MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI
UNIVERSITATEA BUCUREȘTI

ION D. TEODORESCU

GEOMETRIE ANALITICĂ
ȘI ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI — 1965

PREFAŢĂ

Geometria analitică, folosind metoda coordonatelor, studiază obiectele (figurile) geometrice cu mijloacele algebrei. Pentru realizarea acestui studiu, se ataşează punctelor sau elementelor care compun obiectele geometrice unul sau mai multe numere, zise coordonate, astfel că proprietăţile obiectelor sînt exprimate prin legături algebrice sau analitice între aceste coordonate.

Geometria analitică a apărut în prima jumătate a secolului al XVII-lea, întemeietorii ei fiind marele matematician francez Pierre Fermat (1601—1665) şi renumitul filozof francez René Descartes (1596—1660). Studiul figurilor geometrice din spaţiul euclidian cu ajutorul calculului algebric (geometria analitică în spaţiu) a fost elaborat abia în prima jumătate a secolului al XVIII-lea, de către matematicienii francezi P. La Hire (1640—1718) şi A. Clairaut (1713—1765).

În această carte se consideră unele probleme ale geometriei euclidiene; se studiază în special curbele algebrice de gradul I şi II din planul euclidian şi curbele şi suprafeţele algebrice de gradul I şi II din spaţiul euclidian. Geometria euclidiană este acea ramură a geometriei care se bazează pe noţiunile de distanţă, măsurată prin teorema lui Pitagora), şi unghi; în această geometrie se realizează axioma paralelelor a lui Euclid**) (într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte date se duce o dreaptă şi numai una singură).*

*Geometriile în care axioma paralelelor nu este verificată, se numesc geometrii neeuclidiene (geometria lui Lobacevski-Bolyai***), geometria lui Riemann****).) Geometriile neeuclidiene nu fac obiectul acestei cărţi.*

Problematica cursului este clasică şi constituie o parte fundamentală din cunoştinţele ce se predau în învăţămîntul superior.

Cursul este împărţit în patru părţi: În prima parte (geometria pe dreaptă) sînt tratate chestiuni privind sisteme de coordonată pe dreaptă (coordonata abscisă, coordonata baricentrică, coordonata proiectivă, coordonate omogene).

*) Pitagora din Samos, filozof şi matematician al Greciei antice, a trăit între anii aprox. 570—500 î.e.n.

**) Euclid, mare matematician din perioada elenistică, întemeietorul şcolii din Alexandria, a trăit în sec. al III-lea î.e.n.

***) Nikolai Ivanovici Lobacevski, mare matematician rus, profesor la Universitatea din Kazan, a trăit între anii 1792—1856.
— Ianoş Bolyai a trăit la Tg. Mureş şi Timişoara, între anii 1802—1860.

****) B. Riemann, mare matematician german, a trăit între anii 1826-1866.

Partea a doua (elemente de algebră liniară) cuprinde teoria determinanților și unele probleme legate de matrici; apoi se studiază sistemele de ecuații (algebrice) liniare.

În partea a treia (geometria în plan) se introduc sisteme de coordonate în plan, se determină diferite forme ale ecuației dreptei, se tratează unele elemente de teoria curbelor și locuri geometrice plane (cercul, conice pe ecuații canonice) și se face un studiu sistematic al conicelor (teoria generală a conicelor).

În partea a patra (geometria în spațiu) se introduc sisteme de coordonate în spațiu, se tratează calculul vectorial (algebra vectorială), se determină diferite forme ale ecuațiilor dreptei sau ale ecuației planului, se expun unele probleme privind generarea suprafețelor, se face un studiu sistematic al cuadricelor (atît pe ecuațiile canonice cît și teoria generală a cuadricelor).

Tratarea problemelor se poate face din mai multe puncte de vedere. De exemplu, rezultatele pot fi expuse pe linia programului de la Erlangen (F. Klein), 1872), care concepe geometria ca studiu al invarianților unui grup de transformări. Pe o astfel de expunere a geometriei analitice se bazează cartea acad. prof. G. Vrănceanu,* Geometrie analitică, proiectivă și diferențială [25]. *De aceea, recomandăm această carte acelora care doresc să aprofundeze unele probleme ale geometriei analitice, să cunoască unele rezultate din geometria proiectivă.*

Desigur, într-o carte de geometrie analitică se poate prezenta un material bogat și variat, însă — pentru a rămîne în limitele programei analitice a cursului de „Geometrie analitică și elemente de algebră liniară", curs ce se predă studenților anului I de la Facultățile de matematică și mecanică ale Universităților — a trebuit să renunțăm la tratarea unor probleme care depășeau cadrul cursului.

Figurile au fost întocmite și executate de arh. Șt. Teodorescu de la Inst. de arhitectură „Ion Mincu" din București.

*) Felix Klein, matematician german, a trăit între anii 1849—1925.

PARTEA ÎNTÎI

GEOMETRIA PE DREAPTĂ

CAPITOLUL I

SISTEME DE COORDONATĂ PE DREAPTĂ

§ 1. COORDONATA ABSCISĂ

Noţiunea de coordonată. Fie u o dreaptă şi R mulţimea numerelor reale*.

Se numeşte *coordonată* pe dreapta u un număr real $x \in R$ asociat unui punct $P \in u$ astfel încît între x şi P să existe o corespondenţă biunivocă, ordonată şi continuă. Vom scrie, pe scurt,

$$P(x)$$

şi vom citi: punctul P de coordonată x.

Coordonata x a unui punct P al dreptei u este deci numărul care caracterizează poziţia lui $P \in u$ faţă de un sistem de referinţă dat. Prin sistem de referinţă înţelegem o figură geometrică, constituită dintr-un număr de puncte ale dreptei.

Reprezentarea punctelor de pe o dreaptă prin numere reale. Să alegem pe dreapta u un punct O şi un alt punct E (fig. 1). Vom numi punctul O *originea*, iar punctul E *punctul-unitate* al dreptei u. Sensul de la O spre E îl vom numi sens *pozitiv* de parcurs al dreptei, pe cînd sensul contrar va fi numit sens *negativ* de parcurs. În acest caz vom spune că dreapta u este o *axă***.

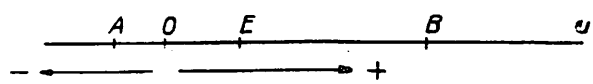


Fig. 1

Fie două puncte A şi B pe dreapta u (fig. 1). Sistemul de puncte (A, B) se numeşte *segment* şi se notează AB sau BA. Punctele situate între A şi B

---

* Presupunem cunoscute proprietăţile şi operaţiile cu numere reale (a se vedea [17]).

** Vom presupune totdeauna, fără a mai specifica de fiecare dată, că dreapta u este o axă. După unii autori, prin axă se înţelege o dreaptă pe care s-a ales un sens pozitiv de parcurs, fără a considera o origine şi un punct-unitate (deci, o unitate de măsură pe dreaptă); după alţii se înţelege o dreaptă pe care s-a ales o origine şi un sens pozitiv de parcurs, fără a considera şi un punct-unitate (v. de exemplu [14]).

sînt *puncte interioare* ale segmentului AB, iar punctele A și B, extremitățile lui, celelalte puncte ale dreptei u fiind *puncte exterioare* segmentului.

Aplicînd succesiv segmentul OE de un număr oarecare de ori pe dreapta u, începînd din origine, de o parte sau de alta a lui O, vom obține punctele (fig. 2):

$$\ldots, A_{-n}, \ldots, A_{-2}, A_{-1}, O = A_0, E = A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

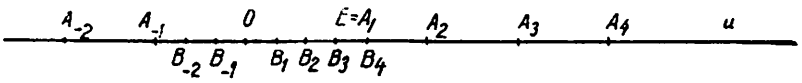


Fig. 2

Convenim ca punctului A_k să-i corespundă numărul întreg k. În acest fel avem o corespondență între punctele A astfel considerate și numerele întregi. Această corespondență este biunivocă. În adevăr, fie n un număr întreg. Vom purta segmentul OE de $|n|$ ori pe dreapta u, începînd din originea O, în sensul negativ de parcurs, dacă $n < 0$, în sensul pozitiv de parcurs, dacă $n > 0$. Punctul unic A astfel obținut este punctul care corespunde numărului întreg n.

Să împărțim acum segmentul OE în q părți egale*. Fie $OB_1 = \frac{1}{q}\, OE$. Aplicînd segmentul OB_1 de o parte și de alta a lui O, vom obține punctele (fig.2)

$$\ldots, B_{-p}, \ldots, B_{-2}, B_{-1}, O, B_1, B_2, \ldots, B_p, \ldots$$

cărora facem să le corespundă numerele raționale:

$$\ldots, -\frac{p}{q}, \ldots, -\frac{2}{q}, -\frac{1}{q}, 0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{p}{q}, \ldots$$

În acest fel avem o corespondență între punctele B astfel considerate și numerele raționale, corespondența fiind biunivocă.

Așadar, *oricărui număr rațional îi corespunde un punct și unul singur pe dreaptă.*

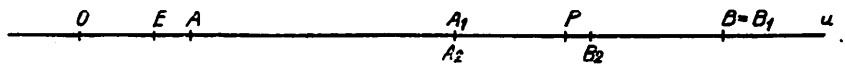


Fig. 3

Fie, acum, pe dreapta u un punct P oarecare și un punct A corespunzînd unui număr rațional a**, $A(a)$ (fig. 3). Posibilitatea de a acoperi segmentul AP cu segmentul OE, purtat de un număr finit de ori pe dreaptă, începînd de la una din extremitățile segmentului AP, este asigurată de

Axioma lui Arhimede. Fie AB și CD două segmente oarecare (fig. 4). **Atunci, pe dreapta AB există un număr finit de puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n$,**

* Din geometria elementară știm că acest lucru se poate face întrebuințînd numai rigla și compasul.

** De exemplu, putem lua drept punct A originea O sau punctul-unitate E al dreptei.

astfel încît punctul A_1 să se găsească între A şi A_2, punctul A_2 să se găsească între A_1 şi A_3 etc., iar segmentele AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ să fie congruente (egale) cu segmentul CD, iar B să se găsească între A_{n-1} şi A_n.

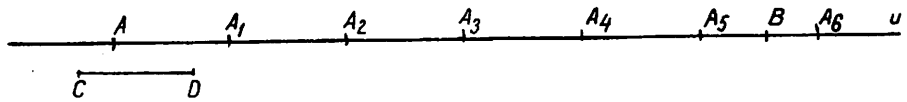


Fig. 4

Deci, aşternînd o singură dată segmentul OE pe dreapta u, începînd din punctul A, de exemplu, este posibil ca punctul P să cadă în interiorul segmentului $AA' = OE$ sau să coincidă cu A'. Se mai poate însă ca punctul P să cadă în afara segmentului AA'. Atunci, axioma lui Arhimede afirmă că, oricît de mare ar fi segmentul AP şi oricît de mic ar fi segmentul OE, vom putea acoperi tot segmentul AP, dacă aplicăm segmentul OE de un anumit număr de ori pe dreapta u, pînă într-un punct B al dreptei u, astfel încît punctul P să cadă în interiorul segmentului AB. Dacă b este numărul raţional care are drept corespondent pe dreaptă punctul B şi deoarece putem presupune $a < b$, atunci vom construi punctul corespunzător numărului raţional $\frac{a+b}{2}$. Vom nota cu A_1B_1 pe acela dintre segmentele parţiale în care a fost împărţit segmentul AB, care conţine punctul P.

Fie a_1, b_1 numerele raţionale corespunzătoare respectiv punctelor A_1, B_1. Punctul corespunzător numărului raţional $\frac{a_1+b_1}{2}$ va împărţi segmentul A_1B_1 în două segmente; vom nota cu A_2B_2 pe acela care conţine punctul P. Fie a_2, b_2 numerele raţionale corespunzînd, respectiv, punctelor A_2, B_2. Procedeul poate fi continuat. N-ar putea exista ambiguitate decît în cazul în care P ar coincide cu unul din punctele de diviziune, obţinute prin repetarea construcţiei indicate. Dar atunci unul din punctele şirurilor

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots;\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n,\ \ldots$$

coincide cu P, şi deci punctului P îi corespunde un număr raţional. Dacă nu, atunci ne vom folosi de

Axioma lui Cantor-Dedekind. Fie dat pe o dreaptă oarecare u un şir infinit de segmente $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n, \ldots$, fiecare segment fiind cuprins în

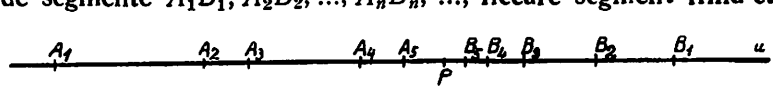


Fig. 5

interiorul segmentului precedent (fig. 5); presupunem, mai departe, că nu există nici un segment care să se găsească în interiorul tuturor segmentelor acestui şir. Atunci, pe dreapta u există un punct P, şi numai unul singur, care este comun tuturor segmentelor $A_1B_1, \ldots, A_2B_2, \ldots, A_nB_n, \ldots$

În virtutea acestei axiome, numită și axioma continuității, există pe dreapta u un singur punct P, care separă punctele raționale A_1, A_2, ..., A_n,... de punctele raționale B_1, B_2, ..., B_n, ... din construcția indicată. Fie

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots ; \; b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots \qquad (1)$$

șirurile de numere raționale, unul monoton crescător, celălalt monoton descrescător, care corespund punctelor $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, respectiv B_1, $B_2, \ldots$, B_n, ... Segmentele $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n, \ldots$ fiind astfel încît fiecare este interior segmentului precedent, înseamnă că

$$a_n \leqslant b_n$$

și

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Cele două șiruri (1) se bucură astfel de proprietățile cerute de

Teorema 1. Fie, respectiv,

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots,$$

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$$

două șiruri de numere reale, astfel încît:

1) **primul șir este monoton crescător, al doilea șir este monoton descrescător;**
2) **orice număr din primul șir este mai mic decît orice număr din al doilea șir;**
3) **diferența $\beta_n - \alpha_n$ tinde către zero cînd n crește nemărginit.**

În aceste condiții, cele două șiruri tind către o aceeași limită.

Prin urmare, cele două șiruri numerice (1) tind către un același număr real (rațional sau irațional). Acesta este numărul pe care îl vom face să corespundă punctului P. Astfel, axioma lui Cantor-Dedekind afirmă:

Oricărui punct de pe dreaptă îi corespunde un număr real.

Proprietatea reciprocă este adevărată. În adevăr, se cunoaște:

Teorema 2. Un număr real α fiind dat, se pot construi două șiruri de numere raționale, care să se bucure de proprietățile 1), 2), 3) din teorema 1 și a căror limită comună să fie α.

Fie două șiruri de numere raționale (1), care se bucură de proprietățile din teorema 1. Fie, de asemenea,

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots ; \text{ respectiv } B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$$

șirurile de puncte pe o dreaptă u, care corespund termenilor celor două șiruri de numere (1). Atunci, deoarece segmentele A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, ... satisfac condițiile axiomei lui Cantor-Dedekind, există pe dreapta dată un punct P, și unul singur, comun tuturor segmentelor $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n, \ldots$ Facem ca acest punct P să corespundă numărului real α.

În cazul cînd numărul α este raţional, existenţa punctului P a rezultat din însăşi construcţia indicată mai înainte. Deci, reciproca axiomei lui Cantor-Dedekind afirmă că:

Oricărui număr real, raţional sau iraţional, îi corespunde un punct şi unul singur pe dreaptă.

Aşadar, am arătat că putem face să corespundă, într-un mod unic, oricărui punct de pe o dreaptă u, un număr real şi reciproc. Prin urmare, corespondenţa stabilită între punctele dreptei u şi numerele reale (raţionale şi iraţionale) are proprietatea de a fi *biunivocă*.

Pe de altă parte, fiind date pe dreapta u două puncte P', P'', punctul P' fiind situat la stînga lui P'', acestor puncte le corespund numerele reale α', α'', unde $\alpha' < \alpha''$. Deci, corespondenţa are şi proprietatea de a fi *ordonată*.

Spunem că un şir infinit de puncte P_1, P_2, ..., P_n, ... are ca limită punctul P, dacă în şirul infinit de segmente P_1P, P_2P, ..., P_nP, ... fiecare segment următor este cuprins în interiorul segmentului precedent (respectiv în segmentul congruent cu acesta, însă de cealaltă parte a punctului P) şi dacă nu există nici un segment care să se găsească în interiorul segmentelor acestui şir. Cu alte cuvinte, punctele şirului considerat se apropie oricît de punctul fix P.

Fie un şir infinit de puncte P_1, P_2, ..., P_n, ..., care are ca limită punctul P. Acestor puncte le corespund numerele reale α_1, α_2, ..., α_n, ... respectiv α. Este uşor de observat că

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$$

şi reciproc.

Intuitiv, aceasta înseamnă că fiind date două puncte P', P'' apropiate, acestora le corespund două numere reale α', α'' apropiate şi reciproc. Deci, corespondenţa are şi proprietatea de a fi *continuă*.

Numărul real x, care corespunde — în modul indicat mai sus — unui punct P al dreptei u, se numeşte *abscisa* punctului P.

Să considerăm că dreapta u se găseşte în planul π şi fie $P \in \pi$ un punct exterior dreptei u (fig. 6). Prin P ducem diferite drepte PA_1, PA_2,..., PA_n,..., respectiv PB_1, PB_2, ..., PB_n, ..., care fac unghiurile α_1, α_2, ..., α_n,..., respectiv β_1, β_2,..., β_n, ..., cu perpendiculara PO din P pe u, la dreapta, respectiv la stînga lui PO.

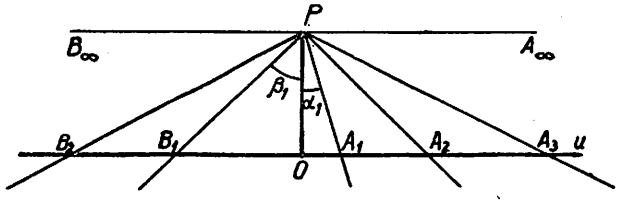


Fig. 6

Dacă $\alpha_n \to \frac{\pi}{2}$, punctul A_n se depărtează de O spre dreapta, iar cînd $\alpha = \frac{\pi}{2}$, avem punctul A_∞, dreapta PA_∞ fiind paralelă cu u. Dacă $\beta_n \to \frac{\pi}{2}$, punctul B_n se depărtează de O spre stînga, astfel încît pentru $\beta = \frac{\pi}{2}$ obţinem punctul B_∞,

iar dreapta PB_∞ este paralelă cu u, fiind în prelungirea lui PA_∞. Observăm că la cea mai mică creştere a unghiului α (respectiv β) peste $\frac{\pi}{2}$, punctul de intersecţie al dreptei corespunzătoare unghiului cu u apare la stînga (respectiv la dreapta) lui O. Deci, punctele A_∞, B_∞ coincid dacă vrem să avem o corespondenţă biunivocă între dreptele duse prin P şi punctele dreptei u. Vom considera astfel că pe dreapta u există un singur punct la infinit, fie că ne apropiem de el prin punctele la stînga lui O (deci, pentru valori din ce în ce mai mari în valoare absolută, însă negative, ale abscisei x), fie că ne apropiem prin punctele la dreapta lui O (deci, pentru valori din ce în ce mai mari, pozitive, ale abscisei x). Obţinem, aşadar, acelaşi punct limită, *punctul la infinit al dreptei u*, numit şi *punctul impropriu al dreptei u**.

Punctului impropriu al dreptei u facem să-i corespundă abscisa $x = \infty$, şi reciproc.

Spunem că am completat *dreapta euclidiană* (formată din totalitatea punctelor de abscisă finită) cu un punct, punctul impropriu al dreptei; dreapta astfel completată se numeşte *dreapta proiectivă*.

Corespondenţa între punctele dreptei u şi abscisele lor x posedă proprietăţile de biunivocitate, ordonare şi continuitate, care caracterizează noţiunea de coordonată. Deci, *abscisa x constituie o coordonată a punctelor de pe dreaptă.*

Prin extensiune, dacă abscisa x ia o valoare complexă $\alpha + i\beta$, *vom conveni* ca unei astfel de valori să-i corespundă pe dreapta u un *punct imaginar*, acest punct neputînd fi reprezentat geometric pe dreaptă. Două puncte imaginare se zic *imaginar conjugate*, dacă corespund la două abscise complex conjugate.

Lungimea unui segment. Conceptul de lungime îl putem defini prin următoarea

D e f i n i ţ i e . Admitem că fiecărui segment de dreaptă i se poate asocia un număr nenegativ bine determinat, astfel încît:

1) **segmentelor egale să le corespundă numere egale;**

2) **dacă B este un punct al segmentului AC, iar segmentelor AB şi BC le corespund numerele α şi β, atunci segmentului AC îi corespunde numărul $\alpha + \beta$;**

3) **unui anumit segment OE îi corespunde numărul 1.**

Numărul asociat fiecărui segment va fi numit *lungimea* segmentului, lungimea segmentului OE fiind *unitatea liniară de măsură* sau *unitatea de măsură* (sau încă *etalon*) pentru segmentele dreptei.

---

* În geometria neeuclidiană a lui Lobacevski-Bolyai, punctele A_∞ şi B_∞ sînt distincte, astfel încît PA_∞ şi PB_∞ fac un unghi ε diferit de zero $\left(\varepsilon < \frac{\pi}{2}\right.$; în acest caz, dreptele OA_∞ şi OB_∞ nu sînt perpendiculare pe $\left.PO\right)$. Orice dreaptă trecînd prin P şi cuprinsă în unghiul ε este o *nonsecantă* (nu intersectează dreapta u), dreptele PA_∞ şi PB_∞ fiind paralele.

Pe de altă parte, în analiza matematică, dreapta se completează cu două puncte la infinit, notate $-\infty$ şi $+\infty$. În acest caz, avem o corespondenţă biunivocă între punctele dreptei u şi semidreptele cu originea în P, îndreptate spre u.

Fie două puncte $A(a)$, $B(b)$ pe o dreaptă u (unde a și b sînt abscisele lui A și B). *Lungimea AB a segmentului determinat de punctele A și B este dată de formula*:

$$AB = |b-a|. \tag{2}$$

În adevăr, lungimea AB este un număr pozitiv, deoarece din definiția *valorii absolute* a unui număr real oarecare α rezultă că $|\alpha| \geqslant 0$, oricare ar fi numărul α și că $|\alpha| = 0$, dacă și numai dacă $\alpha = 0$.

Dacă B este un punct al segmentului AC, iar segmentelor AB și BC le corespund numerele (lungimile)

$$AB = |b-a|, \quad BC = |c-b|,$$

atunci segmentului AC îi corespunde numărul (lungimea)

$$AC = |b-a| + |c-b| = |(b-a) + (c-b)| = |c-a|.$$

Aceasta rezultă, pe de o parte, din faptul că punctul B fiind un punct interior al segmentului AC, diferențele $b-a$ și $c-b$ au același semn și, pe de altă parte, din următoarea

Teoremă. Oricare ar fi numerele reale α și β, avem

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|,$$

egalitatea avînd loc numai dacă $\alpha \cdot \beta \geqslant 0$.

Condiția 3) este satisfăcută pentru segmentul OE, punctele O și E corespunzînd absciselor 0 și 1; în acest caz avem

$$OE = |1-0| = 1.$$

Deci, fiind date două puncte $A(a)$ și $B(b)$ pe o dreaptă u, lungimea segmentului AB este dată de diferența $b-a$, dacă A este la stînga lui B. În adevăr, $AB = |b-a| = b-a$, deoarece $a < b$. Dacă A este la dreapta lui B, atunci această lungime este dată de diferența $a-b$. În adevăr, $AB = |b-a| = -(b-a) = a-b$, deoarece $a > b$. Pentru a avea în ambele cazuri aceeași formulă, *vom conveni a considera lungimea segmentului determinat de punctele A și B ca o mărime relativă, avînd întotdeauna valoarea*

$$AB = b-a, \tag{3}$$

fie că acest număr este pozitiv sau negativ. În acest caz, segmentul determinat de punctele A și B este un *segment orientat*, avînd ca origine A și ca vîrf B, sensul fiind acela determinat de un punct care parcurge acest segment de la A la B. Vom nota acest segment orientat prin $\overline{AB}$, iar lungimea lui prin AB sau $|\overline{AB}|$. Deci *un segment orientat $\overline{AB}$ de pe o dreaptă u se caracterizează prin sens*, de la A la B, *și prin lungime*, dată de formula (3)*.

Dacă punctele A, B coincid, sensul segmentului $\overline{AB}$ este nedeterminat, iar lungimea lui este nulă, deoarece $a = b$.

* Aceasta, în cazul cînd se cunosc abscisele extremităților.

Observăm că (4)

$$\overline{AB} = \alpha\, \overline{OE},$$

unde α este egal cu lungimea segmentului, $\alpha = AB$, iar $\alpha \gtrless 0$ după cum sensul segmentului $\overline{AB}$ coincide cu sensul pozitiv, respectiv negativ, de parcurs al dreptei u. Dacă notăm cu x abscisa punctului P, rezultă că avem:

$$\overline{OP} = x\, \overline{OE}, \tag{4'}$$

adică segmentul $\overline{OE}$ acoperă de x ori segmentul $\overline{OP}$, purtînd acest segment de un număr de ori la stînga originii, dacă $x < 0$, sau la dreapta, dacă $x > 0$. Deci, abscisa x a punctului P coincide cu lungimea (relativă) segmentului orientat $\overline{OP}$. Obținem astfel o interpretare geometrică a coordonatei abscisă. Rezultă că se poate realiza o corespondență între punctele dreptei u și numerele reale, folosind această interpretare geometrică a coordonatei abscisă. Însă atunci lungimea unui segment sau este presupusă dată sau este introdusă cu ajutorul axiomelor lui Arhimede și Cantor-Dedekind.

Fie $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ două segmente. Raportul lor este un număr real, adică $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \alpha (\alpha \in R)$. Cele două segmente se zic că sînt *comensurabile*, dacă α este un număr rațional, sau *incomensurabile*, dacă α este un număr irațional.

Noțiunea de lungime a unui segment $\overline{AB}$ se poate aplica și în cazul cînd unul sau amîndouă punctele A, B sînt imaginare. Atunci, lungimea (3) este un număr complex, afară de cazul cînd abscisele punctelor A și B au aceeași parte imaginară.

Identități care au loc între segmentele determinate de punctele unei drepte.

Fie $A(a)$ și $B(b)$ două puncte pe o dreaptă u. Segmentul $\overline{AB}$ are sensul de la A la B și lungimea $AB = b - a$. Segmentul $\overline{BA}$ are sensul de la B la A, deci sensul contrar sensului lui $\overline{AB}$, și lungimea $BA = a - b$, deci egală și de semn contrar cu lungimea segmentului $\overline{AB}$. Vom exprima această proprietate prin formula:

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0. \tag{5}$$

Fie trei puncte A, B, C pe o dreaptă u. Între segmentele determinate de ele subzistă identitatea:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0, \tag{6}$$

numită *identitatea lui Chasles.*

Deoarece $\overline{AC} = -\overline{CA}$, dacă ținem seama de (5), atunci identitatea lui Chasles se mai scrie:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}. \tag{6'}$$

Relația (6) se verifică ușor dacă ținem seama de formula (3), care ne dă lungimea acestor segmente în funcție de abscise a, b, c ale punctelor date. În adevăr, avem:

$$AB = b - a, \quad BC = c - b, \quad CA = a - c.$$

Așadar, relația (6) va deveni o identitate algebrică:

$$(b - a) + (c - b) + (a - c) = 0.$$

Fiind date pe dreapta u punctele A, B, C și punctul arbitrar M, avem relațiile:

$$\overline{MA} \cdot \overline{BC} + \overline{MB} \cdot \overline{CA} + \overline{MC} \cdot \overline{AB} = 0, \tag{7}$$

numită *relația lui Euler*, și

$$\overline{MA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{MB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{MC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0, \tag{8}$$

numită *relația lui Stewart*.

În adevăr, însemnînd abscisele punctelor date cu a, b, c, x, relațiile geometrice (7) și (8) vor deveni identități algebrice ușor de verificat.

Transformări ale coordonatei abscisă. Fie X un punct pe dreapta u; abscisa x a lui X depinde și de originea O pe care am ales-o pe această dreaptă, deci de poziția punctului X față de un punct fix O, și de unitatea de măsură $\overline{OE}$ aleasă.

Fig. 7

Să presupunem că luăm originea în punctul $O'(x_0)$ și că păstrăm aceeași unitate de măsură, deci $\overline{O'E'} = \overline{OE}$ (fig. 7). Dacă însemnăm cu x abscisa punctului X în raport cu vechea origine O și cu x' abscisa aceluiași punct în raport cu noua origine O' și dacă ținem seamă că:

$$\overline{OX} = \overline{O'X} + \overline{OO'},$$

avem următoarele formule:

$$x = x' + x_0, \quad x' = x - x_0. \tag{9}$$

În acest caz, se zice că am făcut o *translație* a dreptei care a adus originea O în punctul O'.

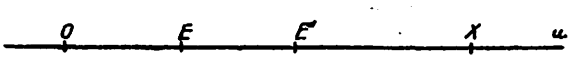


Fig. 8

Să presupunem acum că lăsăm originea neschimbată și că schimbăm unitatea de măsură în $\overline{OE'}$, luînd punctul $E'(k)$ drept punct unitate (fig. 8); deci:

$$\overline{OE'} = k \cdot \overline{OE}.$$

Dacă x este abscisa punctului X în raport cu unitatea de măsură $\overline{OE}$, iar x' abscisa aceluiași punct în raport cu unitatea de măsură $\overline{OE'}$, avem:

$$\overline{OX} = x \cdot \overline{OE},\ \overline{OX} = x' \cdot \overline{OE'};$$

de unde

$$x \cdot \overline{OE} = x' \cdot \overline{OE'} \quad \text{sau} \quad x \cdot \overline{OE} = kx' \cdot \overline{OE}.$$

Rezultă că avem formulele:

$$x = kx',\ x' = \frac{1}{k}x. \tag{10}$$

Dacă avem $k > 0$, atunci cele două abscise x, x' variază în același sens, iar dacă avem $k < 0$, abscisele variază în sensuri contrarii. În particular, dacă avem $k = -1$, atunci formulele (10) devin:

$$x = -x',\ x' = -x. \tag{10'}$$

ceea ce arată că s-a schimbat partea pozitivă a dreptei în partea negativă, și invers.

În sfîrșit, să presupunem că luăm originea în punctul $O'(x_0)$ și că unitatea de măsură va fi $\overline{O'E'}$ (fig. 9):

$$\overline{O'E'} = k \cdot \overline{OE}.$$

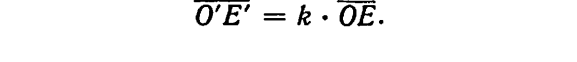


Fig. 9

Atunci avem formulele:

$$x = kx' + x_0,\ kx' = x - x_0, \tag{11}$$

care se pot obține și prin compunerea transformărilor (9) și (10). Aceste formule determină între x' și x o *corespondență*, care are cele trei proprietăți ale unei coordonate: *biunivocitate*, *ordonare* și *continuitate*, deci și x' este o coordonată pe dreaptă.

Așadar (9), (10) și (11) constituie formulele de trecere de la un sistem de abscise la altul, după cum schimbăm sau originea, sau unitatea de măsură, sau originea și unitatea de măsură.

Fie a un număr rațional și α un număr irațional. Se știe că

$$a + \alpha,\quad \alpha a$$

sînt numere iraționale. Deci, formulele (9), (10) și (11) arată că prin schimbarea originii sau a unității de măsură se poate ca un punct de abscisă rațională să se transforme într-un punct de abscisă irațională, și invers. Prin urmare, în

corespondența dintre punctele unei drepte u și abscisele lor, faptul că unele puncte corespund la valori raționale ale absciselor și altele la numere iraționale nu este o proprietate intrinsecă, ci depinde de alegerea originii O și a punctului unitate E.

§ 2. COORDONATA BARICENTRICĂ

Coordonata abscisă nu este singura coordonată care se poate introduce pe o dreaptă. De exemplu, putem realiza o corespondență între punctele unei drepte u și numerele reale, atașînd fiecărui punct al dreptei raportul în care acest punct împarte un segment (orientat) dat.

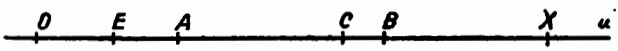


Fig. 10

În adevăr, fie pe dreapta u două puncte fixe A, B (determinînd segmentul $\overline{AB}$) și un punct C oarecare (fig.10). Raportul segmentelor $\overline{AC}$ și $\overline{CB}$, determinate de punctul C pe segmentul $\overline{AB}$ dat, este un număr real k (rațional, dacă segmentele sînt comensurabile, sau irațional, dacă segmentele sînt incomensurabile). Vom spune că *punctul C împarte segmentul $\overline{AB}$ în raportul k, dacă*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = k. \tag{12}$$

De altfel, cu ajutorul a trei puncte A, B, C putem forma ceea ce se numește *raport simplu*:

$$(ABC) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}. \tag{12'}$$

Dacă facem toate permutările posibile ale celor trei puncte ale unui raport simplu, se obțin în total 6 rapoarte simple, în general, distincte între ele.

Fie X un punct variabil pe dreapta u. Atunci putem lua variabila

$$r = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = -(ABX), \tag{13}$$

adică raportul în care punctul X împarte segmentul dat $\overline{AB}$ drept coordonată a punctului X. Coordonata r se numește *coordonata baricentrică a punctului X*, în raport cu cele două puncte date A și B, numite *puncte fundamentale* ale sistemului de coordonată baricentrică r.

Să arătăm că variabila r are cele trei proprietăți ale unei coordonate. În adevăr, dacă a, b, x sînt abscisele punctelor A, B, X față de o origine și o unitate de măsură dată, din (13) rezultă formulele

$$r = \frac{x-a}{b-x}, \quad x = \frac{a+rb}{1+r}. \tag{13'}$$

Deci, între abscisa x şi coordonata baricentrică r ale punctului X avem o corespondenţă biunivocă şi continuă, exceptînd valoarea $x = b$, pentru care r nu are o valoare finită şi valoarea $r = -1$, pentru care x nu are valoare finită. Continuitatea corespondenţei rezultă imediat, dacă ţinem seama că corespondenţa (13') între abscisa x şi coordonata baricentrică r este o funcţie raţională. În adevăr, o funcţie raţională

$$\varphi(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}, \quad (P(t),\ Q(t) \text{ polinoame})$$

este definită şi continuă pentru orice valoare t, în care $Q(t) \neq 0$, adică pentru orice valoare $t \in R$, cu excepţia zerourilor reale ale polinomului $Q(t)$.

Corespondenţa (13') între x şi r este şi ordonată. Această ordonare trebuie înţeleasă astfel: observăm că în punctul fundamental A avem $r = 0$, deoarece pentru $x = a$, din (13') rezultă $r = 0$ (fig. 10). Dacă X se mişcă de la A la B, oricare ar fi poziţia punctelor A şi B^*, coordonata r variază de la zero la $+\infty$, deoarece segmentele $\overline{AX}$ şi $\overline{XB}$ au acelaşi sens, încît raportul lor este pozitiv. În punctul B, deci pentru $x = b$, coordonata baricentrică r nu are o valoare finită.

Să presupunem că X este un punct exterior segmentului $\overline{AB}$. Atunci coordonata r are valori negative, deoarece

$$r = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{BX} + \overline{AB}}{\overline{XB}} = -1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{XB}}.$$

Dacă X se găseşte la stînga lui A, deoarece $0 < \frac{\overline{AB}}{\overline{XB}} < 1$, coordonata r este negativă, în valoare absolută mai mică decît unitatea şi descreşte de la 0 la -1, tinzînd către valoarea -1 cînd punctul X dispare la infinit în stînga lui A.

Dacă X se găseşte la dreapta lui B, deoarece $-\infty < \frac{\overline{AB}}{\overline{XB}} < 0$, coordonata r are valori negative, în valoare absolută mai mari decît unitatea, şi creşte de la $-\infty$ la -1, tinzînd către -1, cînd X dispare la infinit la dreapta lui B.

Observăm că pentru punctele X care se depărtează la infinit la stînga lui A sau la dreapta lui B, coordonata baricentrică are valori care se apropie, în ambele cazuri, de -1. Adică, *punctului impropriu al dreptei u* facem să-i corespundă coordonata baricentrică $r = -1$. Pentru a păstra biunivocitatea corespondenţei (13'), vom spune că punctul B corespunde unei coordonate baricentrice infinită, deoarece, pentru puncte X foarte aproape de punctul fundamental B, coordonata baricentrică r are valori foarte mari în valoare absolută, pozitive dacă X este la stînga lui B şi negative dacă X este la dreapta lui B.

În aceste condiţii, corespondenţa între punctele dreptei u şi variabila r este biunivocă, ordonată şi continuă; deci *r poate fi considerat ca o coordonată.*

---

* Putem presupune că punctul B este la dreapta lui A, adică $a < b$, ceea ce este posibil totdeauna, schimbînd eventual sensul pe dreapta u.

Coordonata baricentrică, fiind un raport de două segmente, nu se schimbă dacă schimbăm originea absciselor sau unitatea de măsură (în particular, dacă schimbăm sensul ales ca pozitiv pe dreaptă). În adevăr, dacă ţinem seama de (9), respectiv (10), în (13'), avem

$$r = \frac{x-a}{b-x} = \frac{(x'+x_0)-(a'+x_0)}{(b'+x_0)-(x'+x_0)} = \frac{x'-a'}{b'-x'} = r',$$

respectiv

$$r = \frac{x-a}{b-x} = \frac{kx'-ka'}{kb'-kx'} = \frac{x'-a'}{b'-x'} = r',$$

unde a', b', x' sînt abscisele punctelor A, B, X în noul sistem obţinut prin schimbarea originii, respectiv prin schimbarea unităţii de măsură. Deci, sistemul de coordonată baricentrică are unele avantaje importante în raport cu sistemul de coordonată abscisă.

Aplicaţie. Abscisa punctului P care împarte în raportul k segmentul $\overline{P_1P_2}$, cînd se cunosc abscisele x_i $(i = 1,2)$ ale punctelor P_i. Să notăm cu x abscisa punctului P. Conform definiţiei (12), respectiv (12'), avem

$$(P_1P_2P) = -k,$$

de unde rezultă

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}. \tag{14}$$

Dacă, în particular, P este mijlocul segmentului $\overline{P_1P_2}$, avem $k = 1$, şi din formula (14) obţinem

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \tag{15}$$

adică *abscisa x a mijlocului unui segment este egală cu media aritmetică a absciselor x_1 şi x_2 ale extremităţilor sale.*

§ 3. COORDONATA PROIECTIVĂ

Raport anarmonic sau biraport. Fie A, B, C, D patru puncte pe o dreaptă u. Cu aceste puncte, luate în această ordine, putem forma ceea ce se numeşte un raport *anarmonic* sau *biraport*:

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}. \tag{16}$$

Dacă considerăm pe A, B ca puncte fundamentale ale unui sistem de coordonată baricentrică, raportul anarmonic (16) apare ca raportul între coordonatele baricentrice ale punctelor C şi D, deoarece avem

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{r_C}{r_D}. \tag{17}$$

Rezultă că raportul anarmonic (16) este pozitiv, dacă ambele puncte C, D sînt sau interioare sau exterioare segmentului $\overline{AB}$. Cu alte cuvinte, biraportul este pozitiv, dacă perechile AB, CD nu se separă, și negativ dacă ele se separă.

Proprietățile biraportului. Fiind date patru puncte A, B, C, D pe o dreaptă u, cu ajutorul acestor puncte putem forma 24 de rapoarte anarmonice. În adevăr, făcînd toate permutările posibile ale celor patru puncte, obținem cele 24 de rapoarte anarmonice. Se pune atunci întrebarea: cele 24 de rapoarte anarmonice formate cu ajutorul a patru puncte date sînt distincte (au toate valori distincte) sau nu? Răspunsul este următorul: în general sînt numai 6 rapoarte anarmonice distincte, patru cîte patru fiind egale.

Demonstrația acestei afirmații se reduce la a arăta că valoarea biraportului $(ABCD)$ se păstrează, dacă schimbăm perechile AB, CD între ele sau schimbăm în același timp punctele ambelor perechi, adică:

$$(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA) \tag{18}$$

În adevăr, ținînd seama că biraportul (16) poate fi scris și sub forma

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}, \tag{16'}$$

de relația (5) și de faptul că produsul a două numere este comutativ, se vede ușor că

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{CB}} = (CDAB),$$

și

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = (BADC),$$

de unde rezultă primele două egalități (18). Ultima egalitate se dovedește dacă ținem seama în biraportul $(BADC)$ de prima egalitate, ceea ce arată că raportul anarmonic nu se schimbă dacă inversăm ordinea în care luăm punctele.

Cele 6 valori distincte ale biraportului format cu patru puncte A, B, C, D se determină astfel: Fie

$$(ABCD) = k. \tag{19}$$

Să schimbăm punctele unei singure perechi, de exemplu să schimbăm între ele punctele C, D * Dacă ținem seama de (17), avem

$$(ABDC) = \frac{(ABD)}{(ABC)} = \frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{k}. \tag{19'}$$

* Din (18) se vede ușor că $(BACD) = (ABDC)$.

Să schimbăm acum între ele punctele centrale B, C. Dacă ţinem seama de *relaţia lui Euler* (7), relaţie între segmentele determinate de patru puncte:

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AC}\cdot\overline{DB}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0,$$

avem

$$(ACBD)=\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=-\frac{\overline{AC}\cdot\overline{DB}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}}{\overline{CB}\cdot\overline{AD}}=1-\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}},$$

adică

$$(ACBD)=1-\mathrm{k}. \tag{19''}$$

Dacă în formula (19') schimbăm între ele punctele centrale şi ţinem seama de proprietatea (19''), obţinem

$$(ADBC)=1-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}; \tag{19'''}$$

iar dacă în formula (19'') schimbăm între ele punctele ultimei perechi şi ţinem seama de proprietatea (19'), găsim

$$(ACDB)=\frac{1}{1-k}. \tag{19^{IV}}$$

În sfîrşit, dacă în (19''') schimbăm între ele punctele ultimei perechi şi ţinem seama de proprietatea (19^{IV}), avem

$$(ADCB)=\frac{k}{k-1}, \tag{19^{V}}$$

Deci cele şase valori distincte ale rapoartelor anarmonice, formate cu patru puncte A, B, C, D, sînt date de formulele (19), ... , (19^{V}).

Ne putem întreba: pentru ce valori ale lui k cele şase valori nu sînt toate distincte? Evident, aceste valori se obţin în cazul cînd două din cele şase rapoarte anarmonice (19) — (19^{V}) sînt egale. De exemplu, dacă birapoartele (19) şi (19') sînt egale, obţinem

$$k^2-1=0;$$

deci avem sau $k=1$ sau $k=-1$. Însă valoarea $k=1$ corespunde cazului banal cînd punctele unei perechi coincid.

Pentru valoarea $k=-1$, două din valorile rapoartelor anarmonice sînt egale cu -1, iar celelalte două cîte două, respectiv egale cu 2 şi $\frac{1}{2}$. În acest caz, deci atunci cînd

$$(ABCD)=-1, \tag{20}$$

biraportul se zice *armonic*.

Dacă egalăm raportul (19) cu (19^{IV}), găsim ecuaţia

$$k^2-k+1=0,$$

ale cărei rădăcini sînt rădăcinile cubice imaginare ale lui -1. Evident, în cazul în care k are o valoare imaginară, cel puţin unul din punctele A, B, C, D

este imaginar. Pentru valoarea lui k egală cu una din rădăcinile cubice imaginare ale lui -1, celelalte valori ale rapoartelor anarmonice sînt egale sau cu această rădăcină sau cu cealaltă rădăcină. În acest caz, raportul $(ABCD)$ se zice *echianarmonic*.

Acestea sînt singurele cazuri pentru care cele șase valori ale raportului anarmonic format cu patru puncte se reduc la trei sau la două valori distincte.

Să presupunem că pe dreapta u s-a fixat un sistem de coordonată abscisă și că a, b, c, d sînt abscisele punctelor A, B, C, D. Numind expresia

$$(abcd) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \tag{21}$$

raport anarmonic al numerelor a, b, c, d, rezultă că

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b},$$

adică

$$(ABCD) = (abcd). \tag{21'}$$

Deci, *raportul anarmonic a patru puncte A,B,C,D este egal cu raportul anarmonic sau biraportul absciselor lor a,b,c,d.*

Dacă unul din cele patru puncte ale unui biraport $(ABCD)$ coincide cu punctul impropriu al dreptei u, atunci biraportul devine raportul simplu al celor trei puncte rămase, luate într-o anumită ordine.

În adevăr, avem

$$(ABCD_\infty) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}_\infty}{\overline{AD}_\infty} = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{\infty - b}{\infty - a} = \frac{c-a}{c-b} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = (ABC),$$

adică

$$(ABCD_\infty) = (ABC). \tag{22}$$

Ținînd seama și de proprietatea (18) a biraportului, se demonstrează ușor că avem de asemenea

$$(AB_\infty CD) = (CDA),\ (ABC_\infty D) = (BAD),\ (A_\infty BCD) = (DCB). \tag{22'}$$

Proprietăți ale biraportului armonic. Biraportul armonic (20) a patru puncte A, B, C, D fiind negativ, rezultă că *perechile A, B și C, D se separă*. În plus, dacă schimbăm între ele elementele unei perechi, deci A cu B sau C cu D, biraportul are proprietatea că nu-și schimbă valoarea, deoarece valoarea inversă a biraportului este tot -1. De aceea se spune că *punctele C, D sînt conjugate armonic cu punctele A, B sau cu extremitățile segmentului $\overline{AB}$*, și invers, A, B sînt conjugate armonic cu C, D. De asemenea, se zice că *perechile de puncte A,B și C,D formează o diviziune armonică* sau *sînt într-o diviziune armonică*. De asemenea se zice că *perechea A, B divide armonic perechea C, D*, și invers, sau că *punctul D este conjugatul armonic al lui C față de perechea A, B.*

Dacă ţinem seama de (16), relaţia (20) se mai poate scrie astfel

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = -\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \quad \text{sau} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}, \tag{23}$$

ceea ce ne arată că, într-un biraport armonic, *două puncte conjugate divid segmentul celorlalte două în acelaşi raport, unul intern şi altul extern.*

Fie A,B punctele fundamentale ale sistemului de coordonată baricentrică pe dreapta u. Notînd cu r coordonata baricentrică a lui C în raport cu A şi B,

$$r_C = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = r,$$

din relaţia (23) reiese că $-r$ este coordonata baricentrică a punctului D, adică

$$r_D = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = -r.$$

Dacă a, b, c, d sînt abscisele punctelor A, B, C, D, rezultă că

$$r = \frac{c-a}{b-c}, \quad -r = \frac{d-a}{b-d}.$$

Rezolvînd aceste ecuaţii în raport cu c şi d, găsim:

$$c = \frac{a+rb}{1+r}, \quad d = \frac{a-rb}{1-r}, \quad \text{iar } cd = \frac{a^2-r^2b^2}{1-r^2}. \tag{24}$$

Dacă punctul C este mijlocul lui $\overline{AB}$, deci dacă $r = 1$, din (24) rezultă că abscisa lui D, adică a conjugatului armonic al mijlocului unui segment în raport cu extremităţile segmentului, este

$$d = \frac{a-b}{0} \to \infty,$$

ceea ce ne arată că acest punct este punctul impropriu al dreptei AB. Aşadar, *conjugatul armonic al mijlocului unui segment în raport cu extremităţile segmentului este punctul impropriu al dreptei suport a segmentului dat.*

Să presupunem acum ca origine punctul mediu al lui $\overline{AB}$, deci $b = -a$. În acest caz, ultima relaţie (24) se scrie

$$cd = a^2, \tag{24'}$$

adică pătratul jumătăţii unui segment este medie proporţională (geometrică) între distanţele de la punctul mediu al segmentului la două puncte conjugate armonic cu extremităţile segmentului. Din relaţia (24') mai rezultă că *punctele C, D trebuie să fie de aceeaşi parte a mijlocului segmentului $\overline{AB}$*, deoarece produsul absciselor lor este pozitiv.

Coordonata proiectivă. Fie pe o dreaptă u trei puncte A, B, C fixe și un al patrulea punct X variabil (fig. 11) La orice poziție a punctului X va corespunde o valoare pentru biraportul

$$\lambda = (ABCX) = \frac{(ABC)}{(ABX)}. \tag{25}$$

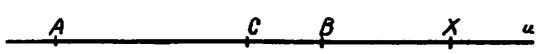


Fig. 11

Considerînd punctele A, B ca puncte fundamentale ale unui sistem de coordonată baricentrică și notînd cu r coordonata baricentrică a punctului X, din formula (25) rezultă că între λ și r există relațiile

$$\lambda = -\frac{(ABC)}{r}, \quad r = -\frac{(ABC)}{\lambda}, \tag{25'}$$

adică între λ și r există o corespondență biunivocă, continuă și ordonată. Deci λ poate fi considerată ca o coordonată, pe care o vom numi *coordonata proiectivă* sau coordonata *biraport* a punctului X în raport cu punctele fundamentale A, B, C.

Din formula (25) reiese că această coordonată proiectivă are și ea proprietatea coordonatei baricentrice: de a nu se schimba cînd schimbăm originea absciselor sau unitatea de măsură (în particular, sensul pozitiv pe dreaptă).

Să vedem acum care sînt valorile coordonatei proiective λ corespunzătoare punctelor fundamentale A, B, C. Dacă punctul X tinde către A, observăm că în raportul anarmonic (25), numitorul (ABX) tinde către zero, deci valoarea fracției tinde către infinit. Vom zice deci că punctul A are coordonata $\lambda = \infty$. După cum rezultă din (16'), unde $D \equiv X$, coordonata are valoarea zero, dacă X coincide cu B, iar dacă X coincide cu C, λ are valoarea 1. Deci, în sistemul de coordonată proiectivă, punctelor fundamentale A, B, C le corespund coordonatele ∞, 0,1.

Dacă considerăm sistemul de coordonată proiectivă λ, care are ca puncte fundamentale: punctul de la infinit al dreptei, originea și punctul-unitate, adică punctele de abscise ∞, 0, 1, atunci avem

$$\lambda = (P_\infty OEX) = (\infty\ 0\ 1\ x) = x;$$

deci, *coordonata abscisă este un caz particular al coordonatei proiective.*

Să demonstrăm acum că *raportul anarmonic a patru puncte are aceeași valoare fie că ne folosim de coordonatele abscise, fie de coordonate baricentrice sau de coordonatele proiective ale punctelor date.*

În adevăr, fie patru puncte $P_i (i = 1, 2, 3, 4)$ pe o dreaptă u, care au respectiv abscisele x_i, coordonatele baricentrice r_i în raport cu punctele fundamentale A, B și coordonatele proiective λ_i, în raport cu punctele fundamentale A, B, C (fig. 12).

Să arătăm deci că avem

$$(P_1P_2P_3P_4) = (x_1x_2x_3x_4) = (r_1r_2r_3r_4) = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4). \tag{26}$$

Prima egalitate are loc dacă ținem seama de proprietatea (21'). Ținînd seama acum de faptul că legătura între coordonata baricentrică r și coordonata abscisă x este de forma (13'), rezultă că

$$r_i = \frac{x_i - a}{b - x_i}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{27}$$

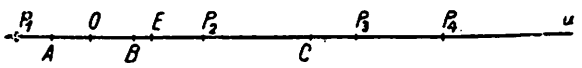


Fig. 12

Conform definiției (21), raportul anarmonic al celor patru coordonate baricentrice r_i este

$$(r_1 r_2 r_3 r_4) = \frac{r_3 - r_1}{r_3 - r_2} : \frac{r_4 - r_1}{r_4 - r_2}.$$

Însă, ținînd seama de relațiile (27), obținem prin scădere:

$$r_3 - r_1 = \frac{(b - a)(x_3 - x_1)}{(b - x_1)(b - x_3)}.$$

În mod analog vom avea

$$r_3 - r_2 = \frac{(b - a)(x_3 - x_2)}{(b - x_2)(b - x_3)}.$$

Împărțind ultimele două formule obținute, găsim

$$\frac{r_3 - r_1}{r_3 - r_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{b - x_2}{b - x_1},$$

precum și (dacă schimbăm r_3 cu r_4),

$$\frac{r_4 - r_1}{r_4 - r_2} = \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} \cdot \frac{b - x_2}{b - x_1}.$$

Deducem

$$\frac{r_3 - r_1}{r_3 - r_2} : \frac{r_4 - r_1}{r_4 - r_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2},$$

adică

$$(r_1 r_2 r_3 r_4) = (x_1 x_2 x_3 x_4). \tag{26'}$$

Notînd $\alpha = (ABC)$ și ținînd seama de formulele (25'), avem:

$$\lambda_i = -\frac{\alpha}{r_i}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{27'}$$

Deci, procedînd la fel ca mai sus, obținem

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = (r_1 r_2 r_3 r_4) \tag{26''}$$

În concluzie, relațiile (21'), (26') și (26'') conduc la (26).

§ 4. COORDONATE OMOGENE

Fie x o coordonată pe dreapta u (de exemplu, coordonata abscisă, coordonata baricentrică sau coordonata proiectivă) și (x_1, x_2) o pereche ordonată de numere. Prin relația

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \tag{28}$$

abstracție făcînd de un factor ρ de proporționalitate (cu care putem înmulți atît pe x_1 cît și pe x_2), se realizează o corespondență biunivocă între coordonata x și perechea ordonată (x_1, x_2). Se spune că x_1, x_2 sînt *coordonatele omogene* ale punctului P de pe dreapta u (coordonate omogene carteziene, respectiv baricentrice sau proiective), x fiind *coordonata neomogenă* a punctului P (coordonata abscisă, respectiv baricentrică sau proiectivă). Rezultă că punctele $A(a_1, a_2)$ și $B(b_1, b_2)$ sînt două puncte distincte pe dreapta u, dacă $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, adică

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Observăm ca introducerea coordonatelor omogene evită folosirea coordonatelor infinite. De asemenea, alegerea factorului de proporționalitate în așa fel ca x_2 să fie egal cu unitatea duce la coincidența lui x cu x_1.

PARTEA A DOUA

ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

CAPITOLUL II

DETERMINANȚI. MATRICE

§ 1. PERMUTĂRI

Fie M o mulțime de putere n, deci o mulțime de n obiecte (elemente). Ele pot fi așezate unul după altul (ordonate) în mai multe feluri; însă pentru o așezare dată putem vorbi de primul obiect, al doilea obiect,..., al n-lea obiect.

Se numește *permutare* o corespondență biunivocă a unei mulțimi finite M cu ea însăși.

Să dăm celor n obiecte ale mulțimii M două așezări diferite

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ și } a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n};$$

elementele $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$ sînt aceleași elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ așezate însă în altă ordine. Prin aceasta s-a realizat o corespondență biunivocă între cele două așezări ale aceleiași mulțimi M, deci o permutare P a acestor obiecte, după care elementului a_1 îi corespunde elementul a_{i_1}, lui a_2 îi corespunde a_{i_2}, ..., lui a_n îi corespunde a_{i_n}. Vom nota permutarea P prin

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \ldots a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} \ldots a_{i_n} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Deoarece permutarea este caracterizată numai de corespondența dintre indicii k și i_k, oricare ar fi ordinea în care scriem obiectele, putem înlocui atunci obiectele prin indicii lor. Deci, permutarea (1) se mai poate scrie sub forma:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n \\ i_1 & i_2 \ldots i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 \ldots j_n \\ i_{j_1} & i_{j_2} \ldots i_{j_n} \end{pmatrix}. \tag{1'}$$

Vom spune că în permutarea P, i_k este omologul lui k.

Două permutări P și Q asupra aceleiași mulțimi finite M zicem că sînt egale, dacă, și numai dacă, pentru fiecare obiect din M, omologul său este același și în P și în Q.

Dacă într-o permutare P, unui element îi corespunde succesorul, deci permutarea este de forma

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots n-1 & n \\ 2 & 3 \dots n & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

se zice că P este un *ciclu* sau o *permutare ciclică*. Prescurtat, ea se mai notează

$$P = (1\ 2 \dots n), \tag{2'}$$

n numindu-se *ordinul* ciclului.

În cazul în care mulțimea M este de putere 2, ciclul se numește *transpoziție*. Cu două obiecte, a și b, nu se poate face decît o permutare ciclică:

$$(a\ b) = (b\ a).$$

Dacă mulțimea M este de putere n, o permutare în care toate elementele rămîn neschimbate și numai două se permută circular, adică:

$$T = \begin{pmatrix} \dots i \dots j \dots \\ \dots j \dots i \dots \end{pmatrix}, \tag{3}$$

unde... înseamnă indici care rămîn pe loc, este o transpoziție

Fie $\mathcal{P}_n$ mulțimea tuturor permutărilor unei mulțimi finite $M = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$; mulțimea $\mathcal{P}_n$ conține $n!$ $= 1, 2, \dots, n$ elemente (permutări). Să demonstrăm

Propoziția 1. Mulțimea $\mathcal{P}_n$ este un grup* necomutativ, numit grupul simetric.

În adevăr, fie $P, Q \in \mathcal{P}_n$: deci

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots n \\ p_1 & p_2 \dots p_n \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots n \\ q_1 & q_2 \dots q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \dots p_n \\ q_{p_1} & q_{p_2} \dots q_{p_n} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Permutarea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots n \\ q_{p_1} & q_{p_2} & \dots q_{p_n} \end{pmatrix},$$

* În general, se numește *grup* o mulțime G de elemente, finită sau infinită, în care este definită o operație (lege de compunere) xoy astfel încît, pentru orice elemente $x, y \in G$, $xoy = z \in G$ și avînd proprietățile:

1° $(xoy)oz = xo(yoz)$, (asociativitate);

2° există un element $u \in G$, astfel încît $uox = xou = x$, oricare ar fi $x \in G$;

3° pentru orice element $x \in G$ există $x' \in G$, astfel încît

$$xox' = x'ox = u.$$

Dacă în plus este verificată proprietatea

4° $xoy = yox$ (comutativitate),

atunci G este un *grup comutativ*.

Observăm că operația „o" se notează uneori cu „$+$" (notație aditivă), alteori cu „$\cdot$" (notație multiplicativă). În primul caz, legea de compunere se numește adunare (atunci u se notează cu 0 și se numește elementul nul, iar x' se notează prin $-x$ și se zice opusul lui x); în al doilea caz, legea de compunere se numește produs (atunci u se notează cu e sau 1, și se numește element unitate, iar x' se notează prin x^{-1}, și se zice inversul lui x).

care realizează corespondența dintre primul șir al permutării P și al doilea șir al permutării Q, se numește *produsul permutărilor* P și Q, ceea ce se scrie:

$$A = P \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ q_{p_1} & q_{p_2} & \cdots & q_{p_n} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

În general, *produsul* a două permutări nu este *comutativ*, adică

$$P \cdot Q \neq Q \cdot P. \tag{5'}$$

Legea de *compunere* a permutărilor astfel definită are proprietățile:

1° Este asociativă, adică

$$(PQ)\,R = P(QR). \tag{6}$$

2°. Există o permutare

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots n \\ 1 & 2 \dots n \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$U \in \mathcal{P}_n$, numită *permutarea identică*, care compusă cu orice altă permutare $P \in \mathcal{P}_n$, la dreapta sau la stînga, o lasă neschimbată; adică

$$UP = PU = P. \tag{7'}$$

3° Pentru orice permutare (1'), $P \in \mathcal{P}_n$, există o permutare

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_n \\ 1 & 2 \dots n \end{pmatrix}, \tag{8}$$

numită *inversa* ei, care compusă cu P, la dreapta sau la stînga, ne dă ca rezultat permutarea identică, adică

$$P^{-1}P = PP^{-1} = U. \tag{8'}$$

Relațiile (6), (7') și (8') sînt evidente. Deci, mulțimea $\mathcal{P}_n$ este un grup necomutativ, de ordinul $n!$*

Fie $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ o ordonare a mulțimii finite M de n obiecte (există $n!$ ordonări distincte).

Spunem că într-o ordonare dată a celor n obiecte ale mulțimii M, obiectele a_i și a_j prezintă o *inversiune*, dacă $j > i$, însă j îl precede pe i. O *ordonare* dată a mulțimii M este *pară* sau *impară*, după cum obiectele ei prezintă un număr par sau impar de inversiuni.

Fie permutarea (1') și să considerăm produsul

$$p = \prod_{1}^{C_n^2} \frac{i_k - i_h}{k - h} \tag{10}$$

* Puterea mulțimii elementelor care constituie un grup este ordinul grupului.

al tuturor celor C_n^2 expresii de forma $\frac{i_k - i_h}{k - h}$. Observăm că, după cum parităţile liniei superioare şi a celei inferioare coincid sau nu, avem $p > o$ sau $p < 0$. Deci, în permutarea (1'), numărul inversiunilor este par sau impar, după cum $p > 0$ sau $p < 0$. Atunci, despre *permutarea P* spunem că este *pară*, în primul caz, sau *impară*, în al doilea caz.

Evident, *permutarea identică* (7) este o *permutare pară*.

O transpoziţie este o permutare impară.

În adevăr, fie transpoziţia (3), cu $i < j$. Observăm că i, j prezintă acelaşi număr de inversiuni faţă de numerele fixe. Putem presupune că primul şir este ordonat crescător, deci ordonarea primului şir este pară. Dacă între i şi j sînt s numere $k_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots s; i < k_1 < k_2 < \ldots < k_s < j)$, atunci sînt $2s + 1$ inversiuni în al doilea şir (s inversiuni date de k_α faţă *de* i, iar $s+1$ inversiuni date de j faţă de k_α şi i); deci, ordonarea celui de-al doilea şir este impară.

Avem, de asemenea,

Propoziţia 2. Produsul a două permutări este par, dacă permutările sînt de aceeaşi paritate şi este impar, în caz contrar.

În adevăr, fie

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ k_{i_1} & \ldots & k_{i_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_n \\ k_{i_1} & \ldots & k_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Avem

$$\prod_1^{C_n^2} \frac{k_{i_s} - k_{i_r}}{s - r} = \prod_1^{C_n^2} \left(\frac{k_{i_s} - k_{i_r}}{i_s - i_r} \cdot \frac{i_s - i_r}{s - r} \right) = \prod_1^{C_n^2} \frac{k_{i_s} - k_{i_r}}{i_s - i_r} \cdot \prod_1^{C_n^2} \frac{i_s - i_r}{s - r}$$

şi propoziţia este demonstrată. În consecinţă, rezultă

Propoziţia 3. Orice transpoziţie schimbă paritatea unei permutări.

§ 2. DETERMINANŢI

Definiţie. Fie n^2 numere $a_{ij} \in R(i, j, k, \ldots = 1,2, \ldots, n)$, R fiind mulţimea numerelor reale. Cu aceste numere formăm tabloul cu n linii şi n coloane:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Primul indice i al numărului a_{ij} indică numărul liniei, iar al doilea indice numărul coloanei (la intersecţia cărora se găseşte numărul a_{ij}).

Tabloului (11) i se asociază un număr D, *determinantul* celor n^2 numere $a_{ij} \in R$, care se notează astfel

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}| = \det |a_{ij}| \tag{12}$$

și se definește prin recurență în felul următor:

1° Presupunînd că am definit determinantul D_{ji} al elementelor tabloului care se deduce din (11) prin suprimarea liniei și coloanei cărora aparține numărul a_{ij}, atunci

$$D = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{21} + \dots + (-1)^{n-1}a_{1n}D_{n1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}a_{1i}D_{i1}. \tag{12'}$$

2° Dacă tabloul este format dintr-un singur element a_{11}, atunci*

$$D = |a_{11}| = a_{11} \tag{12''}$$

Numărul n al liniilor (respectiv și al coloanelor) se numește *ordinul* determinantului D, iar numerele a_{ij}, *elementele* determinantului.

Noțiunea de determinant a fost introdusă în anul 1801 de matematicianul german Gauss, notațiile (12) ale determinantului D fiind date de Cayley (în 1841), de Smith (în 1862) și alții.

Determinanții de ordinele doi și trei. Fie

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{13}$$

un determinant de ordinul doi (adică, determinantul cu două linii și două coloane, format cu $2^2 = 4$ numere). Aplicînd regula de recurență (12'), obținem

$$D = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

deoarece $D_{11} = |a_{22}| = a_{22}$, $D_{21} = |a_{21}| = a_{21}$. Deci, valoarea determinantului (13) este dată de expresia

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{13'}$$

valoare care se obține făcînd diferența dintre produsul elementelor a_{11} și a_{22} de pe prima diagonală (numită și diagonala principală) și produsul elementelor a_{12} și a_{21} de pe a doua diagonală.

* A nu se confunda aici simbolul $|a_{11}|$ pentru determinantul lui a_{11}, cu valoarea absolută a lui a_{11}.

Fie

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{14}$$

un determinant de ordinul trei (adică determinantul cu trei linii şi trei coloane, format cu $3^2 = 9$ numere). Rezultă imediat că valoarea determinantului (14) este dată de formula:

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{14'}$$

dacă ţinem seama că, după (12') avem

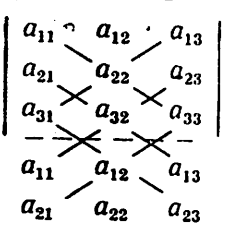
$$D = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{21} + a_{13}D_{31},$$

unde:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_{21} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_{31} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

determinanţii de ordinul doi, calculîndu-se după regula (13').

Pentru un determinant de ordinul trei putem da o regulă simplă de calcul, aşa-numita *regulă a lui Sarrus**. Iată în ce constă această regulă: se reproduc pe rînd sub tabloul elementelor determinantului liniile întîia şi a doua; se face suma produselor elementelor care se află pe paralele la diagonala principală, iar din această sumă se scad produsele elementelor care se găsesc pe paralele la diagonala a doua; se obţine astfel dezvoltarea (14'). Se observă că calculul determinantului (14) se obţine şi prin regula indicată în figura 1, care este o reproducere a regulii lui Sarrus.



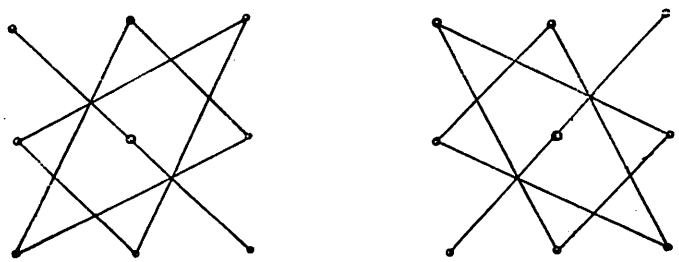


Fig. 1

Determinanţi de ordinul n. Să demonstrăm acum următoarea

Teoremă. Determinantul (12) este dat de formula

$$D = \sum_{I \in \mathcal{P}_n} (-1)^{p(I)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}, \tag{15}$$

* Pentru determinantul de ordinul doi există o astfel de regulă. Însă se poate demonstra că pentru determinanţii de ordinul $n > 3$ nu există regulă analogă.

unde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots n \\ i_1 & i_2 \dots i_n \end{pmatrix} \tag{15'}$$

este unul din cele n! elemente ale mulțimii $\mathcal{P}_n$ (grupul permutărilor mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$), iar

$$p(I) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } \textit{permutarea } I \textit{ este pară}, \\ 1, \text{ dacă } \textit{permutarea } I \textit{ este impară}. \end{cases} \tag{15''}$$

În adevăr, în dezvoltarea (12'), elementul a_{1i_1} are coeficientul $(-1)^{i_1-1}D_{i_1 1}$. Observăm că i_1 este și ordinul permutării ciclice $(1\ 2 \dots i_1)^{-1}$, care, efectuată asupra primelor i_1 coloane, aduce coloana i_1 în locul coloanei întîi.

Dezvoltînd determinantul $D_{i_1 1}$ (după elementele primei linii a lui $D_{i_1 1}$, respectiv după elementele liniei a doua a lui D), obținem

$$D_{i_1 1} = a_{21}D_{i_1 1,12} - a_{22}D_{i_1 1,22} + \dots + (-1)^{i_2'-1}a_{2i_2}D_{i_1 1,i_2 2} + \dots \pm a_{2n}D_{i_1 1,n2}.$$

În această dezvoltare lipsește numai elementul a_{2i_1} al liniei a doua din tabloul (11), deoarece acest element aparține coloanei i_1 suprimate.

Fie elementul $a_{2i_2}(i_2 \neq i_1)$, care are coeficientul $(-1)^{i_2'-1}D_{i_1 1,i_2 2}$; i_2' este ordinul permutării ciclice $(1\ 2 \dots i_2)'$, semnul prim indicînd lipsa lui i_1 din ciclu, dacă $i_1 < i_2$. Deci, $a_{1i_1}a_{2i_2}$ figurează în dezvoltarea determinantului D și are coeficientul $(-1)^{i_1-1+i_2'-1}D_{i_1 1,\, i_2 2}$, numărul $i_1 - 1 + i_2' - 1$ fiind numărul transpozițiilor în care se descompune permutarea $(1\ 2 \dots i_1)(1\ 2 \dots i_2)'$.

Iterînd (procedînd cu $D_{i_1 1,i_2 2}$ ca și cu $D_{i_1 1}$), vom găsi că în dezvoltarea lui D avem produsul $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$ cu coeficientul $(-1)^{i_1-1+i_2'-1+i_3'-1}D_{i_1 1,i_2 2,i_3 3}$, i_3' fiind ordinul permutării ciclice $(1\ 2 \dots i_3)'$. De această dată, accentul indică lipsa lui i_1, i_2 din ciclu.

Continuînd astfel, rezultă că monomul $a_{1i_1}a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$, ai cărui factori sînt elemente din tablou, luate cîte unul din fiecare linie și coloană, figurează cu necesitate o singură dată în dezvoltarea determinantului D, cu coeficientul $(-1)^{i_1-1+i_2'-1+\dots+i_n'-1}$, i_1, i_2', ..., i_n', fiind respectiv ordinele permutărilor ciclice:

$$(1\ 2 \dots i_1),\quad (1\ 2 \dots i_2)', \dots, (1\ 2 \dots i_n)'.$$

Însă

$$(-1)^{i_1-1+i_2'-1+\dots+i_n'-1} = (-1)^{p(I)},$$

deoarece

$$(1\ 2 \dots i_1)^{-1}(1\ 2 \dots i_2)'^{-1} \dots (1\ 2 \dots i_n)'^{-1} = I,$$

care se descompune în $i_1 - 1 + i_2' - 1 + \dots + i_n' - 1$ transpoziții.

Dacă în (12') dezvoltăm fiecare dintre determinanții D_{i1} și continuăm astfel cu determinanții care apar la fiecare etapă, găsim că D este suma monoamelor.

$$(-1)^{p(I)}a_{1i_1}a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

în număr de $n!$, I fiind o permutare a indicilor $1,2,\dots,n$.

Proprietăţi. Observăm că în fiecare din termenii dezvoltării (15), indicii liniilor sînt în ordine naturală. Însă avem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

aşa încît rezultă că dezvoltarea (15) se mai scrie

$$D = \sum_{I \in \mathcal{P}_n} (-1)^{p(I)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}, \qquad (15''')$$

ceea ce înseamnă că în fiecare din termenii dezvoltării (15) putem schimba ordinea factorilor, în aşa fel încît indicii coloanelor să fie în ordine naturală.

Numim *transpunere* a determinantului o transformare a acestuia prin schimbarea liniilor în coloane şi a coloanelor în linii.

Comparînd (15) şi (15''') deducem

Teorema I. Determinantul nu se schimbă prin transpunere.

Schimbînd deci liniile unui determinant în coloane (şi a coloanelor în linii) se obţine un determinant egal. De aici rezultă că *o proprietate relativă la linii este valabilă şi relativ la coloane şi reciproc.*

Ţinînd seama de propoziţia 3, §1, obţinem

Teorema II. Prin schimbarea între ele a elementelor a două linii (sau coloane), determinantul îşi schimbă doar semnul.

În general, *dacă permutăm între ele liniile (sau coloanele) unui determinant, obţinem un determinant cu aceeaşi valoare absolută şi de acelaşi semn sau de semn contrar, după cum permutarea liniilor (coloanelor) este pară sau impară.*

Generalizarea rezultă din faptul că o permutare efectuată asupra primilor indici, care indică liniile, schimbă între ei termenii dezvoltării (15), semnele termenilor fiind aceleaşi sau schimbate, după cum permutarea este pară sau impară.

Aplicaţie. Dezvoltarea determinantului după elementele unei linii (coloane).

Expresia (12') a determinantului (12) se numeşte dezvoltarea determinantului, după elementele primei linii. Însă determinantul D poate fi dezvoltat după elementele oricărei linii (sau coloane). În adevăr, prin permutarea ciclică ($i\ i$—1...2 1) asupra primelor i linii ducem linia i în locul primei linii, iar determinantul D, conform teoremei II, se va înmulţi cu $(-1)^{i-1}$. După această operaţie, conform legii de dezvoltare (12') a determinanţilor, vom dezvolta determinantul D după elementele primei linii; avem astfel

$$(-1)^{i-1} D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{ik} D_{ki}.$$

Înmulţind în ambele părţi cu $(-1)^{i-1}$ şi ţinînd seama că $(-1)^{-2} = 1$, obţinem

$$D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} D_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \alpha_{ki}, \qquad (16)$$

unde s-a notat

$$\alpha_{ki} = (-1)^{i+k} D_{ki}. \tag{16'}$$

Expresia (16) este *dezvoltarea determinantului* (12) *după elementele liniei i*, coeficientul α_{ki} al lui a_{ik} din această dezvoltare numindu-se *complementul algebric* al lui a_{ik} în D.

Dacă dezvoltăm determinantul D după coloana i, avem

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\alpha_{ik}. \tag{16''}$$

Observăm că D_{ki} este determinantul care se obține suprimînd în (12) linia și coloana din care face parte elementul a_{ik}; D_{ki} este un determinant de ordinul $n-1$, care se numește *minorul* (sau determinantul minor al) lui a_{ik} în D.

Dacă în determinantul (12) de ordinul n se suprimă q linii și q coloane, se obține un determinant cu $p = n - q$ linii și coloane, care se numește *minor de ordinul p* al determinantului dat.

Să presupunem acum că un determinant D are două linii (sau două coloane) identice. Atunci, dacă D' este determinantul care se obține din cel dat prin schimbarea între ele a celor două linii (coloane) identice, avem $D' = -D$ (conform teoremei II); dar $D' = D$ (rămîne identic cu el însuși). Deducem $D = 0$. Așadar,

Teorema III. Determinantul care are două linii (sau două coloane) egale este nul.

Aplicație. Să arătăm că

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{kj} = 0, \quad \text{pentru orice} \quad i \neq j. \tag{17}$$

În adevăr, expresia $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{kj}$ este determinantul Δ, care se deduce din D, înlocuind elementele liniei j cu elementele liniei i; deci Δ este un determinant care are liniile i și j identice. Conform teoremei III, rezultă $\Delta = 0$.

Comparînd (16) și (17), oricare ar fi i și j, avem

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{kj} = D\delta_{ij} \text{ (respectiv * } \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\alpha_{jk} = D\delta_{ij}), \tag{18}$$

unde δ_{ij} este *simbolul lui Kronecker*, definit astfel

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j, \\ 0, & \text{dacă } i \neq j. \end{cases} \tag{18'}$$

Observăm că în dezvoltarea (16) a determinantului (12), elementele $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ ale liniei i figurează cîte unul, și numai cîte unul, și anume la gradul

* Dacă determinantul este dezvoltat după elementele unei coloane.

întîi în fiecare din termenii dezvoltării lui D; și aceasta, oricare ar fi linia i ($i = 1,2,...,n$). Deci rezultă

Teorema IV. Determinantul este o funcție liniară și omogenă de elementele fiecăreia din liniile (coloanele) sale.

Consecințe: 1. *Dacă elementele unei linii (coloane) sînt nule, determinantul este nul.*

2. *Dacă se înmulțesc elementele unei linii (coloane) cu un număr* λ, *determinantul se înmulțește cu acel număr.*

În adevăr, dezvoltînd determinantul $\Delta = |\beta_{ik}|$ ($\beta_{ik} = \lambda a_{ik}$, $D = |a_{ik}|$; i — fix; $k = 1,2, ..., n$) după elementele liniei i, avem

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \lambda \alpha_{ki} a_{ik} = \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_{ik} = \lambda D.$$

Deci, un factor comun al tuturor elementelor dintr-o anumită linie (coloană) a unui determinant poate fi scos ca factor în *afara determinantului.*

3. *Dacă elementele unei linii, i, sînt sume de p termeni:* $a_{ik} = \sum_{\alpha=1}^{p} a_{ik}^{\alpha}$ ($k = 1, 2,...,n$), *atunci determinantul se descompune într-o sumă de p determinanți, care se deduc din determinantul dat, înlocuind pe rînd pe* a_{ik} *cu* a_{ik}^{α}:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{\alpha=1}^{p} a_{i1}^{\alpha} & \sum_{\alpha=1}^{p} a_{i2}^{\alpha} & \dots & \sum_{\alpha=1}^{p} a_{in}^{\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha=1}^{p} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}^{\alpha} & a_{i2}^{\alpha} & \dots & a_{in}^{\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

În adevăr, dezvoltînd după elementele liniei i, avem

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\alpha=1}^{p} a_{ik}^{\alpha} \right) \alpha_{ki} = \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{\alpha} \alpha_{ki} \right).$$

Să presupunem acum că determinantul D are două linii (sau coloane) formate din elemente proporționale. Scoțînd factorul de proporționalitate în baza consecinței 2 de la teorema IV, rămîne un determinant cu două linii (respectiv coloane) identice. Conform teoremei III, rezultă $D = 0$. Deci

Teorema V. Dacă două linii (coloane) sînt proporționale, determinantul este nul.

Să adăugăm la elementele unei linii (sau coloane) elementele altei linii (respectiv coloane) înmulțite cu același factor. Conform consecinței 3, teorema IV, determinantul obținut este suma a doi determinanți: unul dintre ei este chiar

determinantul dat, celălalt are două linii proporționale și, conform teoremei V, este nul. Deci

Teorema VI. Dacă la elementele unei linii (coloane) se adaugă elementele corespunzătoare ale unei alte linii (coloane) înmulțite cu același factor, obținem un determinant egal cu determinantul dat.

Iterînd, obținem

Propoziția. Dacă se adaugă la elementele unei linii (coloane) elementele corespunzătoare ale altor linii (coloane) înmulțite respectiv cu anumiți factori *, determinantul nu se schimbă.

Pe această proprietate se bazează metoda practică de calcul al unui determinant de ordinul n.

Fiind dat un determinant $D = |a_{ij}|$, dacă există n numere nenule $\lambda_i \in R$, $\lambda_i \neq 0$, $(i = 1,2,\ldots,n)$, astfel încît $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij} = 0$ $\left(\text{respectiv } \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij} = 0;\ j = 1, 2, \ldots, n\right)$, se zice că liniile (respectiv coloanele) determinantului sînt *liniar dependente*.

Teorema VII. Dacă liniile (coloanele) unui determinant sînt liniar dependente, determinantul este nul.

În adevăr, aplicînd propoziția obținută din teorema VI, putem înlocui determinantul dat cu altul egal, care are toate elementele unei linii (coloane) nule. În virtutea consecinței 1, teorema IV, acest determinant este nul.

Reciproca acestei teoreme este adevărată; demonstrația ei va fi dată ulterior.

Observații. 1) Elementele tabloului de n^2 numere, așezate în n linii și n coloane, au fost notate prin a_{ij}. Însă ele pot fi notate și prin a_j^i sau a^{ij} (i — linie, j — coloană). În unele probleme, poziția indicilor i și j este importantă și are o anumită semnificație.

2) Fiind dat un determinant D de ordinul m, putem mări ordinul determinantului fără ca valoarea lui să se schimbe. De exemplu, avem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & a \\ a_{21} & a_{22} & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a \\ 0 & a_{21} & a_{22} & b \end{vmatrix}$$

(a, b, α, β, γ fiind numere arbitrare).

Se poate demonstra ([18], p.88)

* Se înțelege că elementele aceleiași linii (coloane) care se adaugă se înmulțesc cu un același factor.

Teorema. **Fie $a = |a_{ij}|$ şi $b = |b_{ij}|$ doi determinanţi de ordinul n. Produsul acestor doi determinanţi este un determinant $c = |c_{ij}| = ab$, unde**

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} b_{ik}, \tag{19}$$

adică: elementul c_{ij} din linia i şi coloana j a lui c este egal cu suma produselor elementelor coloanei j din a cu elementele corespunzătoare ale liniei i din b.

Aplicaţii. 1) **Determinant adjunct.** Fie $D = |a_{ij}|$, un determinant de ordinul n ($i, j = 1, 2, \ldots, n$). Se numeşte *determinant adjunct* al lui D determinantul $\Delta = |\alpha_{ij}|$, care se deduce din D, înlocuind fiecare element cu complementul algebric al simetricului faţă de diagonala principală.

Să formăm produsul $D\Delta$. Aplicînd regula (19) avem

$$D\Delta = |a_{kj}| \cdot |\alpha_{ik}| = |a_{kj}\alpha_{ik}| = |D\delta_{ij}| = D^n,$$

dacă ţinem seama de relaţiile (18). Deci obţinem rezultatul: *Determinantul adjunct al lui D este dat de formula $\Delta = D^{n-1}$.*

2) **Determinant reciproc.** Se numeşte *determinant reciproc al lui D* (sau reciprocul lui D), determinantul D', obţinut împărţind cu D fiecare element al determinantului adjunct Δ. Se spune că elementele lui D' sînt complementii algebrici normalizaţi ai lui D. Rezultă că

$$D' = \frac{\Delta}{D^n} = \frac{1}{D}. \tag{20}$$

Observaţie. Ţinînd seama de teorema I, înmulţirea determinanţilor se poate face în patru moduri diferite: „linii, coloane", „linii, linii", „coloane, linii" şi „coloane, coloane". În (19) s-a folosit înmulţirea „coloane, linii".

§ 3. MATRICE

Se numeşte *matrice* un tablou A de mn numere $a_{\alpha i} \in R$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, m$; $i = 1, 2, \ldots, n$), dispuse în m linii şi n coloane:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} = \|a_{\alpha i}\|, \tag{21}$$

pentru care se dau anumite reguli de egalitate, adunare şi înmulţire.

Se spune că A este o matrice dreptunghiulară de tip (m, n); dacă $m = n$, matricea A este o matrice pătrată.

Egalitatea a două matrice se defineşte, pentru matrice de acelaşi tip, astfel: două matrice $A = \|a_{\alpha i}\|$ şi $B = \|b_{\alpha i}\|$ de tip (m, n) sînt egale, şi se notează $A = B$, dacă elementele corespunzătoare sînt egale; deci

$$A = B, \quad \text{dacă} \quad a_{\alpha i} = b_{\alpha i} \quad \text{pentru orice } \alpha \text{ şi } i. \tag{22}$$

Egalitatea matricelor are, evident, proprietăţile:

1° $A = A$ (reflexivitate);

2° dacă $A = B$, atunci $B = A$ (simetrie);

3° dacă $A = B$ şi $B = C$, atunci $A = C$ (tranzitivitate).

Suma a două matrice de același tip, $A = \|a_{\alpha i}\|$ și $B = \|b_{\alpha i}\|$, se definește ca fiind matricea $C = \|c_{\alpha i}\|$, astfel încît:

$$A + B = C, \quad \text{dacă} \quad a_{\alpha i} + b_{\alpha i} = c_{\alpha i}. \tag{23}$$

Să arătăm că *mulțimea tuturor matricelor de tip (m,n) formează un grup comutativ față de adunare.* În adevăr, operația de adunare are, evident, proprietățile:

1° $A + B = B + A$ (comutativitate);

2° $A + (B + C) = (A + B) + C$ (asociativitate).

De asemenea are proprietățile:

3° Există o matrice 0, matricea cu toate elementele nule, așa că

$$A + 0 = 0 + A = A,$$

oricare ar fi matricea A; matricea 0 se zice *matrice nulă.*

4° Pentru orice matrice $A = \|a_{\alpha i}\|$ există matricea $-A = \|-a_{\alpha i}\|$, așa încît

$$A + (-A) = (-A) + A = 0;$$

matricea $-A$ se numește *matricea opusă* matricei A.

Prin *produsul unei matrice* $A = \|a_{\alpha i}\|$ *cu un număr* $\lambda \in R$ se înțelege matricea $B = \|b_{\alpha i}\| = \lambda A$, astfel încît

$$b_{\alpha i} = \lambda a_{\alpha i}. \tag{24}$$

Înmulțirea matricelor cu numere are, evident, următoarele proprietăți: fie A și B două matrice de același tip, iar λ, $\mu \in R$; atunci

$$\begin{aligned} &1° \ \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B; \\ &2° \ (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A; \\ &3° \ \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \mu(\lambda A); \\ &4° \ 1 \cdot A = A. \end{aligned} \tag{24'}$$

Mulțimea tuturor matricelor de tip (m,n), în care s-a definit adunarea și înmulțirea cu numere (ca mai sus), va fi notată prin $\mathcal{M}_{m,n}$.

Fiind dată o matrice $A = \|a_{\alpha i}\| \in \mathcal{M}_{m,n} (\alpha = 1,2, \ldots, m;\ i = 1,2,\ldots,n)$, matricea $A^* = \|a_{i\alpha}\| \in \mathcal{M}_{n,m}$, obținută din A prin transpunere (prin schimbarea liniilor în coloane și deci a coloanelor în linii), se numește *transpusa* matricei A.

Produsul a două matrice $A = \|a_{\alpha i}\| \in \mathcal{M}_{m,n}$ și $B = \|b_{i\alpha}\| \in \mathcal{M}_{n,p}$ ($\alpha = 1,2, \ldots, m$; $i = 1,2, \ldots, n$; $\alpha = 1,2, \ldots, p$) se definește ca fiind matricea $C = \|c_{\alpha\alpha}\| \in \mathcal{M}_{m,p}$, pentru care

$$c_{\alpha\alpha} = \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i} b_{i\alpha} \tag{25}$$

și se notează

$$C = AB. \tag{25'}$$

Observăm că produsul a două matrice A și B se definește numai cu condiția ca numărul de coloane ale lui A să fie egal cu numărul de linii ale lui B.

Produsul a două matrice poate să fie nul, fără ca vreunul dintre factori să fie nul.

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ și $B \in \mathcal{M}_{n,p}$. Atunci $C = AB \in \mathcal{M}_{m,p}$.

Dacă $m \neq p$, atunci nu se poate defini produsul BA. Dacă însă $m = p$, atunci există $D = BA$, cu $D \in \mathcal{M}_{n,n}$; în acest caz, $C \in \mathcal{M}_{m,m}$. Dacă $m \neq n$, nu se poate pune problema egalității matricelor C și D. În sfîrșit, dacă și $m = n$ ($m = n = p$), cu alte cuvinte matricele A și B sînt matrice pătrate de același tip n, atunci AB și BA există și sînt de același tip n. Totuși, în general, $AB \neq BA$. Deci, în general, *produsul matricelor nu este comutativ.*

Fie $A = \|a_{\alpha i}\|$ o matrice cu m linii și n coloane ($\alpha = 1,2,\ldots,m$; $i = 1,2,\ldots,n$), deci $A \in \mathcal{M}_{m,n}$. *Rangul matricei* A este numărul natural *:

$$r \leqslant \min\,(m,n), \tag{26}$$

astfel încît cel puțin un determinant de ordinul r al matricei A este diferit de zero, dar toți determinanții de ordinul $p \geqslant r + 1$ sînt nuli. Vom scrie:

$$\text{rang } A = r \quad \text{sau} \quad r(A) = r. \tag{26'}$$

Un determinant de ordinul p al matricei A, $p \leqslant \min\,(m,n)$, este determinantul cu p linii și p coloane, obținut prin suprimarea în A a m-p linii și n-p coloane. Acest determinant se mai numește minor (de ordinul p) al matricei A. Dacă $m=n$, minorul de ordinul n este determinantul $|A|$ al matricei A.

Putem considera o linie $(a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2}, \ldots, a_{\alpha n})$ a matricei A ca o matrice de tip $(1,n)$, iar o coloană $(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})$ ca o matrice de tip $(m,1)$. Matricele cu o singură linie sau o singură coloană se numesc *vectori*, și anume: *vectori-linie*, respectiv *vectori-coloană*. Deci, fiind dată o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, ea determină m vectori-linie de tip $(1,n)$ și n vectori-coloană de tip $(m,1)$:

$$\tilde{A}_\alpha = \|a_{\alpha 1} a_{\alpha 2} \ldots a_{\alpha n}\|, \quad \tilde{A}_i = \begin{Vmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{Vmatrix}.$$

Despre un sistem de p vectori $A_1, A_2, \ldots, A_p$ (vectori-linie sau vectori-coloană) se spune că sînt *liniar-dependenți*, dacă există p numere reale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, dintre care cel puțin unul nenul, astfel încît

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha A_\alpha = 0.$$

În caz contrar, vectorii sînt *liniar independenți*.

Să demonstrăm

Propoziția. Numărul maxim de linii (vectori-linie) liniar independente ale unei matrice este egal cu numărul maxim de coloane (vectori-coloane) liniar independente, și acest număr este egal cu rangul matricei.

* Prin min (m, n) înțelegem cel mai mic număr din numerele m și n.

În adevăr, să considerăm matricea $A = \|a_{ai}\| \in \mathcal{M}_{m,n}$ și fie $r = r(A)$. Pentru simplificare să presupunem că

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots\dots\dots & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Observăm că primele r linii, respectiv primele r coloane, sînt liniar independente între ele: dacă ele ar fi liniar dependente, atunci între liniile (coloanele) determinantului D ar exista o dependență liniară și deci, conform teoremei VII, § 2, D ar fi egal cu zero.

Să arătăm că fiecare coloană l $(r < l \leqslant n)$ a matricei A este o combinație liniară a primelor r coloane. Să considerăm o linie i arbitrară, $1 \leqslant i \leqslant m$ și să construim determinantul de ordinul $r + 1$, obținut prin bordarea minorului D cu elementele coloanei l și liniei i:

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1r} & a_{1l} \\ \dots\dots\dots & \\ a_{r1} \dots a_{rr} & a_{rl} \\ a_{i1} \dots a_{ir} & a_{il} \end{vmatrix}, \quad (i = 1,2, \dots, m;\ r < l \leqslant n).$$

Determinanții D_i sînt nuli, deoarece pentru $i \leqslant r$, D_i are două linii identice, iar pentru $i > r$, D_i este un minor al matricei A, de ordin mai mare decît r. Observăm că în fiecare determinant D_i complementul algebric al lui a_{il} este D, iar complementul algebric al lui a_{ij} $(1 \leqslant j \leqslant r)$ este independent de i, de aceea îl vom nota cu Δ_j. Dezvoltînd pe D_i după elementele ultimei linii, avem

$$D_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\,\Delta_j + a_{il}\,D = 0.$$

Cum $D \neq 0$, rezultă

$$a_{il} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_{ij}, \quad \text{cu } \lambda_j = -\frac{\Delta_j}{D},$$

ceea ce arată că coloana l $(r < l \leqslant n)$ a matricei A este o combinație liniară de primele r coloane. Rezultă că numărul maxim de coloane liniar independente ale matricei A este egal cu rangul acestei matrice.

Pe de altă parte, transpusa A^* a matricei A are același rang ca A. Deci, numărul liniilor liniar independente ale unei matrice este egal cu numărul coloanelor liniar independente (și egal cu rangul matricei).

Observație. Se obține astfel și o metodă pentru determinarea rangului unei matrice A. În adevăr, să presupunem că în matricea A am găsit un minor D de ordinul $r \neq 0$. Dacă sînt nuli toți minorii de ordinul $r + 1$, care se obțin bordînd minorul D cu elementele coloanei l $(r < l \leqslant n)$ și liniei i $(r < i \leqslant m)$ din A atunci matricea A are rangul r.

CAPITOLUL III

SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

§ 1. SISTEME ECHIVALENTE DE ECUAȚII LINIARE

Un sistem (S) de ecuații este un *sistem de ecuații liniare*, dacă fiecare ecuație este o *ecuație liniară*, adică un polinom de gradul întîi în necunoscute egalat cu zero. Un astfel de sistem se scrie

$$(S):\quad \begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1 = 0,\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - b_2 = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - b_m = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

unde x_i sînt necunoscutele, $a_{\alpha i} \in R$ sînt coeficienții necunoscutelor, iar $b_\alpha \in R$ sînt termenii liberi. Sistemul (1) de m ecuații liniare cu n necunoscute se mai poate scrie sub forma

$$(S):\ S_\alpha \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}x_i - b_\alpha = 0 (\alpha, \beta, \ldots, = 1, 2, \ldots, m;\ i, j \ldots = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1')$$

sau încă *

$$(S):\ S_\alpha \equiv a_{\alpha i}x_i - b_\alpha = 0. \qquad (1'')$$

Un sistem de numere reale pentru necunoscute satisfăcînd relațiile de egalitate ale sistemului de ecuații (S) constituie o *soluție* a sistemului (S).

Sistemul de ecuații (S) se zice că este *compatibil*, dacă (S) admite cel puțin o soluție; în acest caz, sistemul este *determinat* (sau ne aflăm într-un caz de *unicitate*) sau *nedeterminat*, după cum sistemul admite o singură soluție sau mai multe soluții distincte. În caz contrar, deci cînd sistemul (S) nu admite

---

* Vom face convenția (dacă nu specificăm contrariul) că un indice care se repetă arată că se sumează după acest indice.

o soluție, sistemul se zice că este *incompatibil*; atunci ecuațiile sistemului (*S*) luate împreună duc la o absurditate.

Sistemului (1'') i se asociază matricea

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{matrix} \right\| = \| a_{\alpha i} \|, \tag{2}$$

formată cu ajutorul coeficienților $a_{\alpha i}$ ai necunoscutelor din sistemul (1''). Se mai spune că *matricea A* este asociată sistemului (1'') sau, mai simplu, că *A* este matricea sistemului (1'').

Se numește *rangul unui sistem* de ecuații liniare (1''), rangul matricei *A* asociată sistemului. Rezultă că rangul sistemului (1'') depinde numai de sistemul $a_{\alpha i}$ al coeficienților necunoscutelor, adică este independent de valorile termenilor liberi b_α; cu alte cuvinte, rangul unui sistem (*S*) nu depinde de faptul că (*S*) este sau nu compatibil. Definim matricea *A'*, numită *matricea extinsă* a sistemului (1''), astfel

$$A' = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & b_m \end{matrix} \right\| = \| a_{\alpha i} b_\alpha \| = \| A;\ B \|,\ B = \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \right\|. \tag{3}$$

Observăm că *A'* este matricea obținută din *A*, la care s-a adăugat coloana *B*. Se observă că $r(A') = r(A)$ sau $r(A') = r(A) + 1$, adică rangul matricei extinse *A'* a sistemului (*S*) este egal sau mai mare cu o unitate decît rangul matricei asociate *A* a lui (*S*). În adevăr, să considerăm în *A* un sistem (*S'*) de coloane liniar independente, maximal*; atunci, coloanele (*S'*) vor fi liniar independente și în *A'*: dacă ele vor constitui un sistem maximal — deci, coloana termenilor liberi se exprimă liniar în funcție de coloanele din (*S'*)— avem $r(A') = r(A)$; dacă ele nu constituie un sistem maximal, adăugînd la (*S'*) și coloana termenilor liberi, obținem un sistem $(S'') = (S', B)$, de coloane liniar independente maximal în *A'*, deci $r(A') = r(A) + 1$.

Sistemul de ecuații liniare (1'') se zice că este *neomogen* sau *omogen*, după cum $b_\alpha \neq 0$ sau $b_\alpha = 0$.

Ecuațiile sistemului (1'') se zic *liniar independente*, dacă nu există nici un sistem de numere $\lambda_\alpha \in R$ (R — corpul numerelor reale), în afară de $\lambda_\alpha = 0$, pentru care

$$\lambda_\alpha S_\alpha = 0. \tag{4}$$

În caz contrar, deci cînd există astfel de numere reale, nu toate nule, satisfăcînd relația (4), ecuațiile (1'') se zic *liniar dependente*. În acest ultim caz, unele dintre ecuațiile sistemului (1'') se exprimă ca o combinație liniară de celelalte ecuații ale sistemului.

* Spunem că sistemul (*S'*) este *maximal* în *A*, dacă (*S'*) este format din totalitatea coloanelor liniar independente ale lui *A*.

Două sisteme de ecuații liniare, cu același număr de necunoscute x_i ($i = 1,2,\ldots,n$), se numesc *echivalente*, dacă ele admit aceeași soluție (deci sînt verificate pentru aceleași valori ale necunoscutelor). Este evident că această noțiune are proprietățile echivalenței:

1° *Reflexivitatea.* Un sistem (S) este echivalent cu el însuși.

2° *Simetria.* Dacă sistemul (S) este echivalent cu un alt sistem (S'), atunci și (S') este echivalent cu (S).

3° *Tranzitivitatea.* Dacă (S) este echivalent cu (S') și acesta cu un altul (S''), atunci (S) este echivalent cu (S'').

Observăm că dacă (S) este un sistem de ecuații liniare, atunci — evident — avem proprietățile:

I) *Schimbînd ordinea ecuațiilor sistemului* (S), *obținem un alt sistem* (S') *echivalent cu* (S).

II) *Schimbînd ordinea necunoscutelor în sistemul* (S), *obținem un alt sistem* (S') *echivalent cu* (S).

III) *Adunînd unei ecuații a sistemului* (S) *o altă ecuație din sistem, înmulțită cu un număr, obținem un sistem* (S') *echivalent cu* (S); *deci sistemele*

$$(S):\quad S_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

$$(S'):\begin{cases} S'_\sigma = S_\sigma = 0, \\ S'_m = S_m + \lambda S_1 = 0, \end{cases} \qquad (\sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1) \tag{5}$$

cu $\lambda \in R$, *sînt echivalente.*

Trecerile de tip I), II), III) de la un sistem de ecuații liniare (S) la un sistem echivalent (S') se numesc *operații elementare de echivalență.*

Iterarea (aplicare repetată) operației elementare de echivalență de tip III) ne duce la *rezultatul*:

Fiind dat un sistem de ecuații liniare (S), *obținem un sistem echivalent* (S'), *înlocuind fiecare ecuație a sistemului* (S) *printr-o combinație liniară e ecuațiilor sistemului* (S); *deci sistemele*

$$(S):\ S_\alpha = 0 \quad \textit{și} \quad (S'):\ S'_\alpha \equiv \lambda_{\alpha\beta}\ S_\beta = 0,\ (\alpha, \beta = 1,2,\ldots,m) \tag{5'}$$

cu $\lambda_{\alpha\beta} \in R$ *iar* $|\lambda_{\alpha\beta}| \neq 0$, *sînt echivalente.*

Fie (S) un sistem de ecuații liniare. Rezolvarea unui astfel de sistem comportă următoarele etape:

1° Determinarea unei condiții necesare și suficiente de compatibilitate a sistemului (S).

2° În caz de compatibilitate a sistemului (S), determinarea unei condiții necesare și suficiente de unicitate a soluției sistemului (S) (deci, totodată, condiția contrarie de nedeterminare).

3°. În caz de compatibilitate a sistemului (S), calculul efectiv al soluției (unice sau a fiecărei soluții) printr-un număr finit de operații (raționale) asupra ecuațiilor sistemului (S).

Determinarea unui sistem echivalent (S') obținut printr-un număr finit de operații elementare de echivalență, astfel încît să ducă la eliminarea unor necunoscute din sistemul (S), permite calculul efectiv al soluției sistemului dat (S).

Aplicații. 1) **Regula lui Cramer. Fie** (S) **un sistem de** n **ecuații liniare cu** n **necunoscute**

$$(S):\ S_i \equiv a_{ij}x_j - b_i = 0, \qquad (i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

iar

$$r(A) = n, \quad \text{adică } D = |\, a_{ij} \,| \neq 0, \quad (A = \| a_{ij} \|). \tag{6'}$$

Atunci sistemul (S) **este echivalent cu următorul**

$$(S'):\ x_i = \frac{D_i}{D}, \tag{6''}$$

unde

$$D_i = \alpha_{ij}b_j, \tag{6'''}$$

α_{ij} **fiind complementul algebric al lui** a_{ji} **în determinantul** D.

În adevăr, să înmulțim ecuația $S_i = 0$ a sistemului (S) cu α_{ki} și să sumăm după i:

$$(S'):\ S'_k = \alpha_{ki}S_i = 0.$$

Ținînd seama de relațiile (18) din capitolul II:

$$\alpha_{ki}a_{ij} = D\delta_{kj},$$

sistemul (S') se scrie

$$D\delta_{kj}x_j - \alpha_{ki}b_i = 0 \text{ sau } Dx_i - D_i = 0.$$

Deoarece $D \neq 0$, rezultă că sistemul (S') este de forma (6''), care — conform rezultatului (5') — este echivalent cu sistemul (S). Deci, valorile (6'') *ale lui* x_i *constituie soluția unică a sistemului* (6).

2) **Reciproca teoremei VII, § 2, cap. II. Dacă un determinant este nul, atunci liniile (coloanele) acestui determinant sînt liniar dependente** *.

În adevăr, fie determinantul

$$D' = |\, a_{\alpha\beta} \,| = \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{in+1} \\ a_{n+1j} & a_{n+1\ n+1} \end{vmatrix} = 0,$$

$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n+1;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$, iar

$$D = |\, a_{ij} \,| \neq 0.$$

Cu ajutorul elementelor a_{ij}, a_{in+1}, obținute din primele n linii ale lui D', formăm următorul sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute

$$a_{ij}x_j - a_{in+1} = 0.$$

* Rezultă deci următoarea

Teoremă: Condiția necesară și suficientă ca un determinant să fie nul este ca între liniile (coloanele) sale să existe o dependență liniară.

Pe de o parte, fiind în condițiile regulii lui Cramer, acest sistem admite o soluție unică $x_i = \lambda_i$, astfel încît

$$a_{in+1} = \lambda_j a_{ij}. \tag{7}$$

Pe de altă parte, înmulțind cu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectiv elementele coloanelor $1, 2, \ldots, n$ din D și scăzîndu-le din elementele corespunzătoare ale ultimei coloane, obținem

$$D' = \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 \\ a_{n+1j} & a_{n+1n+1} - \lambda_j a_{n+1j} \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltînd acest determinant după elementele ultimei coloane, avem

$$D' = D\,(a_{n+1\,n+1} - \lambda_j a_{n+1j}) = 0;$$

și cum $D \neq 0$, găsim

$$a_{n+1\,n+1} = \lambda_j a_{n+1j}. \tag{7'}$$

Din (7) și (7') rezultă

$$a_{\alpha\,n+1} = \lambda_j a_{\alpha j}, \tag{7''}$$

adică *elementele ultimei coloane a lui D' sînt combinații liniare de elementele corespunzătoare ale celorlalte coloane.* Pentru linii, demonstrația este identică.

§ 2. DISCUȚIA SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE

Fie (S) un sistem de m ecuații (1'') liniare cu n necunoscute. Problema compatibilității unui astfel de sistem se rezolvă complet prin

Teorema lui Kronecker-Capelli. O condiție necesară și suficientă pentru compatibilitatea sistemului (S) este ca

$$r(A) = r(A'), \tag{8}$$

unde A și A' sînt matricea asociată și matricea extinsă ale sistemului (S).

În adevăr, să presupunem sistemul (S) compatibil. Fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ una din soluțiile lui. Înlocuind-o în (S), obținem

$$a_{\alpha i}\,\lambda_i = b_\alpha \text{ sau încă } A'_i\lambda_i = B, \tag{8'}$$

unde

$$A'_i = \begin{Vmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix} \text{ și } \Sigma' = \{A'_1, B\},$$

A'_i, B fiind vectorii-coloană din matricea extinsă A'; deci $(8')$ arată că vectorul-coloană B este liniar dependent de vectorii-coloană A'_i. Să considerăm vectorii-coloană din matricea atașată A a sistemului; fie

$$A_i = \begin{Vmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{Vmatrix} \text{ și } \Sigma = \{A_i\}.$$

Însă $r(A)=r$; deci există un subsistem maximal $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, compus din r vectori-coloană liniar independenți. Observăm că $A'_i = A_i$; deci vectorii-coloană din Σ', care au același indice cu cîte un vector-coloană din Σ_0, formează subsistemul $\Sigma'_0 \subseteq \Sigma'$ și totodată sînt liniar independenți în Σ'. Acest subsistem Σ'_0 este maximal în Σ', dacă ținem seama de relația (8'); deci $r(A') = r$. De aici rezultă condiția (8). Reciproc, dacă avem condiția (8), atunci vectorul-coloană B este liniar dependent de vectorii A'_i, deoarece, în caz contrar

$$r(A') = r(\Sigma') > r(\Sigma) = r(A),$$

ceea ce contrazice ipoteza inițială (8). Deci există n numere $\lambda_i \in R$, astfel încît

$$B = \lambda_i A'_i = \lambda_i A_i \text{ sau încă } a_{\alpha i}\lambda_i = b_\alpha,$$

de unde rezultă că sistemul (S) admite soluția $x_i = \lambda_i$; deci (S) este compatibil.

Observăm că teorema lui Kronecker-Capelli nu dă un mod practic de găsire a soluției sistemului (S), ci asigură numai existența compatibilității sistemului (S). De altfel, pentru aplicarea practică a acestei teoreme este necesar să se calculeze atît rangul matricei A cît și rangul matricei A', calcule care nu sînt simple. În adevăr, pentru calculul rangului matricei A este necesar să determinăm determinantul D diferit de zero, de ordinul r maxim, pentru care determinanții D' de ordinul $r+1$, care-l bordează în A, să fie nuli. Este necesar apoi să determinăm determinanții Δ de ordinul $r+1$ din A', obținuți prin bordarea lui D cu elemente din coloana termenilor liberi și elementele unei linii care nu aparține lui D. Acești determinanți Δ se numesc *determinanți caracteristici*. Dacă toți determinanții caracteristici sînt nuli, $\Delta = 0$, atunci coloana termenilor liberi este o combinație liniară a celor r coloane care aparțin lui D; deci, $r(A') = r(A)$ și sistemul (S) este compatibil. Dacă vreunul din ei este diferit de zero, atunci $r(A') > r(A)$ și sistemul (S) este incompatibil.

Am stabilit deci că teorema lui Kronecker-Capelli este echivalentă cu

Teorema lui Rouché. Sistemul (S) de ecuații liniare este compatibil, dacă și numai dacă toți determinanții caracteristici sînt nuli.

Să presupunem acum că rangul sistemului (S) este r; deci

$$r(S) = r(A) = r \leqslant \min(m, n). \tag{9}$$

Cu alte cuvinte există un determinant nenul D de ordinul r, format cu ajutorul coeficienților necunoscutelor, r fiind ordinul maxim al determinanților nenuli, determinant ce va fi numit *principal*. Prin operații elementare de echivalență (schimbînd ordinea ecuațiilor și a necunoscutelor, dacă este necesar) putem să facem ca primele r ecuații și primele r necunoscute să fie cele care intervin în determinantul principal D. Aceste prime r ecuații și prime r necunoscute care intervin în determinantul principal D se numesc *ecuații principale* și *necunoscute principale*, celelalte $m-r$ ecuații și $n-r$ necunoscute, numindu-se *ecuații secundare*

(auxiliare) și *necunoscute secundare (auxiliare)*. Deci putem descompune sistemul (S) în două subsisteme:

$$\begin{aligned} &(S'): \quad a_{\lambda i}x_i - b_\lambda = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, r) \\ &(S''): \quad a_{\lambda' i}x_i - b_{\lambda'} = 0, \qquad (\lambda' = r+1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{10}$$

(S') fiind sistemul ecuațiilor principale, iar (S'') sistemul ecuațiilor secundare. Fie $\alpha_{\mu\lambda}$ minorul lui $a_{\lambda\mu}$ în $D = |a_{\lambda\mu}| \neq 0$. Atunci, pentru sistemul (S') putem aplica regula lui Cramer. Deci, multiplicînd ecuația $S_\lambda \in (S')$ cu $\alpha_{\mu\lambda}$ și sumînd după λ, obținem sistemul redus (S^*), care este echivalent cu (S'):

$$\alpha_{\mu\lambda}S_\lambda = \alpha_{\mu\lambda}a_{\lambda\sigma}x_\sigma + \alpha_{\mu\lambda}a_{\lambda i'}x_{i'} - \alpha_{\mu\lambda}b_\lambda = 0, \ (i', j' = r+1, \ldots, n)$$

sau încă

$$D\delta_{\mu\sigma}x_\sigma + \alpha_{\mu\lambda}a_{\lambda i'}x_{i'} - \alpha_{\mu\lambda}b_\lambda = 0;$$

adică

$$(S^*): \quad x_\mu = \frac{1}{D}\alpha_{\mu\lambda}(b_\lambda - a_{\lambda i'}x_{i'}). \tag{10'}$$

Dacă $r = m$, adică toate ecuațiile sînt principale, sistemul (S'') nu apare și deci problema este rezolvată. Pentru fiecare sistem de valori atribuite necunoscutelor secundare obținem un sistem de valori pentru necunoscutele principale; în definitiv obținem o soluție a sistemului (S):

$$x_\mu = \frac{1}{D}\alpha_{\mu\lambda}(b_\lambda - a_{\lambda i'}\xi_{i'}), \quad x_{i'} = \xi_{i'}. \tag{10''}$$

Deci, *sistemul* (S) este *compatibil*, putînd fi *determinat* sau *nedeterminat*, după cum $m = n$ sau $m < n$.

Dacă $r < m$, va trebui să examinăm și ecuațiile sistemului auxiliar (S''), care n-au intrat în considerație. Fie determinanții

$$\begin{vmatrix} a_{\nu\mu} & a_{\nu\varepsilon'} \\ a_{\lambda'\mu} & a_{\lambda'\varepsilon'} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{\nu\mu} & b_\nu \\ a_{\lambda'\mu} & b_{\lambda'} \end{vmatrix}, \qquad (|a_{\mu_\nu}| = D \neq 0),$$

ultimii determinanți fiind determinanți caracteristici. Primii determinanți sînt nuli, deoarece prin ipoteză $r(S) = r$; deci, după rezultatul aplicației 2 din § 2 (reciproca teoremei VII) există numerele $k_{\lambda'\mu}$ (nedepinzînd de ε'), astfel încît

$$a_{\lambda' i} = k_{\lambda'\mu}a_{\mu i}, \tag{11}$$

adică *coeficienții necunoscutelor ecuațiilor din sistemul secundar* (S'') *sînt combinații liniare de coeficienții necunoscutelor ecuațiilor sistemului principal* (S'). Pe de altă parte, determinanții caracteristici pot fi nuli sau diferiți de zero; adică avem

$$a) \ b_{\lambda'} = k_{\lambda'\nu}b_\nu \quad \text{sau} \quad b) \ b_{\lambda'} \neq k_{\lambda'\nu}b_\nu. \tag{11'}$$

Faptul că intervin aceleași constante în (11) și (11'), rezultă astfel: ținem seama de (11) în (S''), apoi de (S'); avem

$$k_{\lambda'\nu}(a_{\nu i}x_i) - b_{\lambda'} = 0, \quad \text{adică} \quad k_{\lambda'\nu}b_\nu - b_{\lambda'} = 0. \tag{11''}$$

În cazul (11'a)) rezultă că ecuațiile sistemului secundar (S'') sînt liniar dependente de ecuațiile sistemului principal (S'), caz în care sistemul (S) este echivalent cu sistemul redus (S^*); deci, sistemul este compatibil. În cazul (11'b)) rezultă că ecuațiile sistemului secundar (S'') sînt incompatibile cu ecuațiile sistemului principal (S'), după cum rezultă comparînd (11'b)) cu (11''). Deci avem următorul *rezultat*:

În general, sistemul redus al lui (S) este (S^*), celelalte ecuații secundare (S'') fiind sau liniar dependente de ecuațiile sistemului principal (S') sau incompatibile cu ele, după cum determinanții caracteristici sînt nuli sau unii dintre ei sînt diferiți de zero.

În cazul cînd sistemul (S) este compatibil, rezultă că o soluție a sistemului este (10''). Deci, *sistemul* (S) este *compatibil determinat* sau *compatibil nedeterminat*, după cum $r = n$ sau $r < n$.

Rezultă deci următoarea

Propoziție. Sistemul compatibil (S) admite o soluție unică, dacă și numai dacă rangul matricei A a sistemului (S) este egal cu numărul necunoscutelor.

Uneori, *teorema lui Rouché* este formulată astfel:

Fie un sistem (S) de ecuații liniare, de rang r.

Dacă determinanții caracteristici nu sînt toți nuli, sistemul (S) este incompatibil.

Dacă acești determinanți sînt toți nuli, sistemul (S) este compatibil și se pot alege r ecuații și r necunoscute din (S), astfel încît determinantul coeficienților acestor r necunoscute din cele r ecuații să fie diferit de zero; dacă se rezolvă sistemul celor r ecuații alese în raport cu cele r necunoscute, considerînd restul de n-r necunoscute ca pe niște parametri arbitrari (conform regulii lui Cramer), soluția sistemului astfel ales verifică și restul de m-r ecuații ale sistemului (S).

§ 3. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE OMOGENE

Fie (S) un sistem de ecuații liniare omogene:

$$(S): \quad a_{\alpha i}x_i = 0, \quad (\alpha, \beta = 1,2,\ldots,m; \quad i, j = 1,2,\ldots,n). \tag{12}$$

Observăm că matricea extinsă

$$A' = \| a_{\alpha i}\, 0 \| = \| A\,;\, 0 \|$$

are același rang ca matricea asociată

$$A = \| a_{\alpha i} \|,$$

deoarece prin adăugarea coloanei zerourilor nu putem ridica rangul matricei. Utilizînd teorema lui Kronecker-Capelli, deducem că *un sistem de ecuații liniare omogene este totdeauna compatibil.* De altfel, sistemul (12) admite *soluția* $x_i = 0$, numită *soluția banală.*

Din teorema lui Rouché și din regula lui Cramer rezultă

Teorema I. Pentru ca un sistem de ecuații liniare omogene să admită și alte soluții decît cea banală, este necesar și suficient ca rangul sistemului să fie mai mic decît numărul necunoscutelor.

De altfel, dacă $r = r(A) = n$, din propoziția de la paragraful precedent rezultă că soluția banală este singura soluție a sistemului.

Teorema II. Pentru ca un sistem de n ecuații liniare omogene cu n necunoscute să admită o soluție diferită de cea banală, este necesar și suficient ca determinantul coeficienților să fie nul.

Necesitatea condiției rezultă din faptul că sistemul

$$(S): \ a_{ij}x_j = 0, \text{ dacă } D \neq 0,$$

este — conform regulii lui Cramer — echivalent cu sistemul

$$(S^*): \ Dx_i = 0.$$

Sistemul (S^*) admite și alte soluții decît cea banală, numai dacă $D = 0$.
Suficiența condiției rezultă din teorema lui Rouché: anularea determinantului $D = |a_{ij}|$ este echivalentă cu afirmația că $r(A) < n$.
De asemenea, avem

Teorema III. Soluția generală a unui sistem de n-1 ecuații liniare omogene, liniar independente, cu n necunoscute.

$$(S): \ a_{\alpha i}x_i = 0, \quad (\alpha = 1,2,\ldots,n-1; \quad i = 1,2,\ldots,n) \tag{13}$$

se obține scriind că necunoscutele $x_1,\ldots,x_n$ sînt proporționale cu determinanții $A_1,\ldots,A_n$ de ordinul n—1; A_i este determinantul format cu elementele matricei $A = \| a_{\alpha i} \|$, asociată sistemului (S) prin eliminarea coloanei i, înmulțit cu $(-1)^{i-1}$.

În adevăr, deoarece prin ipoteză $r(A) = n-1$, rezultă că unul din minorii de ordinul n—1 este diferit de zero; fie deci

$$a = |a_{\alpha\beta}| \neq 0.$$

Atunci, $\alpha_{\beta\alpha}$ fiind complementul algebric al lui $a_{\alpha\beta}$ în determinantul a, avem

$$\alpha_{\beta\alpha}a_{\alpha i}x_i = 0 \quad \text{sau} \quad \alpha_{\beta\alpha}a_{\alpha\gamma}x_\gamma + \alpha_{\beta\alpha}a_{\alpha n}x_n = 0.$$

Cum

$$\alpha_{\beta\alpha}a_{\alpha\gamma} = a\delta_{\beta\gamma}, \quad \alpha_{\beta\alpha}a_{\alpha n} = D_\beta,$$

rezultă că sistemul (S^*), echivalent cu sistemul (S), se scrie

$$(S^*): \ ax_\beta + D_\beta x_n = 0.$$

Deoarece $D_\beta = (-1)^n A$, $a = (-1)^{n-1}A_n$, sistemul (S^*)

devine

$$(-1)^{n-1}A_n x_\beta + (-1)^n A_\beta x_n = 0, \quad \text{sau încă} \quad A_n x_\beta - A_\beta x_n = 0.$$

Punînd $x_n = kA_n$, rezultă $x_\beta = kA_\beta$; deci avem

$$\frac{x_1}{A_1} = \frac{x_2}{A_2} = \ldots = \frac{x_n}{A_n},$$

ceea ce era de demonstrat.

PARTEA A TREIA

GEOMETRIA ÎN PLAN

CAPITOLUL IV

SISTEME DE COORDONATE ÎN PLAN

§ 1. PROIECȚII

În geometrie se consideră mai multe feluri de proiecții; de exemplu:

a) **Proiecția paralelă cu o direcție dată** a unui punct P din plan pe o dreaptă u din plan este intersecția P' a dreptei u cu paralela la direcția dată, dusă prin punctul considerat (fig.1).

Dacă direcția dată este perpendiculară pe dreapta u, atunci proiecția se zice că este o *proiecție ortogonală.*

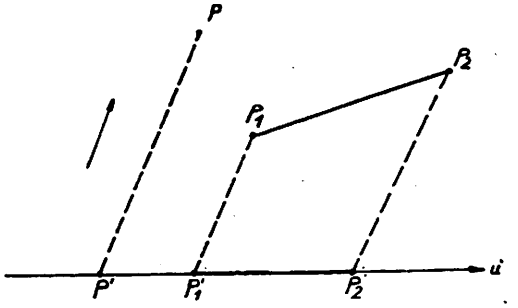


Fig. 1

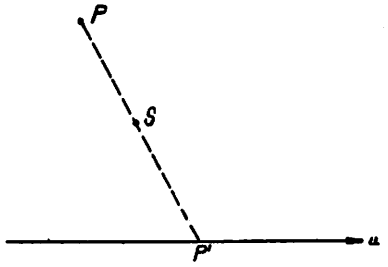


Fig. 2

b) **Proiecția centrală** a unui punct oarecare P din plan pe o dreaptă u din plan este intersecția P' a dreptei u cu dreapta PS, unde S este un punct fix din plan, numit centrul de proiecție (fig.2).

În cele ce urmează vom considera proiecția paralelă cu o direcție dată pe o axă u. Proiecția paralelă cu o direcție dată a unui segment $\overline{P_1P_2}$ pe axa u este lungimea segmentului $\overline{P_1'P_2'}$, ale cărei extremități sînt proiecțiile originii și extremității segmentului dat; deci *)

$$pr_u\,\overline{P_1P_2} = P_1'P_2'. \tag{1}$$

---

* Adică, proiecția unui segment (orientat) $\overline{P_1P_2}$ pe o dreaptă u este un scalar egal cu lungimea $P_1'P_2'$ a segmentului de proiecție $\overline{P_1'P_2'}$. Segmentul $\overline{P_1'P_2'}$ se mai numește componenta segmentului $\overline{P_1P_2}$ pe dreapta u ([22], p. 121).

Să introducem un sistem de coordonată abscisă pe dreapta u. Fie x_i abscisa punctului $P_i'(i = 1,2)$; deoarece $P_1'P_2' = x_2 - x_1$, rezultă

$$\text{pr}_u\overrightarrow{P_1P_2} = x_2 - x_1, \tag{1'}$$

adică *proiecția unui segment* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *pe axa u este egală cu diferența dintre abscisele extremității și originii proiecției segmentului dat.*

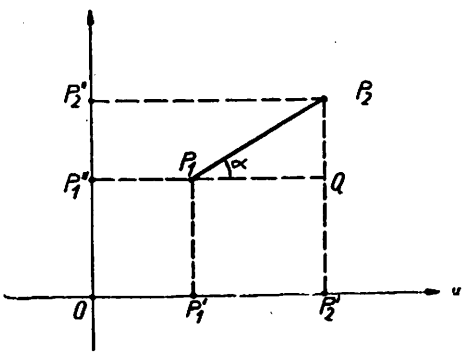


Fig. 3

Deoarece segmentele $\overrightarrow{P_1P_2}$ și $\overrightarrow{P_2P_1}$ sînt egale și de semne contrarii, rezultă că și proiecțiile lor sînt egale și de semne contrarii, adică

$$\text{pr}_u\overrightarrow{P_1P_2} = -\text{pr}_u\ \overrightarrow{P_2P_1}, \tag{2}$$

ceea ce are loc dacă ținem seama de (5) din capitolul 1.

Dacă segmentul $\overrightarrow{P_1P_2}$ este paralel cu direcția dată, proiecția lui este nulă, iar dacă acesta este paralel cu dreapta u, proiecția segmentului este egală cu lungimea lui.

În cazul unei proiecții ortogonale, din triunghiul dreptunghic P_1QP_2 (fig. 3) rezultă

$$\text{pr}_u\overrightarrow{P_1P_2} = P_1P_2 \cdot \cos\alpha, \tag{3}$$

unde α este unghiul pe care-l face direcția pozitivă a axei u cu dreapta P_1P_2. Deci putem enunța

Teoremă. Proiecția ortogonală a unui segment $\overrightarrow{P_1P_2}$ pe o axă u este egală cu lungimea segmentului $\overrightarrow{P_1P_2}$ înmulțită cu cosinusul unghiului pe care această axă îl face cu dreapta P_1P_2.

Fie $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$ două segmente orientate, astfel încît punctul de aplicație al unuia coincide cu extremitatea celuilalt. Segmentul orientat $\overrightarrow{AC}$ se numește *rezultanta* sau *suma* segmentelor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$; vom nota în scris

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}. \tag{4}$$

Se observă imediat că fiind date trei segmente $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_3P_4}$ avem

$$\overrightarrow{P_1P_2} + (\overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4}) = (\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3}) + \overrightarrow{P_3P_4}. \tag{4'}$$

Să considerăm acum linia poligonală determinată de segmentele $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_3}$,..., $P_{n-1}P_n$; segmentul $\overrightarrow{P_1P_n}$, care închide această linie poligonală, va fi *rezultanta* liniei poligonale $P_1P_2 \ldots P_n$:

$$\overrightarrow{P_1P_n} = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n}. \tag{5}$$

Proiectînd paralel cu o direcție dată pe dreapta u, linia poligonală $P_1P_2...P_n$, avem pe dreapta u identitatea (fig. 4)

$$\overline{P_1'P_n'} = \overline{P_1'P_2'} + \overline{P_2'P_3'} + \ldots + \overline{P_{n-1}'P_n'} \qquad (5')$$

sau încă

$$pr_u\overline{P_1P_n} = pr_u(\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \ldots + \overline{P_{n-1}P_n}), \qquad (5'')$$

adică *proiecția paralelă cu o direcție dată a unei linii poligonale pe o dreaptă* u *este egală cu proiecția rezultantei.* Deci rezultă că

$$pr_u(\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \ldots + \overline{P_{n-1}P_n}) = \\ = pr_u\overline{P_1P_2} + pr_u\overline{P_2P_3} + \\ + \ldots + pr_u\overline{P_{n-1}P_n}, \qquad (5''')$$

adică *proiecția unei linii poligonale este egală cu suma proiecțiilor laturilor liniei poligonale.*

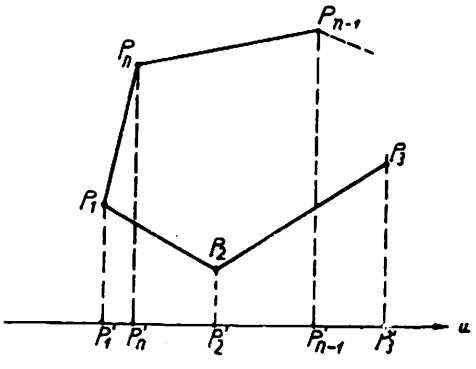


Fig. 4

De aici rezultă și următoarea

Propoziție. Proiecțiile pe o dreaptă a două linii poligonale care au aceleași extremități sînt egale, adică

$$pr_u(\overline{PA_1} + \overline{A_1A_2} + \ldots + \overline{A_{m-1}A_m} + \overline{A_mQ}) = pr_u(\overline{PB_1} + \overline{B_1B_2} + \ldots + \\ + \overline{B_{n-1}B_n} + \overline{B_nQ}). \qquad (5^{IV})$$

De asemenea, avem următorul *rezultat*:

Într-o proiecție paralelă cu o direcție dată, *suma proiecțiilor laturilor unui contur poligonal închis pe o dreaptă este nulă.*

Fie $\overline{P_1P_2}$, $\overline{Q_1Q_2}$ două segmente paralele, iar P_1', P_2' și Q_1', Q_2' proiecțiile paralele cu o direcție pe dreapta u ale extremităților acestor segmente. Din triunghiurile asemenea P_1RP_2, Q_1SQ_2 (fig. 5) avem:

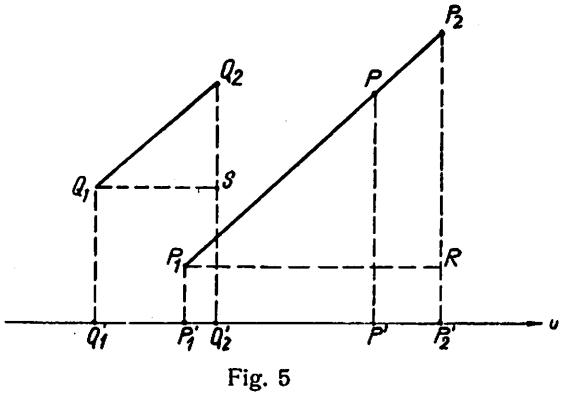


Fig. 5

$$\frac{\overline{P_1R}}{\overline{Q_1S}} = \frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{Q_1Q_2}}.$$

Însă cum

$$P_1R = P_1'P_2' = pr_u\overline{P_1P_2},$$

$$Q_1S = Q_1'Q_2' = pr_u\overline{Q_1Q_2},$$

relația precedentă devine

$$\frac{pr_u\overline{P_1P_2}}{pr_u\overline{Q_1Q_2}} = \frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{Q_1Q_2}},$$

care se exprimă astfel: *într-o proiecție paralelă cu o direcție dată, raportul proiecțiilor a două segmente paralele este egal cu raportul celor două segmente date.*

Ca o consecință rezultă:

Proiecția paralelă cu o direcție dată pe o dreaptă u lasă neschimbată valoarea raportului simplu a trei puncte coliniare, ceea ce se poate scrie sub forma

$$\mathrm{pr}_u(P_1P_2P) = (P_1P_2P), \tag{6}$$

dacă se notează *

$$\mathrm{pr}_u(P_1P_2P) = (P_1'P_2'P') = \frac{\overline{P_1'P'}}{\overline{P_2'P'}} = \frac{\mathrm{pr}_u\overline{P_1P}}{\mathrm{pr}_u\overline{P_2P}}. \tag{6'}$$

De altfel, acest rezultat se obține și dacă ținem seama de teorema (din geometria elementară) care afirmă că mai multe paralele determină pe două secante oarecare segmente proporționale.

§ 2. COORDONATE CARTEZIENE

Se spune că avem un *sistem de coordonate în plan*, dacă s-a dat o corespondență biunivocă și continuă între punctele planului și mulțimea perechilor ordonate de numere. *Coordonatele* unui punct P al planului sînt numerele x, y ale perechii ordonate, asociate punctului P prin corespondența dată, și caracterizează poziția acestuia în plan față de un sistem de referință. Vom scrie pe scurt

$$P(x,\ y)$$

și vom citi: punctul P de coordonate x și y. Un *sistem de referință* (reper) este o figură geometrică, constituită dintr-un număr de elemente (puncte, drepte etc.) ale planului, cu ajutorul cărora se introduce sistemul de coordonate.

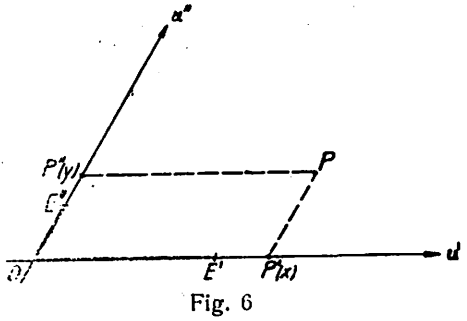


Fig. 6

Fiind dat un plan, să considerăm două drepte orientate u', u'' aparținînd planului, concurente într-un punct O (fig. 6). Putem introduce cîte un sistem de coordonată abscisă pe fiecare din dreptele u' și u'', astfel încît originea sistemelor de coordonată abscisă să coincidă cu punctul O, iar unitățile lor de lungime să fie sau nu congruente între ele (în primul caz, ele sînt congruente cu o unitate de măsură a lungimilor din plan). Fie P' proiecția

* Scrierea $\mathrm{pr}_u(P_1P_2P)$ prescurtează scrierea $\dfrac{\mathrm{pr}_u\overline{P_1P}}{\mathrm{pr}_u\overline{P_2P}}$.

paralelă cu u'' a punctului P pe dreapta u' și P'' proiecția paralelă cu dreapta u' a aceluiași punct P pe dreapta u''. Punctul P' în sistemul de coordonată abscisă introdus pe dreapta u' are o coordonată x, iar punctul P'' în sistemul de coordonată abscisă introdus pe dreapta u'' are o coordonată y. Vom atașa punctului P al planului perechea ordonată de numere (x, y), între punctul P și perechea ordonată de numere (x, y), existînd o corespondență biunivocă și continuă. În adevăr, la orice sistem de valori reale x, y corespunde un punct P bine determinat. Acest punct se obține astfel: se ia pe dreapta u' punctul P' în așa fel încît $\overline{OP'} = x \cdot \overline{OE'}$ și pe dreapta u'' punctul P'', astfel ca $\overline{OP''} = y \cdot \overline{OE''}$ și ducem prin P' și P'' paralele la dreptele date, care se intersectează chiar în punctul corespunzător $P(x, y)$; se mai poate obține luînd pe dreapta u' segmentul $\overline{OP'} = x \cdot \overline{OE'}$ și pe paralela din P' la dreapta u'' segmentul $\overline{P'P} = y \cdot \overline{OE''}$.

Deci, corespondența dintre punctele P și perechile (x, y) de numere reale este biunivocă. Corespondența este și continuă, deoarece punctele $P(x, y)$, ale căror coordonate diferă de două valori a, b, cu mai puțin decît numărul arbitrar δ, se găsesc în interiorul unui paralelogram cu centrul în punctul $Q(a,b)$, cu laturile paralele cu dreptele u', u'' și de lungime 2δ și $2k\delta$, dacă $OE' = kOE''$. Adică, pentru orice număr real $\varepsilon > 0$, există un număr real $\delta(\varepsilon)$, astfel încît distanța dintre punctele Q și P să satisfacă relația

$$|\overline{QP}| < \varepsilon,$$

îndată ce avem

$$|x - a| < \delta, \quad |y - b| < \delta.$$

Cu alte cuvinte, dacă δ este foarte mic, punctul $P(x, y)$ este foarte apropiat de $Q(a, b)$.

Deci, un punct P din plan este definit de două *coordonate*, numite *coordonate carteziene*: *abscisa* x și *ordonata* y. Dreptele u', u'' sînt axa x-ilor sau axa Ox, respectiv axa y-ilor sau axa Oy, ele numindu-se axe de coordonate carteziene în plan. Rezultă că *sistemul de referință cartezian* este format din două axe de coordonate carteziene. Coordonatele carteziene x, y se zic *normale* sau *nenormale*, după cum unitățile de măsură ale axelor de coordonate sînt sau nu sînt congruente între ele. De obicei se întrebuințează sistemele de coordonate normale.

Cele două axe de coordonate împart planul în patru regiuni: Se consideră ca primă regiune aceea mărginită de semiaxele pozitive, celelalte urmînd prin rotație în sensul care face ca direcția pozitivă a axei x să se suprapună pe direcția pozitivă a axei y de un unghi mai mic decît 180^0. Observăm că abscisa și ordonata punctelor din prima regiune sînt numere pozitive, că punctele din a doua regiune au abscisa negativă și ordonata pozitivă, că abscisa și ordonata punctelor din a treia regiune sînt negative, iar punctele din a patra regiune au abscisa pozitivă și ordonata negativă.

Dacă sensul în care trebuie să rotim partea pozitivă a axei Ox de un unghi mai mic decît 180^0, pentru a o suprapune pe partea pozitivă a axei Oy, este invers celui determinat de mișcarea acelor unui ceasornic, se spune că sistemul de axe (sistemul de referință) este *sinistrorsum*; în caz contrar, sistemul de axe se numește *dextrorsum*.

Rezultă că un sistem de axe carteziene determină o orientare în plan. Astfel, fiind dat un sistem de axe sinistrorsum, se poate fixa un sens pozitiv de parcurs pe orice dreaptă u din plan. În adevăr, se poate considera ca sens pozitiv pe dreapta u acel sens, astfel încît sistemul de drepte format de axa Ox

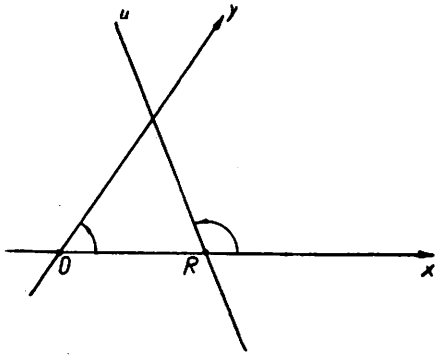


Fig. 7

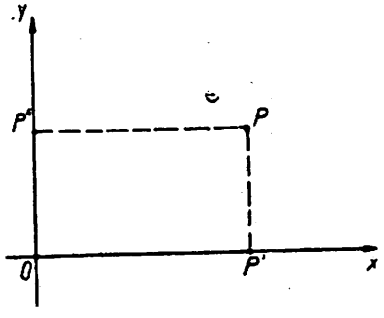


Fig. 8

și dreapta u să fie sinistrorsum (fig. 7). Cu alte cuvinte, partea pozitivă a dreptei u este aceea care se găsește de aceeași parte a axei Ox, cu partea pozitivă a axei Oy (dacă luăm ca origine pe dreapta u punctul de intersecție al dreptei u cu axa Ox). De obicei se întrebuințează sisteme de axe sinistrorsum.

Dacă axele de coordonate sînt perpendiculare, *coordonatele carteziene* se zic *ortogonale*; în caz contrar se numesc *oblice*, unghiul axelor de coordonate putînd fi oarecare, cu condiția de a fi mai mare decît zero și mai mic decît 180^0.

Observăm că dacă sistemul de referință cartezian este ortogonal, planul este împărțit în patru regiuni simetrice, iar coordonatele unui punct P sînt distanțele de la punctul dat la axele de coordonate (fig. 8).

Ca și în geometria pe o dreaptă, putem considera și puncte ale căror coordonate sînt date de valori complexe. Astfel de puncte se numesc *puncte imaginare în plan*, ele neputînd fi reprezentate geometric în plan. Se poate întîmpla ca, operînd cu punctele imaginare, să obținem anumite elemente reale.

Coordonatele carteziene se datoresc lui René Descartes (1596—1650) — latinizat Cartesius — ,de unde le vine și numele. De altfel, geometria analitică în plan a apărut în prima jumătate a secolului al XVII-lea, întemeietorii ei fiind considerați Pierre Fermat (1601—1665) și René Descartes. Totuși, R. Descartes este considerat drept adevăratul creator al geometriei analitice, deoarece el a pus problema în toată generalitatea ei. În anul 1637 a publicat, nesemnată, principala sa lucrare filozofică: *Discurs asupra metodei de a ne conduce bine rațiunea și a căuta adevărul în științe*, cu anexele: *Dioptrica*, *Meteorii* și *Geometria*. Ultima anexă a acestei lucrări, și anume *Geometria*, conține o expunere destul de completă, deși întrucîtva neclară, a teoriei matematice care, de atunci, poartă numele de geometrie analitică. Una din ideile fundamentale ale teoriei lui Descartes este *ideea coordonatelor*, și constă în atașarea fiecărui punct P din plan o pereche de numere reale (x, y), coordonatele sale, abscisa x și ordonata y reprezentînd distanțele de la punctul P, luate cu semnele corespunzătoare la două drepte perpendiculare.

Observaţie. În general vom folosi numai sisteme de *coordonate carteziene ortogonale* (normale şi orientate sinistrorsum). Prin aceasta, generalitatea problemei nu este micşorată cu nimic, ci permite o exprimare matematică mai simplă a proprietăţilor figurilor geometrice. De altfel, dacă în alte sisteme de coordonate (de exemplu, coordonate carteziene oblice) acest scop este realizat, vom folosi un astfel de sistem, specificînd de fiecare dată sistemul de coordonate.

Aplicaţii. 1) **Coordonatele punctului care împarte un segment într-un raport dat.** Fie Oxy un sistem de referinţă cartezian oblic. De asemenea, fie $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ două puncte în plan şi P punctul care împarte segmentul $\overline{P_1P_2}$ în raportul k, deci $(P_1P_2P) = -k$ (fig. 9). Pentru a determina coordonatele (x, y) ale punctului P, vom ţine seamă de proprietatea (6):

$$\mathrm{pr}_x(P_1P_2P) = \mathrm{pr}_y(P_1P_2P) = (P_1P_2P).$$

Din egalitatea primelor două rapoarte cu ultimul obţinem

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = k, \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = k$$

şi, rezolvînd în raport cu x, y, găsim

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}. \tag{7}$$

Acestea sînt coordonatele punctului $P(x, y)$, care împarte segmentul $\overline{P_1P_2}$ în raportul k.

În particular, cînd punctul P este mijlocul segmentului $\overline{P_1P_2}$, avem $k = 1$ şi, prin urmare, coordonatele mijlocului unui segment $\overline{P_1P_2}$ sînt date de formulele

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{7'}$$

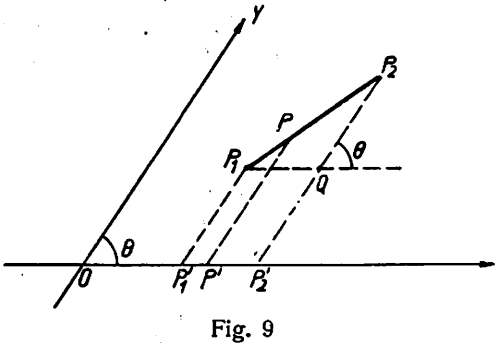


Fig. 9

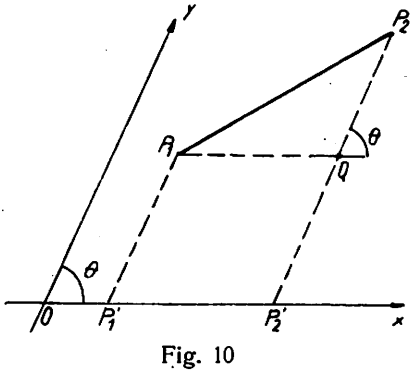


Fig. 10

2). **Distanţa între două puncte.** Fie Oxy un sistem de referinţă cartezian oblic. Distanţa dintre două puncte $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$ din plan se obţine folosind teorema generalizată a lui Pitagora. Din triunghiul P_1QP_2 avem (fig. 10)

$$P_1P_2^2 = P_1Q^2 + QP_2^2 - 2P_1Q \cdot QP_2 \cos \widehat{P_1QP_2}.$$

Însă

$$P_1Q = P_1'P_2' = x_2 - x_1,\ QP_2 = P_1''P_2'' = y_2 - y_1,\ \cos \widehat{P_1QP_2} =$$

$$= \cos(\pi - \widehat{xy}) = -\cos \widehat{xy},$$

unde prin $\widehat{xy}$ înțelegem unghiul axelor de coordonate, așa încît avem

$$P_1P_2 = \pm \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos \widehat{xy}}. \quad (8)$$

Se va lua semnul + sau — înaintea radicalului, după cum P_1 este la stînga sau la dreapta lui P_2 în orientarea pozitivă a dreptei P_1P_2. Deci va trebui să luăm semnul + dacă $y_2 > y_1$ și semnul — dacă $y_2 < y_1$. Cînd $y_2 = y_1$, atunci vom lua semnul + dacă $x_2 > x_1$ și semnul — dacă $x_2 < x_1$.

Dacă axele de coordonate sînt perpendiculare, deci $\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$, atunci formula (8) devine

$$P_1P_2 = \pm \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (8')$$

Rezultă astfel necesitatea folosirii sistemelor de coordonate carteziene ortogonale în studiul proprietăților figurilor geometrice.

§ 3. TRANSFORMĂRI DE COORDONATE CARTEZIENE

Uneori este util să se raporteze planul la un alt sistem de referință decît cel ales sau dat inițial. Fie deci două sisteme de referință carteziene Oxy și $O'x'y'$; deoarece orice figură geometrică din plan poate fi raportată la sistemul de referință Oxy, rezultă că și sistemul de referință $O'x'y'$ poate fi raportat la primul. Pentru aceasta este suficient să se cunoască coordonatele x_0, y_0 ale originii O' față de primul sistem de referință și unghiurile pe care le fac axele $O'x'$ și $O'y'$ cu axele Ox, Oy (în afară de unghiurile dintre axele fiecărui sistem de referință).

Relațiile dintre coordonatele unui același punct față de două sisteme de referință carteziene (în aceste relații intervenind și mărimile ce caracterizează poziția unui sistem de referință față de celălalt) se numesc transformări de coordonate carteziene.

Vom considera numai transformările de coordonate carteziene ortogonale. În acest caz este suficient să se cunoască coordonatele x_0, y_0 ale originii O' față de sistemul de referință Oxy și unghiul θ pe care-l face axa $O'x'$ cu axa Ox.

Translația de axe. În planul raportat la sistemul de axe carteziene ortogonale Oxy putem considera un alt sistem de axe carteziene ortogonale $O'x'y'$, cu centrul în punctul $O'(x_0, y_0)$, diferit de originea O, cu axele paralele cu ale sistemului Oxy și avînd aceeași orientare (fig. 11). Un același punct P din plan are coordonatele x, y față de primul sistem de axe și x', y' față de-al doilea.

Deoarece segmentul $\overline{OP}$ închide linia poligonală $\overline{OO'}$, $\overline{O'P}$, ținînd seama de proprietatea (5'''):

$$\mathrm{pr}_u\overline{OP} = \mathrm{pr}_u\overline{OO'} + \mathrm{pr}_u\overline{O'P},$$

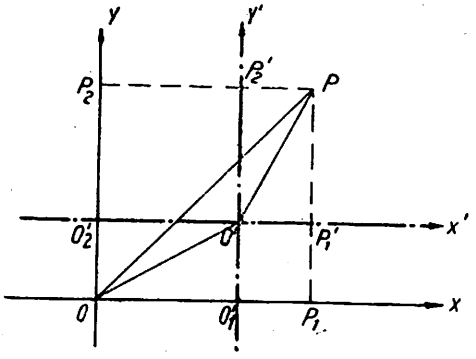


Fig. 11

avem

$$\overline{OP_1} = \overline{OO_1'} + \overline{O_1'P_1},\ \overline{OP_2} = \overline{OO_2'} + \overline{O_2'P_2} \tag{9}$$

dacă luăm axa Ox, respectiv Oy ca dreaptă u. Însă

$$OP_1 = x,\ OP_2 = y,\ OO_1' = x_0\ OO_2' = y_0,\ O_1'P_1 = x',\ O_2'P_2' = y',$$

încît relația (9) se scrie

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0 \end{cases} \tag{10}$$

sau

$$\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0. \end{cases} \tag{10'}$$

Formulele (10) definesc ceea ce se numește o *translație a axelor carteziene* și ele pot fi considerate ca o transformare de coordonate dintr-un sistem de axe carteziene ortogonale în alt sistem paralel și avînd aceeași orientare.

Rotația de axe. Să considerăm acum, în planul raportat la sistemul de axe carteziene ortogonale Oxy, un alt sistem de axe carteziene ortogonale $Ox'y'$ avînd aceeași origine, iar axele fiind neparalele cu cele ale sistemului Oxy, notînd unghiul dintre axele Ox' și Ox cu θ. Cu alte cuvinte, planul este raportat la două sisteme de axe carteziene ortogonale, care au originile în același punct, unul din ele obținîndu-se din celălalt printr-o rotație de unghi θ în jurul originii (fig. 12). Un același punct P din plan are coordonatele x,y față de primul sistem și x', y' față de-al doilea. Liniile poligonale OP_1P și $OP_1'P$ au aceleași extremități; deci

$$\mathrm{pr}_u\overline{OP_1} + \mathrm{pr}_u\overline{P_1P} = \mathrm{pr}_u\overline{OP_1'} + \mathrm{pr}_u\overline{P_1'P}.$$

Luînd axa Ox, respectiv Oy, ca dreaptă u, proiecția fiind ortogonală, avem

$\overline{OP_1} = \overline{OP_1^*} + \overline{P_1^*P_1}$, adică $OP_1 = OP_1' \cos\theta + P_1'P \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$,

$\overline{OP_2} = \overline{OP_2^*} + \overline{P_2^*P_2}$, adică $OP_2 = OP_1' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + P_1'P \cos\theta$.

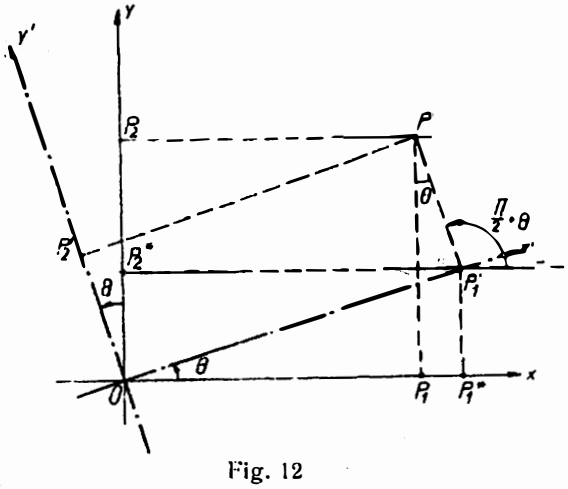


Fig. 12

Deoarece $OP_1 = x$, $OP_2 = P_1P = y$ și $OP_1' = x'$, $OP_2' = P_1'P = y'$, obținem formulele

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta, \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta, \end{cases} \quad (11)$$

transformarea inversă fiind*

$$\begin{cases} x' = x \cos\theta + y \sin\theta, \\ y' = -x \sin\theta + y \cos\theta. \end{cases} \quad (11')$$

Formulele (11), respectiv (11') dau coordonatele unui același punct față de două sisteme de axe ortogonale care au aceeași orientare, originea comună și axele neparalele. Formulele (11) definesc ceea ce se numește o *rotație de axe ortogonale.*

Deplasări în plan. Să considerăm un sistem de referință cartezian ortogonal $O'XY$, cu originea în O' (x_0, y_0) și cu axele neparalele cu ale sistemului ini-

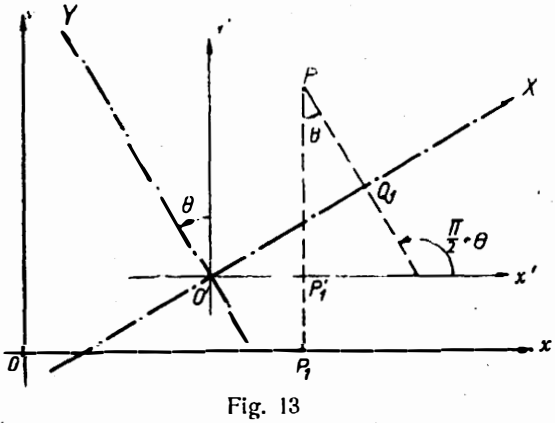


Fig. 13

țial Oxy, axa $O'X$ făcînd cu axa Ox unghiul θ (fig. 13) Fie P_1 proiecția punctului P pe Ox și Q_1 proiecția sa pe $O'X$. Ținînd seama că proiecția liniei

* Se obțin din formulele (11) cu ajutorul metodei lui Cramer sau proiectînd liniile poligonale OP_1P și $OP_1'P$ pe axa Ox', respectiv Oy'.

poligonale OP_1P pe orice axă este egală cu proiecția liniei poligonale $OO'Q_1P$ pe aceeași axă, obținem

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta + x_0, \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta + y_0, \end{cases} \tag{12}$$

transformarea inversă fiind

$$\begin{cases} X = (x - x_0)\cos\theta + (y - y_0)\sin\theta, \\ Y = -(x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta. \end{cases} \tag{12'}$$

Formulele (12), (12'), constituie formulele de transformare ale coordonatelor carteziene ortogonale. Observăm că dacă $\theta = 0$, se obțin formulele (10) ale translației de axe, iar dacă $x_0 = y_0 = 0$, se obțin formulele (11) ale rotației de axe.

Formulele (12) arată că expresiile coordonatelor x, y sînt de gradul întîi în X, Y (se zic că sînt *liniare* în X, Y) și reciproc; adică sînt de forma

$$\begin{cases} x = a_{11}X + a_{12}Y + x_0, \\ y = a_{21}X + a_{22}Y + y_0, \end{cases} \tag{13}$$

respectiv

$$\begin{cases} X = A_{11}x + A_{12}y + X_0, \\ Y = A_{21}x + A_{22}y + Y_0, \end{cases} \tag{13'}$$

unde x_0, y_0 sînt coordonatele originii sistemului $O'XY$ față de sistemul Oxy, X_0, Y_0 coordonatele lui O față de sistemul $O'XY$, iar coeficienții a_{ij}, A_{ij} $(i = 1, 2,)$ au valorile

$$\begin{cases} a_{11} = \cos\theta, \ a_{12} = -\sin\theta \\ a_{21} = \sin\theta, \ a_{22} = \cos\theta \end{cases}$$

respectiv

$$\begin{cases} A_{11} = \cos\theta, \ A_{12} = \sin\theta, \\ A_{21} = -\sin\theta, \ A_{22} = \cos\theta. \end{cases} \tag{13''}$$

Fiind date formulele (13), unde x_0, y_0, a_{ij} (respectiv X_0, Y_0, A_{ij}) sînt constante oarecare, se poate demonstra ([25], p. 66) că aceste formule reprezintă o transformare de coordonate carteziene atunci cînd

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{13'''}$$

Dacă determinantul (13''') este ortogonal, deci

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$$

sau încă

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}, \ (i, \ j, \ k = 1, \ 2), \tag{13^{IV}}$$

atunci transformarea (13) reprezintă o trecere de la un sistem cartezian ortogonal Oxy la un alt sistem cartezian ortogonal $O'XY$ de aceeași orientare sau

de orientări diferite, după cum acest determinant are valoarea 1 sau -1; cu alte cuvinte, abstracție făcînd de o simetrie față de o axă, există un unghi θ în așa fel încît să avem (13″).

Cînd determinantul (13″) este ortogonal, totalitatea transformărilor (13) constituie un grup cu trei parametri, numit *grupul deplasărilor din plan.*

În cazul general, cînd determinantul a nu este ortogonal însă $a \neq 0$, transformarea (13) se numește *transformare afină* sau, mai simplu, *afinitate* (plană). Se observă că transformările (13) formează grup. În adevăr, ele conțin transformarea identică (pentru $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = x_0 = y_0 = 0$), orice transformare (13) are o inversă (13′) și produsul a două transformări (13) este tot o transformare de aceeași formă. Se spune că transformările (13) constituie *grupul afin*, care este un grup cu șase parametri.

§ 4. COORDONATE POLARE

În plan se pot considera și alte sisteme de coordonate decît cele carteziene. Un astfel de sistem de coordonate este acela al coordonatelor *polare*. Sistemul de referință corespunzător este constituit dintr-o dreaptă orientată Ox, numită *axă polară*, și un punct fix pe ea, numit *pol* (fig. 14). Un punct P este determinat dacă se dau coordonatele ρ și θ, numite *raza vectoare* și *unghiul polar* al punctului P, ρ fiind distanța de la polul O la punctul P (luat cu semnul $+$), iar θ unghiul pe care îl face direcția pozitivă a axei polare cu semidreapta OP, socotit în sens sinistrorsum.

Fiind date coordonatele ρ, θ punctul P corespunzător este bine determinat, însă reciproca nu este adevărată. În adevăr, unui punct P_0 (ρ_0, θ_0) putem face să-i corespundă unghiurile polare $\theta_0 + 2k\pi$, deoarece două semidrepte ale căror unghiuri polare diferă printr-un multiplu de 2π coincid. Deci, corespondența dintre punctele în plan și coordonatele polare nu este biunivocă. De asemenea, polul O al sistemului de referință polar are coordonatele polare $\rho = 0$, $\theta =$ arbitrar, adică polului O îi corespunde orice valoare pentru θ. Se zice că în sistemul de coordonate polare, *polul este un punct singular.* Totuși, putem face să avem o corespondență biunivocă între punctele P din plan și coordonatele polare ρ, θ, dacă excludem polul și dacă impunem unghiului polar θ condiția de a varia numai între 0 și 2π, adică $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

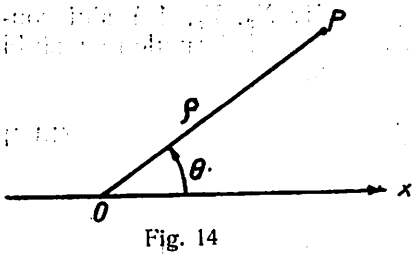


Fig. 14

În acest caz însă corespondența nu este continuă de-a lungul axei polare. În adevăr, fiind date două puncte P, P' simetrice față de această axă, acestora le corespund unghiurile polare θ și $2\pi - \theta$. Diferența dintre aceste unghiuri tinde însă către 2π, atunci cînd punctele tind să se confunde într-un punct de pe axa polară.

Luînd originea axelor carteziene ortogonale în polul sistemului de referință polar și axa polară ca axă Ox (fig. 15), se poate trece de la coordonatele polare la cele carteziene ortogonale. Notînd cu (x,y) și (ρ, θ) coordonatele carteziene și polare ale punctului P, din triunghiul dreptunghic $OP'P$, rezultă

$$OP' = OP \cdot \cos\theta, \quad P'P = OP \cdot \sin\theta,$$

adică

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases} \tag{14}$$

Deci, ρ și θ fiind cunoscute, formulele (14) permit să trecem la coordonatele carteziene x, y. Din formulele (14) deducem

$$x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta), \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta,$$

de unde rezultă

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \tag{15}$$

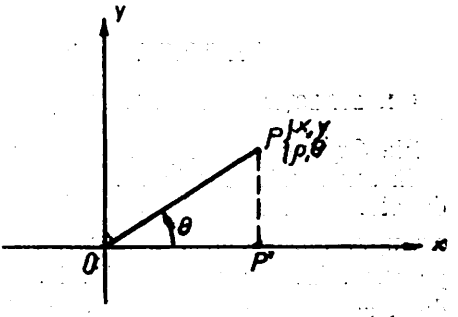


Fig. 15

Cu alte cuvinte, fiind cunoscute coordonatele carteziene x și y, formulele (15) permit să trecem la coordonatele polare ρ, θ.

Deci, fiind dat un sistem de referință polar, putem să-i asociem un sistem de referință cartezian ortogonal, unde axa x coincide cu axa polară, iar originea sistemului cartezian cu polul, între coordonatele carteziene ortogonale și coordonatele polare existînd relațiile (14) și (15). Rezultă că acestea pot fi considerate ca formule de transformare de la un sistem de coordonate polare la un sistem de coordonate carteziene ortogonale (axa x coincizînd cu axa polară și originea cu polul), și invers.

§ 5. COORDONATE OMOGENE

Notînd cu (x, y) un sistem de coordonate în plan (de exemplu, un sistem de coordonate carteziene sau un sistem de coordonate polare), prin relațiile

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3} \tag{16}$$

putem realiza o corespondență între coordonatele (x, y) și terna de numere (x_1, x_2, x_3), abstracție făcînd de un factor ρ de proporționalitate, cu care putem multiplica cele trei numere x_i. Cu alte cuvinte, dacă ternele de valori (x_1', x_2', x_3') și (x_1'', x_2'', x_3'') satisfac relațiile

$$\frac{x_1'}{x_1''} = \frac{x_2'}{x_2''} = \frac{x'}{x_3''}, \tag{16'}$$

atunci ele reprezintă unul și același punct în plan. Aceste cantități, x_1, x_2, x_3, se numesc *coordonate omogene* ale planului (respectiv coordonate carteziene omogene sau coordonate polare omogene).

CAPITOLUL V

DIFERITE FORME ALE ECUAȚIEI DREPTEI

§ 1. DIRECȚIA UNEI DREPTE

Fie *Oxy* un sistem de referință cartezian ortogonal în plan.

Să considerăm fasciculul de drepte* cu centrul în originea axelor de coordonate. Dacă în acest fascicul luăm una din drepte ca dreaptă origine, de exemplu axa *Ox*, o dreaptă *r* din fascicul poate fi determinată prin unghiul α pe care-l face cu axa *Ox* (fig. 1). Acest unghi poate fi pozitiv sau negativ, după cum α se măsoară într-o parte sau în alta a axei *Ox*. De obicei, dacă sistemul *Oxy* este orientat sinistrorsum — ceea ce presupunem — se ia ca sens pozitiv de rotație acela dat de sensul invers mersului acelor unui ceasornic. În acest caz însă, *dreapta r este orientată*, sensul pozitiv fiind acela corespunzînd sensului pozitiv al axei *Ox*, rotită în sens pozitiv de un unghi mai mic decît π (în jurul originii), pentru a se așeza peste *r*.

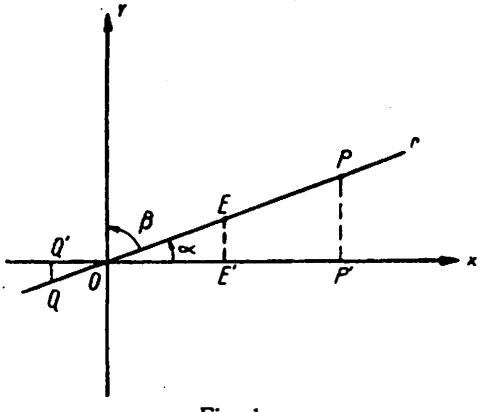


Fig. 1

Deci, *o dreaptă r dusă prin originea axelor este determinată, dacă se dă unghiul α pe care dreapta r îl face cu axa Ox*. Însă între dreapta *r* din fascicul și unghiul α, pe care dreapta *r* îl face cu axa *Ox*, nu se realizează o corespondență biunivocă, adică unghiul nu poate fi considerat ca o coordonată în fascicul. În adevăr, fiind dată o dreaptă *r* în fasciculul cu centrul în origine, acestei drepte îi corespunde o infinitate de valori ale unghiului, valori care diferă între ele printr-un multiplu de π (sau un multiplu de 2π, dacă se consideră semidreptele *Or*). Putem însă obține o coordonată a dreptelor din fascicul, dacă luăm tangenta trigonometrică a lui α. În adevăr, coordonata

$$\sigma = \operatorname{tg} \alpha, \tag{1}$$

* Se numește *fascicul de drepte* mulțimea dreptelor dintr-un plan care trec printr-un punct fix. Acest punct se numește *centrul* sau *vîrful* fasciculului.

numită și *panta dreptei*, are proprietatea că la orice poziție a dreptei r corespunde o valoare a lui σ, cuprinsă între $-\infty$ și $+\infty$, și invers. Corespondența este deci biunivocă și continuă $\left(\text{exceptînd discontinuitatea pentru valoarea } \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$.

De asemenea, *o dreaptă r din fascicul este determinată dacă se dau coordonatele (μ_1, μ_2) ale unui punct oarecare P al acestei drepte* (diferit de origine). Aceasta rezultă din faptul că prin două puncte trece o dreaptă, și numai una singură. Numerele μ_1, μ_2 atașate astfel dreptei r poartă numele de *parametri directori* ai dreptei r (sau încă, ai direcției dreptei r). Observăm că parametrii directori μ_1, μ_2 nu pot fi simultan nuli, pentru că — prin ipoteză — punctul P n-a fost luat în origine. De asemenea observăm că dreapta r are o infinitate de perechi de parametri directori, deoarece punctul $P \in r$ poate fi luat arbitrar pe dreaptă (cu singura condiție de a nu coincide cu originea). Atunci, dacă (μ_1, μ_2) este o pereche de parametri directori ai dreptei r, dată de coordonatele punctului $P \in r$, și (μ_1', μ_2') este o altă pereche de parametri directori ai aceleiași drepte r, dată de coordonatele punctului $Q \in r$, între ele are loc următoarea relație de proporționalitate $\frac{OP'}{OQ'} = \frac{P'P}{Q'Q}$, adică

$$\text{a) } \frac{\mu_1}{\mu_1'} = \frac{\mu_2}{\mu_2'} \quad \text{sau încă} \quad \text{b) } \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\mu_2'}{\mu_1'} \tag{2}$$

după cum, de altfel, rezultă din asemănarea triunghiurilor $OP'P$ și $OQ'Q$ (fig. 1). Reciproc, dacă între două perechi de numere (μ_1, μ_2) și (μ_1', μ_2') există relația (2), aceste perechi definesc o aceeași dreaptă (direcție), deoarece orice punct $Q(\mu_1', \mu_2')$ care satisface această relație aparține dreptei OP (pe baza teoremei care afirmă că dacă printr-un punct Q al laturii OP ducem o paralelă la latura $P'P$, se formează două triunghiuri asemenea, și invers).

Dacă P, care a servit la determinarea direcției dreptei r, este chiar punctul unitate E pe dreapta r ($OE = 1$) și dacă se notează cu α și β unghiurile dreptei r cu axele de coordonate, se obține din triunghiul dreptunghic $OE'E$ (fig. 1) că E $(\cos\alpha, \cos\beta)$, cu $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$; deci, o pereche de parametri directori ai dreptei r sînt cantitățile

$$\cos\alpha, \cos\beta = \sin\alpha, \quad \left(\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}\right), \tag{3}$$

între care are loc egalitatea

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1. \tag{3'}$$

Parametrii directori (3) se spune că sînt *cosinusurile directoare* ale dreptei r (sau încă ale direcției dreptei r).

Observăm că punctul E, cu ajutorul căruia s-au determinat cosinusurile directoare, poate avea două poziții pe dreapta r, de o parte sau de alta a originii. Deci, cosinusurile directoare vor avea două valori, care diferă între ele numai prin semn. Ținînd seama că dreapta r este orientată, vom lua pentru

cosinusurile directoare numai determinarea dată de punctul E, astfel încît sensul segmentului orientat $\overline{OE}$ să coincidă cu sensul pozitiv de parcurs al dreptei r; deci, deoarece $0 \leqslant \alpha < \pi$, trebuie să impunem condiția $\cos \beta > 0$.

Cunoscîndu-se cosinusurile directoare ale dreptei r, se pot determina o infinitate de perechi de parametri directori, dacă înmulțim cosinusurile directoare cu un factor arbitrar diferit de zero. În adevăr, cînd punctul Q coincide cu punctul E (fig. 1), din (2a) rezultă

$$\mu_1 = k \cos \alpha, \quad \mu_2 = k \cos \beta \tag{2'}$$

Reciproc, dacă se dă o pereche de parametri directori (μ_1, μ_2) ai dreptei r, se pot determina cosinusurile directoare ale dreptei; pentru aceasta va trebui să se rezolve sistemul dat de (2') și (3'):

$$\frac{\cos \alpha}{\mu_1} = \frac{\cos \beta}{\mu_2}, \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1. \tag{4}$$

Notînd valoarea rapoartelor din prima ecuație (4) cu λ, se deduce

$$\cos \alpha = \lambda \mu_1, \quad \cos \alpha = \lambda \mu_2.$$

Înlocuind aceste valori în ecuația a doua a sistemului (4), se obține

$$\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}}.$$

Deci

$$\cos \alpha = \frac{\mu_1}{\pm \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\mu_2}{\pm \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}}, \tag{5}$$

luînd în fața radicalului semnul $+$ sau $-$, astfel încît $\cos \beta > 0$.

Din (2b) rezultă că oricare ar fi punctele $P(\mu_1, \mu_2)$ și $Q(\mu_1', \mu_2')$ pe dreapta r, raportul dintre ordonata și abscisa fiecărui punct considerat este același. Deci, rezultă că *pentru o dreaptă r ce trece prin originea axelor, raportul dintre ordonata și abscisa oricărui punct* P (μ_1, μ_2) *al dreptei este același*. Acest raport

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_1} \tag{6}$$

se numește *coeficientul unghiular al dreptei r*.

Observăm că pentru determinarea dreptei r din fascicul, este suficient să se dea coeficientul unghiular m. În adevăr, pentru a construi dreapta r, ne putem folosi de perechea de parametri directori $(1, m)$: vom lua pe axa Ox un punct P', astfel încît $OP' = 1$ și vom lua pe paralela din P' la Oy un punct P, astfel încît $PP' = m$. Dreapta OP este dreapta r. Din triunghiul dreptunghic $OP'P$ (fig. 1), unde $OP' = \mu_1$, $P'P = \mu_2$, $\sphericalangle P'OP = \alpha$, rezultă

$$m = \operatorname{tg} \alpha, \text{ adică } m = \sigma, \tag{7}$$

dacă ținem seama de (1); deci, *într-un sistem de coordonate carteziene ortogonale panta dreptei r coincide cu coeficientul unghiular al dreptei considerate**.

Fie u o dreaptă oarecare în plan (fig. 2).

Dacă pe dreapta u se dau două puncte oarecare $P_1(x_1, y_1)$ *și* $P_2(x_2, y_2)$, *atunci o pereche de parametri directori ai dreptei u vor fi*

$$\mu_1 = x_2 - x_1, \quad \mu_2 = y_2 - y_1. \tag{8}$$

În adevăr, să ducem prin O dreapta r, paralelă cu dreapta dată u; de asemenea să luăm pe r segmentul $\overline{OP}$, egal și paralel cu segmentul $\overline{P_1P_2}$ (deci, punctul P se găsește pe dreapta r). Coordonatele μ_1, μ_2 ale punctului P vor fi parametrii directori ai dreptei r, și deci și ai dreptei u. Însă $\mu_1 = OP'$, $\mu_2 = P'P$, iar din triunghiurile egale $OP'P$ și P_1RP_2:

$$OP' = P_1R = x_2 - x_1,$$

$$P'P = RP_2 = y_2 - y_1;$$

de unde rezultă relațiile (8).

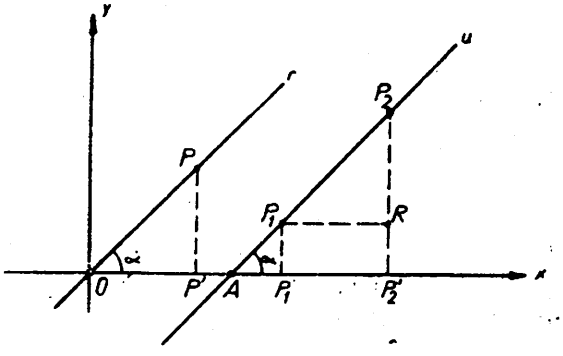


Fig. 2

Din (8) deducem că panta dreptei u, determinată de punctele $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, x_2)$, este

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{8'}$$

Aplicație. Unghiul a două drepte. Prin unghiul a două drepte u_1, u_2 se înțelege unghiul mai mic decît două unghiuri drepte, format de paralelele r_1, r_2, duse prin origine la dreptele date u_1, u_2, și care trebuie să fie considerat pozitiv, dacă sensul determinat de u_1, u_2 este același cu al axelor de coordonate, sau negativ, dacă acest sens este invers celui al axelor (fig. 3). Să notăm cu θ unghiul făcut de cele două drepte r_1, r_2 și cu α_1, α_2 unghiurile pe care aceste drepte le fac cu axa x; atunci avem

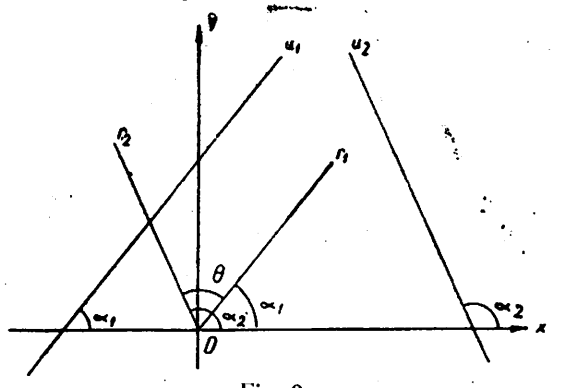


Fig. 3

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1.$$

* Într-un sistem de coordonate carteziene oblice Oxy, cu $\widehat{Ox, Oy} = \theta \left(\theta \neq \frac{\pi}{2}\right)$, relația (7) nu are loc. În acest caz se poate demonstra că

$$\sigma = \frac{m \sin \theta}{1 + m \cos \theta}.$$

Presupunînd că sistemul de axe carteziene *Oxy* este ortogonal şi ţinînd seama de (7) avem

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2},$$

adică

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}. \tag{9}$$

Rezultă că dacă dreptele sînt paralele, deci unghiul lor θ este nul, coeficienţii unghiulari m_1, m_2 sînt egali:

$$m_1 = m_2, \tag{9'}$$

adică, *două drepte paralele au coeficienţii unghiulari egali.* Dacă dreptele sînt ortogonale, deci $\theta = \frac{\pi}{2}$, atunci $\operatorname{tg}\theta$ are o valoare infinită, ceea ce are loc dacă în formulele (9) numitorul este nul. Deci, în coordonate carteziene ortogonale, condiţia ca dreptele u_1, u_2 să fie perpendiculare se exprimă prin formula

$$m_1 m_2 + 1 = 0, \tag{9''}$$

adică, *două drepte sînt perpendiculare, dacă unul din coeficienţii unghiulari ai dreptei este egal şi de sens contrar cu inversul celuilalt*:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

Mai putem spune că două drepte sînt perpendiculare, dacă produsul coeficienţilor lor unghiulari $m_1 m_2$ este egal cu -1:

$$m_1 m_2 = -1.$$

§ 2. ECUAŢIA DREPTEI CARE TRECE PRIN DOUĂ PUNCTE

În geometrie, noţiunile de *punct*, *dreaptă* şi *plan* sînt considerate ca *noţiuni primitive* sau *fundamentale*, care nu se definesc, aceste noţiuni fiind rezultatul unui lung proces istoric de abstractizări asupra corpurilor din lumea înconjurătoare.

Figurile geometrice formate cu ajutorul elementelor primitive se numesc *forme fundamentale*. Se spune că forma fundamentală este de *prima*, *a doua* sau *a treia* speţă, după cum este nevoie de una, de două sau de trei coordonate pentru a fixa poziţia elementelor formei. Astfel, *dreapta punctată* sau *punctuala* (dreapta considerată ca fiind formată din totalitatea punctelor sale)

este o formă fundamentală de prima speță. *Planul punctat* (planul considerat ca format din totalitatea punctelor sale) este o formă fundamentală de a doua speță.

Însă între noțiunile fundamentale sînt anumite relații de „asociere" sau de legătură. Prima grupă de axiome a geometriei euclidiene, care conține 8 axiome de asociere, se referă la felul cum dreptele și planele sînt asociate cu puncte. Astfel, primele trei axiome spun că:

I_1. Oricare ar fi două puncte distincte P_1 și P_2 există o dreaptă u, asociată cu fiecare din punctele P_1, P_2.

I_2. Oricare ar fi două puncte distincte P_1 și P_2, există nu mai mult de o singură dreaptă, asociată cu fiecare din punctele P_1, P_2.

I_3. Pe orice dreaptă u, se găsesc cel puțin două puncte P_1, P_2. Există cel puțin trei puncte $P_i (i = 1, 2, 3)$ necoliniare (nesituate pe aceeași dreaptă u).

Propoziția „punctul P și dreapta u sînt asociate unul altuia" este echivalentă cu următoarele propoziții: „dreapta u trece prin punctul P" sau „punctul P este situat (se găsește) pe dreapta u" sau „P este un punct al dreptei u", sau „punctul P aparține dreptei u". Dacă unei drepte u îi sînt asociate două puncte P_1, P_2, aceasta înseamnă că „dreapta u trece prin punctele P_1 și P_2".

Axiomele I_1 și I_2 se pot reuni într-un singur enunț:

Două puncte distincte P_1 și P_2 determină o dreaptă u și numai una singură.

Din axiomele I_1 — I_3 rezultă că *o dreaptă u este determinată prin două oarecare din punctele sale P_1, P_2.*

Fie $P(x, y)$ un punct al dreptei u, determinată de punctele $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$. Putem considera raportul

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = -(P_1P_2P) = r,$$

în care punctul P împarte segmentul $\overline{P_1P_2}$ (Cap. I, § 2).

Cînd r variază (r fiind coordonata baricentrică a punctului P de pe dreapta u în raport cu punctele fundamentale P_1, P_2), punctul $P(x,y)$ descrie dreapta u. Știm apoi proprietatea (6) din Capitolul IV; deci

$$\mathrm{pr}_x(P_1P_2P) = \mathrm{pr}_y(P_1P_2P) = -r. \tag{10}$$

Fie P_1', P_2', P' și P_1'', P_2'', P'' proiecțiile ortogonale, respectiv pe axele Ox și Oy ale punctelor P_1, P_2, P (fig. 4). Ținînd seama de (13) din Capitolul I, relația (10) se scrie

$$\frac{\overline{P_1'P'}}{\overline{P'P_2'}} = \frac{\overline{P_1''P''}}{\overline{P''P_2''}} \text{ sau încă } \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}. \tag{11}$$

Din această proporție, adunînd numărătorii la numitori, obținem

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Această ecuație este ecuația dreptei P_1P_2.

Reciproc, orice punct $P(x,y)$ care satisface această ecuație aparține dreptei. În adevăr, afirmația rezultă imediat, în baza teoremei care spune că dacă printr-un punct P al laturii P_1P_2 (în triunghiul P_1QP_2) ducem o paralelă la latura P_2Q, se formează două triunghiuri asemenea, și invers (fig. 4).

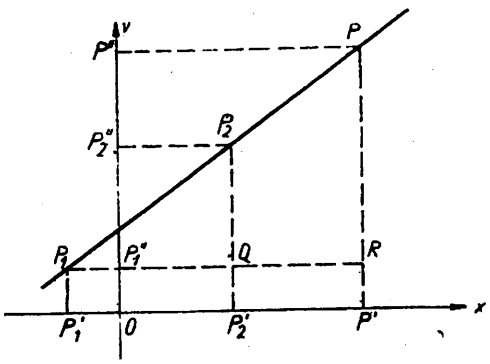


Fig. 4

Parametrii directori ai dreptei determinată de punctele $P_1\ (x_1,y_1)$ și $P_2(x_2,y_2)$ sînt dați de formulele (8), iar coeficientul unghiular sau panta dreptei P_1P_2 este dată de (8').

Ecuația (11) a dreptei care trece prin două puncte P_1,P_2 se poate scrie sub formă de determinant. În adevăr, ecuația (11) se poate scrie sub forma

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$$

sau, ceea ce este tot una,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0;$$

această formă este echivalentă cu

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

formă utilă în aplicații.

Aplicații. 1) Forma segmentară a ecuației dreptei (ecuația „prin tăieturi" a dreptei). Fie $OA = a$ și $OB = b$ segmentele cuprinse între origine și punctele de intersecție ale unei drepte u cu axele de coordonate. Aceste segmente poartă numele de *tăieturile dreptei*. Observînd că dreapta u trece prin extremitățile acestor tăieturi, adică prin punctele de coordonate $A(a, 0)$ și $B\ (0, b)$, putem obține ecuația dreptei u pornind de la forma (11)*; deci

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \tag{13}$$

reprezintă așa-numita *formă segmentară* a ecuației dreptei u, sau încă ecuația „prin tăieturi" a dreptei. Precizăm că această formă este aplicabilă numai unei drepte care nu trece prin origine sau nu este paralelă cu vreuna din axe.

2) **Condiția de coliniaritate a trei puncte.** Fie $P_i(x_i, y_i)$, $(i = 1, 2, 3)$, trei puncte în plan. Să considerăm ecuația dreptei care trece prin punctele P_2 și P_3; această ecuație este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

* Se poate folosi și forma (12).

Pentru ca punctul $P_1(x_1, y_1)$ să fie coliniar cu celelalte două puncte $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, trebuie ca coordonatele lui să verifice ecuația dreptei P_2P_3, adică

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (14)$$

ceea ce reprezintă condiția ca punctele $P_i(x_i, y_i)$ să fie coliniare.

§ 3. ECUAȚIA DREPTEI CARE TRECE PRINTR-UN PUNCT DAT ȘI ARE O DIRECȚIE DATĂ

În geometria euclidiană, o dreaptă este de asemenea determinată dacă se dă un punct de pe dreaptă și direcția ei. Aceasta rezultă din axiomele geometriei euclidiene. Astfel, grupa a V-a de axiome, constituită de celebrul postulat al lui Euclid, se referă la relația de paralelism, și anume

A x i o m a V. Fiind dată o dreaptă oarecare u, iar P un punct exterior dreptei, în planul determinat de dreapta u și de punctul P nu se poate duce decît o dreaptă, și una singură, care să treacă prin P și să fie paralelă cu dreapta u.

Dreptele paralele între ele avînd *aceeași direcție, atunci printr-un punct se poate duce o dreaptă (și numai una) paralelă cu o direcție dată.*

Fie $P_0(x_0, y_0)$ un punct din plan și $m = \operatorname{tg}\alpha$ coeficientul unghiular al direcției date (fig. 5). Prin punctul $P_0(x_0, y_0)$ se duce dreapta P_0P paralelă cu direcția dată. Se construiește triunghiul P_0QP, în care Q este punctul de intersecție al paralelei din P_0 la axa Ox cu paralela din P la axa Oy. Din acest triunghi rezultă

$$QP = P_0Q \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Însă cum

$$QP = y - y_0,\ P_0Q = x - x_0,\ \operatorname{tg}\alpha = m$$

deducem

$$y - y_0 = m(x - x_0). \qquad (15)$$

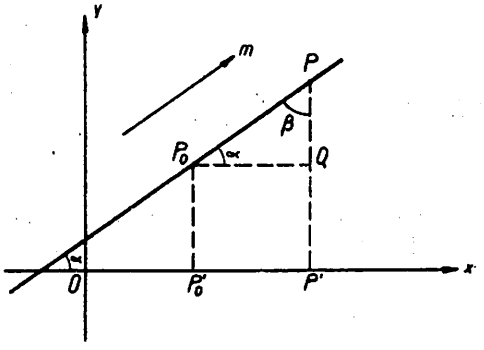


Fig. 5

Această este ecuația dreptei care trece prin punctul $P_0(x_0, y_0)$ și are direcția m dată.

În cazul cînd direcția este dată prin cosinusurile directoare ale ei, ecuația dreptei care trece prin punctul $P_0(x_0, y_0)$ și este paralelă cu direcția $(\cos\alpha, \cos\beta)$ se obține astfel: Din triunghiul dreptunghic P_0QP avem (fig. 5)

$$P_0Q = P_0P \cdot \cos\alpha,\ QP = P_0P \cdot \cos\beta = P_0P \cdot \sin\alpha, \left(\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}\right).$$

Deoarece $P_0Q = x - x_0$, iar $QP = y - y_0$, eliminînd pe P_0P din formulele găsite, obținem *relația*

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos \beta}, \tag{15'}$$

care reprezintă ecuația dreptei care trece prin punctul P_0 (x_0, y_0) *și are direcția dată de cosinusurile ei directoare* ($\cos \alpha$, $\cos \beta = \sin \alpha$).

În cazul cînd direcția este dată prin parametrii directori ai ei, ecuația dreptei care trece prin punctul $P_0(x_0, y_0)$ și este paralelă cu direcția (μ_1, μ_2) se obține astfel: dacă $P(x, y)$ este un punct curent de pe dreapta căutată, parametrii directori ai dreptei P_0P sînt diferențele $x - x_0$, $y - y_0$ ale coordonatelor punctelor $P_0(x_0, y_0)$ și $P(x, y)$. Scriind că aceștia sînt proporționali cu parametrii directori (μ_1, μ_2) dați, avem

$$\frac{x - x_0}{\mu_1} = \frac{y - y_0}{\mu_2} \tag{15''}$$

Ecuația (15'') reprezintă, așadar, *ecuația dreptei care trece prin punctul* P_0 (x_0, y_0) *și are direcția dată de parametrii ei directori* (μ_1, μ_2).

Dacă ținem seama că panta dreptei este

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha},$$

ecuația (15'), respectiv (15'') coincide cu ecuația (15).

Ecuația (15) reprezintă și fasciculul constituit din dreptele care trec prin punctul $P_0(x_0, y_0)$, coeficientul unghiular m fiind un parametru care poate lua orice valoare. Una din dreptele fasciculului este determinată cînd se dă valoarea lui m.

Dacă punctul P_0 este originea axelor de coordonate, atunci ecuația (15) devine

$$y = mx \tag{15'''}$$

și reprezintă *ecuația fasciculului de drepte care trec prin origine*. În acest fascicul avem următoarele drepte remarcabile: pentru axa Ox avem $\alpha = 0$, încît $m = 0$ (deoarece $m = \operatorname{tg} \alpha$), iar ecuația (15''') devine

$$y = 0, \tag{15 a}$$

care reprezintă *ecuația axei* Ox. Observăm că pentru orice punct de pe axa Ox, ordonata y este nulă, și invers, dacă y este nul, punctul se găsește pe axa Ox.

Pentru axa Oy avem $\alpha = \frac{\pi}{2}$, deci $m = \infty$, iar ecuația (15''') devine

$$x = 0, \tag{15 b}$$

care reprezintă *ecuația axei* Oy. Observăm că pentru orice punct de pe axa Oy, abscisa x este nulă, și invers, dacă x este nul, punctul se găsește pe axa Oy.

Bisectoarea unghiului xOy se numește *prima bisectoare a axelor de coordonate*. Deoarece în acest caz $\alpha = \frac{\pi}{4}$, iar $m = 1$, rezultă că această dreaptă are ecuația

$$x - y = 0. \tag{15 c}$$

Deoarece pentru bisectoarea unghiului adiacent, care se numește și *a doua bisectoare a axelor*, avem $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, deci $m = -1$, ecuația acestei drepte este

$$x + y = 0. \tag{15 d}$$

Dacă în ecuația (15) coeficientul unghiular m este nul, avem

$$y - y_0 = 0, \tag{15 e}$$

ceea ce reprezintă *ecuația unei drepte paralele cu axa Ox*, trecînd prin punctul $P_0(x_0, y_0)$. Dacă $m = \infty$, avem

$$x - x_0 = 0, \tag{15 f}$$

ceea ce reprezintă *ecuația unei drepte paralele cu axa Oy*, trecînd prin punctul $P_0(x_0, y_0)$.

Aplicații. 1) **Ecuația redusă a dreptei.** Dacă punctul $P_0(x_0, y_0)$ este pe axa Oy, deci coordonatele lui sînt $x_0 = 0$, $y_0 = n$, ecuația (15) devine

$$y = mx + n. \tag{16}$$

Această formă a ecuației dreptei poartă numele de *ecuația redusă* a dreptei. Cantitatea n se numește *ordonată la origine* și reprezintă ordonata punctului de intersecție a dreptei date cu axa Oy („tăietura" pe Oy). În cazul general, cînd punctul $P_0(x_0, y_0)$, prin care trece dreapta de direcție dată, nu se află pe axa Oy (deci, $x_0 \neq 0$), ordonata la origine este $n = y_0 - mx_0$.

Observăm că toate dreptele paralele cu direcția de coeficient unghiular m se obțin din ecuația (16), presupunînd m fix și n variabil. În acest caz, ecuația (16) reprezintă un fascicul de drepte paralele.

2) **Forma normală a ecuației dreptei.** Să presupunem că dreapta u este definită prin direcția normalei și prin distanța de la origine la dreaptă. Să

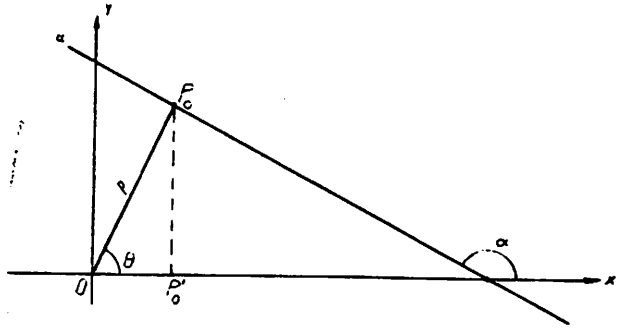


Fig. 6

notăm cu P_0 piciorul perpendicularei coborîte din origine pe dreaptă (fig. 6). Atunci, după regula semnului distanței a două puncte (v. Cap. IV, § 2), distanța $p = OP_0$ — de la origine la dreapta u — este pozitivă, dacă ordonata lui P_0 este pozitivă; dacă această ordonată este nulă, p este pozitivă, dacă

abscisa lui P_0 este pozitivă. Coordonatele punctului P_0 se obțin din triunghiul dreptunghic $OP_0'P_0$, θ fiind unghiul pe care îl face perpendiculara OP_0 cu axa Ox, iar $OP_0 = p$. Avem

$$x_0 = OP_0' = p \cos \theta, \quad y_0 = P_0' P_0 = p \sin \theta.$$

De asemenea avem $\alpha = \theta + \frac{\pi}{2}$, încît $m = \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{cotg} \theta$ *. Atunci, ecuația dreptei u se poate scrie

$$y - p \sin \theta = -\operatorname{cotg} \theta \, (x - p \cos \theta),$$

adică

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0 \tag{17}$$

Aceasta este *forma normală a* ecuației dreptei u.

§ 4. ECUAȚIA GENERALĂ A DREPTEI

Din studiul formelor (11) și (15) [respectiv (12), (13) și (16), (17)] rezultă că *ecuația unei drepte* este o *ecuație algebrică de gradul întîi în x și y*. În adevăr dacă notăm

$$a = \frac{1}{x_2 - x_1}, \quad b = -\frac{1}{y_2 - y_1}, \quad c = -\frac{x_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_1}{y_2 - y_1},$$

respectiv

$$a = m, \quad b = -1, \quad c = y_0 - mx_0,$$

ecuația (11), respectiv ecuația (15), se scrie sub forma

$$ax + by + c = 0, \tag{18}$$

care este o ecuație liniară în x și y, adică o ecuație algebrică de gradul întîi în x și y.

Reciproc, o ecuație liniară generală de forma (18), unde a, b, c sînt cantități reale constante, reprezintă o dreaptă, dacă a, b nu sînt amîndouă nule. Dacă a și b ar fi nuli, avem sau $c \neq 0$, și atunci ecuația se reduce la o imposibilitate (nu există nici un punct ale cărui coordonate s-o satisfacă) sau $c = 0$, și atunci ecuația dispare. Să presupunem că una din constantele a, b este diferită de zero, de exemplu $a \neq 0$; atunci avem $b \neq 0$ sau $b = 0$. În primul caz ($a \neq 0$, $b \neq 0$) putem rezolva ecuația (18) în raport cu y și avem

$$y = -\frac{a}{b} x - \frac{c}{b},$$

---

* Această relație se poate obține și din condiția că dreptele u și OP_0 sînt perpendiculare. Dacă $m' = \operatorname{tg} \theta$ este coeficientul unghiular al dreptei OP_0, coeficientul unghiular al dreptei u va fi

$$m = -\frac{1}{m'} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = -\operatorname{cotg} \theta.$$

astfel încît toate punctele ale căror coordonate satisfac ecuația (18) satisfac și această ecuație, și reciproc. Comparînd cu ecuația (16), se vede că $-\frac{a}{b}$ reprezintă coeficientul unghiular al dreptei, iar $-\frac{c}{b}$ ordonata la origine, adică

$$m = -\frac{a}{b}, n = -\frac{c}{b}. \tag{18'}$$

Deci, în acest caz ecuația (18) se identifică cu ecuația redusă a dreptei. Cu alte cuvinte și ecuația (18) reprezintă aceeași dreaptă (dreapta de pantă m și ordonata la origine n).

În al doilea caz ($a \neq 0$, $b = 0$), ecuația (18) se poate scrie

$$x + \frac{c}{a} = 0,$$

astfel încît comparînd-o cu ecuația (15 f), reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Oy, trecînd prin punctul $A\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$*).

Dacă $c = 0$, dreapta trece prin origine.

Deci putem afirma că *o ecuație liniară de forma generală* (18) — unde coeficienții a, b nu sînt amîndoi nuli — *reprezintă o dreaptă, și invers, orice dreaptă este reprezentată de o ecuație liniară în x și y.*

Studiul curbelor exprimate prin ecuații algebrice de gradul întîi a fost făcut de R. Descartes, în lucrarea sa *Geometria* (1637). El a stabilit că, în plan, unei astfel de ecuații îi corespunde întotdeauna o dreaptă.

Să demonstrăm acum următoarea

Teoremă. Condiția necesară și suficientă ca două ecuații de gradul întîi în x și y să reprezinte una și aceeași dreaptă este ca coeficienții lor să fie proporționali.

În adevăr, fie (18) și

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \tag{18''}$$

cele două ecuații pentru care, prin ipoteză, avem

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma}.$$

Coeficienții unghiulari și ordonatele la origine ale dreptelor (18) și (18'') fiind $m = -\frac{a}{b}$, $n = -\frac{c}{b}$, respectiv $m' = -\frac{\alpha}{\beta}$, $n' = -\frac{\gamma}{\beta}$, din ipoteză rezultă

$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$, sau încă $-\frac{a}{b} = -\frac{\alpha}{\beta}$ și $\frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma}$, sau încă $-\frac{c}{b} = -\frac{\gamma}{\beta}$,

* Dacă $a = 0$, $b \neq 0$ avem ecuația

$$y + \frac{c}{b} = 0,$$

care reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Ox, trecînd prin punctul $B\left(0, -\frac{c}{b}\right)$.

deci

$$m = m' \text{ şi } n = n',$$

adică cele două drepte (18) şi (18″) sînt paralele şi trec prin acelaşi punct $B(O, n = n')$. Însă două drepte paralele care trec printr-un acelaşi punct sînt confundate, deoarece printr-un punct dat nu se poate duce decît o singură paralelă la o direcţie dată. Deci, dacă cele două ecuaţii (18) şi (18″) au coeficienţii proporţionali, ele reprezintă una şi aceeaşi dreaptă.

Reciproc, pentru ca două ecuaţii (18) şi (18″) să reprezinte una şi aceeaşi dreaptă, trebuie ca ele să aibă coeficienţii proporţionali. În adevăr, pentru ca ecuaţiile (18) şi (18″) să reprezinte aceeaşi dreaptă, este necesar ca ele să fie paralele şi să treacă printr-un acelaşi punct. În acest caz, cele două drepte au o infinitate de puncte comune (toate punctele lor sînt comune). Deci putem lua ca punct prin care trec dreptele punctul de intersecţie al dreptelor cu axa Oy; adică, cele două drepte (18) şi (18″) au aceeaşi ordonată la origine: $n = n'$. Dreptele (18) şi (18″) fiind paralele, avem $m = m'$. Aşadar, trebuie să avem

$$-\frac{a}{b} = -\frac{\alpha}{\beta}, \text{ sau încă } \frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} \text{ şi } -\frac{c}{b} = -\frac{\gamma}{\beta}, \text{ sau încă } \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma},$$

de unde rezultă proporţionalitatea coeficienţilor.

Aplicaţii. 1). Drepte imaginare. Se numesc *drepte imaginare* dreptele reprezentate de ecuaţii de forma (18) în care cel puţin unul din coeficienţii a, b, c este imaginar. Desigur, presupunem că prin înmulţire sau prin împărţire cu un alt număr imaginar nu putem face astfel încît toţi coeficienţii dreptei să devină reali. O dreaptă imaginară nu se reprezintă în plan.

Ca şi în cazul punctelor imaginare, se convine a se extinde la drepte imaginare formulele demonstrate pentru drepte reale, de exemplu: ecuaţia dreptei care trece prin două puncte, condiţia ca trei puncte să fie coliniare etc.

Observăm că se poate întîmpla ca operînd cu puncte şi cu drepte imaginare să obţinem anumite elemente reale. De exemplu, dreapta care uneşte două puncte imaginare conjugate $P(a + \mathrm{i}\,b,\ \alpha + \mathrm{i}\,\beta)$, $Q(a - \mathrm{i}\,b,\ \alpha - \mathrm{i}\,\beta)$ este reală. În adevăr, folosind formula (12), ecuaţia acestei drepte se scrie:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Rezultă că orice punct P imaginar se află pe o dreaptă reală, anume pe dreapta care uneşte punctul P cu conjugatul său Q.

Se numesc *drepte izotrope* acele drepte care au coeficienţii unghiulari i sau — i. Observăm că prin fiecare punct al planului $P_0(x_0, y_0)$ trec două astfel de drepte, anume dreptele:

$$y - y_0 = \mathrm{i}(x - x_0) \quad \text{şi} \quad y - y_0 = -\mathrm{i}(x - x_0). \tag{20}$$

Dacă punctul P_0 coincide cu originea ($x_0 = y_0 = 0$), ecuaţiile dreptelor izotrope (care trec prin origine) sînt:

$$x + \mathrm{i}y = 0 \text{ şi } x - \mathrm{i}y = 0. \tag{20'}$$

Dreptele izotrope (20′) pot fi considerate ca definite de o singură ecuație

$$x^2 + y^2 = 0. \qquad (20'')$$

Se mai spune că aceste drepte definesc *direcțiile absolute* ale planului, deoarece ele rămîn neschimbate printr-o rotație a axelor. În adevăr, considerînd o rotație de axe de forma (10), găsim

$$x \pm iy = (x' \pm iy')(\cos\theta \pm i \sin\theta),$$

adică:

$$x' + iy' = 0 \quad \text{și} \quad x' - iy' = 0.$$

Deci, în noul sistem de axe, dreptele izotrope au ecuațiile date de formule de aceeași formă (20′), ca în vechiul sistem de axe. Acest fapt se exprimă spunînd că ecuațiile dreptelor izotrope (care trec prin origine) sînt invariante față de o transformare de coordonate.

O altă proprietate a dreptelor izotrope este proprietatea că distanța dintre două puncte imaginare situate pe o astfel de dreaptă este nulă. În adevăr, să presupunem că aceste puncte $P_i(x_i, y_i)$, $(i = 1, 2)$ se află pe prima dreaptă izotropă; deci, coordonatele x_i, y_i, satisfac condițiile $x_i + iy_i = 0$. Atunci, distanța între cele două puncte P_i este

$$P_1P_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (-iy_2 + iy_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 0.$$

Observăm că această egalitate n-ar putea fi adevărată, în cazul cînd P', P'' ar fi puncte reale, decît dacă ele ar coincide.

Deci, printre dreptele imaginare, *dreptele izotrope* se bucură de proprietăți deosebite.

2) **Scrierea ecuației generale (18) sub forma normală (17).** Să presupunem dată ecuația unei drepte u sub forma generală (18), precum și ecuația ei normală (17). Înseamnă că avem

$$\frac{\cos\theta}{a} = \frac{\sin\theta}{b} = \frac{-p}{c}.$$

Notînd cu k valoarea comună a acestor rapoarte, găsim

$$\cos\theta = ka, \quad \sin\theta = kb, \quad -p = kc,$$

de unde, dacă ținem seama că $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, rezultă

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Deci

$$\cos\theta = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad p = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Semnul se va alege astfel încît $\sin\theta \geqslant 0$, deoarece considerăm că dreapta este orientată; deci se va lua semnul lui b.

3) **Ecuația dreptei în coordonate omogene.** În coordonate carteziene omogene, ținînd seama de relațiile (16) din capitolul IV, ecuația generală (18) a unei drepte se scrie

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0. \qquad (21)$$

Deci, în coordonate omogene, o dreaptă este reprezentată de o ecuație liniară și omogenă în coordonatele carteziene omogene x_i.

În coordonate carteziene neomogene s-a impus celor doi coeficienți a, b ai ecuației (18) condiția de a nu fi amîndoi nuli, deoarece dacă $c \neq 0$, ecuația duce la o imposibilitate. În coordonate carteziene omogene, dacă avem $a = b = 0$ și $c \neq 0$, rezultă

$$x_3 = 0. \tag{22}$$

În acest caz, formulele (16) din capitolul IV ne arată că punctele P, avînd coordonata x_3 nulă, au cel puțin una din coordonatele x, y infinită, deci punctele P sînt la infinit, iar coordonatele lor satisfac ecuația (22). Deoarece această ecuație este liniară, prin analogie cu rezultatul cunoscut în coordonate carteziene neomogene, vom spune că punctele de la infinit, într-un plan, sînt situate pe o aceeași dreaptă, numită *dreapta de la infinit* sau *dreapta improprie a planului*, ecuația acestei drepte fiind (22).

Observăm că utilizarea coordonatelor carteziene omogene permite introducerea în calcule a punctelor de la infinit. *Planul format din punctele lui la distanță finită* (de coordonate carteziene finite) se numește *plan euclidian metric* sau — mai simplu — *plan euclidian*, în timp ce *planul completat cu punctele improprii* se numește *plan euclidian proiectiv* sau — mai simplu — *plan proiectiv*.

Pentru dreapta determinată de punctele $P'(x_1', x_2', x_3')$ și $P''(x_1'', x_2'', x_3'')$ se obține ecuația:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0, \tag{23}$$

unde (x_1, x_2, x_3) sînt coordonatele unui punct curent al dreptei. Această condiție reprezintă, în același timp, condiția ca cele trei puncte $P'(x_i')$, $P''(x_i'')$ și $P(x_i)$ să fie în linie dreaptă.

4) **Ecuația dreptei în coordonate tangențiale.** Ecuația generală (18) a dreptei conține trei coeficienți, însă cel puțin unul din coeficienții a, b trebuie să fie diferit de zero. Dacă $c = 0$, s-a impus (prin acest fapt) o condiție dreptelor din plan, aceea de a trece prin originea axelor de coordonate. Deci, exceptînd fasciculul de drepte cu centrul în origine, se poate presupune în ecuația (18) că $c \neq 0$. Dacă împărțim prin c și notăm

$$u = \frac{a}{c}, \quad v = \frac{b}{c}, \tag{24}$$

ecuația dreptei se scrie sub forma

$$ux + vy + 1 = 0, \tag{25}$$

ceea ce ne arată că totalitatea dreptelor din plan care nu trec prin origine depind de valorile a doi parametri u și v. Acești parametri se numesc *coordonate tangențiale sau plückeriene ale dreptei*, iar forma (25) a ecuației dreptei

se numește *ecuația tangențială a dreptei*. Observăm că punctele de intersecție ale dreptei cu cele două axe de coordonate sînt

$$A\left(-\frac{1}{u}, 0\right) \text{ și } B\left(0, -\frac{1}{v}\right).$$

Putem să înlăturăm restricția impusă, de a lăsa la o parte dreptele care trec prin origine, introducînd *coordonatele tangențiale* sau *plückeriene* omogene ale dreptei; coordonatele tangențiale neomogene ale dreptei u, v și coordonatele tangențiale omogene ξ_1, ξ_2, ξ_3 sînt legate prin relațiile

$$u = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad v = \frac{\xi_2}{\xi_3}.$$

Atunci, introducînd și coordonatele carteziene omogene (coordonate punctuale omogene), ecuația dreptei se scrie:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0. \tag{25'}$$

În coordonate tangențiale omogene, dreptele care trec prin origine corespund valorii $\xi_3 = 0$ (deoarece $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 \neq 0$).

§ 5. ECUAȚIILE PARAMETRICE ALE DREPTEI

O reprezentare parametrică a dreptei u se deduce din relațiile

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = r, \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = r,$$

care se obțin din (10).

Rezolvînd în raport cu x, y, obținem ecuațiile

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}, \tag{26}$$

care reprezintă *o formă a ecuațiilor parametrice ale dreptei*, unde r este *coordonata baricentrică* a punctului curent al dreptei în raport cu punctele de bază $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$.

Dacă în ecuația (15″) egalăm cele două rapoarte cu un parametru t, obținem ecuațiile

$$\begin{cases} x = x_0 + t\ \mu_1, \\ y = y_0 + t\ \mu_2, \end{cases} \tag{27}$$

care constituie *o altă formă a ecuațiilor parametrice ale dreptei*, unde t este *proporțional cu distanța* P_0P de la punctul $P_0(x_0, y_0)$ al dreptei la punctul curent $P(x, y)$ al dreptei. În adevăr, distanța dintre aceste puncte este

$$P_0P = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = t\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2};$$

de unde, notînd $\rho = P_0P$, rezultă

$$t = \frac{\rho}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}}$$

Cînd parametrii directori sînt chiar *cosinusurile directoare* ale dreptei ($\mu_1 = \cos\alpha$, $\mu_2 = \cos\beta = \sin\alpha$), parametrul t reprezintă *valoarea algebrică a lungimii segmentului* $\overline{P_0P}$ ($t = \rho$), iar ecuațiile (27) se scriu sub forma

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\alpha, \\ y = y_0 + \rho\sin\alpha. \end{cases} \tag{27'}$$

O altă reprezentare parametrică a dreptei se obține plecînd de la ecuația (23) a dreptei care trece prin punctele P' și P''. În adevăr, ținînd seama de propoziția care afirmă că un determinant este nul dacă între liniile lui există o dependență liniară*, ecuația (23) este echivalentă cu ecuațiile

$$x_i = \lambda x_i' + \mu x_i'', \qquad (i = 1,2,3), \tag{28}$$

unde λ, μ sînt parametri arbitrari.

Aceste formule sînt deci *ecuațiile parametrice ale dreptei*, λ, μ *fiind coordonate proiective omogene ale punctelor de pe dreaptă*. Dacă punem $\frac{\lambda}{\mu} = h$ și avem în vedere faptul că x_i sînt determinate, abstracție făcînd de un factor de proporționalitate, putem scrie ecuațiile (28) sub forma

$$x_i = hx_i' + x_i'', \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{28'}$$

unde h *este o coordonată proiectivă* (neomogenă) pe dreaptă, față de punctele fundamentale $P'(h = \infty)$, $P''(h = 0)$ și $E(h = 1)$. În adevăr avem

$$(P'P''E\,P) = (\infty\ 0\ 1\ h) = h.$$

§ 6. DISTANȚA DE LA UN PUNCT LA O DREAPTĂ

Fiind dată o dreaptă u și un punct $P_0(x_0, y_0)$, distanța de la P_0 la piciorul perpendicularei coborîte din P_0 pe dreaptă se numește distanța de la acest punct la dreapta u. Notînd această distanță cu d, rezultă că $d = P_0R$, unde R este piciorul perpendicularei din P_0 pe dreaptă, d fiind orientată ca distanța între două puncte (v. Cap. IV, § 2). Fie

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0 \tag{29}$$

ecuația dreptei u sub formă normală, în care $\cos\theta$, $\sin\theta$ sînt cosinusurile directoare ale normalei la dreapta orientată u, iar p este distanța de la origine la dreapta u (segmentul de normală cuprins între origine și dreaptă), adică $p = OQ$, fiind orientată ca distanța între două puncte (fig. 7). Fie $P_0(x_0, y_0)$ punctul dat. Ducem prin acest punct o dreaptă u', paralelă cu

* De altfel, punctele P' și P'' fiind distincte, determinanții de-al doilea ordin, formați cu elementele ultimelor două linii ale determinantului (24), nu sînt toți nuli.

dreapta u. Cu convențiile făcute, dacă notăm cu $p' = OQ + RP_0 = p + RP_0$ distanța de la origine la această dreaptă, ecuația dreptei u' va fi atunci

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p' = 0 \text{ sau încă } x \cos \theta + y \sin \theta - p - RP_0 = 0.$$

Deoarece această dreaptă trebuie să treacă prin punctul $P_0(x_0,y_0)$, urmează că trebuie să avem

$$x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - p - RP_0 = 0.$$

Ținînd seama că

$$\overline{RP_0} + \overline{P_0R} = 0$$

și că $d = P_0R$, deducem

$$d = -(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - p). \quad (30)$$

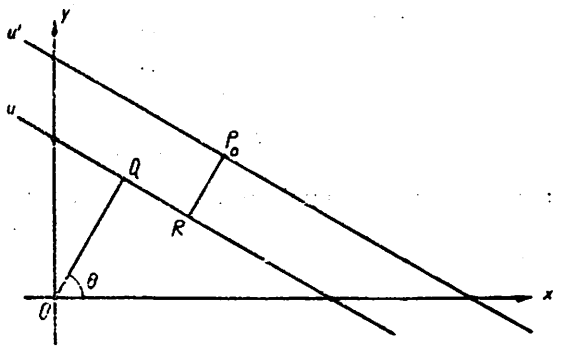


Fig. 7

Această formulă reprezintă distanța de la un punct $P_0(x_0,y_0)$ la o dreaptă u, cînd ecuația dreptei este dată sub forma normală.

Dacă ecuația dreptei ar fi fost dată sub forma generală (18), și știind că

$$\cos \theta = \frac{a}{\pm \sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\pm \sqrt{a^2+b^2}}, \quad p = \frac{-c}{\pm \sqrt{a^2+b^2}},$$

semnul din fața radicalului fiind semnul lui b (v. § 4), distanța de la punctul $P_0(x_0,y_0)$ la dreapta dată (18) se poate scrie sub forma

$$d = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (30')$$

semnul radicalului de la numitor fiind acela al lui b.

Aplicație. Aria unui triunghi. Fie $P_i(x_i, y_i)$, $(i = 1,2,3)$ cele trei vîrfuri ale unui triunghi (fig. 8). Servindu-ne de formula care exprimă distanța de la un punct la o dreaptă, putem găsi formula care dă aria triunghiului $P_1P_2P_3$. În adevăr, să ducem dintr-unul din vîrfurile triunghiului o perpendiculară pe latura opusă; de exemplu, să ducem din vîrful P_1 perpendiculara pe latura P_2P_3 și fie P_1' piciorul acestei perpendiculare. Atunci, aria triunghiului $P_1P_2P_3$ este dată de formula

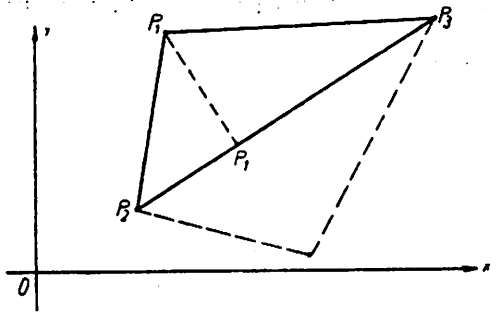


Fig. 8

$$S = \frac{1}{2} P_1P_1' \cdot P_2P_3.$$

Dacă luăm ecuația dreptei P_2P_3 sub formă de determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

distanța de la punctul P_1 la această dreaptă este, în virtutea formulei (30'),

$$P_1P_1' = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}.$$

Deoarece

$$P_2P_3 = \pm \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2},$$

găsim că aria triunghiului $P_1P_2P_3$ este dată de formula

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{31}$$

În general se ia semnul $\pm$ înaintea membrului al doilea, pentru ca aria triunghiului să fie întotdeauna un număr pozitiv. Pentru evitarea dublului semn din formula (31) este util să se considere aria unui triunghi ca o cantitate algebrică (dotată de un anumit semn). Observăm că dacă presupunem punctele P_2 și P_3 fixe, iar P_1 variabil prin continuitate în plan, aria S variază prin continuitate, neputîndu-și schimba semnul decît dacă P_1 traversează dreapta P_2P_3, deoarece singurele poziții ale lui P_1 pentru care aria S este nulă sînt acelea pentru care punctele $P_i (i = 1,2,3)$ sînt coliniare (v. § 2). Vom atribui ariei triunghiului $P_1P_2P_3$ semnul + dacă un mobil care descrie conturul $P_1P_2P_3P_1$ se mișcă în sens direct (sinistrorsum), deci lasă aria la stînga, sau semnul — dacă mobilul se mișcă în sens invers (dextrorsum), deci lasă aria la dreapta sa. De aceea, vom considera că aria triunghiului $P_1P_2P_3$ este dată de formula

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{31'}$$

În adevăr, să alegem în mod convenabil un triunghi $P_1P_2P_3$; de exemplu, să luăm triunghiul avînd vîrfurile în punctele $P_1(a^2, 0)$, $P_2(0, b^2)$, $P_3(0, 0)$.

Ținînd seama de formula (31'), obținem pentru aria S a triunghiului $P_1P_2P_3$ astfel ales următoarea expresie

$$S = \frac{a^2b^2}{2},$$

care este o cantitate pozitivă.

§ 7. INTERSECȚIA A DOUĂ DREPTE

Fie dreptele

$$d_1: \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0, \tag{32}$$

$$d_2: \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Ele au, în general, un punct comun (se intersectează într-un punct), coordonatele punctului comun obținîndu-se rezolvînd ecuațiile (32).

Potrivit teoriei sistemelor de ecuații liniare (v. Cap. III), în vederea discuției sistemului (32), considerăm matricele

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\|, \quad A' = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\|, \tag{32'}$$

numite matricea asociată, respectiv matricea extinsă a sistemului.

Dacă $r(A) = 2$, deci dacă determinantul

$$\Delta_3 = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\|$$

este diferit de zero, atunci, după regula lui Cramer, sistemul (32) admite soluția unic determinată

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta_3}, \; y = \frac{\Delta_2}{\Delta_3}, \tag{32''}$$

unde

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{32'''}$$

sînt determinanții de ordinul al doilea ai matricei extinse A', formați prin eliminarea coloanei i ($i = 1,2,3$) și ținînd seama de semn (se ia semnul $\pm$ după cum i este impar, respectiv par).

Deci, dacă sistemul de ecuații (32) admite o soluție unică (32''), înseamnă, din punct de vedere geometric, că dreptele definite de ecuațiile (32) au un singur punct comun (sînt concurente). Relațiile (32'') determină coordonatele punctului de intersecție al dreptelor d_1, d_2.

Dacă $r(A) = 1$, deci $\Delta_3 = 0$, trebuie să avem

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

În acest caz, notînd prin

$$m_1 = -\frac{a_1}{b_1}, \quad m_2 = -\frac{a_2}{b_2},$$

coeficienții unghiulari ai celor două drepte, rezultă $m_1 = m_2$, deci dreptele d_1, d_2 sînt paralele. În ipoteza $r(A) = 1$, sînt de considerat posibilitățile: $r(A') = 2$ și $r(A') = 1$.

Să presupunem, mai întîi, că sîntem în cazul $r(A) = 1$, $r(A') = 2$. După teorema lui Kronecker-Capelli, sistemul (32) este incompatibil, adică sistemul (32) nu admite nici o soluție (de valori finite). De altfel, în acest caz cel puțin unul din determinanții Δ_1, Δ_2 este diferit de zero. De exemplu*, dacă $\Delta_1 \neq 0$.

* Dacă $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 \neq 0$, atunci în discuție intervin „*abscisele la origine*" ale dreptelor d_1, d_2.

deci $b_1c_2 - c_1b_2 \neq 0$ și ținînd seama că ordonatele la origine ale celor două drepte sînt

$$n_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad n_2 = -\frac{c_2}{b_2},$$

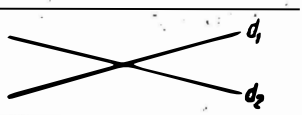
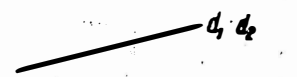
rezultă $n_1 \neq n_2$. Aceasta înseamnă, din punct de vedere geometric, că dreptele definite de ecuațiile (32) sînt distincte și nu au nici un punct comun, adică sînt paralele distincte. Din (32″) rezultă că cel puțin una din valorile x sau y este infinită, soluția sistemului (32) fiind unică; putem deci spune și despre două drepte paralele că se intersectează într-un singur punct, însă acest punct este la infinit.

Să presupunem, în sfîrșit, că sîntem în cazul $r(A) = r(A') = 1$. După teorema lui Kronecker-Capelli, sistemul (32) este compatibil. Deoarece $r(A)$ este mai mic decît numărul variabilelor, sistemul este compatibil nedeterminat, adică admite o infinitate de soluții. De altfel avem, în acest caz, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, deci

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

ceea ce arată că ecuațiile (32) au coeficienții proporționali. Prin urmare, ecuațiile (32) reprezintă una și aceeași dreaptă. Altfel spus, dreptele d_1 d_2 sînt confundate. Așa se explică pentru ce, în acest caz, valorile lui x, y date de (32″) sînt nedeterminate, căci cele două drepte — fiind confundate — au o infinitate de puncte comune.

Tabelă

Criteriul		Poziția dreptelor una față de cealaltă	Figura
$r(A) = 2$		Dreptele sînt concurente (secante)	
$r(A) = 1$	$r(A') = 2$	Dreptele sînt paralele (distincte)	
	$r(A') = 1$	Dreptele sînt confundate	

În tabelă sînt sintetizate criteriile necesare și suficiente pentru determinarea poziției acestor drepte una față de cealaltă.

Aplicație. Coordonatele omogene ale punctului de la infinit al unei drepte. Acest punct se găsește la intersecția dreptei date

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \tag{33}$$

cu dreapta improprie a planului

$$x_3 = 0. \tag{33'}$$

Ținînd seama de (33') în (33), coordonatele x_1, x_2, x_3 ale acestui punct satisfac sistemul

$$ax_1 + bx_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Acest sistem liniar și omogen (de două ecuații în trei necunoscute) admite o infinitate de soluții, proporționale cu determinanții matricei atașate sistemului (v. Cap. III, § 3).

$$\left\| \begin{matrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

și anume

$$\frac{x_1}{b} = \frac{x_2}{-a} = \frac{x_3}{0}.$$

Deoarece coordonatele omogene sînt determinate, abstracție făcînd de un factor de proporționalitate, putem lua $x_1 = b$, $x_2 = -a$, $x_3 = 0$. Deci, coordonatele carteziene omogene ale punctului de la infinit P_∞ al dreptei (33) sînt $(b, -a, 0)$. De asemenea dacă $b \neq 0$, putem împărți aceste coordonate cu b și avem P_∞ $(1, m, 0)$, unde $m = -\frac{a}{b}$ este coeficientul unghiular al dreptei.

Dacă $b = 0$, deci dreapta este paralelă cu axa Oy, punctul de la infinit are coordonatele carteziene omogene $(0, 1, 0)$. De asemenea, punctul de la infinit al axei Ox are coordonatele carteziene omogene $(1, 0, 0)$.

În particular, punctele de la infinit ale dreptelor izotrope (coeficient unghiular $m = \pm i$) sînt I $(1, i, 0)$ și J $(1, -i, 0)$, care puncte se mai numesc *punctele absolute* sau *punctele ciclice* ale planului.

§ 8. FASCICUL DE DREPTE

Se numește *fascicul de drepte* totalitatea dreptelor dintr-un plan care trec printr-un punct fix, centrul (vîrful) fasciculului.

Fie, în sistemul de referință cartezian ortogonal Oxy două drepte concurente d_1, d_2, date prin ecuația (32). Atunci, ecuația

$$\lambda d_1 + \mu d_2 = 0, \tag{33}$$

unde λ, μ sînt doi parametri nesimultan nuli, definește fasciculul de drepte cu centrul în punctul de intersecție al dreptelor date. Dreptele d_1, d_2 se numesc *dreptele fundamentale* sau *de bază* ale fasciculului.

Dreapta (33) trece prin punctul de intersecție al dreptelor date, deoarece coordonatele punctului de intersecție al acestor drepte, satisfăcînd ecuațiile (32), vor satisface și ecuația (33).

Parametrii λ, μ se pot interpreta drept coordonate omogene în fascicul, dreptele fundamentale $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, avînd respectiv coordonatele (1,0), (0,1).

Dacă $\lambda \neq 0$, putem împărți prin λ, astfel încît ecuația fasciculului se mai scrie

$$d_1 + kd_2 = 0, \quad \left(k = \frac{\mu}{\lambda}\right), \tag{33'}$$

perimetrul k fiind o coordonată neomogenă a fasciculului. În acest caz, dreptele fundamentale au coordonatele $k = \infty$ și $k = 0$.

Să determinăm dreptele din fascicul care trec prin punctul $P'(x', y')$, diferit de punctul de intersecție al dreptelor date. Atunci, coordonatele x', y' ale punctului P' verifică identic ecuația (33) a fasciculului

$$d_1(x', y') + kd_2(x', y') = 0.$$

De aici rezultă o singură valoare:

$$k = -\frac{d_1(x', y')}{d_2(x', y')} = k_0.$$

Cu alte cuvinte, *pentru fiecare punct $P'(x', y')$ al planului, diferit de punctul de intersecție al dreptelor date, trece o singură dreaptă a fasciculului (33)*, anume dreapta

$$d_1 + k_0 d_2 = 0.$$

Într-un fascicul putem schimba dreptele de bază d_1, d_2 cu alte drepte $d_1' \equiv d_1 + k'd_2 = 0$, $d_2' \equiv d_1 + k''d_2 = 0$ ale fasciculului. În adevăr, fasciculul determinat de dreptele d_1' și d_2' are ecuația

$$d_1' + \alpha d_2' = 0, \text{ sau încă } d_1 + \frac{k' + \alpha k''}{1 + \alpha} d_2 = 0;$$

deci coincide cu fasciculul determinat de dreptele d_1, d_2, abstracție făcînd de o schimbare a parametrului (legătura între parametrii k și α este dată de formula $k = \frac{k' + \alpha k''}{1 + \alpha}$). Rezultă deci că putem lua ca drepte fundamentale două drepte oarecare ale fasciculului.

Dacă $P_0(x_0, y_0)$ este centrul fasciculului și dacă alegem ca drepte fundamentale două drepte paralele cu axele și trecînd prin punctul P_0, deci:

$$d_1 \equiv y - y_0 = 0 \quad \text{și} \quad d_2 \equiv x - x_0 = 0,$$

ecuația fasciculului se scrie sub forma cunoscută

$$y - y_0 = m(x - x_0). \tag{33''}$$

Coordonata neomogenă în fasciculul (33'') coincide cu panta dreptei. Deci, o dreaptă d din fascicul este determinată prin coordonata $m = \operatorname{tg} \alpha$, numită coordonata tangentă, unde α este unghiul dintre dreapta dată și paralela d_1 prin P_0 la axa Ox.

Vom numi *raport anarmonic a patru drepte* d_i ($i = 1,2,3,4$) din fascicul raportul anarmonic al coordonatelor tangente m_i:

$$(d_1d_2d_3d_4) = (m_1m_2m_3m_4).$$

Să arătăm că intersectînd un fascicul cu o dreaptă oarecare Δ, care nu trece prin centrul fasciculului, biraportul punctelor de intersecție este egal cu biraportul dreptelor din fascicul. În adevăr, să ducem din centrul fasciculului P_0 o perpendiculară pe dreapta dată Δ; atunci putem lua această dreaptă d_0 ca dreaptă origine în fascicul, iar punctul de intersecție al ei cu Δ ca origine O (a coordonatei abscisă a) pe dreapta Δ (fig.9). Din triunghiul P_0OA avem $a = m \cdot P_0O$; dacă luăm pe P_0O ca unitate de lungime (etalon) pe dreapta Δ, această formulă devine $a = m$. Deci, dacă A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) este punctul de intersecție al dreptei Δ cu dreapta d_i, avem

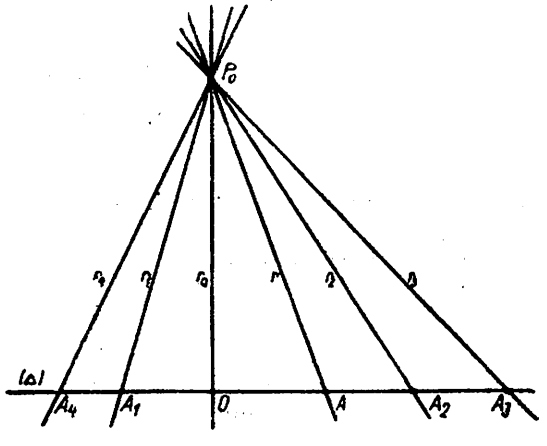


Fig. 9

$$(A_1A_2A_3A_4) = (a_1a_2a_3a_4) = (m_1m_2m_3m_4) = (d_1d_2d_3d_4)$$

și afirmația este demonstrată.

CAPITOLUL VI

CURBE PLANE

§ 1. REPREZENTAREA ANALITICĂ A CURBELOR PLANE*

Ecuația implicită a unei curbe plane. Fie o ecuație în două necunoscute (variabile)

$$F(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Să considerăm în ecuația (1) pe x și y drept coordonate carteziene (în general ortogonale) ale unui punct P într-un plan π. *Totalitatea punctelor $P(x,y)$ din planul π, ale căror coordonate satisfac ecuația (1), se zice că constituie o curbă situată în acest plan* (curbă plană).

Din punct de vedere geometric intuitiv, înțelegem de obicei printr-o curbă plană o însușire continuă de puncte. De exemplu, o astfel de curbă se obține prin mișcarea continuă a unui creion pe o bucată de hîrtie (fig. 1).

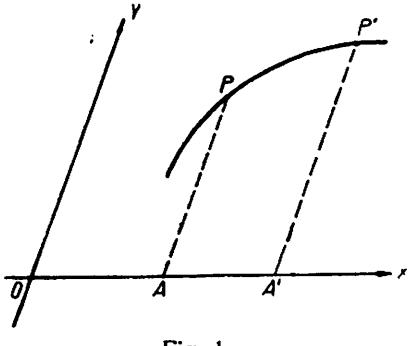


Fig. 1

Făcînd pe x să varieze continuu într-un interval dat, fiecărei valori x îi corespunde una sau mai multe valori y, complet determinate de ecuația (1); obținem, așadar, mulțimi de puncte care formează una sau mai multe curbe în înțelesul geometric intuitiv sau care nu formează o astfel de curbă (de exemplu, cînd obținem o mulțime discretă de puncte). De altfel, ecuația (1) s-ar putea să nu fie satisfăcută de nici un punct (x, y) de coordonate reale; de asemenea s-ar putea ca ecuația (1) să fie satisfăcută de coordonatele unui singur punct sau de coordonatele cîtorva puncte izolate (adică, obținem o mulțime discretă de puncte, mulțimea putînd fi finită sau în-

* Studiul general al curbelor se face în cadrul *Geometriei diferențiale*, cu ajutorul *Analizei matematice*. În acest paragraf enunțăm unele din problemele reprezentării analitice a curbelor plane, fără a aprofunda sau a expune într-o formă modernă aceste cîteva probleme (a se vedea [25]. [5]).

finită). În aceste cazuri, se spune că ecuația (1) reprezintă tot o curbă, însă curba este imaginară sau degenerată în puncte.

Ecuația (1) se numește *ecuația implicită* a curbei plane.

Curbele plane se împart în două clase: *curbe algebrice* și *curbe transcendente.*

O curbă plană se zice *algebrică*, dacă prima parte a ecuației implicite (1) este un polinom în variabilele x, y de un anumit grad n:

$$a_{n0}x^n + a_{n-1\,1}x^{n-1}y + \ldots + a_{0n}y^n + \ldots + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = 0, \quad (2)$$

unde coeficienții a_{rs} $(r + s \leqslant n)$ sînt constante oarecare. Dacă n este gradul polinomului în x, y, curba algebrică se zice de *grad n.*

Curbele algebrice de gradul întîi, date prin ecuații de forma

$$ax + by + c = 0, \quad (2')$$

sînt drepte.

O curbă de gradul al doilea este dată de o ecuție de forma

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (2'')$$

coeficienții $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, 3,)$ fiind constante, iar unul cel puțin din coeficienții a_{11}, a_{12}, a_{22} diferit de zero. Curbele de gradul al doilea se mai numesc și *conice.*

O curbă algebrică de gradul trei, patru, ... se numește *cubică, cuartică,* ...

O curbă care nu este algrebrică se zice *transcendentă.*

Ideea de a asocia o curbă plană unei ecuații cu două necunoscute se datorește lui R. Descartes. De altfel, Descartes s-a limitat numai la ideea reprezentării cu ajutorul metodei coordonatelor, a ecuațiilor *algebrice* cu două necunoscute, sub forma unor anumite curbe în plan.

Fiind dată o curbă prin ecuația ei implicită (1), o problemă care se pune este aceea a determinării proprietăților ei geometrice. De exemplu, dacă ecuația (1) nu se schimbă cînd înlocuim pe y cu $-y$, deci dacă ecuația (1) conține numai termeni de grad par sau numai termeni de grad impar în y, curba corespunzătoare este simetrică în raport cu axa Ox. Cu alte cuvinte, dacă $P(x, y)$ aparține curbei (deci, coordonatele lui P verifică ecuația curbei) și dacă se constată că și $P'(x, -y)$ aparține curbei, atunci dreapta Ox este *axă de simetrie* sau, mai simplu, *axă* a curbei. În mod analog, dacă ecuația (1) nu conține decît termeni pari sau numai termeni impari în x, curba corespunzătoare este simetrică în raport cu axa Oy. În acest caz, dacă $P(x, y)$ aparține curbei, atunci $P''(-x, y)$ se găsește de asemenea pe curbă, dreapta Oy fiind axă a curbei.

Dacă ecuația unei curbe conține numai termeni de grad par (sau impar) în x și y, atunci curba este simetrică în raport cu originea axelor de coordonate. Cu alte cuvinte, punctele $P(x,y)$, $P'''(-x, -y)$ aparțin curbei, originea fiind un *centru de simetrie* sau, mai simplu, un *centru* al curbei.

Dacă o curbă admite două axe de simetrie, atunci ea admite drept centru de simetrie punctul comun al acestor axe.

Ecuația explicită a unei curbe plane. Să presupunem că la orice valoare a lui x, într-un interval dat, ecuația (1) are una sau mai multe soluții reale pentru y și să însemnăm una din aceste soluții

$$y = f(x). \quad (3)$$

Criteriul de a avea numai o singură soluție este dat de următoarea teoremă de existență a funcțiilor implicite, cunoscută în analiză:

Fiind dată o ecuație de forma (1), verificată de valorile $x = x_0$, $y = y_0$, dacă funcția $F(x, y)$ și derivatele ei parțiale F_x, F_y sînt continue în vecinătatea valorilor x_0, y_0, derivata F_y fiind diferită de zero pentru $x = x_0$, $y = y_0$, există o singură funcție (3) care, în vecinătatea valorii $x = x_0$, verifică identic ecuația (1) și ia valoarea y_0 pentru $x = x_0$. Această funcție este biunivocă și continuă în vecinătatea valorii x_0 și are derivata continuă, dată de formula *

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}. \tag{1'}$$

Cu alte cuvinte, fiind dată o ecuație de forma (1), verificată de coordonatele x_0, y_0 ale unui punct P_0, dacă funcția $F(x, y)$ și derivatele ei parțiale F_x, F_y satisfac condițiile teoremei de existență în vecinătatea lui P_0, ecuația (1) reprezintă — în această vecinătate — o curbă (în sens geometric intuitiv) ce trece prin P_0. Ecuația acestei curbe poate fi presupusă adusă la forma (3).

Ecuația (3) se numește *ecuația explicită* a curbei plane.

Ecuațiile parametrice ale unei curbe plane. Putem presupune coordonatele unui punct $P(x,y)$ din planul π funcții de un același parametru t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (a, b), \tag{4}$$

unde (a,b) este un interval al dreptei reale R.

Observăm că, la fiecare valoare a parametrului t, punctul P ia o anumită poziție, astfel că atunci cînd t variază continuu într-un interval dat, punctul P descrie o curbă; deci, ecuațiile (4) definesc o curbă în plan.

Aceasta este reprezentarea parametrică a curbei, ecuațiile (4) numindu-se *ecuațiile parametrice* ale curbei date.

Curbele care admit o reprezentare parametrică de forma

$$x = \frac{P(t)}{R(t)}, \qquad y = \frac{Q(t)}{R(t)} \tag{5}$$

se numesc *curbe unicursale* sau *curbe raționale*, pentru faptul că x,y sînt date prin funcții raționale de un parametru.

Observăm că prin eliminarea lui t între ecuațiile (5), rezultă că o curbă unicursală este o curbă algebrică. Gradul acestei curbe este cel mai mare dintre gradele polinoamelor P, Q, R.

O *curbă* se zice *regulată de clasă* C^n, dacă fiecare punct al ei are o vecinătate în care curba admite o reprezentare parametrică (4) regulată, adică func-

* Conform teoremei de existență a funcțiilor implicite, dacă în (1) ținem seama de (3), funcția $F(x, y)$, care depinde astfel numai de x, se reduce identic la zero. Deci și derivata în raport cu x a acestei funcții este identic nulă; obținem

$$F_x + y'F_y = 0,$$

de unde rezultă (1').

țiile $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sînt derivabile de n ori și cu derivate continue pînă la ordinul n inclusiv pe intervalul (a, b) și satisfac relația

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 > 0, \tag{4'}$$

pentru orice $t \in (a,b)$. Dacă $n = 1$, *curba* se numește *netedă*.

Dacă funcțiile $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sînt analitice, adică se pot dezvolta în serii Taylor, cu interval de convergență nenul în vecinătatea fiecărei valori $t \in (a, b)$, *curba* se numește *analitică*.

Curbele care se întîlnesc frecvent în aplicații sînt analitice.

Este evident că orice curbă poate fi reprezentată prin ecuații de forma (4). De exemplu, dacă o curbă este dată prin ecuația ei explicită (3), o reprezentare parametrică se obține imediat luînd ca parametru chiar variabila x:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases} \tag{6}$$

Reciproc, dîndu-se ecuațiile parametrice (4) ale unei curbe plane, se poate obține reprezentarea carteziană, eliminînd parametrul t între ecuațiile (4). În adevăr, rezolvînd una din ecuațiile (4) în raport cu t și înlocuind în cealaltă — sau, cum se mai spune, eliminînd pe t din ecuațiile (4) — se obține o relație de forma (1) sau (3).

Pentru a putea corespunde ideii intuitive de curbă, funcțiile care intră în reprezentările analitice (1), (3), (4) nu pot fi cu totul arbitrare; ele trebuie să îndeplinească anumite condiții de regularitate:

1° Funcțiile date să fie uniforme, continue și să admită derivate (parțiale) continue de primul ordin.

2° Aceste derivate să nu se anuleze amîndouă în nici un punct al curbei *.

3° Funcțiile date să admită derivate (parțiale) finite și continue pînă la ordinul $n > 1$ (dacă în expresia analitică a noțiunii sau proprietății diferențiale considerate intervin aceste derivate).

4° În reprezentarea parametrică (4), corespondența dintre valorile pe care le poate lua parametrul t și punctele curbei să fie biunivocă.

Punctul în care aceste condiții sînt satisfăcute se numește *punct ordinar*, într-o vecinătate a lui curba fiind regulată. Se poate întîmpla însă ca în unele puncte, numite *puncte singulare*, aceste condiții să nu fie îndeplinite. Curba apare astfel constituită dintr-un număr de curbe netede (în sens geometric intuitiv, formate din puncte ordinare) disjuncte și un număr de puncte singulare, care realizează joncțiunea unora din aceste curbe sau sînt puncte izolate.

Aplicație. Tangenta. Se numește tangentă la o curbă C, într-un punct P_0 ordinar al ei, poziția limită a dreptei determinate de P_0 și de un punct curent P al curbei din vecinătatea lui P_0, în care curba C este netedă, cînd P tinde către P_0.

Să presupunem curba C dată analitic printr-o reprezentare parametrică (4). Ecuația secantei P_0P este (fig. 2)

$$\frac{x - x(t_0)}{\mu_1} = \frac{y - y(t_0)}{\mu_2},$$

* Condiția 2° se referă numai la cazurile cînd curba este dată prin ecuații de forma (1) sau (4).

în care drept parametri directori ai secantei P_0P putem lua

$$\mu_1 = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \quad \mu_2 = \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}.$$

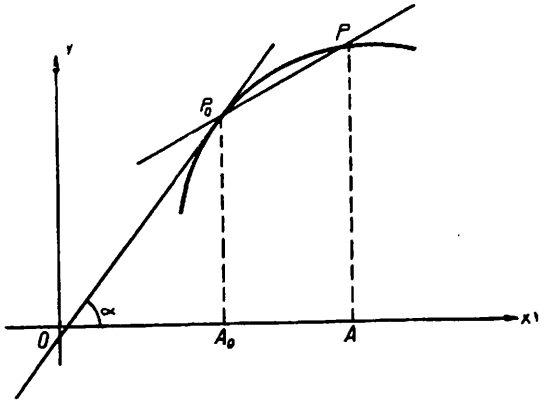


Fig. 2

Curba fiind netedă în vecinătatea considerată a lui P_0, dacă $t \to t_0$, atunci $P \to P_0$; deci secanta P_0P devine tangentă la curbă în P_0. În acest caz

$$\mu_1 = x'(t_0), \qquad \mu_2 = y'(t_0)$$

și ecuația tangentei în P_0 (t_0) va fi

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}. \qquad (7)$$

Dacă curba este reprezentată analitic prin ecuația explicită (3), în orice punct ordinar $P_0(x_0, y_0)$ al curbei există o tangentă unică dată de ecuația

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0). \quad (7')$$

În adevăr, pentru curba (3) se poate obține ușor o parametrizare regulată (6) în vecinătatea punctului P_0, luînd pe x ca parametru. Atunci, din ecuația (7) se obține imediat forma (7') a ecuației tangentei * . Dacă notăm cu α unghiul pe care tangenta la curba C, în punctul P_0, îl face cu axa Ox, avem relația

$$m = f'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}, \quad (m = \operatorname{tg}\alpha).$$

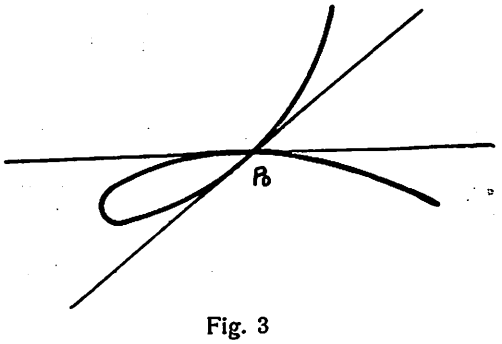


Fig. 3

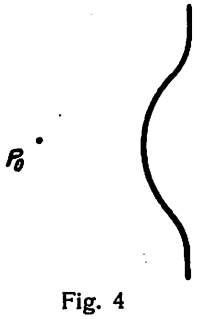


Fig. 4

Dacă curba este reprezentată analitic prin ecuația implicită (1), în orice punct ordinar $P_0(x_0, y_0)$ al curbei există o tangentă unică, avînd ecuația

$$(x - x_0)\,F_x(x_0, y_0) + (y - y_0)\,F_y(x_0, y_0) = 0. \qquad (7'')$$

În adevăr, punctul P_0 fiind ordinar, există o vecinătate a lui, în care curba este netedă. În această vecinătate, curba se poate explicita, de exemplu, prin ecuația (3), astfel încît

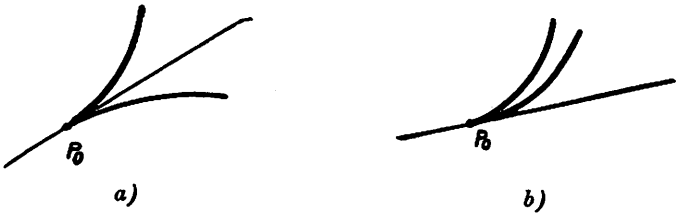
* Putem obține ecuația (7') și plecînd direct de la definiția tangentei (ca în cazul curbe dată printr-o reprezentare parametrică), (v. [25], p. 87).

derivata lui y în raport cu x este dată de formula (1'); de unde rezultă imediat ecuația (7'') a tangentei.

Se numesc *puncte multiple* ale curbei (1) — astfel de puncte sînt puncte singulare — acele puncte pentru care avem

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{8}$$

Observăm că într-un astfel de punct, ecuația (7'') a tangentei este nedeterminată.



a) b)

Fig. 5

În geometria diferențială se arată că printr-un punct multiplu trec, în general, mai multe ramuri ale curbei, fiecare ramură avînd — în acest punct — o tangentă. De exemplu, într-un punct multiplu de ordinul doi — numit și punct *dublu* — o curbă are două tangente distincte, reale sau imaginare, respectiv confundate. După natura acestor tangente, punctul dublu se numește *nod* sau *punct nodal* (fig. 3), *punct izolat* (fig. 4), respectiv *punct de întoarcere* — de prima sau de a doua speță — (fig. 5).

§ 2. LOCURI GEOMETRICE

O curbă plană raportată la un sistem de referință cartezian (ortogonal) poate fi definită printr-o ecuație între cele două coordonate carteziene x, y; fiind dată ecuația curbei, se pune atunci problema de a găsi proprietățile geometrice ale curbei. Însă, o curbă poate fi definită printr-o proprietate geometrică sau mecanică.

Totalitatea punctelor din planul Oxy care se bucură de aceeași proprietate geometrică sau mecanică constituie un *loc geometric.*

În general, definiția geometrică sau mecanică a unei curbe poate să ne conducă direct la ecuația curbei. În multe cazuri însă, curba apare ca locul geometric al punctelor de intersecție a două familii de curbe, depinzînd fiecare de unul, doi ... parametri.

În adevăr, să presupunem că — într-o problemă — obținem două familii de curbe definite prin ecuații de forma

$$f(x, y, \lambda) = 0, \quad g(x, y, \lambda) = 0, \tag{9}$$

unde λ este un parametru. La o valoare a parametrului λ, de exemplu λ_0, curbele corespunzătoare

$$F(x, y) \equiv f(x, y, \lambda_0) = 0, \qquad G(x, y) \equiv g(x, y, \lambda_0) = 0 \tag{9'}$$

se intersectează într-un număr oarecare de puncte $P_1(x_1, y_1)$, ... ale căror coordonate (x_1, y_1), ... sînt soluții ale sistemului (9') de două ecuații cu două necunoscute x, y.

Cînd parametrul λ variază prin continuitate, punctele P_1,... variază şi ele prin continuitate, descriind curbele C_1, ...

Aceste curbe C_1,... constituie locul geometric al punctelor de intersecţie a celor două familii de curbe (9). Ecuaţia acestui loc geometric se află, în general, eliminînd parametrul λ. În adevăr, să presupunem că putem rezolva una din ecuaţiile (9), de exemplu pe a doua, în raport cu parametrul λ:

$$\lambda = \psi(x, y).$$

Înlocuind această valoare a lui λ în prima ecuaţie (9), obţinem ceea ce se numeşte *rezolvanta* ecuaţiilor (9):

$$\Phi(x, y) = 0, \qquad (9'')$$

unde $\Phi(x, y) = f[x, y, \psi(x, y)]$. Coordonatele punctelor $P_1(x_1, y_1)$, ... trebuie să satisfacă ecuaţia (9''). Deci, curba C, definită de ecuaţia (9''), constituie locul geometric al punctelor de intersecţie a curbelor corespunzătoare din cele două familii de curbe (9).

În general, eliminarea parametrului λ în ecuaţiile (9) este o problemă dificilă. Metode generale de eliminare se cunosc, din algebră, numai pentru cazul în care ecuaţiile (9) sînt polinoame în parametrul λ.

Dacă nu putem să eliminăm parametrul λ sau nu vrem acest lucru, încă putem rezolva ecuaţiile (9) în raport cu x, y:

$$\begin{cases} x = \varphi(\lambda). \\ y = \psi(\lambda), \end{cases}$$

rezultă că am obţinut ecuaţiile locului geometric căutat sub formă parametrică.

CAPITOLUL VII

CERCUL

§ 1. ECUAȚIA CERCULUI

Ecuația carteziană a cercului. Cercul este *locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, numit centru, distanța de la centru la punctele cercului numindu-se rază.*

Să raportăm planul cercului la un sistem de referință cartezian ortogonal. Fie $C(a, b)$ centrul cercului, iar $P(x, y)$ un punct oarecare al lui (fig.1). Din definiție rezultă că distanța dintre C și P este constantă și egală cu raza r a cercului, adică

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r.$$

Ridicînd la pătrat, obținem că ecuația cercului este

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, \qquad (1)$$

sau încă

$$f(x, y)\equiv x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0, \qquad (2)$$

dacă efectuăm calculele, trecem toți termenii în membrul întîi și punem

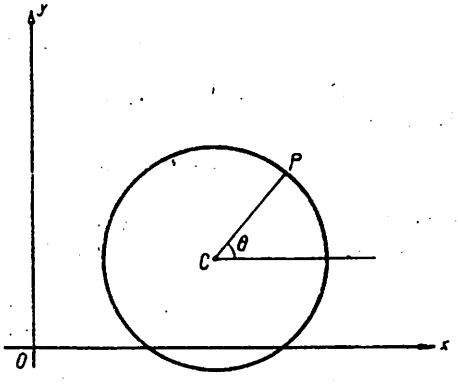


Fig. 1

$$\alpha=-a,\quad \beta=-b,\quad \gamma=a^2+b^2-r^2. \qquad (2')$$

Deci, dîndu-se un cerc prin ecuația lui (2), atunci centrul și raza lui sînt date în funcție de coeficienții ecuației cercului prin formulele

$$a=-\alpha,\quad b=-\beta;\qquad r^2=\alpha^2+\beta^2-\gamma. \qquad (2'')$$

Atunci ecuația (2) a cercului se mai scrie

$$f(x, y)=(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2-r^2=0, \qquad (2''')$$

r fiind dat de $(2'')$.

Observăm că, fiind dată ecuația (2″), expresia

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma$$

poate fi pozitivă, negativă sau nulă. După cum această expresie este pozitivă, negativă sau nulă, ecuația (2) reprezintă un *cerc* (real), un *cerc imaginar* sau un *cerc de rază nulă*. În ultimul caz, ecuația cercului se scrie

$$(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 = 0,$$

și reprezintă dreptele izotrope trecînd prin punctul $(-\alpha, -\beta)$. Cu alte cuvinte, un cerc de rază nulă este constituit de dreptele izotrope, care se intersectează în singurul punct real al cercului, centrul cercului.

Dacă cercul este cu centrul în origine, deci $\alpha = \beta = 0$, ecuația cercului are forma simplă

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ecuația (2) ne arată că cercul este o curbă algebrică de gradul al doilea Invers o curbă algebrică de gradul doi, de ecuație generală,

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{4}$$

este un cerc, numai dacă în ecuația (4) avem

$$a_{11} = a_{22} \neq 0, \qquad a_{12} = 0. \tag{4″}$$

În adevăr, dacă în ecuația (4) condițiile (4′) sînt îndeplinite, această ecuație se scrie

$$a_{11}(x^2 + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{4″}$$

care prin împărțire cu a_{11} ia forma (2). Obținem astfel ecuația unui cerc, coordonatele (a, b) ale centrului și raza r fiind

$$a = -\frac{a_{13}}{a_{11}}, \qquad b = -\frac{a_{23}}{a_{11}}, \qquad r^2 = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33}}{a_{11}^2},$$

dacă ținem seama de formulele (2″).

Ecuațiile parametrice ale cercului. Dacă θ este unghiul pe care raza CP îl face cu direcția pozitivă a axei Ox, o reprezentare parametrică a cercului este dată de ecuațiile

$$x = a + r\cos\theta, \qquad x = b + r\sin\theta. \tag{5}$$

Dacă în loc de θ se ia — ca parametru — t, dat de relația

$$t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

atunci ecuațiile (5) se scriu *

$$x = a + r\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = b + r\frac{2t}{1+t^2}, \tag{5'}$$

ceea ce arată că x, y sînt funcții raționale de un parametru, adică *cercul* este o *curbă unicursală* de gradul doi.

Ecuația cercului care trece prin trei puncte. Fie, într-un sistem de referință cartezian ortogonal, trei puncte $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$. Pentru ca aceste trei puncte să se găsească pe cercul de ecuație (2), coordonatele x_i, y_i ale punctelor P_i trebuie să verifice ecuația (2); deci avem condițiile

$$x_i^2 + y_i^2 + 2\alpha x_i + 2\beta y_i + \gamma = 0, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Aceste trei ecuații, considerate ca ecuații în necunoscutele α, β, γ, după regula lui Cramer, dau valori unice pentru α, β, γ numai dacă determinantul necunoscutelor este diferit de zero. Punctele P_i nefiind coliniare, ecuația cercului care trece prin aceste trei puncte se poate scrie sub forma unui determinant de ordinul patru:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Orientarea unui cerc. Fie un punct $P_0(x_0, y_0)$. Distanța CP_0 de la centrul $C(-\alpha, -\beta)$ al cercului (2) la punctul P_0 dat poate fi mai mare, egală sau mai mică decît raza cercului, adică

$$(x_0 + \alpha)^2 + (y_0 + \beta)^2 \gtreqless r^2,$$

r fiind raza cercului. Punctele din planul cercului pentru care această condiție este satisfăcută cu semnul $>$, respectiv $<$ sau $=$ sînt respectiv *puncte exterioare*, *puncte interioare* cercului, sau *se găsesc pe cerc*.

Așadar, un cerc împarte planul în două regiuni: una interioară și alta exterioară, punctele cercului constituind frontiera dintre aceste două regiuni. Rezultă că putem fixa un sens de parcurs pe un cerc. Astfel, se numește *sens pozitiv* de parcurs pe cerc, sensul dat de mișcarea sinistrorsum pe cerc, sens care lasă la stînga regiunea interioară cercului. Vom numi *cerc orientat* un cerc pe care s-a fixat un sens de parcurs. Un cerc orientat determină un sens și pe tangentele sale, direcția pozitivă a tangentelor fiind aceea care corespunde sensului pozitiv de parcurs al cercului.

* Avem:

$$\sin\theta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}, \qquad \cos\theta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}.$$

§ 2. INTERSECȚIA UNEI DREPTE CU UN CERC

Problema intersecției unui cerc cu o dreaptă se reduce în geometria analitică la problema găsirii soluțiilor sistemului format din ecuația cercului și ecuația dreptei. Dacă cercul este dat prin ecuația (2), iar dreapta prin ecuațiile parametrice

$$x = x_0 + \rho \cos \theta, \qquad y = y_0 + \rho \sin \theta, \tag{7}$$

avem pentru parametrul ρ condiția

$$(x_0 + \rho \cos \theta)^2 + (y_0 + \rho \sin \theta)^2 + 2\alpha(x_0 + \rho \cos \theta) + 2\beta(y_0 + \rho \sin\theta) + \gamma = 0,$$

care exprimă că coordonatele x, y ale punctului curent P al dreptei (7) verifică ecuația (2) a cercului, adică acest punct este pe cerc. Această condiție se scrie, după efectuarea calculelor,

$$\rho^2 + 2\,[(x_0 + \alpha)\,\cos\theta + (y_0 + \beta)\sin\theta]\,\rho + f(x_0,\ y_0) = 0, \tag{8}$$

unde

$$f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 + 2\alpha x_0 + 2\beta y_0 + \gamma = (x_0 + \alpha)^2 + (y_0 + \beta)^2 - r^2. \tag{9}$$

Această ecuație — numită și ecuația în ρ — fiind de gradul al doilea în ρ, are două rădăcini ρ_1 și ρ_2 astfel că, în general, sînt două puncte P_1 și P_2 comune cercului și dreptei date, ale căror coordonate sînt

$$P_i(x_0 + \rho_i \cos\theta,\ y_0 + \rho_i \sin\theta),\ (i = 1,\ 2).$$

Punctele de intersecție P_1 și P_2 ale dreptei cu cercul sînt reale și distincte, reale și confundate sau imaginar conjugate, după cum cele două rădăcini ρ_1 și ρ_2 ale ecuației (8) sînt reale și distincte, reale și confundate sau complex conjugate, deci după cum realizantul ecuației în ρ:

$$[(x_0 + \alpha)\cos\theta + (y_0 + \beta)\sin\theta]^2 - f\,(x_0,\ y_0) \tag{8'}$$

este mai mare, egal sau mai mic decît zero. În primul caz, dreapta P_0P este *secantă* cercului, adică intersectează cercul (2) în punctele reale P_1 și P_2; în al doilea caz, această dreaptă este *tangentă* la cerc în punctul $P_1 \equiv P_2$; iar în ultimul caz, dreapta P_0P este *exterioară* cercului, adică nu intersectează cercul (2) în nici un punct real.

Aplicație. Intersecția cercului cu dreapta de la infinit. În coordonate carteziene omogene, ecuația cercului se scrie

$$x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha x_1 x_3 + 2\beta x_2 x_3 + \gamma x_3^2 = 0.$$

Intersectînd cercul cu dreapta de la infinit, $x_3 = 0$, coordonatele punctelor de intersecție sînt date de soluțiile sistemului

$$x_1^2 + x_2^2 = 0,\ x_3 = 0.$$

Soluțiile

$$x_1 = 1,\ x_2 = \pm i,\ x_3 = 0$$

ale acestui sistem sînt coordonatele omogene ale punctelor ciclice. Rezultă deci că dreapta de la infinit întîlnește un cerc în punctele ciclice. Cu alte cuvinte, *toate cercurile trec prin punctele ciclice.*

§ 3. PROBLEME DE TANGENȚĂ

Tangentele duse dintr-un punct la cerc. Dreapta (7) este tangentă la cerc (fig. 2), dacă cele două puncte de intersecție P_1, P_2 ale dreptei cu cercul coincid. În acest caz, ecuația (8) are rădăcinile egale, adică $\rho_1 = \rho_2$. Pentru aceasta, trebuie ca realizantul (8') al ecuației (8) să fie nul, adică să avem

$$[(x_0 + \alpha)\cos\theta + (y_0 + \beta)\sin\theta]^2 - f(x_0, y_0) = 0,$$

ceea ce se mai scrie

$$\cos^2\theta\,[x_0 + \alpha + (y_0 + \beta)\operatorname{tg}\theta]^2 - f(x_0, y_0) = 0.$$

Deoarece panta dreptei (7) este $m = \operatorname{tg}\theta$, ecuația acestei drepte scriindu-se

$$y - y_0 = m\,(x - x_0), \quad (10)$$

iar

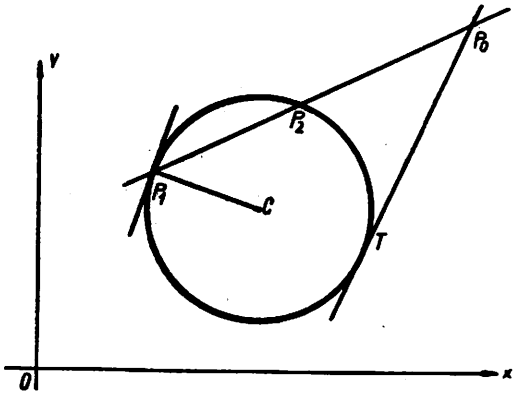


Fig. 2

$$\cos\theta = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + m^2}},$$

condiția de mai sus [care exprimă că realizantul (8') este nul] se scrie

$$[x_0 + \alpha + m(y_0 + \beta)]^2 - (1 + m^2)\,f(x_0, y_0) = 0. \quad (11)$$

Ecuația (11) reprezintă o ecuație de gradul al doilea în m, anume

$$[(y_0 + \beta)^2 - f(x_0, y_0)]\,m^2 + 2(x_0 + \alpha)(y_0 + \beta)m + (x_0 + \alpha)^2 - f(x_0, y_0) = 0,$$

care ne dă direcțiile m_1, m_2 ale dreptelor tangente duse din punctul $P_0(x_0, y_0)$ la cercul (2). Deci, în general, dintr-un punct P_0 se pot duce două drepte tangente la un cerc. Aceste drepte sînt reale și distincte, reale și confundate sau imaginare, după cum realizantul ecuației în m este mai mare, egal sau mai mic decît zero. Realizantul ecuației în m fiind

$$(x_0 + \alpha)^2(y_0 + \beta)^2 - [(y_0 + \beta)^2 - f(x_0, y_0)] \cdot [(x_0 + \alpha)^2 - f(x_0, y_0)]$$

sau

$$f(x_0, y_0)[(x_0 + \alpha)^2 + (y_0 + \beta)^2 - f(x_0, y_0)]$$

sau încă, dacă ținem seama de (9),

$$r^2 \cdot f(x_0, y_0),$$

și cum $r^2 > 0$, rezultă că realizantul ecuației în m este mai mare, egal sau mai mic decît zero, după cum

$$f(x_0, y_0) = (x_0 + \alpha)^2 + (y_0 + \beta)^2 - r^2 \gtreqless 0,$$

adică după cum

$$(x_0 + \alpha)^2 + (y_0 + \beta)^2 \gtreqless r^2,$$

ceea ce exprimă că distanța de la centrul C $(-\alpha, -\beta)$ al cercului la punctul $P_0(x_0, y_0)$ este mai mare, egală sau mai mică decît raza $r = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma$ a cercului. În primul caz, punctul P_0 este exterior cercului dat, în al doilea caz, punctul P_0 se găsește pe cerc, iar în ultimul caz, punctul P_0 este interior cercului dat. Așadar, *dintr-un punct oarecare* $P_0(x_0, y_0)$ *din plan se pot duce două drepte tangente la un cerc dat, aceste drepte fiind reale și distincte, reale și confundate sau imaginare după cum punctul* P_0 *este exterior, este pe cerc sau este interior cercului dat.*

Pentru a găsi ecuațiile dreptelor tangente duse din punctul $P_0(x_0, y_0)$ la cercul (2), eliminăm pe m între ecuația (10) a dreptei și ecuația (11) în m; deci avem

$$\left[x_0 + \alpha + \frac{y - y_0}{x - x_0}(y_0 + \beta)\right]^2 - \left[1 + \left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right)^2\right] \cdot f(x_0, y_0) = 0,$$

care se mai scrie

$$[(x - x_0)(x_0 + \alpha) + (y - y_0)(y_0 + \beta)]^2 - [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \cdot f(x_0, y_0) = 0.$$

Introducînd notația

$$f(x; x_0) = x_0x + y_0y + \alpha(x + x_0) + \beta(y + y_0) + \gamma, \tag{12}$$

ecuația precedentă se scrie astfel:

$$[f(x; x_0) - f(x_0, y_0)]^2 - [f(x, y) + f(x_0, y_0) - 2f(x; x_0)]\, f(x_0, y_0) = 0.$$

Efectuînd calculele, obținem

$$f^2(x; x_0) - f(x_0, y_0) \cdot f(x, y) = 0, \tag{13}$$

care reprezintă *ecuația globală* a tangentelor duse din punctul $P_0(x_0, y_0)$ la cercul $f(x, y) = 0$.

Aplicații. 1) **Ecuația tangentei într-un punct al unui cerc.** Ecuația unui cerc fiind

$$f(x, y) \equiv x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0, \tag{2'}$$

dacă punctul $P_0(x_0, y_0)$ aparține acestui cerc, atunci

$$f(x_0, y_0) = 0.$$

În acest caz, din (13) rezultă ecuația

$$f(x; x_0) = x_0x + y_0y + \alpha(x + x_0) + \beta(y + y_0) + \gamma = 0 \tag{14}$$

a tangentei în punctul $P_0(x_0, y_0)$ al cercului (2). Se zice că această ecuație este obținută prin dedublare din ecuația cercului.

Ecuația (14) se poate obține și astfel: dacă P_0 este un punct al cercului $f(x, y) = 0$, deci $f(x_0, y_0) = 0$, dreapta (7) — care trece prin acest punct —

va intersecta cercul dat în punctul P_0 și într-un al doilea punct P'. Atunci ecuația (8) devine

$$\rho^2 + 2\,[(x_0 + \alpha)\cos\,\theta + (y_0 + \beta)\sin\,\theta]\,\rho = 0,$$

unde $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = P_0P'$. Dacă $P' \equiv P_0$, adică dreapta (7) este tangentă la cercul dat, ecuația în ρ trebuie să admită pe $\rho = 0$ ca soluție dublă ($\rho_1 = \rho_2 = 0$). În acest caz, trebuie ca ecuația în ρ să aibă și coeficientul lui ρ nul; obținem ecuația:

$$(x_0 + \alpha)\cos\,\theta + (y_0 + \beta)\sin\,\theta = 0$$

care, dacă ținem seama că $m = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, se mai scrie

$$x_0 + \alpha + m\,(y_0 + \beta) = 0.$$

Eliminînd pe m din forma (10) a ecuației dreptei date și din relația de mai sus, obținem*

$$(x_0 + \alpha)\,(x - x_0) + (y_0 + \beta)\,(y - y_0) = 0. \qquad (14')$$

Efectuînd calculele, avem

$$x_0x + y_0y + \alpha x + \beta y - (x_0^2 + y_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0) = 0.$$

Însă $f(x_0, y_0) = 0$ se mai scrie sub forma

$$x_0^2 + y_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 = -\,(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma),$$

încît obținem ecuația (14).

Observăm că panta dreptei (14') este $m = -\frac{x_0 + \alpha}{y_0 + \beta}$. Pe de altă parte, raza CP_0 are direcția $m' = \frac{y_0 + \beta}{x_0 + \alpha}$, deci avem $mm' + 1 = 0$, ceea ce înseamnă că tangenta într-un punct la cerc este perpendiculară pe raza dusă prin punctul de tangență, proprietate geometrică bine cunoscută. Putem obține ecuația tangentei într-un punct $P_0\,(x_0, y_0)$ al cercului, ținînd seama de această proprietate geometrică.

2) **Tangente paralele cu o direcție dată.** Fie $P_0\,(0, \lambda)$ punctul din care se duc tangente la cercul

$$f(x, y) \equiv x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0.$$

În acest caz, condiția de tangență (11) se scrie

$$[\alpha + m(\lambda + \beta)]^2 - (1 + m^2) \cdot f(0, \lambda) = 0,$$

unde

$$f(0, \lambda) = \lambda^2 + 2\beta\lambda + \gamma = \alpha^2 + (\lambda + \beta)^2 - r^2,$$

* Această formă se obține și pe baza formulei (7'') din capitolul VI.

deoarece $\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$. Condiția de tangență este o ecuație de gradul al doilea în λ; deci, *la un cerc se pot duce două tangente paralele cu o direcție dată m.* Efectuînd calculele în relația precedentă, obținem

$$(\lambda + \beta)^2 - 2m\alpha(\lambda + \beta) - [r^2(1 + m^2) - m^2\alpha^2] = 0,$$

adică o ecuație de gradul al doilea în $\lambda + \beta$; de unde

$$\lambda + \beta = m\alpha \pm \sqrt{m^2\alpha^2 + r^2(1 + m^2) - m^2\alpha^2} = m\alpha \pm r\sqrt{1 + m^2}.$$

Însă ecuația dreptei care trece prin punctul P_0 $(0, \lambda)$ și are direcția dată m este

$$y = mx + \lambda,$$

astfel încît, eliminînd pe λ între aceste două ecuații, obținem

$$y + \beta = m(x + \alpha) \pm r\sqrt{1 + m^2}, \tag{15}$$

ecuație care reprezintă cele două tangente la cerc, paralele cu direcția dată m.

§ 4. PUTEREA UNUI PUNCT IN RAPORT CU UN CERC

Fiind dat un punct $P_0(x_0, y_0)$ și o dreaptă care trece prin acest punct și intersectează cercul în punctele P_1 și P_2 (fig. 3), produsul

$$p = P_0P_1 \cdot P_0P_2 \tag{16}$$

se numește *puterea punctului* P_0 în raport cu cercul C.

Puterea p nu depinde de direcția secantei prin P_0, adică puterea unui punct P_0 în raport cu cercul C este egală cu produsul distanțelor de la punctul P_0 la punctele P_1, P_2 de intersecție ale cercului cu *orice* secantă care trece prin P_0. Pentru demonstrație să scriem coordonatele unui punct de pe dreapta P_0P_1 sub forma (7). Înlocuind-o în ecuația (2) a cercului, se obține ecuația (8) în ρ. Astfel, punctelor de intersecție cu cercul, P_i $(i = 1,2)$ le corespund două valori $\rho_i = P_0P_i$, rădăcini ale ecuației (8). Puterea punctului în raport cu cercul este deci dată de produsul rădăcinilor ρ_i, deoarece

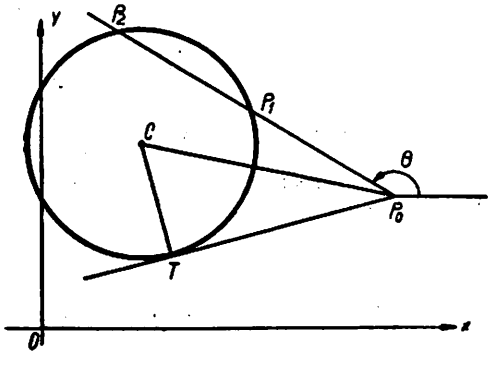


Fig. 3

$$p = P_0P_1 \cdot P_1P_2 = \rho_1 \cdot \rho_2.$$

Însă din ecuația (8) rezultă că $\rho_1 \cdot \rho_2 = f(x_0, y_0)$, astfel încît puterea unui punct $P_0(x_0, y_0)$ în raport cu un cerc de ecuație (2) este dată de expresia

$$p = f(x_0, y_0). \tag{16'}$$

Cu alte cuvinte, puterea p se obține înlocuind în primul membru al ecuației cercului coordonatele curente x, y prin coordonatele x_0, y_0 ale punctului P_0.

Aceasta înseamnă că orice secantă vom duce prin P_0, produsul distanțelor de la punctul P_0 la cele două puncte de intersecție ale secantei cu cercul este constant.

Presupunînd că punctele P_1 și P_2 se confundă cu T, adică secanta dusă prin P_0 devine tangenta P_0T la cerc, rezultă că puterea punctului P_0 în raport cu cercul este

$$p = P_0T^2, \tag{16''}$$

adică egală cu pătratul tangentei dusă din punctul dat P_0 la cerc.

De altfel, din

$$f(x_0, y_0) = (x_0 + \alpha)^2 + (y_0 + \beta)^2 - r^2$$

și știind că

$$P_0C^2 = (x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2, \quad CT^2 = r^2,$$

rezultă

$$p = P_0C^2 - CT^2 = P_0T^2,$$

ultima egalitate avînd loc datorită faptului că triunghiul P_0TC este dreptunghic.

Observăm că puterea unui punct P_0 în raport cu un cerc este pozitivă dacă punctul P_0 este exterior cercului, căci în acest caz $\rho_1 = P_0P_1$ și $\rho_2 = P_0P_2$ sînt de același sens. Puterea este nulă, dacă punctul P_0 se află pe cerc. Atunci, secanta care trece prin P_0 intersectează cercul în $P_1 \equiv P_0$ și într-alt punct P_2, deci $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = P_0P_2$; adică cel puțin una din rădăcinile ρ_1, ρ_2 este nulă. Puterea este negativă, dacă punctul este interior cercului, deoarece, în acest caz,

$$\rho_1 = P_0P_1 \text{ și } \rho_2 = P_0P_2$$

sînt de semne contrare. Așadar, fiind dat un punct P_0, putem spune că acest punct este exterior, este pe cerc sau este interior unui cerc dat, după cum puterea acelui punct în raport cu cercul este pozitivă, nulă sau negativă.

Aplicații. 1) Axa radicală a două cercuri. Fiind date două cercuri

$$C_i(x, y) \equiv x^2 + y^2 + 2\alpha_i x + 2\beta_i y + \gamma_i = 0, \quad (i = 1, 2), \tag{17}$$

se numește *axă radicală* a celor două cercuri, *locul geometric al punctelor din plan care au puteri egale față de cele două cercuri date.* Puterea unui punct $P(x, y)$ în raport cu cercul $C_i (i = 1,2)$ este

$$p_i = C_i(x, y),$$

iar din definiția locului, puterile lui P în raport cu C_1 și C_2 sînt egale:

$$C_1(x, y) = C_2(x, y).$$

Trecînd totul în primul membru, se obține dreapta

$$2(\alpha_1 - \alpha_2)x + 2(\beta_1 - \beta_2)y + \gamma_1 - \gamma_2 = 0. \tag{18}$$

Deci, *axa radicală a două cercuri (17) este o dreaptă*, a cărei ecuație este (18).

Invers, un punct care se găseşte pe axa radicală are puteri egale faţă de cele două cercuri.

Observăm că, fiind date două cercuri, axa radicală (18) este o dreaptă bine determinată, afară de cazul cînd $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, cînd cercurile sînt concentrice. În acest caz de excepţie, axa radicală este sau dreapta de la infinit a planului, dacă $\gamma_1 \neq \gamma_2$, sau este nedeterminată, dacă $\gamma_1 = \gamma_2$. În acest ultima caz, cercurile C_1 şi C_2 coincid.

Axa radicală are panta

$$m = -\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2},$$

iar linia centrelor cercurilor date, determinată de centrele

$$C_i(-\alpha_i, -\beta_i),$$

are panta

$$m' = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Observăm că

$$mm' + 1 = 0,$$

ceea ce arată că *axa radicală a două cercuri este perpendiculară pe linia centrelor cercurilor.*

2) **Centrul radical a trei cercuri.** Se numeşte centru radical a trei cercuri, locul punctelor care au puteri egale în raport cu cele trei cercuri date. Ecuaţiile celor trei cercuri fiind

$$C_i(x_i, y_i) = x^2 + y^2 + 2\alpha_i x + 2\beta_i y + \gamma_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{19}$$

centrul radical este determinat de ecuaţiile

$$C_1(x, y) = C_2(x, y) = C_3(x, y).$$

Rezultă că determinarea centrului radical se reduce la determinarea soluţiilor sistemului format din axele radicale ale celor trei cercuri luate două cîte două, ale căror ecuaţii sînt

$$C_1 - C_2 = 0, \quad C_2 - C_3 = 0, \quad C_3 - C_1 = 0. \tag{20'}$$

Fie

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \beta_1 - \beta_2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 & \beta_2 - \beta_3 \\ \alpha_3 - \alpha_1 & \beta_3 - \beta_1 \end{Vmatrix}, \quad A' = \begin{Vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \beta_1 - \beta_2 & \gamma_1 - \gamma_2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 & \beta_2 - \beta_3 & \gamma_2 - \gamma_3 \\ \alpha_3 - \alpha_1 & \beta_3 - \beta_1 & \gamma_3 - \gamma_1 \end{Vmatrix}$$

matricea ataşată şi matricea extinsă ale sistemului (20'). Observăm că $r(A') \leqslant 2$, deoarece ecuaţiile sistemului (20') nu sînt independente (suma primilor membri ai acestor ecuaţii este nulă).

Dacă $r(A) = 2$, sistemul (20′) este compatibil determinat*, axele radicale fac parte dintr-un acelaşi fascicul, ele întîlnindu-se într-un punct, centrul fasciculului. Deoarece acest punct are aceeaşi putere faţă de cele trei cercuri date, rezultă că el este centrul radical al celor trei cercuri.

Dacă $r(A) = 1$, putem avea sau $r(A') = 2$ sau $r(A') = 1$. În primul caz, sistemul (20′) este incompatibil: axele radicale sînt paralele (distincte). Ţinînd seama de propoziţia că axa radicală a două cercuri este perpendiculară pe linia centrelor cercurilor date, rezultă că cele trei cercuri au centrele în linie dreaptă. În acest caz, centrul radical este la infinit.

Dacă $r(A) = r(A') = 1$, sistemul (20′) este compatibil nedeterminat**: cele trei axe radicale (20′) coincid şi centrul radical este nedeterminat. Cele trei cercuri (17) pentru care $r(A) = r(A') = 1$, se zice că fac parte dintr-un acelaşi fascicul (a se vedea § 6). Rezultă că trei cercuri fac parte din acelaşi fascicul, dacă $r(A') = 1$.

§ 5. INTERSECŢIA A DOUĂ CERCURI

Fiind date două cercuri prin ecuaţiile (17), determinarea punctelor de intersecţie ale acestor două cercuri se reduce, din punct de vedere analitic, la rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases} C_1 = x^2 + y^2 + 2\alpha_1 x + 2\beta_1 y + \gamma_1 = 0, \\ C_2 = x^2 + y^2 + 2\alpha_2 x + 2\beta_2 y + \gamma_2 = 0. \end{cases} \tag{21}$$

format de ecuaţiile cercurilor date.

Sistemul (21) fiind un sistem de două ecuaţii de gradul al doilea în două necunoscute admite patru soluţii. Deci, *două cercuri se intersectează în patru puncte.*

Două soluţii ale sistemului (21) sînt date de coordonatele punctelor ciclice, $I(1, i, 0)$ şi $J(1, -i, 0)$, deoarece toate cercurile planului trec prin aceste puncte.

Deci, într-un plan, *două cercuri se intersectează totdeauna în punctele ciclice.*

Celelalte două soluţii se obţin luînd în locul sistemului (21) un sistem echivalent, obţinut prin înlocuirea uneia din ecuaţii cu aceea care se obţine scăzînd ecuaţiile (21), de exemplu

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 - C_2 = 0. \end{cases} \tag{21′}$$

Ultima ecuaţie din sistemul (21′) este ecuaţia axei radicale a celor două cercuri. Rezultă astfel că *punctele de intersecţie (la distanţa finită) ale cercurilor C_1, C_2 se obţin prin intersecţia unuia din ele cu axa lor radicală.* Aceste puncte de intersecţie pot fi reale şi distincte, reale şi confundate sau imaginare.

---

* În acest caz sistemul (20′) este format din două ecuaţii principale liniar independente şi o ecuaţie secundară, liniar dependentă de ecuaţiile principale.

** În acest caz, sistemul (20′) este format dintr-o ecuaţie principală şi două ecuaţii secundare. fiecare ecuaţie secundară avînd coeficienţii proporţionali cu coeficienţii ecuaţiei principale.

În definitiv, două cercuri se intersectează în patru puncte, două la distanță finită (reale distincte, reale confundate sau imaginar conjugate) și două la infinit, imaginar conjugate (punctele ciclice, comune tuturor cercurilor).

Aplicații.

1) **Construcția axei radicale a două cercuri.** Ținînd seama că punctele de intersecție a două cercuri se obțin intersectînd unul din cercurile date cu axa lor radicală, putem obține o construcție a axei radicale, cînd se dau cele două cercuri. Această construcție rezultă imediat, dacă cercurile C_1 și C_2 sînt secante sau tangente (fig. 4 și 5). În adevăr, în primul caz, axa radicală este dreapta care unește cele două puncte reale și distincte de intersecție a cercurilor C_1 și C_2; în al doilea caz, este tangenta dusă la unul oarecare din cercurile C_1 și C_2 în punctul lor de intersecție. Dacă cercurile sînt interioare sau exterioare (fig. 6) procedăm astfel: intersectăm (real) cercurile date C_1 și C_2 cu un al treilea cerc (oarecare) C_3, care să nu aibă centrul pe linia centrelor cercurilor date. Ducem axele radicale ale cercurilor C_1 și C_3, C_2 și C_3; aceste axe se intersectează într-un punct Ω, centrul radical al celor trei cercuri $C_i (i = 1, 2, 3)$. Ținînd seama de proprietatea că axa radicală a două cercuri este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor cercurilor date, atunci axa radicală a cercurilor exterioare (respectiv interioare) C_1 și C_2 este perpendiculara dusă din Ω pe linia centrelor cercurilor C_1 și C_2 (fig. 7).

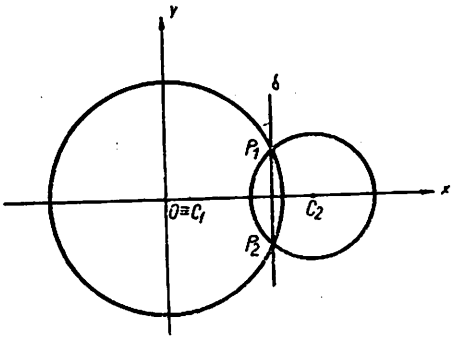


Fig. 4

2) **Unghiul a două cercuri.** Se numește unghi a două cercuri orientate, unghiul θ pe care îl fac tangentele orientate la aceste două cercuri într-unul din punctele lor de intersecție A (fig. 8). Acest unghi este egal cu unghiul făcut de razele cercurilor în punctul A. Aplicînd teorema lui Pitagora generalizată, avem

$$C_1C_2^2 = C_1A^2 + C_2A^2 - 2C_1A \cdot C_2A \cos\theta,$$

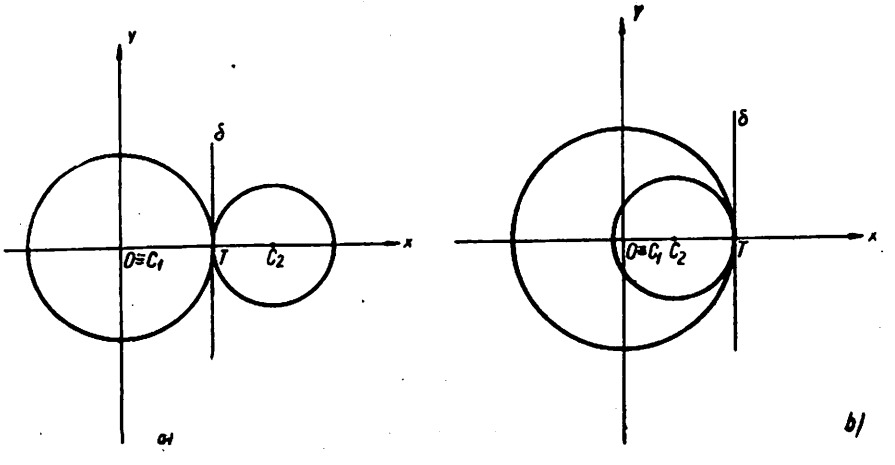


Fig. 5

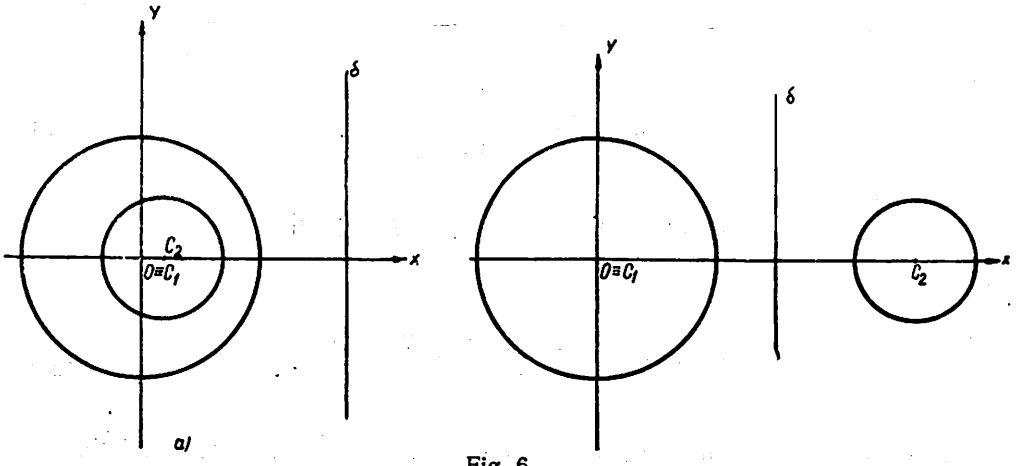


Fig. 6

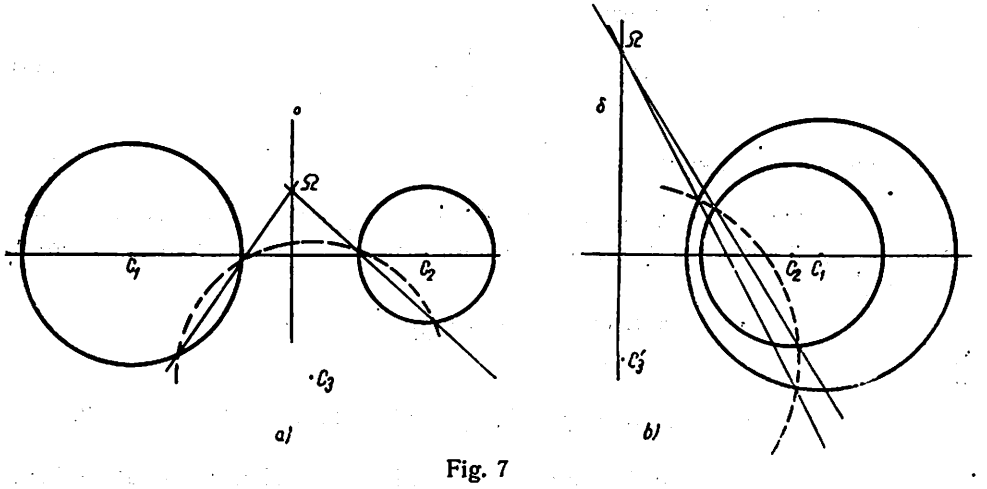


Fig. 7

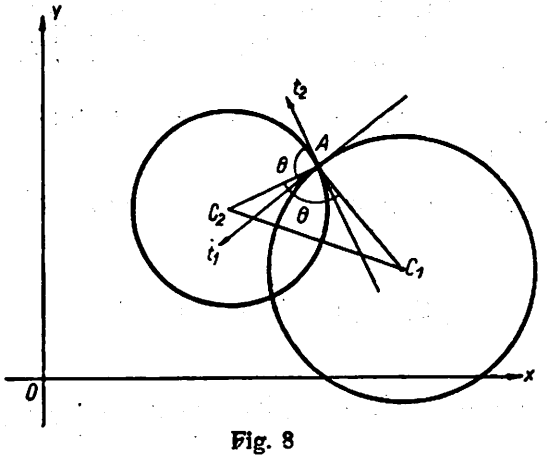


Fig. 8

adică

$$\cos\theta = \frac{C_1A^2 + C_2A^2 - C_1C_2^2}{2C_1A \cdot C_2A}. \tag{22}$$

Deoarece

$$C_iA^2 = \alpha_i^2 + \beta_i^2 - \gamma_i, \quad (i = 1, 2)$$

obținem

$$\cos\theta = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 - \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2}}. \tag{23}$$

Dacă cele două cercuri sînt ortogonale, deci $\theta = \frac{\pi}{2}$, rezultă condiția de ortogonalitate a două cercuri

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2). \tag{24}$$

§ 6. FASCICULE DE CERCURI

Se numește *fascicul de cercuri* totalitatea cercurilor care trec prin două puncte fixe. Fie $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$ două puncte date. Cercul reprezentat de ecuația

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$$

trece prin punctele P_1 și P_2 dacă avem

$$x_1^2 + y_1^2 + 2\alpha x_1 + 2\beta y_1 + \gamma = 0,\ x_2^2 + y_2^2 + 2\alpha x_2 + 2\beta y_2 + \gamma = 0.$$

Obținem astfel un sistem de două ecuații liniare cu trei necunoscute α, β, γ. Punctele P_1, P_2 fiind distincte, putem exprima două dintre necunoscute în funcție (liniară) de a treia. Introducînd aceste expresii în ecuația cercului, rezultă că un *fascicul de cercuri* este o *familie de cercuri depinzînd liniar de un parametru.*

Să presupunem că punctele date sînt punctele de intersecție (la distanță finită) a două cercuri

$$C_i(x, y) \equiv x^2 + y^2 + 2\alpha_i x + 2\beta_i y + \gamma_i = 0, \quad (i = 1, 2).$$

Ecuația

$$C_1(x, y) + kC_2(x, y) = 0, \tag{25}$$

care se mai scrie

$$x^2 + y^2 + 2\frac{\alpha_1 + k\alpha_2}{1 + k}x + 2\frac{\beta_1 + k\beta_2}{1 + k}y + \frac{\gamma_1 + k\gamma_2}{1 + k} = 0, \tag{25'}$$

reprezintă şi ea un cerc, care trece prin punctele de intersecţie ale cercurilor C_i. În adevăr, dacă $P_0(x_0, y_0)$ este unul din aceste puncte, deci $C_i(x_0, y_0) \equiv 0$, atunci el este un punct şi al cercurilor (25), deoarece

$$C_1(x_0, y_0) + kC_2(x_0, y_0) \equiv 0.$$

Cercurile (25) formează deci un fascicul de cercuri, cercurile C_i fiind *cercurile de bază* ale fasciculului, iar k — coordonata (neomogenă) în fascicul. Punînd $k = \frac{\mu}{\lambda}$, ecuaţia (25) se scrie

$$\lambda C_1(x, y) + \mu C_2(x, y) = 0, \tag{25''}$$

unde λ, μ sînt coordonate omogene în fascicul.

Putem da coordonatei neomogene k o interpretare geometrică simplă. În adevăr, dacă puterea p_i a unui punct $P'(x', y')$ faţă de cercul $C_i = 0$ este $p_i = C_i(x', y')$ şi presupunînd că P' se află pe cercul de parametru k, din (25) obţinem

$$k = -\frac{C_1(x', y')}{C_2(x', y')} = -\frac{p_1}{p_2}. \tag{25'''}$$

Coordonata k reprezintă deci raportul — cu semn schimbat — al puterilor unui punct al cercului din fascicul, corespunzător acestei valori k faţă de cele două cercuri de bază ale fasciculului.

Din formulele (25'') rezultă şi *proprietatea*:

Printr-un punct $P'(x', y')$ al planului trece un singur cerc al fasciculului, anume cercul al cărui parametru k este dat de formula (25''). Fie două cercuri oarecare $C' \equiv C_1 + k'C_2 = 0$ şi $C'' \equiv C_1 + k''C_2 = 0$ din fasciculul (25). Axa radicală a acestor cercuri, dacă ţinem seama de (25'), este

$$C' - C'' = 2\left(\frac{\alpha_1 + k'\alpha_2}{1 + k'} - \frac{\alpha_1 + k''\alpha_2}{1 + k''}\right)x + 2\left(\frac{\beta_1 + k'\beta_2}{1 + k'} - \frac{\beta_1 + k''\beta_2}{1 + k''}\right)y +$$

$$+ \frac{\gamma_1 + k'\gamma_2}{1 + k'} - \frac{\gamma_1 + k''\gamma_2}{1 + k''} = 0$$

sau, după ce aducem la acelaşi numitor şi reducem termenii asemenea,

$$C' - C'' \equiv (k'' - k')(C_1 - C_2) = 0$$

şi coincide cu axa radicală a cercurilor de bază ale fasciculului.

Aşadar:

Două cercuri oarecare dintr-un fascicul au aceeaşi axă radicală ca şi cercurile de bază.

De asemenea, *într-un fascicul de cercuri putem considera drept cercuri de bază două cercuri oarecare ale fasciculului.*

Dacă α_k, β_k sînt coordonatele centrului cercului din fasciculul (25) corespunzător valorii k, găsim

$$\alpha_k = -\frac{\alpha_1 + k\alpha_2}{1 + k}, \quad \beta_k = -\frac{\beta_1 + k\beta_2}{1 + k}.$$

Cînd parametrul k variază, punctul (α_k, β_k) descrie dreapta determinată de centrele C_1 $(-\alpha_1, -\beta_1)$ și C_2 $(-\alpha_2, -\beta_2)$ ale cercurilor de bază (linia centrelor). Așadar:

Cercurile unui fascicul de cercuri au centrele în linie dreaptă.

Observăm că valorii $k = -1$ îi corespunde punctul la infinit pe linia centrelor, iar din (25) rezultă că cercul din fascicul coincide în acest caz cu axa radicală a fasciculului.

Putem considera într-un fascicul de cercuri, în locul unuia din cercurile de bază, chiar axa radicală a fasciculului. Altfel spus, fasciculul de cercuri care trec prin punctele de intersecție ale cercului

$$C(x, y) = x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0 \tag{26}$$

cu dreapta

$$d(x, y) = ax + by + c = 0 \tag{27}$$

are ecuația

$$C(x, y) + kd(x, y) = 0. \tag{28}$$

Forma canonică a ecuației unui fascicul. Axa radicală a două cercuri fiind perpendiculară pe linia centrelor, putem să raportăm fasciculul de cercuri la un sistem de referință cartezian ortogonal, astfel încît linia centrelor să fie axa Ox, iar axa radicală să fie axa Oy. În această situație trebuie să avem

$$\beta_1 = \beta_2 = 0, \qquad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma.$$

Ultima relație se obține din condiția că puterile originii față de cercurile de bază sînt egale, deoarece originea se află pe axa radicală, aleasă ca axă y. Ecuațiile celor două cercuri fiind în acest caz

$$x^2 + y^2 + 2\alpha_i x + \gamma = 0, \tag{29}$$

ecuația unui cerc oarecare din fasciculul avînd aceste două cercuri drept cercuri de bază se scrie

$$x^2 + y^2 + 2\frac{\alpha_1 + k\alpha_2}{1 + k}x + \gamma = 0. \tag{30}$$

Într-un fascicul există două cercuri de rază nulă. În adevăr, scriind că raza cercului (30) este nulă, obținem ecuația

$$r_k^2 = \left(\frac{\alpha_1 + k\alpha_2}{1 + k}\right)^2 - \gamma = 0, \tag{30'}$$

de gradul doi în k. Cele două rădăcini, k_1 și k_2, ale ecuației (30') pot fi complexe, reale și distincte sau reale și confundate, după cum $\gamma \gtrless 0$. Deci, punctele în care degenerează cercurile de rază nulă, care se mai numesc *puncte limită ale fasciculului* sau *punctele lui Poncelet*, pot fi imaginare (con-

jugate), reale distincte sau confundate. Coordonatele acestor puncte se obțin găsind ecuațiile cercurilor de rază nulă. Din (30') avem

$$\frac{\alpha_1 + k\alpha_2}{1+k} = \pm\sqrt{\gamma},$$

încît cercurile (30) de rază nulă au ecuațiile

$$(x \pm \sqrt{\gamma})^2 + y^2 = 0, \tag{30''}$$

iar punctele limită au coordonatele

$$M_1(-\sqrt{\gamma}, 0) \quad \text{și} \quad M_2(+\sqrt{\gamma}, 0), \tag{30'''}$$

aceste puncte fiind imaginar conjugate ($\gamma < 0$), reale și distincte ($\gamma > 0$) sau reale și confundate ($\gamma = 0$). Dacă aceste puncte sînt reale, deci dacă $\gamma > 0$, ele sînt simetrice față de origine, originea avînd aceeași putere față de punctele limită. Se spune că fasciculul de cercuri este *eliptic*, *hiperbolic* sau *parabolic*, după cum punctele limită ale fasciculului sînt imaginare ($\gamma < 0$), reale și distincte ($\gamma > 0$) sau reale și confundate ($\gamma = 0$).

Intersecția cercurilor din fasciculul (30) cu axa *Oy* este soluția sistemului format din ecuația (30) a fasciculului și ecuația $x = 0$ a axei *Oy*, echivalent cu sistemul

$$y^2 + \gamma = 0, \; x = 0.$$

Deci, punctele de intersecție ale cercurilor din fasciculul (30) cu axa *Oy* sînt

$$N_1(0, -\sqrt{-\gamma}) \quad \text{și} \quad N_2(0, +\sqrt{-\gamma}). \tag{30^{IV}}$$

Rezultă că dacă fasciculul (30) este *eliptic* ($\gamma < 0$), cercurile fasciculului se intersectează în două puncte reale și distincte de pe axa *Oy*, N_1 și N_2, avînd coordonatele (30^{IV}) (fig. 9). Dacă fasciculul (30) este *hiperbolic* ($\gamma > 0$), cercurile fasciculului nu se intersectează real cu axa *Oy*, punctele (30^{IV}) fiind două puncte imaginar conjugate; adică, axa radicală nu intersectează cercurile fasciculului, acestea fiind împărțite de axa radicală în două grupe (fig. 10). Dacă fasciculul (30) este *parabolic* ($\gamma = 0$), cercurile fasciculului se intersectează în două puncte reale și confundate, anume în origine, cu care coincid — după cum rezultă din ($30''$) — și punctele limită ale fasciculului (fig. 11).

Dacă fasciculul (30) este *eliptic* ($\gamma < 0$), orice punct de pe linia centrelor cercurilor de bază (29) este centrul unui cerc din fascicul. În adevăr, pătratul razei unui cerc din fasciculul (30) este dat de (30'), deci

$$r_k^2 = \frac{(\alpha_1 + k\alpha_2)^2 - \gamma(1+k)^2}{(1+k)^2} = \frac{(\alpha_2^2 - \gamma)k^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 - \gamma)k + \alpha_1^2 - \gamma}{(1+k)^2}.$$

Cum $r_1^2 = \alpha_1^2 - \gamma^2$, rezultă că trebuie să avem pentru un cerc real

$$r_k^2 = \frac{r_2^2k^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 - \gamma)k + r_1^2}{(1+k)^2} > 0. \tag{31}$$

Cum

$$r_2^2k^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 - \gamma)k + r_1^2 > 0, \tag{31'}$$

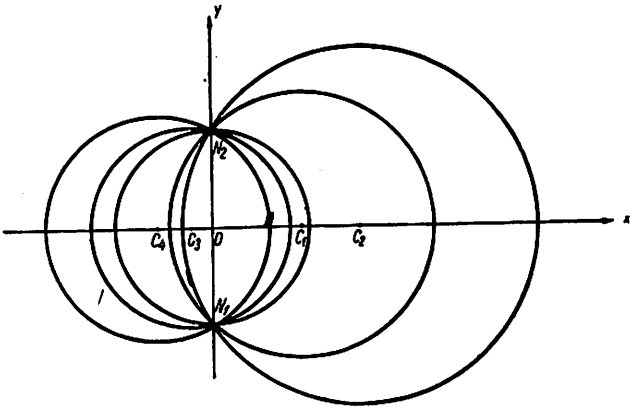


Fig. 9

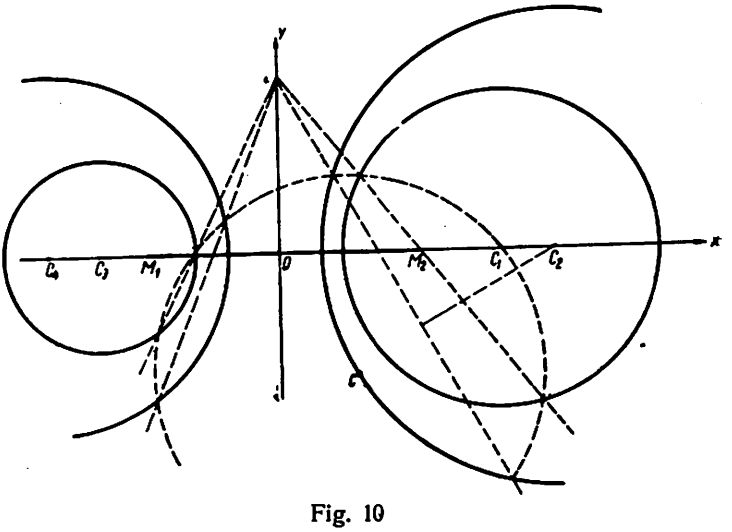


Fig. 10

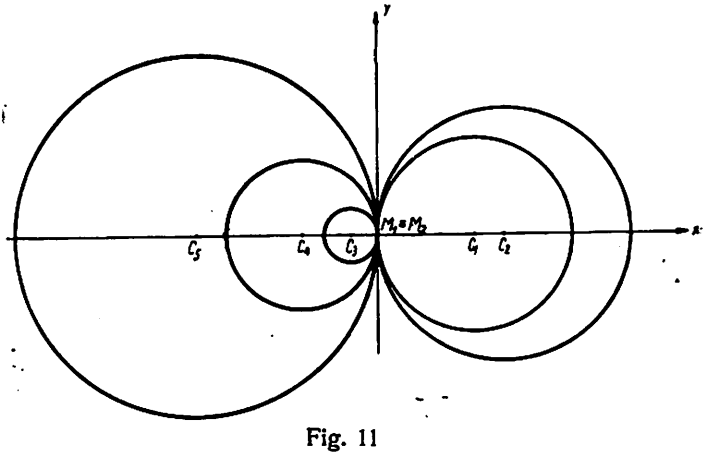


Fig. 11

deoarece ecuația (30') are rădăcini imaginare în $k(\gamma < 0)$, iar $r_2^2 > 0$, rezultă că inegalitatea (31) este satisfăcută, oricare ar fi k real. Cu alte cuvinte, inegalitatea (31) fiind satisfăcută pentru orice k real, orice punct de pe linia centrelor cercurilor de bază (29) este centrul unui cerc din fascicul. Dacă fasciculul (30) este *hiperbolic* ($\gamma > 0$), notînd cu M_1 și M_2 cele două puncte limită, ecuația (30') ne arată că numai acele cercuri din fascicul sînt reale, care au centrele în afara segmentului $\overline{M_1M_2}$ (fig. 10). În adevăr, primul membru al ecuației (30') ne spune că trebuie să avem (31). Însă, avînd în vedere că $r_2^2 > 0$, inegalitatea (31') este satisfăcută numai dacă parametrul k are valori în afara rădăcinilor k_1 și k_2 ale ecuației (31'), rădăcini care corespund punctelor limită M_1 și M_2. Dacă fasciculul (30) este *parabolic* ($\gamma = 0$), orice punct de pe linia centrelor cercurilor de bază (29) este centrul unui cerc din fascicul. În adevăr, dacă ecuația (30') are două rădăcini reale și confundate (deci, $\gamma = 0$) și cum $r_2^2 > 0$, atunci inegalitatea (31') este satisfăcută pentru orice k real.

Fie A_k și A_k' punctele de intersecție ale cercului corespunzător parametrului k cu axa x. Din definiția puterii unui punct în raport cu un cerc avem

$$OA_k \cdot OA_k' = \gamma, \tag{32}$$

Rezultă că dacă centrul C_k tinde la infinit, punctul A_k' tinde spre origine, cercul corespunzător tinzînd a se confunda cu axa radicală. Relația (32) ne arată, de asemenea, că dacă fasciculul (30) este eliptic, puterea originii față de orice cerc al fasciculului este negativă ($\gamma < 0$), ceea ce înseamnă că originea este interioară tuturor cercurilor fasciculului. Dacă fasciculul (30) este hiperbolic, puterea originii față de orice cerc al fasciculului este pozitivă ($\gamma > 0$), deci originea este exterioară tuturor cercurilor fasciculului. Dacă fasciculul (30) este parabolic, puterea originii față de orice cerc al fasciculului este nulă ($\gamma = 0$): originea se află pe orice cerc al fasciculului, deci toate cercurile fasciculului trec prin origine.

Fasciculul ortogonal unui fascicul. Cercul

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \tag{33}$$

este ortogonal cercurilor (29), dacă condiția de ortogonalitate (24) este satisfăcută,

$$a\alpha_i = \frac{1}{2}(c + \gamma), \qquad (i = 1, 2).$$

Deoarece $\alpha_1 \neq \alpha_2$, acest sistem admite numai soluția

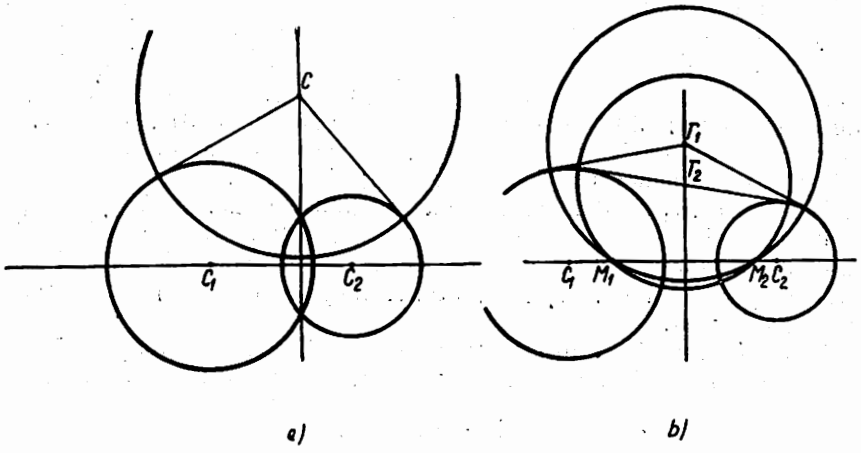
$$a = 0, \qquad c = -\gamma.$$

Observăm că cercul astfel obținut

$$x^2 + y^2 + 2by - \gamma = 0 \tag{34}$$

este ortogonal oricărui cerc din fasciculul (30). Ecuația (34) reprezintă, cînd b variază, un fascicul de cercuri: fasciculul ortogonal fasciculului dat (30). Invers, fasciculul (30) este fasciculul ortogonal al fasciculului (34). Deci, legătura dintre fasciculele (30) și (34) este reciprocă.

Observăm apoi că fasciculul (34) are axa Oy — axa radicală a fasciculului (30) — ca linie a centrelor, iar axa Ox — deci linia centrelor fasciculului (30) — ca axă radicală.



a) b)

Fig. 12

În sfîrşit, observăm că atunci cînd termenul liber este pozitiv în ecuaţia unui fascicul, el este negativ în ecuaţia celuilalt. Cu alte cuvinte, dacă fasciculul (30) este eliptic, fasciculul (34) este hiperbolic. Şi invers, dacă fasciculul (30) este hiperbolic, fasciculul (34) este eliptic, deci fasciculul (34) trece prin punctele limită M_i ale fasciculului (30). Această afirmaţie rezultă şi din faptul că cercurile (34) sînt ortogonale cercurilor de rază nulă, cu centrele în M_i, din fasciculul (30) (fig. 12). Dacă fasciculul (30) este parabolic, fasciculul (34) este de asemenea parabolic.

§ 7. REŢELE DE CERCURI

Se numeşte *reţea de cercuri* totalitatea cercurilor care au proprietatea că puterea unui punct dat în raport cu cercurile reţelei este aceeaşi. În particular, dacă puterea este nulă, reţeaua este construită din totalitatea cercurilor care trec printr-un punct dat.

Fie $P_0(x_0, y_0)$ un punct fix. Puterea p a punctului P_0 faţă de cercul (26) este

$$x_0^2 + y_0^2 + 2\alpha x_0 + 2\beta y_0 + \gamma = p.$$

Eliminînd unul din parametrii α, β, γ între această ecuaţie şi ecuaţia (26), deducem că o *reţea de cercuri* este o *familie de cercuri depinzînd liniar de doi parametri.*

Să presupunem că punctul P_0 este centrul radical al cercurilor

$$C_i(x, y) \equiv x^2 + y^2 + 2\alpha_i x + 2\beta_i y + \gamma_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

care nu aparţin unui fascicul. Familia liniară de cercuri

$$C_1(x, y) + \lambda C_2(x, y) + \mu C_3(x, y) = 0 \qquad (35)$$

formează o rețea de cercuri, ecuația unui cerc din rețea putîndu-se scrie astfel

$$x^2 + y^2 + 2\frac{\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \mu\alpha_3}{1 + \lambda + \mu}x + 2\frac{\beta_1 + \lambda\beta_2 + \mu\beta_3}{1 + \lambda + \mu}y + \\ + \frac{\gamma_1 + \lambda\gamma_2 + \mu\gamma_3}{1 + \lambda + \mu} = 0.$$

Punînd

$$\lambda = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \mu = \frac{\rho_3}{\rho_1},$$

ecuația (35) se mai scrie

$$\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2 + \rho_3 C_3 = 0.$$

Parametrii $\rho_i (i = 1, 2, 3)$ sînt deci *coordonate omogene* în rețeaua de cercuri, pe cînd λ, μ sînt coordonatele neomogene.

Cercurile C_i se numesc cercurile de bază ale rețelei. S-a presupus că ele nu aparțin unui fascicul, deoarece, în caz contrar, rețeaua s-ar reduce la un fascicul de cercuri. În adevăr, dacă $C_3 = C_1 + kC_2$, rețeaua (35) s-ar reduce la fasciculul de cercuri

$$(1 + \mu) C_1 + (\lambda + k\mu) C_2 = 0.$$

Fiind dată o rețea de cercuri, drept cercuri de bază ale rețelei putem alege trei alte cercuri ale ei, care să nu aparțină unui fascicul.

Să luăm ca origine a axelor de coordonate chiar centrul radical al celor trei cercuri de bază. Atunci trebuie să avem

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3, \quad \text{adică} \quad \gamma_i = \gamma,$$

iar ecuația rețelei de cercuri se scrie

$$x^2 + y^2 + 2\frac{\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \mu\alpha_3}{1 + \lambda + \mu}x + 2\frac{\beta_1 + \lambda\beta_2 + \mu\beta_3}{1 + \lambda + \mu}y + \gamma = 0. \qquad (35')$$

Să arătăm că o legătură liniară între coordonatele neomogene λ, μ ale rețelei (35) definește un fascicul de cercuri al rețelei. Într-adevăr, să presupunem că

$$\lambda = k\mu + h.$$

Ținînd seama de această relație în (35), obținem

$$C_1 + hC_2 + \mu(C_3 + kC_2) = 0.$$

Această ecuație definește un fascicul de cercuri, ale cărui cercuri de bază sînt

$$C_1 + hC_2 = 0, \qquad C_3 + kC_2 = 0.$$

Să determinăm din rețea cercurile care trec printr-un punct dat, $P_1(x_1, y_1)$. Obținem relația liniară în λ, μ:

$$C_1(x_1, y_1) + \lambda C_2(x_1, y_1) + \mu C_3(x_1, y_1) = 0.$$

Aşadar: *Printr-un punct al planului trece un fascicul din reţea.*

Deoarece cercurile unui fascicul trec prin două puncte fixe, rezultă că cercurile din reţea care trec printr-un punct P_1 $(x_1\ y_1)$ trec şi printr-un al doilea punct; cu alte cuvinte, punctului P_1 i se asociază un alt punct P_2, astfel încît fasciculul corespunzător de cercuri să facă parte din reţea.

Fie Q un punct diferit de P_1 şi P_2. Rezultă deci că prin punctele P_1 şi Q trece un singur cerc al reţelei: este cercul fasciculului P_1, P_2 care trece prin Q.

Un cerc (33) este ortogonal unui cerc din reţeaua (35'), dacă avem

$$a(\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \mu\alpha_3) + b(\beta_1 + \lambda\beta_2 + \mu\beta_3) = \frac{1}{2}(c + \gamma)(1 + \lambda + \mu).$$

Această ecuaţie este satisfăcută, oricare ar fi λ, μ, numai dacă $a = b = 0$, $c = -\gamma$. Deducem că cercul

$$x^2 + y^2 - \gamma = 0,$$

cu centrul în centrul radical al cercurilor de bază ale reţelei şi raza $\sqrt{\gamma}$, este ortogonal reţelei date. Aşadar:

Există un cerc care este ortogonal tuturor cercurilor unei reţele.

CAPITOLUL VIII

TEORIA CONICELOR PE ECUAȚII CANONICE

§ 1. CONICE

Cercurile fac parte dintr-o clasă mai largă de curbe, numite *conice*. Conicele au fost cunoscute din antichitate, fiind studiate de geometrii greci. Ele au fost obținute ca secțiuni conice, adică intersecții ale unui con circular cu un plan care nu trece prin vîrful conului. *Apollonius* din Perga (aproximativ 262—200 î.e.n.), în lucrarea sa fundamentală în opt cărți: *Conica*, *Secțiuni conice*, face un studiu al acestor curbe, abordarea secțiunilor conice diferind de metodele tuturor predecesorilor săi.

Fie Σ un con circular drept și π un plan care nu trece prin vîrful V al conului (fig. 1). Prin axa VV' a conului ducem planul σ perpendicular pe π; acest plan intersectează conul după generatoarele g, g' și planul π după dreapta p. Înscriem în conul Σ două sfere S și S' care să fie tangente planului π; aceste sfere au centrele pe axa VV' a conului, intersectează planul σ după cercuri mari și sînt tangente planului π, respectiv în punctele F și F' de pe dreapta p. Să considerăm sfera S; cercul de contact γ al sferei S cu conul se află în planul τ, iar planul τ intersectează planul π după dreapta d, d fiind perpendiculară pe p.

Fie P un punct al secțiunii conului Σ cu planul π, adică al curbei de intersecție Γ a conului Σ cu planul π. Dacă A este punctul în care generatoarea PV este tangentă sferei S, acest punct fiind pe cercul γ din planul τ, avem

$$PF = PA, \tag{1}$$

deoarece dreapta PF este tangentă sferei S în punctul F, iar lungimile tangentelor duse dintr-un punct la o sferă sînt egale.

Să proiectăm ortogonal punctul P pe dreapta d și pe planul τ, respectiv în punctele Q, R. Notînd $\varepsilon = \widehat{PR, PA} = \widehat{VV', g}$ și $\varphi = \widehat{PR, PQ} = \widehat{VV', p}$, din triunghiurile dreptunghice PRA și PRQ rezultă

$$PR = PA\cos\varepsilon, \qquad PR = PQ\cos\varphi. \tag{1'}$$

Din (1) și (1') obținem

$$\frac{PF}{PQ} = e, \quad \left(e = \frac{\cos\varphi}{\cos\varepsilon} = \text{const.}\right). \tag{2}$$

Această proprietate geometrică a punctelor curbei de intersecție Γ a conului Σ cu planul π este luată ca definiție a conicei (secțiunii conice).

Așadar, se numește *conică locul geometric al punctelor din plan, ale căror distanțe la un punct dat F, numit focar, și la o dreaptă dată d, numită directoare, să aibă raportul constant și diferit de zero, raportul numindu-se excentricitatea conicei.*

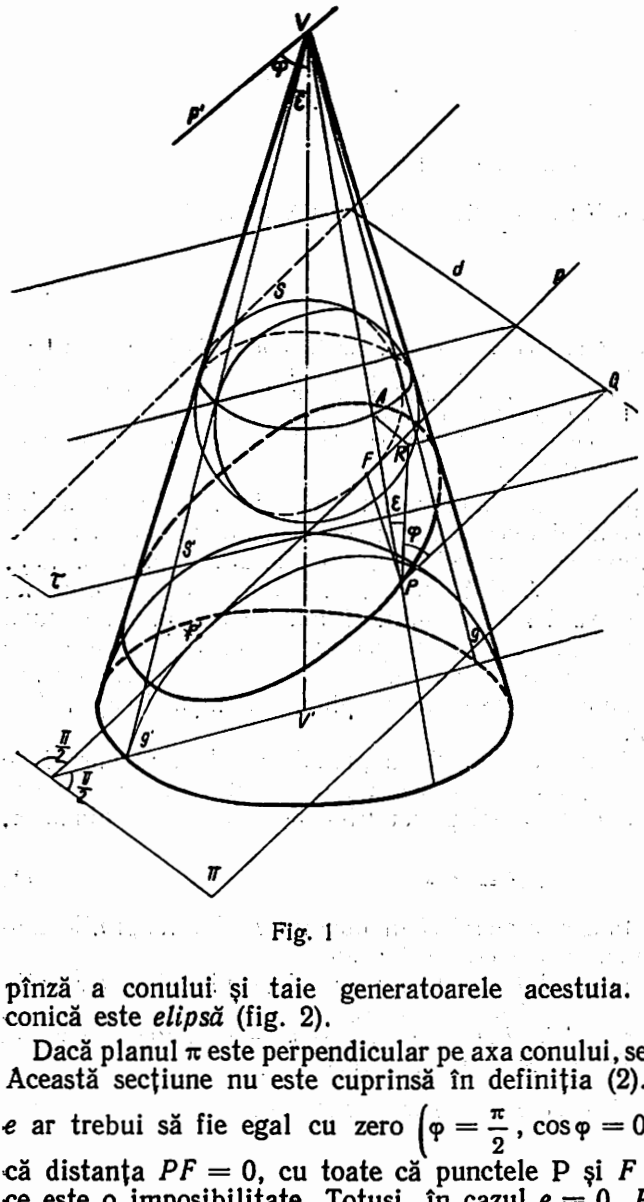


Fig. 1

Cu alte cuvinte, secțiunea conului Σ cu planul π este conica definită prin focarul F și directoarea d.

Unghiurile ε și φ sînt în plane diferite. Ținînd seama că ε este unghiul dintre axa conului și generatoarele lui, iar φ este unghiul dintre axa conului și planul secant π, putem să le considerăm în același plan și să le comparăm. În adevăr, planul π' — dus prin vîrful V paralel cu planul π — intersectează planul σ după dreapta p'. Deci, $\varepsilon = \widehat{g', VV'}$, $\varphi = \widehat{p', VV'}$ sînt unghiuri în planul σ, avînd același vîrf și o latură comună.

Dacă $\varphi > \varepsilon$, deci $e < 1$, planul π' nu intersectează conul decît în V; cu alte cuvinte, planul π intersectează numai o pînză a conului și taie generatoarele acestuia. În acest caz, secțiunea conică este *elipsă* (fig. 2).

Dacă planul π este perpendicular pe axa conului, secțiunea conică este un *cerc*. Această secțiune nu este cuprinsă în definiția (2). În adevăr, în acest caz, e ar trebui să fie egal cu zero $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}, \cos\varphi = 0\right)$, iar din (2) ar rezulta că distanța $PF = 0$, cu toate că punctele P și F nu sînt confundate; ceea ce este o imposibilitate. Totuși, în cazul $e = 0$, $PF \neq 0$, condiția (2) duce la concluzia că distanța PQ este infinită; adică, directoarea este aruncată

la infinit (este dreapta de la infinit), iar focarele F și F' coincid cu centrul cercului. Deci putem considera cercul ca un caz particular al elipsei.

Dacă $\varphi < \varepsilon$, deci $e > 1$, planul π' intersectează conul după două generatoare; adică planul π intersectează ambele pînze ale conului și este paralel cu două generatoare ale acestuia. În acest caz, secțiunea conică este *hiperbolă* (fig. 3).

Dacă $\varphi = \varepsilon$, deci $e = 1$, planul π' este tangent conului și-l intersectează după o generatoare; cu alte cuvinte, planul π intersectează numai o pînză a conului și nu taie toate generatoarele, una fiind paralelă cu el. În acest caz, secțiunea conică este *parabolă* (fig. 4).

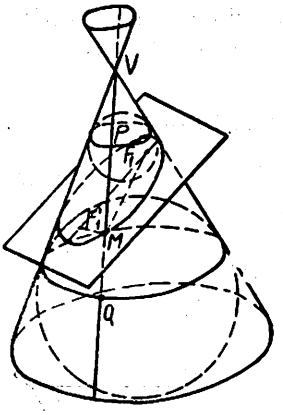


Fig. 2

Rezultă deci

Teorema lui Dandelin. 1. **Secțiunea făcută de un plan π într-un con de rotație Σ este o conică Γ.**

2. **Fie π' planul dus prin vîrful conului, paralel cu planul de secțiune.** *a)* **Dacă planul π' nu întîlnește conul, conica Γ este o elipsă.** *b)* **Dacă planul π' intersectează conul după două generatoare distincte, conica Γ este o hiperbolă.** *c)* **Dacă planul π' este tangent conului, adică îl intersectează după două generatoare confundate, conica Γ este o parabolă.**

Deci, cînd planul π nu trece prin vîrful conului, secțiunea conului este elipsă, hiperbolă sau parabolă. Aceste secțiuni conice se mai zic că sînt *conice propriu-zise*, sau *conice ireductibile*, sau încă *conice nedegenerate*.

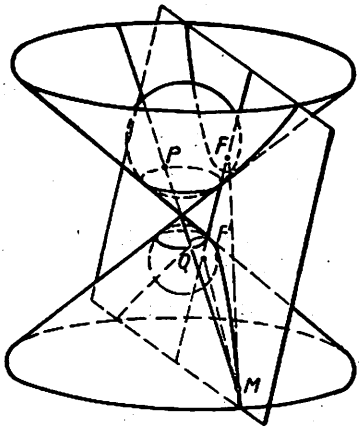


Fig. 3

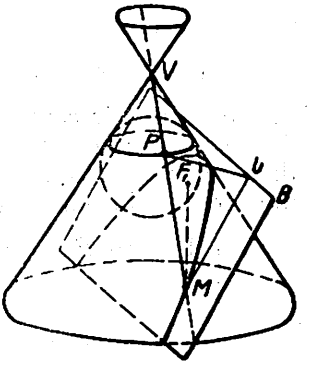


Fig. 4

Cînd planul π trece prin vîrful conului, obținem ca secțiune conică două drepte secante imaginar conjugate (dacă $e < 1$), două drepte secante reale (dacă $e > 1$) sau două drepte reale confundate (dacă $e = 1$). Aceste secțiuni

conice se mai zic că sînt *conice degenerate*, ele fiind de gen eliptic, hiperbolic sau parabolic, după cum $e < 1$, $e > 1$ sau $e = 1$. Dacă $e = 0$, conica degenerată este un cerc de rază nulă, sau încă dreptele izotrope din planul π' care trec prin vîrful conului.

Aşadar, schimbarea esenţială (calitativă) a formelor conicei provine din valorile excentricităţii e, şi anume: genul conicei se schimbă după cum $e < 1$, $e > 1$ sau $e = 1$.

§ 2. DEDUCEREA ECUAŢIILOR CANONICE ALE CONICELOR

Pentru a traduce analitic condiţia (2), să raportăm planul conicei la un sistem de referinţă cartezian ortogonal convenabil: să alegem ca axă Ox perpendiculara pe directoarea d şi care trece prin focarul F (adică dreapta p), iar ca axă Oy o paralelă la d, originea O fiind un punct arbitrar de pe axa Ox, care urmează a fi determinat ulterior. Atunci, coordonatele focarului F sînt $(c, 0)$, iar directoarea (d) are ecuaţia $x - d = 0$ (fig. 5). Ţinînd seama că $PF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $PQ = |x - d|$, rezultă că traducerea analitică a condiţiei (2) este

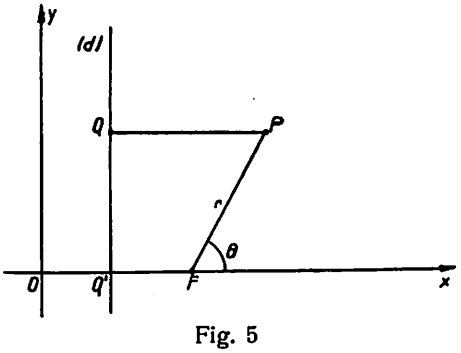


Fig. 5

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{|x-d|} = e.$$

Ridicînd la pătrat şi eliminînd numărătorul, obţinem ecuaţia

$$(x-c)^2 + y^2 = e^2 (x-d)^2,$$

care, efectuînd calculele şi grupînd termenii după x şi y, se mai scrie

$$(1-e^2)\,x^2 + y^2 + 2(de^2 - c)\,x + c^2 - d^2e^2 = 0. \tag{3}$$

Deci, locul geometric căutat este reprezentat de ecuaţia (3), adică *conicele sînt curbe algebrice de gradul al doilea.*

Să aflăm intersecţia conicei (3) cu axa Ox; aceasta revine la rezolvarea sistemului format din ecuaţia (3) şi ecuaţia axei Ox:

$$\begin{cases} (1-e^2)\,x^2 + y^2 + 2(de^2 - c)\,x + c^2 - d^2e^2 = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

sau încă

$$\begin{cases} (1-e^2)\,x^2 + 2(de^2 - c)\,x + c^2 - d^2e^2 = 0, \\ y = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Deci, axa Ox intersectează conica în punctele

$$A_1\left(x_1 = \frac{c+de}{1+e},\ y_1 = 0\right) \text{ şi } A_2\left(x_2 = \frac{c-de}{1-e},\ y_2 = 0\right) \tag{4'}$$

$x_i (i = 1,2)$ sînt rădăcinile primei ecuații a sistemului (4).

Observăm că dacă $e \to 1$, atunci $x_2 \to \infty$, încît punctul A_2 se depărtează la infinit pe axa Ox. Deci, dacă $e \neq 1$, axa Ox intersectează elipsa ($e < 1$) sau hiperbola ($e > 1$) în două puncte distincte, A_1 și A_2, la distanță finită, iar dacă $e = 1$, axa Ox intersectează parabola într-un singur punct A_1 la distanța finită, ale cărui coordonate sînt

$$x_1 = \frac{c+d}{2}, \quad y_1 = 0. \tag{4''}$$

Avem deci de deosebit două cazuri, după cum $e \neq 1$ sau $e = 1$.

a) **Conice cu centru (unic la distanță finită):** $e \neq 1$. Să alegem originea O a sistemului de axe în mijlocul segmentului $\overline{A_1A_2}$. În acest caz, prima ecuație a sistemului (4) trebuie să aibă rădăcini egale și de semne contrare; deci, coeficientul lui x trebuie să fie nul. Obținem

$$d = \frac{c}{e^2} \tag{5}$$

și ecuația (3) a conicei se scrie

$$(1 - e^2)\, x^2 + y^2 - \frac{c^2}{e^2}(1 - e^2) = 0. \tag{3'}$$

Punînd

$$a^2 = \frac{c^2}{e^2}, \quad \varepsilon b^2 = \frac{c^2(1 - e^2)}{e^2}, \quad (a > 0, \quad b > 0), \tag{5'}$$

unde $\varepsilon = \pm 1$, după cum excentricitatea este subunitară sau supraunitară, din (3') obținem ecuația canonică a conicelor cu centru:

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{6}$$

Observăm că *axele de cordonate* sînt *axe de simetrie* ale curbei reprezentate de ecuația (6), iar *originea* este *centrul de simetrie*. În adevăr, dacă un punct $P(x, y)$ se găsește pe curba (6), atunci și punctele $P'(-x, y)$, $P''(x, -y)$, $P'''(-x, -y)$ — simetricele lui P față de axa Ox, respectiv Oy și originea O — se vor găsi pe curba dată. *Axele de simetrie* și *centrul de simetrie* se numesc respectiv *axele și centrul conicei*. De aici vine denumirea de *conice cu centrul unic la distanță finită*.

b) **Conică fără centru (unic la distanță finită):** $e = 1$. Să alegem originea O a sistemului de axe în punctul A_1, unde conica (3), pentru $e = 1$, taie axa Ox la distanță finită. În acest caz, ținînd seama că punctul A_1 are coordonatele (4''), avem condiția

$$d = -c, \quad c > 0, \tag{7}$$

încît ecuația (3) devine

$$y^2 - 4cx = 0.$$

Punînd

$$p = 2c \tag{7'}$$

din (3) obținem *ecuația canonică* a parabolei

$$y^2 = 2px. \tag{8}$$

Constanta p se numește *parametrul parabolei*. Observăm că axa Ox este axa de simetrie a parabolei, pe scurt *axa parabolei*. În adevăr, dacă $P(x, y)$ este un punct al parabolei (8), atunci și punctul $P'(x, -y)$ — simetricul lui P față de axa Ox — este un punct al parabolei. De asemenea, observăm că parabola nu are centru de simetrie la distanță finită. De aici vine și denumirea de *conică fără centru (unic) la distanță finită*.

Aplicație. Conice în coordonate polare. Să luăm polul sistemului de coordonate polare în focarul F, iar ca semiaxă polară perpendiculara prin F la directoarea d (fig. 5). Fie P un punct al secțiunii conice; avem

$$FP = r \quad \text{și} \quad PQ = r\cos\theta + d.$$

Ținînd seama de aceste expresii în (2), obținem

$$\frac{r}{r\cos\theta + d} = e \text{ sau } r = re\cos\theta + de.$$

Notînd $p = de$, rezultă că ecuația conicei în sistemul de coordonate polare se scrie

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}. \tag{9}$$

Această formă a ecuației conicelor este întrebuințată în astronomie, mecanică, fizică ș.a.

§ 3. ELIPSA

Vom pune acum în evidență unele proprietăți ale elipsei. Vom utiliza în acest scop ecuația canonică a elipsei. Amintim că elipsei i se poate da următoarea

Definiție. Locul geometric al punctelor din plan al căror raport al distanțelor la un punct fix și la o dreaptă fixă este mai mic decît unitatea, este o elipsă, care are acel punct ca focar și dreapta dată ca directoare.

Ținînd seama de cele expuse în § 2, putem alege sistemul de axe astfel încît axa Ox să fie perpendiculara dusă din focarul F pe directoarea dată, axa Oy să fie paralela la directoare, iar originea în punctul mediu al segmentului determinat de elipsă pe axa Ox; în acest caz, focarul este punctul $F(c, 0)$, iar directoarea are ecuația $x - \frac{c}{e^2} = 0$. Atunci, ecuația elipsei este:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{10}$$

În particular, putem avea $a = b = r$, cînd ecuația (10) devine

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{10'}$$

și reprezintă un cerc cu centrul în origine și de rază r. Deci, *cercul este o elipsă particulară*.

Reprezentări parametrice. Se poate obține o reprezentare parametrică a elipsei, dacă luăm

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta, \tag{11}$$

încît ecuația (10) este identic satisfăcută. Făcînd pe θ să varieze de la 0 la 2π, se obțin toate punctele elipsei.

Observăm că în reprezentarea parametrică (11) intră *sinusul* și *cosinusul* unui unghi θ. De aceea, se zice că ecuațiile (11) constituie o reprezentare parametrică prin *funcții circulare*.

Dacă punem $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, reprezentarea parametrică (11) devine rațională. În adevăr, ținînd seama că

$$\sin\theta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}, \quad \cos\theta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}},$$

obținem reprezentarea parametrică

$$x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \quad y = \frac{2bt}{1+t^2}, \tag{12}$$

fiecărei valori a lui t corespunzînd un punct al elipsei, și invers. Cînd t variază de la $-\infty$ la $+\infty$, punctul de pe elipsă descrie elipsa în sens direct. Deci, ecuațiile (12) dau o reprezentare parametrică rațională a elipsei și ne arată că elipsa este o *curbă unicursală*.

Tangenta la elipsă. Fie $P_0(x_0, y_0)$ un punct al elipsei. Ecuația tangentei în punctul P_0 la elipsă, după formula (7″) din capitolul VI, se scrie

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) = 0$$

sau încă

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0, \tag{13}$$

dacă ținem seama că punctul P_0 este un punct al elipsei.

Reprezentarea grafică a elipsei. Elipsa (10) intersectează axa Ox în punctele $A(a, 0)$ și $A'(-a, 0)$. Ținînd seama de formula (13), obținem că tangentele în aceste puncte sînt $x - a = 0$, respectiv $x + a = 0$, fiind paralele cu axa Oy. De asemenea, elipsa intersectează axa Oy în punctele $B(0, b)$ și $B'(0, -b)$, tangentele în aceste puncte fiind $y - b = 0$, respectiv $y + b = 0$, deci paralele cu axa Ox.

Scriind ecuația (10) a elipsei, sub formă explicită, în raport cu y sau cu x, obținem

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{sau} \quad x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}. \tag{10'}$$

Deci, punctul $P(x, y)$ al elipsei este real, numai dacă

$$a^2 - x^2 \geqslant 0, \qquad b^2 - y^2 \geqslant 0$$

deoarece, pentru valori ale lui x și y care nu satisfac aceste inegalități, y sau x ar căpăta valori imaginare. Deci,

$$-a \leqslant x \leqslant a, \qquad -b \leqslant y \leqslant b;$$

ceea ce înseamnă că punctele elipsei sînt interioare unui dreptunghi, cu centrul în origine și cu laturile paralele cu axele, de lungime $2a$ și $2b$. Așadar, *elipsa este situată în întregime în partea finită a planului.*

Presupunînd $a \geqslant b$, avem

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leqslant 1.$$

ceea ce ne arată că punctele elipsei sînt cuprinse între cercurile concentrice C_1, C_2 cu centrul în origine şi cu razele, respectiv, b şi a (fig. 6). Să ducem prin origine o rază care face unghiu θ cu axa Ox. Această rază intersectează cercurile C_1, C_2 în punctele M_1, M_2. Să arătăm că punctul M al elipsei se află la intersecţia unei paralele prin M_1 la axa Ox şi a unei paralele prin M_2 la axa Oy. În adevăr, abscisa şi ordonata punctului M este egală cu abscisa punctului M_2, respectiv cu ordonata punctului M_1:

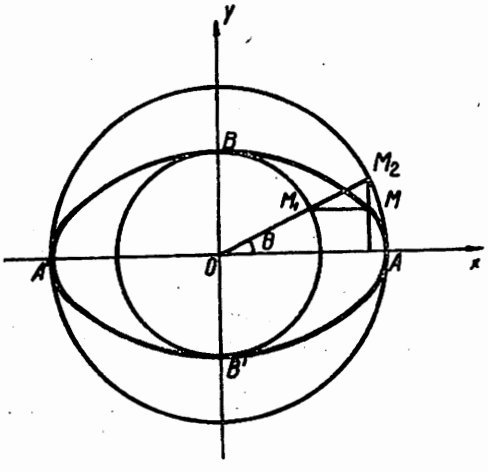


Fig. 6

$$x = OM_2 \cdot \cos\theta = a\cos\theta,$$

$$y = OM_1 \cdot \sin\theta = b\sin\theta$$

şi aceste relaţii constituie reprezentarea parametrică (11) a elipsei. Întrucît elipsa trece prin mijloacele A, A', B, B' ale laturilor dreptunghiului considerat mai sus, fiind tangentă la aceste laturi, rezultă că elipsa are forma dată de figura 6. Lungimile a, b se numesc *semiaxele elipsei*. De asemenea, înţelegem prin semiaxe şi segmentele $\overline{OA}$ şi $\overline{OB}$ (sau $\overline{OA'}$ şi $\overline{OB'}$), punctele A, A', B, B' fiind *vîrfurile elipsei*. Deoarece s-a presupus $a \geqslant b$, axa $\overline{AA'}$ se numeşte *axa mare* a elipsei, iar $\overline{BB'}$ axa mică, înţelegînd prin aceasta atît segmentele de lungimi $2a$ şi $2b$ cît şi dreptele nedefinite, pe care sînt situate aceste segmente.

Observăm că reprezentarea grafică a elipsei se mai poate obţine plecînd de la ecuaţia ei explicită (10''), făcînd pe x să varieze de la $-a$ la $+a$. În virtutea simetriei, este suficient să construim porţiunea din primul cadran, care corespunde la $x \geqslant 0$ şi semnului $+$ în ecuaţia (10''). Astfel, din (10'') se constată că dacă x creşte de la 0 la a, atunci y descreşte de la b la 0.

Proiecţia unui cerc este o elipsă. Fie două plane, xOy şi xOY care trec prin axa Ox şi fac între ele un unghi α (fig. 7). Presupunem că planul xOY este raportat la un sis-

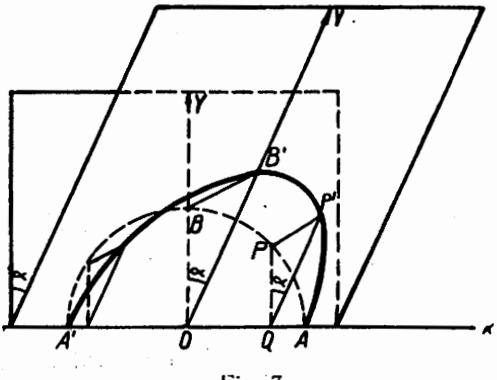


Fig. 7

tem de axe ortogonale, și că în acest plan se dă un cerc C, cu centrul în O și cu raza a:

$$x^2 + Y^2 = a^2.$$

Să proiectăm cercul C pe planul xOy. Un punct $P(x, Y)$ al cercului C se va proiecta în punctul $P'(x, y)$ al planului xOy, unde abscisa $x = OQ$ va fi aceeași pentru ambele puncte, în timp ce

$$y = QP' = QP \cdot \cos\alpha = Y\cos\alpha, \quad \text{adică} \quad Y = \frac{y}{\cos\alpha}.$$

Deci, proiecția cercului C pe planul xOy este curba de ecuație

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2\alpha} = a^2, \quad \text{sau} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2\cos^2\alpha} - 1 = 0,$$

care este o elipsă de semiaxe a, $b = a\cos\alpha$. Deoarece s-a presupus $a \geqslant b$, rezultă că putem găsi totdeauna un unghi α, astfel încît $\cos\alpha = \frac{b}{a}$. Deci avem

Propoziția. O elipsă poate fi totdeauna considerată ca proiecția unui cerc pe un plan, făcînd cu planul cercului unghiul α, astfel încît $\cos\alpha = \frac{b}{a}$.

Focare și directoare. Din §2, formulele (5) și (5'), avem — în cazul elipsei — relațiile

$$d = \frac{c}{e^2}, \quad a^2 = \frac{c^2}{e^2}, \quad b^2 = \frac{c^2(1-e^2)}{e^2}, \quad (a > 0, \quad b > 0),$$

unde c și d sînt distanțele de la centru la focar și directoare, iar a, b semiaxele elipsei, e fiind excentricitatea. Deci, fiind date semiaxele elipsei, obținem formulele

$$e = \frac{c}{a}, \quad d = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}, \quad c^2 = a^2 - b^2, \tag{14}$$

care permit determinarea excentricității, a distanței de la centru la directoare și a distanței focale pentru elipsă. Atunci, *directoarele* elipsei sînt dreptele paralele cu axa Oy

$$x \mp \frac{a^2}{c} = 0, \quad (c > 0) \tag{15}$$

și ele corespund *focarelor*

$$F(\pm c, 0). \tag{15'}$$

Din (14) rezultă $e = \frac{c}{a}$ și $e = \frac{a}{d}$. Însă *excentricitatea elipsei* este mai mică decît unitatea ($e < 1$), încît

$$c < a < d.$$

Deci, directoarele intersectează axa Ox în puncte situate în afara segmentului $\overline{A'A}$, care este axa mare a elipsei (fig. 8).

Dacă sînt cunoscute semiaxele a, b, construcţia focarelor şi directoarelor corespunzătoare se poate face astfel: din vîrful B al eplisei ca centru ducem un cerc de rază a; intersecţia cercului cu axa Ox determină cele două focare (fig. 8), dacă ţinem seama de ultima relaţie (14). Pe de altă parte, pe paralela la Oy dusă prin focarul F se consideră un punct E, astfel încît $FE=b$, deci $OE = a$; perpendiculara din E pe OE intersectează axa Ox în punctul R, iar paralela la Oy dusă prin R este directoarea corespunzătoare focarului F. În adevăr, în triunghiul dreptunghic OER avem: $OE^2 = OR \cdot OF$, de unde

$$OR = \frac{a^2}{c} = d.$$

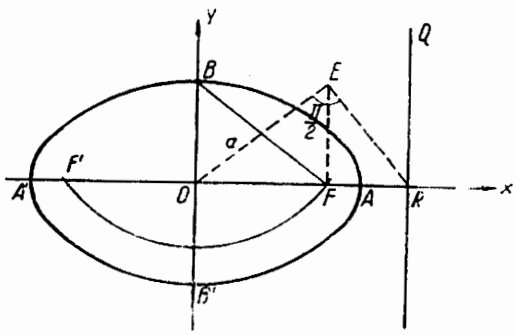


Fig. 8

O proprietate focală a elipsei. Observăm (fig. 9) că suma distanţelor de la un punct al elipsei la cele două directoare este constantă, fiind egală cu distanţa între cele două directoare; deci,

$$PQ + PQ' = 2d = \frac{2a}{e}.$$

Însă din definiţia geometrică a elipsei avem

$$\frac{PF}{PQ} = e, \quad \frac{PF'}{PQ'} = e, \quad (e < 1),$$

de unde rezultă

$$PF + PF' = e\,(PQ + PQ'),$$

adică

$$PF + PF' = 2a. \tag{16}$$

Se găseşte astfel o proprietate geometrică a elipsei ce-i poate servi drept

Definiţie. Se numeşte elipsă locul geometric al punctelor din plan, a căror sumă a distanţelor la două puncte fixe, numite focare, este constantă.

Aceasta este definiţia cea mai uzuală a elipsei. Folosind această definiţie, se poate obţine ecuaţia (10) a elipsei.

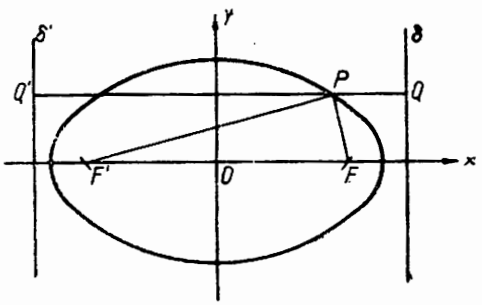


Fig. 9

§ 4. HIPERBOLA

Vom studia unele proprietăți ale hiperbolei. Amintim că hiperbolei i se poate da următoarea

Definiție. Se numește hiperbolă locul geometric al punctelor din plan, al căror raport al distanțelor la un punct fix și la o dreaptă fixă este constant și mai mare decît unitatea.

Alegînd sistemul de axe astfel încît axa Ox să fie perpendiculara din focarul F pe directoarea dată, axa Oy să fie paralelă la directoare, iar originea în punctul mediu al segmentului determinat de hiperbolă pe axa Ox, deci $F(c, 0)$ și $x - d = 0$, atunci ecuația hiperbolei este (vezi § 2)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{17}$$

Reprezentări parametrice. Știind că pentru orice unghi θ avem relația trigonometrică $\sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta = 1$ și identificînd-o cu ecuația (17), observăm că putem lua $\frac{x}{a} = \sec\theta$, $\frac{y}{b} = \operatorname{tg}\theta$, de unde rezultă reprezentarea parametrică a hiperbolei

$$\begin{cases} x = a\sec\theta, \\ y = b\operatorname{tg}\theta. \end{cases} \tag{18}$$

Făcînd pe θ să varieze de la 0 la 2π, se obțin toate punctele hiperbolei. Ecuația (17) a hiperbolei se mai poate scrie

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1.$$

Însemnînd valoarea unuia din factorii produsului, de exemplu a primului prin t, rezultă că valoarea celui de-al doilea va fi $\frac{1}{t}$. Adică, fiecare punct $P(x, y)$ al hiperbolei (17) va fi dat de intersecția dreptelor

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = t, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{t}.$$

Deducem de aici reprezentarea parametrică rațională a hiperbolei

$$x = \frac{a(t^2 + 1)}{2t}, \quad y = \frac{b(t^2 - 1)}{2t}. \tag{19}$$

Fiecărei valori a lui t ($-\infty < t < +\infty$) corespunde un punct al hiperbolei, și invers. Formulele (19) ne arată că *hiperbola* este o *curbă unicursală*.

Se poate arăta că din formulele (19), dacă luăm $t = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$, se obține reprezentarea parametrică (18).

Dacă punem $t = e^{\varphi}$, unde e este baza logaritmilor naturali, atunci ecuațiile (19) devin

$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) = a\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}, \quad y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) = b\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}.$$

Se știe, din analiză, că se numesc *sinus hiperbolic* și *cosinus hiperbolic* (și se notează prescurtat sh și ch), expresiile

$$\operatorname{sh}\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}, \quad \operatorname{ch}\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}. \tag{19'}$$

Deci, prin formulele

$$\begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch}\varphi, \\ y = b \operatorname{sh}\varphi \end{cases} \tag{20}$$

se obține o reprezentare parametrică prin funcții hiperbolice a hiperbolei (17), analogă reprezentării parametrice (11) a elipsei *.

Tangenta la hiperbolă. Fie $P_0(x_0, y_0)$ un punct al hiperbolei. Ecuația tangentei în punctul P_0 la hiperbolă, dacă ținem seama de formula (7″) din capitolul VI și că punctul P_0 este pe hiperbolă, se scrie

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0 \tag{21}$$

și se obține prin dedublare din ecuația hiperbolei.

Reprezentarea grafică a hiperbolei. Hiperbola (17) intersectează axa Ox în punctele $A(a, 0)$ și $A'(-a, 0)$, tangentele în aceste puncte fiind dreptele $x - a = 0$, respectiv $x + a = 0$, paralele cu axa Oy. Intersectînd hiperbola cu axa Oy, obținem două puncte imaginare de coordonate $(0, \pm i\, b)$. Rezultă că hiperbola are numai *două vîrfuri reale* $A(a, 0)$ și $A'(-a, 0)$, *axa* Ox numindu-se *axa transversă* a hiperbolei. Totuși, prin analogie cu elipsa, se consideră pe axa Oy punctele reale $B(0, b)$ și $B'(0, -b)$, aceste puncte numindu-se *vîrfurile aparente* ale hiperbolei, iar axa Oy — *axa netransversă* a hiperbolei.

Din ecuația (17) deducem

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \tag{17'}$$

de unde rezultă imediat $x^2 \geqslant a^2$. Deci nu există puncte ale hiperbolei în banda determinată de paralelele la axa Oy, duse respectiv prin punctele A, A'. De asemenea, rezultă că dacă $x \to \infty$, atunci și $y \to \infty$; deci, hiperbola are ramuri infinite. Așadar, *hiperbola este constituită din două ramuri infinite.*

*) *Funcțiile hiperbolice* (19′) satisfac formula fundamentală

$$\operatorname{ch}^2\varphi - \operatorname{sh}^2\varphi = 1, \tag{19''}$$

analogă formulei

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$

pe care o satisfac funcțiile circulare $\sin\theta$, $\cos\theta$.

Ducînd apoi și prin B și B' paralele la axa Ox, se formează dreptunghiul $RSR'S'$, cu laturile paralele cu axele de coordonate și trecînd prin A, A', B, B'.

Fie dreptele care trec prin centrul hiperbolei (originea axelor de coordonate); ecuațiile lor sînt de forma $y = mx$. Coordonatele punctelor de intersecție ale hiperbolei (17) cu o astfel de dreaptă sînt soluții ale sistemului

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad y = mx.$$

Eliminînd pe y între ecuațiile sistemului, obținem ecuația

$$(b^2 - a^2m^2)\, x^2 - a^2b^2 = 0,$$

ale cărei soluții ne dau abscisele punctelor de intersecție. Rezultă că o dreaptă dusă din centrul hiperbolei intersectează hiperbola în două puncte simetrice față de centrul hiperbolei. Aceste puncte vor fi reale distincte sau imaginar conjugate, după cum $m^2 < \frac{b^2}{a^2}$ sau $m^2 > \frac{b^2}{a^2}$. Dacă $m^2 = \frac{b^2}{a^2}$, punctele sînt confundate și aruncate la infinit. Rezultă că dreptele

$$y = \pm \frac{b}{a} x, \tag{22}$$

adică diagonalele $R'R$ și $S'S$ ale dreptunghiului $RSR'S'$ sînt tangente la hiperbolă în punctele ei de la infinit. Însă, *o dreptă se zice că este asimptotă la o curbă dată, dacă două din punctele de intersecție ale dreptei cu curba sînt la infinit.* Deci, *dreptele* (22) *sînt asimptotele hiperbolei* (17).

Pentru a obține porțiunea hiperbolei situată în primul cadran trebuie să luăm semnul + înaintea radicalului din ecuația (17') și să facem pe x să varieze de la a la $+\infty$. Pentru a ne de seama de comportarea hiperbolei față de prima asimptotă, să considerăm diferența $y_a - y_i$, unde prin y_a s-a notat ordonata $P'R$ a unui punct de pe dreapta (22), iar prin y_i ordonata $P'P$ a unui punct de pe hiperbola (17), ambele ordonate corespunzînd aceleiași abscise $x = OP'$ (fig. 10). Din (17') și (22) avem

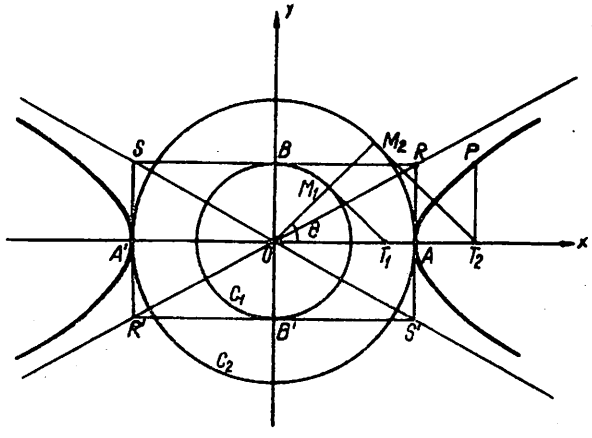


Fig. 10

$$y_a - y_i = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} > 0.$$

În primul rînd se deduce că: $y_a > y_i$, încît în baza simetriei față de axele de coordonate ale hiperbolei rezultă că *ramurile hiperbolei rămîn necontenit de aceeași parte a celor două asimptote.*

În al doilea rînd se deduce că, pentru valori din ce în ce mai mari date lui x, orodonata y_i se apropie din ce în ce mai mult de ordonata y_a; cu alte cuvinte, o dată cu creșterea lui x, diferența $y_a - y_i$ se micșorează, tinzînd către zero cînd x tinde către infinit: $\lim (y_a - y_i) = 0$, adică *ramuri hiperbolei se apropie de asimptote la infinit.* Deci, ramurile hiperbolei prezintă o particularitate care trebuie să fie scoasă în evidență: diferența $y_a - y_i$ dintre ordonata y_a a dreptei (22) și ordonata y_i a curbei (17) — pentru aceeași abscisă x — tinde către zero, cînd x tinde către infinit. Exprimăm această proprietate remarcabilă a hiperbolei spunînd că ramurile ei tind asimptotic către dreptele (22), care — din aceste motive — se numesc *asimptotele* hiperbolei. În definitiv:

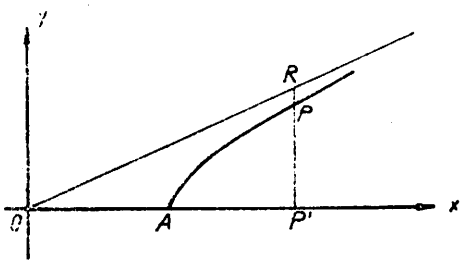


Fig. 11

Hiperbola are două asimptote. care trec prin centrul ei și sînt egal înclinate pe axe.

Fie acum două cercuri C_1, C_2 cu centrul în origine, unul de rază b, altul de rază a (fig. 10). O dreaptă dusă prin origine și făcînd unghiul θ cu axa Ox determină punctele M_1 și M_2, respectiv pe cele două cercuri C_1 și C_2. Tangentele la cercuri în M_1 și M_2 intersectează axa Ox în T_1 și T_2. Din triunghiul OM_2T_2 rezultă

$$OT_2 = \frac{OM_2}{\cos\theta} = a \sec\theta,$$

iar din triunghiul OM_1T_1 obținem

$$M_1T_1 = OM_1 \cdot \operatorname{tg}\theta = b \operatorname{tg}\theta.$$

Deci, luînd pe perpendiculara la Ox în T_2 punctul P astfel încît $T_2P = M_1T_1$, rezultă că punctul P astfel determinat, conform reprezentării parametrice (18), aparține hiperbolei (17). Variind unghiul θ, prin această construcție se pot obține oricîte puncte ale hiperbolei.

O dată construită partea de hiperbolă din primul cadran, celelalte părți ale ei se obțin prin simetrie. Hiperbola are forma din figura 10.

Prin definiție, hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0, \tag{23}$$

a cărei ecuație se obține din (17) punînd $+1$ în loc de -1, se numește *hiperbola conjugată* hiperbolei date (17). Observăm că cele două hiperbole au

aceleași axe, însă axa transversă pentru una este netransversă pentru cealaltă, și invers. Rezultă că asimptotele (22) ale hiperbolei (17) sînt asimptote și pentru hiperbola conjugată (23). În figura 12, hiperbola conjugată este trasată printr-o linie punctată, iar hiperbola dată printr-o linie continuă.

Se numește *hiperbolă echilateră* hiperbola care are asimptotele perpendiculare, deci $a = b$. Ecuația unei hiperbole echilatere este

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0. \qquad (24)$$

Focare și directoare. Din § 2, formulele (5) și (5'), reuzltă pentru hiperbolă relațiile

$$e = \frac{c}{a}, \quad d = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}, \qquad (25)$$
$$c = a^2 + b^2,$$

unde c și d sînt distanțele de la centru la focar și directoare, a și b sînt semiaxele hiperbolei, iar e este excentricitatea ei. Deci, directoarele hiperbolei sînt dreptele

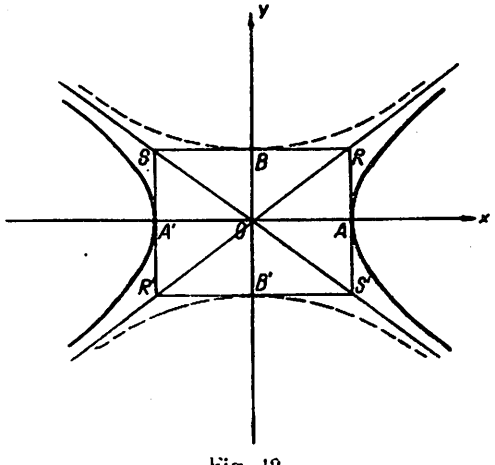


Fig. 12

$$x \mp \frac{a^2}{c} = 0, \qquad (26)$$

paralele cu axa Oy, ele corespunzînd focarelor

$$F(\pm c,\ 0). \qquad (26')$$

Directoarele intersectează axa Ox în puncte situate în interiorul segmentului $\overline{A'A}$, care este axa transversă a hiperbolei (fig. 13). În adevăr, din (25) rezultă $e = \frac{c}{a}$ și $e = \frac{a}{d}$. Însă *excentricitatea hiperbolei* este mai mare decît unitatea ($e > 1$), încît

$$d < a < c.$$

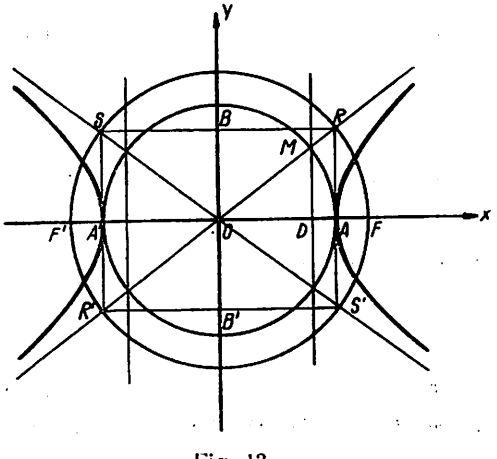


Fig. 13

Cunoscînd semiaxele a, b ale hiperbolei, construcția focarelor și directoarelor corespunzătoare se poate face astfel: fie cercul cu centrul în O și de rază OR egală cu diagonala dreptunghiului $OARB$ de laturi a, b, diagonala OR fiind asimptota hiperbolei. Acest cerc intersectează axa Ox în focarele F și F', deoarece $OR^2 = a^2 + b^2 = c^2$ (fig. 13). De asemenea, fie pe OR

un punct M, astfel încît $OM = a$. Perpendiculara MD coborîtă din M pe Ox este directoarea corespunzătoare focarului F. În adevăr, triunghiurile dreptunghice OAR și ODM sînt asemenea, de unde

$$\frac{OD}{OM} = \frac{OA}{OR}, \text{ sau } OD = \frac{OA \cdot OM}{OR}, \text{ sau } OD = \frac{a^2}{c} = d.$$

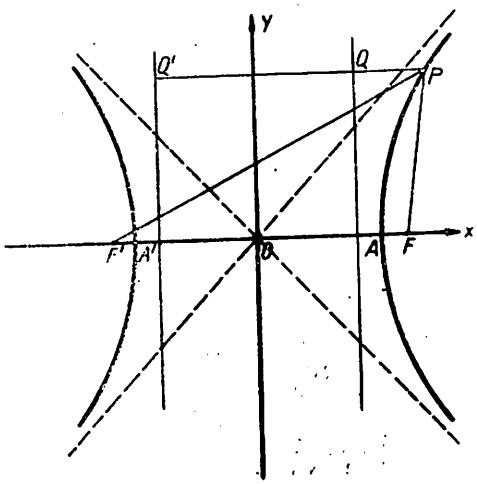


Fig. 14

O proprietate focală a hiperbolei. Din figura 14 observăm că diferența distanțelor de la un punct P al hiperbolei la cele două directoare este constantă și egală cu $\frac{2a}{e}$, adică

$$PQ' - PQ = \frac{2a}{e}.$$

Însă, prin definiție, punctele hiperbolei au proprietatea

$$\frac{PF}{PQ} = e, \quad \frac{PF'}{PQ'} = e,$$

de unde se ajunge la condiția

$$|PF' - PF| = 2a. \qquad (27)$$

Se găsește astfel o proprietate geometrică a hiperbolei, care poate servi drept

D e f i n i ț i e. Se numește hiperbolă locul geometric al punctelor din plan, a căror diferență a distanțelor la două puncte fixe, numite focare, este constantă.

Aceasta este definiția uzuală a hiperbolei. Folosind această definiție, se poate obține ecuația (17) a hiperbolei.

O altă formă canonică a hiperbolei echilatere. Am arătat că o hiperbolă se zice *echilateră*, dacă asimptotele ei sînt perpendiculare (deci $a = b$), ecuația ei fiind (24). În acest caz, putem lua ca noi axe carteziene ortogonale chiar asimptotele hiperbolei. Printr-o rotație de unghi $\alpha = -45°$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Y), \end{cases}$$

ecuația (24) se scrie

$$(X + Y)^2 - (-X + Y)^2 - 2a^2 = 0.$$

Punînd $k = \frac{a^2}{2}$, obținem ecuația

$$XY = k, \ (k = \text{const.}), \qquad (24')$$

a hiperbolei echilatere raportată la centru și asimptotele ei. Această formă canonică este folosită în fizică.

§ 5. PARABOLA

Ca și în cazul elipsei și hiperbolei, vom studia unele proprietăți ale parabolei, utilizînd ecuația canonică. Amintim următoarea

Definiție. Se numește parabolă locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, numit focar, și de o dreaptă fixă, numită directoare.

Alegînd sistemul de axe astfel încît axa Ox să fie perpendiculara dusă din focarul F pe directoarea dată, axa Oy să fie paralela la directoare, iar originea în punctul mediu al segmentului determinat de focar și piciorul perpendicularei dusă din focar la directoare, atunci (a se vedea § 2) ecuația parabolei se scrie

$$y^2 = 2px, \tag{28}$$

unde p este *parametrul parabolei*.

Reprezentări parametrice. Putem obține imediat o reprezentare parametrică a parabolei, luînd pe y ca parametru; ecuațiile parametrice ale parabolei sînt în acest caz

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p}, \\ y = t, \end{cases} \tag{29}$$

ceea ce ne arată că parabola este o *curbă unicursală*.

Tangenta la parabolă. Fie $P_0(x_0, y_0)$ un punct al parabolei. După formula (7″), capitolul VI, și ținînd seama că punctul P_0 se găsește pe parabolă, ecuația tangentei în punctul P_0 la parabolă este

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{30}$$

Observăm că această ecuație se poate obține prin dedublare din ecuația parabolei.

Reprezentarea grafică a parabolei. Parabola (28) intersectează axa Ox în origine, tangenta în acest punct fiind axa Oy. *Axa* Ox se numește *axa parabolei*, iar *originea* este unicul *vîrf al parabolei*. Ecuația (28) se mai scrie:

$$y = \pm\sqrt{2px} \tag{28'}$$

și ea ne arată că y nu poate avea valori reale decît pentru valori pozitive ale lui x (presupunem $p > 0$); deci parabola nu are puncte decît la dreapta axei Oy, aceste puncte fiind simetrice față de axa Ox. Deoarece curba este simetrică față de axa Ox, este suficient să studiem porțiunea parabolei situată în primul cadran, deci în (28′) putem lua semnul $+$. Observăm că ramura va porni din origine (pentru $x = 0$ avem $y = 0$) și va urca în sus, tinzînd către infinit pentru $x \to \infty$.

Se pune întrebarea: parabola admite drepte asimptote? Răspunsul este negativ. În adevăr, pentru ca dreapta $y = mx + n$ să fie asimptotă, ar trebui

ca diferența $\delta = y_p - y_d = \sqrt{2px} - (mx + n)$ să tindă către zero, cînd x tinde către infinit. Însă, oricare ar fi valorile lui m și n, avem

$$\lim_{x\to\infty} \delta = \lim_{x\to\infty} x.\left(\sqrt{\frac{2p}{x}} - m - \frac{n}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \cdot \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2p}{x}} - m - \frac{n}{x}\right) = -m \lim_{x\to\infty} x = \infty.$$

Deci, există o deosebire între ramura infinită a parabolei și acelea ale hiperbolei. Parabola nu admite drepte asimptote, pe cînd hiperbola admite astfel de drepte.

Din (28), respectiv (28'), se observă că ordonata oricărui punct al parabolei este medie geometrică între abscisă și cantitatea constantă $2p$. Această observație permite construirea punctelor parabolei. În adevăr, măsurăm întîi de la punctul O spre stînga segmentul $OB = 2p$ (fig. 15). Fie $P(x, y)$ punctul de pe parabolă avînd abscisa $x = OP_1$. Cercul care trece prin B și are ca diametru segmentul BP_1 intersectează axa Oy în punctul P_2, astfel încît segmentul OP_2 este media geometrică a segmentelor $BO = 2p$ și $OP_1 = x$. Avînd abscisa $x = OP_1$ și ordonata corespunzătoare $y = OP_2$, construim punctul P al parabolei. Punctul P', simetricul lui P în raport cu axa Ox, aparține de asemenea parabolei, parabola avînd forma din figura 15.

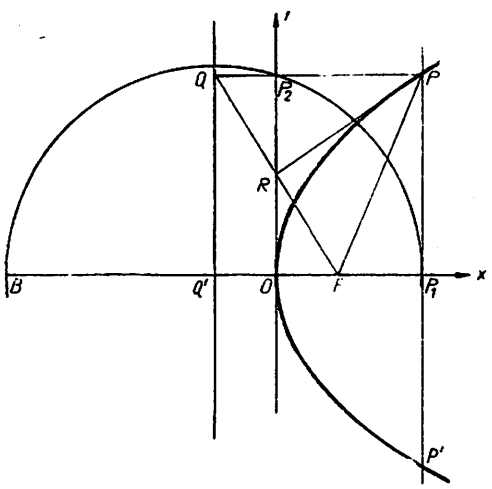


Fig. 15

O altă metodă prin care putem obține puncte ale parabolei rezultă din însăși definiția acestei curbe. În adevăr, distanțele de la punctul P al parabolei (fig. 15) la focarul F și la directoarea ei $Q'Q$ sînt egale; deci, triunghiul PQF este isoscel: $PF = PQ$. Însă perpendiculara FQ' dusă din focar pe directoare este împărțită în două părți egale de către axa Oy; rezultă că și segmentul FQ este împărțit în două părți egale de către axa Oy, mijlocul segmentului fiind în punctul R : $FR = RQ$. Așadar, dreapta RP este perpendiculară pe dreapta FQ, iar punctul P al parabolei este intersecția dreptei RP (perpendiculară din R pe dreapta FQ) cu dreapta QP (perpendiculară din Q pe directoare). Deducem astfel o metodă prin care putem obține oricîte puncte ale parabolei. Din focarul F ducem o dreaptă arbitrară, care intersectează axa Oy în punctul R și directoarea în punctul Q. Din punctul Q ducem paralela la axa Ox, iar în punctul R perpendiculara pe FQ. Aceste două drepte se intersectează în punctul P, care este un punct al parabolei. Pe de altă parte, observăm că orice alt punct P^* al dreptei RP se află la o distanță egală de punctele F și Q, însă dreapta QP^* nu este perpendiculară pe directoare, încît punctul P este mai aproape de directoare decît de focar. Cu alte cuvinte, dreapta RP are numai un singur punct P comun cu parabola; adică cele două puncte de intersecție ale ei cu parabola sînt confundate în unul.

singur, dreapta RP fiind tangentă la parabolă în acest punct. Deci, această metodă ne dă totodată și posibilitatea de a construi oricîte tangente la parabolă.

Focare și directoare. Din § 2, formulele (7) și (7'), rezultă relațiile

$$c = \frac{p}{2}, \quad d = -\frac{p}{2}, \tag{31}$$

unde c și d sînt respectiv distanțele de la originea axelor de coordonate la focarul și directoarea parabolei de parametru p. Deci, *directoarea parabolei* este dreapta paralelă cu axa Oy

$$x + \frac{p}{2} = 0 \tag{32}$$

și ea corespunde *focarului*

$$F\left(\frac{p}{2}, \ 0\right). \tag{32'}$$

Cunoscînd parametrul parabolei p, construcția focarului și directoarei corespunzătoare se face astfel: cercul cu centrul în O și raza $r = \frac{p}{2}$ intersectează axa Ox în focarul F și în punctul Q'. Directoarea fiind paralelă cu axa Oy, perpendiculara din Q' la axa Ox va fi directoarea corespunzătoare focarului F.

CAPITOLUL IX

TEORIA GENERALĂ A CONICELOR

§ 1. REDUCEREA ECUAȚIEI UNEI CONICE LA FORMA CANONICĂ CU AJUTORUL DEPLASĂRILOR DIN PLAN

O secțiune conică (elipsa, hiperbola, parabola, perechea de drepte) este o curbă algebrică de gradul al doilea; cu alte cuvinte, în coordonatele carteziene x, y, o secțiune conică este reprezentată printr-o ecuație algebrică de gradul al doilea în variabilele x, y.

Reciproc, o curbă algebrică de gradul al doilea este o *conică ireductibilă* (elipsă, hiperbolă, parabolă) sau o *conică degenerată* (pereche de drepte). De aceea, curbele algebrice de gradul al doilea se mai numesc și *conice*.

În adevăr, fie o curbă algebrică de gradul al doilea; într-un sistem de coordonate carteziene ortogonale x, y, ecuația generală a unei astfel de curbe este

$$f(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (1)$$

unde coeficienții $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ sînt constante, unul cel puțin din coeficienții a_{11}, a_{12}, a_{22} fiind diferit de zero. În coordonate carteziene omogene, ecuația curbei se scrie

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{ij}x_ix_j = 0, \qquad a_{ij} = a_{ji}. \qquad (1')$$

Observăm că printr-o deplasare a planului (compusă dintr-o translație și o rotație)

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + x_0, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + y_0, \end{cases} \qquad (2)$$

unde x_0, y_0 sînt coordonatele originii O' față de sistemul Oxy, iar α este unghiul de rotație, ecuația (1) devine o ecuație x', y' tot de gradul al doilea:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \qquad (1'')$$

cu coeficienții a'_{ij}, care depind de a_{ij}, x_0, y_0 și α prin formule ușor de obținut.

Se pune întrebarea: putem folosi cei trei parametri x_0, y_0, α ai grupului deplasărilor din plan, pentru a anula unii din coeficienții a'_{ij} ai ecuației (1″), astfel încît ecuația curbei să ia o formă mai simplă?

Să raportăm, în primul rînd, conica dată în sistemul Oxy prin ecuația (1), la un alt sistem $O'x'y'$, obținut din primul prin translația

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0, \end{cases} \tag{2'}$$

adică prin deplasarea (2), în care $\alpha = 0$. Ținînd seama de (2') în (1), ecuația ia forma (1″), cu

$$a'_{11} = a_{11}, \quad a'_{12} = a_{12}, \quad a'_{22} = a_{22},$$

$$a'_{13} = f_{x_0} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \quad a'_{23} = f_{y_0} = a_{12}x_0 + a_{22}x_0 + a_{23}, \tag{3}$$

$$a'_{33} = f(x_0, y_0),$$

unde $$f_{x_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad f_{y_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

sînt semiderivatele parțiale ale funcției $f(x, y)$, calculate în punctul de coordonate x_0, y_0. Deci, printr-o translație, coeficienții ecuației unei conice se schimbă astfel: coeficienții termenilor de gradul al doilea în x', y' ai ecuației transformate coincid cu coeficienții corespunzători ai ecuației date (rămîn neschimbați), coeficienții termenilor de gradul întîi sînt liniari în x_0, y_0 iar termenul liber se obține înlocuind în primul membru al ecuației (1) pe x, y cu x_0, y_0.

Ne întrebăm dacă putem utiliza parametrii x_0, y_0 ai translațiilor (2'), astfel încît să anulăm unii coeficienți ai ecuației transformate; de exemplu, să determinăm cazurile cînd putem alege originea $O'(x_0, y_0)$ așa fel ca să avem

$$\begin{cases} f_{x_0} = 0, \\ f_{y_0} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Observăm că dacă sînt satisfăcute condițiile (4), deci $a'_{13} = a'_{23} = 0$, în noile coordonate x', y', ecuația curbei se scrie

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + f(x_0, y_0) = 0. \tag{5}$$

În acest caz, dacă punctul $P(x', y')$ se află pe curbă, punctul $Q(-x', -y')$ — simetricul său față de O' — se află de asemenea pe curbă. Deci, originea $O'(x' = 0, y' = 0)$ este un centru de simetrie al curbei.

Așadar se pune problema determinării cazurilor cînd curba (1) admite centru de simetrie.

Ținînd seama de formulele (3) și (4), rezultă că centrul de simetrie $\Omega(x_0, y_0)$ al curbei (1) trebuie să aibă drept coordonate o soluție a sistemului de ecuații

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases} \tag{4'}$$

Fie

$$M = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{Vmatrix}, \qquad M' = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix}$$

matricele atașată și extinsă ale sistemului (4'). De asemenea, fie determinantul

$$\mathrm{A} = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

numit *discriminantul* curbei. Vom nota prin

$$A_{ij} = A_{ji}, \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{6'}$$

complementii algebrici corespunzători elementelor a_{ij} din determinantul A.

Dacă $r(M) = 2$, deci dacă determinantul

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{6''}$$

este diferit de zero ($A_{33} = \det M$), sistemul (4') are o soluție unică. În acest caz, după regula lui Cramer, soluția unică a sistemului (4') este

$$x_0 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad y_0 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{A_{23}}{A_{33}}. \tag{4''}$$

Deci, curba (1) are, dacă $A_{33} \neq 0$, un centru de simetrie unic Ω, la distanță finită de coordonate

$$\frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad \frac{A_{23}}{A_{33}}, \tag{4'''}$$

care se numește *centrul conicei*, coordonatele carteziene omogene ale centrului fiind

$$A_{13}, \ A_{23}, \ A_{33}. \tag{4^{IV}}$$

Acest fapt justifică denumirea de *conică cu centru unic la distanță finită* — mai simplu *conică cu centru* — dată conicei (1), în cazul cînd $A_{33} \neq 0$.

Dacă $r(M) = 1$, deci dacă $A_{33} = 0$, avem de considerat două cazuri, după cum $r(M') = 2$ sau $r(M') = 1$. În primul caz, deci cînd $r(M) = 1$, $r(M') = 2$, sistemul (4') este incompatibil: nu există nici un punct la distanță finită, ale cărui coordonate să constituie o soluție a sistemului (4'); există însă *unul* la infinit, îndeplinind această condiție. În adevăr, dacă trecem în coordonate omogene, sistemul (4') se scrie

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases}$$

Deoarece $r(M') = 2$, acest sistem este un sistem de două ecuații liniare omogene, independente în trei variabile; deci, sistemul admite o infinitate de soluții proporționale cu determinanții matricei M':

$$\frac{x_1}{A_{13}} = \frac{x_2}{A_{23}} = \frac{x_3}{A_{33}}.$$

Așadar, în cazul cînd $A_{33} = 0$, iar matricei M' este de rangul doi, centrul curbei (1) este unic însă aruncat la infinit, avînd coordonatele omogene

$$(A_{13},\ A_{23},\ 0). \tag{4^V}$$

În al doilea caz, cînd $r(M) = r(M') = 1$, sistemul (4') este compatibil nedeterminat, admițînd ∞^1 de soluții*. Conica (1) are o infinitate de centre aflate pe o dreaptă. Dacă $A_{33} = 0$, *conica* (1) *este fără centru unic la distanță finită*, mai simplu: *conică fără centru*.

Conice de centru. Dacă conica (1) este cu centru, cînd $A_{33} \neq 0$, putem raporta conica la un sistem de axe $O'x'y'$, obținut prin translație din sistemul Oxy, O' fiind centrul conicei. Efectuînd translația (2'), unde x_0, y_0 sînt coordonatele (4'') ale centrului Ω al conicei, ecuația conicei ia forma (5).

Rămîne să calculăm termenul liber din (5). O cale este indicată de însăși expresia termenului liber: se înlocuiește x și y în (1) prin coordonatele x_0, y_0 ale centrului conicei, date de (4''). Însă observăm că $f(x_0, y_0)$ poate fi scris astfel

$$f(x_0, y_0) = x_0(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + y_0(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) + \\ + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}. \tag{3'}$$

Cum x_0, y_0 este soluția (4'') a sistemului (4'), avem $f(x_0, y_0) = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = \frac{1}{A_{33}}(a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33})$,

adică

$$f(x_0, y_0) = \frac{A}{A_{33}}. \tag{7}$$

Avem deci

Teorema. Dacă conica (1) este cu centru unic la distanță finită, cînd $A_{33} \neq 0$, alegînd acest punct ca origine a axelor, ecuația conicei ia forma

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0. \tag{8}$$

Ecuația (8) se mai numește **ecuația conicei redusă la centru.**

Să facem acum o rotație de axe:

$$\begin{cases} x' = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \\ y' = X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \end{cases} \tag{9}$$

* Simbolul ∞^p indică faptul că soluțiile depind de p parametri.

Atunci, ecuația (8) se scrie:

$$a_{11}(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)^2 + 2a_{12}(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + \\ + a_{22}(X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 + a'_{33} = 0$$

sau

$$b_{11}X^2 + 2b_{12}XY + b_{22}Y^2 + b_{33} = 0, \tag{10}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} b_{11} &= a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha, \\ b_{12} &= -(a_{11} - a_{22})\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha), \\ b_{22} &= a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha, \\ b_{13} &= b_{23} = 0, \quad b_{33} = \frac{A}{A_{33}}. \end{aligned}\right\} \tag{10'}$$

Observăm că putem alege unghiul de rotație α, astfel ca să avem $b_{12} = 0$, ceea ce înseamnă că α trebuie să fie soluție a ecuației

$$-(a_{11} - a_{22})\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0,$$

care se mai scrie

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}. \tag{11}$$

Presupunînd că în ecuația (10) este satisfăcută condiția $b_{12} = 0$, rezultă că ecuația conicei se reduce la forma canonică

$$b_{11}X^2 + b_{22}Y^2 + b_{33} = 0. \tag{12}$$

Observăm că dacă $P(X, Y)$ este un punct pe conică, atunci și punctele $Q(X, -Y)$, $R(-X, Y)$ — simetricele lui P față de $O'X$, respectiv $O'Y$ — sînt pe conică. Deci, axele de coordonate $O'X$, $O'Y$ sînt axele de simetrie ale conicei și se numesc *axele conicei*.

Prin urmare, avem

Teoremă. Dacă o conică este cu centru unic la distanță finită, printr-o translație și o rotație de axe, putem reduce ecuația conicei la forma canonică (12), luînd centrul conicei ca origine a axelor de coordonate, iar axele (de simetrie) ca axe de coordonate, coeficienții $b_{ii}(i = 1, 2, 3)$ fiind dați de formulele (10'), α fiind soluția ecuației (11).

În ecuația (12) coeficientul

$$b_{33} = f(x_0, y_0) = \frac{A}{A_{33}} \tag{10''}$$

poate fi diferit de zero sau nu. Dacă $b_{33} \neq 0$, după semnele coeficienților b_{11}, b_{22}, b_{33}, curba este o elipsă (reală sau imaginară) sau o hiperbolă; deci, curba (1) este o *conică ireductibilă* cu centru. Dacă $b_{33} = 0$, înseamnă că $f(x_0, y_0) = 0$, deci centrul se găsește pe conică. Atunci, după cum rezultă din (12), conica este constituită din două drepte (reale sau imaginare), care

se intersectează în centrul conicei, axele conicei fiind bisectoarele unghiurilor formate de cele două drepte. Deci, în acest caz, conica este *degenerată*. Din (10″) rezultă că dacă centrul se găsește pe conică, discriminantul A al conicei trebuie să fie nul. Reciproca se demonstrează imediat. În adevăr, dacă determinantul A este nul, din (6) rezultă că sistemul format din ecuațiile (4′) și ecuația

$$a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = 0$$

este compatibil și, ținînd seama de (3′), rezultă $f(x_0, y_0) = 0$; centrul se găsește pe conică. Avem deci

Teoremă. O conică cu centru este degenerată, dacă și numai dacă discriminantul ei este nul.

Reducerea — cu ajutorul deplasărilor — la forma canonică (12) se face, în general, într-un singur fel; există deci o singură deplasare, care aduce ecuația (1) la forma canonică (12), abstracție făcînd de cazul cînd avem $b_{11} = b_{22}$. În acest caz, curba (1) este un cerc (imaginar, real sau de rază nulă) și orice rotație păstrează forma canonică a ecuației cercului. Deci, cercul

$$x^2 + y^2 + a = 0$$

este singura curbă algebrică de gradul al doilea, care admite o transformare în ea însăși. În adevăr, pentru ca ecuația (1) de gradul al doilea să fie un cerc, trebuie ca

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0.$$

Dacă aceste condiții sînt îndeplinite, atunci ecuația $b_{12} = 0$ este satisfăcută pentru orice α. Deci, în cazul cercului, orice pereche de diametrii ortogonali ai săi este o pereche de axe de simetrie (cum — geometric — este evident).

Cunoscînd poziția centrului, coeficienții unghiulari ai axelor și mărimile acestora, putem să construim cu ușurință conica cu centru.

În adevăr, centrul O' este punctul ale cărui coordonate (4″) constituie soluția sistemului (4′). Unghiul 2α este o soluție a ecuației (11), cuprinsă între 0 și π. Practic putem găsi astfel valoarea lui α: în sistemul $O'x'y'$ construim dreapta care trece prin O', de coeficient unghiular $m = \operatorname{tg} 2\alpha$. Bisectoarele unghiului 2α — format de axa $O'x'$ cu dreapta $y' = x' \operatorname{tg} 2\alpha$ — sînt $O'X$, $O'Y$, adică axele conicei considerate.

Rămîne să determinăm mărimile axelor. Însă mărimile axelor conice cu centru sînt determinate, așa cum rezultă din (12), dacă în afară de $b_{33} = \frac{A}{A_{33}}$ se cunosc și coeficienții b_{11} și b_{22}. Acești coeficienți sînt dați de relațiile (10′), unghiul α satisfăcînd ecuația (11). Ținînd seama că

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},$$

ecuația (11) se mai scrie

$$a_{12} \operatorname{tg}^2\alpha + (a_{11} - a_{22}) \operatorname{tg}\alpha - a_{12} = 0. \qquad (11')$$

Cum unghiul 2α este cuprins 0 și π, vom lua pentru unghiul α valoarea cuprinsă între 0 și $\frac{\pi}{2}$, care verifică ecuația (11'); deci vom alege acea soluție a ecuației (11'), pentru care $\operatorname{tg}\alpha > 0$. Deoarece

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

(întrucît $\operatorname{tg}\alpha > 0$), putem calcula coeficienții b_{11} și b_{22} cu ajutorul formulelor (10').

Conice fără centru. Dacă conica (1) este fără centru (unic la distanță finită), cînd $A_{33} = 0$, vom obține ușor forma ei canonică, efectuînd întîi o rotație și apoi o translație.

Observăm că din condiția $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, rezultă că cel puțin unul din coeficienții a_{11}, a_{22} este diferit de zero, deoarece, dacă unul din ei este nul, atunci și a_{12} este nul.

Rezultă de asemenea că ansamblul termenilor de gradul al doilea în ecuația (1) a curbei formează un pătrat perfect. În adevăr, să presupunem că a_{11} și a_{22} sînt diferiți de zero. Dacă $a_{11} \neq 0$ (putem presupune totdeauna $a_{11} > 0$), din $A_{33} = 0$ obținem

$$a_{22} = \frac{a_{12}^2}{a_{11}},$$

încît ecuația (1) a conicei se scrie

$$\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x + a_{12}y)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{13}$$

punîndu-se în evidență faptul că grupul termenilor de gradul al doilea formează un pătrat perfect.

Să determinăm rotația

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{cases} \tag{14}$$

astfel încît ecuația transformată a conicei (13) să fie mai simplă. Ținînd seama de (14) în (13), obținem

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \tag{13'}$$

unde

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha)^2, \\
a'_{12} &= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha)(-a_{11}\sin\alpha + a_{12}\cos\alpha), \\
a'_{22} &= \frac{1}{a_{11}}(-a_{11}\sin\alpha + a_{12}\cos\alpha)^2, \\
a'_{13} &= a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha, \\
a'_{23} &= -a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha, \\
a'_{33} &= a_{33}.
\end{aligned} \tag{13''}$$

Putem alege unghiul de rotație α — cuprins între 0 și π — astfel încît a'_{11} să fie nul, ceea ce revine a alege pe α soluție a ecuației

$$a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0,$$

care se mai scrie

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}}. \tag{15}$$

Relațiile (13″) ne arată că dacă $a'_{11} = 0$, atunci și $a'_{12} = 0$. Ceilalți coeficienți a'_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ se calculează ținînd seama de (15). Să calculăm, de exemplu, pe a'_{13}. Avem

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{-a_{11}}{\pm\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{a_{12}}{\pm\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}}.$$

Presupunînd $a_{11} > 0$ și α cuprins între 0 și π, deducem

$$\sin\alpha = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{-a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}}, \tag{15'}$$

încît din (13″) obținem

$$a'_{13} = a_{13}\cdot\frac{-a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}} + a_{23}\cdot\frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}} = \frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}} = \frac{-A_{33}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}}. \tag{13‴}$$

Deci, prin rotația (14), unde unghiul α este soluție a ecuației (15), ecuația (13) devine

$$a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \tag{16}$$

coeficienții a'_{ij} fiind dați de relațiile (13″). Pe de altă parte, observăm că

$$A = -\frac{A_{33}^2}{a_{11}}. \tag{17}$$

Sînt de considerat două cazuri, după cum $A \neq 0$ sau $A = 0$.

Dacă $A \neq 0$, din (13‴) și (17) rezultă $a'_{13} \neq 0$.

Printr-o translație

$$\begin{cases} x' = X + x'_0 \\ y' = Y + y'_0 \end{cases} \tag{18}$$

putem reduce la o formă și mai simplă ecuația (16) a conicei fără centru. În adevăr, efectuînd calculele, obținem

$$b_{22}Y^2 + 2b_{13}X + 2b_{23}Y + b_{33} = 0, \tag{16'}$$

unde

$$b_{11} = b_{12} = 0, \quad b_{22} = a'_{22},$$
$$b_{13} = a'_{13}, \quad b_{23} = a'_{22}y'_0 + a'_{23}, \tag{16''}$$
$$b_{33} = a'_{22}y'^2_0 + 2a'_{13}x'_0 + 2a'_{23}y'_0 + a'_{33}.$$

Parametrii x'_0, y'_0 ai translației (18) pot fi determinați din condițiile

$$\begin{cases} b_{23} = 0 \\ b_{33} = 0 \end{cases}, \text{ adică } \begin{cases} a'_{22}y'_0 + a'_{23} = 0 \\ (a'_{22}y'_0 + a'_{23})\,y'_0 + 2a'_{13}x'_0 + a'_{23}y'_0 + a'_{33} = 0, \end{cases}$$

reprezentînd condițiile ca originea să aparțină conicei și axa să fie tangentă în origine. Deci, x'_0, y'_0 vor fi soluțiile sistemului

$$\begin{cases} a'_{22}y'_0 + a'_{23} = 0, \\ 2a'_{13}x'_0 + a'_{23}y'_0 + a'_{33} = 0, \end{cases}$$

de unde

$$x'_0 = -\frac{a'_{11}}{2a'_{13}}, \quad y'_0 = -\frac{a'_{23}}{a'_{22}}. \tag{18'}$$

Deci, cu ajutorul translației (18), (18'), ecuația (16) ia forma canonică

$$b_{22}Y^2 + 2b_{13}X = 0, \tag{19}$$

coeficienții b_{22} și b_{13} fiind dați de relațiile (16''). Notînd

$$p = -\frac{b_{13}}{b_{22}}, \tag{19'}$$

ecuația (19) se scrie

$$Y^2 = 2pX \tag{19''}$$

și reprezintă ecuația parabolei raportată la axă și tangentă în vîrf, p fiind parametrul parabolei.

Rezultă că în sistemul $Ox'y'$, coordonatele x'_0, y'_0 — date de (18') — sînt coordonatele vîrfului parabolei.

Dacă $A = 0$, din (13''') și (17) rezultă $a'_{13} = 0$. În acest caz, ecuația conicei se scrie

$$a'_{22}y'^2 + 2a'_{33}y' + a'_{33} = 0 \tag{20}$$

și reprezintă două drepte paralele cu axa Ox'; deci, în sistemul Oxy, dreptele sînt paralele cu direcția $-\frac{a_{11}}{a_{12}}$. Prin translația

$$\begin{cases} x' = X, \\ y' = Y + a, \end{cases}$$

ecuația (20) se scrie

$$b_{11}Y^2 + 2b_{23}Y + b_{33} = 0,$$

unde

$$b_{22} = a'_{22}, \quad b_{23} = a'_{22}a + a'_{23}, \quad b_{33} = a'_{22}a^2 + 2a'_{23}a + a'_{33}.$$

Impunînd condiția

$$b_{23} = 0, \text{ deci } a = -\frac{a'_{33}}{a'_{23}},$$

ecuația conicei ia forma canonică

$$b_{22}Y^2 + b_{33} = 0. \tag{20'}$$

După semnele coeficienților b_{22}, b_{33}, ecuația (20') reprezintă *două drepte paralele imaginare, reale (distincte) sau confundate.*

În acest caz, ecuațiile (4) se reduc la ecuația unică

$$Y = 0.$$

Conica de ecuație (20') are o infinitate de centre, toate punctele axei OX. Rezultă deci

Propoziție. O conică fără centru unic la distanță finită degenerează într-o pereche de drepte paralele dacă $A = 0$, dreptele fiind imaginare, reale distincte sau confundate.

Asociind acest rezultat cu cel obținut pentru conicele cu centru unic la distanță finită, putem enunța

Teoremă. Fiind dată ecuația (1), conica reprezentată de această ecuație este degenerată în două drepte, dacă și numai dacă discriminantul A este nul.

În ceea ce privește conicele fără centru avem

Teoremă. O conică fără centru unic la distanță finită ($A_{33} = 0$) se poate reduce la forma canonică (19″) cînd reprezintă o parabolă și la forma canonică (20'), dacă este formată din două drepte paralele.

Reducerea ecuației (13) la aceste forme canonice se face într-un singur fel: există deci o singură deplasare, care transformă ecuația (13) într-una din formele canonice (19″), (20').

Cunoscînd direcția axei parabolei, parametrul și vîrful ei, putem să construim cu ușurință parabola. În adevăr, direcția axei parabolei este dată de relația (15), unghiul α fiind cuprins între 0 și π.

Practic, procedăm astfel: în sistemul Oxy construim dreapta care trece prin O și are coeficientul unghiular $m = \operatorname{tg}\alpha$. Această dreaptă este axa Ox', iar perpendiculara pe ea în origine este axa Oy'.

Rămîne să determinăm vîrful parabolei. În sistemul $Ox'y'$, punctul V avînd coordonatele (18') este vîrful parabolei și este luat ca origine O' pentru sistemul $O'XY$, obținut prin translația (18). Parametrul parabolei este dat de relația (19').

Vîrful V se poate obține și altfel, coordonatele lui fiind date chiar în sistemul Oxy, dacă ținem seama că, pe de o parte, ecuația canonică (19″) a parabolei este obținută dacă parabola este raportată la axă și tangenta în vîrf, iar

pe de altă parte, direcția axei parabolei este dată de relația (15). În adevăr, axa $O'Y$ ($O' \equiv V$) este de forma

$$y = \frac{a_{12}}{a_{11}} x + \lambda,$$

parametrul λ determinîndu-se din condiția că axa $O'Y$ este tangentă la parabola dată. Obținem apoi coordonatele punctului de contact, care sînt chiar coordonatele vîrfului, ele fiind date în sistemul Oxy.

§ 2. INVARIANȚI ORTOGONALI

Se numesc *invarianți ortogonali* ai unei conice acele expresii formate cu coeficienții ecuației conicei care păstrează aceeași valoare la o deplasare în plan (transformarea ortogonală a axelor de coordonate), primul membru al ecuației fiind considerat un invariant al problemei.

Vom arăta că, fiind dată o conică (1), îi putem asocia trei invarianți ortogonali

$$I = a_{11} + a_{22}, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad A = |\, a_{ij} \,|, \qquad (21)$$

unul liniar, al doilea pătratic și al treilea cubic în coeficienții a_{ij} ai ecuației conicei.

Din §1 știm că prin translația (2'), ecuația (1) devine (1''), cu coeficienții a'_{ij} dați de (3). Deoarece fiecare din coeficienții a_{11}, a_{12}, a_{22} este invariant printr-o translație de axe, atunci avem

$$I' = a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22} = I, \quad A'_{33} = a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = A_{33}.$$

Deci, expresiile I și A_{33} sînt invarianți la translația de axe.

Observăm apoi că dacă a'_{11}, a'_{12}, a'_{22} sînt coeficienții ecuației conice în noul sistem de axe $Ox'y'$, obținut din sistemul Oxy printr-o rotație de axe ortogonale [a se vedea și formulele (10')], avem

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

adică ansamblul termenilor de gradul doi din ecuația conicei se transformă în ansamblul termenilor de același grad din ecuația transformată. Pe de altă parte, distanțele se păstrează printr-o rotație de axe ortogonale, adică

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2,$$

cum, de altfel, se vede ușor, ținînd seama de rotația (14).

Înmulțind ultima relație cu un factor ρ — arbitrar — și scăzînd-o din precedenta, membru cu membru, obținem egalitatea

$$(a'_{11} - \rho)x'^2 + 2a'_{12}x'y' + (a'_{22} - \rho)y'^2 = (a_{11} - \rho)x^2 + 2a_{12}xy + (a_{22} - \rho)y^2,$$

care trebuie să fie statisfăcută de orice valoare a lui ρ. În particular, această egalitate este satisfăcută și de acele valori ale lui ρ, pentru care primul ei membru, deci și al doilea, este un pătrat perfect; aceasta are loc dacă

$$\begin{vmatrix} a'_{11} - \rho & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Aceste ecuații în ρ, care se mai pot scrie sub forma

$$\rho^2 - I'\rho + A'_{33} = 0, \quad \rho^2 - I\rho + A_{33} = 0,$$

au aceleași rădăcini; avem deci

$$I' = I, \quad A'_{33} = A_{33}.$$

Așadar, expresiile I și A_{33} sînt *invarianți la rotația axelor*. Cum aceste expresii sînt invarianți și la translația axelor, rezultă că sînt invarianți față de transformările ortogonale ale axelor de coordonate. Deci, I și A_{33} sînt doi *invarianți ortogonali*.

Să demonstrăm acum că și discriminantul A al conicei este un invariant ortogonal.

Pentru aceasta să observăm că în coordonate omogene, ecuația conicei ia forma (1'), iar o deplasare în plan se scrie (v. cap. IV, § 3).

$$x_\alpha = \Omega_{\alpha\beta} x'_\beta, \qquad (\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, 3),$$

unde

$$\Omega_{ik}\,\Omega_{jk} = \delta_{ij}, \quad \Delta = |\,\Omega_{ij}\,| = \pm 1, \qquad (i, j = 1, 2)$$

$$\Omega_{13} = x_0, \quad \Omega_{23} = y_0, \quad \Omega_{31} = \Omega_{32} = 0, \quad \Omega_{33} = 1,$$

iar

$$\Omega = |\,\Omega_{\alpha\beta}\,| = |\,\Omega_{ij}\,| = \Delta.$$

Printr-o deplasare, ecuația conicei (1') devine

$$a_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\delta}x'_\gamma x'_\delta = 0;$$

deci, coeficienții conicei se transformă după legea

$$a'_{\gamma\delta} = a_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\delta}.$$

Dacă $A' = |\,a'_{\gamma\delta}\,|$ și $A = |\,a_{\alpha\beta}\,|$, din legea de transformare a coeficienților conicei obținem $A' = A\Omega^2$. Cum $\Omega = \pm 1$, rezultă că avem $A' = A$; adică discriminantul A al conicei este un invariant ortogonal.

Avem deci

Teoremă. Fiind dată o conică de ecuație (1), expresiile (21) formate cu coeficienții ecuației conicei sînt invarianți ortogonali.

În afară de invarianții ortogonali (21) se poate introduce următorul *semiinvariant ortogonal*

$$K = A_{11} + A_{22}, \qquad (21')$$

înțelegînd prin semiinvarianți ortogonali acele expresii formate cu coeficienții conicei, care rămîn invariante *numai față de rotații* de axe ortogonale. Pentru a demonstra invarianța lui K față de o rotație, să considerăm ecuația

$$f(x, y) - \lambda(x^2 + y^2) = 0,$$

care, după efectuarea rotației, devine

$$f(x', y') - \lambda(x'^2 + y'^2) = 0.$$

Aplicînd acestor ecuații invarianța discriminantului, obținem

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22}-\lambda & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix},$$

care se mai scrie

$$a_{33}\lambda^2 - K\lambda + A = a'_{33}\,\lambda^2 - K'\lambda + A'.$$

Deoarece printr-o rotație avem $a'_{33} = a_{33}$, $A' = A$, rezultă

$$K' = K,$$

adică expresia (21') este un semiinvariant. Relativ la semiinvariantul K putem enunța

Teoremă. Dacă o conică fără centru (unic la distanță finită) este degenerată, K este un invariant ortogonal.

În adevăr, printr-o rotație, ecuația unei conice fără centru poate fi adusă la forma

$$a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

dacă conica este degenerată. În acest caz avem $K = a_{22}a_{33} - a_{23}^2$.

Prin translația

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0, \end{cases}$$

ecuația conicei date se scrie

$$a_{22}y'^2 + 2(a_{22}y_0 + a_{23})y' + a_{22}y_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0,$$

iar

$$K' = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{22}y_0 + a_{23} \\ a_{22}y_0 + a_{23} & a_{22}y_0^2 + 2a_{23}y_0 + a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = K.$$

Invarianții ortogonali I, A_{33} și A caracterizează, abstracție făcînd de o transformare ortogonală, primul membru al ecuației unei conice. Aceasta înseamnă că, fiind date două ecuații algebrice de gradul doi în două variabile x, y:

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

$$g(x, y) = a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0,$$

dacă aceste ecuații au invarianții ortogonali egali, ele se pot transforma una în alta printr-o deplasare.

Să folosim această proprietate, pentru ca fără a mai efectua o transformare ortogonală, deci numai cu ajutorul invarianților ortogonali, să reducem la forme canonice ecuația (1) a unei conice date.

Să presupunem că ecuația (1) reprezintă *o conică cu centru unic la distanță finită*, deci $A_{33} \neq 0$. Invarianții ortogonali ai ecuației (1) sînt:

$$\begin{aligned} I &= a_{11} + a_{22}, \\ A_{33} &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0, \\ A &= |\, a_{ij} \,|. \end{aligned} \tag{22}$$

Știm că, în acest caz, printr-o transformare ortogonală, ecuația (1) se reduce la forma canonică (12). Invarianții ortogonali ai ecuației (12) sînt dați de formulele

$$\begin{aligned} I' &= b_{11} + b_{22}, \\ A'_{33} &= b_{11}b_{22}, \\ A' &= b_{11}b_{22}b_{33}. \end{aligned} \tag{22'}$$

Însă, ecuațiile (1) și (12) transformîndu-se una în alta printr-o deplasare, invarianții lor ortogonali (22) și (22') sînt respectiv egali (conform definiției invarianților ortogonali):

$$I = I', \quad A_{33} = A'_{33}, \quad A = A'. \tag{22''}$$

Fiind dată conica (1), invarianții I, A_{33}, A au valori conoscute, încît relațiile (22'') permit să determinăm coeficienții b_{11}, b_{22}, b_{33} ai ecuației reduse (12). În adevăr, ținînd seama de (22) și (22') în (22''), rezultă sistemul

$$b_{11} + b_{22} = I, \quad b_{11}b_{22} = A_{33}, \quad b_{11}b_{22}b_{33} = A, \tag{23}$$

format din trei ecuații în necunoscutele b_{11}, b_{22}, b_{33}. Primele două relații arată că b_{11} și b_{22} sînt rădăcinile ecuației în ρ:

$$\rho^2 - I\rho + A_{33} = 0,$$

valorile lor fiind

$$b_{11} = \frac{I + \varepsilon\sqrt{I^2 - 4A_{33}}}{2}, \quad b_{22} = \frac{I - \varepsilon\sqrt{I^2 - 4A_{33}}}{2}, \tag{23'}$$

unde $\varepsilon = \pm 1$, după cum $a_{12} \gtrless 0$. Semnul se determină din următoarele considerații: din (10') avem

$$\begin{aligned} b_{11} + b_{22} &= a_{11} + a_{22}, \\ b_{11} - b_{22} &= (a_{11} - a_{22}) \cos 2\alpha + 2a_{12} \sin 2\alpha, \end{aligned}$$

iar în virtutea relației (11)

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{2a_{12}}{\varepsilon\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}, \\ \cos 2\alpha &= \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{a_{11} - a_{22}}{\varepsilon\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}, \end{aligned}$$

unde $\varepsilon = \pm 1$, după cum $a_{12} \gtrless = 0$, deoarece 2α este (prin ipoteză) cuprins între 0 și π (sin $2\alpha > 0$), încît

$$b_{11} - b_{22} = \frac{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}{\varepsilon \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}} = \varepsilon \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}.$$

Dacă sub radical adunăm și scădem $2a_{11}a_{22}$ și dacă ținem seama de (21), obținem

$b_{11} + b_{22} = I$, $b_{11} - b_{22} = \varepsilon \sqrt{I^2 - 4A_{33}}$ cu $\varepsilon = \pm 1$, după cum $a_{12} \gtrless 0$, de unde rezultă (23'). Ținînd seama de-a doua relație (23) în cea de-a treia, rezultă

$$b_{33} = \frac{A}{A_{33}}. \tag{23''}$$

Deci, fiind dată ecuația (1) a unei conice (cu centru unic la distanță finită), ea poate fi adusă la forma canonică (12), coeficienții b_{11}, b_{22}, b_{33} fiind determinați de relațiile (23), adică b_{11}, b_{22} au valorile date de (23') și sînt rădăcinile ecuației în ρ, iar b_{33} este dat de relația (23'').

Dacă $A_{33} > 0$, după cum rezultă din (23), coeficienții b_{11} și b_{22} sînt de același semn, semnul fiind același cu al invariantului I.

Cînd $A \neq 0$ (deci $b_{33} \neq 0$), avem de considerat două cazuri, două cum A este de același semn cu I (deci, cu b_{11} și b_{22}) sau nu este de același semn cu I. În adevăr, ținînd seama de (23''), ecuația redusă (12) se scrie:

$$\frac{X^2}{-\frac{A}{b_{11}A_{33}}} + \frac{Y^2}{-\frac{A}{b_{22}A_{33}}} - 1 = 0. \tag{24}$$

În primul caz (A este de același semn cu 1) avem $AI > 0$, și cum $A_{33} > 0$, curba (24) este *o conică imaginară* (neavînd nici un punct real).

Punînd

$$a^2 = \frac{A}{b_{11}A_{33}}, \quad b^2 = \frac{A}{b_{22}A_{33}},$$

ecuația (24) se scrie

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0. \tag{24'}$$

În al doilea caz (A nu este de același semn cu I) avem $AI < 0$ și cum $A_{33} > 0$, putem pune

$$a^2 = -\frac{A}{b_{11}A_{33}}, \quad b^2 = -\frac{A}{b_{22}A_{33}},$$

încît ecuația (24) se scrie

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{24''}$$

și este *ecuația elipsei* raportată la centru și axe, drept axe de coordonate. Se mai spune că ecuația (24'') este ecuația redusă la forma canonică a elipsei.

Cînd $A = 0$ (deci $b_{33} = 0$), și cum $A_{33} > 0$ (deci b_{11} și b_{22} sînt de același semn), putem pune

$$m^2 = \frac{b_{11}}{b_{22}},$$

încît ecuația (12) se scrie

$$Y^2 + m^2 X^2 = 0 \qquad (24'')$$

și reprezintă *două drepte secante imaginar conjugate*, care trec prin origine (singurul punct real al conicei).

Deoarece printre astfel de conice sînt elipse, se spune că *o conică cu centru* ($A_{33} \neq 0$) *pentru care invariantul* $A_{33} > 0$, *este de gen eliptic.*

Dacă $A_{33} < 0$, după cum rezultă din (23), coeficienții b_{11}, b_{22} sînt de semne contrare.

Cînd $A \neq 0$ (deci $b_{33} \neq 0$), schimbînd eventual axele X, Y între ele, putem presupune că

$$a^2 = -\frac{A}{b_{11}A_{33}}, \quad -b^2 = -\frac{A}{b_{22}A_{33}},$$

încît ecuația (24) se scrie

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (24^{IV})$$

și reprezintă o *hiperbolă* raportată la centru și axe, axa OX fiind axa transversă; spunem că (24^{IV}) este ecuația redusă la forma canonică a hiperbolei.

Cînd $A = 0$ (deci $b_{33} = 0$) și cum $A_{33} < 0$ (deci b_{11} și b_{22} nu sînt de același semn), putem lua

$$-m^2 = \frac{b_{11}}{b_{22}},$$

încît ecuația (12) se scrie

$$Y^2 - m^2X^2 = 0 \qquad (24^{V})$$

și conica degenerează în *două drepte secante reale.*

Deoarece printre astfel de conice sînt hiperbole, se spune că *o conică cu centru* ($A_{33} \neq 0$) *pentru care invariantul* $A_{33} < 0$, *este de gen hiperbolic.*

Să presupunem acum că *ecuația (1) reprezintă o conică fără centru unic la distanță finită*, deci $A_{33} = 0$. Invarianții ortogonali ai conicei sînt:

$$I = a_{11} + a_{22},$$
$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \qquad (25)$$
$$A = |a_{ij}|.$$

Dacă $A \neq 0$ (conica este ireductibilă), știm că printr-o transformare ortogonală, ecuația (1) se reduce la forma canonică (19), deci invarianții ortogonali sînt dați de formulele

$$I' = b_{22}, \quad A'_{33} = 0, \quad A' = -b_{13}^2 b_{22}. \tag{25'}$$

Însă, printr-o transformare ortogonală ecuațiile (1) și (19) se transformă una în alta, iar invarianții lor ortogonali (25) și (25') sînt respectiv egali (conform definiției invarianților ortogonali); deci

$$I = I', \quad A = A' \tag{25''}$$

Aceste relații permit să determinăm coeficienții b_{22}, b_{13} ai ecuației (19). În adevăr, ținînd seama de (25) și (25') în (25''), rezultă

$$b_{22} = I, \quad -b_{13}^2 b_{22} = A, \tag{26}$$

invarianții I și A fiind cunoscuți, deoarece ecuația (1) este dată.

Rezultă

$$b_{22} = I, \quad b_{13} = -\varepsilon \sqrt{-\frac{A}{I}}, \tag{26'}$$

unde $\varepsilon = \pm 1$, după cum $A_{23} \gtrless 0$ sau dacă $A_{23} = 0$, după cum $A_{13} \gtrless 0$. Semnul se determină prin considerațiile următoare: din relația (17) rezultă că $A_{23} = \varepsilon \sqrt{-a_{11}A}$ cu $\varepsilon = \pm 1$, după cum $A_{23} \gtrless 0$. Atunci, dacă ținem seama în (16'') de (13'''), obținem $b_{13} = -\dfrac{\varepsilon \sqrt{-a_{11}A}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}$; de aici, ținînd seama că $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, rezultă ultima relație (26'). Deci, cu notația (19'), *ecuația parabolei ia forma canonică*

$$Y^2 = 2pX, \text{ cu } p = \varepsilon \sqrt{-\frac{A}{I^3}}. \tag{26''}$$

Cazul $A_{23} = 0$ are loc cînd parabola are axa paralelă cu axa absciselor, deci ecuația ei este de forma

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

În acest caz, presupunînd $a_{22} > 0$, avem

$$A = a_{13} A_{13} < 0, \quad p = -\frac{a_{13}}{a_{22}},$$

de unde

$$\text{semn } p = \text{semn } A_{13}.$$

Dacă $A = 0$ (conica este degenerată), semiinvariantul K devine invariant ortogonal. În acest caz, invarianții ortogonali ai ecuației (1) sînt:

$$I = a_{11} + a_{22}, \quad A_{33} = A = 0; \quad K = A_{11} + A_{22}.$$

Știm, pe de altă parte, că printr-o transformare ortogonală ecuația (1) a conicei ia forma (20'), invarianții ortogonali ai ecuației (20') fiind

$$I' = b_{22},\ A'_{33} = A' = 0,\ K' = b_{22}b_{33}.$$

Deoarece

$$I = I', \qquad K = K'$$

și ținînd seama că invarianții I și K sînt cunoscuți, ecuația (1) fiind dată, avem

$$b_{22} = I,\ b_{22}b_{33} = K,$$

de unde rezultă

$$b_{22} = I, \qquad b_{33} = \frac{K}{I}.$$

Deci, *ecuația curbei ia forma canonică*

$$Y^2 + \frac{K}{I^2} = 0 \tag{27}$$

și reprezintă *o pereche de drepte paralele reale distincte, imaginare sau confundate*, după cum $K \lessgtr 0$.

Deoarece printre astfel de conice sînt parabole, se spune că *o conică fără centru unic la distanță finită* ($A_{33} = 0$) *este de gen parabolic.*

Observăm că invarianții I, A_{33} și A (respectiv K) caracterizează — abstracție făcînd de o deplasare — primul membru al ecuației unei conice. De aceea, se zice că I, A_{33} și A (respectiv și K) constituie un *sistem complet de invarianți ortogonali*, pentru o ecuație algebrică de gradul doi, $f(x, y) = 0$. În tabelă rezumăm această discuție, indicînd totodată și criteriile necesare și suficiente, pentru ca o curbă algebrică de gradul al doilea să aparțină unui anumit tip.

Observăm că fiind dată o conică, coeficienții care determină ecuația conicei sînt definiți, abstracție făcînd de un factor de proporționalitate. Rezultă că la o înmulțire cu un factor k ($k \neq 0$) a coeficienților ecuației unei conice, I se înmulțește cu k, A_{33} cu k^2, K cu k^2, iar A cu k^3, deci pentru k negativ, A_{33} și K își păstrează semnul, pe cînd I și A, schimbă de semn.

Caracterul invariantiv pentru conică al expresiilor A_{33} și K este legat de interpretarea geometrică a invariantului A_{33} și a semiinvariantului K. Astfel, conica este de gen eliptic dacă $A_{33} > 0$, este de gen hiperbolic dacă $A_{33} < 0$ și de gen parabolic dacă $A_{33} = 0$. Două drepte paralele sînt reale (distincte), imaginare sau confundate, după cum $K \lessgtr 0$.

În ceea ce privește semnele invarianților I și A, ele nu au un caracter invariantiv pentru conică, însă produsul IA are un caracter invariantiv; de exemplu, elipsele sînt imaginare sau reale, după cum $IA > 0$ sau $IA < 0$. Însă un caracter invariantiv îl are anularea acestor invarianți. Astfel, dacă $A = 0$, conica degenerează în două drepte, și invers. Dacă invariantul $I = 0$, aceasta înseamnă că $a_{11} = -a_{22}$, deci a_{11} și a_{22} sînt de semne contrare și conica este o hiperbolă cu semiaxele egale, adică o hiperbolă echilateră, ecuația ei canonică scriindu-se

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Tabelă

	Genul	Natura	Denumirea conicei		Ecuația canonică	Semn coeficient
$A_{33} \neq 0$ conice cu centru (unic la distanță finită)	$A_{33} > 0$ gen eliptic	$A \neq 0$ ireductibile	elipse	$IA > 0$ imaginare	$b_{11}X^2 + b_{22}Y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0$	(+ +) +
				$IA < 0$ reale		(+ +) −
		$A = 0$ degenerate	două secante imaginare			(+ +)
	$A_{33} < 0$ gen hiperbolic	$A \neq 0$ ireductibile	hiperbole			(+ −) −
		$A = 0$ degenerate	două secante reale		$b_{11}b_{22} = \frac{I \pm \varepsilon\sqrt{I^2 - 4A_{33}}}{2}$	(+ −)
$A_{33} = 0$ conice fără centru (unic la distanță finită)	gen parabolic	$A \neq 0$ ireductibile	parabole		$Y^2 = 2pX,\ p = \varepsilon\sqrt{-\frac{A}{I^3}}$	
		$A = 0$ degenerate	două drepte paralele	$K > 0$ imaginare	$Y^2 + \frac{K}{I^2} = 0$	(+) +
				$K < 0$ reale (distincte)		(+) −
				$K = 0$ confundate		(+)

Rezultă că fiind date ecuațiile

$$f(x,y) = 0 \text{ și } g(x,y) = 0,$$

ele vor reprezenta aceeași conică, abstracție făcînd de o deplasare, dacă există un factor $k \neq 0$, astfel încît să avem

$$I' = kI,\ A'_{33} = k^2A_{33},\ A' = k^3A,\ (\text{resp. } K' = k^2K).$$

În adevăr, să presupunem că există un astfel de factor nenul. Atunci conicele $kf(x,y) = 0$ și $g(x,y) = 0$ au aceiași invarianți, încît se reduc una la alta printr-o

transformare ortogonală; deci, ecuațiile date reprezintă o aceeași conică. De aceea se spune că I, A_{33}, A (respectiv K) sînt *invarianții relativi* ai unei conice, față de deplasările din plan și față de înmulțirea cu un factor a coeficienților ecuației conicei.

Expresiile formate cu invarianții unei conice se numesc *invarianți absoluți*, dacă rămîn invariante față de înmulțirea cu un factor a coeficienților ecuației conicei. De exemplu, axele unei conice cu centru sînt invarianți absoluți. În adevăr, după cum rezultă din (24), semiaxele unei conice cu centru sînt

$$-\frac{A}{b_{11}A_{33}}, \qquad -\frac{A}{b_{22}A_{33}},$$

iar b_{11}, b_{22} sînt date de formulele (23'). În particular, semiaxa mare a unei elipse este

$$a^2 = -\frac{A}{\rho A_{33}}, \qquad \left(\rho = \frac{I - \sqrt{I^2 - 4A_{33}}}{2}\right).$$

De altfel, se știe că o conică cu centru este determinată de axele sale, abstracție făcînd de o deplasare; de unde rezultă că axele unei conice cu centru sînt invarianți absoluți.

Alt invariant absolut este parametrul p al parabolei. În adevăr, în formula (26'') intervine expresia $\frac{A}{I^3}$, care este un invariant absolut.

§ 3. INTERSECȚIA A DOUĂ CONICE

Fie

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

și

$$g(x, y) = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0$$

ecuațiile a două conice.

Coordonatele punctelor de intersecție ale acestor două conice vor fi soluții ale sistemului

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

de două ecuații de gradul al doilea în două variabile. Eliminantul acestor două ecuații este de gradul patru. Pentru a obține eliminantul sistemului, vom elimina una din cele două variabile, de exemplu pe y, din ecuațiile sistemului. Eliminarea se face ușor, multiplicînd prima ecuație cu b_{22}, iar a doua cu a_{22} și scăzînd ecuațiile parte cu parte, ceea ce ne permite să obținem pe y funcție de x, și înlocuind valoarea lui y astfel obținută într-una din ecuațiile celor două conice, de exemplu în ecuația $f(x,y) = 0$, rezultă o ecuație de gradul al patrulea în x, eliminantul celor două ecuații. Deci, cele două conice au, în general, patru puncte comune.

Aceste puncte pot fi:
a) distincte,
b) două confundate şi două distincte,
c) două cîte două confundate,
d) trei confundate şi unul distinct,
e) toate confundate.

Primul caz este cel general; în al doilea caz, conicele sînt tangente; în al treilea caz, conicele sînt bitangente; în al patrulea şi al cincilea caz, conicele se zic osculatoare cu punct de tangenţă triplu sau cvadruplu.

De asemenea, eliminantul poate să aibă rădăcini imaginare; deci punctele de intersecţie mai pot fi:
α) toate reale;
β) două reale şi două imaginare;
γ) toate imaginare.

În primul caz, conicele se intersectează în patru puncte reale; în al doilea caz, conicele se intersectează numai în două puncte reale; în al treilea caz, conicele nu sînt secante.

De asemenea, eliminantul celor două ecuaţii se poate reduce la o ecuaţie de grad mai mic decît patru. În cazul acesta, unul sau mai multe din punctele de intersecţie ale conicelor sînt aruncate la infinit.

În sfîrşit, se poate întîmpla ca eliminantul celor două ecuaţii să fie identic verificat. În acest caz, conicele au o infinitate de puncte comune, ceea ce se întîmplă numai dacă ele sînt degenerate şi au o dreaptă comună.

Rezultă astfel

Teorema. Două conice se intersectează, în general, în patru puncte.

§ 4. INTERSECŢIA UNEI CONICE CU O DREAPTĂ

Fie o conică dată (în coordonate carteziene omogene) prin ecuaţia

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{ij}x_ix_j = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{28}$$

De asemenea, fie dreapta determinată de punctele $P'(x_1', x_2', x_3')$ şi $P''(x_1'', x_2'', x_3'')$; un punct oarecare P al acestei drepte are coordonatele

$$x_i = hx_i' + x_i'', \tag{29}$$

unde h este o coordonată proiectivă neomogenă pe dreaptă. Problema intersecţiei unei drepte cu o conică se reduce, în geometria analitică, la rezolvarea sistemului format din ecuaţia conicei şi ecuaţia dreptei. Deci, intersecţia dreptei (29) cu conica (28) se reduce la găsirea soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} a_{ij}x_ix_j = 0, \\ x_i = hx_i' + x_i'' \end{cases}.$$

Ţinînd seama de ultimele trei ecuaţii ale acestui sistem în prima ecuaţie, obţinem eliminantul sistemului

$$a_{ij}(hx_i' + x_i'')(hx_j' + x_j'') = 0,$$

care reprezintă condiția ca P să se afle pe conică. Dezvoltînd, avem

$$h^2 a_{ij} x_i' x_j' + 2h a_{ij} x_i' x_j'' + a_{ij} x_i'' x_j'' = 0,$$

ceea ce ne dă o ecuație de gradul al doilea în h. În această ecuație, coeficientul lui h^2 și termenul liber:

$$f(x_1', x_2', x_3') = a_{ij} x_i' x_j' \quad \text{și} \quad f(x_1'', x_2'', x_3'') = a_{ij} x_i'' x_j'' ,$$

se obțin înlocuind în primul membru al ecuației conicei variabilele x_1, x_2, x_3 cu coordonatele x_1', x_2', x_3' și x_1'', x_2'', x_3'' ale punctelor P', respectiv P''.

În ceea ce privește coeficientul termenului în $2h$, el se scrie

$$f(x', x'') = a_{ij} x_i' x_j'' = a_{11} x_1' x_1'' + a_{12}(x_1' x_2'' + x_1'' x_2') + a_{22} x_2' x_2'' + \\ + a_{13}(x_1' x_3'' + x_1'' x_3') + a_{23}(x_2' x_3'' + x_2'' x_3') + a_{33} x_3' x_3'' \tag{30}$$

și se zice că este *forma dedublată* sau *forma polară* a polinomului $f(x_1, x_2, x_3)$ *. Observăm că derivatele parțiale ale lui $f(x_1, x_2, x_3)$ sînt

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(a_{ij} x_i x_j) = a_{ij} \delta_k^i x^j + a_{ij} x^i \delta_k^j = 2 a_{ki} x^i .$$

Să însemnăm semiderivatele parțiale ale lui f în raport cu x_1, x_2, x_3, respectiv cu

$$f_{x_i}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{ij} x_j = f_{x_i}, \tag{31}$$

adică

$$\left.\begin{aligned} f_{x_1} &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 , \\ f_{x_2} &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 , \\ f_{x_3} &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 . \end{aligned}\right\} \tag{31'}$$

În coordonate neomogene, relațiile (31') se scriu

$$\left.\begin{aligned} f_x &= a_{11} x + a_{12} y + a_{13} = f_x(x,y), \\ f_y &= a_{21} x + a_{22} y + a_{23} = f_y(x,y), \\ & a_{31} x + a_{32} y + a_{33} = f_3(x,y). \end{aligned}\right\} \tag{31''}$$

În ceea ce privește coeficientul termenului în $2h$, acesta se poate scrie

$$f(x'; x'') = x_i' f_{x_i''} = x_i'' f_{x_i'} , \tag{30'}$$

deoarece

$$a_{ij} x_i' x_j'' = x_i'(a_{ij} x_j'') = x_i' f_{x_i''} \quad \text{și} \quad a_{ij} x_i' x_j'' = x_j''(a_{ij} x_i') = x_j'' f_{x_j'} .$$

---

* În coordonate neomogene, forma dedublată a primului membru al ecuației conice se scrie

$$f(x'; x'') = a_{11} x' x'' + a_{12}(x' y'' + x'' y') + a_{22} y' y'' + a_{13}(x' + x'') + a_{23}(y' + y'') + a_{33}.$$

Deci, $f(x';x'')$ este o funcție simetrică în x' și x'', astfel că rezultatul este același dacă derivăm în punctul P' și semiderivatele parțiale le înmulțim respectiv cu x_1'', x_2'', x_3'' sau derivăm în punctul P'' și semiderivatele parțiale le înmulțim respectiv cu x_1', x_2', x_3'.

Valorile lui h corespunzătoare punctelor de intersecție ale dreptei (29) cu conica (28) satisfac deci ecuația

$$h^2f(x_2', x_2', x_3') + 2hf(x'; x'') + f(x_1'', x_2'', x_3'') = 0, \tag{32}$$

încît găsirea punctelor de intersecție ale dreptei $P'P''$ cu conica revine la rezolvarea ecuației (32) în h. Dreapta $P'P''$ intersectează deci conica (28) în două puncte:

$$Q_1(h_1x_1' + x_1'', h_1x_2' + x_2'', h_1x_3' + x_3''), \quad Q_2(h_2x_1' + x_2'', h_2x_2' + x_2'', h_2x_3' + x_3''),$$

unde h_1, h_2 sînt rădăcinile ecuației (32). Dacă ecuația (32) are rădăcini reale și distincte, înseamnă că dreapta $P'P''$ intersectează conica în două puncte reale și distincte. În acest caz, se spune că dreapta $P'P''$ este secantă conicei. Dacă ecuația (32) admite o rădăcină dublă, deci ecuația în h se reduce la un pătrat perfect, dreapta $P'P''$ este tangentă la conică. Dacă ecuația (32) are rădăcini imaginare, dreapta dată nu intersectează conica, adică nu are nici un punct real comun cu conica. În acest caz, spunem că dreapta $P'P''$ este exterioară conicei. Se mai poate întîmpla ca ecuația (32) să fie identic satisfăcută, adică să avem

$$f(x_1', x_2', x_3') = 0, \quad f(x'; x'') = 0, \quad f(x_1'', x_2'', x_3'') = 0.$$

În acest caz, dreapta $P'P''$ intersectează conica într-o infinitate de puncte; deci, conica (32) este degenerată în dreapta $P'P''$ și o alta. Așadar, în general, *o dreaptă intersectează o conică în două puncte* (reale — distincte sau confundate — sau imaginare). Din acest motiv, conicele se numesc și curbe de ordinul al doilea (noțiunea de ordin al curbei este legată de numărul punctelor ei de intersecție cu o dreaptă).

Aplicații. 1) **Asimptotele conicei.** Se numește *direcție asimptotică* a unei curbe o direcție astfel încît o dreaptă paralelă cu acea direcție intersectează curba într-un punct la infinit. Dreapta se zice că este *asimptotă*, dacă intersectează curba în două puncte confundate aruncate la infinit (adică este tangentă într-un punct de la infinit al curbei).

Fie dreapta

$$x_1 = h, \quad x_2 = mh + n, \quad x_3 = 1 \tag{33}$$

definită de punctele $P'(1, m, 0)$ și $P''(0, n, 1)$, adică de punctul de la infinit al dreptei de direcție m și de punctul de pe axa Oy corespunzător ordonatei la origine.

În coordonate neomogene ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = 1$), dreapta $P'P''$ are ecuația

$$y = mx + n. \tag{33'}$$

Coordonatele punctelor de intersecție ale conicei (28) cu dreapta (33) sînt date de (33), unde h este o rădăcină a ecuației (32), în care

$$f(x') = a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2, \quad f(x'') = a_{22}n^2 + 2a_{23}n + a_{33}, \qquad (32')$$
$$f(x'; x'') = nf_{x_2'} + f_{x_3'} = n(a_{12} + a_{22}m) + a_{13} + a_{23}m,$$

notîndu-se

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3).$$

Se știe că o ecuație de gradul al doilea în care coeficientul termenului de gradul doi tinde către zero, are o rădăcină care tinde către infinit. Dacă coeficienții termenului de gradul doi și al termenului de gradul întîi (ai unei ecuații de gradul al doilea) tind către zero, atunci ambele rădăcini tind către infinit.

Deci, direcția m este o direcție asimptotică, dacă una din rădăcinile ecuației (32) tinde către infinit; în acest caz avem

$$a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0. \qquad (34)$$

Rezultă că *o conică admite două direcții asimptotice*. După natura rădăcinilor ecuației (34), direcțiile asimptotice sînt imaginare, reale și distincte sau confundate. Observăm că ecuația (34) are rădăcini imaginare, reale și distincte sau confundate, după cum $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, $A_{33} < 0$ sau $A_{33} = 0$, conica (28) fiind respectiv de gen eliptic, hiperbolic sau de gen parabolic.

Dreapta (33) este o *asimptotă* a conicei (28), dacă ecuația (32) — cu coeficienții dați de relațiile (32') — are ambele rădăcini infinite; în acest caz avem

$$a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0, \quad n(a_{12} + a_{22}m) + a_{13} + a_{23}m = 0. \qquad (34')$$

Deci, fiind dată conica (28), sistemul (34') permite să se determine direcția m și ordonata la origine n ale asimptotei (33') a conicei date. Rezultă că asimptotele conicei (28) sînt date de ecuațiile

$$y = mx - \frac{a_{13} + a_{23}m}{a_{12} + a_{22}m}, \quad a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0.$$

Aceste ecuații pot fi scrise sub forma

$$a_{22}m^2x + (a_{12}x - a_{22}y - a_{23})m - a_{12}y - a_{13} = 0,$$
$$a_{22}m^2 + a_{12}m = -(a_{12}m + a_{11})$$

sau încă, dacă ținem seama în prima de a doua,

$$(a_{12}x + a_{22}y + a_{23})m + a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \quad a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0.$$

Deci, o asimptotă a conicei este dreapta de ecuație

$$f_x + mf_y = 0, \qquad (34'')$$

unde m este o soluție a ecuației (34). Rezultă că *o conică are două asimptote*, avînd ecuațiile de forma (34'') cu m o soluție a ecuației (34). Asimptotele sînt imaginare, dacă conica este de gen eliptic, reale dacă conica este de gen hiperbolic și confundate dacă conica este de gen parabolic.

În cazul parabolei ($A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$), după cum rezultă din ecuația (34), coeficientul unghiular al direcției asimptotice este

$$m = -\frac{a_{12}}{a_{22}}, \text{ deci } a_{12} + a_{22}m = 0.$$

Din ultima ecuație (34') rezultă $n \to \infty$, ceea ce arată că asimptota parabolei este aruncată la infinit. Așadar, numai hiperbola are două asimptote (reale).

Forma (34'') a ecuației asimptotei arată că asimptota trece prin punctul de intersecție al dreptelor

$$f_x = 0, \quad f_y = 0,$$

adică prin centrul conicei. Deci, *asimptotele sînt tangentele duse din centrul conicei la conică.*

Eliminînd pe m între ecuațiile (34) și (34''), se obține *ecuația globală*

$$a_{22}f_x^2 - 2a_{12}f_xf_y + a_{11}f_y^2 = 0 \tag{35}$$

a asimptotelor.

2) Intersecția conicei cu dreapta de la infinit. Să intersectăm conica (28) cu dreapta de la infinit $x_3 = 0$. Coordonatele punctelor de intersecție sînt soluțiile sistemului

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, \; x_3 = 0.$$

Însă prima ecuație reprezintă dreptele care trec prin origine și sînt paralele cu asimptotele conicei*. Deducem că *punctele de intersecție ale conicei cu dreapta de la infinit sînt punctele în care asimptotele conicei se intersectează cu dreapta de la infinit.*

§ 5. TANGENTE LA O CONICĂ

Fie (28) ecuația unei conice ireductibile. Considerînd fasciculul de drepte cu centrul în punctul $P'(x_1', x_2', x_3')$, o dreaptă din fascicul va fi definită de punctul fix $P'(x_1', x_2', x_3')$ și de unul variabil $P(x_1, x_2, x_3)$, ecuațiile parametrice ale dreptei $P'P$ fiind

$$X_i = hx_i' + x_i, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{37}$$

Punctul de coordonate (X_1, X_2, X_3) va fi pe conica (28), dacă h este o soluție a ecuației

$$h^2f(x') + 2hf(x'; x) + f(x) = 0. \tag{37'}$$

Dacă această ecuație în h are o rădăcină dublă, atunci dreapta $P'P$ intersectează conica în două puncte confundate, deci este tangentă la conică. Condiția ca ecuația în h să admită o rădăcină dublă este

$$[f(x'; x)]^2 - f(x') \cdot f(x) = 0. \tag{38}$$

* În coordonate neomogene, aceste drepte sînt date de ecuația

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0.$$

Ecuația (38) este o ecuație algebrică de gradul al doilea în variabilele x_1, x_2, x_3; deci, ecuația (38) reprezintă o conică, și anume conica degenerată în tangentele care se duc din punctul P' la conică.

Rezultă că *dintr-un punct P' se pot duce două tangente la o conică*, ecuația (38) fiind ecuația ansamblului celor două tangente.

Dacă punctul P' este pe conică, deci $f(x') = 0$, ecuația (38) reprezintă o dreaptă dublă, și anume *tangenta dusă prin P' la conică*. Ecuația tangentei în punctul P' la conică este

$$f(x'; x) \equiv x_1 f_{x_1'} + x_2 f_{x_2'} + x_3 f_{x_3'} = 0. \tag{38'}$$

În coordonate neomogene, ecuația tangentei la conică în punctul $P_0(x_0, y_0)$ — care aparține conicei — este

$$a_{11}x_0x + a_{12}(x_0y + y_0x) + a_{22}y_0y + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0 \tag{38''}$$

și observăm că se obține prin dedublare din ecuația conicei.

Aplicație. Tangente paralele cu o direcție dată. Fie ecuațiile (33) ale dreptei definită de punctele $P'(1, m, 0)$ și $P''(0, n, 1)$, m fiind panta direcției date.

Dreapta $P'P''$ este tangentă la conică, dacă întîlnește conica în două puncte confundate, deci dacă ecuația (32) (unde x și x_i'' sînt coordonatele punctelor P' și P'') admite o rădăcină dublă în h, adică dacă

$$[f(x'; x'')]^2 - f(x')f(x'') = 0. \tag{38'''}$$

Pentru conicele nedegenerate cu centru, avînd ecuația canonică (6) din capitolul VIII, sau în coordonate omogene:

$$b^2x_1^2 + \varepsilon a^2x_2^2 - a^2b^2x_3^2 = 0,$$

condiția (38''') se scrie

$$(\varepsilon a^2mn)^2 - (b^2 + \varepsilon a^2m^2)(\varepsilon a^2n^2 - a^2b^2) = 0,$$

deoarece

$$f(x'; x'') = \varepsilon a^2mn, \quad f(x') = b^2 + \varepsilon a^2m^2, \quad f(x'') = \varepsilon a^2n^2 - a^2b^2.$$

Efectuînd calculele obținem

$$a^2b^2(-n^2 + a^2m^2 + \varepsilon b^2) = 0,$$

deci

$$m^2a^2 + \varepsilon b^2 - n^2 = 0.$$

Rezultă că, fiind dat m, există două valori pentru n, care satisfac această condiție. Deci, fiind dată o conică cu centru (6) din capitolul VIII, *există două tangente la conică paralele cu o direcție dată m*, ecuația acestor tangente — în coordonate neomogene — fiind

$$y = mx \pm \sqrt{m^2a^2 + \varepsilon b^2}.$$

În cazul hiperbolei ($\varepsilon = -1$), aceste tangente sînt reale, numai dacă avem $m^2a^2 - b^2 \geqslant 0$, adică dacă $-\frac{b}{a} \leqslant m \leqslant \frac{b}{a}$. Însă, $m_1 = \frac{b}{a}$ și $m_2 = -\frac{b}{a}$ sînt coeficienții unghiulari ai asimptotelor hiperbolei; deci, cele două tangente paralele cu direcția m_1 (respectiv m_2) coincid cu asimptota de coeficient unghiular m_1 (respectiv m_2).

Pentru conicele nedegenerate fără centru, adică pentru parabolele avînd ecuația canonică (8), capitolul VIII, care în coordonate omogene se scrie

$$x_2^2 - 2p_1x_1x_3 = 0,$$

condiția (38''') devine

$$(mn - p)^2 - m^2n^2 = 0,$$

deoarece $f(x') = +m^2$, $f(x'; x'') = mn - p$, $f(x'') = +n^2$.

Făcînd calculele, obținem

$$p(p - 2mn) = 0.$$

Rezultă că *există o singură tangentă la parabolă, paralelă cu o direcție dată m*, ecuația ei fiind

$$y = mx + \frac{p}{2m}.$$

Observăm că dacă m tinde către zero, această tangentă se depărtează la infinit.

§ 6. POLARITATEA ÎN RAPORT CU O CONICĂ

Definiția proiectivă a polarei unui punct. Fie (28) ecuația unei conice ireductibile și (37) ecuațiile dreptei definită de un punct fix $P'(x_1', x_2', x_3')$ și unul variabil $P(x_1, x_2, x_3)$. În acest caz, punctul (X_1, X_2, X_3) va fi pe conica (28), dacă h este o soluție a ecuației (37'). Deducem că dreapta $P'P$ intersectează conica în două puncte A și B.

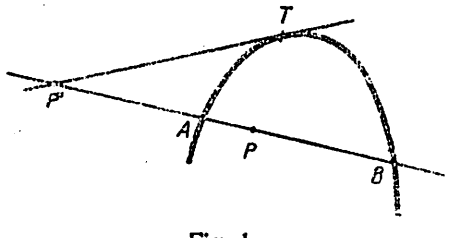


Fig. 1

Fie P conjugatul armonic al punctului fix P', față de punctele A și B, unde secanta $P'P$ intersectează conica (fig. 1).

Locul geometric al punctelor P, conjugate armonic cu P' în raport cu conica (adică *al conjugatelor armonice ale lui P' în raport cu segmentul $\overline{AB}$ determinat pe conică de secanta $P'P$, cînd secanta $P'P$ se rotește în jurul lui P') se numește polara lui P' în raport cu conica dată.* Pentru a găsi ecuația polarei punctului P', trebuie să căutăm condiția ca P să fie conjugatul armonic al lui P' în raport cu segmentul $\overline{AB}$, coordonatele punctelor A și B fiind de forma (37) cu h o soluție a ecuației (37').

Însă coordonatele proiective ale punctelor P', P, A, B sînt respectiv: ∞, 0, h_1, h_2, unde h_1 și h_2 sînt rădăcinile ecuației (37'). Din condiția că punctele P', P, A, B formează o diviziune armonică

$$(P'PAB) = (\infty\, 0\, h_1\, h_2) = -1,$$

obținem

$$h_1 + h_2 = 0,$$

deci, coeficientul lui h din ecuația (37') trebuie să fie nul. Rezultă că locul căutat are ecuația

$$f(x'; x) = x_1 f_{x_1'} + x_2 f_{x_2'} + x_3 f_{x_3'} = 0, \tag{39}$$

care reprezintă o dreaptă.

Aşadar, *polara unui punct fix* $P'(x_1', x_2', x_3')$ *în raport cu o conică este o dreaptă avînd ecuaţia* (39). Punctul P' se numeşte polul dreptei (39). În coordonate neomogene, ecuaţia polarei punctului $P_0(x_0, y_0)$ este

$$a_{11}x_0x + a_{12}(x_0y + y_0x) + a_{22}y_0y + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0. \quad (39')$$

Observăm că dacă secanta variabilă ce trece prin P' ajunge să fie tangenta $P'T$ la conica dată (fig. 1), punctele A şi B de intersecţie ale secantei cu conica se confundă cu punctul de contact T, iar conjugatul armonic P al lui P' se confundă de asemenea cu T.

În adevăr, dreapta $P'P$ este tangentă la conică, dacă ecuaţia (37') are o rădăcină dublă; în acest caz avem

$$[f(x';x)]^2 - f(x') \cdot f(x) = 0.$$

Însă, această ecuaţie, în ipoteza că P' nu este pe conică, deci $f(x') \neq 0$, este în particular satisfăcută, dacă

$$f(x';\ x) = 0, \quad f(x) = 0.$$

A doua condiţie ne spune că punctul P trebuie să se afle pe conică. Prima ne arată că punctul P este la intersecţia conicei cu polara punctului P' în raport cu conica. Deci, polara unui punct P' trece prin punctele de contact ale tangentelor duse din punctul P' la conica dată. Aşadar, avem:

Propoziţie. Polara unui punct coincide cu coarda determinată de punctele de contact ale tangentelor din pol la conică.

Dacă punctul P' este interior conicei, tangentele sînt imaginar — conjugate, încît polara nu mai întîlneşte conica.

Acest rezultat permite construcţia polarei punctului P' în raport cu o conică, în cazul cînd punctul P' este exterior conicei. În adevăr, în acest caz, polara punctului P' în raport cu conica se obţine unind punctele de contact T_1 şi T_2 ale conicei cu cele două tangente duse din punctul P' la conică (fig. 2).

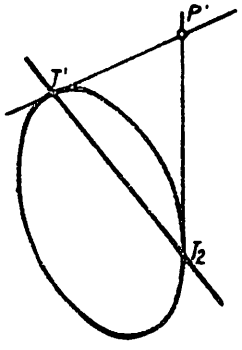


Fig. 2

Observăm că ecuaţia polarei punctului P' în raport cu o conică coincide ca formă cu cea a tangentei, numai că, în cazul tangentei, punctul P' este pe conică. Deci, polara unui punct fix P' este o tangentă la conică, dacă ea trece prin polul ei P'; în acest caz, punctul P' se găseşte pe conică. În adevăr, în baza relaţiei lui Euler relativă la funcţiile omogene $F(x_1, x_2, x_3)$ de grad m:

$$x_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial F}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial F}{\partial x_3} = mF(x_1, x_2, x_3),$$

atunci cînd punctele considerate P' şi P sînt confundate, funcţia $f(x';\ x)$ devine egală cu $f(x_1', x_2', x_3')$; deci

$$f(x';\ x') = f(x'),$$

încît, dacă ţinem seama de (39), avem

$$f(x') = 0.$$

Două puncte P', P'' se numesc *conjugate* în raport cu o conică $f(x, y) = 0$, dacă unul din ele se află pe polara celuilalt, deci dacă coordonatele acestor puncte satisfac condiția

$$f(x'; x'') = 0. \tag{39''}$$

Punctul P' este conjugat cu el însuși (autoconjugat), dacă se află pe propria-i polară. Aceasta se întîmplă numai pentru punctele de pe conică, în care caz, polara se confundă cu tangenta în punctul considerat.

Polul unei drepte. Proprietatea că în raport cu o conică dată, oricărui punct i se poate atașa o dreaptă polară, constituie o corespondență care se numește *polaritate* în raport cu conica. Ea face ca unui punct să-i corespundă o dreaptă. Să determinăm în ce condiții corespondența este reversibilă, adică în ce caz oricărei drepte din plan, în raport cu conica dată, îi corespunde un punct — polul său — astfel încît polara acestui punct în raport cu conica coincide cu dreapta dată. Fie dreapta de ecuație

$$\xi_1' x_1 + \xi_2' x_2 + \xi_3' x_3 = 0, \tag{40}$$

ξ_1', ξ_2', ξ_3' fiind coordonatele tangențiale omogene ale dreptei. Fie, de asemenea, $P'(x_1', x_2', x_3')$ polul acestei drepte, adică punctul a cărui polară (39) în raport cu conica (28) coincide cu dreapta (40). Însă dreapta (39) se confundă cu dreapta (40) numai dacă

$$\frac{f_{x_1'}}{\xi_1'} = \frac{f_{x_2'}}{\xi_2'} = \frac{f_{x_3'}}{\xi_3'} = \rho, \ (\rho \neq 0). \tag{40'}$$

Ținînd seama că coordonatele omogene (carteziene sau tangențiale) sînt determinate abstracție făcînd de un factor de proporționalitate, putem lua ($\rho = 1$)

$$\begin{aligned} \xi_1' &= a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' = a_{1i}x_i', \\ \xi_2' &= a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' = a_{2i}x_i', \\ \xi_3' &= a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' = a_{3i}x_i'. \end{aligned} \tag{40''}$$

Sistemul (40'') fiind un sistem de ecuații liniare în raport cu x_1', x_2', x_3', după regula lui Cramer admite o soluție unică numai dacă determinantul necunoscutelor $A = |a_{ij}|$ este diferit de zero. Deci, dacă conica este ireductibilă ($A \neq 0$), orice dreaptă de coordonate (ξ_1', ξ_2', ξ_3') are un pol, ale cărui coordonate sînt

$$\begin{aligned} x_1' &= A_{11}\xi_1' + A_{12}\xi_2' + A_{13}\xi_3' = A_{1i}\xi_i', \\ x_2' &= A_{21}\xi_1' + A_{22}\xi_2' + A_{23}\xi_3' = A_{2i}\xi_i', \\ x_3' &= A_{31}\xi_1' + A_{32}\xi_2' + A_{33}\xi_3' = A_{3i}\xi_i'. \end{aligned} \tag{40'''}$$

și se obțin rezolvînd ecuațiile (40''), A_{ij} fiind complementii algebrici ai determinantului A. Deci avem

Propoziție. În raport cu o conică ireductibilă (nedegenerată), orice dreaptă are un pol.

Fie cazul cînd conica este degenerată ($A = 0$) și să presupunem că $r(A) = 2$. Dacă $A_{33} \neq 0$, deci A_{33} este determinant principal al sistemului (40'), pentru ca acest sistem să fie compatibil, trebuie ca determinantul caracteristic (obținut prin bordarea lui A_{33}) să fie nul:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \rho\xi_1' \\ a_{12} & a_{22} & \rho\xi_2' \\ a_{13} & a_{23} & \rho\xi_3' \end{vmatrix} = 0. \qquad (40^{IV})$$

Deoarece $\rho \neq 0$, această condiție exprimă faptul că dreptele

$$f_{x_1} = 0, \quad f_{x_2} = 0, \quad \xi_1'x_1 + \xi_2'x_2 + \xi_3'x_3 = 0 \qquad (40^{V})$$

sînt concurente. Însă intersecția dreptelor $f_{x_1} = 0$, $f_{x_2} = 0$ este centrul conicei $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, conica degenerînd în aceste drepte. Așadar, cînd conica este degenerată în două drepte, pentru ca dreapta (40) să aibă un pol, trebuie să treacă prin punctul de intersecție al dreptelor din care este formată conica. Dacă conica $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ este degenerată în dreptele d_1 și d_2 și dacă dreapta d', al cărei pol P' urmează a fi determinat, trece prin intersecția dreptelor d_1 și d_2, atunci polul P' este un punct oarecare al celei de-a patra raze d'' a fasciculului armonic, format cu dreptele d_1, d_2, d'. Așadar:

Dacă o conică este degenerată într-o pereche de drepte, nu orice dreaptă admite un pol în raport cu conica dată. Pentru ca aceasta să aibă loc, trebuie ca dreapta să treacă prin centrul conicei, adică prin punctul de intersecție al dreptelor în care degenerează conica dată.

Aplicații. 1) **Triunghi autoconjugat în raport cu o conică.** Un *triunghi* se zice că este *autoconjugat* (autopolar) în raport cu o conică, dacă fiecare vîrf al triunghiului este polul laturii opuse. Construcția unui astfel de triunghi se face astfel: se ia un punct arbitrar A și pe polara lui în raport cu conica Γ un punct arbitrar B. Polarele punctelor A și B se intersectează în punctul C. Să arătăm că triunghiul ABC astfel construit este un triunghi autoconjugat în raport cu conica Γ. În adevăr, prin construcție, proprietatea de definiție este verificată pentru vîrfurile A, B ale triunghiului. Deoarece vîrful C este definit ca intersecția polarelor punctelor A și B, polara lui C, conținînd punctele A, B, este dreapta AB.

2) **Ecuația tangențială a conicei.** *Două drepte* se zic *conjugate* în raport cu o conică dată, dacă una trece respectiv prin polul celeilalte.

Fie, într-un sistem de coordonate tangențiale omogene, dreptele d' (ξ_1', ξ_2', ξ_3') și $d''(\xi_1'', \xi_2'', \xi_3'')$. Ecuația dreptei d'' este

$$\xi_1''x_1 + \xi_2''x_2 + \xi_3''x_3 = 0.$$

Dreapta d' este conjugată cu dreapta d'', dacă coordonatele polului dreptei d', care sînt date de formulele (40'''), satisfac ecuația dreptei d''; adică

$$\xi_1''A_{1i}\xi_i' + \xi_2''A_{2i}\xi_i' + \xi_3''A_{3i}\xi_i' = 0.$$

Deci, condiția necesară și suficientă ca dreptele d' și d'' să fie conjugate în raport cu conica (28) este

$$A_{ij}\xi_i\xi_j'' = 0.$$

O dreaptă este *autoconjugată*, dacă dreapta trece prin propriul ei pol, adică dacă este o tangentă la conică. În acest caz, punînd

$$\xi_1' = \xi_1'' = \xi_1, \quad \xi_2' = \xi_2'' = \xi_2, \quad \xi_3' = \xi_3'' = \xi_3,$$

condiția de tangență se scrie

$$A_{ij}\xi_i\xi_j \equiv A_{11}\xi_1^2 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + A_{22}\xi_2^2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + A_{33}\xi_3^2 = 0. \qquad (41)$$

Ecuația (41) se numește *ecuația tangențială a conicei*. Observăm că ecuația tangențială (41) se obține din ecuația punctuală (28) a conicei, înlocuind în (28) coeficienții a_{ij}, respectiv prin complementii algebrici corespunzători A_{ij}, iar coordonatele carteziene omogene ale punctului x_1, x_2, x_3 prin coordonatele tangențiale omogene ale dreptei ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Observăm, de asemenea, că ecuația tangențială (41) a unei conice definește o conică ireductibilă, dacă determinantul coeficienților $A_1 = |A_{ij}|$ este diferit de zero. Conica se spune că este degenerată, dacă $A_1 = 0$. În acest caz ($A_1 = 0$). primul membru al ecuației (41) se descompune într-un produs de doi factori liniari în ξ_1, ξ_2, ξ_3; deoarece o ecuație liniară în ξ_1, ξ_2, ξ_3 definește un punct (considerat ca vîrf al unui fascicul de drepte ce trece prin el), rezultă că o conică dată printr-o ecuație tangențială (41) degenerează în două puncte (în două fascicule de drepte). Aceste puncte pot fi reale (distincte sau confundate) sau imaginare.

Proprietăți. 1. *Dacă un punct P descrie o dreaptă d, polara punctului P trece prin polul dreptei d.* În adevăr, fie P' polul dreptei d și P un punct al acestei drepte (fig. 3). Punctele P și P' fiind conjugate armonic în raport cu conica, polară lui P trece prin punctul P'.

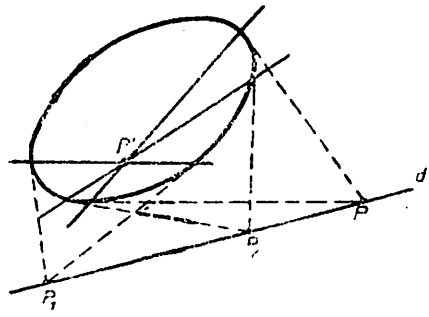


Fig. 3

Așadar, dacă se dă o conică, o dreaptă și două puncte pe dreapta P_1 și P_2, polarele acestora se intersectează într-un punct P', polul dreptei date. Aceasta constituie și o metodă de a construi polul unei drepte, iar reciproca constituie o metodă de construire a polarei unui punct interior conicei.

2. *Dacă o dreaptă descrie un fascicul (deci trece printr-un punct fix), polul acestei drepte se află pe polara centrului fasciculului.* În adevăr, fie d^* o dreaptă care trece prin punctul fix P' (centrul fasciculului de drepte) și fie P^* polul dreptei d^* (fig.4). Însă punctele P' și P^* sînt conjugate armonic în raport cu conica; deci polara punctului P' conține punctul P^*.

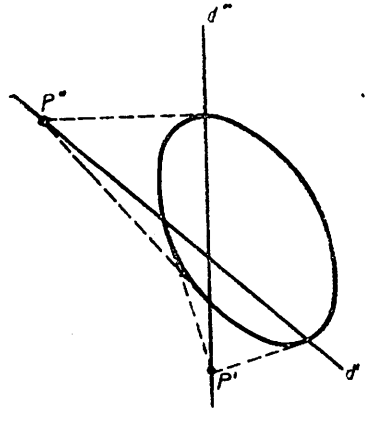


Fig. 4

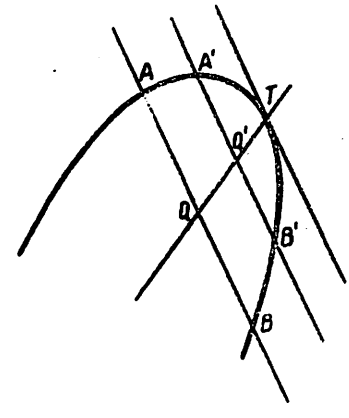


Fig. 5

§ 7. PROPRIETĂȚI DIAMETRALE

Considerînd un sistem de coarde într-o conică, paralele cu o direcție dată, ne propunem să găsim locul geometric al mijloacelor acestor coarde (fig. 5). Fie

$$f(x,y) = 0$$

ecuația conicei, iar

$$\alpha = \cos\theta, \qquad \beta = \sin\theta,$$

cosinusurile directoare ale direcției date. Dacă x,y sînt coordonatele mijlocului Q al coardei AB, atunci coordonatele extremităților A și B ale coardei vor fi de forma

$$x + \alpha\rho, \quad y + \beta\rho$$

deoarece se găsesc pe dreapta

$$\begin{cases} X = x + \rho\alpha, \\ Y = y + \rho\beta \end{cases}$$

dusă prin Q paralel cu direcția (α, β), ρ fiind egal cu distanța (orientată) de la punctul $Q(x,y)$ la punctul curent $P(X,Y)$ de pe dreaptă. Pe de altă parte, coordonatele punctelor A și B verifică ecuația conicei:

$$f(x + \rho\alpha, \quad y + \rho\beta) = 0$$

sau

$$\rho^2(a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2) + 2\rho(\alpha f_x + \beta f_y) + f(x,y) = 0.$$

Rădăcinile ρ_1, ρ_2 ale acestei ecuații sînt distanțele de la punctul Q la punctele A și B, de exemplu $\rho_1 = QA$ și $\rho_2 = QB$. Însă Q este mijlocul coardei AB, adică $\overline{QA} + \overline{QB} = 0$; deci, $\rho_1 + \rho_2 = 0$. Atunci, din ecuația în ρ obținem

$$\alpha f_x + \beta f_y = 0.$$

Dacă direcția este definită prin coeficientul unghiular $m = \frac{\beta}{\alpha}$, ecuația locului geometric al mijloacelor coardelor conicei paralele cu direcția dată se scrie

$$f_x + m f_y = 0. \tag{42}$$

Deoarece ecuația (42) este o ecuație algebrică de gradul întîi, rezultă că locul căutat este o *dreaptă*. Această dreaptă se numește *diametrul conjugat direcției m.*

Așadar, se numește *diametru conjugat unei direcții date, în raport cu o conică, locul geometric al mijloacelor coardelor conicei paralele cu direcția dată.* Dacă m este direcția dată și $f(x, y) = 0$ este ecuația conicei, acest loc geometric este dreapta de ecuație (42). Înțelegem prin diametru atît dreapta indefinită (42) cît și segmentul cuprins între punctele unde diametrul intersectează conica. În acest ultim caz se poate vorbi de extremitățile diametrului și de lungimea lui. Lungimea diametrului este o proprietate metrică a conicei, pe cînd

noțiunea de diametru ca dreaptă indefinită este o proprietate afină a conicei, deoarece face să intervină dreapta de la infinit a planului.

Să presupunem că punctul P' este situat la infinit în direcția m, deci $P' \equiv P'(1,m,0)$. În acest caz, dreptele $P'Q$ sînt paralele cu direcția m și punctele Q sînt mijloacele segmentelor determinate de punctele de intersecție cu conica. Aceste mijloace se găsesc deci pe o dreaptă: polara punctului P'_∞. Ținînd seama de ecuația polarei (39), în care schimbăm rolul variabilelor x_i și x'_i, găsim că ecuația diametrului conjugat m este

$$f_{x_1} + mf_{x_2} = 0 \qquad (42')$$

care, în coordonate neomogene, coincide cu (42). Așadar, *diametrul conjugat unei direcții m date, în raport cu o conică, este polara punctului de la infinit* $P'_\infty(1, m, 0)$ *al direcției date.*

Proprietăți. 1) *Diametrul conjugat unei direcții intersectează conica în punctele unde tangentele la conică sînt paralele cu direcția dată.*

În adevăr, cînd punctele A și B se confundă, mijlocul coardei $\overline{AB}$ coincide cu aceste puncte.

Diametrul conjugat unei direcții este dreapta care unește punctele de contact ale conicei cu cele două tangente paralele cu direcția dată (fig. 6). Rezultă, de asemenea, că: *tangentele paralele cu o direcție sînt tangentele la conică în punctele de intersecție ale ei cu diametrul conjugat direcției date.*

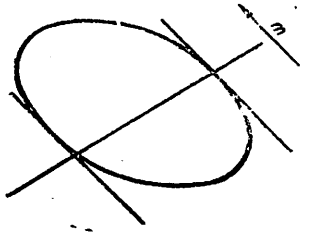


Fig. 6

2) *Orice diametru conjugat cu o direcție dată trece prin centrul conicei.* În adevăr, din ecuația diametrului (42) rezultă că diametrul trece prin punctul de intersecție al dreptelor

$$f_x = 0, \quad f_y = 0,$$

adică prin centrul conicei. Invers, *orice dreaptă care trece prin centrul conicei este un diametru al conicei.*

Diametrii conjugați. Fie m' coeficientul unghiular al diametrului conjugat direcției m (în raport cu o conică). Ecuația acestui diametru fiind (42), obținem

$$m' = \frac{a_{11} + a_{12}m}{a_{12} + a_{22}m}. \qquad (42'')$$

Deci, între coeficientul unghiular m al direcției coardelor paralele și coeficientul unghiular m' al diametrului conjugat acestor coarde are loc relația

$$a_{22}mm' + a_{12}(m + m') + a_{11} = 0, \qquad (43)$$

care constituie, de asemenea, o proprietate afină. Această formulă fiind simetrică în raport cu m și m', rezultă că diametrul ΩM, conjugat coardelor de direcție m' (fig. 7), are coeficientul unghiular m, iar diametrul $\Omega M'$, conjugat coardelor de direcție m, are coeficientul unghiular m'. Deci, în cazul unei conice

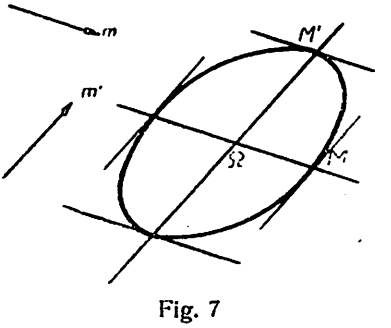


Fig. 7

cu centru, *diametrii* ΩM și $\Omega M'$ *se bucură de proprietatea că unul din ei este locul mijloacelor coardelor paralele cu celălalt.* Cu alte cuvinte, dacă se consideră coardele paralele cu direcția m' a diametrului conjugat direcției m, diametrul lor conjugat este paralel cu direcția m și reciproc. Deci, aceste diametri se bucură de proprietatea că unul trece prin polul celuilalt. Din această cauză, perechea de diametre conjugate direcțiilor m și m', legate prin relația (43), se numesc *diametri conjugați.*

Rezultă că putem enunța următoarea proprietate a perechii de diametri conjugați:

Dacă ducem coarde paralele cu unul din diametri, ei vor fi împărțiți în două părți egale de diametrul conjugat.

Aplicații. 1) **Poziția perechilor de diametri conjugați în raport cu axele conicei.** Fie (6), capitolul VIII, ecuația canonică a conicelor cu centru. Ținînd seama de formula (43), rezultă că relația dintre coeficienții unghiulari a doi diametri conjugați este

$$mm' = -\varepsilon \frac{b^2}{a^2}. \qquad (43')$$

În cazul elipsei ($\varepsilon = +1$), din relația (43') rezultă $mm' < 0$; deci, coeficienții m și m' sînt de semne contrare. Aceasta înseamnă că dacă un diametru se găsește în *primul cadran* (cînd coeficientul său unghiular este pozitiv), diametrul său conjugat se va găsi în *al doilea cadran* (fig. 8).

Cînd $m = 0$ avem $m' = \infty$, deci diametrul conjugat unei axe este cealaltă axă.

În cazul hiperbolei ($\varepsilon = -1$), relația (43') ne arată că $mm' > 0$, deci coeficienții m și m' sînt de același semn. Rezultă că dacă un diametru se găsește în cadranul întîi, conjugatul său va fi în același cadran. Relația (43') ne arată, de asemenea, că dacă $m < \frac{b}{a}$, atunci avem $m' > \frac{b}{a}$. Deci, dacă unul din diametri se găsește în unghiul format de asimptote, celălalt diametru se va găsi în afara unghiului asimptotelor (fig. 9).

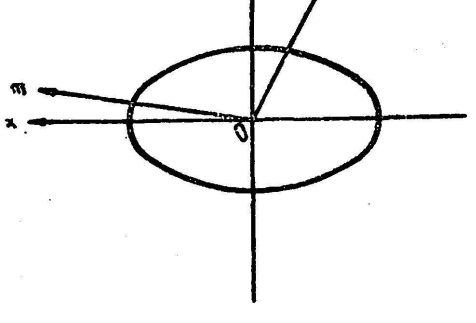


Fig. 8

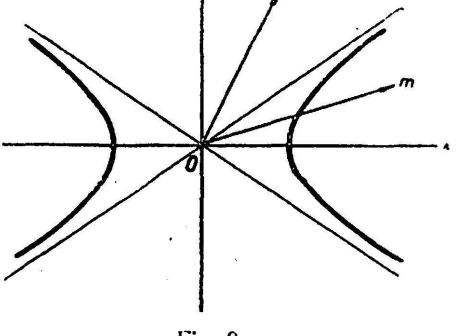


Fig. 9

Observăm apoi că dacă $m = \frac{b}{a}$, atunci și $m' = \frac{b}{a}$, încît *diametrul conjugat unei asimptote se confundă cu acea asimptotă.* Numind *diametru autoconjugat* un diametru care coincide cu conjugatul său, putem spune că o *asimptotă este un diametru autoconjugat.* Această proprietate poate fi luată ca definiție a asimptotelor.

Fie (8), capitolul VIII, ecuația redusă a unei conice fără centru, adică a parabolei.

Relația dintre coeficienții unghiulari a doi diametri conjugați este, în virtutea formulei (43'),

$$mm' = 0.$$

Deci, *toți diametrii parabolei sînt paraleli între ei și paraleli cu axa parabolei.*

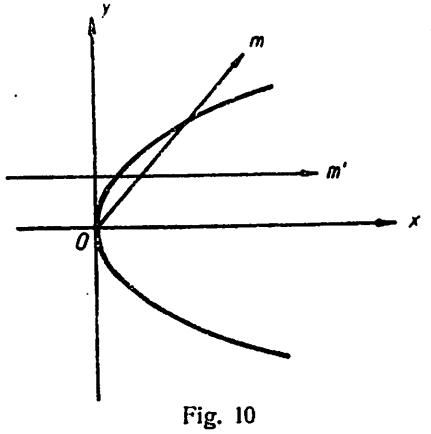


Fig. 10

Dacă ținem seama că diametrul conjugat direcției m, conform formulei (42), este

$$y = \frac{p}{m}, \quad (p > 0)$$

rezultă că: *diametrii se găsesc în semiplanul pozitiv* $(y > 0)$ *sau negativ* $(y < 0)$, *după cum direcția căreia i se află diametrul conjugat se găsește în primul sau în al doilea cadran* (fig. 10).

2) *Asimptotele* unei conice sînt — cum am văzut mai sus — diametri autoconjugați ai conicei.

Presupunînd, în (43), $m = m'$, obținem ecuația (34), care ne dă cei doi coeficienți unghiulari m_1 și m_2 ai diametrilor autoconjugați, aceiași cu coeficienții unghiulari ai asimptotelor. Deci, *singurii diametri autoconjugați ai unei conice sînt asimptotele.*

Rezultă că (42) este ecuația unei asimptote, m fiind una din rădăcinile m_1, m_2 ale ecuației (34).

3) **Teoremele lui Apollonius.** Fie (6), capitolul VIII, ecuația unei conice cu centru. Dacă $P'(x', y')$ și $P''(x'', y'')$ sînt două puncte pe conică, astfel încît $\overline{OP'}$, $\overline{OP''}$ să fie doi diametri conjugați, avem următoarele teoreme, numite și *teoremele lui Apollonius*:

I) **Expresia**

$$OP'^2 + OP''^2 = \text{const.};$$

adică, suma pătratelor lungimilor a doi semidiametri conjugați are aceeași valoare, oricum am alege sistemul de diametri conjugați.

II) **Aria triunghiului OP'P'' construit cu doi diametri conjugați este constantă.**

În adevăr, direcția diametrului $\overline{OP'}$ este $m' = \frac{y'}{x'}$, iar direcția diametrului $\overline{OP''}$ este $m'' = \frac{y''}{x''}$. Aceste două direcții, fiind direcțiile unei perechi de diametri conjugați, trebuie să satisfacă relația de conjugare (43), de unde rezultă

$$\frac{x'x''}{a^2} + \varepsilon \frac{y'y''}{b^2} = 0. \qquad (43'')$$

Deci, dacă coordonatele punctului P' sînt date, putem lua drept coordonate pentru punctul P'' o soluție a ecuației (43″) și anume

$$\frac{x''}{a} = -\varepsilon k\frac{y'}{b},\quad \frac{y''}{b} = +k\frac{x'}{a},$$

unde k este un parametru. Ținînd seama că atît P' cît și P'' sînt puncte ale conicei, rezultă

$$\left(-\varepsilon k\frac{y'}{b}\right)^2 + \varepsilon\left(k\frac{x'}{a}\right)^2 - 1 = 0 \text{ sau } \varepsilon k^2\left(\frac{x'^2}{a^2} + \varepsilon\frac{y'^2}{b^2}\right) - 1 = 0,$$

adică parametrul k trebuie să fie egal cu $\pm\sqrt{\varepsilon}$. Deci, fiind dat punctul P', acestuia îi corespund două puncte P''; acestea sînt punctele de intersecție ale conicei cu diametrul conjugat cu OP', ele fiind reale, dacă conica este o elipsă ($\varepsilon = +1$) și imaginare, dacă conica este o hiperbolă ($\varepsilon = -1$). Ținînd seama că $OP'^2 = x'^2 + y'^2$, $OP''^2 = x''^2 + y''^2$ și de valorile coordonatelor punctelor P' și P'', avem

$$OP'^2 + OP''^2 = x'^2 + y'^2 + \left(-\varepsilon k\frac{ay'}{b}\right)^2 + \left(k\frac{bx'}{a}\right)^2 = \left(\frac{x'^2}{a^2} + \varepsilon\frac{y'^2}{b^2}\right)(a^2 + \varepsilon b^2) =$$
$$= a^2 + \varepsilon b^2 = \text{const.},$$

prima teoremă a lui Apollonius fiind demonstrată.

În cazul hiperbolei putem evita introducerea de elemente imaginare. În adevăr, în locul punctului P'' să luăm punctul $Q''(x_1', y_1')$, astfel încît

$$\frac{x_1''}{a} = \mp\frac{y'}{b},\quad \frac{y_1''}{b} = \pm\frac{x'}{a}.$$

Atunci este ușor de arătat că lungimea diametrului conjugat este $OP''^2 = -OQ''^2$. Deci, în cazul hiperbolei, teorema lui Apollonius devine

$$OP'^2 - OQ''^2 = a^2 - b^2.$$

Să demonstrăm acum a doua teoremă a lui Apollonius. Ținînd seama de formula (31), capitolul V, care dă suprafața unui triunghi, cînd se cunosc coordonatele vîrfurilor triunghiului, avem

$$2 \text{ aria tr. } OP'P'' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = x'y'' - x''y' = kab\left(\frac{x'^2}{a^2} + \varepsilon\frac{y'^2}{b^2}\right) = kab.$$

Deci, și a doua teoremă a lui Apollonius este demonstrată.

4) **Ecuația normală a conicelor cu centru** (raportarea conicelor cu centru la o pereche de diametri conjugați). Știm că orice diametru al unei conice cu centru trece prin centrul conicei.

Fie, într-un sistem de coordonate carteziene ortogonale, ecuația $f(x,y) = 0$ a conicei cu centru la distanță finită ($A_{33} \neq 0$). Printr-o translație de axe putem lua centrul conicei $\Omega\left(\frac{A_{13}}{A_{33}}, \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)$, drept origine a axelor de coordonate (carteziene). În acest caz trebuie să avem $a_{13} = a_{23} = 0$ (v § 1); deci, ecuația conicei este de forma

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0.$$

Printr-o transformare de axe* putem lua doi diametri conjugați drept axe de coordonate. În acest caz, trebuie să avem $a_{12} = 0$. În adevăr, ecuația diametrului conjugat axei OX este

$$a_{11}x + a_{12}y = 0$$

* Prin această transformare se trece de la un sistem ortogonal de axe la un sistem oblic de axe.

și coincide cu ecuația $x=0$ a axei Oy, numai dacă avem $a_{12}=0$. Deci, ecuația unei conice raportată la doi diametri conjugați (cei doi diametri conjugați sînt aleși ca axe de coordonate) este de forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0, \tag{44}$$

care se mai numește și *ecuația normală* a conicelor cu centru.

§ 8. AXELE ȘI VÎRFURILE UNEI CONICE

Se numește *axă* a conicei acel diametru, conjugat unei direcții, care este perpendicular pe direcția dată. Deci, o axă este un diametru perpendicular pe coardele pe care le divide în părți egale; altfel spus, o axă este o axă de simetrie pentru conică. Dacă m este coeficientul unghiular al unei axe, iar m' acela al coardelor paralele, rezultă că se obțin coeficienții unghiulari ai axelor asociind ecuației (43) condiția de ortogonalitate $mm' + 1 = 0$. Eliminînd pe m', obținem pentru m ecuația

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0. \tag{45}$$

Observăm că această ecuație are rădăcini reale, deoarece realizantul este $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0$. Deci, ecuația (45) dă pentru m două valori reale m_1 și m_2, care sînt coeficienți unghiulari ai axelor.

Așadar, *conica are două axe reale, acestea fiind perechea de diametri conjugați ortogonali.* Dacă însă

$$a_{11} = a_{22},\ a_{12} = 0,$$

cînd conica este un cerc, atunci ecuația (45) are o infinitate de soluții. În acest caz, orice diametru este o axă (de simetrie). Deci, *cercul este singura conică avînd o infinitate de perechi de diametri conjugați ortogonali.*

O axă fiind diametrul conjugat direcției m, iar m o rădăcină a ecuației (45) rezultă că ecuația unei axe este de forma (42), unde m este rădăcină a ecuației (45). Eliminînd pe m între ecuația (42) a axei și ecuația (45), care dă coeficienții unghiulari ai axelor, obținem

$$a_{12}(f_x^2 - f_y^2) = (a_{11} - a_{22})f_x f_y, \tag{46}$$

care reprezintă ecuația globală a celor două axe ale conicei.

Dacă avem o conică fără centru ($A_{33} = 0$), teoria diametrilor ne permite să punem ecuația axei parabolei sub o formă remarcabilă.

Într-adevăr, în cazul unei conice fără centru, deoarece $A_{33} = 0$, rădăcinile ecuației (45) sînt

$$m_{1,2} = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2}}{2a_{12}},$$

adică avem:

$$m_1 = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}},\quad m_2 = \frac{a_{22}}{a_{12}}.$$

Una din axe va fi deci diametrul conjugat coardelor paralele cu direcţia m_1. Înlocuind valoarea lui m_1 în (42), obţinem

$$(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})\, x_3 = 0;$$

adică una din axe este dreapta de la infinit, $x_3 = 0$.

Deci, *o conică de gen parabolic are o singură axă (la distanţă finită)*. Ecuaţia acestei axe se obţine înlocuind în (42) coeficientul m cu $m_2 = \frac{a_{22}}{a_{12}}$, axa fiind diametrul conjugat coardelor perpendiculare pe direcţia asimptotică $m_1 = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$. Rezultă că ecuaţia axei parabolei este

$$a_{12}f_x + a_{22}f_y = 0.$$

Se numesc *vîrfuri* ale unei conice intersecţiile axelor cu conica. Deci, coordonatele vîrfurilor unei conice se obţin ca soluţii ale sistemului format din ecuaţia (46) şi ecuaţia $f(x,y) = 0$ a conicei. Deoarece sistemul astfel obţinut este un sistem de două ecuaţii de gradul doi în două necunoscute x,y, o conică are — în general — patru vîrfuri. Vîrfurile pot fi toate reale, două reale şi două imaginare, sau toate imaginare; de asemenea, ele pot fi la distanţă finită sau infinită.

Observaţie. Am văzut (§ 7, aplicaţia 4) că, fiind daţi doi diametri conjugaţi, putem raporta conica la aceşti diametri, ecuaţia conicei luînd forma normală (44). În acest caz, axele de coordonate sînt oblice. Dacă diametrii conjugaţi, aleşi ca axe de coordonate, sînt ortogonali, ei sînt chiar axele conicei; atunci, ecuaţia conicei raportată la axe are aceeaşi formă (44), însă axele de coordonate sînt perpendiculare.

§ 9. FOCARE LA CONICE

Prin definiţie (v. cap. VIII, § 1), o *conică* este locul geometric al punctelor $P(x,y)$ din plan, al căror raport al distanţelor la un punct fix $F(\alpha, \beta)$, numit *focar*, şi la o dreaptă dată $ax + by + c = 0$, numită directoare, este o constantă e, *excentricitatea* conicei. Rezultă că ecuaţia conicei poate fi scrisă sub forma

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (lx + my + n)^2, \tag{48}$$

unde am pus

$$l = \frac{ae}{\sqrt{a^2 + b^2}},\quad m = \frac{be}{\sqrt{a^2 + b^2}},\quad n = \frac{ce}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

încît

$$e = \sqrt{l^2 + m^2}.$$

Observăm că, în formula distanţei între punctele P şi F,

$$|\,\overline{PF}\,| = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2},$$

dacă punctele P şi F sînt arbitrare, cantitatea de sub radical *nu este un pătrat perfect;* cu alte cuvinte, distanţa PF nu poate fi exprimată ca funcţie liniară

de x și y. Dacă însă punctul F este un focar al conicei, din formula (48) rezultă că distanța PF se exprimă ca funcție liniară de x și y. Putem deci defini un *focar ca un punct din planul conicei, astfel încît distanța sa la orice punct P al conicei este o funcție liniară de coordonatele punctului P.*

Rezultă că problema determinării focarelor unei conice revine la determinarea coordonatelor α, β, astfel încît expresia distanței PF să fie un pătrat perfect, adică să avem identitatea (48).

Însă ecuația (48), verificată de coordonatele oricărui punct al conicei, este ecuația conicei date. Deci, trebuie să avem

$$f(x,y) \equiv \rho\,[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - (lx + my + n)^2], \qquad (48'')$$

$f(x,y)$ fiind primul membru al ecuației conicei date. Problema determinării coordonatelor α, β ale focarelor unei conice date se reduce astfel la determinarea parametrilor α, β, l, m, n, ρ, astfel încît condiția (48'') să fie identic verificată. Prin identificare obținem sistemul

$$\left.\begin{aligned} &a_{11} = \rho(1-l^2), \quad a_{12} = -\rho\,l\,m, \quad a_{22} = \rho(1-m^2),\\ &a_{13} = -\rho(\alpha + ln), \quad a_{23} = -\rho(\beta + mn), \quad a_{33} = \rho(\alpha^2 + \beta^2 - n^2) \end{aligned}\right\} \qquad (48''')$$

de șase ecuații în șase necunoscute α, β, l, m, n, ρ. Primele trei ecuații dau

$$l^2 = \frac{\rho - a_{11}}{\rho}, \quad lm = -\frac{a_{12}}{\rho}, \quad m^2 = \frac{\rho - a_{22}}{\rho},$$

încît ρ trebuie să verifice condiția

$$\frac{\rho - a_{11}}{\rho} \cdot \frac{\rho - a_{22}}{\rho} = \left(-\frac{a_{12}}{\rho}\right)^2;$$

deci ρ este o soluție a ecuației

$$\rho^2 - I\rho + A_{33} = 0,$$

obținută anterior (§ 2), cînd ne-am ocupat de invarianții ortogonali ai unei conice.

Observăm că realizantul acestei ecuații este $I^2 - 4A_{33} = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0$; deci, rădăcinile ei sînt totdeauna reale și distincte, afară de cazul $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$, cînd conica este un cerc.

O dată determinat ρ, rezultă imediat valorile lui l și m.

Din ecuațiile (48''') avem

$$\alpha = -ln - \frac{a_{13}}{\rho}, \quad \beta = -mn - \frac{a_{23}}{\rho},$$

unde ρ, l, m este o soluție a primelor trei ecuații ale sistemului (48'''). Ținînd seama de aceste valori în ultima ecuație (48'''), obținem o ecuație de gradul doi în n:

$$\rho(l^2 + m^2 - 1)\,n^2 + 2(a_{13}l + a_{23}m)\,n + \frac{a_{13}^2}{\rho} + \frac{a_{23}^2}{\rho} - a_{33} = 0.$$

O dată determinat n, rezultă imediat valorile lui α și β. În general, rezolvarea sistemului (48‴) este greoaie. De aceea, în determinarea focarelor unei conice se întrebuințează alte procedee.

Observăm că $PF^2 = 0$ reprezintă ecuația globală (comună) a dreptelor izotrope care trec prin focarul $F(\alpha, \beta)$. Intersectînd conica (48) cu una din dreptele izotrope

$$y - \beta = \pm i(x - \alpha) \tag{49}$$

care trec prin punctul $F(\alpha, \beta)$, de exemplu cu dreapta

$$y - \beta = i(x - \alpha), \tag{49'}$$

obținem sistemul

$$\begin{cases} (lx + my + n)^2 = 0, \\ y - \beta = i(x - \alpha), \end{cases}$$

care ne arată că punctele de intersecție sînt confundate; deci, dreptele izotrope care trec prin focarul $F(\alpha, \beta)$ sînt tangente conicei.

Rezultă astfel o altă definiție a focarelor:

Focarele sînt punctele în planul conicei din care tangentele la conică sînt dreptele izotrope.

Întrucît punctele de tangență sînt la intersecția conicei cu directoarea $lx + my + n = 0$, rezultă că *directoarea este polara focarului.* (Se știe de altfel că polara unui punct în raport cu o conică este dreapta care unește punctele de contact ale conicei cu tangentele duse din acel punct.)

Folosind definiția de mai sus a focarului rezultă un alt procedeu de a găsi coordonatele (α, β) ale focarelor unei conice date. Acest procedeu constă în a exprima că una din dreptele izotrope (49) ce trec prin focar, de exemplu, dreapta (49') este tangentă la conică.

Putem obține o altă metodă de a determina coordonatele focarelor unei conice, folosind proprietatea că o conică degenerată în drepte izotrope este de gen cerc. Rezultă că tangentele duse din focar la conica dată este o conică de gen cerc.

Ținînd seama de formula (38), ecuația globală a tangentelor duse din focarul $F(\alpha, \beta)$ la conica $f(x,y) = 0$ este

$$(xf_\alpha + yf_\beta + a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33})^2 - f(\alpha, \beta) \cdot f(x, y) = 0.$$

Această conică este cerc dată coeficienții termenilor în x^2 și în y^2 sînt egali, iar coeficientul termenului în xy este nul; deci, coordonatele α, β ale focarelor conicei $f(x,y) = 0$ sînt soluții ale sistemului

$$\begin{aligned} f_\alpha^2 - a_{11}f(\alpha, \beta) &= f_\beta^2 - a_{22} \cdot f(\alpha, \beta), \\ f_\alpha f_\beta - a_{12} \cdot f(\alpha, \beta) &= 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Sistemul (50) fiind format din două ecuații de gradul doi cu două necunoscute admite, în general, patru soluții. Așadar:

O conică are, în general, patru focare.

Eliminînd pe $f(\alpha, \beta)$ între ecuațiile (50), se obține ecuația (46) a axelor conicei, ceea ce înseamnă că *cele patru focare ale conicei se găsesc pe axele conicei.*

Aplicații. 1) Poziția focarelor unei conice. Pentru a determina focarele unei conice, ne vom servi de ecuația ei canonică.

Fie (6), capitolul VIII, ecuația canonică a conicei cu centru. În acest caz, sistemul (50) se scrie

$$\frac{\alpha^2}{a^4} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \varepsilon\frac{\beta^2}{b^2} - 1\right) = \frac{\beta^2}{b^4} - \varepsilon\frac{1}{b^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \varepsilon\frac{\beta^2}{b^2} - 1\right), \quad \varepsilon\frac{\alpha}{a^2}\cdot\frac{\beta}{b^2} = 0,$$

adică

$$\alpha^2 - \beta^2 = c^2, \qquad \alpha\beta = 0 \tag{50'}$$

dacă ținem seama că $a^2 - \varepsilon b^2 = c^2$. Ultima condiție (50') ne arată că se pot distinge două cazuri, după cum $\beta = 0$ sau $\alpha = 0$. În primul caz, din sistemul (50') deducem

$$\alpha = \pm c, \qquad \beta = 0.$$

Obținem astfel două focare reale, situate pe axa Ox și simetrice față de origine. În al doilea caz, din (50') deducem

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \pm ic;$$

adică, celelalte două focare sînt imaginare, fiind situate pe axa Oy.

Dacă $a = b$, $\varepsilon = +1$, cînd conica este un cerc, focarele coincid cu centrul cercului.

Deci, *focarele unei conice cu centru sînt două cîte două așezate pe axele conicei; dacă focarele situate pe una din axe sînt reale, pe cealaltă axă sînt imaginare, focarele reale fiind pe axa mare la elipsă și pe axa transversală la hiperbolă.*

Fie (8), capitolul VIII, ecuația canonică a parabolei. În acest caz sistemul (50) se scrie

$$(-p)^2 = \beta^2 - (\beta^2 - 2p\alpha), \qquad -p\beta = 0,$$

adică

$$p - 2\alpha = 0, \qquad \beta = 0. \tag{50''}$$

Deci, în cazul parabolei, ecuațiile (50'') ne dau un singur focar real la distanță finită, avînd coordonatele

$$\alpha = \frac{p}{2}, \qquad \beta = 0,$$

celălalt focar real fiind aruncat la infinit. Așadar, *parabola are un singur focar situat pe axa ei la o distanță de vîrf egală cu* $\frac{p}{2}$.

2) **Conice homofocale.** Se numesc conice homofocale totalitatea conicelor din plan care admit aceleaşi focare.

α) **Conice cu centru homofocale.** Fie

$$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}-1=0, \quad (m>0,\ m>n),$$

ecuaţia unei conice cu centru raportată la axele ei*. Deoarece distanţa focală c este dată de formula

$$c^2=m-n,$$

putem lua $n=k$, $m=c^2+k$, astfel încît c să rămînă constant, k fiind un parametru. Obţinem ecuaţia unei formule de conice homofocale

$$\frac{x^2}{c^2+k}+\frac{y^2}{k}-1=0, \tag{51}$$

admiţînd aceleaşi focare ca şi conica dată.

Fie $P'(x'.y')$ un punct din plan. Să determinăm conicele din familia (51) care trec prin acest punct. Pentru aceasta scriem că x', y' verifică ecuaţia (51):

$$\frac{x'^2}{c^2+k}+\frac{y'^2}{k}-1=0,$$

adică

$$k^2-(x'^2+y'^2-c^2)k-c^2y'^2=0. \tag{51'}$$

Această ecuaţie, de gradul doi în k, admite două rădăcini, fiecărei rădăcini corespunzîndu-i o conică a familiei. Deci sînt două conice din familie ce trec prin punctul P'. Deoarece produsul rădăcinilor ecuaţiei (51') este negativ:

$$k_1k_2=-c^2y'^2,$$

rezultă că dacă $k_1>0$, atunci $k_2<0$. Însă, pentru $k=k_1$ corespunde o elipsă, iar pentru $k=k_2$ o hiperbolă. Deci, conicele care trec prin punctul P' sînt de genuri diferite: una este o elipsă, iar cealaltă o hiperbolă. Ecuaţiile tangentelor în P la cele două conice (care trec prin P') sînt

$$\frac{x'x}{c^2+k_1}+\frac{y'y}{k_1}-1=0, \quad \frac{x'x}{c^2+k_2}+\frac{y'y}{k_2}-1=0,$$

coeficienţii lor unghiulari fiind

$$m_1=-\frac{k_1x'}{(c^2+k_1)y'}, \quad m_2=-\frac{k_2x'}{(c^2+k_2)y'}.$$

Ţinînd seama de ecuaţia (51'), obţinem $m_1m_2+1=0$; deci, elipsa şi hiperbola trecînd prin P' sînt ortogonale.

* Printr-o schimbare de variabile putem avea $m>0$, $m>n$.

Aşadar:

Printr-un punct al planului trec două conice din familia de conice homofocale, conicele fiind de genuri diferite (o elipsă şi o hiperbolă) şi ortogonale una alteia (fig.11).

β) **Parabole homofocale.** În cazul parabolei, unul din focare este aruncat la infinit, fiind punctul de la infinit al axei. De aceea, se numesc parabole homofocale acelea care au acelaşi

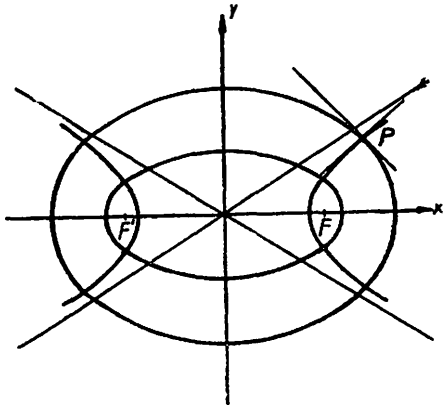


Fig. 11

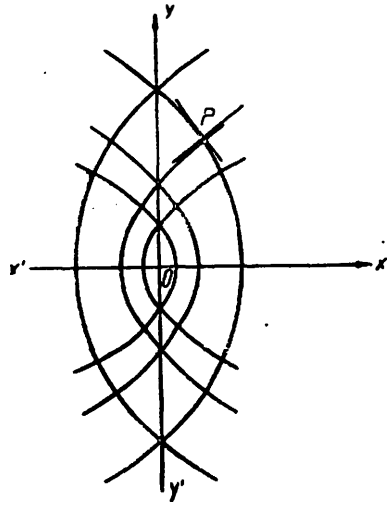


Fig. 12

focar şi aceeaşi axă. Luînd originea axelor de coordonate în focar şi axa parabolei ca axă Ox, ecuaţia familiei de parabole homofocale este

$$x^2 + y^2 - (x + \lambda)^2 = 0,$$

sau

$$y^2 = 2\lambda\left(x + \frac{\lambda}{2}\right). \tag{52}$$

Pentru $\lambda > 0$, parabolele din familie au concavitatea către semidreapta Ox, iar pentru $\lambda < 0$, spre semidreapta Ox'. Dacă λ tinde către zero, prin valori pozitive sau negative parabola tinde să se confunde respectiv cu semidreapta Ox sau cu semidreapta Ox' (fig. 12).

Şi în cazul parabolelor homofocale avem *proprietatea:*

Printr-un punct al planului trec două parabole homofocale ortogonale una alteia.

§ 10. DETERMINAREA CONICELOR PRIN CONDIŢII INIŢIALE

Observăm că ecuaţia generală (1) a unei conice conţine şase coeficienţi a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}, unul cel puţin din coeficienţii a_{11}, a_{12}, a_{22} fiind diferit de zero; împărţind printr-unul din coeficienţii diferiţi de zero, rezultă că ecuaţia unei conice depinde de cinci coeficienţi arbitrari. Înseamnă că pentru ca o conică să fie complet determinată, sînt necesare *cinci relaţii între cei cinci coeficienţi.* Numind *condiţie simplă* o condiţie geometrică ce se exprimă printr-o singură relaţie liniară între coeficienţii conicei, rezultă următoarea

Propoziţie. O conică este determinată prin cinci condiţii simple.

Problema determinării conicelor prin condiţii iniţiale se reduce la evaluarea în condiţii simple a diferitelor elemente geometrice, care se întîlnesc în proprietăţile conicelor (punct, centru, vîrf, focar, tangentă, polară, diametru, directoare etc.), cînd aceste elemente sînt date.

O dată determinat sistemul condiţiilor simple (care este un sistem în necunoscutele a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}) se pune problema rezolvării acestui sistem, a determinării coeficienţilor a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} ai ecuaţiei conice.

Dacă condiţiile iniţiale sînt echivalente cu un număr de condiţii simple mai mic decît cinci, atunci conica nu este complet determinată: ecuaţia sa conţine atîţia parametri arbitrari cîte condiţii simple mai trebuie încă date pentru a determina în mod complet conica. *O asemenea ecuaţie defineşte o familie de conice.* Cînd o familie de conice depinde liniar de un număr de parametri, ea se numeşte o *familie liniară de conice.* O familie liniară de *un parametru* se numeşte *fascicul de conice,* iar o familie liniară de conice depinzînd de *doi parametri* se numeşte *reţea de conice.*

Cunoaşterea cîtorva tipuri de ecuaţii ale familiilor de conice simplifică mult rezolvarea unor probleme de determinare a conicelor prin condiţii iniţiale, deoarece cunoaşterea unor astfel de familii permite să se scrie deodată mai multe condiţii iniţiale şi să determinăm astfel mai repede ecuaţia conicei (v. § 11).

Aplicaţii. 1) **Ecuaţia conicei care trece prin cinci puncte.** Dacă o conică trece printr-un punct dat, atunci coordonatele acestui punct trebuie să verifice ecuaţia conicei; obţinem astfel o singură relaţie liniară între coeficienţii ecuaţiei conicei.

Un punct este deci echivalent cu o singură condiţie simplă. Rezultă că *o conică este definită prin cinci puncte.* În adevăr, fie $P_i(x_i, y_i)$, $(i=1, 2, 3, 4, 5)$, cinci puncte arbitrate în plan. Conica

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{53}$$

trece prin aceste cinci puncte P_i, dacă coordonatele x_i, y_i ale punctelor P_i verifică ecuaţia conicei; deci, condiţiile iniţiale impun coeficienţilor ecuaţiei (53) a conicei cinci condiţii simple (algebrice)

$$a_{11}x_i^2 + 2a_{12}x_iy_i + a_{22}y_i^2 + 2a_{13}x_i + 2a_{23}y_i + a_{33} = 0. \tag{53'}$$

Obţinem un sistem liniar şi omogen de cinci ecuaţii cu şase necunoscute. Fie

$$M = \| x_i^2 \; x_iy_i \; y_i^2 \; x_i \; y_i^1 | \rangle$$

matricea ataşată sistemului. Dacă $r(M) = 5$, atunci (v. cap. III, §3) coeficienţii a_{ij} sînt cantităţi proporţionale cu minorii matricei M, obţinînd o conică unică. Conica astfel determinată este degenerată, dacă trei din punctele $P_i(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ sînt în linie dreaptă.

Dacă $r(M)=4$, atunci sistemul (53') este constituit dintr-un sistem principal, format din patru ecuaţii liniare şi omogene în şase necunoscute, şi dintr-o ecuaţie secundară. Deci putem exprima patru din coeficienţii a_{ij} ca funcţii liniare de doi dintre aceşti coeficienţi, obţinînd un fascicul de conice. Rezultă că există o ∞^1 de conice care trec prin cele cinci puncte.

Dacă $r(M) = 3$, atunci sistemul (53') este constituit dintr-un sistem principal, format din trei ecuaţii liniare şi omogene în şase necunoscute, şi dintr-un sistem secundar, format din două ecuaţii liniare şi omogene în şase necunoscute. Putem deci exprima trei din coeficienţii a_{ij}, ca funcţii liniare de trei dintre aceşti coeficienţi, obţinînd o reţea de conice. Rezultă că există o ∞^3 de conice care trec prin cele cinci puncte date.

Ecuaţia conicei care trece prin cele cinci puncte $P_i(i=1, 2, 3, 4, 5)$ se poate scrie sub forma unui determinant In adevăr. să asociem ecuaţiilor (53') ecuaţia (53). Obţinem atunci un sistem liniar şi omogen de şase ecuaţii în şase necunoscute a_{ij}.

Însă (v. cap. III, § 3) condiția ca un astfel de sistem să aibă alte soluții decît soluția banală $a_{ij} = 0$ este ca determinantul coeficienților necunoscutelor să fie nul; deci, ecuația conicei care trece prin cinci puncte $P_i(x_i, y_i)$, $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, este

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & y & x & 1 \\ x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i & y_i & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (53'')$$

2) Evaluarea în condiții simple a diverselor elemente geometrice care se întîlnesc în proprietățile conicelor. Presupunem că una din condițiile inițiale este aceea de a da un punct drept *centrul* conicei. În acest caz, coordonatele punctului dat trebuie să verifice ecuațiile (4) ale centrului; obținem astfel două relații liniare între coeficienții conicei. Deci, *a se da centrul conicei echivalează cu a se da două condiții simple.*

Fie $F(\alpha, \beta)$ un *focar* al conicei. În acest caz, coordonatele sale α, β trebuie să verifice ecuațiile focare (50); rezultă astfel două relații între coeficienții conicei. Deci, *un focar echivalează cu două condiții simple.*

Dacă se dau *două focare*, obținem deci *patru condiții simple*, deoarece focarele sînt independente unul față de celălalt și fiecare din ele echivalează cu două condiții simple. De altfel, dacă se dau două focare, mai rămîne un singur parametru nedeterminat (lungimea unei axe).

În general, coordonatele unui *punct remarcabil* al conicei (centru, focar, vîrf) sînt funcții date de coeficienții a_{ij} ai ecuației conicei. Dîndu-se valorile acestor funcții (coordonatele punctului remarcabil), obținem două relații între coeficienții conicei.

Deci, cunoașterea unui *punct remarcabil* al conicei (centru, focar vîrf) *echivalează cu două condiții simple.*

În general, *cunoașterea unei drepte remarcabile* (tangentă într-un punct al conicei, asimptotă, directoare, axă) *echivalează cu două condiții simple.* În adevăr, coeficienții unei astfel de drepte sînt funcții cunoscute de coeficienții conicei. Deci, dacă cunoaștem o astfel de ecuație, prin identificare (ecuațiile dreptei remarcabile și ale dreptei date au coeficienții proporționali) obținem două relații între coeficienții conicei. Două drepte remarcabile echivalează cu patru condiții, dacă ele sînt independente una de alta, adică dacă nu sînt legate prin vreo relație geometrică specială. De exemplu, cunoașterea ecuațiilor axelor unei conice echivalează cu trei condiții și nu cu patru, deoarece axele nu pot fi alese arbitrar, ci ele trebuie să fie perpendiculare una pe alta.

§ 11. FAMILII LINIARE DE CONICE

Fascicul de conice. Totalitatea conicelor care trec prin patru puncte fixe constituie o familie liniară de conice depinzînd de un parametru, adică un fascicul de conice.

În adevăr, scriind că coordonatele celor patru puncte date verifică ecuația generală a conicei, obținem un sistem de patru ecuații liniare în cinci parametri arbitrari. Punctele nefiind în poziții speciale (de exemplu, punctele nu sînt coliniare), putem aplica regula lui Cramer, exprimînd patru necunoscute prin funcții liniare de a cincea necunoscută (parametrul). Obținem astfel ecuația unui fascicul de conice.

Pe de altă parte, știm că două conice se intersectează, în general, în patru puncte. Deci *fasciculul de conice* va fi constituit din *totalitatea conicelor din plan care trec prin punctele de intersecție a două conice date.*

Dacă

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (54)$$

și

$$g(x,y) = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0 \qquad (54')$$

sînt ecuațiile a două conice, *ecuația fasciculului de conice* care trec prin punctele de intersecție ale acestor două conice este

$$f(x,y) + k\,g(x,y) = 0, \qquad (55)$$

conicele $f = 0$ și $g = 0$ numindu-se *conicele de bază* sau *fundamentale* ale fasciculului, parametrul k fiind o coordonată neomogenă în fascicul.

În adevăr, dacă $P'(x', y')$ este unul din punctele de intersecție ale conicelor (54) și (54'), deci $f(x', y') \equiv 0$ și $g(x', y') \equiv 0$, atunci coordonatele acestui punct verifică identic și ecuația (55) a fasciculului, $f(x', y') + kg(x', y') \equiv 0$, oricare ar fi valoarea parametrului k.

Punînd $k = \frac{\mu}{\lambda}$, ecuația (55) se mai scrie

$$\lambda f(x,y) + \mu g(x, y) = 0, \qquad (55')$$

λ și μ fiind coordonate omogene în fascicul. Punctele P_1, P_2, P_3, P_4 de intersecție ale conicelor de bază ale unui fascicul se mai numesc punctele de bază (sau fundamentale) ale fasciculului.

Scrisă explicit, ecuația fasciculului este

$$(a_{11} + kb_{11})x^2 + 2(a_{12} + kb_{12})xy + (a_{22} + kb_{22})y^2 + 2(a_{13} + kb_{13})x + \\ + 2(a_{23} + kb_{23})y + a_{33} + kb_{33} = 0. \qquad (55'')$$

Dacă una din conicele de bază este degenerată în două drepte $d_1=0$ și $d_2=0$, de exemplu $g(x, y) = d_1d_2 = 0$, rezultă că *ecuația fasciculului de conice care trec prin intersecția unei conice* $f(x, y) = 0$ *cu două drepte* $d_1 = 0$ *și* $d_2 = 0$ *este de forma*

$$f(x, y) + kd_1d_2 = 0, \qquad (56)$$

k fiind un parametru.

Proprietăți. 1) *Într-un fascicul de conice putem lua drept conice de bază două conice oarecare ale fasciculului.* În adevăr, fie

$$\varphi(x, y) \equiv f(x, y) + k'g(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) \equiv f(x, y) + k''g(x, y) = 0$$

două conice din fasciculul (55), obținute dînd lui k două valori oarecare k' și k''. Conicele $f = 0$ și $g = 0$ se intersectează în punctele P_1, P_2, P_3, P_4, prin care trec și conicele $\varphi = 0$ și $\psi = 0$.

Să considerăm fasciculul

$$\varphi(x, y) + \alpha\psi(x, y) = 0, \qquad (55''')$$

avînd conicele $\varphi = 0$ și $\psi = 0$ drept conice de bază. Ecuația (55″′) poate fi scrisă sub forma

$$f(x, y) + k'g(x, y) + \alpha[f(x, y) + k''g(x, y)] = 0$$

sau

$$f(x, y) + \frac{k' + \alpha k''}{1 + \alpha} g(x, y) = 0.$$

Deci, printr-o schimbare de parametru în fascicul dată de formula

$$k = \frac{k' + \alpha k''}{1 + \alpha}, \qquad (55^{IV})$$

fasciculul (55″′) ia forma (55).

Cu alte cuvinte, fasciculul (55″′) avînd conicele de bază $\varphi = 0$ și $\psi = 0$ coincide (se identifică) cu fasciculul (55), avînd conicele de bază $f = 0$ și $g = 0$, între parametrii α și k existînd relația (55IV).

Observăm că conicele $f = 0$ și $g = 0$ se obțin pentru $k = 0$ și $k = \infty$, în fasciculul (55), respectiv pentru $\alpha = -\frac{k'}{k''}$ și $\alpha = -1$, în fasciculul (55″′).

2) *Printr-un punct din plan, diferit de punctele de bază ale unui fascicul de conice, trece o singură conică a fasciculului.* În adevăr, fie $P_0(x_0, y_0)$ un punct din plan, diferit de punctele de bază ale fasciculului (55); în acest caz, cel puțin unul din numerele $f(x_0, y_0)$ și $g(x_0, y_0)$ este diferit de zero. Scriind că ecuația (55) este verificată de coordonatele lui P_0, obținem ecuația

$$f(x_0, y_0) + kg(x_0, y_0) = 0,$$

liniară în k. Soluției

$$k = -\frac{f(x_0, y_0)}{g(x_0, y_0)},$$

a acestei ecuații îi corespunde o conică în fascicul. Deci, printr-un punct $P_0(x_0, y_0)$, arbitrar din plan, trece o singură conică din fascicul, ecuația acestei conice scriindu-se

$$g(x_0, y_0) f(x, y) - f(x_0, y_0) g(x, y) = 0.$$

3) *Într-un fascicul de conice există, în general, trei conice degenerate.* Se știe că o conică este degenerată într-o pereche de drepte, dacă discriminantul ecuației conicei este nul. Deci, o conică a fasciculului (55″) va fi degenerată dacă avem condiția

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + kb_{11} & a_{12} + kb_{12} & a_{13} + kb_{13} \\ a_{12} + kb_{12} & a_{22} + kb_{22} & a_{23} + kb_{23} \\ a_{13} + kb_{13} & a_{23} + kb_{23} & a_{33} + kb_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Notînd cu $A = |a_{ij}|$ și $B = |b_{ij}|$, discriminanții conicelor de bază ale fasciculului, condiția $\Delta = 0$ este o ecuație de gradul al treilea în k, de forma

$$\Delta \equiv Bk^3 + \ldots + A = 0.$$

Deci, abstracție făcînd de cazul cînd ecuația $\Delta = 0$ este identic satisfăcută, în care caz toate conicele fasciculului sînt degenerate, rezultă că există, în general, trei conice degenerate într-un fascicul, una din aceste conice corespunzînd unei rădăcini a ecuației $\Delta = 0$.

De altfel, conicele fasciculului sînt degenerate numai dacă trei din punctele de bază ale fasciculului sînt coliniare; în acest caz, fasciculul este format din dreapta care conține cele trei puncte și dintr-o dreaptă oarecare care trece prin al patrulea punct.

În cazul general, dacă P_1, P_2, P_3, P_4 sînt punctele de bază ale fasciculului, conicele degenerate ale fasciculului sînt formate din perechile de drepte (fig. 13).

$$(P_1P_2),\ (P_3,P_4);\quad (P_1P_3),\ (P_2P_4);$$

$$(P_1,\ P_4),\ (P_2,\ P_3).$$

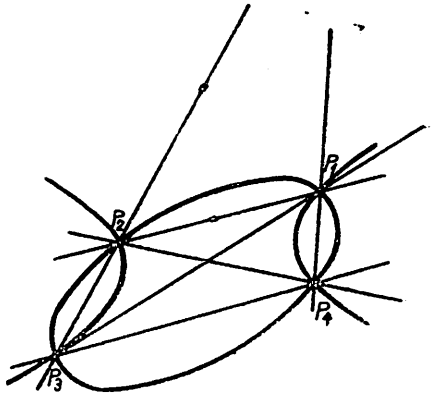


Fig. 13

Observăm că cele trei conice degenerate ale fasciculului sînt perechile de laturi opuse ale patrulaterului complet $P_1P_2P_3P_4$.

Desigur, dacă punctele P_1, P_2, P_3, P_4 nu sînt toate reale, numai una din conicele degenerate este reală. Astfel, dacă două din punctele de bază sînt reale sau imaginar conjugate — de exemplu, punctele P_1, P_2, celelalte două puncte P_3, P_4 fiind imaginar conjugate * — numai conica P_1P_2, P_3P_4 este reală, în timp ce celelalte două conice degenerate sînt imaginare.

4) *Într-un fascicul de conice există un cerc numai dacă conicele de bază au axele paralele.* Pentru ca fasciculul de conice (55″) să conțină un cerc, trebuie să avem

$$a_{11} + kb_{11} = a_{22} + kb_{22},\quad a_{12} + kb_{12} = 0.$$

Acest sistem este compatibil (admite soluție) dacă, și numai dacă,

$$a_{12}(b_{11} - b_{22}) - b_{12}(a_{11} - a_{22}) = 0, \tag{57}$$

această condiție obținîndu-se eliminînd pe k între ecuațiile sistemului.

Pe de altă parte, ecuațiile care dau direcțiile axelor conicelor de bază sînt

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})\,m - a_{12} = 0,\qquad b_{12}m^2 + (b_{11} - b_{22})\,m - b_{12} = 0.$$

Aceste ecuații admit aceleași rădăcini (ceea ce înseamnă că axele conicelor de bază sînt paralele) numai dacă au coeficienții proporționali; în acest caz obținem condiția (57). Rezultă că cele patru puncte de intersecție a două conice se găsesc pe un cerc, numai dacă aceste conice au axele paralele.

* Pentru ca ecuația conicei să fie cu coeficienți reali, punctele imaginare trebuie să fie în perechi de puncte imaginar conjugate.

Observăm că dacă conicele de bază $f = 0$ şi $g = 0$ sînt cercuri, condiţia (57) este identic satisfăcută. În acest caz avem un fascicul de cercuri.

5) *Într-un fascicul de conice există, în general, o singură hiperbolă echilaterală.* O conică a fasciculului (55″) este o hiperbolă echilateră, dacă este îndeplinită condiţia

$$a_{11} + a_{22} + k(b_{11} + b_{22}) = 0,$$

care este o ecuaţie liniară în k. Deci, abstracţie făcînd de cazul cînd această ecuaţie este identic verificată, cînd

$$a_{11} + a_{22} = 0, \quad b_{11} + b_{22} = 0,$$

în care caz toate conicele fasciculului sînt hiperbole echilatere, *există, în general, numai o singură hiperbolă echilateră într-un fascicul de conice.*

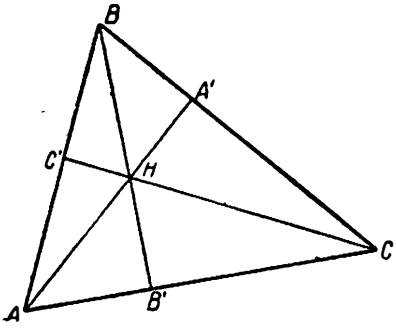


Fig. 14

În cazul cînd conicele fasciculului sînt hiperbole echilatere, aceste hiperbole trec prin trei puncte fixe.

Pentru un fascicul de hiperbole echilatere trecînd prin trei puncte necoliniare A, B, C, putem lua drept conice de bază hiperbolele echilatere degenerate, constituite respectiv din dreapta AB şi perpendiculara CC' pe AB şi dreapta AC şi perpendiculara BB' pe AC (fig. 14). Rezultă

Teoremă. Hiperbolele echilatere care trec prin trei puncte necoliniare, trec şi prin al patrulea punct H, ortocentrul triunghiului format din punctele date.

6) *Într-un fascicul de conice care trec prin patru puncte la distanţă finită există două parabole.* În adevăr, o conică a fasciculului este o parabolă, dacă este îndeplinită condiţia

$$(a_{11} + kb_{11})(a_{22} + kb_{22}) - (a_{12} + kb_{12})^2 = 0,$$

care este o ecuaţie de gradul al doilea în k. Deci, în general, *sînt două parabole într-un fascicul.* De altfel, conicele fasciculului sînt parabole numai dacă conicele de bază sînt parabole şi au axele paralele. În adevăr, ecuaţia în k este identic verificată, dacă

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \quad b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0, \quad b_{11}a_{22} + a_{11}b_{22} - 2a_{12}b_{12} = 0.$$

Primele două condiţii ne arată că cele două conice de bază sînt parabole. Să alegem axele de coordonate astfel încît prima parabolă să aibă axa paralelă cu axa Ox, adică să avem $a_{11} = a_{12} = 0$. Însă ultima condiţie este identic satisfăcută numai dacă $b_{11} = 0$ şi deci $b_{12} = 0$. Aşadar, axele parabolelor de bază sînt paralele. În acest caz, fasciculul de parabole este bitangent dreptei improprii în punctul de la infinit al axei Ox.

În cazul general, putem lua parabolele din fascicul drept conice de bază ale fasciculului. Presupunînd că s-au ales axele de coordonate astfel încît parabola $f = 0$ să aibă axa paralelă cu axa Ox, deci $a_{11} = a_{12} = 0$, ecuaţia

(57) — reprezentînd condiția ca fasciculul de conice să conțină un cerc — este satisfăcută dacă $b_{12} = b_{22} = 0$ *. Așadar, rezultă

Teoremă. Punctele de intersecție a două parabole se găsesc pe un cerc, dacă cele două parabole au axele perpendiculare, și invers.

7) *Într-un fascicul de conice există două conice tangente unei drepte date.* Să luăm ca dreaptă dată chiar axa Ox, ceea ce este totdeauna posibil printr-o deplasare. Intersectînd fasciculul (55″) cu dreapta $y = 0$, obținem

$$(a_{11} + kb_{11})x^2 + 2(a_{13} + kb_{13})x + a_{33} + kb_{33} = 0.$$

Dreapta Ox * este tangentă conicelor din fascicul, dacă această ecuație admite o rădăcină dublă; obținem astfel o ecuație de gradul al doilea în k:

$$(a_{13} + kb_{13})^2 - (a_{11} + kb_{11})(a_{33} + kb_{33}) = 0.$$

Deci, într-un fascicul sînt două conice tangente dreptei date ele corespund celor două rădăcini k_1, k_2 ale ecuației în k.

Aplicații. 1) **Fascicul de conice circumscris unui patrulater.** Fie patrulaterul $ABCD$ (fig. 15). Dacă $AB \equiv d_1 = 0$, $BC \equiv d_2 = 0$, $CD \equiv d_3 = 0$, $DA \equiv d_4 = 0$, sînt ecuațiile laturilor patrulaterului $ABCD$, ecuația fasciculului de conice circumscris patrulaterului dat (deci, totalitatea conicelor care trec prin cele patru vîrfuri ale patrulaterului) este

$$d_1d_2 + k\,d_2d_3 = 0, \quad (58)$$

conicele degenerate

$$f \equiv d_1d_2 = 0$$

și

$$g \equiv d_3d_4 = 0$$

fiind conicele de bază ale fasciculului. Evident, există trei posibilități de a scrie ecuația unui fascicul circumscris unui patrulater, astfel încît conicele de bază să fie degenerate.

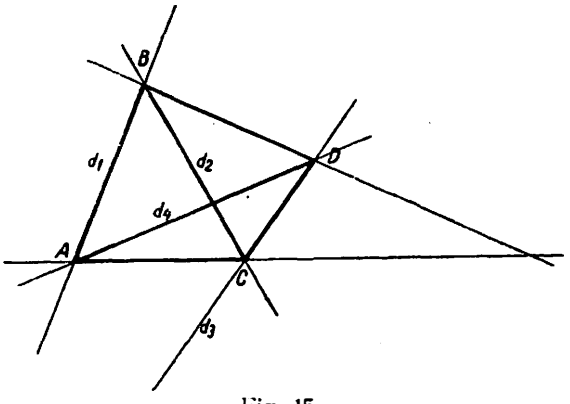


Fig. 15

Cunoașterea ecuației fasciculului de conice circumscris unui patrulater simplifică mult rezolvarea problemei determinării ecuației conicei care trece prin cinci puncte date.

În adevăr, știm că ecuația conicei determinată de cinci puncte $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ este (53″). Însă, dezvoltarea unui determinant de ordinul șase nu este o operație destul de ușoară. Este mult mai simplu să scriem ecuația fasciculului de conice care trec prin patru puncte, de exemplu prin punctele P_1, P_2, P_3, P_4, și să scriem apoi că această ecuație este verificată și de coordonatele celui de-al cincilea punct P_5.

* Excludem cazul $b_{11} = b_{12} = 0$, cînd fasciculul este format numai din parabole.

Observăm că un triunghi ABC și o dreaptă fixă d trecînd printr-unul din vîrfurile triunghiului, de exemplu prin punctul A (fig. 16) poate fi considerat ca un patrulater $ABCD$, în care $D \equiv A$. Atunci, *ecuația fasciculului de conice trecînd prin vîrfurile triunghiului și tangent în vîrful corespunzător dreptei fixe* este

$$d_1 d_2 + k d_3 d = 0, \tag{58'}$$

unde $d = 0$ este dreapta fixă trecînd prin vîrful A al triunghiului ABC de laturi

$$AB \equiv d_1 = 0, \quad BC \equiv d_2 = 0, \quad CD \equiv d_3 = 0.$$

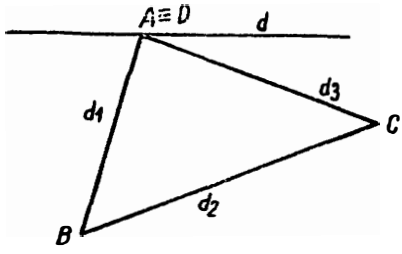


Fig. 16

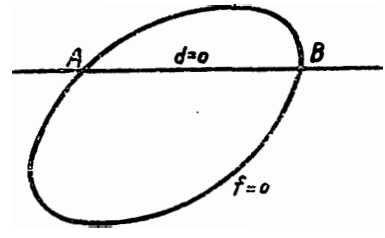


Fig. 17

2) **Fascicul bitangent de conice.** Un fascicul bitangent de conice este constituit din totalitatea conicelor din plan tangente unei conice date, în două puncte A, B fixe ale conicei (fig. 17).

Fie $f(x, y) = 0$ ecuația conicei date și $d = 0$ ecuația coardei AB. Ecuația fasciculului căutat va fi

$$f(x, y) + kd^2 = 0. \tag{59}$$

În adevăr, ecuația (59) a fasciculului bitangent de conice se obține din ecuația (56) a fasciculului de conice trecînd prin punctele de intersecție ale conicei $f = 0$ cu dreptele $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, cînd dreapta $d_2 = 0$ tinde către dreapta $d_1 = 0$. Atunci, dacă A, B, respectiv A', B' sînt punctele de intersecție ale conicei $f = 0$ cu dreapta $d_1 = 0$, respectiv cu dreapta $d_2 = 0$, rezultă că punctele A și A', B și B' se confundă, conicele fasciculului fiind bitangente în A și B conicei $f = 0$.

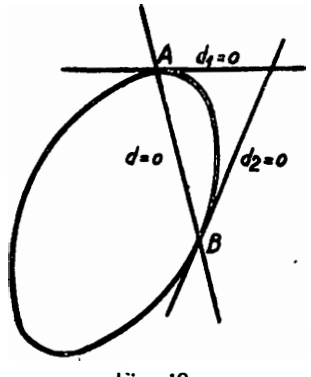


Fig. 18

Dacă conica $f(x, y) = 0$ este degenerată în două drepte $d_1 = 0$ și $d_2 = 0$, deci

$$f(x, y) = d_1 d_2 = 0,$$

atunci, dacă ținem seama de (59), rezultă că ecuația *fasciculului de conice tangente la două drepte date, în puncte date* (fig. 18), *este*,

$$d_1 d_2 + kd^2 = 0, \tag{59'}$$

unde $d = 0$ este ecuația dreptei care unește punctele date.

3) **Fascicul de conice admiţînd ca asimptote două drepte date.** Fie $f(x, y) = 0$, ecuaţia unei conice date. Atunci fasciculul de conice

$$f(x, y) + k = 0 \tag{60}$$

reprezintă conicele din plan cu aceleaşi direcţii asimptotice, ca şi conica dată $f(x, y) = 0$ (deoarece grupul termenilor de gradul al doilea este acelaşi) şi cu acelaşi centru (deoarece, atît pentru conica dată cît şi pentru orice conică din fascicul, ecuaţiile care dau centrul sînt $f_x = 0$, $f_y = 0$).

Pe de altă parte, dacă conica dată este degenerată în două drepte, deci

$$f(x, y) = d_1 d_2 = 0,$$

unde $d_1 = 0$, $d_2 = 0$ sînt ecuaţiile celor două drepte în care degenerează conica, ecuaţia ei este chiar ecuaţia globală a asimptotelor. Rezultă că ecuaţia

$$d_1 d_2 + k = 0 \tag{60'}$$

reprezintă conicele din plan *care admit ca asimptote două drepte* $d_1 = 0$, $d_2 = 0$.

Dacă dreptele sînt perpendiculare, obţinem un fascicul de hiperbole echilatere.

4) **Forma canonică a ecuaţiei unui fascicul de conice.** Fie (55) ecuaţia fasciculului de conice avînd conicele $f = 0$, $g = 0$ drept conice de bază.

În fascicul există, în general, o singură hiperbolă echilateră (v. proprietatea 5). Luînd această hiperbolă drept conică de bază — de exemplu, drept conică $g(x,y) = 0$ — şi presupunînd-o raportată la asimptotele ei — deci, $g(x,y) \equiv 2xy + a = 0$, $a = \text{const.}$ — ecuaţia fasciculului de conice se scrie

$$f(x,y) + k(2xy + a) = 0. \tag{61}$$

Pe de altă parte, ecuaţia care dă direcţiile axelor unei conice din fascicul este

$$(a_{12} + k)m^2 + (a_{11} - a_{22})m - (a_{12} + k) = 0.$$

Deoarece hiperbola echilateră este raportată la asimptotele ei, axele de coordonate sînt chiar asimptotele hiperbolei echilatere din fascicul. Atunci, o conică din fascicul are axele paralele cu asimptotele hiperbolei echilatere din fascicul, dacă are axele paralele cu axele de coordonate; deci, $m_1 = \infty$, $m_2 = 0$. Însă, ecuaţia direcţiilor axelor unei conice din fascicul admite aceste valori, dacă avem condiţia $a_{12} + k = 0$.

Deci, există în fascicul o conică ale cărei axe sînt paralele cu asimptotele hiperbolei echilatere. Luînd şi această conică drept conică de bază a fasciculului, ecuaţia ei este de forma

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

şi corespunde valorii $k = -a_{12}$ în fasciculul (61). Rezultă că ecuaţia unui fascicul de conice se poate scrie sub *forma canonică*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} + k(2xy + a) = 0. \tag{61'}$$

5) **Locul centrelor conicelor unui fascicul de conice.** Fie (55) ecuaţia unui fascicul de conice. Luînd derivatele în raport cu x şi y,

$$f_x + kg_x = 0, \qquad f_y + kg_y = 0$$

şi eliminînd pe k, deducem că *locul centrelor conicelor fasciculului* (55) *este conica*

$$f_x g_y - f_y g_x = 0. \tag{62}$$

Să considerăm diametrii conjugaţi unei direcţii m în raport cu conicele de bază $f = 0$ şi $g = 0$ ale fasciculului de conice. Aceşti diametri au ecuaţiile

$$f_x + mf_y = 0, \quad g_x + mg_y = 0. \tag{62'}$$

Eliminînd pe m, obţinem tot ecuaţia (62). Deci, locul centrelor conicelor unui fascicul de conice apare şi ca loc geometric al punctelor de intersecţie a diametrilor conjugaţi direcţiei m în raport cu conicele de bază ale fasciculului.

Fie A, B două din punctele de bază ale fasciculului. Diametrii (62') conjugaţi direcţiei dreptei AB trec prin mijlocul lui $\overline{AB}$, care este o coardă comună a conicelor de bază $f = 0$ şi $g = 0$. Deci, conica (62) trece prin mijloacele coardelor comune ale conicelor de bază (sînt şase astfel de mijloace).

Să presupunem că fasciculul de conice este redus la forma canonică (61'). În acest caz, locul centrelor conicelor fasciculului are ecuaţia

$$a_{11}x^2 - a_{22}y^2 + a_{13}x - a_{23}y = 0. \tag{62''}$$

Observăm că această conică trece prin originea axelor de coordonate, originea fiind centrul hiperbolei echilatere $g = 0$ a fasciculului. Observăm, de asemenea, că după cum conica de bază $f = 0$ este de gen eliptic (în particular un cerc) sau de gen hiperbolic (în particular o hiperbolă echilateră), conica (62'') este de gen hiperbolic (respectiv o hiperbolă echilateră) sau de gen eliptic (respectiv un cerc).

Deci, conica (62'') este un cerc numai în cazul cînd fasciculul este constituit din hiperbole echilatere. Acest cerc se numeşte *cercul lui Euler* sau *cercul celor nouă puncte*. Cercul lui Euler trece prin picioarele perpendicularelor coborîte din unul din cele patru puncte comune ale fasciculului pe dreapta formată din alte două asemenea puncte, deoarece perpendiculara şi dreapta constituie o conică degenerată a fasciculului, şi sînt trei astfel de conice degenerate. De asemenea, cercul trebuie să treacă prin mijloacele coardelor comune la cele două conice, şi sînt şase astfel de mijloace (fig.19).

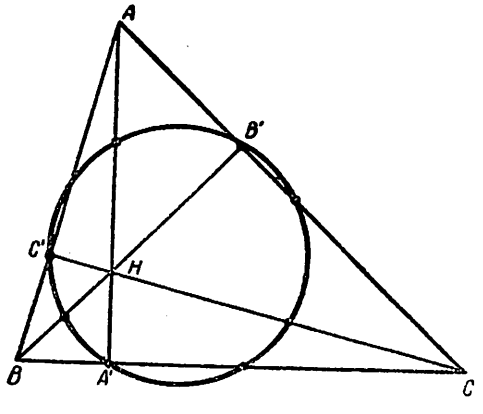


Fig. 19

Reţea de conice. Totalitatea conicelor care trec prin trei puncte fixe constituie o familie liniară de conice depinzînd de doi parametri, adică o reţea de conice.

Într-adevăr, ştiind că coordonatele celor trei puncte date verifică ecuaţia generală a unei conice, obţinem un sistem de trei ecuaţii în cinci parametri arbitrari. Punctele nefiind în poziţii speciale (de exemplu, punctele nu sînt coliniare), putem aplica regula lui Cramer, exprimînd trei necunoscute ca funcţii liniare de doi parametri. Obţinem astfel ecuaţia unei reţele de conice.

Ecuaţia unei reţele de conice se poate scrie sub forma

$$f(x, y) + \lambda g(x, y) + \mu h(x, y) = 0, \tag{63}$$

$f = 0$, $g = 0$, $h = 0$, fiind trei conice fixe, numite conice de bază sau fundamentale ale rețelei de conice.

Dacă conicele $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$ sînt date de ecuațiile (54), (54') și

$$h(x, y) = c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + 2c_{13}x + 2c_{23}y + c_{33} = 0, \qquad (63')$$

hiperbole echilatere aparținînd rețelei (63) satisfac condiția

$$a_{11} + a_{22} + \lambda (b_{11} + b_{22}) + \mu (c_{11} + c_{22}) = 0.$$

Această condiție constituind o ecuație liniară în λ, μ permite să scoatem pe λ (sau pe μ), abstracție făcînd de cazul cînd conicele de bază sînt hiperbole echilatere. În acest ultim caz, rețeaua este formată din hiperbole echilatere. Rezultă că, *în general, într-o rețea de conice există un fascicul de hiperbole echilatere.* Însă un fascicul de conice conține cel puțin o conică degenerată reală; deci, fasciculul de hiperbole echilatere conține cel puțin o pereche de drepte reale perpendiculare. Luînd această pereche de drepte ca axe de coordonate și drept una din conicele de bază ale rețelei, de exemplu a treia, avem

$$h(x, y) \equiv xy = 0.$$

Dacă hiperbolele echilatere degenerate sînt reale, această alegere se poate face în trei moduri diferite.

Fie hiperbola echilateră avînd axele paralele cu axele de coordonate. Această hiperbolă poate fi luată ca a doua conică de bază a rețelei; deci, putem lua

$$g(x, y) \equiv x^2 - y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0.$$

În aceste condiții, o conică a rețelei este un cerc dacă

$$a_{11} + \lambda = a_{22} - \lambda, \quad a_{12} + \mu = 0.$$

Deci, în orice rețea de conice există un cerc. Putem lua acest cerc drept conică de bază;

$$f(x, y) \equiv x^2 + y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Atunci, ecuația rețelei se scrie sub *forma canonică*

$$(1 + \lambda) x^2 + 2\mu xy + (1 - \lambda) y^2 + 2(a_{13} + \lambda b_{13}) x + 2(a_{23} + \lambda b_{23}) + \\ + a_{33} + \lambda b_{33} = 0. \qquad (63'')$$

Să căutăm parabolele din rețea. Trebuie să avem

$$(1 + \lambda)(1 - \lambda) - \mu^2 = 0;$$

deci, *există o infinitate de parabole în rețea, însă ele nu formează un fascicul.*

Aplicații. 1) **Rețea de conice circumscrise unui triunghi.** Fie trei puncte fixe A, B, C. Ecuația rețelei formate din totalitatea conicelor care trec prin punctele A, B, C se poate scrie sub forma (63), alegînd drept conice de bază ale rețelei: conica formată din BC și perpendiculara din A pe BC;

hiperbola echilateră cu axele paralele cu dreptele BC și perpendiculara din A pe BC; cercul C care trece prin punctele A, B, C.

În cazul cînd numai unul din punctele A, B, C este real, iar celelalte două sînt imaginar conjugate, această alegere a conicelor de bază se poate face numai într-un singur fel. În adevăr, numai o singură hiperbolă echilateră degenerată reală există în rețea; este hiperbola formată din dreapta care unește cele două puncte imaginar conjugate și perpendiculare din punctul real pe această dreaptă.

Să presupunem însă că punctele fixe A, B, C sînt reale. Atunci laturile triunghiului ABC:

$$BC \equiv d_1 = 0, \quad CA \equiv d_2 = 0, \quad AB \equiv d_3 = 0$$

sînt drepte reale. Luînd drept conice de bază ale rețelei conicele degenerate

$$f \equiv d_1 d_2 = 0, \quad g \equiv d_2 d_3 = 0, \quad h \equiv d_3 d_1 = 0,$$

putem scrie ecuația rețelei de conice circumscrise triunghiului ABC sub forma

$$d_1 d_2 + \lambda d_2 d_3 + \mu d_3 d_1 = 0. \tag{64}$$

În adevăr, conicele reprezentate de ecuația (64) trec prin vîrfurile triunghiului ABC. De exemplu, coordonatele vîrfului A al triunghiului care se află la intersecția dreptelor $d_2 = 0$, $d_3 = 0$ verifică ecuația (64).

2) **Rețeaua de conice care admit ca diametri conjugați două drepte date.** Fiind date dreptele neparalele

$$d_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \qquad d_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$$

ecuația rețelei de conice care admit cele două drepte ca diametri conjugați este

$$\lambda d_1^2 + \mu d_2^2 - 1 = 0. \tag{65}$$

În adevăr, diametrul conjugat direcției $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ a dreptei $d_1 = 0$ în raport cu conicele din rețeaua (65) este

$$b_1 f_x - a_1 f_y = 0,$$

sau, ținînd seamă de ecuația (65) a conicelor,

$$b_1(\lambda a_1 d_1 + \mu a_2 d_2) - a_1(\lambda b_1 d_1 + \mu b_2 d_2) = 0$$

sau încă

$$\mu(b_1 a_2 - a_1 b_2)\, d_2 = 0.$$

Cum cele două drepte date nu sînt paralele:

$$m_1 \neq m_2, \quad \text{sau} \quad -\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}, \quad \text{adică} \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0,$$

rezultă că diametrul conjugat direcției dreptei $d_1 = 0$, în raport cu conicele din rețeaua (65), este dreapta $d_2 = 0$.

Dacă cele două drepte $d_1 = 0$ și $d_2 = 0$ sînt perpendiculare, perechea de diametri conjugați sînt axele conicei cu centru; deci, ecuația rețelei de conice care admit două drepte perpendiculare ca axe este dată tot de formula (65).

3) **Rețeaua de conice care admit ca tangentă și ca diametru conjugat direcției tangentei două drepte date.** Dacă $d_1 = 0$ și $d_2 = 0$ sînt două drepte, ecuația rețelei de conice din plan care admit dreapta $d_1 = 0$ ca tangentă, iar dreapta $d_2 = 0$ ca diametru conjugat direcției tangentei este

$$d_2^2 = \lambda d_1 + \mu d_1^2. \tag{66}$$

În adevăr, intersectînd dreapta $d_1 = 0$ cu conicele din rețeaua (64), obținem

$$d_1 = 0, \qquad d_2^2 = 0,$$

adică dreapta $d_1 = 0$ intersectează conicele în două puncte confundate; deci este tangentă conicelor (66). Diametrul conjugat direcției $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ a tangentei $d_1 = 0$ în raport cu conicele din rețeaua (66) este

$$b_1 f_x - a_1 f_y = 0,$$

care se mai scrie

$$b_1(-2a_2d_2 + \lambda a_1 + 2\mu a_1 d_1) - a_1(-2b_2d_2 + \lambda b_1 + 2\mu b_1 d_1) = 0;$$

adică

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, d_2 = 0.$$

Cele două drepte date nefiind paralele, rezultă că dreapta $d_2 = 0$ este diametrul conjugat direcției tangentei $d_1 = 0$.

În cazul cînd cele două drepte sînt perpendiculare, rezultă că conica este raportată la tangenta într-un vîrf și axa care trece prin vîrful respectiv.

Familii liniare de conice depinzînd de trei sau de patru parametri. *a)* Să considerăm *o familie liniară de conice depinzînd de trei parametri*. Se poate arăta că o asemenea familie conține o rețea de hiperbole echilatere și un fascicul de cercuri.

Fie A și A' două puncte fixe. Putem totdeauna lua $A\,(a, 0)$ și $A'\,(-a, 0)$. Ecuația familiei de conice care trec prin punctele A și A' se poate scrie

$$C + \lambda C' + \mu(x - a)\, y + \nu\,(x + a)\, y = 0, \tag{67}$$

luînd drept conice de bază două cercuri C și C' din fasciculul de cercuri care trec prin A, A' și conicele

$$(x - a)\, y = 0, \qquad (x + a)\, y = 0,$$

formate din perechi de drepte perpendiculare care trec prin A, A'.

b) Se poate arăta că *o familie liniară de conice depinzînd de patru parametri* conține o familie de hiperbole echilatere depinzînd de trei parametri și o rețea de cercuri.

Fie A un punct fix. Translatînd originea axelor de coordonate în punctul A, ecuația familiei de conice care trec prin acest punct se poate scrie:

$$C + \lambda C' + \mu C'' + 2\nu xy + \rho (x^2 - y^2) = 0, \qquad (68)$$

dacă luăm drept conice de bază trei cercuri C, C', C'' care trec prin origine și conicele

$$xy = 0, \quad x^2 - y^2 = 0,$$

formate din perechi de drepte perpendiculare care trec prin origine.

§ 12. CONSTRUCȚII GEOMETRICE ALE CONICELOR

Posibilitatea descrierii unei conice prin puncte sau prin tangente rezultă din *teorema lui Pascal*, respectiv din *teorema lui Brianchon*.

Teorema lui Pascal. Dacă un hexagon este înscris într-o conică, laturile opuse se întîlnesc în puncte situate pe o dreaptă (dreapta lui Pascal), și invers, dacă un hexagon are această proprietate, vîrfurile lui se găsesc pe o conică.

Fie un hexagon $ABCDEF$ înscris într-o conică. Plecînd de la un vîrf și parcurgînd hexagonul într-un sens determinat, de exemplu de la A spre B, să notăm *) laturile consecutive cu (1), (2), (3), (4), (5), (6). Să arătăm că punctele de intersecție ale laturilor (1), (4); (2), (5) și (3), (6) sînt coliniare. Conica Γ, circumscrisă hexagonului dat, este circumscrisă patrulaterului $ABCD$ (fig. 20). Conica Γ are deci ecuația de forma

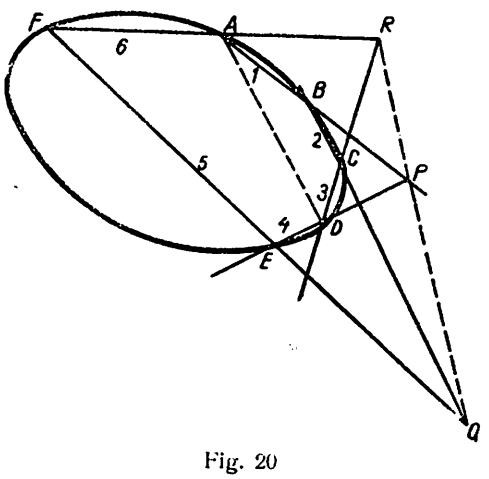


Fig. 20

$$(1)\ (3) + \lambda(2)(AD) = 0. \qquad (69)$$

De asemenea, conica Γ este circumscrisă patrulaterului $ADEF$; deci, ecuația ei este de forma

$$(4)\ (6) + \mu(5)(AD) = 0. \qquad (69')$$

Însă ecuațiile (69) și (69'), reprezentînd una și aceeași conică, au coeficienții proporționali, adică

$$(1).(3) + \lambda(2)\ (AD) \equiv k\ [(4)\ (6) + \mu(5)\ (AD)].$$

Această condiție se mai scrie

$$(1) \cdot (3) - k(4) \cdot (6) \equiv (AD) \cdot [k\ \mu\ (5) - \lambda(2)].$$

*) S-a notat prin (1), (2)... dreptele $d_1 = AB$, $d_2 = BC$,...

ceea ce arată că una şi aceeaşi curbă este reprezentată prin ecuaţia

$$(1) \cdot (3) - k(4) \cdot (6) = 0, \text{ respectiv } (AD) \cdot [k\mu(5) - \lambda(2)] = 0,$$

Prima ecuaţie reprezintă o conică care trece prin punctele de intersecţie P, A, D şi R respectiv ale dreptelor (1), (4); (1), (6); (3), (4) şi (3), (6). Cealaltă ecuaţie reprezintă o conică degenerată în dreapta (AD) şi într-o altă dreaptă,

$$k\mu(5) - \lambda(2) = 0,$$

ce trece prin punctul Q de intersecţie al dreptelor (2) şi (5).

Aşadar, prima ecuaţie reprezintă o conică ce trece prin punctele A, D, P, R, iar a doua ecuaţie reprezintă o conică degenerată în dreapta AB şi o dreaptă ce trece prin punctul Q. Însă cele două ecuaţii reprezentînd una şi aceeaşi conică, această conică este degenerată în dreptele AD şi PR, dreapta PR trecînd prin punctul Q. Deci, punctul Q se află pe dreapta PR, adică punctele P, Q, R sînt coliniare. Deci, punctele de intersecţie ale dreptelor (1), (4); (2). (5) şi (3), (6) sînt coliniare.

Dacă două puncte ale hexagonului înscris unei conice se confundă, atunci latura care uneşte aceste puncte devine tangenta în acel punct la conică şi hexagonul se reduce la un pentagon $ABCDE$ (fig. 21), latura (EF), de exemplu, reducîndu-se la tangenta ET în punctul $E \equiv F$ la conică. În acest caz, laturile (AB) şi (DE), (BC) şi (ET), (CD) şi (EA) se intersectează în trei puncte coliniare.

Fie $ABCE$ un patrulater înscris unei conice date (fig. 22). Putem considera hexagonul format de laturile (AB), (BC), tangenta (CT) în punctul $C \equiv D$, (CE), tangenta (ET') în punctul $E \equiv F$ şi (EA). Teorema lui Pascal afirmă că intersecţiile dreptelor (AB) şi (CE), (BC) şi (ET'), (CT) şi (EA) sînt trei puncte coliniare.

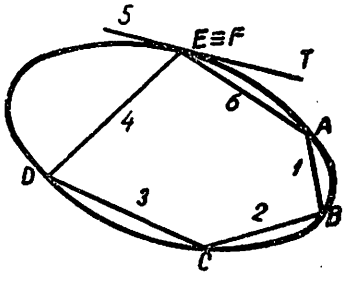


Fig. 21

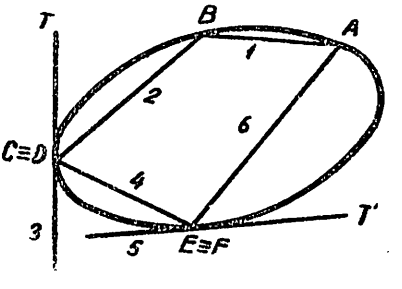


Fig. 22

De asemenea, fie un triunghi ABC înscris într-o conică (fig. 23). În acest caz putem considera hexagonul format din laturile triunghiului ABC şi din tangentele în A, B, C la conică. Rezultă că, fiind dat un triunghi înscris într-o conică, punctele de intersecţie ale tangentelor în vîrfuri la conică, respectiv cu laturile opuse ale triunghiului, sînt trei puncte coliniare.

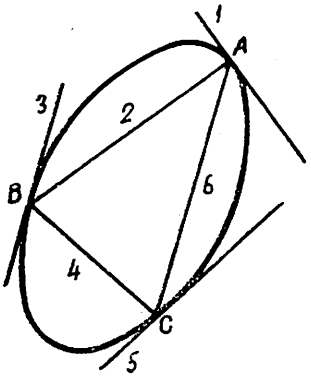


Fig. 23

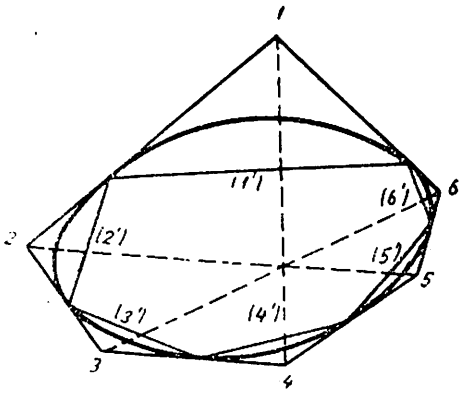


Fig. 24

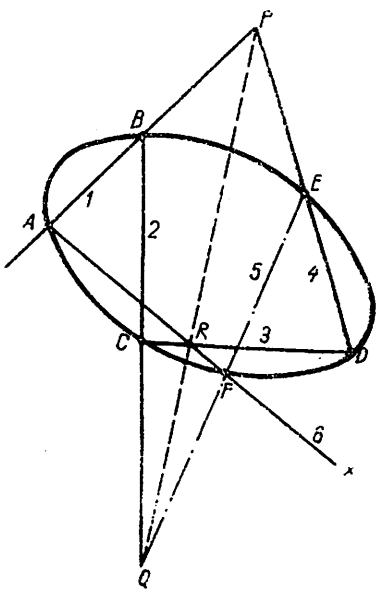


Fig. 25

Teorema lui Brianchon. Dacă un hexagon este circumscris unei conice, dreptele care unesc vîrfurile opuse trec printr-un punct (punctul lui Brianchon), şi invers, dacă un hexagon are această proprietate, laturile lui sînt tangente la o aceeaşi conică *.

Fie un hexagon circumscris unei conice date. Plecînd de la un vîrf şi parcurgînd hexagonul într-un sens determinat, să notăm vîrfurile cu *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*. Teorema lui Brianchon afirmă că dreptele care unesc vîrfurile *1* şi *4*, *2* şi *5*, *3* şi *6* sînt concurente. Pentru a demonstra această teoremă, să considerăm hexagonul (înscris conicei date) ale cărei vîrfuri sînt punctele de contact ale hexagonului circumscris (fig. 24). Să notăm cu (*1'*), (*2'*), (*3'*), (*4'*), (*5'*) (*6'*) laturile hexagonului înscris, ale căror poluri sînt vîrfurile *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*. Ţinînd seama de proprietatea 2) a polarităţii în raport cu o conică (v. §6), rezultă că polara punctului P, intersecţia dreptelor (*1'*) şi (*4'*), este dreapta care uneşte polurile *1* şi *4* ale dreptelor (*1'*), (*4'*). Deci, polarele punctelor P, Q, R în raport cu conica sînt dreptele (*1*, *4*), (*2*, *5*), (*3*, *6*). Cum punctele P, Q, R sînt coliniare, ţinînd seama de proprietatea 1) a polarităţii în raport cu o conică (v. §6), rezultă că polarele punctelor P, Q, R sînt concurente în polul O al dreptei pe care se găsesc punctele P, Q, R.

Aplicaţie. Construcţia unui punct al unei conice căreia i se cunosc cinci puncte. Fie A, B, C, D, E cinci puncte fixe în plan; aceste puncte determină o conică (fig. 25). Prin punctul A să ducem o dreaptă oarecare Ax. În conica determinată de cele cinci puncte date putem considera hexagonul înscris, avînd laturile $(AB) \equiv (1)$, $(BC) \equiv (2)$, $(CD) \equiv (3)$, $(DE) \equiv (4)$, $(Ax) \equiv (6)$. Însă (AB) şi (DE) se intersectează în P; (CD) şi (Ax) în R; deci, (PR) va intersecta pe (BC) în punctul Q, în care se intersectează dreptele $(BC) \equiv (2)$ şi $(EQ) \equiv (5)$. Deci, a cincea latură a hexagonului înscris în conică este (EQ). Dreapta (EQ) intersectează dreapta $(Ax) \equiv (6)$ într-un punct F, al şaselea vîrf al hexagonului înscris. Aşadar, punctul conicei situat pe dreapta (Ax) este F. Cînd (Ax) variază, punctul F descrie conica.

Obţinem astfel oricîte puncte vrem ale conicei determinate de cinci puncte date.

* Observăm că teorema lui Brianchon este *duală* teoremei lui Pascal.

PARTEA A PATRA

GEOMETRIA ÎN SPAȚIU

CAPITOLUL X

SISTEME DE COORDONATE ÎN SPAȚIU

§ 1. PROIECȚII

Fie u o axă de proiecție și π un plan, neparalel cu axa u (fig. 1). Proiecția paralelă cu planul π pe axa u a unui punct A este intersecția A' a axei u cu planul π_A, dus prin A paralel cu planul dat π. Dacă planul π este perpendicular pe axa u, *proiecția* se zice *ortogonală* (fig. 2).

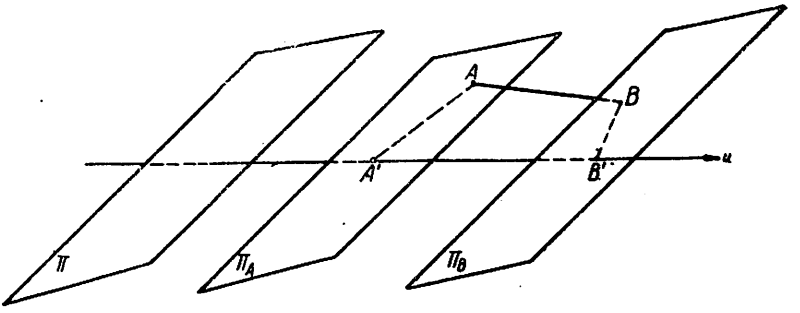


Fig. 1

Fie segmentul (orientat) $\overline{AB}$ și A', B' proiecțiile paralele cu planul π pe axa u ale extremităților A și B ale segmentului $\overline{AB}$. Lungimea $A'B'$ a seg-

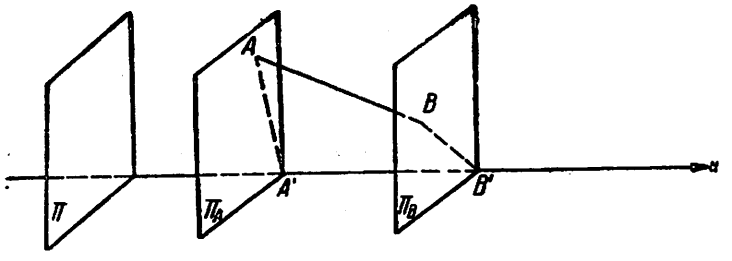


Fig. 2

mentului $\overline{A'B'}$ se numește proiecția paralelă cu planul π pe axa u a segmentului $\overline{AB}$; deci,

$$pr_u \overline{AB} = A'B'. \tag{1}$$

Observăm că dacă segmentul $\overline{AB}$ este paralel cu dreapta de proiecție u, atunci $pr_u\overline{AB} = AB$, iar dacă segmentul $\overline{AB}$ este paralel cu planul, atunci $pr_u \overline{AB} = 0$.

Deoarece segmentele $\overline{AB}$ și $\overline{BA}$ sînt egale și de semne contrare, rezultă că și proiecțiile lor sînt egale și de semne contrare, adică

$$pr_u\overline{AB} + pr_u\overline{BA} = 0, \tag{1'}$$

ceea ce are loc dacă ținem seama de relația (5) din capitolul I.

Fie $\overline{P_1P_2}$ și $\overline{P_2P_3}$ două segmente (orientate). Segmentul $\overline{P_1P_3}$ se numește *rezultanta* sau *suma* segmentelor $\overline{P_1P_2}$ și $\overline{P_2P_3}$; în scris

$$\overline{P_1P_3} = \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3}. \tag{2}$$

În general, rezultanta liniei poligonale $P_1P_2 \dots P_n$, determinată de segmentele $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$, este segmentul $\overline{P_1P_n}$ care închide această linie poligonală; deci

$$\overline{P_1P_n} = \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \dots + \overline{P_{n-1}P_n}. \tag{2'}$$

Observăm că avem

$$\overline{P_1P_2} + (\overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4}) = (\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3}) + \overline{P_3P_4}. \tag{2''}$$

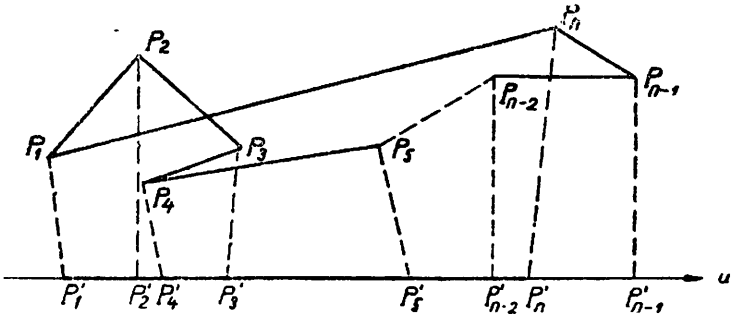


Fig. 3

Proiectînd paralel cu planul π pe dreapta u, linia poligonală $P_1P_2 \dots P_n$, rezultă (pe dreapta u) relația (fig. 3)

$$\overline{P'_1P'_n} = \overline{P'_1P'_2} + \overline{P'_2P'_3} + \dots + \overline{P'_{n-1}P'_n},$$

unde $P'_1, \dots, P'_n$ sînt proiecțiile paralele cu planul π pe dreapta u ale vîrfurilor $P_1, \dots, P_n$ ale conturului; deci avem

$$pr_u\overline{P_1P_n} = pr_u\overline{P_1P_2} + pr_u\overline{P_2P_3} + \dots + pr_u\overline{P_{n-1}P_n}, \tag{3}$$

adică: *proiecția paralelă cu un plan pe o axă a unui contur poligonal este egală cu proiecția rezultantei acelui contur.* Dacă ținem seama de (2') în (3), mai rezultă că

$$\mathrm{pr}_u(\overline{P_1P_2} + \ldots + \overline{P_{n-1}P_n}) = \mathrm{pr}_u\overline{P_1P_2} + \ldots + \mathrm{pr}_u\overline{P_{n-1}P_n}, \qquad (3')$$

adică: *proiecția unei linii poligonale este egală cu suma proiecțiilor laturilor liniei poligonale* (proiecția unei sume este egală cu suma proiecțiilor). Dacă ținem seama de (1') în (3'), rezultă

$$\mathrm{pr}_u(P_1P_2 \ldots P_nP_1) = 0, \qquad (3'')$$

adică: *proiecția unui contur poligonal închis* $P_1P_2 \ldots P_nP_1$ *este nulă.*

Deducem

Propoziție. Două contururi poligonale având aceeași origine și aceeași extremitate au aceleași proiecții paralele cu un plan pe o axă.

Fie $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ două segmente paralele și — printr-un punct O al axei de proiecție u — dreapta v, paralelă cu segmentele $\overline{AB}, \overline{CD}$ (fig. 4).

Planele π_A, π_B, π_C, π_D, duse prin A, B, C, D, paralele cu planul π intersectează axele u și v, respectiv în punctele A', B', C', D' și A'', B'', C'', D'';

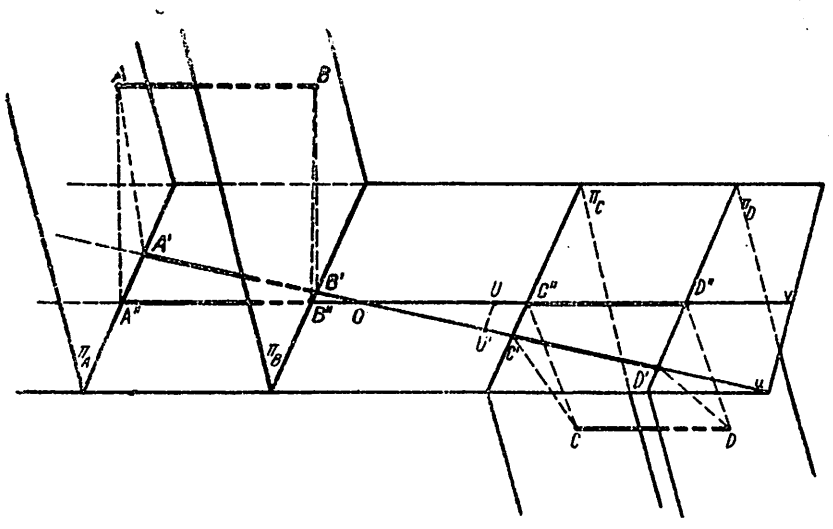


Fig. 4

$A'B'$ și $C'D'$ sînt proiecțiile segmentelor $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ pe axa u, iar $A''B''$ și $C''D''$ sînt proiecțiile acestor segmente pe axa v. Avem

$$\mathrm{pr}_u\overline{AB} = A'B',\ \mathrm{pr}_u\overline{CD} = C'D';\ \mathrm{pr}_v\overline{AB} = A''B'' = AB, \qquad (4)$$

$$\mathrm{pr}_v\,\overline{CD} = C''D'' = CD.$$

Însă dreptele $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, $D'D''$, sînt paralele, ca fiind intersecțiile planului σ (format de axele de proiecție u,v) cu planele paralele π_A, π_B, π_C, π_D.

Așadar, în planul σ, paralelele $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, $D'D''$ sînt tăiate de secantele u, v; deci avem

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{C''D''}}.$$

Dacă ținem seama de relațiile (4), obținem

$$\frac{\mathrm{pr}_u \overline{AB}}{\mathrm{pr}_u \overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}. \tag{5}$$

Deducem

Propoziție. Raportul proiecțiilor paralele cu un plan pe o dreaptă a două segmente paralele este egal cu raportul celor două segmente.

Relația (5) se mai scrie

$$\mathrm{pr}_u \overline{AB} = \frac{\mathrm{pr}_u \overline{CD}}{\overline{CD}} \cdot \overline{AB}. \tag{5'}$$

Consecințe. *a)* Fie pe dreapta v segmentul $\overline{OU}$, astfel încît $OU = 1$; deci, prin punctul O al axei u se deduce segmentul $\overline{OU}$ paralel cu $\overline{AB}$ și egal cu unitatea. Dacă U' este proiecția punctului U pe axa u și dacă proiecția este ortogonală, atunci triunghiul OUU' este dreptunghic. Deci, însemnînd cu θ unghiul UOU' (θ este unghiul format de axa u cu segmentul $\overline{AB}$), obținem

$$OU' = \cos\theta. \tag{6}$$

Atunci relația (5') devine

$$\mathrm{pr}_u \overline{AB} = AB \cdot \cos\theta. \tag{7}$$

Așadar:

Proiecția ortogonală a unui segment pe o axă este egală cu produsul dintre lungimea acelui segment și cosinusul unghiului format de segmentul dat cu axa de proiecție.

b) Fie un punct P pe segmentul $\overline{AB}$, care împarte segmentul $\overline{AB}$ într-un raport dat:

$$(ABP) = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = k, \qquad (k = \text{const.})$$

Deoarece segmentele $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ sînt paralele, rezultă că proiecția P' a punctului P pe axa u, în raport cu planul π satisface relația (5), deci avem

$$\frac{\mathrm{pr}_u \overline{AP}}{\mathrm{pr}_u \overline{BP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}.$$

Însă * (fig. 5)

$$(A'B'P') = \frac{\overline{A'P'}}{\overline{B'P'}} = \frac{\mathrm{pr}_u \overline{AP}}{\mathrm{pr}_u \overline{BP}} = \mathrm{pr}_u(ABP);$$

deci

$$\mathrm{pr}_u(ABP) = (ABP). \tag{8}$$

Așadar:

Proiecția paralelă cu un plan pe o axă lasă neschimbată valoarea raportului simplu a trei puncte coliniare.

§ 2. COORDONATE CARTEZIENE

Se spune că avem un *sistem de coordonate* în spațiu, dacă s-a dat o corespondență biunivocă și continuă între punctele spațiului și mulțimea complexelor ordonate de trei numere (ternelor ordonate de numere). *Coordonatele* unui punct P al spațiului sînt numerele x, y, z ale ternei ordonate, atașate punctului P, și caracterizează poziția lui P față de un sistem de referință. Pe scurt, vom scrie

$$P(x, y, z)$$

și vom citi: punctul P de coordonate x, y, z. Un *sistem de referință* (reper) în spațiu este o figură geometrică, constituită dintr-un număr de elemente (puncte, drepte etc.) ale spațiului, cu ajutorul căruia se introduce sistemul de coordonate.

Există diferite moduri de a introduce un sistem de coordonate în spațiu. Coordonatele cele mai des întrebuințate sînt *coordonatele carteziene*. Pentru introducerea lor să considerăm, în spațiu, un sistem de referință constituit

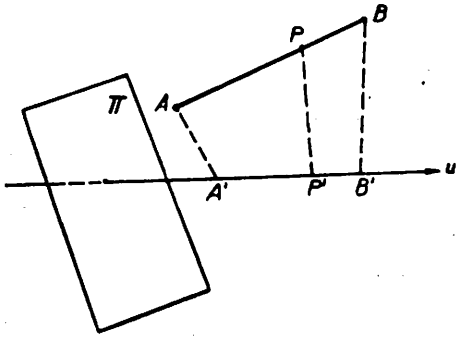


Fig. 5

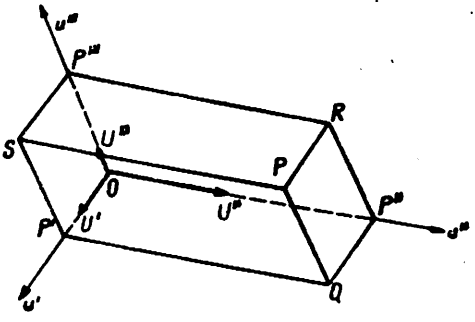


Fig. 6

din trei drepte orientate u', u'', u''' necoplanare și concurente într-un punct O (fig. 6). Pe fiecare dreaptă dată putem introduce un sistem de coordonată abscisă, astfel încît originea sistemelor de coordonată abscisă să coincidă cu punctul O, iar unitățile lor de măsură să fie sau nu congruente între ele (în primul caz, ele sînt congruente cu o unitate de măsură a lungimilor

* A se vedea observația de la p. 84.

din spațiu); un astfel de sistem de referință se numește *cartezian*. Dreptele orientate Ou', Ou'', Ou''' se numesc axe de coordonate ale sistemului de referință cartezian, iar planele $Ou'u''$, $Ou''u'''$, $Ou'''u'$ — plane de coordonate, punctul O fiind originea sistemului de referință.

Fie P un punct din spațiu. Prin punctul P să ducem plane paralele cu planele de coordonate ale sistemului de referință astfel ales. Se formează un paralelipiped care are originea O și punctul P ca vîrfuri opuse (fig. 6). Dacă notăm cu P', P'', P''' proiecțiile paralele cu planele de coordonate ale punctului P, respectiv pe axele de coordonate, rezultă că punctele P', P'', P''' sînt respectiv vîrfurile situate pe cele trei axe de coordonate ale paralelipipedului considerat. Punctele P', P'', P''' au — în raport cu sistemul de coordonată abscisă introdus pe dreapta pe care se găsește — respectiv coordonatele x, y, z adică *

$$\overline{OP'} = x \cdot \overline{OU'}\ ,\ \overline{OP''}\ y =. \overline{OU''},\ \overline{OP'''} = z \cdot \overline{OU'''}. \tag{9}$$

Vom atașa punctului P din spațiu terna ordonată de numere (x, y, z), între punctul P și terna ordonată de numerele (x, y, z) existînd o corespondență biunivocă și ordonată. În adevăr, dîndu-se cele trei numere x, y, z, se poate construi cu ele un paralelipiped, cu unul din vîrfurile în O și avînd ca muchii segmentele $\overline{OP'}$, $\overline{OP''}$, $\overline{OP'''}$, date respectiv de relațiile (9); vîrful P opus lui O în acest paralelipiped este punctul care corespunde coordonatelor x, y, z. Deci, corespondența dintre punctul P din spațiu și terna ordonată de numere (x, y, z) este biunivocă. Corespondența este și continuă. În adevăr, punctul $P(x, y, z)$, ale căror coordonate diferă de trei valori a, b, c cu mai puțin decît δ, se găsesc în interiorul unui paralelipiped cu centrul în punctul $Q(a, b, c)$, cu laturile paralele cu dreptele u', u'', u''', și de lungime 2δ, $2k\delta$, $2k'\delta$, dacă $OU'' = k \cdot OU'$, $OU''' = k' \cdot OU'$. Cu alte cuvinte, pentru δ foarte mic, punctul $P(x, y, z)$ este foarte aproape de punctul $Q(a, b, c)$.

Deci, un punct P din spațiu este determinat, în raport cu un sistem de referință cartezian $Oxyz$, de trei coordonate x, y, z, numite *coordonate carteziene* ale punctului P. Se obișnuiește să se spună că *x este abscisa, y ordonata și z cota punctului P*. Atunci, dreptele u', u'', u''' vor fi respectiv axa Ox, axa Oy și axa Oz. Spațiul raportat la un sistem de referință cartezian $Oxyz$ îl vom nota $E_3(x, y, z)$.

Observăm (fig. 6) că

$$x = OP',\quad y = P'Q \cdot \qquad z = QP,$$

unde Q este vîrful din planul Oxy al paralelipipedului considerat (intersecția planului Oxy cu paralela prin P la axa Oz), deci linia poligonală $OP'QP$ determină terna de coordonate a punctului P. De asemenea, terna de coordonate este determinată de liniile poligonale $OP''RP$, $OP'''SP$ etc. Coordonatele carteziene x, y, z se zic *normale* sau *nenormale*, după cum unitățile de măsură ale axelor de coordonate sînt sau nu sînt congruente între ele (în primul caz, lungimile sînt măsurate cu aceeași unitate de lungime). De obicei se întrebuințează sisteme de coordonate normale.

---

* Deci, $x = OP'$, $y = OP''$, $z = OP'''$ sînt lungimile segmentelor $\overline{OP'}$, $\overline{OP''}$, $\overline{OP'''}$ măsurate respectiv cu unitățile de lungime ale axelor de coordonate.

Triedrul de axe de coordonate *Oxyz* este orientat *sinistrorsum*, dacă un observator așezat de-a lungul axei *Oz*, cu fața în direcția pozitivă a axei *Ox*, vede direcția pozitivă a axei *Oy* la stînga lui. În caz contrar, sistemul se numește *dextrorsum*. Observăm că, schimbînd orientarea pe una din axe sau schimbînd două axe între ele, se trece de la o orientare la alta a sistemului de coordonate. De obicei se întrebuințează sisteme de axe orientate sinistrorsum. Sistemul de coordonate se zice că este un sistem de *coordonate carteziene ortogonale*, dacă axele de coordonate sînt perpendiculare între ele. În acest caz, coordonatele unui punct P reprezintă distanțele orientate de la punctul P la planele de coordonate (fig. 7). De obicei se întrebuințează sisteme de coordonate carteziene ortogonale.

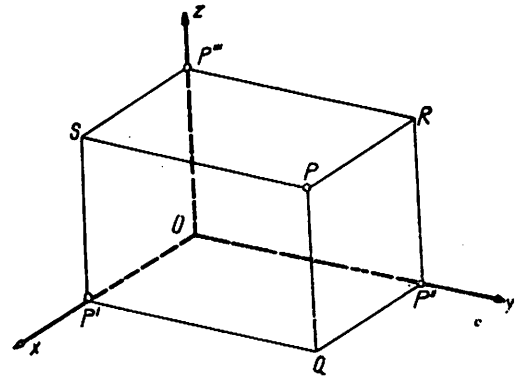


Fig. 7

Și în spațiu putem considera, ca și în plan, puncte ale căror coordonate sînt date prin numere complexe. Astfel de puncte se numesc *puncte imaginare* în spațiu, ele neputînd fi reprezentate geometric în spațiu. Uneori, operînd cu puncte imaginare, se poate întîmpla să se obțină elemente reale.

Coordonatele carteziene în spațiu au fost introduse în prima jumătate a secolului al XVIII-lea de către *P. La Hire* și *A. Clairaut*. Cu alte cuvinte, abia după un secol de la crearea geometriei analitice (în plan) de către P. Fermat și R. Descartes se studiază figurile din spațiu, raportîndu-le la un sistem de referință constituit din trei axe concurente, ortogonale două cîte două. În lucrarea sa, *Traité des courbes à double courbure* (1731), Clairaut introduce astfel de sisteme de referință, coordonatele unui punct numindu-le carteziene.

Aplicații. 1) **Coordonatele punctului care împarte un segment într-un raport dat.** Fie două puncte $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$. Pentru a determina coordonatele (x,y,z) ale punctului P, care împarte segmentul $\overline{P_1P_2}$ în raportul $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = k$, vom ține sema de proprietatea (8):

$$\mathrm{pr}_x(P_1P_2P) = \mathrm{pr}_y(P_1P_2P) = \mathrm{pr}_z(P_1P_2P) = (P_1P_2P).$$

Din aceste egalități găsim

$$\frac{x-x_1}{x_2-x} = k, \quad \frac{y-y_1}{y_2-y} = k, \quad \frac{z-z_1}{z_2-z} = k;$$

rezolvînd în raport cu x,y,z, obținem

$$x = \frac{x_1+kx_2}{1+k}, \quad y = \frac{y_1+ky_2}{1+k}, \quad z = \frac{z_1+kz_2}{1+k}. \tag{10}$$

Acestea sînt coordonatele punctului P, care împarte segmentul $\overline{P_1P_2}$ într-un raport k dat, cînd se cunosc coordonatele extremităților segmentului.

În particular, cînd punctul P este mijlocul segmentului $\overline{P_1P_2}$, avem $k = 1$ și, prin urmare, *coordonatele mijlocului unui segment* sînt date de formulele

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{10'}$$

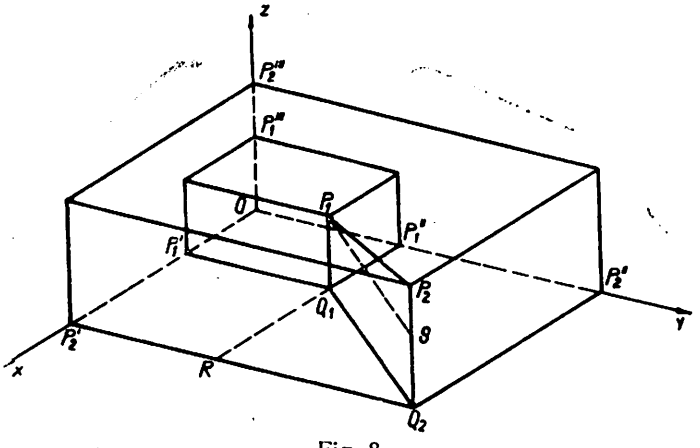


Fig. 8

2) **Distanța între două puncte.** Fiind date două puncte P_1, P_2, ale căror coordonate față de un sistem de axe ortogonale $Oxyz$ sînt respectiv x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, să calculăm distanța între cele două puncte. Fie Q_1 și Q_2 proiecțiile punctelor P_1 și P_2 în planul xOy, iar P_1', P_2'; P_1'', P_2''; P_1''', P_2''' proiecțiile ortogonale (după plane paralele cu planele de coordonate), respectiv pe axele Ox, Oy, Oz (fig. 8). Avem

$$Q_1R = P_1'P_2' = x_2 - x_1, \qquad RQ_2 = P_1''P_2'' = y_2 - y_1.$$

Deci, în triunghiul dreptunghic Q_1RQ_2 din planul xOy, cu unghiul drept în R (deoarece Q_1R este paralelă cu axa Ox, iar RQ_2 paralelă cu axa Oy, axele Ox, Oy fiind perpendiculare), aplicînd teorema lui Pitagora, obținem

$$Q_1Q_2^2 = Q_1R^2 + RQ_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

În planul $P_1Q_1Q_2P_2$ avem triunghiul dreptunghic P_1SP_2, cu unghiul drept în S (deoarece P_1S este paralela dusă prin P_1 la Q_1Q_2 din planul xOy, iar P_2S este paralelă cu axa Oz, axa Oz fiind perpendiculară pe planul xOy). Deducem

$$Q_2S = Q_1P_1 = OP_1''' = z_1, \quad Q_2P_2 = OP_2''' = z_2;$$

deci

$$SP_2 = Q_2P_2 - Q_2S = z_2 - z_1.$$

Aplicînd din nou teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic P_1SP_2, obținem

$$P_1P_2^2 = P_1S^2 + SP_2^2 = Q_1Q_2^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z_2 - z_1)^2.$$

Așadar, distanța în valoare și semn (orientată) între două puncte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ și $P_2(x_2, y_2, z_2)$ este dată de formula

$$P_1P_2 = \pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \qquad (11)$$

semnul fiind acela al lui $z_2 - z_1$, dacă $z_2 - z_1$ nu este nul, altfel el determinîndu-se după regula semnelor unei distanțe în plan.

Observăm că, ducînd prin P_1, P_2 plane paralele cu planele de coordonate, se obține un paralelipiped (fig. 9); laturile acestui paralelipiped sînt

$$P_1Q = x_2 - x_1, \quad QR = y_2 - y_1, \quad RP_2 = z_2 - z_1.$$

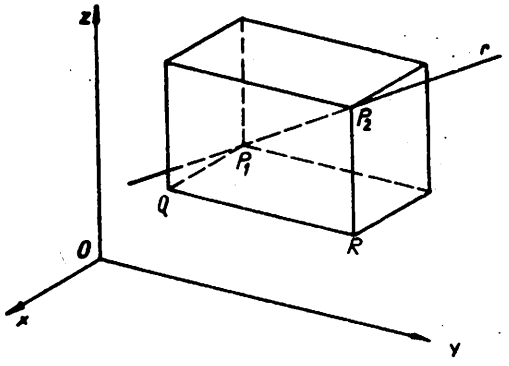


Fig. 9

Rezultă că distanța orientată $d = P_1P_2$ între cele două puncte date, fiind diagonala paralelipipedului, este dată de formula

$$P_1P_2^2 = P_1Q^2 + QR^2 + RP_2^2,$$

de unde rezultă (11).

§ 3. DIRECȚIA UNEI DREPTE ÎN SPAȚIU

Steaua de drepte de centru O. *Se numește stea de drepte de centru* O totalitatea dreptelor din spațiu care trec prin punctul O.

Dacă O este originea sistemului cartezian ortogonal de axe $Oxyz$, orice dreaptă r din stea este determinată de unghiurile α, β, γ, pe care le face respectiv cu axele de coordonate Ox, Oy, Oz.

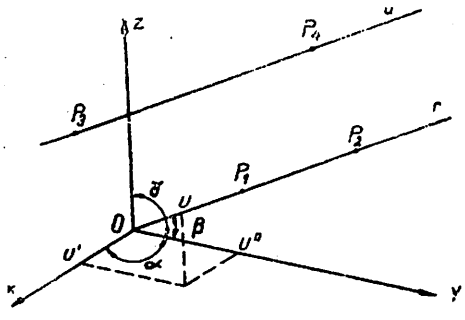


Fig. 10

Pe orice dreaptă r din steaua de centru O se poate introduce un sistem de coordonată absciă cu originea în O (unitatea de măsură fiind egală cu unitatea de măsură aleasă în spațiu).

Dacă α, β, γ sînt unghiurile dreptei r cu axele de coordonate Ox, Oy, Oz, punctul unitate U al dreptei r (fig. 10) are coordonatele

$$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma. \qquad (12)$$

Deci, dreapta r din steaua de centru O este unic determinată de punctul U, ale cărui coordonate în sistemul $Oxyz$ au valorile (12) (unei terne ordonate de numere îi corespunde un unic punct în spațiu). Cu alte cuvinte, direcția

unei drepte în spațiu este determinată de valorile (12), care din această cauză se numesc *cosinusurile directoare ale dreptei r.*

Dacă ținem seama că $OU^2 = 1$, găsim

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (12')$$

Putem deci enunța *proprietatea*: *suma pătratelor cosinusurilor directoare ale unei drepte este egală cu unitatea.*

Observăm că dacă schimbăm semnul cosinusurilor directoare, se schimbă și orientarea direcției, adică sensul.

Însă, o dreaptă din steaua de centru O poate fi orientată astfel: dacă dreapta r aparține planului Oxy, dreapta se poate orienta după criteriul adoptat în capitolul V, § 1. Dacă dreapta r nu aparține planului Oxy, dreapta r se poate orienta astfel încît sistemul $Oxyr$ (format de dreaptă cu axele Ox, Oy) să aibă aceeași orientare ca triedrul fundamental $Oxyz$. Deci, dacă dreapta este orientată, cota punctului U trebuie să fie un număr nenegativ, $\cos\gamma \geqslant 0$.

Observăm, de asemenea, că este suficient să cunoaștem numai două din cosinusurile directoare ale dreptei r, pentru a afla direcția acestei drepte, relația (12') fiind valabilă oricare ar fi direcția din spațiu.

Rezultă că într-o stea de drepte de centru O, poziția unei drepte r din stea este determinată de două coordonate. Cu alte cuvinte, o stea de drepte de centru O constituie o formă fundamentală de-a doua speță. În adevăr, într-o stea de drepte se poate introduce un sistem de coordonate, astfel încît determinarea dreptelor din stea să se facă cu ajutorul a două coordonate. Pentru aceasta alegem un plan fix π, care să treacă prin centrul stelei de drepte, și în acest plan o dreaptă a. De asemenea, fie b perpendiculara prin O la planul π. Atunci, o dreaptă oarecare r din stea este determinată de unghiul θ, pe care dreapta r îl face cu b, și de unghiul φ, pe care urma planului (br) pe planul π îl face cu dreapta a (fig.11). Invers, la orice sistem de valori ale lui θ între 0 și $\frac{\pi}{2}$ și ale lui φ între 0 și 2π, corespunde o dreaptă în plan.

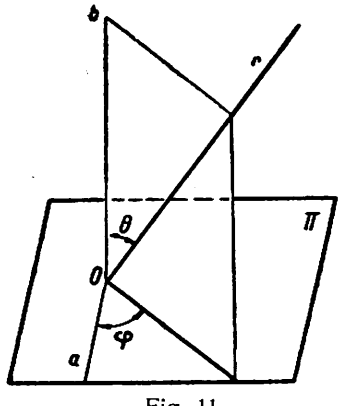


Fig. 11

Dar o dreaptă r din steaua de centru O este determinată de oricare alte două puncte P_1 și P_2 ale dreptei, încît direcția dreptei r trebuie să fie caracterizată și de segmentul $\overline{P_1P_2}$ de pe dreaptă. În adevăr, segmentele $\overline{OU}$ și $\overline{P_1P_2}$ fiind paralele și ținînd seama de formula (5), avem

$$\frac{\mathrm{pr}_u\overline{P_1P_2}}{\mathrm{pr}_u\overline{OU}} = \frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{OU}} = P_1P_2,$$

lungimea segmentului $\overline{OU}$ fiind egală cu unitatea. Dacă proiectăm pe axele Ox, Oy, Oz, obținem

$$\frac{\mathrm{pr}_x\overline{P_1P_2}}{\mathrm{pr}_x\overline{OU}} = \frac{\mathrm{pr}_y\overline{P_1P_2}}{\mathrm{pr}_y\overline{OU}} = \frac{\mathrm{pr}_z\overline{P_1P_2}}{\mathrm{pr}_z\overline{OU}}.$$

Însă cum:

$$\mathrm{pr}_x\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1, \quad \mathrm{pr}_y\overline{P_1P_2} = y_2 - y_1, \quad \mathrm{pr}_z\overline{P_1P_2} = z_2 - z_1,$$

$$\mathrm{pr}_x\overline{OU} = \cos\alpha, \qquad \mathrm{pr}_y\overline{OU} = \cos\beta, \qquad \mathrm{pr}_z\overline{OU} = \cos\gamma$$

și punînd

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1, \tag{13}$$

găsim

$$\frac{l}{\cos\alpha} = \frac{m}{\cos\beta} = \frac{n}{\cos\gamma}. \tag{14}$$

Numind *parametri directori* ai dreptei proiecțiile (13) pe axele de coordonate ale unui segment oarecare $\overline{P_1P_2}$ de pe dreaptă, relațiile (14) exprimă că *parametrii directori ai unei drepte sînt proporționali cu cosinusurile directoare ale dreptei*. Observăm că parametrii directori ai dreptei sînt determinați prin relațiile (14), abstracție făcînd de un factor de proporționalitate.

Cu alte cuvinte, fiind date cosinusurile directoare (12) ale dreptei r, se poate determina o ternă de parametri directori (13), multiplicînd cosinusurile directoare cu un factor ρ. În adevăr, din (14) rezultă

$$l = \rho\cos\alpha, \quad m = \rho\cos\beta, \quad n = \rho\cos\gamma, \tag{14'}$$

unde ρ este un factor de proporționalitate. Făcînd suma pătratelor și ținînd seama de formula (12'), obținem

$$l^2 + m^2 + n^2 = \rho^2,$$

încît formulele (14') se pot scrie

$$\cos\alpha = \frac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \quad \cos\beta = \frac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{n}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \tag{14''}$$

semnul dinaintea radicalului fiind determinat astfel încît $\cos\gamma \geqslant 0$.

Deci este adevărată și reciproca propoziției precedente: dată fiind o ternă de parametri directori ai dreptei r, cosinusurile directoare ale aceleiași drepte sînt bine determinate prin formulele (14'').

Trebuie observat că parametrii directori l, m, n nu dau o direcție orientată. În adevăr, dacă (12) sînt cosinusurile directoare ale dreptei r, formulele (14') dau pentru $\rho < 0$ cealaltă orientare a dreptei r.

Orientarea dreptelor în spațiu. Orice dreaptă u din spațiu poate fi orientată într-un singur mod, luînd ca sens pozitiv de parcurs acela dat de paralela r la u prin punctul O. Se poate, de altfel, observa că planul Oxy împarte spațiul în două regiuni, din care una conține partea pozitivă a axei Oz, cealaltă regiune conținînd partea negativă a acestei axe. Însă, dreapta u intersectează planul Oxy într-un punct R. Deci, dreapta u poate fi orientată astfel încît, dacă R este considerat ca origine, partea pozitivă a dreptei este în regiunea care conține partea pozitivă a axei Oz.

O dreaptă u din spațiu face cu axele de coordonate aceleași unghiuri α, β, γ, pe care le face paralela r dusă la u prin originea O. Deci, formulele (12) reprezintă și cosinusurile directoare ale dreptei u.

Fie pe dreapta u două puncte oarecare P_3 și P_4 (fig. 10). Segmentele $\overline{P_1P_2}$ (de pe dreapta r) și $\overline{P_3P_4}$ (de pe dreapta u) fiind paralele, putem aplica proprietatea (5). Proiectînd pe axele de coordonate, avem

$$\frac{\mathrm{pr}_x\overline{P_1P_2}}{\mathrm{pr}_x\overline{P_3P_4}} = \frac{\mathrm{pr}_y\overline{P_1P_2}}{\mathrm{pr}_y\overline{P_3P_4}} = \frac{\mathrm{pr}_z\overline{P_1P_2}}{\mathrm{pr}_z\overline{P_3P_4}}.$$

Însă cum

$$l = \mathrm{pr}_x\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1, \quad m = \mathrm{pr}_y\overline{P_1P_2} = y_2 - y_1, \quad n = \mathrm{pr}_z\overline{P_1P_2} = z_2 - z_1,$$

$$l' = \mathrm{pr}_x\overline{P_3P_4} = x_4 - x_3, \quad m' = \mathrm{pr}_y\overline{P_3P_4} = y_4 - y_3, \quad n = \mathrm{pr}_z\overline{P_3P_4} = z_4 - z_3,$$

obținem

$$\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}, \tag{15}$$

adică: *două drepte de parametri directori l,m,n; l', m', n' sînt paralele, dacă acești parametri sînt proporționali, și invers.* Altfel spus, o direcție în spațiu este determinată de o ternă de numere l, m, n, abstracție făcînd de un factor de proporționalitate. Observăm că dacă un punct $P_0(x_0, y_0, z_0)$ nu este pe dreapta P_1P_2 de parametri directori l, m, n, atunci parametrii direcției P_1P_0 sau ai direcției P_2P_0 nu sînt proporționali cu l, m, n. Deci, *o direcție în spațiu este bine definită dacă sînt dați parametrii directori ai direcției*, condițiile (15) fiind condițiile de paralelism între două drepte.

Aplicație. Unghiul a două drepte. Se înțelege prin unghi a două drepte u, u' din spațiu unghiul format de paralelele orientate r, r', duse prin originea O la dreptele date u, u' (fig. 12).

Fie α, β, γ și α', β', γ', unghiurile pe care dreptele u, u' le fac respectiv cu axele de coordonate. Să considerăm punctele U și U' respectiv pe dreptele r și r' (în direcția pozitivă a dreptelor r și r'), astfel încît $OU^2 = OU'^2 = 1$. Din triunghiul OUU', conform teoremei generalizate a lui Pitagora, deducem

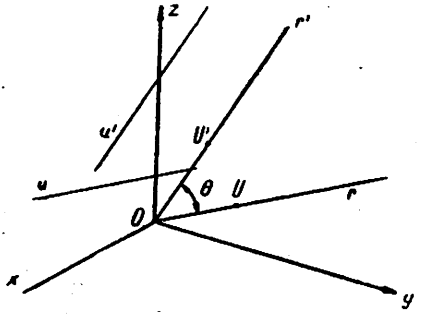


Fig. 12

$$UU'^2 = OU^2 + OU'^2 - 2OU \cdot OU' \cos\theta = 2 - 2\cos\theta, \tag{16}$$

unde $\theta = \widehat{rr'}$. Ținînd seama că

$$U(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

$$U'(\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma'),$$

avem

$$UU'^2 = (\cos\alpha - \cos\alpha')^2 + (\cos\beta - \cos\beta')^2 + (\cos\gamma - \cos\gamma')^2.$$

Însă cosinusurile directoare ale unei drepte satisfac relația (12'), încît

$$UU'^2 = 2 - 2(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'). \qquad (16')$$

Din (16) și (16') rezultă

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'. \qquad (17)$$

Așadar: *cosinusul unghiului a două drepte u, u' este egal cu suma produselor cosinusurilor unghiurilor celor două drepte cu axele de coordonate.* Dacă l, m, n și l', m', n' sînt parametrii directori ai celor două drepte u și u', și ținînd seama de formulele (14''), formula (17) se scrie

$$\cos\theta = \frac{ll' + mm' + nn'}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}. \qquad (17')$$

Dacă dreptele u, u' sînt ortogonale, deci $\theta = \frac{\pi}{2}$, rezultă

$$ll' + mm' + nn' = 0; \qquad (17'')$$

adică: două drepte u, u' *sînt ortogonale, dacă parametrii lor directori* l, m, n; l', m', n' *satisfac condiția* (17').

§ 4. TRANSFORMĂRI DE COORDONATE CARTEZIENE

Fiind date două sisteme de coordonate ortogonale în spațiu, $Oxyz$ și $O'x'y'z'$, a căror poziție este cunoscută, se pune problema de a determina coordonatele unui punct P față de unul din sistemele de coordonate, dacă se cunosc coordonatele punctului dat față de celălalt sistem de coordonate. Aceasta se reduce la determinarea legăturii care există între coordonatele x, y, z și x', y', z' ale unui punct P, față de cele două sisteme de coordonate.

Translație de axe. Să presupunem că cele două sisteme de referință carteziene ortogonale au axele paralele și au aceeași orientare, deci că sistemul $O'x'y'z'$ se obține din sistemul $Oxyz$ printr-o translație.

În acest caz, poziția sistemului de coordonate $O'x'y'z'$ față de sistemul de coordonate $Oxyz$ este complet determinată, dacă se cunosc coordonatele x_0, y_0, z_0 ale originii O' față de sistemul $Oxyz$.

Fie P un punct din spațiu, care are coordonatele x,y,z față de sistemul $Oxyz$ și coordonatele x', y', z' față de sistemul $O'x'y'z'$, (fig. 13). Între segmentele $\overline{OO'}$, $\overline{O'P}$ și $\overline{OP}$ există relația

$$\overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'P}.$$

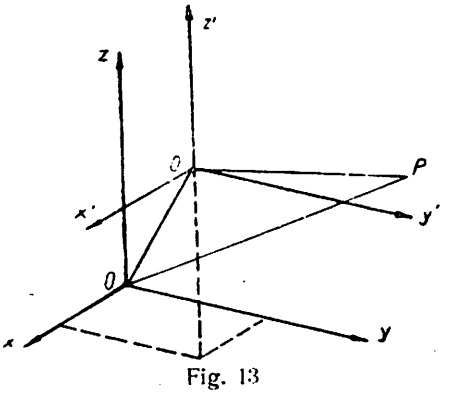


Fig. 13

Ținînd seama de proprietatea (3), avem

$$\text{pr}_u\overline{OP} = \text{pr}_u\overline{OO'} + \text{pr}_u\overline{O'P}.$$

Luînd ca dreaptă de proiecție succesiv fiecare din axele sistemului $Oxyz$, obținem de aici formulele

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0, \\ z = z' + z_0, \end{cases} \tag{18}$$

care reprezintă o translație de axe. Se mai spune că sistemul $O'x'y'z'$ se obține din sistemul $Oxyz$ printr-o translație de mărime $\overline{OO'}$. Formulele inverse ne dau

$$\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0, \\ z' = z - z_0, \end{cases} \tag{19}$$

și reprezintă o translație de axe de mărime $\overline{O'O} = -\overline{OO'}$.

Rotație de axe. Transformări ortogonale de axe. Dacă cele două sisteme de referință carteziene ortogonale au aceeași origine, însă axele neparalele, sistemul $Ox'\,y'\,z'$ se obține din sistemul $Oxyz$ printr-o rotație (fig. 14). În acest caz, poziția sistemului de coordonate $Ox'y'z'$ față de sistemul $Oxyz$ este complet determinată, dacă se cunosc cosinusurile directoare ale axelor Ox', Oy', Oz' față de sistemul $Oxyz$. Fie $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ unghiurile axei Ox' cu axele Ox, Oy, Oz, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ unghiurile axei Oy' cu axele Ox, Oy, Oz și $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ unghiurile axei Oz' cu axele Ox, Oy, Oz.

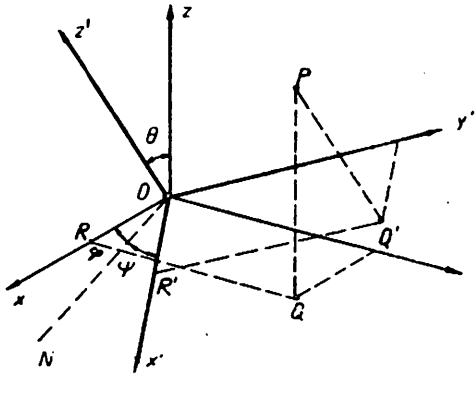


Fig. 14

Fie P un punct din spațiu, care are coordonatele x,y,z față de sistemul $Oxyz$ și coordonatele x', y', z' față de sistemul Ox'y'z'. Conturul poligonal $OR'Q'P$, ale cărui laturi sînt segmentele $\overline{OR'}$, $\overline{R'Q'}$, $\overline{Q'P}$ astfel încît

$$OR' = x', \quad R'Q' = y', \quad Q'P = z',$$

are ca rezultantă segmentul $\overline{OP}$; deci

$$\overline{OP} = \overline{OR'} + \overline{R'Q'} + \overline{Q'P}.$$

Făcînd proiecția pe cele trei axe Ox, Oy, Oz, și ținînd seama de proprietatea (7), obținem formulele

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3, \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3, \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3. \end{aligned} \tag{20}$$

Formulele inverse se obțin fie rezolvînd sistemul (20) cu ajutorul regulii lui Cramer, fie proiectînd linia poligonală $ORQP$ pe cele trei axe Ox', Oy', Oz'; obținem formulele

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1, \\ y' &= x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2, \\ z' &= x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3. \end{aligned} \tag{20'}$$

Formulele (20) reprezintă o rotație de axe, determinată dacă se dau unghiurile α_i, β_i, $\gamma_i (i = 1,2,3)$. Cele nouă unghiuri α_i, β_i, γ_i nu sînt independente, deoarece cosinusurile directoare ale axelor Ox', Oy', Oz' trebuie să satisfacă — pe de o parte — condițiile (12'):

$$\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i = 1, \qquad (i = 1,2,3)$$

și — pe de altă parte — condițiile (17''), care ne spun că axele Ox', Oy', Oz' constituie un triedru ortogonal:

$$\cos\alpha_i\cos\alpha_j + \cos\beta_i\cos\beta_j + \cos\gamma_i\cos\gamma_j = 0, \qquad (i \neq j).$$

Avem deci șase condiții:

$$\cos\alpha_i\cos\alpha_j + \cos\beta_i\cos\beta_j + \cos\gamma_i\cos\gamma_j = \delta_{ij} \tag{20''}$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker.

Ținînd seama de formulele (20''), rezultă că cele nouă cosinusuri care intră în formulele de transformare ale unei rotații de axe carteziene ortogonale nu pot fi considerate arbitrare (independente), ci numai trei dintre ele sînt arbitrare. O rotație de axe carteziene ortogonale este definită complet, dacă se cunosc trei anumite unghiuri, numite *unghiurile lui Euler*: unghiul φ din planul xy, pe care îl face axa Ox cu intersecția ON a planelor xy și $x'y'$, unghiul ψ din planul $x'y'$, pe care îl face axa Ox' cu ON, precum și unghiul θ dintre axele Oz și Oz' (fig.14).

Folosind unghiurile lui Euler, prin trei rotații se poate trece de la sistemul $Oxyz$ la sistemul $Ox'y'z'$. În adevăr, printr-o rotație în jurul axei Oz de unghi φ ducem axa Ox peste dreapta ON, printr-o rotație de unghi θ în jurul dreptei ON ducem axa Oz peste axa Oz' și printr-o rotație de unghi ψ în jurul lui Oz' ducem dreapta ON peste axa Ox', și deci axa Oy peste axa Oy'.

Așadar, trecerea de la sistemul cartezian ortogonal $Oxyz$ la sistemul cartezian ortogonal $OXYZ$ se poate realiza efectuînd următoarele trei rotații:

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \quad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \quad z = z';$$

$$x' = x'', \quad y' = y''\cos\theta - z''\sin\theta, \quad z' = y''\cos\theta + z''\cos\theta;$$

$$x'' = X\cos\psi - Y\sin\psi, \quad y'' = X\sin\psi + Y\cos\psi, \quad z'' = Z.$$

Rezultă că formulele de trecere de la coordonatele x,y,z la coordonatele X,Y,Z se obțin prin compunerea acestor trei rotații. Deci, rotația de axe carteziene ortogonale este dată de formulele

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' \end{aligned} \tag{21}$$

coeficienții a_{ij} fiind

$$a_{11} = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi, \quad a_{21} = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi,$$

$$a_{31} = \sin\theta\sin\varphi,$$

$$a_{12} = -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi, \quad a_{22} = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi,$$

$$a_{32} = \sin\theta\cos\varphi,$$

$$a_{13} = \sin\varphi\sin\theta, \quad a_{23} = -\cos\varphi\sin\theta, \quad a_{33} = \cos\theta.$$

Acești coeficienți reprezintă cele nouă cosinusuri ale unei rotații de axe ortogonale, în funcție de unghiurile lui Euler θ, φ, ψ

Ridicînd la pătrat determinantul Δ al sistemului (20) și ținînd seamă de formulele (20''), obținem $\Delta^2 = 1$; rezultă că Δ este egal cu 1 sau cu -1, după cum sistemele $Oxyz$ și $Ox'y'z'$ au sau nu au aceeași orientare.

În primul caz (sistemele de referință au aceeași orientare) putem suprapune cele două sisteme printr-o mișcare continuă, care nu schimbă evident valoarea lui Δ. Atunci, transformarea (20) devine transformarea identică

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z',$$

determinantul Δ al transformării fiind egal cu unitatea.

În al doilea caz (sistemele de referință nu au aceeași orientare) putem — printr-o mișcare continuă — să suprapunem două din axele sistemelor, a treia axă coincizînd, abstracție făcînd de orientare. De exemplu, dacă putem suprapune axele Ox', Oy' peste axele Ox, Oy, formulele de transformare devin

$$x = x', \quad y = y', \quad z = -z'.$$

În acest caz, determinantul Δ al transformării este egal cu -1. Din punct de vedere geometric, această transformare reprezintă o simetrie față de planul Oxy.

Transformări ortogonale. În general, transformarea (21) — cu determinantul $\Delta = |a_{ij}|$ diferit de zero — realizează trecerea de la un sistem de coordonate cartezian oarecare la un alt sistem de coordonate cartezian oarecare. O asemenea transformare se numește transformare carteziană.

Dacă determinantul Δ este ortogonal, deci elementele lui verifică condițiile de ortogonalitate

$$a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}, \qquad (i,j,k = 1,2,3), \quad (21')$$

coeficienții

$$a_{11}, a_{21}, a_{31}; \quad a_{12}, a_{22}, a_{32}; \quad a_{13}, a_{23}, a_{33} \qquad (21'')$$

sînt cosinusurile directoare ale dreptelor Ox', Oy', Oz' față de sistemul de referință $Oxyz$.

Transformările (21), (21') cu $\Delta = 1$ constituie *grupul rotațiilor în spațiu*, iar transformările (21), (21') cu $\Delta = 1$ și $\Delta = -1$ constituie *grupul transformărilor ortogonale*.

Deci, transformările ortogonale în spațiu care păstrează originea sînt formate din rotații și simetrii față de un plan.

§ 5. COORDONATE CILINDRICE, COORDONATE SFERICE

Poziția unui punct în spațiu poate fi determinată și prin alte sisteme de coordonate decît cele carteziene.

Coordonate cilindrice. De exemplu, să considerăm un plan π, un punct O în acest plan și o dreaptă a din planul π trecînd prin O (fig.15). Față de acest sistem de referință putem determina poziția punctelor din spațiu. Astfel: dacă Q este proiecția ortogonală a punctului P pe planul π și notînd cu ρ distanța OQ, cu φ unghiul între dreapta a și segmentul $\overline{OQ}$, iar cu z distanța QP, între punctul P arbitrar din spațiu și terna de valori ρ, φ, z, se realizează o corespondență, care este biunivocă dacă $\rho > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Coordonatele ρ, φ, z se numesc *coordonate cilindrice*.

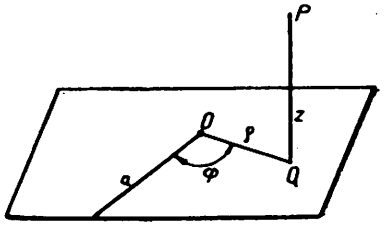


Fig. 15

Observăm că sistemul de coordonate cilindrice este format din coordonatele polare în planul π (avînd centrul în O și ca axă polară dreapta a) și distanța de la punctul dat la planul π.

Observăm, de asemenea, că punctele pentru care ρ este constant descriu cilindri de rotație de axă z, punctele pentru care φ sau z sînt constante descriu plane trecînd prin normala în O la planul π sau plane paralele cu planul π.

Rezultă că un punct apare ca intersecția unui cilindru cu două plane. Din această cauză, coordonatele ρ, φ, z au luat denumirea de coordonate cilindrice. Trecerea de la coordonatele cilindrice la coordonatele carteziene se face prin formulele (fig. 16)

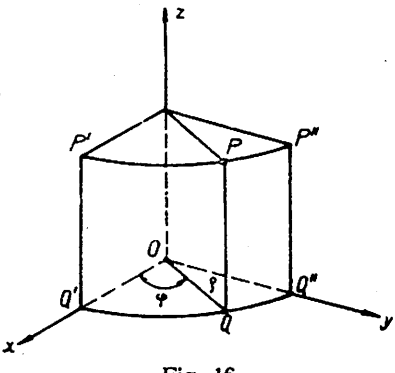


Fig. 16

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases} \tag{22}$$

Formulele inverse sînt

$$\rho = \sqrt{y^2 + x^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad z = z. \tag{22'}$$

Coordonate sferice. Se obține un alt sistem de referință astfel: fie un plan π, un punct O în acest plan și o dreaptă a din planul π trecînd prin O; fie, de asemenea, b perpendiculara din O pe planul π. Coordonatele unui punct P din spațiu față de acest sistem de referință sînt: raza vectoare $r = OP$, unghiul φ pe care urma planului OPb pe planul π îl face cu dreapta a și unghiul θ dintre raza vectoare OP și dreapta b (fig. 17).

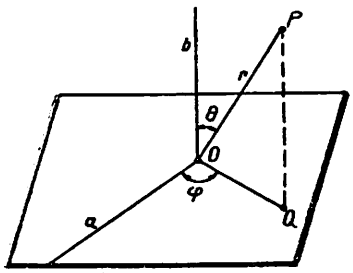


Fig. 17

Corespondența între punctele spațiului și terna de valori r, φ, θ va fi biunivocă, dacă presupunem că r variază între 0 și ∞, φ între 0 și 2π, iar θ între 0 și π. Coordonatele r, φ, θ se numesc *coordonate sferice* sau *coordonate polare în spațiu*.

Observăm că pentru r constant se obțin sfere cu centrul în origine și de rază r, pentru θ constant, conuri de rotație de axă b și de vîrf O, iar pentru φ constant, plane care trec prin dreapta b. Un punct apare ca intersecția acestor suprafețe, numite suprafețe coordonate. Deoarece una din familiile de suprafețe coordonate este formată din sfere, coordonatele r, φ, θ se numesc coordonate sferice.

Ținînd seama că $OQ = r \sin \theta$ (fig. 18), deducem că trecerea de la coordonatele sferice la cele carteziene este dată de formulele

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \tag{23}$$

Formulele inverse sînt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{z}, \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{23'}$$

Observăm că pentru r dat obținem o sferă de rază r și cu centrul în origine. Un punct al sferei rezultă determinat de coordonatele φ, θ. Deoarece coordonatele r — dat, φ, θ au aplicație în geografie și astronomie, astfel de coordonate se mai numesc *coordonate geografice*. În acest caz, φ se numește *longitudinea*, iar θ *colatitudinea* punctului P. Un punct de pe sfera de rază r poate fi definit de unghiul φ și de unghiul $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$, coordonata λ numindu-se

latitudinea punctului P de pe sferă. Rezultă că dacă θ variază între 0 și π, atunci λ variază între $\frac{\pi}{2}$ și $-\frac{\pi}{2}$. Punctele de pe sfera de rază r, pentru care φ este constant, sînt situate pe cercurile mari care trec prin axa Oz, iar punctele pentru care λ este constant sînt situate pe cercuri al căror plan este perpendicular axei Oz (fig. 18). În geografie, drept axă Oz este luată axa polilor pămîntului,

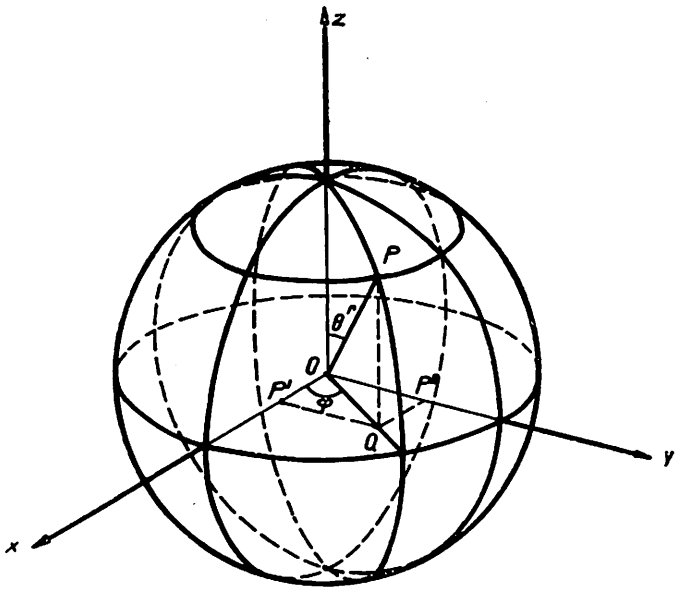


Fig. 18

numindu-se *meridiane* cercurile mari care trec prin axa polilor, iar *paralele* cercurile în planele perpendiculare pe această axă. Un punct pe sfera pămîntească apare ca intersecția unui meridian cu un paralel.

§ 6. COORDONATE OMOGENE

Notînd cu (x,y,z) un sistem de coordonate în spațiu (de exemplu, un sistem de coordonate carteziene, respectiv un sistem de coordonate cilindrice sau un sistem de coordonate sferice), prin relațiile

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4} \tag{24}$$

putem realiza o corespondență între coordonatele (x,y,z) și complexul ordonat de numere (x_1, x_2, x_3, x_4), abstracție făcînd de un factor ρ de proporționalitate ($\rho \neq 0$). Cu alte cuvinte , numerele complexului (x_1, x_2, x_3, x_4) — care nu pot fi toate nule — sînt determinate de coordonatele (x,y,z), abstracție făcînd de

un factor de proporționalitate. Complexul ordonat (x_1, x_2, x_3, x_4) reprezintă *coordonatele omogene* ale punctelor spațiului, iar terna de valori (x,y,z), *coordonatele lor neomogene*.

Rezultă că, fiind date două puncte $P'(x_1', x_2', x_3', x_4')$, $P''(x_1'', x_2'', x_3'', x_4'')$, aceste puncte sînt distincte dacă, și numai dacă, coordonatele lor omogene nu satisfac condiția de proporționalitate

$$\frac{x_1'}{x_1''} = \frac{x_2'}{x_2''} = \frac{x_3'}{x_3'} = \frac{x_4'}{x_4''}.$$

În caz contrar, cele două complexe ordonate de numere reprezintă unul și același punct P.

CAPITOLUL XI

ALGEBRA VECTORIALĂ

§ 1. VECTORI

În diferite domenii ale fizicii şi matematicii se întîlnesc mărimi caracterizate nu numai prin valoare numerică, ci şi prin orientare în spaţiu. Durata unui fenomen, greutatea unui corp, lungimea unui segment etc. sînt mărimi care se pot exprima printr-un singur număr; astfel de mărimi se numesc mărimi *scalare* sau *scalari*. Viteza sau acceleraţia unui mobil, forţa care acţionează asupra unui corp, segmentul de dreaptă orientat etc. sînt mărimi care, în afară de valoarea numerică, se mai caracterizează şi prin orientarea în spaţiu; astfel de mărimi se numesc *mărimi vectoriale* sau *vectori*.

În matematică s-a impus *teoria vectorilor* sau *calculul vectorial*, care are ca scop studiul operaţiilor cu vectori. Partea algebrică a teoriei vectorilor se numeşte *algebra vectorială*; în *analiza vectorială* intervine operaţia de derivare a unui vector ş.a.

Astăzi, algebra vectorială este o parte componentă esenţială a geometriei analitice, iar analiza vectorială este necesară tratării teoriei curbelor şi suprafeţelor (geometria diferenţială clasică). Calculul vectorial are o mare importanţă în mecanică, fizică şi tehnică.

De altfel, calculul vectorial este o teorie matematică cu puternice rădăcini fizice, dezvoltarea acestuia avînd loc în lumina problemelor fizice.

De exemplu, operaţia fundamentală de compunere a forţelor — cunoscută de Simon Stevin (1548—1620) şi reprezentată geometric prin regula paralelogramului — a pus în evidenţă (sub o formă restrînsă) noţiunea de vector. Totuşi, vectorii şi operaţiile vectoriale nu au fost folosite în mecanică decît tîrziu.

Aritmetizarea forţelor, vitezelor şi acceleraţiilor, în mod cu totul analog cu felul în care Descartes aritmetizase punctele, este făcută de către Joseph-Louis Lagrange (1736—1813) în cartea sa *Mecanica analitică*, apărută în 1788. Ulterior, această idee a lui Lagrange a constituit calculul vectorial. Se poate spune că bazele acestui calcul au fost puse de W. Hamilton (1805—1865) şi H. G. Grassmann (1809—1877), care au urmărit introducerea unui calcul simbolic cu mărimi fizice.

Un vector* $\bar{v}$ **este un obiect matematic caracterizat prin proprietăţile:**

1° direcţie (linia de acţiune, suport);

2° sens (sensul de parcurs în direcţia dată);

3°. modul (mărime, intensitate, lungime): $v = |\bar{v}|$.

---

* Notaţia unui vector prin litere supraliniate de săgeţi, $\vec{v}$, este mai puţin practică şi nu aduce nici o precizare în plus faţă de notaţia prin litere supraliniate.

Un astfel de *vector* se numește *liber*. Prin adăugarea de noi restricții, ca acelea de a avea un suport sau un punct de aplicație determinat, obținem un *vector glisant* (alunecător), respectiv *legat* (fix).

Observăm că proprietățile de care se bucură vectorul le are și segmentul orientat. Însă, în mulțimea tuturor segmentelor orientate posibile, totalitatea celor ce au o anumită direcție, același sens și aceeași lungime formează o clasă, caracterizată prin aceste proprietăți comune tuturor elementelor ei. O astfel de clasă, adică clasa tuturor segmentelor orientate având o direcție, un sens și o lungime date, o vom numi vector liber. Deci, *clasa tuturor segmentelor orientate, care au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime definește un obiect matematic numit vector liber.*

Rezultă că vectorul liber este caracterizat prin direcția, sensul și lungimea sa, proprietăți comune tuturor segmentelor clasei, *poziția sa în spațiu fiind arbitrară*. Cu alte cuvinte, *un vector liber se poate reprezenta geometric prin oricare din segmentele orientate ce aparțin clasei respective.*

Vom numi *vector glisant* clasa tuturor segmentelor orientate, având ca suport o dreaptă dată, același sens și aceeași lungime. Deci, un vector glisant este reprezentat prin oricare din segmentele orientate, având ca suport o dreaptă dată, un sens și o lungime determinate.

Vom numi *vector legat* mărimea geometrică asociată unui segment orientat $\overline{AB}$, având punctul de aplicație (originea) într-un punct A, o direcție, un sens și o lungime AB date. În acest caz, punctul B se spune că este extremitatea vectorului.

Deci, între vectori și segmentele orientate (respectiv punctele spațiului) există relații fundamentale, exprimate prin **axiomele** (fig. 1):

I) **Două puncte A și B determină un vector $\bar{v} = \overline{AB}$.**

II) **Fiind dat un punct A și un vector $\bar{v}$, există un punct B, și numai unul, astfel încît $\overline{AB} = \bar{v}$.**

Observăm că dacă clasei de segmente orientate care definește vectorul liber îi impunem condiția ca segmentele să aibă nu numai direcția comună, ci și un suport comun, obținem vectorul glisant; dacă impunem și condiția ca segmentele să aibă un punct de aplicație determinat, clasa se reduce la un singur element, vectorul legat. S-ar părea deci că noțiunea de vector liber conține și pe cele de vector glisant și vector legat. Totuși, această subsumare (relație de incluziune) nu este justificată. De exemplu, adunarea a doi vectori oarecare este totdeauna posibilă dacă vectorii sînt liberi și nu este posibilă totdeauna dacă vectorii sînt glisanți sau legați.

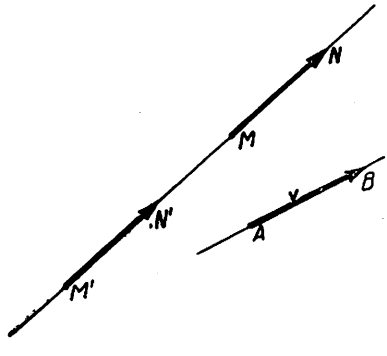


Fig. 1

În calculul vectorial, operațiile vectoriale se definesc pentru vectorii liberi. De aceea, în aceste operații înțelegem prin *vector* fie întreaga clasă care definește vectorul liber, fie unul oarecare din elementele acesteia. Desigur, cu anumite restricții, aceste opera-

ții pot fi adaptate și vectorilor glisanți sau legați. Deoarece un vector (liber) este determinat prin oricare din segmentele care aparțin clasei respective, este suficient a considera din această clasă segmentul orientat cu punctul de aplicație în punctul fix O, ales și ca origine a sistemului de axe carteziene ortogonale. Atunci, oricărui punct P, diferit de originea O, îi corespunde un vector, și invers, prin formula

$$\bar{r} = \overline{OP}. \qquad (1)$$

Deci, în spațiu avem ∞^3 de vectori, care corespund celor ∞^3 de puncte ale spațiului. Vectorul $\bar{r}$ definit de relația (1) se numește *vectorul de poziție* al punctului P (fig. 2).

Pe de altă parte, punctul P este determinat prin coordonatele sale; fie

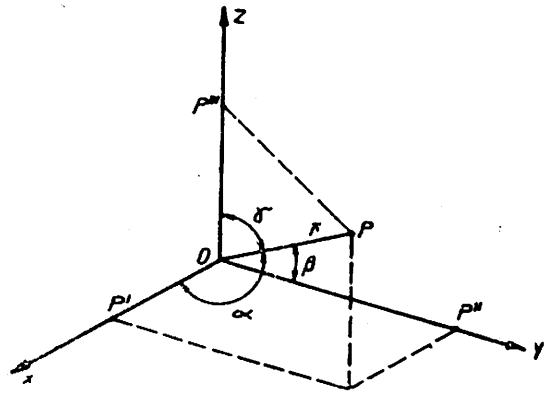


Fig. 2

$$x_P = OP' = r_x, \quad y_P = OP'' = r_y, \quad z_P = OP''' = r_z \qquad (2)$$

coordonatele punctului P, care sînt chiar proiecțiile paralele cu planele de coordonate ale segmentului $\overline{OP}$ pe axele de coordonate, adică

$$r_x = \mathrm{pr}_x\overline{OP}, \quad r_y = \mathrm{pr}_y\overline{OP}, \quad r_z = \mathrm{pr}_z\overline{OP}. \qquad (2')$$

Se realizează astfel o *corespondență biunivocă între vectorul* $\bar{r}$ și terna ordonată de scalari (r_x, r_y, r_z). Vom nota

$$\bar{r}(r_x, r_y, r_z) \qquad (3)$$

și vom citi: vectorul $\bar{r}$ de proiecții r_x, r_y, r_z. Așadar, *într-un sistem de axe carteziene, orice vector (liber) este determinat prin trei mărimi scalare: proiecțiile lui pe axele de coordonate*, și invers.

În adevăr, fie vectorul $\bar{r}$ avînd direcția și sensul determinate de unghiurile α, β, γ față de axele de coordonate și lungimea r. Ținînd seama de proprietatea (7'), din capitolul X, rezultă că proiecțiile vectorului $\bar{r}$ sînt date de relațiile

$$r_x = r\cos\alpha, \quad r_y = r\cos\beta, \quad r_z = r\cos\gamma. \qquad (3')$$

Reciproc, fiind dat vectorul $\bar{r}$ prin proiecțiile sale r_x, r_y, r_z, avem

$$\cos\alpha = \frac{r_x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{r_y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{r_z}{r}; \quad r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}. \qquad (3'')$$

Doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt *echipolenți* (egali) dacă au aceeași direcție, același sens și lungimile egale. Vom nota simbolic această egalitate astfel

$$\bar{a} = \bar{b}. \qquad (4)$$

Egalitatea vectorilor astfel definită înseamnă identitatea claselor de segmente orientate cărora le sînt asociate vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$; deci, orice segment dintr-o clasă aparține și celeilalte. Fie

$$\bar{a}(a_x,\ a_y,\ a_z) \quad \text{și} \quad \bar{b}(b_x,\ b_y,\ b_z);$$

egalitatea vectorială (4) este echivalentă cu trei egalități scalare

$$a_x = b_x,\quad a_y = b_y,\quad a_z = b_z, \tag{4'}$$

care se obțin proiectînd relația (4) pe axele de coordonate.

Egalitatea vectorilor are toate proprietățile egalității algebrice:

1° este *simetrică*, adică dacă $\bar{a} = \bar{b}$, atunci și $\bar{b} = \bar{a}$;

2° este *reflexivă*, adică $\bar{a} = \bar{a}$;

3° este *tranzitivă*, adică dacă $\bar{a} = \bar{b}$ și $\bar{b} = \bar{c}$, atunci $\bar{a} = \bar{c}$.

§ 2. ADUNAREA ȘI SCĂDEREA VECTORILOR

În operațiile cu vectori (liberi), pentru a avea o imagine geometrică folosim un reprezentant al clasei care definește vectorul. Aceasta permite operarea cu elemente determinate, rezultatele fiind valabile pentru oricare dintre ele. În limbaj geometric spunem că *transportăm* vectorul într-un anumit punct.

Fie $\bar{a}$ și $\bar{b}$ doi vectori (liberi).

Suma vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este un vector $\bar{c}$, definit prin relația

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}, \tag{5}$$

astfel încît, luînd $\bar{a} = \overline{AB}$ și $\bar{b} = \overline{BC}$, atunci $\bar{c} = \overline{AC}$.

Cu alte cuvinte, suma a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este, prin definiție, un vector $\bar{c}$, obținut transportînd pe $\bar{a}$ cu originea într-un punct A, așa încît $\bar{a} = \overline{AB}$, așezînd originea lui $\bar{b}$ în extremitatea B a lui $\bar{a}$, astfel încît $\bar{b} = \overline{BC}$ și unind A cu C, deci $\bar{c} = \overline{AC}$ (fig.3). Atunci, caracteristicile (direcția, sensul, modulul) vectorului sumă a doi vectori dați sînt determinate din definiția operației de adunare vectorială.

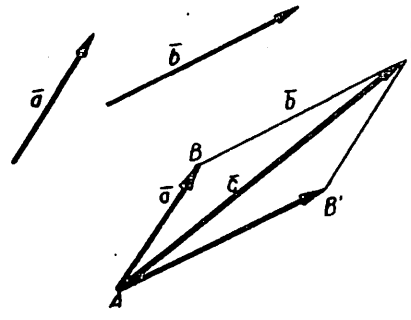


Fig. 3

Dacă vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ au aceeași **direcție**, vectorul sumă $\bar{c}$ are și el direcția lor; sensul este acel al vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$ cînd vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ au același sens, respectiv al vectorului care are cea mai mare lungime, cînd vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ sînt de sensuri opuse, lungimea sa c fiind suma, respectiv diferența lungimilor a, b.

În general

$$|\bar{c}| < |\bar{a}| + |\bar{b}|.$$

Dacă vectorul $\bar{c}$ este suma vectorilor $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ și $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$, proiecțiile lui sînt

$$c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y, \quad c_z = a_z + b_z. \tag{5'}$$

În adevăr, proiectînd paralel cu planele de coordonate relația vectorială (5) pe axele de coordonate, adică conturul poligonal $\overline{AB} + \overline{BC}$ închis de rezultanta $\overline{AC}$, obținem relațiile scalare (5').

Proprietățile adunării vectoriale (operației prin care se obține suma) sînt:

1° *Adunarea vectorilor este comutativă*, adică

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}. \tag{6}$$

Într-adevăr, prin definiție, suma vectorilor $\bar{a} = \overline{AB}$ și $\bar{b} = \overline{BC}$ este vectorul reprezentat prin latura (segmentul orientat) $\overline{AC}$, care închide triunghiul format ABC (fig. 3) Însă segmentul (orientat) $\overline{AC}$ se obține și ca rezultanta liniei poligonale $AB'C$, cu $\overline{AB'} = \bar{b}$ și $\overline{B'C} = \bar{a}$. Cu alte cuvinte, adunarea vectorilor se construiește prin *regula triunghiului*: suma a doi vectori este vectorul reprezentat prin latura care închide triunghiul format, așezîndu-i cap la cap într-o ordine indiferentă, originea vectorului sumă fiind în originea primului vector și extremitatea în extremitatea celui de-al doilea.

Adunarea vectorială se poate efectua și prin *regula paralelogramului*: suma a doi vectori este vectorul reprezentat prin diagonala paralelogramului construit pe cei doi vectori transportați în același punct, originea vectorului sumă fiind punctul în care au fost transportați vectorii dați (fig.3).

2° *Adunarea vectorilor este asociativă*, adică

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}). \tag{7}$$

Aceasta rezultă repetînd regula triunghiului, deci așezînd cap la cap pe $\bar{a}$ urmat de $\bar{b}$, și apoi de $\bar{c}$ (fig.4). Vectorul sumă al vectorilor $\bar{a} + \bar{b} = \overline{OB}$ și

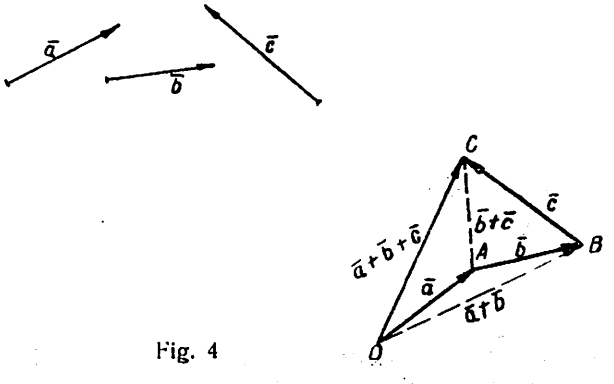


Fig. 4

$\bar{c} = \overline{BC}$ și vectorul sumă al vectorilor $\bar{a} = \overline{OA}$ și $\bar{b} + \bar{c} = \overline{AC}$ sînt egali, avînd aceeași origine O și extremitate C; cu alte cuvinte, rezultanta $\overline{OC}$ a contururilor poligonale $OABC$, OBC, OAC este suma vectorilor $\bar{a} = \overline{OA}$; $\bar{b} = \overline{AB}$, $\bar{c} = \overline{BC}$.

Putem deci suprima parantezele, scriind ca în algebră,

$$\bar{v} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}. \tag{7'}$$

Pe de altă parte, aplicînd proprietățile de comutativitate și asociativitate, obținem proprietatea că nici ordinea, nici modul în care grupăm cei trei vectori cîte doi nu modifică suma lor; adică

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{b} + \bar{a} + \bar{c} = \bar{c} + \bar{a} + \bar{b} = \text{etc.}$$

Caracterul intuitiv al acestei proprietăți se poate obține prin *regula paralelipipedului*: suma a trei vectori care nu sînt paraleli cu un același plan este un vector reprezentat prin diagonala paralelipipedului construit pe cei trei vectori dați (fig.5). Această regulă este echivalentă cu *regula poligonului*: suma a trei vectori este vectorul reprezentat prin latura care închide linia poligonală formată, așezîndu-i cap la cap într-o ordine indiferentă, originea vectorului sumă fiind în originea primului vector și extremitatea în extremitatea ultimului vector.

Prin recurență, regula poligonului se extinde la adunarea a n vectori. Deci, dacă $\bar{v}_i (i = 1,2,\ldots,n)$ sînt n vectori, suma $\bar{v}$ a acestor vectori se scrie

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \ldots + \bar{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i \tag{8}$$

și este vectorul care închide linia poligonală, formată prin așezarea cap la cap și într-o ordine oarecare a vectorilor dați, vectorul sumă avînd originea în originea primului vector (al liniei poligonale) și extremitatea în extremitatea ultimului vector (fig. 6).

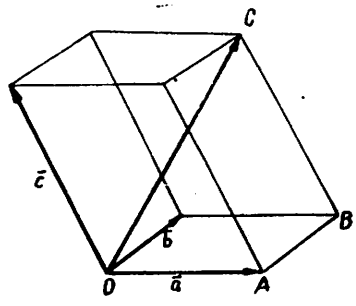


Fig. 5

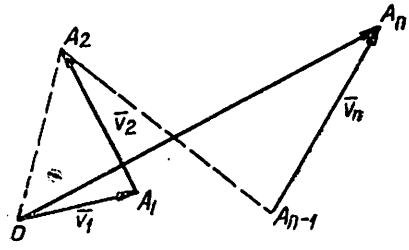


Fig. 6

Adunarea vectorilor se mai numește și *compunerea* lor. Dacă un vector $\bar{v}$ este suma mai multor vectori $\bar{v}_i$, se mai spune că $\bar{v}$ este *rezultanta* vectorilor $\bar{v}_i$, iar vectorii $\bar{v}_i$ sînt *componente* ale lui $\bar{v}$.

3° Există un vector, numit *vectorul nul* (sau zero) și notat 0 (nesupraliniat), astfel încît

$$\bar{a} + 0 = \bar{a}, \tag{9}$$

oricare ar fi vectorul $\bar{a}$. Vectorul nul se caracterizează prin modul nul, direcție și sens arbitrare (nedeterminate), și avînd proprietatea importantă, legată de adunare, de a nu modifica suma vectorilor. Acest vector se introduce din necesitatea de a nu crea excepții în regula poligonului. În adevăr, efectuînd adunarea vectorilor prin așezarea cap la cap, se poate ca extremitatea ultimului vector să coincidă cu originea primului. Prin definiție, suma vectorială este un vector Deci, pentru ca și în acest caz excepțional să putem menține operația de adunare vectorială, sîntem conduși să interpretăm rezultatul ca un vector a cărui extremitate coincide cu originea; acest vector este vectorul nul. Rezultă că vectorul nul este vectorul asociat clasei tuturor perechilor de puncte confundate.

4° Fiind dat vectorul oarecare $\bar{a}$, există un vector numit *opusul* lui $\bar{a}$ și notat $-\bar{a}$, astfel încît

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = 0. \tag{10}$$

Deci, vectorul $-\bar{a}$ (opusul lui $\bar{a}$) este un vector avînd aceeași mărime, aceeași direcție și sensul opus vectorului $\bar{a}$.

Diferența a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este un vector $\bar{c}$, definit prin relația

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}, \tag{11}$$

dacă $\bar{c}$ este suma lui $\bar{a}$ cu $-\bar{b}$, opusul lui $\bar{b}$, adică

$$\bar{c} = \bar{a} + (-\bar{b}), \tag{11'}$$

Vectorul $\bar{c}$ se obține imediat, dacă aplicăm regula paralelogramului sumei (11'). În adevăr, reprezentînd pe $\bar{a}$ prin $\overline{OA} = \bar{a}$ (fig. 7), apoi pe $-\bar{b}$ prin $\overline{OB'} = -\bar{b}$ și făcînd suma, rezultă că $\bar{c} = \overline{OA} + \overline{OB'} = \overline{OC}$. Pe de altă parte, rezultă că $\bar{c} = \overline{BA}$, adică diferența a doi vectori este un vector reprezentat de cealaltă diagonală a paralelogramului construit pe vectorii dați, avînd originea în extremitatea vectorului scăzător și extremitatea în extremitatea vectorului de scăzut.

Totodată, rezultă că scăderea (operația prin care se obține diferența) poate fi definită și ca operația inversă adunării: scăderea unui vector $\bar{b}$ dintr-un vector $\bar{a}$ înseamnă determinarea unui vector $\bar{c}$, care adunat cu $\bar{b}$ să aibă ca sumă pe $\bar{a}$; cu alte cuvinte, există un vector $\bar{c}$, astfel încît să avem egalitatea

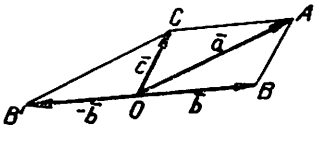


Fig. 7

$$\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}. \tag{11''}$$

Soluția acestei egalități este unică și este dată de vectorul $\bar{c}$ definit prin relația (11). În adevăr, într-o egalitate vectorială putem aduna același vector în ambii membri, fără ca egalitatea să se schimbe; adunînd vectorul $(-\bar{b})$ și ținînd seama de relația (10), obținem (11).

Observăm că, fiind dat vectorul legat $\overline{AB}$ definit prin vectorii de poziție ai originii și extremității vectorului, deci $\bar{r}_A = \overline{OA}$ și $\bar{r}_B = \overline{OB}$, rezultă că* (fig. 8).

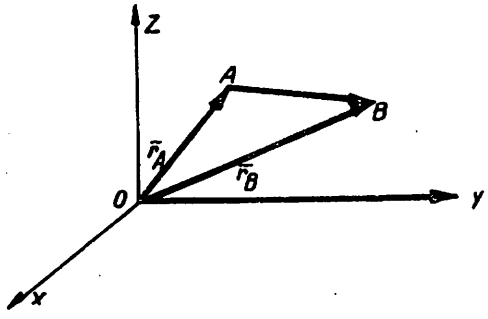


Fig. 8

$$\overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A. \tag{12}$$

Să notăm $\overline{AB} = \bar{v}$. Dacă $\bar{v}(v_x, v_y, v_z)$, $\bar{r}_A(x_A, y_A, z_A)$, $\bar{r}_B(x_B, y_B, z_B)$, atunci relația vectorială (12) este echivalentă cu relațiile scalare

$$\begin{aligned} v_x &= x_B - x_A, \\ v_y &= y_B - y_A, \\ v_z &= z_B - z_A, \end{aligned} \tag{12'}$$

deoarece $v_x = \text{pr}_x \overline{AB} = A'B' = x_B - x_A, \ldots$. Rezultă că un vector legat este determinat prin cunoașterea a șase mărimi scalare x_A, y_A, z_A; x_B, y_B, z_B.

§ 3. ÎNMULȚIREA VECTORILOR CU SCALARI

Fie un scalar λ dintr-un anumit cîmp $\mathcal{C}$ (de exemplu, cîmpul numerelor reale) și un vector (liber) $\bar{a}$.

Vectorul

$$\bar{b} = \lambda \bar{a} \tag{13}$$

avînd aceeași direcție cu $\bar{a}$, același sens sau sensul contrar cu $\bar{a}$, după cum λ este un scalar pozitiv sau negativ și mărimea egală cu $|\lambda| a$, se numește produsul vectorului $\bar{a}$ cu scalarul λ.

Se mai spune că vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt coliniari. Fie $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ și $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$; atunci relația vectorială (13) este echivalentă cu relațiile scalare

$$b_x = \lambda a_x, \quad b_y = \lambda a_y, \quad b_z = \lambda a_z, \tag{13'}$$

care se obțin proiectînd relația (13) pe axele de coordonate.

Operația de înmulțire (operație prin care se obține produsul) a unui vector printr-un scalar se bucură de proprietățile (analoge proprietăților algebrice ale înmulțirii cu un număr):

1° $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$;

2° $\lambda(\mu\bar{a}) = \lambda\mu\ (\bar{a})$ (legea de asociativitate pentru înmulțirea cu scalari);

3° $(\lambda + \mu)\ \bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$ (prima lege de distributivitate);

4° $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$ (a doua lege de distributivitate);

5° dacă $\bar{a} = \bar{b}$, atunci și $\lambda\bar{a} = \lambda\bar{b}$,

care se deduc din definiția acestui produs.

Observăm că dacă unul din factorii produsului (13) este nul sau ambii factori sînt nuli, produsul lor este nul și reciproc.

---

* Unii autori ([25], p. 232) notează vectorul (fix) $\overline{AB}$ astfel: $\overline{AB} = \overline{B-A}$, scriindu-l simbolic sub forma unei *diferențe de puncte*.

Aplicaţie. Versor. Un vector se numeşte *vector unitar* sau *versor*, dacă lungimea lui este egală cu unitatea.

Fiind dat un vector $\bar{a}$, de mărime $a \neq 0$, vectorul unitar care are aceeaşi direcţie şi acelaşi sens cu $\bar{a}$ se numeşte *versorul lui* $\bar{a}$; vom nota

$$\bar{\rho} = \text{vers. } \bar{a} = \frac{\bar{a}}{a}, \qquad (14)$$

Rezultă că vectorul $\bar{a}$ se poate scrie

$$\bar{a} = a\bar{\rho}. \qquad (15)$$

Fiind dată o axă u, vectorul unitar $\bar{e}$ situat pe această axă şi avînd sensul pozitiv al axei se numeşte *versorul axei* u; vom nota

$$\bar{e} = \text{vers.}u. \qquad (16)$$

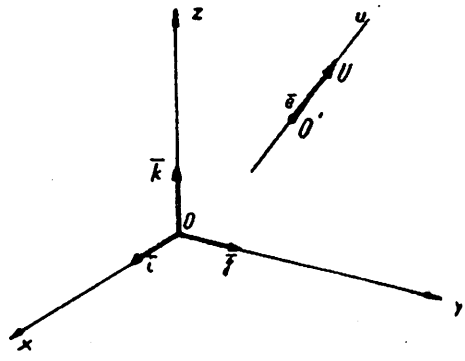


Fig. 9

Aplicînd vectorul $\bar{e}$ în originea O' a sistemului de coordonată abscisă introdus pe dreapta u, rezultă (fig. 9)

$$\bar{e} = \overline{O'U},$$

unde U este punctul unitate pe dreapta u. În particular, vom nota cu $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ versorii axelor de coordonate ale sistemului cartezian $Oxyz$, aplicaţi în originea O (fig.9):

$$\bar{i} = \text{vers. Ox}, \quad \bar{j} = \text{vers. } Oy, \quad \bar{k} = \text{vers. } Oz. \qquad (17)$$

Aceşti versori au, evident, proiecţiile

$$\bar{i}(1, 0, 0), \quad \bar{j}(0, 1, 0), \quad \bar{k}(0, 0, 1). \qquad (17')$$

§ 4. DESCOMPUNEREA VECTORILOR

Fiind daţi n vectori $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, vom spune că ei sînt *liniar dependenţi*, dacă există n scalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nu toţi nuli, deci $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \neq 0$, astfel încît să avem relaţia

$$\lambda_i \bar{a}_i = 0, \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (18)$$

Să presupunem că $\lambda_n \neq 0$. Atunci, notînd

$$\mu_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}, \ldots, \mu_{n-1} = -\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n},$$

din (18) obținem

$$\bar{a}_n = \mu_\alpha \bar{a}_\alpha, \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,n-1); \qquad (18')$$

spunem că vectorul $\bar{a}_n$ este o *combinație liniară* a vectorilor $\bar{a}_1, \bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_{n-1}$. Așadar:

Dacă vectorii $\bar{a}_1, \bar{a}_2,\ldots,a_n$ sînt liniar dependenți, atunci cel puțin unul din ei este o combinație a celorlalți, și reciproc.

Observăm că dacă vectorii $\bar{a}_1, \bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$ sînt liniar dependenți, conturul poligonal determinat de combinația liniară $\lambda_1\bar{a}_1 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n$ se închide.

Vectorii $\bar{a}_1, \bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$ se numesc *liniar independenți*, dacă nu sînt liniar dependenți; rezultă că cei n vectori $\bar{a}_i$ sînt liniar independenți, numai dacă relația (18) atrage după sine relațiile $\lambda_i = 0$.

Să demonstrăm

Teoremă. Dacă n vectori sînt liniar independenți, vectorii oricărei submulțimi a lor sînt de asemenea liniar independenți.

În adevăr, fiind dați n vectori $\bar{a}_1, \bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$ liniar independenți, să considerăm submulțimea formată din vectorii $\bar{a}_1, \bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_\alpha$ ($\alpha < n$). Să presupunem că vectorii submulțimii considerate ar fi liniar dependenți, deci între ei ar exista o relație de forma

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \ldots + \lambda_\alpha \bar{a}_\alpha = 0 \text{ cu } \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_\alpha^2 \neq 0,$$

Atunci obținem combinația liniară nulă

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \ldots + \lambda_\alpha\bar{a}_\alpha + 0.\ \bar{a}_{\alpha+1} + \ldots + 0.\ \bar{a}_n = 0,$$

cu coeficienți nu toți nuli; cu alte cuvinte, cei n vectori dați sînt liniar dependenți, ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă că vectorii $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_\alpha$ sînt liniar independenți.

Considerînd dreapta ca un spațiu E_1 cu o dimensiune și planul ca un spațiu E_2 cu două dimensiuni, spațiul fiind un spațiu E_3 cu trei dimensiuni, avem **proprietatea** fundamentală*:

Numărul maxim de vectori liniar independenți dintr-un spațiu $E_n (n \leqslant 3)$ este egal cu numărul dimensiunilor acelui spațiu.

O consecință a acestei proprietăți este următoarea

Propoziție. $n + 1$ vectori oarecare din spațiul $E_n (n \leqslant 3)$ sînt liniar dependenți.

În adevăr, să considerăm întîi cazul a doi vectori coliniari. Dacă $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt doi vectori coliniari, deci vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ au aceeași direcție, din relația (15) rezultă

$$\bar{a} = a\bar{e}, \quad \bar{b} = b\bar{e},$$

* Proprietatea este adevărată și pentru spațiile E_n cu $n > 3$.

unde $\bar{e}$ este versorul care caracterizează direcția vectorilor dați. Presupunînd vectorul $\bar{a} \neq 0$, deci $a \neq 0$, avem $\bar{e} = \frac{\bar{a}}{a}$; notînd $k = \frac{b}{a}$, obținem

$$\bar{b} = k\bar{a}, \tag{19}$$

ceea ce ne arată că *doi vectori coliniari sînt proporționali*. Punînd $k = -\frac{\alpha}{\beta}$, rezultă

$$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = 0; \tag{19'}$$

adică, *doi vectori coliniari sînt liniari dependenți*. Reciproca este adevărată, deoarece din (19') deducem (19). Rezultă că *pe o dreaptă (deci într-un spațiu E_1) doi vectori sînt totdeauna liniar dependenți*; reciproc: *doi vectori liniar dependenți sînt coliniari*.

Existența a doi vectori liniar independenți în plan (în spațiul E_2) este asigurată de următoarele axiome (din grupa axiomelor de asociație, date de geometria axiomatică):

I_3. Pe orice dreaptă se găsesc cel puțin două puncte.
Există cel puțin trei puncte necoliniare.

I_4. Oricare ar fi trei puncte A_1, A_2, A_3 necoliniare, există un plan asociat fiecăruia din cele trei puncte A_1, A_2, A_3; fiecărui plan îi poate fi asociat cel puțin un punct.

I_5. Oricare ar fi trei puncte A_1, A_2, A_3 necoliniare, nu există decît un singur plan, asociat fiecăruia din punctele A_1, A_2, A_3.

Axiomele I_4 și I_5 se pot reuni într-un singur enunț, după cum urmează: *Trei puncte necoliniare determină un plan și numai unul singur.*

Luînd originea în A_3, deci $A_3 \equiv 0$ (fig.10), vectorii $\bar{a} = \overline{OA_1}$ și $\bar{b} = \overline{OA_2}$ sînt liniar independenți, deoarece, în caz contrar, vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ ar fi liniar dependenți, adică coliniari. Deci, *dacă doi vectori sînt liniar independenți, ei definesc un plan.*

Fie $\bar{c} = \overline{OC}$, un vector oarecare din planul π determinat de vectorii liniar independenți $\bar{a}$ și $\bar{b}$ (fig.10). Ducînd prin C o paralelă la $\bar{a}$ și o paralelă la $\bar{b}$, acestea vor intersecta dreptele OA_1, OA_2, respectiv în punctele A, B. Obținem paralelogramul $OACB$, în care $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$. Exprimînd vectorii $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$ cu $\bar{a}$, respectiv cu $\bar{b}$, vom avea $\overline{OA} = \lambda\bar{a}$, $\overline{OB} = \mu\bar{b}$; rezultă

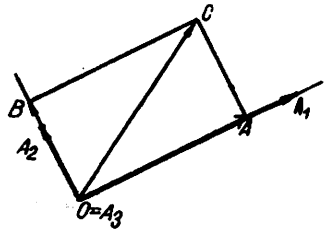


Fig. 10

$$\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} \tag{20}$$

λ și μ fiind doi scalari nu amîndoi nuli. Reciproc, vectorul $\bar{c}$, definit printr-o combinație liniară de forma (20) a vectorilor liniar independenți $\bar{a}$ și $\bar{b}$, este paralel cu planul determinat de cei doi vectori dați. În adevăr, considerînd

planul π definit de vectorii $\bar{a} = \overline{OA_1}$ și $\bar{b} = \overline{OA_2}$ duși într-un punct O (fig. 10), atît $\overline{OA} = \lambda\bar{a}$ cît și $\overline{OB} = \mu\bar{b}$ aparțin acestui plan; deci și paralelogramul $OACB$ se găsește în planul π. Rezultă că vectorul $\bar{c} = \overline{OC}$, diagonala acestui paralelogram, aparține planului π. Punînd $\lambda = -\frac{\alpha}{\gamma}$, $\mu = -\frac{\beta}{\gamma}$, obținem

$$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = 0, \qquad (20')$$

unde α, β, γ sînt trei scalari nu toți nuli. Așadar: *trei vectori coplanari* (paraleli cu un același plan sau situați într-un același plan) *sînt liniar dependenți*, și reciproc.

Din (20) rezultă că *vectorul $\bar{c}$ a fost descompus după direcțiile a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ liniar independenți și coplanari cu el*, $\lambda\bar{a}$ și $\mu\bar{b}$ fiind componentele lui $\bar{c}$ după direcțiile $\bar{a}$ și $\bar{b}$. Această *descompunere* se face *în mod unic*. În adevăr, presupunînd contrariul, am mai putea avea și descompunerea

$$\bar{c} = \lambda'\bar{a} + \mu'\bar{b}.$$

Ținînd seama de această descompunere în (20), obținem

$$(\lambda - \lambda')\,\bar{a} + (\mu - \mu')\,\bar{c} = 0.$$

Însă, vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ fiind liniar independenți, rezultă $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, ceea ce arată unicitatea descompunerii.

Existența a trei vectori liniar independenți în spațiul E_3 este asigurată de următoarea **axiomă** (din grupa axiomelor de asociație):

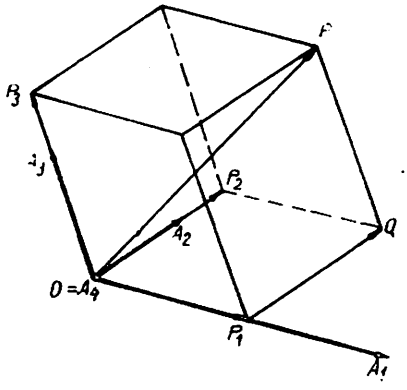


Fig. 11

I_8. Există cel puțin patru puncte necoplanare (nesituate în același plan).

Fie A_1, A_2, A_3, A_4 patru puncte necoplanare în spațiu (fig. 11). Atunci, luînd unul din aceste puncte drept origine, de exemplu $A_4 = 0$, putem construi în spațiu trei vectori liniar independenți

$$\bar{a} = \overline{OA_1},\ \bar{b} = \overline{OA_2},\ \bar{c} = \overline{OA_3};$$

în caz contrar, vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ar fi liniar dependenți, adică coplanari. Spunem că trei vectori liniar independenți, avînd același punct de aplicație O, definesc un triedru*.

Să demonstrăm

Teoremă. Orice vector $\bar{v}$ din spațiul E_3 cu trei dimensiuni se exprimă ca o combinație liniară vectorială, formată cu trei vectori liniar independenți arbitrari $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, adică

$$\bar{v} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} + \nu\bar{c}. \qquad (21)$$

* Este o figură geometrică, formată din trei plane concurente într-un punct O, și care nu trec prin aceeași dreaptă, fețele triedrului fiind cele trei plane și muchiile lui dreptele de intersecție ale celor trei fețe, două cîte două; vectorii liniar independenți care definesc triedrul se găsesc respectiv pe muchiile triedrului.

În adevăr, să luăm în O trei vectori $\bar{a} = \overline{OA_1}$, $\bar{b} = \overline{OA_2}$, $\bar{c} = \overline{OA_3}$ liniar independenţi (fig. 11). Fie $\bar{v} = \overline{OP}$ un vector oarecare. Dacă P_1, P_2, P_3 sînt proiecţiile lui P, respectiv pe direcţiile $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (paralele respectiv cu planele determinate de ceilalţi doi vectori), avem

$$\overline{OP_1} = \lambda\bar{a}, \quad \overline{OP_2} = \mu\bar{b}, \quad \overline{OP_3} = \nu\bar{c}.$$

Observăm că $\overline{P_1Q} = \overline{OP_2}$, $\overline{QP} = \overline{OP_3}$, iar $\overline{OP} = \overline{OP_1} + \overline{P_1Q} + \overline{QP}$, de unde rezultă relaţia (21).

Spunem că am descompus vectorul $\bar{v}$ după direcţiile a trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, necoplanari, această descompunere fiind unică.

Unicitatea descompunerii rezultă imediat (v. cazul E_2).

Vectorii $\lambda\bar{a}$, $\mu\bar{b}$, $\nu\bar{c}$ sînt *componentele* lui $\bar{v}$ după direcţiile $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Punînd

$$\lambda = -\frac{\alpha}{\delta}, \quad \mu = -\frac{\beta}{\delta}, \quad \nu = -\frac{\gamma}{\delta},$$

relaţia (21) se scrie

$$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} + \delta\bar{v} = 0. \tag{21'}$$

Avem deci

Propoziţie. Patru vectori oarecare din spaţiul E_3 cu trei dimensiuni sînt liniar dependenţi.

În particular, în spaţiul E_3, versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ai axelor de coordonate sînt trei vectori liniar independenţi, formînd un triedru cu originea în O. Luînd acest triedru ca *triedru fundamental* (triedru la care sînt raportaţi toţi vectorii din spaţiu), orice vector $\bar{v}(v_x, v_y, v_z)$ are descompunerea

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}. \tag{22}$$

Spunem că (22) este expresia *hipercomplexă* sau *analitică a vectorului* $\bar{v}$, $v_x\bar{i}$, $v_y\bar{j}$, $v_z\bar{k}$, fiind componentele vectorului $\bar{v}$ pe axele de coordonate, iar v_x, v_y, v_z sînt proiecţiile lui $\bar{v}$ pe axele de coordonate, adică

$$v_x = pr_x\bar{v}, \quad v_y = pr_y\bar{v}, \quad v_z = pr_z\bar{v}.$$

§ 5. PRODUSUL SCALAR A DOI VECTORI

Produsul scalar a doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, notat simbolic prin $\bar{a} \cdot \bar{b}$, este scalarul definit de relaţia

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = ab \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}), \tag{23}$$

unde $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$ este unghiul mai mic decît două unghiuri drepte dintre vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.

Din definiție rezultă că

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a \operatorname{pr}_{\bar{a}} \bar{b} = b \operatorname{pr}_{\bar{b}} \bar{a}, \tag{23'}$$

deoarece avem (fig. 12)

$\operatorname{pr}_{\bar{a}} \bar{b} = OA' = b \cos \theta$, respectiv $\operatorname{pr}_{\bar{b}} \bar{a} = OB' = a \cos \theta$,

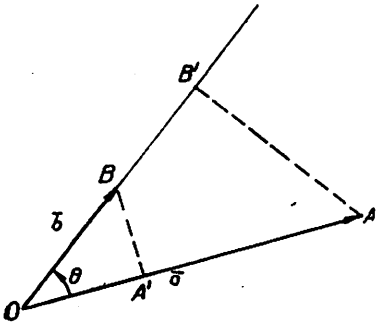


Fig. 12

unde $\theta = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) < \pi$.

În particular, dacă unul din vectori este chiar versorul unei axe u, de exemplu $\bar{b} = \text{vers. } u$, atunci

$$\bar{a} \cdot \bar{e} = \operatorname{pr}_u \bar{a}, \quad (\bar{e} = \text{vers. } u). \tag{23''}$$

Relația (23'') permite deci obținerea proiecției unui vector pe o direcție dată.

Proprietăți. 1° *Produsul scalar este comutativ:*

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}. \tag{24}$$

În adevăr

$\bar{a} \cdot \bar{b} = ab \cos (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = b \cdot a \cos (\widehat{\bar{b}, \bar{a}}) = \bar{b} \cdot \bar{a}$, deoarece înmulțirea scalarilor este comutativă, iar $\cos (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \cos (\widehat{\bar{b}, \bar{a}})$.

2° *Produsul scalar este distributiv față de adunarea vectorială:*

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}. \tag{25}$$

În adevăr, avem

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = a \operatorname{pr}_{\bar{a}} (\bar{b} + \bar{c}) = a(\operatorname{pr}_{\bar{a}} \bar{b} + \operatorname{pr}_{\bar{a}} \bar{c}) = a \operatorname{pr}_{\bar{a}} \bar{b} + a \operatorname{pr}_{\bar{a}} \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}.$$

3° *Produsul scalar este permutabil cu amplificarea vectorilor printr-un scalar:*

$$\lambda(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda \bar{b}). \tag{26}$$

În adevăr, dacă $\lambda \geqslant 0$, proprietatea rezultă din definiție. Dacă $\lambda = -\mu^2 < 0$, vom avea

$$\lambda (\bar{a} \cdot \bar{b}) = -\mu^2 (ab \cos \theta) = \mu^2 ab \cos (\theta - \pi),$$

$$(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = |\lambda \bar{a}| b \cos (\widehat{\lambda \bar{a}, \bar{b}}) = \mu^2 ab \cos (\theta - \pi),$$

deoarece $\lambda \bar{a}$ și $\bar{b}$ fac între ei unghiul $\theta - \pi$ (fig. 13). Rezultă că relațiile (26) sînt valabile pentru orice λ. Deci avem

$$(\lambda \bar{a}) \cdot (\mu \bar{b}) = \lambda \mu (\bar{a} \cdot \bar{b}). \tag{26'}$$

4° *Produsul scalar este nul, dacă unul din factori este nul sau dacă vectorii sînt perpendiculari:*

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0, \text{ dacă } \bar{a} = 0 \ (\bar{b} = 0)$$

sau dacă $\bar{a} \perp \bar{b}$. (27).

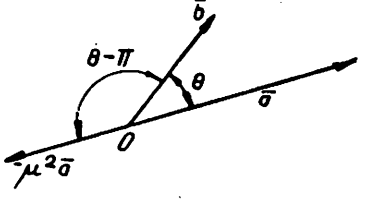


Fig. 13

În particular:

Condiția necesară și suficientă pentru ca doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ nenuli ($a \cdot b \neq 0$) să fie perpendiculari, este ca produsul lor scalar să fie nul.

În adevăr, dacă vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ nenuli sînt perpendiculari, atunci $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\pi}{2}$, încît $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$. Reciproc, dacă $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, deoarece $a \cdot b \neq 0$ (vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt nenuli), rezultă $\cos \theta = 0$, adică $\theta = \frac{\pi}{2}$; deci, vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt perpendiculari.

5° *Produsul scalar permite evaluarea modulului unui vector.*

În adevăr, dacă $\bar{a} = \bar{b} = \bar{v}$, atunci din (23) rezultă

$$\bar{v} \cdot \bar{v} = v^2, \tag{28}$$

ceea ce ne arată că *produsul scalar al unui vector prin el însuși este egal cu pătratul modulului său.* De aceea, produsul scalar $\bar{v} \cdot \bar{v}$ îl vom numi pătratul vectorului $\bar{v}$ și vom putea scrie

$$\bar{v}^2 = v^2. \tag{28'}$$

În particular, avem

$$\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1, \quad \bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{i} = 0. \tag{28''}$$

Expresia analitică a produsului scalar. Fie doi vectori

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \text{ și } \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}.$$

Ținînd seama de (25) și (28''), obținem

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \tag{29}$$

Aplicație. Unghiul dintre doi vectori. Dacă vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt nenuli, deci $ab \neq 0$, și ținînd seama de (23) și (29) rezultă

$$\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{30}$$

Deci, pentru ca vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ să fie ortogonali, este necesar și suficient să avem

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0. \tag{30'}$$

§ 6. PRODUSUL VECTORIAL A DOI VECTORI

Produsul vectorial* a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$, notat simbolic prin $\bar{a} \times \bar{b}$, este un vector

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}, \tag{31}$$

* Produsul vectorial are ca rezultat o mărime numită *bivector*, care se deosebește de vector atît prin obiectul geometric căruia îi este asociată cît și prin proprietatea de orientare. Putem reprezenta vectorial o astfel de mărime, ceea ce permite efectuarea operațiilor de algebră vectorială cu aceste mărimi. Pentru aprofundarea acestor probleme, a se vedea [22].

avînd:

1° direcția normalei planului determinat de $\bar{a}$ și $\bar{b}$;

2° sensul astfel încît triedrul format de $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ să fie drept (orientat sinistrorsum *;

3° mărimea egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori ca laturi (fig. 14), deci

$$c = ab \sin (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}), \quad (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) < \pi. \tag{31'}$$

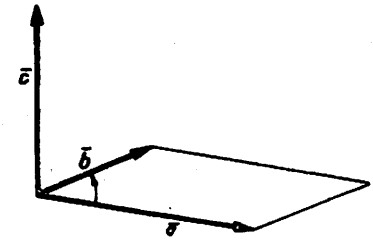


Fig. 14

Proprietăți. 1° *Produsul vectorial este anticomutativ:*

$$\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a}). \tag{32}$$

În adevăr, din definiție rezultă că vectorii $\bar{c}' = \bar{b} \times \bar{a}$ și $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ sînt vectori opuși, deoarece au aceeași direcție (sînt perpendiculari pe planul determinat de $\bar{a}$ și $\bar{b}$) și mărime (egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori ca laturi), dar sensurile opuse (triedrele $[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$ și $[\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}]$ au orientări diferite).

2° *Produsul vectorial al lui $\bar{a}$ cu $\bar{b}'$, vectorul fiind obținut prin deplasarea extremității B a lui $\bar{b}$ pe o paralelă la $\bar{a}$, este egal cu cel format de $\bar{a}$ și $\bar{b}$* (fig. 15):

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times \bar{b}'. \tag{33}$$

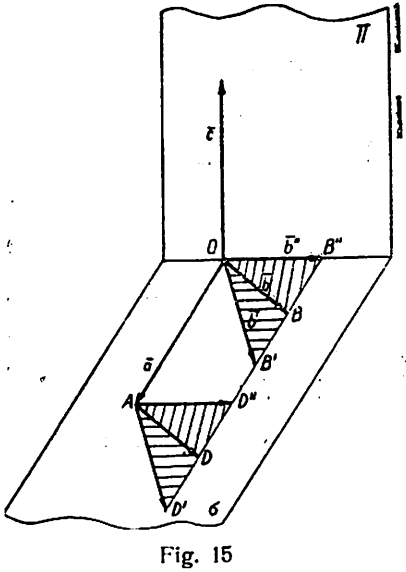


Fig. 15

În adevăr, fie $\bar{b}' = \overline{OB'}$. Vectorii $\bar{a} \times \bar{b}$ și $\bar{a} \times \bar{b}'$ sînt egali, deoarece: sînt perpendiculari pe planul σ determinat de $\bar{a}$ și $\bar{b}$, au același semn, întrucît sensul de rotație de la $\bar{a}$ la $\bar{b}$ se păstrează și de la $\bar{a}$ la $\bar{b}'$, iar ariile paralelogramelor $OADB$ și $OAD'B'$ sînt egale, avînd aceeași bază OA și aceeași înălțime OB''.

Deci, *într-un produs vectorial putem roti unul din factori în planul determinat de vectorii factori fără a modifica produsul, deplasîndu-i extremitatea pe o paralelă la celălalt.*

În particular, putem considera vectorul $\bar{b}'' = \overline{OB''}$, care este perpendicular pe $\bar{a}$; cu alte cuvinte, $\bar{b}''$ este vectorul proiecție a lui $\bar{b}$ în planul π, dus prin originea lui $\bar{a}$ și perpendicular pe $\bar{a}$ (fig. 14). Deci

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times \bar{b}''.$$

* Un observator în picioare de-a lungul lui $\bar{c}$ vede rotația lui $\bar{a}$ spre $\bar{b}$ în sensul direct (invers acelor ceasornicului); sau sensul lui $\bar{c}$ este dat de înaintarea burghiului la rotirea lui $\bar{a}$ spre $\bar{b}$ în sens direct.

Deoarece $b'' = b \sin \theta$, unde $\theta = \widehat{(\bar{a}, \bar{b})} < \pi$, rezultă

$$| \bar{a} \times \bar{b}'' | = ab'' \sin \widehat{(\bar{a}, \bar{b}'')} = ab'' = ab \sin \theta = | \bar{a} \times \bar{b} | = c,$$

de unde găsim

$$\frac{c}{b''} = \frac{a}{1}.$$

Deci *putem obține vectorul produs* $\bar{a} \times \bar{b}''$, *rotind pe* $\bar{b}''$ *în planul* π *de un unghi egal cu 90°, în sens pozitiv, în jurul lui* $\bar{a}$ *și mărindu-l în raportul* $\frac{a}{1}$.

3° *Produsul vectorial este distributiv față de adunarea vectorială*:

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}. \tag{34}$$

Fie $\bar{b}'$, $\bar{c}'$, $\bar{d}'$ vectorii proiecție ai lui $\bar{b}$, $\bar{c}$ și $\bar{d} = \bar{b} + \bar{c}$ pe planul π, perpendicular în O pe vectorul $\bar{a}$ (fig. 16). Avem $\bar{d}' = \bar{b}' + \bar{c}'$. Ținînd seama de proprietatea (33), rezultă

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times \bar{b}', \ \bar{a} \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c}', \ \bar{a} \times \bar{d} = \bar{a} \times \bar{d}'. \tag{33'}$$

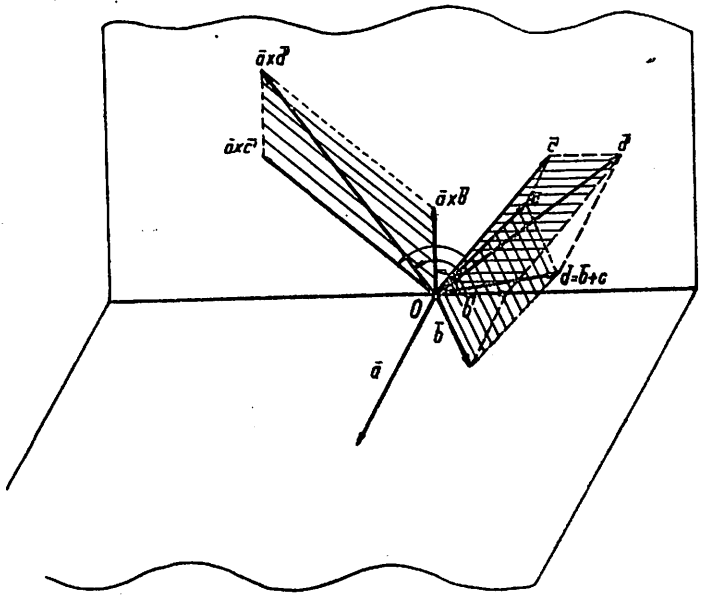


Fig. 16

Paralelogramul construit de vectorii $\bar{b}'$ și $\bar{c}'$ ca laturi îl rotim de un unghi de 90°, în sens pozitiv, în jurul lui $\bar{a}$ și îl dilatăm în raportul $\frac{a}{1}$. Vom obține un paralelogram cu laturile $\bar{a} \times \bar{b}'$, $\bar{a} \times \bar{c}'$ și diagonala $\bar{a} \times \bar{d}'$; deci

$$\bar{a} \times \bar{d}' = \bar{a} \times \bar{b}' + \bar{a} \times \bar{c}'.$$

În această relație, ținînd seama de (33') și că $\bar{d} = \bar{b} + \bar{c}$, rezultă proprietatea (34).

4° *Înmulțirea unui produs vectorial cu un scalar este asociativă*:

$$\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b}). \tag{35}$$

Dacă $\lambda > 0$, proprietatea rezultă din definiție. Dacă $\lambda = -\mu^2 < 0$, vectorii

$$\bar{v}_1 = \lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = -\mu^2(\bar{a} \times \bar{b}) \text{ și } \bar{v}_2 = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = (-\mu^2\bar{a}) \times \bar{b}$$

au aceeași direcție (a normalei la planul determinat de $\bar{a}$ și $\bar{b}$) și sens (triedrele sînt orientate dextrorsum, dacă triedrul $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ este orientat sinistrorsum). Observăm (fig. 13) că $v_1 = -\mu^2 ab \sin\theta$, $v_2 = |\lambda\bar{a}| b \sin(\widehat{\lambda\bar{a}, \bar{b}}) = \mu^2 ab \sin(\widehat{-\bar{a}, \bar{b}}) = \mu^2 ab \sin(\theta - \pi) = -\mu^2 ab \sin\theta$, unde $\theta = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$; de aici rezultă $v_1 = v_2$. Deci, relația (35) este adevărată pentru $\lambda \neq 0$ și, evident, pentru $\lambda = 0$; adică, relația (35) este adevărată pentru orice λ. Atunci avem

$$(\lambda\bar{a}) \times (\mu\bar{b}) = \lambda\mu(\bar{a} \times \bar{b}). \tag{35'}$$

5° *Produsul vectorial este nul, dacă unul din vectori este nul sau dacă cei doi vectori sînt coliniari*:

$$\bar{a} \times \bar{b} = 0, \text{ dacă } \bar{a} = 0 (\bar{b} = 0) \text{ sau dacă } \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = 0. \tag{36}$$

Proprietatea rezultă din definiția produsului vectorial; astfel, ținînd seama în (31') că $a = 0$ (dacă vectorul $\bar{a} = 0$), respectiv $\sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 0$ (dacă vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt coliniari), obținem $\bar{a} \times \bar{b} = 0$.

În particular, *produsul vectorial al unui vector prin el însuși este nul*:

$$\bar{a} \times \bar{a} = 0. \tag{36'}$$

Amintim că, în algebră, din egalitatea numerelor $ab = ab'$ se deduce $b = b'$, dacă $a \neq 0$. În algebra vectorială, din egalitatea

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times \bar{b}', \ (\bar{a} \neq 0) \tag{36''}$$

nu deducem în mod obligatoriu că $\bar{b} = \bar{b}'$. În adevăr, avem

$$\bar{a} \times (\bar{b} - \bar{b}') = 0,$$

de unde, ținînd seama de proprietatea (36), obținem sau $\bar{b} - \bar{b}' = 0$, deci $\bar{b} = \bar{b}'$ (vectorii $\bar{b}$ și $\bar{b}'$ sînt egali) sau $\alpha\bar{a} + \beta(\bar{b} - \bar{b}') = 0$, deci $\bar{b} - \bar{b}' = k\bar{a}$ (extremitatea B' a vectorului $\bar{b}'$ se obține prin deplasarea extremității B a vectorului $\bar{b}$ pe o paralelă dusă prin B la $\bar{a}$).

Însă, *dacă egalitatea (36'') are loc pentru orice vector arbitrar $\bar{a}$, atunci în mod obligatoriu avem $\bar{b} = \bar{b}'$.*

Demonstrația se face prin reducere la absurd: să presupunem că vectorul $\bar{b} - \bar{b}'$ nu ar fi nul; atunci acest vector ar trebui să fie paralel cu orice alt vector $\bar{a}$, deci să aibă toate direcțiile spațiului, adică să fie vectorul nul, ceea ce contrazice ipoteza.

Pentru versorii axelor de coordonate avem relațiile

$$\left.\begin{aligned} &\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0 \\ &\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k},\ \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i},\ \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Expresia analitică a produsului vectorial. Fie

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k},\ \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$$

doi vectori în spațiul $E_3(x, y, z)$. Ținînd seama de (34) și (37), obținem relația:

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\ \bar{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\ \bar{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\ \bar{k}, \tag{38}$$

care, simbolic, se mai scrie sub formă de determinant:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{38'}$$

Observăm că proiecțiile c_x, c_y, c_z pe axele de coordonate ale vectorului $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ sînt determinanții minori ai matricei

$$\left\| \begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix} \right\|,$$

adică

$$c_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix},\quad c_y = -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix},\quad c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \tag{38''}$$

Aplicații. 1) **Aria unui triunghi.** Fie $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $(i = 1, 2, 3)$ vîrfurile unui triunghi $P_1P_2P_3$. Vectorul de poziție al punctului P_i fiind $\bar{r}_i = \overline{OP}_i$, avem

$$\overline{P_1P_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1,\ \overline{P_1P_3} = \bar{r}_3 - \bar{r}_1.$$

Ținînd seama de interpretarea geometrică a modulului produsului vectorial a doi vectori (este egal cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori ca laturi), aria S a triunghiului $P_1P_2P_3$ este

$$S = \frac{1}{2}\left|\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3}\right| = \frac{1}{2}\left|(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times (\bar{r}_3 - \bar{r}_1)\right|. \tag{39}$$

Deoarece

$$\left|\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3}\right|^2 = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2,$$

obținem

$$4S^2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2. \tag{39'}$$

Însă, indicînd cu S_1, S_2, S_3 ariile triunghiurilor proiectate ale triunghiului $P_1P_2P_3$, respectiv în planele de coordonate Oyz, Ozx, Oxz, se poate arăta că

$$S_1 = S\cos(\widehat{\bar{n}, x}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$S_2 = S\cos(\widehat{\bar{n}, y}) = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad (40)$$

$$S_3 = S\cos(\widehat{\bar{n}, z}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

unde $\bar{n}$ este normala la planul π al triunghiului $P_1P_2P_3$ (fig. 17).

În adevăr, fie, de exemplu, $Q_i(0, y_i, z_i)$ proiecția ortogonală a vîrfului P_i pe planul Oyz. Dacă triunghiul $P_1P_2P_3$ are una din laturi paralelă cu planul Oyz, de exemplu latura P_1P_2, putem considera aria S definită cu ajutorul laturii P_1P_2 și a înălțimii P_3P_3'; prin proiecție avem $Q_1Q_2 = P_1P_2$ și $Q_3Q_3' = P_3P_3'\cos(\widehat{\bar{n}, x})$, deoarece unghiul dintre planul π și planul Oyz este egal cu unghiul dintre normala $\bar{n}$ la π și axa Ox. Deci, formula este demonstrată.

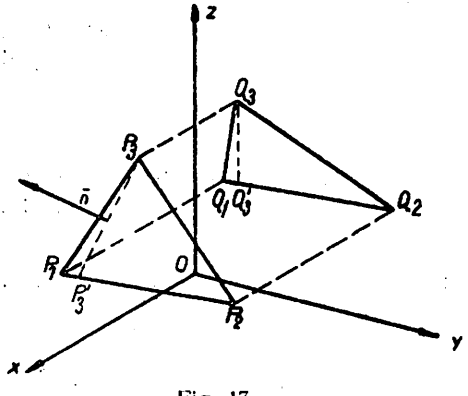


Fig. 17

Dacă triunghiul $P_1P_2P_3$ nu are nici o latură paralelă cu planul Oyz, ducînd printr-unul din vîrfuri o paralelă la planul Oyz, se poate împărți triunghiul dat în două asemenea triunghiuri. Deci și în acest caz formula este adevărată.

Observăm că ariile $2S_i$ sînt egale cu determinanții matricei

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

acești determinanți obținîndu-se prin eliminarea coloanei $i = 1,2,3$ din tablou, determinantul fiind luat cu semnul $+$ sau $-$, după cum i este impar sau par.

Din (40) deducem imediat că

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \qquad (39'')$$

Avem deci

Propoziție. Aria unui triunghi este egală cu rădăcina pătrată a sumei pătratelor ariilor triunghiurilor ce se obțin proiectînd triunghiul dat pe cele trei plane de coordonate.

2) **Pătratul modulului produsului vectorial.** Fie θ unghiul vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$. Ținînd seama că

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = ab \sin \theta, \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = ab \cos \theta$$

rezultă

$$(\bar{a} \times \bar{b})^2 = a^2b^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2. \tag{41}$$

In algebra scalară, această relație este numită *identitatea lui Lagrange.*

§ 7. PRODUSUL MIXT ȘI PRODUSUL DUBLU VECTORIAL A TREI VECTORI

Produsul mixt a trei vectori. Definiție. Se numește **produs mixt a trei vectori** $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ **produsul scalar**

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \tag{42}$$

al vectorului $\bar{a}$ **prin produsul vectorial** $\bar{b} \times \bar{c}$.

Expresia analitică a produsului mixt (42) se deduce efectuînd produsul scalar între vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b} \times \bar{c}$. Ținînd seamă de formulele (29) și (38), obținem

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = a_x(b_yc_z - b_zc_y) + a_y(b_zc_x - b_xc_z) + a_z(b_xc_y - b_yc_x),$$

care se poate scrie

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{42'}$$

Interpretare geometrică. Aplicînd definiția produsului scalar, avem

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = |\bar{b} \times \bar{c}| \cdot a \cos \theta,$$

unde θ este unghiul dintre vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b} \times \bar{c}$ (fig.18). Observăm că $S = |\bar{b} \times \bar{c}|$ este aria paralelogramului format de vectorii $\bar{b}$ și $\bar{c}$, iar $h = a \cos \theta$ (proiecția vectorului $\bar{a}$ pe vectorul $\bar{b} \times \bar{c}$) este înălțimea paralelipipedului construit pe cei trei vectori ca muchii, înălțimea h fiind pozitivă sau negativă, după cum $\theta < \frac{\pi}{2}$ sau $\theta > \frac{\pi}{2}$. Rezultă că

$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$ = volumul orientat al paralelipipedului $[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$. (42″)

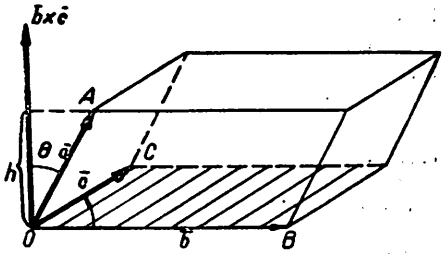


Fig. 18

Însă vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ formează — în această ordine — un triedru, care este orientat sinistrorsum sau dextrorsum, după cum $\theta < \frac{\pi}{2}$ sau $\theta > \frac{\pi}{2}$. Deci, *produsul mixt a trei vectori* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *este egal în valoare absolută cu volumul paralelipipedului format de cei trei vectori, avînd semnul* + *sau* —, *după cum triedrul* $[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$ *este orientat sinistrorsum sau dextrorsum.*

Proprietăți. 1° *În produsul mixt putem interverti ordinea operațiilor de înmulțire vectorială și scalară, fără ca valoarea produsului mixt să se schimbe:*

$$\bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}. \tag{43}$$

Proprietatea rezultă din scrierea sub formă de determinant (42′) a produsului mixt. Pe baza acestei proprietăți putem nota simbolic

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}), \tag{42'''}$$

fără a specifica nici un semn de înmulțire. Este evident că în scrierea (42′′′) a produsului mixt, deși putem plasa oricum semnele $\times$ și $\cdot$ fără posibilitate de eroare, trebuie întîi efectuat produsul vectorial, și apoi produsul scalar.

2° *O permutare a doi factori într-un produs mixt schimbă semnul produsului:*

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}). \tag{44}$$

Proprietatea rezultă din proprietățile determinantului. Deci:

Produsul mixt a trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ nu se schimbă prin permutarea ciclică a celor trei factori, adică

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}), \tag{44'}$$

ceea ce corespunde faptului că nici volumul paralelipipedului (în mărime și sens) nu se schimbă, cînd alegem altă față ca bază.

Așadar, fiind dați trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, putem forma cu acești trei vectori șase produse mixte avînd aceeași valoare absolută, trei fiind de un semn și celelalte trei de semn contrar.

3° *Produsul mixt este distributiv față de adunare:*

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} + \bar{d}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) + (\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}). \tag{45}$$

Proprietatea rezultă din faptul că atît produsul scalar cît și produsul vectorial sînt distributive față de adunare. Interpretarea geometrică a acestei proprietăți este următoarea: ea permite adunarea volumelor paralelipipedelor, care au fie baza, fie o muchie comună, transformînd solidul astfel obținut într-un paralelipiped echivalent ca volum.

4° *Produsul mixt se anulează dacă unul din factori este nul sau dacă cei trei vectori sînt coplanari:*

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0 \text{ dacă } \bar{a} = 0 \ (\bar{b} = 0, \bar{c} = 0) \text{ sau dacă } \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = 0. \tag{46}$$

Proprietatea rezultă din definiția produsului mixt. În particular, produsele în care doi factori sînt egali sau proporționali sînt nule:

$$(\bar{a}, \alpha\bar{a}, \bar{c}) = 0. \tag{46'}$$

Deci:

O condiție necesară și suficientă ca trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ nenuli ($abc \neq 0$) să fie coplanari, este ca produsul lor mixt să fie nul, adică

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0.$$

Aplicație. Volumul tetraedrului. Fie patru puncte $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $(i = 1,2,3,4)$, având vectorii de poziție $\bar{r}_i = \overline{OP_i}$ (fig.19). Aceste puncte determină trei vectori liniar independenți, de exemplu, $\overline{P_4P_1}$, $\overline{P_4P_2}$, $\overline{P_4P_3}$, cu ajutorul cărora construim un paralelipiped.

Deoarece volumul tetraedrului este egal cu a șasea parte din volumul paralelipipedului, rezultă că volumul V al tetraedrului $P_1P_2P_3P_4$ este

$$V = \pm \frac{1}{6} (\overline{P_4P_1}, \overline{P_4P_2}, \overline{P_4P_3}). \qquad (47)$$

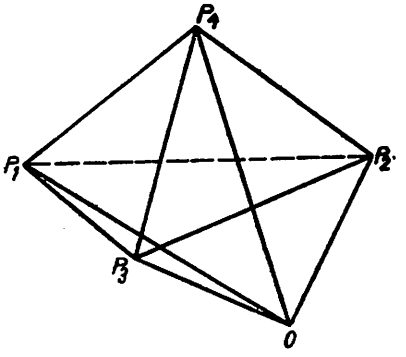


Fig. 19

Ținînd seama de expresia (42') a produsului mixt și că $\overline{P_4P_1} = \bar{r}_1 - \bar{r}_4$, $\overline{P_4P_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_4$, $\overline{P_4P_3} = \bar{r}_3 - r_4$, obținem

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (48)$$

Produsul dublu vectorial a trei vectori

Fiind dați trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, vectorul

$$\bar{v} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) \qquad (49)$$

se numește produsul dublu vectorial (mai scurt, produsul dublu) al celor trei vectori.

În formula (49), ce definește produsul dublu a trei vectori, se efectuează întîi produsul vectorial $\bar{b} \times \bar{c}$, iar apoi produsul vectorial al acestuia prin $\bar{a}$.

Construcția geometrică a vectorului $\bar{v}$ rezultă ușor. Fie $\overline{OP} = \bar{b} \times \bar{c}$, vectorul $\overline{OP}$ fiind perpendicular pe planul π, format de vectorii $\bar{b}$ și $\bar{c}$ (fig. 20). Vectorul $\bar{a} \times \overline{OP} = \overline{OR} = \bar{v}$, fiind perpendicular pe planul σ format de $\bar{a}$ și $\overline{OP}$, este perpendicular pe $\overline{OP}$ și pe $\overline{OA} = \bar{a}$, fiind un vector din planul π.

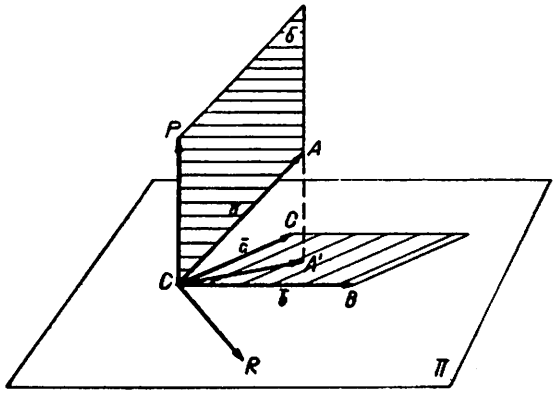


Fig. 20

Considerînd vectorul proiecție $\overline{OA'}$ al lui $\overline{OA}$ pe planul π, observăm că $\overline{OR} \in \pi$ este perpendicular pe $\overline{OA'}$. Rezultă că *produsul dublu vectorial (49) a trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (nenuli) este reprezentat printr-un vector $\bar{v}$ din planul π determinat de vectorii $\bar{b}$ și $\bar{c}$, perpendicular pe $\bar{a}$ și pe vectorul proiecție a lui $\bar{a}$ pe planul π.* Cu alte cuvinte, vectorul $\bar{v}$ se exprimă ca o combinație liniară vectorială de $\bar{b}$ și $\bar{c}$, adică

$$\bar{v} = \lambda \bar{b} + \mu \bar{c}, \qquad (49')$$

λ și μ fiind doi scalari determinați. Determinarea scalarilor se poate face observînd că proiecția relației vectoriale (49') pe oricare din cele trei axe de coordonate este o identitate. De exemplu, pe axa Ox avem

$$a_y(\bar{b} \times \bar{c})_z - a_z(\bar{b} \times \bar{c})_y = \lambda b_x + \mu c_x,$$

adică

$$a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z) = \lambda b_x + \mu c_x.$$

Adunînd și scăzînd cantitatea $a_x b_x c_x$ și grupînd termenii, obținem

$$b_x(\lambda - a_x c_x - a_y c_y - a_z c_z) - c_x(\mu + a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) = 0,$$

sau încă

$$b_x(\lambda - \bar{a} \cdot \bar{c}) - c_x(\mu + \bar{a} \cdot \bar{b}) = 0.$$

Relația este identic satisfăcută, oricare ar fi b_x și c_x, numai dacă

$$\lambda = \bar{a} \cdot \bar{c}, \quad \mu = -\bar{a} \cdot \bar{b}.$$

Rezultă că *formula de dezvoltare* a produsului dublu vectorial a trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ este

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\,\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\,\bar{c}. \qquad (49'')$$

Ținînd seama că formula (49'') are numeroase aplicații în algebra vectorială, s-au dat mai multe demonstrații ale acestei formule, majoritatea bazate pe considerații și artificii geometrice (a se vedea [22], p. 153).

CAPITOLUL XII

DREPTE ŞI PLANE ÎN SPAŢIU

§ 1. ECUAŢIILE DREPTEI

1. **Ecuaţiile dreptei care trece prin două puncte.** Se ştie că (v. cap. V, § 2) axiomele I_1 şi I_2 din grupa axiomelor de asociaţie ale geometriei axiomatice se pot reuni într-un singur enunţ, şi anume:

Două puncte distincte determină o dreaptă şi numai una.

Fie date două puncte P_1, P_2, ale căror coordonate în raport cu un sistem de referinţă cartezian sînt respectiv x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2. Ne propunem să determinăm condiţiile la care trebuie să satisfacă coordonatele unui punct $P(x, y, z)$, pentru a se găsi pe dreapta P_1P_2. Dacă punctul P se găseşte pe dreapta P_1P_2, el împarte segmentul $\overline{P_1P_2}$ într-un raport r,

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = r, \tag{1}$$

şi cînd r variază (r este coordonata baricentrică a punctelor de pe dreaptă în raport cu punctele de bază P_1, P_2), punctul P descrie dreapta P_1P_2.

Amintim apoi (v. Cap. X, § 1) că raportul simplu (P_1P_2P) a trei puncte coliniare P_1, P_2, P se păstrează prin proiecţie pe orice axă u; deci, luînd ca axă u de proiecţie succesiv fiecare din axele de coordonate, avem

$$\mathrm{pr}_x(P_1P_2P) = \mathrm{pr}_y(P_1P_2P) = \mathrm{pr}_z(P_1P_2P), \tag{1'}$$

adică

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{z - z_1}{z_2 - z}.$$

Folosind o proprietate a proporţiilor, obţinem

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{2}$$

Deci, coordonatele x, y, z ale punctului P, situat pe dreapta determinată pe punctele P_1 şi P_2, satisfac condiţiile (2).

Vom spune că *ecuaţiile (2) constituie ecuaţiile dreptei determinată de punctele* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

Vectorial, ecuațiile (2) se deduc din relația vectorială

$$\overline{P_1P} = \lambda \overline{P_1P_2} \text{ sau } \overline{P_1P} \times \overline{P_1P_2} = 0, \tag{3}$$

care arată că vectorii $\overline{P_1P}$ și $\overline{P_1P_2}$ sînt coliniari.

În adevăr, punctele $P_i (i = 1,2)$ și P fiind date prin vectorii de poziție $\bar{r}_i = \overline{OP_i}$ și $\bar{r} = \overline{OP}$, ecuația vectorială (3) se mai scrie

$$\bar{r} = (1 - \lambda)\,\bar{r}_1 + \lambda \bar{r}_2 \text{ sau } (\bar{r} - \bar{r}_1) \times (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) = 0, \tag{3'}$$

care este echivalentă cu ecuațiile scalare (2).

Aplicații. 1) **Ecuațiile axelor de coordonate.** Axa Ox trecînd prin originea O a sistemului de coordonate și prin punctul $E_1(1, 0, 0)$, rezultă că *ecuațiile axei Ox sînt*

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}. \tag{4}$$

Axa Oy, trecînd prin originea O și prin punctul $E_2(0, 1, 0)$, are ecuațiile

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}. \tag{4'}$$

De asemenea, ținînd seama că axa Oz trece prin originea O și prin punctul $E_3(0, 0, 1)$, ecuațiile ei sînt

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}. \tag{4''}$$

2) **Ecuațiile reduse ale dreptei.** Condițiile (2), exprimînd egalitatea a trei rapoarte, reprezintă două ecuații independente. În adevăr, cel puțin una din cantitățile $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ este diferită de zero, altfel punctele P_1 și P_2 ar fi confundate, iar dreapta P_1P_2 ar fi nedeterminată. Presupunînd $z_2 - z_1 \neq 0$, cele două ecuații independente se obțin scriind că primul și al doilea raport sînt respectiv egale cu al treilea. Rezolvînd în raport cu x și y, avem

$$x = \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} z + x_1 - \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} z_1, \quad y = \frac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1} z + y - \frac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1} z_1.$$

Obținem astfel ecuațiile dreptei sub forma

$$\begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases} \tag{5}$$

care se numesc *ecuațiile reduse* ale dreptei. Asupra acestei probleme vom reveni.

2. Ecuațiile dreptei care trece printr-un punct dat și are direcția dată. În geometria euclidiană (v. și Cap. V, § 3) se afirmă că, fiind date o direcție și un punct în spațiu, există o dreaptă și numai una care conține punctul dat și este paralelă cu direcția dată. Fie $P_0(x_0, y_0, z_0)$ punctul dat și l, m, n parametrii directori ai direcției date. Dacă $P(x, y, z)$ este un punct de pe dreapta care trece prin P_0 și este paralelă cu direcția dată, dreapta P_0P are parametrii directori $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. Dar, această dreaptă este paralelă cu direcția de parametrii directori l, m, n; deci, parametrii directori ai dreptei P_0P și ai direcției date sînt proporționali:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{6}$$

Dacă un punct Q nu este pe dreapta P_0P, dreapta P_0Q nu are parametrii directori proporţionali cu ai direcţiei date. Rezultă deci că *ecuaţiile (6) sînt ecuaţiile dreptei care trece prin punctul* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *şi este paralelă cu direcţia dată de parametrii directori* l, m, n.

Vectorial, ecuaţiile (6) se deduc din relaţia vectorială

$$\overline{P_0P} = \lambda \bar{v} \quad \text{sau} \quad \bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda \bar{v}, \tag{6'}$$

care arată că vectorii $\overline{P_0P} = \bar{r} - \bar{r}_0$ şi $\bar{v}(l, m, n)$ sînt coliniari.

Dacă direcţia este dată de cosinusurile directoare $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, ecuaţiile dreptei P_0P se scriu

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos \beta} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma}. \tag{6''}$$

Observaţie. Ecuaţiile (5) se pot încă scrie

$$\frac{x - p}{a} = \frac{y - q}{b} = \frac{z}{1}, \tag{5'}$$

ceea ce le face să reintre în forma generală (6) şi, reciproc, putem aduce forma (6) la (5').

3. **Ecuaţiile parametrice ale dreptei.** Din (1'), dacă ţinem seama de (8), (1) din Capitolul X, şi că $(P_1P_2P) = -r$, rezultă

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = -r, \quad \frac{y - y_1}{y - y_2} = -r, \quad \frac{z - z_1}{z - z_2} = -r,$$

unde r este coordonata baricentrică a punctelor de pe dreapta P_1P_2 în raport cu punctele de bază P_1, P_2. Obţinem de aici coordonatele punctului $P(x, y, z)$ al dreptei P_1P_2:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}, \quad z = \frac{z_1 + rz_2}{1 + r}. \tag{7}$$

Cînd r parcurge toate valorile reale de la $-\infty$ la $+\infty$, punctul P descrie dreapta începînd din P_2, revenind în acest punct.

Spunem că ecuaţiile (7) dau o *reprezentare parametrică* a dreptei P_1P_2 (parametrul fiind coordonata baricentrică r).

O altă reprezentare parametrică a dreptei se obţine cînd dreapta este dată prin ecuaţii de forma (6). În acest caz, egalînd rapoartele cu un parametru arbitrar t, un punct al dreptei are coordonatele

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \tag{8}$$

Rezultă că *un punct curent* P *al dreptei are coordonatele* x, y, z *funcţii liniare de un parametru* t. Ca şi în cazul dreptei în plan (v. Cap. V, § 6), parametrul t are o interpretare geometrică: este proporţional cu distanţa P_0P de la punctul P_0, prin care trece dreapta, la punctul curent P de pe dreaptă.

Dacă dreapta este dată de ecuațiile (6″), un punct P al dreptei are coordonatele

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \alpha, \\ y = y_0 + \rho \cos \beta, \\ z = z_0 + \rho \cos \gamma, \end{cases} \tag{8'}$$

unde ρ este un parametru care este egal cu distanța de la $P_0(x_0, y_0, z_0)$ la $P(x, y, z)$.

Dacă utilizăm coordonate carteziene omogene, iar $P'(x_1', x_2', x_3', x_4')$ și $P''(x_1'', x_2'', x_3'', x_4'')$ sînt două puncte ale dreptei u, coordonatele oricărui punct P al dreptei pot fi scrise sub forma

$$x_i = \lambda x_i' + \mu x_i'' \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{9}$$

unde λ, μ sînt coordonate proiective omogene pe dreaptă. În adevăr, fie x_1, x_2, x_3, x_4 coordonatele omogene ale punctului P; adică

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

Atunci ecuațiile (7) se scriu astfel

$$\frac{x_1}{x_4} = \frac{\dfrac{x_1'}{x_4'} + r\dfrac{x_1''}{x_4''}}{1 + r} = \frac{x_1' + r\dfrac{x_4'}{x_4''}x_1''}{x_4' + r\dfrac{x_4'}{x_4''}x_4''} = \frac{x_1' + \dfrac{\mu}{\lambda}x_1''}{x_4' + \dfrac{\mu}{\lambda}x_4''} = \frac{\lambda x_1' + \mu x_1''}{\lambda x_4' + \mu x_4''},$$

$$\frac{x_2}{x_4} = \frac{\lambda x_2' + \mu x_2''}{\lambda x_4' + \mu x_4''}, \quad \frac{x_3}{x_4} = \frac{\lambda x_3' + \mu x_3''}{\lambda x_4' + \mu x_4''},$$

dacă punem $r\dfrac{x_4'}{x_4''} = \dfrac{\mu}{\lambda}$. De aici rezultă (9), dacă avem în vedere faptul că x_1, x_2, x_3, x_4 sînt determinate, abstracție făcînd de un factor de proporționalitate.

Punînd $h = \dfrac{\lambda}{\mu}$, ecuațiile (9) pot fi scrise sub forma

$$x_i = hx_i' + x_i'', \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{9'}$$

h fiind coordonata proiectivă pe dreaptă în raport cu punctele fundamentale $P'(h = \infty)$, $P''(h = 0)$, $E(h = 1)$, deoarece avem

$$(P'P''EP) = (\infty\ 0\ 1h) = h.$$

Aplicații. a) **Punctul de la infinit al unei drepte.** Fie dreapta (9) determinată de punctele $P'(x_1', x_2', x_3', x_4')$ și $P''(x_1'', x_2'', x_3'', x_4'')$, punctele P' și P'' fiind la distanță finită.

deci $x_4' \neq 0$, $x_4'' \neq 0$. Deoarece coordonatele omogene sînt determinate, abstracţie făcînd de un factor de proporţionalitate, putem lua $x_4' = 1$, $x_4'' = 1$, încît coordonatele omogene ale punctelor P' şi P'' sînt

$$x_1' = x', \; x_2' = y', \; x_3' = z', \; x_4' = 1, \text{ respectiv } x_1'' = x'', \; x_2'' = y'', \; x_3'' = z'', \; x_4'' = 1.$$

Pentru ca punctul curent $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ de pe dreapta (9) să fie la infinit, trebuie ca $x_4 = 0$, condiţie ce se scrie

$$x_4 = \lambda + \mu = 0.$$

Această condiţie este satisfăcută, abstracţie făcînd de un factor de proporţionalitate, dacă

$$\lambda = -1, \; \mu = +1.$$

În acest caz, punctul de la infinit al dreptei (9) are coordonatele

$$x_1 = x'' - x', \; x_2 = y'' - y', \; x_3 = z'' - z', \; x_4 = 0. \tag{9'}$$

Ţinînd seama de faptul că diferenţele coordonatelor a două puncte oarecare de pe dreaptă constituie o ternă de parametri directori ai dreptei, rezultă că punctul de la infinit al dreptei de parametri directori l, m, n are coordonatele omogene

$$x_1 = l, \; x_2 = m, \; x_3 = n, \; x_4 = 0. \tag{9''}$$

Rezultă, de asemenea, că dreptele paralele se intersectează în acelaşi punct, şi anume în punctul de la infinit al direcţiei dreptelor, acest punct avînd coordonatele (9'').

b) Intersecţia a două drepte. Ştim că, fiind date două drepte u_1, u_2 în spaţiu, ele sînt în general *strîmbe* între ele, adică nu se întîlnesc. Fie dreptele u_1, u_2 date de ecuaţiile parametrice

$$u_1 : \begin{cases} x = x_1 + l_1 u \\ y = y_1 + m_1 u \\ z = z_1 + n_1 u \end{cases}, \qquad u_2 : \begin{cases} x = x_2 + l_2 v \\ y = y_2 + m_2 v \\ z = z_2 + n_2 v \end{cases}.$$

Dacă aceste drepte s-ar întîlni într-un punct, ar trebui ca coordonatele x_0, y_0, z_0 ale acelui punct să verifice ecuaţiile dreptelor u_1 şi u_2, adică să satisfacă condiţiile

$$\begin{cases} x_1 + l_1 u = x_2 + l_2 v, \\ y_1 + m_1 u = y_2 + m_2 v, \\ z_1 + n_1 u = z_2 + n_2 v, \end{cases} \tag{10}$$

care reprezintă un sistem de trei ecuaţii neomogene în două necunoscute u, v. Pentru ca sistemul obţinut să admită soluţii (să fie compatibil), este necesar şi suficient să avem (schimbînd coloanele în linii):

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{10'}$$

Dacă această condiţie nu este satisfăcută (deci, sistemul de mai sus este incompatibil), cele două drepte u_1, u_2 sînt strîmbe între ele.

Așadar, *relația (10′) reprezintă condiția de concurență a dreptelor* $u_i\,(i = 1,2)$, *determinate de vectorii* $\bar{u}_i(l_i, m_i, n_i)$, *vectorul* $\overline{P_1P_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ *(de proiecții:* $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$*), unind două puncte oarecare* P_1 *și* P_2 *de pe dreptele* u_1 *și* u_2.

Deci, vectorial, condiția de concurență (10′) se scrie

$$(\bar{r}_2 - \bar{r}_1,\ \bar{u}_1,\ \bar{u}_2) = 0, \tag{10″}$$

ceea ce arată că vectorii $\overline{P_1P_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ sînt coplanari.

Determinarea coordonatelor x_0, y_0, z_0 ale punctului de intersecție al dreptelor u_1 și u_2, cînd condiția (10′) de concurență este satisfăcută, revine a obține pe u și v din două din ecuațiile sistemului (10) și a înlocui valoarea găsită pentru u în ecuațiile parametrice ale dreptei u_1 sau pe v în ecuațiile parametrice ale dreptei u_2. Aceste operații sînt posibile dacă matricea

$$\left\| \begin{matrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{matrix} \right\| \tag{10‴}$$

este de rangul doi, adică dacă cele două drepte u_1 și u_2 nu sînt paralele.

4. **Ecuațiile generale ale dreptei.** Ecuațiile reduse (5) sînt ecuații liniare în coordonatele x, y, z. Reciproca este adevărată.

În adevăr, să arătăm că două ecuații liniare în coordonatele x, y, z:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

reprezintă o dreaptă și numai una, dacă ecuațiile sînt liniar independente. Fie

$$M = \left\| \begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix} \right\|, \quad M' = \left\| \begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{matrix} \right\|,$$

matricea atașată și matricea extinsă ale sistemului (11). Dacă $r(M) = 2$, cel puțin unul din determinanții

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

formați cu elementele matricei (M), este diferit de zero. În acest caz, ecuațiile (11) pot fi rezolvate în raport cu două din coordonatele x, y, z. Fie, de exemplu, $\Delta_3 \neq 0$; atunci putem rezolva sistemul (11) în raport cu x, y. Aplicînd regula lui Cramer, obținem ecuațiile

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} C_1z + D_1 & B_1 \\ C_2z + D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\Delta_3} = \frac{\Delta_1}{\Delta_3}z - \frac{\begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\Delta_3},$$

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1z + D_1 \\ A_2 & C_2z + D_2 \end{vmatrix}}{\Delta_3} = \frac{\Delta_2}{\Delta_3}z - \frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\Delta_3},$$

care sînt de forma (5), parametrii directori l, m, n ai dreptei (11) fiind daţi de relaţiile

$$\frac{l}{\Delta_1} = \frac{m}{\Delta_2} = \frac{n}{\Delta_3}.$$

Dacă $r(M) = 1$, $r(M') = 2$, deci

$$\frac{1}{\mu} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}, \tag{11'}$$

după teorema lui Kronecker-Capelli, sistemul (11) este incompatibil: nu există nici un punct la distanţă finită, ale cărui coordonate să satisfacă ecuaţiile (11). Condiţiile (11') fiind satisfăcute, sistemul (11) se reduce — introducînd coordonate omogene — la

$$\begin{cases} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = 0, \\ x_4 = 0; \end{cases} \tag{11''}$$

punctele de coordonate neomogene

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4},$$

unde x_1, x_2, x_3 sînt soluţii nu toate nule ale primei ecuaţii a sistemului (11''), sînt la infinit. Vom spune, şi în acest caz, că sistemul (11) reprezintă o dreaptă, şi anume o dreaptă aflată la infinit.

Aşadar, orice sistem de două ecuaţii liniare în x, y, z, liniar independente, reprezintă o dreaptă care se află la distanţă finită, dacă matricea (M) a coeficienţilor lui x, y, z este de rangul doi, sau la infinit, dacă matricea (M) este de rangul întîi.

Observăm că ecuaţiile (5) conţin numai patru coeficienţi, faţă de ecuaţiile (11) care conţin opt coeficienţi omogeni. De aceea, ecuaţiile (5) se numesc *ecuaţiile reduse* ale dreptei, iar ecuaţiile (11) — ecuaţiile generale ale dreptei. Numărul de patru coeficienţi este cel mai mic număr de coeficienţi care poate să apară în ecuaţiile unei drepte oarecare în spaţiu. În adevăr, deoarece o dreaptă este determinată de două puncte P_1, P_2, oarecare, le putem lua de la început situate respectiv în două plane de coordonate; de exemplu, luînd

$$P_1(x_1, \ y_1, \ 0), \quad P_2(x_2, \ 0, \ z_2),$$

ecuaţiile (2) ale dreptei P_1P_2 vor conţine numai cele patru cantităţi x_1, y_1, x_2, z_2.

§2. ECUAŢIA PLANULUI

1. **Ecuaţia planului care trece prin trei puncte.** Conform axiomelor I_3 şi I_4 (v. Cap. XI, § 4), fiind date trei puncte $P_i(x_i, y_i, z_i)$ necoliniare ($i = 1, 2, 3$), prin aceste puncte trece un plan. Conform axiomei I_6 putem considera acest plan ca fiind generat de dreapta P_1P, care se sprijină pe dreapta P_2P_3 (fig. 1). Deoarece dreapta P_1P se sprijină pe dreapta P_2P_3 (adică cele două drepte

se intersectează într-un punct Q), rezultă că parametrii lor directori trebuie să satisfacă condiția de coplanaritate (10'). Dreapta P_1P are parametrii directori $l_1 = x - x_1$, $m_1 = y - y_1$, $n_1 = z - z_1$, iar dreapta P_2P_3 are parametrii directori $l_2 = x_2 - x_3$, $m_2 = y_2 - y_3$, $n_2 = z_2 - z_3$. Condiția de coplanaritate * a dreptelor P_1P, P_2P_3 este deci

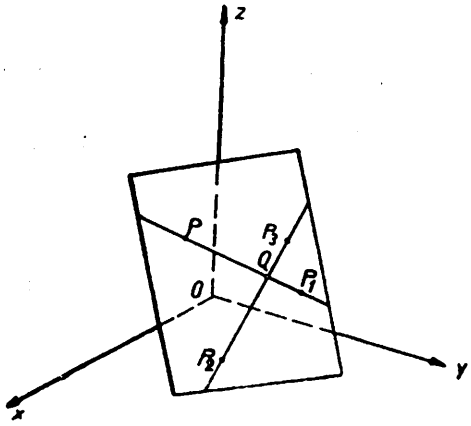


Fig. 1

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

Considerînd vectorii $\overline{P_1P} = \bar{r} - \bar{r}_1$, $\overline{P_1P_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, $\overline{P_2P_3} = \bar{r}_3 - \bar{r}_2$ coplanari, condiția (12) se scrie

$$(\bar{r} - \bar{r}_1,\ \bar{r}_2 - \bar{r}_1,\ \bar{r}_3 - \bar{r}_2) = 0. \quad (12')$$

Deci, punctul P aparține planului $P_1P_2P_3$, dacă avem satisfăcută condiția (12). Această relație constituie *ecuația planului* sub forma unui determinant de ordinul al treilea. Ecuația (12) se poate încă scrie

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Dezvoltînd determinantul din primul membru, după elementele primei linii, ecuația (13) devine

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (13')$$

ceea ce arată că ecuația unui plan este liniară în x, y, z. Notînd coeficienții lui x, y, z și termenul liber**, respectiv cu A, B, C, D, deducem că ecuația unui plan este de forma

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (14)$$

---

* În condiția (10') de coplanaritate a două drepte s-au schimbat între ele primele două linii.

** Care sînt constante bine determinate, îndată ce coordonatele punctelor P_1, P_2, P_3 sînt date.

Problema, dacă orice ecuaţie liniară în coordonatele x, y, z reprezintă sau nu un plan, va fi rezolvată ulterior. Anume, se va demonstra că *orice ecuaţie liniară în x, y, z reprezintă un plan.*

Aplicaţii. a) **Forma segmentară a ecuaţiei planului.** Să considerăm planul care trece prin punctele $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ (fig. 2), ceea ce înseamnă că planul intersectează axele de coordonate după segmentele $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Ecuaţia (13) se scrie în acest caz

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

sau, dezvoltînd după elementele primei linii,

$$bcx + acy + abz - abc = 0,$$

sau încă, împărţind cu abc,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0. \qquad (15)$$

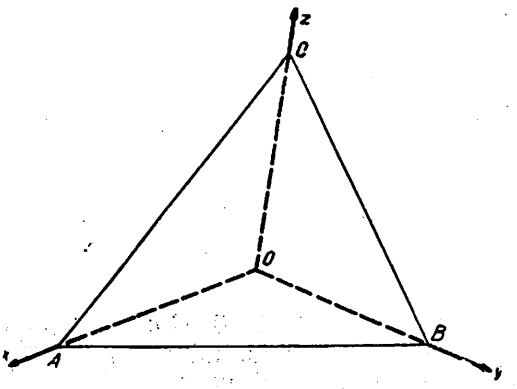


Fig. 2

Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia segmentară a planului* sau *ecuaţia planului prin tăieturi* (ecuaţia pune în evidenţă segmentele intersectate de plan pe axele de coordonate).

b) **Condiţia de coplanaritate a patru puncte.** Un punct se găseşte într-un plan sau — ceea ce este acelaşi lucru — un plan trece printr-un punct, dacă coordonatele punctului verifică ecuaţia planului. Dacă — de exemplu — un punct P_4 este situat în planul determinat de alte trei puncte P_1, P_2, P_3, coordonatele x_4, y_4, z_4 ale punctului P_4 verifică ecuaţia (13) a planului $P_1P_2P_3$.

Avem deci relaţia

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (16)$$

care constituie condiţia ca patru puncte $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, să fie în acelaşi plan.

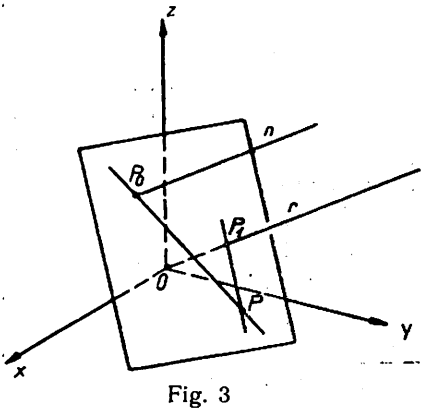


Fig. 3

2. Ecuaţia planului care trece printr-un punct şi care are dată direcţia normalei la plan. Fie un plan π care trece prin punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este perpendicular pe direcţia Or, ai cărei parametri directori îi vom indica prin A, B, C, (fig. 3). Se ştie că oricare ar fi punctul $P(x, y, z)$ al planului π, dreapta P_0P este perpendiculară pe normala P_0n, paralela dusă în P_0 la direcţia $Or(A, B, C)$. Parametrii directori ai dreptei P_0P fiind $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, condiţia de perpendicularitate este

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (17)$$

Dacă avem în vedere vectorii $\overrightarrow{P_0P} = \bar{r} - \bar{r}_0$ și $\bar{n}(A, B, C)$, aceștia sînt ortogonali dacă avem relația

$$(\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot \bar{n} = 0. \tag{17'}$$

Punctul P fiind oarecare în planul π și verificînd condiția (17), rezultă că această ecuație este ecuația planului π, deoarece un punct în afara planului nu verifică condiția (17).

Ecuația (17) este deci ecuația planului care trece prin punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *și care are direcția normalei la plan dată de parametrii directori* A, B, C.

Ecuația (17) se poate scrie sub forma

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0,$$

încît obținem ecuația liniară (14), dacă punem

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

Deci, *coeficienții* A, B, C *din ecuația (14) a unui plan* (coeficienții lui x, y, z din ecuația planului) *sînt parametrii directori ai direcției perpendiculare pe plan* (ai direcției normalei la plan).

Aplicații. a) **Ecuațiile planelor de coordonate.** *Ecuația planului Oxy* se obține știind că acest plan trece prin originea O a axelor de coordonate și are axa Oz drept normala la plan în O. Ținînd seama că parametrii directori ai axei Oz sînt (0, 0, 1), din (17) rezultă că

$$z = 0 \tag{18}$$

este ecuația planului Oxy. Deci, punctele din planul (de coordonate) Oxy au cota egală cu zero, proprietate ce îl caracterizează.

Ecuația planului Oyz se obține știind că acest plan trece prin O și este perpendicular pe axa Ox. Parametrii directori ai axei Ox sînt (1, 0, 0), încît din (17) rezultă că

$$x = 0 \tag{18'}$$

este ecuația planului Oyz, fiind caracterizat de proprietatea că punctele din acest plan au abscisa egală cu zero.

Ecuația planului Ozx se obține ținînd seama că acest plan trece prin O și este perpendicular pe axa Oy. Parametrii directori ai axei Oy sînt (0, 1, 0), încît din (17) rezultă că

$$y = 0 \tag{18''}$$

este ecuația planului Ozx, fiind caracterizat de proprietatea că punctele din acest plan au ordonata egală cu zero.

b) **Orientarea planelor în spațiu.** Pe un plan distingem *două fețe*. Fie un plan π. Dacă orientăm normala la plan (după regula orientării unei drepte), convenim să considerăm *pozitivă* acea față a planului ce corespunde la regiunea care conține partea pozitivă a normalei, cealaltă față a planului fiind *negativă*. Observăm că dacă planul π intersectează axa Oz, fața pozitivă a planului este spre partea pozitivă a acestei axe. În cazul cînd planul nu întîlnește axa Oz, însă întîlnește axa Oy, fața pozitivă a planului este spre partea pozitivă a axei Oy, iar dacă planul π este paralel cu planul Oyz, fața pozitivă a planului este spre partea pozitivă a axei Ox. Pe fața pozitivă a planului rezultă deci determinat un sens pozitiv pentru rotație și un semn pentru ariile situate în acest plan.

Faptul că pe un plan putem introduce o *orientare* (o față poate fi considerată pozitivă, iar cealaltă negativă) se exprimă spunînd că planul este o suprafață *orientabilă*.

c) **Ecuația normală a unui plan.** Fie un plan oarecare π și P_1 punctul în care perpendiculara Or din origine pe acest plan intersectează planul π. Să con-

siderăm un punct P oarecare al planului (fig. 3). Indicînd cu δ lungimea în mărime şi sens a segmentului $\overline{OP_1}$ şi ţinînd seama că normala Or face unghiurile α, β, γ cu axele de coordonate, coordonatele punctului P_1 sînt

$$x_1 = \delta \cos \alpha, \quad y_1 = \delta \cos \beta, \quad z_1 = \delta \cos \gamma. \tag{19}$$

Dreapta P_1P, oricare ar fi P în planul π, are parametrii directori

$$x - x_1, \quad y - y_1, \quad z - z_1.$$

Deoarece dreptele OP_1 şi P_1P sînt perpendiculare, avem relaţia

$$x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) + z_1(z - z_1) = 0,$$

care, ţinînd seama de valorile coordonatelor x_1, y_1, z_1, se mai scrie

$$\cos \alpha(x - \delta \cos \alpha) + \cos \beta(y - \delta \cos \beta) + \cos \gamma(z - \delta \cos \gamma) = 0.$$

Deoarece cosinusurile directoare satisfac condiţia (12') din capitolul X, obţinem ecuaţia

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \delta = 0, \tag{20}$$

unde x, y, z sînt coordonatele unui punct curent din planul π, care constituie *forma normală* a ecuaţiei unui plan.

3. **Ecuaţia planului care trece printr-un punct fix şi este paralel cu două drepte date.** Fie l_1, m_1, n_1 şi l_2, m_2, n_2 parametrii directori a două drepte date, iar A, B, C parametrii directori al normalei la planul π, ce urmează a fi determinat.

Planul π trecînd prin punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ are ecuaţia de forma (17):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Deoarece planul π este presupus paralel cu dreptele u_1 şi u_2, ceea ce înseamnă că normala la planul π este perpendiculară pe dreptele u_1 şi u_2, avem

$$Al_1 + B m_1 + C n_1 = 0,$$

$$Al_2 + B m_2 + C n_2 = 0.$$

Aşadar, coeficienţii A, B, C satisfac un sistem liniar de trei ecuaţii omogene. Din teoria ecuaţiilor liniare ştim că, pentru ca un sistem de trei ecuaţii omogene cu trei necunoscute să admită soluţii diferite de soluţia banală, este necesar şi suficient ca determinantul coeficienţilor necunoscutelor să fie nul. Deducem

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{21}$$

care constituie ecuaţia planului ce trece prin punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este paralel cu două drepte $u_1(l_1, m_1, n_1)$ şi $u_2(l_2, m_2, n_2)$.

Considerînd vectorii $\overline{P_0P} = \bar{r} - \bar{r}_0$, $\bar{u}_1(l_1, m_1, n_1)$, $\bar{u}_2(l_2, m_2, n_2)$, ecuaţia (21) se scrie

$$(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0, \tag{21'}$$

aceasta constituind ecuația vectorială a planului care trece prin P_0 și este paralel cu dreptele u_1, u_2.

Aplicație. Plane paralele cu planele de coordonate. Dacă planul π este paralel cu planul de coordonate Oxy, el este paralel și cu axa Ox și cu axa Oy; deci, $l_1 = 1$, $m_1 = 0$, $n_1 = 0$ și $l_2 = 0$, $m_2 = 1$, $n_2 = 0$. În acest caz, ecuația (21) se scrie

$$z - z_0 = 0. \tag{22}$$

Dacă planul π este paralel cu planul de coordonate Oyz sau cu planul Ozx, ecuația lui se scrie

$$x - x_0 = 0, \tag{23}$$

respectiv

$$y - y_0 = 0. \tag{24}$$

4. **Ecuația planului care trece printr-un punct dat și printr-o dreaptă dată.** Fie un punct $P_0(x_0, y_0, z_0)$ și dreapta u de ecuații

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}.$$

Planul $\pi(A, B, C)$ trecînd prin punctul P_0 are ecuația dată de (17)

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Acest plan conține dreapta u, dacă trece printr-un punct oarecare al dreptei, de exemplu punctul $P_1(x_1, y_1, z_1)$, și dacă este paralel cu ea. Planul π trecînd prin punctul P_1, coordonatele lui P_1 trebuie să verifice ecuația (17) a planului:

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = 0.$$

Planul π este paralel cu dreapta u, dacă normala la plan este perpendiculară pe dreapta:

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Așadar, coeficienții A, B, C satisfac un sistem liniar și omogen de trei ecuații. Pentru ca sistemul să admită soluții diferite de soluția banală ($A = B = C = 0$), trebuie să fie îndeplinită condiția

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \tag{25}$$

Această ecuație reprezintă planul care trece prin punctul fix $P_0(x_0, y_0, z_0)$ și prin dreapta u, determinată de punctul $P_1(x_1, y_1, z_1)$ și direcția l, m, n.

5. **Ecuația generală a planului.** Ecuațiile (13), (15), (17), (20), (21), (25) sînt ecuații liniare (adică de gradul întîi) în coordonatele x, y, z.

Invers, să arătăm că ecuația liniară (14), cu cel puțin unul din coeficienții A, B, C diferit de zero, reprezintă un plan. În adevăr, dacă constantele A,

B, C sînt toate diferite de zero, ecuaţia (14) poate fi identificată cu ecuaţia (15), punînd

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C};$$

deci, ecuaţia (14) reprezintă un plan.

Dacă una din constantele A, B, C este nulă, de exemplu $A = 0$, cantitatea a nu mai este finită şi ecuaţia (14) reprezintă un plan paralel cu axa Ox, iar dacă B sau C ar fi nule, (14) ar reprezenta un plan paralel cu Oy, respectiv cu Oz.

Dacă două din constantele A, B, C sînt nule, de exemplu $A = B = 0$, $C \neq 0$, ecuaţia poate fi identificată cu ecuaţia (22) punînd $z_0 = -\frac{D}{C}$. Deci, în acest caz, ecuaţia, (14) reprezintă un plan paralel cu planul $z = 0$, iar dacă am avea $A = C = 0$, $B \neq 0$ sau $A \neq 0$, $B = C = 0$, (14) reprezintă un plan paralel planului $y = 0$, respectiv cu planul $x = 0$.

Dacă $D = 0$, ecuaţia (14) reprezintă un plan care trece prin origine. În adevăr, în acest caz ($D = 0$), ecuaţia (14) este satisfăcută de coordonatele originii. Reciproc, ecuaţia unui plan care trece prin origine este de forma

$$Ax + By + Cz = 0,$$

dacă ţinem seama de formula (17).

Avem deci

Propoziţie. O ecuaţie liniară (14), în care constantele A, B, C nu sînt toate nule, reprezintă un plan la distanţă finită şi invers, orice plan la distanţă finită este reprezentat de o asemenea ecuaţie.

Să demonstrăm acum

Teoremă. Condiţia necesară şi suficientă ca două ecuaţii liniare în coordonatele x, y, z să reprezinte acelaşi plan este ca coeficienţii lor să fie proporţionali.

În adevăr, fie

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \qquad (i = 1, 2) \qquad (26)$$

cele două ecuaţii pentru care, prin ipoteză, avem

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \qquad (26')$$

Primele două egalităţi arată că cele două plane π_1 şi π_2 sînt paralele. Egalînd primul raport cu ultimul şi schimbînd extremii între ei, obţinem

$$-\frac{D_1}{A_1} = -\frac{D_2}{A_2}, \text{ adică } a_1 = a_2,$$

unde $a_1 = OP_1$ şi $a_2 = OP_2$ sînt segmentele determinate pe axa Ox de cele două plane. Cu alte cuvinte, punctele $P_1(a_1, 0, 0)$ şi $P_2(a_2, 0, 0)$ în care planele π_1 şi π_2 sînt înţepate de axa Ox sînt confundate. Înseamnă că cele două plane sînt paralele şi trec prin acelaşi punct $P_1 = P_2$; deci, cele două plane sînt

confundate. Așadar, cînd condițiile (26') sînt îndeplinite, ecuațiile (26) reprezintă un același plan. Reciproc este adevărată.

Aplicații. a) **Trecerea de la ecuația generală la ecuația normală a unui plan.** Dacă planul este dat de o ecuație de forma (14), pentru ca aceasta să fie adusă la forma normală (20), trebuie să avem

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = \frac{-\delta}{D} = k\,.$$

Din aceste relații, ținînd seama de (12') din capitolul X, rezultă

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,. \tag{27}$$

Deci, coeficienții ecuației normale sînt dați de formulele:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \delta = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,. \tag{27'}$$

Așadar, fiind dată ecuația unui plan sub forma (14), coeficienții A, B, C sînt parametrii directori ai normalei, cosinusurile directoare ale normalei și distanța de la origine la plan fiind date de formulele (27'). Semnul factorului de normalizare (27) este semnul lui C, dacă direcția în spațiu este orientată ($\cos\gamma > 0$).

b) **Distanța de la un punct la un plan.** Fie $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct și (14) ecuația unui plan π (fig. 4). Distanța $d = P_0Q$, Q fiind piciorul perpendicularei din P_0 pe plan, este distanța de la punctul P_0 la planul π. Prin translația

$$\begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0, \\ z = Z + z_0, \end{cases}$$

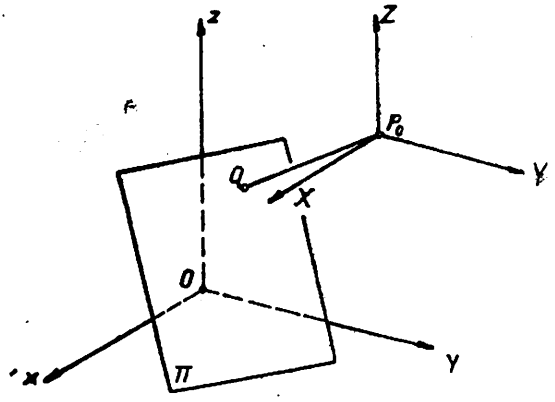


Fig. 4

punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ devine originea sistemului de axe P_0XYZ, paralel cu sistemul $Oxyz$. Înlocuind în ecuația planului π variabilele x, y, z prin valorile lor în funcție de X, Y, Z, rezultă că în sistemul P_0XYZ ecuația planului π este

$$AX + BY + CZ + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Însă, fiind dat în sistemul $Oxyz$ planul (14), distanța de la origine la acest plan este dată de ultima din formulele (27').

Rezultă că distanța de la P_0 (care este acum originea axelor) la planul π este dată de formula

$$d = \frac{-(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,. \tag{28}$$

c) **Ecuaţia planului în coordonate omogene.** Înlocuind coordonatele neomogene x, y, z prin coordonatele omogene x_1, x_2, x_3, x_4, ecuaţia (14) a planului devine

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0. \tag{29}$$

Deci, ecuaţia unui plan este o ecuaţie liniară şi omogenă în coordonatele omogene x_1, x_2, x_3, x_4.

Observăm că, dacă

$$A = B = C = 0, \quad D \neq 0,$$

ceea ce duce la o imposibilitate pentru ecuaţia planului în coordonate neomogene, ecuaţia (29) devine

$$x_4 = 0. \tag{30}$$

Deoarece x_1, x_2, x_3 nu pot fi toate nule şi ţinînd seama de formulele (24) din capitolul X, rezultă că punctele pentru care este verificată ecuaţia (30) sînt *punctele improprii*, adică punctele la infinit în direcţia de parametri directori x_1, x_2, x_3. Cu alte cuvinte, ecuaţia (30) reprezintă totalitatea punctelor de la infinit în spaţiu; deoarece ecuaţia (30) este o ecuaţie liniară, se convine a se spune că punctele la infinit în spaţiu sînt situate într-un plan, *planul de la infinit* sau *planul impropriu*.

Aşadar:

Un plan în spaţiu este dat în coordonate omogene printr-o ecuaţie de forma (29) fie că planul este la distanţă finită, fie că este la infinit, în ultimul caz ecuaţia lui reducîndu-se la forma (30).

În coordonate omogene, diferitele proprietăţi relative la plan, considerate în acest paragraf, rezultă uşor. De exemplu, ecuaţia planului care trece prin trei puncte $P'(x_1', x_2', x_3', x_4')$, $P''(x_1'', x_2'', x_3'', x_4'')$, $P'''(x_1''', x_2''', x_3''', x_4''')$ se scrie sub forma de determinant:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix} = 0. \tag{31}$$

d) **Coordonatele tangenţiale omogene.** Scriind ecuaţia unui plan sub forma

$$\xi_i x_i = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{32}$$

observăm că la fiecare complex ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 — abstracţie făcînd de un factor de proporţionalitate — îi corespunde un plan, şi reciproc. Putem deci interpreta coeficienţii ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 drept *coordonate tangenţiale omogene* ale planului, *coordonatele tangenţiale neomogene* u, v, w fiind date de formulele

$$u = \frac{\xi_1}{\xi_4}, \quad v = \frac{\xi_2}{\xi_4}, \quad w = \frac{\xi_3}{\xi_4}. \tag{33}$$

6. **Ecuaţiile parametrice ale planului.** Ştim că, fiind date trei puncte $P_i(x_i, y_i, z_i)$ necoliniare ($i = 1, 2, 3$), prin aceste puncte trece un plan π. Acest plan poate fi considerat ca fiind generat de o dreaptă care trece prin P_3 şi se spri-

jină pe dreapta P_1P_2; cu alte cuvinte, planul π este generat de o dreaptă care trece prin P_3 și un punct oarecare Q de pe dreapta P_1P_2. Dacă r este coordonata baricentrică pe dreapta P_1P_2 față de punctele fundamentale P_1, P_2, iar p este coordonata baricentrică pe dreapta P_3Q față de punctele fundamentale P_3, Q, atunci coordonatele x, y, z ale unui punct P pe dreapta P_3Q sînt date de ecuațiile

$$x = \frac{x_Q + px_3}{1+p}, \quad y = \frac{y_Q + py_3}{1+p}, \quad z = \frac{z_Q + pz_3}{1+p}, \tag{34}$$

unde

$$x_Q = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \quad y_Q = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}, \quad z_Q = \frac{z_1 + rz_2}{1+r}. \tag{34'}$$

Introducînd parametrul $s = p(1+r)$, obținem

$$x = \frac{x_1 + rx_2 + sx_3}{1+r+s}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2 + sy_3}{1+r+s}, \quad z = \frac{z_1 + rz_2 + sz_3}{1+r+s}. \tag{35}$$

Formulele (35), care exprimă coordonatele unui punct al planului $P_1P_2P_3$ în funcție de doi parametri r, s, constituie un sistem de ecuații parametrice ale planului. În virtutea acestor ecuații, punctul P al planului și perechea de parametri r, s se corespund biunivoc: la orice sistem de valori r, s corespunde un punct al planului, și invers.

O altă reprezentare parametrică a planului se obține din forma (21) a ecuației unui plan. Determinantul (21) fiind nul, rezultă că elementele liniilor determinantului sînt liniar dependente. Deci, avem

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1u + l_2v, \\ y = y_0 + m_1u + m_2v, \\ z = z_0 + n_1u + n_2v, \end{cases} \tag{36}$$

ceea ce arată că coordonatele x, y, z ale unui punct P din plan sînt funcții liniare de doi parametri u și v. Invers, dacă coordonatele unui punct din spațiu sînt funcții liniare de doi parametri u și v, el descrie un plan.

§ 3. PROBLEME RELATIVE LA DREAPTĂ ȘI PLAN

1. **Intersecția a două plane.** Fie

$$\pi_i: A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0, \ (i = 1, 2) \tag{37}$$

ecuațiile a două plane. Presupunem că cele două plane sînt distincte, deci coeficienții ecuațiilor (37) nu sînt proporționali.

Problema intersecției planelor (37) este echivalentă cu problema determinării sistemului

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{38}$$

format de ecuațiile celor două plane date.

Ţinînd seama de rezultatele din § 1, avem

P r o p o z i ţ i e. Două plane (distincte) se intersectează după o dreaptă, care poate fi la distanţă finită sau la infinit; în ultimul caz, planele sînt paralele.

A p l i c a ţ i i. a) **Fascicul de plane.** *Numim fascicul de plane totalitatea planelor care trec prin două puncte date*, sau, deoarece două puncte determină o dreaptă, *totalitatea planelor care trec printr-o dreaptă dată.*

Se ştie că ecuaţia generală a unui plan depinde de trei parametri arbitrari (sau de patru parametri omogeni); deci, condiţia iniţială pentru determinarea unui fascicul de plane (condiţia ca planele să treacă prin două puncte date) fiind echivalentă cu două condiţii simple exprimate prin ecuaţii liniare, rezultă că *fasciculul de plane* este *o familie de plane depinzînd liniar de un parametru.*

Am văzut că o dreaptă r poate fi determinată prin ecuaţiile a două plane (37). Observăm că orice combinaţie liniară a acestor două ecuaţii

$$\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 \tag{39}$$

reprezintă ecuaţia unui plan care trece prin dreapta r. Deci, ecuaţia (39) reprezintă ecuaţia fasciculului de plane care trec prin dreapta r. Punînd $k = \frac{\mu}{\lambda}$, ecuaţia fasciculului se mai scrie

$$\pi_1 + k\pi_2 = 0, \tag{39'}$$

unde k se poate considera ca o coordonată proiectivă în fasciculul de plane de axă r, iar λ, μ drept coordonate omogene ale aceluiaşi fascicul.

b. **Perpendiculara comună a două drepte.** Fie două drepte

$$u_1: \quad \frac{x - x_i}{l_i} = \frac{y - y_i}{m_i} = \frac{z - z_i}{n_i}. \qquad (i = 1, 2).$$

Se ştie că perpendiculara comună dreptelor u_1 şi u_2 este intersecţia planelor $\pi_i (i = 1, 2)$ care trec respectiv prin dreptele u_i şi sînt paralele cu direcţia perpendicularei comune *.

Parametrii directori ai perpendicularei comune a două drepte u_1 şi u_2 sînt proporţionali cu determinanţii **

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = -\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}$$

---

* Perpendiculara comună dreptelor u_1 şi u_2 este perpendiculară pe orice plan paralel cu direcţiile acestor două drepte. Fie π planul care trece prin origine şi este paralel cu dreptele u_1 şi u_2. Atunci, perpendiculara comună căutată va fi conţinută în planul proiectant al dreptei u_1 pe planul π şi în planul proiectant al dreptei u_2 pe planul π.

** Deoarece parametrii directori l, m, n ai perpendicularei satisfac condiţiile de ortogonalitate:

$$ll_i + mm_i + nn_i = 0.$$

ai matricei

$$\left\| \begin{matrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{matrix} \right\|,$$

formată cu parametrii directori ai celor două drepte date. Deci, ecuația planului π_i este

$$\pi_i : \begin{vmatrix} x - x_i & y - y_i & z - z_i \\ l_i & m_i & n_i \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă că dreapta de ecuații

$$\begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = 0 \end{cases},$$

obținută prin intersecția planelor π_1 și π_2, reprezintă perpendiculara comună dreptelor u_1 și u_2.

c) **Lungimea perpendicularei comune a două drepte.** Fiind date dreptele u_i $(i = 1, 2)$, planul π care trece printr-una din ele, de exemplu prin dreapta u_1, și este paralel cu cea. altă dreaptă, are ecuația

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Observăm că direcția normalei planului π este aceeași cu direcția perpendicularei comune a dreptelor u_1 și u_2.

Lungimea perpendicularei comune dreptelor u_1 și u_2 este distanța de la un punct oarecare al dreptei u_2, de exemplu de la punctul $P_2(x_2, y_2, z_2)$ prin care trece dreapta u_2, la planul π; deci este egală cu

$$d = \frac{-\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}}. \tag{40}$$

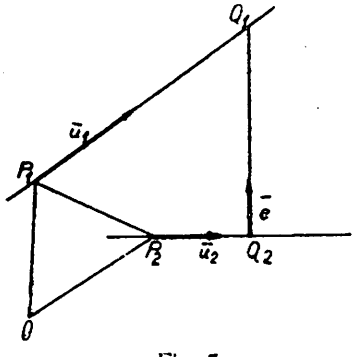


Fig. 5

Vectorial, această formulă se deduce astfel: dreapta u_i $(i = 1, 2)$ este determinată de vectorul $\bar{u}_i(l_i, m_i, n_i)$, având punctul de aplicație în $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $\bar{r}_i = \overline{OP_i}$ fiind vectorul de poziție al punctului P_i.

Fie $\bar{e} = \dfrac{\bar{u}_1 \times \bar{u}_2}{|\bar{u}_1 \times \bar{u}_2|}$ versorul direcției perpendicularei comune dreptelor u_1, u_2. Dacă Q_i este proiecția paralelă cu un plan ortogonal pe perpendiculara comună dreptelor u_1, u_2 a punctului P_i, atunci (fig. 5)

$$d = Q_1Q_2 = \mathrm{pr}_{\bar{e}}\,\bar{r} = \bar{r} \cdot \bar{e},$$

unde $\bar{r} = \overline{P_1P_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$.

Deci

$$d = \frac{(\bar{r}, \bar{u}_1, \bar{u}_2)}{|\bar{u}_1 \times \bar{u}_2|} = \frac{(\bar{r}_2 - \bar{r}_1, \bar{u}_1, \bar{u}_2)}{|\bar{u}_1 \times \bar{u}_2|}. \tag{40'}$$

Exprimînd scalar această formulă, obţinem formula (40).

2. **Intersecţia a trei plane.** Fie

$$\pi_i : A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{41}$$

ecuaţiile a trei plane. Problema intersecţiei acestor plane este echivalentă cu problema determinării soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} \pi_1 = 0, \\ \pi_2 = 0, \\ \pi_3 = 0, \end{cases} \tag{42}$$

format de ecuaţiile celor trei plane date. Pentru a face discuţia sistemului (42), să considerăm matricea ataşată şi matricea extinsă a sistemului:

$$M = \begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{Vmatrix}, \quad M' = \begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{Vmatrix} \tag{42'}$$

Dacă $r(M) = 3$, atunci sistemul (42) este format din trei ecuaţii independente cu determinantul coeficienţilor necunoscutelor diferit de zero. În acest caz, sistemul (42) admite o soluţie unică; deci, cele trei plane $\pi_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ se intersectează într-un punct (la distanţă finită), avînd coordonatele

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta_4}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta_4}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta_4}, \tag{42''}$$

unde $\Delta_\alpha (\alpha = 1, 2, 3, 4)$ sînt determinanţii matricei M'. Determinantul Δ_α este deci determinantul care se obţine eliminînd coloana α din tabloul matricei M', determinantul fiind luat cu semnul + sau — după cum α este impar sau par. Acesta este cazul cînd planele sînt feţele unui triedru.

Dacă $r(M) = 2$, avem două posibilităţi: $r(M') = 3$ sau $r(M') = 2$.

Fie *cazul* $r(M) = 2$, $r(M') = 3$. Atunci sistemul (42) este incompatibil, ecuaţiile fiind (liniar) independente. În acest caz, $\Delta_4 = 0$, fără ca toţi determinanţii Δ_1, Δ_2, Δ_3 să fie nuli. Din (42″) rezultă că punctul de intersecţie este unic, însă aruncat la infinit. Acesta este cazul cînd planele sînt feţele unei prisme triunghiulare, sau două plane paralele tăiate de un al treilea.

Să presupunem că avem $r(M) = r(M') = 2$. Atunci, sistemul (42) este compatibil nedeterminat, fiind format din două ecuaţii principale şi o ecuaţie auxiliară. Deci, sistemul admite o simplă infinitate de soluţii; cu alte cuvinte, planele se intersectează după o simplă infinitate de puncte, constituind o dreaptă r, intersecţia planelor reprezentate de ecuaţiile principale ale sistemului. Acesta este cazul cînd planele fac parte dintr-un *fascicul de plane* de axă r.

Dacă $r(M) = 1$, avem de asemenea două posibilități: $r(M') = 2$ sau $r(M') = 1$.

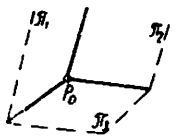
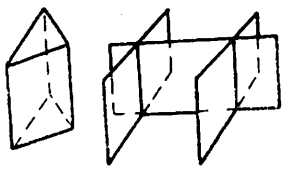
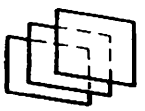
În primul caz: $r(M) = 1$, $r(M') = 2$, sistemul (42) este incompatibil; deci, planele se intersectează după o dreaptă aruncată la infinit. Acesta este cazul cînd planele sînt paralele între ele (distincte sau două confundate).

În al doilea caz: $r(M) = r(M') = 1$, sistemul (42) este compatibil nedeterminat, fiind format dintr-o ecuație principală și două ecuații auxiliare; deci, sistemul admite o dublă infinitate de soluții. Cu alte cuvinte, planele coincid.

Putem deci enunța

Propoziție. Trei plane distincte se intersectează fie într-un punct, fie după o dreaptă, punctul și dreapta fiind la distanță finită sau la infinit; dacă planele au o linie de puncte comune, ele fac parte dintr-un fascicul de plane.

Tabelă

Criteriul		Poziția planelor unul față de altul	Figura
$r(M) = 3$		Planele formează un triedru (se intersectează într-un punct)	
$r(M) = 2$	$r(M') = 3$	Planele sînt fețele unei prisme triunghiulare sau sînt două plane paralele intersectate de un al treilea	
	$r(M') = 2$	Planele fac parte dintr-un fascicul de axă r	
$r(M) = 1$	$r(M') = 2$	Planele sînt paralele	
	$r(M') = 1$	Planele sînt confundate	

Criteriile necesare şi suficiente pentru determinarea poziţiilor a trei plane (41) sînt date în tabelă*.

Aplicaţie. Stea de plane. Numim *stea de plane totalitatea planelor care trec printr-un punct dat.*

Deoarece condiţia iniţială pentru determinarea unei stele de plane (condiţia ca planele să treacă printr-un punct dat) este echivalentă cu o condiţie exprimată printr-o ecuaţie liniară *rezultă că steaua de plan este o familie de plane depinzînd liniar de doi parametri.*

Pe de altă parte, un punct poate fi determinat ca intersecţia a trei plane (41). Atunci, ecuaţia

$$\pi_1 + h\,\pi_2 + k\,\pi_3 = 0, \tag{43}$$

unde h, k sînt doi parametri, reprezintă un plan care trece prin punctul de intersecţie al planelor (41). Deci, ecuaţia (43) reprezintă ecuaţia stelei de plane care trece prin punctul de intersecţie al planelor (41). Punînd $h = \frac{\mu}{\lambda}$, $k = \frac{\nu}{\lambda}$, ecuaţia (43) devine

$$\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 + \nu\pi_3 = 0. \tag{43'}$$

Observăm că la orice sistem de valori pentru λ, μ, ν corespunde un plan în stea, însă planele corespunzînd la două sisteme de valori λ_1, μ_1, ν_1; λ_2, μ_2, ν_2 sînt distincte, dacă sistemele de valori date nu sînt proporţionale. Deci, cantităţile λ, μ, ν pot fi considerate drept coordonate omogene în steaua de plane, cantităţile h, k fiind coordonate neomogene în stea.

3. **Intersecţia unei drepte cu un plan.** Fie dreapta u de ecuaţii parametrice (8), deci dreapta trece prin punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are direcţia dată de parametrii directori l, m, n; fie, de asemenea, planul π de ecuaţie (14). Problema intersecţiei dreptei u cu planul π este echivalentă cu problema determinării soluţiilor sistemului format din ecuaţiile dreptei u şi ecuaţia planului π. Eliminantul acestui sistem se obţine ţinînd seamă de (8) în (14); găsim

$$(Al + Bm + Cn)\,t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \tag{44}$$

ceea ce ne permite să obţinem valoarea parametrului t corespunzătoare punctului de intersecţie. Aceste coordonate sînt date de (8), unde t este soluţia ecuaţiei (44):

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}\,l, \\ y &= y_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}\,m, \\ z &= z_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}\,n. \end{aligned} \tag{44'}$$

* Se poate introduce şi cazul $r(M) = 0$, iar $r(M') = 1$ sau $r(M') = 0$. În acest caz, sistemul (42) este incompatibil, respectiv compatibil şi de rang 0; planele sînt confundate şi aruncate la infinit, respectiv se intersectează după o triplă infinitate de puncte (de fapt, sistemul dispare).

Se pot prezenta trei cazuri:

În primul caz, cînd $Al + Bm + Cn \neq 0$, dreapta u întîlnește planul π într-un punct la distanță finită.

În al doilea caz, cînd $Al + Bm + Cn = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, dreapta u este paralelă cu planul π (prima condiție) și trece printr-un punct $P_0(x_0, y_0, z_0)$ care nu aparține planului (a doua condiție). În acest caz, din (44') rezultă că dreapta intersectează planul într-un singur punct, însă aruncat la infinit*.

În al treilea caz, cînd $Al + Bm + Cn = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, dreapta u este paralelă cu planul π (prima condiție) și trece printr-un punct $P_0(x_0, y_0, z_0)$ care aparține planului (a doua condiție). În acest caz, deoarece ecuația (44) este identic verificată în t, orice punct al dreptei u se găsește în plan. Deci, dreapta este conținută în plan.

Avem deci

Propoziție. O dreaptă și un plan au în general un singur punct comun la distanță finită sau la infinit, afară de cazul cînd dreapta aparține planului.

Dacă dreapta este dată prin ecuațiile ei generale, de exemplu primele două ecuații (41), iar planul este dat de ultima ecuație (41), găsirea coordonatelor punctului de întîlnire al dreptei cu planul se reduce la rezolvarea sistemului (42), adică la problema intersecției a trei plane. Deoarece nu considerăm cazul cînd dreapta este aruncată la infinit, avem $r(M) = 3$ sau $r(M) = 2$. În primul caz: $r(M) = 3$, dreapta

$$\begin{cases} \pi_1 = 0, \\ \pi_2 = 0 \end{cases}$$

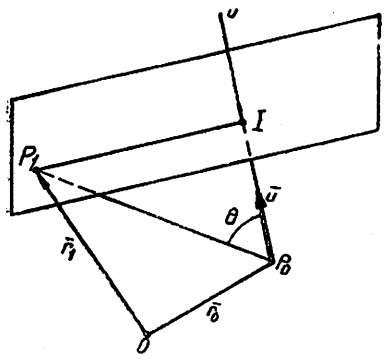


Fig. 6

întîlnește planul $\pi_3 = 0$ într-un punct la distanță finită. În al doilea caz: $r(M) = 2$, $r(M') = 3$, dreapta este paralelă cu planul. În al treilea caz: $r(M) = r(M') = 2$, dreapta aparține planului.

Aplicație. Distanța de la un punct la o dreaptă. Pentru a calcula distanța de la punctul $P_1(x_1, y_1, z_1)$ la dreapta u de ecuații (6) se procedează astfel: prin punctul P_1 se duce planul π, care să fie perpendicular pe dreapta u. Se determină punctul I de intersecție al dreptei u cu planul π, acest punct fiind piciorul perpendicularei din P_1 la dreapta u. Distanța cerută este

* De altfel, din (44) rezultă că $t = \infty$. Parametrul t fiind proporțional cu distanța de la punctul fix P_0 la punctul curent P de pe dreaptă, cînd $t \to \infty$, punctul P tinde către punctul la infinit al dreptei.

distanţa dintre punctele P_1 şi I. Vectorial, se poate obţine simplu formula acestei distanţe.

În adevăr, fie $\bar{r} = \overrightarrow{P_0P_1} = \bar{r}_1 - \bar{r}$ şi $\bar{u}(l, m, n)$, (fig. 6). Din triunghiul dreptunghic P_0IP_1 avem $d = r \sin \theta$, unde $d = P_0I$, $r = P_0P_1$, $\theta = \widehat{\overrightarrow{P_0P_1}, \bar{u}}$. Însă $| \bar{r} \times \bar{u} | = ru \sin \theta$ *, de unde obţinem pe $\sin\theta$. Găsim astfel

$$d = \frac{| \bar{r} \times \bar{u} |}{u} = \frac{| (\bar{r}_1 - \bar{r}_0) \times \bar{u} |}{u}. \tag{45}$$

* Dacă $\bar{r} = \bar{r}_0 - \bar{r}_1$, atunci $| \bar{r} \times \bar{u} | = ru \sin (\pi - \theta) = ru \sin \theta$.

CAPITOLUL XIII

SUPRAFEȚE ȘI CURBE STRÎMBE *

§ 1. REPREZENTAREA ANALITICĂ A SUPRAFEȚELOR

În spațiu, un punct descrie una sau mai multe suprafețe (sau porțiuni de suprafață), una sau mai multe curbe (sau porțiuni de curbă), dacă punctul se mișcă după o anumită lege.

Fie $Oxyz$ un sistem de referință cartezian (ortogonal) în spațiu. Mișcarea punctului $P(x, y, z)$ după o anumită lege se exprimă analitic prin una sau mai multe relații între coordonatele x, y, z ale lui P.

Dacă relațiile pe care le satisfac coordonatele x, y, z ale punctului P se reduc la o singură ecuație

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

unde F este o funcție care satisface la anumite *condiții de regularitate* (este continuă și admite derivate parțiale continue de primele două ordine etc.), atunci punctul $P(x, y, z)$ descrie o *suprafață*. Afirmația se bazează pe următoarele considerații: pentru orice sistem de valori $x = a$, $y = b$ ale variabilelor x, y, ecuația

$$F(a, b, z) = 0$$

admite, în general, un număr de soluții reale pentru z; fie c, c',... astfel de soluții. Cînd punctul $Q(a, b, 0)$ din planul Oxy descrie un domeniu Δ, punctele $P(a, b, c)$, $P'(a, b, c')$, ... descriu în spațiu porțiuni de suprafețe, care pot fi suprafețe distincte sau pînze ale unei aceleiași suprafețe (fig. 1). Așadar, în spațiul $E_3(x, y, z)$ *o ecuație de forma (1) reprezintă o suprafață.* Această ecuație se numește *ecuația implicită* a suprafeței.

Dacă funcția $F(x, y, z)$ este un polinom în variabilele x, y, z, suprafața reprezentată de ecuația (1) se numește *suprafață algebrică.* O suprafață este

* În acest capitol vom da numai unele indicații despre suprafețe și curbe strîmbe, problemele urmînd a fi precizate și adîncite la cursul de geometrie diferențială (a se vedea [25], [5]).

algebrică de gradul n (sau de ordinul n), dacă n este gradul polinomului din ecuația suprafeței; deci, ecuația unei astfel de suprafețe este

$$\sum_{\substack{p,\ q,\ r=0 \\ 0 \leqslant p+q+r \leqslant n}}^{n} a_{pqr} x^p y^q z^r = 0, \quad (a_{pqr} - \text{const.}). \tag{2}$$

Suprafețele algebrice de gradul întîi sînt planele.

Suprafețele algebrice de gradul al doilea se numesc *cuadrice*. Ecuația unei cuadrice se poate scrie sub forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \tag{3}$$

Împărțind cu unul din coeficienții diferiți de zero, deducem că *ecuația unei cuadrice depinde de nouă parametri.*

O suprafață care nu este algebrică se zice *transcendentă.*

O suprafață mai poate fi reprezentată analitic printr-o *ecuație explicită*

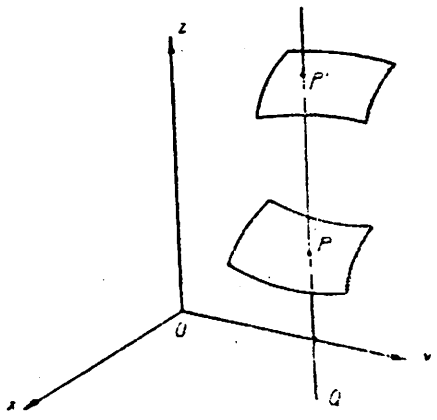


Fig. 1

$$z = f(x, y) \tag{4}$$

sau printr-un sistem de *ecuații parametrice*

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \tag{5}$$

funcțiile care intervin în aceste ecuații satisfăcînd anumite condiții de regularitate.

Observăm că dacă funcția $f(x, y)$ este uniformă (la un sistem de valori pentru x, y corespunde o singură valoare pentru z), suprafața (4) este întîlnită de o paralelă la axa Oz într-un singur punct.

Posibilitatea rezolvării ecuației (1) în raport cu coordonata z, deci trecerea de la ecuația implicită la ecuația explicită, este asigurată de teorema de existență a funcțiilor implicite din analiza matematică.

De asemenea, putem trece de la ecuațiile parametrice (5) la ecuația implicită a suprafeței. În adevăr, pentru aceasta trebuie să eliminăm parametrii u, v între ecuațiile (5), ceea ce este posibil dacă rangul matricei

$$\begin{Vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{Vmatrix} \tag{5'}$$

este doi. În acest caz, două dintre ecuațiile (5) pot fi rezolvate în *raport* cu u, v; înlocuindu-le în ecuația rămasă, se obține o relație între x, y, z.

Trebuie observat că pentru o suprafață, reprezentarea parametrică nu este unică (putem obține oricîte reprezentări parametrice pentru o suprafață). În particular, din ecuația explicită (4) a suprafeței obținem reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v), \end{cases} \tag{5''}$$

parametrii fiind egali cu variabilele x, y.

De asemenea, putem spune că o suprafață este imaginea în spațiul E_3 (x, y, z), prin transformarea punctuală (5), a planului E_2 (u, v).

Dacă impunem punctului Q (u, v) să descrie în planul E_2 un domeniu D, punctul $P(x, y, z)$ va descrie în E_3 numai o porțiune din suprafața considerată.

Dacă asupra funcțiilor care intervin în (1), (4), (5) nu se impun condiții restrictive, aceste ecuații reprezintă o clasă foarte largă de obiecte geometrice, printre care mulțimi de puncte imaginare, suprafețe degenerate etc., și numai într-un caz particular, suprafețe în sensul conceptului intuitiv.

Considerînd vectorul de poziție $\bar{r} = \overline{OP}$ al punctului P de coordonate (5), vectorul $\bar{r}$ este funcție de u, v:

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v); \tag{6}$$

obținem astfel *ecuația vectorială* a suprafeței.

Plan tangent la o suprafață. Fie Σ o suprafață de ecuație implicită (1) și $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct al suprafeței Σ. O dreaptă u care trece prin P_0, de parametri directori l, m, n, are ecuațiile

$$u: \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \tag{7}$$

Punctele de intersecție ale dreptei u cu suprafața Σ sînt date de formulele (7), unde t este o soluție a ecuației

$$F(x_0 + lt, \ y_0 + mt, \ z_0 + nt) = 0. \tag{8}$$

Unei rădăcini (reale) simple a ecuației (8) îi corespunde un punct, pe cînd unei rădăcini (reale) multiple de ordinul p îi corespund p puncte confundate, comune suprafeței Σ și dreptei u.

Dacă $p = 2$, dreapta u intersectează în general suprafața în două puncte confundate; despre o astfel de dreaptă spunem că este *tangentă* la suprafață, în punctul corespunzător rădăcinii duble a ecuației (8). Dezvoltînd după puterile lui t cu ajutorul formulei lui Taylor, ecuația (8) se mai scrie, ținînd seama că $P_0 \in \Sigma$ și presupunînd că derivatele F_{x_0}, F_{y_0}, F_{z_0} nu sînt toate nule:

$$\frac{t}{1!}(lF_{x_0} + mF_{y_0} + nF_{z_0}) + \frac{t^2}{2!}(l^2F_{x_0^2} + m^2F_{y_0^2} + n^2F_{z_0^2} + \\ + 2\,lmF_{x_0y_0} + 2\,lnF_{x_0z_0} + 2mnF_{y_0z_0}) + \ldots = 0. \tag{8'}$$

Rezultă că ecuația (8') are, în general, o singură rădăcină nulă pentru t, ceea ce înseamnă că punctul corespunzător lui $t = 0$, comun dreptei și suprafeței, este chiar punctul P_0. Dreptele pentru care $t = 0$ este o rădăcină dublă a ecuației (8') sînt tangente la suprafața Σ în punctul P_0. În acest caz avem condiția

$$lF_{x_0} + mF_{y_0} + nF_{z_0} = 0. \tag{8''}$$

Există deci o infinitate de drepte tangente în P_0 la Σ.

Locul geometric al acestor tangente se obține eliminînd pe l, m, n între ecuațiile (7) și (8''). Rezultă că tangentele la suprafața (1) în P_0 sînt situate în planul

$$(x - x_0) F_{x_0} + (y - y_0) F_{y_0} + (z - z_0) F_{z_0} = 0. \tag{9}$$

numit *planul tangent* la suprafață în punctul P_0.

Un punct $P_0 \in \Sigma$, în care nu se anulează toate derivatele parțiale de primul ordin ale funcției F, în care deci avem

$$F^2_{x_0} + F^2_{y_0} + F^2_{z_0} > 0, \tag{9'}$$

se numește *punct regulat* sau *ordinar* al suprafeței Σ. În cazul cînd în P_0 se anulează toate derivatele parțiale de ordinul întîi ale funcției F:

$$F_{x_0} = F_{y_0} = F_{z_0} = 0, \tag{9''}$$

planul tangent la suprafață în P_0 *este nedeterminat*. Punctul P_0 se numește în acest caz *punct singular* al suprafeței.

§ 2. REPREZENTAREA CURBELOR ÎN SPAȚIU

Se poate întîmpla ca legea după care se mișcă un punct $P(x, y, z)$ să fie astfel încît coordonatele x, y, z ale lui P să verifice două ecuații

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

unde F și G sînt două funcții care satisfac la anumite condiții de regularitate. În acest caz, punctul $P(x, y, z)$ descrie o curbă, intersecția celor două suprafețe $F(x, y, z) = 0$ și $G(x, y, z) = 0$. Ecuațiile (10) se numesc *ecuațiile implicite ale curbei*.

Curba (10) este *algebrică*, dacă suprafețele $F = 0$ și $G = 0$ sînt algebrice. O curbă algebrică poate să conțină toate punctele de intersecție a două suprafețe algebrice sau numai o parte din ele, în aceste cazuri, curba fiind *intersecția completă*, respectiv *intersecția necompletă* a suprafețelor algebrice.

O curbă care nu este algebrică se numește *transcendentă*.

Alte reprezentări analitice ale unei curbe sînt date prin *ecuațiile explicite*

$$\begin{cases} y = f(x), \\ z = g(x), \end{cases} \qquad (x \in R) \tag{11}$$

sau prin *ecuațiile parametrice*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad (t \in R), \tag{12}$$

unde funcțiile satisfac condiții de regularitate, R fiind dreapta reală.

Se poate trece de la o reprezentare analitică la alta. Astfel, fiind dată reprezentarea implicită (10) a curbei, dacă F, G sînt continue în raport cu ansamblul variabilelor și admit derivate parțiale continue pe domeniul în care sînt definite, și dacă rangul matricei

$$\left\| \begin{matrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{matrix} \right\| \tag{10'}$$

este doi, atunci sistemul (10) satisface condițiile teoremei fundamentale a funcțiilor implicite (pe întreg domeniul de definiție). Rangul matricei fiind doi, fie, de exemplu,

$$\frac{D(F, G)}{D(y, z)} = \left\| \begin{matrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{matrix} \right\| \neq 0.$$

Atunci există două funcții continue $f(x)$, $g(x)$ derivabile, cu derivate continue, care satisfac identic sistemul (10). Obținem astfel o reprezentare de forma (11) a suprafeței.

De asemenea, fiind dată reprezentarea parametrică (12), dacă funcțiile $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sînt continue, derivabile și au derivate continue satisfăcînd condiția

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0 \text{ oricare ar fi } a \leqslant t \leqslant b, \tag{12'}$$

atunci putem elimina pe t, de exemplu între prima și a doua și între prima și a treia ecuație (12), obținînd ecuații de forma

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ G(x, z) = 0. \end{cases}$$

Ecuațiile astfel obținute reprezintă o curbă dată de intersecția a două suprafețe.

Trebuie observat că, pentru o curbă, reprezentarea parametrică nu este unică (putem obține oricîte reprezentări parametrice ale unei curbe). În particular, dacă punem $x = t$ în reprezentarea explicită (11) a curbei, obținem reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \\ z = g(x). \end{cases} \tag{12''}$$

De asemenea, putem spune că o curbă este imaginea în spațiul $E_3(x, y, z)$, prin transformarea punctuală (12), a dreptei reale $E_1(t)$. Dacă punctul $Q(t)$ descrie pe dreapta reală E_1 un interval $(a, b) \subset E_1$, punctul $P(x, y, z)$ va descrie în E_3 numai o porțiune din curba considerată.

Definind *curba* ca mulțimea punctelor din spațiu E_3 dată printr-una din reprezentările (10), (11), (12) și neimpunînd condiții restrictive asupra funcțiilor care intervin în aceste reprezentări, obținem o clasă foarte largă de obiecte geometrice, printre care mulțimi de puncte imaginare, puncte izolate, curbe degenerate și, numai într-un caz particular, curbe ce corespund conceptului intuitiv.

Fie $P(x, y, z)$ un punct oarecare al curbei de ecuații parametrice (12). Putem considera vectorul de poziție $\bar{r} = \overline{OP}$ al lui P, cu punctul de aplicație în originea O a sistemului de axe (cartezian și orientat sinistrorsum) și cu extremitatea în P. Deci, vectorul $\bar{r}$ este o funcție de t:

$$\bar{r} = \bar{r}(t); \tag{13}$$

(13) reprezintă *ecuația vectorială* a curbei.

O *curbă* este *plană*, dacă toate punctele ei aparțin unui plan. O curbă care nu este plană se zice *strîmbă*. Deci, curba (12) este plană, dacă punctul $P(x, y, z)$ al curbei aparține unui plan $Ax + By + Cz + D = 0$, adică dacă funcțiile $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ satisfac ecuația

$$Ax(t) + By(t) + Cz(t) + D = 0,$$

oricare ar fi parametrul t.

Tangenta la o curbă strîmbă. Fie $P(t)$ și $P'(t')$ două puncte apropiate pe o curbă (12). Ecuațiile secantei PP' sînt

$$\frac{x - x(t)}{l} = \frac{y - y(t)}{m} = \frac{z - z(t)}{n},$$

unde ca parametri directori ai secantei PP' putem lua

$$l = \frac{x(t') - x(t)}{t' - t}, \quad m = \frac{y(t') - y(t)}{t' - t}, \quad n = \frac{z(t') - z(t)}{t' - t}.$$

Dacă $t' \to t$, deci facem ca punctul P' să tindă către P, secanta PP' ia o poziție limită — dacă aceasta există, ceea ce presupunem* — devenind tangentă la curbă în punctul P; atunci

$$l = x'(t), \quad m = y'(t), \quad n = z'(t),$$

unde accentul indică derivatele în raport cu parametrul t. Deci, ecuațiile tangentei în $P(t)$ la curba (12) sînt

$$\frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y(t)}{y'(t)} = \frac{z - z(t)}{z'(t)}. \tag{14}$$

Întrebuințînd notația diferențială, rezultă că parametrii directori ai tangentei la o curbă strîmbă sînt proporționali cu diferențialele

$$dx, \quad dy, \quad dz$$

în punctul P.

Observăm că tangenta este determinată, dacă condiția (12′) este îndeplinită. În acest caz, punctul P este un *punct regulat* sau *ordinar* al curbei. Dacă derivatele $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ sînt toate nule în punctul P, tangenta la curbă în P este nedeterminată. Un astfel de punct

---

* În acest caz, există limitele $\lim_{t' \to t} l$, $\lim_{t' \to t} m$, $\lim_{t' \to t} n$.

este un *punct singular* al curbei, numit punct multiplu; în general, într-un punct multiplu se întîlnesc mai multe ramuri ale curbei. Dacă nedeterminarea poate fi ridicată prin schimbarea parametrului t al curbei, ea este *aparentă*.

Alte proprietăți diferențiale ale curbelor strîmbe (cum ar fi planul osculator, normala principală și binormala ș.a.) vor fi studiate la cursul de geometrie diferențială.

§ 3. GENERAREA SUPRAFEȚELOR

Curbe pe suprafață. Fie Σ o suprafață reprezentată parametric prin ecuațiile (5). Să dăm, în ecuațiile (5), parametrului u o valoare fixă, de exemplu să considerăm $u = u_0$. Atunci, ecuațiile

$$\begin{cases} x = x(u_0, v), \\ y = y(u_0, v), \\ z = z(u_0, v) \end{cases} \tag{15}$$

reprezintă o curbă în spațiu, deoarece x, y, z sînt funcții de un singur parametru v. Evident, curba aparține suprafeței Σ, deoarece orice punct al ei este și un punct al suprafeței. Se zice că ecuațiile (15) reprezintă curba $u = u_0$ de pe suprafață. Atribuind lui u valorile $u_1, u_2, \ldots$, obținem alte curbe pe suprafață. Curbele obținute atribuind lui u — în ecuația suprafeței — toate valorile posibile constituie o familie de curbe pe suprafața Σ: familia $u = \text{const}$.

Dacă $v = v_0$, avem o altă curbă pe suprafață

$$\begin{cases} x = x(u, v_0), \\ y = y(u, v_0), \\ z = z(u, v_0), \end{cases} \tag{15'}$$

numită curba $v = v_0$. Curbele obținute atribuind lui v toate valorile posibile, constituie o altă familie de curbe pe suprafață: familia $v = \text{const}$.

Dacă $P_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct oarecare de pe suprafață, prin acest punct trec două curbe $u = u_0$, $v = v_0$; avem deci

$$x_0 = x(u_0, v_0), \quad y_0 = y(u_0, v_0), \quad z_0 = z(u_0, v_0). \tag{16}$$

Punctul P_0 apare astfel ca intersecția curbelor $u = u_0$ și $v = v_0$. De aceea, curbele $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ se numesc *curbe coordonate* pe suprafață, iar u_0, v_0 *coordonate curbilinii* ale lui P_0. Suprafața apare astfel cadrilată de curbele $u = \text{const.}$ și $v = \text{const.}$ (fig. 2).

Știm că planul tangent la suprafață într-un punct conține tangentele la suprafață în acel punct. Deci, planul tangent în P va conține tangentele la curbele coordonate $v = \text{const.}$ și $u = \text{const.}$ care trec prin P. Parametrii directori ai acestor tangente fiind x_u, y_u, z_u, respectiv x_v, y_v, z_v, deducem, ținînd

seama de (21) din capitolul XII, că ecuația planului tangent la suprafața (5) în punctul $P[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$ este

$$\begin{vmatrix} x - x(u, v) & y - y(u, v) & z - z(u, v) \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0. \qquad (17)$$

Planul tangent este nedeterminat, dacă P este un punct singular al suprafeței sau al reprezentării parametrice (5). În acest caz, rangul matricei (5′) este unu.

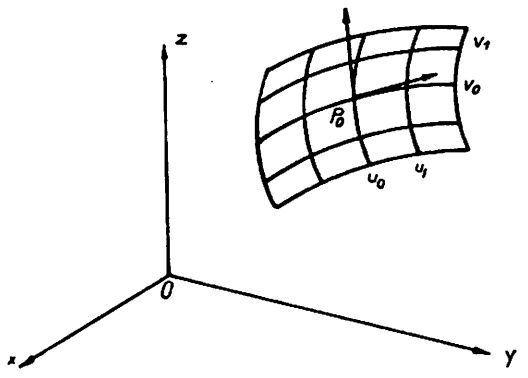


Fig. 2

Generarea suprafețelor. O suprafață poate fi generată prin mișcarea unei curbe, numită *curbă generatoare*, supusă la anumite condiții; ca exemple de condiții menționăm: curba generatoare întîlnește una sau mai multe curbe fixe, numite *directoare*, curba generatoare este tangentă la o suprafață dată ș.a.

În aceste cazuri, ecuațiile curbei generatoare depind de unul sau de mai mulți parametri, adică generatoarea face parte dintr-o familie de curbe depinzînd de un număr de parametri.

Dacă ecuațiile curbei generatoare depind de un parametru, deci dacă

$$\begin{cases} F(x, y, z, \lambda) = 0, \\ G(x, y, z, \lambda) = 0 \end{cases} \qquad (18)$$

sînt ecuațiile generatoarei, λ fiind un parametru, ecuația suprafeței (a locului geometric al pozițiilor generatoarei) se obține eliminînd pe λ între ecuațiile (18).

Să presupunem că ecuațiile curbei generatoare sînt ecuațiile unei familii de curbe depinzînd de doi parametri:

$$\begin{cases} F(x, y, z, \lambda, \mu) = 0, \\ G(x, y, z, \lambda, \mu) = 0. \end{cases} \qquad (19)$$

În acest caz, generatoarea trebuie să întîlnească o curbă fixă, *directoarea*, despre care să presupunem că este dată de ecuațiile

$$\begin{cases} \Phi(x, y, z) = 0, \\ \Psi(x, y, z) = 0. \end{cases} \qquad (20)$$

Însă o curbă generatoare a familiei (19) va întîlni directoarea (20), numai dacă sistemul S, format de ecuațiile (19) și (20), care constituie un sistem de patru ecuații în trei necunoscute, este compatibil. Condiția de compatibilitate

$$f(\lambda, \mu) = 0 \qquad (21)$$

se obține eliminînd pe x, y, z între ecuațiile sistemului S. Într-adevăr, primele trei ecuații ale sistemului S formează un sistem de trei ecuații în trei necunoscute, care — în general — este compatibil; deci admite o soluție

$$\begin{cases} x = x(\lambda, \mu), \\ y = y(\lambda, \mu), \\ z = z(\lambda, \mu). \end{cases}$$

Pentru ca sistemul S să fie compatibil, trebuie ca soluția obținută să verifice identic a patra ecuație a sistemului, adică

$$\Psi[x(\lambda, \mu), y(\lambda, \mu), z(\lambda, \mu)] \equiv f(\lambda, \mu) = 0.$$

Rezultă că dacă ecuațiile curbei generatoare depind de doi parametri, relația (21) reprezintă condiția ca generatoarea să se sprijine pe directoarea dată.

Ecuația suprafeței se obține eliminînd parametrii λ și μ între ecuațiile (19) și (21).

Acestea fiind cele mai frecvente moduri de generare a suprafețelor, nu vom studia cazurile cînd ecuațiile curbei generatoare depind de trei, patru, sau de mai mulți parametri.

CAPITOLUL XIV

CÎTEVA CLASE DE SUPRAFEȚE

§ 1. SFERA

Ecuația sferei. Se numește *sferă* locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de un punct fix, numit *centrul* sferei, distanța de la centru la unul din punctele sferei numindu-se *rază*.

Fie $Oxyz$ un sistem de referință cartezian ortogonal. Dacă $C(a, b, c)$ și r sînt centrul și raza sferei, iar $P(x, y, z)$ un punct al sferei, ecuația sferei se obține exprimînd că distanța între P și C este egală cu r (fig. 1). Deci, un punct $P(x, y, z)$ se va găsi pe sfera de centru C și de rază r, dacă x, y, z satisfac ecuația

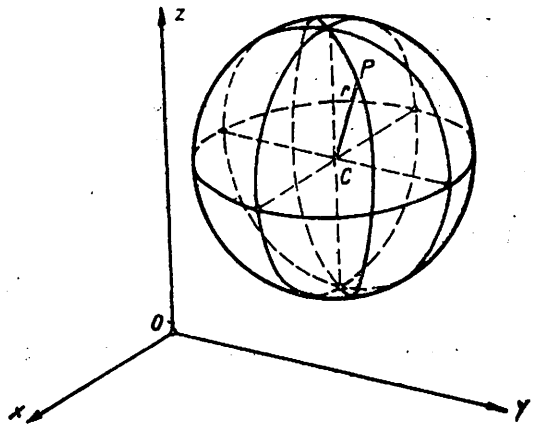


Fig. 1

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = r.$$

Ridicînd la pătrat ambii membri ai acestei ecuații, se obține ecuația sferei sub formă rațională

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2. \tag{1}$$

Dacă o sferă are centrul în origine, deci $a = b = c = 0$, ecuația ei se va scrie

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0. \tag{1'}$$

Notînd

$$\alpha = -a, \quad \beta = -b, \quad \gamma = -c, \quad \delta = a^2 + b^2 + c^2 - r^2, \tag{2}$$

ecuația (1) se mai scrie

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0. \tag{3}$$

Invers, fiind dată o sferă printr-o ecuație (3), coordonatele centrului C și raza r a sferei sînt

$$a = -\alpha, \quad b = -\beta, \quad c = -\gamma; \qquad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta}, \tag{3'}$$

dacă ținem seama de relațiile (2).

Ecuația (3) fiind o ecuație algebrică de gradul al doilea, rezultă că sfera este o cuadrică. Comparînd cu ecuația generală (3) din capitolul XIII a unei cuadrice, observăm că în ecuația unei sfere coeficienții termenilor în x^2, y^2, z^2 sînt egali cu unitatea, iar coeficienții termenilor în xy, xz, yz sînt nuli.

Să arătăm că dacă într-un sistem de coordonate carteziene ortogonale coeficienții ecuației (3) din capitolul XIII a unei cuadrice satisfac condițiile

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0, \tag{4}$$

cuadrica este o sferă sau un plan. În adevăr, în acest caz, ecuația cuadricei se scrie

$$a_{11}(x^2 + y^2 + z^2) + 2a_{14}a + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \tag{5}$$

Dacă $a_{11} = 0$, suprafața este un plan. Observăm că la acest plan trebuie adăugat și planul de la infinit, care intervine dacă facem ecuația (5) omogenă, și apoi impunem condiția $a_{11} = 0$.

Dacă $a_{11} \neq 0$, ecuația reprezintă o sferă avînd centrul

$$C\left(-\frac{a_{14}}{a_{11}}, -\frac{a_{24}}{a_{11}}, -\frac{a_{34}}{a_{11}}\right), \tag{5'}$$

și raza

$$r^2 = \frac{a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{11}a_{44}}{a_{11}^2}. \tag{5''}$$

Rezultă că sfera va fi reală, imaginară sau de rază nulă, după cum

$$a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{11}a_{44} \gtreqless 0.$$

În ultimul caz, sfera are un singur punct real, centrul ei. În adevăr, o sferă de rază nulă cu centrul în punctul $C(a, b, c)$ are ecuația

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 0, \tag{6}$$

această ecuație neputînd să aibă alte soluții reale decît coordonatele centrului C.

De asemenea, din (5'') rezultă că dacă $a_{11} = 0$, raza sferei este infinită; deci putem considera planul ca o sferă de rază infinită.

Conul izotrop. Dacă sfera de rază nulă este cu centrul în origine, ecuația ei este

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \tag{6'}$$

coordonatele originii fiind singura soluție reală a acestei ecuații.

Observăm însă că ecuația (6') are soluții imaginare. În adevăr, să intersectăm sfera (6') cu planul Oxy. Atunci, ecuația (6') admite ca soluții dreptele izotrope

$$\begin{cases} x \pm iy = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Fie un alt plan care trece prin origine. Printr-o transformare ortogonală de axe putem face totdeauna ca acest plan să devină planul Oxy, ecuația (6') păstrînd aceeași formă. Rezultă că ecuația (6') este locul geometric al dreptelor izotrope trecînd prin origine, adică reprezintă ceea ce se numește *conul izotrop* sau *conul absolut* cu centrul în origine.

Conul absolut cu centrul într-un punct $C(a, b, c)$ are ecuația (6).

Cercul absolut. Se știe că dreptele izotrope trec prin punctele ciclice sau punctele absolute ale planului. Rezultă că intersecția conului izotrop cu planul de la infinit

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 0, \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

este locul geometric al tuturor punctelor ciclice din spațiu. Acest loc se numește *cercul absolut* al spațiului.

Să arătăm că orice sferă trece prin cercul absolut al spațiului. În adevăr, ecuația unei sfere în coordonate omogene fiind

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1 x_4 + 2\beta x_2 x_4 + 2\gamma x_3 x_4 + \delta x_4^2 = 0,$$

intersecția acestei sfere cu planul de la infinit are ecuațiile

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

și coincide cu intersecția conului izotrop cu planul de la infinit.

Aplicații. 1) Sfere prin patru puncte. Uneori se cere să determinăm o sferă prin condiții inițiale. Atunci, scriind că sfera (3) verifică condițiile date, obținem un sistem de ecuații în coeficienții α, β, γ, δ.

De exemplu, patru puncte date

$$P_i(x_i, y_i, z_i), \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

care nu sînt situate în același plan, determină o sferă și numai una: sfera care trece prin cele patru puncte date. Scriind că punctele date P_i sînt pe sferă, deci coordonatele lor verifică ecuația (3), obținem condițiile

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + 2\alpha x_i + 2\beta y_i + 2\gamma z_i + \delta = 0, \quad (i = 1,2,3,4). \quad (7)$$

Cele patru puncte P_i nefiind în același plan, determinantul necunoscutelor sistemului (7) este diferit de zero. Aplicînd regula lui Cramer, putem rezolva sistemul (7) în raport cu α, β, γ, δ. Obținem astfel o soluție unică.

Putem însă considera sistemul format din ecuația (3) și ecuațiile (7). Aplicînd criteriul lui Kronecker-Capelli (v. Cap. III, § 2), obținem ecuația sferei sub forma unui determinant de ordinul al cincilea.

2) **Reprezentarea parametrică a sferei.** Fie sfera de ecuație (1'), adică sfera de rază r și cu centrul în originea axelor de coordonate. O reprezentare parametrică a sferei se obține ușor cu ajutorul coordonatelor sferice (v. Cap. X, § 5). În adevăr, considerînd unghiul $\theta = u$, pe care raza $r = OP$ îl face cu axa Oz și unghiul $\varphi = v$, pe care urma planului OPz pe planul Oxy îl face cu Ox, avem (fig. 2)

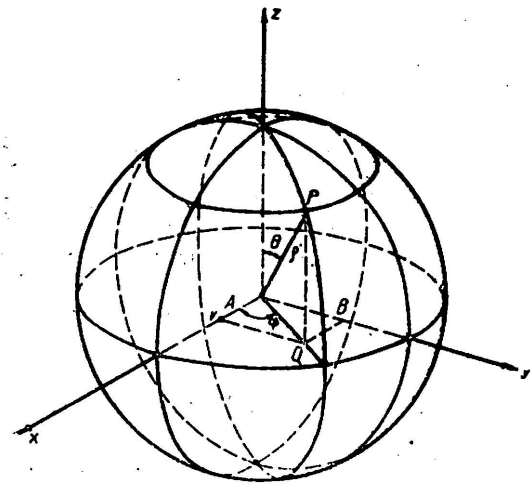


Fig. 2

$$OQ = r \sin u.$$

Coordonatele punctului P fiind $x = OA$, $y = AQ$, $z = QP$, rezultă formulele

$$\begin{cases} x = r \sin u \cos v, \\ y = r \sin u \sin v, \\ z = r \cos u, \end{cases} \qquad (8)$$

care constituie ecuațiile parametrice ale sferei (1'), parametrii fiind unghiurile $u = \theta$, $v = \varphi$ (colatitudinea, respectiv longitudinea).

Plan tangent la o sferă. Fie $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct al sferei (1). Ținînd seama de formula (9) din Capitolul XIII, ecuația planului tangent în punctul P_0 este

$$(x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - b) + (z - z_0)(z_0 - c) = 0. \qquad (9)$$

Ecuația (9) arată că vectorii $\overrightarrow{P_0P}$ și $\overrightarrow{CP_0}$ sînt perpendiculari, adică planul tangent la sferă într-un punct P_0 este perpendicular pe raza P_0C, unde $C(a, b, c)$ este centrul sferei. Folosind această proprietate geometrică, se poate obține direct ecuația planului tangent la o sferă. Scriind ecuația (9) sub forma

$$x_0x + y_0y + z_0z - ax - by - cz - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - ax_0 - by_0 - cz_0) = 0$$

și ținînd seama că punctul P_0 se află pe sferă, deci că

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - ax_0 - by_0 - cz_0 = ax_0 + by_0 + cz_0 - a^2 - b^2 - c^2 + r^2,$$

ecuația (9) se mai scrie

$$x_0x + y_0y + z_0z - a(x + x_0) - b(y + y_0) - c(z + z_0) + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0. \qquad (9')$$

Ecuația planului tangent în punctul P_0 la sfera (1') devine astfel:

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) + (z - c)(z_0 - c) = r^2 \qquad (9'')$$

și se obține din (1) prin dedublare. Dacă utilizăm ecuația (3), ecuația planului tangent în punctul P_0 al sferei este

$$x_0x + y_0y + z_0z + \alpha(x + x_0) + \beta(y + y_0) + \gamma(z + z_0) + \delta = 0. \quad (10)$$

Intersecția sferei cu un plan. Fie sfera (1') cu centrul în origine. Intersectînd această sferă cu planul $z = \lambda$, ecuațiile intersecției sînt

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 - \lambda^2, \\ z = \lambda \end{cases}$$

și reprezintă un cerc. Cercul de intersecție este real, imaginar sau de rază nulă, după cum $\lambda \lessgtr r$. În ultimul caz, cercul de intersecție este degenerat în dreptele izotrope

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0, \\ z = r. \end{cases}$$

Cercul de intersecție este un *cerc mare al sferei*, dacă planul secant trece prin centrul sferei.

În concluzie, *intersecția unei sfere cu un plan este un cerc* real sau imaginar, după cum distanța de la centrul sferei la plan este mai mică sau mai mare decît raza. Dacă această distanță este egală cu raza, planul secant este tangent la sferă, intersecția lui cu sfera fiind un cerc de rază nulă, adică o conică degenerată în dreptele izotrope care trec prin punctul de tangență.

Intersecția sferei cu o dreaptă. Să intersectăm sfera (3) cu dreapta

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \quad (11)$$

Ca să găsim ordonatele punctelor de intersecție, introducem expresiile lui x, y, z din (11) în ecuația sferei (3) și găsim pentru t o ecuație de gradul al doilea

$$(l^2 + m^2 + n^2)t^2 + 2[l(x_0 + \alpha) + m(y_0 + \beta) + n(z_0 + \gamma)]t + S(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad (12)$$

unde s-a însemnat cu $S(x_0, y_0, z_0)$ primul membru al ecuației (3) a sferei, în care, în loc de x, y, z, s-au introdus coordonatele x_0, y_0, z_0 ale punctului P_0, prin care trece dreapta (11). Introducînd în locul lui t din ecuațiile (11) una din rădăcinile ecuației (12), obținem coordonatele unuia din punctele de intersecție. Deoarece ecuația (12) este de gradul al doilea în t, deducem că *o dreaptă intersectează sfera în două puncte*, care sînt reale și distincte (cînd dreapta este secantă), dacă rădăcinile t_1, t_2 ale ecuației (12) sînt reale și distincte, confundate (cînd dreapta este tangentă) dacă rădăcinile t_1, t_2 sînt egale, sau imaginare (cînd dreapta este exterioară sferei), dacă rădăcinile t_1, t_2 sînt complex conjugate.

Puterea unui punct în raport cu o sferă. Fie un punct $P_0(x_0, y_0, z_0)$ și sfera (3). O dreaptă prin P_0 întîlnește sfera în două puncte Q_1, Q_2 (fig. 3). Expresia

$$p = P_0Q_1 \cdot P_0Q_2$$

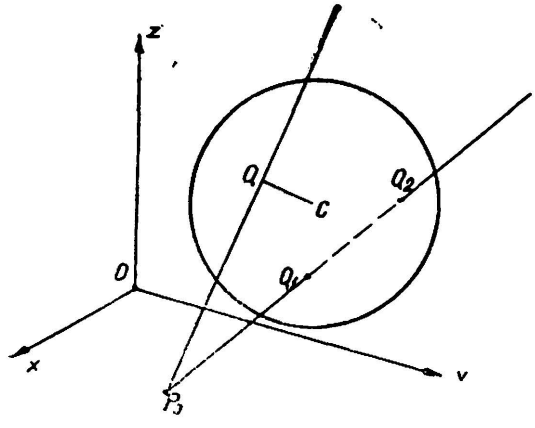


Fig. 3

este independentă de direcția dreptei și se numește *puterea punctului P_0 în raport cu sfera.*

Luînd ecuațiile dreptei P_0 sub forma (11), unde l, m, n sînt chiar cosinusurile directoare ale dreptei (deci, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$), rezultă că t este chiar distanța dintre punctul P_0 și punctul curent Q al dreptei. Deci, $P_0Q_i = t_i (i = 1, 2)$, t_1 și t_2 fiind rădăcinile ecuației (12), unde trebuie să ținem seama că $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Însă ecuația (12) ne arată că $t_1t_2 = S(x_0, y_0, z_0)$; rezultă că

$$p = S(x_0, y_0, z_0); \tag{13'}$$

cu alte cuvinte, puterea unui punct în raport cu o sferă se obține înlocuind coordonatele punctului dat în primul membru al ecuației sferei. Deci, puterea punctului P_0 față de o sferă dată nu depinde de dreapta P_0Q, ci numai de coordonatele punctului P_0.

Observăm că dacă punctul P_0 este exterior sferei, puterea lui este pozitivă, deoarece punctele Q_1, Q_2 sînt de aceeași parte a lui P_0. Dacă P_0 este interior, puterea p este negativă, iar dacă P_0 este pe sferă, puterea este nulă.

Rezultă că un punct P_0 este exterior, pe sferă sau interior sferei, după cum expresia $S(x_0, y_0, z_0)$ este pozitivă, nulă sau negativă.

Să presupunem că punctul P_0 este exterior sferei, iar dreapta P_0Q este tangentă la sferă în punctul $Q_1 = Q_2$; atunci formula (13) devine

$$p = P_0Q_1^2.$$

Deci, notînd cu d distanța de la P_0 la centrul C al sferei, obținem

$$p = d^2 - r^2, \tag{13''}$$

r fiind raza sferei.

Un plan care trece prin P_0 intersectează sfera după un cerc, puterea lui P_0 față de acest cerc fiind egală cu puterea punctului P_0 față de sferă; cu alte cuvinte, puterile lui P_0 față de cercurile obținute pe sferă prin plane care trec prin P_0 sînt toate egale.

Aplicații. 1) **Planul radical a două sfere.** Se numește *plan radical* a două sfere locul geometric al punctelor din spațiu care au aceeași putere în raport cu sferele date.

Fie

$$S_i \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha_i x + 2\beta_i y + 2\gamma_i z + \delta_i = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (14),$$

ecuațiile a două sfere.

Dacă $P(x, y, z)$ este un punct al locului căutat, avem $p_1 = p_2$, unde $p_i = S_i(x, y, z)$ sînt puterile lui P în raport cu sferele (14).

Rezultă că planul radical are ecuația

$$S_2 - S_1 \equiv 2(\alpha_2 - \alpha_1)x + 2(\beta_2 - \beta_1)y + 2(\gamma_2 - \gamma_1)z + \delta_2 - \delta_1 = 0, \quad (15)$$

care se obține anulînd diferența $S_2 - S_1$ a primilor membri ai ecuațiilor celor două sfere. Planul radical este la distanță finită, abstracție făcînd de cazul cînd avem

$$\alpha_2 = \alpha_1, \qquad \beta_2 = \beta_1, \qquad \gamma_2 = \gamma_1,$$

cînd sferele sînt concentrice. În acest caz, planul radical este planul de la infinit. Observăm că parametrii directori ai planului radical (15) sînt

$$2(\alpha_2 - \alpha_1), \qquad 2(\beta_2 - \beta_1), \qquad 2(\gamma_2 - \gamma_1),$$

fiind proporționali cu parametrii directori

$$-\alpha_2 + \alpha_1, \qquad -\beta_2 + \beta_1, \qquad -\gamma_2 + \gamma_1$$

ai dreptei O_1O_2 care unește centrele $O_1(-\alpha_1, -\beta_1, -\gamma_1)$, $O_2(-\alpha_2, -\beta_2, -\gamma_2)$ ale celor două sfere (14). Așadar:

Planul radical a două sfere este perpendicular pe dreapta care unește centrele celor două sfere date.

Dacă sferele sînt tangente, planul lor radical este planul tangent la cele două sfere în punctul lor de tangență.

De asemenea avem *proprietatea:*

Tangentele duse dintr-un punct oarecare al planului radical a două sfere la cele două sfere, dacă există aceste tangente, sînt egale.*

Proprietatea rezultă din faptul că pătratele acestor tangente reprezintă puterea punctului față de fiecare din sfere.

2) **Axa radicală a trei sfere.** Se numește *axă radicală* a trei sfere locul geometric al punctelor din spațiu care au aceeași putere în raport cu sferele date.

Fie $S_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ ecuațiile a trei sfere. Dacă $P(x, y, z)$ este un punct al locului căutat, avem $p_1 = p_2 = p_3$, unde $p_i = S_i(x, y, z)$ sînt puterile lui P în raport cu sferele (14'), adică

$$S_1 = S_2 = S_3$$

sau

$$\begin{cases} S_2 - S_1 = 0, \\ S_1 - S_3 = 0, \\ S_3 - S_2 = 0 \end{cases}$$

* Proprietatea este analogă cu aceea a axei radicale a două cercuri $C_i(i = 1, 2)$, care spune că tangentele duse dintr-un punct al său (al axei radicale) la cele două cercuri sînt egale

și reprezintă planele radicale ale celor trei sfere luate două cîte două. Cum aceste ecuații nu sînt independente, planele radicale aparțin aceluiași fascicul. Rezultă că axa radicală a celor trei sfere date este axa fasciculului din care fac parte plane radicale ale sferelor luate două cîte două. Deoarece planul radical a două sfere este perpendicular pe linia centrelor sferelor, rezultă că axa radicală a trei sfere este perpendiculară pe planul determinat de centrele celor trei sfere.

Axa radicală este la distanță finită, abstracție făcînd de cazul cînd cele trei sfere date au centrele coliniare, deci planele radicale sînt paralele, cînd axa radicală este aruncată la infinit; dacă planele radicale sînt confundate, ceea ce are loc cînd sferele fac parte dintr-un fascicul de sfere, axa radicală este nedeterminată.

Deoarece o dreaptă intersectează o sferă în două puncte, rezultă că axa radicală a trei sfere va intersecta cele trei sfere în două puncte fixe; așadar, trei sfere se intersectează în două puncte, care sînt punctele de intersecție ale axei lor radicale cu una din sfere.

3) **Centrul radical a patru sfere.** Se numește *centru radical* a patru sfere punctul care are aceeași putere în raport cu patru sfere date.

Fie

$$S_i = 0, \qquad (i = 1,2,3,4)$$

ecuațiile a patru sfere. Din condițiile $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$, unde $p_i = S_i(x, y, z)$ sînt puterile punctului $P(x, y, z)$ al locului căutat în raport cu cele patru sfere date, deducem că centrul radical este punctul de intersecție al axelor radicale a cîte trei din cele patru sfere.

Centrul radical este la distanță finită, abstracție făcînd de cazul cînd cele patru sfere date au centrele coplanare, deci axele radicale sînt paralele, cînd centrul radical este aruncat la infinit; dacă axele radicale sînt confundate, ceea ce are loc cînd sferele fac parte dintr-o rețea de sfere, centrul radical este nedeterminat.

De asemenea observăm că luînd originea ca centru radical, termenul constant în ecuațiile celor patru sfere va fi același. În adevăr, avem $p_i = S_i(0, 0, 0) = \delta_i$, iar $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$; deci, sferele au aceeași putere față de origine. Puterea originii fiind egală cu termenul constant din ecuația sferei și dacă acest termen constant este diferit de zero, rezultă că centrul radical este în același timp exterior, respectiv interior celor patru sfere.

Dacă însă centrul radical se găsește pe una din sfere, el se găsește și pe celelalte, cele patru sfere trecînd prin același punct.

Intersecția a două sfere. Fiind date ecuațiile (14) a două sfere, punctele de intersecție ale acestor sfere sînt date de soluțiile sistemului

$$\begin{cases} S_1 = 0, \\ S_2 = 0. \end{cases}$$

Acest sistem **este** echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} S_1 = 0, \\ S_2 - S_1 = 0; \end{cases}$$

cu alte cuvinte, intersecția a două sfere este în același timp intersecția uneia dintre sferele date cu planul lor radical.

Însă intersecția planului radical cu una din sfere este un cerc. Deci, intersecția a două sfere este un cerc situat în planul radical al celor două sfere. Cercul de intersecție al sferelor poate fi real, imaginar sau de rază nulă, după cum sferele sînt secante, exterioare sau interioare, sau tangente. Pe de altă parte, se știe că orice sferă trece prin cercul absolut al spațiului. Așadar:

Intersecția completă a două sfere este formată din două cercuri, cercul absolut și un cerc în planul radical al celor două sfere (intersecția uneia dintre sfere cu planul lor radical).

Se știe că unghiul a două sfere este egal cu unghiul razelor în unul din punctele de intersecție.

Prin considerații analoge ca acelea făcute la cerc, se arată că unghiul a două sfere este dat de formula

$$\cos\theta = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 - \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - \delta_1}\ \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 - \delta_2}}. \tag{16}$$

Deci, sferele sînt ortogonale, dacă avem satisfăcută condiția

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 - \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2) = 0. \tag{16'}$$

Fascicul de sfere. Se numește *fascicul de sfere* totalitatea sferelor care trec prin trei puncte date. Deoarece prin punctele date trece un cerc, rezultă că sferele fasciculului au în comun un cerc. Deci, un fascicul de sfere poate fi definit ca totalitatea sferelor care trec printr-un cerc, cercul putînd fi și imaginar. De asemenea, se știe că cercul se poate obține ca intersecția a două sfere sau ca intersecția uneia dintre sfere cu planul lor radical. Deci, fasciculul de sfere este constituit din sfere care au același plan radical, planul care trece prin cele trei puncte date.

Ecuația generală a unei sfere depinzînd de patru parametri, totalitatea sferelor care trec prin trei puncte date constituie o *familie liniară de sfere cu un parametru*. Rezultă că, fiind date două sfere S_1 și S_2 ale fasciculului, numite *sferele de bază* ale fasciculului, orice altă sferă a fasciculului are ecuația de forma

$$S_1 + \lambda S_2 = 0, \tag{17}$$

unde λ este un parametru. Cu alte cuvinte, ecuația (17) reprezintă ecuația fasciculului de sfere, avînd sferele S_1 și S_2 drept sfere de bază.

Prin orice punct al spațiului trece o sferă a fasciculului, fiind sfera ce corespunde valorii $\lambda = -\frac{p_1}{p_2}$ a parametrului fasciculului, unde p_i este puterea punctului dat în raport cu sfera $S_i (i = 1,2)$.

Observăm că centrul unei sfere a fasciculului are coordonatele

$$-\frac{\alpha_1 + \lambda\alpha_2}{1+\lambda}, \quad -\frac{\beta_1 + \lambda\beta_2}{1+\lambda}, \quad -\frac{\gamma_1 + \lambda\gamma_2}{1+\lambda},$$

deci este situat pe dreapta O_1O_2, O_i fiind centrul sferei de bază $S_i (i = 1,2)$. De aceea, dreapta O_1O_2 se numește linia centrelor fasciculului.

Dacă raportăm fasciculul de sfere la un sistem de axe carteziene ortogonale astfel încît axa Ox să coincidă cu linia centrelor, iar planul Oyz cu planul radical, ecuația fasciculului se scrie

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\frac{\alpha_1 + \lambda\alpha_2}{1+\lambda}x + \delta = 0. \qquad (17')$$

În adevăr, în acest caz avem $\beta_i = \gamma_i = 0$ (axa Ox este axa centrelor) și $\delta_1 = \delta_2$ (originea sistemului de axe fiind în planul radical, are aceeași putere în raport cu sferele S_i). În fasciculul (17'), sferele de rază nulă corespund valorilor lui λ care satisfac condiția

$$(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)^2 - \delta(1+\lambda)^2 = 0.$$

Aceste sfere se numesc *punctele limită* ale fasciculului. Valorile lui λ—presupunînd că în ecuațiile sferelor coeficienții sînt reali — sînt reale sau imaginare, după cum δ este pozitiv sau negativ. După cum punctele limită sînt imaginare, reale și distincte sau reale și confundate, fasciculul de sfere se numește *fascicul eliptic, fascicul hiperbolic, fascicul parabolic.*

Dacă una din sferele unui fascicul se reduce la un plan, acest plan este planul radical al fasciculului. În acest caz, ecuația fasciculului se scrie

$$S + \lambda\pi = 0. \qquad (17'')$$

Rețea de sfere. Se numește *rețea de sfere* totalitatea sferelor care trec prin două puncte date. Deci, o rețea de sfere este *o familie liniară de sfere cu doi parametri.*

Deoarece prin două puncte trece o dreaptă, putem lua dreapta ca axă radicală a trei sfere care nu fac parte dintr-un fascicul. Deducem că *sferele unei rețele trec prin două puncte fixe*, punctele de intersecție ale axei radicale a trei sfere din rețea — numite sfere de bază — cu una din sferele de bază. Cu alte cuvinte, rețeaua de sfere este constituită din sfere care au aceeași axă radicală, dreapta care trece prin cele două puncte date.

Observăm că un punct al axei radicale este interior sau exterior fiecăruia din sferele rețelei, deoarece el trebuie să aibă aceeași putere față de aceste sfere.

Fiind date sferele $S_i = 0$ $(i = 1,2,3)$, rețeaua de sfere avînd sferele date drept sfere de bază are ecuația

$$S_1 + \lambda S_2 + \mu S_3 = 0, \qquad (18)$$

unde λ, μ sînt parametri.

Deoarece trei sfere oarecare din rețea au aceeași axă radicală ca și sferele date, rezultă că putem lua ca sfere de bază ale rețelei trei sfere oarecare din rețea, care nu fac parte dintr-un fascicul.

Centrul unei sfere oarecare din rețeaua (18) are coordonatele

$$-\frac{\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \mu\alpha_3}{1+\lambda+\mu}, \quad -\frac{\beta_1 + \lambda\beta_2 + \mu\beta_3}{1+\lambda+\mu}, \quad -\frac{\gamma_1 + \lambda\gamma_2 + \mu\gamma_3}{1+\lambda+\mu},$$

acest punct găsindu-se în planul determinat de centrele O_1, O_2, O_3 ale sferelor de bază. Deci, centrele sferelor din rețea se găsesc în același plan, *planul centrelor.* Acest plan intersectează rețeaua (18) după o rețea de cercuri.

Printr-un punct Q al spațiului, care nu aparține axei radicale, trece un fascicul de sfere aparținînd rețelei. În adevăr, punînd condiția ca sferele rețelei (18) să treacă prin punctul $Q(x', y', z')$, deducem că între parametrii λ, μ există relația

$$S_1(x', y', z') + \lambda S_2(x', y', z') + \mu S_3(x', y', z') = 0,$$

care permite să exprimăm liniar pe unul dintre ei în funcție de celălalt. Atunci, ecuația (18) reprezintă o familie liniară de sfere cu un parametru, adică un fascicul de sfere, care — evident — aparțin rețelei date.

Cercul de bază al fasciculului trece prin punctul Q și prin punctele de bază ale rețelei. Rezultă că oricărui punct Q din spațiu, o rețea îi asociază un cerc care trece prin Q și prin punctele de bază ale rețelei.

Într-o rețea de sfere există o infinitate de plane; sînt planele care trec prin axa radicală a rețelei.

Aplicație. Sferele ortogonale sferelor unui fascicul formează o rețea. În adevăr, să presupunem că ecuația fasciculului are forma canonică (17′). O sferă oarecare

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \tag{19}$$

este ortogonala sferelor din fasciculul (17′), dacă avem

$$a\,\frac{\alpha_1 + \lambda\alpha_2}{1 + \lambda} = \frac{1}{2}\,(\delta + d);$$

această condiție este satisfăcută, oricare ar fi λ, dacă

$$a = 0,\ d = -\delta$$

Deci, sferele ortogonale sînt date de o ecuație de forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + by + cz - \delta = 0 \tag{18'}$$

și ele constituie, cînd b , c variază, o rețea de sfere care trec prin punctele limită ale fasciculului (17′).

Invers, fiind dată o rețea de sfere care trec prin două puncte P și Q, sferele ortogonale rețelei constituie un fascicul ce are ca puncte limită punctele P și Q. Fasciculul și rețeaua de sfere ortogonale sînt astfel *figuri reciproce*.

Complex de sfere. Se numește *complex de sfere* totalitatea sferelor din spațiu, cu proprietatea că puterea unui punct fix în raport cu una oarecare din sfere este constantă.

Dacă $P(x', y', z')$ este punctul fix, iar $S(x, y, z) = 0$ este ecuația unei sfere oarecare, din condiția

$$S(x', y', z') = a, \qquad (a = \text{const}).$$

putem exprima liniar unul din coeficienții ecuației sferei în funcție de ceilalți. Deci, un complex de sfere este *o familie liniară de sfere cu trei parametri.*

În particular, dacă puterea punctului P în raport cu sferele complexului este nulă, deci $S(x', y', z')=0$, atunci punctul se găsește pe orice sferă a complexului. În acest caz, complexul este constituit din totalitatea sferelor care trec printr-un punct fix.

Luînd punctul P dat ca centrul radical a patru sfere $S_i = 0$ ($i = 1,2,3,4$) care nu aparțin unei rețele, aceste sfere determină un complex de sfere de ecuație

$$S_1 + \lambda S_2 + \mu S_3 + \nu S_4 = 0, \tag{20}$$

unde λ, μ, ν sînt parametri. Sferele $S_i = 0$ ($i = 1,2,3$) se numesc sferele de bază ale complexului (20).

Orice punct al spațiului este centrul unei sfere din complex.

Dacă centrul radical al complexului (punctul fix) este originea, ecuația complexului se scrie

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda x + 2\mu y + 2\nu z + p = 0, \tag{20'}$$

unde $p = S(0,0,0) = \text{const.}$

Deoarece sferele complexului (20) au aceeași putere față de punctul P, rezultă că putem lua ca sfere de bază ale complexului patru sfere oarecare, care nu fac parte dintr-o rețea.

Printr-un punct Q al spațiului, diferit de P, trece o rețea de sfere aparținînd complexului. Proprietatea rezultă din faptul că, în acest caz, relația (20) duce la o combinație liniară între parametrii λ, μ, ν. Deoarece sferele unei rețele au o axă radicală comună, deducem că, oricărui punct Q, un complex îi asociază o dreaptă.

Fiind dat un complex de sfere, există o sferă ortogonală sferelor complexului. În adevăr, să considerăm complexul (20'). Sfera (19) este ortogonală oricărei sfere din complex, dacă

$$a\lambda + b\mu + c\nu = \frac{1}{2}(d + p);$$

condiția este satisfăcută, oricare ar fi λ, μ, ν, numai dacă

$$a = b = c = 0, \quad d = -p.$$

Deci, sfera ortogonală are ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 - p = 0,$$

fiind o sferă cu centrul în centrul radical al complexului (20'). Sfera ortogonală este reală sau imaginară, după cum centrul radical este exterior sau interior sferelor complexului. Invers, totalitatea sferelor ortogonale unei sfere date constituie un complex. Dacă complexul este constituit din sfere trecînd printr-un punct fix, atunci sfera ortogonală este de rază nulă.

Un plan care trece prin centrul radical al unui complex de sfere intersectează complexul după o rețea de cercuri ortogonale cercului de intersecție a planului cu sfera ortogonală sferelor complexului.

§ 2. SUPRAFEȚE CILINDRICE

O *suprafață* se numește *suprafață cilindrică*, sau mai simplu *cilindru*, dacă este generată de o dreaptă variabilă, care rămîne paralelă cu o direcție dată și care mai este supusă unei alte condiții (de exemplu, să întîlnească o curbă directoare dată sau să rămînă tangentă la o suprafață dată).

Fie direcția definită prin intersecția a două plane neparalele $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 0$ Atunci, ecuațiile

$$\begin{cases} \pi_1 = \lambda, \\ \pi_2 = \mu \end{cases} \tag{21}$$

definesc, cînd λ și μ variază, o dreaptă variabilă, paralelă cu direcția dată. Să presupunem că generatoarei (21) îi este impusă condiția de a întîlni o directoare fixă

$$\begin{cases} \Phi(x, y, z) = 0, \\ \Psi(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Generatoarele (21) se sprijină pe curba directoare (22), dacă sistemul format de ecuațiile (21) și (22) este compatibil (v. Cap. XIII, § 3). Eliminînd pe x, y, z între ecuațiile acestui sistem, deducem că condiția dată (generatoarele se sprijină pe o directoare) se exprimă printr-o ecuație

$$F(\lambda, \mu) = 0. \tag{22'}$$

Ecuația cilindrului, care se obține prin eliminarea parametrilior λ și μ între ecuațiile (21) și (22'), este deci de forma

$$F(\pi_1, \pi_2) = 0, \tag{23}$$

adică este dată printr-o relație între două polinoame π_1 și π_2, liniare în x, y, z.

Dacă generatoarea este paralelă cu axa Oz, deci ecuațiile ei sînt de forma

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv x = \lambda, \\ \pi_2 \equiv y = \mu, \end{cases} \tag{21'}$$

ceea ce se poate totdeuna realiza printr-o rotație de axe, rezultă că ecuația *cilindrului cu generatoarele paralele cu axa Oz* este de forma

$$f(x, y) = 0. \tag{23'}$$

Cilindrii se bucură de *proprietatea:*

Planul tangent la cilindru într-un punct este același în toate punctele generatoarei care trece prin punctul dat.

În adevăr, fie cilindrul (23'). Ecuația planului tangent într-un punct $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al cilindrului este

$$(x - x_0) F_{x_0} + (y - y_0) F_{y_0} = 0;$$

și dacă P_0 se deplasează pe generatoarea

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \\ z = z_0 + t, \end{cases}$$

ecuația planului tangent nu se schimbă.

Aplicație. Cilindrii de gradul doi. Să găsim ecuația cilindrului ale cărui generatoare sînt paralele cu axa *Oz* și se sprijină pe conica cu centru

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon' = 0, & (\varepsilon,\ \varepsilon' = \pm 1) \\ z = 0, \end{cases} \tag{24}$$

din planul *Oxy*. Generatoarele care sînt date de ecuațiile (21') se sprijină pe conica (24), dacă sistemul format din ecuațiile (21') și (24) este compatibil. Condiția de compatibilitate se găsește ușor, introducînd pe x, y, z, obținute din ultimile trei ecuații ale sistemului în prima ecuație. Această condiție este

$$\frac{\lambda^2}{a^2} + \varepsilon \frac{\mu^2}{b^2} + \varepsilon' = 0.$$

Eliminînd pe λ, μ între această ecuație și (21'), găsim ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon' = 0, \tag{25}$$

care reprezintă *un cilindru (eliptic) imaginar* ($\varepsilon = \varepsilon' = +1$) sau *eliptic* ($\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = -1$), sau *hiperbolic* ($\varepsilon = \varepsilon' = -1$, sau $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$, după cum hiperbola directoare are ca axă transversă axa *Ox*, respectiv axa *Oy*). În figura 4 s-a reprezentat un cilindru eliptic, iar în figura 5 un cilin-

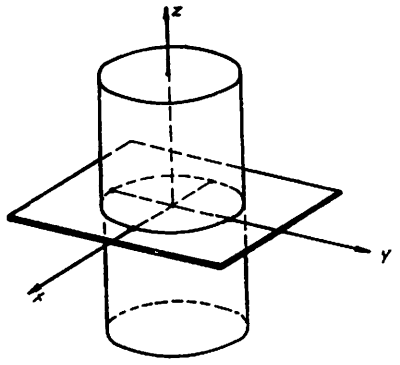


Fig. 4

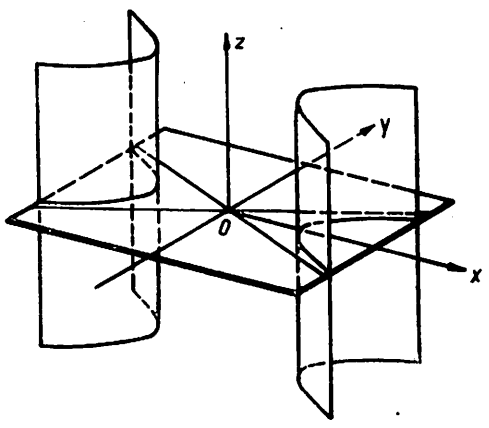


Fig. 5

dru hiperbolic, avînd axa *Ox* ca axă transversă. Planele de coordonate *Oyz* și *Ozx* sînt plane de simetrie. În adevăr, dacă punctul $P(x, y, z)$ se găsește pe cilindrul (25), atunci punctele $P'(x, -y, z)$ și $P''(-x, y, z)$ sînt de asemenea pe suprafață. Deci, cilindrul (25) admite și o axă de simetrie, axa *Oz*, intersecția planelor de simetrie *Oyz* și *Ozx*. De asemenea planul $z = h$ (h oarecare) este un plan de simetrie. Deci, orice punct de pe axa *Oz* este centrul de simetrie pentru cilindrul (25).

Dacă în ecuația cilindrului eliptic avem $a = b$, cilindrul este generat de o paralelă la *Oz* care se rotește în jurul lui *Oz*, rămînînd la distanță egală de *Oz*: este *cilindrul de rotație* sau *cilindrul circular drept*.

Dacă directoarea este parabola

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ z = 0 \end{cases} \tag{24'}$$

din planul *Oxy*, prin aceeași metodă ca în cazul precedent, se găsește că, pentru ca generatoarele (21') să se sprijine pe parabola (24') trebuie să fie îndeplinită condiția

$$\mu^2 = 2p\lambda.$$

Eliminînd pe λ și μ între această ecuație și (21'), obținem ecuația

$$y^2 = 2px, \tag{25'}$$

care reprezintă un *cilindru parabolic* cu generatoarele paralele cu axa *Oz* (fig. 6) Din studiul ecuației (25') rezultă că atît planul $y = 0$ cît și planele $z = h$ sînt plane de simetrie. Deci, orice dreaptă

$$y = 0, \qquad z = h$$

este o axă de simetrie pentru această suprafață.

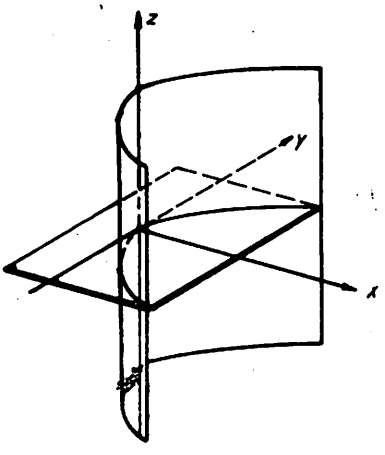


Fig. 6

Toate secțiunile cilindrilor (25), (25') cu plane paralele cu *Oxy* sînt egale cu intersecția cilindrului cu planul *Oxy*.

Avem deci următorul *rezultat*:

Există patru tipuri de cilindri de gradul doi, reprezentați de una din ecuațiile canonice (25) și (25'), și anume: cilindrul (eliptic) imaginar ($\varepsilon = \varepsilon' = +1$), cilindrul eliptic ($\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = -1$), cilindrul hiperbolic ($\varepsilon = \varepsilon' = -1$, sau $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$) și cilindrul parabolic.

§ 3. SUPRAFEȚE CONICE

O suprafață se numește *suprafață conică*, sau simplu *con*, dacă este generată de o dreptă variabilă care trece printr-un punct fix, numit *vîrf*, și care mai este supusă unei alte condiții (de exemplu, să întîlnească o curbă directoare dată sau să rămînă tangentă la o suprafață dată). Fie *V* vîrful conului definit de intersecția planelor

$$\pi_1 = 0, \qquad \pi_2 = 0, \qquad \pi_3 = 0, \tag{26}$$

care nu fac parte dintr-un fascicul. Generatoarele sînt dreptele variabile

$$\begin{cases} \pi_1 = \lambda\pi_3, \\ \pi_2 = \mu\pi_3 \end{cases} \tag{26'}$$

care trec prin V (λ, μ fiind parametri). Exprimînd că generatoarele sînt supuse unei alte condiții, de exemplu, că întîlnesc o directoare fixă (22), se găsește că parametrii λ, μ din ecuațiile generatoare satisfac o relație de forma (22').

Ecuația conului, care se obține eliminînd pe λ și μ între ecuațiile (22') și (26'), este deci de forma

$$F\left(\frac{\pi_1}{\pi_3}, \frac{\pi_2}{\pi_3}\right) = 0, \tag{27}$$

adică este o ecuație omogenă

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \tag{27'}$$

în trei polinoame π_1, π_2, π_3 liniare în x, y, z, planele (26) nefăcînd parte dintr-un fascicul.

Dacă vîrful conului are coordonatele (x_0, y_0, z_0), ecuațiile planelor (26) care trec prin vîrful conului pot fi

$$\pi_1 \equiv x - x_0 = 0, \quad \pi_2 \equiv y - y_0 = 0, \quad \pi_3 \equiv z - z_0 = 0$$

și ecuația conului este de forma

$$f(x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0) = 0. \tag{27''}$$

Totdeauna este însă posibil de realizat, printr-o translație, ca vîrful conului să fie originea axelor de coordonate. Rezultă că o ecuație

$$F(x, y, z) = 0, \tag{27'''}$$

omogenă în variabilele x, y, z, reprezintă un con cu vîrful în origine.

Conurile se bucură de *proprietatea*:

Planul tangent într-un punct al unui con este același în toate punctele generatoarei care trece prin punctul dat.

În adevăr, fie conul (27'''), avînd vîrful în originea axelor de coordonate. Ecuația planului tangent în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al conului este

$$xF_{x0} + yF_{y0} + zF_{z0} = 0. \tag{28}$$

Deoarece funcția $F(x, y, z)$ fiind omogenă și de gradul r, în virtutea teoremei lui Euler, avem

$$x_0F_{x_0} + y_0F_{y_0} + z_0F_{z_0} = rF(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Se știe că dacă funcția $F(x, y, z)$ este omogenă și de gradul r, atunci derivatele sale parțiale F_x, F_y, F_z sînt omogne și de gradul $r - 1$. Rezultă că ecuația planului tangent nu se schimbă, dacă punctul Q (kx_0, ky_0, kz_0) se va deplasa pe generatoarea OP_0.

Aplicație. Conuri de gradul doi. Să găsim ecuația conului avînd vîrful în originea de coordonate și ale cărui generatoare se sprijină pe conica cu centru:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \varepsilon\dfrac{y^2}{b^2} + \varepsilon' = 0, \\ x = 0, \end{cases} \qquad (\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1). \tag{29}$$

Vîrful conului, care este luat în originea axelor, este dat de intersecția planelor de coordonate, încît generatoarele au ecuațiile

$$\begin{cases} x = \lambda z, \\ y = \mu z. \end{cases} \tag{29'}$$

Generatoarea (29') trebuind să se sprijine pe conica (29), înseamnă că generatoarea și conica au un punct comun, ale cărui coordonate verifică ecuațiile (29) și (29'). Generatoarele se vor sprijini pe directoarea (29), dacă sistemul format din ecuațiile (29) și (29') este compatibil. Ultimele trei din aceste ecuații ne dau coordonatele punctului comun, încît, scriind că aceste coordonate verifică prima ecuație a sistemului, obținem condiția de compatibilitate

$$c^2\left(\frac{\lambda^2}{a^2} + \varepsilon\frac{\mu^2}{b^2}\right) + \varepsilon' = 0, \tag{29''}$$

care este expresia analitică a legii după care se mișcă generatoarea. Eliminînd pe λ și μ între ecuațiile (29') și (29''), obținem ecuația conului

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon\frac{y^2}{b^2} + \varepsilon'\frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{29'''}$$

care este o ecuație omogenă de gradul al doilea în x, y, z. Deoarece cazurile pentru care $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$ și $\varepsilon = \varepsilon' = -1$ pot fi reduse la cazul, $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = -1$ printr-o rotație de axe, rezultă că avem de considerat numai cazurile $\varepsilon = \varepsilon' = +1$ și $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = -1$. Deci, un con pătratic (de gradul al doilea) are ecuația canonică

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon\frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{30}$$

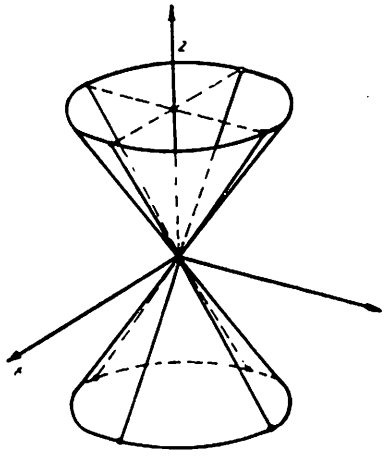


Fig. 7

Ecuația (30) reprezintă un *con imaginar* ($\varepsilon = +1$) sau un *con real* ($\varepsilon = -1$) (fig. 7). Se observă că singurul punct real al conului imaginar este originea axelor. De asemenea, pentru conul definit de ecuația (30), planele de coordonate sînt plane de simetrie. În adevăr, dacă punctul $P(x, y, z)$ se găsește pe con, atunci și punctele $P'(-x, y, z)$, $P''(x, -y, z)$, $P'''(x, y, -z)$, simetricele lui P față de Oyz, Oxz, Oxy, sînt pe suprafață. Deci, axele de coordonate și originea axelor sînt respectiv axe de simetrie și centru de simetrie pentru conul (30).

Pentru a ne da seama mai bine de forma conului real (30), putem studia secțiunile sale cu plane paralele cu planele de coordonate.

Să considerăm secțiunile conului (real) prin plane paralele cu planul Oxy. Aceste secțiuni sînt date de ecuațiile

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\dfrac{a^2h^2}{c^2}} + \dfrac{y^2}{\dfrac{b^2h^2}{c^2}} - 1 = 0, \\ z = h \end{cases}$$

și sînt elipse ale căror semiaxe

$$\frac{ah}{c}, \frac{bh}{c}$$

cresc o dată cu h, raportul lor rămînînd constant și egal cu $\frac{a}{b}$. De aceea, aceste elipse se zic elipse asemenea între ele.

Dacă $a = b$, secțiunile sînt cercuri. În acest caz, conul se numește *con circular*, axa Oz fiind axă de rotație a conului,

Intersectînd conul cu plane paralele cu planul Oyz sau cu planul Ozx, obținem ecuațiile

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{\dfrac{c^2h^2}{a^2}} - \dfrac{y^2}{\dfrac{b^2h^2}{a^2}} - 1 = 0, \\ x = h \end{cases} \quad \text{respectiv} \quad \begin{cases} \dfrac{z^2}{\dfrac{c^2h^2}{b^2}} - \dfrac{x^2}{\dfrac{c^2h^2}{b^2}} - 1 = 0, \\ y = h \end{cases}$$

care reprezintă hiperbole, asemenea între ele, cu axa transversală paralelă cu Oz. Secțiunea conului real (30) cu planul Oyz sau cu planul Ozx este formată din dreptele

$$\begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \\ x = 0 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

respectiv din dreptele

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Dacă directoarea este parabola

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ z = 0, \end{cases}$$

se găsește, prin aceeași metodă ca în cazul precedent, că, pentru ca generatoarele (29′) să se sprijine pe parabola dată, trebuie să fie îndeplinită condiția

$$c\mu^2 - 2p\lambda = 0.$$

Eliminînd pe λ și μ între aceasta și ecuațiile (29′), obținem ecuația

$$cy^2 - 2pxz = 0, \tag{30′}$$

care reprezintă un con pătratic.

Secțiunile conului (30′) cu plane paralele cu planul Oxy sau cu planul Oyz sînt parabolele

$$\begin{cases} y^2 = \frac{2ph}{c}x, \\ z = h, \end{cases} \quad \text{respectiv} \quad \begin{cases} y^2 = \frac{2ph}{c}z, \\ x = h, \end{cases}$$

avînd axele de simetrie paralele cu Ox, respectiv cu Oz (fig. 8). Intersecțiile axelor de simetrie ale acestor parabole de secțiune se găsesc pe dreapta de parametri directori 1, 0, 1. Deci, dreapta

$$x - z = 0, \quad y = 0$$

este o axă de simetrie.

Secțiunile cu plane paralele cu planul Ozx sînt hiperbolele echilatere

$$\begin{cases} xz = \dfrac{ch^2}{2p}, \\ y = h \end{cases}$$

raportate la asimptote, asimptotele fiind paralele cu Ox și Oz. Secțiunea cu planul Ozx este formată din generatoarele

$$\begin{cases} z = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

ceea ce înseamnă că axele de coordonate Ox și Oz sînt generatoare ale conului.

Dacă efectuăm rotația

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X + Z), \\ y = Y, \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-X + Z), \end{cases}$$

ecuația (30′) se transformă în ecuația

$$\frac{X^2}{c} + \frac{Y^2}{p} - \frac{Z^2}{c} = 0, \quad (30'')$$

care este de forma (30).

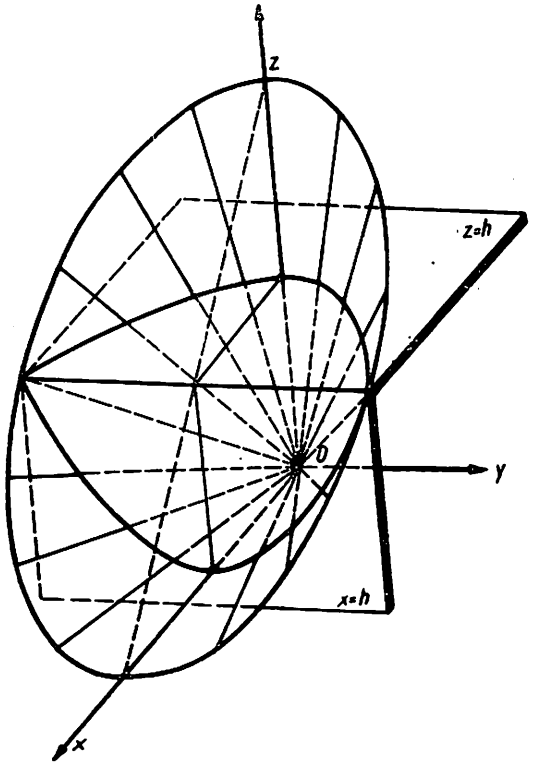


Fig. 8

Avem deci următorul *rezultat*

Există două tipuri de conuri pătratice (de gradul al doilea), avînd ecuațiile canonice (30): conul real ($\varepsilon = -1$) **și conul imaginar** ($\varepsilon = +1$).

§ 4. SUPRAFEȚE DE ROTAȚIE

Se numește *suprafață de rotație* o suprafață generată de o curbă plană care se rotește în jurul unei drepte din planul în care este situată, numită *axă de rotație*.

Orice punct al curbei generatoare descrie un cerc cu centrul pe axa de rotație, planul cercului fiind perpendicular pe axă. Aceste cercuri, care se obțin ca secțiuni ale suprafeței cu plane perpendiculare pe axa de rotație, se numesc *paraleli* ai suprafeței de rotație. Planele care trec prin axa de rotație intersectează suprafața după curbe egale între ele. De altfel, planul intersectează suprafața după două curbe simetrice față de axa de rotație. Aceste curbe, care sînt egale cu curba generatoare, se numesc *curbe meridiane* ale suprafeței de rotație.

O suprafață de rotație poate fi generată și de un cerc variabil, al cărui plan se mișcă rămînînd perpendicular pe o dreaptă pe care se deplasează centrul cercului, cercul variabil fiind supus în plus unei anumite condiții (de exemplu, de a se sprijini pe o curbă aflată într-unul din planele care trec prin dreapta dată).

Să presupunem că axa de rotație trece printr-un punct fix $P_0(x_0, y_0, z_0)$ și are parametrii directori (l, m, n). Un paralel (variabil) putînd fi considerat ca intersecția unui plan perpendicular pe axa de rotație cu o sferă cu centrul în punctul P_0, poate fi reprezentat prin ecuațiile

$$\begin{cases} S \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = \lambda. \\ \pi \equiv lx + my + nz = \mu, \end{cases}$$

λ și μ fiind doi parametri variabili. Exprimînd că acest paralel întîlnește meridianul

$$\begin{cases} \Phi(x, y, z) = 0, \\ \Psi(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

rezultă că λ și μ sînt legați printr-o anumită relație

$$F(\lambda, \mu) = 0.$$

Eliminînd pe λ și μ între ecuațiile paralelului generator și relația de compatibilitate, obținem *ecuația suprafeței de rotație* sub forma

$$F(S, \pi) = 0. \tag{31}$$

Dacă axa Oz este axa de rotație a suprafeței, putem considera că ecuațiile paralelului generator sînt

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \lambda, \\ z = \mu, \end{cases}$$

de unde rezultă că ecuația suprafeței de rotație în jurul axei Oz are o ecuație de forma

$$F(x^2 + y^2, z) = 0. \tag{31'}$$

Rezolvînd în raport cu $x^2 + y^2$, sau în raport cu z, obținem ecuația

$$x^2 + y^2 = \varphi(z), \tag{31''}$$

respectiv ecuația

$$z = f(x^2 + y^2), \qquad (31''')$$

unde φ este o anumită funcție de z, iar f o anumită funcție de $x^2 + y^2$.

Din ecuația (31''') se poate obține o reprezentare parametrică a unei suprafețe de rotație de axă z, considerînd ca parametri raza u a paralelului generator și unghiul v pe care proiecția — pe planul Oxy — a razei punctului curent P al paralelului îl face cu axa Ox (fig. 9). În planul uOz, curba meridiană are ecuația

$$z = f(u),$$

încît P are coordonatele

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = f(u). \end{cases} \qquad (32)$$

Cum x, y, z sînt funcții de doi parametri u și v, rezultă că *ecuațiile* (32) reprezintă *ecuațiile parametrice* ale suprafeței de rotație în jurul axei Oz. Curbele coordonate $u = \text{const.}$ sînt paralelii, iar $v = \text{const.}$ sînt curbele meridiane.

Dacă în (32) eliminăm pe u și v regăsim ecuația carteziană (31'') a suprafeței de rotație.

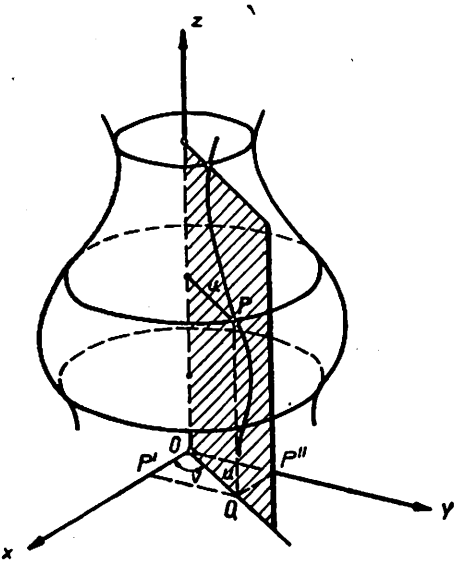


Fig. 9

Aplicații. 1) **Cilindrul de rotație.** *Un cilindru de rotație* este o suprafață de rotație, a cărei curbă meridiană este o dreaptă paralelă cu axa de rotație. Distanța între dreaptă și axa de rotație se numește *raza cilindrului*.

Luînd ca axă Oz axa de rotație, cercul generator și dreapta directoare au respectiv ecuațiile

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda, \\ z = \mu; \end{cases} \qquad \text{d}: \begin{cases} x - a = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

unde a este raza cilindrului.

Punînd condiția ca cercul generator să se sprijine pe directoare, găsim că între parametrii λ și μ există relația

$$a^2 + \mu^2 = \lambda.$$

Eliminînd pe λ și μ între această relație și ecuațiile cercului generator, obținem ecuația cilindrului de rotație:

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0. \qquad (33)$$

Deci, *un cilindru de rotație este o suprafață algebrică de gradul al doilea.* Prin analogie cu ecuația (33) putem considera ecuația

$$x^2 + y^2 + a^2 = 0. \tag{33'}$$

Convenim să spunem că această ecuație reprezintă un *cilindru imaginar de rotație.*

2) **Conul de rotație.** Un *con de rotație* este o suprafață de rotație, a cărei curbă meridiană este o dreaptă care intersectează axa de rotație într-un punct fix, numit *vîrful conului.*

Luînd ca axă *Oz* axa de rotație și originea în vîrful conului, cercul generator și dreapta directoare au respectiv ecuațiile

$$g: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda, \\ z = \mu; \end{cases} \qquad d: \begin{cases} cx - az = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Între parametrii λ și μ există relația

$$\left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right)\mu^2 - \lambda = 0,$$

care exprimă faptul că cercul generator se sprijină pe directoare.

Eliminînd pe λ și μ între această relație și ecuațiile cercului generator, deducem că ecuația conului de rotație este

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{34}$$

Deci, *un con de rotație este o suprafață algebrică de gradul al doilea.* Prin analogie cu ecuația (34) putem considera ecuația

$$x^2 + y^2 + a^2z^2 = 0, \tag{34'}$$

despre care convenim să spunem că reprezintă un con imaginar de rotație.

3) **Cuadrice de rotație.** În cazul în care, în ecuația (31″), $\varphi(z)$ este un polinom de gradul al doilea în z, suprafața de rotație este o suprafață algebrică de gradul al doilea, adică o *cuadrică.* Curba meridiană din planul *xOz* a acestei suprafețe de rotație are ecuațiile

$$\begin{cases} x^2 = \varphi(z), \\ y = 0. \end{cases} \tag{31^{IV}}$$

Dacă $\varphi(z)$ este un pătrat perfect:

$$\varphi(z) = \varepsilon(az + b)^2, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

curba meridiană (31^{IV}) este degenerată și suprafața este un con de rotație sau un cilindru de rotație, după cum $a \neq 0$ sau $a = 0$.

Dacă $\varphi(z)$ nu este un pătrat perfect, curba meridiană (31^{IV}) nu este degenerată. Însă $\varphi(z)$ poate avea una din formele conice

$$\varphi(z) = \varepsilon\left(\frac{a^2}{b^2}z^2 + \tau\right) \quad \text{sau} \quad \varphi(z) = 2pz, \qquad (\varepsilon, \tau = \pm 1),$$

după cum $\varphi(z)$ admite două rădăcini distincte (imaginare sau reale), sau una din rădăcini este infinită. Obținem astfel alte tipuri de cuadrice de rotație reprezentate de ecuațiile ($\varepsilon\tau = \varepsilon'$)

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \varepsilon\frac{z^2}{c^2} + \varepsilon' = 0, \qquad (\varepsilon,\ \varepsilon' = \pm 1) \tag{35}$$

și

$$x^2 + y^2 = 2pz. \tag{35'}$$

În adevăr, dacă curba meridiană — din planul xOz — reprezintă o conică nedegenerată, ecuațiile ei pot fi reduse la una din formele canonice

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \varepsilon\dfrac{z^2}{c^2} + \varepsilon' = 0, \\ y = 0; \end{cases} \quad \text{respectiv} \quad \begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0, \end{cases}$$

reprezentînd o elipsă imaginară ($\varepsilon = \varepsilon' = +1$) sau reală ($\varepsilon = +1,\ \varepsilon' = -1$), o hiperbolă pentru care Oz este axă transversă ($\varepsilon = -1,\ \varepsilon' = +1$) sau o hiperbolă pentru care Oz este axă netransversă ($\varepsilon = \varepsilon' = -1$), respectiv o parabolă. Punînd condiția că paralelul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \lambda, \\ z = \mu \end{cases}$$

se sprijină pe curba meridiană, deducem că între parametrii λ, μ există relația

$$\frac{\lambda^2}{a^2} + \varepsilon\frac{\mu^2}{c^2} + \varepsilon' = 0, \text{ respectiv } \lambda^2 = 2p\mu,$$

care se obține prin eliminarea lui x, y, z între ecuațiile paralelului și ale curbei meridiane. Eliminînd pe λ și μ între relația de compatibilitate și ecuațiile paralelului, obținem ecuația (35), respectiv (35') a cuadricei de rotație.

Dacă $\varepsilon = \varepsilon' = +1$, ecuația (35) reprezintă un *elipsoid imaginar de rotație*.

Dacă $\varepsilon = +1,\ \varepsilon' = -1$, ecuația (35) reprezintă un *elipsoid de rotație*; este suprafața generată prin rotirea unei elipse în jurul uneia din axele sale.

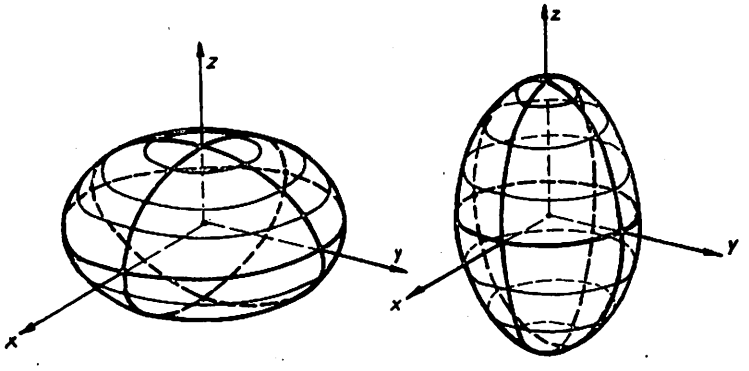


Fig. 10

Elipsoidul se zice *turtit* sau *alungit*, după cum $a > c$ sau $a < c$, adică după cum rotirea elipsei se face în jurul axei mici sau în jurul axei mari (fig. 10). Dacă $a = c$, elipsoidul devine o sferă de rază a și cu centrul în origine.

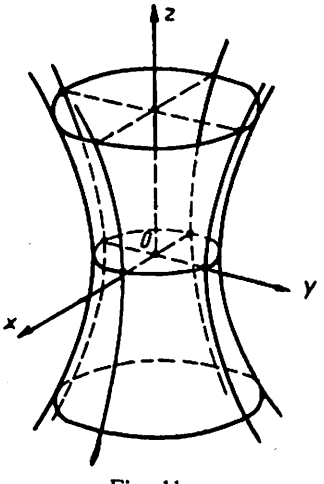


Fig. 11

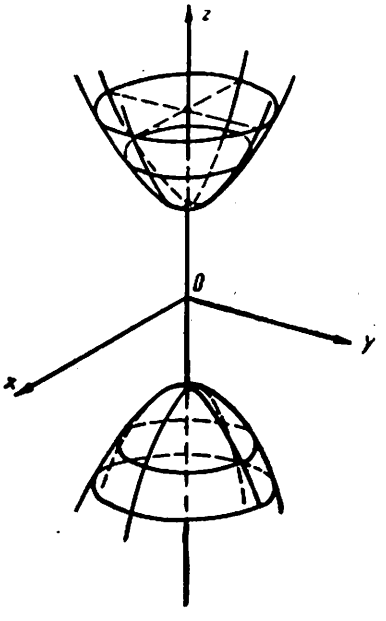


Fig. 12

Dacă $\varepsilon = \varepsilon' = -1$, deci suprafața este generată prin rotirea unei hiperbole în jurul axei sale netransverse, ecuația (35) reprezintă un *hiperboloid de rotație cu o pînză* (fig. 11).

Dacă $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$, ecuația (35) reprezintă un *hiperboloid de rotație cu două pînze;* este suprafața generată prin rotirea unei hiperbole în jurul axei sale transverse (fig. 12).

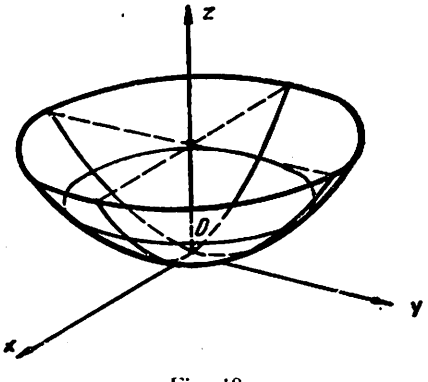


Fig. 13

Ecuația (35′) (fig. 13) reprezintă un *paraboloid de rotație*; este suprafața generată prin rotirea unei parabole în jurul axei sale.

Avem deci următorul *rezultat*:

Există nouă tipuri de cuadrice de rotație: cilindrul de rotație real sau imaginar având ecuația (33), respectiv (33′); conul de rotație real sau imaginar dat de ecuația canonică (34), respectiv (34′); elipsoidul de rotație real sau imaginar, având ecuația canonică (35), în care $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = -1$, respectiv $\varepsilon = \varepsilon' = +1$;

hiperboloidul de rotație cu una sau cu două pînze, dat de ecuația canonică (35), în care $\varepsilon = \varepsilon' = -1$, $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$ și paraboloidul de rotație, avînd ecuația canonică (35').

§ 5. SUPRAFEȚE RIGLATE ȘI DESFĂȘURABILE

Se numește *suprafață riglată* o suprafață generată prin mișcarea unei drepte, după o anumită lege. Dreptele cu care coincide succesiv dreapta variabilă cînd generează suprafața riglată se numesc *generatoare* ale suprafeței.

În general, o suprafață riglată este suprafața generată de o dreaptă variabilă care depinde de un parametru. Cu alte cuvinte, punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ prin care trece dreapta variabilă descrie o curbă C_0 ale cărei ecuații sînt

$$C_0 : x = x_0(u), \quad y = y_0(u), \qquad z = z_0(u), \tag{36}$$

direcția generatoarei variind o dată cu parametrul u de pe curba C_0. Curba C_0, pe care se sprijină generatoarele suprafeței riglate, se numește *curba directoare* a suprafeței. Ecuațiile generatoarei sînt deci

$$\frac{x - x_0(u)}{l(u)} = \frac{y - y_0(u)}{m(u)} = \frac{z - z_0(u)}{n(u)}.$$

Egalînd cu v aceste rapoarte, obținem ecuațiile parametrice ale suprafeței riglate

$$\begin{aligned} x &= x_0(u) + vl(u), \\ y &= y_0(u) + vm(u), \\ z &= z_0(u) + vn(u). \end{aligned} \tag{37}$$

Rezultă că *o suprafață este riglată, dacă admite o reprezentare parametrică (exprimată în funcție de doi parametri u, v) astfel încît ecuațiile parametrice sînt liniare în raport cu unul din parametri.*

Observăm că dînd lui u o valoare constantă u_0, ecuațiile (37) reprezintă dreapta

$$\frac{x - x(u_0)}{l(u_0)} = \frac{y + y(u_0)}{m(u_0)} = \frac{z - z(u_0)}{n(u_0)},$$

care este o generatoare a suprafeței riglate. Dîndu-i lui u o altă valoare u_1, obținem o altă generatoare. Deci, *curbele coordonate u = const. ale suprafeței riglate (37) sînt generatoarele suprafeței.*

Aceste generatoare intersectează curbele coordonate v = const.; pentru $v = 0$, obținem curba directoare C_0 descrisă de punctul P_0, pe care se sprijină generatoarele.

În particular, dacă l, m, n sînt constante, generatoarele suprafeței riglate (37) păstrează aceeași direcție. Suprafața riglată este un *cilindru.*

Dacă x_0, y_0, z_0 sînt constante, deci curba directoare C_0 degenerează într-un punct fix $P_0(x_0, y_0, z_0)$, generatoarele suprafeței trec prin P_0. Suprafața riglată este un *con* cu vîrful în P_0.

Dacă reprezentarea parametrică a suprafeței riglate este dată prin ecuații liniare în fiecare din cei doi parametri, suprafața se numește *dublu riglată*. Ecuațiile parametrice ale unei suprafețe dublu riglate sînt de forma

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1u + v(l_0 + l_1u); \\ y &= b_0 + b_1u + v(m_0 + m_1u); \\ z &= c_0 + c_1u + v(n_0 + n_1u), \end{aligned} \tag{38}$$

unde $a_0, a_1, \ldots, n_0, n_1$ sînt constante. Putem rezolva, în general, ecuațiile (38) în raport cu u, v și produsul uv; în acest caz, determinantul

$$\begin{vmatrix} a_1 & l_0 & l_1 \\ b_1 & m_0 & m_1 \\ c_1 & n_0 & n_1 \end{vmatrix} \tag{38'}$$

este nenul. Aplicînd regula lui Cramer, expresiile care se obțin pentru u, v, uv sînt liniare în x, y, z. Egalînd produsul dintre expresiile pentru u și v cu expresia obținută pentru uv, se găsește că ecuația carteziană a suprafeței este o ecuație algebrică de gradul al doilea în x, y, z. Deci, ca rezultat al eliminării lui u, v între ecuațiile (38) se obține o ecuație de gradul al doilea în x, y, z. Așadar, *o suprafață dublu riglată este o cuadrică.*

Dacă determinantul (38′) este nul (în particular, dacă $l_1 = m_1 = n_1 = 0$), ecuațiile (38) reprezintă un plan.

În adevăr, în acest caz există trei constante α, β, γ astfel încît

$$\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = 0, \quad \alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0, \quad \alpha l_1 + \beta m_1 + \gamma n_1 = 0.$$

Notînd $\alpha a_0 + \beta b_0 + \gamma c_0 = -\delta$, variabilele x, y, z din (38) satisfac ecuația planului

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

Însă un plan poate fi generat prin mișcarea unei drepte într-o infinitate de moduri: de exemplu, planul poate fi generat prin mișcarea unei drepte care întîlnește două drepte oarecare ale planului. Rezultă că *planul este o suprafață riglată într-o infinitate de moduri.*

Parametrii directori ai tangentei în P la curba $v = \text{const.}$ sînt:

$$x_u = x_0' + vl', \quad y_u = y_0' + vm', \quad z_u = z_0' + vn',$$

accentele indicînd derivate în raport cu variabila u, iar ai tangentei în P la curba $u = \text{const.}$ sînt:

$$x_v = l, \quad y_v = m, \quad z_v = n.$$

Deci, tangenta în P la curba $u = \text{const.}$ coincide cu generatoarea care trece prin P. Rezultă că

Planul tangent într-un punct al unei suprafețe riglate conține generatoarea ce trece prin acel punct.

Pe de altă parte, parametrii directori A, B, C ai normalei planului tangent trebuie să satisfacă condițiile (16) din capitolul XIII:

$$\begin{cases} Ax_u + By_u + Cz_u = 0, \\ Ax_v + By_v + Cz_v = 0, \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} Ax_0' + By_0' + Cz_0' + v(Al' + Bm' + Cn') = 0 \\ Al + Bm + Cn = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Ținînd seama că planul tangent conține generatoarea care trece prin punctul P, va trece și prin punctul P_0 de intersecție a generatoarei cu curba directoare C_0 $(v = 0)$ descrisă de punctul P_0. Deci, parametrii directori A, B, C ai planului satisfac și condiția

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Eliminînd pe A, B, C între această ecuație și ecuațiile (39), obținem ecuația planului tangent într-un punct P, avînd coordonatele (37):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0' + vl' & y_0' + vm' & z_0' + vn' \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

Punînd în evidență planele

$$\pi_1 = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0, \quad \pi_2 = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l' & m' & n' \\ l & m & n \end{vmatrix},$$

ecuația planului tangent se mai scrie

$$\pi_1 + v\pi_2 = 0. \tag{39'}$$

Deci, presupunînd $u = \text{const.}$ și lăsînd pe v variabil, punctul P descrie o generatoare a suprafeței riglate, iar planul tangent în P descrie fasciculul de plane (39'), avînd ca axă generatoarea care trece prin P. Deducem că atunci cînd v variază de la $-\infty$ la $+\infty$, planul tangent descrie fasciculul (39') (fig. 14).

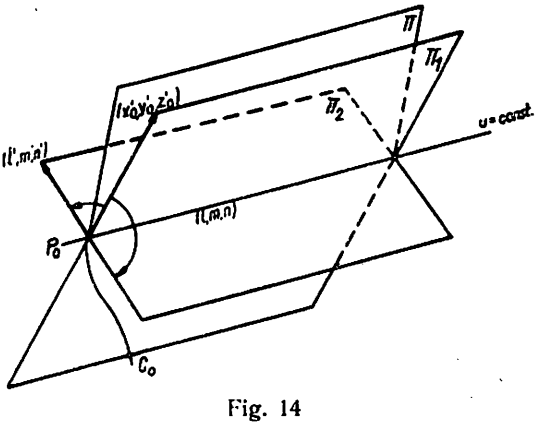


Fig. 14

Putem deci enunța *proprietatea:*

Dacă un punct P descrie o generatoare a suprafeței riglate, planul tangent în P la suprafață se rotește de 180° în jurul generatoarei.

Aplicație. Suprafețe desfășurabile. O suprafață riglată se numește *desfășurabilă*, dacă planul tangent este același de-a lungul unei generatoare oarecare a suprafeței *.

Aceasta se întîmplă dacă, păstrînd pe u constant și lăsînd pe v variabil, planul tangent în P, definit de ecuațiile (39), este independent de v; în acest caz avem relațiile:

$$\begin{aligned} Ax'_0 + By'_0 + Cz'_0 &= 0, \\ Al + Bm + Cn &= 0, \\ Al' + Bm' + Cn' &= 0. \end{aligned} \tag{39''}$$

Eliminînd pe A, B, C din sistemul (39''), rezultă

Teorema. Pentru ca o suprafață riglată (37) să fie desfășurabilă, este necesar și suficient să avem (oricare ar fi v)

$$\begin{vmatrix} x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0. \tag{40}$$

O clasificare a suprafețelor desfășurabile este dată de:

Teorema. O suprafață desfășurabilă poate fi cilindru, con sau poate fi generată de tangentele unei curbe strîmbe.

În adevăr, în particular, condiția (40) este satisfăcută sau dacă l, m, n sau x_0, y_0, z_0 sînt constante, sau dacă parametrii l, m, n sînt proporționali cu derivatele lui x_0, y_0, z_0 în raport cu u; în primele cazuri, direcțiile x'_0, y'_0, z'_0 și l', m', n' sînt nedeterminate.

Fie cazul cînd l, m, n sînt constante. Atunci, suprafața riglată este generată de o dreaptă care se mișcă paralel cu o direcție dată. Deci, suprafața

---

* Definiția nu contrazice proprietatea precedentă, deoarece și despre planul tangent în lungul unei generatoare a unei suprafețe desfășurabile putem spune că se rotește în lungul generatoarei, *rotația fiind însă nulă* (unghiul de rotație este nul pentru deplasarea pe orice generatoare a punctului de contact al planului tangent).

desfășurabilă este un *cilindru* sau o *suprafață cilindrică* *. În acest caz, direcțiile generatoarelor sînt date de primele două ecuații ale sistemului (39″).

Să presupunem că în formulele (40) coordonatele x_0, y_0, z_0 sînt constante; atunci, generatoarea trece prin punctul fix $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Suprafața este un *con* cu vîrful în punctul P_0. În acest caz, direcțiile generatoarelor sînt date de ultimele două ecuații ale sistemului (39″).

Fie acum cazul cînd parametrii l, m, n sînt proporționali cu derivatele în raport cu variabila u a funcțiilor $x_0(u), y_0(u), z_0(u)$. Scriind ecuațiile (36) ale curbei directoare C_0 astfel:

$$x = f(u), \quad y = g(u), \quad z = h(u), \tag{41}$$

rezultă că

$$\frac{l}{f'(u)} = \frac{m}{g'(u)} = \frac{n}{h'(u)},$$

adică generatoarele la această suprafață desfășurabilă coincid cu tangentele la curba directoare C_0. Deci, suprafața desfășurabilă este generată de tangentele la o curbă strîmbă C_0 și are reprezentarea parametrică

$$\begin{aligned} x &= f(u) + vf'(u); \\ y &= g(u) + vg'(u), \\ z &= h(u) + vh'(u). \end{aligned} \tag{42}$$

Conurile și cilindrii apar deci ca suprafețe desfășurabile, pentru care curba C_0 se reduce la un punct aflat la distanță finită sau la infinit.

Relativ la suprafața desfășurabilă (42), să facem observația că pentru $v = 0$, avem $A = B = C = 0$. Într-adevăr, pentru curba $v = 0$, parametrii

---

* Dacă direcțiile (l, m, n) și (l', m', n') sînt paralele, în care caz condiția (40) este satisfăcută, direcția (l, m, n) este o direcție fixă. În adevăr, această condiție se scrie

$$\frac{l'}{l} = \frac{m'}{m} = \frac{n'}{n},$$

încît, integrînd și notînd cu l_0, m_0, n_0 constantele de integrare, obținem relațiile

$$\lg \frac{l}{l_0} = \lg \frac{m}{m_0} = \lg \frac{n}{n_0},$$

de unde rezultă că

$$\frac{l}{l_0} = \frac{m}{m_0} = \frac{n}{n_0}.$$

Deci, direcția (l, m, n) este paralelă cu direcția fixă (l_0, m_0, n_0), adică direcția (l, m, n) este fixă.

directori A, B, C ai normalei la planul tangent satisfac condițiile (39) în care $v = 0$, iar l, m, n sînt proporționali cu x'_0, y'_0, z'_0. Astfel, rezultă că $A = B = C = 0$, ceea ce înseamnă că *punctele curbei C_0, la care sînt tangente generatoarele suprafeței desfășurabile, sînt puncte singulare ale suprafeței.*

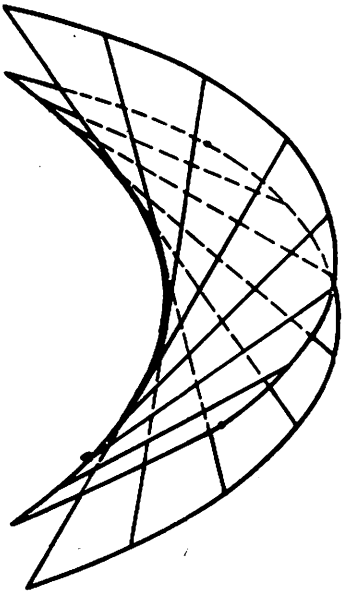


Fig. 15

Se poate demonstra ([25], p. 264) că *punctele curbei C_0 sînt puncte de întoarcere pentru secțiunile plane, obținute intersectînd suprafața (42) cu plane ce nu conțin tangentele la C_0.* De aceea, curba C_0 se numește *curba de întoarcere a suprafeței desfășurabile.* Deoarece punctele curbei C_0 sînt puncte de întoarcere pentru secțiunile plane care nu trec prin tangenta la curbă, rezultă că suprafața desfășurabilă este formată din două pînze care sînt tangente între ele de-a lungul curbei C_0 (fig. 15).

În general, condiția (40) este satisfăcută dacă elementele liniilor determinantului (40) sînt liniar dependente. În acest caz, se arată că suprafața desfășurabilă dată prin ecuații de forma (37), în care apare numai caracterul de suprafață riglată, este generată de tangentele la o curbă strîmbă (curba de întoarcere C_0 a suprafeței desfășurabile).

CAPITOLUL XV

TEORIA CUADRICELOR PE ECUAȚII CANONICE

§ 1. DEDUCEREA ECUAȚIILOR CANONICE ALE CUADRICELOR

Se numește *cuadrică o suprafață algebrică de gradul al doilea* (v. Cap. XIII, §1). Ecuația unei cuadrice se poate scrie sub forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + \\ + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

În capitolul precedent s-au obținut ecuațiile unor cuadrice (șase tipuri de cilindri și conuri, cinci tipuri de cuadrice de rotație) definite prin proprietăți geometrice.

Însă pe lîngă cele șase tipuri de cilindri și conuri, se pun în evidență și alte cuadrice diferite între ele prin formă și prin proprietăți geometrice bine definite. Astfel, există *elipsoidul imaginar* sau *real*, *hiperboloidul cu o pînză* sau *cu două pînze* și *paraboloidul eliptic* sau *hiperbolic*. Aceste cuadrice se numesc cuadrice ireductibile sau nedegenerate, unele din ele putînd fi și de rotație.

Ecuațiile acestor cuadrice (ireductibile sau nedegenerate) pot fi obținute prin mișcarea unei conice paralelă cu ea însăși, în așa fel ca unele din vîrfurile ei să descrie o altă conică (fixă), cele două conice fiind în plane perpendiculare.

În adevăr, fie *suprafața generată prin mișcarea unei elipse paralelă cu ea însăși, ce se de formează păstrînd raportul constant al axelor, în așa fel ca două din vîrfurile ei (de pe aceeași axă) să descrie o conică cu centrul dat, elipsa mobilă și conica fixă fiind în plane perpendiculare și avînd cîte o axă paralelă.*

Să luăm *conica* fixă în planul *Oxz*, raportată la centru și axele ei; rezultă că ecuațiile conicei fixe sînt

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon\frac{z^2}{c^2} + \varepsilon' = 0, \\ &y = 0, \end{aligned} \qquad (\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1). \tag{1}$$

Atunci putem considera că elipsa mobilă se deplasează astfel încît planul ei rămîne tot timpul perpendicular pe axa Oz. Așadar, ecuațiile elipsei mobile sînt

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{(\lambda a)^2} + \dfrac{y^2}{(\lambda b)^2} - 1 = 0, \\ z = \mu. \end{cases} \tag{1'}$$

Generatoarea (1') se sprijină pe directoarea (1), dacă sistemul de ecuații (1) + (1') este compatibil, condiție ce se obține eliminînd pe x, y, z între ecuațiile sistemului. Astfel, din ultimele trei ecuații ale sistemului obținem

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \lambda^2, \\ y = 0, \\ z = \mu, \end{cases}$$

care, introduse în prima ecuație, ne dă condiția de compatibilitate

$$\lambda^2 + \varepsilon \frac{\mu^2}{c^2} + \varepsilon' = 0. \tag{1''}$$

Ecuația suprafeței se obține eliminînd pe λ și μ între ecuațiile (1') ale generatoarei și condiția de compatibilitate (1''). Rezultă astfel ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon \frac{z^2}{c^2} + \varepsilon' = 0, \ (\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1) \tag{2}$$

care reprezintă o suprafață algebrică de gradul al doilea, deci o *cuadrică* ce se numește *elipsoid imaginar* sau *real*, după cum $\varepsilon = \varepsilon' = +1$ sau $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = -1$, respectiv *hiperboloid cu o pînză sau cu două pînze*, după cum $\varepsilon = \varepsilon' = 1$ sau $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$.

Suprafața (2) este simetrică în raport cu planele coordonate. În adevăr, dacă punctul $P(x, y, z)$ aparține cuadricei date, atunci punctele $P'(x, y, -z)$, $P''(x, -y, z)$, $P'''(-x, y, z)$ — simetricele lui P față respectiv de planele de coordonate Oxy, Oxz, Oyz — îi aparțin. Deci, *planele de coordonate* sînt *plane de simetrie* pentru cuadrică, ele numindu-se *planele* sale *principale*.

Axele de coordonate sînt *axe de simetrie* ale cuadricei date și se numesc *axele* sale. În adevăr, dacă punctul $P(x, y, z)$ este situat pe cuadrică, atunci și punctele $P_1(x, -y, -z)$, $P_2(-x, y, -z)$, $P_3(-x, -y, z)$ — simetricele lui P față respectiv de axele de coordonate Ox, Oy, Oz — sînt situate pe cuadrică.

Se observă că axele cuadricei sînt intersecțiile planelor sale principale luate două cîte două.

De asemenea, *originea axelor de coordonate* este un *centru de simetrie* pentru cuadrică, ce se mai numește simplu *centrul cuadricei*. În adevăr, dacă $P(x, y, z)$ este pe suprafață, atunci și punctul $Q(-x, -y, -z)$ — simetricul lui P față de originea axelor de coordonate — verifică ecuația suprafeței, deci aparține cuadricei. Se observă că centrul cuadricei este punctul de

intersecție al axelor sale, sau încă punctul de intersecție al planelor principale. Din această cauză ecuația (2) reprezintă o *cuadrică cu centru* (unic la distanță finită).

Ecuația planului tangent în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al cuadricei (2) este

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \varepsilon \frac{z_0z}{c^2} + \varepsilon' = 0, \tag{3}$$

dacă ținem seama de formula (9) din Capitolul XIII și că punctul P_0 aparține cuadricei.

Fie *suprafața generată prin mișcarea unei parabole invariabile paralelă cu ea însăși, în așa fel ca vîrful ei să descrie o altă parabolă dată, cele două parabole fiind în plane perpendiculare și avînd axele paralele.*

Să luăm parabola fixă în planul Oxz, raportată la axa și tangenta în vîrf; deci, ecuațiile parabolei fixe sînt:

$$\begin{cases} x^2 = 2pz. \\ y = 0, \end{cases} \qquad (p = a^2). \tag{4}$$

Atunci, parabola mobilă se deplasează astfel încît planul ei rămîne tot timpul perpendicular pe axa Ox, și are parametrul $q = \varepsilon b^2$, cu $\varepsilon = \pm 1$, după cum concavitatea ei are același sens sau nu cu concavitatea parabolei fixe.

Să scriem ecuația parabolei mobile din planul $x = \lambda$. Vîrful ei are coordonatele $V\left(\lambda, 0, \frac{\lambda^2}{2p}\right)$, deoarece punctul V se găsește pe parabola fixă în planul $x = \lambda$. Atunci, parabola mobilă va fi locul geometric al punctelor $P(\lambda, y, z)$ din planul $x = \lambda$, egal depărate de focarul

$$F\left(\lambda, 0, \frac{\lambda^2}{2p} + \frac{q}{2}\right)$$

și directoarea

$$\begin{cases} z = \dfrac{\lambda^2}{2p} - \dfrac{q}{2}, \\ x = \lambda. \end{cases}$$

Rezultă că ecuațiile parabolei mobile sînt

$$\begin{cases} y^2 + \left[z - \left(\dfrac{\lambda^2}{2p} + \dfrac{q}{2}\right)\right]^2 = \left[z - \left(\dfrac{\lambda^2}{2p} - \dfrac{q}{2}\right)\right]^2, \\ x = \lambda \end{cases}$$

sau, efectuînd calculele,

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{q} = 2z - \dfrac{\lambda^2}{p}, \\ x = \lambda, \end{cases} \qquad (p = a^2, q = \varepsilon b^2). \tag{4'}$$

Ecuația suprafeței, adică a locului geometric al pozițiilor generatoare (4'), se obține eliminînd pe λ între ecuațiile (4'). Se găsește astfel ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad (\varepsilon = \pm 1) \tag{5}$$

a unei suprafețe algebrice de gradul al doilea, deci a unei cuadrice care se numește *paraboloid eliptic* sau *hiperbolic*, după cum $\varepsilon = +1$ sau $\varepsilon = -1$.

Suprafața (5) este simetrică în raport cu planele de coordonate *Oxz* și *Oyz*. În adevăr, dacă punctul $P\ (x, y, z)$ aparține paraboloidului, atunci și punctele $P'\ (x, -y, z)$, $P''\ (-x, y, z)$ — simetricele lui P față de planele *Oxz* și *Oyz* respectiv — îi aparțin. Deci, paraboloidul are două *plane principale* (plane de simetrie).

Axa *Oz*, dreapta de intersecție a planelor principale, este o axă (de simetrie) a paraboloidului (5). În adevăr, dacă $P\ (x, y, z)$ este un punct situat pe suprafață, atunci și punctul $P_1\ (-x, -y, z)$, simetricul lui P față de axa *Oz*, este situat pe suprafață.

Rezultă că paraboloidul nu are centru de simetrie. Ecuația (5) reprezintă deci o *cuadrică fără centru* (unic la distanță finită).

Ecuația planului tangent în punctul $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ al paraboloidului (5) este

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \varepsilon \frac{y_0 y}{b^2} = z + z_0 \tag{6}$$

și se obține ținînd seama de formula (9) din Capitolul XIII și de faptul că punctul P_0 aparține suprafeței.

§ 2. ELIPSOIDUL

Generarea suprafeței. Dacă în ecuația (2) luăm $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = -1$, deci dacă *suprafața este generată prin mișcarea unei elipse paralelă cu ea însăși, care se deformează păstrînd constant raportul axelor, în așa fel ca două din vîrfurile ei (de pe aceeași axă) să descrie o altă elipsă, cele două elipse fiind situate în plane perpendiculare și avînd cîte o axă paralelă* obținem cuadrica de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{7}$$

care se numește *elipsoid* (real), ecuația (7) fiind ecuația canonică a elipsoidului.

Elemente de simetrie. Observăm că pentru elipsoidul (7), planele de coordonate sînt plane principale (plane de simetrie), axele de coordonate sînt axe (de simetrie), iar originea este un centru (de simetrie); deci, elipsoidul este o cuadrică cu centru (v. § 1).

Se numesc *vîrfuri* ale elipsoidului punctele de intersecție ale elipsoidului cu axele sale. Intersectînd elipsoidul (7) cu axele de coordonate, care sînt chiar axele sale, avem respectiv sistemele

$$\begin{cases} x^2 - a^2 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - b^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z^2 - c^2 = 0 \end{cases}$$

soluțiile x_0, y_0, z_0 ale acestor sisteme fiind coordonatele vîrfurilor elipsoidului. Există deci șase vîrfuri (reale)

$$A(a, 0, 0), \quad A'(-a, 0, 0),$$
$$B(0, b, 0), \quad B'(0, -b, 0),$$
$$C(0, 0, c), \quad C'(0, 0, -c),$$

aflate cîte două pe fiecare axă.

Lungimile $2a = AA'$, $2b = BB'$, $2c = CC'$ ale segmentelor determinate de elipsoid pe cele trei axe ale sale sînt *lungimile axelor elipsoidului*. Dacă $a \neq b \neq c$, deci dacă lungimile axelor sînt diferite între ele, cînd se ia, de obicei, $a > b > c$, *elipsoidul* se zice cu *axe neegale*.

Secțiuni plane. Considerînd secțiunile elipsoidului (7) cu diferite plane paralele cu planele de coordonate, ne putem da ușor seama de forma elipsoidului.

Astfel, intersecția elipsoidului (7) cu un plan paralel cu planul Oxy este secțiunea plană

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \\ z = h; \end{cases}$$

dacă ținem seama de ultima ecuație a sistemului în prima, ecuațiile acestei secțiuni se scriu

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} - 1 = 0, \\ z = h \end{cases}$$

și reprezintă o *elipsă* cu centrul pe Oz, avînd axele paralele cu Ox și Oy, lungimile semiaxelor elipsei fiind

$$a' = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b' = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

Rezultă că dacă facem pe h să crească de la 0 la c, aceste semiaxe descresc, respectiv de la a la 0 și de la b la 0. Deci semiaxele intersecției sînt cele mai mari pentru $h = 0$, adică pentru intersecția elipsoidului cu planul Oxy. Planul $z = c$, respectiv $z = -c$, intersectează elipsoidul după o elipsă degenerată, constituită din două drepte imaginare care se întîlnesc în punctul real C (0, 0, c), respectiv C' (0, 0, $-c$). Un astfel de *punct* se zice *eliptic*. Ținînd seama de formula (3), rezultă că planele $z = \pm c$ sînt plane tangente la elipsoidul (7) în punctele C (0,0,c) și C' (0, 0, $-c$). Planele $z = h > c$, respectiv $z = h < -c$, nu mai intersectează elipsoidul în puncte reale.

De altfel, pentru ca elipsa de secțiune să fie reală, trebuie ca

$$1 - \frac{h^2}{c^2} > 0, \quad \text{adică} \quad -c < h < +c.$$

Deci, suprafața este cuprinsă între planele $z = c$ și $z = -c$.

Rezumînd, putem spune: secțiunile elipsoidului (7) cu plane paralele cu planul Oxy sînt elipse; axele acestor elipse rămînînd într-un raport constant $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$, descresc pe măsură ce h se apropie de c, sau de $-c$, cînd se reduc la zero; pentru $h = \pm c$, secțiunile se reduc la vîrfurile C (0, 0, c), respectiv C' (0, 0, $-c$); planele $z = \pm c$ sînt planele tangente la elipsoid în vîrfurile C și C'.

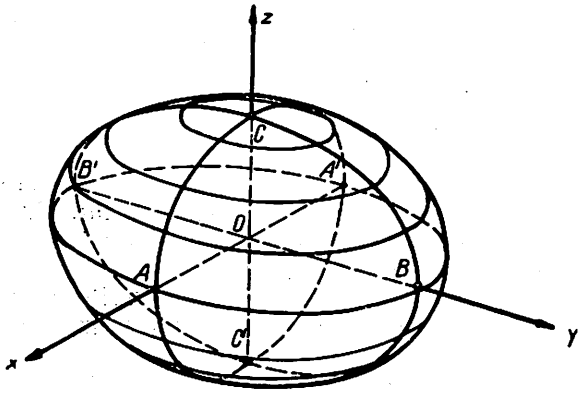


Fig. 1

Se obțin concluzii analoge în ceea ce privește planele paralele cu planul Oxz, respectiv Oyz. Rezultă că elipsoidul apare ca o suprafață situată în paralelipipedul dreptunghic, avînd fețele paralele cu planele de coordonate și trecînd prin vîrfurile elipsoidului sau în interiorul a două sfere de rază a și de rază c, dacă presupunem $a > b > c$. Deci, *elipsoidul* este *o suprafață în întregime la distanță finită*. Se poate de asemenea arăta *că elipsoidul are proprietatea că orice secțiune plană (obținută prin intersecție cu un plan) este o elipsă*. Elipsoidul are forma arătată în figura 1.

Dacă două din axele elipsoidului sînt egale, de exemplu $a = b$, ecuația elipsoidului se scrie

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad (7')$$

și reprezintă un elipsoid de rotație. De altfel, secțiunile elipsoidului cu planele $z = h$ sînt cercuri cu centrul pe axa Oz; deci, elipsoidul admite axa Oz ca *axă de rotație* (v. Cap. XIV, § 4).

Dacă $a = b = c$, deci elipsoidul are semiaxele egale, ecuația lui se scrie

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \qquad (7'')$$

și elipsoidul este o sferă de rază a și cu centrul în origine.

Secțiuni plane circulare. S-a arătat că secțiunile plane ale elipsoidului sînt elipse. Atunci se pune întrebarea dacă unele din elipsele de secțiune pot să fie cercuri, ceea ce știm că are loc în cadrul elipsoidului de rotație.

Dacă o secțiune plană a unui elipsoid este un cerc, acest cerc poate fi considerat ca o secțiune plană a unei sfere. Invers, dacă o secțiune plană a

unui elipsoid rezultă ca o secțiune plană a unei sfere, această secțiune plană este un cerc.

Am văzut că secțiunile făcute într-un elipsoid prin plane paralele cu planele de coordonate sînt conice omotetice (asemenea). Proprietatea este adevărată pentru orice familie de plane paralele. Rezultă că este suficient să determinăm planele care trec prin centru și intersectează elipsoidul după secțiuni circulare.

Să presupunem că există un plan π dus prin origine, care intersectează elipsoidul (7) după un cerc (γ) de rază r. Acest cerc este situat pe sfera (S) de centru O și rază r:

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Rezultă că cercul (γ) se găsește și la intersecția elipsoidului (7) cu sfera (S), deci este reprezentat de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0, \qquad (a > b > c) \end{cases}$$

care este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \\ \left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{r^2}\right) x^2 + \left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{r^2}\right) y^2 + \left(\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{r^2}\right) z^2 = 0. \end{cases}$$

Pentru a fi în cazul intersecției cuadricei (7) cu planul π, trebuie ca ultima ecuație a sistemului să reprezinte o pereche de plane; pentru aceasta este necesar și suficient ca unul din pătrate să lipsească. Deci, raza r a cercului trebuie să aibă una din valorile

$$r = a, \qquad r = b, \qquad r = c.$$

Ținînd seama că am presupus $a > b > c$, singura pereche de plane reale este aceea obținută pentru $r = b$, deoarece cantitățile $b^2 - a^2$, $b^2 - c^2$ sînt, în acest caz, de semne contrare. Avem deci două plane care trec prin axa mijlocie

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2} \pm \frac{z}{c}\sqrt{b^2 - c^2} = 0,$$

care intersectează elipsoidul după cercuri; aceeași proprietate o au și planele paralele cu aceste două plane.

Cele două familii de plane coincid dacă elipsoidul este de rotație. În adevăr, în acest caz ($a = b$), singura pereche de plane reale este aceea obținută pentru $r = a$, și anume

$$z^2 = 0,$$

ceea ce arată că perechea de plane este formată din două plane confundate. Deci, pentru un elipsoid de rotație, singurele plane care dau secțiuni circulare reale sînt cele perpendiculare pe axa de rotație a suprafeței.

Printre planele secțiunilor circulare există și unele care sînt tangente elipsoidului, deci care intersectează elipsoidul după un cerc de rază nulă, adică într-un singur punct real — punctul de tangență. Un astfel de punct se numește *ombilic* sau *punct ombilical*. Rezultă că elipsoidul are patru puncte ombilicale, simetrice două cîte două față de centrul cuadricei. În cazul elipsoidului de rotație, punctele ombilicale sînt punctele în care cuadrica este înțepată de axa de rotație.

Elipsoid imaginar. Dacă în ecuația (2) luăm $\varepsilon = \varepsilon' = +1$, obținem cuadrica de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0.$$

Primul membru al acestei ecuații este format din suma a patru pătrate de același semn, iar pătratul unui număr real este totdeauna pozitiv sau nul; deci nu există soluții reale care să satisfacă o asemenea ecuație și cuadrica se numește *elipsoid imaginar*.

§ 3. HIPERBOLOIDUL CU O PÎNZĂ

Generarea suprafeței. Dacă în ecuația (2) luăm $\varepsilon = \varepsilon' = -1$, deci dacă *suprafața este generată prin mișcarea unei elipse paralele cu ea însăși, ce se deformează păstrînd constant raportul axelor, în așa fel ca două din vîrfurile ei (de pe aceeași axă) să descrie o hiperbolă, elipsa și hiperbola fiind situate în plane perpendiculare, iar axa celor două vîrfuri ale elipsei fiind paralelă cu axa transversă a hiperbolei*, obținem cuadrica de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0, \tag{9}$$

care se numește *hiperboloid cu o pînză*. Ecuația (9) este ecuația canonică a hiperboloidului cu o pînză.

Elemente de simetrie. Se observă că planele de coordonate, axele de coordonate și originea axelor sînt respectiv plane principale (adică plane de simetrie), axe (de simetrie) și centru (de simetrie) pentru hiperboloidul cu o pînză (9), această suprafață fiind o cuadrică cu centru (v. § 1).

Vîrfurile hiperboloidului cu o pînză sînt punctele de intersecție ale suprafeței cu axele sale. Coordonatele vîrfurilor sînt soluțiile sistemelor

$$\begin{cases} x^2-a^2=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=0 \\ y^2-b^2=0 \\ z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z^2+c^2=0 \end{cases},$$

formate din ecuațiile unei axe și ecuația (9) a hiperboloidului cu o pînză (în care s-a ținut seamă de ecuațiile axei). Există deci patru vîrfuri reale

$$A(a,\ 0,\ 0)\ ,\quad A'(-a,\ 0,\ 0),$$
$$B(0,\ b,\ 0)\ ,\quad B'(0,\ -b,\ 0),$$

aflate cîte două pe axele Ox, Oy, numite și axele transverse ale hiperboloidului cu o pînză. Rezultă, de asemenea, că axa Oz nu intersectează (real) hiperboloidul cu o pînză și este axa lui netransversă. Totuși, se consideră pe axa Oz punctele reale

$$C(0,\ 0,\ c), \qquad C'(0,\ 0,\ -c)$$

și aceste puncte se numesc *vîrfuri aparente*.

Lungimile $2a = AA'$, $2b = BB'$, $2c = CC'$ ale segmentelor determinate de vîrfuri pe cele trei axe se numesc *axele* hiperboloidului cu o pînză.

Secțiuni plane. Pentru a ne da seama de forma suprafeței (9), să considerăm secțiunile sale cu diferite plane paralele cu planele de coordonate.

Dacă intersectăm cuadrica (9) cu un plan paralel cu planul Oxy, obținem secțiunea plană

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)} - 1 = 0, \\ z = h, \end{cases}$$

care este *o elipsă* cu centrul pe Oz, avînd axele paralele cu Ox și Oy, lungimile semiaxelor fiind

$$a' = a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}, \qquad b' = b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}.$$

Rezultă că dacă facem pe h să crească, aceste semiaxe cresc și ele, devenind infinit de mari pentru $h = \infty$, avînd cea mai mică valoare pentru $h = 0$, adică pentru elipsa din planul Oxy. Se zice că această elipsă este *elipsa de gîtuire* (sau elipsa colier) a hiperboloidului cu o pînză. Rezultă că suprafața se întinde la infinit (și în sus și în jos față de planul Oxy), formînd o singură pînză. De aici denumirea de *hiperboloid cu o pînză*.

Dacă în (9) avem $a = b$, suprafața are ecuația

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{9'}$$

încît secțiunile cu planele $z = h$ sînt cercuri cu centrul pe Oz; suprafața admite axa Oz ca *axă de rotație* și de aceea se și numește *hiperboloid de rotație cu o pînză* (v. cap. XIV, § 4). Ea poate fi descrisă de o hiperbolă care se rotește în jurul axei netransverse.

Un plan care trece prin axa Oz intersectează cuadrica (9) după secțiunea plană

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\lambda^2}{b^2}\right)x^2 - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \\ y = \lambda x, \end{cases}$$

care reprezintă o hiperbolă avînd axa Oz ca axă netransversă.

Un plan paralel cu unul din planele principale care trec prin axa Oz, de exemplu cu planul Oyz, intersectează cuadrica (9) după secțiunea plană

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{a^2}\right)} - \dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{h^2}{a^2}\right)} - 1 = 0, \\ x = h, \end{cases}$$

care este o hiperbolă. Observăm că pentru secțiunile prin planele $x = h$, unde $-a < h < +a$ (presupunem $a > 0$), axa transversă a hiperbolei este paralelă cu Oy, iar axa netransversă este paralelă cu Oz; pe cînd pentru secțiunile pentru care $h < -a$ sau $h > +a$, axa transversă este paralelă cu Oz, iar axa netransversă este paralelă cu Oy. Pentru $h = \pm a$, hiperbola are semiaxele nule, deci este degenerată în dreptele reale

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = 0, \\ x = \pm a \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0, \\ x = \pm a. \end{cases}$$

Observăm apoi că planele $x = \pm a$ sînt tangente la hiperboloidul cu o pînză (9) în punctele $A(a, 0, 0)$ și $A'(-a, 0, 0)$. Aceste plane intersectează cuadrica după cîte două drepte reale. Dacă planul tangent într-un punct al cuadricei o intersectează după două drepte reale, punctul de tangență se numește *punct hiperbolic*.

Concluzii analoge avem în ceea ce privește planele paralele cu planul Oxz.

Se poate de asemenea arăta că *hiperboloidul cu o pînză are proprietatea că secțiunea care se obține prin intersecție cu un plan este sau o elipsă sau o hiperbolă, elipsele de secțiune fiind totdeauna mai mari sau cel mult egale cu elipsa de gîtuire*. Cuadrica are forma arătată în figura 2.

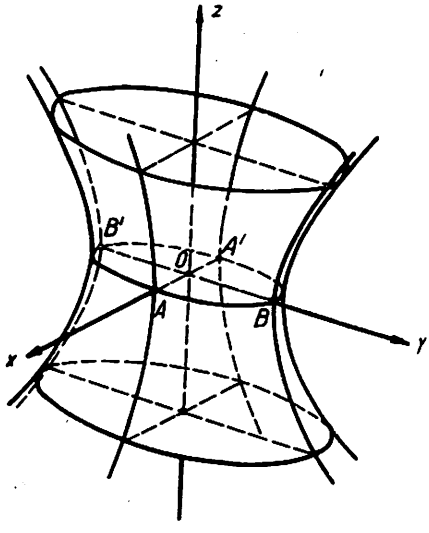


Fig. 2

Generatoare rectilinii. Elipsele situate pe hiperboloidul cu o pînză nu pot degenera în două drepte, însă hiperbolele de secțiune pot degenera în două drepte, care — evident — sînt reale. Rezultă că planul tangent într-un punct al hiperboloidului cu o pînză intersectează hiperboloidul după două drepte reale, punctul de tangență fiind un punct hiperbolic. Aceste drepte sînt situate pe cuadrică și se numesc *generatoarele rectilinii ale cuadricei*. Deci, hiperboloidul cu o pînză este o suprafață riglată (real).

Ecuația hiperboloidului cu o pînză se poate pune sub forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2},$$

sau încă

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right). \tag{9''}$$

Să intersectăm suprafața cu planele

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

unde λ este un parametru. Ținînd seama de ecuația acestor plane în ecuația (9'') a suprafeței, obținem

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\[2ex] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\end{cases} \tag{10}$$

ceea ce constituie o familie de *generatoare rectilinii*, situate pe hiperboloidul cu o pînză.

În mod analog se găsește că

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\mu\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\\[2ex] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\mu}\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\end{cases} \tag{10'}$$

și reprezintă a doua familie de generatoare rectilinii ale hiperboloidului cu o pînză.

Deci, hiperboloidul cu o pînză este o *suprafață dublu riglată*. Se poate arăta că este singura suprafață dublu riglată, care să aibă elipse între secțiunile sale plane. Vom pune în evidență unele proprietăți ale generatoarelor hiperboloidului:

1° *Prin fiecare punct al suprafeței trece cîte o generatoare din fiecare familie, și numai cîte una* (fig. 3). În adevăr, dacă generatoarea (10) trece prin punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$, obținem un sistem compatibil de două ecuații liniare în λ; deci, prin punctul P_0 trece o singură generatoare a familiei.

2° *Două generatoare din aceeași familie sînt strîmbe între ele* (nu se întîlnesc niciodată). În adevăr, dacă s-ar întîlni într-un punct, ar rezulta că prin acel punct trec două generatoare din aceeași familie, ceea ce este imposibil (contrazice prima proprietate).

3° *Două generatoare din familii diferite se întîlnesc totdeauna într-un punct al suprafeței.* În

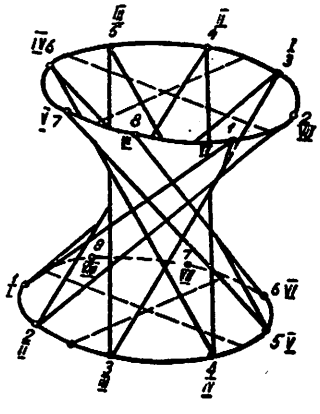


Fig. 3

adevăr, sistemul format din ecuațiile (10) și (10′) ale celor două familii de generatoare este compatibil.

Ecuațiile parametrice. Folosind a treia proprietate a generatoarelor, rezultă că ecuațiile (10) și (10′) admit o soluție în raport cu x,y,z (coordonatele punctului comun al acestor două generatoare). În adevăr, din primele ecuații ale lui (10) și (10′) deducem

$$\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

de unde

$$\frac{y}{b}=\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}.$$

Înlocuind pe $\frac{y}{b}$ cu această valoare în a doua ecuație a sistemului (10) și în prima ecuație a sistemului (10′), găsim

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{2}{\mu+\lambda},\\[2ex] \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{2\lambda\mu}{\mu+\lambda};\end{cases}$$

de unde, rezolvînd în raport cu $\frac{x}{a}$ și $\frac{z}{c}$, obținem

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}=\dfrac{\lambda\mu+1}{\mu+\lambda},\\[2ex] \dfrac{z}{c}=\dfrac{\lambda\mu-1}{\mu+\lambda}.\end{cases}$$

Soluția astfel obținută

$$x=\frac{a(\lambda\mu+1)}{\mu+\lambda},\quad y=\frac{b(\mu-\lambda)}{\mu+\lambda},\quad z=\frac{c(\lambda\mu-1)}{\mu+\lambda} \tag{11}$$

verifică identic a doua ecuație a sistemului (10′). Rezultă că generatoarele (10) și (10′) se intersectează în punctul de coordonate (11); cu alte cuvinte, formulele (11) exprimă coordonatele fiecărui punct al suprafeței în funcție de doi parametri λ și μ. Deci, formulele (11) reprezintă *ecuațiile parametrice* ale hiperboloidului cu o pînză.

Conul asimptotic. Să arătăm că *dreptele duse prin centrul hiperboloidului cu o pînză paralele cu generatoarele sale rectilinii se găsesc pe un con, numit conul asimptotic, hiperboloidul cu o pînză găsindu-se în exteriorul conului asimptotic.* În adevăr, ecuațiile acestor paralele sînt

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{\lambda y}{b},\\[2ex] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=-\dfrac{y}{\lambda b},\end{cases}$$

de unde, eliminînd pe λ, obținem conul

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{12}$$

Concluzie analogă avem în ceea ce privește generatoarele (10'). Conul (12) are proprietatea că *la infinit* pînza sa se confundă cu a hiperboloidului, de aceea se numește *con asimptotic* al hiperboloidului cu o pînză. În adevăr, intersectînd hiperboloidul (9) și conul (12) cu planul $z = h$, avem elipsele

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}-1=0, \\ z=h \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\dfrac{a^2h^2}{c^2}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{b^2h^2}{c^2}}-1=0, \\ z=h. \end{cases}$$

Diferențele dintre axele acestor elipse sînt

$$d_1=a\left(\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}-\frac{h}{c}\right)=\frac{a}{\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}+\dfrac{h}{c}}>0,$$

$$d_2=b\left(\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}-\frac{h}{c}\right)=\frac{b}{\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}+\dfrac{h}{c}}>0,$$

ceea ce arată că semiaxele elipselor obținute prin secțiunea plană $z = h$ a hiperboloidului sînt mai mari decît ale elipselor obținute prin aceeași secțiune plană a conului. Cînd h tinde către infinit, aceste diferențe tind către zero, adică

$$\lim_{h\to\infty} d_i=0, \qquad (i=1,\ 2).$$

Deci, cînd $h\to\infty$, elipsele de secțiune ale hiperboloidului și conului se confundă.

Observăm că un plan (trecînd prin origine) intersectează conul asimptotic după două generatoare. Rezultă că trei generatoare din același sistem nu pot fi paralele cu un același plan.

Această proprietate duce la o *altă generare a hiperboloidului cu o pînză.* În adevăr, să considerăm trei drepte d_i $(i = 1,2,3)$ neparalele cu un același plan. Există o infinitate de drepte d, care întîlnesc cele trei drepte. Dreptele d formează un sistem de generatoare, iar dreptele d_i fac parte din celălalt sistem de generatoare. Deci, *hiperboloidul cu o pînză este suprafața generată de o dreaptă care se mișcă sprijinindu-se pe trei drepte fixe neparalele cu un același plan.*

Hiperboloidul generat astfel trece prin toate vîrfurile paralelipipedului format de planele duse prin fiecare din dreptele fixe, paralele cu fiecare din celelalte două, iar toate muchiile sale sînt generatoare.

Secțiuni plane circulare. S-a arătat că printre secțiunile plane ale hiperboloidului cu o pînză sînt și elipse; unele din elipsele de secțiune pot fi cercuri, ceea ce am văzut că are loc în cazul hiperboloidului de rotație cu o pînză.

Raționăm întocmai ca la elipsoid (v. § 2). Să presupunem că există un plan π dus prin origine, care intersectează hiperboloidul (9) după un cerc (γ), de rază r. Acest cerc este situat pe sfera (S) de centru O și rază r:

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Cercul (γ) se găsește și la intersecția hiperboloidului (9) cu sfera (S), deci este reprezentat de sistemul

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0, \end{cases}$$

echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \\ \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right) y^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{r^2}\right) z^2 = 0. \end{cases}$$

Pentru a fi în cazul intersecției cuadrice (9) cu planul π, trebuie ca ultima ecuație a sistemului să reprezinte o pereche de plane; pentru aceasta este necesar și suficient ca unul din pătrate să lipsească. Deci, raza r a cercului trebuie să aibă una din valorile

$$r = a, \quad r = b.$$

Presupunînd $a > b$ (ceea ce este totdeauna posibil, schimbînd eventual axele Ox și Oy între ele), singura pereche de plane este aceea obținută pentru $r = a$, deoarece cantitățile $a^2 - b^2$, $a^2 + c^2$ sînt, în acest caz, de același semn. Există deci două plane

$$\frac{y}{b}\sqrt{a^2 - b^2} \pm \frac{z}{c}\sqrt{a^2 + c^2} = 0,$$

trecînd prin axa mare transversă, care intersectează hiperboloidul cu o pînză după cercuri; aceeași proprietate o au și planele paralele cu unul din aceste două plane. În cazul cînd suprafața este de rotație, deci $a = b$, cele două familii de plane coincid și sînt planele perpendiculare pe axa de rotație a cuadricei.

§ 1. HIPERBOLOIDUL CU DOUĂ PÎNZE

Generarea suprafeței. Dacă în ecuația (2) luăm $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$, deci dacă *suprafața este generată prin mișcarea unei elipse paralele cu ea însăși, care se deformează păstrînd constant raportul axelor, în așa fel ca două din vîrfurile ei*

(de pe aceeași axă) să descrie o hiperbolă, elipsa și hiperbola fiind situate în plane perpendiculare, iar axa celor două vîrfuri ale elipsei fiind paralelă cu axa netransversă a hiperbolei, obținem cuadrica de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0, \tag{13}$$

care se numește *hiperboloid cu două pînze*. Ecuația (13) este ecuația canonică a hiperboloidului cu două pînze.

Elemente de simetrie. Hiperboloidul cu două pînze este o cuadrică cu centru (v. § 1). În adevăr, se poate arăta că planele de coordonate, axele de coordonate și originea axelor sînt respectiv plane principale (adică plane de simetrie), axe (de simetrie) și centru (de simetrie) pentru hiperboloidul cu două pînze (13).

Vîrfurile hiperboloidului cu două pînze sînt punctele de intersecție ale suprafeței cu axele sale. Deci, coordonatele vîrfurilor sînt soluțiile sistemelor

$$\begin{cases} x^2+a^2=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=0 \\ y^2+b^2=0 \\ z=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z^2-c^2=0 \end{cases},$$

formate din ecuațiile unei axe și ecuația (13) a hiperboloidului cu două pînze (în care s-a ținut seama de ecuațiile axei). Există deci două *vîrfuri* reale

$$C(0,\ 0,\ c),\quad C'(0,\ 0,\ -c)$$

aflate pe axa Oz, numită și axă transversă a suprafeței. Rezultă, de asemenea, că axele Ox și Oy nu intersectează (real) hiperboloidul cu două pînze, ele fiind axele lui netransverse. Totuși, se consideră pe aceste axe punctele reale

$$A(a,\ 0,\ 0),\quad A'(-a,\ 0,\ 0)$$
$$B(0,\ b,\ 0),\quad B'(0,\ -b,\ 0)$$

și aceste puncte se numesc *vîrfuri aparente*.

Lungimile $2a = AA'$, $2b = BB'$, $2c = CC'$ sînt lungimile *axelor* hiperboloidului cu două pînze.

Secțiuni plane. Pentru a ne da seama de forma suprafeței (13), să considerăm secțiunile sale cu diferite plane paralele cu planele de coordonate.

Dacă intersectăm cuadrica (13) cu un plan paralel cu planul Oxy, obținem secțiunea plană

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{h^2}{c^2}-1\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{h^2}{c^2}-1\right)}-1=0, \\ z=h \end{cases}$$

care este o *elipsă* cu centrul pe Oz, avînd axele paralele cu Ox și Oy, lungimile semiaxelor fiind

$$a'=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},\qquad b'=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

Rezultă că elipsele nu sînt reale decît pentru $h>c$ și $h<-x$ (se presupune $c>0$), adică numai pentru valorile lui h, în afara intervalului $[-c, c]$. Deci, în

regiunea delimitată de planele $z = c$ și $z = -c$, cuadrica (13) nu are puncte (reale), iar aceste plane o intersectează după secțiuni reduse la cîte un singur punct real (altfel spus, după elipse degenerate în perechi de drepte imaginare care se intersectează în cîte un punct real), aceste puncte fiind vîrfurile C și C'. Planele $z = \pm c$ sînt tangente la cuadrica (13) în punctele C și C' respectiv. Pentru $h > c$ (sau $h < -c$), elipsa de secțiune este reală și dacă h crește (peste această valoare), semiaxele acestor elipse cresc și ele, tinzînd către infinit cînd $h \to \infty$. Deci suprafața este constituită din două pînze infinite, dispuse simetric față de planul Oxy. De aceea se numește *hiperboloid cu două pînze*.

Dacă în (13) avem $a = b$, suprafața are ecuația

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, \tag{13'}$$

încît secțiunile cu planele $z = h$ sînt cercuri cu centrele pe Oz, suprafața admițînd axa Oz ca axă de rotație. Cuadrica (13') se numește *hiperboloid de rotație cu două pînze* (v. cap. XIV, § 4). Ea poate fi descrisă de o hiperbolă care se rotește în jurul axei transverse.

Un plan paralel cu unul din planele principale care trec prin axa transversă Oz, de exemplu cu planul Oyz, intersectează cuadrica (13) după secțiunea plană

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1 + \dfrac{h^2}{a^2}\right)} - \dfrac{z^2}{c^2\left(1 + \dfrac{h^2}{c^2}\right)} + 1 = 0, \\ x = h, \end{cases}$$

care este o hiperbolă, avînd axa Oz ca axă transversă. Observăm că nu există nici o valoare a lui h pentru care semiaxele să fie nule, deci hiperbolele nu degenerează.

Concluzii analoge avem în ceea ce privește planele paralele cu planul Oxz.

Rezultă că nu există drepte (reale) situate pe hiperboloidul cu două pînze. Deci, hiperboloidul cu două pînze nu este o suprafață riglată, altfel spus, este o suprafață riglată imaginară.

Se poate arăta că *hiperboloidul cu două pînze are proprietatea că secțiunea care se obține prin intersecție cu un plan este sau o elipsă sau o hiperbolă, elipsele de secțiune putînd degenera în două drepte, care evident sînt imaginare, în timp ce hiperbolele de secțiune sînt ireductibile (nedegenerate)*. Planul tangent într-un punct al hiperboloidului cu două pînze intersectează hiperboloidul după două drepte imaginare, punctul de contact fiind deci un *punct eliptic*. Cuadrica are forma arătată în figura 4.

Conul asimptotic. Ca și în cazul hiperboloidului cu o pînză, conul (12) este con asimptotic al suprafeței (13), hiperboloidul cu două pînze găsindu-se în interiorul conului asimptotic. În adevăr, intersectînd hiperboloidul (13) și conul (12) cu planul $z = h$, obținem respectiv elipsele

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{h^2}{c^2} - 1\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{h^2}{c^2} - 1\right)} - 1 = 0, \\ z = h \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\dfrac{a^2h^2}{c^2}} + \dfrac{y^2}{\dfrac{b^2h^2}{c^2}} - 1 = 0, \\ z = h. \end{cases}$$

Diferențele dintre axele acestor elipse sînt

$$d_1 = a\left(\frac{h}{c} - \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right) = \frac{a}{\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1} + \frac{h}{c}} > 0,$$

$$d_2 = b\left(\frac{h}{c} - \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right) = \frac{b}{\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1} + \frac{h}{c}} > 0,$$

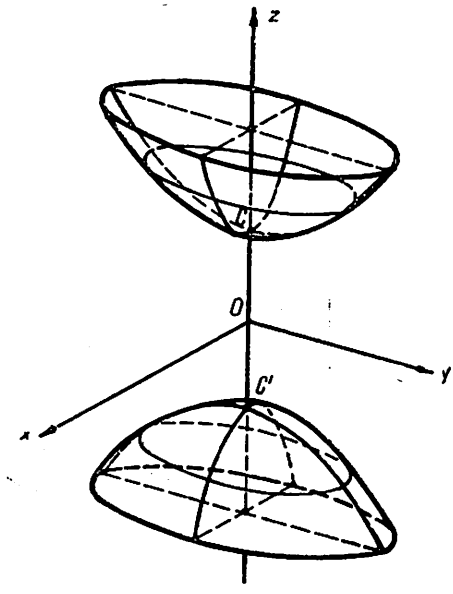


Fig. 4

ceea ce arată că semiaxele elipselor obținute prin secțiunea plană $z = h$ a conului sînt mai mari decît ale elipselor obținute prin aceeași secțiune plană a hiperboloidului.

Cînd h tinde către infinit, aceste diferențe tind către zero: $\lim_{h\to\infty} d_i = 0$, $(i=1,2)$. Deci, cînd $h\to\infty$, elipsele de secțiune ale hiperboloidului și conului se confundă. Rezultă că conul asimptotic al hiperboloidului cu o pînză coincide cu conul asimptotic al hiperboloidului cu două pînze, pentru care axele sînt aceleași. De aceea, cei doi hiperboloizi se pot numi *conjugați*.

Secțiuni plane circulare. Să presupunem că există un plan π, prin origine, care taie hiperboloidul (13) după un cerc (γ). Acest cerc este situat pe o sferă

$$(S): \frac{x^2+y^2+z^2}{\delta} - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + 1 = 0.$$

Cercul (γ) se găsește și la intersecția hiperboloidului (13) cu sfera (S), deci este reprezentat de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0, \\ \left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{\delta}\right)x^2 + \left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{\delta}\right)y^2 - \left(\dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{\delta}\right)z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z = 0, \end{cases}$$

dedus din ecuațiile hiperboloidului (13) și ale sferei (S). Pentru a fi în cazul intersecției cuadricei (13) cu planul π, trebuie ca ultima ecuație a sistemului să reprezinte o pereche de plane; pentru aceasta este necesar și suficient să lip-

sească coeficienții uneia din variabile, iar discriminantul formei să fie nul. Deci, δ trebuie să ia una din valorile

$$\delta = a^2, \quad \delta = b^2.$$

Presupunînd $a > b$ (ceea ce este totdeauna posibil, schimbînd eventual axele Ox și Oy între ele), singura pereche de plane reale este aceea obținută pentru $\delta = a^2$. Pentru $\delta = a^2$ și $\alpha = 0$, discriminantul celei de-a doua ecuații a sistemului este

$$\begin{vmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2b^2} & 0 & \beta \\ 0 & -\frac{a^2+c^2}{a^2c^2} & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\gamma^2 + \frac{a^2+c^2}{a^2c^2}\beta^2 = 0,$$

care este satisfăcut dacă

$$\beta = \frac{\lambda\sqrt{a^2-b^2}}{b}, \quad \gamma = \frac{\lambda\sqrt{a^2+c^2}}{c}.$$

Deci, ecuația sferei (S) este

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2} - 2\lambda\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y + \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}z\right) + 1 = 0,$$

sfera fiind reală dacă raza ei este pozitivă:

$$r^2 = \lambda^2a^2\left(\frac{a^2-b^2}{b^2} + \frac{a^2+c^2}{c^2}\right) - a^2 \geqslant 0,$$

deci, dacă λ satisface inegalitatea

$$\lambda^2 \geqslant \frac{b^2c^2}{a^2(b^2+c^2)}.$$

Rezultă că planele secțiunilor circulare sînt paralele cu planele

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y \pm \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}z = 0,$$

care trec prin axa Ox, cea mai mare axă netransversă, deoarece ultima ecuație a sistemului se scrie

$$\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y + \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}z\right)\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y - \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}z + 2\lambda a^2\right) = 0.$$

Dacă suprafața este de rotație, deci $a = b$, cele două familii de plane coincid și sînt planele perpendiculare pe axa de rotație a hiperboloidului de rotație cu două pînze.

Rezultă că hiperboloidul cu două pînze are patru puncte ombilicale, simetrice două cîte două față de centrul cuadricei. În cazul hiperboloidului de rotație cu două pînze, punctele ombilicale sînt punctele în care cuadrica este înțepată de axele de rotație, adică cele două vîrfuri reale.

§ 5. PARABOLOIDUL ELIPTIC

Generarea suprafeței. Dacă în ecuația (5) luăm $\varepsilon = +1$, deci *dacă suprafața este generată prin mișcarea unei parabole invariabile paralelă cu ea însăși, în așa fel ca vîrful ei să descrie o altă parabolă dată, cele două parabole avînd axele paralele și concavitatea îndreptată spre aceeași direcție, iar planele lor fiind perpendiculare*, obținem cuadrica de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \tag{14}$$

care se numește *paraboloid eliptic*, ecuația (14) fiind ecuația canonică a acestei cuadrice.

Elemente de simetrie. Se știe (v. § 1) că suprafața (14) este simetrică în raport cu planele de coordonate Oxz și Oyz, axa Oz fiind axă de simetrie. Paraboloidul eliptic este o cuadrică fără centru.

Vîrfurile paraboloidului eliptic sînt punctele de intersecție ale paraboloidului cu axa sa. Deci, coordonatele vîrfurilor sînt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

format din ecuațiile axei și ecuația paraboloidului. Rezultă că *originea* este singurul *vîrf real* al paraboloidului eliptic.

Secțiuni plane. Pentru a ne da seama de forma suprafeței (14), să considerăm secțiunile sale cu diferite plane paralele cu planele de coordonate.

Dacă intersectăm cuadrica (14) cu un plan paralel cu planul Oxy, obținem secțiunea plană

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ha^2} + \dfrac{y^2}{2hb^2} - 1 = 0, \\ z = h, \end{cases}$$

care este *o elipsă* cu centrul pe Oz, avînd axele paralele cu Ox și Oy, lungimile semiaxelor fiind

$$a' = a\sqrt{2h}, \quad b' = b\sqrt{2h}.$$

Rezultă că elipsele sînt reale, dacă $h > 0$, și imaginare, dacă $h < 0$; planul $z = 0$ (care se obține dacă $h = 0$) intersectează suprafața după o elipsă dege-

nerată în două drepte imaginare, al căror punct real comun este originea, care este deci vîrful suprafeței. Ținînd seama de formula (6), rezultă că acest plan este tangent în origine la cuadrica (14). Raportul semiaxelor elipselor este constant și egal cu $\frac{a}{b}$, însă semiaxele cresc cu h, devenind infinit de mari pentru $h = \infty$. Rezultă deci că suprafața este constituită dintr-o pînză infinită, situată deasupra planului Oxy (în semispațiul $z > 0$). Această suprafață se numește *paraboloid eliptic.*

Rezultă, de asemenea, o altă generare a paraboloidului eliptic: *este suprafața generată prin mișcarea unei elipse paralelă cu ea însăși, ce se deplasează păstrînd raportul constant al axelor, în așa fel ca două din vîrfurile ei (de pe aceeași axă) să descrie o parabolă, elipsa și parabola fiind în plane perpendiculare.*

Dacă în (14) avem $a = b$, suprafața are ecuația

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 2z \tag{14'}$$

încît secțiunile cu planele $z = h$ sînt cercuri cu centrul pe Oz, suprafața admițînd axa Oz ca axă de rotație. De aceea se numește *paraboloid de rotație* (v. cap. XIV, § 4). Ea poate fi descrisă de o parabolă care se rotește în jurul axei sale.

Paraboloidul eliptic este intersectat de planele care trec prin axa lui după parabole.

Un plan paralel cu unul din planele principale, de exemplu cu planul Oyz, intersectează cuadrica (14) după secțiunea plană

$$\begin{cases} y^2 = 2b^2z - \frac{h^2b^2}{a^2}, \\ x = h, \end{cases}$$

care este o parabolă de parametru constant, cu vîrful în punctul $V\left(h, 0, \frac{h^2}{2a^2}\right)$. Cînd h variază, acest punct descrie parabola fixă

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2z, \\ y = 0. \end{cases}$$

Rezultă astfel generarea suprafeței dată în § 1.

Se obțin concluzii analoge în ceea ce privește planele paralele cu planul Oxz.

Se poate de asemenea arăta că *paraboloidul eliptic are proprietatea că secțiunea care se obține prin intersecție cu un plan este sau o elipsă sau o parabolă,* elipsele de secțiune putînd degenera în două drepte, care evident sînt imaginare, în timp ce parabolele de secțiune sînt invariabile (nu pot degenera). Deci, planul tangent într-un punct al paraboloidului eliptic intersectează paraboloidul după două drepte imaginare, punctul de contact fiind un *punct eliptic.*

Cuadrica are forma arătată în figura 5.

Secțiuni plane circulare. Să presupunem că există un plan π, prin origine, care intersectează paraboloidul eliptic (14) după un cerc (γ). Acest cerc este situat pe o sferă

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda z = 0.$$

Cercul (γ) se găsește și la intersecția paraboloidului (14) cu sfera (S), deci este reprezentat de sistemul

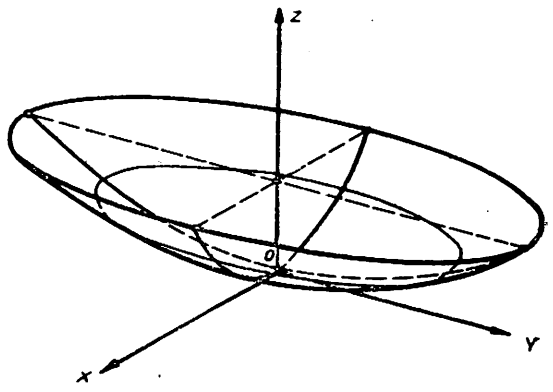


Fig. 5

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \\ \left(\frac{\lambda}{a^2} - 1\right)x^2 + \left(\frac{\lambda}{b^2} - 1\right)y^2 - z^2 = 0, \end{cases}$$

dedus din ecuațiile paraboloidului (14) și a sferei (S). Pentru a fi în cazul intersecției cuadricei (14) cu planul π, trebuie ca ultima ecuație a sistemului să reprezinte o pereche de plane; pentru aceasta este necesar și suficient să lipsească unul din pătrate, deci λ trebuie să ia una din valorile

$$\lambda = a, \quad \lambda = b.$$

Presupunînd $a > b$ (ceea ce este totdeauna posibil, schimbînd eventual axele Ox și Oy între ele), singura pereche de plane reale este aceea obținută pentru $\lambda = a$. Avem deci două plane trecînd prin tangenta la vîrf la parabola principală cea mai mare,

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} y \pm z = 0,$$

care intersectează paraboloidul eliptic după cercuri. Aceeași proprietate o au și planele paralele cu aceste două plane.

Dacă suprafața este de rotație, deci $a = b$, cele două familii de plane coincid și sînt planele perpendiculare pe axa de rotație a paraboloidului. În acest caz, există un singur *punct ombilical*, și anume *originea*, care este vîrful paraboloidului de rotație, el fiind dat de intersecția paraboloidului cu axa sa de rotație.

§ 6. PARABOLOIDUL HIPERBOLIC

Generarea suprafeței. Dacă în ecuația (4) luăm $\varepsilon = -1$, deci dacă *suprafața este generată prin mișcarea unei parabole invariabile paralelă cu ea însăși, astfel ca vîrful ei să descrie o altă parabolă dată, cele două parabole avînd axele paralele*

și de sens contrar (adică axa pozitivă a uneia din parabole coincide cu axa negativă a celeilalte), planele lor fiind perpendiculare, obținem cuadrica de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \tag{15}$$

care se numește *paraboloid hiperbolic*. Ecuația (15) este ecuația canonică a paraboloidului hiperbolic.

Elemente de simetrie. Ca și în cazul paraboloidului eliptic, se arată (v. § 1) că planele de coordonate *Oxz* și *Oyz* sînt plane principale (plane de simetrie), iar axa *Oz* — axă (de simetrie) pentru paraboloidul hiperbolic.

Rezultă că paraboloidul hiperbolic nu are centru de simetrie (unic la distanță finită); este o cuadrică fără centru.

De asemenea, *originea* este singurul *vîrf* (real) al suprafeței. În adevăr, intersectînd cuadrica (15) cu axa *Oz* — care este axa ei — obținem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

a cărui soluție este $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Secțiuni plane. Pentru a ne da seama de forma suprafeței (15), să considerăm secțiunile sale cu diferite plane paralele cu planele de coordonate.

Intersectînd-o cu un plan paralel cu planul *Oxy*, obținem secțiunea plană

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ha^2} - \dfrac{y^2}{2hb^2} - 1 = 0, \\ z = h, \end{cases}$$

care este o *hiperbolă* cu centrul pe *Oz* și avînd axele paralele cu *Ox* și *Oy*. Cînd $h > 0$, axa transversă este paralelă cu axa *Ox*, cînd $h < 0$, axa transversă este paralelă cu axa *Oy*, iar dacă $h = 0$, hiperbola este degenerată în două drepte reale, care se intersectează în origine (vîrful suprafeței). Observăm că planul *Oxy* este tangent în origine la cuadrica (15).

Un plan paralel cu unul din planele principale, de exemplu cu planul *Oyz*, intersectează cuadrica (15) după secțiunea plană

$$\begin{cases} y^2 = -2b^2 z + \dfrac{h^2 b^2}{a^2}, \\ x = h, \end{cases}$$

care este o *parabolă* de parametru constant, avînd axele paralele cu axa negativă a axei *Oz*, iar vîrful în punctul $V\left(h, 0, \frac{h^2}{2a^2}\right)$. Cînd h variază, acest punct descrie parabola fixă

$$\begin{cases} x^2 = 2az, \\ y = 0, \end{cases}$$

a cărei axă este axa pozitivă *Oz*. Rezultă astfel generarea suprafeței dată în § 1.

Planele paralele cu planul Oxz intersectează cuadrica după secțiunea plană

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2z + \frac{h^2a^2}{b^2}, \\ y = h, \end{cases}$$

care este o parabolă de parametru constant, cu axele paralele cu axa pozitivă Oz, vîrful fiind în punctul $V\left(0, h, -\frac{h^2}{2b^2}\right)$ de pe parabola fixă

$$\begin{cases} x^2 = -2b^2z, \\ x = 0. \end{cases}$$

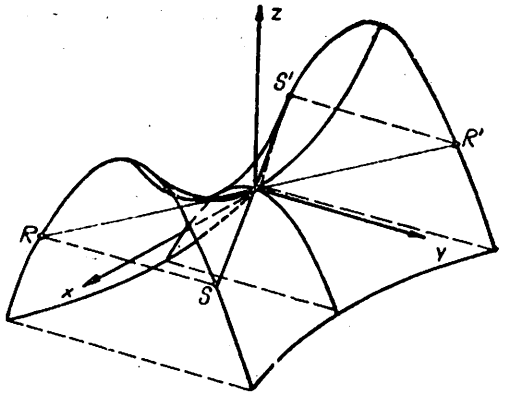


Fig. 6

Se poate arăta că *paraboloidul hiperbolic are proprietatea că secțiunea care se obține prin intersecție cu un plan este sau o hiperbolă sau o parabolă.*

Cuadrica are forma arătată în figura 6 și poate fi comparată cu o șa.

Dacă $a = b$, paraboloidul se numește *echilater.*

Generatoare rectilinii. Hiperbolele de secțiune pot degenera în două drepte, evident reale, în timp ce parabolele de secțiune sînt invariabile (nu pot degenera); deci planul tangent într-un punct al paraboloidului hiperbolic intersectează suprafața după două drepte reale, punctul de contact fiind un *punct hiperbolic.* Aceste drepte sînt situate pe cuadrică și se numesc *generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic.* Deci, această cuadrică este o *suprafață riglată,* mai precis, *riglată real.*

Putem obține ecuațiile generatoarelor, observînd că ecuația paraboloidului hiperbolic se poate scrie

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z.$$

Deducem ecuațiile

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2\lambda, \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{z}{\lambda}, \end{cases} \tag{16}$$

care reprezintă o familie de generatoare, a doua familie de generatoare fiind dată de ecuațiile

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\mu, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{\mu}, \end{cases} \tag{16'}$$

unde λ și μ sînt doi parametri.

Așadar, paraboloidul hiperbolic este o suprafață riglată în două moduri, este deci o suprafață *dublu riglată*. Se poate arăta că este singura suprafață dublu riglată care să aibă parabole între secțiunile sale plane.

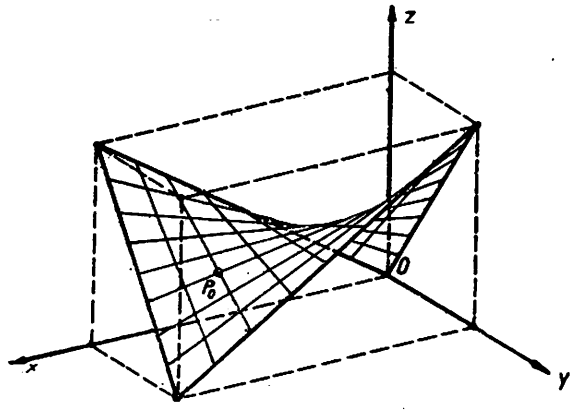


Fig. 7

Ca și în cazul hiperboloidului cu o pînză, generatoarele paraboloidului hiperbolic se bucură de proprietățile:

1° *Prin fiecare punct al suprafeței trece cîte o generatoare din fiecare familie, și numai cîte una* (fig. 7).

2° *Două generatoare din aceeași familie sînt strîmbe între ele* (nu se intersectează).

3° *Două generatoare din familii diferite se intersectează totdeauna într-un punct al suprafeței.*

Demonstrațiile sînt identice cu cele date la hiperboloidul cu o pînză (v. § 3).

Observăm că generatoarele primei familii sînt situate la intersecția cuadricei cu plane paralele cu planul

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

care trece prin axa Oz și dreapta OR, iar generatoarele celei de-a doua familii sînt situate în plane paralele cu planul

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

care trece prin axa Oz și dreapta OS, dreptele OR și OS fiind generatoarele care trec prin vîrful cuadricei (fig. 6). Aceste două plane se zic *plane directoare* ale paraboloidului hiperbolic. Din ecuațiile acestor plane rezultă că ele trec prin axa paraboloidului și că sînt simetrice față de planele principale care determină această axă. Așadar:

4° *Generatoarele din fiecare sistem sînt paralele cu un plan fix.*

Această proprietate duce la un nou mod de generare a paraboloidului hiperbolic. În adevăr, să considerăm două generatoare dintr-un sistem; fiecare generatoare din celălalt sistem se sprijină pe acestea două și este paralelă cu planul director corespunzător. Deci, *paraboloidul hiperbolic poate fi generat de mișcarea unei drepte paralele cu un plan fix și care se sprijină pe două drepte strîmbe date.*

În general, o suprafață generată de o dreaptă care se mișcă paralel cu un plan, după o anumită lege, se numește *conoid*. Rezultă că paraboloidul hiperbolic, avînd două plane directoare, poate fi considerat în două moduri cu o suprafață conoidă.

Ecuațiile parametrice. Din primele ecuații ale sistemului (16) și (16') deducem

$$\frac{x}{a} = \lambda + \mu, \quad \frac{y}{b} = \lambda - \mu,$$

care, introduse în a doua ecuație a sistemului (16), ne dă

$$z = 2\lambda\mu.$$

Înlocuind aceste valori în a doua ecuație a sistemului (16'), această ecuație este identic verificată. Deci, rezolvînd ecuațiile (16), (16') în raport cu x, y, z, obținem pentru paraboloidul hiperbolic reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = a(\lambda + \mu), \\ y = b(\lambda - \mu), \\ z = 2\lambda\mu, \end{cases} \tag{17}$$

unde λ, μ sînt parametrii celor două familii de generatoare.

Secțiuni plane circulare. Deoarece printre secțiunile plane ale hiperboloidului hiperbolic nu sînt elipse, rezultă că această cuadrică nu admite secțiuni plane circulare.

Considerînd însă dreapta ca un cerc de rază infinită, putem considera generatoarele paraboloidului hiperbolic drept secțiuni plane circulare.

Planele circulare trec prin axa Oz. În adevăr, intersecțiile paraboloidului cu planele

$$y = \pm \frac{b}{a} x + n$$

sînt dreptele definite de ecuațiile

$$\begin{cases} \pm 2\frac{b}{a} nx + n^2 = 2b^2 z, \\ y = \pm \frac{b}{a} x + n. \end{cases}$$

CAPITOLUL XVI

TEORIA GENERALĂ A CUADRICELOR

§ 1. REDUCEREA ECUAȚIEI UNEI CUADRICE LA FORMA CANONICĂ

Știm că o *cuadrică este o suprafață algebrică de gradul al doilea.* Ecuația unei asemenea suprafețe, în coordonate neomogene ortogonale x, y, z, se poate scrie sub forma

$$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + \quad (1)$$
$$+ 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

În coordonate omogene, ecuația cuadricei este

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_ix_j = 0, \quad (i,j,\ldots = 1, 2, 3, 4) \qquad (1')$$

coeficienții a_{ij} fiind constanți și simetrici în indicii i și j:

$$a_{ij} = a_{ji}. \qquad (1'')$$

Ecuația (1') se mai poate scrie (dacă utilizăm convenția de sumare a lui Einstein)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{ij}x_ix_j = 0. \qquad (1''')$$

În capitolul precedent s-au studiat cîteva cazuri particulare ale ecuației de gradul al doilea cu trei variabile, reprezentînd cuadrice diferite între ele prin formă și prin proprietăți geometrice: elipsoidul imaginar sau real, hiperboloidul cu o pînză sau cu două pînze, paraboloidul eliptic sau hiperbolic, conul imaginar sau real și cilindrul imaginar, eliptic, hiperbolic sau parabolic. La aceste suprafețe mai putem adăuga perechea de plane secante imaginare sau reale, perechea de plane paralele imaginare sau reale, perechea de plane confundate.

Se pune întrebarea: în afară de aceste 17 tipuri de cuadrice (menționate) mai există și alte tipuri?

Răspunsul este negativ: nu mai există nici o altă cuadrică.

Pentru a arăta aceasta, trebuie să considerăm ecuația generală (1) a cuadricei și să o studiem în toate cazurile. Studiul se reduce la determinarea unui sistem

de axe ortogonale în raport cu care ecuația cuadricei să fie cît mai simplă, să coincidă cu ecuația canonică a uneia din cele 17 tipuri de cuadrice cunoscute.

Putem face acest studiu prin mijloace analoge acelora utilizate în cazul conicelor; totuși, în acest caz, problema este ceva mai grea, deoarece, în primul rînd, nu mai poate fi tratată atît de simplu și, în al doilea rînd, impune utilizarea teoriei formelor pătratice. Acest studiu va fi realizat în §8, cu ajutorul invarianților ortogonali.

Fie translația de axe

$$\left\{\begin{array}{l} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0, \\ z = z' + z_0, \end{array}\right. \tag{2}$$

unde x_0, y_0, z_0 sînt coordonatele punctului O', în care a fost dusă originea sistemului $Oxyz$. Prin translația (2), ecuația (1) a cuadricei devine

$$a'_{\alpha\beta}x'_\alpha x'_\beta + 2a'_{\alpha 4}x'_\alpha + a'_{44} = 0, \quad (\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, 3), \tag{3}$$

unde

$$\left.\begin{array}{l} a'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}, \\ a'_{14} = f_{x_0} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}, \\ a'_{24} = f_{y_0} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}, \\ a'_{34} = f_{z_0} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}, \\ a'_{44} = f(x_0, y_0, z_0), \end{array}\right\} \tag{3'}$$

iar

$$f_{x_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{ij}x_j \tag{3''}$$

sînt semiderivatele funcției $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ din primul membru al ecuației cuadricei. Deci, o translație (2) transformă ecuația (1) în alta, în care coeficienții $a_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ ai termenilor de gradul al doilea rămîn neschimbați.

Translația (2) ne permite, în general, să determinăm noua origine $O'(x_0, y_0, z_0)$, astfel ca ecuația (3) a cuadricei față de noile axe să nu conțină termeni de gradul întîi. Însă, pentru ca ecuația (3) să nu conțină termeni liniari în x', y', z', este necesar și suficient ca

$$a'_{\alpha 4} = 0,$$

adică coordonatele x_0, y_0, z_0 ale noii origini să fie o soluție a sistemului

$$\left.\begin{array}{l} f_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0, \\ f_y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0, \\ f_z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Fie determinantul

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = |a_{ij}| \tag{5}$$

numit *discriminantul cuadricei*. De asemenea, fie matricele

$$M = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{matrix} \right\|, \quad M' = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{matrix} \right\|$$

reprezentînd matricea atașată și matricea extinsă a sistemului (4).

Dacă $r(M) = 3$, deci dacă determinantul

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = |a_{\alpha\beta}|, \quad (A_{33} = \text{det. } M) \tag{5'}$$

este diferit de zero, sistemul (5) admite o soluție unică. Rezultă că intersecția planelor (4) este un punct de coordonate

$$x_0 = \frac{A_{14}}{A_{44}}, \quad y_0 = \frac{A_{24}}{A_{44}}, \quad z_0 = \frac{A_{34}}{A_{44}}, \tag{4'}$$

A_{ij} fiind complementii algebrici corespunzători elementelor a_{ij} în determinantul A. În acest caz, transportînd originea în punctul de coordonate (4'), ecuația cuadricei ia forma

$$a_{\alpha\beta}x'_\alpha x'_\beta + a'_{44} = 0. \tag{6}$$

Această ecuație prezintă o particularitate remarcabilă: nu se schimbă, dacă schimbăm pe x', y', z' în $-x'$, $-y'$, $-z'$. Rezultă că dacă punctul $P(x', y', z')$ este pe suprafața (6), atunci și punctul $Q(-x', -y', -z')$, simetricul lui P față de origine, se găsește pe suprafață. Cu alte cuvinte, punctele suprafeței sînt, două cîte două, simetrice față de origine. Așadar, originea este un *centru de simetrie*, mai simplu, un *centru* al cuadricei (6).

Deci, dacă $A_{44} \neq 0$, suprafața are un singur *centru de simetrie* și se zice că este o *cuadrică cu centru unic la distanță finită*, mai simplu, o *cuadrică cu centru*. În coordonate omogene, *ecuațiile centrului* (care dau coordonatele centrului) sînt

$$f_{x_\alpha} = a_{\alpha i}x_i = 0, \tag{4''}$$

iar centrul are coordonatele

$$\Omega(A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}). \tag{4'''}$$

Ținînd seama de *formula lui Euler* pentru funcția omogenă $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ din primul membru al ecuației cuadricei (1):

$$x_i f_{x_i} = f(x_1, x_2, x_3, x_4), \tag{7}$$

de ecuațiile (4) și de soluția (4') a acestui sistem, putem calcula termenul $a'_{44} = f(x_0, y_0, z_0)$. În adevăr

$$f(x_0, y_0, z_0) = x_0 f_{x_0} + y_0 f_{y_0} + z_0 f_{z_0} + a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44} =$$

$$= a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44} = \frac{A}{A_{44}}.$$

Deci, translatînd originea în centrul cuadricei, ecuația cuadricei ia forma

$$a_{\alpha\beta}x'_\alpha x'_\beta + \frac{A}{A_{44}} = 0, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \tag{6'}$$

Putem simplifica mai departe ecuația cuadricei, efectuînd o rotație de axe ortogonale în jurul centrului și căutînd ca ecuația cuadricei față de noile axe să nu mai conțină termenii xy, yz, zx.

Ne apropiem astfel de tipurile simple deja studiate anterior (Cap. XIV și XV). Această problemă va fi tratată în §§ 7—8.

Observăm că dacă $A = 0$, cuadrica (6') reprezintă un con.

O cuadrică al cărei discriminant este nul: $A = |a_{ij}| = 0$, se zice că este o *cuadrică degenerată*.

Rezultă că o *cuadrică cu centru degenerată este un con.*

Dacă $r(M) \leqslant 2$, deci dacă $A_{33} = 0$, avem patru cazuri de considerat. Primul caz se prezintă atunci cînd $r(M) = 2$, $r(M') = 3$, sistemul (4) fiind incompatibil: nu există nici un punct la distanța finită, ale cărui coordonate să constituie o soluție a sistemului (4), există însă unul la infinit îndeplinind această condiție; cu alte cuvinte, centrul cuadricei (1) este unic însă la infinit, avînd coordonatele omogene

$$\Omega(A_{14}, A_{24}, A_{34}, 0). \tag{4^{IV}}$$

În al doilea caz, avem $r(M) = r(M') = 2$. Sistemul (4) este compatibil nedeterminat, fiind format din două ecuații principale și o ecuație auxiliară; sistemul admite o ∞^1 de soluții; cuadrica (1) admite o dreaptă de centre.

În al treilea caz, cînd $r(M) = 1$, $r(M') = 2$, sistemul (4) este incompatibil; cuadrica (1) admite o dreaptă de centre, situată în planul de la infinit.

Al patrulea caz are loc atunci cînd $r(M) = r(M') = 1$. Sistemul (4) este compatibil nedeterminat, fiind format dintr-o ecuație principală și două ecuații auxiliare; sistemul admite o ∞^2 de soluții, deci cuadrica (1) admite o ∞^2 de centre care se găsesc într-un plan.

Observăm că, în ultimele trei cazuri, determinanții A_{i4} $(i = 1, 2, 3, 4)$ sînt toți nuli. În aceste cazuri însă, discriminantul A al cuadricei este nul și cuadrica este degenerată (se arată că este un cilindru sau o pereche de plane). Deci, dacă $A_{44} = 0$, suprafața sau are un singur centru la infinit în direcția

$$l = A_{14}, \; m = A_{24}, \; n = A_{34}$$

sau centrul este nedeterminat (are o infinitate de centre situate pe o dreaptă sau într-un plan). Se zice că o astfel de suprafață este o *cuadrică fără centru unic la distanță finită*, mai simplu o *cuadrică fără centru.*

Reducerea ecuației unei cuadrice fără centru la forma canonică se va trata în §§ 7—8.

§ 2. INTERSECȚIA UNEI CUADRICE CU O DREAPTĂ

Fie dreapta r definită prin două puncte $P'(x_i')$ și $P''(x_i'')$; ecuațiile dreptei r sînt

$$x_i = hx_i' + x_i'', \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{8}$$

unde h este o coordonată proiectivă a punctelor de pe dreapta r.

Problema intersecției cuadricei (1) cu dreapta (8) se reduce la găsirea soluțiilor sistemului format din ecuația cuadricei și ecuațiile dreptei. Eliminantul acestui sistem se obține ținînd seamă de (8) în (1); deci, eliminantul este

$$h^2 f(x_1', x_2', x_3', x_4') + 2hf(x', x'') + f(x_1'', x_2'', x_3'', x_4'') = 0, \tag{9}$$

unde, după notația analogă aceleia întrebuințată în cazul conicelor, s-a pus

$$f(x', x'') = a_{ij}x_i'x_j'' = x_i'' f_{x_i'} = x_i' f_{x_i''}, \tag{9'}$$

f_{x_i} fiind semiderivatele (3'') ($f_{x_i'}$ și $f_{x_i''}$ înseamnă valorile pentru $x_i = x_i'$ și $x_i = x_i''$ respectiv ale semiderivatelor parțiale).

Rezultă că dreapta r întîlnește cuadrica în două puncte

$$Q_1(h_1x_i' + x_i''), \; Q_2(h_2x_i' + x_i''),$$

h_1, h_2 fiind rădăcinile ecuației (9).

După cum rădăcinile h_1, h_2 ale ecuației (9) sînt distincte, reale sau imaginare, punctele Q_1 și Q_2 sînt două puncte distincte, reale sau imaginare. În primul caz, dreapta este *secantă*, iar în al doilea caz, *exterioară* față de cuadrică. Dacă rădăcinile h_1, h_2 sînt confundate, dreapta r intersectează cuadrica în două puncte confundate, deci este *tangentă* la cuadrică.

Dacă ecuația în h este identic satisfăcută, dreapta r aparține cuadricei. Se spune că ea constituie o *generatoare* a suprafeței.

Avem deci

Propoziția. O dreaptă intersectează o cuadrică, în general, în două puncte.

Aplicații. 1) **Ecuația planului tangent la o cuadrică.** Să presupunem că punctul P' se găsește pe cuadrică, iar punctul $P'' = P$ este variabil; atunci ecuația (9) are o rădăcină infinită (rădăcina $h_1 = \infty$ este coordonata proiectivă corespunzătoare punctului P'). Însă dreapta $P'P$ va fi tangentă la suprafață, dacă și a doua rădăcină a ecuației (8) este infinită. În acest caz trebuie să avem

$$f(x', x) = x_1 f_{x_1'} + x_2 f_{x_2'} + x_3 f_{x_3} + x_4 f_{x_4'} = 0. \tag{10}$$

Rezultă că ecuația (10) reprezintă *locul geometric al dreptelor tangente la cuadrică*, duse prin P'. Deci, aceste drepte se găsesc în planul (10), numit *planul tangent* la cuadrică în punctul P'. În coordonate neomogene ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = 1$), dacă ținem seama de (9'), putem scrie ecuația planului tangent în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al cuadricei (1) sub *forma dedublată*

$$a_{11}x_0x + a_{22}y_0y + a_{33}z_0z + a_{12}(x_0y + y_0x) + a_{13}(x_0z + z_0x) + a_{23}(y_0z + z_0y) + \\ + a_{14}(x + x_0) + a_{24}(y + y_0) + a_{34}(z + z_0) + a_{44} = 0. \tag{10'}$$

Prin urmare, ca și la conice, ecuația planului tangent într-un punct al cuadricei se obține din ecuația cuadricei prin dedublare. Pe de altă parte, ținînd seama de formule (9) din capitolul XIII, rezultă că ecuația planului tangent într-un punct $P_0(x_0, y_0, z_0)$ la cuadrica (1) se scrie încă

$$(x - x_0) f'_{x_0} + (y - y_0) f'_{y_0} + (z - z_0) f'_{z_0} = 0. \qquad (10'')$$

Planul tangent este un plan bine determinat, abstracție făcînd de cazul cînd avem

$$\left.\begin{aligned} f_{x'_1} &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 + a_{14}x'_4 = 0, \\ f_{x'_2} &= a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 + a_{24}x'_4 = 0, \\ f_{x'_3} &= a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 + a_{34}x'_4 = 0, \\ f_{x'_4} &= a_{41}x'_1 + a_{42}x'_2 + a_{43}x'_3 + a_{44}x'_4 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Un punct de pe cuadrică îndeplinind aceste condiții, în care deci planul tangent este nedeterminat, se numește *punct singular*. Existența unor valori x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, nu toate nule, satisfăcînd sistemul (11), nu este însă posibilă decît dacă determinantul $A = |a_{ij}|$ al sistemului, deci discriminantul cuadricei (1), este nul. Așadar:

O cuadrică ireductibilă (nedegenerată) are un plan tangent bine determinat în fiecare punct.

În virtutea relației lui Euler (7), punctul P' fiind pe cuadrică, cele patru condiții (11) se reduc numai la trei, ecuațiile (4'') ale centrului.

Putem deci enunța următorul *rezultat*:

Un punct singular al cuadricei este un centru.

Cu alte cuvinte, dacă centrul Ω al unei cuadrice este la distanță finită și se găsește pe suprafață, atunci cuadrica este degenerată, iar punctul Ω este un punct singular al cuadricei.

Deoarece vîrful conului este un centru unic (la distanță finită), rezultă că un con admite un singur punct singular, vîrful său. Pentru o pereche de plane secante, dreapta de intersecție r fiind o dreaptă de centre, înseamnă că r este o dreaptă de puncte singulare.

2) **Generatoarele rectilinii ale cuadricelor.** Am văzut că dacă ecuația în h este identic verificată, dreapta r este o generatoare a cuadricei. Putem determina ecuațiile generatoarelor unei cuadrice (1) și astfel: fie cuadrica definită prin ecuația sa generală (1). Pentru ca dreapta de ecuații reduse

$$\begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q \end{cases}$$

să se găsească pe cuadrică, trebuie ca, înlocuind pe x și y în ecuația (1), să obținem o relație care să fie o *identitate* în z. Scriind această condiție, obținem trei ecuații în a, b, p, q; acest sistem de ecuații permite să se determine coeficienții ecuațiilor generatoarelor rectilinii ale cuadricei.

3) **Con circumscris unei cuadrice.** Să presupunem că punctul P' este fix, iar punctul $P'' = P$ este variabil. Dreapta $P'P$ este tangentă la cuadrică, dacă ecuația în h admite o rădăcină dublă; deci, realizantul ecuației (9) fiind nul, coordonatele punctului P trebuie să satisfacă condiția

$$[f(x';\ x)]^2 - f(x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ x'_4)\, f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0. \tag{12}$$

Rezultă că tangentele duse din P' la cuadrică sînt pe conul de ordinul al doilea (12), numit *conul circumscris* cuadricei cu vîrful în P'.

§ 3. INTERSECȚIA UNEI CUADRICE CU UN PLAN

Fiind dată o cuadrică, intersecția ei cu un plan este o conică. Într-adevăr, printr-o transformare ortogonală, putem alege planul dat drept unul din planele coordonate, de exemplu drept plan Oxy. Atunci, intersecția sa cu cuadrica de ecuație (1) este conica

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0, \\ z = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Această conică poate fi reală sau imaginară, ireductibilă sau degenerată. Avem deci

Teoremă. Un plan intersectează o cuadrică după o conică.

Aplicații. 1) Intersecția planului tangent — într-un punct regulat al unei cuadrice — cu cuadrica. Fie P_0 un punct regulat al cuadricei (1). Putem presupune că originea este în punctul P_0. În această situație (care poate fi totdeauna realizată printr-o translație), ecuația cuadricei este de forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z = 0.$$

În ceea ce privește planul tangent în origine, acesta este dat de ecuația

$$a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z = 0,$$

care se obține din (10'), unde ținem seama că $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ și $a_{44} = 0$.

Așadar:

Dacă originea este un punct regulat al unei cuadrice, ecuația planului tangent în origine se obține anulînd grupul termenilor de gradul întîi din ecuația cuadricei.

Luînd planul tangent în origine ca plan Oxy (ceea ce este totdeauna posibil de realizat printr-o rotație), deducem că trebuie să avem

$$a_{14} = a_{24} = 0, \qquad a_{34} \neq 0,$$

încît *ecuația unei cuadrice tangente în origine la planul Oxy este de forma*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{34}z = 0. \tag{14}$$

Intersecția cuadricei (14) cu planul Oxy, tangent în origine, este conica

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0, \\ z = 0, \end{cases} \tag{14'}$$

constituită din două drepte care trec prin origine (punctul de contact al planului tangent).

Discriminantul cuadricei (14) fiind

$$A = -(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\, a_{34}^2,$$

deducem că, în cazul cînd cuadrica este ireductibilă, ceea ce are loc dacă $A \neq 0$, deci

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0, \quad a_{34} \neq 0,$$

dreptele (14') sînt distincte (reale sau imaginare).

Cînd însă cuadrica este degenerată, diferită de o pereche de plane, ceea ce are loc dacă $A = 0$, deci

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \quad a_{34} \neq 0,$$

coeficienții a_{11}, a_{22}, a_{12} nefiind toți nuli*, dreptele (14') sînt confundate (reale).

Dreptele (14') situate pe cuadrica (14) *sînt două generatoare* ale cuadricei.

Putem deci enunța

Propoziție. Planul tangent într-un punct regulat al unei cuadrice reale intersectează cuadrica după două generatoare, distincte (reale sau imaginare) sau confundate (reale), după cum cuadrica este nedegenerată (ireductibilă) sau degenerată (diferită de o pereche de plane).

Ne putem întreba dacă, printr-un punct regulat al unei cuadrice, diferită de o pereche de plane, mai trece vreo altă generatoare, în afara celor două (distincte sau confundate), după care planul tangent în punctul considerat intersectează cuadrica**? Răspunsul la această întrebare este negativ.

Într-adevăr, să presupunem că mai există o altă generatoare a cuadricei (14), prin origine, nesituată în planul $z = 0$. Dacă $l, m, n \neq 0$ sînt parametrii directori ai acestei generatoare, ecuațiile ei parametrice sînt de forma

$$x = lt, \qquad y = mt, \qquad z = nt, \tag{14''}$$

t fiind parametrul pe generatoare.

---

* Dacă $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$, ecuația (14) devine

$$2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{34}z = 0$$

și se descompune în ecuațiile

$$2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + 2a_{34} = 0 \text{ și } z = 0,$$

care reprezintă două plane.

** În cazul cînd cuadrica degenerează în două plane, prin orice punct P regulat al cuadricei (orice punct al unuia din plane, nesituat pe dreapta lor de intersecție) trec o infinitate de generatoare (o infinitate de drepte aparținînd planului în care este situat P).

Din acestea și din ecuația cuadricei deducem ecuația

$$(a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{13}ln + 2a_{23}mn)t^2 + 2a_{34}nt = 0,$$

care, în ipoteza (în care ne-am situat) că dreapta (14'') ar fi generatoare, ar trebui să fie verificată oricare ar fi t. Acest fapt nu poate însă avea loc, deoarece $a_{34} \neq 0$, $n \neq 0$.

Așadar:

Printr-un punct regulat al unei cuadrice reale, diferită de o pereche de plane, trec două (și numai două) generatoare, distincte (reale sau imaginare) sau confundate (reale), după cum cuadrica este ireductibilă sau degenerată.

2) **Natura punctelor unei cuadrice.** Un punct al unei cuadrice reale se numește *punct eliptic*, *hiperbolic* sau *parabolic*, după cum cele două generatoare ale cuadricei* care trec prin el sînt distincte imaginare, distincte reale sau confundate (reale).

Elipsoidul, hiperboloidul cu două pînze și paraboloidul eliptic sînt cuadrice, pentru care toate punctele sînt eliptice. Ele sînt cuadrice neriglate (sau riglate imaginar).

Hiperboloidul cu o pînză și paraboloidul hiperbolic sînt cuadrice, pentru care toate punctele sînt hiperbolice. Ele sînt cuadrice dublu riglate (real).

Dintre cuadricele degenerate, cilindrii (eliptic, hiperbolic sau parabolic) și conul (real) sînt suprafețe pentru care toate punctele (cu excepția vîrfului, la con) sînt parabolice. Ele sînt cuadrice riglate (real).

Să demonstrăm

Propoziție. O cuadrică reală* nu poate avea decît puncte de aceeași natură.

În demonstrația acestei propoziții ținem seama de propoziția precedentă. Deoarece printr-un punct al unei cuadrice degenerată (diferită de o pereche de plane) trec două generatoare confundate, înseamnă că o astfel de cuadrică (con sau cilindru) are numai puncte parabolice.

Dacă cuadrica este ireductibilă, prin fiecare punct al ei trec două generatoare distincte, reale sau imaginare. Să arătăm că o astfel de cuadrică are numai puncte eliptice sau numai puncte hiperbolice. Într-adevăr, fie P un punct hiperbolic al cuadricei ireductibile Γ, r și s generatoarele reale care trec prin P și care determină planul tangent în P la cuadrică (fig. 1). Să considerăm un alt punct Q pe suprafață, neaparținînd nici uneia din generatoarele r și s. Planul (Qr), determinat de Q și dreapta r, intersectează cuadrica după dreapta r și după o altă dreaptă s' (deoarece intersecția unui plan cu o cuadrică este o conică și dacă această conică conține o dreaptă, dreapta r, ea mai conține o alta, dreapta s').

*. Diferită de o pereche de plane.

Dreapta s' trece prin Q, deoarece Q aparține intersecției și neaparținînd dreptei r trebuie să aparțină dreptei s'. Dacă P' este punctul de intersecție al dreptelor r și s', rezultă că planul (Qr) este planul tangent la cuadrică în punctul P'. Observăm că dreptele s, s' nu se întîlnesc, deoarece, dacă s-ar întîlni, generatoarele r, s, s' ar fi situate într-un plan, și intersecția acestui plan cu cuadrica n-ar fi o conică, ci o cubică (constituită din r, s, s').

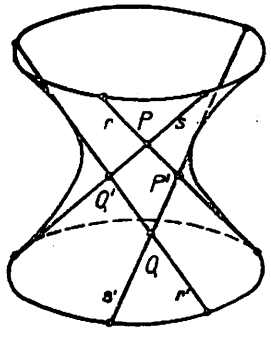


Fig. 1

În mod asemănător, planul (Qs), determinat de Q și dreapta s, intersectează cuadrica după dreapta s și o altă dreaptă r' care nu se intersectează cu r. Deci, prin Q trec două generatoare r' și s', încît Q este și el un punct hiperbolic.

Așadar, dacă un punct P al unei cuadrice ireductibile este hiperbolic, toate punctele ei sînt hiperbolice. *O cuadrică cu puncte hiperbolice* este *o cuadrică riglată*, înțelegînd prin aceasta că cuadrica are generatoare reale. Generatoarele se împart în două familii, r, r', ...; s, s', ..., cu proprietățile:

— prin fiecare punct al cuadricei trece o generatoare din fiecare familie;

— două generatoare din aceeași familie nu se întîlnesc (sînt strîmbe între ele).

Rezultă, de asemenea, că dacă un punct al unei cuadrice ireductibile este eliptic, toate punctele ei sînt eliptice. În adevăr, dacă această cuadrică ar avea cel puțin un singur punct hiperbolic, toate punctele ei ar fi hiperbolice. O cuadrică cu puncte eliptice este o *cuadrică cu generatoare imaginare*, deoarece planul tangent într-un punct al cuadricei intersectează suprafața după două drepte imaginar conjugate, care se întîlnesc în punctul de contact. De aceea, cuadricele cu puncte eliptice se numesc *cuadrice neriglate* (real).

3) **Conica de la infinit a cuadricei.** Să considerăm intersecția unei cuadrice cu planul de la infinit. Conica de intersecție, pe care s-o notăm cu K_∞, are ecuațiile

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Prima ecuație a sistemului (15) reprezintă o cuadrică Γ, și anume un con cu vîrful în origine sau o pereche de plane trecînd prin origine, după cum $A_{44} \neq 0$ sau $A_{44} = 0$. Deci, conica improprie K_∞ a cuadricei apare și ca intersecția cuadricei Γ cu planul de la infinit. Conica impropie K_∞ este reală sau imaginară, după cum cuadrica Γ este reală sau imaginară, iar K_∞ este ireductibilă sau degenerată, după cum cuadrica Γ este un con sau o pereche de plane.

După natura conicei K_∞ putem realiza o clasificare a cuadricelor. Distingem trei cazuri, după cum conica K_∞ este fie ireductibilă, imaginară sau reală, fie degenerată.

Cuadricele pentru care K_∞ este o conică ireductibilă imaginară pot fi elipsoizi imaginari, elipsoizi reali sau conuri imaginare de gradul al doilea.

Cuadricele pentru care conica K_∞ este ireductibilă reală sînt hiperboloizi cu o pînză (hiperboloizi riglați) și hiperboloizi cu două pînze (hiperboloizi neriglați) sau conuri (reale de gradul al doilea).

Cuadricele pentru care conica K_∞ este degenerată sînt paraboloizi, cilindri de gradul al doilea sau perechi de plane.

Acestea se arată ușor folosind ecuațiile canonice ale cuadricelor.

De aceea, cuadricele se zic că sînt de *gen elipsoid*, de *gen hiperboloid* sau de *gen paraboloid*, după cum K_∞ este o conică ireductibilă imaginară, o conică ireductibilă reală sau o conică degenerată.

În tabelă este dată clasificarea cuadricelor.

Tabela 1

		Genul cuadricei		Natura cuadricei	Tipul cuadricei				
K_∞ conică ireductibilă	cuadrică cu centru ($A_{44} \neq 0$)	K_∞ imaginară	gen elipsoid	nedegenerată ($A \neq 0$)	Elipsoid imaginar				
					Elipsoid real				
				degenerată ($A = 0$)	Con imaginar				
		K_∞ reală	gen hiperboloid	nedegenerată ($A \neq 0$)	Hiperboloid cu o pînză				
					Hiperboloid cu două pînze				
				degenerată ($A = 0$)	Con real				
K_∞ conică degenerată	cuadrică fără centru ($A_{44} \neq 0$)	gen paraboloid		nedegenerată ($A \neq 0$)	Paraboloid eliptic				
					Paraboloid hiperbolic				
				degenerată ($A = 0$)	Cilindru	imaginar			
						eliptic			
						hiperbolic			
						parabolic			
					Pereche de plane	distincte	secante	imaginare	
								reale	
							paralele	imaginare	
								reale	
						confundate			

Criteriile necesare și suficiente pentru determinarea tipului unei cuadrice vor fi analizate în § 8.

Fie C_∞ cercul absolut al spațiului. Conica K_∞ și cercul C_∞ se intersectează în patru puncte, două cîte două imaginar conjugate, deoarece coeficienții acestor conice sînt reali. Dacă M și M', N și N' sînt aceste două perechi de puncte, rezultă că patruunghiul format cu ele are două laturi opuse reale $\overline{MM'}$ și $\overline{NN'}$, celelalte perechi de laturi $\overline{MN}$, $\overline{M'N'}$ și $\overline{MN'}$, $\overline{NM'}$ fiind două cîte două imaginar conjugate (fig. 2). Deci, triunghiul PQR, autoconjugat celor două conice, este real. Ecuația fasciculului (K_∞, C_∞) este

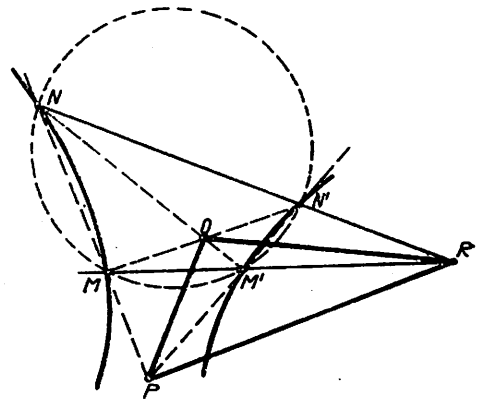


Fig. 2

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0, \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad (15')$$

$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, 0)$ fiind primul membru al primei ecuații (15). Conicele degenerate din acest fascicul sînt perechile de laturi opuse ale patruunghiului $MM'NN'$.

4) **Secțiuni circulare ale cuadricei.** Intersecția unui plan cu o cuadrică constituie o *secțiune circulară a cuadricei*, dacă planul intersectează cuadrica după un cerc. Observăm că planul unei secțiuni circulare a cuadricei intersectează planul de la infinit după una din cele șase laturi ale patruunghiului $MM'NN'$, deoarece punctele de la infinit ale cercului sînt puncte absolute, aparținînd cercului C_∞, și aceste puncte trebuie să se găsească și pe conica K_∞. Rezultă că dacă un plan dă o secțiune circulară a cuadricei, orice plan paralel cu acesta dă tot o secțiune circulară. Deci, *există șase familii de plane care dau secțiuni circulare*, grupate două cîte două, corespunzînd perechilor de laturi opuse ale patruunghiului. Dintre aceste șase familii de plane numai două dau secțiuni reale, și anume acelea care trec prin dreptele reale MM', NN'.

Cazul cînd conica K_∞ este formată din două drepte reale distincte, cînd cuadrica este un paraboloid hiperbolic sau un cilindru hiperbolic, constituie o excepție; în acest caz, secțiunile circulare sînt cercuri degenerate, formate din drepte la distanță finită și una din dreptele conicei K_∞. Rezultă deci

Teoremă. Fiind dată o cuadrică ireductibilă reală, care nu este un paraboloid hiperbolic, există două familii de plane paralele care intersectează cuadrica după cercuri.

Cele două familii de plane coincid, dacă cuadrica este de rotație.

S-au numit *puncte ombilicale* (sau *ombilici*) punctele de contact ale planelor secțiunilor circulare tangente. Deci, o cuadrică are 12 puncte ombilicale, dintre care numai patru sînt reale dacă cuadrica are puncte eliptice. Dacă cuadrica neriglată este de rotație, cele patru puncte ombilicale reale se confundă două cîte două, fiind punctele de intersecție ale suprafeței cu axa ei de rotație.

5) **Ecuația tangențială a cuadricei.** Fie planul de ecuație

$$\xi_i x_i = 0 \qquad (i = 1,2,3,4).$$

Acest plan este tangent cuadricei (1'''), dacă coeficienții ecuației sînt proporționali cu coeficienții ecuației generale (10) a planului tangent în $P'(x_1', x_2', x_3', x_4')$ la cuadrică. Obținem astfel condițiile

$$\frac{f_{x_1'}}{\xi_1} = \frac{f_{x_2'}}{\xi_2} = \frac{f_{x_3'}}{\xi_3} = \frac{f_{x_4'}}{\xi_4}, \text{ adică } \rho\xi_i = f_{x_i'}.$$

Însă punctul de contact P' găsindu-se în planul tangent, avem

$$\xi_i x_i' = 0.$$

Obținem astfel cinci ecuații omogene în x_i, ρ. Condiția ca acest sistem să admită soluție nebanală este

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & -\xi_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & -\xi_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & -\xi_3 \\ a_{14} & a_{21} & a_{34} & a_{44} & -\xi_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

și se mai scrie

$$A_{ij}\xi_i\xi_j = 0, \qquad (i, j = 1,2,3,4), \qquad (16)$$

unde A_{ij} sînt complementii algebrici ai elementelor a_{ij} în determinantul A. Ecuația (16) se numește *ecuația tangențială* a cuadricei, deoarece exprimă relația dintre coordonatele tangențiale ξ_i ale planelor tangente la cuadrică (și numai ale acestora).

Trecînd la coordonate tangențiale neomogene

$$u = \frac{\xi_1}{\xi_4}, \quad v = \frac{\xi_2}{\xi_4}, \quad w = \frac{\xi_3}{\xi_4},$$

putem scrie ecuația tangențială a cuadricei sub forma

$$A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}uw + 2A_{23}vw + 2A_{14}u + 2A_{24}v + 2A_{34}w + A_{44} = 0. \qquad (16')$$

§ 4. INTERSECȚIA A DOUĂ CUADRICE

Amintim (v. Cap. XIII, § 2) că o *curbă strîmbă* se zice *algebrică*, dacă putem face să treacă prin această curbă două suprafețe algebrice. O astfel de curbă poate fi intersecția *completă* sau *necompletă* a suprafețelor algebrice, după cum curba conține toate punctele de intersecție a suprafețelor sau numai o parte din ele. Se știe apoi că dacă m și n sînt gradele suprafețelor algebrice, un plan oarecare le intersectează respectiv după curbe plane de gradele m și n, curbe ce se intersectează în mn puncte. Cu alte cuvinte, un plan intersectează curba strîmbă în mn puncte; în acest caz, intersecția suprafețelor date este completă, gradul curbei de intersecție fiind mn. Dacă un plan oarecare intersectează curba strîmbă în $r < mn$ puncte și r este constant, oricare ar fi planul, atunci intersecția suprafețelor date este necompletă, curba de intersecție fiind de gradul r.

Fie

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + \ldots + a_{44} = 0$$

și

$$g(x, y, z) = b_{11}x^2 + \ldots + b_{44} = 0,$$

ecuațiile a două cuadrice. Însă cuadricele sînt suprafețe algebrice de gradul al doilea. Deci, *intersecția cuadricelor* $f = 0$ și $g = 0$ este, în general, *o curbă algebrică strîmbă de ordinul al patrulea*, care se mai numește *cuartică strîmbă*, avînd ecuațiile

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Într-adevăr, un plan oarecare intersectează fiecare cuadrică $f = 0$ și $g = 0$, după cîte o conică și aceste conice se intersectează în patru puncte. Deci, un plan oarecare intersectează curba de intersecție a două cuadrice în patru puncte, ceea ce justifică denumirea de *cuartică* dată acestei curbe.

Dacă două cuadrice au o dreaptă comună (deci se intersectează de-a lungul unei generatoare), *ele mai au în comun o curbă de gradul al treilea, care în general este o cubică strîmbă.*

În cazul cînd cele două cuadrice, care au în comun o generatoare, sînt tangente în mai mult decît două puncte ale acelei generatoare, atunci ele sînt tangente în orice punct al generatoarei comune. În acest caz, intersecția celor două cuadrice este constituită din generatoarea luată de două ori și o conică (ireductibilă sau degenerată). În adevăr, deoarece cuadricele sînt tangente într-un punct, au același plan tangent în acel punct, și cum putem lua punctul ca origine a axelor de coordonate, planul tangent ca plan Oxy și axa Ox ca generatoare comună, putem presupune că ecuațiile celor două cuadrice sînt de forma

$$f = a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{34}z = 0$$

și

$$g = b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + 2b_{34}z = 0.$$

Planele tangente la aceste cuadrice într-un punct $P_0(x_0,\ y_0 = 0,\ z_0 = 0$ al axei Ox sînt

$$a_{12}x_0y + (a_{13}x_0 + a_{34})z = 0, \text{ respectiv } b_{12}x_0y + (b_{13}x_0 + b_{34})z = 0.$$

Potrivit ipotezei, planele tangente în origine coincid cu planul Oxy. Dacă și în punctul $P_0 \not\equiv 0$ aceste plane coincid, atunci

$$\frac{a_{12}x_0}{b_{12}x_0} = \frac{a_{13}x_0 + a_{34}}{b_{13}x_0 + b_{34}},$$

deci

$$(a_{12}b_{13} - a_{13}b_{12})x_0 + a_{12}b_{34} - a_{34}b_{12} = 0.$$

În general, această ecuație definește o valoare unică pentru abscisa x_0 a punctului P_0, abstracție făcînd de cazul cînd avem

$$a_{12}b_{13} - b_{12}a_{13} = 0,\ a_{12}b_{34} - b_{12}a_{34} = 0,$$

caz în care planele tangente în P_0 coincid, oricare ar fi P_0 pe axa Ox.

În particular, aceste condiții sînt satisfăcute dacă

$$a_{34} = a_{12} = b_{12} = 0 \quad \text{sau} \quad a_{34} = a_{12} = a_{13} = 0.$$

În primul caz, cuadrica $f = 0$ este un con cu vîrful în origine ($A_{44} = -a_{22}a_{13}^2$, $A = 0$), iar cuadrica $g = 0$, presupunînd $b_{22} = 0$, se compune din planul Oxy și un alt plan. Deducem că planul Oxy intersectează conul $f = 0$ după axa Ox, luată de două ori, iar al doilea plan intersectează acest con după o conică.

În al doilea caz, cuadrica $f = 0$ se compune din două plane care trec prin axa Ox ($A_{44} = A = 0$). Aceste plane intersectează cuadrica $g = 0$ după axa Ox și după cîte o dreaptă. Intersecția acestor două cuadrice este astfel compusă din axa Ox luată de două ori și două drepte care o întîlnesc.

Dacă două cuadrice au o conică comună, restul intersecției este tot o conică. În adevăr, deoarece putem alege ca plan xOy planul conicei comune, ecuația acestei conice fiind

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

rezultă că ecuațiile celor două cuadrice sînt de forma

$$f \equiv F(x, y) + z\pi_1 = 0, \text{ respectiv } g = F(x, y) + z\pi_2 = 0,$$

π_i ($i = 1, 2$) fiind funcții liniare de x, y, z. Ecuațiile intersecției acestor cuadrice se pot scrie

$$\begin{cases} f = 0, \\ f - g = z(\pi_1 - \pi_2) = 0, \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} f = 0, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} f = 0, \\ \pi_1 - \pi_2 = 0, \end{cases}$$

reprezentînd conica din planul Oxy și o altă conică aflată în planul $\pi_1 - \pi_2 = 0$. În general, aceste cuadrice sînt în plane diferite; deci, ele au două puncte comune P și Q.

Dacă două cuadrice sînt tangente în două puncte P, Q și mai trec printr-un punct R, atunci planul PQR intersectează cuadricele sau după o conică comună, avînd în P, Q, R tangente date, sau după conice degenerate, avînd dreapta PQ comună.

Dacă două cuadrice sînt tangente în trei puncte necoliniare P, Q, R, atunci cele două cuadrice se intersectează după o conică, trecînd prin P, Q, R. În cazul cînd conica Γ nu este degenerată, fiecare punct al ei este un punct de tangență. În acest caz, intersecția cuadricelor date este această conică luată de două ori; cu alte cuvinte, cele două cuadrice sînt bitangente de-a

lungul unei conice. În cazul cînd conica Γ este degenerată în două drepte PQ și PR, intersecția celor două cuadrice este constituită din aceste drepte și o conică situată într-un alt plan, trecînd prin punctele Q și R.

Două cuadrice pot să aibă patru puncte de tangență comune, fără să aibă o infinitate; sînt cuadricele care conțin muchiile tetraedrului, ale cărui vîrfuri sînt cele patru puncte.

Dacă două cuadrice au o dreaptă sau o conică comună, situate în planul impropriu al spațiului, se spune că intersecția este necompletă.

§ 5. POLARITATE IN RAPORT CU O CUADRICĂ

Puncte conjugate în raport cu o cuadrică. Fie două puncte $P'(x_i')$, $P''(x_i'')$ $(i=1, 2, 3, 4)$ și cuadrica Γ de ecuație (1''). Dreapta $P'P''$, de ecuații (8), intersectează cuadrica Γ în punctele $Q_1(h_1x_i' + x_i'')$, $Q_2(h_2x_i' + x_i'')$, unde h_1 și h_2 sînt rădăcinile ecuației (9).

Punctele P', P'' se numesc *conjugate* în raport cu cuadrica Γ, dacă formează împreună cu punctele Q_1, Q_2 un biraport armonic, deci $(P'P''Q_1Q_2) = -1$. Condiția este dată, ca și în cazul conicelor, de ecuația

$$f(x';\ x'') = 0.$$

Într-adevăr, deoarece $P'(h = 0)$ și $P''(h = \infty)$, obținem

$$(P'P''Q_1Q_2) = (0\ \infty\ h_1\ h_2) = \frac{h_1}{h_2} = -1;$$

deci

$$h_1 + h_2 = 0.$$

Însă h_1 și h_2 fiind rădăcinile ecuației (9), suma lor este egală cu zero, dacă coeficientul lui h este nul; de aici rezultă condiția de conjugare a celor două puncte P', P'' în raport cu cuadrica Γ.

Punctul P' este *autoconjugat* (coincide cu conjugatul său) dacă avem

$$f(x';\ x') = x_i'f_{x_i'} = 0;$$

ținînd seama de relația lui Euler (7) pentru funcții omogene, această condiție se mai scrie

$$f(x') = 0.$$

Rezultă că un punct P' este autoconjugat, dacă aparține cuadricei.

Dacă punctul P' este fix, iar dreapta $P'P''$ este variabilă (descriind o stea de drepte cu centrul în P'), locul geometric al punctului $P'' \equiv P$, conjugat cu P' în raport cu cuadrica , este un plan, *planul polar* al lui P', reprezentat de ecuația

$$f(x';\ x) \equiv x_if_{x_i'} = 0, \tag{17}$$

care se scrie dezvoltat

$$x_1f_{x_1'} + x_2f_{x_2'} + x_3f_{x_3'} + x_4f_{x_4'} = 0. \tag{17'}$$

Observăm că planul polar coincide cu planul tangent (10), dacă punctul P' se găsește pe cuadrică, adică dacă punctul P' este autoconjugat.

Polaritate în raport cu o cuadrică. O cuadrică face să corespundă la orice punct un plan, planul polar, ale cărui coordonate tangențiale omogene pot fi luate sub forma

$$\rho\xi_i' = f_{x_i'} = a_{ij}x_j', \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \qquad (17'')$$

unde ρ este un factor de proporționalitate. Se pune întrebarea: cînd are loc proprietatea reciprocă? Deci, cînd unui plan îi corespunde un punct, *polul* planului?

Pentru aceasta este necesar și suficient ca sistemul (17'') să poată fi rezolvat în raport cu x_i', ceea ce are loc numai dacă determinantul $A = |a_{ij}|$ este diferit de zero; în acest caz, utilizînd regula lui Cramer, obținem

$$x_i' = \frac{A_{ji}}{A}\xi_j' \text{ sau încă } \rho' x_i' = A_{ji}\xi_j', \qquad (17''')$$

dacă ținem seama că x_i' sînt coordonate omogene.

Deci, dacă cuadrica (1'') este ireductibilă, formulele (17''), (17''') realizează o corespondență biunivocă între punctele și planele spațiului; corespondența (17''), (17'''), în virtutea căreia *oricărui punct în spațiu îi corespunde un plan, planul său polar, și oricărui plan un punct, polul său, poartă numele de polaritate în raport cu cuadrica nedegenerată* (1'').

Se poate observa că polul se găsește în propriul său plan polar, dacă polul aparține cuadricei, deoarece avem în acest caz

$$x_i' f_x' = 0, \text{ adică } f(x') = 0.$$

Invers, planul polar își conține polul, dacă este un plan tangent la suprafață. Asemenea puncte și plane se numesc autoconjugate în polaritatea (17''), (17'''). Deci, *dacă polul aparține planului său polar, punctul aparține cuadricei (este autoconjugat), iar planul polar este planul tangent în punctul considerat.*

Altfel spus, *dacă un plan polar își conține polul, planul este tangent cuadricei, polul fiind punctul de tangență.*

Două plane se numesc conjugate în aceeași polaritate, dacă polul unuia se găsește pe celălalt. Să scriem că polul planului (ξ_i'), acest pol avînd coordonatele (17'''), se găsește în planul

$$\xi_i'' x_i = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

obținem condiția de conjugare a celor două plane sub forma

$$A_{ij}\xi_i'\xi_j'' = 0, \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Punînd condiția ca planul să fie autoconjugat, deci ca planele (ξ_i'), (ξ_i'') să coincidă cu un același plan (ξ_i), obținem ecuația (16), care constituie ecuația tangențială a cuadricei în coordonate tangențiale omogene.

Proprietăți ale polarității în raport cu o cuadrică. 1° *Dacă un plan descrie o stea de plane cu centrul în punctul fix P_0, polul său P descrie un plan, planul polar al punctului P_0.*

În adevăr, polul P fiind conjugat cu P_0, locul său este planul polar al punctului P_0.

2° *Dacă un punct P descrie un plan, planul său polar trece printr-un punct fix P_0, adică generează o stea de plane al cărei centru este polul planului descris de P.*

În adevăr, punctul P și polul P_0 fiind conjugate față de cuadrică, planul polar al punctului P conține polul P_0.

3° *Dacă un punct P descrie o dreaptă r, planul polar corespunzător descrie un fascicul de plane.*

În adevăr, dacă punctul P descrie dreapta (8), coordonatele planului polar sînt:

$$\rho\xi_i = a_{ij}x_j = ha_{ij}x'_j + a_{ij}x''_j. \qquad (17^{IV})$$

Rezultă că planele (ξ_i) aparțin fasciculului format de planele

$$\xi'_i = a_{ij}x'_j, \quad \xi''_i = a_{ij}x''_j,$$

aceste plane fiind planele polare ale punctelor P' și P'' ce determină dreapta (8). Observăm că coordonatele ξ_i nu pot fi independente de h, decît dacă ξ'_i ar fi proporționale cu ξ''_i; în acest caz, planele polare în două puncte distincte coincid, ceea ce are loc dacă cuadrica este degenerată.

Drepte conjugate în raport cu o cuadrică. În polaritatea în raport cu o cuadrică, unei drepte r îi corespunde o dreaptă r', axa fasciculului de plane ale căror poluri aparțin dreptei r, proprietatea fiind reciprocă. Dreptele r și r' se numesc *drepte conjugate în polaritate* sau *drepte polare*. Deci, două drepte se zic *conjugate*, dacă fiecare este axa fasciculului planelor polare ale punctelor celeilalte. Aceste drepte r și r' sînt, în general, strîmbe între ele. În cazul în care dreptele r și r' se intersectează, punctul lor comun P_0 este un punct autoconjugat, deci este un punct al cuadricei. Deoarece planul polar al lui P_0 trebuie să treacă și prin r și prin r', rezultă că dreptele r, r' sînt tangente la cuadrică, deci situate în planul tangent. Cu alte cuvinte, oricărei drepte r trecînd printr-un punct P_0 al cuadricei îi corespunde o dreaptă r' trecînd tot prin P_0, dreptele autoconjugate trecînd prin P_0, fiind generatoarele cuadricei. În adevăr, *dacă o dreaptă este autoconjugată, fiecare punct al ei este autoconjugat*, deci dreapta aparține cuadricei, fiind o generatoare a cuadricei.

Observăm că planele tangente în două puncte P și Q la o cuadrică riglată se întîlnesc după o dreaptă $P'Q'$, iar planele tangente în P' și Q' se întîlnesc după dreapta PQ (fig. 1). Rezultă că dreptele PQ și $P'Q'$ sînt drepte conjugate în raport cu cuadrica dată. Deci, dacă o dreaptă r intersectează sau nu cuadrica, atunci și dreapta conjugată r' intersectează sau nu cuadrica.

Să presupunem că o dreaptă r intersectează o cuadrică neriglată în două puncte reale P, Q. Prin această dreaptă nu se pot duce plane tangente reale la cuadrică, deoarece un astfel de plan ar intersecta cuadrica după drepte reale, care ar trece prin punctul de tangență și prin punctele P, Q. Însă planele tangente în punctele P, Q la cuadrică se intersectează după o dreaptă r',

conjugată dreptei r, care nu întîlnește cuadrica dată. În adevăr, în caz contrar, prin r' nu s-ar putea duce plane tangente reale. Deci, dacă două drepte r și r' sînt conjugate în raport cu o cuadrică neriglată, una din ele intersectează cuadrica, iar cealaltă este exterioară cuadricei.

Proprietăți ale dreptelor conjugate în raport cu o cuadrică. 1° *Polurile planelor care trec prin dreapta r se găsesc pe dreapta conjugată r'.*

Într-adevăr, fie r dreapta determinată de punctele P' și P''; un plan oarecare trecînd prin r are polul său în planele polare ale lui P' și P'', deci pe dreapta r'' — intersecția lor.

Cu alte cuvinte, fiind dată o dreaptă r determinată de două puncte $P'(x_i')$ și $P''(x_i'')$, dreapta conjugată r' este dreapta de intersecție a planelor polare

$$f_{x_i'} = 0, \quad f_{x_i''} = 0$$

ale punctelor P' și P''.

2° *Două puncte oarecare Q și Q' situate respectiv pe două drepte conjugate r și r' sînt conjugate.*

În adevăr, planul polar al punctului $Q \in r$ conține dreapta r', deci pe celălalt punct Q'.

Aplicație. Tetraedru autoconjugat. Un *tetraedru* se zice că este *autoconjugat* față de o cuadrică, dacă *fiecare față este planul polar al vîrfului opus.*

Construcția unui asemenea tetraedru se face astfel: se ia un punct arbitrar A și în planul său polar alte două puncte arbitrare B,C.

Observăm că planele polare ale punctelor B și C se intersectează după o dreaptă care trece prin A și care intersectează planul polar al lui A într-un punct D. Să arătăm că *tetraedrul $ABCD$* astfel construit este *un tetraedru conjugat cuadricei.* În adevăr, din însăși construcția sa, proprietatea de definiție este verificată pentru punctele A, B, C. De asemenea și pentru vîrful D, deoarece acest punct fiind determinat prin intersecția planelor polare ale punctelor A,B,C, planul său polar conține punctele A, B, C; deci, planul polar al lui D coincide cu fața opusă ABC.

§ 6. PROPRIETĂȚI DIAMETRALE

Fie l, m, n parametrii directori ai unei direcții în spațiu.

Locul geometric al mijloacelor coardelor unei cuadrice, paralele cu direcția l, m, n dată, este un plan, numit planul diametral conjugat cu direcția l, m, n.

În adevăr, să considerăm într-o cuadrică coarde paralele cu direcția l, m,n. Fie x, y, z coordonatele mijlocului P al uneia din aceste coarde. Coordonatele celor două puncte de intersecție Q_1, Q_2 ale coardei cu cuadrica sînt de forma

$$\begin{cases} x + lt, \\ y + mt, \\ z + nt, \end{cases}$$

t fiind dat de ecuația

$$t^2\varphi(l, m, n) + 2t(lf_x + mf_y + nf_z) + f(x, y, z) = 0,$$

unde $\varphi(x, y, z) = a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) reprezintă grupul termenilor de gradul al doilea din ecuația (1) a cuadricei. Deoarece punctele Q_1, Q_2 sînt

egal depărtate de P (parametrul t este proporțional cu distanța PQ dintre punctul P prin care trece dreapta și punctul Q curent de pe dreaptă), rezultă că ecuația în t are două rădăcini egale și de semne contrare. Deci, coordonatele punctului $P(x, y, z)$, mijlocul coardei considerate, trebuie să satisfacă relația

$$lf_x + mf_y + nf_z = 0. \tag{18}$$

Deoarece, pentru orice alt punct care nu este mijloc de coardă paralelă cu direcția l, m, n, coeficientul lui t este diferit de zero, rezultă că relația (18) caracterizează proprietatea punctelor P de a fi mijloacele coardelor paralele cu direcția dată. Deci, ecuația (18), care este ecuația unui plan, este ecuația locului geometric căutat; altfel spus, *ecuația* (18) *este ecuația planului diametral conjugat cu direcția* l, m, n.

Proprietăți. 1° *Planul diametral conjugat cu direcția* l, m, n *este planul polar față de cuadrică al punctului* $P_\infty(l, m, n, 0)$, *situat la infinit în direcția de parametri directori* l, m, n.

În adevăr, știm că oricărui punct îi corespunde un plan polar față de conică. Deci, pe baza ecuației (17′) a planului polar și a proprietății de simetrie a funcției $f(x'; x)$, punctului $P'_\infty(l, m, n, 0)$ la infinit în direcția de parametri directori l, m, n, îi corespunde planul

$$lf_{x_1} + mf_{x_2} + nf_{x_3} = 0 \tag{18′}$$

care, în coordonate omogene ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = 1$), are ecuația (18).

Proprietatea geometrică care stă la baza definiției noțiunii de plan diametral rezultă din faptul că conjugatul armonic al mijlocului unui segment, în raport cu extremitățile segmentului, este punctul de la infinit în direcția dreptei suport a segmentului dat.

2° *Pentru o cuadrică cu centru, planele diametrale trec prin centru.*

De altfel, ecuația (18) e verificată de coordonatele centrului, soluția sistemului (4″), ori care ar fi l, m, n

3° *Orice plan diametral al unui paraboloid este paralel cu axa paraboloidului.*

În adevăr, ecuația redusă (canonică) a unui paraboloid (eliptic sau hiperbolic) este de forma (5) din capitolul XV, încît ecuația planului diametral conjugat direcției l, m, n este

$$\frac{l}{a^2}x + \varepsilon\frac{m}{b^2}y - n = 0,$$

ceea ce înseamnă că acest plan este paralel cu axa Oz (axa paraboloidului).

Aplicații. 1) **Diametri.** O dreaptă care trece prin centrul unei cuadrice se numește diametru. Dacă r este un diametru, dreapta conjugată r' va fi situată în planul polar al centrului, deci la infinit. Indicînd prin Q_1, Q_2 punctele de intersecție ale diametrului r cu cuadrica și cu P_∞ punctul de la infinit al dreptei r, rezultă că trebuie să avem

$$(\Omega P_\infty Q_1 Q_2) = -1;$$

deci, centrul Ω al cuadricei este mijlocul segmentului $\overline{Q_1Q_2}$. Lungimea segmentului $\overline{Q_1Q_2}$ se mai numește și *lungimea diametrului.*

Rezultă că diametrii unui paraboloid sînt toți paraleli între ei.

Știm că unei direcții (l, m, n) îi corespunde planul diametral (18) conjugat direcției. Despre *diametrul* paralel cu direcția (l, m, n) spunem că este *conjugat* planului diametral (18). Deoarece dreapta improprie a unui plan diametral și diametrul conjugat acestui plan sînt două drepte conjugate, rezultă că planul polar al unui punct care descrie un diametru generează un fascicul de plane paralele cu planul diametral conjugat.

Fie un plan π de ecuație

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Să arătăm că ecuațiile diametrului său conjugat în raport cu cuadrica (1) sînt

$$\frac{f_x}{A} = \frac{f_y}{B} = \frac{f_z}{C}. \tag{19}$$

În adevăr, această dreaptă trecînd prin centru este un diametru. Pe de altă parte, dreapta

$$\frac{\varphi_x}{A} = \frac{\varphi_y}{B} = \frac{\varphi_z}{C},$$

ale cărei ecuații se obțin din ecuațiile diametrului (19) suprimînd termenii liberi, este paralelă cu diametrul dat și trece prin originea axelor de coordonate. Deci, dacă l, m, n sînt parametrii directori ai acestei drepte, există pe dreaptă un punct $P(l, m, n)$ și avem

$$\frac{\varphi_l}{A} = \frac{\varphi_m}{B} = \frac{\varphi_n}{C}. \tag{19'}$$

Însă ecuația (18) a planului diametral conjugat direcției l, m, n, se mai poate scrie

$$x\varphi_l + y\varphi_m + z\varphi_n + a_{14}l + a_{24}m + a_{34}n = 0.$$

Deci, relația (19') exprimă că planul diametral conjugat direcției l, m, n și planul dat sînt paralele.

Se numesc *diametri conjugați* acei diametri care au proprietatea că coardele paralele unuia sînt împărțite în părți egale de celălalt. Din însăși definiția planului diametral rezultă că toți diametrii conjugați unui diametru se găsesc în planul dău diametral.

Proprietăți. 1° *Secțiunile făcute într-o cuadrică prin plane paralele cu un plan dat π sînt conice de același gen, avînd axele paralele, iar centrele pe diametrul conjugat planului π.*

Într-adevăr, printr-o rotație putem totdeauna lua planul π ca plan Oxy. Atunci, planele paralele cu planul π vor fi planele paralele cu planul de coordonate Oxy. Secțiunile acestor plane cu cuadrica (1) au ecuațiile :

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2(a_{13}h + a_{14})x + 2(a_{23}h + a_{24})y + a_{33}h^2 + \\ \qquad + 2a_{34}h + a_{44} = 0, \\ z = h \end{cases}$$

care sînt conice de același gen, genul conicei fiind dat de determinantul

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

care nu depinde de poziția planului $z = h$. Aceste conice au axele paralele, deoarece direcțiile acestor axe au parametrii directori

$$1,\ m,\ 0,$$

unde m este o soluție a ecuației

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0.$$

Centrele conicelor obținute prin plane paralele cu Oxy cu coordonatele $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ date de sistemul

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}h + a_{14} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}h + a_{24} = 0, \\ z - h = 0, \end{cases} \quad \text{adică} \quad \begin{cases} f_x = 0, \\ f_y = 0, \\ z = h. \end{cases}$$

Pe baza ecuațiilor (19), diametrul conjugat planului Oxy în raport cu cuadrica (1), are ecuațiile

$$\frac{f_x}{0} = \frac{f_y}{0} = \frac{f_z}{1}, \quad \text{adică} \quad \begin{cases} f_x = 0, \\ f_y = 0. \end{cases}$$

Rezultă că ecuațiile diametrului conjugat planului Oxy sînt verificate de coordonatele $x_0,\ y_0,\ z_0$ ale centrelor conicelor, obținute prin plane paralele cu Oxy.

2° *Planul tangent la o cuadrică în extremitatea A a unui diametru* ΩA (Ω *fiind centrul cuadricei*) *este paralel cu planul diametral conjugat diametrului* ΩA.

În adevăr, secțiunea dusă prin A, paralelă cu planul diametral considerat, se reduce la o pereche de două drepte (reale sau imaginare).

2) **Triedru autoconjugat.** (Triplete de diametri conjugați în raport cu o cuadrică.) Un sistem de trei diametri conjugați doi cîte doi constituie un triedru autoconjugat (sau *triplet diametral*). Construcția unui triedru autoconjugat se face astfel: fie un diametru oarecare ΩA și planul său diametral. În acest plan să considerăm un diametru arbitrar ΩB, al cărui plan diametral — în virtutea definiției diametrilor conjugați — trece prin ΩA și intersectează planul diametral al lui ΩA după diametrul ΩC. Deoarece ΩC se găsește în planele diametrale ale fiecăruia din diametrii ΩA și ΩB, este conjugat cu ΩA și ΩB.

Observăm că există o infinitate de triedre autoconjugate, deoarece diametrul ΩA a fost ales arbitrar; de asemenea și diametrul ΩB este arbitrar în planul diametral al lui ΩA.

Într-un triedru autoconjugat, fiecare diametru este conjugat planului determinat de ceilalți doi. În adevăr, să considerăm planul diametral al lui ΩA. Acest plan, conținînd pe ΩB și ΩC, coincide cu ΩBC.

Rezultă că un triedru autoconjugat are următoarea proprietate geometrică importantă: *orice coardă paralelă cu unul din diametrii tripletului este împărțită în părți egale de planul celorlalți doi.* Proprietatea rezultă din însăși definiția planului diametral.

Două plane diametrale se numesc *conjugate*, dacă unul trece prin polul celuilalt. Însă două plane diametral conjugate intersectează planul de la infinit după două drepte conjugate în raport

cu conica K_∞, și invers. Deci, luînd în planul de la infinit un triunghi autoconjugat în raport cu conica K_∞, acest triunghi se proiectează din centrul conicei după trei plane, formînd un triedru autoconjugat. Rezultă că există o infinitate de triedre autoconjugate în raport cu o cuadrică.

§ 7. PLANE PRINCIPALE. AXE, VÎRFURI

Un plan diametral perpendicular pe diametrul său conjugat se numește *plan principal.*

Se pune întrebarea: cînd diametrul conjugat unui plan diametral este perpendicular pe plan? Pentru a răspunde la această întrebare, vom proceda astfel: fie planul diametral (18) conjugat direcției l, m, n. Acest plan este perpendicular pe diametrul de direcție l, m, n, dacă parametrii directori ai normalei la plan,

$$a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n,\ a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n,\ a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n,$$

sînt proporționali cu l, m, n. Această condiție este echivalentă cu condițiile

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \rho)\, l + a_{12}m + a_{13}n &= 0,\\ a_{21}l + (a_{22} - \rho)\, m + a_{23}n &= 0,\\ a_{31}l + a_{32}m + (a_{33} - \rho)n &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

care constituie un sistem de trei ecuații liniare și omogene în raport cu parametrii directori l, m, n ai diametrilor conjugați planelor principale.

Pentru ca acest sistem să fie verificat de valori nu toate nule, trebuie ca determinantul sistemului să fie nul.

Deci, parametrul ρ trebuie să fie o soluție a ecuației

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \rho \end{vmatrix} = 0, \tag{21}$$

numită ecuația în ρ asociată cuadricei.*

Această ecuație este o ecuație de gradul al treilea în ρ și se mai scrie

$$\rho^3 - I\rho^2 + J\rho - A_{44} = 0, \tag{21'}$$

unde s-a notat

$$\begin{aligned} I &= a_{11} + a_{22} + a_{33}\,,\\ J &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 + a_{11}a_{33} - a_{13}^2 + a_{22}a_{33} - a_{23}^2\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Se poate arăta (v. § 8) pe o cale asemănătoare cu cea urmată în teoria conicelor că I, J, A_{44} și discriminantul A al cuadricei sînt *invarianți ortogonali*

* Ecuația (21) este bine cunoscută în matematică, fiind întîlnită și sub numele de *ecuația în S* (utilizîndu-se ca necunoscută S, în loc de ρ) sau *ecuația seculară*. Ea intervine în unele aplicații ale matematicii la studiul naturii (astronomie, geometrie, mecanică și în mai toate ramurile fizicii). Studiul ei amănunțit se face la cursul de algebră; aici se stabilesc numai proprietățile esențiale necesare problemei în discuție.

ai cuadricei, adică aceste expresii de coeficienții cuadricei rămîn invariante printr-o transformare ortogonală de axe.

În algebră se arată că *ecuația* în ρ (elementele a_{ij} fiind simetrice) are *rădăcinile reale.*

Geometric, această proprietate a ecuației în ρ se poate dovedi astfel: se observă că ecuația (21'), fiind o ecuație de grad impar, are totdeuna o rădăcină reală; fie ρ_1 această rădăcină. Dacă l_1, m_1, n_1 este soluția sistemului (20), cînd $\rho = \rho_1$, planul (18) corespunzător este ortogonal direcției $p(l_1, m_1, n_1)$. Cu alte cuvinte, acest plan diametral este un plan principal, intersectînd cuadrica după o conică (cu centrul în centrul cuadricei); în acest plan există două direcții r și s, conjugate și ortogonale, care constituie axele conicei. Să considerăm planul conjugat uneia din aceste direcții, de exemplu diametrului r. Acest plan trece prin p și prin s; deoarece direcția r este perpendiculară și pe p și pe s, rezultă că acest plan este ortogonal direcției r, adică este un plan principal. Deci, el corespunde unei alte rădăcini reale ρ_2 a ecuației (21'). La fel se arată că planul care trece prin r și p este conjugat și ortogonal direcției s, fiind un plan principal; este planul care corespunde celei de-a treia rădăcini reale ρ_3 a ecuației (21'). Putem deci enunța:

Propoziție. O cuadrică are, în general, trei plane principale, care constituie un triedru ortogonal și autoconjugat.

Muchiile triedrului principal se numesc *axele cuadricei*, iar punctele de intersecție ale acestor axe cu cuadrica se numesc *vîrfuri*. Ducînd plane paralele cu un plan principal, aceste plane sînt perpendiculare pe axa corespunzătoare (conjugată planului principal). Deci, planul tangent într-un vîrf este perpendicular pe axa care trece prin acel vîrf, fiind paralel cu planul principal corespunzător acestei axe.

Observăm că produsul rădăcinilor ecuației (21') este egal cu $-A_{44}$. Însă $A_{44} \neq 0$, dacă cuadrica este cu centru unic la distanță finită, adică este de gen elipsoid sau de gen hiperboloid. Rezultă că *rădăcinile ecuației în ρ sînt toate diferite de zero, dacă cuadrica este cu centru unic la distanță finită.*

Așadar, ecuația (21') are o rădăcină nulă $\rho_3 = 0$, numai dacă cuadrica este de gen paraboloid ($A_{44} = 0$). Celelalte rădăcini ρ_1 și ρ_2 sînt date de ecuația:

$$\rho^2 - I\rho + J = 0. \qquad (21'')$$

Ținînd seama de ecuațiile (20), ecuația planului principal conjugat direcției l_3, m_3, n_3 corespunzător rădăcinii $\rho_3 = 0$ se scrie

$$(a_{14}l_3 + a_{24}m_3 + a_{34}n_3)\ x_4 = 0,$$

unde l_3, m_3, n_3 este soluția (abstracție făcînd de un factor de proporționalitate) a sistemului (20) cu $\rho = \rho_3 = 0$. Deci, acest plan principal sau este planul de la infinit sau este nedeterminat, după cum expresia

$$a_{14}l_3 + a_{24}m_3 + a_{34}n_3$$

este diferită de zero sau nu. În acest ultim caz, ținînd seama de faptul că l_3, m_3, n_3 satisfac și ecuațiile (20) cu $\rho = 0$, deducem că l_3, m_3, n_3 este o solu-

ție nebanală a acestui sistem (de 4 ecuații în 3 necunoscute). Rezultă că matricea coeficienților lui l_3, m_3, n_3 nu poate fi de rang maxim, adică toți minorii A_{i4} ($i = 1, 2, 3, 4$) sînt nuli. În acest caz, discriminantul A al ecuației cuadricei este nul; deci, cuadrica este degenerată, fiind un cilindru sau o pereche de plane.

Așadar, unul din planele principale ale unui paraboloid — cel corespunzător rădăcinii $\rho_3 = 0$ — este planul de la infinit; celelalte două plane principale — corespunzătoare rădăcinilor ρ_1 și ρ_2 ale ecuației (21″) — trec prin diametrul conjugat planului de la infinit, această dreaptă fiind *axa* paraboloidului. Punctul (la distanță finită) unde această axă intersectează suprafața este *vîrful* paraboloidului, planul tangent în vîrf fiind perpendicular pe axă. Rezultă că planele principale care trec prin axă și planul tangent în vîrful paraboloidului constituie un triedru ortogonal.

Ecuațiile unei axe sînt

$$\frac{A_{44}x - A_{14}}{l} = \frac{A_{44}y - A_{24}}{m} = \frac{A_{44}z - A_{34}}{n} \quad \text{sau} \quad \frac{f_x}{l} = \frac{f_y}{m} = \frac{f_z}{n}. \tag{23}$$

Primele ecuații (23) se obțin ținînd seama că axa trece prin centrul cuadricei (în special, cînd centrul este la distanță finită), iar celelalte rezultă ținînd seama de (19), parametrii directori l, m, n ai axei fiind dați de sistemul (20), cu ρ o soluție a ecuației (21′).

Ecuația planului principal corespunzător este dată de (18).

Aplicații. 1) **Ecuația canonică a cuadricelor cu centru unic la distanță finită (Raportarea ecuației cuadricelor la centru și axele cuadricei).** Să considerăm cazul cînd cuadrica este cu centru unic la distanță finită ($A_{44} \neq 0$).

Putem face — printr-o translație — ca originea să coincidă cu centrul. Această translație este dată de formulele

$$x = x' + \frac{A_{14}}{A_{44}}, \quad y = y' + \frac{A_{24}}{A_{44}}, \quad z = z' + \frac{A_{34}}{A_{44}}. \tag{24}$$

Să presupunem că acestă translație a fost efectuată. Atunci avem

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0. \tag{25}$$

Putem simplifica și mai mult ecuația cuadricei, alegînd axele cuadricei ca axe de coordonate, știind că axele cuadricei formează un triedru ortogonal (și autoconjugat). Deci, prin rotația de axe ortogonale*

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{l_1}{\varepsilon\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}X + \frac{l_2}{\varepsilon'\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}Y + \frac{l_3}{\varepsilon''\sqrt{l_3^2 + m_3^2 + n_3^2}}Z, \\ y' &= \frac{m_1}{\varepsilon\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}X + \frac{m_2}{\varepsilon'\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}Y + \frac{m_3}{\varepsilon''\sqrt{l_3^2 + m_3^2 + n_3^2}}Z, \\ z' &= \frac{n_1}{\varepsilon\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}X + \frac{n_2}{\varepsilon'\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}Y + \frac{n_3}{\varepsilon''\sqrt{l_3^2 + m_3^2 + n_3^2}}Z, \end{aligned}\right\} \tag{24'}$$

* Această rotație este unică, deoarece triedrul ortogonal format din axele cuadricei este unic.

unde ε, ε', $\varepsilon'' = \pm 1$, astfel încît triedrul XYZ să fie orientat sinistrorsum, iar l_1, m_1, n_1 ; l_2, m_2, n_2 şi l_3, m_3, n_3 sînt respectiv direcţiile axelor cuadricelor, putem face ca triedrul ortogonal de coordonate carteziene să coincidă cu triedrul ortogonal format de axele cuadricei. Să presupunem că această rotaţie a fost efectuată. În acest caz, planele de cordonate Oxz, Ozx, Oxy sînt planele principale corespunzătoare respectiv rădăcinilor ρ_1, ρ_2, ρ_3 ale ecuaţiei în ρ, ceea ce înseamnă că diametrii conjugaţi acestor plane sînt respectiv axele de coordonate Ox, Oy, Oz. Scriind că parametrii directori ai axelor Ox, Oy, Oz sînt soluţii ale sistemului (20) corespunzătoare respectiv valorilor ρ_1, ρ_2, ρ_3 ale parametrului ρ din ecuaţia (21'), obţinem

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0. \tag{25'}$$

De altfel, ştiind că o cuadrică cu centru are trei plane principale care constituie un triedru ortogonal, putem presupune cuadrica deja raportată la acest triedru. Atunci punctul $P(x, y, z)$ fiind pe cuadrică şi simetricele $P'(-x, y, z)$, $P''(x, -y, z)$, $P'''(x, y, -z,)$ ale lui P în raport respectiv cu planele de coordonate sînt pe cuadrică, deoarece planele principale (alese ca plane de coordonate) sînt plane de simetrie ale cuadricei. Aceste condiţii duc la (25) şi (25').

Deci, dacă ţinem seama de (25) şi (25') în ecuaţia (1) a cuadricei, rezultă că *ecuaţia canonică a cuadricelor cu centrul unic la distanţă finită*, adică ecuaţia cuadricelor cu centru, raportată la centrul şi axele cuadricei, este

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0. \tag{26}$$

2) **Ecuaţia canonică a cuadricelor fără centru unic la distanţă finită.** Să considerăm cazul cînd cuadrica este fără centru unic la distanţă finită, adică este de gen paraboloid ($A_{44} = 0$). Raţionamentul va fi făcut pentru cuadricele ireductibile însă el convine şi cuadricelor degenerate.

În acest caz putem alege axele de coordonate astfel încît axa Oz să fie paralelă cu axa paraboloidului — corespunzătoare rădăcinii $\rho_3 = 0$ —, iar axele Ox şi Oy să fie respectiv normalele planelor diametrale care trec prin axă — corespunzătoare rădăcinilor ρ_1 şi ρ_2 ale ecuaţiei (21''). Această rotaţie este dată de (24'). Să presupunem că această rotaţie a fost efectuată, deci planele de coordonate Oyz, Ozx, Oxy sînt paralele cu planele principale corespunzătoare respectiv rădăcinilor ρ_1, ρ_2, $\rho_3 = 0$ ale ecuaţiei în ρ, ceea ce înseamnă că axele de coordonate Ox, Oy, Oz sînt respectiv normale la aceste plane. Aşadar, scriind că parametrii directori ai axelor de coordonate sînt soluţii ale sistemului (20) corespunzătoare respectiv rădăcinilor ρ_1, ρ_2, $\rho_3 = 0$ ale ecuaţiei (21'), obţinem

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0. \tag{27}$$

Putem simplifica şi mai mult ecuaţia cuadricei, alegînd originea într-un punct al axei paraboloidului. În adevăr, ecuaţiile axei sînt

$$\frac{f_x}{0} = \frac{f_y}{0} = \frac{f_z}{1}, \text{ adică } \begin{cases} f_x \equiv a_{11}x + a_{14} = 0 \\ f_y \equiv a_{22}y + a_{24} = 0 \end{cases} \tag{28}$$

de unde rezultă translația

$$\begin{cases} x = x' - \dfrac{a_{14}}{a_{11}}, \\ y = y' - \dfrac{a_{24}}{a_{22}}, \\ z = z'. \end{cases} \tag{28'}$$

Să presupunem că această translație a fost efectuată. Ținînd seama că ecuațiile axei sînt (28), dacă această axă coincide cu axa Oz, înseamnă că coordonatele originii $x = y = z = 0$ trebuie să verifice ecuațiile (28); rezultă

$$a_{14} = a_{24} = 0. \tag{27'}$$

De altfel, știind că o cuadrică fără centru are două plane principale ortogonale între ele (la distanță finită), putem presupune de la început cuadrica raportată la triedrul de coordonate, pentru care două din fețe — de exemplu Oyz și Ozx — sînt planele diametrale, cel de-al treilea plan de coordonate, Oxy, fiind ortogonal axei paraboloidului dată de intersecția celor două plane diametrale. Atunci, un punct $P(x, y, z)$ fiind pe cuadrică, și simetricele $P'(-x, y, z)$, $P''(x, -y, z)$ ale lui P în raport cu planele de coordonate Oyz și Ozx respectiv, sînt pe cuadrică, deoarece planele principale (alese ca plane de coordonate) sînt plane de simetrie ale cuadricei. Aceste condiții și $A_{44} = 0$ duc la (27) și (27').

Dacă ținem seama de (27) și (27') în ecuația (1) a cuadricei, deducem că *ecuația canonică a cuadricelor fără centru unic la distanță finită*, raportată la cele două plane diametrale de la distanță finită și la un plan perpendicular pe axa cuadricei, este

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \tag{29}$$

Observăm că

$$A = -a_{11}a_{22}a_{34}^2. \tag{29'}$$

Rezultă că dacă cuadrica este ireductibilă ($A \neq 0$), deci este un paraboloid (eliptic sau hiperbolic), coeficienții a_{11}, a_{22}, a_{34} sînt diferiți de zero. Atunci, putem lua ca plan Oxy planul tangent în vîrful paraboloidului (care este perpendicular pe axa Oz a paraboloidului). În acest caz trebuie să avem

$$a_{44} = 0, \tag{27''}$$

încît *ecuația canonică a paraboloizilor* (raportată la planele diametrale care trec prin axă și planul tangent în vîrful paraboloidului) este

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0. \tag{30}$$

Dacă cuadrica este degenerată ($A = 0$) și deoarece cel puțin unul din coeficienții a_{11}, a_{22} este diferit de zero (altfel, suprafața ar fi de gradul întîi, deci un plan), de exemplu $a_{11} \neq 0$, putem avea următoarele cazuri:

$$\begin{aligned} &\alpha)\ a_{22} \neq 0, \quad a_{34} = 0, \\ &\beta)\ a_{22} = 0, \quad a_{34} \neq 0, \\ &\gamma)\ a_{22} = a_{34} = 0. \end{aligned} \tag{29''}$$

În primul caz, *ecuația canonică* a cuadricei este

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{44} = 0 \tag{30'}$$

și reprezintă un *cilindru neparabolic* sau o *pereche de plane secante*, după cum a_{44} este diferit de zero sau este nul.

În al doilea caz, putem lua ca plan Oxy planul tangent în punctul $P\left(0, 0, -\frac{a_{44}}{a_{34}}\right)$, unde axa Oz înțeapă suprafața, deci trebuie să avem (27″), încît *ecuația canonică* a cuadricei este

$$a_{11}x^2 + 2a_{34}z = 0 \tag{30''}$$

și reprezintă un *cilindru parabolic*.

În al treilea caz, ecuația canonică a cuadricei este

$$a_{11}x^2 + a_{44} = 0 \tag{30'''}$$

și reprezintă o *pereche de plane paralele*, distincte sau confundate, după cum a_{44} este diferit de zero sau este nul.

3) **Cuadrice de rotație.** În cazurile discutate s-a presupus că ecuația (21′) are rădăcini distincte. În cazul *cînd ecuația (21′) are rădăcini multiple, cuadrica este o cuadrică de rotație.*

Să considerăm cazul cînd ecuația (21′) are două rădăcini confundate, de exemplu $\rho_1 = \rho_2$. În acest caz, intersecția cuadricei cu planul principal corespunzător rădăcinii ρ_3 este o conică C, pentru care axele sînt nedeterminate. Rezultă că C este un cerc. Tot cercuri sînt și intersecțiile cuadricei cu plane paralele cu planul principal conjugat diametrului p (l_3, m_3, n_3), centrele acestor cercuri fiind pe diametrul p (perpendicular pe planul principal). Cuadrica este o suprafață de rotație, planele care trec prin diametrul p fiind plane principale, care intersectează suprafața după curbe meridiane.

Într-adevăr, să presupunem $\rho_1 = \rho_2 \neq \rho_3$ și să considerăm cazul cînd $A_{44} \neq 0$ (cuadrice cu centru). Putem presupune că, printr-o transformare de coordonate, originea coincide cu centrul, deci condițiile (25) sînt satisfăcute. Să presupunem, în plus, că planul Oxy este planul principal corespunzător rădăcinii simple ρ_3, ceea ce înseamnă că diametrul conjugat acestui plan este axa Oz. Parametrii directori ai axei Oz fiind $(0, 0, 1)$ și scriind că sistemul (20) este verificat de acești parametri, obținem

$$a_{13} = a_{23} = 0, \quad a_{33} = \rho_3,$$

iar ecuația (21) în ρ se scrie

$$(a_{33} - \rho)\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0. \tag{31}$$

Deci ρ_1, ρ_2 sînt rădăcinile ecuației

$$\rho^2 - (a_{11} + a_{22})\rho + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \tag{31'}$$

Această ecuație are rădăcini egale $(\rho_1 = \rho_2)$, dacă avem

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0,$$

adică

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0;$$

deci

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0. \tag{31''}$$

Deducem că ecuația cuadricei cu centru este de forma

$$a_{11}(x^2 + y^2) + a_{33}z^2 + a_{44} = 0, \tag{32}$$

deci, *cuadrica este o cuadrică de rotație, axa de rotație fiind diametrul conjugat planului diametral corespunzător rădăcinii simple* ρ_3.

Dacă rădăcinile ρ_1, ρ_2, ρ_3 sînt toate egale, cuadrica este intersectată de orice plan după un cerc; deci cuadrica este o sferă. În acest caz, orice plan care trece prin centrul sferei este un plan principal, iar dreapta conjugată este perpendiculară planului.

Să considerăm acum cazul cînd cuadrica este de gen paraboloid ($A_{44} = 0$). În acest caz, să presupunem că axa Ox este axa cuadricei. Înseamnă că sistemul (20) cu $\rho = 0$ are soluția (0, 0, 1), de unde rezultă că avem

$$a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0.$$

Alegînd axa cuadricei drept axă Oz, rezultă că planul Oxy are ca diametru conjugat axa Oz; deci, originea se află într-un punct al axei

$$\frac{f_x}{0} = \frac{f_y}{0} = \frac{f_z}{1}, \quad \text{adică} \quad \begin{cases} f_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{14} = 0, \\ f_y = a_{12}x + a_{22}y + a_{24} = 0, \end{cases}$$

de unde rezultă că

$$a_{14} = a_{24} = 0.$$

În acest caz, ecuația în ρ se scrie:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Deci, ρ_1 și ρ_2 sînt rădăcinile ecuației (31'), iar condiția ca această ecuație să aibă rădăcinile egale este dată de (31'').

Deducem că ecuația cuadricei fără centru este

$$a_{11}(x^2 + y^2) + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \tag{32'}$$

și reprezintă un paraboloid eliptic de rotație ($a_{34} \neq 0$, în care caz putem lua $a_{44} = 0$) sau un cilindru de rotație ($a_{34} = 0$, $a_{44} \neq 0$).

§ 8. INVARIANȚI ORTOGONALI AI CUADRICELOR

Fie o cuadrică a cărei ecuație, în coordonate carteziene ortogonale, este dată sub forma generală (1).

Se numesc *invarianți ortogonali* ai unei cuadrice acele expresii de coeficienții ecuației cuadricei, care rămîn neschimbate (ca formă și valoare) față de o

transformare ortogonală a axelor de coordonate, primul membru al ecuației cuadricei fiind considerat un invariant al problemei.

Dacă anumite expresii de coeficienții ecuației cuadricei rămîn invariante numai față de rotațiile de axe ortogonale, ele se numesc *semiinvarianți ortogonali*.

O translație de axe (2), unde x_0, y_0, z_0 sînt constante și reprezintă coordonatele punctului O', în care a fost translatată originea, transformă ecauția generală (1) a cuadricei într-o altă ecuație, tot generală, ai cărei coeficienți a'_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ sînt dați de formulele

$$a'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta},\ a'_{14} = f_{x_0},\ a'_{24} = f_{y_0},\ a'_{34} = f_{z_0},\ a'_{44} = f(x_0, y_0, z_0),\ (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Deci, *printr-o translație, coeficienții* $a_{\alpha\beta}$ *ai termenilor de gradul al doilea sînt invarianți.*

Să presupunem acum că facem o rotație de axe ortogonale

$$x_\alpha = \Omega_{\alpha\beta} x'_\beta, \tag{33}$$

coeficienții $\Omega_{\alpha\beta}$ satisfăcînd condițiile de ortogonalitate:

$$\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma},\ |\ \Omega_{\alpha\beta}\ | = 1. \tag{33'}$$

În coordonate omogene, rotația (33), (33') se scrie

$$x_i = \Omega_{ij} x'_j, \qquad (i,j, \ldots = 1, 2, 3, 4) \tag{33''}$$

$$\Omega_{\alpha 4} = \Omega_{4\alpha} = 0,\quad \Omega_{44} = 1,\quad \Delta = |\ \Omega_{ij}\ | = |\ \Omega_{\alpha\beta}\ | = 1. \tag{33'''}$$

Atunci avem

$$a_{ij}x_i x_j = a_{ij}\Omega_{ik}\Omega_{jl}\, x'_k x'_l = a'_{kl} x'_k x'_l,$$

unde

$$a'_{kl} = a_{ij}\Omega_{ik}\Omega_{jl}. \tag{34}$$

Deci, o rotație (33), (33') transformă ecuația generală (1) a cuadricei în altă ecuație, ai cărei coeficienți a'_{ij} sînt dați de formulele

$$a'_{\alpha\beta} = a_{\varepsilon\nu}\Omega_{\varepsilon\alpha}\Omega\nu_\beta,\ a_{\alpha 4} = a_{\varepsilon 4}\,\Omega_{\varepsilon\alpha},\ a'_{44} = a_{44}, \tag{34'}$$

care se obțin din (34) dacă ținem seama de valorile coeficienților Ω_{ij}, date de (33') și (33''). De exemplu,

$$a'_{\alpha\beta} = a_{ij}\Omega_{i\alpha}\Omega_{j\beta} = (a_{\varepsilon j}\Omega_{\varepsilon\alpha} + a_{4j}\Omega_{4\alpha})\Omega_{j\beta} = a_{\varepsilon\nu}\Omega_{\varepsilon\alpha}\Omega\nu_\beta + a_{\varepsilon 4}\Omega_{\varepsilon\alpha}\Omega_{4\beta} =$$
$$= a_{\varepsilon\nu}\Omega_{\varepsilon}\Omega\nu_\beta.$$

Deci, *printr-o rotație, coeficienții termenilor de gradul al doilea, respectiv coeficienții termenilor de gradul întîi ai ecuației transformate, sînt combinații liniare ale coeficienților termenilor de gradul al doilea, respectiv de coeficienții termenilor de gradul întîi, al ecuației inițiale (1), termenul liber fiind un invariant* (este singurul coeficient care rămîne neschimbat).

În particular, dacă în ecuația (1) coeficienții termenilor de gradul întîi sînt nuli, prin rotația (33), (33') ei rămîn nuli. Știm de altfel (v. § 1), că ecuația (4) are coeficienții termenilor de gradul întîi nuli, dacă centrul cuadricei coincide cu originea sistemului de coordonate ($\Omega \equiv 0$).

Ținînd seama că transformarea (33), (33′) este ortogonală, rezultă că ea păstrează expresia distanței unui punct (x, y, z) la origine; deci avem

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

În adevăr, ținînd seama de (33), (33′), găsim că

$$x^2 + y^2 + z^2 = \delta_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta = \delta_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\varepsilon}\Omega_{\beta\upsilon}x'_\varepsilon x'_\upsilon = \Omega_{\alpha\varepsilon}\Omega_{\varepsilon\upsilon}x'_\varepsilon x'_\upsilon = \delta'_{\varepsilon\upsilon}x'_\varepsilon x'_\upsilon =$$
$$= x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Observăm că transformarea (33), (33′) transformă ecuația conului

$$a_{11}x^2 + \ldots + a_{33}z^2 - \rho(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \tag{35}$$

unde ρ este un parametru, în ecuația

$$a'_{11}x'^2 + \ldots + a'_{33}z'^2 - \rho(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0, \tag{35′}$$

unde ρ este același parametru. Deci, cele două conuri (35) și (35′) degenerează în același timp în două plane. Rezultă că și conicele de intersecție ale acestor conuri cu planul de la infinit sînt degenerate în același timp. Aceste conice au ecuațiile

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{33}x_3^2 - \rho(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0, \\ x_4 = 0, \end{cases} \tag{35″}$$

respectiv

$$\begin{cases} a'_{11}x'^2_1 + \ldots + a'_{33}x'^2_3 - \rho(x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3) = 0. \\ x'_4 = 0. \end{cases} \tag{35‴}$$

Scriind că discriminanții acestor conice sînt nuli, obținem pentru conica (35″) ecuația (21′), iar pentru conica (35‴) ecuația

$$\rho^3 - I'\rho^2 + J'\rho - A'_{44} = 0, \tag{21‴}$$

I', J', A'_{44} fiind formați cu coeficienții $a'_{\alpha\beta}$ după aceleași formule (22) și (5′), ca și I, J, A_{44}. Ecuațiile (21′) și (21‴) avînd aceleași rădăcini, rezultă

$$I = I', \quad J = J', \quad A_{44} = A'_{44},$$

ceea ce înseamnă că *coeficienții ecuației* (21′) în ρ *sînt invarianți la rotația de axe ortogonale*. Deoarece aceste expresii sînt invariante și la translații (coeficienții $a_{\alpha\beta}$ sînt ei înșiși invarianți la o translație), rezultă că expresiile

$$I = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$J = \Delta_{34} + \Delta_{24} + \Delta_{14} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 + a_{11}a_{33} - a_{13}^2 + a_{22}a_{33} - a_{23}^2, \tag{36}$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = |\, a_{\alpha\beta} \,|$$

sînt invarianți ortogonali ai cuadricelor (s-a notat prin Δ_{ij} determinanții obținuți prin eliminarea liniilor și coloanelor i și j în determinantul A).

Să arătăm acum că discriminantul cuadricei

$$A = |a_{ij}| \qquad (i,j = 1,2,3,4) \tag{36'}$$

este și el un invariant la transformările ortogonale.

Într-adevăr, formulele (34) dau

$$|a'_{kl}| = |a_{ij}\Omega_{ik}\Omega_{jl}| = |a_{ij}|\ |\Omega_{ik}|\ |\Omega_{jl}|,$$

adică

$$A' = A\,\Delta^2 = A,$$

dacă ținem seama de (33''), ceea ce arată că și discriminantul A al cuadricei (1) este un invariant ortogonal.

Avem deci *rezultatul*:

Expresiile (36) și (36'), formate cu cei zece coeficienți ai ecuației unei cuadrice (1), sînt invarianți ortogonali (rămîn invariante cînd facem o transformare de coordonate ortogonale).

Deoarece acești invarianți sînt respectiv forme liniare și omogene de gradul întîi, al doilea, al treilea și al patrulea în coeficienții a_{ij}, se spune că I constituie *invariantul liniar*, J *invariantul pătratic*, A_{44} *invariantul cubic*, iar A *invariantul bipătratic*.

În afară de invarianții ortogonali (36) și (36') putem introduce și următorii doi *semiinvarianți ortogonali*

$$L = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{23} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$K = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \tag{37}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Să demonstrăm invarianța lui K și L față de o rotație (33), (33'). Pentru aceasta fie ecuația

$$f(x, y, z) - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

unde $f(x, y, z)$ este membrul întîi al ecuației (1). După efectuarea rotației, această ecuație devine

$$f(x', y', z') - \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0,$$

unde $f(x', y', z') = 0$ este transformatul primului membru al ecuației (1) prin rotația considerată. Însă discriminantul unei ecuații algebrice de gradul al doilea fiind un invariant ortogonal, obținem relația

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{21} & a'_{22}-\lambda & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33}-\lambda & a'_{34} \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{vmatrix},$$

care se mai scrie

$$a_{44}\lambda^3 - L\lambda^2 + K\lambda - A = a'_{44}\lambda^3 - L'\lambda^2 + K'\lambda - A'.$$

Relația fiind adevărată pentru orice valoare a lui λ, coeficienții corespunzători termenului din ambii membri ai egalității trebuie să fie egali. Obținem astfel

$$K = K', \; L = L',$$

ceea ce arată invarianța expresiilor (37) față de rotațiile de axe ortogonale.

Relativ la semiinvarianții (37), putem enunța

Teorema. Dacă o cuadrică de gen paraboliod este degenerată, K este un invariant ortogonal. Dacă, în plus, cuadrica degenerează într-o pereche de plane paralele, atunci și L este un invariant ortogonal.

Într-adevăr, dacă o cuadrică este de gen paraboloid ($A_{44} = 0$), există o rotație de axe (v. § 7, aplicația 2)), astfel încît ecuația suprafeței ia forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0;$$

deci

$$A = -a_{11}a_{22}a_{34}^2, \; K = -a_{34}^2(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22}a_{44} - a_{14}^2a_{22} - a_{24}^2a_{11}.$$

Cuadrica este degenerată numai în unul din cazurile (29″).

Prin translația (2), această ecuație se transformă într-una de același tip:

$$a_{11}x'^2 + [a_{22}y'^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{14})x' + 2(a_{22}y_0 + a_{24})y' + 2a_{34}z' + a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + 2a_{14}x_0 + 2a_{24}y_0 + 2a_{34}z_0 + a_{44} = 0,$$

încît obținem

$$K' = K + 2a_{11}a_{22}a_{34}z_0.$$

Deci, în oricare din cazurile (29″) pentru care cuadrica de gen paraboloid este degenerată, rezultă

$$K' = K,$$

adică expresia K este invariant nu numai față de o rotație a sistemului de coordonate carteziene ortogonale, ci și față de o translație a axelor; cu alte cuvinte, K este un invariant ortogonal pentru cuadricele degenerate de gen paraboloid.

Dacă cuadrica (1) degenerează într-o pereche de plane paralele, există o rotație de axe astfel încît ecuația suprafeței ia forma

$$a_{11}x^2 + 2a_{14}x + a_{44} = 0.$$

Aceasta revine la alegerea unui sistem de referință cartezian ortogonal, astfel încît axa Ox să fie perpendiculară pe perechea de plane paralele*. Observăm că

$$L = a_{11}a_{44} - a_{14}^2.$$

Prin translația (2), ecuația cuadricei date se transformă într-una de același tip:

$$a_{11}x'^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{14})\,x' + a_{11}x_0^2 + 2a_{13}x_0 + a_{44} = 0,$$

încît

$$L' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}x_0 + a_{14} \\ a_{11}x_0 + a_{14} & a_{11}x_0 + 2a_{14}x_0 + a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} = L.$$

Deci, L este invariant nu numai față de o rotație a axelor carteziene ortogonale, ci și față de o translație a axelor. Cu alte cuvinte, L este un invariant ortogonal pentru cuadricele degenerate într-o pereche de plane paralele.

Dacă înmulțim ecuația unei cuadrice cu un factor constant k, invarianții (36) și (36′) se înmulțesc respectiv cu k, k^2, k^3, k^4, iar semiinvarianții (37) — respectiv cu k^2, k^3. Rezultă că I și A_{44}, respectiv K, pot schimba de semn, în timp ce J și A, respectiv L, au același semn pentru o cuadrică dată.

Se poate arăta, ca și în cazul unei conice, că invarianții ortogonali (36) și (36′) definesc primul membru al ecuației unei cuadrice.

Rezultă că, fiind date — într-un sistem de coordonate carteziene ortogonale x, y, z — ecuațiile a două cuadrice

$$f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \ldots + a_{44} = 0 \text{ și } g = a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + \ldots + a'_{44} = 0,$$

există o transformare ortogonală de axe, care să transforme ecuația unei cuadrice în ecuația celeilalte, dacă avem

$$I' = kI,\ J' = k^2J,\ A'_{44} = k^3A_{44},\ A' = k^4A,$$
$$\text{(respectiv } K' = k^3K,\ L' = k^2L\text{)}, \qquad (36'')$$

unde k este o constantă diferită de zero (v. aplicațiile 1) și 2) de mai jos).

Dacă unul din acești invarianți este diferit de zero, el poate fi luat egal cu unitatea, și atunci *toate cuadricele care au acel invariant egal cu unitatea, iar ceilalți invarianți egali sînt egale, și invers.*

Cu alte cuvinte, *invarianții* (36) și (36′), respectiv semiinvarianții (37), definesc ecuația unei cuadrice, abstracție făcînd de o transformare ortogonală și de înmulțirea coeficienților ecuației cu un factor. De aceea, invarianții I, J, A_{44}, A (respectiv semiinvarianții K, L) *formează un sistem complet de invarianți ortogonali ai cuadricelor.*

* În acest caz, ecuația în ρ admite rădăcinile $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 = \rho_3 = 0$ și se poate lua $Ox'(l_1, m_1, n_1)$, iar ca axe Oy' și Oz' două drepte perpendiculare pe Ox' și perpendiculare între ele.

Deci, din punct de vedere metric, cu ajutorul invarianților și semiinvarianților se poate face o clasificare a cuadricelor, dîndu-se condițiile necesare și suficiente pentru ca o cuadrică să fie de un anumit tip.

Aplicații. 1) Reducerea la forma canonică a ecuației cuadricei cu centru (unic la distanță finită). Fie (1) ecuația unei cuadrice cu centru; în acest caz, invariantul A_{44} este diferit de zero. Printr-o deplasare putem să raportăm cuadrica la centru și triedrul ei principal; cu alte cuvinte, există o transformare ortogonală de axe, care duce originea axelor de coordonate în centrul cuadricei și suprapune axele de coordonate peste axele principale (de simetrie) ale cuadricei. În noul sistem de axe $OXYZ$, cuadrica dată are ecuația (v. § 7, aplicația 1):

$$b_{11}X^2 + b_{22}Y^2 + b_{33}Z^2 + b_{44} = 0. \tag{38}$$

Deoarece invarianții ecuațiilor (1) și (38) sînt egali, obținem

$$I = b_{11} + b_{22} + b_{33}, \quad J = b_{11}b_{22} + b_{11}b_{33} + b_{22}b_{33},$$
$$A_{44} = b_{11}b_{22}b_{33}, \quad A = b_{11}b_{12}b_{33}b_{44}. \tag{38'}$$

Cuadrica (1) fiind dată, invarianții I, J, A_{44}, A sînt determinanți; deci, relațiile (38') permit să obținem necunoscutele b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{44} în funcție de invarianții I, J, A_{44}, A. Astfel, din primele trei relații se observă că b_{11}, b_{22}, b_{33} sînt rădăcinile ecuației în ρ:

$$\rho^3 - I\rho^2 + J\rho - A_{44} = 0,$$

iar a patra relație împărțită cu a treia, membru cu membru, dă valoarea lui b_{44}; așadar, abstracție făcînd de schimbarea axelor între ele, găsim

$$b_{11} = \rho_1, \quad b_{22} = \rho_2, \quad b_{33} = \rho_3, \quad b_{44} = \frac{A}{A_{44}}.$$

Deci, ecuația cuadricei cu centru raportată la centru și planele ei principale este

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \rho_3 z^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0. \tag{39}$$

Dacă cuadrica este ireductibilă ($A \neq 0$), această ecuație poate fi pusă sub forma canonică (Cap. XV, §§ 2—4):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon\frac{z^2}{c^2} + \varepsilon' = 0, \quad (\varepsilon = \varepsilon' = \pm 1) \tag{39'}$$

reprezentînd elipsoizi ($\varepsilon = \varepsilon' = +1$; $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = -1$) și hiperboloizi ($\varepsilon = \varepsilon' = -1$; $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$). Dacă cuadrica este degenerată ($A = 0$), ecuația (39) poate fi pusă sub forma canonică (v. Cap. XIV, §3)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon\frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (\varepsilon = \pm 1), \tag{39''}$$

reprezentînd conuri de gradul al doilea.

De altfel, genul cuadricei va fi dat de conica de la infinit, K_∞(v. § 3, aplicaţia 3).

Deşi aceste rezultate au fost obţinute presupunînd că rădăcinile ecuaţiei în ρ sînt distincte, ele rămîn însă valabile şi atunci cînd două sau trei rădăcini se confundă. În aceste cazuri, cuadrica este de rotaţie.

2) **Reducerea la forma canonică a ecuaţiei cuadricei fără centru (unic la distanţă finită).** În acest caz, cînd $A_{44} = 0$, există un sistem de axe astfel încît cuadrica are ecuaţia (29). Observăm că

$$A = -a_{11}a_{22}a_{34}^2.$$

Să considerăm mai întîi *cazul cuadricelor nedegenerate* ($A \neq 0$); deci, cazul paraboloizilor. În acest caz s-a arătat (v. § 7, aplicaţia 2)) că luînd planul Oxy ca plan tangent în vîrful paraboloidului, iar celelalte plane de coordonate, planele diametrale care trec prin axa paraboloidului, ecuaţia unui paraboloid este de forma

$$b_{11}X^2 + b_{22}Y^2 + 2b_{34}Z = 0.$$

Pentru a determina coeficienţii acestei ecuaţii, ne vom servi de invarianţii ortogonali ai ecuaţiei (1), invarianţii fiind daţi îndată ce este dată ecuaţia generală a cuadricei. Obţinem relaţiile

$$I = b_{11} + b_{22}, \quad J = b_{11}b_{22}, \quad A = -b_{11}b_{22}b_{34}^2,$$

care exprimă că invarianţii celor două ecuaţii (generală şi canonică) sînt egali. Din primele două relaţii se observă că b_{11}, b_{22} sînt tocmai rădăcinile ecuaţiei

$$\rho^2 - I\rho + J = 0,$$

iar a treia relaţie împărţită cu a doua, membru cu membru, dă valoarea lui b_{34}. În definitiv, abstracţie făcînd de schimbarea axelor OX şi OY între ele, găsim

$$b_{11} = \rho_1, \quad b_{22} = \rho_2, \quad |b_{34}| = \sqrt{-\frac{A}{J}}.$$

Deci, ecuaţia paraboloizilor poate fi pusă sub forma

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 = 2\varepsilon\sqrt{-\frac{A}{J}}\,z, \quad (\varepsilon = \pm 1). \tag{40}$$

Acest rezultat se menţine şi dacă $\rho_1 = \rho_2$, cînd paraboloidul este de rotaţie.

Să considerăm acum *cazul cuadricelor degenerate de gen paraboloid* ($A = 0$). Condiţia $A = 0$ duce la trei cazuri, date de (29″).

În primul caz ($a_{22} \neq 0$, $a_{34} = 0$), cuadrica are ecuaţia canonică

$$b_{11}X^2 + b_{22}Y^2 + b_{44} = 0$$

şi admite trei invarianţi ortogonali

$$I = b_{11} + b_{22}, \quad J = b_{11}b_{22}, \quad K = b_{11}b_{22}b_{44}.$$

Primii doi invarianți ne arată că b_{11}, b_{22} sînt rădăcinile ecuației

$$\rho^2 - I\rho + J = 0,$$

iar a treia relație împărțită cu a doua, membru cu membru, dă valoarea lui b_{44}. În definitiv obținem

$$b_{11} = \rho_1, \quad b_{22} = \rho_2, \quad b_{44} = \frac{K}{J},$$

încît ecuația canonică este

$$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \frac{K}{J} = 0 \tag{41}$$

și reprezintă un *cilindru neparabolic* sau *o pereche de plane secante*, după cum invariantul K este diferit de zero sau este nul.

În *al doilea caz* ($a_{22} = 0$, $a_{34} \neq 0$), luînd planul tangent în punctul unde axa Oz înțeapă suprafața, cînd $a_{44} = 0$, ecuația canonică a cuadricei este

$$b_{11}X^2 + 2b_{34}Z = 0,$$

invarianții ortogonali nenuli fiind

$$I = b_{11}, \quad K = -b_{11}b_{34}^2.$$

Rezultă că b_{11} este rădăcina nenulă a ecuației în ρ, în care trebuie să ținem seama că $J = A_{44} = 0$. Cu alte cuvinte, ecuația în ρ are o rădăcină dublă nulă ($\rho_1 = a_{11}$, $\rho_2 = \rho_3 = 0$). Cei doi invarianți I și K determină valoarea coeficientului b_{34};

$$|b_{34}| = \sqrt{-\frac{K}{I}}.$$

În definitiv, *ecuația canonică* este

$$x^2 = \varepsilon\sqrt{-\frac{K}{I^3}}z, \quad (\varepsilon = \pm 1) \tag{42}$$

și reprezintă un *cilindru parabolic*.

În *al treilea caz* ($a_{22} = a_{33} = 0$), cuadrica are ecuația canonică

$$b_{11}x^2 + b_{44} = 0 \tag{43}$$

și admite doi invarianți ortogonali diferiți de zero:

$$I = b_{11}, \quad L = b_{11}b_{44}.$$

Rezultă că b_{11} este rădăcina nenulă a ecuației în ρ, în care trebuie să ținem seama că $J = A_{44} = 0$. Cu alte cuvinte, ecuația în ρ are o rădăcină dublă nulă ($\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 = \rho_3 = 0$). Cei doi invarianți determină valoarea coeficientului b_{44}. Obținem

$$b_{11} = I, \quad b_{44} = \frac{L}{I}.$$

În definitiv, *ecuația canonică* este

$$x^2 + \frac{L}{I^2} = 0 \tag{44}$$

și reprezintă *o pereche de plane paralele distincte* sau *confundate, după cum* $L \neq 0$ *sau* $L = 0$, *planele distincte fiind imaginare sau reale, după cum* $L > 0$ *sau* $L < 0$.

3) Tabela formelor canonice ale cuadricelor. Discuția de la punctul precedent a epuizat toate cazurile posibile de reducere la forme canonice a ecuației unei cuadrice, arătînd că nu există alte tipuri de cuadrice decît acelea studiate pînă în prezent și clasificate în cele 17 tipuri în tabela 1.

În tabela 2 rezumăm această discuție, indicînd totodată și criteriile necesare și suficiente pentru ca o cuadrică să aparțină tipului respectiv.

În ultima coloană a tabelei s-a indicat între paranteze semnele coeficienților variabilelor din ecuațiile canonice, iar în afara parantezei, semnul termenului liber; schimbînd atunci cînd este necesar toate semnele, putem lua semnele din paranteză astfel ca numărul coeficienților negativi să nu depășească pe acela al coeficienților pozitivi.

Observație. a) Dacă ne interesează numai natura cuadricei reprezentate de o ecuație dată, este suficient să cunoaștem numai semnele rădăcinilor diferite ale ecuației în ρ. Deoarece această ecuație are doar rădăcini reale, semnele rădăcinilor sînt date de regula lui Descartes; numărul rădăcinilor pozitive este egal cu numărul variațiilor de semn ale șirului coeficienților ecuației în ρ : $1, -I, J, -A_{44}$.

b) Faptul că unul sau altul dintre invarianții ortogonali este nul constituie o proprietate metrică a cuadricei. De exemplu, dacă A_{44} este nul, cuadrica este fără centru, iar dacă A este nul, cuadrica este degenerată.

c) Formulele (36'') arată că semnul unor invarianți ortogonali nu se schimbă, dacă înmulțim coeficienții ecuației cuadricei cu un factor $k < 0$. Rezultă că acești invarianți caracterizează anumite proprietăți ale cuadricei.

De exemplu, *pentru o cuadrică reală ireductibilă, invariantul A este pozitiv, numai dacă cuadrica este riglată, și invers.* În adevăr, să considerăm ecuația (41) a unei cuadrice cu centru. În acest caz, coeficienții ρ_1, ρ_2, ρ_3 nu pot fi toți de același semn, dacă cuadrica este riglată. Presupunînd că unul din acești coeficienți este negativ, atunci A_{44} este negativ; deci, cuadrica este riglată dacă A este pozitiv. Dacă doi din coeficienții ρ_1, ρ_2, ρ_3 sînt negativi, A_{44} este pozitiv încît cuadrica este riglată, dacă A este pozitiv.

Să considerăm ecuația (30) a unui parabolid; în acest caz, $J = a_{11}a_{22}$, $A = a_{11}a_{22}a^2_{34}$. Deci, dacă $J < 0$, ceea ce înseamnă că paraboloidul este riglat, atunci A este pozitiv. De asemenea, A este pozitiv pentru elipsoidul imaginar. Așadar, o cuadrică pentru care A este negativ, este o cuadrică reală neriglată.

§ 9. FOCARE

Se numește *focar* al unei cuadrice *un punct* $F(\alpha, \beta, \gamma)$ *care are proprietatea că expresia distanței de la* F *la un punct oarecare* $P(x, y, z)$ *al cuadricei se poate descompune într-un produs de doi factori liniari.*

Însă, un produs de doi factori se poate descompune într-o sumă algebrică de două pătrate. Rezultă că *un punct* $F(\alpha, \beta, \gamma)$ *este focar al cuadricei (1)*, dacă

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \lambda\pi_1^2 + \mu\pi_2^2, \tag{45}$$

unde $P(x, y, z)$ *este un punct al cuadricei, iar* π_1 *și* π_2 *două polinoame liniare în* x, y, z.

Tabela 2

	Genul	Natura	Tipul suprafeței				Ecuația canonică	Semnul coeficienților
$A_{44} \neq 0$ Cuadrice cu centru (unic la distanță finită)	Gen elipoid (K_∞ nedegenerată și imaginară)	$A \neq 0$ nedegenerată	Elipoid			imaginar	$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \rho_3 z^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0$	(+++) +
						real		(++ +) −
		$A = 0$ degenerată	Con			imaginar		(+++)
	Gen hiperboloid (K_∞ nedegenerată și reală)	$A \neq 0$ nedegenerată	Hiperboloid			cu 1 pînză		(++−) −
						cu 2 pînze		(++−) +
		$A = 0$ degenerată	Con			real		(++−)
$A_{44} = 0$ Cuadrice fără centru (unic la distanță finită)	Gen paraboloid (K_∞ degenerată).	$A \neq 0$ nedegenerată	Paraboloid			eliptic	$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 = \pm 2\sqrt{-\frac{A}{J}}\, z$	(++)
						hiperbolic		(+−)
		$A = 0$ degenerată	$K \neq 0$ Cilindru	$J \neq 0$		imaginar	$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \frac{K}{J} = 0$	(++)+
						eliptic		(++)−
						hiperbolic		(+−)−
				$J = 0$		parabolic	$x^2 = \pm 2\sqrt{-\frac{K}{I^2}}\, z$	
			$K = 0$ Pereche de plane	$J \neq 0$ secante		imaginare	$\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 = 0$	(++)
						reale		(+−)
				$J = 0$ paralele	$L \neq 0$ distincte	$L > 0$ imaginare	$x^2 + \frac{L}{I^2} = 0$	(+)+
						$L < 0$ reale		(+)−
					$L = 0$ confundate			

Observăm că dacă punctul F este arbitrar, distanța PF^2 este o sumă de trei pătrate. Această sumă se reduce la o sumă de două pătrate (cu un pătrat mai puțin), numai pentru anumite puncte F; prin definiție, acele puncte se numesc focarele cuadricei. Această definiție este generalizarea definiției focarului la conice *.

Ecuația (45) fiind verificată de coordonatele punctelor cuadricei (1), ea este chiar ecuația cuadricei. Deci, coordonatele (α, β, γ) ale unui focar F al cuadricei se determină din condițiile care exprimă că ecuațiile (1) și (45) reprezintă una și aceeași cuadrică. În acest caz, ecuațiile (1) și (45) au coeficienții proporționali, adică

$$f(x, y, z) \equiv \rho[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \lambda\pi_1^2 - \mu\pi_2^2], \quad (46)$$

sau încă

$$f(x, y, z) - \rho[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2] \equiv -\rho(\lambda\pi_1^2 + \mu\pi_2^2). \quad (47)$$

Din identitatea (47) rezultă că primul membru al ecuației

$$f(x, y, z) - \rho[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2] = 0. \quad (48)$$

se descompune într-o sumă de două pătrate; cu alte cuvinte, cuadrica reprezentată de ecuația (48) este de gen paraboloid. Scriind că determinantul A_{44} al ecuației (48) este nul, obținem condiția (21). Deci, valorile lui ρ care verifică identitatea (47) sînt rădăcinile ecuației în ρ. Rezultă că, înlocuind pe ρ cu una din cele trei rădăcini ale ecuației (21') și făcînd identificarea (47), se obțin valorile coeficienților α, β, γ, precum și λ, μ, π_1, π_2. În ceea ce privește ecuațiile

$$\begin{cases} \pi_1 = 0, \\ \pi_2 = 0, \end{cases}$$

ele reprezintă *directoarea corespunzătoare focarului* (α, β, γ).

Aplicații. 1) **Focarele unei cuadrice cu centru.** Fie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon\frac{z^2}{c^2} + k = 0, \quad (\varepsilon = \pm 1, \quad k = 0, \quad \pm 1)$$

ecuația cuadricei cu centru. În acest caz, *ecuația focală* (47) se scrie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + k - \rho[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2] \equiv$$
$$\equiv -\rho(\lambda\pi_1^2 + \mu\pi_2^2). \quad (49)$$

*) În plan, în general, distanța $\overline{PF^2}$ era o sumă de două pătrate; însă, în cazul focarului unei conice, această distanță se reduce la un pătrat (v.Cap.IX, § 9).

Pe de altă parte, ecuația (21) devine

$$\left(\frac{1}{a^2}-\rho\right)\left(\frac{1}{b^2}-\rho\right)\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\rho\right)=0,$$

de unde rezultă că ρ ia una din valorile $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{\varepsilon}{c^2}$.

Considerînd cazul $\rho_3=\frac{\varepsilon}{c^2}$, grupul termenilor de gradul doi al ecuației (48) este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\varepsilon\frac{z^2}{c^2}-\rho_3(x^2+y^2+z^2)=x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\right),$$

ceea ce arată că ecuațiile planelor $\pi_i (i=1, 2)$ sînt de forma

$$\pi_1 = x+p, \quad \pi_2 = y+q,$$

iar mărimile λ și μ satisfac relațiile

$$-\rho\lambda=\frac{1}{a^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}, \quad -\rho\mu=\frac{1}{b^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}.$$

Atunci, identitatea (49) devine

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\varepsilon\frac{z^2}{c^2}+k-\frac{\varepsilon}{c^2}\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\right]\equiv$$

$$\equiv\left(\frac{1}{a^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\right)(x+p)^2+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\right)(y+q)^2,$$

încît obținem relațiile

$$\frac{\varepsilon\alpha}{c^2}=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\right)p, \quad \frac{\varepsilon\beta}{c^2}=\left(\frac{1}{b^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\right)q, \quad \gamma=0$$

$$k-\frac{\varepsilon}{c^2}(\alpha^2+\beta^2)=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\right)p^2+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\right)q^2,$$

termenii de gradul al doilea reducîndu-se. Din primele două relații găsim

$$p=\frac{a^2\alpha}{\varepsilon c^2-a^2}, \quad q=\frac{b^2\beta}{\varepsilon c^2-b^2},$$

iar din celelalte două, ținînd seama de valorile lui p și q astfel obținute, rezultă

$$\begin{cases}\dfrac{\alpha^2}{a^2-\varepsilon c^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2-\varepsilon c^2}+k=0,\\ \gamma=0.\end{cases} \tag{49'}$$

Există deci o infinitate de focare $F(\alpha, \beta, \gamma)$, situate pe conica (49') din planul Oxy.

Considerînd și cazurile cînd ρ este egal cu $\frac{1}{a^2}$ și $\frac{1}{b^2}$, obținem *rezultatul:*

Focarele cuadricelor cu centru sînt situate pe trei conice aşezate în planele principale ale cuadricei, reprezentate de ecuaţiile:

$$\frac{x^2}{a^2 - \varepsilon c^2} + \frac{y^2}{b^2 - \varepsilon c^2} + k = 0, \quad z = 0; \tag{50 a}$$

$$\frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{\varepsilon c^2 - a^2} + k = 0, \quad x = 0; \tag{50 b}$$

$$\frac{z^2}{\varepsilon c^2 - b^2} + \frac{x^2}{a^2 - b^2} + k = 0, \quad y = 0. \tag{50 c}$$

Ca şi la conice, nu toate aceste focare sînt reale. Într-adevăr, presupunînd $a > b > c$, una din conice este imaginară.

Pentru un *elipsoid* ($\varepsilon + 1$, $k = -1$), singurele focare reale sînt cele situate în planele principale $z = 0$ şi $y = 0$, care conţin axa mare. În acest caz, conica (50 a) este o elipsă, iar (50 *c*) o hiperbolă.

Pentru un *hiperboloid cu o pînză* ($\varepsilon = -1$, $k = -1$), singurele focare reale sînt cele situate în planele principale $z = 0$ şi $y = 0$, care trec prin axa transversă cea mai mare (axa mare a elipsei de gîtuire). În acest caz, conica (50 a) este o elipsă, iar (50 c) o hiperbolă.

Pentru un *hiperboloid cu două pînze* ($\varepsilon = -1$, $k = +1$), singurele focare reale sînt situate în planele principale $x = 0$ şi $y = 0$ care trec prin axa transversă. În acest caz, conica (50 b) este o elipsă, iar (50 c) o hiperbolă.

Pentru *un con* ($\varepsilon = -1$, $k = 0$), curbele focale reale sînt situate în planul $y = 0$ şi sînt dreptele

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 0, \quad y = 0.$$

Ele se mai numesc *dreptele focale* ale conului.

Rezultă că pentru punctele F situate pe elipsa focală, distanţa $\overline{PF}^2$ este o sumă propriu-zisă de două pătrate; pe cînd, pentru punctele F situate pe hiperbola focală, distanţa $\overline{PF}^2$ este o diferenţă de două pătrate. Primele se pot numi *focare eliptice*, celelalte *focare hiperbolice*.

Intersecţia planelor $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 0$ este directoarea corespunzătoare focarului considerat, fiind o dreaptă perpendiculară pe planul conicei focale. De exemplu, în cazul $\rho = \frac{\varepsilon}{c^2}$, ecuaţiile directoarei corespunzătoare focarului $F(\alpha, \beta, \gamma)$ de pe conica focală (50 a) sînt

$$x = \frac{a^2\alpha}{a^2 - \varepsilon c^2}, \quad y = \frac{b^2\beta}{b^2 - \varepsilon c^2}, \tag{49''}$$

ceea ce arată că directoarea este o dreaptă perpendiculară pe planul conicei focale considerate. Locul acestor directoare se obţine eliminînd pe α şi β între ecuaţiile (49′) şi (49″) şi este cilindrul

$$\frac{a^2 - \varepsilon c^2}{a^2} x^2 + \frac{b^2 - \varepsilon c^2}{b^2} y^2 + k = 0,$$

numit şi *cilindrul director*.

2) **Focarele paraboloizilor.** Fie paraboloidul

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

În acest caz, ecuația (21) se scrie

$$\left(\frac{1}{a^2} - \rho\right)\left(\frac{\varepsilon}{b^2} - \rho\right)(-\rho) = 0,$$

și admite rădăcinile nenule $\rho_1 = \frac{1}{a^2}$, $\rho_2 = \frac{\varepsilon}{b^2}$.

Pentru $\rho_1 = \frac{1}{a^2}$, grupul termenilor de gradul doi al ecuației (48) este

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} - \rho_1(x^2 + y^2 + z^2) = -\left(\frac{1}{a^2} - \frac{\varepsilon}{b^2}\right)y^2 - \frac{z^2}{a^2}.$$

Din ecuația focală

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{x^2}{b^2} - \rho\,[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2] = 2z - \rho(\lambda\pi_1^2 + \mu\pi_2^2),$$

rezultă că expresiile π_1 și π_2 sînt de forma

$$\pi_1 = y + p, \qquad \pi_2 = z + q,$$

iar

$$-\rho_1\lambda = -\left(\frac{1}{a^2} - \frac{\varepsilon}{b^2}\right), \qquad -\rho_1\mu = -\frac{1}{a^2}.$$

Făcînd identificarea, în ecuația focală, termenii de gradul al doilea reducîndu-se, obținem relațiile

$$\frac{\beta}{a^2} = -\left(\frac{1}{a^2} - \frac{\varepsilon}{b^2}\right)p, \quad \frac{\gamma}{a^2} = 1 - \frac{q}{a^2},$$

$$\frac{\beta^2 + \gamma^2}{a^2} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{\varepsilon}{b^2}\right)p^2 + \frac{1}{a^2}q^2, \qquad \alpha = 0.$$

Din primele două relații găsim

$$p = \frac{-b^2}{b^2 - \varepsilon a^2}\beta, \quad q = a^2 - \gamma,$$

iar din ultimele, în care s-au înlocuit valorile obținute ale lui p și q, avem

$$\begin{cases} \beta^2 = (\varepsilon b^2 - a^2)(2\gamma - a^2), \\ \alpha = 0. \end{cases}$$

În cazul $\rho_2 = \frac{\varepsilon}{b^2}$ va fi de ajuns a schimba pe x cu y, $\frac{1}{a^2}$ cu $\frac{\varepsilon}{b^2}$ și α cu β.

Avem astfel *rezultatul:*

Focarele paraboloizilor sînt situate pe parabolele focale

$$x^2 = (a^2 - \varepsilon b^2)(2z - \varepsilon b^2), \quad y = 0; \tag{52 a}$$

$$y^2 = (\varepsilon b^2 - a^2)(2z - a^2), \quad x = 0 \tag{52 b}$$

aflate în planele principale care se intersectează după axă.

§ 10. DETERMINAREA CUADRICELOR PRIN CONDIȚII INIȚIALE

În ecuația generală (1) a unei cuadrice intră zece coeficienți a_{ij} omogeni, încît, împărțind cu unul din coeficienții diferiți de zero, rămîn numai nouă coeficienți arbitrari.

În general, o *condiție geometrică* duce la anumite relații între coeficienții cuadricei. Dacă o condiție geometrică duce la o singură relație liniară între coeficienți, ea se numește o *condiție simplă.*

Deducem

Propoziția. Pentru ca o cuadrică să fie determinată, trebuie, în general, nouă condiții simple.

Problema determinării cuadricei prin condiții inițiale este echivalentă cu problema exprimării analitice (în condiții simple) a condițiilor geometrice date și, apoi, a determinării coeficienților ecuației cuadricei din sistemul definit de condițiile simple obținute.

Astfel, dacă se impune condiția ca o cuadrică să treacă printr-un punct, obținem o condiție simplă. Este relația care se obține cînd înlocuim coordonatele punctului dat în ecuația (1) a cuadricei. Deci, *cunoașterea unui punct al cuadricei echivalează cu o condiție simplă.*

Așadar, o cuadrică este determinată dacă trece prin nouă puncte. Scriind că punctele $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, 9)$ se găsesc pe cuadrica (1), obținem un sistem de zece ecuații liniare și omogene în coeficienții $a_{ij}(i, j = 1, 2, 3, 4;\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 9)$:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + \ldots + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y_\alpha^2 + a_{33}z_\alpha^2 + 2a_{12}x_\alpha y_\alpha + \ldots + 2a_{34}z_\alpha + a_{44} = 0.$$

Ecuația cuadricei care trece prin nouă puncte este deci

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & xy & xz & yz & x & y & z & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1y_1 & x_1z_1 & y_1z_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_9^2 & y_9^2 & z_9^2 & x_9y_9 & x_9z_9 & y_9z_9 & x_9 & y_9 & z_9 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

primul membru fiind un determinant de ordinul al zecelea. Cuadrica ce trece prin nouă puncte este unică, abstracție făcînd de cazul cînd rangul matricei:

$$\| x_\alpha^2 \quad y_\alpha^2 \quad z_\alpha^2 \quad x_\alpha y_\alpha \quad x_\alpha z_\alpha \quad y_\alpha z_\alpha \quad x_\alpha \quad y_\alpha \quad z_\alpha \quad 1 \|$$

nu este maxim. În acest caz, cele nouă puncte sînt în poziții speciale (de exemplu, ele se găsesc pe o cuartică), prin punctele date trecînd o infinitate de cuadrice. Așadar:

O cuadrică este determinată, în general, prin nouă puncte.

În general, cunoașterea unui *plan remarcabil* (plan tangent într-un punct, plan principal etc.) echivalează cu *trei condiții simple.*

În adevăr, dîndu-se un *plan tangent și punctul de contact*, obținem condițiile simple echivalente, identificînd ecuația planului dat cu a planului tangent la cuadrică în punctul dat, de unde rezultă trei condiții simple.

Fiind dat *un plan tangent*, obținem o condiție simplă. Într-adevăr, pentru ca un plan să fie tangent la o cuadrică, este necesar și suficient ca intersecția lor să fie o conică degenerată, ceea ce dă o singură relație.

În general, o *dreaptă remarcabilă* (axă etc.) echivalează cu *patru condiții simple*, deoarece o dreaptă depinde de patru parametri.

Însă cunoașterea unei *generatoare rectilinii* echivalează cu trei condiții simple. În adevăr, pentru ca o dreaptă să fie generatoare, trebuie să fie situată pe suprafață; deci este necesar și suficient ca trei din punctele dreptei să fie pe suprafață. Obținem astfel trei condiții simple. Rezultă că *două generatoare din același sistem* reprezintă șase condiții, iar *trei generatoare* din același sistem echivalează cu nouă condiții. Dacă două generatoare sînt din sisteme diferite, obținem cinci condiții simple. În adevăr, în acest caz, generatoarele se întîlnesc; deci, rezultă o relație între coeficienții dreptelor, ceea ce reprezintă o condiție mai puțin.

Cunoașterea *centrului* unei cuadrice este echivalentă cu trei condiții simple, deoarece centrul este dat de un sistem de trei ecuații.

O *conică* situată pe o suprafață reprezintă *cinci* condiții simple, deoarece o conică este determinată de cinci puncte așezate pe suprafață. Însă cunoașterea a *două conice* echivalează cu opt condiții, dacă ținem seama că ele au două puncte comune.

O conică și o dreaptă reprezintă numai șapte condiții în loc de nouă, deoarece au în comun două puncte.

Așadar, fiind date anumite condiții geometrice (condiții inițiale), proprietatea geometrică dată se exprimă analitic și se determină echivalența în condiții simple (relații liniare între coeficienți). Dacă numărul condițiilor simple independente este egal cu numărul coeficienților arbitrari, cuadrica este unic determinată. În celelalte cazuri, se obțin familii de cuadrice depinzînd de 1, 2, ..., sau 8 parametri. Dacă ecuațiile cuadricelor depind liniar de un număr de parametri, obținem familii liniare punctuale de cuadrice (v. §11).

§ 11. FAMILII LINIARE PUNCTUALE DE CUADRICE

1. Se numește *familie liniară punctuală de cuadrice* o infinitate de cuadrice reprezentate de o ecuație depinzînd liniar de un număr de cel mult opt parametri. Dacă în ecuație figurează unu, doi sau trei parametri, familia liniară punctuală de cuadrice se zice că este un *fascicul*, o *rețea* sau un *complex* de cuadrice.

2. **Fascicul punctual de cuadrice.** *Un fascicul de cuadrice este constituit din totalitatea cuadricelor care trec prin opt puncte.* În adevăr, scriind că

ecuația (1) a cuadricei este verificată de coordonatele punctelor $P_\alpha(\alpha = 1, 2, ..., 8)$, se obține un sistem de opt ecuații liniare și omogene în cei zece coeficienți $a_{11}, ..., a_{44}$ neesențiali ai ecuației cuadricei sau un sistem de opt ecuații liniare neomogene în cei nouă coeficienți esențiali. Aceasta înseamnă că prin opt puncte — dacă aceste puncte nu sînt în poziții speciale — trec o infinitate de cuadrice, reprezentate de o ecuație depinzînd liniar de un parametru, care formează deci un fascicul de cuadrice.

Ecuația unui fascicul de cuadrice este, așadar, de forma

$$f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = 0, \tag{53}$$

unde

$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + ... + a_{44} = 0$ și $g(x, y, z) = b_{11}x^2 + ... + b_{44} = 0$ sînt ecuațiile a două cuadrice din fascicul, iar λ este un parametru. Cuadricele $f = 0$ și $g = 0$ se numesc *cuadricele de bază* sau *fundamentale* ale fasciculului (53).

Rezultă că orice cuadrică a fasciculului trece prin cuartica strîmbă de intersecție a cuadricelor de bază $f = 0$ și $g = 0$. În adevăr, ecuația (53) este satisfăcută — oricare ar fi valoarea lui λ — dacă înlocuim pe x, y, z cu o soluție a sistemului $f = 0$, $g = 0$. Cu alte cuvinte, *un fascicul de cuadrice este constituit din totalitatea cuadricelor care trec prin cuartica strîmbă de intersecția a două cuadrice date.* Se spune că cuartica de intersecție a cuadricelor $f = 0$ și $g = 0$ constituie *curba de bază* a fasciculului (53).

Cuarticele strîmbe se împart în două categorii: prima categorie conține cuartice strîmbe de primă speță — sînt cuarticele determinate de opt puncte, putînd fi considerate ca intersecții a două cuadrice; a doua categorie conține cuartice de-a doua speță — sînt cuarticele ce pot fi considerate ca intersecția necompletă a unei cuadrice cu o suprafață algebrică cubică care conține două generatoare dintr-o aceeași familie a cuadricei. Rezultă că o cuartică de-a doua speță nu poate fi considerată ca intersecția a două cuadrice; deci, o cuartică de-a doua speță nu poate fi considerată drept curbă de bază a unui fascicul de cuadrice.

Așadar, *un fascicul de cuadrice este constituit din totalitatea cuadricelor care trec printr-o cuartică strîmbă de prima speță.*

Rezultă că dacă nouă puncte sînt situate pe o cuartică strîmbă de prima speță, prin cele nouă puncte nu trece o cuadrică unică, ci trec o infinitate de cuadrice, constituind fasciculul avînd drept curbă de bază cuartica strîmbă a celor nouă puncte.

Proprietăți. 1° *Prin orice punct* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *al spațiului, care nu se găsește pe curba de bază, trece o cuadrică a fasciculului*, anume cuadrica din fascicul pentru care parametrul λ este definit de relația

$$f(x_0, y_0, z_0) + \lambda g(x_0, y_0, z_0) = 0$$

obținută scriind că ecuația (53) este verificată de coordonatele punctului P_0.

2° *Există patru cuadrice degenerate într-un fascicul de cuadrice, care sînt — în general — conuri.* Propoziția rezultă din condiția că discriminantul cuadricei (53) este nul. Obținem astfel ecuația

$$|a_{ij} + \lambda b_{ij}| = B\lambda^4 + ... + A = 0 \quad (A = |a_{ij}|, \quad B = |b_{ij}|) \tag{54}$$

care este de gradul al patrulea în λ.

3° *Tetraedrul format de vîrfurile* P', P'', P''', P^{IV} *ale conurilor dintr-un fascicul de cuadrice constituie un tetraedru conjugat față de toate cuadricele fasciculului.* În adevăr, să considerăm conul K'—corespunzător valorii λ' a parametrului în fasciculul (53). Planul tangent la conul K' în vîrful său $P'(x_i')$ are ecuația

$$\pi' \equiv x_i(f_{x_i'} + \lambda' g_{x_i'}) = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Deoarece planul tangent la un con în vîrful său este nedeterminat, rezultă că derivatele $f_{x_i'}$ și $g_{x_i'}$ în punctul P' satisfac condițiile

$$f_{x_i'} + \lambda' g_{x_i'} = 0.$$

Ținînd seama de aceste condiții, ecuația planului polar al punctului P' față de o cuadrică oarecare a fasciculului este

$$x_i(f_{x_i'} + \lambda g_{x_i'}) = (\lambda - \lambda')\, x_i g_{x_i'} = 0.$$

Observăm că acest plan este același, oricare ar fi cuadrica din fascicul. Pe de altă parte, planul polar al unui punct în raport cu un con trece prin vîrful conului (proprietatea rezultă imediat dacă alegem conul cu vîrful în origine). Deci, planul polar al vîrfului P' al conului K' trece prin vîrfurile P'', P''', P^{IV} ale conurilor K'', K''', K^{VI}, și proprietatea este demonstrată.

4° *Într-un fascicul de cuadrice există trei paraboloizi, dintre care cel puțin unul este real.* În adevăr, o cuadrică din familia (53) este un paraboloid dacă invariantul A_{44} este nul. Însă condiția $A_{44} = \varphi(\lambda) = 0$ este o ecuație de gradul al treilea în λ, fiecărei rădăcini corespunzîndu-i un paraboloid în fascicul.

5° *Într-un fascicul de cuadrice există două cuadrice tangente la o dreaptă.* În adevăr, să intersectăm fasciculul (53) cu o dreaptă oarecare, care nu întîlnește curba de bază. Printr-o translație și o rotație putem lua dreapta drept una din axe, de exemplu axa Ox. Atunci, intersecția este dată de

$$\begin{cases} (a_{11} + \lambda b_{11})\, x^2 + 2(a_{14} + \lambda b_{14})\, x + a_{44} + \lambda b_{44} = 0, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Determinarea cuadricelor care sînt tangente dreptei date se obține din condiția ca rădăcinile ecuației în x să fie egale. Găsim astfel ecuația

$$(a_{14} + \lambda b_{14})^2 - (a_{11} + \lambda b_{11})\,(a_{44} + \lambda b_{44}) = 0$$

de gradul al doilea în λ. Există deci într-un fascicul două cuadrice tangente la o dreaptă.

6° *Există trei cuadrice, într-un fascicul, tangente unui plan dat.* În adevăr, printr-o deplasare în spațiu putem lua planul de intersecție drept unul din planele de coordonate, de exemplu drept plan Oxy. Intersecția fasciculului (53) cu planul Oxy este dată de sistemul.

$$\begin{cases} f(x, y, 0) + \lambda g(x, y, 0) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Așadar, *un plan intersectează un fascicul de cuadrice după un fascicul de conice.*

Pe de altă parte, se știe că într-un fascicul de conice există trei conice degenerate. Rezultă că într-un fascicul există trei cuadrice pe care planul considerat le intersectează după conice degenerate. Cu alta cuvinte, într-un fascicul există trei cuadrice tangente unui plan dat. Observăm că punctele de contact ale planului cu cele trei cuadrice tangente planului formează un triunghi autoconjugat față de fasciculul de cuadrice, numind astfel un triunghi cu proprietatea că latura opusă unui vîrf se găsește în planul polar corespunzător acelui vîrf.

Se poate observa că cele patru puncte fundamentale ale fasciculului de conice determinat prin intersecția unui plan cu un fascicul de cuadrice sînt punctele de intersecție ale planului dat cu cuartica de bază a fasciculului de cuadrice. Dacă planul dat este tangent de-a lungul unei generatoare la unul din conurile fasciculului de cuadrice, intersecția planului cu conul este chiar generatoarea conului luată de două ori. În acest caz, conicele de secțiune sînt tangente între ele în două puncte fixe ale generatoarei *.

7° *Locul centrelor cuadricelor unui fascicul de cuadrice este o cubică rațională*, ale cărei puncte la infinit corespund centrelor celor trei paraboloizi din fascicul. În adevăr, centrul unei cuadrice dintr-un fascicul este dat de ecuațiile

$$f_x + \lambda g_x = 0, \quad f_y + \lambda g_y = 0, \quad f_z + \lambda g_z = 0.$$

Rezolvînd aceste ecuații în raport cu x, y, z, se obțin funcții raționale de gradul al treilea în parametrul λ.

Aplicație. Ecuația fasciculului de cuadrice care intersectează o cuadrică după două conice. Fie $\pi_1 = 0$ și $\pi_2 = 0$ ecuațiile planelor celor două conice C_1 și C_2, situate pe cuadrica (1). Deoarece una din cuadricele fasciculului care trece prin cuartica degenerată în conicele C_1 și C_2 poate fi considerată ca formată din planele celor două conice, ecuația

$$f(x, y, z) + \lambda\pi_1\pi_2 = 0 \tag{55}$$

este ecuația fasciculului de cuadrice căutat.

Dacă planele π_1 și π_2 se confundă, rezultă că ecuația

$$f(x, y, z) + \lambda\pi^2 = 0 \tag{55'}$$

reprezintă *fasciculul de cuadrice tangente unei cuadrice (1) de-a lungul unei conice date*, $\pi = 0$ fiind ecuația planului în care este situată conica.

3. **Rețele de cuadrice.** O rețea de cuadrice este totalitatea cuadricelor avînd ecuația

$$f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z) = 0, \tag{56}$$

unde $f = 0, g = 0, h = 0$ sînt ecuațiile a trei cuadrice care nu fac parte dintr-un fascicul, iar λ, μ sînt parametrii.

O rețea de cuadrice este constituită din totalitatea cuadricelor care trec prin șapte puncte date. Proprietatea rezultă imediat, ținînd seama că dacă o cua-

* Aceste conice constituie un fascicul de conice bitangente.

dricã trece printr-un punct, obținem o condiție simplă reprezentată printr-o ecuație liniară neomogenă în cei nouă coeficienți arbitrari ai ecuației cuadricei.

Deoarece sistemul $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$ este constituit din trei ecuații de gradul al doilea, și un astfel de sistem admite opt soluții, rezultă că o rețea de cuadrice care trec prin șapte puncte trece și printr-un al optulea; sînt cele opt puncte de intersecție ale celor trei cuadrice fundamentale.

Observăm că într-o rețea de cuadrice există o infinitate de cuadrice speciale (unul din invarianții I, J, A_{44} este nul) sau degenerate ($A = 0$). Însă putem să determinăm cuadricele din rețeaua (56) care au doi invarianți ortogonali nuli. Astfel rezultă că sînt trei paraboloizi echilateri ($A_{44} = I = 0$), că sînt șase paraboloizi tangențial echilateri ($A_{44} = J = 0$) etc.

De asemenea, observăm că locul centrelor unei rețele este o suprafață algebrică de ordinul al treilea, deoarece rezolvînd ecuațiile centrului în raport cu x, y, z, se obțin funcții raționale de gradul al treilea în λ și μ.

4. **O familie liniară de cuadrice cu r parametri** ($1 \leqslant r \leqslant 8$) este dată de o ecuație de forma

$$\lambda_\alpha f_\alpha = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r+1), \quad (57)$$

unde $f_\alpha = 0$ sînt ecuațiile a $r + 1$ cuadrice ale familiei (care nu aparțin unei familii cu $r - 1$ parametri), λ_α fiind $r + 1$ parametri omogeni.

Printr-un punct $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al spațiului, din familia (57) trece o infinitate de cuadrice constituind o familie de cuadrice cu $r - 1$ parametri, este familia de cuadrice pentru care λ_α satisfac condiția

$$\lambda_\alpha f_\alpha(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Aplicații. 1. Ecuația cuadricelor ce trec prin două drepte date (nesituate în același plan). Dacă $\pi_1 = 0$, $\sigma_1 = 0$ și $\pi_2 = 0$, $\sigma_2 = 0$ sînt ecuațiile celor două drepte date, ecuația cuadricelor ce trec prin aceste două drepte este

$$\lambda\pi_1\pi_2 + \mu\pi_1\sigma_2 + \nu\sigma_1\pi_2 + \rho\sigma_1\sigma_2 = 0, \quad (58)$$

reprezentînd un complex de cuadrice (o familie liniară de cuadrice cu trei parametri).

2) **Ecuația cuadricelor care trec printr-o dreaptă dată.** Fie $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 0$ ecuațiile dreptei date; atunci, ecuația cuadricelor este

$$\pi\pi_1 + \lambda\sigma\pi_2, \quad (59)$$

unde π și σ sînt funcții liniare de x, y, z. Obținem astfel o familie cu șase parametri (v. și §10).

BIBLIOGRAFIE

1. Abramescu, N. *Lecțiuni de geometrie analitică.* Ed. 2. Cluj. Editura Universității. 1937.
2. Castelnuovo, G. *Lezioni di geometria analitica e proettiva.* Roma. 1931.
3. Creangă, I. și alții. *Curs de geometrie analitică.* Editura tehnică. București. 1951.
4. Cristescu, R. *Curs de matematici superioare.* București, Editura de stat didactică și pedagogică. 1961.
5. Dobrescu, A. *Geometrie diferențială.* București. Editura didactică și pedagogică. 1963.
6. Froda, Al. *Algebră superioară.* București. Editura Academiei R.P.R. 1958.
7. Gălbură, G. și alții. *Curs de geometrie analitică în spațiu.* București. Litografia Învățământului. 1955.
8. Gheorghiu, Gh. Th. *Elemente de algebră și geometrie analitică.* București. Editura de stat didactică și pedagogică. 1961.
9. Günther, N. M. și Cuzmin, R. O. *Culegere de probleme de matematici superioare.* Vol.I. (traducere din limba rusă). București. Editura tehnică. 1950.
10. Iacob, C. *Curs de matematici superioare.* București. Editura tehnică. 1957.
11. Ladon, I. F. *Bazele calculului vectorial.* București. (traducere din limba rusă). Editura de stat. 1949.
12. Lalescu, Tr. *Tratat de geometrie analitică.* București. 1938.
13. Mihăileanu, N. N. *Conice. Cuadrice.* Timișoara. Editura Institutului Politehnic. 1952.
14. Modenov, P. S. *Geometrie analitică.* București (traducere din limba rusă). Editura tehnică. 1957.
15. Moisil, Gr. *Algebra.* Vol. I, II. București. Litografia Învățământului. 1956.
16. Murgulescu, El. și alții. *Geometrie analitică și diferențială.* București. Editura didactică și pedagogică. 1962.
17. Nicolescu, Miron. *Analiza matematică.* Vol. I. București. Editura tehnică. 1957.
18. Onicescu, O. și Gălbură, G. *Algebra.* Vol. I. București. Colecția Natura. 1948.
19. Popescu, I. și Vrănceanu, G. G. *Curs de geometrie analitică și elemente de algebră liniară.* București. Editura didactică și pedagogică. 1963.
20. Postelnicu, T. Stoka, M. Vrănceanu, G. G. *Culegere de probleme de geometrie analitică și proiectivă.* București. Editura tehnică. 1962.
21. Stoka, M. și Vrănceanu, G. G. *Culegere de probleme de geometrie analitică și elemente de algebră liniară.* București. Editura didactică și pedagogică. 1963.
22. Teodorescu, N. *Metode vectoriale în fizica matematică.* Vol. I. București. Editura tehnică. 1954.
23. Țițeica, G. *Culegere de probleme de geometrie analitică.* București. 1932.
24. Van der Waerden, L.B. *Moderne Algebra.* Vol. I, II. Berlin. Springen. 1947.
25. Vrănceanu, G. *Geometrie analitică, proiectivă și diferențială.* București. Editura didactică și pedagogică. 1962.

TABLA DE MATERII

PARTEA ÎNTÎI GEOMETRIA PE DREAPTĂ

Pag.

I. *Sisteme de coordonată pe dreaptă*

§.1. Coordonata abscisă 9
§.2. Coordonata baricentrică 19
§.3. Coordonata proiectivă 21
§.4. Coordonate omogene 28

PARTEA A DOUA. ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

II. *Determinanţi. Matrice*

§.1. Permutări 31
§.2. Determinanţi 34
§.3. Matrice 42

III. *Sisteme de ecuaţii liniare*

§.1. Sisteme echivalente de ecuaţii liniare 46
§.2. Discuţia sistemelor de ecuaţii liniare 50
§.3. Sisteme de ecuaţii liniare omogene 53

PARTEA A TREIA. GEOMETRIA ÎN PLAN

IV. *Sisteme de coordonate în plan*

§.1. Proiecţii 57
§.2. Coordonate carteziene 60
§.3. Transformări de coordonate carteziene 64
§.4. Coordonate polare 68
§.5. Coordonate omogene 69

V. *Diferite forme ale ecuaţiei dreptei*

§.1. Direcţia unei drepte 70
§.2. Ecuaţia dreptei care trece prin două puncte 74
§.3. Ecuaţia dreptei care trece printr-un punct dat şi are o direcţie dată 77
§.4. Ecuaţia generală a dreptei 80
§.5. Ecuaţiile parametrice ale dreptei 85
§.6. Distanţa de la un punct la o dreaptă 86
§.7. Intersecţia a două drepte 88
§.8. Fascicul de drepte 91

Pag.

VI. *Curbe plane*

§.1. Reprezentarea analitică a curbelor plane 94
§.2. Locuri geometrice 99

VII. *Cercul*

§.1. Ecuaţia cercului 101
§.2. Intersecţia unei drepte cu un cerc 104
§.3. Probleme de tangenţă 105
§.4. Puterea unui punct în raport cu un cerc 108
§.5. Intersecţia a două cercuri 111
§.6. Fascicule de cercuri 114
§.7. Reţele de cercuri 120

VIII. *Teoria conicelor pe ecuaţii canonice*

§.1. Conice 123
§.2. Deducerea ecuaţiilor canonice ale conicelor 126
§.3. Elipsa 128
§.4. Hiperbola 133
§.5. Parabola 139

IX. *Teoria generală a conicelor*

§.1. Reducerea ecuaţiei unei conice la forma canonică cu ajutorul deplasărilor din plan 142
§.2. Invarianţi ortogonali 152
§.3. Intersecţia a două conice 161
§.4. Intersecţia unei conice cu o dreaptă 162
§.5. Tangente la o conică 166
§.6. Polaritatea în raport cu o conică 168
§.7. Proprietăţi diametrale 173
§.8. Axele şi vîrfurile unei conice 178
§.9. Focare la conice 179
§.10. Determinarea conicelor prin condiţii iniţiale 184
§.11. Familii liniare de conice 186
§.12. Construcţii geometrice ale conicelor 198

PARTEA A PATRA. GEOMETRIA ÎN SPAŢIU

X. *Sisteme de coordonate în spaţiu*

§.1. Proiecţii 205
§.2. Coordonate carteziene 209
§.3. Direcţia unei drepte în spaţiu 213
§.4. Transformări de coordonate carteziene 217
§.5. Coordonate cilindrice. Coordonate sferice 221
§.6. Coordonate omogene 223

XI. *Algebra vectorială*

§.1. Vectori 225
§.2. Adunarea şi scăderea vectorilor 228
§.3. Înmulţirea vectorilor cu scalari 232
§.4. Descompunerea vectorilor 233
§.5. Produsul scalar a doi vectori 237
§.6. Produsul vectorial a doi vectori 239
§.7. Produsul mixt şi produsul dublu vectorial a trei vectori 245

Pag.

XII. *Drepte şi plane în spaţiu*

§.1. Ecuaţiile dreptei 249
§.2. Ecuaţia planului 255
§.3. Probleme relative la dreaptă şi plan 264

XIII. *Suprafeţe şi curbe strîmbe*

§.1. Reprezentarea analitică a suprafeţelor 272
§.2. Reprezentarea curbelor în spaţiu 275
§.3. Generarea suprafeţelor 278

XIV. *Cîteva clase de suprafeţe*

§.1. Sfera 281
§.2. Suprafeţe cilindrice 292
§.3. Suprafeţe conice 295
§.4. Suprafeţe de rotaţie 299
§.5. Suprafeţe riglate şi desfăşurabile 305

XV. *Teoria cuadricelor pe ecuaţii canonice*

§.1. Deducerea ecuaţiilor canonice ale cuadricelor 311
§.2. Elipsoidul 314
§.3. Hiperboloidul cu o pînză 318
§.4. Hiperboloidul cu două pînze 324
§.5. Paraboloidul eliptic 329
§.6. Paraboloidul hiperbolic 331

XVI. *Teoria generală a cuadricelor*

§.1. Reducerea ecuaţiei unei cuadrice la forma canonică 336
§.2. Intersecţia unei cuadrice cu o dreaptă 340
§.3. Intersecţia unei cuadrice cu un plan 342
§.4. Intersecţia a două cuadrice 348
§.5. Polaritate în raport cu o cuadrică 351
§.6. Proprietăţi diametrale 354
§.7. Plane principale. Axe, vîrfuri 358
§.8. Invarianţi ortogonali ai cuadricelor 364
§.9. Focare 373
§.10. Determinarea cuadricelor prin condiţii iniţiale 379
§.11. Familii liniare punctuale de cuadrice 380
Bibliografie 385

Redactor responsabil: AMUZESCU ANA
Tehnoredactor: STIFTER ELENA

Dat la cules 03.05.1965. Bun de tipar 20.08.1965. Apărut 1965. Tiraj 3000+130 ex. Hîrtie scris I A 80 g/m², ft. 16/70×100. Coli editoriale 24,588. Coli de tipar 24,25. plan 1984 A 5368. C. Z. pentru bibliotecile mari 516(075.8) C. Z. pentru bibliotecile mici 51.

Intreprinderea Poligrafică „13 Decembrie 1918", Str. Grigore Alexandrescu nr. 93—95, Bucureşti, Republica Socialistă Romînia
Comanda nr. 789.