{3} + 1)x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 1 = 0.$$

$$9.63. (m - 3)x^2 - 2mx + 12 = 0.$$

$$9.64. (x - a)(ax - 1) = x^2 - a^2.$$

$$9.65. x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(5x - 1).$$

$$9.66. x^3 - 8 = (x - 2)^2(2x + 1).$$

$$9.67. x(x - 1)(x - 2) - x^3 - 1 = 0.$$

$$9.68. \frac{4x - 3}{2x - 5} - \frac{5x + 1}{x + 3} = \frac{19}{3}.$$

$$9.69. x^3 - (m + 2)x + m + 1 = 0.$$

$$9.70. 2abx^2 - (2a + b)x + 1 = 0.$$

$$9.71. x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0.$$

$$9.72. abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0.$$

$$9.73. \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{24}. \quad 9.74. \frac{x^2 - x - 1}{x + 2} = 2x + 3.$$

$$9.75. (5x - 1)(x + 2) = (2x - 3)(5x - 1).$$

$$9.76. \frac{x}{x + a} + \frac{x + a}{x} = \frac{b^2 + 1}{b}.$$

$$9.77. x^3 - 16 = (2x + 3)(x + 4).$$

$$9.78. (x^2 + 1)(x - 4)(x + 4) = 0.$$

$$9.79. 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)(x - 2).$$

În cazul în care o ecuație are soluții, să se dea valoarea numerică exactă a fiecărei soluții sau o valoare apropiată cu aproximație de 10^{-3} prin lipsă (a se vedea calculul numeric, capitolul 14).

PROBLEME

9.80. În ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax^2 + bx + c = 0\}, \quad (1)$$

se pune:

$$x = y + h.$$

Să se formeze ecuația în y obținută înlocuind pe x prin această valoare, apoi să se aleagă h astfel ca coeficientul lui y să fie nul.

Să se rezolve atunci ecuația în y și să se deducă din ea rădăcinile ecuației (1).

9.81. Să se demonstreze că ecuațiile definite în $\mathbb{R}$ prin relațiile (1) și (2):

$$x^2 - (a^2 + b^2 + c^2)x + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 0 \quad (1)$$

$$3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca = 0. \quad (2)$$

au fiecare două rădăcini, în general distincte.

9.3. RELAȚII ÎNTRE COEFICIENȚI ȘI RĂDĂCINI

9.3.1. Suma și produsul rădăcinilor

Formulele:

$$b^2 - 4ac > 0, \quad x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (I)$$

sunt iraționale în raport cu coeficienții a, b, c . Expresiile care dau pe x' și pe x'' sunt expresii conjugate: se trece de la una la alta schimbându-se semnul dinaintea radicalului. Există deci două feluri simple de a combina pe x' și x'' pentru a obține un rezultat rațional: a face suma și de a face produsul.

1°. Suma rădăcinilor:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac > 0; \quad x' + x'' &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

2°. Produsul rădăcinilor:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac > 0; \quad x'x'' &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

În cazul particular cînd $b^2 - 4ac = 0$, am pus:

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}. \quad (II)$$

Se verifică cu ușurință că rezultatele precedente rămân valabile:

$$x' + x'' = -\frac{b}{2a} + \frac{-b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x'x'' = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Am demonstrat deci implicația:

$b^2 - 4ac \geq 0$ și $\{x', x''\} = \{x; x \in \mathbb{R}\}$ și $ax^2 + bx + c = 0$	$\Rightarrow$	$b^2 - 4ac \geq 0$ $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ $x'x'' = \frac{c}{a}$	(III)
--	---------------	--	-------

9.3.2. Studiul propoziției reciproce

Presupunem că două numere, pe care le vom numi α și β pentru claritatea raționamentului, verifică condiția:

$$\left[b^2 - 4ac \geq 0 \text{ și } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ și } \alpha\beta = \frac{c}{a} \right].$$

Putem noi să tragem concluzia din aceasta că $\{\alpha, \beta\} = \{x', x''\}$, unde x' și x'' sînt soluțiile ecuației de gradul al doilea definite în $\mathbb{R}$ prin:

$$ax^2 + bx + c = 0?$$

Este prea cunoscut că:

$$\{\alpha, \beta\} = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } (x - \alpha)(x - \beta) = 0\},$$

și, mai general, oricare ar fi numărul real nenul K :

$$\{\alpha, \beta\} = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } K(x - \alpha)(x - \beta) = 0\},$$

adică:

$$\{\alpha, \beta\} = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } K[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta] = 0\}$$

Prin urmare, ținând cont de ipoteză $\alpha + \beta = x - \frac{b}{a}$ și $\alpha\beta = \frac{c}{a}$:

$$\{\alpha, \beta\} = \left\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } K\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = 0\right\},$$

sau, pentru că a este nenul:

$$\begin{aligned}\{\alpha, \beta\} &= \left\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } \frac{K}{a}\left[a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)\right] = 0\right\}, \\ &= \left\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } \frac{K}{a}(ax^2 + bx + c) = 0\right\}, \\ &= \left\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } \frac{K}{a} = 0\right\} \cup \left\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } \right. \\ &\quad \left. (ax^2 + bx + c) = 0\right\};\end{aligned}$$

dar K este nenul, deci:

$$\begin{aligned}\{\alpha, \beta\} &= \emptyset \cup \{x', x''\}, \\ \{\alpha, \beta\} &= \{x', x''\}.\end{aligned}$$

Obținem următoarea echivalență:

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 - 4ac \geq 0 \\ \text{și} \\ \{x', x''\} = \{x; x \in \mathbf{R} \\ \text{și} \\ ax^2 + bx + c = 0\} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} b^2 - 4ac \geq 0 \\ x' + x'' = -\frac{b}{a} \\ x'x'' = \frac{c}{a} \end{array} \right\}$$

Acest studiu mai arată că, oricare ar fi numărul real nenul K , ecuațiile, definite în $\mathbf{R}$ prin $ax^2 + bx + c = 0$, pe de o parte și $K(ax^2 + bx + c) = 0$, pe de altă parte, au aceleași rădăcini. Acest rezultat era, de altfel, o consecință imediată a teoremei 4, Nr. 6.2.7:

$$\begin{aligned}&\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } ax^2 + bx + c = 0\} \\ &= \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } K(ax^2 + bx + c) = 0\}.\end{aligned}$$

Vom studia reciproca acestei proprietăți.

9.3.3. Ecuatii care au aceleași rădăcini

Presupunem că:

$$\begin{aligned} & \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax^2 + bx + c = 0\} \\ &= \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } a'x^2 + b'x + c' = 0\}. \end{aligned}$$

Fie $\{\alpha, \beta\}$ această mulțime a rădăcinilor. Vom avea succesiv:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ și } \alpha + \beta = -\frac{b'}{a'}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \text{ și } \alpha\beta = \frac{c'}{a'}$$

Deci:

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \text{ și } \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'},$$

adică:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \text{ și } \frac{a'}{a} = \frac{c'}{c},$$

și prin urmare:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

OBSERVAȚIE. Dacă unul din numitori este nul, se anulează numărătorul corespunzător.

Fie k valoarea comună a acestor rapoarte; vom avea:

$$\begin{cases} a' = ka \\ b' = kb \\ c' = kc. \end{cases}$$

Am demonstrat deci implicația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax^2 + bx + c = 0\} = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } a'x^2 + b'x + c' = 0\}$$

$$\longrightarrow \exists k; k \in \mathbb{R} \text{ astfel că } \begin{cases} a' = ka \\ b' = kb \\ c' = kc. \end{cases}$$

De aici rezultă următoarea teoremă:

TEOREMĂ. Pentru ca două ecuații de gradul al doilea să aibă aceleași rădăcini, trebuie ca una să aibă rădăcini și ca coeficienții lor să fie proporționali.

Astfel, ecuațiile: $\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } K(x - \alpha)(x - \beta) = 0\}$ constituie mulțimea tuturor ecuațiilor de gradul al doilea care admit pe α și β ca rădăcini.

EXEMPLE

I. Să formăm toate ecuațiile care au ca rădăcini pe 2 și 5.

Avem:

$$2 + 5 = 7; 2 \times 5 = 10.$$

Răspuns:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } Kx^2 - 7Kx + 10K = 0\}?$$

II. Să formăm toate ecuațiile ale căror rădăcini sînt $2 - \sqrt{2}$ și $2 + \sqrt{2}$.

Avem:

$$2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4; (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 2.$$

Răspuns:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } Kx^2 - 4Kx + 2K = 0\}?$$

9.3.4. Există două numere care au o sumă dată și un produs dat?

Forma relațiilor (III) (Nr. 9.3.1) sugerează următoarea problemă care se prezintă frecvent.

Fie S și P două numere reale. Să se caute numerele reale α și β astfel ca $\alpha + \beta = S$ și $\alpha \cdot \beta = P$.

După studiul precedent, aceste numere, dacă există, sînt rădăcinile ecuației:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - Sx + P = 0\}?$$

Reciproc, dacă această ecuație admite rădăcini, acestea verifică $\alpha + \beta = S$ și $\alpha \cdot \beta = P$. Condiția de existență este deci: $S^2 - 4P \geq 0$.

Se obține:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \\ \beta = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \end{cases} \text{ sau: } \begin{cases} \alpha = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \\ \beta = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \end{cases}$$

și, pentru $S^2 - 4P = 0$, avem: $\alpha = \beta = \frac{S}{2}$.

OBSERVAȚII

1. Condiția $S^2 - 4P \geq 0$ este întotdeauna verificată dacă:

$$P \leq 0.$$

2. Această condiție se poate scrie:

$$S^2 \geq 4P \text{ sau } \left(\frac{S}{2}\right)^2 \geq P.$$

Această inegalitate arată că *produsul a două numere este întotdeauna mai mic sau cel mult egal cu pătratul semisumei lor.*

Se poate enunța:

TEOREMĂ. Produsul a două numere reale, a căror sumă este constantă, ajunge la cea mai mare valoare a sa fiind cele două numere sînt egale.

EXEMPLU. Dintre toate dreptunghiurile care au același perimetru, pătratul este acela a cărui arie este cea mai mare.

Limitîndu-se la două numere pozitive, se vede că media geometrică a două numere pozitive este mai mică sau cel mult egală cu media lor aritmetică:

$$\alpha > 0 \text{ și } \beta > 0 \implies \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Se poate enunța de asemenea:

TEOREMĂ. Suma a două numere pozitive al căror produs este constant atinge cea mai mică valoare a sa, fiind cele două numere sînt egale.

EXEMPLU. Dintre toate dreptunghiurile care au aceeași arie, pătratul este acela care are cel mai mic perimetru.

OBSERVAȚIE. Problema pe care am studiat-o se poate interpreta ca o ecuație în mulțimea $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Fie într-adevăr aplicația φ a lui $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, definită prin:

$$(a, b) \mapsto \varphi(a, b) = (a + b; ab)$$

$$(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \quad \varphi(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}.$$

Cercetarea pe care am efectuat-o este aceea a elementelor mulțimii:

$$\{(x, y); (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ și } \varphi(x, y) = (S, P)\}.$$

Am rezolvat deci o ecuație în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, soluțiile acestei ecuații fiind elementele mulțimii:

$$S = \{(x', x''), (x'', x')\},$$

unde x', x'' sînt rădăcinile ecuației definite în $\mathbf{R}$ prin:

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Dacă perechea (x', x'') convine, convine atunci și perechea (x'', x') , datorită comutativității operațiilor de înmulțire și adunare, care antrenează:

$$\varphi(a, b) = \varphi(b, a).$$

9.3.5. Să se determine a două rădăcină a unei ecuații de gradul al doilea cînd una este cunoscută

Formulele care dau suma și produsul rădăcinilor unei ecuații de gradul al doilea permit să se găsească a două rădăcină cînd una este cunoscută. Ne servim de formula care ne pare cea mai apropiată (cel mai frecvent produsul).

Astfel, cînd suma coeficienților a, b, c este nulă, ecuația de gradul al doilea admite pe 1 ca rădăcină evidentă; cealaltă rădăcină este atunci egală cu $-\frac{c}{a}$.

Dacă $a - b + c = 0$, -1 este o rădăcină evidentă; cealaltă rădăcină este egală cu $-\frac{c}{a}$.

EXEMPLU

$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } mx^2 - (2m+1)x + m+1 = 0\}?$ $m \neq 0$.

Se vede că:

$$\forall m \quad m - (2m+1) + m+1 = 0;$$

de unde:

$$x' = 1.$$

Și:

$$x'x'' = \frac{m+1}{m}$$

dă:

$$x'' = \frac{m+1}{m}.$$

Ț 9.3.6. Ecuații ale căror rădăcini sînt legate printr-o relație impusă

Fie ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 + px + q = 0\}?$$

ale cărei rădăcini, pentru $p^2 - 4q \geq 0$, sînt α și β .

Dacă impunem rădăcinilor să verifice o relație dată, vom obține o relație care leagă pe p și q . Acest calcul, dacă am folosi formulele de rezolvare, ar comporta radicali. Se înlătură asemenea operații folosindu-se relațiile dintre coeficienți și rădăcini.

EXEMPLE

I. Să se determine valorile parametrului real m (dacă acesta există) astfel ca ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - (m+3)x + 2(m+2) = 0\} \quad (1)$$

să aibă o rădăcină dublă celeilalte.

Fie x' și x'' rădăcinile ecuației (1). Presupunem că vrem să găsim valorile lui m pentru care $x' = 2x''$. (Cazul $x'' = 2x'$ se deduce din acesta prin schimbare de notație.)

Faptul că x' și x'' sînt rădăcini ale ecuației (1) echivalează cu conjuncția condițiilor:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x' + x'' = m+3 \text{ și } x'x'' = 2(m+2), \end{cases}$$

cu $\Delta = (m+3)^2 - 8(m+2)$.

Problema pusă echivalează deci cu problema care cere să se găsească mulțimea numerelor m astfel ca să existe x' și x'' cu:

$$(\Sigma) \begin{cases} (m+3)^2 - 8(m+2) \geq 0, \\ x' + x'' = m+3, \\ x'x'' = 2(m+2), \\ x' = 2x''. \end{cases}$$

Condiția $\Delta \geq 0$ este de prisos dacă, calculând pe x' și x'' , se demonstrează astfel că ecuația studiată admite două rădăcini. Vom avea deci să căutăm trei numere m, x', x'' , adică un triplet (m, x', x'') al lui $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (căci m, x', x'' joacă roluri diferite și nu simetrice). Aceasta va reveni în a rezolva o ecuație în $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (conform observației Nr. 9.3.4).

Fie deci să căutăm mulțimea:

$$S = \left\{ (m, x', x'') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ și } \begin{cases} x' + x'' = m+3 & (2) \\ x'x'' = 2(m+2) & (3) \\ x' = 2x'' & (4) \end{cases} \right\}.$$

Folosind mai întâi relațiile (2) și (3), se deduce:

$$S = \left\{ (m, x', x'') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ și } \begin{cases} x'' = \frac{m+3}{3} & (5) \\ x' = 2x'' & (4) \\ x'x'' = 2(m+2) & (6) \end{cases} \right\},$$

Valorile lui m care vor conveni vor fi deci determinate de condiția:

$$x'x'' = \frac{2}{9}(m+3)^2 = 2(m+2).$$

Dar, reciproc, condiția $x'x'' = 2(m+2)$ nu este suficientă ca să se asigure existența rădăcinilor x' și x'' . Trebuie să i se adauge condiția:

$$\Delta = (m+3)^2 - 8(m+2) \geq 0.$$

Căutarea lui m .

Fie M mulțimea valorilor lui m care convin:

$$M = \{m; m \in \mathbf{R} \text{ și } m^2 - 3m - 9 = 0 \text{ și } m^2 - 2m - 7 \geq 0\}.$$

Se deduce:

$$M = \left\{ \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} = m_1, \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} = m_2 \right\}$$

$$\cap \{m; m \in \mathbf{R} \text{ și } m^2 - 2m - 7 \geq 0\}.$$

Este de ajuns să se efectueze verificările pentru a se arăta că:

$$M = \{m_1, m_2\}.$$

Problema pusă admite deci două soluții; și valorile care corespund lui x' și x'' sunt date de relațiile (5) și (6):

$$m_1 = \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} \quad m_2 = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$$

$$x_1' = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad x_2' = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1'' = 3 - \sqrt{5} \quad x_2'' = 3 + \sqrt{5}.$$

II. Să se determine parametrul m astfel ca rădăcinile x' și x'' ale ecuației:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - mx + m + 1 = 0\} \quad (E)$$

să fie legate prin relația:

$$x'x'' + 2(x' + x'') - 19 = 0.$$

Printr-un raționament analog cu acela pe care l-am urmat și simplificându-l, se obține, dacă rădăcinile x' și x'' există, adică dacă $m^2 - 4(m + 1) \geq 0$:

$$x' + x'' = m,$$

$$x'x'' = m + 1.$$

Mulțimea M a soluțiilor problemei puse este atunci definită prin:

$$M = \{m; m \in \mathbb{R} \text{ și } m^2 - 4(m + 1) \geq 0 \text{ și } (m+1) + 2(m) - 19 = 0\}.$$

$$= \{m; m \in \mathbb{R} \text{ și } m^2 - 4(m + 1) \geq 0\} \cap \{6\} = \{6\};$$

intr-adevăr pentru $m = 6$ expresia pozitivă devine $m^2 - 4(m + 1)$.

Singura soluție a problemei puse este deci $m = 6$, pentru care ecuația studiată devine:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - 6x + 7 = 0\}$$

ale cărei soluții sunt:

$$\begin{cases} x' = 3 - \sqrt{2}. \\ x'' = 3 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

III. Să se determine parametrul m astfel ca rădăcinile x' și x'' ale ecuației (E), din exemplul II, să fie legate prin relația:

$$x'x''(x' + x'') = 0.$$

Numerele m care vor conveni vor fi elementele mulțimii:

$$M' = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } m^2 - 4m - 4 \geq 0 \text{ și } m(m + 1) = 0\},$$

$$M' = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } m^2 - 4m - 4 \geq 0\} \cap \{0, -1\} = \{-1\}.$$

Nu există decât o singură soluție a problemei puse: $m = -1$, pentru care:

$$x' = 0 \text{ și } x'' = -1.$$

Valoarea $m = 0$ a parametrului nu convine, deși este determinată de condiția $m(m + 1) = 0$, căci această condiție nu echi-valează cu condiția $x'x''(x' + x'') = 0$, decît dacă x' și x'' există; adică dacă $m^2 - 4m - 4 \geq 0$. Or, pentru $m = 0$, acest discriminant este egal cu -4 , deci negativ.

Se vede din acest exemplu necesitatea de a nu uita condiția de existență a lui x' și x'' (sau pe aceea de a verifica după terminarea lucrării care sînt valorile găsite pentru m care permit să se calculeze x' și x'').

Concluzie la aceste exemple. Cititorul va reține că, pentru a determina valorile unui parametru (sau a unor parametri), în așa fel ca rădăcinile unei ecuații de gradul al doilea (E), să fie legate printr-o relație (L), este, în general, foarte avantajos de a ne servi de suma și produsul rădăcinilor ecuației (E), cu condiția de a nu omite să ne asigurăm, într-un fel sau altul, că valorile găsite pentru acest (sau acești) parametru (s) asigură efectiv existența lui x' și x'' .

9.3.7. Funcții simetrice de rădăcini

Expresiile:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \quad \text{și} \quad x'x'' = \frac{c}{a}$$

nu se schimbă dacă se permută x' și x'' : acestea sînt expresii simetrice în x' și x'' .

Se demonstrează și noi verificăm pe exemple simple, că orice expresie simetrică în x' și x'' se exprimă cu ajutorul a două expresii fundamentale: suma și produsul. Se poate spune atunci, după ce s-a verificat că o ecuație admite ca rădăcini pe x' și x'' , dar fără a rezolva ecuația, să se calculeze expresii simetrice în x' și x'' .

EXEMPLE

1. Dacă $b^2 - 4ac \geq 0$, să se calculeze: $x'^2 + x''^2$.

Avem:

$$x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

II. Pentru $b^2 - 4ac \geq 0$, să se formeze ecuația care are ca rădăcini:

$$\frac{1}{x'} \text{ și } \frac{1}{x''}.$$

Avem:

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{x' + x''}{x'x''} = -\frac{b}{a} \times \frac{a}{c} = -\frac{b}{c};$$

$$\frac{1}{x'} \times \frac{1}{x''} = \frac{1}{x'x''} = \frac{a}{c} \text{ cu } c \neq 0.$$

Ecuația cerută este:

$$\left\{ X; X \in \mathbb{R} \text{ și } X^2 + \frac{b}{c}X + \frac{a}{c} = 0 \right\}?$$

sau:

$$\{X; X \in \mathbb{R} \text{ și } cX^2 + bX + a = 0\}?$$

Discriminantul acestei ecuații este $b^2 - 4ac$. Se verifică astfel că această ecuație are rădăcini, dacă ecuația dată are rădăcini. O numim ecuația-cu-rădăcinile-inverse ale primei-ecuații.

EXERCIȚII

Să se găsească două numere cunoscând suma lor s și produsul p :

9.92. $s = 14$, $p = 38$.

9.94. $s = -12$, $p = 11$.

9.93. $s = 27$, $p = 50$.

9.95. $s = -43$, $p = 442$.

9.96. $s = 72$, $p = 1296$.

Ecuațiile definite în $\mathbb{R}$ prin relațiile următoare posedă o rădăcină evidentă.

Să se găsească această rădăcină și să se deducă cealaltă rădăcină:

9.97. $x^3 - 7x + 6 = 0$.

9.92. $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$.

9.98. $5x^3 + 9x + 4 = 0$.

9.93. $x(x - a) = b(b - a)$.

9.99. $6x^3 - 7x + 1 = 0$.

9.94. $ax^2 + bx + c = a - b + c$.

9.90. $7x^3 + 8x + 1 = 0$.

9.95. $ax^3 + bx + c = a + b + c$.

9.91. $x(x + b) = a(a + b)$.

9.96. $\frac{x}{a} - \frac{a}{x} = \frac{b}{a} - \frac{a}{b}$.

Să se găsească perechile (x, y) de numere reale care satisfac simultan următoarele relații:

9.97. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$

9.98. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 98, \\ xy = -15. \end{cases}$

Să se determine m astfel ca ecuațiile următoare să admită aceleași rădăcini:

$$9.99. \begin{cases} x^2 - (2m - 1)x + 2m - 30 = 0. \\ x^2 - (m - 1)x + m + p = 0. \end{cases}$$

$$9.100. \begin{cases} mx^2 - 2x + m - p = 0 \\ (m + 1)x^2 - mx + p = 0. \end{cases}$$

$$9.101. \begin{cases} x^2 - (m + 1)x + m + p = 0 \\ 2x^2 - (m - 1)x + 3p = 0. \end{cases}$$

Să se formeze toate ecuațiile de gradul al doilea care au ca rădăcini:

$$9.102. \frac{1}{2} \text{ și } \frac{1}{3}.$$

$$9.103. \frac{3 - \sqrt{5}}{4} \text{ și } \frac{3 + \sqrt{5}}{4}.$$

$$9.104. \sqrt{3} - \sqrt{2} \text{ și } \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

$$9.105. m - \sqrt{m^2 + 1} \text{ și } m + \sqrt{m^2 + 1}.$$

$$9.106. 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ și } 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Să se determine m pentru ca ecuațiile următoare să admită două rădăcini legate prin relația (L):

$$9.107. \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } (m - 3)x^2 - 2mx + m + 2 = 0\}?$$

$$\text{și: (L) } x'^2 + x''^2 = 52.$$

$$9.108. \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } (m - 4)x^2 - 2mx + m + 3 = 0\}?$$

$$\text{și: (L) } 7x' - x'' = 6.$$

$$9.109. \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - 2mx + m^2 - m + 3 = 0\}?$$

$$\text{și: (L) } \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{2}{5}, \text{ apoi } \frac{6}{35}.$$

9.110. *Exercițiu rezolvat.*

1°. Să se arate că p și q sint rădăcini ale ecuației:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Soluție prescurtată.

$$\begin{cases} p^2 + p^2 + q = 0. \\ q^2 + pq + q = 0. \end{cases}$$

$$a) q = 0; p = 0.$$

$$b) 2p^2 + q = 0; p + q = -1.$$

De unde:

$$2p^2 - p - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 1 \Rightarrow q = -2. \\ p = -\frac{1}{2} \Rightarrow q = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

2°. Să se exprime că p și q sînt rădăcinile lui:
 $x^2 + px + q = 0$.

Soluție prescurtată.

$$\begin{cases} p + q = -p. \\ pq = q. \end{cases}$$

a) $q = 0$; $p = 0$.

b) $p = 1$; $q = -2$.

Nu se regăsește soluția $p = \frac{1}{2}$ și $q = -\frac{1}{2}$, unde ecuația este:

$$x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt: $-\frac{1}{2}$ și $+1$.

9.111. Fie ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - 2(m+2)x + 4m + 5 = 0\}?$$

1°. Să se determine m , pentru ca rădăcinile să fie legate prin relația (E):

$$x' - x'' = 2.$$

2°. Aceeași chestiune cu:

$$10x' - 3x'' = 1.$$

9.112. Fie ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } (m-25)x^2 + 20x - m + 149 = 0\}?$$

Să se determine m pentru ca rădăcinile să fie legate prin relația (E):

$$x'' = x'^2.$$

9.113. x' și x'' fiind rădăcinile ecuației:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - 7x - 4 = 0\},$$

să se calculeze:

$$x'^2 + x''^2; \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}; \frac{x' - 1}{x''} + \frac{x'' - 1}{x'}.$$

9.114. Fie ecuația:

$$\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x^2 + px + q = 0\}?$$

Se presupune $p^2 - 4q > 0$; ea admite rădăcinile x' și x'' .

Să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sînt:

$$X' = \frac{x'^2 + x''}{x''}, \quad X'' = \frac{x''^2 + x'}{x'}.$$

9.115. Să se determine m pentru ca ecuația:

$$\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } (m^2 - 1)x^2 + (m + 1)x + m^2 + m - 4 = 0\}?$$

să admită rădăcina $x = 1$.

Să se calculeze cealaltă rădăcină.

9.116. Același exercițiu cu:

$$\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } (m + 1)x^2 - 2mx + m - 5 = 0\}?$$

$$\text{și: } x = 2.$$

9.117. Același exercițiu cu:

$$\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } (m^2 - 1)x^2 - 2mx + m^2 + m + 4 = 0\}?$$

$$\text{și: } x = 2.$$

9.118. Aceeași chestiune cu:

$$\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } (2m + 1)x^2 + (m^2 - m - 3)x + m^2 + 3m + 20 = 0\}?$$

$$\text{și: } x = -2.$$

9.119. Exercițiu rezolvat. Se dă ecuația:

$$\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } (m + 1)x^2 - 2mx + m - 5 = 0\}?$$

1°. Să se studieze existența rădăcinilor.

2°. Să se demonstreze că rădăcinile, cînd există, sînt legate printr-o relație independentă de parametrul m .

Soluție prescurtată.

$$1°. \Delta' = m^2 - (m + 1)(m - 5) = 4m + 5.$$

$$\text{Existența} \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{4}.$$

$$2^\circ. m \geq -\frac{5}{4} \text{ și } m \neq -1.$$

$$S = x' + x'' = \frac{2m}{m+1}.$$

$$P = x'x'' = \frac{m-5}{m+1}.$$

Deci, pentru $m \geq -\frac{5}{4}$ și $m \neq -1$:

$$m(2-S) = S \text{ și } m(1-P) = P+5.$$

De unde, pentru $S \neq 2$ și $P \neq 1$:

$$m = \frac{S}{2-S} = \frac{P+5}{1-P}.$$

Prin urmare:

$$S(1-P) = (2-S)(P+5),$$

sau:

$$3S - P = 5.$$

Să se studieze existența rădăcinilor pentru ecuațiile definite de relațiile următoare și să se găsească o relație între rădăcini, independentă de parametru:

$$9.120. (m+2)x^2 - 2(m-3)x + m+5 = 0.$$

$$9.121. (m-3)x^2 - 2(m+2)x + m-5 = 0.$$

$$9.122. (m-3)x^2 - 2mx + m+2 = 0.$$

$$9.123. (m-4)x^2 - 2mx + m+3 = 0.$$

$$9.124. x^2 - 2mx + m^2 - m + 8 = 0.$$

Ț 9.4. APLICAȚIE LA REZOLVAREA ALTOR ECUAȚII

9.4.1. Ecuații iraționale

Observațiile făcute în legătură cu ecuațiile iraționale a căror rezolvare conduce la rezolvarea unei ecuații de gradul întâi (nr. 8.2.3 și 8.2.4) rămân valabile.

Fie, de exemplu, ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x + \sqrt{x-1} = 13\} \quad (1)$$

Domeniul de validitate $\mathfrak{D}$ este caracterizat prin $x \geq 1$.
Se poate scrie:

$$S = \{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } \sqrt{x-1} = 13-x\}. \quad (1')$$

$\sqrt{x-1}$ fiind un număr pozitiv sau nul, $13-x$ trebuie să fie la fel. Nu putem admite ca rădăcină un număr, decît dacă este mai mic sau egal cu 13. În virtutea implicației:

$$a = b \implies a^2 = b^2,$$

orice soluție a lui (1) verifică de asemenea ecuația:

$$\{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } (x-1) = (13-x)^2\} \quad (2)$$

Observăm că, pentru o soluție a lui (2), dacă există, $x-1$ este neapărat pozitiv sau nul. Condiția $x \geq 1$ este îndeplinită. Rămîne:

$$\begin{aligned} S = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } 13-x \geq 0 \\ \text{și } x^2 - 27x + 170 = 0\} \end{aligned} \quad (3)$$

(după nr. 8.2.4)

$$S = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } 13 \geq x\} \cap \{10, 17\} = \{10\}.$$

OBSERVAȚIE. Ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x - \sqrt{x-1} = 13\} \quad (1 \text{ bis})$$

poate fi numită conjugata ecuației (1). Se poate scrie:

$$S_1 = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } -\sqrt{x-1} = 13-x\}. \quad (1 \text{ bis})$$

Raționînd ca mai sus, se obține:

$$S_1 = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } (x-1) = (13-x)^2 \text{ și } 13-x \leq 0\}. \quad (2 \text{ bis})$$

Rezultă de aici că ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - 27x + 170 = 0\} \quad (E)$$

admite rădăcina 10, soluția lui (1) și rădăcina 17, soluția lui (1 bis).

Ridicînd la pătrat cei doi membri ai lui (1) [sau pe cei ai lui (1 bis)], se formează o ecuație care admite toate soluțiile lui (1) [sau ale lui (1 bis)], dacă ele există și pot fi și altele. (1) și (E) nu au aceleași soluții: (E) este mai largă decît (1). Se poate scrie că (1) este conținută în (E).

Avem $S_1 \cup S = S'$, unde S' este mulțimea soluțiilor lui (2).

9.4.2. Alt exemplu

Să se rezolve ecuația:

$$\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } \sqrt{x} + \sqrt{2x-14} = 11\} \quad (1)$$

Fie S mulțimea soluțiilor acestei ecuații.

Fie $\mathfrak{D}$ domeniul de validitate al acestei ecuații:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x \geq 0 \text{ și } x \geq 7 \\ &= \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x \geq 7\} = [7, +\infty[. \end{aligned}$$

Pe $\mathfrak{D}$, cele două numere, sint definite și pozitive. Vom avea deci:

$$S = \{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } x + 2x - 14 + 2\sqrt{x}\sqrt{2x-14} = 121\},$$

ridicând la pătrat membru cu membru, căci:

$$\begin{cases} a = b \\ a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \iff a^2 = b^2,$$

adică:

$$S = \{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } 2\sqrt{x(2x-14)} = 3(45-x)\}, \quad (2)$$

adică, în virtutea unui raționament deja învățat (nr. 8.2.4):

$$S = \{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } 2x(2x-14) = 9(45-x)^2 \text{ și } 45-x \geq 0\},$$

$$S = \{x; x \in \mathfrak{D} \text{ și } x \leq 45 \text{ și } x^2 - 754x + (135)^2 = 0\},$$

$$S = \{x; x \in [7, 45] \text{ și } x^2 - 754x + 135^2 = 0\}.$$

Or, ecuația:

$$\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x^2 - 754x + 135^2 = 0\} \quad (3)$$

admite ca rădăcini (prin folosirea formulelor cu discriminant redus):

$$x' = 377 - \sqrt{377^2 - 135^2}, \quad x'' = 377 + \sqrt{377^2 - 135^2};$$

$$x' = 377 - \sqrt{512 \times 242}, \quad x'' = 377 + \sqrt{512 \times 242};$$

$$x' = 377 - 352, \quad x'' = 377 + 352;$$

$$x' = 25, \quad x'' = 729;$$

$$x' \in [7, 45], \quad x'' \in [7, 45].$$

Vom avea deci:

$$S = [7, 45] \cap \{25, 729\} = \{25\}.$$

Ecuatia (1) admite deci singura soluție $x = 25$.

OBSERVAȚIE. Ca și în cazul precedent, ecuația (3) conține ecuația (1) și o altă ecuație (1 bis) care corespunde soluției 729. Căutăm ecuația (1 bis).

Aveam:

$$S = \{x; x \in \mathbb{Q} \text{ și } 2\sqrt{x(2x-14)} = 3(45-x)\}. \quad (2)$$

Ecuatia:

$$\{x; x \in \mathbb{Q} \text{ și } 2\sqrt{x(2x-14)} = 3(x-45)\} \quad (2 \text{ bis})$$

ar da, prin ridicare la pătrat, aceeași ecuație. (3)

Rămâne să se găsească din care ecuație analoagă cu (1) provine (2 bis).

Se poate ezita între:

$$\{x; x \in \mathbb{Q} \text{ și } \sqrt{x} - \sqrt{2x-14} = 11\} \quad (1 \text{ a})$$

și:

$$\{x; x \in \mathbb{Q} \text{ și } \sqrt{2x-14} - \sqrt{x} = 11\} \quad (1 \text{ b})$$

Pentru a lămurii, se va observa că, diferența fiind pozitivă, trebuie să se examineze dacă avem $x > 2x - 14$, adică dacă $14 > x$ [cazul (1 a)] sau dacă $2x - 14 > x$, adică $x > 14$ [cazul (1 b)].

Răspunsul nu poate fi găsit numai cu ajutorul lui $\mathbb{Q}$. Trebuie cunoscută valoarea 729. Acesta este cazul (1 b) care corespunde cazului (1 bis) căutat.

EXERCIȚII

Să se rezolve ecuațiile definite în $\mathbb{R}$ prin următoarele relații (se va da valoarea numerică exactă a fiecărei soluții sau o valoare apropiată prin lipsă cu aproximație de 10^{-2}):

9.125. $x + 2\sqrt{x} = 8.$	9.128. $\frac{2x-3}{x+2} = \frac{x-1}{x-4}.$
9.126. $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{3x}.$	9.129. $\frac{x+1}{2x+3} = \frac{2x-1}{3x+1}.$
9.127. $x + 2 = \sqrt{2x^2 + x - 6}.$	9.130. $\frac{x+1}{x} + \frac{x+1}{x-8} = 1.$

$$9.131. \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} - \frac{6}{x+6} = 0.$$

$$9.132. \frac{1}{3x^2-27} + \frac{3}{4} - \frac{1}{x-3} = 1.$$

$$9.133. x + \sqrt{x-1} = 21.$$

$$9.140. x-3 = \sqrt{2x^2+x+1}.$$

$$9.134. \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2.$$

$$9.141. x + \sqrt{x+2} = 1.$$

$$9.135. \sqrt{a^2-x} + \sqrt{a^2+x} = 2a.$$

$$9.142. 4x - \sqrt{x-3} = 26.$$

$$9.136. \frac{x-2}{x-1} = \frac{x+1}{2x-1}.$$

$$9.143. \sqrt{x} + \sqrt{2x+1} = 5.$$

$$9.137. \frac{1+2x}{2+x} + \frac{2+x}{1+x} = \frac{10}{3}.$$

$$9.144. \sqrt{x} - \sqrt{2x+1} = 1.$$

$$9.138. \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{5}{2}.$$

$$9.145. 2x + \sqrt{x-3} = 5.$$

$$9.139. x+3 = \sqrt{2x^2-x-1}.$$

$$9.146. \sqrt{x-2} + \sqrt{3x-2} = 6.$$

PROBLEME

Să se discute, după valorile lui a , existența și semnul rădăcinilor ecuațiilor definite în $\mathbb{R}$ de următoarele relații:

$$9.147. 5x^2 - 12x + a - 2 = 0.$$

$$9.148. 5x^2 + 12x - a + 2 = 0.$$

$$9.149. ax^2 + (2a+1)x + a-3 = 0.$$

$$9.150. (a-1)x^2 + 2x + (a-1) = 0.$$

$$9.151. ax^2 - 6(a-1)x + 9(a-3) = 0.$$

$$9.152. (a-5)x^2 - 2(a+3)x + a-2 = 0.$$

$$9.153. (a-1)x^2 + 2(a-1)x + a-2 = 0.$$

$$9.154. x' \text{ și } x'' \text{ fiind rădăcinile ecuației:}$$

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax^2 + bx + c = 0\},$$

să se formeze ecuația care are ca rădăcini:

$$1^\circ. \quad kx' \text{ și } kx''.$$

$$2^\circ. \quad x' + k \text{ și } x'' + k.$$

$$3^\circ. \quad \frac{x'}{x''} \text{ și } \frac{x''}{x'}.$$

Ce se poate spune despre discriminanții ecuației date și ai celor trei ecuații obținute?

Să se găsească perechile (x, y) care satisfac simultan următoarele relații:

$$9.155. \begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases} \text{ (Se va calcula mai întâi } xy.)$$

$$9.156. \begin{cases} x + y = 8 \\ xy + 2x + 2y + 1 = 0. \end{cases} \quad 9.157. \begin{cases} x + y = 15 \\ x^2 + y^2 = 153. \end{cases}$$

$$9.158. \begin{cases} x - y = 8 \\ x^2 y^2 = 400. \end{cases} \text{ (Se vor lua ca necunoscute } x \text{ și } -y.)$$

$$9.159. \begin{cases} x + y = 19 \\ xy = 34. \end{cases}$$

$$9.160. \begin{cases} x - y = a \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases} \text{ (Se va discuta după valorile lui } a.)$$

$$9.161. \begin{cases} x - y = 31 \\ xy = 140. \end{cases} \quad 9.164. \begin{cases} x + y = 2xy \\ x - y = 5xy. \end{cases}$$

$$9.162. \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 113. \end{cases} \quad 9.165. \begin{cases} x + y = 12 \\ 2y^2 - x^2 = 1. \end{cases}$$

$$9.163. \begin{cases} 2x + 1 = y \\ x^2 - y^2 + 8 = 0. \end{cases} \quad 9.166. \begin{cases} x^4 + y^4 = 97 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

9.167. Ecuația: $\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax^2 + bx + c = 0\}$?

admite ca rădăcini pe x' și x'' ; să se formeze ecuația care are ca rădăcini:

$$1^\circ. \quad x' + 3x'' \text{ și } 3x' + x''.$$

$$2^\circ. \quad x' + mx'' \text{ și } mx' + x''.$$

$$3^\circ. \quad x'^2 \text{ și } x''^2.$$

9.168. Să se determine a pentru ca ecuația definită în $\mathbb{R}$ prin relația:

$$x^2 - 3ax + a + 1 = 0$$

să aibă o rădăcină dublă celeilalte. Să se rezolve atunci ecuația.

9.169. Să se determine a pentru ca ecuația definită în $\mathbb{R}$ de relația:

$$x^2 - 4x + a = 0$$

să aibă:

1°. două rădăcini egale;

2°. o rădăcină este triplul celeilalte;

8°. două rădăcini x' și x'' astfel ca:

$$2x' + x'' = 9.$$

Să se rezolve în fiecare caz ecuația.

9.170. Mărimile lungimilor-laturilor-unghiului drept-ale unui triunghi dreptunghi. sînt egale, respectiv, cu rădăcinile-ecuației definite în $\mathbb{R}$ de relația:

$$x^2 - 7ax + 9a^2 = 0,$$

a fiind o lungime-dată.

1°. Să se verifice, fără să se calculeze, că această ecuație are rădăcini.

2°. Să se găsească aria acestui triunghi, mărimea ipotenuzei sale, a medianei relative la ipotenuză și a înălțimii.

9.171. Se presupune că ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 + px + 1 = 0\}$$

admite cele două rădăcini x_1 și x_2 și că ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } y^2 + qy + 1 = 0\}$$

admite cele două rădăcini y_1 și y_2 . Să se demonstreze că:

$$(x_1 - y_1)(x_2 - y_1)(x_1 + y_2)(x_2 + y_2) = q^2 - p^2.$$

9.172. Se consideră ecuația (E) definită în $\mathbb{R}$ de relația:

$$x^2 - (5\alpha - 1)x + 3\beta = 0.$$

1°. Condițiile pentru ca α și β să fie rădăcinile lui (E)?

2°. Condițiile pentru care fiecare dintre numerele α și β să verifice pe (E)?

9.173. Să se rezolve ecuația definită în $\mathbb{R}$ de relația:

$$x^6 - 35x^3 + 216 = 0.$$

9.174. Existența și semnul rădăcinilor ecuației:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } 5x^2 - 3mx + m - 1 = 0\}.$$

Să se găsească între x' și x'' o relație independență de m .

Să se determine parametrul m pentru ca ecuațiile definite în $\mathbb{R}$ prin relațiile următoare să admită două rădăcini legate prin relația dată:

$$9.175. 4x^2 - 15x + 4m^3 = 0;$$

$$\text{și: } x' = x''^2.$$

$$9.176. x^2 + 2(m - 1)x + 3m^2 + 5 = 0;$$

$$\text{și: } x' = 2x''.$$

$$9.177. x^2 - 12x + m = 0,$$

$$\text{și: } x'^2 - x''^2 = 36.$$

$$9.178. x^2 - mx + 2m - 1 = 0.$$

$$\text{și: } \frac{x'}{x''} = \frac{8}{5}.$$

*

9.179. Exercițiu rezolvat. Să se rezolve ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } (x^2 - 5x)^2 = x^2 - 5x + 42\} \quad (1)$$

Soluție. Necunoscuta x figurează prin intermediul grupului $x^2 - 5x$, expresie algebrică pe care o vom nota prin litera y . Deci, dacă există o soluție la această ecuație, este cea de la ecuația:

$$\{y; y \in \mathbb{R} \text{ și } y^2 = y + 42\} \quad (2)$$

Ecuația (2) admite soluțiile -6 și 7 .

Rămâne să examinăm dacă grupul $x^2 - 5x$ poate să ia, pentru anumite valori ale lui x , valoarea -6 sau valoarea 7 . Se obțin deci ecuațiile:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - 5x + 6 = 0\}; \quad (3)$$

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - 5x - 7 = 0\} \quad (4)$$

Prima ecuație dă soluțiile 2 și 3 , a doua soluțiile $\frac{5 - \sqrt{53}}{2}$

și $\frac{5 + \sqrt{53}}{2}$. Încadrând pe $\sqrt{53}$:

$$7,28 < \sqrt{53} < 7,29$$

se pot da celelalte încadrări:

$$-1,15 < \frac{5 - \sqrt{53}}{2} < -1,14 \text{ și } 6,14 < \frac{5 + \sqrt{53}}{2} < 6,15.$$

Aceste patru numere sînt deci soluțiile ecuației (1).

Se spune că s-a luat y ca necunoscută auxiliară.

*

Să se rezolve, folosind o necunoscută auxiliară, ecuațiile definite în $\mathbb{R}$ prin următoarele relații:

$$9.180. (x^2 + x + 1)^2 = (x^2 + x + 2)^2 - 9.$$

$$9.181. 4\sqrt{x^2 - 5x + 6} = x^2 - 5x + 6.$$

$$9.182. \sqrt{x^2 - 3x + 4} - \sqrt{x^2 - 3x + 1} = 1.$$

Se va lua $y^2 = x^2 - 3x + 4$.

$$9.183. (x^2 - x + 3)^2 - 5a^2(x^2 - x + 3) + 4a^4 = 0.$$

9.184. 1°. Să se formeze ecuația de gradul al doilea care admite rădăcinile:

$$\alpha = m - 13 + \sqrt{m - 1} \text{ și } \beta = m - 13 - \sqrt{m - 1}.$$

2°. Să se deducă de aici rezolvarea ecuației:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x + \sqrt{x - 1} = 13\}?$$

9.185. Să se rezolve și să se discute ecuațiile:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } 3m - 2x = \sqrt{x^2 - m^2}\};$$

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } 2(m - x) = \sqrt{3x - 2m}\}?$$

9.186. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - 6x + 1 = 0\}.$$

Să se demonstreze că, oricare ar fi n întreg, numărul $x_1^n + x_2^n$ este un întreg nedivizibil prin 5.

9.187. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x\}?$$

1°. Să se demonstreze că este necesar să avem:

$$x \geq 0, a \geq 0, x \leq a(a - 1).$$

Să se deducă de aici că problema este posibilă dacă avem:

$$0 < c < 1.$$

2°. Să se studieze cazurile: $a = 0$ și $a = 1$.

3°. Dacă $a > 1$, să se demonstreze că, ecuația rațională, ce se obține prin două ridicări la pătrat, se poate scrie:

$$(x^2 - x - a)(x^2 + x + 1 - a) = 0.$$

Să se stabilească că rădăcinile lui $x^2 - x - a$ nu convin și că rădăcina pozitivă a celei de a doua ecuații este singura care convine.

Să se ducă la capăt rezolvarea atunci când $a = 2$.

10. SISTEME DE ECUAȚII.

SISTEME DE GRADUL ÎNȚII

- 10.1. *Sisteme de ecuații.*
 - 10.2. *Sisteme cu două necunoscute.*
 - 10.3. *Calculul particular.*
 - 10.4. *Alte sisteme de gradul întâi.*
-

10.1. SISTEME DE ECUAȚII

10.1.1. Definiții

Se întâmplă adesea să nu poată fi determinate necunoscute cu ajutorul unei singure ecuații. Este în special cazul când diverse cantități necunoscute intervin simultan în condițiile impuse prin enunț.

Vom considera, de exemplu, problema următoare: „Petre va avea, peste 5 ani, de două ori vârsta lui Jean; acum zece ani Petre avea de trei ori vârsta lui Jean. Se cere să se determine vârstele respective ale lui Petre și Jean”.

Notăm cu x vârsta lui Petre și cu y vârsta lui Jean. Diversele condiții impuse în enunț fac să intervină simultan x și y . Nu se poate deduce imediat din enunț o ecuație al cărei x ar fi soluție și o alta al cărei y ar fi soluție. Sintem conduși să folosim simultan pe x și y . Pentru aceasta se va cerceta perechea (x, y) ; această pereche trebuie să satisfacă simultan următoarele relații:

$$x + 5 = 2(y + 5)$$

(Peste cinci ani, Petre va avea de două ori vârsta lui Jean) $x - 10 = 3(y - 10)$.

(Acum 10 ani Petre era de trei ori mai în vârstă decât Jean). Se întâmplă ca numărul relațiilor pe care trebuie să le satisfacă necunoscutele problemei să nu fie egal cu numărul acestor necunoscute.

II. Considerăm o aplicație F oarecare a planului afin în el însuși. Căutarea punctelor duble ale acestei aplicații (adică a punctelor invariante prin această aplicație) ridică problema rezolvării unui sistem de două ecuații cu două necunoscute, exprimat de ecuația:

$$\{M; M \in \mathcal{E} \text{ și } F(M) = I(M)\}?$$

unde I este aplicația identică a lui $\mathcal{E}$ în el însuși.

10.1.2. Sisteme de gradul întâi

O relație cu mai multe necunoscute este numită de gradul întâi dacă nu intervine nici un produs de necunoscute, între ele. De exemplu, relația:

$$ax + by + cz = d$$

este de gradul întâi.

Dimpotrivă, relația:

$$axy + bz = 0$$

nu este de gradul întâi.

Un sistem de ecuații va fi zis de gradul întâi dacă toate ecuațiile care-l compun sînt de gradul întâi. Ne vom mărgini de acum înainte la studiul sistemelor de gradul întâi.

10.2. SISTEME CU DOUĂ NECUNOSCUTE

10.2.1. O ecuație cu două necunoscute

Studiem mai întâi cazul particular în care sistemul nu conține decît o singură ecuație. Este vorba atunci de o ecuație definită printr-o aplicație a lui $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, care se poate scrie sub forma simbolică:

$$\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } f(x, y) = 0\}. \quad (E)$$

Aplicația f trebuie să fie astfel ca expresia $f(x, y)$ să fie de gradul întâi, adică:

$$f(x, y) = ax + by + c,$$

unde a, b și c reprezintă numere cunoscute sau expresii care depind de parametri cunoscuți.

O soluție a ecuației (E) va fi deci o pereche (x_0, y_0) de numere reale, astfel că $f(x_0, y_0) = 0 = ax_0 + by_0 + c$.

EXEMPLU. Ecuația $\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } 3x + 4y - 12 = 0\}$

admite, între altele, soluția $x = 4, y = 0$, sau: $(x, y) = (4, 0)$.

Ea nu admite soluția $(0, 4)$.

Ea admite soluția $(0, 3)$, soluția $(8, -3)$ etc.

■ CAZURI PARTICULARE

1°. Dacă $a \neq 0$ și $b = 0$, se obține ecuația:

$$\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } ax + c = 0\} \quad (E')$$

Numărul x este atunci determinat de ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax + c = 0\}$$

Numărul y este arbitrar, valoarea sa neintervenind în realizarea sau nerealizarea condiției $ax + c = 0$. Mulțimea soluțiilor ecuației (E') este deci mulțimea:

$$S' = \left\{ -\frac{c}{a}, \mu; \mu \in \mathbb{R} \right\},$$

pe care o putem nota într-un alt mod sub forma produsului cartezian:

$$S' = \left\{ -\frac{c}{a} \right\} \times \mathbb{R}.$$

2°. Dacă $a = 0$ și $b = 0$, ne găsim în fața unei probleme analoage:

$$\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } by + c = 0\} \quad (E'')$$

soluțiile acestei ecuații fiind elementele mulțimii:

$$S'' = \left\{ \left(\lambda, -\frac{c}{b} \right); \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \times \left\{ -\frac{c}{b} \right\}.$$

3°. Se poate examina problema singulară obținută pentru $a = b = 0$.

Se găsește atunci înainte ecuația:

$$\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } c = 0\} \quad (E''')$$

Răspunsul nu depinde de alegerea lui x nici de aceea a lui y .

Dacă $c \neq 0$, problema nu are soluție: $S'' = \emptyset$.

Dacă $c = 0$, orice pereche (λ, y) convine: $S'' = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

■ Caz general. Pentru $a \neq 0$ și $b \neq 0$, studiem problema:

$$\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } ax + by + c = 0\} \quad (E)$$

Se observă imediat că la orice valoare numerică y_0 atribuită lui y , îi corespunde o valoare x_0 astfel că perechea (x_0, y_0) este soluție a problemei puse.

Este de ajuns, într-adevăr, să se rezolve ecuația de gradul întâi:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax + by_0 + c = 0\} = \{x_0\} = \left\{-\frac{by_0 + c}{a}\right\}.$$

Oricare ar fi numărul y_0 , perechea $\left(-\frac{by_0 + c}{a}, y_0\right)$ este o soluție a ecuației (E).

Dar se poate reface același raționament începînd prin a atribui lui x o valoare numerică x_0 și deducînd valoarea care corespunde lui y . Problema va fi atunci de a ști dacă soluțiile obținute în aceste două feluri sînt sau nu aceleași.

Un mijloc de a răspunde la această întrebare constă, de exemplu, în a arăta că toate soluțiile sînt de prima formă, adică orice soluție (x_0, y_0) se poate pune sub forma:

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{\lambda b + c}{a}, \lambda\right) \text{ unde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Fie (x_0, y_0) o soluție a lui (E). Avem:

$$ax_0 + by_0 + c = 0$$

$$\text{De aici se deduce că: } x_0 = -\frac{by_0 + c}{a}$$

$$\text{și, prin urmare: } (x_0, y_0) = \left(-\frac{by_0 + c}{a}, y_0\right)$$

$$\text{este de forma: } \left(-\frac{\lambda b + c}{a}, \lambda\right) \text{ cu } \lambda = y_0.$$

TEOREMĂ. Ecuația: $\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :$

$\text{și } ax + by + c = 0\}$ $a \neq 0$ și $b \neq 0$

admite ca mulțime de soluții mulțimea:

$$S = \left\{\left(-\frac{\lambda b + c}{a}, \lambda\right); \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \text{ arbitrar.}\right\}$$

EXEMPLU. Să se rezolve ecuația parametrică:

$$\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } (m-1)x + 2my + m-1 = 0\}?$$

1°. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \quad S = \left\{ \left(\mu, \frac{(1-m)(\mu+1)}{2m} \right); \mu \in \mathbb{R} \right\}, \mu \text{ arbitrar.}$

2°. $m = 1 \quad S = \{(\mu, 0); \mu \in \mathbb{R}\}, \mu \text{ arbitrar.}$

3°. $m = 0 \quad S = \{(-1, \lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}, \lambda \text{ arbitrar.}$

10.2.2. Caz particular al ecuației omogene

Atunci cînd coeficientul c este nul, ecuația:

$$\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } ax + by = 0\} \quad (H)$$

este zisă omogenă.

Dacă $a = b = 0$, orice element al lui $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ este soluție a lui (H).

Presupunem $a \neq 0$. Mulțimea S_H a soluțiilor ecuației (H) este atunci:

$$S_H = \left\{ \left(-\frac{b}{a}\lambda, \lambda \right); \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \lambda \text{ arbitrar.}$$

Dar, λ fiind arbitrar și a nenul, λ se poate scrie întotdeauna sub forma $\lambda = at$. Mulțimea S_H se scrie atunci:

$$S_H = \{(-bt, at); t \in \mathbb{R}\}, t \text{ arbitrar.}$$

OBSERVAȚII:

1. Dacă $ab \neq 0$, relația $ax + by = 0$ echivalează cu:

$$-\frac{x}{b} = \frac{y}{a}.$$

Notînd cu t valoarea comună celor două rapoarte, se găsește:

$$x = -bt \text{ și } y = at.$$

2. Mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ posedă o structură de spațiu vectorial pentru legile $\oplus$ și $\odot$ definite prin:

$$\begin{cases} (x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y') \\ \lambda \odot (x, y) = (\lambda x, \lambda y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Mulțimea S_H este un subspațiu vectorial al lui $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
(A se vedea exercițiile numerele 10.44 la 10.47.)

EXEMPLU

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ și } 3x - 2y = 0\} = \{(2t, 3t) \mid t \in \mathbf{R}\}.$$

10.2.3. Sistem de două ecuații cu două necunoscute

Un sistem de două ecuații de gradul întâi cu două necunoscute este o problemă de tipul:

$$\left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ și } \begin{cases} ax + by + c = 0 & (E) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (E') \end{cases} \right\} ? \quad (\Sigma)$$

OBSERVAȚIE. Mulțimea S a soluțiilor sistemului (Σ) este intersecția mulțimii soluțiilor lui (E) și a mulțimii soluțiilor lui (E') . Avem într-adevăr:

$$\begin{aligned} & \{(x, y); (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ și } ax + by + c = 0 \text{ și } \\ & \quad a'x + b'y + c' = 0\} \\ &= \{(x, y); (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ și } ax + by + c = 0\} \\ &\cap \{(x, y); (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ și } a'x + b'y + c' = 0\}. \end{aligned}$$

■ O IMPLICAȚIE FUNDAMENTALĂ

Să facem ipoteza că perechea (x_0, y_0) este soluție a lui (Σ) :

$$\mathcal{H}: [ax_0 + by_0 + c = 0 \text{ și } a'x_0 + b'y_0 + c' = 0].$$

Fie atunci două numere K și K' oarecare, unul sau altul (sau amândouă) putînd fi nul. Avem concluzia evidentă:

$$\mathcal{E}: \forall K, \forall K' \quad K(ax_0 + by_0 + c) + K'(a'x_0 + b'y_0 + c') = 0.$$

Această concluzie revine într-adevăr la a afirma că

$$K \times 0 + K' \times 0 = 0.$$

Consecințe pentru (Σ) . Să alegem $K = b'$ și $K' = -b$, pentru ca y_0 să dispară din combinarea care apare în $\mathcal{C}$. Se obține:

$$[\exists(x_0, y_0), (x_0, y_0) \text{ verifică } (\Sigma)]$$

$$\Rightarrow b'(ax_0 + by_0 + c) - b(a'x_0 + b'y_0 + c') = 0], \quad (1)$$

sau, făcând reduceri:

$$[\exists(x_0, y_0), (x_0, y_0) \text{ verifică pe } (\Sigma)]$$

$$\Rightarrow [(ab' - ba')x_0 + (cb' - bc') = 0]. \quad (2)$$

Alegem acum $K = -a'$ și $K' = a$, ca să dispară x_0 . Obținem:

$$[\exists(x_0, y_0), (x_0, y_0) \text{ verifică pe } (\Sigma)]$$

$$\Rightarrow [-a'(ax_0 + by_0 + c) + a(a'x_0 + b'y_0 + c') = 0], \quad (3)$$

sau, făcând reducerile:

$$[\exists(x_0, y_0), (x_0, y_0) \text{ verifică pe } (\Sigma)]$$

$$\Rightarrow [(ab' - ba')y_0 + (ac' - ca') = 0]. \quad (4)$$

Caz general pentru rezolvarea lui (Σ) .

Am văzut că apare de două ori grupul: $D = ab' - ba'$. Presupunem $D \neq 0$.

Relația (2) implică:

$$x_0 = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}.$$

Relația (4) implică:

$$y_0 = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

Deci:

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists(x_0, y_0), (x_0, y_0) \text{ verifică pe } (\Sigma) \\ \text{și } ab' - ba' \neq 0 \end{array}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} \\ y_0 = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} \end{array} \right.$$

Reciproc, rămâne a ști dacă această implicație este și inversă. Pentru aceasta ar fi suficient să înlocuim în (Σ) pe x și y cu valorile obținute.

Vom raționa în alt fel.

Aceste valori x_0 și y_0 verifică pe (1) și (3), deci de asemenea (după implicația fundamentală) relațiile obținute adăugând primii membri ai lui (1) și (3), după ce i-am multiplicat respectiv prin numerele l și l' .

Alegînd $l = a$ și $l' = b$, se obține:

$$a[b'(ax_0 + by_0 + c) - b(a'x_0 + b'y_0 + c')] + b[-a'(ax_0 + by_0 + c) + a(a'x_0 + b'y_0 + c')] = 0;$$

sau:

$$(ab' - ba')(ax_0 + by_0 + c) = 0.$$

Cum $ab' - ba'$ este diferit de zero, se obține:

$$ax_0 + by_0 + c = 0.$$

S-ar verifica de asemenea că avem:

$$a'x_0 + b'y_0 + c' = 0$$

alegînd:

$$l = a' \text{ și } l' = b'.$$

TEOREMĂ. Dacă $ab' - ba'$ nu este nul, sistemul:

$$\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\text{și } [ax + by + c = 0 \text{ și}$$

$$a'x + b'y + c' = 0]\} \quad (\Sigma)$$

are ca mulțime de soluții mulțimea:

$$S = \left\{ \left(\frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}, \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} \right) \right\}.$$

Sistemul (Σ) admite în aceste condiții o singură soluție.

■ **Studiul cazului particular** $ab' - ba' = 0$.

Revenim la implicațiile notate mai sus cu (2) și (4).

În cazul în care $ab' - ba' = 0$, se obține:

$$[\exists (x_0, y_0), (x_0, y_0) \text{ verifică pe } (\Sigma)] \Rightarrow 0 \times x_0 + cb' - bc' = 0, \quad (1)$$

$$[\exists (x_0, y_0), (x_0, y_0) \text{ verifică pe } (\Sigma)] \Rightarrow 0 \times y_0 + ac' - ca' = 0. \quad (2)$$

Deci, dacă nu avem în același timp $cb' - bc' = 0$ și $ac' - ca' = 0$, ipoteza că (x_0, y_0) verifică pe (Σ) conduce

la o contradicție. Această ipoteză, deci, nu poate fi făcută. (Σ) nu are nici o soluție.

TEOREMA. Dacă $ab' - ba' = 0$ și unul cel puțin dintre numerele $bc' - cb'$ sau $ca' - ac'$ nu este nul, sistemul (Σ) nu are soluție.

Rămâne să examinăm cazul în care avem simultan:

$$ab' - ba' = 0,$$

$$bc' - cb' = 0,$$

$$ca' - ac' = 0.$$

1. Presupunem că unul dintre cele patru numere a, a', b sau b' nu este nul.

Fie, de exemplu, $a \neq 0$. Avem:

$$ab' - ba' = 0 \text{ și } a \neq 0 \Rightarrow b' = \frac{a'}{a} b;$$

$$ac' - ca' = 0 \text{ și } a \neq 0 \Rightarrow c' = \frac{a'}{a} c.$$

Pe de altă parte:

$$b' = \frac{a'}{a} b \text{ și } c' = \frac{a'}{a} c$$

$$\Rightarrow bc' - cb' = \frac{a'}{a} (bc - bc) = 0.$$

Astfel:

$$\left. \begin{array}{l} ab' - ba' = 0 \\ bc' - cb' = 0 \\ ca' - ac' = 0 \\ a \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b' = \frac{a'}{a} b \\ c' = \frac{a'}{a} c. \end{array} \right.$$

Observind că:

$$a' = \frac{a'}{a} a,$$

(Σ) se poate scrie sub forma:

$$\left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \left\{ \begin{array}{l} ax + by + c = 0 \quad (E) \\ \frac{a'}{a}(ax + by + c) = 0 \quad (E') \end{array} \right. \right\}. (\Sigma)$$

Mulțimea soluțiilor lui (E) este deci conținută în mulțimea soluțiilor lui (E') și este coincidentă pentru $a' \neq 0$. În orice caz, intersecția lor, mulțimea soluțiilor lui (Σ) , se confundă cu mulțimea soluțiilor lui (E).

Deci, soluțiile sînt date de:

$$(x, y) = \left(-\frac{b\lambda + c}{a}, \lambda \right) \quad (\lambda \text{ arbitrar, } \lambda \in \mathbf{R}).$$

Există pentru (Σ) , *nedeterminare de ordinul I*, valoarea ce trebuie atribuită unei necunoscute fiind arbitrară, valoarea celei de a doua deducîndu-se din prima.

2. În cazul $a = b = a' = b' = 0$, sistemul devine:

$$\left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ și } \begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + c' = 0 \end{cases} \right\}.$$

Răspunsul nu mai depinde de o alegere a lui x și y .

$$\text{Dacă } \begin{cases} c \neq 0 \\ \text{sau} \\ c' \neq 0, \end{cases} \text{ sistemul nu admite nici o soluție.}$$

$$S = \emptyset \quad (S = \text{mulțimea soluțiilor}).$$

$$\text{Dacă } \begin{cases} c = 0 \\ \text{sau} \\ c' = 0, \end{cases} \text{ orice pereche } (\lambda, \mu) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ este soluție.}$$

$$S = \mathbf{R} \times \mathbf{R}.$$

Se pot întîlni aceste cazuri în cursul discuției sistemelor parametrice.

OBSERVAȚIE. În cazul 1, am presupus $a \neq 0$. Orice altă presupunere conduce la rezultate analoage căci, schimbînd numele necunoscutelor (x în y și y în x) și ordinea ecuațiilor, se poate ajunge întotdeauna la cazul în care primul coeficient al primei ecuații este coeficientul presupus nenul.

10.2.4. Concluzie teoretică și sfaturi practice

Rolul cantității:

$$D = ab' - ba'$$

apare deci fundamental. Numim D *determinantul* sistemului și-l notăm:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

Această plasare a coeficienților evocă locul lor în ecuații. În cursul discuției am văzut grupurile:

$ac' - ca'$, pe care-l vom nota cu A și care s-ar nota $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$;

$bc' - cb'$, pe care-l vom nota cu B și care s-ar scrie $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$.

Pentru $D \neq 0$, sistemul admite soluția dată de așa-numitele formule ale lui Cramer¹:

$$x = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} = \frac{B}{D};$$

$$y = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} = -\frac{A}{D}.$$

În tabloul de la pagina următoare se va găsi un rezumat al discuției sistemului:

$$\left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ și } \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \right\}?$$

¹ Gabriel Cramer: matematician elvețian (1704–1752).

Notății: $D = ab' - ba'$; $A = ac' - ca'$; $B = bc' - cb'$.

$D \neq 0$			$\iff$	Soluție unică Formulele lui Cramer $S = (x_0, y_0)$
$D = 0$	A și B nenuli amândoi $\implies$			nici o soluție $S = \emptyset$
	$A = B = 0$	a, a', b și b' nenuli toți $\implies$		O infinitate de soluții (o necunoscută arbitrară).
		$a = a' = 0$ $b = b' = 0$	c și c' nenuli amândoi $\implies$	nici o soluție $S = \emptyset$
			$c = c' = 0 \implies$	O infinitate de soluții (x și y arbitrari). $S = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$

Practic se va începe prin formarea determinantului D .

Dacă D este diferit de zero, orice metodă de a obține soluția este acceptabilă și e cu atât mai bună cu cât este mai rapidă.

Dacă $D = 0$, se va examina problema direct.

10.2.5. Metoda multiplicatorilor

Pentru $D \neq 0$, în cazurile numerice mai ales, metoda multiplicatorilor bazată pe implicația fundamentală de la nr. 10.2.3, dă soluția rapid.

EXAMPLE

$$I. \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 6y = 1 \end{cases} \right\} ?$$

Înmulțind cei doi membri ai primei ecuații cu multiplicatorul 3 și pe cei doi membri ai ecuației a doua cu multiplicatorul 1 și

adunând membru cu membru, se obține o combinație în care dispare y . Calculele se pot aranja astfel:

$$\begin{array}{r|l} 3x + 2y = 4 & 3 \\ 5x - 6y = 1 & 1 \\ \hline 14x & = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{14} \end{array}$$

OBSERVAȚIE. Se poate, tot așa de bine, să se obțină o combinație în care să dispară x , înmulțind cei doi membri ai primei ecuații cu 5 și pe cei doi membri ai ecuației a doua prin -3 . Procedind ca mai înainte, se obține:

$$28y = 17 \Rightarrow y = \frac{17}{28}.$$

II. Metoda se aplică de asemenea sistemelor care conțin unu sau mai mulți parametri. Fie sistemul:

$$\left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \begin{cases} mx + my = m \\ mx + y = 2m \end{cases} \right\} ? \quad (\Sigma)$$

$$D = m - m^2 = m(1 - m); D \neq 0 \Rightarrow m \neq 0 \text{ și } m \neq 1.$$

Scăzând membru cu membru, se obține:

dacă (x, y) este soluție a lui (Σ) în mod necesar:

$$y \in \{y; y \in \mathbb{R} \text{ și } (m - 1)y = -m\};$$

de unde:

$$y = -\frac{m}{m-1} \text{ și } \frac{2m-1}{m-1}, S = \left\{ \left(-\frac{m}{m-1}, \frac{2m-1}{m-1} \right) \right\},$$

ceea ce dă soluția.

Pentru $m = 0$, prima ecuație dispare; se obține:

$$x = \lambda, y = 0; S = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Pentru $m = 1$, sistemul devine:

$$\left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \right\} ?$$

Nu avem soluție: $S = \emptyset$.

10.2.6. Metoda substituției

Fie un sistem de forma :

$$\left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ y = \alpha x + \beta & (2) \end{cases} \right\}?. \quad (T)$$

Orice soluție a acestui sistem, $x = x_0$, $y = y_0$, verifică în mod necesar relațiile:

$$\begin{cases} ax_0 + b(\alpha x_0 + \beta) + c = 0 & (3) \\ y_0 = \alpha x_0 + \beta. & (4) \end{cases}$$

Deci, în cazul lui $D \neq 0$, se va obține x_0 rezolvind (3) și y_0 ducând în (2) valoarea lui x_0 . Se spune că s-a substituit în (1), în locul lui y , expresia lui y în funcție de x .

OBSERVAȚIE. Cînd nu ne temem de nici o ambiguitate și cu condiția expresă de a nu uita niciodată că rezolvarea unui sistem cu două necunoscute este căutarea unui sistem de perechi, fiecare din aceste perechi fiind o soluție, se poate conveni să se scrie un sistem sub forma prescurtată:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

EXEMPLU

$$\begin{cases} 3x + 5y = 17 \\ y = 2x - 7. \end{cases}$$

$$x \in \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } 3x + 5(2x - 7) = 17\} \implies x = 4.$$

$$x = 4 \text{ și } y = 2x - 7 \implies y = 1.$$

Printr-un șir de condiții necesare, se obține o singură pereche ($x = 4$, $y = 1$); deci nu ne putem găsi decît în cazul $D \neq 0$ și această pereche *dă soluția*.

Practic, se va aplica metoda substituției sistemelor care sînt ușor de pus sub forma (T).

EXEMPLU. *Să se rezolve și discute sistemul:*

$$\left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \begin{cases} mx + y = 3 & (E) \\ x + 3y = n & (E') \end{cases} \right\}?. \quad (S)$$

$$D = 3m - 1; D \neq 0 \iff m \neq \frac{1}{3}.$$

1°. Fie: $m \neq \frac{1}{3}$. Se poate proceda prin substituție:

$$\forall x, \forall y \quad x + 3y = n \iff x = n - 3y.$$

Substituind această valoare în (E), se obțin condițiile necesare succesive:

$$m(n - 3y) + y = 3 \implies y = \frac{3 - mn}{1 - 3m} \implies x = \frac{n - 9}{1 - 3m}.$$

Teoria generală garantează că s-a obținut soluția (unică).

2°. Fie: $m = \frac{1}{3}$. Sistemul devine:

$$\left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ și } \begin{cases} \frac{1}{3}x + y = 3 \\ x + 3y = n \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ și } \begin{cases} x + 3y = 9 \\ x + 3y = n \end{cases} \right\}.$$

Răspunsul este imediat: $n \neq 9 \implies$ nu este soluție;

$$n = 9 \implies x = 9 - 3\lambda, \quad y = \lambda, \quad \lambda \text{ arbitrar.}$$

10.2.7. Sisteme omogene

Atunci cind coeficienții c și c' sînt nuli, sistemul de gradul întâi de două ecuații cu două necunoscute:

$$\left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ și } \begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{cases} \right\} ? \quad \begin{matrix} \text{(E)} \\ \text{(E')} \end{matrix}$$

este un sistem omogen, format de două ecuații omogene (E) și (E'). Soluția $x = 0, y = 0$ este evidentă. Deci, dacă determinantul sistemului, $ab' - ba'$ este diferit de zero, sistemul n-are decît o soluție și aceasta este (0,0). O numim soluție banală (sau trivială).

Dacă $ab' - ba' = 0$, sistemul are cel puțin o soluție. El are deci o infinitate de soluții.

Presupunem că a și b nu sînt nule amîndouă; atunci soluțiile lui (E), după nr. 10.2.2, sînt:

$$x_0 = -bt, \quad y_0 = at, \quad t \text{ arbitrar.}$$

Or: $ab' - ba' = 0 \implies ab't - ba't = 0 \implies b'y_0 + a'x_0 = 0$,
și, în toate cazurile, aceste soluții sînt de asemenea acelea ale lui (E').

TEOREMA. O condiție necesară și suficientă pentru ca un sistem omogen să admită alte soluții decât soluția banală este ca determinantul lui $ab' - ba'$ să fie nul.

EXEMPLU. Să se determine m pentru ca sistemul definit de următoarele relații:

$$\begin{cases} (m-1)x + (m+3)y = 0 \\ 3mx + (m-5)y = 0 \end{cases}$$

să admită soluții nebanale.

Pentru ca sistemul să admită soluții nebanale, este necesar și suficient ca $D = 0$:

$$D = (m-1)(m-5) - 3m(m+3) = -2m^2 - 15m + 5.$$

Valorile corespunzătoare ale lui m sînt elemente ale mulțimii:

$$\begin{aligned} M &= \{m; m \in \mathbb{R} \text{ și } -2m^2 - 15m + 5 = 0\} \\ &= \left\{ \frac{-15 - \sqrt{265}}{4}, \frac{-15 + \sqrt{265}}{4} \right\}. \end{aligned}$$

Problema pusă admite deci 2 soluții.

Se va găsi în cursul de Geometrie (Fascicula II, nr. 5.3.4) o interpretare vectorială a studiului sistemelor de ecuații de gradul întâi.

EXERCIȚII.

Să se rezolve sistemele definite în $\mathbb{R}$ de perechile de relații următoare (dacă este cazul, să se dea valorile apropiate ale rădăcinilor cu o aproximație de 10^{-2}):

$$10.1. \begin{cases} 2x + 3 = 6y \\ 5y - 2 = 3x. \end{cases}$$

$$10.4. \begin{cases} 6x - 5y = 10 \\ 8x + 3y = 52. \end{cases}$$

$$10.2. \begin{cases} 15x - 25y = 55 \\ 48x - 6y = 324. \end{cases}$$

$$10.5. \begin{cases} 4x + 7y = -3 \\ 7x + 4y = 36 \end{cases}$$

$$10.3. \begin{cases} \frac{3x+y}{6} = \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \\ \frac{3y-x}{4} = \frac{y}{6} - \frac{1}{12}. \end{cases}$$

$$10.6. \begin{cases} \frac{x+3}{y-1} = 10 \\ \frac{x-3}{y+1} = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

$$10.7. \begin{cases} (x-1)(y-2) = (x+1)(y-3) \\ (x-5)(y+4) = (x-4)(y-1). \end{cases}$$

$$10.8. \begin{cases} (x-1)(y-2) - (x+1)(y-3) = 4 \\ (x+3)(y+1) - (x-3)(y-5) = 18. \end{cases}$$

$$10.9. \begin{cases} (x-1)^2 - (y+1)^2 = 9 \\ x + 3y - 5 = 0. \end{cases}$$

$$10.10. \begin{cases} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{y-1} = 0 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$$

$$10.11. \begin{cases} 5x - y - (x - y - 4) = 4x + 5y - 21 \\ 6(x+4) - 5(x-y-3) = 4x - 2y + 71. \end{cases}$$

$$10.12. \begin{cases} 6x - 8y = 15 \\ 9x - 12y = 10. \end{cases}$$

$$10.13. \begin{cases} 6x - y - 6(x-9) = 50 \\ 4(x+2y-1) - (x-3y+2) = 164 \end{cases}$$

$$10.14. \begin{cases} \frac{x-1}{x-3} + \frac{y+1}{y+3} = 2 \\ 2x + y = 3. \end{cases}$$

$$10.15. \begin{cases} 3(x-2y+1) - 5(x+y-2) = x+y-2 \\ 35x - 49y = 364. \end{cases}$$

$$10.16. \begin{cases} 6x - 8y = 22 \\ 9x - 12y = 33. \end{cases} \quad 10.17. \begin{cases} \frac{x}{352} + \frac{y}{264} = \frac{1}{132} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{1}{12}. \end{cases}$$

$$10.18. \begin{cases} 2(x-3y+1) = 4x-y-205 \\ \frac{3}{4}x - 5\left(\frac{y+1}{6}\right) = x - \frac{3y}{5} - 13. \end{cases}$$

Să se rezolve și eventual să se discute sistemele definite în $\mathbb{R}$ prin următoarele perechi de relații:

$$10.19. \begin{cases} mx + 3y = 8 \\ 2x + y = 5. \end{cases} \quad 10.20. \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ (m-3)x + my = m-1. \end{cases}$$

$$10.21. \begin{cases} x + ay = 9 \\ ax + y = b. \end{cases}$$

$$10.24. \begin{cases} p^2x + py + 1 = 0 \\ q^2x + qy + 1 = 0. \end{cases}$$

$$10.22. \begin{cases} \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b} \\ \frac{x}{a-b} - \frac{y}{a+b} = \frac{1}{a+b}. \end{cases}$$

$$10.25. \begin{cases} ax + by = c \\ bx - ay = c. \end{cases}$$

$$10.23. \begin{cases} (a-3)x + (a+3)y = a \\ (b-4)x + (b+4)y = b. \end{cases}$$

$$10.26. \begin{cases} 8x - 5y = 11 \\ 6x - ay = b. \end{cases}$$

$$10.27. \begin{cases} x + y = \frac{a+b}{ab} \\ (a+b)x - (a-b)y = \frac{a^2 + b^2}{ab}. \end{cases}$$

$$10.28. \begin{cases} mx + (m-1)y = 5 \\ (m-2)x + my = a. \end{cases}$$

$$10.31. \begin{cases} ax + by = c \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{c}. \end{cases}$$

$$10.29. \begin{cases} p^2x + py + 1 = 0 \\ q^2x + qy + 1 = 0. \end{cases}$$

$$10.32. \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 2 = 0 \\ bx - ay = 0. \end{cases}$$

$$10.30. \begin{cases} ax + by = c \\ a^2x + b^2y = c^2. \end{cases}$$

$$10.33. \begin{cases} x + y = a + b \\ bx + ay = 2ab. \end{cases}$$

$$10.34. \begin{cases} y = ax + b \\ x = ay + b. \end{cases}$$

$$10.35. \left\{ \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b}; \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b} \right\}.$$

$$10.36. \begin{cases} ax + y = 2a \\ x + ay = 1 + a^2. \end{cases}$$

$$10.38. \begin{cases} x + a^2y = b \\ x + y = ab^2. \end{cases}$$

$$10.37. \begin{cases} a^2 + ay + x = 0 \\ b^2 + by + x = 0. \end{cases}$$

$$10.39. \begin{cases} (1-m)x + (m+3)y = 3m+1 \\ 2(1-m)x + (m+6)y = m+2. \end{cases}$$

Să se determine parametrii în așa fel ca sistemele definite de următoarele perechi de relații să admită alte soluții decât soluția banală $(x, y) = (0, 0)$. Să se discute.

$$10.40. \begin{cases} mx + (m-1)y = 0 \\ 2x + 7y = 0. \end{cases} \quad 10.42. \begin{cases} (m-1)x - 8y = 0 \\ x + my = 0. \end{cases}$$

$$10.41. \begin{cases} mx + (m-1)y = 0 \\ (m-3)x + (m-7)y = 0. \end{cases} \quad 10.43. \begin{cases} mx + 8y = 0 \\ mx - 9y = 0. \end{cases}$$

Să se studieze structura mulțimilor definite mai jos față de operațiile care conferă lui $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{R}^2$) o structură de spațiu vectorial:

$$10.44. \{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } ax + by = 0\}?$$

$$10.45. \{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } ax = 0\}?$$

$$10.46. \{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } by = 0\}?$$

$$10.47. \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } \begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{cases} \right\}?$$

10.3. CALCULE PARTICULARE

10.3.1. Un sistem rațional

Fie să se rezolve sistemul (Σ) :

$$\left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \begin{cases} \frac{x}{x-1} + \frac{x}{y+1} = 2 \quad (E) \\ 2x + 3y = -1 \quad (E') \end{cases} \right\} \quad (\Sigma)$$

Fie S mulțimea soluțiilor acestui sistem:

$$S = \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \begin{cases} x \neq 1 \text{ și } y \neq -1 \\ \frac{x}{x-1} + \frac{x}{y+1} = 2 \\ 2x + 3y = -1. \end{cases} \right\}.$$

Fie $\mathfrak{D}$ mulțimea definită prin:

$$\{(x, y); (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ și } x \neq 1 \text{ și } y \neq -1\}.$$

$$S = \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathfrak{D} \text{ și } \begin{cases} xy + x + xy - y = 2xy + \\ + 2x - 2y - 2 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} \right\}.$$

$$S = \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathfrak{D} \text{ și } \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 2x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Sub această formă sistemul este linear și poate fi rezolvat ca în expunerea de mai înainte. Dar nu trebuie să uităm faptul că soluțiile trebuie neapărat să aparțină lui $\mathfrak{D}$. După rezolvare, se obține:

$$S = \{(x, y); (x, y) \in \mathfrak{D} \text{ și } x = 1 \text{ și } y = -1\} = \mathfrak{D} \cap \{(1, -1)\} = \emptyset \text{ (într-adevăr } (1, -1) \notin \mathfrak{D}).$$

10.3.2. Folosirea necunoscutelor auxiliare

Fie să se rezolve sistemul definit în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ de relațiile:

$$\begin{cases} \frac{4}{x-3} + \frac{5}{y+1} = 2 \\ \frac{5}{x-3} + \frac{1}{y+1} = \frac{29}{20}. \end{cases}$$

Fie S mulțimea soluțiilor acestui sistem:

$$S = \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ și } \begin{cases} \frac{4}{x-3} + \frac{5}{y+1} = 2 \\ \frac{5}{x-3} + \frac{1}{y+1} = \frac{29}{20} \end{cases} \right\}.$$

Fie $\mathfrak{D}$ domeniul de validitate al acestui sistem:

$$\mathfrak{D} = \{(x, y); (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ și } x \neq 3 \text{ și } y \neq -1\}.$$

$$S = \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathfrak{D} \text{ și } \begin{cases} \left(4 \times \frac{1}{x-3}\right) + \left(5 \times \frac{1}{y+1}\right) = 2 \\ \left(5 \times \frac{1}{x-3}\right) + \left(\frac{1}{y+1}\right) = \frac{29}{20} \end{cases} \right\}.$$

x și y nu intervine decât prin intermediul grupurilor:

$$\frac{1}{x-3} = X \text{ și } \frac{1}{y+1} = Y,$$

definite pe $\mathfrak{D}$. Vom avea deci:

$$S = \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathfrak{D} \text{ și } \frac{1}{x-3} = X \text{ și } \frac{1}{y+1} = Y \right.$$

$$\left. \text{și } \begin{cases} 4X + 5Y = 2 \\ 100X + 20Y = 29 \end{cases} \right\},$$

$$S = \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathfrak{D} \text{ și } \frac{1}{x-3} = X \text{ și } \frac{1}{y+1} = Y \right.$$

$$\left. \text{și } (X, Y) \in S_1 \right\},$$

cu:

$$S_1 = \left\{ (X, Y); (X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \begin{cases} 4X + 5Y = 2 \\ 100X + 20Y = 29 \end{cases} \right\}.$$

Prin folosirea necunoscutelor auxiliare s-a ajuns deci la studiul unui sistem de două ecuații de gradul întâi cu două necunoscute, pe care știm să-l rezolvăm. Avem atunci:

$$S_1 = \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5} \right) \right\}.$$

Și prin urmare:

$$S = \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathfrak{D} \text{ și } \frac{1}{x-3} = \frac{1}{4} \text{ și } \frac{1}{y+1} = \frac{1}{5} \right\},$$

$$S = \{(x, y); (x, y) \in \mathfrak{D} \text{ și } x-3=4 \text{ și } y+1=5\} = \\ = \{(7, 4)\} \cap \mathfrak{D}.$$

$$S = \{(7, 4)\}.$$

10.3.3. Alte cazuri particulare

Studiul a numeroase cazuri particulare poate fi mult simplificat printr-o reflecție prealabilă fiecărui calcul. Nu trebuie să abordăm totdeauna calculele indicate de formule și avem adesea interesul să considerăm cazurile particulare ale sistemului dat, pentru a le folosi în rezolvare.

Considerăm, de exemplu, sistemul definit în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de următoarele relații:

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Relația (1) permite să se scrie, cînd nici unul dintre cele două numere a și b nu este nul:

$$\{ax + by = 0, a \neq 0 \text{ și } b \neq 0\} \iff \frac{x}{b} = \frac{-y}{-a}.$$

Pe de altă parte, o teoremă cunoscută asupra proporțiilor:

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \implies \forall \lambda, \forall \mu; \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\lambda\alpha + \mu\beta}{\lambda\alpha' + \mu\beta'} \right) \quad (\lambda \text{ și } \mu \text{ nenule și } \lambda\alpha' + \mu\beta' \text{ nenulă})$$

permite să se scrie:

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{-a} = \frac{a'x + b'y}{a'b + b'(-a)} = \frac{a'x + b'y}{a'b - b'a}, \text{ dacă } a'b - b'a \neq 0.$$

Relația (2) atrage după sine:

$$a'x + b'y = -c'.$$

Vom avea deci, dacă $a'b - b'a$ este nenul:

$$\begin{aligned} & \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } \begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } \begin{cases} \frac{x}{b} = \frac{-c'}{a'b - b'a} \\ \frac{y}{-a} = \frac{-c'}{a'b - b'a} \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{-c'b}{a'b - b'a}, \frac{ac'}{a'b - b'a} \right) \right\}. \end{aligned}$$

EXERCIȚII.

Să se rezolve, alegînd o necunoscută auxiliară, sistemele definite în $\mathbb{R}$ de următoarele perechi de relații:

$$10.48. \begin{cases} \frac{3}{y-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{3}{4} \\ \frac{5}{y-1} + \frac{3}{x+2} = \frac{29}{12}. \end{cases} \quad 10.49. \begin{cases} \frac{5}{3x} - \frac{2}{y} = -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{4x} + \frac{3}{2y} = 1,1. \end{cases}$$

Să se rezolve și să se discute sistemele definite în $\mathbb{R}$ de următoarele perechi de relații:

$$10.50. \begin{cases} m\sqrt{x+3} - 9\sqrt{y+1} = 2 \\ (m+1)\sqrt{x+3} + (m-3)\sqrt{y+1} = m. \end{cases}$$

$$10.51. \begin{cases} -3mx^2 + (m-1)y^2 = 1 \\ (m-2)x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

$$10.52. \begin{cases} \frac{m-1}{x-5} + \frac{m-2}{y-4} = m \\ \frac{m-3}{x-5} + \frac{m-4}{y-4} = m+1. \end{cases}$$

$$10.53. \begin{cases} |x+y-m| + 2|x-y| = |m-1| \\ m|x+y-m| + (m-1)|x-y| = 0. \end{cases}$$

$$10.54. \begin{cases} ax + b\sqrt{x} = ay + b\sqrt{y} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = a + b. \end{cases} \quad 10.55. \begin{cases} a\sqrt{x} + \sqrt{y} = a^3 \\ \sqrt{x} + a\sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

$$10.56. \begin{cases} \frac{x-1}{y+2} - \frac{x+1}{y-2} + \frac{12}{y^2-4} = 0 \\ \frac{y-3}{x-1} - \frac{y+3}{x+1} + \frac{20}{x^2-1} = 0. \end{cases}$$

10.4. ALTE SISTEME DE GRADUL ÎNTÎI

10.4.1. Sisteme de trei ecuații cu două necunoscute

Un asemenea sistem, fie S_1 , se va prezenta sub forma:

$$\left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \begin{cases} ay + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \\ a''x + b''y = c'' & (3) \end{cases} \right\} ? S_1$$

Dacă (x_0, y_0) este soluție a sistemului (S_1) , (x_0, y_0) este soluție a sistemului (S_2) obținut nepăstrînd decît condițiile (1) și (2):

$$\left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases} \right\} ? (S_2)$$

Soluțiile sistemului (S_1) vor fi soluțiile sistemului (S_2) (dacă ele există), care satisfac, pe lângă acesta și condiția (3):

$$a''x + b''y = c''. \quad (3)$$

Atunci când mulțimea soluțiilor sistemului (S_1) nu este vidă, se spune că cele trei condiții (1), (2) și (3) sint compatibile.

EXEMPLU. Să se rezolve sistemul parametric:

$$\left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \begin{cases} mx + y = 4 & (1) \\ x - my = 1 & (2) \\ x + y = \frac{8}{1 + m^2} & (3) \end{cases} \right\} ? \quad (S)$$

Dacă (x_0, y_0) este soluție a sistemului (S), (x_0, y_0) este soluție a sistemului (T) obținut când se păstrează doar condițiile (1) și (2). Soluția lui (T) este:

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{4m + 1}{m^2 + 1}, \frac{-m + 4}{m^2 + 1} \right).$$

Pentru ca sistemul (S) să admită soluții, este necesar și suficient ca aceste valori x_0 și y_0 să satisfacă condiția (3). Cum sistemul conține un parametru, vor exista, precum se pare, valori ale parametrului, pentru care condițiile (1), (2) și (3) vor fi compatibile.

Aceste valori vor fi determinate de condiția $\left| x_0 + y_0 = \frac{8}{1 + m^2} \right.$.

Fie M mulțimea acestor valori:

$$M = \left\{ m; m \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{4m + 1}{m^2 + 1} + \frac{-m + 4}{m^2 + 1} = \frac{8}{m^2 + 1} \right\},$$

$$M = \{m; m \in \mathbb{R} \text{ și } 3m + 5 = 8\},$$

$$M = \{1\}.$$

Condiția de compatibilitate este deci: $m = 1$.

În concluzie:

Pentru $m \neq 1$, sistemul (S) nu are soluție.

Pentru $m = 1$, sistemul (S) admite o soluție:

$$(x, y) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

10.4.2. Cazul a două ecuații omogene cu trei necunoscute

Fie să se rezolve sistemul (S):

$$\left\{ (x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \begin{cases} ax + by + cz = 0 & (E) \\ a'x + b'y + c'z = 0 & (E') \end{cases} \right\}.$$

O soluție a unui asemenea sistem este un triplet de numere reale (x, y, z) .

Dacă dăm uneia dintre necunoscute o valoare arbitrară, problema se particularizează într-un sistem de două ecuații cu două necunoscute. Dând lui z o valoare v , se formează un sistem în x și y al cărui determinant este:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

Dând lui y o valoare μ , se formează un sistem în x și z al cărui determinant este:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

În fine, dacă se dă lui x o valoare λ , se formează un sistem în y și z al cărui determinant este:

$$D_2 = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}.$$

Presupunem că unul dintre cei trei determinanți nu este nul, de exemplu $D \neq 0$, și rezolvăm sistemul obținut dându-i lui z valoarea v .

Se obține, după formulele lui Cramer:

$$x = \frac{D_2}{D} v, \quad y = -\frac{D_1}{D} v, \quad z = v. \quad (1)$$

Sistemul (S) admite deci cel puțin mulțimea infinită a soluțiilor date de formulele (1).

Reciproc, dacă (x_0, y_0) este o soluție a lui (S), se va demonstra că această soluție coincide cu aceea pe care o dau formulele (1) pentru $v = z_0$. Ne vom inspira din ceea ce s-a făcut la nr. 10.2.1 pentru o ecuație cu două necunoscute.

Punînd:

$$x_1 = \frac{D_2}{D} z_0 \quad \text{și} \quad y_1 = -\frac{D_1}{D} z_0,$$

avem, în același timp:

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 = 0 \\ a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 = 0 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_0 = 0 \\ a'x_1 + b'y_1 + c'z_0 = 0. \end{cases}$$

Caz particular. În cazul în care:

$$ab' - ba' = ac' - ca' = bc' - cb' = 0,$$

și în care, în același timp, una dintre ecuații, prima de exemplu, nu dispăre, va exista un coeficient nenul între cei șase. Schimbând la nevoie numele necunoscutelor, se va putea presupune $a \neq 0$.

Din $ab' - ba' = 0$, se obține:

$$b' = b \frac{a'}{a}, \text{ etc.}$$

Condițiile care definesc sistemul devin:

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a \frac{a'}{a} x + b \frac{a'}{a} y + c \frac{a'}{a} z = 0; \end{cases}$$

aceste două condiții fiind echivalente, sistemul (S) se reduce la o ecuație cu trei necunoscute.

OBSERVAȚIE. Formulele (1) se pun sub o formă mai simetrică, folosind un alt parametru, ρ , legat de parametrul v prin relația:

$$v = \rho D.$$

La orice valoare a unuia corespunde o valoare a altuia. Se obține atunci:

$$x = \rho D_2, \quad y = -\rho D_1, \quad z = \rho D. \quad (2)$$

Soluțiile sînt triplete în care cele trei elemente rămîn proporționale cu trei numere fixe.

EXEMPLU:

$$\left\{ (x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \begin{cases} x - 2y + mz = 0 \\ x + my - z = 0 \end{cases} \right\}?$$

$$D = m + 2, \quad D_1 = -(m + 1), \quad D_2 = 2 - m^2.$$

Acești determinanți nu sînt nuli simultan. Unul cel puțin dintre cei trei permite rezolvarea și se obține întotdeauna:

$$x = \rho(2 - m^2), \quad y = \rho(m + 1), \quad z = \rho(m + 2), \quad \rho \text{ arbitrar.}$$

10.4.3. Sisteme de două ecuații cu trei necunoscute

Fie să se rezolve un sistem de forma:

$$\{(x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \begin{cases} ax + by + cz = d & (E) \\ a'x + b'y + c'z = d' & (E') \end{cases}\} \quad (S)$$

(Se reamintește că $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se notează și $\mathbb{R}^3$.)

Cum am făcut la nr. 10.4.2, începem prin a particulariza sistemul (S) într-un sistem de două ecuații cu două necunoscute și, în acest scop, atribuim uneia dintre necunoscute o valoare arbitrară.

Cele trei sisteme obținute au ca determinanți respectivi:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}.$$

Dacă unul dintre cei trei nu este nul, se rezolvă sistemul particularizat. Se demonstrează că formulele obținute nu lasă să scape nici o soluție. Dacă cei trei determinanți sînt nuli, se examinează sistemul direct pentru a determina dacă mulțimea soluțiilor este vidă sau infinită și, în acest caz, pentru a-l defini cu precizie.

EXEMPLE

$$I. \left\{ (x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ și } \begin{cases} 2x - y + 5z = 1 \\ 6x - 3y + z = 2 \end{cases} \right\}?$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -28, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 14.$$

Nulitatea primului determinant împiedică să se dea lui z o valoare arbitrară. În schimb, este îngăduit să dăm lui y o valoare arbitrară μ și să rezolvăm sistemul cu două necunoscute astfel obținut:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 5z = 1 + \mu & | & 3 \\ 6x + z = 2 + 3\mu & | & -1 \end{array}$$

$$14z = 1 \implies z = \frac{1}{14} \implies x = \frac{9}{28} + \frac{1}{2}\mu,$$

$$\text{Soluțiile sînt: } x = \frac{9}{28} + \frac{1}{2}\mu; \quad y = \mu; \quad z = \frac{1}{14}.$$

Se constată că z are o valoare determinată.

$$\text{II. } \left\{ (x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ și } \begin{cases} x - 2y + mz = 1 \\ x + my - z = m \end{cases} \right\}?$$

$$D = m + 2; \quad D_1 = -m - 1; \quad D_2 = 2 - m^2.$$

Pentru $m \neq -2$, se va calcula x și y în funcție de $z = v$ prin formulele lui Cramer.

Pentru $m = -2$, se obține (dacă S este mulțimea soluțiilor sistemului obținut):

$$S = \left\{ (x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ și } \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x - 2y - z = -2 \end{cases} \right\}.$$

Scăzând membru cu membru, se obține:

$$S = \left\{ (x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ și } \begin{cases} z = -3 \\ x - 2y = -5 \end{cases} \right\}.$$

De unde soluțiile:

$$x = 2\mu - 5; \quad y = \mu; \quad z = -3, \quad \text{unde } \mu \in \mathbb{R}.$$

III. Fie să se rezolve sistemul:

$$\left\{ (x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ și } \begin{cases} x + 2y + z = m \\ 3x + 6y + 3z = 7 \end{cases} \right\}?$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Sistemul particularizat nu poate fi un sistem al lui Cramer. Din studiul ecuațiilor omogene, putem să deducem că primii membri ai celor două ecuații sînt proporționali. Se vede direct, că sistemul se poate scrie:

$$\left\{ (x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ și } \begin{cases} x + 2y + z = m \\ x + 2y + z = \frac{7}{3} \end{cases} \right\}?$$

Pentru $m \neq \frac{7}{3}$, sistemul nu are soluție.

Pentru $m = \frac{7}{3}$, soluțiile sînt date de formulele:

$$x = \lambda, \quad y = \mu, \quad z = -\lambda - 2\mu + \frac{7}{3},$$

unde λ și μ sînt numere reale arbitrare.

Se va putea demonstra că toate soluțiile sistemului sînt exprimate prin aceste formule.

10.4.4. Sisteme de trei ecuații cu trei necunoscute

Fie să se rezolve sistemul:

$$\left\{ (x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \begin{cases} x + y + 2z = 4 & (1) \\ 2x - y + 3z = 6 & (2) \\ x - 3y + 4z = 7 & (3) \end{cases} \right\}?$$

Procedăm prin substituție, generalizind ceea ce a fost stabilit la nr. 10.2.6.

Din (1) se trage:

$$\boxed{x = -y - 2z + 4} \quad (4)$$

care se duce în (2) și (3), obținându-se:

$$\begin{cases} -3y - z = -2 & (5) \\ -4y + 2z = 3. & (6) \end{cases}$$

Din (5), se obține:

$$\boxed{z = -3y + 2} \quad (7)$$

pe care-l ducem în (6):

$$10y = 1, \quad (8)$$

sau:

$$y = \frac{1}{10}.$$

Intorcându-ne înapoi la (7), pe care se cade să nu-l pierdem din vedere și pe care l-am încadrat în acest scop, se obține:

$$z = \frac{17}{10}.$$

În fine, prin (4), avem:

$$x = \frac{1}{2}.$$

Soluția:

$$x = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{1}{10}; \quad z = \frac{17}{10}.$$

OBSERVAȚIE. Acest mod de a expune rezolvarea unui sistem este un mod prescurtat și condensat care nu ar putea fi folosit decât după cîștigarea unei suficiente experiențe și a unei mari obișnuințe în rezolvarea sistemelor.

ALTE EXEMPLE. I. Fie să se rezolve:

$$\left\{ (x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ și } \begin{cases} x - 2y + 3z = 9 & (1) \\ 2x + 5y - z = 10 & (2) \\ 3x + 3y + 2z = 2 & (3) \end{cases} \right\} ?.$$

Se observă că, adunînd primele două ecuații, membru cu membru, se obține:

$$3x + 3y + 2z = 19. \quad (4)$$

Comparînd cu (3), se constată că sistemul nu are soluție.

II. Fie să se rezolve:

$$\left\{ (x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ și } \begin{cases} x - 2y + 3z = 14 & (1) \\ 2x - 3y + z = -1 & (2) \\ 5x - 11y = -17 & (3) \end{cases} \right\} ?.$$

Procedînd prin substituție, se obține din (2):

$$\boxed{x = -2x + 3y - 1} \quad (4)$$

pe care-l ducem în (1) și obținem:

$$-5x + 11y = 17.$$

Se regăsește (3). Există deci o infinitate de soluții, date de formulele:

$$x = \frac{-17 + 11\lambda}{5}, \quad y = \lambda, \quad z = \frac{29 - 7\lambda}{5}, \quad \text{unde } \lambda \in \mathbb{R} \text{ este un număr arbitrar.}$$

10.4.5. Citeva cazuri particulare

■ 1°. Necunoscutele sînt proporționale cu numere date.

$$\left\{ (x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ și } \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \\ 3x - 5y + 6z = 16 \end{cases} \right\} ? \quad (S)$$

Se ia ca necunoscută auxiliară valoarea comună a rapoartelor:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = t \Leftrightarrow x = 3t, \quad y = 5t, \quad z = 4t.$$

Numărul t aparține deci mulțimii:

$$T = \{t; t \in \mathbf{R} \text{ și } 9t - 25t + 24t = 16\} = \{2\}.$$

De unde:

$$x = 6, \quad y = 10, \quad z = 8.$$

■ 2°. Există o simetrie între ecuații.

$$\left\{ (x, y, z); (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \text{ și } \begin{cases} x + y - z = 2 & (1) \\ y + z - x = a & (2) \\ x + z - y = b & (3) \end{cases} \right\}?. \quad (S)$$

Se trece de la o ecuație la alta printr-o lege pe care o vom prezenta sub o formă geometrică.

Ne imaginăm trei roți sprijinite pe cele trei vîrfuri ale unui triunghi echilateral, respectiv: numerele (1), (2) și (3); literele (a) , (b) și (c) ; literele x , y și z (fig. 1):

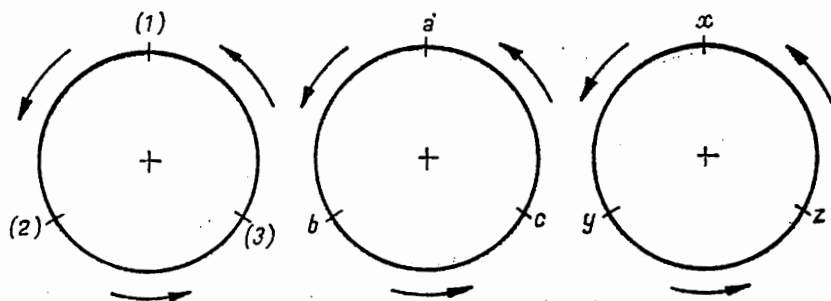


Fig. 1

dacă facem ca prima roată să se învîrtească cu $\frac{1}{3}$ de tur într-un anumit sens, (1) vine în vechiul (2), (2) în vechiul (3), (3) în vechiul (1). Aceeași operație produce schimbări analoage asupra celorlalte roți.

Această operație, pe care o numim *permutare circulară*, schimbă ecuația (1) în ecuația (2), ecuația (2) în ecuația (3), ecuația (3) în ecuația (1).

Am fi putut, de altfel, roți în sens invers.

Adunând membru cu membru, se obține:

$$x + y + z = a + b + c, \quad (4)$$

de unde:

$$x + (y + z) = a + b + c, \quad (4 \text{ bis})$$

și, ținând cont de (2):

$$x + (x + a) = a + b + c, \quad x = \frac{b + c}{2},$$

și, prin permutări circulare:

$$y = \frac{c + a}{2}, \quad z = \frac{a + b}{2}.$$

OBSERVAȚIE. S-ar fi putut scade membru cu membru, din ecuația (4), ecuațiile (1), (2) și (3), succesiv. S-ar fi obținut astfel, direct, valorile lui z , y și x , în această ordine.

EXERCIȚII

Pentru ce valoare a lui m următoarele sisteme sînt compatibile?

10.57. $\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } x + 3y = 7 \text{ și } 4x - y = 5$
și $x + my = 4\}$?

10.58. $\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } 2x + 3y = 5 \text{ și } 7x - 2y = 5$
și $(m + 3)x - my = 3\}$?

10.59. Să se găsească perechile de numere întregi, cuprinse între 20 și 60, care verifică ecuația definită de relația:

$$3x - 5y = 0.$$

10.60. Să se găsească perechile de numere întregi, cuprinse între 0 și 20 care verifică ecuația definită de relația:

$$3x - 5y = 4.$$

10.61. Să se găsească tripletele de numere întregi, cuprinse între 20 și 60, care verifică sistemul definit în $\mathbb{R}$ de relațiile:

$$\begin{cases} 3x - 5y + 4z = 0 \\ x + 3y - 5z = 0. \end{cases}$$

10.62. Să se determine m pentru ca sistemul definit în $\mathbb{R}$ prin relațiile:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 5 \\ 5x + 15y - 10z = m \end{cases}$$

să nu admită nici o soluție. Cînd acest sistem are soluții, la câte necunoscute se pot da valori arbitrare?

*

Să se rezolve sistemele definite în $\mathbb{R}$ prin următoarele mulțimi de relații:

$$10.63. \begin{cases} x + 5y - 3z = 36 \\ 2x + y + 4z = 39 \\ 5x - y - z = 40. \end{cases}$$

$$10.66. \begin{cases} 8x - 3y - 2z = 107 \\ 5x + y - 3z = 52 \\ x - 4y + 2z = 32. \end{cases}$$

$$10.64. \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z}{-6} \\ 4x + 3y - 2z = 245. \end{cases}$$

$$10.67. \begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{7} \\ 4x - y - z = 3. \end{cases}$$

$$10.65. \begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = 17 \\ \frac{4}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 7 \\ \frac{2}{x} - \frac{5}{y} + \frac{3}{z} = 1. \end{cases}$$

$$10.68. \begin{cases} x - 2y = 13 \\ 5x - 3z = 74 \\ 7x + 3y - 2z = 159. \end{cases}$$

PROBLEME

10.69. Să se demonstreze că sistemul:

$$\left\{ (x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ și } \begin{cases} 5x - 6y + z = 0 \\ 7x + y - 3z = 0 \\ 3x - 13y + 5z = 0 \end{cases} \right\}?$$

admite soluții proporționale cu trei numere întregi. Care sînt soluțiile cuprinse între 100 și 500?

10.70. Se dă relația:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Să se determine a , b și c pentru ca y să ia valorile:

$$+1, \quad +6, \quad -3,$$

cînd se dau lui x valorile respective:

$$-1, \quad +2, \quad +3.$$

10.71. Se dă relația:

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}.$$

Să se determine a, b, a', b' pentru ca y să ia valorile:

$$\frac{1}{2}, \quad 4, \quad 1,$$

cînd se dau lui x valorile respective:

$$1, \quad -1, \quad 2,$$

a, b, a', b' fiind numerele întregi cele mai simple.

Probleme asupra capitolului 10

10.72. Să se rezolve sistemul:

$$\left\{ (x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ și } \begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x + 3y + z = 3 \\ x + y + 3z = 9 \end{cases} \right\} ?.$$

10.73. Să se rezolve sistemul:

$$\left\{ (x, y, z); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ și } \begin{cases} 8x + 4y + 2z + 1 = 0 \\ 27x + 9y + 3z + 1 = 0 \\ 125x + 25y + 5z + 1 = 0 \end{cases} \right\} ?.$$

Să se rezolve și, dacă-i cazul, să se discute sistemele definite de următoarele mulțimi de relații:

$$10.74. \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 7 \\ 5x + 2y - 3z = 20 \\ 7x - y + z = 33. \end{cases}$$

$$10.78. \begin{cases} 3x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = m. \end{cases}$$

$$10.75. \begin{cases} bx - cy = m \\ cx - az = n \\ ay - bx = p. \end{cases}$$

$$10.79. \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 4 \\ 9x - 6y + 15z = 12 \\ 15x - 10y + 25z = 20. \end{cases}$$

$$10.76. \begin{cases} xy = (x + y) \\ xz = 2(x + z) \\ yz = 3(y + z). \end{cases}$$

$$10.80. \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + z = b \\ 3x + y + 2z = c. \end{cases}$$

$$10.77. \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = 5 \\ \frac{2}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{z} = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{6}{y} + \frac{2}{z} = 6. \end{cases}$$

$$10.81. \begin{cases} (y + z)(z + x) = 16 \\ (z + x)(x + y) = 32 \\ (x + y)(y + z) = 8. \end{cases}$$

$$10.82. \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \\ x+2y+3z=m. \end{cases} \quad 10.83. \begin{cases} 4x-9y=2 \\ 5x+3y=31. \end{cases}$$

10.84. Să se deducă de la nr. 10.83 rezolvarea următoarelor sisteme:

$$a) \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } \begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{9}{y} = 2 \\ \frac{5}{x} + \frac{3}{y} = 31 \end{cases} \right\} ?$$

$$b) \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{x+3}} - \frac{9}{\sqrt{y+1}} = 2 \\ \frac{5}{\sqrt{x+3}} + \frac{3}{\sqrt{y+1}} = 31 \end{cases} \right\} ?$$

Să se determine condițiile de posibilitate ale sistemelor definite în $\mathbb{R}$ prin următoarele mulțimi de relații:

$$10.85. \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=4 \\ mx+4y+9z=m. \end{cases} \quad 10.87. \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 5x+y+2z=1 \\ mx+(m-1)y+(m-2)z=m. \end{cases}$$

$$10.86. \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ 3x+2y-mx=0. \end{cases} \quad 10.88. \begin{cases} 3x+4y+mz=1 \\ 4x+my+3z=2 \\ mx+3y+4z=3. \end{cases}$$

Să se rezolve sistemele definite în $\mathbb{R}$ prin următoarele mulțimi de relații:

$$10.89. \begin{cases} 2x+3y+2z=1 \\ 3x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=3. \end{cases} \quad 10.90. \begin{cases} x+y=z \\ 2x+9y+4z=0 \\ 4x+3y+4z=0. \end{cases}$$

$$10.91. \begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ z+x=c. \end{cases}$$

10.92. Considerăm mulțimea:

$$\mathfrak{E} = \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } \begin{cases} ax+by+c=0 \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + c=0 \end{cases} \right\}$$

în definiția căreia numerele date a, b și c sînt reale și pozitive.

1°. Să se arate că, dacă se pune $u = \frac{y}{x}$, se poate determina x, y și u cu ajutorul a trei ecuații de gradul al doilea.

2°. Dacă se dă a și b , putem să determinăm pe c pentru ca fiecare dintre cele trei ecuații găsite să aibă un discriminant nul?

11. FUNCȚII LINIARE. FUNCȚII AFINE

- 11.1. *Funcții liniare.*
- 11.2. *Funcții afine.*
- 11.3. *Funcții afine pe intervale.*
- 11.4. *Aplicație la ecuațiile și inecuațiile de gradul întâi.*

A 11.1. FUNCȚII LINIARE

11.1.1. Citeva situații curente

În viața de toate zilele, nu rară este situația în care se cunoaște un atribut numeric referitor la un obiect și se caută atributul corespunzător mai multora dintre aceste obiecte. Așa este cazul, de exemplu, cînd cunoscînd prețul unitar al unei mărfi, se caută prețul total în funcție de cantitatea cumpărată.

Este de asemenea întîlnit cazul cînd, cunoscînd viteza medie, ne interesează distanța parcursă în funcție de timp. Cititorul va găsi cu ușurință numeroase exemple asemănătoare. Toate aceste situații sînt susceptibile de o schematizare matematică de același tip.

Fie k atributul numeric considerat; fie x cantitatea de obiecte avută în considerare; atributul global va fi kx . Aceasta este ceea ce face importanța studiului funcției numerice:

$$x \xrightarrow{f_k} f_k(x) = kx.$$

11.1.2. Funcția f_k . Liniaritate

■ Funcția f_k definită de relația $f_k(x) = kx$, unde k este o constantă reală dată, este definită pentru oricînumăr real x . Domeniul său de definiție este deci $\mathbb{R}$ în întregime.

■ O primă proprietate a funcției f_k decurge din următoarea observație. Când se cumpără de două ori mai multe obiecte (și neținând cont de un eventual rabat, prețul total este înmulțit cu 2. Reciproc, pentru un preț total dublu, se va cumpăra de două ori mai multă marfă.

De asemenea, dacă se merge de trei ori mai mult timp cu aceeași viteză medie, drumul parcurs va fi triplu și reciproc.

Mai general se poate scrie:

$$f_k(\lambda x) = \lambda f_k(x),$$

oricare ar fi numărul real λ .

Această proprietate decurge imediat din asociativitatea și comutativitatea înmulțirii numerelor reale:

$$f_k(\lambda x) = k(\lambda x) = (k\lambda)x = (\lambda k)x = \lambda(kx) = \lambda f_k(x).$$

Proprietatea 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right. f_k(\lambda x) = \lambda f_k(x)$$

OBSERVAȚIE. Această proprietate se poate scrie, nefolosind decât notațiile funcționale: $f_k \circ f_\lambda = \lambda f_k$.

■ O a doua proprietate, de asemenea banală, este bazată pe distributivitatea înmulțirii numerelor reale în raport cu adunarea:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \forall y \in \mathbb{R} \end{array} \right. k(x + y) = kx + ky,$$

ceea ce se scrie:

$$f_k(x + y) = f_k(x) + f_k(y).$$

Proprietatea 2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \\ \forall y \in \mathbb{R} \end{array} \right. f_k(x + y) = f_k(x) + f_k(y)$$

Orice funcție f care posedă proprietățile 1 și 2 este o aplicație liniară a lui $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$ (a se vedea Geometria, Fascicula II).

Funcția f_k este numită funcție liniară de coeficient k .

11.1.3. Mulțimea funcțiilor liniare

Considerăm mulțimea $\mathcal{L}$ a funcțiilor liniare:

$$\mathcal{L} = \{f_k, \quad k \in \mathbb{R}\},$$

Această mulțime este structurată de operațiile asupra funcțiilor (a se vedea nr. 7.3).

Structura aditivă a acestei mulțimi. Funcția $f_k + f_{k'}$ este definită prin:

$$\begin{aligned}(f_k + f_{k'})(x) &= f_k(x) + f_{k'}(x) = kx + k'x = \\ &= (k + k')x = f_{k+k'}(x),\end{aligned}$$

pentru orice număr real x ;

Avem deci:

$$f_k + f_{k'} = f_{k+k'}$$

(Oricare ar fi numerele reale k și k').

P₁. Adunarea funcțiilor este deci o lege de compoziție internă pentru $\mathcal{L}$.

Datorită asociativității adunării numerelor reale, vom avea, oricare ar fi numerele reale k, k', k'' :

$$\begin{aligned}(f_k + f_{k'}) + f_{k''} &= f_{(k+k')+k''} = f_{k+(k'+k'')} = f_k + \\ &+ (f_{k'} + f_{k''}),\end{aligned}$$

și se va enunța:

P₂. Adunarea funcțiilor este asociativă în $\mathcal{L}$.

Datorită neutralității lui zero pentru adunarea numerelor reale, vom avea, oricare ar fi k :

$$f_{0+k} = f_{k+0} = f_k$$

ceea ce, ținând cont de relația:

$$f_k + f_{k'} = f_{k+k'},$$

este echivalent cu:

$$f_0 + f_k = f_k + f_0 = f_k$$

f_0 este funcția lui $\mathcal{L}$ care face ca oricărui număr real x să-i corespundă numărul $0x = 0$. Aceasta este funcția constantă și nulă.

P₃. f_0 este element neutru pentru adunarea în $\mathcal{L}$.

Printr-un raționament analog, se observă că, pentru orice număr real k , care admite un opus $-k$, vom avea proprietatea:

P₄. Orice funcție liniară f_k este simetrizabilă față de adunarea în $\mathcal{L}$:

$$f_k + f_{-k} = f_0.$$

În concluzie (nr. 5.1.2):

TEOREMĂ. Mulțimea $\mathcal{L}$ a funcțiilor liniare posedă, față de adunarea funcțiilor, o structură de grup.

Mai mult, pentru că adunarea numerelor reale este comutativă, vom avea:

$$f_k + f_{k'} = f_{k+k'} = f_{k'+k} = f_{k'} + f_k.$$

P₅. Adunarea în $\mathcal{L}$ este comutativă.

TEOREMĂ. Înzestrată cu adunarea funcțiilor, mulțimea $\mathcal{L}$ a funcțiilor liniare este un grup abelian.

Structura față de înmulțirea printr-un număr real.

Reamintim că funcția λf_k este definită prin:

$$[\lambda f_k](x) = \lambda[f_k(x)] = \lambda kx = f_{\lambda k}(x);$$

aceasta fiind adevărat, oricare ar fi numărul real x , se va putea scrie:

$$\lambda f_k = f_{\lambda k}$$

(pentru orice număr real λ și pentru orice număr real k).

Această lege de compoziție externă posedă următoarele proprietăți:

$$P'_1: \forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall f_k \in \mathcal{L}; \forall f_{k'} \in \mathcal{L} / \lambda(f_k + f_{k'}) = \lambda f_k + \lambda f_{k'}$$

(cei doi termeni se scriu într-adevăr $f_{\lambda(h+k')}$).

$$P'_2: \forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall \mu \in \mathbb{R}; \forall f_k \in \mathcal{L} \quad (\lambda + \mu)f_k = \lambda f_k + \mu f_k$$

(cei doi termeni se scriu într-adevăr $f_{(\lambda+\mu)k}$).

$$P'_3: \forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall \mu \in \mathbb{R}; \forall f_k \in \mathcal{L} \quad (\lambda\mu)f_k = \lambda(\mu f_k)$$

(cei doi termeni se scriu într-adevăr $f_{\lambda\mu k}$).

$$P'_4: \forall f_k \in \mathcal{L} \quad 1 \cdot f_k = f_k$$

(într-adevăr $1 \cdot f_k = f_{1 \cdot k} = f_k$).

Ținând seama de proprietățile $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P'_1, P'_2, P'_3, P'_4$, se va putea conchide (Geometrie, Fascicula I, nr. 4.2.1):

TEOREMA. Mulțimea $\mathcal{L}$ a funcțiilor liniare posedă, față de adunarea funcțiilor și înmulțirea cu un număr real, o structură de spațiu vectorial pe $\mathbb{R}$.

OBSERVAȚII

1. Aplicația φ care face ca oricărui număr real k să-i corespundă funcția liniară $f_k = \varphi(k)$ este un izomorfism al structurilor aditive ale lui $\mathbb{R}$ și $\mathcal{L}$, și prin urmare, pentru că $(\mathbb{R}, +)$ este un grup abelian, se poate conchide fără alt raționament că $(\mathcal{L}, +)$ este de asemenea un grup abelian.

2. Mai general, această aplicație φ , bijectivă a lui $\mathbb{R}$ și $\mathcal{L}$, este astfel că, oricare ar fi numerele reale λ, μ, k și k' avem:

$$\varphi(\lambda k + \mu k') = \lambda \varphi(k) + \mu \varphi(k') = \lambda f_k + \mu f_{k'};$$

φ este deci o aplicație liniară și bijectivă a lui $\mathbb{R}$ în $\mathcal{L}$. Prin urmare, pentru că $\mathbb{R}$ este un spațiu vectorial pe $\mathbb{R}$, $\mathcal{L}$ este de asemenea un spațiu vectorial pe $\mathbb{R}$ (Geometrie, Fascicula II, nr. 6.1.4).

11.1.4. Sens de variație a funcției liniare de coeficient k

Reamintim că studiul sensului variației unei funcții numerice f este studiul comparat al ordinii numerelor reale și al imaginilor lor prin f (nr. 7.2).

Fie funcția f_k :

$$f_k(x) = kx,$$

și fie x_0 și x_1 două numere reale diferite, ($x_0 \neq x_1$):

$$f_k(x_0) = kx_0,$$

$$f_k(x_1) = kx_1.$$

Raportul de creștere τ_k a funcției este deci:

$$\tau_k = \frac{f_k(x_0) - f_k(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{k(x_0 - x_1)}{x_0 - x_1} = k.$$

Raportul de creștere a funcției liniare este constant. Rezultă de aci următoarea teoremă:

TEOREMĂ. Sensul de variație a funcției f_k este dat de următoarele echivalențe:

$$k > 0 \iff f_k \text{ crescătoare pe } \mathbb{R},$$

$$k = 0 \iff f_k \text{ constantă pe } \mathbb{R},$$

$$k < 0 \iff f_k \text{ descrescătoare pe } \mathbb{R}.$$

11.1.5. Valorile luate de funcție cind variabila ia valori „mari” în valoare absolută

Reluînd unul din exemplele studiate la nr. 11.1.1, oricare ar fi suma B de care dispunem, va exista întotdeauna o cantitate A de mărfuri, dincolo de care posibilitățile de plată se vor dovedi insuficiente.

Fie, de exemplu, o marfă al cărei preț unitar este 3 F. Prețul global al unei cantități x de marfă va fi:

$$f_3(x) = 3x \text{ (în franci).}$$

Presupunem că dispunem de un milion de franci. Dacă vom avea nevoie de o cantitate de mărfuri, superioară lui $\frac{10^6}{3}$, prețul total va deveni mai mare de 10^6 și prin urmare posibilitățile de plată vor fi insuficiente:

$$x > \frac{10^6}{3} \implies f_3(x) > 10^6.$$

Acest exemplu ilustrează faptul că, un număr B fiind dat, este posibil să se aleagă x , astfel ca $f_3(x)$ să fie superior lui B . Mai general, fie funcția f_k , unde k este pozitiv. Oricare ar fi numărul pozitiv B , există un număr A , astfel că $x_0 > A$ atrage după sine $f_k(x_0) > B$.

Într-adevăr, inecuația $kx > B$ admite ca soluție elementele mulțimii $\left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x > \frac{B}{k}\right\}$. Pentru a realiza proprietatea anunțată, este suficient să luăm $A = \frac{B}{k}$.

Pentru a rezuma această proprietate dăm următoarele definiții:

DEFINIȚIE. Se spune că variabila x tinde către infinitul pozitiv sau către plus infinit și se scrie: $x \rightarrow +\infty$, dacă, A fiind un număr pozitiv, arbitrar de mare, valorile numerice pe care le dăm variabilei sînt mai mari decît A .

Nimic nu ne împiedică, de exemplu, în cazul funcțiilor precedente, să dăm lui x valori mai mari decât 10^{10} , sau 10^{100} , sau $10(100^{100})$, ..., sau superioare oricărui alt număr fix, oricât de mare ar fi el, a cărui definiție s-ar da.

DEFINIȚIE. Se spune că variabila x tinde către infinitul negativ sau către minus infinit, și se scrie: $x \rightarrow -\infty$ dacă, A fiind un număr pozitiv, arbitrar de mare, valorile numerice pe care le dăm variabilei sînt mai mici ca opusul lui A .

Se va aminti că notația $+\infty$ (sau $-\infty$) nu desemnează un număr. Oricît de mare ar fi un număr, el rămîne finit. În consecință, nu putem pune semnul egalității între o literă ca x , care este chemată să reprezinte un număr și semnul $+\infty$.

DEFINIȚIE. Se spune că numărul $f(x)$ tinde spre $+\infty$ cînd x tinde către $+\infty$ dacă, oricare ar fi numărul pozitiv B , există un număr A , astfel că $x_0 > A$, implică $f(x_0) > B$. Această definiție se notează:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \rightarrow +\infty \\ \text{pentru} \\ x \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall B \in \mathbb{R}^+, \exists A \\ x_0 > A \implies f(x_0) > B. \end{array} \right.$$

Atunci cînd x tinde către plus infinit, valorile numerice pe care le ia funcția $y = \frac{x}{100}$ pot depăși orice număr arbitrar mare B , dat dinainte; este suficient să considerăm valori ale lui x „destul de mari”.

Datorită faptului că această funcție este crescătoare, dacă ea va atinge B pentru o valoare x_0 dată lui x , ea va depăși pe B pentru $x > x_0$. Dar definiția pe care noi am dat-o nu trebuie să se asocieze în mintea cititorului cu ideea unei creșteri continue.

EXEMPLU. Toată lumea cunoaște problema melcului care urcă în lungul unui stîlp telegrafic: ziua urcă doi metri, iar noaptea coboară un metru. Stîlpul are o înălțime de șase metri. Cînd va ajunge melcul în vîrf? Intenția noastră nu este să rezolvăm această problemă, ci să facem observația că, pe o linie nelimitată Ox , un punct M cu mersul melcului nu s-ar depărta în mod con-

stănt de O și că, totuși, distanța OM ar sfârși prin a depăși orice lungime dată L . Nu s-ar putea afirma însă că distanța ar depăși definitiv L , întrucât ea a fost atinsă odată.

Acest exemplu arată că definiția nu implică nici o idee de creștere continuă.

■ *Studiul funcției f_k când x tinde către infinit.* Această definiție și definițiile analoage, pe care le vom rezuma mai departe, permit să se scrie cu precizie comportamentul funcției pentru valorile, mari în valoare absolută, ale variabilei.

Fie deci f_k definită de $f_k(x) = kx$, o funcție liniară dată. Fie, pe de altă parte, B un număr arbitrar pozitiv dat.

Să căutăm dacă, pentru valori „destul de mari” ale lui x , valoarea $f_k(x)$ depășește definitiv pe B .

În termeni matematici, problema este de a determina mulțimea:

$$E = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } kx > B\}.$$

a) Dacă k este pozitiv:

$$E = \left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x > \frac{B}{k}\right\}.$$

Avem, deci, în acest caz:

$$x \in E \iff x > \frac{B}{k} \implies f_k(x) > B.$$

b) Dacă k este negativ:

$$E = \left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x < \frac{B}{k}\right\}.$$

În acest caz, avem:

$$x \in E \iff x < \frac{B}{k} \implies f_k(x) > B.$$

În virtutea acestor răspunsuri, vom enunța:

TEOREMĂ. Pentru $k > 0$, $f_k(x) = kx$ tinde către infinitul pozitiv când x tinde către infinitul pozitiv.

Se notează:

$$f_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

TEOREMĂ. Pentru $k < 0$, $f_k(x) = kx$ tinde spre infinitul pozitiv cînd x tinde spre infinitul negativ.

Se notează:

$$f_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty.$$

■ *Alte definiții și teoreme.* Tabloul de mai jos rezumă definițiile relative la funcțiile $f(x)$ care tind către infinit cînd x tinde spre infinit.

$f(x) \rightarrow +\infty$	$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall B \in \mathbb{R}^+, \exists A \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow +\infty \\ (x > A \Rightarrow f(x) > B) \end{array} \right\} \text{ cînd } x \rightarrow -\infty$	$\Leftrightarrow$
	$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall B \in \mathbb{R}^+, \exists A \\ x < -A \Rightarrow f(x) > B \end{array} \right.$	
$f(x) \rightarrow -\infty$	$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall B \in \mathbb{R}^+, \exists A \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow -\infty \\ x > A \Rightarrow f(x) < -B \end{array} \right\} \text{ cînd } x \rightarrow -\infty$	$\Leftrightarrow$
	$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall B \in \mathbb{R}^+, \exists A \\ x < -A \Rightarrow f(x) < -B \end{array} \right.$	

Tabloul ce urmează rezumă teoremele relative la comportamentul valorii luate de funcția f_k pentru valorile variabilei, infinit mari în valoare absolută.

TEOREME. Comportarea lui $y = kx$ pentru x tinzînd către $+\infty$ este dată de următoarele rezultate:

$a > 0 \quad kx \rightarrow +\infty \text{ cînd } x \rightarrow +\infty$	$\left \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$
$a > 0 \quad kx \rightarrow -\infty \text{ cînd } x \rightarrow -\infty$	
$a < 0 \quad kx \rightarrow -\infty \text{ cînd } x \rightarrow +\infty$	
$a < 0 \quad kx \rightarrow +\infty \text{ cînd } x \rightarrow -\infty$	

Toate aceste teoreme se demonstrează ca prima dintre ele.

11.1.6. Reprezentarea grafică a grafului funcției liniare f_k

Notăție: vom spune adesea grafic pentru „reprezentarea grafică a grafului“.

Fie D mulțimea de puncte căutată, în reperul $\mathcal{R}(0, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Punctul O aparține lui D , căci coordonatele punctului O în reperul $\mathcal{R}$ fiind $x_0 = 0$ și $y_0 = 0$, oricare ar fi numărul real k , $f_k(x_0) = k \times 0 = 0 = y_0$.

b) Fie M un punct care aparține lui D . Fie x și y coordonatele punctului M . Avem:

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Dar:

$$M \in D \implies y = f_k(x) = kx,$$

și prin urmare:

$$\vec{OM} = x\vec{i} + kx\vec{j} = x(\vec{i} + k\vec{j}).$$

Vectorul $\vec{i} + k\vec{j} = \vec{V}_k$ este un vector fix; deci:

$$M \in D \implies \vec{OM} = x\vec{V}_k,$$

x fiind un număr real, abscisă a lui M .

Reciproc, fie un punct M astfel că:

$$\exists x; x \in \mathbb{R}; \vec{OM} = x\vec{V}_k = x(\vec{i} + k\vec{j});$$

coordonatele lui M sînt atunci x și kx și prin urmare M aparține lui D .

În concluzie:

$$D = \{M; \vec{OM} = x\vec{V}_k; x \in \mathbb{R}\}.$$

TEOREMĂ. Graficul în reperul $\mathcal{R}$ al funcției f_k este dreapta care trece prin O și are ca vector director $\vec{V}_k = \vec{i} + k\vec{j}$, unde $\vec{i}$ și $\vec{j}$ sînt vectorii de bază ai reperului $\mathcal{R}$.

Vectorul director $\vec{V}_k$ al dreptei D este perfect definit de coeficientul k . Acest coeficient caracterizează direcția graficului D în raport cu reperul.

Reciproc, orice dreaptă Δ care trece prin O (în afară de dreapta yOy' al cărei vector director este $\vec{j}$) posedă un vector director de forma $\vec{i} + \lambda\vec{j} = \vec{V}_\lambda$. După prima parte, această dreaptă Δ este reprezentarea grafică a grafului funcției f_λ .

DEFINIȚIE. Coeficientul k , care determină direcția graficului D al funcției f_k , este numit coeficient director al dreptei D .

EXERCIȚII.

11.1. Să se studieze structura conferită mulțimii $\mathcal{L}$ a funcțiilor liniare de legea de compoziție a aplicațiilor (notată $\circ$). Este această lege comutativă în $\mathcal{L}$?

11.2. Să se studieze structura mulțimii $\mathcal{L}$, înzestrată cu adunarea funcțiilor și cu compunerea aplicațiilor.

11.3. Înmulțirea funcțiilor definește o structură pe $\mathcal{L}$?

11.4. Să se rezolve următoarea ecuație:

$$\{\varphi; \varphi \in \mathcal{L} \text{ și } \varphi \circ (f_k + f_k) = I = f_1\}?$$

($f_1 = I$ este aplicația identică a lui $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$.)

11.5. Să se rezolve următoarea ecuație:

$$\{\varphi; \varphi \in \mathcal{L} \text{ și } f_a \circ \varphi + f_b = f_0\}?$$

11.6. Să se rezolve următoarea ecuație:

$$\{\varphi; \varphi \in \mathcal{L} \text{ și } f_1 \circ \varphi \circ \varphi + f_1 \circ \varphi - f_0 = f_0\}?$$

11.7. Să se studieze structura mulțimii $\mathcal{L}_a$ a funcțiilor liniare cu coeficienți raționali față de adunarea funcțiilor și înmulțirea printr-un număr rațional.

11.8. Care sînt funcțiile liniare care, compuse cu ele înșile, dau identitate lui $\mathbb{R}$?

11.2. FUNCȚII AFINE

11.2.1. Citeva situații curente

Se întâmplă adesea, ca la atributul global calculat pentru un număr x de obiecte (a se vedea nr. 11.1.1), trebuie să se adauge un număr fix. Presupunem, de exemplu, că se cumpără mărfuri pe care le punem într-un ambalaj. La prețul mărfurilor se va adăuga prețul ambalajului (presupus destul de încăpător pentru a conține toate mărfurile cumpărate).

Găsim cu ușurință numeroase exemple analoage și sîntem conduși să studiem aplicația care face ca oricărui număr real x să-i corespundă numărul $y = \varphi_{(a,b)}(x) = ax + b$.

Acastă funcție numerică este definită pentru orice număr real x :

$$x \xrightarrow{\varphi_{(a,b)}} ax + b = \varphi_{(a,b)}(x).$$

11.2.2. Funcția $\varphi_{(a,b)}$. Neliniaritate. Legături cu liniaritatea

Reamintim că o aplicație f a lui $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$ este liniară, dacă și numai dacă, sînt verificate următoarele două proprietăți:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Or:

$$\varphi_{(a,b)}(\lambda x) = a(\lambda x) + b = a\lambda x + b,$$

și:

$$\lambda \varphi_{(a,b)}(x) = \lambda(ax + b) = \lambda ax + \lambda b.$$

Există deci numere reale λ astfel că (dacă $b \neq 0$):

$$\varphi_{(a,b)}(\lambda x) \neq \lambda \varphi_{(a,b)}(x);$$

este suficient să luăm $\lambda \neq 1$; prin urmare, funcția $\varphi_{(a,b)}$ nu este liniară.

Se poate observa în același timp că, pentru orice x real:

$$\varphi_{(a,b)}(x) - b = f_a(x),$$

adică, dacă C_b este funcția „constantă egală cu b ”, avem $\varphi_{(a,b)} - C_b = f_a$, care este o funcție liniară.

DEFINIȚIE. O funcție φ a lui $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$ se zice afină dacă există un număr real b constant, astfel ca funcția f , definită prin:

$$f(x) = \varphi(x) - b,$$

să fie liniară.

TEOREMĂ. Funcția $\varphi_{(a,b)}$ este o funcție afină.

11.2.3. Sensul de variație al funcției afine $\varphi_{(a,b)}$

Fie funcția $\varphi_{(a,b)}$ și x_0 și x_1 două numere reale diferite. Ca la nr. 11.1.3, se calculează raportul de creștere $\tau_{(a,b)}$ între valorile x_0 și x_1 al funcției $\varphi_{(a,b)}$:

$$\begin{aligned}\tau_{(a,b)} &= \frac{\varphi_{(a,b)}(x_0) - \varphi_{(a,b)}(x_1)}{x_0 - x_1} = \\ &= \frac{(ax_0 + b) - (ax_1 + b)}{x_0 - x_1} = \frac{a(x_0 - x_1)}{x_0 - x_1} = a.\end{aligned}$$

Raportul de creștere al funcției afine este constant. De aci rezultă următoarea teoremă:

TEOREMĂ. Sensul de variație al funcției $\varphi_{(a,b)}$ este dat de următoarele echivalențe:

$$a > 0 \iff \varphi_{(a,b)} \text{ creșcătoare pe } \mathbb{R},$$

$$a = 0 \iff \varphi_{(a,b)} \text{ constantă pe } \mathbb{R},$$

$$a < 0 \iff \varphi_{(a,b)} \text{ descrescătoare pe } \mathbb{R}.$$

11.2.4. Studiul funcției afine $\varphi_{(a,b)}$ cînd x tinde către infinit

Fie $\varphi_{(a,b)}$ o funcție afină dată, definită prin $\varphi_{(a,b)}(x) = ax + b$.

Fie, pe de altă parte, B un număr arbitrar pozitiv dat. Să cercetăm dacă, pentru valori „destul de mari” ale

lui $|x|$, valoarea $\varphi_{(a,b)}(x)$ depășește definitiv pe B . În termeni matematici, se pune problema să se determine dacă mulțimea $\mathcal{S}_B = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax + b > B\}$ conține o semidreaptă, oricare ar fi numărul real B .

1. Dacă a este pozitiv:

$$\mathcal{S}_B = \left\{ x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x > \frac{B-b}{a} \right\}.$$

Avem, în acest caz: $x \in \mathcal{S}_B \iff x > \frac{B-b}{a} \implies \varphi_{(a,b)}(x) > B$.

2. Dacă a este negativ:

$$\mathcal{S}_B = \left\{ x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x < \frac{B-b}{a} \right\}.$$

În acest caz, avem: $x \in \mathcal{S}_B \iff x < \frac{B-b}{a} \implies \varphi_{(a,b)}(x) > B$.

În virtutea acestor răspunsuri, vom enunța:

TEOREMĂ. Pentru $a > 0$, $\varphi_{(a,b)}(x) = ax + b$ tinde spre infinitul pozitiv când x tinde spre infinitul pozitiv.
Pentru $a < 0$, $\varphi_{(a,b)}(x) = ax + b$ tinde spre infinitul pozitiv când x tinde spre infinitul negativ.

Tabloul care urmează rezumă teoremele relative la comportarea funcției $\varphi_{(a,b)}$ pentru valorile variabilei infinit mari în valoare absolută.

TEOREMĂ. Comportarea lui $y = ax + b$ pentru x tinde spre $+\infty$ este dată de următoarele rezultate:

$a > 0$	$ax + b \rightarrow +\infty$	când $x \rightarrow +\infty$
$a > 0$	$ax + b \rightarrow -\infty$	când $x \rightarrow -\infty$
$a < 0$	$ax + b \rightarrow -\infty$	când $x \rightarrow +\infty$
$a < 0$	$ax + b \rightarrow +\infty$	când $x \rightarrow -\infty$

Toate aceste teoreme se demonstrează ca prima dintre ele.

EXEMPLU. Fie funcția definită prin:

$$f(x) = \frac{x}{1\,000\,000} - 50\,000\,000.$$

Pentru $x = 1\,000\,000$: $f(x) = -49\,999\,999$;

Pentru $x = 50\,000\,000\,000\,000$: $f(x) = 0$;

Pentru $x = 50\,000\,000\,000\,001$: $f(x) = 0,000\,001$;

Pentru $x = 50\,000\,010\,000\,000$: $f(x) = 10$.

Graful acestei funcții este greu de reprezentat, chiar dacă alegem bine vectorii unitari. Dar punctul de vedere al calculului este simplu. Se poate alege x pentru ca numărul $f(x)$ să fie mai mare decât 10^{100} (de exemplu)?

Fie deci să se determine mulțimea:

$$E = \left\{ x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{x}{10^6} - 5 \cdot 10^7 > 10^{100} \right\}$$

Se știe: $x > 10^6[10^{100} + 5 \cdot 10^7] \Rightarrow f(x) > 10^{100}$.

Deci:

$$E = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x > 10^6[10^{100} + 5 \cdot 10^7]\} =](10^6[10^{100} + 5 \cdot 10^7]), +\infty[$$

și E este un interval de tipul $]x, +\infty[$.

Cum nu se cere decât o condiție suficientă, se poate lua o condiție mai tare, dar mai simplu de scris; de exemplu:

$$x > 2 \cdot 10^{106} \Rightarrow f(x) > 10^{100}$$

Tratăm direct un caz cu date numerice.

EXEMPLU. Să se studieze comportarea lui: $f(x) = -3x - 10\,000$ când x tinde spre $-\infty$. Se consideră că $f(x)$ tinde spre $+\infty$. Fie B , arbitrar, fix, foarte mare. Să se determine:

$$E = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } -3x - 10\,000 > B\}.$$

Avem:

$$E = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } -3x > B + 10\,000\},$$

$$E = \left\{ x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x < -\frac{B + 10\,000}{3} \right\}.$$

Ceea ce înseamnă că toate numerele negative a căror valoare absolută depășește $\frac{B + 10\,000}{3}$ convin și, prin urmare, $f(x)$ tinde spre $+\infty$ atunci când x tinde spre $-\infty$.

11.2.5. Reprezentarea grafică a grafului funcției afine $\varphi_{(a,b)}$

Trebuie să studiem mulțimea perechilor $(\lambda, a\lambda + b)$ care sînt reprezentate într-un plan raportat la un reper cartesian prin punctele λ și $a\lambda + b$. Pe scurt, vom nota un punct prin coordonatele sale în reperul ales (atunci cînd nu are loc nici o confuzie).

Fie D mulțimea căutată în reperul $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$D = \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \text{ și } y = ax + b \right\}.$$

1. Fie B punctul de coordonate 0 și b ; $b = a \cdot 0 + b$ și, prin urmare, B aparține lui D .

2. Fie M un punct oarecare al lui D , de coordonate x și $y = ax + b$.

$$\text{Avem: } \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = x\vec{i} + y\vec{j} - b\vec{j}.$$

$$\text{Dar: } M \in D \implies y = \varphi_{(a,b)}(x) = ax + b,$$

$$\begin{aligned} \text{și, prin urmare: } \overrightarrow{BM} &= x\vec{i} + (ax + b)\vec{j} - b\vec{j} = \\ &= x\vec{i} + ax\vec{j} + b\vec{j} - b\vec{j} = x(\vec{i} + a\vec{j}). \end{aligned}$$

Vectorul $\vec{i} + a\vec{j} = \vec{V}_a$ este un vector fix, deci:

$$M \in D \implies \overrightarrow{BM} = x\vec{V}_a,$$

x fiind un număr real, abscisa lui M .

Reciproc, fie un punct M astfel că:

$$\exists x; x \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{BM} = x\vec{V}_a = x(\vec{i} + a\vec{j}).$$

Or:

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM},$$

deci, pentru că $\overrightarrow{OB} = b\vec{j}$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + ax\vec{j} + b\vec{j} = x\vec{i} + (ax + b)\vec{j};$$

coordonatele lui M sînt atunci x și $ax + b$ și, prin urmare, M aparține lui D .

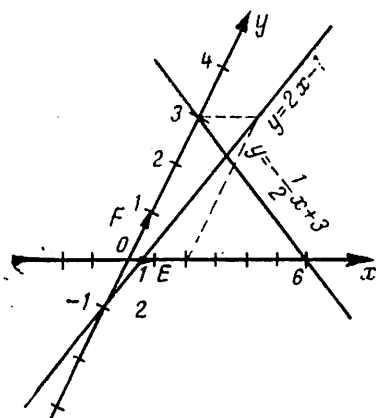


Fig. 1

În concluzie: $D = \{M; \overrightarrow{BM} = x\vec{V}_a; x \in \mathbb{R}\}$

$$= \{M; \overrightarrow{OM} = x\vec{V}_a + b\vec{j}; x \in \mathbb{R}\}$$

TEOREMA. Graficul, în reperul $\mathcal{R}$, al funcției $\varphi_{(a,b)}$ este dreaptă care trece prin punctul B de coordonate O și b în reperul $\mathcal{R}$ și de vector director $\vec{V}_a = \vec{i} + a\vec{j}$ unde $\vec{i}$ și $\vec{j}$ sînt vectorii de bază ai reperului $\mathcal{R}$.

OBSERVAȚIE. Graficul D al funcției $\varphi_{(a,b)}$ se deduce din graficul Δ al funcției f_a (cu condiția ca cele două grafice să fie studiate în același reper) prin translația de vector $b\vec{j}$.

11.2.6. Construcție. Puncte remarcabile

Pentru că graficul este o dreaptă, două puncte, în principiu, sînt suficiente pentru a-l construi. Pentru a mări precizia traseului, se vor alege:

1°. două puncte, cît mai depărtate posibil (pentru a orienta mai bine rigla);

2°. dacă-i posibil, puncte de coordonate întregi (pentru a micșora eroarea grafică). Se va verifica apoi, după terminarea lucrării că graficul conține într-adevăr punctele remarcabile care sînt:

a) punctul $x = 0, y = b$, unde graficul taie pe $y'Oy$;

b) punctul în care graficul taie pe $x'Ox$; acest punct are o ordonată nulă, are deci ca abscisă soluția ecuației:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax + b = 0\}?$$

Pentru $a \neq 0$, mulțimea S a soluțiilor acestei ecuații este $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Pentru $a = 0$ și $b \neq 0$: $S = \emptyset$.

Pentru $a = 0$ și $b = 0$: $S = \{\mathbb{R}\}$.

EXEMPLE.

I. $y = 2x - 1$ (fig. 1).

Graficul, determinat de:

$$(x = 0, y = -1) \text{ și } (x = 1, y = 1),$$

conține punctul remarcabil:

$$\left(x = \frac{1}{2}, y = 0\right).$$

II. $y = -\frac{1}{2}x + 3$ (fig. 1).

Graficul, determinat de $(x = 0, y = 3)$ și $(x = 6, y = 0)$, conține alte puncte de coordonate întregi ca $(x = 2, y = 2)$.

11.2.7. Cazul unui reper ortonormat

În cazul unui reper ortonormat, coeficientul director al graficului funcției f definit prin $f(x) = ax + b$ ia o semnificație particulară. Să marcăm (fig. 2) punctul A ($x = 1, y = a$) și dreapta Δ , mulțimea punctelor A ; graficul lui f_a este dreapta OA .

Avem: $a = \frac{\overline{EA}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{OE}}$, pentru că reperul este normat.

În acest caz, a se numește panta graficului lui $\varphi_{(a,b)}$, relativ la $x'Ox$.

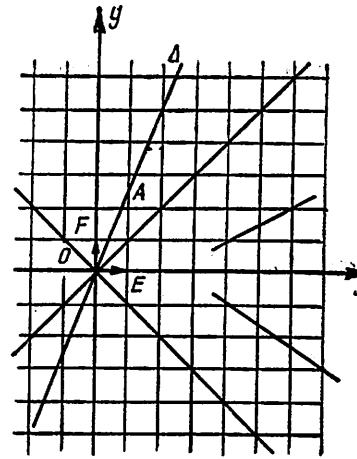


Fig. 2

11.2.8. Ecuația unui drepte în raport cu un reper dat

■ *Ecuația unei mulțimi de puncte ale unui plan raportat la un reper dat.* Considerăm un plan π raportat la un reper cartesian. Fie E o mulțime de puncte ale planului π și $\mathcal{S}$ mulțimea perechilor de numere reale corespunzătoare (fiecarui punct îi corespunde perechea coordonatelor sale în reperul dat). Vom numi ecuație a lui E o ecuație de forma:

$$\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \psi(x, y) = 0\}?$$

unde $\psi(x, y) = 0$ este o relație numerică între necunoscutele x și y , astfel că:

$$\mathcal{S} = \{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \psi(x, y) = 0\}.$$

■ *Mulțimea graficelor funcțiilor $\varphi_{(a,b)}$ într-un reper dat.* Considerăm un plan π și, în acest plan, un reper dat $\mathcal{R}$. Din studiul direct al graficelor funcțiilor $\varphi_{(a,b)}$ rezultă că mulțimea graficelor tuturor funcțiilor $\varphi_{(a,b)}$ cuprinde toate dreptele lui π , cu excepția acelor care sînt paralele

cu $y'Oy$. Dreptele lui π se repartizează în două mulțimi disjuncte:

1°. Mulțimea $\mathcal{K}$ a dreptelor care întâlnesc pe $y'Oy$ într-un punct B și pentru care există o funcție $\varphi_{(a,b)}$ ale cărei reprezentări grafice în reperul $\mathcal{R}$ sint aceste drepte.

2°. Mulțimea $\mathcal{K}'$ a dreptelor paralele cu $y'Oy$ care nu sint reprezentarea grafică a unei funcții.

■ Pentru studiul problemelor cu privire la ecuațiile dreptelor se va apela la cursul de Geometrie, Fascicola II, nr. 9.2.

EXERCIȚII

11.9. Să se studieze structura conferită mulțimii $\mathcal{F}$ a funcțiilor afine pe $\mathbb{R}$ de adunarea funcțiilor și compunerea aplicațiilor. Această ultimă lege este ea comutativă pe $\mathcal{F}$?

11.10. Înmulțirea funcțiilor definește o structură pe $\mathcal{F}$?

11.11. Să se studieze structura conferită mulțimii $\mathcal{F}$ a funcțiilor afine pe $\mathbb{R}$ de adunarea funcțiilor și de înmulțirea printr-un număr real.

11.12. Să se studieze structura conferită mulțimii $\mathcal{F}_Q$ a funcțiilor afine pe $\mathbb{R}$, cu coeficienți în Q , de adunarea funcțiilor și înmulțirea printr-un număr rațional.

Să se studieze sensul de variație al funcțiilor definite de relațiile următoare:

$$11.13. f(x) = (x + 3)(x - 7) - (x - 1)(x + 8).$$

$$11.14. g(x) = 2(x + 1)(x + 2) - (x - 3)(x - 7) - (x - 4)(x + 1).$$

11.15. Să se demonstreze direct că:

$$f(x) = -\frac{x}{10} + 1$$

ține spre $+\infty$ cind x tinde spre $-\infty$.

Să se găsească o condiție suficientă pentru ca:

$$f(x) > 100\,000.$$

11.16. Să se demonstreze direct că:

$$f(x) = -\frac{x}{7} + 2$$

ține spre $-\infty$ cind x tinde spre $+\infty$.

Să se găsească o condiție suficientă pentru ca:

$$f(x) < -1\,000.$$

11.17. Se reamintește că $E(x)$ desemnează pe cel mai mare întreg mai mic sau egal cu x .

Să se demonstreze că $E(x)$ tinde spre $+\infty$ când x tinde spre $+\infty$.

Aceeași chestiune pentru funcțiile definite de:

$$f(x) = x^2 \text{ și } g(x) = E(x^2).$$

*

Să se construiască:

a) un reper $\mathfrak{A} = (0, \vec{i}, \vec{j})$ pentru care:

$$\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}, \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}, \text{ măsura lui } (\vec{i}, \vec{j}) = 60^\circ;$$

b) un reper ortonormal $\mathfrak{A}'' = (0, \vec{i}', \vec{j}')$ pentru care:

$$\|\vec{i}'\| = \|\vec{j}'\| = 2 \text{ cm}.$$

În fiecare din aceste repere să se construiască reprezentările grafice ale funcțiilor definite prin:

$$11.18. f(x) = -x + 3.$$

$$11.20. k(x) = -\frac{x}{3} + 1.$$

$$11.19. g(x) = x - 1.$$

$$11.21. k(x) = 2x - 3.$$

11.3. FUNCȚII AFINE PE INTERVALE

11.3.1. Definiție

O funcție f este afină pe intervale dacă:

1°. Există o partiție a mulțimii de definiție într-un număr finit de intervale mărginite sau nu.

2°. În fiecare din aceste intervale, funcția f coincide cu o funcție afină.

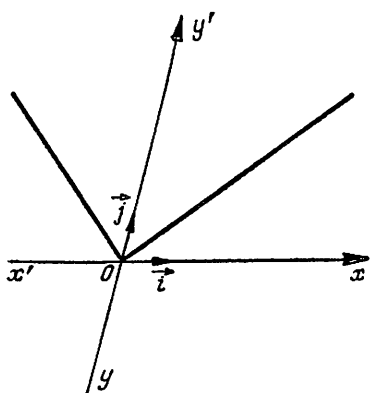


Fig. 3

11.3.2. Exemplu:

Să se studieze funcția definită prin $y = |x|$.

Pentru $x < 0$, funcția studiată coincide cu funcția definită prin $y = -x$. Pentru $x > 0$, funcția studiată coincide cu funcția $y = x$. Studiul acestei funcții se rezumă într-un tablou de forma:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-x$	0	x
variația lui $f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Această funcție admite reprezentarea grafică din figura 3.

11.3.3. Tehnica generală de studiu

Pentru a studia o funcție afină pe intervale, este comod să se studieze succesiv diversele funcții afine care intervin după intervale.

EXEMPLU. Să se studieze funcția numerică f definită prin:

$$y = \sqrt{(x-2)^2} + |x|.$$

Această relație se mai scrie:

$$f(x) = |x-2| + |x|.$$

Valorile particulare care intervin vor fi valorile $x = 0$ și $x = 2$.

Pentru $x \leq 0$, funcția f coincide cu funcția f_1 , definită prin:

$$f_1(x) = 2 - x - x = 2 - 2x.$$

Pentru $0 \leq x \leq 2$, funcția f coincide cu funcția f_2 , definită prin:

$$f_2(x) = 2 - x + x = 2.$$

Pentru $x \geq 2$, funcția f coincide cu funcția f_3 , definită prin:

$$f_3(x) = x - 2 + x = 2x - 2.$$

De unde, tabloul care rezumă studiul și graficul (fig. 4):

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$2 - 2x$	2	2	$2x - 2$
variația lui $f(x)$	$+\infty$	2	2	$+\infty$
		constantă		

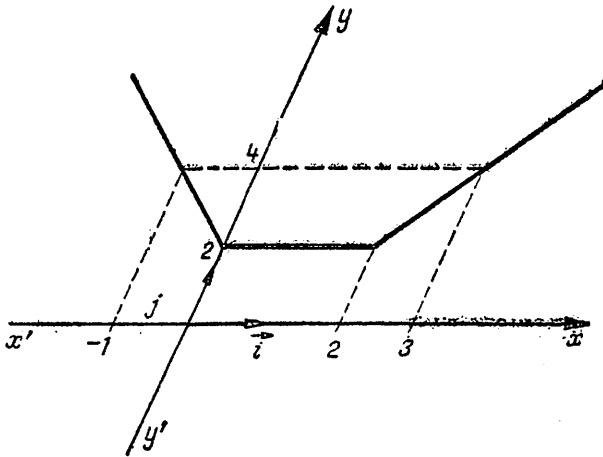


Fig. 4

11.3.4. Mulțimea funcțiilor afine pe intervale

Considerăm mulțimea $\mathcal{A}$ a funcțiilor afine pe intervale definite pe $\mathbb{R}$. Această mulțime este structurată de operațiile asupra funcțiilor.

Structura aditivă a acestei mulțimi. Fie două funcții f și g , elemente ale lui $\mathcal{A}$. Putem forma funcția $f + g$. Prima problemă ce se pune este de a ști dacă această funcție este afină pe intervale.

Studiul unui caz particular va permite să se pună în lumină procesul de formare a funcției $f + g$.

Fie f funcția definită prin $f(x) = |x - 2| + |x|$, și fie g funcția definită prin:

$$\begin{cases} g(x) = 3x - 1 & \text{pentru } x \in]-\infty, -1[, \\ g(x) = -x + 1 & \text{pentru } x \in]-1, +2[, \\ g(x) = 4x & \text{pentru } x \in]2, +\infty[. \end{cases}$$

Formarea funcției $f + g$ este rezumată în următorul tablou:

x	$-\infty$	-1	0	$+2$	$+\infty$
$f(x)$	$-2x + 2$	$-2x + 2$	2	$2x - 2$	
$g(x)$	$3x - 1$	$-x + 1$	$-x + 1$	$4x$	
$(f + g)(x)$	$x + 1$	$-3x + 3$	$-x + 3$	$6x - 2$	

Funcția $f + g$ este afină pe intervale. Cazul general dă loc la un raționament analog.

Presupunem că funcția f , afină pe intervale, este afină pe intervalele definite de seria crescătoare a extremităților lor.

Fie: $S_f = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$; $\alpha_i < \alpha_j \iff i < j$.

Oricare ar fi i , f este afină pe intervalul $] \alpha_i, \alpha_{i+1}[$; f este de asemenea afină pe intervalele $] -\infty, \alpha_1[$ și $] \alpha_p, +\infty[$.

Fie, de asemenea:

$$S_g = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}.$$

Considerăm șirul crescător format de elementele lui $S_f \cup S_g$, adică:

$$S = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}.$$

Pe toate intervalele de forma $] \gamma_i, \gamma_{i+1}[$, f și g coincid cu funcțiile afine. Pe un asemenea interval, vom avea:

$$f(x) = ax + b,$$

$$g(x) = cx + d,$$

și prin urmare: $(f + g)(x) = (a + c)x + b + d$, care este deci afină.

Rezultă de aci că funcția $f + g$ este afină pe intervale, funcția $f + g$ fiind afină pe toate intervalele de forma $] \gamma_i, \gamma_{i+1}[$, ca și pe $] -\infty, \gamma_1[$ și pe $] \gamma_m, +\infty[$.

Vom avea deci:

P₁. *Adunarea funcțiilor este o lege de compoziție internă pentru $\mathcal{A}$.*

Datorită asociativității adunării numerelor reale, pe fiecare interval de forma $] \gamma_i, \gamma_{i+1}[$, vom avea:

$\forall f \in \mathcal{A}, \forall g \in \mathcal{A}, \forall h \in \mathcal{A} [(f + g) + h](x) = [(f + (g + h))](x)$, și aceasta, oricare ar fi numărul real x ; deci:

$$(f + g) + h = f + (g + h).$$

P₂. Adunarea funcțiilor este asociativă în $\mathcal{A}$.

Funcția $\varphi_{(0,0)}$ este o funcție afină, deci cu atât mai mult afină pe intervale.

Pentru orice număr real x , $\varphi_{(0,0)}(x) = 0$ și, prin urmare:

$$f(x) + \varphi_{(0,0)}(x) = f(x) = \varphi_{(0,0)}(x) + f(x).$$

Ceea ce implică:

$$f + \varphi_{(0,0)} = \varphi_{(0,0)} + f = f.$$

P₃. $\varphi_{(0,0)}$ este element neutru pentru adunarea în $\mathcal{A}$.

Pe orice interval în care funcția f este afină, funcția $-f$ este de asemenea afină. Prin urmare, pentru orice funcție f , afină pe intervale, funcția $-f$ este afină pe intervale. Or, prin definiție și pentru orice număr real x , avem:

$$\varphi_{(0,0)}(x) = f(x) + (-f)(x) = 0,$$

și prin urmare:

$$f + (-f) = \varphi_{(0,0)}.$$

P₄. Orice funcție f , liniară pe intervale, este simetrizabilă față de adunarea în $\mathcal{A}$.

P₅. Mai mult, adunarea numerelor reale fiind comutativă, adunarea funcțiilor din $\mathcal{A}$ este de asemenea comutativă.

TEOREMĂ. Înzestrată cu adunarea funcțiilor, mulțimea $\mathcal{A}$ a funcțiilor afine pe intervale, definite pe $\mathbb{R}$, este un grup abelian.

■ Structura față de înmulțirea cu un număr real.

Fie o funcție f din $\mathcal{A}$. Oricare ar fi numărul real λ și pe orice interval, în care f este afină, λf este de asemenea afină. Într-adevăr:

$$\lambda(ax + b) = (\lambda a)x + \lambda b.$$

Se deduce de aci că:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f \in \mathcal{A} \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{A}.$$

Această lege de compoziție externă posedă următoarele proprietăți:

$$P_1. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{A}, \forall g \in \mathcal{A} \quad \lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g.$$

Într-adevăr, oricare ar fi x real, avem:

$$[\lambda(f + g)](x) = [\lambda f](x) + [\lambda g](x) = [\lambda f + \lambda g](x).$$

$P'_2. \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{A} (\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f.$
 Oricare ar fi numărul real x , avem într-adevăr:

$$[(\lambda + \mu)f](x) = \lambda f(x) + \mu f(x) = [\lambda f + \mu f](x).$$

$P'_3. \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{A} (\lambda \mu)f = \lambda(\mu f).$

Demonstrarea acestei proprietăți este asemănătoare cu precedentele:

$$\forall x \in \mathbb{R} [(\lambda \mu)f](x) = \lambda \mu f(x) = \lambda[\mu f(x)] = [\lambda(\mu f)](x).$$

$P'_4. \forall f \in \mathcal{A} 1. f = f.$

La fel: $\forall x \in \mathbb{R} [1.f](x) = 1.f(x) = f(x).$

Ținând cont de aceste diverse proprietăți, se va putea conchide (Geometrie, fascicula I, nr. 4.2.1):

TEOREMĂ. Mulțimea $\mathcal{A}$ a funcțiilor afine pe intervale, definite pe $\mathbb{R}$ posedă, față de adunarea funcțiilor și înmulțirea cu un număr real, o structură de spațiu vectorial pe $\mathbb{R}$.

EXERCITII

11.22. Să se studieze structura conferită mulțimii $\mathcal{A}$ a funcțiilor afine pe intervale de compunerea aplicațiilor.

11.23. Se consideră funcția definită, pentru $x > 0$ prin condițiile următoare, ($E(x)$ desemnând partea întreagă a lui x):

Dacă $E(x)$ este multiplu de 4:

$$f(x) = x.$$

Dacă $E(x)$ este multiplu de 4, plus 1 :

$$f(x) = x + 1.$$

Dacă $E(x)$ este multiplu de 4, plus 2:

$$f(x) = x + 2.$$

Dacă $E(x)$ este multiplu de 4, plus 3:

$$f(x) = x + 3.$$

Să se demonstreze că $f(x)$ tinde spre $+\infty$ când x tinde spre $+\infty$.
 Avem dreptul să spunem că $f(x)$ crește mereu.

Să se studieze variația lui $f(x)$ pe mulțimea $] - 5, + 7[$.

11.24. Să se studieze, când x tinde către $+\infty$, comportarea funcției definită prin:

$$f(x) = x - \frac{1}{10} E(x).$$

Să se construiască, într-un reper ortonormat în așa fel că $OE = OF = 1$ cm, reprezentarea grafică a funcțiilor definite de următoarele relații:

$$11.25. f(x) = x + |x|.$$

$$11.26. f(x) = x + |x| + x - 1 + |x - 1|.$$

$$11.27. f(x) = x + |x| + x - 1 + |x - 1| + x - 2 + |x - 2|.$$

$$11.28. f(x) = |2x - 3| + |x - 5|.$$

$$11.29. f(x) = |(2x - 1) + |x - 3||.$$

$$11.30. f(x) = x - E(x); E(x) \text{ partea întreagă a lui } x > 0.$$

$$11.31. \begin{cases} f(x) = x & \text{pentru } E(x) \text{ par} \\ f(x) = x + 1 & \text{pentru } E(x) \text{ impar.} \end{cases}$$

$$11.32. f(x) = x - \frac{1}{2} E(x).$$

$$11.33. f(x) = \sqrt{(x-1)^2} + x.$$

$$11.34. f(x) = x - E(2x).$$

$$11.35. f(x) = xE(x). \text{ (Să se studieze pe intervalul }]-5, +4[.)$$

11.36. Se știe că funcția f este afină, dar nu se cunoaște a și b decât printr-o încadrare: $0,6 \leq a \leq 0,8$; $1,2 \leq b \leq 1,4$.

Fie un reper $\mathcal{A}$. În care regiune a planului se găsește graficul funcției f ?

11.37. Să se studieze graficul relației definite prin:

$$x \mathcal{A} y \iff x^2 - 4y^2 = 0$$

PROBLEME

11.38. Se consideră funcția f_m , definită prin:

$$f_m(x) = y,$$

unde y este definit de relația:

$$x - y + 1 + m(x + y) = 0,$$

în care m este un parametru variabil.

1°. Există o valoare a parametrului pentru care graful funcției conține perechea (2,5)?

2°. Pentru ce valoare a lui m graficul lui f (care este o dreaptă) este paralel cu graficul funcției g definită prin:

$$g(x) = 3x + 1?$$

3°. Să se demonstreze că graficele tuturor funcțiilor f_m (pentru valori diferite ale lui m) trec printr-un punct fix, care se va determina.

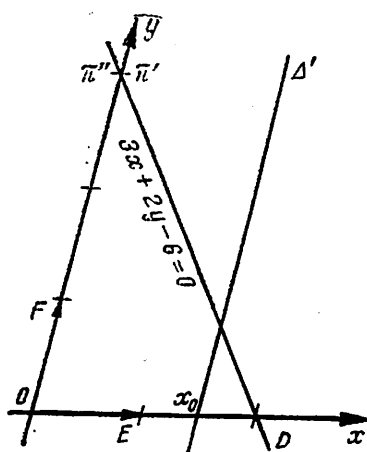


Fig. 5

11.89. Două orașe A și B sînt la distanța de 30 km. O navetă pleacă din A la ora 12 cu o viteză de 40 kilometri pe oră. Ajunsă în B , ea se oprește 15 minute și pleacă din nou spre A cu aceeași viteză; se oprește în A 15 minute și pleacă iar spre B și așa mai departe. Un automobil pleacă din A la ora 12 și 50 minute cu o viteză de 84 kilometri pe oră, mergînd spre B . Cînd se va încrucișa el cu naveta? (Soluție grafică.)

A 11.4. APLICAȚIE LA ECUAȚIILE ȘI INECUAȚIILE DE GRADUL ÎNȚI

11.4.1. Semnul polinomului $Ax + By + C$

Polinomul de gradul întîi:

$$P(x, y) = Ax + By + C \text{ cu } (A, B) \neq (0, 0)$$

a figurat în studiile noastre în calitate de membru întîi al ecuației unei drepte.

Într-un mod mai general, ne propunem să studiem semnul pe care-l ia valoarea numerică a polinomului $P(x, y)$ pentru orice pereche (x, y) . Se poate gândi rațional că folosirea unui reper cartezian va ușura acest studiu.

Se cunoaște mulțimea reprezentativă a relației $P(x, y) = 0$: aceasta este o dreaptă (D).

Se poate căuta mulțimea reprezentativă a relației $P(x, y) > 0$ și pe aceea a relației $P(x, y) < 0$. Neașteptăm să găsim trei mulțimi, două cite două disjuncte.

Să studiem un exemplu numeric:

$$P = 3x + 2y - 6.$$

Dreapta de ecuație $P = 0$ taie pe $x'Ox$ în punctul $x = 2, y = 0$; ea taie axa $y'Oy$ în $x = 0, y = 3$ (fig. 5). O trasăm.

Dreapta D împarte planul în două semiplane deschise de frontieră D . Fie π' acela care conține partea $y > 3$ pe axa Oy și fie π'' celălalt. Orice dreaptă Δ de abscisă $x = x_0$ taie frontiera în punctul:

$$y_0 = 3 - \frac{3}{2}x_0$$

și este împărțită într-o semidreaptă Δ' și o semidreaptă Δ'' . Pe Δ' avem:

$$y > y_0 \text{ sau } y = y_0 + h \text{ cu } h > 0.$$

Or:

$$P(x_0, y_0) = 3x_0 + 2y_0 - 6 = 0;$$

deci:

$$P(x_0, y_0) = 3x_0 + 2(y_0 + h) - 6 = (3x_0 + 2y_0 - 6) + 2h = 2h > 0.$$

Se vede că punctele lui π' fac pozitiv pe P .

Se vede de asemenea că punctele lui π'' , pentru care $y - y_0 = h, h > 0$, fac pe P negativ.

Cum P nu poate fi decât nul, negativ sau pozitiv, sîntem dispensați de a studia reciprocile.

Concluzie. Dreapta de ecuație $P = 0$ împarte planul în două semiplane. Pe unul, perechile (x, y) fac pe P pozitiv; pe altul îl fac negativ. Este suficientă o încercare pentru a determina semnul lui P .

OBSERVAȚIE IMPORTANTĂ

Am putea fi tentați să credem că semiplanul „superior” face toate polinoamele pozitive; ne vom convinge de falsitatea acestei propoziții studiind semnul polinomului:

$$Q = -3x - 2y + 6.$$

Frontiera rămîne aceea din exemplul precedent, dar π' și π'' schimbă de semn.

Raționamentul, purtat pe exemplul numeric, are o aplicare generală: el se aplică în toate cazurile în care dreapta de ecuație $P = 0$ nu este paralelă cu una din axe. Aceste cazuri particulare se studiază cu ușurință.

Inecuația:

$$\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } y > 2\}?$$

este verificată de toate punctele situate în semiplanul superior, pe care le delimitează dreapta $y = 2$ și numai de aceste puncte.

Mulțimea reprezentativă a inecuației:

$$\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } x < -3\}?$$

este semiplanul pe care-l delimitează dreapta $x = -3$ și care conține, de exemplu, punctul $(x = -4, y = 0)$.

11.4.2. Inecuații de gradul întâi cu două necunoscute

Știind să studiem semnul polinomului de gradul întâi cu două necunoscute, știm să rezolvăm grafic inecuațiile de gradul întâi cu două necunoscute.

EXEMPLE

I. Să se rezolve grafic sistemul de inecuații:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } \begin{cases} x - 3 < 0 \\ x - 2y + 5 > 0 \\ 3x - y - 1 > 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

determinând mulțimea sa reprezentativă.

S-a trasat (fig. 6) dreapta D_1 de ecuație:

$$x - 3 = 0$$

și, pentru a ține cont de (1), se suprimă regiunea situată la dreapta lui D_1 .

S-a trasat dreapta D_2 de ecuație:

$$x - 2y + 5 = 0.$$

Ea împarte planul în două semiplane; acela care conține originea dă polinomului același semn ca acela al numărului:

$$0 - 2 \cdot 0 + 5 = 5;$$

îl vom păstra pentru a ține cont de (2).

În fine, s-a trasat dreapta de ecuație:

$$3x - y - 1 = 0$$

și s-a păstrat regiunea care conține punctul $(x = 1, y = 0)$, căci ea verifică relația (3).

Mulțimea care reprezintă mulțimea soluțiilor apare atunci în alb pe grafic.

II. Să se rezolve grafic inecuația:

$$\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } (x + y)(x - y)(x - 2y - 4) \geq 0\}?$$

determinând mulțimea sa reprezentativă.

Fiecare din dreptele (fig. 7):

$$x + y = 0, \quad (D_1)$$

$$x - y = 0, \quad (D_2)$$

$$x - 2y - 4 = 0, \quad (D_3)$$

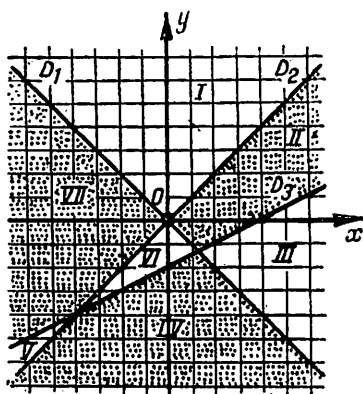


Fig. 6

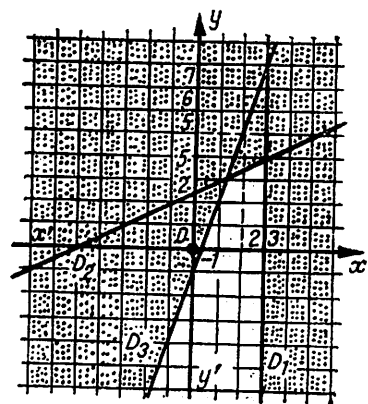


Fig. 7

împarte planul în două regiuni. Se obțin astfel 7 regiuni ale planului.

Putem întocmi tabloul semnelor luate de fiecare din factori, în fiecare din regiuni:

Regiuni	1	2	3	4	5	6	7
$x + y$	+	+	+	—	—	—	—
$x - y$	—	+	+	+	—	+	—
$x - 2y - 4$	—	—	+	+	+	—	—
Produsul	+	—	+	—	+	+	—

Inecuația este deci verificată de coordonatele punctelor din regiunile 1, 3, 5 și 6, nehașurate pe figură.

EXERCIȚII

Să se rezolve grafic sistemele definite de următoarele mulțimi de relații:

$$11.40. \begin{cases} x + y - 5 < 0 \\ 3x - y - 1 < 0. \end{cases} \quad 11.42. \begin{cases} (x + y)(x - 2y) < 0 \\ x + y - 1 < 0. \end{cases}$$

$$11.41. \begin{cases} x + y - 3 > 0 \\ 3x + y - 5 < 0 \\ 2x - y - 1 > 0. \end{cases} \quad 11.43. \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 9 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ y - 3x + 1 = 0. \end{cases}$$

11.44. Se dau trei polinoame de gradul întâi:

$$P = Ax + By + C,$$

$$P' = A'x + B'y + C'$$

$$P'' = A''x + B''y + C''.$$

1°. Câte sisteme de inecuații simultane se pot scrie care să aibă primii membri P, P', P'' ?

2°. Câte regiuni diferite se obțin într-un plan, maximum, cu trei drepte?

3°. Să se deducă de aci că unul din sisteme nu are soluție.

Aplicație:

$$P = 3x - y + 5,$$

$$P' = x + y - 1$$

$$P'' = 2x + 3y - 6.$$

11.45. Să se determine, printre soluțiile sistemului următor, aceea a cărei coordonată y este cea mai mare.

$$\left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } \begin{cases} y = 2x \\ 15x + 14y - 13 \leq 0 \\ 29x + 28y - 26 \leq 0 \\ 31x + 29y - 29 \leq 0 \end{cases} \right\}?$$

11.46. Să se illustreze grafic:

$$|x| + |y| < 1.$$

11.47. Inegalitatea $|x| + |y| > 0$ este adevărată pentru orice pereche (x, y) de numere reale?

PROBLEME

11.48. Să se construiască dreapta D care are ca ecuație:

$$2x - 3y + 6 = 0.$$

Care este panta sa? Care este ordonata la origine? Să se construiască apoi dreapta simetrică cu precedenta în raport cu Ox și să i se găsească ecuația.

Să se construiască dreapta simetrică cu D în raport cu Oy și să i se găsească ecuația.

Să se construiască dreapta simetrică cu D în raport cu O și să i se găsească ecuația.

11.49. Fie un reper $\mathcal{A}$. Să se construiască dreapta de coeficient director 3 și de ordonată la origine + 1. Să se scrie ecuația acestei drepte.

11.50. Aceeași chestiune dacă:

a) coeficientul director: $\sqrt{3}$; ordonata la origine: + 1.

b) coeficientul director: $-\sqrt{3}$; ordonata la origine: - 1.

Cum sînt plasate aceste două drepte?

11.51. Fie un reper $\mathcal{A}$. Să se construiască dreapta care are ca ecuație:

$$\sqrt{2}x + 2y - 1 = 0.$$

Să se construiască apoi dreapta paralelă cu aceasta și a cărei ordonată la origine este - 1.

Să i se găsească ecuația.

11.52. y este funcție afină de x dacă y este definită prin:

$$y = 3x - 5,$$

dar x este funcție afină de timp:

$$x = 2t + 1.$$

Să se exprime y în funcție de timp. Să se facă un grafic combinat cu axa timpului, axa Ox , axa Oy .

11.53. Temperatura t în grade centigrade este dată de o scară în care gheața care se topește corespunde la 0 și apa fierbe (condiții normale) la 100.

Temperatura Réaumur t' este dată de o scară în care aceleași repere corespund la 0 și 80. În fine, temperatura Fahrenheit t'' este dată de o scară în care aceste repere corespund la 32 și 212, respectiv.

1°. Să se calculeze coeficienții relațiilor:

$$t' = a't + b',$$

$$t'' = a''t + b''.$$

2°. Să se calculeze, printr-un calcul direct, coeficienții relației:

$$t'' = \alpha t' + \beta.$$

3°. Să se verifice că utilizând:

$$t'' = \alpha t' + \beta \text{ și } t' = a't + b',$$

se regăsește într-adevăr $t'' = a''t + b''$.

4°. Să se reia calculele analoage folosindu-se temperatura absolută $T = 273 + t$ ca temperatură de referință:

$$t = AT + B,$$

$$t' = A'T + B',$$

$$t'' = A''T + B''.$$

11.54. x este funcția afină de timp:

$$x = at + b;$$

y este funcția afină de x : $y = \alpha x + \beta$;

z este funcția afină de y : $z = Ay + B$.

1°. Să se calculeze y ca funcție de t .

2°. Să se calculeze z ca funcție de x .

3°. Să se calculeze z ca funcție de t în două feluri diferite.

12. FUNCȚIA DEFINITĂ DE $f(x) = ax^2 + bx + c$

- 12.1. Funcția f definită de $f(x) = x^2$.
 12.2. Funcția g definită de $g(x) = ax^2$.
 12.3. Funcția h definită de $h(x) = ax^2 + c$.
 12.4. Funcția definită de $f(x) = ax^2 + bx + c$.
 12.5. Aplicație la ecuațiile și inecuațiile de gradul al doilea.

12.1. FUNCȚIA f DEFINITĂ DE $f(x) = x^2$

12.1.1. Funcția definită prin operația „ridicarea la pătrat“

Oricare ar fi numărul x , este posibil să se calculeze numărul:

$$y = x \cdot x = x^2.$$

Funcția f care face ca oricărui număr, să-i corespundă pătratul său:

$$\forall x \quad f(x) = x^2$$

sau, în alți termeni, funcția definită de relația:

$$f(x) = x^2$$

este deci definită pe $\mathbb{R}$. Această funcție ia aceeași valoare când se dau lui x două valori opuse: aceasta este o funcție pară.

12.1.2. Sensul de variație

Din proprietățile relației „<”, rezultă implicațiile:

$$0 < x_0 < x_1 \implies 0 < x_0^2 < x_1^2$$

$$x_0 < x_1 < 0 \implies 0 < x_1^2 < x_0^2$$

care demonstrează că funcția $y = x^2$ este crescătoare pentru $x > 0$, descrescătoare pentru $x < 0$.

Acest rezultat se poate prezenta, de altfel, sub o formă care folosește definițiile generale ale creșterii și ale descreșterii; le reamintim:

$$x_1 \neq x_0, \quad a < x_0 < b, \quad a < x_1 < b,$$

și:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} > 0 \iff f(x) \text{ crescătoare pentru } a < x < b.$$

$$x_1 \neq x_0, \quad a < x_0 < b, \quad a < x_1 < b,$$

și:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < 0 \iff f(x) \text{ descrescătoare pentru } a < x < b.$$

$$\text{Avem aici, pentru } x_1 \neq x_0: \frac{f_1(x_1) - f_1(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = x_1 + x_0.$$

$$\text{Deci: } [x_0 > 0 \text{ și } x_1 > 0] \implies \frac{f_1(x_1) - f_1(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0;$$

$$[x_0 < 0 \text{ și } x_1 < 0] \implies \frac{f_1(x_1) - f_1(x_0)}{x_1 - x_0} < 0.$$

TEOREMA. Funcția f definită de $f(x) = x^2$ este descrescătoare pe intervalul $]-\infty, 0[$, crescătoare pe intervalul $]0, +\infty[$. Valoarea remarcabilă $x = 0$ corespunde pentru funcție la cea mai mică dintre toate valorile pe care le ia; aceasta este minimul său absolut.

12.1.3. Studiu pentru x tinzind spre $+\infty$ sau spre $-\infty$

Pentru x pozitiv, expresia:

$$x^2 - x = x(x - 1)$$

ia semnul lui $x - 1$.

Rezultă de aici că:

$$\forall B > 1 \quad x > B \implies x^2 > B$$

și, prin urmare, x^2 tinde spre $+\infty$ când x tinde spre $+\infty$.

EXEMPLU. Dacă vrem să realizăm $x^2 > 10^7$, este de ajuns să luăm $x > \sqrt{10^7}$.

OBSERVAȚIE. Definiția precisă a propoziției:

$f(x)$ tinde spre $+\infty$ când x tinde spre $+\infty$,

nu face apel decât la o condiție suficientă:

$$\forall B > 1, \exists A, x > A \implies f(x) > B.$$

Ne-am conformat la această definiție arătând existența unei condiții suficiente pentru ca x^2 să depășească pe B .

Ghestiunea de a ști dacă condiția dată este „economică“ nu intră în subiectul tratat, dar este interesantă și rămîne la latitudinea noastră.

Vom spune: pentru ca x^2 să depășească 10^7 , cu x pozitiv, este necesar și suficient ca x să depășească:

$$\sqrt{10^7} = \sqrt{10^6 \cdot 10} = 10^3 \sqrt{10}.$$

Practic, se va forma o condiție suficientă luîndu-se o valoare apropiată prin adaos de $\sqrt{10}$ (a se vedea calculul numeric). Nu se poate da sub formă zecimală condiția cea mai „economică“.

Astfel, $x > 4 \cdot 10^3$ sau $x > 3,2 \cdot 10^3$ sau $x > 3,17 \cdot 10^3$, ... sînt condiții suficiente și din ce în ce mai „economice“.

Funcția f fiind pară, $f(x)$ tinde spre $+\infty$ când x tinde spre $-\infty$:

$$\forall B > 1 \quad x < -B \implies x^2 > B.$$

TEOREMĂ. Numărul $f(x) = x^2$ tinde spre $+\infty$ când $|x|$ tinde spre $+\infty$.

12.1.4. Reprezentarea grafică a funcției f

Funcția f fiind definită pe $\mathbb{R}$, nu se vor putea trasa decât grafice parțiale pentru care x va descrie un interval limitat. Pentru un interval de tipul $-\alpha < x < \alpha$, punctele reprezentative se repartizează prin perechi de abscise opuse, având aceeași ordonată. În scopul de a trage folos din această proprietate (comună grafurilor tuturor funcțiilor pare), vom folosi axe rectangulare, dar nu neapărat normate: graficul va admite pe $y'Oy$ ca axă de simetrie.

După ce s-a făcut alegerea pentru x a unui interval necesar limitat, se va afla o limitare de alt fel: numărul punctelor cărora va trebui să le calculăm ordonata, oricât de mare va fi, va rămâne finit.

Operația de a figura aceste puncte fiind terminată, ne vom găsi în fața unei linii punctate ca cea din figura 1. Vom conveni deci să unim aceste puncte printr-o linie continuă ținând cont de orice informație obținută pe cale teoretică. De exemplu, din faptul că funcția este crescătoare pentru $x > 0$, trebuie ca linia corespunzătoare să „urce de la stînga la dreapta”.

Figura 2 reprezintă linia obținută, unindu-se punctele marcate pe figura 1, printr-o linie continuă și conformându-ne exigențele teoretice.

Pentru completare, tratăm problema tangentei în cazul particular al originii.

Fie $M_0(x_0)(y_0 = x_0^2)$, un punct al graficului, altul decât O .

Dreapta OM_0 are coeficient director pe $\frac{y_0}{x_0} = x_0$.

Facem pe M_0 să varieze pe grafic în așa fel încît să se apropie de O pînă ce aproape se confundă cu el; abscisa x_0 devine arbitrar vecină cu O și la limită, nulă. Coeficientul director al secantei devine arbitrar vecin al lui O și, la limită, nul. Axa Ox , poziție limită a secantei, este deci tangentă în O graficului.

Se demonstrează că graficele funcției $y = x^2$, oricare ar fi vectorii unitari aleși, sînt arce ale acestor curbe care se definesc și se studiază în geometrie sub numele de parabole.

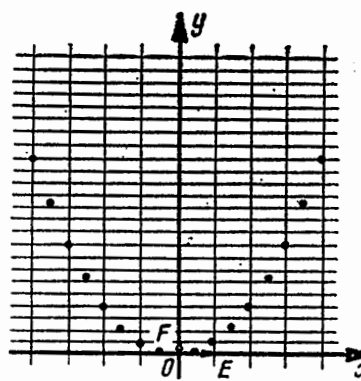


Fig. 1

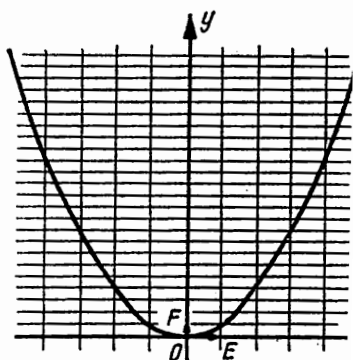


Fig. 2

EXERCIȚII

12.1. Să se traseze graficul funcției $y = x^2$ pentru $-1 < x < 1$, folosindu-se un reper ortonormat (hîrtie milimetrică) $(0, \vec{i}, \vec{j})$ și știind că:

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 8 \text{ cm.}$$

Să se dea lui $|x|$ valori de forma $\frac{n}{8}$, n întreg, $0 < n < 8$.

12.2. Să se traseze graficul funcției $y = x^2$ pentru $10 < x < 11$, folosindu-se o foaie de hîrtie milimetrică a cărei parte cadrilată este de 20 cm pe 25 cm.

Se va folosi cît mai bine toată foaia; axele nu sînt pe foaie, dar marginile din stînga și cea de jos ale foi vor fi cotate de la 10 la 11 și de la 100 la 121.

Să se compare arcul graficului și coarda care unește punctele extreme.

Folosind acest grafic să se compare valoarea adevărată a lui $(10,8)^2$ cu valoarea sa interpolată între perechile $(10,100)$ și $(11,121)$.

12.3. Să se traseze pe aceeași foaie graficul lui $y_1 = x^2$ și graficul lui $y_2 = x^4$ în reper rectangular. Să se folosească o foaie de hîrtie milimetrică. Se știe:

$$-2 \leq x \leq 2; OE = 5 \text{ cm}; OF = 1,5 \text{ cm.}$$

12.4. Să se traseze, pe o foaie de hîrtie, graficul funcției:

$$y_1 = x^2$$

și acela al funcției:

$$y_2 = |x|.$$

Să se regăsească, pe grafice, rezultatele relative la mărimea comparată a lui $|x|$ și a lui x^2 și la creșterea celor două funcții.

12.5. Să se calculeze coeficientul director m al secantei AM la graficul funcției $y = x^2$, pentru:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ și } M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0^2 \end{pmatrix}.$$

Să se dea o expresie mai simplă a lui m , care va fi valabilă pentru orice punct M diferit de A . Spre ce valoare tinde el atunci cînd x tinde spre 1 (x_0 rămînînd diferit de 1)?

12.6. Să se rezolve grafic, determinându-se mulțimea sa reprezentativă, inecuația:

$$\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } (y - x^2)(y - x) < 0\}$$

12.7. Aceeași chestiune pentru:

$$\{(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } (y - x^2)(y + x) > 0\}$$

12.2. FUNCȚIA g DEFINITĂ PRIN $g(x) = ax^2$

12.2.1. Sens de variație

Funcția definită de relația $g(x) = ax^2$ este definită pe $\mathbb{R}$. Pentru două valori distincte x_0 și x_1 cărora le corespund valorile y_0 și y_1 ale funcției, se obține:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{ax_1^2 - ax_0^2}{x_1 - x_0} = a(x_1 + x_0),$$

rezultat ce conduce la distingerea mai multor cazuri după semnul lui a . Concluziile, ușoare de degajat, sînt date în tabloul de mai jos:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$a < 0$	funcție crescătoare	$y = 0$	funcție descrescătoare
$a > 0$	funcție descrescătoare	$y = 0$	funcție crescătoare
$a = 0$	funcție constantă; $\forall x \quad g(x) = 0$		

Notăm, în fine, că această funcție este pară:

$$g(-x_0) = g(+x_0) = ax_0^2.$$

12.2.2. Studiu pentru $|x|$ tinzînd spre $+\infty$

Trebuie deci ca și aici să distingem cazurile după semnul lui a .

Presupunem mai întîi $a > 0$ și verificăm rezultatul pe care noi l-am intuit, anume că $g(x) = ax^2$ tinde spre plus

infinit cînd x tinde spre infinit prin valori pozitive sau prin valori negative.

Fie deci B un număr pozitiv dat, arbitrar mare.

Este posibil să se determine un număr pozitiv A astfel ca condițiile:

$$x < -A \text{ și } x > +A$$

să fie suficiente pentru ca să avem $ax^2 > B$?

Știm că:

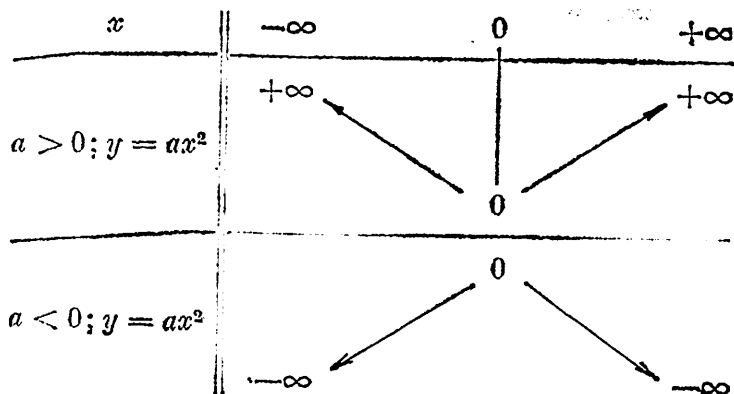
$$[a > 0 \text{ și } ax^2 > B] \Leftrightarrow \left[a > 0 \text{ și } x^2 > \frac{B}{a} \right].$$

Or, dacă desemnăm prin A pe cel mai mare dintre cele două numere 1 și $\frac{B}{a}$:

$$x > A \Rightarrow x^2 > x > \frac{B}{a}.$$

Presupunem acum $a < 0$. Punem $a = -b, b > 0$. Din studiul precedent, reiese că bx^2 tinde spre $+\infty$ cînd $|x|$ tinde spre $+\infty$; deci ax^2 , număr opus lui bx^2 , va tinde spre $-\infty$ pentru $|x|$ care tinde spre $+\infty$.

Se pot rezuma toate rezultatele în următorul tablou:



Săgeata $\nearrow$ înseamnă: crește. Săgeata $\searrow$ înseamnă: descrește.

Pentru $a > 0$, valoarea 0 este un minimum absolut; pentru $a < 0$, acesta este un maximum absolut.

12.2.3. Reprezentarea grafică

EXEMPLE NUMERICE

Cazul $a = 1$ a fost tratat.

Cazul $a = 0$ este evident: graficul coincide cu $x'Ox$.

Cazul $a = -1$ se tratează ușor, în axe rectangulare, plecând de la cazul $a = 1$; graficul G_{-1} al lui $\{(x, -x^2)\}; x \in \mathbb{R}$, este simetricul în raport cu $x'Ox$, al graficului G al lui $\{(x, x^2)\}; x \in \mathbb{R}$ (fig. 3).

Tratăm cazul $a = 2$.

Graficul G_2 al lui $\{(x, 2x^2)\}; x \in \mathbb{R}$ se obține plecând de la graficul G al funcției f de la nr. 12.1, dublind toate ordonatele.

Se spune că facem pe G să suporte o afinitate de raport $+2$, de axă $x'Ox$ și de direcție de $y'Oy$. Punctele figurative aparțin toate regiunii superioare pe care o delimitează G și ne așteptăm să le vedem desenind o curbă „de aceeași natură”; vom preciza mai departe această impresie.

Să tratăm acum cazul lui $a = \frac{1}{2}$ și să atribuim indiciile $\frac{1}{2}$ expresiilor obținute în acest caz. Fie $g_1(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Graficul $G_{\frac{1}{2}}$ al lui $g_{\frac{1}{2}}$ se deduce din G prin afinitatea de raport $+\frac{1}{2}$, de axă $x'Ox$ și de direcție $y'Oy$ (fig. 4). El se situează în regiunea inferioară pe care o delimitează G și ne așteptăm încă să găsim o curbă de aceeași natură.

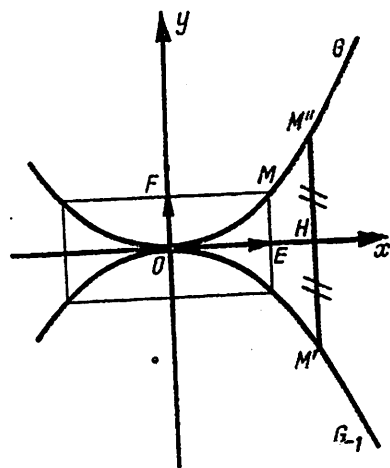


Fig. 3

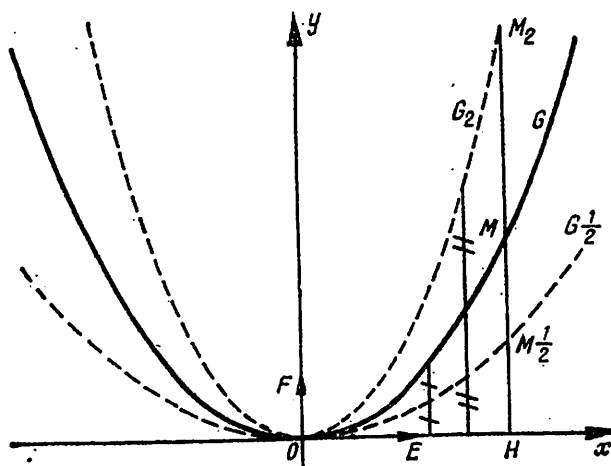


Fig. 4

Avem acum în vedere valorile negative ale lui a . Am construit graficul G_{-1} al lui:

$$\{(x, -x^2), x \in \mathbb{R}\}.$$

Pentru $a = -2$, G_{-2} provine din G_{-1} prin afinitatea de raport 2; s-ar putea obține, de altfel, plecând de la G prin afinitatea de raport -2 . S-ar construi de asemenea $G_{-\frac{1}{3}}$ etc.

Mulțimea graficelor este o familie de parabole tangente în O axei $x'Ox$ și care admite pe $y'Oy$ ca axă de simetrie. Parabolele, două câte două simetrice pentru două valori opuse ale lui a , se găsesc „deasupra” sau „sub” axa $x'Ox$, după semnul lui a și sînt cu atît mai „strînse” spre $y'Oy$ cu cît valoarea absolută a lui a este mai mare.

SCHIMBĂRI DE REPER

A se vedea cursul de Geometrie, fascicula II, nr. 9.1.6.

EXEMPLU. $OE = 2$ cm, $OF = 3$ cm, $y = \frac{5}{4}x^2$.

Se vede că graficul reprezintă, în reper ortonormat, funcția definită prin $y' = x'^2$.

(Fie $(O, \vec{OE}', \vec{OF}')$ noul reper ortonormat:

$$\vec{OE}' = k\vec{OE} \ (k > 0), \quad \vec{OF}' = l\vec{OF} \ (l > 0), \quad kOE = lOF \ (\text{reper ortonormat}).$$

$$\text{Deci: } 2k = 3l; \quad x'\vec{OE}' + y'\vec{OF}' = x'k\vec{OE} + y'l\vec{OF} = x\vec{OE} + y\vec{OF}.$$

Relația $y = \frac{5}{4}x^2$ devine $ly' = \frac{5}{4}k^2x'^2$, care trebuie să fie relația $y' = x'^2$.

$$\text{De unde condiția } \frac{4k^2}{5l} = 1 \text{ și soluția: } k = \frac{8}{15}, \quad l = \frac{16}{45}.$$

EXERCIȚII

12.8. Să se traseze pe o foaie de hirtie milimetrică, a cărei parte cadrilată este de 20 cm pe 25 cm, graficele relațiilor $y = ax^2$, pentru:

$$a = +1, a = -1, a = +3, a = -3, a = \frac{1}{3}, a = -\frac{1}{3}.$$

Să se aleagă reperul cît mai bine.

12.9. Într-un reper ortonormat cu $OE = OF = 1$ cm, s-a construit graficul relației $y = x^3$.

Să se determine noul reper $(0, \vec{i}, \vec{j})$ pentru care graficul reprezintă:

1°. relația $y = 100x^2$.

2°. relația $y = \frac{x^2}{100}$.

12.10. S-a construit graficul relației $y = x^2$ cu $OE = 2$ cm, $OF = \frac{1}{2}$ cm.

Să se găsească alegerile posibile ale lui OE' și OF' pentru care același grafic continuă să reprezinte pe $y = x^2$.

Corespunde una din alegeri la un reper ortonormat? Se putea rezolva grafic această ultimă chestiune?

Să se rezolve grafic inecuațiile definite în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de următoarele relații:

12.11. $(2y - x^2)(2y + x) > 0$.

12.12. $(9y^2 - x^4)(x^3 - y^3) < 0$.

12.13. $(x^2 - 1)(y^2 - 1)(y^2 - x^4) > 0$.

12.14. S-a trasat curba C care reprezintă relația $y = x^2$ pentru valorile pozitive ale lui x .

Se propune să se studieze curba C' care reprezintă relația:

$$y = \sqrt{x}.$$

Să se demonstreze că oricărui punct M de coordonate (x, x^2) al curbei C îi corespunde un punct M' de coordonate (x^2, x) al curbei C' , x fiind pozitiv. Să se deducă poziția remarcabilă a punctelor M și M' și traseul curbei C' .

Ce s-ar putea spune despre curba C'' reprezentată de relația:

$$y = -\sqrt{x}?$$

12.15. Convexitatea domeniului definit prin $y > x^2$. — Un domeniu $\mathfrak{D}$ al planului, limitat de o curbă C , este zis convex dacă, oricare ar fi punctele M_0 și M_1 care aparțin domeniului, orice punct al segmentului $[M_0, M_1]$ aparține domeniului.

1°. Să se demonstreze că graficul G al funcției definite prin $f(x) = x^2$ împarte planul în două regiuni și că regiunea superioară caracterizată prin $y \geq x^2$, este un domeniu $\mathfrak{D}$ convex.

2°. Să se examineze cazul în care M_0 și M_1 , care aparțin lui $\mathfrak{D}$, au aceeași abscisă.

3°. Să se studieze cazul în care M_0 și M_1 sînt două puncte ale graficului G al curbei $y = x^2$.

Dreapta M_0M_1 este graficul unei funcții afine φ , definită prin $\varphi(x) = ax$. Ce reprezintă abscisele x_0 și x_1 ale lui M_0 și M_1 pentru ecuația definită prin relația:

$$x^2 - ax - b = 0?$$

Să se studieze semnul polinomului $x^2 - ax - b$ și să se interpreteze grafic.

4°. Să se studieze cazul în care M_0 și M_1 sînt oarecare în $\mathbb{D}$.

12.3. FUNCȚIA h DEFINITĂ PRIN $h(x) = ax^2 + c$

12.3.1. Studiul funcției h și reprezentarea grafică

Am studiat funcția g definită prin $g(x) = ax^2$ și graficul său. Adăugînd acestei funcții un număr relativ constant c , se obține o nouă funcție h definită prin formula:

$$h(x) = ax^2 + c.$$

Se vede imediat că modificarea datorită constantei c nu alterează proprietățile fundamentale pe care le-am recunoscut funcției g (nr. 12.2): domeniu de definiție, paritate, sens de variație. Cît privește graficul noii funcții, el se va deduce din cel vechi printr-o translație.

EXEMPLE

I. Fie să se studieze funcția h definită prin $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

Această funcție definită pe $\mathbb{R}$, variază în același sens ca funcția g_1 , de care ea nu diferă decît printr-o constantă. Într-adevăr:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\left(\frac{1}{2}x_1^2 - 2\right) - \left(\frac{1}{2}x_0^2 - 2\right)}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_0^2}{x_1 - x_0} = \frac{1}{2}(x_1 + x_0).$$

Știm că atunci cînd x tinde spre infinit, $z = \frac{1}{2}x^2$ tinde spre plus infinit. La fel va fi și cu $y = z - 2$, căci dacă z depășește pentru $|x|$ destul de mare orice număr fixat dinainte, $z - 2$ devine de asemenea arbitrar mare.

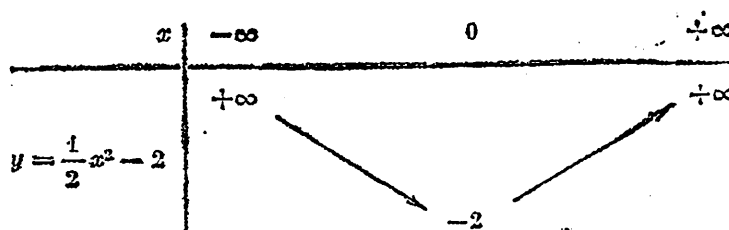
Fie, sub o formă detaliată, B un număr pozitiv dat, fix, arbitrar mare.

Căutăm, dacă există, o condiție suficientă, de tipul $|x| > A$, pentru care $\frac{1}{2}x^2 - 2$ depășește pe B . Or: $\frac{1}{2}x^2 - 2 > B \Leftrightarrow x^2 > 2B + 4$;

$$[2B + 4 > 1 \text{ și } x > 2B + 4] \Rightarrow x^2 > 2B + 4.$$

S-a găsit deci un număr A astfel că: $|x| > A \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2 > B$.

Informațiile obținute permit să se întocmească următorul tablou:



Se poate observa că funcția ia valoarea 0 dacă se dă lui x o valoare numerică egală cu una sau alta din rădăcinile ecuației:

$$\left\{ x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{1}{2}x^2 - 2 = 0 \right\} \text{? adică: } x = -2 \text{ sau } x = +2.$$

Valoarea $y = -2$ este minimumul funcției.

Grafic. Știm să trasăm graficul Γ al funcției g_1 . Pentru a

avea graficul G al relației $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$, se poate face ca, oricărui

punct de abscisă x_0 și de ordonată $z_0 = \frac{1}{2}x_0^2$, să-i corespundă

pe Γ punctul $(x_0, y_0 = z_0 - 2)$ care aparține lui G ; G se deduce din Γ printr-o translație, care are ca vector $-2\vec{OF}$ (fig. 5).

Se poate deci presupune că G este o parabolă.

Considerăm axele gradate $x_1O_1x_1$ și $y_1O_1y_1$ care se deduc prin translația axelor $x'Ox$ și $y'Oy$, noua origine O_1 avind, în raport cu vechile axe, coordonatele (α, β) :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -2. \end{cases}$$

Coordonatele vechi (x, y) și noi (x_1, y_1) se corespund după formulele:

$$\begin{cases} x = 0 + x_1 \\ y = -2 + y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y + 2. \end{cases}$$

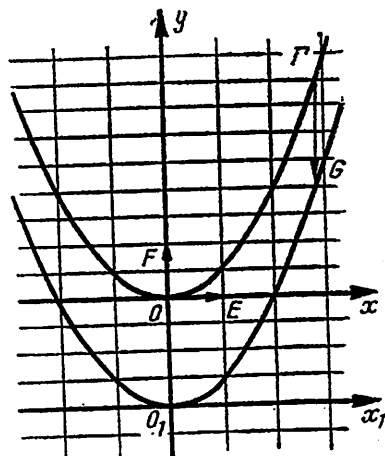


Fig. 5



Fig. 6

Relația $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$, sau $y + 2 = \frac{1}{2}x^2$, antrenează, pentru perechile (x_1, y_1) relația $y_1 = \frac{1}{2}x_1^2$, și reciproc.

G , mulțimea reprezentativă a relației $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ pentru axele $x'Ox$, $y'Oy$, este deci mulțimea reprezentativă a relației $y_1 = \frac{1}{2}x_1^2$ pentru axele $x_1O_1x_1$, $y_1O_1y_1$.

Se va construi deci G direct, construindu-se în noile axe, graficul relației:

$$y_1 = \frac{1}{2}x_1^2.$$

OBSERVAȚIE. Semnul polinomului $\frac{1}{2}x^2 - 2$ apare pe grafic; este semnul lui $\frac{1}{2}$, semnul $+$, în afara intervalului rădăcinilor -2 și $+2$; este semnul lui $-\frac{1}{2}$, semnul $-$, în interiorul intervalului rădăcinilor.

II. Fie să se studieze funcția h definită prin $h(x) = -3x^2 + 1$. Această funcție pară, definită pentru orice număr real x , variază ca funcția $y = -3x^2$ și, ca ea, tinde spre $-\infty$ pentru $|x|$ tinde spre $+\infty$. Pentru $x = 0$, ea trece prin maximumul $+1$. Cititorul va putea face tabelul de variație.

Fie $F(1)$ nouă origine. Translația de vector $\vec{OF}$ definește noi axe. Relativ la aceste axe, graficul funcției devine graficul lui (fig. 6):

$$y_1 = -3x_1^2.$$

Se construiește acest grafic. Se verifică, calculându-se direct, coordonatele câtorva puncte figurative.

$$\text{În particular: } |x| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y = 0.$$

EXERCIȚII

Să se construiască, în reper ortonormat, cu $OE = OF = 1$ cm, graficele funcțiilor definite de relațiile următoare:

$$12.16. f(x) = -x^2 + 1; g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1; h(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1.$$

$$12.17. f(x) = x^2 + \frac{1}{2}; \quad g(x) = x^2 + \frac{3}{2}; \quad h(x) = x^2 + \frac{5}{2}.$$

$$12.18. f(x) = x^2 + \frac{1}{2}; \quad g(x) = \frac{x^2}{2} + 1; \quad h(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{3}{2}.$$

$$12.19. f(x) = -\frac{x^2}{3} + 3; \quad g(x) = \frac{x^2}{3} - 3.$$

12.20. S-a construit, într-un reper ortonormat, graficul relației $y = 1 - \frac{x^2}{3}$. Este posibil să se determine noi vectori unitari, pentru ca acest grafic să reprezinte relația $z = 2 - x^2$?

$$12.21. \text{ Aceeași chestiune cu: } y = \frac{x^2}{2} + 1; \quad z = x^2 + 3.$$

PROBLEME

12.22. 1°. Să se facă o reprezentare carteziană a mulțimii:

$$\{(x; x^2 - 1), x \in \mathbb{R}\}.$$

2°. Să se deducă, printr-un procedeu geometric simplu, graficul funcției f definită prin $f(x) = |x^2 - 1|$, apoi variația funcției f .

3°. Să se rezolve grafic ecuația:

$$\left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } |x^2 - 1| = \frac{16}{25}\right\}.$$

12.23. 1°. Să se construiască graficul funcției definite prin:

$$f(x) = |2x^2 - 5| - |x^2 - 1|.$$

Se vor alege axele. Se va putea începe prin a trasa graficele:

$$\{(x, 2x^2 - 5); x \in \mathbb{R}\} \text{ și } \{(x, x^2 - 1); x \in \mathbb{R}\}.$$

2°. Să se rezolve grafic ecuația:

$$\left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } |2x^2 - 5| - |x^2 - 1| = \frac{15}{4}\right\}.$$

12.24. 1°. Să se reprezinte graful funcției definite prin:

$$f(x) = \|3x^2 - 1\| - \|x^2 - 1\|.$$

2°. Să se rezolve grafic ecuația:

$$\left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{2}{9} = f(x)\right\}.$$

12.4. FUNCȚIA DEFINITĂ PRIN :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

12.4.1. Funcția g definită prin :

$$g(x) = (x - k)^2$$

Funcțiile $x \rightarrow ax^2$, $x \rightarrow ax^2 + c$ decurg din funcția $x \rightarrow x^2$, prin modificări care respectă proprietățile esențiale și analogia graficelor exprimă această permanență.

Vom studia acum funcția g definită prin:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = (x - k)^2.$$

EXEMPLE

1. Fie să se studieze funcția g definită prin $g(x) = (x - 1)^2$. (Cum o vom face uneori, numărul $g(x)$ va fi notat, pentru motive de comoditate, în scris, y . În același timp, trebuie să fim puși în gardă împotriva abuzurilor la care ne poate conduce această notație. Ea are într-adevăr, marele dezavantaj de a ascunde că numărul y este un număr variabil și care depinde de x . Această notație nu va fi deci folosită decât cu precauție.)

Formăm raportul al cărui semn dă sensul de variație:

$$\begin{aligned} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} &= \frac{(x_1 - 1)^2 - (x_0 - 1)^2}{x_1 - x_0} = \\ &= \frac{[(x_1 - 1) - (x_0 - 1)][(x_1 - 1) + (x_0 - 1)]}{x_1 - x_0} = \\ &= (x_1 - 1) + (x_0 - 1). \end{aligned}$$

Rezultă de aci implicațiile:

$$x_1 < 1 \text{ și } x_0 < 1 \implies g \text{ funcție descrescătoare};$$

$$x_1 > 1 \text{ și } x_0 > 1 \implies g \text{ funcție crescătoare}.$$

Pentru $x = 1$, funcția are un minim.

Studiem comportarea lui y atunci când x tinde spre infinit.

Studiul funcției liniare ne învață că:

$$x \text{ tinde spre } +\infty \implies x - 1 \text{ tinde spre } +\infty,$$

și:

$$x \text{ tinde spre } -\infty \implies x - 1 \text{ tinde spre } -\infty.$$

Știm de asemenea că:

$$|X| \text{ tinde spre } +\infty \implies X^2 \text{ tinde spre } +\infty.$$

Punind $x - 1 = X$, vom putea înălțui implicațiile precedente și trage această concluzie:

$$|x| \text{ tinde spre } +\infty \Rightarrow (x-1)^2 \text{ tinde spre } +\infty.$$

Întocmim tabloul:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$y = (x-1)^2$	$+\infty$	0	$+\infty$

Grafic. Studiul precedent lasă să se înțeleagă că graficul funcției $x \rightarrow (x-1)^2$ se deduce din graficul funcției $x \rightarrow x^2$ prin translația definită de vectorul $1 \cdot \vec{OE}$.

Fie O_1 punctul $(1,0)$. Translația de vector $\vec{OO}_1$ determină două noi axe gradate $x'_1 O_1 x_1$, $y'_1 O_1 y_1$. Formulele de schimbare de reper sînt:

$$\begin{cases} x = 1 + x_1 \\ y = 0 + y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x - 1 \\ y_1 = y \end{cases}$$

Avem:

$$y = (x-1)^2 \Leftrightarrow y_1 = x_1^2.$$

Ceea ce dovedește că graficul funcției reprezintă, în raport cu noile axe, relația: $y_1 = x_1^2$.

Regăsim din nou parabola (fig. 7).

Punctele $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ permit un control.

II. Fie să se studieze funcția g definită prin $g(x) = (x+3)^2$. Vom da cîteva indicații:

$$a) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(x_1 + 3)^2 - (x_0 + 3)^2}{x_1 - x_0} = (x_1 + 3) + (x_0 + 3).$$

$x_1 < -3$ și $x_0 < -3 \Rightarrow g$ funcție descrescătoare;

$x_1 > -3$ și $x_0 > -3 \Rightarrow g$ funcție crescătoare;

$x = -3 \Rightarrow g(x) = 0$, minimum.

b) $|x|$ tinde spre $+\infty \Rightarrow |x+3|$ tinde spre $+\infty$.

$|X|$ tinde spre $+\infty \Rightarrow X^2$ tinde spre $+\infty$.

Deci: $|x|$ tinde spre $+\infty \Rightarrow (x+3)^2$ tinde spre $+\infty$.

c) Translația de axe: $\vec{OO}_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x = -3 + x_1 \\ y = 0 + y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x + 3 \\ y_1 = y. \end{cases}$$

Deci:

$$y = (x+3)^2 \Leftrightarrow y_1 = x_1^2; \text{ de unde graficul (figura 8).}$$

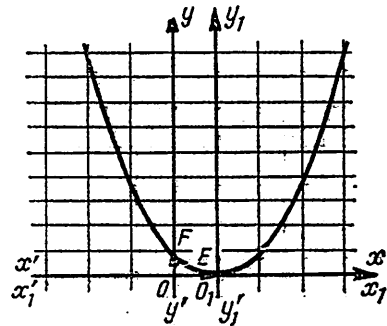


Fig. 7

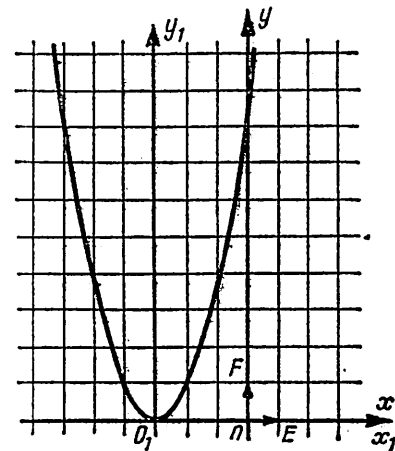


Fig. 8

12.4.2. Funcția h definită prin: $h(x) = a(x - k)^2$

Sub o formă generală, funcția $x \rightarrow a(x - k)^2 = y$ reproduce variațiile funcției $x \rightarrow ax^2$, cu un decalaj de k . Studiem graficul.

Fie O_1 punctul $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$. În raport cu noile axe graduate, deduse din vechile prin translația $\overrightarrow{OO_1}$, punctul $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ admite coordonatele $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ și:

$$\begin{cases} x = k + x_1 \\ y = 0 + y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x - k \\ y_1 = y. \end{cases}$$

Deci:

$$y = a(x - k)^2 \Leftrightarrow y_1 = ax_1^2.$$

Putem reprezenta graficul în toate cazurile posibile (a se vedea câteva exemple pe figura 9) și, pe grafic, putem citi variațiile funcției.

Rezultatele sînt rezumate în următorul tablou:

x'	$-\infty$	k	$+\infty$
$a > 0 \quad y = a(x - k)^2$	$+\infty$	0 min.	$+\infty$
$a < 0 \quad y = a(x - k)^2$	$-\infty$	0 max.	$-\infty$
$a = 0 \quad y = a(x - k)^2$	$y = 0 = \text{constantă}$ $0 \quad y = 0 = \text{constantă}$		

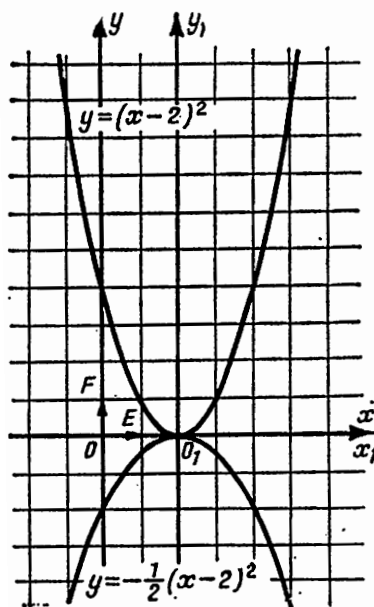
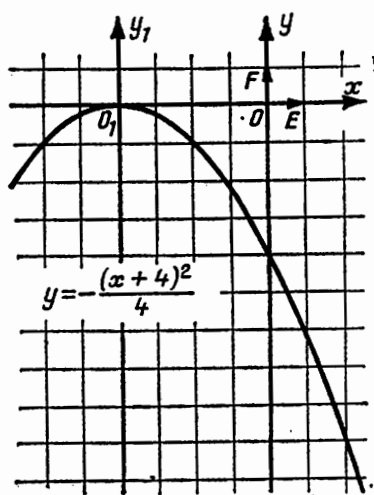


Fig. 9

12.4.3. Funcția f definită prin:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Un exemplu de polinom complet de gradul doi.

Fie să se studieze funcția $x \mapsto f(x) = x^2 - 4x + 3 = y$.

Această funcție, definită pe $\mathbb{R}$, este un polinom de gradul doi. Noi am studiat, în capitolul 9, diversele forme remarcabile.

Folosim acest principiu și transformăm pe y :

$$y = x^2 - 4x + 4 - 4 + 3 = (x - 2)^2 - 1.$$

Funcția f decurge din funcția „ridicarea la pătrat” prin două operații:

1°. Micșorăm variabila cu 2.

2°. Micșorăm cu 1 toate valorile pătratului acestei noi variabile.

1. *Sensul de variație.*

$$\begin{aligned} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} &= \frac{[(x_1 - 2)^2 - 1] - [(x_0 - 2)^2 - 1]}{x_1 - x_0} = \frac{(x_1 - 2)^2 - (x_0 - 2)^2}{x_1 - x_0} = \\ &= (x_1 - 2) + (x_0 - 2). \end{aligned}$$

Sensul de variație rezultă deci din implicațiile:

$$x_1 < 2 \text{ și } x_0 < 2 \implies \text{funcție descrescătoare};$$

$$x_1 > 2 \text{ și } x_0 > 2 \implies \text{funcție crescătoare};$$

$$x = 2 \implies y = -1, \text{ maximum.}$$

2. *Comportarea pentru $|x|$ tinde spre $+\infty$.* Știm că:

$$|x| \text{ tinde spre } +\infty \implies |x - 2| \text{ tinde spre } +\infty$$

(funcție afină);

$$|X| \text{ tinde spre } +\infty \implies X^2 - 1 \text{ tinde spre } +\infty$$

deci:

$$|x| \text{ tinde spre } +\infty \implies (x - 2)^2 - 1 \text{ tinde spre } +\infty$$

3. *Graficul*

Fie O_1 punctul de abscisă 2 și de ordonată -1 . Prin translație, axele gradate $x'Ox$, $y'Oy$ dau din nou axele $x_1O_1x_1$, $y_1O_1y_1$.

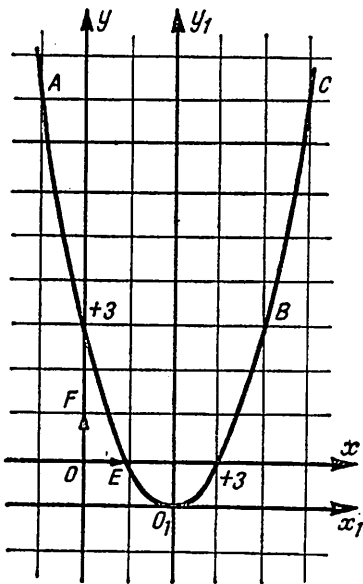


Fig. 10

Formulele de translație sînt:

$$\begin{cases} y = 2 + x_1 \\ y = -1 + y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x - 2 \\ y_1 = y + 1. \end{cases}$$

Deci:

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1 \Leftrightarrow y_1 = x_1^2.$$

Pentru noile axe graficul reprezintă (fig. 10):

$$y_1 = x_1^2.$$

4. *Observații diverse.* Graficul astfel construit taie axa $x'Ox$ în punctele $x = 1$ și $x = 3$.

Aceste abscise sînt efectiv rădăcinile polinomului:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= (x - 2)^2 - 1 = (x - 2 - 1)(x - 2 + 1) = \\ &= (x - 3)(x - 1). \end{aligned}$$

Graficul taie axa $y'Oy$ în punctul de coordonate $x = 0, y = 3$.

S-au construit de asemenea punctele:

$$A\left(-1; 8\right); \quad B\left(\frac{4}{3}\right); \quad C\left(\frac{5}{8}\right).$$

Aceste verificări sînt indispensabile; ele permit mai ales să se descopere erorile asupra sensului care trebuie dat translației, erori pe care începătorii le comit adesea. Cît privește semnul polinomului:

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3),$$

el apare clar pe grafic; el nu este de semn contrar celui al primului termen decît pentru $1 < x < 3$.

Funcția definită prin $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Funcția definită prin $f(x) = ax^2 + bx + c = y, a \neq 0$, nu este alta decît funcția polinom de gradul doi, al cărei studiu l-am început în capitolul 9. Reamintim prima formă remarcabilă:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

$$\text{Vom deduce: } f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Pentru a ușura notațiile, vom pune:

$$\frac{b}{2a} = -k \text{ și } \frac{4ac - b^2}{4a} = l.$$

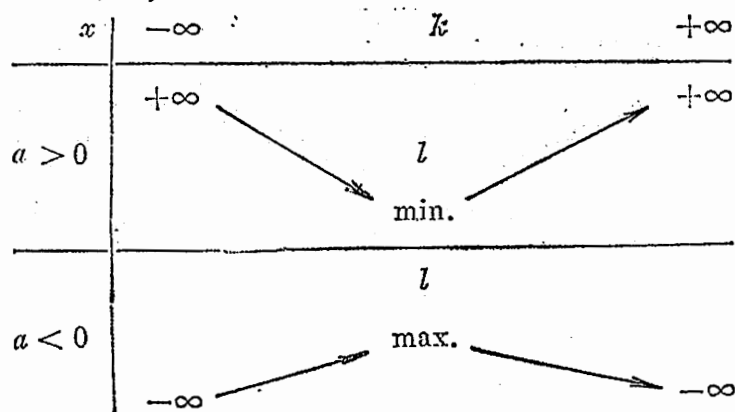
Vom avea deci mai simplu:

$$f(x) = a(x - k)^2 + l = y.$$

1. Sensul de variație

$$\begin{aligned} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} &= \frac{[a(x_1 - k)^2 + l] - [a(x_0 - k)^2 + l]}{x_1 - x_0} = \\ &= a[(x_1 - k) + (x_0 - k)]. \end{aligned}$$

Deci, după semnul lui a :



2. Studiu pentru x tinde spre $+\infty$.

$\alpha) |x|$ tinde spre $+\infty$

$$\Rightarrow |(x - k)| \text{ tinde spre } +\infty.$$

$\beta) |X|$ tinde spre $+\infty$

$$\Rightarrow aX^2 + l \text{ tinde spre } \begin{cases} +\infty \text{ dacă } a > 0 \\ -\infty \text{ dacă } a < 0. \end{cases}$$

$\gamma) |x|$ tinde spre $+\infty$

$$\Rightarrow a(x - k)^2 + l \text{ tinde spre } \begin{cases} +\infty \text{ dacă } a > 0 \\ -\infty \text{ dacă } a < 0. \end{cases}$$

3. Tabloul care rezumă variația.

Pe acest tablou s-a plasat la extremități:

$$+\infty \text{ pentru } a > 0; -\infty \text{ pentru } a < 0.$$

4. Grafic. Fie $O_1 (x = k, y = l)$.

Translația de vector $\vec{OO}_1$ definește noi axe gradate:

$$\begin{cases} x = k + x_1 \\ y = l + y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x - k \\ y_1 = y - l. \end{cases}$$

Deci:

$$y = a(x - k)^2 + l \Leftrightarrow y_1 = ax_1^2.$$

În raport cu noile axe, graficul exprimă relația $y_1 = ax_1^2$.

Aceasta este o parabolă. Punctul O_1 este virful ei; dreapta de ecuație $x = k$ este axa ei de simetrie și dreapta de ecuație $y = l$, tangenta la virf.

N.B. Aceste formule nu se vor aplica. Se va calcula direct urmîndu-se metoda pe care am expus-o

OBSERVAȚII.

Să se verifice corectitudinea graficului cu ajutorul punctelor calculate cu forma inițială a polinomului.

Punctul $(0, c)$ există întotdeauna. Rădăcinile există pentru $b^2 - 4ac \geq 0$ ele permit un control eficace, indispensabil.

Semnul polinomului de gradul al doilea se citește pe desen.

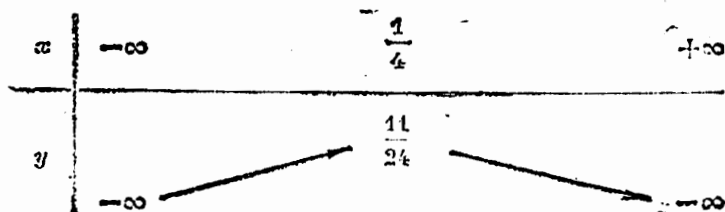
EXEMPLU.

$$y = -2x^2 + x + \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} y &= -2\left[x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\right] = -2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{11}{48}\right] = \\ &= -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{24}. \end{aligned}$$

$$1^\circ. \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -2\left[\left(x_1 - \frac{1}{4}\right) + \left(x_0 - \frac{1}{4}\right)\right].$$

$$2^\circ. |x| \text{ tinde spre } +\infty \quad y \text{ tinde spre } -\infty$$



3°. *Grafic (trebuie făcut).*

Fie:

$$O_1\left(x = \frac{1}{4}, y = \frac{11}{24}\right).$$

Translația dă:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{11}{24} + y_1 \\ x &= \frac{1}{4} + x_1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} y_1 &= y - \frac{11}{24} \\ x_1 &= x - \frac{1}{4} \end{aligned} \right.$$

deci:

$$y = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{24} \Leftrightarrow y_1 = -2x_1^2.$$

4°. Verificări.

Rădăcinile există: $x_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{3}}$; $x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{3}}$;

$$x_1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{33}}{12}; \quad x_2 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{12},$$

$$x_1 \approx -0,22 \quad x_2 \approx 0,72 \text{ (a se vedea$$

calculul numeric).

Se va compara cu punctele în care graficul taie pe $x'Ox$.

12.4.4. Semnul lui $f(x) = ax^2 + bx + c$

Cum am văzut, sensul de variație al funcției f depinde de semnul lui a . Studiul sensului de variație al lui f face intuitiv studiul semnului lui $f(x)$.

Presupunem mai întâi pe a pozitiv.

Atunci când x tinde spre $-\infty$, $f(x)$ tinde spre $+\infty$ și, în consecință, $f(x)$ este pozitiv pentru valorile negative ale lui x , destul de mari în valoare absolută.

Pentru x mai mic decât $k = -\frac{b}{2a}$, f este o funcție descrescătoare de x , care ia valoarea $l = \frac{4ac - b^2}{4a}$ pentru $x = k$.

Pentru x mai mare decât k , f este o funcție crescătoare în funcție de x .

Pentru x tinzând spre infinit, $f(x)$ tinde spre infinit.

Aceste observații diverse ne permit să tragem următoarea concluzie:

a) Dacă $l = \frac{4ac - b^2}{4a}$ este pozitiv sau nul, $f(x)$ este întotdeauna pozitiv sau nul;

$$\frac{4ac - b^2}{4a} \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax^2 + bx + c \geq 0.$$

b) Dacă $l = \frac{4ac - b^2}{4a}$ este negativ, $f(x)$ se anulează schimbându-și semnul pentru două valori particulare ale lui x , care sînt rădăcinile lui $ax^2 + bx + c$; se regăsește semnul discriminantului $\Delta = b^2 - 4ac$ (a se vedea nr. 9.2.2).

În rezumat, pentru a pozitiv, $f(x)$ este pozitiv în exteriorul intervalului delimitat de rădăcinile ecuației definite de $ax^2 + bx + c = 0$, acest interval putînd fi vid.

Cazul în care a este negativ se tratează la fel și ne permite să tragem următoarea concluzie:

TEOREMĂ. Numărul $f(x) = ax^2 + bx + c$ are semnul lui a în exteriorul intervalului deschis, ale cărui extremități sînt rădăcinile polinomului $ax^2 + bx + c$ și are semnul contrar lui a , în interiorul acestui interval, de altfel eventual vid.

OBSERVAȚIE.

Această teoremă se poate demonstra în alt fel, observîndu-se (nr. 9.1.2) că $f(x)$ se poate scrie:

$$f(x) = a(x - x_0)(x - x_1),$$

unde x_1 și x_0 sînt rădăcinile polinomului $ax^2 + bx + c$.

Studiem deci semnul acestui produs de factori; în funcție de semnul lui a (pe care-l vom nota $\text{sgn } a$):

x	$-\infty$	x_0	x_1	$+\infty$
a	$\text{sgn } a$	$\text{sgn } a$	$\text{sgn } a$	$\text{sgn } a$
$x - x_0$	$-$	0	$+$	$+$
$x - x_1$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\text{sgn } a$	0	$\text{sgn } (-a)$	$\text{sgn } a$

De unde rezultatul.

EXERCITII.

Să se studieze direct funcțiile definite de următoarele relații și să se traseze graficele lor, după ce s-a ales cit mai bine reperul:

$$12.25. \quad f(x) = x^2 - 3x + 2; \quad 12.26. \quad f(x) = 3x^2 + x - \frac{1}{2};$$

$$f(x) = -x^2 + x; \quad f(x) = -3x^2 - x + 2;$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1. \quad f(x) = 2x^2 - 7x + 1.$$

$$12.27. \quad f(x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{x}{6} + 1;$$

$$f(x) = -\frac{x^2}{7} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{3};$$

$$f(x) = -\frac{x^2}{5} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{7}.$$

Să se determine coeficienții a, b, c pentru care graficul funcției:

$$x \rightarrow ax^2 + bx + c$$

trece prin punctele $M_1\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right), M_2\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right), M_3\left(\begin{smallmatrix} x_3 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right).$

Să se studieze funcția și să se construiască graficul în fiecare din următoarele cazuri:

$$12.28. \quad M_1\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), M_2\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), M_3\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right).$$

$$12.29. \quad M_1\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), M_2\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right), M_3\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right).$$

$$12.30. \quad M_1\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), M_2\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), M_3\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

12.5 APLICAȚIE LA ECUAȚIILE ȘI INECUAȚIILE DE GRADUL AL DOILEA

12.5.1 Intersecția grafurilor a două funcții

Fie f și g două funcții, F și G grafurile lor (a căror reprezentare se poate face în raport cu același reper).

Dacă o pereche de numere reale este comună cu F și G , înseamnă că există un număr x astfel că:

$$(x, g(x)) = (x, f(x)).$$

Pentru aceasta este necesar și suficient ca $f(x) = g(x)$. Abscisele punctelor comune lui F și G vor fi deci soluțiile ecuației:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } f(x) = g(x)\}?$$

Dacă această ecuație nu admite soluție, intersecția grafurilor este vidă (și prin urmare graficele nu se întâlnesc).

12.5.2. Intersecția unei drepte și a parabolei de ecuație $y = x^2$

Presupunind că există, punctele comune parabolei de ecuație $y = x^2$ și dreptei de ecuație $y = ax + \beta$ sint rădăcinile ecuației:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 = ax + \beta\} \quad (E)$$

sau încă:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - ax - \beta = 0\}. \quad (E')$$

După valorile lui a și β , adică după dreapta aleasă, această ecuație de gradul al doilea va admite două soluții distincte, o soluție dublă sau nu va admite nici o soluție.

EXEMPLE.

I. Dreapta $y = \frac{x}{2} + 5$ conduce la ecuația:

$$\left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - \frac{x}{2} - 5 = 0\right\}?$$

care admite două soluții. Se obțin două puncte de intersecție:

$$A_1(x_1 = -2, y_1 = 4),$$

și:

$$A_2\left(x_2 = \frac{5}{2}, y_2 = \frac{25}{4}\right);$$

rezultat pe care-l confirmă figura 11.

II. Dreapta $y = \frac{x}{2} - 1$ conduce la ecuația:

$$\left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - \frac{x}{2} + 1 = 0\right\}?$$

care nu admite rădăcină. Această dreaptă nu taie parabola (fig. 11).

III. Căutăm dacă există, printre toate dreptele paralele cu cele două precedente, deci printre dreptele care au coeficientul director $\frac{1}{2}$, o dreaptă care are un singur punct comun cu parabola.

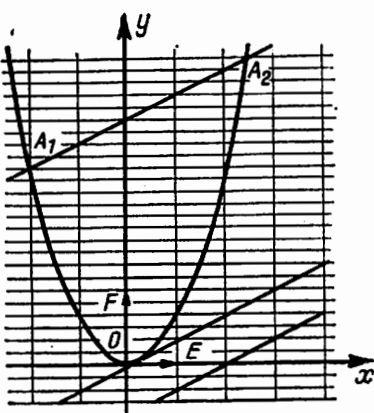


Fig. 11

O asemenea dreaptă are ca ecuație:

$$y = \frac{1}{2}x + \beta.$$

și conduce la ecuația:

$$\left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - \frac{1}{2}x - \beta = 0\right\}?$$

pentru care se formează discriminantul $\frac{1}{4} + 4\beta$.

Există soluție dublă în singurul caz în care $\beta = -\frac{1}{16}$. Dreapta

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}, \text{ când } \beta \text{ variază, face tranziție între secantele}$$

pentru care $\beta < -\frac{1}{16}$ și nesecantele pentru care $\beta > -\frac{1}{16}$.

Dreapta $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$ este tangentă la parabolă în punctul lor comun:

$$x = \frac{1}{4}, \quad y = -\frac{1}{16} \quad (\text{fig. 11})$$

12.5.3. O rezolvare grafică a ecuației de gradul al doilea

Rezultatele precedente sugerează o metodă pentru rezolvarea grafică a ecuației de gradul al doilea:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax^2 + bx + c = 0\}^? \quad (a \neq 0). \quad (E)$$

$$\text{Se va scrie (E) sub forma: } \left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}\right\}^? \quad (E')$$

și se vor căuta abscisele punctelor (eventuale) comune grafelor funcțiilor $y = x^2$ și $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$.

Nu se va construi un grafic pentru a rezolva una sau două ecuații. Metoda este „rentabilă“ dacă trebuie rezolvate un mare număr de ecuații, pentru care se cunoaște dinainte, după natura problemei, un ordin de mărime pentru soluții.

Se trasează parabola de ecuație $y = x^2$ sau, mai degrabă, arcele utile pe hirtie tare sau un material asemănător. Se trasează, în general, dreptele pe o foaie transparentă și adesea este suficient să se așeze o riglă, fără a se trage linie. Trebuie să se determine dreptele într-un mod rapid și comod.

EXAMPLE.

I. $\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - 3x - 15 = 0\}$? (fig. 12).

Dreapta: $y = 3x + 15$

Trasat prin: $A(x = 0, y = 15)$; $B(x = 10, y = 45)$.

Soluții: $x_1 \approx -2,7$; $x_2 \approx 5,7$

Comparație cu calculul:

$$\Delta = 69; 8,30 < \sqrt{69} < 8,31;$$

$$\frac{-5,31}{2} < x_1 < \frac{-5,30}{2}; \quad \frac{11,30}{2} < x_2 < \frac{11,31}{2};$$

$$-2,655 < x_1 < -2,650; \quad 5,650 < x_2 < 5,655.$$

II. $\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 + 3,2x - 37 = 0\}$? (fig. 12).

Dreapta: $y = -3,2x + 37$.

Trasat prin: $C(x = -10, y = 69)$; $D(x = 10, y = 5)$.

Soluții: $x_1 \approx -7,9$; $x_2 \approx 4,7$.

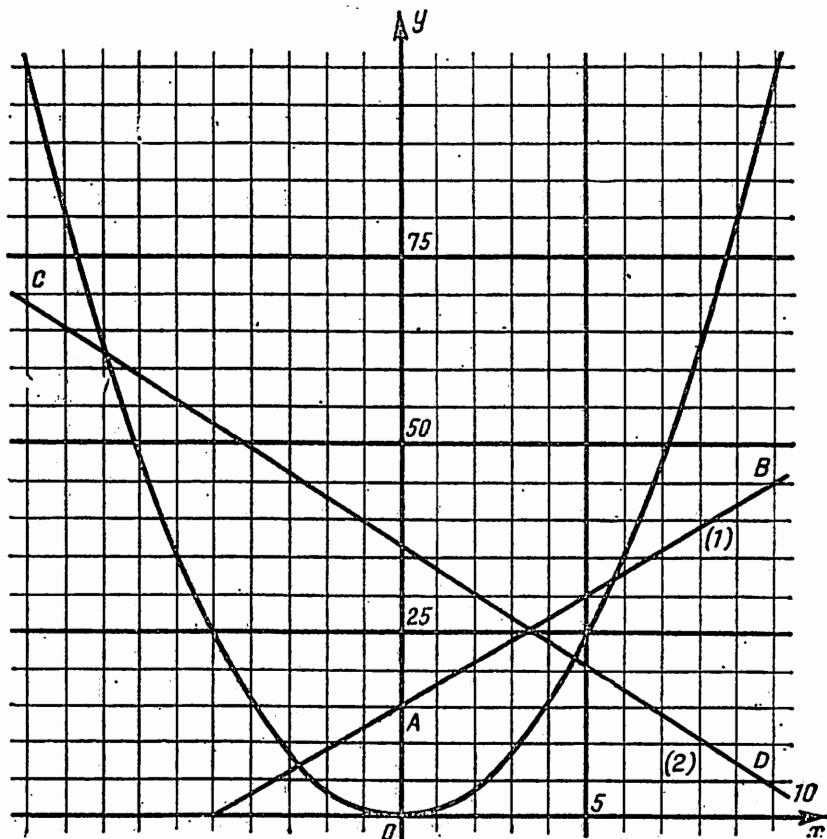


Fig. 12

Comparație cu calculul: $\Delta' = 39,56$; $6,28 < \sqrt{\Delta'} < 6,29$;
 $-7,89 < x_1 < -7,88$; $4,68 < x_2 < 4,69$.

Metoda dă cifra ce s-ar adopta ca cifră a zecilor dacă ne-am decide să rotunjim și să nu păstrăm decât o cifră zecimală.

Cititorul poate să-și facă o primă idee din ceea ce tehnicienii numesc abac, principiul fiind în a substitui un traseu simplu, unui calcul greu.

Abacul de la figura 12 nu este utilizabil direct decât pentru coeficienții care variază între anumite limite, în alte cazuri se poate încerca folosirea lui schimbându-se scara.

12.5.4. O ecuație parametrică

Fie să se rezolve și să se discute, după valorile parametrului m , ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - (m+4)x + 3m+7 = 0\}?$$

Prin calcul. $\Delta = (m+4)^2 - 4(3m+7) = m^2 - 4m - 12$;

$$\Delta = (m-6)(m+2).$$

Semnul rădăcinilor este dat de studiul semnelui sumei și produsului.

m	$-\infty$	-4	$-\frac{7}{3}$	-2	6	$+\infty$
sgn Δ	+	+	+	-	+	+
sgn a	+	+	+	+	+	+
sgn b	+	-	-	-	-	-
sgn c	-	-	+	+	+	+
	două rădăcini de semne contrarii		două rădăcini pozitive		două rădăcini pozitive	

$$x_1 = \frac{5}{3} \quad x_1 = x_2 = 1 \quad x_1 = x_2 = 5$$

$$x_2 = 0$$

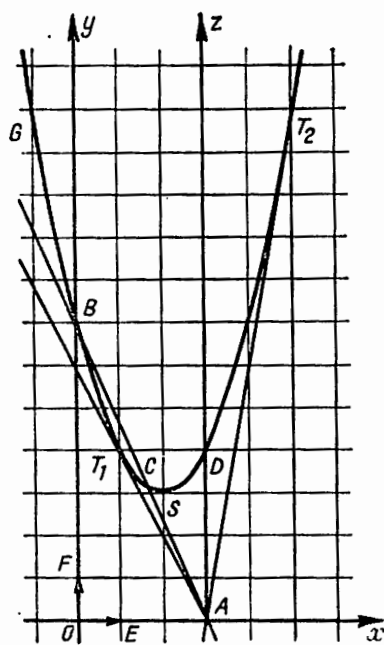


Fig. 13

Interpretare grafică. Ecuația se scrie:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - 4x + 7 = m(x - 3)\}?$$

Se construiește (fig. 13) graficul definit de relația:

$$y = x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2 + 3;$$

aceasta este o parabolă al cărei virf este în punctul $\left(\frac{2}{3}\right)$.

Graficul definit de $y = m(x - 3)$ este o dreaptă, variabilă cu m . Ea trece prin punctul fix $A(x = 3, y = 0)$ și m este coeficientul său director.

Dreptele obținute pentru $m_1 = -2$ și $m_2 = +6$ separă secantele la G de nesecante. Fiecare dintre ele are cu G decît un punct în comun: T_1 ($x_1 = 1, y_1 = 4$) pentru prima, T_2 ($x_2 = 5, y_2 = 12$) pentru a doua.

Se poate presupune că AT_1 și AT_2 sînt tangentele la G duse din A .

Pentru $m = -\frac{7}{3}$, se obține o secantă particulară care taie pe G în punctul $B(x = 0, y = 7)$ și în punctul $C\left(x = +\frac{5}{3}, y = \frac{28}{9}\right)$.

Secanta BC separă mulțimea secantelor în două submulțimi.

Acelea care corespund lui:

$$-\frac{7}{3} < m < -2$$

taie arcul $\widehat{BC}$ în două puncte de abscise pozitive.

Secantele care corespund lui $m > 6$ dau două puncte de abscise pozitive pe arcul infinit, de origine D , la dreapta.

Acelea care corespund lui $m < -\frac{7}{3}$ dau un punct de

abscisă pozitivă pe arcul $\widehat{CD}$ și un punct de abscisă negativă pe arcul infinit, de origine B , la stînga.

Cititorul poate astfel să aprecieze felul în care graficele vizualizează rezultatele unui calcul. Ele permit să ne facem o idee generală asupra chestiunii studiate, s-o redea intuitiv și, dacă este cazul, servesc la a controla calculul și a rectifica greșelile.

12.5.5. Aplicație la inecuații

Generalizând ceea ce am expus cu privire la ecuații, se vede imediat cum se rezolvă o inecuație cum ar fi:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 + 3,2x - 37 > 0\}?$$

Noi am construit deja (fig. 12) graficele funcțiilor:

$$y = x^2; y_1 = -3,2x + 37.$$

Se vor păstra abscisele punctelor pentru care y este mai mare ca y_1 .

Obținem, ceea ce putea fi prevăzut prin semnul polinomului, semidreptele axei ox exterioare intervalului rădăcinilor.

Se vede de asemenea că lucrarea făcută în paragraful precedent permite să se rezolve și să se discute grafic inecuația parametrică:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - (m + 4)x + 3m + 7 < 0\}?$$

Dacă există, soluțiile sînt abscisele pentru care punctul lui G este sub punctul dreptei. Existența lor depinde de m .

Dacă m dă o nesecantă, inecuația nu are soluție.

Dacă m dă o secantă, intervalul rădăcinilor constituie mulțimea soluțiilor.

EXERCIȚII.

Să se construiască, în reper ortonormat cu $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm, graficul relației definite de $y = x^2$, pentru $-5 \leq x \leq 5$.

Să se rezolve, cu ajutorul acestui grafic, ecuațiile definite pe $\mathbb{R}$ de următoarele relații:

$$12.31. \quad x^2 + x - 6 = 0; \quad 12.32. \quad 5x^2 - x - 4 = 0;$$

$$3x^2 - x - 6 = 0; \quad 5x^2 + x - 4 = 0;$$

$$2x^2 + x - 1 = 0. \quad x^2 + x + 0,1 = 0.$$

$$12.33. \quad 5x^2 + 4x + 0,5 = 0;$$

$$3x^2 + 6x + 1 = 0;$$

$$11x^2 + 10x + 1 = 0.$$

Să se construiască în reper ortonormat cu $OE = 2$ cm, $OF = \frac{1}{4}$ cm, graficul relației definite prin $y = x^2$, pentru $0 \leq x \leq 10$.

Să se rezolve cu ajutorul acestui grafic, ecuațiile definite în $\mathbb{R}$ de următoarele relații:

$$\begin{array}{ll} 12.34. & x^3 - 10x + 1 = 0; \\ & x^3 - 9x + 1 = 0; \\ & x^3 - 9,5x + 1,5 = 0. \end{array} \quad \begin{array}{ll} 12.35. & x^3 - 8x + 4 = 0; \\ & x^3 - 7x + 3 = 0; \\ & x^3 - 7,5x + 3,5 = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 12.36. \quad x^3 - 6x + 2 = 0; \\ \quad \quad x^3 - 5x + 4 = 0; \\ \quad \quad x^3 - 5,5x + 3 = 0. \end{array}$$

Să se studieze grafic și prin calcul ecuațiile parametrice definite de următoarele relații:

$$\begin{array}{ll} 12.37. & x^3 - 2x - m = 0. \\ 12.38. & x^3 - (3 + m)x + 2 - m = 0. \\ 12.39. & (x - m)^3 = mx. \\ 12.40. & (x - m)^3 + m = mx. \\ 12.41. & x^2 + (m + 1)x + m - 1 = 0. \\ 12.42. & 3x^2 - (m + 2)x + m - 2 = 0. \\ 12.43. & x^2 - mx + 1 = 0. \\ 12.44. & (x - m)^3 + mx = 0. \\ 12.45. & (x - m)(x - 2m) + 1 = 0. \end{array}$$

PROBLEME

Să se construiască, în reper ortonormat, cu $OE = OF = 1$ cm, graficele funcțiilor definite prin:

$$\begin{array}{ll} 12.46. & f(x) = |(x - 1)(x - 3)|; \\ 12.47. & f(x) = |-x^2 + x + 1|; \\ 12.48. & f(x) = \left| \frac{1}{2}x^2 + x - 3 \right|; \\ 12.49. & f(x) = |-x^2 - x + 1| + |x^2 + x - 1|; \\ 12.50. & f(x) = |x^3 - 3x| + 2. \end{array}$$

Să se construiască graficele relațiilor următoare, după alegerea reperului (se reamintește că $E(x)$ desemnează partea întregă a lui x , adică cel mai mare întreg relativ, nu mai mare ca x):

$$\begin{array}{ll} 12.51. & y = y^2 E(x). \\ 12.52. & y = [x - E(x)]^2. \end{array} \quad \begin{array}{ll} 12.53. & y = x^2 E(x) - x E(x^2). \\ 12.54. & y = \sqrt{(x^2 + 2x)^2} - x^2 + 3. \end{array}$$

Fiind date două numere relative a și b , se notează prin $\text{Max}(a, b)$ cel mai mare dintre cele două numere a și b , prin $\text{min}(a, b)$, cel mai mic dintre cele două.

Să se construiască, într-un reper convenabil, graficele funcțiilor definite de următoarele relații:

$$12.55. f(x) = \text{Max}(x, x^2); g(x) = \text{min}(x, x^2).$$

$$12.56. f(x) = \text{Max}(x^2, 2x^2 - 1).$$

$$12.57. f(x) = \text{min}(x^2, 2x^2 - 1).$$

$$12.58. f(x) = \text{Max}(-x^2 + x + 3, x^2 - x).$$

$$12.59. f(x) = \text{min}(-x^2 + x + 3, x^2 - x).$$

$$12.60. f(x) = x^2 + \text{Max}(x, x^2).$$

$$12.61. f(x) = \sqrt{x^2} \times \text{Max}(1, x).$$

$$12.62. f(x) = \text{Max}[x^2, (x + |x|)^2].$$

12.63. Pe o axă $x'Ox$, de origine O , fie punctul A fix definit prin $\overline{OA} = a$ și fie punctul M variabil definit prin $\overline{OM} = x$.

Să se studieze variația funcției definite de relația:

$$f(x) = MA^2 + MO^2 = y.$$

Să se construiască graficul.

Să se rezolve grafic sistemele definite prin mulțimile următoare de relații:

$$12.64. \begin{cases} y > x \\ y < x^2 - 1. \end{cases}$$

$$12.68. \begin{cases} x + y - 1 < 0 \\ (y - x)(y - x^2) > 0. \end{cases}$$

$$12.65. \begin{cases} y < x^2 + x - 1 \\ y > x^2 - x + 1. \end{cases}$$

$$12.69. \begin{cases} x + y = 0 \\ y + x^2 + 5x > 0. \end{cases}$$

$$12.66. \begin{cases} y < -x^2 + x + 5 \\ y > x^2 + x - 5. \end{cases}$$

$$12.70. \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y > x^2 + 3x + 2. \end{cases}$$

$$12.67. \begin{cases} x + y + 1 > 0 \\ y^2 x^4 > 0. \end{cases}$$

$$12.71. \begin{cases} 2x + 3y - 6 > 0 \\ y = x^2 + 3x + 2. \end{cases}$$

13. FUNCȚIA DEFINITĂ PRIN

$$g_a(x) = \frac{a}{x}$$

13.1. Funcția g_1 .

13.2. Studiul funcțiilor g_a .

13.3. Aplicații.

13.1. FUNCȚIA g_1

13.1.1. Funcția „inversă“

Orice număr real x , nenul, admite un număr invers $\frac{1}{x}$ (notat adesea x^{-1}), soluție unică a ecuației:

$$\{y; y \in \mathbb{R} \text{ și } xy = 1\} \quad (x \neq 0).$$

Studiul inversului a fost făcut cu ocazia studiului numerelor reale. Se știe că un număr și inversul său au același semn (după regula semnelor) și că: dacă y este inversul lui x , x este inversul lui y . Pe de altă parte singurele numere egale cu inversele lor sînt 1 și -1 .

Rezultă din ceea ce precede că, pe mulțimea $\mathbb{R}^*$ a numerelor reale nenule, se poate defini o funcție g_1 prin legea:

$$g_1(x) = \frac{1}{x}.$$

Funcția g_1 este definită pe $\mathbb{R}^*$, deci pe cele două intervale $]-\infty, 0[$ și $]0, +\infty[$ și se poate numi, după definiția sa, funcția „inversă“.

Dacă se dau lui x două valori opuse, funcția ia două valori opuse. Aceasta este o funcție impară.

13.1.2. Primul studiu al valorilor luate de funcția g_1

Un tablou numeric ne va da o primă idee asupra acestei funcții.

Semitablou $x < 0$		Semitablou $0 < x$	
x	y	x	y
..... -10 000 000	 -0,000 000 1	 0,000 000 1	 10 000 000
..... -100	 -0,01	 0,01	 100
..... -10	 -0,1	 0,1	 10
..... -2	 -0,5	 0,5	 2
..... -1	 -1	 1	 1
..... -0,5	 -2	 2	 0,5
..... -0,1	 -10	 10	 0,1
..... -0,01	 -100	 100	 0,01
..... -0,000 000 1	 -10 000 000	 10 000 000	 0,000 000 1
.....			

Examinarea acestui tablou face să se presupună că funcția este descrescătoare pe fiecare dintre cele două intervale pe care ea este definită. El arată, în afară de asta, pentru x vecin cu zero și pentru x tinzând spre plus sau minus infinit, o comportare a funcției, care cere, pentru a fi descrisă, precizări.

13.1.3. Sensul de variație

Fie $g_1(x_1) = y_1$ și $g_1(x_0) = y_0$.

1°. $x_0 < 0$ și $x_1 < 0$, $x_1 \neq x_0$.

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}}{\frac{x_0 - x_1}{x_1 x_0}} = \frac{x_0 - x_1}{x_1 x_0} \cdot \frac{1}{x_1 - x_0} = -\frac{1}{x_1 x_0}.$$

Deci:

$$x_0 < 0 \text{ și } x_1 < 0 \implies \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} < 0.$$

Funcția g_1 este deci descrescătoare pe intervalul $]-\infty, 0[$.

$$2^\circ. \quad x_0 > 0 \text{ și } x_1 > 0, \quad x_1 \neq x_0.$$

Se efectuează același calcul și, pentru că produsul $x_1 x_0$ este tot pozitiv, se poate conchide din nou că funcția este descrescătoare pe intervalul $]0, +\infty[$.

TEOREMĂ. Funcția $\frac{1}{x}$ este descrescătoare pe fiecare dintre cele două intervale pe care este definită.

13.1.4. Studiu pentru $|x|$ tinzînd la infinit

Se constată, atunci cînd x tinde la plus infinit, că funcția ia valori pozitive foarte mici.

Precizăm acest fapt.

TEOREMĂ. Se spune că funcția $f(x)$ tinde la 0 cînd x tinde la plus infinit dacă, oricare ar fi numărul pozitiv dat arbitrar de mic ε , este posibil să se determine un număr A astfel ca $x > A$ să atragă după sine $|f(x)| < \varepsilon$.

Să formulăm această definiție cu ajutorul simbolurilor logice:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists A > 0, x > A \implies |f(x)| < \varepsilon.$$

Cititorul va scrie și va enunța definiția analoagă, relativă la cazul cînd x tinde spre $-\infty$.

Noi nu vom da decît formularea: „ $f(x)$ tinde spre 0 cînd x tinde spre $-\infty$ ” se notează:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

și echivalează cu:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists A > 0 \quad x < -A \implies |f(x)| < \varepsilon.$$

OBSERVAȚIE.

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ echivalează cu:

$\forall \varepsilon E_\varepsilon = \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } |f(x)| < \varepsilon\}$ conține un interval de forma $]A, +\infty[$.

De asemenea, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ echivalează cu:

$\forall \varepsilon E_\varepsilon = \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } |f(x)| < \varepsilon\}$ conține un interval de forma: $] -\infty, A[$.

Aplicație a acestor definiții la $g_1(x) = \frac{1}{x}$.

Problema de a arăta că $g_1(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$, revine la a studia mulțimea:

$$\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } |g_1(x)| < \varepsilon\},$$

și a determina dacă această mulțime conține un interval $]A, +\infty[$ sau un interval $] -\infty, A[$, oricare ar fi numărul pozitiv real ε .

Funcția definită prin $g_a(x) = \frac{a}{x}$.

În cazul acesta, fie mulțimea E_ε :

$$\begin{aligned} E_\varepsilon &= \left\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon\right\} \\ &= \left\{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } |x| > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \\ &=]-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}[\cup]\frac{1}{\varepsilon}, +\infty[. \end{aligned}$$

Oricare ar fi ε , mulțimea E_ε conține deci două intervale:

$$]-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}[\text{ și }]\frac{1}{\varepsilon}, +\infty[$$

ceea ce ne permite să conchidem:

$$\text{a) } \forall \varepsilon > 0; x < 0 \text{ și } |x| > \frac{1}{\varepsilon} \implies \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$$

$$\text{Deci } g_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0.$$

$$\text{b) } \forall \varepsilon > 0; x > 0 \text{ și } |x| > \frac{1}{\varepsilon} \implies \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$$

$$\text{Deci: } g_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

TEOREMĂ. Numărul $g_1(x) = \frac{1}{x}$ tinde spre zero cînd x tinde în valoare absolută spre infinit:

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0.$$

13.1.5. „A tinde spre zero“ și „a descrește mereu“ sînt fapte fără legătură necesară între ele

Cînd x tinde spre $+\infty$, funcția $\frac{1}{x}$ posedă două proprietăți:

- 1°. ea descrește;
- 2°. ea tinde spre zero.

Într-o frază: atunci cînd x tinde spre plus infinit, $\frac{1}{x}$ tinde spre zero prin valori descrescătoare. Se va nota că, pentru o funcție, faptul de a avea, pentru x tinzînd spre plus infinit, limita zero, nu este legat neapărat de o descreștere continuă (a se vedea exercițiul nr. 14.19).

13.1.6. Studiul funcției $\frac{1}{x}$ cînd x tinde spre zero

Pentru x vecin cu zero, vom obține rezultate de felul

$$x = -0,000\ 000\ 1 \implies y = -10\ 000\ 000,$$

și:

$$x = 0,000\ 000\ 1 \implies y = +10\ 000\ 000.$$

La două valori foarte vecine ale lui x corespund valori foarte diferite ale lui y . Se poate presupune că y tinde spre plus infinit cînd x tinde spre zero prin valori pozitive și, spre minus infinit, cînd x tinde spre zero prin valori negative. Dar e necesar să precizăm mai bine aceste noțiuni.

DEFINIȚIE. Se spune că o funcție $f(x)$ tinde spre plus infinit, atunci cînd x tinde spre zero, prin valori pozitive dacă, oricare ar fi

numărul pozitiv A , arbitrar de mare, este posibil să se determine un număr η astfel că $0 < x < \eta$ antrenează $f(x) > A$.

Cu ajutorul simbolurilor logice:

$f(x)$ tinde spre $+\infty$ când x tinde spre $+0$, echivalează cu:

$$\forall A \in \mathbb{R}^+, \exists \eta, \eta > 0 \text{ și } 0 < x < \eta \implies f(x) > A.$$

Se va remarca felul convențional de a nota când x tinde spre zero prin valori pozitive ($+0$).

OBSERVAȚIE.

$f(x)$ tinde spre $+\infty$ când x tinde spre $+0$ se notează:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +0} +\infty$$

și echivalează cu: $\forall A \in \mathbb{R}^+, E_A = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } f(x) > A\}$ conține un interval de forma $]0, \eta[$, cu $\eta > 0$.

Aplicație la g_1 .

Fie mulțimea $E_A = \left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{1}{x} > A\right\}$, unde $A \in \mathbb{R}^+$. Mulțimea E_A este formată deci din numere exclusiv pozitive:

$$E_A = \left\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } 0 < x < \frac{1}{A}\right\}.$$

Deci:

$$\forall A \quad E_A \supset]0, \frac{1}{A}[,$$

și prin urmare: $\forall A \in \mathbb{R}^+, \exists \eta = \frac{1}{A}$ (real pozitiv) astfel că:

$$0 < x < \eta \implies g_1(x) < A.$$

OBSERVAȚIE. În cazul de față: E_A egală cu $]0, \frac{1}{A}[$; dar este suficient să știm că E_A conține intervalul $]0, \frac{1}{A}[$, căci nu căutăm decît o condiție suficientă pentru ca $\frac{1}{x}$ să fie mai mare ca A .

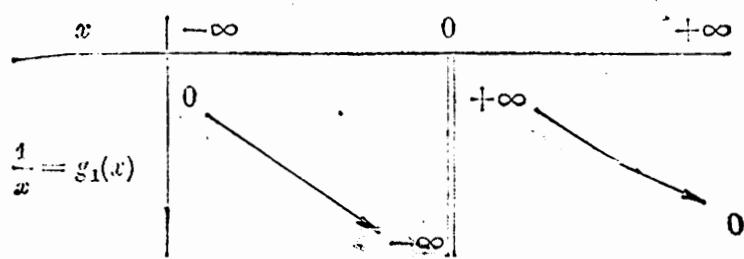
TEOREMA. $g_1(x)$ tînde spre plus infinit cînd x tinde spre zero prin valori pozitive.

Pentru $x < 0$, definițiile și demonstrațiile se transpun cu ușurință.

TEOREMĂ. $g_1(x)$ tinde spre minus infinit cînd x tinde spre zero prin valori negative.

13.1.7. Rezumat

Studiul pe care l-am făcut se rezumă într-un tablou:



Linia dublă care figurează în dreptul valorii $x = 0$ înseamnă că funcția g_1 nu este definită pentru $x = 0$.

13.1.8. Reprezentarea grafică într-un reper

Simetrii. Funcția g_1 , definită pe un domeniu infinit, nu poate fi reprezentată decît prin grafice parțiale.

Dacă nu-i posibil să se traseze un grafic infinit, se poate concepe, studia și descrie curba ideală, nelimitată, din care graficul dă un fragment.

Această curbă constituie mulțimea reprezentativă a relației $xy = 1$ și această definiție nouă, deși foarte apropiată de prima, pune mai bine în lumină reciprocitatea care există între x și y (fig. 1).

Curba de ecuație $xy = 1$ conține în același timp punctele:

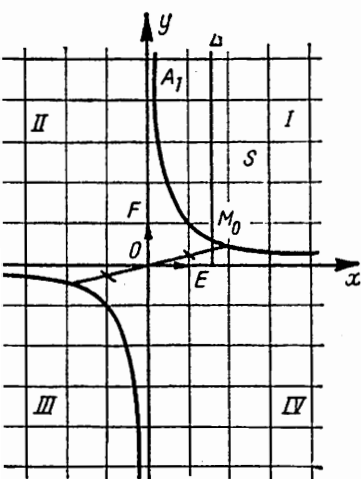
$$M_0\left(x = x_0, y = y_0 = \frac{1}{x_0}\right), \quad x_0 \neq 0$$

și:

$$M'_0(x = -x_0, y = -y_0).$$

Fig. 1

Ea admite deci originea ca centru de simetrie.



Ea conține de asemenea punctele:

$$M'_0(x = y_0, y = x_0)$$

și:

$$M''_0(x = -y_0, y = -x_0).$$

Se deduce de aci că, în raport cu un reper ortonormat, bisectoarele axelor constituie, pentru curbă, axe de simetrie (bisectoarea care aparține regiunilor I și III este axa transversă, cealaltă este axa netransversă).

RAMURI INFINITE. Atunci cînd x tinde spre plus infinit, y tinde spre zero. Punctele se găsesc de partea absciselor pozitive și distanța punctului la Ox tinde spre zero, cînd abscisa tinde spre plus infinit.

Se spune că curba admite o ramură infinită sau că semidreapta Ox este asimptotă la curbă sau că-i este asimptotă.

De asemenea, ramura infinită obținută cînd x tinde spre minus infinit, admite ca asimptotă semidreapta Ox' .

Cele două semidrepte sînt trasate pe aceeași dreaptă, dar ne vom feri să generalizăm; se va putea spune că dreapta $x'Ox$ este asimptotă pentru curbă.

Atunci cînd x tinde spre O prin valori pozitive, y tinde spre plus infinit. Există pe curbă puncte vecine cu semidreapta Oy (de partea absciselor pozitive); și, cînd facem ca distanța punctului figurativ de Oy să tindă către zero, ordonata sa tinde spre infinit.

Vom putea spune și acum că curba admite o ramură infinită, asimptotă la semidreapta Oy sau că Oy este o asimptotă a curbei.

Pentru x tinzînd spre zero prin valori negative, există o ramură infinită, simetrica precedentei în raport cu originea, care admite ca asimptotă semidreapta Oy' .

Dacă considerăm curba ca mulțime reprezentativă a relației $xy = 1$, se poate considera, indiferent că se dă mai întîi x și y este o funcție de x sau că se dă mai întîi y și că x este o funcție de y ; $x = g_1(y)$. Curba este graficul comun al lui $y = g_1(x)$ și a lui $x = g_1(y)$.

Analogia profundă a celor două asimptote ale curbei apare atunci cu claritate.

REGIUNI. Curba totală se compune din două părți distincte, simetrice în raport cu originea, admițînd fie-

care două ramuri infinite. Unul dintre arcele dublu infinit, fie A_1 , se găsește în regiunea I, celălalt în regiunea III.

Arcul A_1 împarte regiunea I în două domenii: o dreaptă Δ de ecuație $x = x_0$, taie într-adevăr pe A_1 în punctul de coordonate:

$$x = x_0, \quad y = y_0 = \frac{1}{x_0};$$

acest punct M_0 determină un segment pe care $y < y_0$ și o semidreaptă Δ' pe care $y > y_0$. Domeniul superior S conține semidreptele Δ' ; el constituie mulțimea figurativă a relației $xy > 1$; $x > 0$.

TRASEUL DEFINITIV. Figura 1 arată traseul obținut. Nu sîntem încă în măsură de a-l justifica complet: nu știm dacă, în fiecare punct, există o tangentă și cum o construim.

Curba ideală, nelimitată, este o curbă ce se definește și studiază în geometrie sub numele de hiperbolă.

EXERCIȚII.

13.1. Să se dea, în amănunt, definiția unei funcții care tinde spre zero cînd x tinde spre minus infinit.

13.2. Să se dea, în amănunt, definiția:

a) a unei funcții care tinde spre $-\infty$ cînd x tinde spre zero prin valori negative.

b) a unei funcții care tinde spre $+\infty$ cînd x tinde spre zero prin valori negative.

13.3. Să se dea diverse condiții suficiente, de tipul $0 < x < \eta$, pentru ca:

$$\frac{1}{x} > 893\,277.$$

13.4. Să se dea diverse condiții suficiente, de tipul $x < A$, pentru ca:

$$\left| \frac{1}{x} \right| < 0,333\,345 \cdot 10^{-4}, \text{ cu } x < 0.$$

13.5. Să se demonstreze că:

$\frac{1}{x^3}$ tinde spre $+\infty$ cînd x tinde la -0 (a se citi prin valori negative),

13.6. Să se găsească o condiție suficientă de tipul $x > A$, pentru ca:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} < 0,00031.$$

13.7. Să se găsească o condiție suficientă de tipul $x > A > 0$ pentru ca:

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{3\,000}.$$

Această condiție este ea suficientă pentru ca:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{1\,000}?$$

13.8. Să se studieze funcția f definită prin:

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x}.$$

Să se precizeze comportarea sa pentru $|x|$ tinzând spre $+\infty$. (Ea tinde spre 3.)

13.9. Să se studieze funcția f definită prin: $f(x) = \frac{1}{|x|}$.

13.10. Să se studieze funcția f definită prin:

$$f(x) = \text{Max} \left[x, \frac{1}{x} \right].$$

13.11. Să se studieze o reprezentare grafică a grafului relației:

$$y = \frac{1}{|x|}.$$

Simetrie. Asimptote.

13.12. Să se studieze o reprezentare cartesiană a grafului relației:

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

Simetrie. Asimptote.

13.13. Mulțimea reprezentativă într-un reper & a relației:

$$x^2 y^2 = 1.$$

Simetrie. Asimptote.

13.14. Mulțimea reprezentativă a relației:

$$xy > 1.$$

Mulțimea reprezentativă a relației:

$$xy < 1.$$

13.15. Graficul relației:

$$y = 3 + \frac{1}{x} \text{ (Translație).}$$

Să se rezolve grafic, determinându-se mulțimile lor reprezentative, sistemele definite de următoarele mulțimi de relații:

$$13.16. \begin{cases} xy < 1 \\ x + y < 0. \end{cases}$$

$$13.17. \begin{cases} yx < 1 \\ x^2 + 3y - 6 = 0. \end{cases}$$

$$13.18. \begin{cases} xy < 1 \\ x + y + 1 > 0 \\ x + y - 1 < 0. \end{cases}$$

13.19. Limita zero nu implică descreșterea continuă.

Fabulă: Preotesele Dianei, la Ephes, aveau în sarcină un izvor și o amforă sacră. În fiecare seară, la miezul nopții, ele trebuiau să golească amfora de jumătate din conținutul ei. Excepțional, la fiecare lună plină, ele trebuiau să dubleze conținutul (existent în acel moment).

1°. Să se demonstreze că conținutul tinde spre zero (și, așa de iute, că nu poate fi vorba decât de o fabulă).

2°. Să se deducă că o funcție poate tinde spre zero fără a descrește întotdeauna.

13.2. STUDIUL FUNCȚIILOR g_a

13.2.1. Funcția g_a definită de $g_a(x) = \frac{a}{x}$

Funcția g_a , cu $a \neq 0$ (și, în cele ce urmează, vom observa întotdeauna această restricție) generalizează funcția $y = \frac{1}{x}$. Ea este definită pe $\mathbb{R} - \{0\}$, adică pentru $x < 0$ și pentru $x > 0$.

Ea este tot o funcție impară: $a \neq 0$, $f(-a) = -f(a)$.

Sens de variație. Pentru $x > 0$, fie $x_0 > 0$, $x_1 > 0$, $x_0 \neq x_1$.

Punem $g_a(x_0) = y_0$ și $g_a(x_1) = y_1$.
Avem:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{a}{x_1} - \frac{a}{x_0}}{x_1 - x_0} = -\frac{a}{x_1 x_0}.$$

Acest raport are semnul lui $(-a)$.

Pentru $x < 0$, $x_1 < 0$, $x_0 < 0$, se obține același rezultat căci $x_0 x_1$ este pozitiv.

TEOREMĂ. Pe fiecare din intervalele pe care este definită, funcția $y = \frac{a}{x}$ este descrescătoare dacă a este pozitiv.
Ea este crescătoare dacă a este negativ.

Comportarea pentru x tinzând spre $+\infty$ sau $-\infty$.

Am învățat că:

$$x \text{ tinde spre } +\infty \implies \frac{1}{x} \text{ tinde spre } 0.$$

Însă, dacă o funcție $f(x)$ tinde spre 0 când x tinde spre $+\infty$ sau $-\infty$, funcția $af(x) = g(x)$ tinde de asemenea spre 0.

Se poate preciza acest fapt în felul următor:

Fie să se realizeze $|g(x)| < \varepsilon$ printr-o condiție suficientă de tipul $x > A$.

Vrem deci să se realizeze $|af(x)| < \varepsilon$, adică:

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon'.$$

Însă, pentru că $f(x)$ tinde spre zero, există pentru orice $\varepsilon' > 0$, dat, un număr A astfel că:

$$x > A \implies |f(x)| < \varepsilon'.$$

Vom avea deci:

$$x > A \implies |g(x)| < \varepsilon.$$

Ținând cont de acest rezultat general și de semnul lui a , vom avea deci:

$$a > 0 \begin{cases} x \text{ tinde spre } +\infty \implies \frac{a}{x} \text{ tinde spre } +0. \\ x \text{ tinde spre } -\infty \implies \frac{a}{x} \text{ tinde spre } -0. \end{cases}$$

$$a < 0 \begin{cases} x \text{ tinde spre } +\infty \implies \frac{a}{x} \text{ tinde spre } -0. \\ x \text{ tinde spre } -\infty \implies \frac{a}{x} \text{ tinde spre } +0. \end{cases}$$

Comportarea pentru x tinzând spre 0. — Studiul funcției $y = \frac{1}{x}$ ne-a învățat că:

$$x \text{ tinde spre } 0 \implies \frac{1}{x} \text{ tinde spre } \infty.$$

Studiul funcției liniare ne-a învățat că:

$a > 0$ și X tinde spre $+\infty \Rightarrow aX$ tinde spre $+\infty$;

$a > 0$ și X tinde spre $-\infty \Rightarrow aX$ tinde spre $-\infty$;

$a < 0$ și X tinde spre $+\infty \Rightarrow aX$ tinde spre $-\infty$;

$a < 0$ și X tinde spre $-\infty \Rightarrow aX$ tinde spre $+\infty$.

Notînd $\frac{1}{x}$ prin X , putem înălța aceste implicații și serie:

$a > 0$ și x tinde spre $+0 \Rightarrow \frac{a}{x}$ tinde spre $+\infty$.

$a > 0$ și x tinde spre $-0 \Rightarrow \frac{a}{x}$ tinde spre $-\infty$.

$a < 0$ și x tinde spre $+0 \Rightarrow \frac{a}{x}$ tinde spre $-\infty$.

$a < 0$ și x tinde spre $-0 \Rightarrow \frac{a}{x}$ tinde spre $+\infty$.

Tablou de variație. Studiul precedent se rezumă în următorul tablou:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$a > 0$			
$a > 0$			
$a < 0$			
$a < 0$			

13.2.2. Reprezentarea grafică a lui g_a

Pentru $a = 2$, graficul G_2 al funcției $y = \frac{2}{x}$ se deduce din acela al funcției $y = \frac{1}{x}$ înmulțind cu $+2$ toate ordo-

natele. Noul grafic exprimă de asemenea relația $xy = 2$ și se găsește în întregime deci, în raport cu vechiul, în domeniul $xy > 1$.

Graficul $G_{\frac{1}{2}}$ se deduce din graficul G_1 printr-o afinitate de raport $\frac{1}{2}$, de axă $x'Ox$, de direcție Oy . El se situează în întregime în regiunea $xy < 1$.

Graficul G_{-1} se deduce din graficul G_1 , efectuindu-se o simetrie în raport cu $x'Ox$. Se trece ușor de la G_{-1} la G_{-2} etc.

Toate aceste grafice admit aceeași simetrie centrală și aceleași asimptote. Se obține o familie de hiperbole situate în regiunile I și III pentru $a > 0$, II și IV pentru $a < 0$ și cu atât mai „strânse” pe asimptotele lor cu cât $|a|$ este mai mic. Ele nu au nici un punct comun (fig. 2).

OBSERVAȚIE. Într-un reper ortonormat, se obțin hiperbole echilatre.

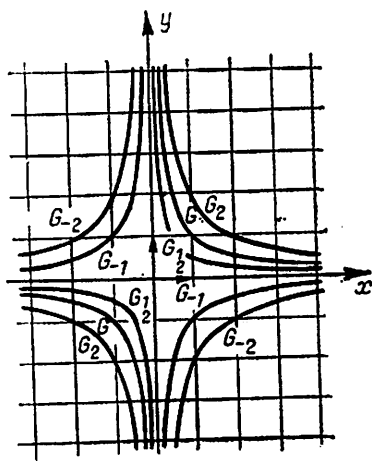


Fig. 2

13.2.3. Schimbarea vectorilor unitari

Am stabilit (nr. 12.2.3) formulele relative la o schimbare de vectori unitari:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{OE}' = x\vec{OE} \quad k \neq 0 \\ \vec{OF}' = l\vec{OF} \quad l \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = kx' \\ y = ly' \end{cases}$$

Rezultă că: $xy = a \Leftrightarrow x'y' = \frac{a}{kl}$.

În particular, orice hiperbolă echilatră este aptă să reprezinte, în raport cu un reper ortonormat, o relație $xy = b$; ea admite deci ca axe de simetrie bisectoarele axelor.

EXERCIȚII

13.20. Să se reprezinte în reper ortonormat cu $OE = 2$ cm și $OF = 1$ cm, relația $y = \frac{2}{x}$. Fie G graficul obținut. Care este semnificația lui G dacă $OE' = 2$ cm și $OF' = 2$ cm?

13.21. Să se reprezinte în reper ortonormat cu $OE = 2$ cm și $OF = 1$ cm, relația $y = \frac{3}{x}$. Fie G graficul obținut. Să se precizeze coordonatele punctului M_1 , simetric al punctului $M\left(x = x_0, y = y_0 = \frac{3}{x_0}\right)$ în raport cu bisectoarea.

13.22. Să se reprezinte în reper ortonormat cu $OE = OF = 1$ cm, relația $y = \frac{1}{2x}$. Schimbând reperul, curba obținută ar putea să reprezinte relația $y = -\frac{0,01}{2x}$?

Să se rezolve grafic sistemele definite de următoarele mulțimi de relații:

$$\mathbf{13.23.} \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } \begin{cases} xy < \frac{1}{2} \\ xy > 2 \end{cases} \right\}?$$

$$\mathbf{13.24.} \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } \begin{cases} xy < \frac{1}{2} \\ xy > -1 \end{cases} \right\}?$$

$$\mathbf{13.25.} \left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } \begin{cases} x^2 y^2 < 1 \\ |x| + |y| < \frac{1}{2} \end{cases} \right\}?$$

13.3. APLICAȚII

13.3.1. Aplicațiile la ecuația de gradul al doilea

Studiul intersecției unei drepte de ecuație $y = \alpha x + \beta$ și al hiperbolei, grafic al relației $y = \frac{a}{x}$, conduce la ecuația:

$$\left\{ x; x \in \mathbb{R}^* \text{ și } \frac{a}{x} = \alpha x + \beta \right\}?$$

sau:

$$\{x; x \in \mathbb{R}^* \text{ și } \alpha x^2 + \beta x - a = 0\}?$$

Ca și pentru parabolă, vom obține deci, după valorile lui α și β , pentru $\alpha \neq 0$:

1° secante care taie hiperbola în două puncte;

2° nesecante;

3° drepte care au în comun cu hiperbola un singur punct, dar un punct „care conține cît două”; vom vedea mai tîrziu că-i vorba de tangente.

Pentru $a = 0$, se obține o secantă cu un singur punct de intersecție. Restricția $x \neq 0$ este desigur verificată, pentru că a este diferit de zero. Aceste rezultate sugerează o metodă grafică pentru rezolvarea ecuației de gradul al doilea.

Fie ecuația:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax^2 + bx + c = 0\}. \quad (1)$$

Dacă $c = 0$ se rezolvă ușor.

Presupunem că $c \neq 0$. În acest caz, 0 nu este rădăcină a lui (1) și nu se pierde vreo soluție, făcîndu-se schimbarea, permisă pe $\mathbb{R} - \{0\}$, a lui (1) în:

$$\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } ax + b + \frac{c}{x} = 0\}. \quad (2)$$

Ecuația (2) se rezolvă grafic prin intersecția hiperbolei de ecuație:

$$y = \frac{-c}{x} \quad (3)$$

și a dreptei de ecuație:

$$y = ax + b. \quad (4)$$

Se vor putea deci construi abace bazate pe această metodă.

13.3.2. Determinarea a două numere care au suma dată și produsul dat

Studiul sistemului:

$$\left\{ (x, y); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ și } \begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases} \right\}?$$

deja făcut la nr. 9.3.4, poate fi reluat cu ajutorul grafi-celor.

Sistemul se exprimă prin intersecția hiperbolei, de ecuație $xy = P$ și a dreptei de ecuație $x + y = S$.

Folosim un reper ortonormat care va folosi mai bine simetria sistemului în raport de x și y .

Dreapta de ecuație $x + y = S$ este paralelă cu cea de-a doua bisectoare, aceea care traversează regiunile II și IV.

Hiperbola de ecuație $xy = P$ se găsește în regiunile II și IV pentru $P < 0$ și în regiunile I și III pentru $P > 0$.

Se vede deci că, pentru $P < 0$, dreapta taie întotdeauna hiperbola în două puncte, simetrice în raport cu prima bisectoare și situate pe arce diferite (fig. 3):

$$M_1(x = \alpha, y = \beta); M_2(x = \beta, y = \alpha).$$

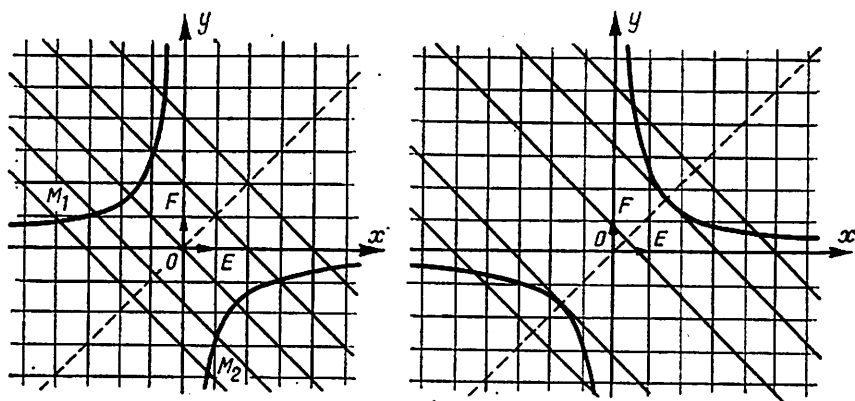


Fig. 3-4

Sistemul admite două soluții dacă se ține cont de ordinea numerelor obținute, o soluție dacă se adoptă un punct de vedere diferit. Pentru $P > 0$, dreptele paralele cu cea de-a doua bisectoare se împart în secante și nesecante, cu două tangente ca separatoare (fig. 4). Punctele de intersecție, când există, se găsesc pe același arc.

EXERCIIU.

Să se construiască într-un reper ortonormat cu $OE = OF = 2$ cm, graficul lui $y = \frac{1}{x}$. Să se folosească pentru a rezolva grafic ecuațiile definite de următoarele relații:

$$\begin{array}{ll} 13.26. & 2,1x^3 - 3,2x + 1 = 0; \\ & 2,2x^2 - 3,4x + 1 = 0. \end{array} \quad \begin{array}{ll} 13.27. & 2x^2 - 7x + 2 = 0; \\ & 3x^2 - 7x + 2 = 0. \end{array}$$

$$13.28. \quad \begin{array}{l} x^2 - 3x + 0,83 = 0; \\ x^2 - 3x + 0,85 = 0. \end{array}$$

Să se studieze, prin calcul și prin grafice, sistemele definite de următoarele perechi de soluții:

$$13.29. \begin{cases} xy = 1 \\ mx + (m-2)y = 2. \end{cases} \quad 13.30. \begin{cases} xy = 2 \\ mx - y - 2m + 1 = 0. \end{cases}$$

$$13.31. \begin{cases} xy = 1 \\ y + 2x = m. \end{cases}$$

PROBLEME

Să se studieze și să se reprezinte grafic funcțiile definite prin relațiile următoare:

$$13.32. f(x) = \text{Max} \left(\frac{1}{x}, \frac{2}{x} \right). \quad 13.36. f(x) = E \left(\frac{1}{x} \right).$$

$$13.33. f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{|x|}. \quad 13.37. f(x) = \left| \frac{1}{x} - 3 \right|.$$

$$13.34. f(x) = \frac{1}{E(x)}. \quad 13.38. f(x) = \text{Max} \left(\frac{8}{x}, x^2 \right).$$

$$13.35. f(x) = \frac{E(x)}{x}. \quad 13.39. f(x) = \text{Max} \left(\frac{2}{x}, -x + 6 \right).$$

13.40. Să se rezolve grafic inecuațiile definite de relațiile următoare:

$$-1 < \frac{1}{x} < 3; \quad -2 < -\frac{3}{x} < +5.$$

13.41. Un cerc de centru O are raza 4 cm. Un punct A este situat la 2 cm de O . O secantă mobilă trece prin A și taie cercul în B și C . Se pune $\overline{AB} = x$, $\overline{AC} = y$.

1°. Să se scrie relația între x și y .

2°. Să se studieze și să se reprezinte grafic variația lui y , când B descrie, de la M la N , semicercul limitat de diametrul $[M, N]$ care trece prin A (A între O și M).

13.42. 1°. Într-un reper ortonormat cu $OE = OF = 2$ cm, să se traseze graficul funcției definită prin:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x.$$

Se obține o curbă H .

2°. O dreaptă variabilă D , de ecuație $y = 2x + m$, este raportată la aceleași axe.

Să se discute, după valorile lui m , existența și numărul punctelor comune lui H și D .

3°. Când D taie pe H în două puncte A' și A'' , se notează prin M mijlocul lui $[A, A']$.

Să se calculeze în funcție de m , coordonatele lui M .

4°. Să se studieze pentru $m \in \mathbb{R}$, mulțimea punctelor M . Să se demonstreze că este transpusă pe o dreaptă și se compune din două semidrepte.

5°. Dreapta D taie axele de coordonate în B_1 și B_2 . Care sînt, în funcție de m , coordonatele mijlocului P al lui $[B_1, B_2]$? Să se studieze pentru $m \in \mathbb{R}$ mulțimea punctelor P . Să se compare această mulțime cu mulțimea punctelor M .

6°. Când A' și A'' există, să se compare $A'B_1$ și $A''B_2$, $A'B_2$ și $A''B_1$.

13.43. Dacă p desemnează presiunea unui gaz, v volumul său, t temperatura sa, avem:

$$\frac{pv}{1 + \frac{t}{273}} = C, \text{ unde } C \text{ este o constantă.}$$

1°. Să se determine C presupunîndu-se că masa gazoasă ocupă la 0° un volum de 10 cm^3 , sub presiunea de 1 kg/cm^2 .

2°. Să se construiască curbele reprezentative ale presiunii $p = y$ în funcție de volum $v = x$, al acestei mase gazoase, la temperatura $t = 50^\circ$, $t = 100^\circ$.

(Vom face pe v să varieze de la $0,1 \text{ cm}^3$ la 20 cm^3 .)

14. CALCUL NUMERIC

- 14.1. Aproximație.
 - 14.2. Progresii aritmetice.
 - 14.3. Progresii geometrice.
 - 14.4. Logaritmi zecimali.
 - 14.5. Calcule logaritmice.
 - 14.6. Serii Renard. Numere normale.
 - 14.7. Rigla de calcul.
-

14.1. APROXIMAȚIE

14.1.1. Valori apropiate zecimale ale unui număr real

Vrem să efectuăm calcule asupra numerelor reale folosind sistemul de numerație zecimal. Am dori să putem scrie toate aceste numere cu un număr finit de simboluri: cifrele de la 0 la 9, semnele $+$ sau $-$ și o virgulă care precede sau urmează una sau mai multe cifre. Aceasta ne-ar permite să efectuăm asupra numerelor reale unele calcule la fel de ușoare ca și asupra numerelor întregi. Din păcate nu toate numerele reale pot avea această scriere simplă.

Dacă acest lucru este simplu cu, de exemplu:

$$2,49$$

$$-0,03$$

$$\frac{3}{4} = 0,75,$$

nu mai este la fel cu, de exemplu:

$$\frac{1}{3} = 0,33333...$$

$$\sqrt{2} = 1,414...;$$

punctele de suspensie indică faptul că nu se pot scrie aceste numere cu un număr finit de cifre situate la dreapta virgulei (numite cifre zecimale): se spune că desfășurarea lor zecimală este nelimitată. Vom arăta totuși că se pot face calculele, ținând cont de o anumită aproximație pe care o vom preciza, cu numerele a căror desfășurare zecimală este limitată și pe care le vom numi numere zecimale.

DEFINIȚIE. Un număr zecimal a este un număr rațional care poate fi reprezentat printr-o fracție zecimală (adică o fracție al cărei numitor este o putere a lui 10):

$$a = \frac{p}{10^n}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

EXAMPLE. $0,75 = \frac{75}{100} = \frac{75}{10^2}.$
 $-3,2634 = \frac{-32\,634}{10\,000} = \frac{-32\,634}{10^4}.$

DEFINIȚIE. Partea întreagă $E(a)$ a unui număr zecimal a o numim caracteristica lui a .
 Numărul $\alpha = a - E(a)$ este *mantisa* lui a .

Se știe că: $0 < \alpha < 1$ (a se vedea nr. 5.4.7).

EXAMPLE. $a = 3,18 \quad E(a) = 3 \quad \alpha = 0,18.$
 $a = -3,18 \quad E(a) = -4 \quad \alpha = 0,82.$

Observăm că orice întreg este zecimal și că mantisa sa este nulă.

Un număr real x nu este neapărat zecimal:

1°. Anumite numere raționale, ca de exemplu $\frac{1}{3}$, nu sînt zecimale.

2°. Nici un număr irațional nu este zecimal.

Dar se pot găsi întotdeauna două numere zecimale, a căror diferență este atît de mică cît vrem, care încadrează numărul x dat. În adevăr, după o teoremă de la nr. 5.6.7,

oricare ar fi numărul real x și întregul natural $q = 10^n$, există un întreg relativ p astfel că:

$$\frac{p}{10^n} \leq x < \frac{p+1}{10^n}$$

Numerele zecimale care încadrează pe x sînt: $\frac{p}{10^n}$ și $\frac{p+1}{10^n}$. Diferența lor este $\frac{1}{10^n}$; ea poate fi făcută oricît de mică vrem, cu condiția să luăm pe n destul de mare.

DEFINIȚIE. Numărul zecimal $\frac{p}{10^n}$ se numește valoare apropiată zecimală cu aproximație de $\frac{1}{10^n}$, prin lipsă, a numărului x .
Numărul zecimal $\frac{p+1}{10^n}$ se numește valoarea apropiată zecimală cu aproximație de $\frac{1}{10^n}$, prin adaos, a numărului x .

EXEMPLE

I. Fie numărul rațional nezeecimal $\frac{1}{3}$. Se poate scrie:

$$0,333 < \frac{1}{3} < 0,334$$

$$\frac{333}{10^3} < \frac{1}{3} < \frac{334}{10^3};$$

0,333 este valoarea apropiată zecimală, cu aproximație de $\frac{1}{10^3}$, prin lipsă, a lui $\frac{1}{3}$;

0,334 este valoarea apropiată zecimală, cu aproximație de $\frac{1}{10^3}$, prin adaos, a numărului $\frac{1}{3}$.

Se poate scrie de asemenea:

$$0,333 \ 3 < \frac{1}{3} < 0,333 \ 4$$

$$\frac{3333}{10^4} < \frac{1}{3} < \frac{3334}{10^4};$$

0,3333 și 0,3334 sînt valorile apropiate zecimale cu aproximație de $\frac{1}{10^4}$, respectiv prin lipsă și prin adaos, ale numărului $\frac{1}{3}$.

Pentru a obține valorile apropiate zecimale, cu aproximație de $\frac{1}{10^n}$, ale lui $\frac{1}{3}$, este suficient să împărțim pe 1 la 3 pînă ce se obțin n cifre zecimale. Acest lucru este valabil pentru orice număr rațional nezeecimal reprezentat de fracția $\frac{A}{B}$; este suficient să se împartă A la B pînă ce se obțin n cifre zecimale.

II. Fie numărul irațional $\sqrt{2}$. Se poate scrie:

$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$$

$$\frac{14\ 142}{10^4} < \sqrt{2} < \frac{14\ 143}{10^4}.$$

III. Fie numărul irațional π . Se poate scrie:

$$3,1415 < \pi < 3,1416; \quad \frac{31\ 415}{10^4} < \pi < \frac{31\ 416}{10^4}.$$

Grație calculului, ca în primul exemplu sau cu ajutorul tabelor numerice, ca în ultimul, vom putea găsi valori zecimale apropiate ale unui număr dat.

14.1.2. Valori apropiate ale unei variabile și ale unei expresii algebrice

În toate disciplinele științifice se folosesc expresii algebrice care permit să se calculeze anumite mărimi, plecînd de la măsuri experimentale.

EXEMPLE. $S = \pi R^2$ aria cercului.

$V = \frac{1}{3} Bh$ volumul piramidei.

$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ perioada unui pendul simplu.

Aceste expresii algebrice pot conține constante, ca $\frac{1}{3}$, π , $\sqrt{2}$, care, după cum am văzut, pot fi calculate sau sînt date de tabele numerice, cu o anumită aproximație.

Lungimea unui pendul, de exemplu, măsurată în metri, poate să nu fie cunoscută decît cu o aproximație de 1 mm:

$$1,634 < l < 1,635.$$

Nu se cunoaște valoarea exactă x a fiecărei variabile, ci numai două numere a' și a care încadrează pe x , numere pe care le numim respectiv valoarea apropiată prin lipsă și valoarea apropiată prin adaos:

$$a' < x < a.$$

Aceste numere cunoscute a' și a sînt, în general, numere zecimale. Problema care se pune este atunci următoarea:

Cunoscînd o încadrare pentru fiecare dintre numerele care intră în calculul valorii numerice a unei expresii algebrice, să determinăm o încadrare a acestei valori.

Înainte de a studia această problemă, vom preciza cîteva definiții.

14.1.3. Eroare. Incertitudine

Fie un număr real x și valori apropiate ale lui x : a' , prin lipsă și a , prin adaos:

$$a' < x < a.$$

(Această aproximație prin încadrare poate proveni din natura lui x sau dintr-o măsură experimentală.)

Să considerăm numerele $d = a - x$ și $d' = a' - x$.

$$a' < x < a \text{ implică } \begin{cases} d > 0, \text{ deci } |d| = d; \\ d' < 0, \text{ deci } |d'| = -d' = x - a'; \\ 0 < a - x < a - a', \text{ deci } |d| < a - a'; \\ 0 < x - a' < a - a', \text{ deci } |d'| < a - a'. \end{cases}$$

DEFINIȚIE. d este eroarea⁽¹⁾ comisă atunci cînd se înlocuiește x cu a .

d' este eroarea comisă atunci cînd se înlocuiește x cu a' .

d și d' , în general, nu sînt cunoscute (dacă ar fi cunoscute exact valorile lui x) dar se știe că valoarea lor absolută

⁽¹⁾ Se spune adesea „eroare absolută“ dar este preferabil să spunem „eroare“ din cauza riscului de confuzie pe care o poate aduce adjectivul „absolut“.

este mai mică decât numărul $a - a'$, care, este cunoscut; $a - a'$ este un majorant al lui $|d|$ și $|d'|$, adică un număr mai mare decât $|d|$ și $|d'|$.

DEFINIȚII. Un majorant al lui $|d|$ și $|d'|$ se numește incertitudine asupra lui x .

EXEMPLE

I. $12,8 < x < 13,1$.

12,8 este o valoare apropiată, prin lipsă, a lui x ;

13,1 este o valoare apropiată prin adaos, a lui x .

Nu se cunoaște eroarea d' comisă atunci când se înlocuiește x prin 12,8, nici eroarea d comisă atunci când se înlocuiește x prin 13,1, dar se știe că $|d|$ și $|d'|$ sînt mai mici decât:

$$13,1 - 12,8 = 0,3.$$

Incertitudinea asupra lui x este 0,3.

II. Fie un număr real nezeecimal x și valorile sale zecimale apropiate cu aproximație de $\frac{1}{10^n}$, prin lipsă și prin adaos:

$$\frac{p}{10^n} < x < \frac{p+1}{10^n}.$$

Incertitudinea asupra lui x este $\frac{1}{10^n}$.

În loc să ni se dea o valoare prin lipsă și una prin adaos a lui x , ni se poate da:

1. Fie o valoare apropiată a' , prin lipsă, cu o aproximație ε , a lui x , Adică a' și $\varepsilon > 0$ fiind cunoscute, se știe:

$$a' < x < a' + \varepsilon.$$

Incertitudinea asupra lui x este atunci ε .

EXEMPLU. $a' = 2,34$ este o valoare apropiată prin lipsă cu aproximație de 0,02, a lui x . Se știe atunci că:

$$2,34 < x < 2,36.$$

Incertitudinea asupra lui x este 0,02.

2. Fie o valoare apropiată a , prin adaos, a lui x , cu aproximație de ε .

Se știe atunci că:

$$a - \varepsilon < x < a.$$

Incertitudinea asupra lui x este egală tot cu ε .

3. Fie o valoare apropiată a'' , cu aproximație de ε , a lui x (fără să se precizeze dacă această valoare este apropiată prin adaos sau prin lipsă).

Se știe atunci că:

$$a'' - \varepsilon < x < a'' + \varepsilon.$$

Incertitudinea asupra lui x este, în acest caz, 2ε .
Se poate face deci această observație:

Cunoașterea sensului de aproximație (adică faptul de a ști dacă o valoare apropiată este prin lipsă sau prin adaos) *reduce la jumătate incertitudinea*.

EXEMPLU (care constituie o observație asupra tabelelor numerice). Tabelele numerice pot da valori exacte ale numerelor zecimale, dar numai valori apropiate ale numerelor nezecimale. Cu toate că desfășurarea zecimală a acestor ultime numere este nelimitată, numărul de cifre zecimale date este în mod necesar finit și variabil după precizia tabeli (se poate de asemenea ca în tabel să nu figureze toate cifrele zecimale ale unui număr zecimal). Convenția este următoarea:

Presupunem că un număr este dat în tabele cu n cifre zecimale. Ultima cifră dată este a n -a a desfășurării zecimale a numărului, dacă a $n+1$ cifră, a desfășurării zecimale, este strict mai mică decât 5. Dacă nu, ultima cifră dată, este a n -a a dezvoltării zecimale, mărită cu 1. Astfel, într-o tabelă în care n nu poate fi mai mare ca 4:

$$1,41421... \quad \text{va fi scris} \quad 1,4142 \quad (1)$$

$$1,73205... \quad \text{va fi scris} \quad 1,7321. \quad (2)$$

Din păcate, nu se semnalează, în general, dacă valoarea dată este o valoare apropiată prin lipsă [cazul (1)] sau prin adaos [cazul (2)]: incertitudinea se găsește dublată.

Într-adevăr, de exemplu, nedispunând decât de numărul 1,4142, nu se poate ști dacă provine din:

1,41420...; 1,41421...; 1,41422...; 1,41423...; 1,41424...
sau din:

1,41415...; 1,41416...; 1,41417...; 1,41418...; 1,41419...

Se poate afirma numai pentru valoarea exactă a lui x :

$$1,41415 \leq x < 1,41425.$$

Incertitudinea este: 0,0001. Numărul $\alpha = 1,4142$ este o valoare apropiată cu aproximație $\varepsilon = \frac{0,0001}{2}$ a lui x , dar nu se știe dacă ea este prin lipsă sau prin adaos.

Revenim la problema pe care ne-am pus-o la nr. 14.1.2 cu privire la calculul valorii numerice a unei expresii algebrice. Această problemă se poate enunța astfel:

Cunoscând incertitudinea pentru fiecare din date, să determinăm incertitudinea rezultatului.

Vom studia această problemă pentru diferite feluri de expresii algebrice.

14.1.4. Încadrarea unei sume

Fie să se calculeze suma $S = x + y$, știind că:

$$a' < x < a, \text{ de exemplu: } 1,731 < x < 1,732;$$

$$b' < y < b, \text{ de exemplu: } 1,345 < y < 1,346.$$

Se deduce de aici, în virtutea proprietăților inegalităților:

$$a' + b' < x + y < a + b, 3,076 < x + y < 3,078.$$

Pe de altă parte, incertitudinea asupra sumei este:

$$(a + b) - (a' + b') = (a - a') + (b - b').$$

De unde:

TEOREMA 1 Suma valorilor apropiate prin lipsă dă o valoare apropiată prin lipsă a sumei; suma valorilor apropiate prin adaos dă o valoare apropiată prin adaos a sumei.

TEOREMA 2 Incertitudinea asupra sumei este egală cu suma incertitudinilor asupra fiecărui termen.

14.1.5. Încadrarea unei diferențe

Fie să se calculeze diferența $D = x - y$. Păstrind notațiile și exemplul precedent, avem:

$$a' < x < a \qquad 1,731 < x < 1,732$$

$$-b < -y < -b' \qquad -1,346 < -y < -1,345$$

(pentru a se obține ultima linie se înmulțesc toți termenii cu -1 și se schimbă sensul inegalităților).

Se deduce:

$$a' - b < x - y < a - b', \quad 0,385 < x - y < 0,387.$$

De unde:

TEOREMĂ. Se obține o valoare apropiată prin lipsă a lui $x - y$, scăzându-se dintr-o valoare apropiată prin lipsă a lui x o valoare apropiată prin adaos a lui y .

Avem un rezultat analog pentru valoarea apropiată prin adaos.

Incertitudinea asupra lui $x - y$ este:

$$(a - b') - (a' - b) = (a - a') + (b - b').$$

Deci:

TEOREMĂ. Incertitudinea asupra diferenței este egală cu suma incertitudinilor asupra fiecărui termen.

14.1.4. Încadrarea produsului a două numere pozitive

Să se calculeze produsul $P = xy$, cu datele precedente (valorile apropiate sint pozitive).
din încadrările:

$$1,731 < x < 1,732$$

$$1,345 < y < 1,346$$

rezultă imediat, după proprietățile inegalităților, încadrarea:

$$1,731 \times 1,345 < xy < 1,732 \times 1,346.$$

Acest rezultat este general: $a'b' < xy < ab$. De unde:

TEOREMĂ. Produsul valorilor apropiate prin lipsă a două numere pozitive dă o valoare apropiată prin lipsă a produsului.

Rezultatul este analog pentru valorile apropiate prin adaos.

Efectuându-se înmulțirile, se găsește:

$$2,328\,195 < xy < 2,331\,272$$

cu o incertitudine de 0,003 077. Dacă x și y reprezintă lungimile, în m , ale dimensiunilor dreptunghiului, P dă aria în m^2 . Datele arătau valorile apropiate zecimale ale lui x și y cu o aproximație de $\frac{1}{1\,000}$; rezultatul nu se prezintă sub forma unei încadrări prin valorile sale apropiate zecimale, cu aproximație de $\frac{1}{10^n}$.

În practică se înlocuiește adesea încadrarea obținută printr-o alta mai simplă: se mărește incertitudinea, dar se câștigă simplitate. De altfel, o prea mare precizie poate fi, pe de o parte, inutilă în exploatarea rezultatului, sau poate fi iluzorie, pe de altă parte (a se vedea exercițiul nr. 14.5).

Încadrării precedente, riguroasă dar complicată, i se va substitui, de exemplu, aceasta:

$$2,328\,0 < xy < 2,332\,0$$

care dă o incertitudine de 0,004 0 în loc de 0,003 077 (pentru dreptunghiul considerat: 40 cm^2 în loc de 30,77 cm^2).

Să reținem că se poate substitui încadrării $A' < X < A$ încadrarea $A'_1 < X < A_1$, cu condiția ca: $A'_1 < A'$ și $A < A_1$.

Se poate da o formulă generală pentru incertitudinea unui produs (a se vedea exercițiul nr. 14.10).

EXEMPLU. Un factor negativ. — Să se încadreze uv știind că:

$$-3,2 \leq u < -3,15; \quad 1,6 \leq v < 1,65.$$

După proprietățile inegalităților:

$$3,15 < -u \leq 3,2; \text{ deci:}$$

$$-3,2 \times 1,65 < uv < -3,15 \times 1,6$$

$$-5,280 < uv < -5,040.$$

Incertitudinea: 0,240.

14.1.7. Încadrarea unui cit de numere pozitive

Fie să se calculeze citul $Q = \frac{x}{y}$ cu datele precedente (valorile apropiate sint pozitive).

Din încadrarea:

$$1,345 < y < 1,346$$

rezultă:

$$\frac{1}{1,346} < \frac{1}{y} < \frac{1}{1,345}.$$

deoarece rapoartele cu același numărător se clasează în ordinea inversă a numitorilor. Considerîndu-se $Q = x \cdot \frac{1}{y}$ se poate aplica regula asupra încadrării produsului a două numere pozitive.

Rezultă:

$$\frac{1,731}{1,346} < \frac{x}{y} < \frac{1,732}{1,345}.$$

Acest rezultat este general; dacă $0 < a' < x < a$ și $0 < b' < y < b$, atunci:

$$\frac{a'}{b} < \frac{x}{y} < \frac{a}{b}.$$

TEOREMĂ. Pentru a avea o valoare apropiată prin lipsă a cîtului a două numere pozitive, trebuie să luăm o valoare prin lipsă a numărătorului și o valoare prin adaos a numitorului.

Efectuîndu-se împărțirile, se găsește, $1,286\,032 < \frac{x}{y} < 1,287\,733$ sau o incertitudine de 0,001 701. Se poate prefera, cîștigînd în simplitate, dar pierzîndu-se puțin în precizie, încadrarea:

$$1,286\,0 < \frac{x}{y} < 1,287\,8;$$

incertitudinea este atunci: 0,001 8.

Se poate da o formulă generală pentru incertitudinea unui cît (a se vedea exercițiul nr. 14.11).

ALT EXEMPLU. Două numere negative. Să se încadreze $\frac{u}{v}$

pentru:

$$-1,120 < u < -1,118; \quad -4,111 < v < -4,110.$$

Cîtul este pozitiv; se poate deci îndrepta atenția numai asupra valorilor absolute și:

$$\frac{1,118}{4,111} < \frac{u}{v} < \frac{1,120}{4,110}.$$

Dacă s-ar fi vrut $\frac{u}{v}$ cu $w = -v$, s-ar fi răsturnat ordinea valorilor absolute:

$$-\frac{1,120}{4,110} < \frac{u}{w} < -\frac{1,118}{4,111}.$$

14.1.8. Încadrarea unei rădăcini pătrate

Este clar că:

$$1,731 < x < 1,732$$

implică:

$$\sqrt{1,731} < \sqrt{x} < \sqrt{1,732}.$$

Pentru a avea o încadrare a rezultatului, se va calcula $\sqrt{1,731}$ prin lipsă și $\sqrt{1,732}$ prin adaos cu ajutorul unei tabele sau aplicându-se procedeul învățat în clasa a treia.

În cazul de față se va putea opri la:

$$1,3156 < \sqrt{x} < 1,3161.$$

14.1.9. Încadrarea unei expresii algebrice mai complexe

Știm că orice expresie algebrică poate fi analizată și redusă la un șir de operații elementare: adunări, înmulțiri, scăderi, împărțiri, extrageri de rădăcini, toate aceste operații aplicându-se asupra expresiilor intermediare. Să tratăm un exemplu.

Fie să se găsească o încadrare a valorii numerice a expresiei E:

$$E = 4 \frac{x^3}{y} - \sqrt{x^2 + y^2} \text{ pentru: } 3,17 < x < 3,18;$$

$$1,31 < y < 1,32.$$

$$1^\circ. 3,17^2 < x^2 < 3,18^2 \text{ de unde: } 10,0489 < x^2 < 10,1124.$$

$$2^\circ. 1,31^2 < y^2 < 1,32^2 \text{ de unde: } 1,7161 < y^2 < 1,7424.$$

$$3^\circ. 11,7650 < x^2 + y^2 < 11,8548.$$

$$4^\circ. \quad 3,430 < \sqrt{x^2 + y^2} < 3,444.$$

$$5^\circ. \quad 40,195 \ 6 < 4x^2 < 40,449 \ 6.$$

Fiind dată încadrarea precedentă, este permis să se simplifice în:

$$40,195 < 4x^2 < 40,450.$$

$$6^\circ. \quad \frac{1}{1,32} < \frac{1}{y} < \frac{1}{1,31} \text{ de unde: } 0,757 < \frac{1}{y} < 0,764.$$

$$7^\circ. \quad 40,195 \times 0,757 < \frac{4x^2}{y} < 40,450 \times 0,764.$$

Se simplifică această încadrare în: $30,427 < \frac{4x^2}{y} < 30,904$.

$$8^\circ. \quad 30,427 - 3,444 < \frac{4x^2}{y} - \sqrt{x^2 + y^2} < 30,904 - 3,430;$$

$$26,983 < E < 27,474.$$

Incertitudinea asupra lui E este: 0,491.

14.1.10. Valori apropiate ale expresiilor particulare

În aplicații și, în special, în Fizică, avem nevoie adesea să calculăm valoarea numerică a expresiilor:

$$(1 - \varepsilon)^2, (1 + \varepsilon)^2, \frac{1}{1 + \varepsilon}, \frac{1}{1 - \varepsilon}, \sqrt{1 + \varepsilon}, \sqrt{1 - \varepsilon},$$

pentru valori ale lui ε astfel ca:

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{10}, \text{ și uneori: } 0 < \varepsilon < \frac{1}{100}.$$

1. Avem: $(1 + \varepsilon)^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$. Dacă se înlocuiește valoarea exactă cu valoarea apropiată $1 + 2\varepsilon$, se face o eroare de ε^2 .

Eroarea este mai mică ca $\frac{1}{100}$ dacă: $\varepsilon < \frac{1}{10}$.

Eroarea este mai mică decât $\frac{1}{10\ 000}$ dacă: $\varepsilon < \frac{1}{100}$,
în acest ultim caz, aproximația este, practic, excelentă.

EXEMPLE. $(1,003)^3 \approx 1,006$ cu o eroare egală cu $\frac{9}{10^6}$, deci mai mică ca $\frac{1}{10^5}$.

$\left(1 + \frac{1}{273}\right)^3 \approx 1 + \frac{2}{273}$ cu o eroare egală cu $\frac{1}{273^2}$, deci mai mică ca $\frac{1}{4 \times 10^4}$.

Observații analoage pentru: $(1 - \varepsilon)^2 = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \approx 1 - 2\varepsilon$.

2. Pentru $\frac{1}{1 + \varepsilon}$, utilizând identitatea: $1 - \varepsilon^2 = (1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon)$, vom scrie:

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} - \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon} = 1 - \varepsilon;$$

de unde rezultă că: $\frac{1}{1 + \varepsilon} = 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon}$.

Dacă se înlocuiește $\frac{1}{1 + \varepsilon}$ prin $1 - \varepsilon$, eroarea este mai mică decât ε^2 pentru că:

$$1 + \varepsilon > 1 \text{ implică } \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon} < \varepsilon^2.$$

■ EXEMPLU. 0,98 este o valoare apropiată prin lipsă a lui $\frac{1}{1,02}$ cu o eroare mai mică decât $\frac{4}{10^4}$: $0,98 < \frac{1}{1,02} < 0,9804$.

Schimbându-se ε în $-\varepsilon$, în calculul precedent, se obține:

$$\frac{1}{1 - \varepsilon} = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon},$$

deci:

$$\frac{1}{1 - \varepsilon} \approx 1 + \varepsilon,$$

valoare apropiată prin lipsă, cu o eroare de ordinul lui ε^2 (dar nu mai mică decât ε^2).

EXEMPLU. $\frac{1}{0,99} = \frac{1}{1 - 0,01} \approx 1,01.$

Eroarea comisă este de ordinul lui $(0,01)^2 = \frac{1}{10^4}.$

Mai precis, ea este egală cu $\frac{1}{0,99 \times 10^4}.$

1,01 este o valoare apropiată prin lipsă a lui $\frac{1}{0,99}.$

3. Pentru $\sqrt{1+\varepsilon}$, observăm că acest număr este vecin lui 1 atunci când ε este mic.

Punem deci:

$$\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \alpha, \quad (1)$$

și evaluăm numărul α .

După 1° : $1 + \varepsilon \approx 1 + 2\alpha$; deci: $\alpha \approx \frac{\varepsilon}{2}.$ (2)

Estimăm acum ordinea de mărime a erorii comise înlocuind α prin $\frac{\varepsilon}{2}.$

Punem: $\alpha = \frac{\varepsilon}{2} + \beta.$ (3)

Ducând în (1) și ridicând la pătrat, se obține:

$$1 + \varepsilon = 1 + \varepsilon + 2\beta + \varepsilon\beta + \frac{\varepsilon^2}{4} + \beta^2; \quad (4)$$

$$\beta = -\frac{\frac{\varepsilon^2}{4} + \beta^2}{2 + \varepsilon}, \quad \text{sau} \quad \beta \approx -\frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Valoarea $1 + \frac{\varepsilon}{2}$ este deci apropiată prin adaos.

EXEMPLU. $\sqrt{1,03} \approx 1,015.$

Schimbând ε în $-\varepsilon$, vom avea:

$$\sqrt{1-\varepsilon} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2},$$

valoare apropiată prin adaos de ordinul $\frac{\varepsilon^2}{8}.$

EXEMPLU.

$$\sqrt{0,98} \approx 0,99.$$

Pentru $\varepsilon \approx \frac{1}{10}$, se vede că eroarea comisă este de ordinul $\frac{1}{800}$. O aproximație de această natură este suficientă într-un mare număr de aplicații practice.

Rezumat

Expresia de calculat	valoarea apropiată	sensul de aproximație	Ordinea de mărime a erorii comise
$(1 + \varepsilon)^2$	$1 + 2\varepsilon$	lipsă	ε^2
$(1 - \varepsilon)^2$	$1 - 2\varepsilon$	lipsă	ε^2
$\frac{1}{1 + \varepsilon}$	$1 - \varepsilon$	lipsă	ε^2
$\frac{1}{1 - \varepsilon}$	$1 + \varepsilon$	lipsă	ε^2
$\sqrt{1 + \varepsilon}$	$1 + \frac{\varepsilon}{2}$	adaos	$\frac{\varepsilon^2}{8}$
$\sqrt{1 - \varepsilon}$	$1 - \frac{\varepsilon}{2}$	adaos	$\frac{\varepsilon^2}{8}$

14.1.11. Eroarea raportată la număr

Cunoașterea erorii nu este de ajuns pentru a judeca calitatea unei măsurători. A măsura un kilometru cu aproximație de 1 mm și a măsura 25 cm cu aproximație de un milimetru, nu sînt două măsurători de aceeași calitate. De aceea se introduce eroarea raportată (numită de asemenea eroare relativă).

DEFINIȚIE. Fie d eroarea comisă atunci cînd se înlocuiește x printr-o valoare apropiată. Eroarea relativă este cîmul lui d prin x .

Ea nu depinde de unitățile alese. Nu se cunoaște, în general, nici d nici x . Dar dacă se cunoaște incertitudinea asupra lui x , adică un majorant al lui $|d|$, se poate

calcula un majorant al lui $\left| \frac{d}{x} \right|$ care va fi numit raport de incertitudine.

EXEMPLU. Considerăm o lungime a cărei măsură x are ca valoare apropiată 324,7 cm, cu o incertitudine de 1 mm.

Eroarea raportată este mai mică decât: $\frac{0,1}{300} = \frac{1}{3\,000}$.

Într-adevăr: $|x| < 0,1 \text{ cm} \Rightarrow x > 300 \text{ cm} \Rightarrow \left| \frac{d}{x} \right| < \frac{0,1}{300}$.

Vom admite următoarea teoremă:

TEOREMĂ. Raportul de incertitudine asupra unui produs sau cît este egal cu suma rapoartelor de incertitudine asupra fiecărui termen.

EXEMPLU. Fie să se determine raportul de incertitudine asupra:

$$F = P \frac{r}{R},$$

F fiind forța care trebuie exersată normal asupra manivelei unui trolu pentru a ridica o găleată de greutate P ; r este raza cilindrului trolului, R lungimea brațului manivelei. Datele sînt următoarele:

$r = 10 \text{ cm}$ cu aproximație de 1 mm; $R = 40 \text{ cm}$ cu aproximație de 1 mm; $P = 196,6 \text{ N}$ cu aproximație de 0,5 N¹.

Avem deci:

$9,9 \text{ cm} < r < 10,1 \text{ cm}$; incertitudinea asupra lui r : 0,2 cm;
raportul de incertitudine: $\frac{0,2}{9}$;

$39,9 \text{ cm} < R < 40,1 \text{ cm}$; incertitudinea asupra lui R : 0,2 cm;
raportul de incertitudine: $\frac{0,2}{36}$ (la numitor se ia un număr mai mic ca R și suficient de simplu pentru a ușura calculele).

$196 \text{ N} < P < 197 \text{ N}$; incertitudinea asupra lui P : 1 N;
raportul de incertitudine: $\frac{1}{180}$;

Raportul de incertitudine asupra lui F :

$$\frac{0,2}{9} + \frac{0,2}{36} + \frac{1}{180} = \frac{6}{180} = \frac{1}{30}.$$

¹ N este simbolul „newtonului“, unitate de forță.

Plecând de la raportul de incertitudine, se poate obține un ordin de mărime a erorii comise, luând ca valoare apropiată:

$$F \approx 196,5 N \times \frac{10}{40} \approx 49,1 N.$$

Eroarea este de ordinul:

$$49 N \times \frac{1}{30} \approx 1,6 N.$$

Se poate deduce de aci o încadrare pentru F :

$$47,4N < F < 50,8N.$$

Un calcul direct al incertitudinii asupra lui F ar da o încadrare mai precisă.

Din teorema precedentă, putem deduce că, dacă $\iota(x)$ este raportul de incertitudine asupra lui x , raportul de incertitudine asupra lui x^n ($n \in N^*$) este $n\iota(x)$.

Acest rezultat se generalizează pentru $n \in Q^{**}$.

Astfel raportul de incertitudine asupra lui $\sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{p}}$ ($p \in N^*$) este: $\frac{\iota(x)}{p}$.

EXEMPLE.

I. $S = \pi R^2$, $\iota(S) = \iota(\pi) + 2\iota(R)$.

II. $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, $\iota(T) = \iota(\pi) + \frac{1}{2} \iota(l) + \frac{1}{2} \iota(g)$.

14.1.12. Interpolare liniară

Tabelele numerice dau, pentru anumite valori ale lui x , valorile expresiilor x^2 , x^3 , $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, ..., cu o anumită aproximație.

Dacă vrem să calculăm valoarea uneia din expresiile de mai sus pentru o valoare a lui x care nu este în tabela corespunzătoare acestei expresii, se poate folosi această tabelă în felul următor: rezultatul căutat este cuprins între două numere y_1 și y_2 , date în tabelă, care corespund numerelor x_1 și x_2 care încadrează pe x și care figurează în tabelă. Ceea ce ne dă deja o încadrare pentru rezultat.

EXEMPLU. Fie să se calculeze $(52,37)^2$ cu ajutorul unei tabele care dă pătratele numerelor întregi.

Avem: $52 < 52,37 < 53 \implies 2704 < (52,37)^2 < 2809$.

Pentru a obține o mai bună încadrare, adică pentru a avea o incertitudine mai mică, vom efectua ceea ce se numește o interpolare liniară.

Pentru a expune această tehnică, vom considera expresia $f(x) = x^2$. Trasăm graficul lui f pentru $x \geq 0$ (fig. 1).

Reluăm notațiile x_1, x_2, y_1, y_2 indicate precedent. Fie punctele:

$M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$. Valoarea exactă a lui $f(x)$ este astfel că:

$$y_1 < f(x) < y_2.$$

Vom lua ca valoare apropiată a lui $f(x)$ ordonata y a punctului M care aparține dreptei M_1M_2 și a cărei abscisă este x .

Ecuția dreptei M_1M_2 este:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Prin urmare:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

EXEMPLU. Calculul lui $(52,37)^2$ prin interpolare liniară:

$$x_1 = 52, y_1 = 2704;$$

$$x_2 = 53, y_2 = 2809;$$

$$d = x_2 - x_1 = 1;$$

$$\Delta = y_2 - y_1 = 105; (\Delta \text{ se numește diferență tabulară});$$

$$h = x - x_1 = 0,37;$$

$$y = y_1 + \frac{\Delta}{d} h = 2704 + \frac{105}{1} \cdot 0,37 = 2704 + 38,85;$$

$$(52,37)^2 \approx 2743.$$

Se poate face judecata următoare: cînd valoarea variabilei se mărește cu $d = 1$, valoarea funcției se mărește cu $\Delta = 105$; deci cînd valoarea variabilei se mărește cu $h = 0,37$, valoarea funcției se mărește cu $\frac{\Delta}{d} h = \frac{105}{1} \cdot 0,37$.

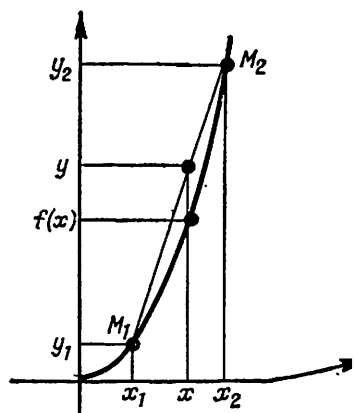


Fig. 1

Căutăm care este incertitudinea asupra rezultatului obținut prin interpolare lineară în cazul în care $f(x) = x^2$, x fiind pozitiv și valorile exacte ale lui x_1 și x_2 date de tabela de pătrate ale întregilor.

Eroarea comisă luând pe y ca valoare apropiată prin adaos a lui x^2 este:

$$y - x^2 = y_1 + \Delta h - x^2 \text{ (pentru că } d = 1);$$

$$y_1 - x^2 = x_1^2 - x^2 = (x_1 - x)(x_1 + x) = -h(x_1 + x);$$

$$\Delta = y_2 - y_1 = x_2^2 - x_1^2 = (x_1 + 1)^2 - x_1^2 = 2x_1 + 1;$$

$$y - x^2 = h(\Delta - x_1 - x) = h(1 - x + x_1) = h(1 - h).$$

Suma lui h și $1 - h$ este egală cu 1, deci constantă când h variază. Produsul lui h și $1 - h$ este deci maxim când $h = 1 - h$, adică când $h = \frac{1}{2}$. Acest maximum este $\frac{1}{4}$.

Prin urmare:

$$y - x^2 < \frac{1}{4}.$$

Incertitudinea asupra rezultatului este 0,25.

O verificăm pe exemplul de mai sus.

Valoarea exactă a lui $(52,37)^2 = 2742,6169$

$$y - x^2 = 2742,85 - 2742,6169 = 0,2331 < 0,25.$$

OBSERVAȚII

1. În exemplul de mai sus, f este o funcție crescătoare pe un interval care conține pe x și graficul său întoarce concavitatea sa spre y -cii pozitivi: s-a obținut o valoare prin adaos, apropiată, a lui $f(x)$.

Dacă f ar fi o funcție crescătoare pe un interval care conține pe x , dar graficul ei întoarce concavitatea spre y -cii negativi, s-ar obține o valoare apropiată prin lipsă (exemplu: $f(x) = \sqrt{x}$).

2. Dacă f este o funcție descrescătoare pe un interval care conține pe x , avem:

$$x_1 < x < x_2 \implies y_2 < f(x) < y_1;$$

ceea ce modifică calculul (a se vedea exemplul de mai jos).

EXEMPLU. Calculul lui $\cos x$ pentru $x = 70,8$ grade.

$$x_1 = 70, y_1 = 0,4540;$$

$$x_2 = 71, y_2 = 0,4399.$$

Cînd valoarea variabilei crește cu 1, valoarea funcției se micșorează cu 0,0141; cînd valoarea variabilei se mărește cu 0,8, valoarea funcției se micșorează cu $\frac{0,0141}{1} \cdot 0,8$.

$$y = 0,4540 - (0,0141 \times 0,8)$$

Dar se poate scrie de asemenea:

$$y = 0,4399 \times (0,0141 \cdot 0,2) = 0,44272.$$

De unde: $\cos 70,8 \text{ gr} \approx 0,4427$.

EXERCIȚII.

14.1. Se consideră numerele raționale, fiecare fiind reprezentat prin una din următoarele fracții:

$$\frac{7}{8}, \frac{3}{7}, -\frac{9}{4}, \frac{67}{20}, \frac{437}{1023}.$$

1°. Să se găsească printre aceste numere acelea care sînt zecimale și acelea care nu sînt.

2°. Să se găsească caracteristica și mantisa numerelor zecimale.

3°. Să se calculeze valorile apropiate zecimale, prin lipsă și prin adaos, cu aproximație de $\frac{1}{10^5}$, ale numerelor care nu sînt zecimale.

14.2. Să se calculeze valoarea exactă, apoi să se dea valorile apropiate zecimale, cu aproximație de $\frac{1}{10^4}$, prin lipsă și prin adaos, a următoarelor numere:

$$(1,851)^2, \frac{8,14}{0,32}.$$

14.3. O tabelă dă ca valoare apropiată a lui $x = \sqrt{63}$: $x = 7,9372539$. Care este incertitudinea asupra lui x ? a este o valoare apropiată a lui x , cu aproximație ε . Să se calculeze ε .

Care ar fi valoarea apropiată a lui x dată de tabele care nu dispun decît de 6,5 sau 4 cifre zecimale pentru x ?

14.4. Să se găsească o încadrare pentru x în următoarele cazuri:

1°. 0,46 este o valoare apropiată prin lipsă a lui x , cu aproximație de $\frac{1}{10^4}$.

2°. 3,736 este o valoare apropiată prin adaos a lui x cu aproximație de 0,003.

3°. 28,675 9 este o valoare apropiată a lui x , cu aproximație de 0,0006. Să se determine incertitudinea lui x în fiecare caz.

14.5. Fie următoarea încadrare pentru x :

$$1257,6 < x < 1282,5.$$

Două observații pot fi făcute:

1°. Incertitudinea asupra lui x este egală cu 24,9; este absurd deci să se păstreze valori apropiate care conțin cifre zecimale. Se poate substitui, acestei încadrări, următoarea încadrare:

$$1257 < x < 1283.$$

2°. Putem afirma că valoarea exactă a lui x are primele cifre: 1,2. Acestea sînt singurele cifre de care sîntem siguri. Aceste cifre se numesc cifre exacte.

Să se găsească cifrele exacte în următoarele cazuri și să se simplifice, dacă este cazul, încadrările:

$$3,129\ 786 < x < 3,129\ 945;$$

$$24,875 < x < 28,753;$$

$$8,741 < x < 8,741\ 49;$$

$$2,998 < x < 3,003.$$

14.6. Să se găsească o încadrare cît mai precisă posibil pentru măsurile următoarelor mărimi:

1°. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic și isoscel ABC . Latura $AC = b$, măsurată în cm, este astfel $2,3 < b < 2,4$. Se dă:

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415.$$

2°. Aria unui disc de rază r cm, cu $5,8 < r < 5,9$. Se dă:

$$3,141\ 5 < \pi < 3,141\ 6.$$

Dacă este posibil să se simplifice aceste încadrări, pierzîndu-se puțin din precizie.

14.7. Să se calculeze raportul laturilor perpendiculare ale unui triunghi dreptunghi, știind că, măsurate în cm:

$$18,3 < b < 18,4$$

$$13,2 < c < 13,3.$$

(Se va încadra cît mai bine raportul $\frac{b}{c}$, apoi raportul $\frac{c}{b}$. Se vor controla aceste două încadrări, calculîndu-se produsul $\frac{b}{c} \times \frac{c}{b}$).

14.8. Să se încadreze cît mai bine raza unui cerc a cărui arie S , evaluată în m^2 , este astfel că:

$$4 < S < 4,0001.$$

14.9. Să se încadreze cât mai bine:

$$1^\circ. \pi\sqrt{2}. \quad 2^\circ. -\pi\sqrt{3}. \quad 3^\circ. \pi^3.$$

$$4^\circ. \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \quad 5^\circ. \pi - \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

$$6^\circ. \pi - \frac{22}{7}. \quad 7^\circ. \sqrt{3} + \sqrt{2} - \frac{22}{7}.$$

Se dă:

$$1,414\ 2 < \sqrt{2} < 1,414\ 3;$$

$$3,141\ 5 < \pi < 3,141\ 6;$$

$$1,732\ 0 < \sqrt{3} < 1,732\ 1.$$

14.10. Încadrarea unui produs: calculul incertitudinii.

Fie: $0 < x_0 < x < x_0 + h$, h incertitudinea pe x .

$0 < y_0 < y < y_0 + k$, k incertitudinea asupra lui y .

Să se încadreze xy .

Să se deducă incertitudinea căutată: $kx_0 + hy_0 + hk$.

Să se arate că, dacă h și k sînt mici față de x_0 și y_0 , această incertitudine este sensibil egală cu:

$$kx_0 + hy_0.$$

Să se verifice pe exemplul tratat în curs.

14.11. Încadrarea unui cît: calculul incertitudinii.

Cu datele din exercițiul precedent, incertitudinea este:

$$\frac{x_0 + h}{y_0} - \frac{x_0}{y_0 + k}.$$

Să se ducă calculul pînă la capăt. Să se dea un rezultat practic suficient dacă h și k sînt mici față de x_0 și y_0 .

Să se verifice pe exemplul tratat în curs.

14.12. Să se dea o încadrare precisă pentru expresiile:

$$1^\circ. S = \frac{1}{2} h(B + b);$$

$$11,1 < h < 11,2; \quad 20,3 < B < 20,4; \quad 8,6 < b < 8,7.$$

$$2^\circ. S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$3 < c < 3,1; \quad 4 < b < 4,1; \quad 5 < a < 5,1; \quad a + b + c = 2p.$$

$$3^\circ. S = xy + \frac{\pi}{4} y^2;$$

$$1,25 < x < 1,26; \quad 0,82 < y < 0,83.$$

14.13. Să se calculeze $A = 15\sqrt{1+\varepsilon} - \frac{6}{1+\varepsilon}$ pentru $\varepsilon = \frac{1}{128}$, servindu-se de formulele de la nr. 14.1.10. Să se dea o încadrare, pe cât posibil precisă, a rezultatului.

14.14. Să se dea o formulă apropiată și ordinul de mărime a erorii comise pentru:

$$1^\circ. \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}; \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}; \sqrt{\sqrt{1+\varepsilon}}.$$

$$2^\circ. \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}; \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon}; \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}}.$$

$$3^\circ. (1+\varepsilon)^3; (1-\varepsilon)^3; \sqrt[4]{4+3\varepsilon}.$$

14.15. Exercițiu rezolvat. Să se calculeze valorile apropiate, cu aproximație de 10^{-3} , ale lui $a = \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

Soluție. — Vom folosi identitatea:

$$\forall a, \forall b, (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

$$a = \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{3\sqrt{2}-3-2+\sqrt{2}}{2-1} = 4\sqrt{2}-5.$$

Am făcut numitorul rațional înmulțindu-l cu cantitatea conjugată.

Dacă am lua:

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415,$$

am avea:

$$5,656 < 4\sqrt{2} < 5,660.$$

Am obține valori apropiate, cu aproximație de $4 \cdot 10^{-3}$.
Trebuie să luăm o cifră în plus:

$$1,414 \ 1 < \sqrt{2} < 1,414 \ 2;$$

$$5,656 \ 4 < 4\sqrt{2} < 5,656 \ 8;$$

$$5,656 < 4\sqrt{2} < 5,657;$$

$$0,656 < a < 0,657.$$

14.16. Să se calculeze valorile apropiate, cu aproximație 10^{-3} , a fiecăruia din numerele:

$$a = \frac{3+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}; \quad b = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}; \quad c = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

14.17. Reluindu-se datele de la exercițiul nr. 14.6, să se calculeze raportul de incertitudine asupra:

1°. ipotenuzei triunghiului dreptunghic isoscel ABC ;

2°. ariei discului.

Să se deducă o încadrare pentru fiecare rezultat.

14.18. Să se calculeze raportul de incertitudine asupra:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

cu: $l = 1$ m, cu aproximație 2 mm prin lipsă;

$g = 9,81$ N, cu aproximație de 0,01 N;

$3,1415 < \pi < 3,1416$.

Să se deducă o încadrare pentru T .

14.19. Să se calculeze, folosindu-se interpolarea lineară:

$$(82,56)^2; (11,32)^3; \sqrt{10,4}; \sqrt{71,68}; \frac{1}{23,7}; \frac{1}{57,48};$$

$$\sin 11^\circ 26'; \cos 43^\circ 18'; \sin 69,43 \text{ gr}; \cos 75,3 \text{ gr}.$$

14.2. PROGRESII ARITMETICE

14.2.1. Definiții

O progresie aritmetică este un șir de numere aranjate într-o ordine astfel că fiecare dintre ele este suma între precedentul lui și un număr constant numit rația progresiei.

EXEMPLU. Șirul de numere 3, 7, 11, 15, 19 este o progresie aritmetică cu cinci termeni, cu primul termen 3 și rația patru.

Fiecare număr al șirului este numit termen al progresiei și notat u_n ; n indică rangul său.

Dacă rația este notată r , se poate scrie: $u_{n+1} = u_n + r$.

EXEMPLU. $u_1 = 3, u_2 = 7, u_3 = 11, u_4 = 15, u_5 = 19$,
 $r = 4$: $u_2 = u_1 + r, u_3 = u_2 + r, u_4 = u_3 + r, u_5 = u_4 + r$.

Atunci când progresia conține un număr finit de termeni, ca în exemplul de mai sus, ea este zisă limitată. Primul și ultimul termen sînt numiți extremi. Pentru

a defini o progresie aritmetică limitată, trebuie să cunoaștem un termen și rangul său (de exemplu pe primul), numărul termenilor și rația.

Atunci când o progresie conține un număr infinit de termeni, se zice că este *nelimitată*. Pentru a o defini, trebuie să cunoaștem un termen și rația.

EXEMPLE. I. Progresie limitată cu șase termeni, cu rația 2, termenul de rangul 2 fiind $\frac{7}{3}$.

$$\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{13}{3}, \frac{19}{3}, \frac{25}{3}, \frac{31}{3}.$$

II. Progresie nelimitată, cu rația -4 , care are unul din termeni 25:

$$\dots, 33, 29, 25, 21, 17, 13, \dots$$

Această progresie este nelimitată „în cele două sensuri”. Nu se mai poate vorbi de rangul termenilor; totuși aceștia se vor nota u_n , $n \in \mathbb{Z}$. Se va pune, de exemplu, $u_1 = 25$. Vom avea atunci:

$$u_0 = 29, u_1 = 33, \dots$$

III. Progresie nelimitată, de rație 3, care are primul termen 5:

$$5, 8, 11, 14, \dots$$

Această progresie este nelimitată într-un singur sens. Rangul fiecărui termen poate fi cunoscut.

Notăm rația cu r .

Dacă $r > 0$, progresia este zisă crescătoare (exemplele I și III).

Dacă $r < 0$, progresia este zisă descrescătoare (exemplul II).

Lăsăm la o parte cazul $r = 0$, pentru care toți termenii ar fi egali.

14.2.2. Calculul termenului de rangul n

Presupunem că cunoaștem u_1 și r .

Se poate scrie:

$$u_2 = u_1 + r,$$

$$u_3 = u_2 + r = u_1 + 2r,$$

$$u_4 = u_3 + r = u_1 + 3r \text{ etc.}$$

Într-un mod general avem:

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

(a se vedea exercițiul nr. 14.28).

EXEMPLU. Considerăm șirul de numere impare:

$$1, 3, 5, 7, \dots$$

Aceasta este o progresie de rație 2, al cărei prim termen este 1. Al n -lea număr impar este egal cu:

$$1 + (n - 1)2 = 2n - 1.$$

14.2.3. Înserarea de medii aritmetice între două numere a și b

Este vorba de următoarea problemă:

Fiind date două numere a și b , să se găsească o progresie aritmetică cu $n + 2$ termeni în care a să fie primul termen și b ultimul termen.

Pentru a determina această progresie este suficient să-i cunoaștem rația r . Aceasta trebuie să verifice relația:

$$b = a + [(n + 2) - 1]r,$$

adică:

$$r = \frac{b - a}{n + 1}$$

EXEMPLE. I. Să se însereze opt medii aritmetice între 14 și 77.

$$r = \frac{77 - 14}{8 + 1} = 7.$$

Progresia căutată este:

$$14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77.$$

II. Să se însereze o medie aritmetică între a și b .

$$r = \frac{b - a}{2}.$$

Progresia căutată este:

$$a, \frac{a+b}{2}, b.$$

$\frac{a+b}{2}$ este media aritmetică a lui a și b .

OBSERVAȚIE. r nu depinde decât de n și de $b - a$. De asemenea, fiind dată o progresie aritmetică $u_1, u_2, \dots, u_p, \dots$, de rație r' , se poate defini o nouă progresie care conține termenii primeia și alți termeni, inserind n medii aritmetice între u_1 și u_2 , între u_2 și u_3 , ..., între u_{p-1} și u_p , ... Într-adevăr, rația r a noii progresii va putea fi determinată prin:

$$r = \frac{u_2 - u_1}{n+1} = \frac{u_3 - u_2}{n+1} = \dots = \frac{u_p - u_{p-1}}{n+1} = \dots = \frac{r'}{n+1}.$$

EXEMPLE. I. Fie progresia de rație $r' = 6$:

$$4, 10, 16, 22.$$

Luăm $n = 2$. Se obține o nouă progresie de rație $r = \frac{6}{3} = 2$:

$$4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22.$$

II. Fie progresia de termen $u_p = p$, $p \in \mathbb{Z}$.

Fie $n \in \mathbb{N}$. Se obține o nouă progresie de rație:

$$r = \frac{u_p - u_{p-1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \text{ (a se vedea numărul 14.4.2).}$$

14.2.4. Suma a doi termeni egali depărtați de extremi

Considerăm, de exemplu, progresia din primul exemplu de la nr. 14.2.3.

Se constată că:

$$14 + 77 = 21 + 70 = 28 + 63 = 35 + 56 = 42 + 49.$$

Vom generaliza acest rezultat:

Fie o progresie de n termeni. Un termen oarecare u_α are $\alpha - 1$ termeni înaintea lui. Fie termenul u_β care are $\alpha - 1$ termeni după el: u_α și u_β sint numiți termeni egal depărtați de extremi.

Termenul u_3 are $n - (\alpha - 1) = n - \alpha + 1$ termeni înaintea lui, deci:

$$\beta = n - \alpha + 1,$$

$$\alpha + \beta = n + 1.$$

După numărul 14.2.2, avem:

$$u_r = u_1 + (\alpha - 1)r$$

$$u_3 = u_1 + (\beta - 1)r.$$

Adunînd membrii acestor două egalități, se obține:

$$u_\alpha + u_\beta = 2u_1 + (\alpha + \beta - 2)r = 2u_1 + (n - 1)r$$

și, pentru că:

$$u_n = u_1 + (n - 1)r,$$

se deduce:

$$u_\alpha + u_\beta = u_1 + u_n.$$

TEOREMĂ. Într-o progresie aritmetică limitată, suma a doi termeni egal depărtați de extremi este egală cu suma extremilor.

OBSERVAȚII

1. Dacă n este impar, există un termen a precedat și urmat de același număr de termeni. Avem:

$$2a = u_1 + u_n.$$

EXEMPLU. Considerăm progresia aritmetică: 3, 7, 11, 15, 19. Vom avea atunci $a = 11$.

2. Dacă n este impar ($n = 2p + 1$), progresia se poate scrie sub forma:

$$a - pr, \dots, a - 2r, a - r, a, a + r, a + 2r, \dots, a + pr.$$

Dacă n este par ($n = 2p$), o vom scrie:

$$\alpha - (2p - 1)h, \dots, \alpha - 3h, \alpha - h, \alpha + h, \alpha + 3h, \dots, \alpha + (2p - 1)h$$

punînd $r = 2h$ (notăm că α nu este un termen al progresiei).

EXEMPLU. În primul exemplu de la numărul 14.2.3, vom avea:

$$\alpha = 45,5; h = 3,5.$$

14.2.5. Suma termenilor unei progresii aritmetice limitată

Vrem să calculăm:

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n.$$

Putem scrie termenii în ordine inversă:

$$S = u_n + u_{n-1} + \dots + u_2 + u_1.$$

Adunînd membru cu membru, obținem:

$$2S = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \dots + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1).$$

După teorema de la nr. 14.2.4, fiecare sumă între paranteze valorează $u_1 + u_n$ și, cum există n asemenea sume:

$$2S = n(u_1 + u_n),$$

și:

$$S = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

EXAMPLE. I. Suma primelor numere întregi:

$$u_1 = 1, u_n = n, S = \frac{n(n+1)}{2}$$

II. Suma primelor numere impare:

$$u_1 = 1, u_n = 2n - 1, S = n^2.$$

Astfel: $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$; $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$.

EXERCIȚII

14.20. Să se scrie primii cinci termeni ai unei progresii aritmetice, rația fiind 3 și primul termen -7 .

14.21. Să se scrie termenii u_n ai unei progresii aritmetice pentru $1 \leq n \leq 7$, știind că $u = 5$ și rația $r = -4$.

14.22. Să se găsească al 40-lea termen al progresiei de la exercițiul 14.21.

14.23. Să se insereze șase medii aritmetice între 68 și 124. Să se scrie progresia obținută.

14.24. Să se găsească o progresie aritmetică cu primul termen 1 și ultimul 2 astfel că $x = 1,3$ să fie un termen al acestei progresii.

Aceeași problemă cu $x = 1,32$.

Aceeași problemă cu $x = 1,324$. Să se deducă de aci că, fiind dat un număr zecimal oarecare x , cuprins între 1 și 2, se poate găsi o progresie aritmetică cu primul termen 1 și ultimul 2, astfel ca x să fie unul din termenii acestei progresii.

14.25. Să se calculeze suma termenilor unei progresii aritmetice limitată, cu primul termen 4 și rația 7, știind că numărul termenilor este 25.

14.26. Suma pătratelor primelor numere întregi se poate obține plecând de la identitatea:

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

Înlocuind succesiv pe x prin 1, 2, 3, ..., n și adunând membru cu membru egalitățile obținute:

$$2^3 = 1^3 + (3 \times 1^2) + (3 \times 1) + 1,$$

$$3^3 = 2^3 + (3 \times 2^2) + (3 \times 2) + 1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(n + 1)^3 = n^3 + (3 \times n^2) + (3 \times n) + 1.$$

După reduceri, se obține:

$$(n + 1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n,$$

S_1 și S_2 însemnând respectiv suma primelor n numere întregi și suma pătratelor primelor n numere întregi.

Să se ducă până la capăt calculul lui S_2 .

Printr-un procedeu analog, să se calculeze S_3 : suma cuburilor primelor n numere întregi.

14.27. Să se calculeze suma numerelor impare cuprinse între 50 și 100.

14.28. Să se demonstreze prin recurență formula:

$$u_n = u_1 + (n - 1)r \text{ (nr. 14.2.2):}$$

1°. Să se demonstreze că această proprietate este adevărată pentru $n = 1$.

2°. Să se demonstreze că, dacă este adevărată pentru n , atunci este adevărată pentru $n + 1$.

14.29. Să se demonstreze că, pentru ca trei numere a, b, c să fie trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, este necesar și suficient ca:

$$a + c = 2b.$$

14.3. PROGRESII GEOMETRICE

14.3.1. Definiție

O progresie geometrică este un șir de numere aranjate într-o ordine astfel că fiecare dintre ele este produsul între precedentul lui și un număr constant nenul, numit rație.

Noțiunile de termen, rang, progresie limitată, extremi, progresie nelimitată, sint aceleași ca la progresele aritmetice.

Dacă rația se notează q , avem: $u_{n+1} = qu_n$.

EXEMPLE. I. Progresia limitată cu cinci termeni, de rație 2, al cărei prim termen este 3:

$$3, 6, 12, 24, 48;$$

$$u_1 = 3, u_2 = 2u_1 = 6, u_3 = 2u_2 = 12, u_4 = 2u_3 = 24, u_5 = 2u_4 = 48$$

II. Progresia nelimitată, de rație 3, care are unul din termeni - 6:

$$\dots, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{3}, -2, -6, -18, -54, \dots$$

III. Progresie nelimitată, de rație $\frac{1}{2}$, care are primul termen 4:

$$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$$

IV. Progresie nelimitată, de rație - 2, care are primul termen 1:

$$1, -2, +4, -8, \dots$$

Notăm rația cu q . Se pot demonstra următoarele rezultate:

1. Presupunem mai întâi $q > 0$. Toți termenii au același semn (Se presupune că termenii nu sint nuli).

Dacă sint pozitivi și $q > 1$, progresia este crescătoare (exemplul I).

Dacă termenii sint pozitivi și $q < 1$, progresia este descrescătoare (exemplul III).

Dacă termenii sint negativi și $q > 1$, progresia este descrescătoare (exemplul II).

Dacă ei sînt negativi și $q < 1$, progresia este crescătoare (cititorul va găsi un exemplu).

În toate aceste cazuri progresia este zisă monotună (crescătoare sau descrescătoare).

2. Dacă $q < 0$, progresia nu mai este monotună, ea este zisă alternantă, pentru că termenii săi sînt alternativ pozitivi și negativi (exemplu IV).

Înlăturăm $q = 0$ în definiție și de asemenea cazul $q = 1$ (toți termenii ar fi egali).

14.3.2. Calculul termenului de rangul n

Presupunem că cunoaștem $u_1 \neq 0$ și q .

Se poate scrie:

$$u_2 = u_1 \times q,$$

$$u_3 = u_2 \times q = u_1 \times q^2,$$

$$u_4 = u_3 \times q = u_1 \times q^3 \text{ etc.}$$

Avem, în general:

$$u_n = u_1 q^{n-1}$$

(a se vedea exercițiul nr. 14.34).

EXEMPLU. Al 6-lea termen al progresiei geometrice cu primul termen -1 și rația $\frac{1}{2}$ este:

$$u_6 = (-1) \left(\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}.$$

14.3.3. Inserarea a n medii geometrice între două numere pozitive a și b

Fiind date două numere pozitive a și b , este vorba să se găsească o progresie geometrică cu $n + 2$ termeni pozitivi în care a să fie primul termen și b ultimul termen.

Pentru a determina această progresie, este suficient să-i cunoaștem rația q .

Aceasta trebuie să verifice relația:

$$b = aq^{(n+2)-1} = aq^{n+1},$$

adică:

$$q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

EXEMPLE.

I. Să se insereze două medii geometrice între 3 și 81.

$$q = \sqrt[3]{27} = 3;$$

progresia căutată este:

$$3, 9, 27, 81.$$

II. Să se insereze o medie geometrică între a și b .

$$q = \sqrt{\frac{a}{b}};$$

progresia căutată este:

$$a, \sqrt{ab}, b.$$

$\sqrt{ab}$ se numește media geometrică a lui a și b .

OBSERVAȚIE. Este o observație analoagă cu aceea de la nr. 14.2.3. Fiind dată o progresie geometrică de rație q' , se poate defini o nouă progresie geometrică de rație q , care conține termenii celei dintâi și alți termeni:

$$q = \sqrt[n+1]{q'}$$

EXEMPLE

I. Fie progresia de rație $q' = 27$:

$$2, 54, 1458.$$

Luăm $n = 2$. Se obține o nouă progresie de rație $q = \sqrt[3]{27} = 3$:

$$2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458.$$

II. A se vedea nr. 14.4.2.

14.3.4. Produsul a doi termeni egal depărtați de extremi

TEOREMĂ. Într-o progresie geometrică limitată, produsul a doi termeni egal depărtați de extremi este egal cu produsul extremilor.

Cititorul va verifica această teoremă pe exemplele precedente. Noi o vom demonstra folosind aceleași notații ca pentru teorema corespunzătoare progresiilor aritmetice:

$$u_x = u_1 q^{x-1} \quad (1)$$

$$u_\beta = u_1 q^{\beta-1}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) se deduce:

$$\begin{aligned} u_x u_\beta &= u_1^2 q^{x+\beta-2} \\ &= u_1^2 q^{n-1} \\ &= u_1 u_n. \end{aligned}$$

OBSERVAȚII

1. Dacă n este impar, fie a termenul precedat și urmat de un același număr de termeni. Avem:

$$a^2 = u_1 \times u_n.$$

EXEMPLU. 3, 6, 12, 24, 48. $a = 12$, $12^2 = 3 \times 48$.

2. Dacă n este impar ($n = 2p + 1$), progresia se poate scrie:

$$\frac{a}{q^p}, \dots, \frac{a}{q^2} \frac{a}{q}, a, aq, aq^2, \dots, aq^n$$

Dacă n este par ($n = 2p$), progresia se poate scrie:

$$\frac{\alpha}{t^{p+1}}, \frac{\alpha}{t^3}, \frac{\alpha}{t}, \alpha t, \alpha t^3, \dots, \alpha t^{p+1}$$

punind $q = t^2$ și $u_1 u_n = \alpha^2$ (notăm că α nu este un termen al progresiei).

EXEMPLU. $\frac{1}{2}, 2, 8, 32$, $q = 4$, $n = 4$, $p = 2$;

progresia se scrie: $\frac{4}{2^3}, \frac{4}{2}, 4 \times 2, 4 \times 2^3$, $\alpha = \sqrt{2 \times 8} = 4$, $t = 2$.

14.3.5. Suma termenilor unei progresii geometrice limitate

Fie:

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n. \quad (1)$$

Calculăm Sq :

$$Sq = u_1q + u_2q + \dots + u_{n-1}q + u_nq,$$

$$Sq = u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_nq. \quad (2)$$

Scăzînd membrii egalităţii (1) din aceia ai egalităţii (2):

$$\begin{aligned} Sq - S &= u_nq - u_1 \\ &= u_1q^n - u_1, \text{ pentru că } u_n = u_1q^{n-1}. \end{aligned}$$

De unde, deoarece presupunem $q \neq 1$:

$$S = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

EXEMPLU. Considerăm progresia de n termeni, de raţie 2, al cărei prim termen este 1. Avem:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

EXERCIȚII

14.30. Notînd primul termen cu u_1 şi q raţia, să se scrie primii cinci termeni ai progresiilor următoare. Să se indice, în fiecare caz, dacă progresia este crescătoare, descrescătoare sau alternată:

$$1^\circ. u_1 = -1, \quad q = 2.$$

$$2^\circ. u_1 = -2, \quad q = -2.$$

$$3^\circ. u_1 = 2, \quad q = \frac{1}{3}.$$

$$4^\circ. u_1 = 2, \quad q = 3.$$

$$5^\circ. u_1 = -2, \quad q = \frac{1}{3}.$$

14.31. Să se calculeze al 5-lea termen al progresiei geometrice în care primul termen este 1 și rația $\frac{1}{2}$.

14.32. Să se insereze cinci medii geometrice între 10 și 640. Să se scrie progresia obținută.

14.33. Să se găsească, în funcție de n , expresia sumelor:

$$1^\circ. S_1 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} + 2^n.$$

$$2^\circ. S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$3^\circ. S_3 = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n}.$$

Să se calculeze S_1, S_2, S_3 pentru $n = 4$.

14.34. Să se găsească trei numere a, b, c în progresie geometrică, astfel ca:

$$a + b + c = 63$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2457.$$

14.35. Să se demonstreze prin recurență, ca în exercițiul nr. 14.28 că:

$$u_n = u_1 q^{n-1} \text{ (nr. 14.3.2).}$$

14.36. Să se demonstreze că, pentru ca trei numere a, b, c nenule să fie trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, este necesar și suficient ca: $ac = b^2$.

14.4. LOGARITMI ZECIMALI

14.4.1. Definiție

Considerăm *progresia geometrică nelimitată* în două sensuri, de rație 10 și, în care unul dintre termeni este 1:

$$\dots, \dots, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10}, 1, 10, 10^2, 10^3, \dots$$

Folosind exponenți întregi, se poate scrie:

$$\dots, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots$$

Punem: $u_1 = 10^1$. Vom avea atunci:

$$u_2 = 10^2, u_3 = 10^3, \dots, u_0 = 10^0, u_{-1} = 10^{-1}, u_{-2} = 10^{-2}, \dots$$

și, într-un mod general, $u_n = 10^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Considerăm acum *progresia aritmetică nelimitată*, în cele două sensuri, de rație 1 și, în care unul dintre termeni este 0:

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Această *progresie* este mulțimea $\mathbb{Z}$ ordonată de relația „ $\leq$ ”.

Punem:

$$v_n = n, n \in \mathbb{Z}.$$

Considerăm funcția f , care pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, face ca oricărui număr u_n să-i corespundă numărul v_n .

Avem astfel:

$$\text{pentru } n = 0, f(10^0) = f(1) = 0$$

$$\text{pentru } n = 1, f(10^1) = f(10) = 1$$

$$\text{pentru } n = 2, f(10^2) = f(100) = 2 \text{ etc.}$$

$$\text{pentru } n = -1, f(10^{-1}) = f(0,1) = -1$$

$$\text{pentru } n = -2, f(10^{-2}) = f(0,01) = -2 \text{ etc.}$$

Într-o formă generală:

$$f(10^n) = n.$$

Această funcție se numește *funcție logaritmică zecimală*; n este logaritmul zecimal al numărului 10^n . Se notează:

$$\log 10^n = n$$

Am definit această funcție pe mulțimea:

$$E = \{x; x = 10^n, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Vom vedea că putem extinde domeniul său de definiție.

Știm că $(\mathbb{Z}, +)$ este un grup comutativ.

$(E, \times)$ este de asemenea un grup comutativ.

Într-adevăr:

1°. Dacă $a \in E$ și $b \in E$, $a \times b \in E$. Într-adevăr:

Pentru că $a \in E$, a se poate scrie: $a = 10^n$.

Pentru că $b \in E$, b se poate scrie: $b = 10^p$.

$a \times b = 10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ care aparține lui E .

2°. Elementul neutru este $u_0 = 10^0 = 1$.

3°. Elementul simetric al lui u_n este u_{-n} :

$$u_n = 10^n, u_{-n} = 10^{-n}, u_n \times u_{-n} = 10^0 = 1.$$

Însă f este o bijecție a lui E pe Z :

$$10^n \longleftrightarrow n.$$

Mai mult, punind $a = 10^n$, $b = 10^p$, putem scrie:

$$f(ab) = f(a) + f(b) \quad \forall a, b \in E.$$

Într-adevăr: $f(ab) = f(10^{n+p}) = n + p$, $f(a) = n$,
 $f(b) = p$.

Ceea ce se poate schematiza astfel:

$$10^n \times 10^p = 10^{n+p} \longleftrightarrow n + p.$$

Putem deci enunța: funcția logaritmică zecimală este un *izomorfism* al grupului $(E, \times)$ pe grupul $(Z, +)$.

14.4.2. Logarithmul unui număr pozitiv

Înserăm m medii geometrice între două puteri succesive ale lui 10: 10^n și 10^{n+1} ($m \in N$, $n \in Z$). Obținem o progresie geometrică de rație:

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{10^{n+1}}{10^n}} = \sqrt[m+1]{10} = 10^{\frac{1}{m+1}}.$$

Înserăm m medii aritmetice între cele două numere n și $n+1$.

Obținem o progresie aritmetică de rație:

$$r = \frac{(n+1) - n}{m+1} = \frac{1}{m+1}.$$

Scriem cele două progresii obținute:

$$10^n, 10^{n + \frac{1}{m+1}}, 10^{n + \frac{2}{m+1}}, \dots, 10^{n + \frac{m}{m+1}}, 10^{n+1},$$

$$n, n + \frac{1}{m+1}, n + \frac{2}{m+1}, \dots, n + \frac{m}{m+1}, n + 1.$$

Se poate efectua această operație pentru orice $n \in Z$: m fiind dat, se va obține deci o progresie geometrică și o progresie aritmetică nelimitate în cele două sensuri (a se vedea observațiile numerele 14.2.3 și 14.3.3) care se vor corespunde termen cu termen. Și, pentru că se poate lua m oricât de mare vrem, se poate defini astfel logarithmul zecimal pentru o infinitate de numere pozitive

grație funcției f , care face ca oricărui număr $x = 10^y$, al progresiei geometrice, să-i corespundă numărul y al progresiei aritmetice, y nefiind în mod necesar întreg. Prin acest procedeu, nu putem defini logaritmul zecimal al oricărui număr real pozitiv x , căci nu orice număr real pozitiv x poate fi obținut prin inserarea de medii geometrice. Vom admite totuși, că orice număr real pozitiv x posedă un logaritm zecimal y , notat $\log x$, care va fi definit printr-o altă metodă, într-o clasă ulterioară. Se poate atunci generaliza ceea ce a fost spus mai înainte: funcția logaritm zecimal este un izomorfism al lui $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ pe $(\mathbb{R}, +)$.

14.4.3. Proprietățile logaritmilor zecimali

Ceea ce precede ne va permite să admitem mai multe proprietăți. Anumite proprietăți sînt generalizări la logaritmi zecimali ai numerelor pozitive, ale proprietăților stabilite pentru logaritmi zecimali ai numerelor (de forma 10^y) unei progresii geometrice.

Alte proprietăți vor putea fi obținute prin deducție.

1. Orice număr pozitiv posedă un logaritm zecimal.
2. Numerele negative sau zero nu au logaritmi.

3.

$\begin{aligned}\log 1 &= 0 \\ \log 10 &= 1\end{aligned}$

Cunoaștem deja aceste egalități:

$$\begin{aligned}\log 1 &= f(1) = f(10^0) = 0 \\ \log 10 &= f(10) = f(10^1) = 1.\end{aligned}$$

4.

$\begin{aligned}x > 1 &\iff \log x > 0 \\ 0 < x < 1 &\iff \log x < 0\end{aligned}$
--

Le știăm deja pentru x de forma 10^n , $n \in \mathbb{Z}$.

5. Funcția logaritmică zecimală este strict crescătoare pe intervalul $]0, \infty[$:

$a > b \implies \log a > \log b$

Să observăm că această proprietate conduce la următoarea echivalență:

$$a = b \Leftrightarrow \log a = \log b.$$

Vom admite că graficul acestei funcții are forma reprezentată în figura 2.

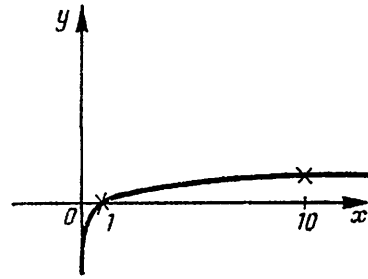


Fig. 2

6. $\boxed{\log ab = \log a + \log b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}}$

Am scris deja această egalitate pentru $a = 10^n$, $b = 10^p$ ($n, p \in \mathbb{Z}$).

Acest rezultat se generalizează pentru un produs de n factori ($n \in \mathbb{N}$);

$$\log abc \dots h = \log a + \log b + \log c + \dots + \log h.$$

Luind toți acești factori egali, se obține:

7. $\boxed{\log a^n = n \log a \quad n \in \mathbb{N}}$

Această formulă este încă valabilă pentru $n \in \mathbb{Q}^+$. Într-adevăr, să punem:

$$n = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbb{N}^*.$$

Fie $b = a^{\frac{p}{q}}$. Atunci: $b^q = a^p$ și:

$$\log b^q = q \log b, \quad \log a^p = p \log a \quad (\text{după 7});$$

deci:

$$q \log b = p \log a$$

și:

$$\log a^{\frac{p}{q}} = \log b = \frac{p}{q} \log a.$$

Ceea ce se scrie: $\log a^n = n \log a$, $n \in \mathbb{Q}^+$.

EXEMPLU. $\log \sqrt[3]{a^2} = \log a^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log a.$

$$\log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log a.$$

8. Să punem $c = \frac{a}{b}$. Atunci: $a = bc$.

După 6: $\log a = \log b + \log c$;

de unde: $\log \frac{a}{b} = \log c = \log a - \log b$.

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b \quad a, b \in R^{+*}$$

Deducem în particular din această formulă:

$$\log \frac{1}{a} = -\log a,$$

deoarece: $\log \frac{1}{a} = \log 1 - \log a = 0 - \log a = -\log a$.

Am întâlnit deja această proprietate pentru $\log \frac{1}{10^n}$,
 $n \in \mathbb{Z}$:

$$\log \frac{1}{10^n} = \log 10^{-n} = -n (= -\log 10^n).$$

EXEMPLE. $\log \frac{2}{3} = \log 2 - \log 3$. $\log \frac{1}{2} = -\log 2$.

$\log \frac{1}{10} = -\log 10 = -1$ (a se vedea graficul).

EXERCIȚII.

14.37. Știind că $\log 3 \approx 0,47712$ și $\log 12 \approx 1,07918$, să se calculeze, folosind proprietățile logaritmilor zecimali:

$\log 9$, $\log \sqrt{3}$, $\log 4$, $\log 26$, $\log 30$,

$\log 300$, $\log 0,3$, $\log \sqrt[5]{12}$, $\log \sqrt[4]{27}$.

14.38. Să se calculeze valoarea lui: $y = \frac{1}{2} \log(4 + \sqrt{7}) + \frac{1}{2} \log(4 - \sqrt{7})$.

14.39. Să se rezolve ecuațiile:

1°. $\left\{ x; x \in R^{+*} \text{ și } \log x + \log(x+3) + 2 \log \frac{1}{2} = 0 \right\}?$

2°. $\{x; x \in R^{+*} \text{ și } \log(x+2) + \log(x+3) = 1\}?$

3°. $\{x; x \in R^{+*} \text{ și } \log(x+5) - \log(x-1) = 2\}?$

14.5. CALCULE LOGARITMICE

14.5.1. Căutarea logaritmului unui număr

Ne propunem să găsim logaritmul zecimal al unui număr pozitiv dat. Reamintim mai întâi care sînt logaritmi zecimali ai numerelor de forma $x = 10^n$, $n \in \mathbb{Z}$:

Astfel:

$$\begin{aligned}\log 10^n &= n \\ \log 10^4 &= \log 10\,000 = 4 \\ \log 10^3 &= \log 1\,000 = 3 \\ \log 10^2 &= \log 100 = 2 \\ \log 10^1 &= \log 10 = 1 \\ \log 10^{-1} &= \log 0,1 = -1 \\ \log 10^{-2} &= \log 0,01 = -2 \\ \log 10^{-3} &= \log 0,001 = -3 \\ \log 10^{-4} &= \log 0,0001 = -4.\end{aligned}$$

Considerăm acum numărul 346:

$$10^2 < 346 < 10^3.$$

Pentru că funcția logaritm zecimal este strict crescătoare pe intervalul $]0, \infty[$:

$$2 < \log 346 < 3.$$

Partea întreagă a lui $\log 346$, numită **caracteristică** (a se vedea definiția de la nr. 14.1.1) este deci: $2^{(1)}$.

Mantisa sa este dată de o tabelă. O tabelă de logaritmi cu cinci zecimale dă cinci cifre pentru mantisă. Avem astfel:

$$\log 346 \approx 2 + 0,539\,08 = 2,539\,08.$$

Să calculăm logaritmul lui 3460:

$$\log 3\,460 = \log 346 + \log 10 \approx 2,539\,08 + 1 = 3,539\,08.$$

Mantisa nu s-a schimbat.

(1) Este vorba în realitate de partea întreagă a unei valori apropiate zecimale a lui $\log 346$. Noi spunem însă, pentru a simplifica limbajul „logaritm“ pentru „valoarea apropiată zecimală a logaritmului“.

Să calculăm $\log 0,034\ 6$:

$$\log 0,034\ 6 = \log \frac{346}{10^4} = \log 346 - \log 10^4 \approx 2,539\ 08 - 4 = -1,460\ 92.$$

Scriem acest număr făcînd să apară caracteristica și mantisa sa:

$$a = -1,460\ 92.$$

Caracteristica sa este:

$$E(a) = -2;$$

$$\alpha = a - E(a)$$

$$= -1,460\ 92 + 2 = 0,539\ 08.$$

Mantisa lui $\log 0,034\ 6$ este aceeași ca aceea a lui $\log 346$.

Vom conveni să scriem:

$$\log 0,034\ 6 \approx \bar{2},539\ 08$$

pentru a face să apară caracteristica sa (aici negativă) și mantisa.

În general, orice număr zecimal pozitiv x , care poate fi scris sub forma (exercițiul nr. 14.40):

$$x = a \times 10^n, \quad 1 \leq a < 10, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{avem: } \log x = \log a + \log 10^n = \log a + n \log 10 = \log a + n.$$

Deci:

$$\boxed{\log x = n + \alpha}$$

$n \in \mathbb{Z}$ fiind caracteristica lui $\log x$,

$\alpha = \log a$ fiind mantisa lui $\log x$,

($0 \leq \alpha < 1$ căci $1 \leq a < 10$).

EXEMPLE. $x = 346 = 3,46 \times 10^2$, $\log x = 2 + \log 3,46$.

$$x = 0,034\ 6 = 3,46 \times 10^{-2}, \quad \log x = -2 + \log 3,46.$$

După cele ce precedă, putem enunța:

Mantisa logaritmului zecimal al unui număr nu se schimbă dacă se înmulțește sau se împarte acest număr printr-o putere a lui 10.

Tabelele de logaritmi nu furnizează decât mantisele. Trebuie deci să învățăm să căutăm caracteristicile.

Cu titlu de exemple, scriem logaritmii numerelor obținute înmulțind sau împărțind 346 prin diferite puteri ale lui 10. Calculul se poate face ca pentru 3 460 și 0,346.

1°.	$\log 34\ 600 = 4,539\ 08$
2°.	$\log 3\ 460 = 3,539\ 08$
3°.	$\log 346 = 2,539\ 08$
4°.	$\log 34,6 = 1,539\ 08$
5°.	$\log 3,46 = 0,539\ 08$
6°.	$\log 0,346 = \bar{1},539\ 08$
7°.	$\log 0,0346 = \bar{2},539\ 08$
8°.	$\log 0,00346 = \bar{3},539\ 08$

Sub o formă generală:

$$\begin{aligned} 1 < x < 10 &\Rightarrow 0 < \log x < 1 \Rightarrow E(\log x) = 0 \text{ (exemplul 5);} \\ 10 < x < 100 &\Rightarrow 1 < \log x < 2 \Rightarrow E(\log x) = 1 \text{ (exemplul 4);} \\ 10^p < x < 10^{p+1} &\Rightarrow p < \log x < p+1 \Rightarrow E(\log x) = p \\ &\text{(exemplele 1, 2, 3, 4, 5).} \end{aligned}$$

De unde regula:

Caracteristica logaritmului unui număr x mai mare ca 1 este mai mică cu o unitate decât numărul cifrelor caracteristicii lui x .

Considerăm numerele x mai mici ca 1:

$$\begin{aligned} 0,1 < x < 1 &\Rightarrow -1 < \log x < 0 \Rightarrow E(\log x) = -1 \\ &\text{(exemplul 6);} \\ 0,01 < x < 0,1 &\Rightarrow -2 < \log x < -1 \Rightarrow E(\log x) = -2 \\ &\text{(exemplul 7);} \\ \frac{1}{10^p} < x < \frac{1}{10^{p-1}} &\Rightarrow -p < \log x < -(p-1) \Rightarrow E(\log x) = -p \\ &\text{(exemplele 6, 7, 8).} \end{aligned}$$

Scrierea acestor numere cere p zerouri la începutul numărului: acela care este înaintea virgulei și $p-1$ după ea. De unde regula:

Caracteristica logaritmului unui număr mai mic ca 1 este negativă și egală în valoare absolută cu numărul zerourilor care figu-

rează la începutul numărului, în acest număr fiind cuprins și zeroul care este înaintea virgulei.

În ceea ce precedă, am căutat logaritmul zecimal al unui număr zecimal. Vom admite că logaritmul unui număr nezeecimal are ca valoare apropiată logaritmul valorii apropiate a numărului.

EXEMPLU. $\log \pi \approx \log 3,141\ 59$.

Însă, în cea mai mare parte a cazurilor, pentru a calcula logaritmul unui număr nezeecimal, se vor folosi proprietățile logaritmilor.

EXEMPLE. $\log \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log 2$.

$$\log \frac{1}{3} = -\log 3.$$

14.5.2. Logaritmul unei expresii

Se vor folosi proprietățile logaritmilor. Astfel, pentru a calcula logaritmul unui cit, dispunem de formula:

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Pentru a evita de a avea de a face cu scăderi de logaritmi, se introduce noțiunea de cologarithm:

$$\text{colog } b = -\log b = \log \frac{1}{b}$$

Vom avea astfel:

$$\log \frac{a}{b} = \log a + \text{colog } b,$$

și, mai general:

$$\log \frac{abc}{de} = \log a + \log b + \log c + \text{colog } d + \text{colog } e.$$

Arătăm pe exemple calculul practic al unui cologarithm.

EXEMPLE. I. $\log 346 = 2,539\ 08$

$$\begin{aligned}\operatorname{colog} 346 &= -2,539\ 08 \\ &= -2 - 0,539\ 08 \\ &= -3 + (1 - 0,539\ 08) \\ &= -3 + 0,460\ 92 \\ &= \bar{3},460\ 92.\end{aligned}$$

Observăm că, pentru a calcula $(1 - 0,539\ 08)$, se completează pînă la 9 primele patru cifre zecimale și la 10 ultima.

$$\begin{aligned}\text{II.} \quad \log 0,034\ 6 &= \bar{2},539\ 08 \\ &= -2 + 0,539\ 08 \\ \operatorname{colog} 0,034\ 6 &= 2 - 0,539\ 08 \\ &= 1,460\ 92.\end{aligned}$$

Se poate observa că suma caracteristicilor logaritmului și cologaritmului este întotdeauna egală cu -1 .

Sub o formă generală, dacă se notează, cum am notat mai înainte:

$$\log x = n + \alpha,$$

vom avea:

$$\operatorname{colog} x = -n - \alpha.$$

Pentru a face să apară mantisa α' a cologaritmului (dacă $\alpha \neq 0$), se va scrie:

$$\operatorname{colog} x = (-n - 1) + (1 - \alpha)$$

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow -1 < -\alpha < 0 \Rightarrow 0 < 1 - \alpha < 1.$$

Vom avea astfel:

$$\text{caracteristica lui } \operatorname{colog} x: n' = -n - 1;$$

$$\text{mantisa lui } \operatorname{colog} x: \alpha' = 1 - \alpha.$$

14.5.3. Folosirea tabelelor de logaritmi zecimali

Tabelele de logaritmi cu cinci zecimale⁽¹⁾ dau mantisele logaritmilor numerelor întregi cuprinse între 1 000 și 10 000.

⁽¹⁾ Tabelele de Bouvart și Ratinet.

Coloanele marcate N enumeră zecile, coloanele de la 0 la 9, unitățile; cifrele unei mantise sînt citite la intersecția unei linii cu o coloană (a vedea paginile 271—272).

EXAMPLE. I. $x = 1\ 861$.

Se reperează 186 în coloana N . Pe linia lui 186 în coloana 1, se citesc cifrele mantisei lui $\log x$:

$$26\ 975$$

(cifrele 2 și 6, scrise pentru 1820, nu sînt repetate).

Se obține: $\log x \approx 3,269\ 75$.

II. $x = 1863$.

Pe linia lui 186, în coloana 3, steluța plasată înaintea lui 021 indică faptul că aceste trei cifre trebuiesc precedate de 27 și nu de 26. Cifrele mantisei lui $\log 1\ 863$ sînt deci:

$$27\ 021.$$

Se obține: $\log 1\ 863 \approx 3,270\ 21$.

III. $x = 1\ 860$

Cifrele mantisei sînt: 26 951.

Acestea sînt de asemenea cifrele mantisei lui:

$\log 186$; $\log 18,6$; $\log 1,86$; $\log 0,186$; $\log 0,0186$ etc.

Aceste tabele permit astfel a avea logaritmul numerelor întregi de la 1 la 10 000 și chiar încă, logaritmul numerelor care au cel mult patru cifre semnificative ⁽²⁾.

OBSERVAȚIE. Aceste tabele ne dau în fapt valorile cu aproximație de $\frac{1}{2 \cdot 10^5}$ ale logaritmilor fără să știm dacă ele sînt apropiate prin lipsă sau prin adaos (a se vedea nr. 14.1.3).

Atunci cînd tabela dă: $\log 2 = 0,301\ 03$, înseamnă că avem:

$$0,301\ 025 \leq \log 2 < 0,301\ 035.$$

EXAMPLE. numere:	18,046	1,016	0,17052	2521,7
cifre semnificative:	1804	1	17052	25 217

⁽²⁾ Șirul cifrelor semnificative este obținut suprimîndu-se zerourile care se pot găsi la începutul sau la sfîrșitul numărului (fără a ține cont de virgulă, dacă figurează).

14.5.4. Interpolare liniară

Atunci cînd numărul căruia îi căutăm logaritmul este format din mai mult de patru cifre semnificative, se poate face apel în anumite cazuri la interpolarea liniară (nr. 14.1.12).

Dacă numărul considerat este destul de mare, vom admite că creșterea lui $\log x$ este proporțională cu creșterea lui x (ceea ce revine din punct de vedere grafic a confunda segmentul $[M_1, M_2]$ cu arcul $\widehat{M_1 M_2}$ al graficului funcției logaritmice). Această aproximație este acceptabilă dacă diferența tabulară este mică.

EXEMPLU. Calculul lui $y = \log 2521,7$.

$$x_1 = 2521 \quad y_1 = \log x_1 = 3,401 \, 57 \text{ (dat de tabelă);}$$

$$x_2 = 2522 \quad y_2 = \log x_2 = 3,401 \, 75;$$

diferența tabulară:

$$\Delta = y_2 - y_1 = 0,000 \, 18$$

$$d = x_2 - x_1 = 1$$

$$h = x - x_1 = 0,7 \text{ (punînd } x = 2521,7)$$

$$y = y_1 + \frac{\Delta}{d} h = 3,401 \, 57 + (0,000 \, 18 \times 0,7)$$

$$= 3,401 \, 57 + 0,000 \, 126 \approx 3,401 \, 696.$$

Calculul lui $\frac{\Delta}{d} h$ este, dealtfel, calculat în tabelă unde, în tabela mică intitulată 18, sub linia lui 7, se citește: 12,6

Noi nu vom păstra decît cinci zecimale și vom scrie:

$$y \approx 3,401 \, 70.$$

Vom dispune calculul în felul următor:

$$\begin{array}{rcl} \log 2 \, 521 & = & 3,401 \, 57 \quad \Delta = 18 \\ & & \underline{7 \qquad 13} \\ \log 2 \, 521,7 & = & 3,401 \, 70 \end{array}$$

14.5.5. Să se găsească un număr cunoscînd logaritmul său

1^{ra} caz. Mantisa logaritmului se găsește în tabelă.

Se pot citi în tabelă cifrele semnificative ale numărului căutat.

Caracteristica logaritmului ne dă caracteristica numărului.

EXEMPLU. Să se găsească x astfel încît $\log x = 2,32015$; cifrele semnificative ale lui x : 209.

$$x \approx 0,0209.$$

Al 2^{lea} caz. Mantisa logaritmului nu este în tabelă.
Procedăm prin interpolare lineară.

EXEMPLU. Să se găsească x astfel încît $\log x = 2,42051$. 420 45 și 420 62 încadrează pe 420 51 și figurează în tabelă; $\Delta = 0,00017$.

Lui 420 45 îi corespunde 2 633; lui 420 51 îi corespunde $2\,633 + \frac{6}{17} = 2\,633,35$ (consultînd tabela mică intitulată 17, se citește 3 în stînga lui 5,1 și 5 în stînga lui 8,5).

Deoarece caracteristica lui $\log x$ este 2:

$$x \approx 263,335.$$

Putem așeza calculul astfel:

$$\begin{array}{rcl} \log x & = & 2,420\,51 \\ \log 263,3 & \approx & 2,420\,45 \quad \Delta = 17 \\ \text{diferență:} & & 6 \\ \text{corecție:} & \text{pentru } 5,1 & : 3 \\ & \text{pentru } 0,85 & : 0,5 \\ & \text{pentru } 6 & : 3,5 \\ & & x \approx 263,335. \end{array}$$

14.5.6. Calculul unei expresii

Fie x expresia de calculat. Se calculează $\log x$ utilizând proprietățile logaritmilor. Se găsește x cunoscând $\log x$.

EXEMPLU. Să se calculeze $x = \frac{25 \times \sqrt{280,15}}{\sqrt[3]{2\,744,2}}$.

Vom avea: $\log x = \log 25 + \frac{1}{2} \log 280,15 + \frac{1}{3} \operatorname{colog} 2\,744,2$.

Așezăm calculul astfel:

Calculare auxiliare

$$\log 25 \approx 1,397\,94$$

Calculul lui $\log 280,15$

$$\log 280,1 \approx 2,447\,31 \quad \Delta = 16$$

$$\begin{array}{r} 5 \qquad 8 \\ \log 280,15 \approx 2,447\,39 \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \log 280,15 \approx 1,233\,70$$

Calculul lui $\log 2\,744,2$

$$\log 2\,744 \approx 3,438\,38 \quad \Delta = 16$$

$$\begin{array}{r} 2 \qquad 32 \\ \log 2\,744,2 \approx 3,438\,41 \end{array}$$

$$\frac{1}{3} \log 2\,744,2 \approx 1,146\,14$$

$$\operatorname{colog} \sqrt[3]{2\,744,2} \approx 2,853\,86.$$

Calculare definitive

$$1,397\,94$$

$$1,223\,70$$

$$\underline{2,853\,86}$$

$$\log x \approx 1,475\,50$$

$$\log 29,88 \approx 1,475\,38 \quad \Delta = 15$$

$$\text{diferență:} \qquad 12$$

$$\text{corecție: } 8 \text{ pentru } 12$$

$$x \approx 29,888$$

$$x \approx 29,888.$$

Să remarcăm avantajul scrierii: 2,853 86 care ne permite să nu avem în definitiv decât o adunare de efectuat, în felul următor:
coloana zecilor: 1 (reținut) + 3 + 2 + 8 = 14
coloana unităților: 1 (reținut) + 1 + 1 + (-2) = 1.

EXERCIȚII.

14.40. Folosind definiția 1 de la nr. 14.1.1., să se arate că orice număr zecimal pozitiv x se poate scrie sub forma:

$$x = a \times 10^n, 1 \leq a < 10, n \in \mathbb{Z}.$$

14.41. Să se calculeze folosind logaritmi zecimali:

$$1^\circ. 92,24 \times 0,875. \quad 2^\circ. (0,878)^3. \quad 3^\circ. \sqrt[5]{28,34}.$$

$$4^\circ. \frac{57\,978}{2,84}. \quad 5^\circ. \sqrt[3]{\frac{4,58 \times 27}{(3,6)^2}}.$$

14.42. Să se rezolve ecuațiile:

$$1^\circ. \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^4 = 28,75\}?$$

$$2^\circ. \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^5 = 3\,724,6\}?$$

14.43. Să se calculeze aria discului de rază $R = 27,56$ m.

14.44. Să se calculeze diagonala pătratului de latură $a = 0,784$ cm.

14.45. Aplicând formula:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

să se calculeze aria triunghiului ale cărui laturi măsoară:

$$a = 161,5 \text{ m}; b = 163,3 \text{ m}; c = 251,4 \text{ m}$$

(p este semiperimetrul.)

14.6. Serii Renard. Numere normale

14.6.1. Introducere

Seriile Renard furnizează o gamă de dimensiuni normalizate pentru piesele și mașinile industriale. *Seriile Renard* sunt progresii geometrice; pentru a le calcula termenii, se folosesc logaritmii. *Numerele normale* sunt valori apropiate de acești termeni înmulți cu 100.

Cele patru *serii Renard* fundamentale, notate:

$$R_{10}, R_5, R_{20}, R_{40},$$

au ca rații respectiv:

$$\sqrt[10]{10}, \sqrt[5]{10}, \sqrt[20]{10}, \sqrt[40]{10}.$$

Primul lor termen este 1.

14.6.2. Seria R_{10}

Să scriem primii termeni ai seriei R_{10} :

$$1, \sqrt[10]{10}, \sqrt[10]{10^2}, \sqrt[10]{10^3}, \sqrt[10]{10^4}, \sqrt[10]{10^5}, \sqrt[10]{10^6}, \\ \sqrt[10]{10^7}, \sqrt[10]{10^8}, \sqrt[10]{10^9}, 10, \dots$$

Punind $q = \sqrt[10]{10}$, această progresie se scrie:

$$1, q, q^2, q^3, q^4, q^5, q^6, q^7, q^8, q^9, q^{10}, \dots$$

Exponentul n este indicele termenului q^n .

Să calculăm termenii seriei, cu ajutorul unei tabele de logaritmi cu cinci zecimale. Să-l căutăm mai întâi pe q .

$$\log q = \log \sqrt[10]{10} = \frac{1}{10} \log 10 = \frac{1}{10} = 0,1.$$

Trebuie să găsim deci pe q astfel încît $\log q = 0,1$:

$$\log q = 0,100\ 00$$

$$\log 1,258 \approx 0,099\ 68\ \Delta = 35$$

diferență: 32

corecție: pentru 31,5 : 9

$$q \approx 1,258\ 9.$$

Avem apoi:

$$\log q^2 = 2 \log q = 0,2.$$

Printr-un calcul analog cu precedentul, se găsește:
 $q^2 \approx 1,584\ 9$. La fel se obține:

$\log q^3 = 0,3$	$q^3 \approx 1,995\ 3$
$\log q^4 = 0,4$	$q^4 \approx 2,511\ 9$
$\log q^5 = 0,5$	$q^5 \approx 3,162\ 3$
$\log q^6 = 0,6$	$q^6 \approx 3,981\ 1$
$\log q^7 = 0,7$	$q^7 \approx 5,011\ 9$
$\log q^8 = 0,8$	$q^8 \approx 6,309\ 6$
$\log q^9 = 0,9$	$q^9 \approx 7,943\ 3$
$\log q^{10} = 1$	$q^{10} = 10$ etc.

Scriem valorile obținute ale termenilor păstrînd indicii corespunzători:

Indici	0	1	2	3	4	5
Termeni	1	1,258 9	1,584 9	1,995 3	2,511 9	3,162 3
Indici	6	7	8	9	10	
Termeni	3,981 1	5,011 9	6,309 6	7,943 3	10	

Cunoașterea indicilor ne permite să efectuăm produsele și citurile asupra termenilor seriei fără a recurge la logaritmi.

În adevăr:

$$q^n \times q^{n'} = q^{n+n'}$$

$$\frac{q^n}{q^{n'}} = q^{n-n'}$$

EXAMPLE: 1,584 9 (indice 2)

5,011 9 (indice 7)

$1,584\ 9 \times 5,011\ 9 \approx 7,943\ 8$ (indice $2 + 7 = 9$)

$\frac{5,011\ 9}{1,584\ 9} \approx 3,162\ 3$ (indice $7 - 2 = 5$)

14.6.3. Seria R_5

Dacă se păstrează notația $q = \sqrt[10]{10}$, rația progresiei geometrice R_5 este q^2 . În adevăr: $\sqrt[5]{10} = (\sqrt[10]{10})^2$.

Seria R_5 se scrie deci:

$$1, q^2, q^4, q^6, q^8, q^{10}, \dots$$

termenii acestei serii sînt deci aceia ai lui R_{10} luați din doi în doi. Prin urmare, dacă s-a definit indicele unui termen q^n al lui R_5 ca fiind exponentul n , un termen comun celor două serii va avea același indice în cele două serii; această noțiune de indice este atunci independentă de seria considerată.

EXEMPLU. Indicele lui 3,981 1 este 6.

14.6.4. Seria R_{20}

Seria R_{20} are ca rație:

$$\sqrt[20]{10} = \sqrt[10]{\sqrt[10]{10}} = \sqrt[10]{q} = q^{\frac{1}{2}}.$$

Ea se scrie deci:

$$1, q^{\frac{1}{2}}, q, q^{\frac{3}{2}}, q^2, q^{\frac{5}{2}}, q^3, q^{\frac{7}{2}}, q^4, \dots$$

Ea conține toți termenii lui R_{10} .

Orice termen al lui R_{20} care nu este al lui R_{10} este o medie geometrică între doi termeni consecutivi ai lui R_{10} .

Definiția indicelui este neschimbată:

n este indicele lui q^n .

Indicii termenilor lui R_{20} nu sînt toți întregi.

Termenii lui R_{20} se calculează cu ajutorul logaritmilor:

$$\log q^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log q = 0,05 \quad q^{\frac{1}{2}} \approx 1,122 \, 0 \left(\text{indice } \frac{1}{2} \right);$$

$$\log q^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log q = 0,15 \quad q^{\frac{3}{2}} \approx 1,258 \, 9 \left(\text{indice } \frac{3}{2} \right);$$

$$\log q^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \log q = 0,25 \quad q^{\frac{5}{2}} \approx 1,412 \, 5 \left(\text{indice } \frac{5}{2} \right) \text{ etc.}$$

14.6.5. Seria R_{40}

Seria R_{40} are ca rație:

$$\begin{aligned} \sqrt[40]{10} &= \sqrt[4]{\sqrt[10]{10}} = \\ &= \sqrt[4]{q} = q^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Ea se scrie:

$$1, q^{\frac{1}{4}}, q^{\frac{1}{2}}, q^{\frac{3}{4}}, q, q^{\frac{5}{4}}, q^{\frac{3}{2}}, q^{\frac{7}{4}}, q^2, \dots$$

Ea conține toți termenii lui R_{20} .

Orice termen al lui R_{40} care nu este al lui R_{20} este o medie geometrică între doi termeni consecutivi ai lui R_{20} .

Se calculează cu ajutorul logaritmilor.

Astfel:

$$\log q^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log q = 0,025 \quad q^{\frac{1}{4}} \approx 1,06 \left(\text{indice } \frac{1}{4} \right);$$

$$\begin{aligned} \log q^{\frac{27}{4}} &= \frac{27}{4} \log q = 0,675 \quad q^{\frac{27}{4}} \approx 4,73 \left(\text{indice } \frac{27}{4} = \right. \\ &\quad \left. = 6 + \frac{3}{4} \right). \end{aligned}$$

Indici	Serii			
	R_5	R_{10}	R_{20}	R_{40}
0	100	100	100	100
$\frac{1}{4}$				106
$\frac{1}{2}$			112	112
—				118
1		125	125	125
—				132
—			140	140
—				150
2	160	160	160	160
—				170
—			180	180
—				190
3		200	200	200
—				212
—			224	224
—				236
4	250	250	250	250
—				265
—			280	280
—				300
5		315	315	315
—				335
—			355	355
—				375
6	400	400	400	400
—				425
—			450	450
—				457
7		500	500	500
—				530
—			560	560
—				600
8	630	630	630	630
—				670
—			710	710
—				750
9		800	800	800
—				850
—			900	900
—				950
10	1000	1000	1000	1000

Fig. 3

14.6.6. Numere normale

Nevoile industriei nu necesită precizia termenilor seriilor Renard. Înmulțindu-le pe acestea cu 100 și luând o valoare aproximativă a rezultatelor obținute, se obțin numerele normale. Indicii numerelor normale sint, prin definiție, aceia ai termenilor din care provin. Tabloul (fig. 3) dă valorile numerelor normale corespunzătoare fiecărei serii.

Pentru a efectua produse și cituri de numere normale, se vor putea folosi indicii.

EXAMPLE. I. Să se calculeze: $x = 212 \times 315$.

$$212: \text{indice } \frac{13}{4},$$

$$315: \text{indice } 5;$$

$$\text{suma indicilor: } \frac{33}{4} = 8 + \frac{1}{4}, \text{ număr normal: } 670.$$

$$x \approx 67\,000.$$

II. Să se calculeze:

$$x = \frac{1,60 \times 710}{2,36}.$$

$$160 : \text{indice } 2,$$

$$710 : \text{indice } \frac{17}{2}, \quad 236 : \text{indice } \frac{15}{4}.$$

$$\text{Avem: } 2 + \frac{17}{2} - \frac{15}{4} = \frac{27}{4} = 6 + \frac{3}{4}, \text{ număr normal: } 475.$$

$$x \approx 4,75.$$

EXERCIȚII.

15.46. Cu ajutorul seriilor Renard, să se calculeze valori aproximative al lui:

1°.

$$1,32 \times 22,4.$$

2°.

$$315^3.$$

$$3^\circ. \quad \frac{4,25 \times 53}{75}.$$

$$4^\circ. \quad \frac{(35,5)^2 \times 425}{11,2}.$$

$$5^\circ. \quad \sqrt[3]{560}.$$

$$6^\circ. \quad \sqrt[4]{630}.$$

$$7^\circ. \quad \pi \sqrt[5]{2}.$$

15.17. Să se explice pentru ce numerele normale obținute plecând de la seria R_{12} se dublează din 3 în 3.

14.7. RIGLA DE CALCUL

14.7.1. Un exemplu de scară

Să considerăm funcția f :

$$\forall x \in [0,2] \quad x \xrightarrow{f} f(x) = x^2,$$

și graficul acestei funcții în raport cu un reper cartezian Ox, OX , ale cărui vectori unitari sint (fig. 4):

$$\vec{i} = \overrightarrow{OA_1}, \quad \vec{j} = \overrightarrow{OA}.$$

Să alegem pe Ox un anumit număr de puncte, de exemplu:

$$m_1 : x_1 = 0;$$

$$m_2 : x_2 = 0,5;$$

$$m_3 : x_3 = 1;$$

$$m_4 : x_4 = 1,5;$$

$$m_5 : x_5 = 2.$$

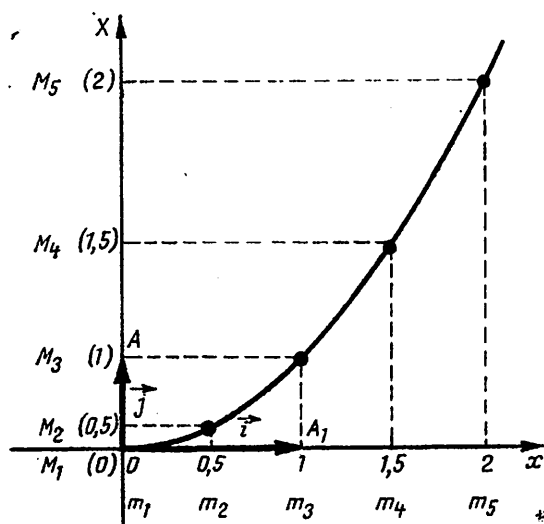


Fig. 4

Să marcăm pe OX punctele M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 corespunzătoare, apoi, în loc să indicăm alături de M_i valoarea lui $f(x_i)$, să indicăm valoarea lui x_i . Obținem o scară a funcției $x \rightarrow x^2$, relativă la segmentul $[0, 2]$. Pe această scară, punctele nu sînt la distanțe egale.

Este posibil să obținem o scară cu pas constant (fig. 5) alegeînd convenabil valorile variabilei. Valorile trebuie

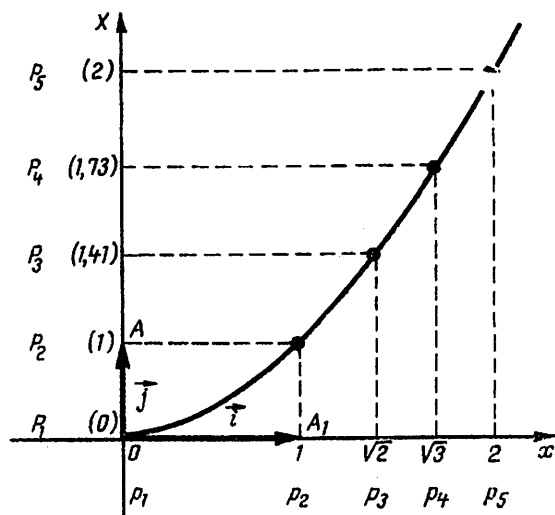


Fig. 5

să fie date cu o anumită precizie; în general, se indică două sau trei cifre semnificative după virgulă.

$\overline{OA}$ se numește modulul scării.

Scara odată construită se prezintă într-o manieră autonomă, Figura 6 reprezintă o scară a funcției

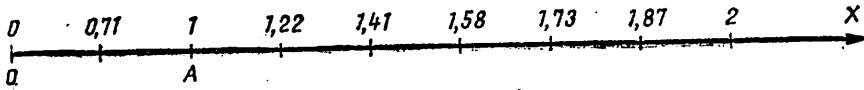


Fig. 6

$x \rightarrow x^2$, relativă la segmentul $[0,2]$; pasul acestei scări este constant și egal cu $\overline{OA}$; el este dat de două cifre semnificative după virgulă.

14.7.2. Scara unei funcții crescătoare

Fie f o funcție crescătoare pe un segment $[a, b]$. Fie OX o axă măsurată și gradată prin $\overline{OA}$ de măsură 1. Se obține o scară a funcției f indicând, în fața unui anumit număr de puncte, M_i , ale lui OX , numărul x_i astfel încît:

$$\overline{OM_i} = X_i \overline{OA}, \quad X_i = f(x_i).$$

Altfel spus, dacă φ este funcția reciprocă a lui f , avem:

$$x_i = \varphi(X_i).$$

EXEMPLU. Funcția $x \rightarrow \log x$ este definită și crescătoare pe $[0, \infty[$. Figura 7 reprezintă o scară a acestei funcții pentru $1 \leq x \leq 100$.

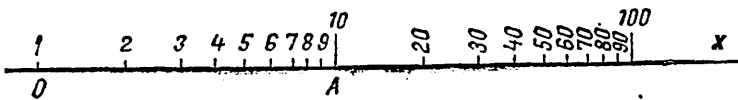


Fig. 7

Modulul scării, fie $\overline{OA}$, are ca lungime 4 centimetri.

În coloanele a două și ultima ale tabloului, s-a pus în evidență că, în acest exemplu, funcția f este astfel încît:

$$X = f(x) = \log x,$$

și funcția φ , funcția reciprocă lui f , este astfel încît:

$$x = \varphi(X) = 10^X.$$

Scara este descrisă prin tabloul următor:

x_i	$\log(x_i) = X_i = \frac{\overline{OM_i}}{\overline{OA}}$	lungimea lui $\overline{OM_i}$ în centimetri	Gradația marcată	$10^{x_i} = x_i$
1	$\log 1 = 0$	0	1	$10^0 = 1$
2	$\log 2 \approx 0,30$	1,2	2	$10^{0,30} \approx 2$
3	$\log 3 \approx 0,48$	1,92	3	$10^{0,48} \approx 3$
4	$\log 4 \approx 0,60$	2,4	4	$10^{0,60} \approx 4$
5	$\log 5 \approx 0,70$	2,8	5	$10^{0,70} \approx 5$
6	$\log 6 \approx 0,78$	3,12	6	$10^{0,78} \approx 6$
7	$\log 7 \approx 0,85$	3,4	7	$10^{0,85} \approx 7$
8	$\log 8 \approx 0,90$	3,6	8	$10^{0,90} \approx 8$
9	$\log 9 \approx 0,95$	3,8	9	$10^{0,95} \approx 9$
10	$\log 10 = 1$	4	10	$10^1 = 10$
20	$\log 20 \approx 1,30$	5,2	20	$10^{1,30} \approx 20$
30	$\log 30 \approx 1,48$	5,92	30	$10^{1,48} \approx 30$
				etc.

14.7.3. Compunerea scărilor

Fie f și g două funcții crescătoare, și fie două scări, relative respectiv la f și g , pentru care vectorii unitari $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{O'A'}$ au același modul. Să dispunem cele două scări paralele, astfel încât segmentul $[O, O']$ să le fie perpendicular.

Fie un punct M al scărilor f și fie M' punctul scărilor g situat deasupra lui M (presupunând că există). Avem:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = X, \quad X = f(x);$$

$$\frac{\overline{O'M'}}{\overline{O'A'}} = X', \quad X' = g(x');$$

or, $\overline{OA} = \overline{O'A'}$ și $\overline{OM} = \overline{O'M'}$ prin ipoteză; avem deci, pentru două puncte asociate:

$$f(x) = g(x').$$

Dacă φ este funcția reciprocă a lui f , avem de asemenea:

$$x = \varphi[g(x')].$$

Punerea în paralel a scărilor echivalează cu formarea scărilor funcției $\varphi \circ g$.

Dacă se citește o valoare x' pe scara funcției g , se găsește, deasupra gradației x' și pe scara funcției f , valoarea lui $\varphi \circ g(x')$. Practic, gradațiile sînt concepute în așa fel încît să se poată interpola din ochi.

EXEMPLE. I. Fie f :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x \xrightarrow{f} f(x) = x^2 = X.$$

Funcția sa reciprocă φ este astfel încît $\varphi(X) = \sqrt{X} = x$.

Fie g funcția identică:

$$\forall x' \in \mathbb{R} \quad x' \xrightarrow{g} g(x') = x' = X'.$$

Avem:

$$x = \varphi(g(x')) = \sqrt{x'}.$$

Să punem scara lui g dedesubtul celei lui f (fig. 8).

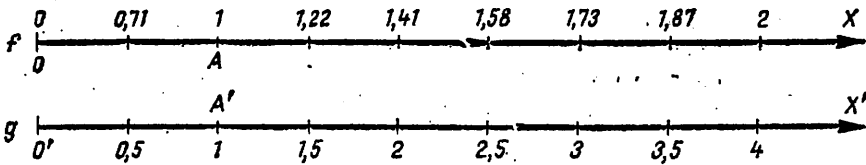


Fig. 8

Deasupra lui $x' = 2$, se citește $x = \sqrt{2} \approx 1,41$.

Mărind numărul de gradații, s-ar putea citi:

$$\sqrt{2,25} \approx 1,5;$$

$$\sqrt{2,75} \approx 1,65.$$

Cu ajutorul acestor două scări, putem citi de asemenea pătratele.

De exemplu:

$$(1,73)^2 \approx 3.$$

II. Să păstrăm aceeași funcție f dar să înlocuim pe g cu:

$$g(x') = x'^3 = X'.$$

Avem atunci:

$$x = \varphi(g(x')) = \sqrt{x'^2}.$$

Deasupra lui $x' = 0,79$, putem citi astfel (fig. 9):

$$\sqrt{0,79^2} \approx 0,71$$

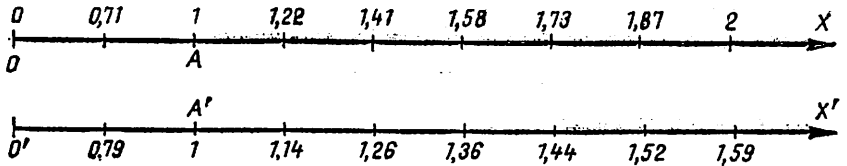


Fig. 9

Gu ajutorul acestor două scări, se poate citi de asemenea:

$$x' = \sqrt[3]{x^2}.$$

Astfel, dedesubtul lui $x = 1,22$:

$$\sqrt[3]{1,22^2} \approx 1,14.$$

14.7.4. Decalaj prin translație

Să construim două exemplare identice ale unei scări ale funcției f și să decălăm scara purtată pe $O'X'$, paralel cu scara purtată pe OX , astfel încît O' să cadă exact în dreptul unui punct M gradat x .

Fie atunci x_1 o gradație a lui $O'X'$.

Ea cade exact în dreptul lui x_1 (fig. 10).

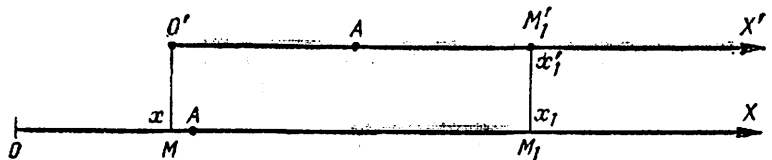


Fig. 10

Avem pe de o parte:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = X = f(x), \quad \frac{\overline{OM_1}}{\overline{OA}} = X_1 = f(x_1),$$

$$\frac{\overline{O'M_1}}{\overline{O'A}} = X_1 = f(x_1),$$

și, pe de altă parte:

$$\overline{OM_1} = \overline{OM} + \overline{O'M_1}$$

$$\overline{OA} = \overline{O'A'};$$

deducem:

$$f(x_1) = f(x) + f(x'_1).$$

EXEMPLE. I. Plecînd de la scara lui $f(x) = x^2$, și prin decalaj, se obțin „triplele pitagorice”:

$$x_1^2 = x^2 + x'^2.$$

II. Un exemplu foarte important face obiectul paragrafului următor.

14.7.5. Scări logaritmice decalate

Să studiem cazul în care scările logaritmice decalate prin translație sînt două exemplare identice relative la funcția $x \xrightarrow{\ominus} \log x$.

Avem deci atîunci, cu notațiile de la nr. precedent:

$$\log x_1 = \log x + \log x'_1;$$

de unde:

$$x_1 = xx'_1,$$

și:

$$x'_1 = \frac{x_1}{x}.$$

Teoretic deci este posibil să obținem produse și cituri. Practic, rigla de calcul are o parte fixă și o parte mobilă numită rigletă; și una și alta au scări logaritmice identice. Cum aceste scări au lungimi finite, se „incadrează calculul” folosind un factor 10, sau 100, pentru a rămîne în numerele pe care le dă rigla.

14.7.6. Scări logaritmice asemănătoare

Să considerăm două scări logaritmice ai căror vectori unitari $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{O'A'}$ au module diferite. Să așezăm scările astfel încît ele să fie paralele, în același sens, și perpendiculare pe segmentul $[D, O']$ (fig. 11).

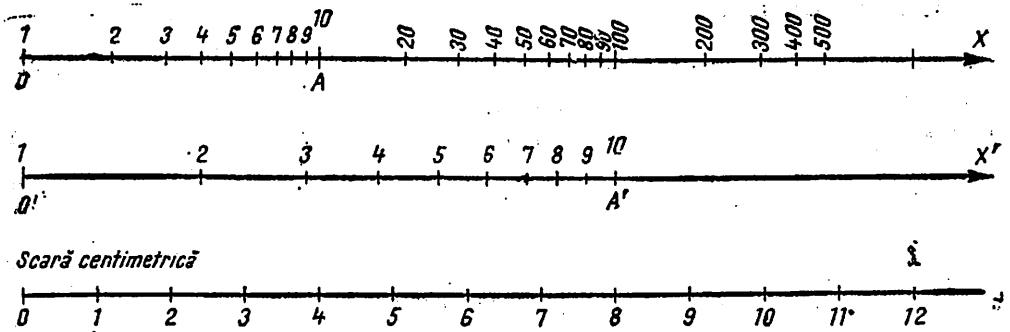


Fig. 11

Dacă $M(x)$ și $M'(x')$ se corespund, avem:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = X = \log x, \quad \frac{\overline{O'M'}}{\overline{O'A'}} = X' = \log x',$$

$$\overline{OM} = \overline{O'M'}.$$

Deducem:

$$\overline{OA} \log x = \overline{O'A'} \log x'.$$

Să punem $\frac{\overline{O'A'}}{\overline{OA}} = \lambda$; avem deci:

$$\log x = \lambda \log x';$$

deducem:

$$x = x'^{\lambda},$$

$$x' = x^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Pe figura 11, s-a luat $\lambda = 2$; în acest caz avem:

$$x = x'^2, \quad x' = \sqrt{x}.$$

Sistemul a două scări echivalează cu o tabelă de pătrate și o tabelă de rădăcini pătrate.

Se obține, de exemplu, interpolând din ochi:

$$\sqrt{20} \approx 4,48.$$

De fapt avem:

$$\sqrt{20} \approx 4,4721.$$

14.7.7. Rigla de calcul

Începînd din 1623, deci la vreo zece ani după invenția logaritmilor, apar în Anglia instrumente pe care le putem considera ca strămoșii actualelor noastre rigle de calcul.

O mare îmbunătățire (către 1670) a fost invenția rigletei glisante care permite decalajul scărilor.

Riglele moderne sînt fabricate cu o rășină sintetică indeformabilă. Ele sînt echipate cu un cursor mobil care permite reperarea foarte precisă a corespondențelor de la o scară la alta. Riglele au scări ale funcțiilor uzuale în număr mai mare sau mai mic, după modele.

Pentru o singură operație, eroarea relativă este de ordinul $\frac{1}{1000}$; această eroare se mărește evident cu numărul citirilor și a manipulărilor rigletei. O astfel de precizie este suficientă pentru a avea rapid un ordin de mărime al rezultatului. Cînd datele nu sînt ele însele definite cu o mare precizie, rigla este un instrument perfect potrivit. Cum există modele variate, trimitem pentru detalii practice, la notițele constructorilor. Vom indica doar tehnica operațiilor elementare.

14.7.8. Gradarea instrumentului

Figura 12 arată o riglă de calcul de dimensiuni mici.

O riglă de calcul se compune din două părți:

a) o riglă fixă;

b) o riglă pe care o facem să gliseze în scobitura făcută în acest scop în riglă (fig. 12). Rigla și rigleta sînt de aceeași lungime și gradate în același fel. Ele au fiecare două diviziuni, una numită *superioară* (B^2, b^2), alta *inferioară* (B, b).

Distanța de la o diviziune oarecare la originea marcată 1 este proporțională cu logaritmul numărului care corespunde acestei diviziuni.

DIVIZIUNEA SUPERIOARĂ. Partea utilă este divizată în două părți egale și, luînd o jumătate, ca unitate de lungime, s-au marcat diviziunile 1, 2, 3, ..., 10 la distanțe, de origine, egale cu logaritmii acestor diferite numere. Diviziunea 1 este la originea deoarece $\log 1 = 0$; diviziunea 10 se găsește la mijloc deoarece $\log 10 = 1$. Între diviziunile principale, de la 1 la 10, care

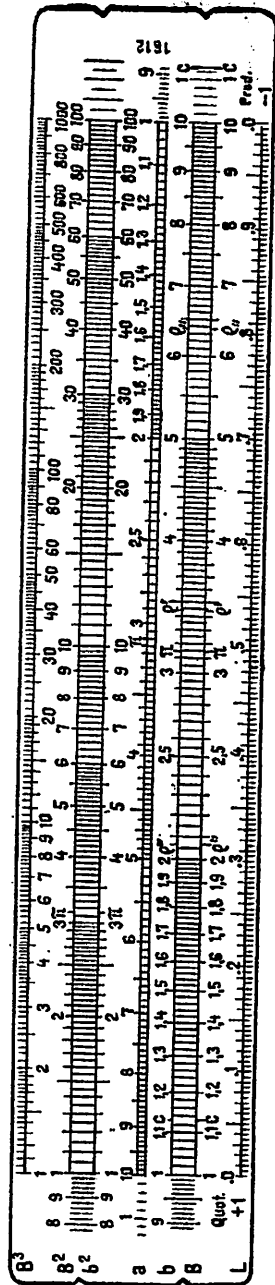


Fig. 12

singure poartă numere, s-au intercalat diviziuni secundare. Toate aceste diviziuni evident nu sînt echidistante căci, de exemplu:

$$\log(n+1) - \log n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

descrește cînd n crește. Din această cauză, pe riglele normale (25 cm), subdiviziunile sînt de $\frac{1}{50}$ între 1 și 2, de $\frac{1}{20}$ între 2 și 3, 3 și 4, 4 și 5 și de $\frac{1}{10}$ în celelalte intervale. Aceeași gradare este repetată pe a doua jumătate. Dar diviziunea care indică 3 în a doua jumătate este la o distanță de origine egală cu:

$\lg 10 + \lg 3 = \lg 30$; din această cauză, în general, aceste diviziuni sînt notate de la 10 la 100.

DIVIZIUNEA INFERIOARĂ. Partea utilă, egală cu aceea a diviziunii superioare, este luată ca unitate; diviziunile principale merg de la 1 la 10.

Subdiviziunile sînt de $\frac{1}{100}$ de la 1 la 2 (1,1; 1,2; ...; 1,9 sînt indicate), de $\frac{1}{50}$ de la 2 la 3 și de la 3 la 4, de $\frac{1}{20}$ în celelalte intervale.

Prima grijă a celui ce o folosește este de a-și studia rigla și de a se obișnui cu diviziunile ei.

Făcînd să alunece rigleta pe riglă, se obține suma sau diferența logaritmilor a două numere, ceea ce corespunde la înmulțirea sau împărțirea acestor două numere.

14.7.9. Înmulțirea

Fie, de exemplu, să se calculeze produsul:

$$p = 0,003\,25 \times 64,81.$$

Se începe, prin mutarea virgulelor, să se ajungă la produsul:

$$p' = 3,25 \times 6,481 \quad (p = p' \times 10^{-2}),$$

a două numere cuprinse între 1 și 10.

Dacă se folosesc diviziunile superioare, se caută pe riglă diviziunea care corespunde factorului 3,25 și se face ca originea rigletei să coincidă cu această diviziune. Se caută pe rigletă diviziunea care corespunde lui 6,481 sau cel puțin aceea care corespunde numărului celui mai apropiat de acest factor, fie 6,48 (prin estimare vizuală între 6,4 și 6,5). În fine, se citește pe riglă diviziunea care coincide cu această ultimă diviziune a rigletei; se va găsi 21.

Avem deci $p' \approx 21$ (rezultat exact 21,063 25); deci:

$$p \approx 0,21.$$

Dacă, pentru același calcul, se folosesc diviziunile inferioare, se găsește că diviziunea 6,48 a rigletei este în afara riglei. Se face atunci ca 10 al rigletei să coincidă cu 3,25 al riglei; se citește pe riglă, în corespondență cu 6,48, produsul 21,1.

14.7.11. Împărțirea

Fie să se calculeze cîtul $q = \frac{0,124\ 4}{23,47}$; se obține cîtul:

$$q' = \frac{12,44}{2,347} \quad (q = q' \times 10^{-3}).$$

Se caută pe riglă (diviziunile superioare) deîmpărțitul 12,44 și pe rigletă împărțitorul 2,347 și se face ca cele două diviziuni să coincidă. Se caută la care diviziune a riglei corespunde originea rigletei. Se găsește $q' = 5,3$, de unde se deduce că $q = 0,005\ 3$. Făcînd operația cu diviziunile inferioare, ne dăm seama că originea rigletei este în afara riglei. Se citește cîtul. Se citește cîtul la coincidența cu 10 al rigletei.

14.7.11. Al patrulea proporțional

Rigla de calcul permite să se găsească, printr-o singură operație, al patrulea proporțional a trei numere date. Într-adevăr, rigleta fiind plasată într-un fel oarecare, fie x și y două numere citite pe rigletă și X , Y numerele respective corespunzătoare pe riglă.

Avem:

$$\log X - \log Y = \log x - \log y,$$

deci:

$$\frac{X}{Y} = \frac{x}{y}.$$

Fie atunci să se calculeze x definit de:

$$x = \frac{7,25 \times 312}{12,43},$$

sau:

$$\frac{7,25}{12,43} = \frac{x}{312};$$

se va calcula x' astfel ca:

$$\frac{7,25}{12,43} = \frac{x'}{3,12};$$

$$(x = 100 x').$$

Se face să coincidă 12,43 al riglei cu 3,12 al rigletei.
Se citește pe riglă 1,81 în fața lui 7,25.

Avem deci:

$$x \approx 181.$$

14.7.12. Alte operații

1. Din însăși construcția diviziunilor inferioare rezultă că un număr n citit pe diviziunea inferioară corespunde numărului n^2 citit pe diviziunea superioară.

Rigla de calcul permite deci să se calculeze imediat pătratul unui număr și, invers, să se extragă o rădăcină pătrată. (Atenție la deplasarea virgulelor: trebuie să avem grijă să înmulțim sau să împărțim printr-o putere pară a lui 10).

2. Notările dau, în general, indicații pentru:

calculul cuburilor și rădăcinilor cubice;

calculul logaritmului unui număr dat;

calculul sinusului și tangentei unui unghi ascuțit dat.

Anumite numere remarcabile, ca π , sint indicate într-un mod precis.

Un cursor mobil ușurează citirea pe rigla de calcul.

EXERCIȚII

Să se calculeze cu ajutorul riglei de calcul:

14.48. $1,17 \times 2,8$; $4,65 \times 3,28$; $7,42 \times 48,5$.

14.49. $0,0428 \times 72,5$; $0,00632 \times 7,27$.

14.50. $\frac{23,5}{2,6}$; $\frac{358,4}{0,24}$; $\frac{0,3673}{7,3}$.

14.51. $\frac{3,5 \times 2,6}{3}$; $\frac{356 \times 0,44}{6,2}$; $\frac{0,08 \times 0,29}{0,73}$.

14.52. $(2,8)^2$; $(7,56)^2$; $(13,5)^3$.

14.53. $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{13,2}$; $\sqrt[3]{2,864}$.

14.54. $\sqrt[3]{13}$; $\sqrt[3]{28,8}$; $\sqrt[3]{3,976}$.

Să se redca datele exercițiilor ale căror numere sînt indicate mai jos și să se compare rezultatele cu acelea deja obținute:

14.55. Exercițiul nr. 14.41. **14.58.** Exercițiul nr. 14.44.

14.56. Exercițiul nr. 14.42. **14.59.** Exercițiul nr. 14.45.

14.57. Exercițiul nr. 14.43. **14.60.** Exercițiul nr. 14.19.

TABELE NUMERICE

I. Pătratele și cuburile numerelor întregi de la 1 la 99

Numere	Pătrate	Cuburi	Numere	Pătrate	Cuburi	Numere	Pătrate	Cuburi
1	1	1	34	1 156	39 304	67	4 489	300 763
2	4	8	35	1 225	42 875	68	4 624	314 432
3	9	27	36	1 296	46 656	69	4 761	328 509
4	16	64	37	1 369	50 653	70	4 900	343 000
5	25	125	38	1 444	54 872	71	5 041	257 911
6	36	216	39	1 521	59 319	72	5 184	373 248
7	49	343	40	1 600	64 000	73	5 329	389 017
8	64	512	41	1 681	68 921	74	5 476	405 224
9	81	729	42	1 764	74 088	75	5 625	421 875
10	100	1 000	43	1 849	79 507	76	5 776	438 976
11	121	1 331	44	1 936	85 184	77	5 929	456 933
12	144	1 728	45	2 025	91 125	78	6 084	474 552
13	169	2 197	46	2 116	97 336	79	6 241	493 039
14	196	2 744	47	2 209	103 823	80	6 400	512 000
15	225	3 375	48	2 304	110 592	81	6 561	531 441
16	256	4 096	49	2 401	117 649	82	6 724	551 368
17	289	4 913	50	2 500	125 000	83	6 889	571 787
18	324	5 832	51	2 601	132 651	84	7 056	592 704
19	361	6 859	52	2 704	140 608	85	7 225	614 125
20	400	8 000	53	2 809	148 877	86	7 396	636 056
21	441	9 261	54	2 916	157 464	87	7 569	658 503
22	484	10 648	55	3 025	166 375	88	7 744	681 472
23	529	12 167	56	3 136	175 616	89	7 921	704 969
24	576	13 824	57	3 249	185 193	90	8 100	729 000
25	576	15 625	58	3 364	195 112	91	8 281	753 571
26	676	17 576	59	3 481	205 379	92	8 464	778 688
27	729	19 683	60	3 600	216 000	93	8 649	804 357
28	784	21 952	61	3 721	226 981	94	8 836	830 584
29	841	24 389	62	3 844	238 328	95	9 025	857 375
30	900	27 000	63	3 969	250 047	96	9 216	884 736
31	961	29 791	64	4 096	262 144	97	9 409	912 673
32	1 024	32 768	65	4 225	274 625	98	9 604	941 192
33	1 089	35 937	66	4 356	287 496	99	9 801	970 299

II. Rădăcini pătrate și Inversele numerelor întregi de la 1 la 100

n	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{n}$
1	1	1	51	7,141 4	0,019 6
2	1,414 2	0,5	52	7,211 1	0,019 2
3	1,732 1	0,333 3	53	7,280 1	0,018 9
4	2	0,25	54	7,348 5	0,018 5
5	2,236 1	0,2	55	7,416 2	0,018 2
6	2,449 5	0,166 7	56	7,483 3	0,017 9
7	2,645 8	0,142 9	57	7,549 8	0,017 5
8	2,828 4	0,125	58	7,615 8	0,017 2
9	3	0,111 1	59	7,681 1	0,016 9
10	3,162 3	0,1	60	7,746 0	0,016 7
11	3,316 6	0,090 9	61	7,810 2	0,016 4
12	3,464 1	0,083 3	62	7,874 0	0,016 1
13	3,605 6	0,076 9	63	7,937 3	0,015 9
14	3,741 7	0,071 4	64	8	0,015 6
15	3,873 0	0,066 7	65	8,062 3	0,015 4
16	4	0,062 5	66	8,124 0	0,015 2
17	4,123 1	0,058 8	67	8,185 4	0,014 9
18	4,242 6	0,055 6	68	8,246 2	0,014 7
19	4,358 9	0,052 6	69	8,306 6	0,014 5
20	4,472 1	0,05	70	8,366 6	0,014 3
21	4,582 6	0,047 6	71	8,426 1	0,014 1
22	4,690 4	0,045 5	72	8,485 3	0,013 9
23	4,795 8	0,043 5	73	8,544 0	0,013 7
24	4,890 0	0,041 7	74	8,602 3	0,013 5
25	5	0,04	75	8,660 3	0,013 3
26	5,099 0	0,038 5	76	8,717 8	0,013 2
27	5,196 2	0,037 0	77	8,775 0	0,013 0
28	5,291 5	0,035 7	78	8,831 6	0,012 8
29	5,385 2	0,034 5	79	8,888 2	0,012 7
30	5,477 3	0,033 3	80	8,944 3	0,012 5
31	5,567 8	0,032 3	81	9	0,012 3
32	5,656 9	0,031 3	82	9,055 4	0,012 2
33	5,744 6	0,030 3	83	9,110 4	0,012 0
34	5,831 0	0,029 4	84	9,165 2	0,011 9
35	5,916 1	0,028 6	85	9,219 5	0,011 8
36	6	0,027 8	86	9,273 6	0,011 6
37	6,082 8	0,027 0	87	9,327 4	0,011 5
38	6,164 4	0,026 3	88	9,380 8	0,011 4
39	6,245 0	0,025 6	89	9,434 0	0,011 2
40	6,324 6	0,025	90	9,486 8	0,011 1
41	6,403 1	0,024 4	91	9,539 4	0,011 0
42	6,480 7	0,023 8	92	9,591 7	0,010 9
43	6,557 4	0,023 3	93	9,643 7	0,010 8
44	6,633 2	0,022 7	94	9,695 4	0,010 6
45	6,708 2	0,022 2	95	9,746 8	0,010 5
46	6,782 8	0,021 7	96	9,798 0	0,010 4
47	6,855 7	0,021 3	97	9,848 9	0,010 3
48	6,928 2	0,020 8	98	9,899 5	0,010 2
49	7	0,020 4	99	9,949 9	0,010 1
50	7,071 1	0,02	100	10	0,01

III. Tabelă trigonometrică din grad în grad (grade sexagesimale)

Grade	Sinus	Tangentă	Grade	Sinus	Tangentă
1	0,017 5	0,017 5	46	0,719 3	1,035 5
2	0,034 9	0,034 9	47	0,731 4	1,072 4
3	0,052 3	0,052 4	48	0,743 1	1,110 6
4	0,069 8	0,069 9	49	0,754 7	1,150 4
5	0,087 2	0,087 5	50	0,766 0	1,191 8
6	0,104 5	0,105 1	51	0,777 1	1,234 9
7	0,121 9	0,122 8	52	0,788 0	1,279 9
8	0,139 2	0,140 5	53	0,798 6	1,327 0
9	0,156 4	0,158 4	54	0,809 0	1,376 4
10	0,173 6	0,176 3	55	0,819 2	1,428 1
11	0,190 8	0,194 4	56	0,829 0	1,482 6
12	0,207 9	0,212 6	57	0,838 7	1,539 9
13	0,255 0	0,230 9	58	0,848 0	1,600 3
14	0,241 9	0,249 3	59	0,857 2	1,644 3
15	0,258 8	0,267 9	60	0,866 0	1,732 1
16	0,275 6	0,286 7	61	0,874 6	1,804 0
17	0,292 4	0,305 7	62	0,882 9	1,880 7
18	0,309 0	0,324 9	63	0,891 0	1,926 6
19	0,325 6	0,344 3	64	0,898 8	2,050 3
20	0,342 0	0,364 0	65	0,906 3	2,144 5
21	0,358 4	0,383 9	66	0,913 5	2,246 0
22	0,374 6	0,404 0	67	0,920 5	2,355 9
23	0,390 7	0,424 5	68	0,927 2	2,475 1
24	0,406 7	0,445 2	69	0,933,6	2,605 1
25	0,422 6	0,466 3	70	0,939 7	2,747 5
26	0,438 4	0,487 7	71	0,945 5	2,904 2
27	0,454 0	0,509 5	72	0,951 1	3,077 7
28	0,469 5	0,531 7	73	0,956 3	3,270 9
29	0,484 8	0,554 3	74	0,961 3	3,487 4
30	0,500 0	0,577 4	75	0,965 9	3,732 1
31	0,515 0	0,600 9	76	0,970 3	4,010 8
32	0,529 9	0,624 9	77	0,974 4	4,331 5
33	0,544 6	0,649 4	78	0,978 1	4,704 6
34	0,559 2	0,674 5	79	0,981 6	5,144 6
35	0,573 6	0,700 2	80	0,984 8	5,671 3
36	0,587 8	0,726 5	81	0,987 7	6,313 8
37	0,601 8	0,753 6	82	0,990 3	7,115 4
38	0,615 7	0,781 3	83	0,992 5	8,144 3
39	0,629 3	0,809 8	84	0,994 5	9,514 4
40	0,642 8	0,839 1	85	0,996 2	11,430 1
41	0,656 1	0,869 3	86	0,997 6	14,300 7
42	0,669 1	0,900 4	87	0,998 6	19,081 1
43	0,682 0	0,932 5	88	0,999 4	28,636 3
44	0,694 7	0,965 7	89	0,999 8	57,290 0
45	0,707 1	1,000 0	90	1	

**IV. Tabelă trigonometrică din grad în grad
(grade centesimale)**

Grade	Sinus	Tangentă	Grade	Sinus	Tangentă
1	0,015 7	0,015 7	51	0,718 1	1,031 9
2	0,031 4	0,031 4	52	0,729 0	1,064 9
3	0,047 1	0,047 2	53	0,739 6	1,099 0
4	0,062 8	0,062 9	54	0,750 1	1,134 3
5	0,078 5	0,078 7	55	0,760 4	1,170 8
6	0,094 1	0,094 5	56	0,770 5	1,208 8
7	0,109 7	0,110 4	57	0,780 4	1,248 2
8	0,125 3	0,126 3	58	0,790 2	1,289 2
9	0,140 9	0,142 3	59	0,799 7	1,331 9
10	0,156 4	0,158 4	60	0,809 0	1,376 4
11	0,171 9	0,174 5	61	0,818 1	1,422 9
12	0,187 4	0,190 8	62	0,827 1	1,471 5
13	0,202 8	0,207 1	63	0,835 8	1,522 4
14	0,218 1	0,223 5	64	0,844 3	1,575 7
15	0,233 4	0,240 1	65	0,852 6	1,631 9
16	0,248 7	0,256 8	66	0,860 7	1,690 9
17	0,263 9	0,273 6	67	0,868 6	1,753 2
18	0,279 0	0,290 5	68	0,876 3	1,819 0
19	0,294 0	0,307 6	69	0,883 8	1,888 7
20	0,309 0	0,324 9	70	0,891 0	1,962 6
21	0,323 9	0,342 4	71	0,898 0	2,041 3
22	0,338 7	0,360 0	72	0,904 8	2,125 1
23	0,353 5	0,377 9	73	0,911 4	2,214 8
24	0,368 1	0,395 9	74	0,917 8	2,310 9
25	0,382 7	0,414 2	75	0,923 9	2,414 2
26	0,397 1	0,432 7	76	0,929 8	2,525 7
27	0,411 5	0,451 5	77	0,935 4	2,646 4
28	0,425 8	0,470 6	78	0,940 9	2,777 6
29	0,439 9	0,489 9	79	0,946 1	2,920 8
30	0,454 0	0,509 5	80	0,951 1	3,077 7
31	0,467 9	0,529 5	81	0,955 8	3,250 6
32	0,481 8	0,549 8	82	0,960 3	3,442 0
33	0,495 5	0,570 4	83	0,964 6	3,655 4
34	0,509 0	0,591 4	84	0,968 6	3,894 7
35	0,522 5	0,612 8	85	0,972 4	4,165 3
36	0,535 8	0,634 6	86	0,975 9	4,473 7
37	0,549 0	0,656 9	87	0,979 2	4,828 8
38	0,562 1	0,679 6	88	0,982 3	5,242 2
39	0,575 0	0,702 8	89	0,985 1	5,729 7
40	0,587 8	0,726 5	90	0,987 7	6,313 8
41	0,600 4	0,750 8	91	0,990 0	7,026 4
42	0,612 9	0,775 7	92	0,992 1	7,915 8
43	0,625 2	0,801 2	93	0,994 0	9,057 9
44	0,637 4	0,827 3	94	0,995 6	10,578 9
45	0,649 4	0,854 1	95	0,996 9	12,706 2
46	0,661 3	0,881 6	96	0,998 0	15,894 5
47	0,673 0	0,909 9	97	0,998 9	21,204 9
48	0,684 5	0,939 1	98	0,999 5	31,820 5
49	0,695 9	0,969 1	99	0,999 9	61,656 7
50	0,707 1	1,000 0	100	1,000	

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	17 609	638	667	696	725	754	782	811	840	869
1	898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156
2	18 184	213	241	270	298	327	355	384	412	441
3	469	498	526	554	583	611	639	667	696	724
4	752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005
5	19 033	061	089	117	145	173	201	229	257	285
6	312	340	368	396	424	451	479	507	535	562
7	590	618	645	673	700	728	756	783	811	838
8	866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112
9	20 140	167	194	222	249	276	303	330	358	385
160	412	439	466	493	520	540	575	602	629	656
1	683	710	737	763	790	817	844	871	898	925
2	952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192
3	21 219	245	272	299	325	352	378	405	431	458
4	484	511	537	564	590	617	643	669	696	722
5	748	775	801	827	854	880	906	932	958	985
6	22 011	037	063	089	115	141	167	194	220	246
7	272	298	324	350	376	401	427	453	479	505
8	531	557	583	608	634	660	686	712	737	763
9	789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019
170	23 045	070	096	121	147	172	198	223	249	274
1	300	325	350	376	401	426	452	477	502	528
2	553	578	603	628	654	679	704	729	754	779
3	805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030
4	24 055	080	105	130	155	180	204	229	254	279
5	304	329	353	378	403	428	452	477	502	527
6	551	576	601	625	650	674	699	724	748	773
7	797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018
8	25 042	066	091	115	139	164	188	212	237	261
9	285	310	334	358	382	406	431	455	479	503
180	527	551	575	600	624	648	672	696	720	744
1	768	792	816	840	864	888	912	935	959	983
2	26 007	031	055	079	102	126	150	174	198	221
3	245	269	293	316	340	364	387	411	435	458
4	482	505	529	553	576	600	623	647	670	694
5	717	741	764	788	811	834	858	881	905	928
6	951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161
7	27 184	207	231	254	277	300	323	346	370	393
8	416	439	462	485	508	531	554	577	600	623
9	646	669	692	715	738	761	784	807	830	852
190	875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081
1	28 103	126	149	171	194	217	240	262	285	307
2	330	353	375	398	421	443	466	488	511	533
3	556	578	601	623	646	668	691	713	735	758
4	780	803	825	847	870	892	914	937	959	981
5	29 003	026	048	070	092	115	137	159	181	203
6	226	248	270	292	314	336	358	380	403	425
7	447	469	491	513	535	557	579	601	623	645
8	667	688	710	732	754	776	798	820	842	863
9	885	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

VI. Reproducere (de la pagina 7) a tabelii de logaritmi cu cinci zecimale de Bouvard și Ratinet (Editura Hachette)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
250	39 794	811	829	846	863	881	898	915	933	950
1	967	985	*002	*019	*037	*054	*071	*088	*106	*123
2	40 140	157	175	192	209	226	243	261	278	295
3	812	329	346	364	381	398	415	432	449	466
4	483	500	518	535	552	569	586	603	620	637
5	654	671	688	705	722	739	756	773	790	807
6	824	841	858	875	892	909	926	943	960	976
7	993	*010	*027	*044	*061	*078	*095	*111	*128	*145
8	41 162	179	196	212	229	246	263	280	296	313
9	330	347	363	380	397	414	430	447	464	481
260	497	514	531	547	564	581	597	614	631	647
1	664	681	697	714	731	747	764	780	797	814
2	830	847	863	880	896	913	929	946	963	979
3	996	*012	*029	*045	*062	*078	*095	*111	*127	*144
4	42 160	177	193	210	226	243	259	275	292	308
5	325	341	357	374	390	406	423	439	455	472
6	488	504	521	537	553	570	586	602	619	635
7	651	667	684	700	716	732	749	765	781	797
8	813	830	846	862	878	894	911	927	943	959
9	975	991	*008	*024	*040	*056	*072	*088	*104	*120
270	43 136	152	169	185	201	217	233	249	265	281
1	297	313	329	345	361	377	393	409	425	441
2	457	473	489	505	521	537	553	569	584	600
3	616	632	648	664	680	696	712	727	743	759
4	775	791	807	823	838	854	870	886	902	917
5	933	949	965	981	996	*012	*028	*044	*059	*075
6	44 091	107	122	138	154	170	185	201	217	232
7	248	264	279	295	311	326	342	358	373	389
8	404	420	436	451	467	483	498	514	529	545
9	560	576	592	607	623	638	654	669	685	700
280	716	731	747	762	778	793	809	824	840	855
1	871	886	902	917	932	948	963	979	994	*010
2	45 025	040	056	071	086	102	117	133	148	163
3	179	194	209	225	240	255	271	286	301	317
4	332	347	362	378	393	408	423	439	454	469
5	484	500	515	530	545	561	576	591	606	621
6	637	652	667	682	697	712	728	743	758	773
7	788	803	818	834	849	864	879	894	909	924
8	939	954	969	984	*000	*015	*030	*045	*060	*075
9	46 090	105	120	135	150	165	180	195	210	225
290	240	255	270	285	300	315	330	345	359	374
1	389	404	419	434	449	464	479	494	509	523
2	538	553	568	583	598	613	627	642	657	672
3	687	702	716	731	746	761	776	790	805	820
4	835	850	864	879	894	909	923	938	953	967
5	982	997	*012	*026	*041	*056	*070	*085	*100	*114
6	47 129	144	159	173	188	202	217	232	246	261
7	276	290	305	319	334	349	363	378	392	407
8	422	436	451	465	480	494	509	524	538	553
9	567	582	596	611	625	640	654	669	683	698
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

1	18
2	1.8
3	3.6
4	5.4
5	7.2
6	9.0
7	10.8
8	12.6
9	14.4
	16.2
	17
1	1.7
2	3.4
3	5.1
4	6.8
5	8.5
6	10.2
7	11.9
8	13.6
9	15.3
	16
1	1.6
2	3.2
3	4.8
4	6.4
5	8.0
6	9.6
7	11.2
8	12.8
9	14.4
	15
1	1.5
2	3.0
3	4.5
4	6.0
5	7.5
6	9.0
7	10.5
8	12.0
9	13.5
	14
1	1.4
2	2.8
3	4.2
4	5.6
5	7.0
6	8.4
7	9.8
8	11.2
9	12.6

Tabla de materii

Prefață

8 Ecuatii și inecuații de gradul I	1 Ecuatii de gradul I cu o necunoscută.	5
	2 Aplicație la rezolvarea altor ecuații.	9
	3 Inecuații de gradul I.	24
	4 Aplicație la rezolvarea altor inecuații.	28

9 Ecuatii de gradul II cu o necunoscută	1 Transformările polinomului de gradul II.	35
	2 Ecuatii de gradul II.	42
	3 Relații între coeficienți și rădăcini.	53
	4 Aplicație la rezolvarea altor ecuații.	68

10	1 Sisteme de ecuații.	77
Sisteme de ecuații	2 Sisteme cu două necunoscute.	80
Sisteme de gradul I	3 Calcule particulare.	97
	4 Alte sisteme de gradul I.	101

11	1 Funcții liniare.	114
Funcții liniare	2 Funcții afine.	125
Funcții afine	3 Funcții afine pe intervale.	133
	4 Aplicație la ecuațiile și inecuațiile de gradul I.	140

12	1 Funcția f definită prin	
Funcția definită prin	$f(x) = x^2.$	146
$f(x) = ax^2 + bx + c$	2 Funcția g definită prin	
	$g(x) = ax^2.$	151
	3 Funcția h definită prin	
	$h(x) = ax^2 + c.$	156
	4 Funcția definită prin	
	$f(x) = ax^3 + bx + c.$	160
	5 Aplicație la ecuațiile și inecuațiile de gradul II.	169

13	1 Funcția $g_1.$	178
Funcția definită prin	2 Studiul funcțiilor $g_a.$	188
$g_a(x) = \frac{a}{x}$	3 Aplicații.	192

14	1 Aproximație.	197
Calcul numeric	2 Progresii aritmetice.	221
	3 Progresii geometrice.	228
	4 Logaritmi zecimali.	233
	5 Calcule logaritmice.	239
	6 Serii Renard. Numere nor-	
	male.	249
	7 Rigla de calcul.	255

Nr. colilor de tipar : 17,5
Tiraj : 36 420 ex.



Combinatul Poligrafic

„CASA SCÎNTEII“

București — R.S.R.

Com. nr. 20 244/6756 b