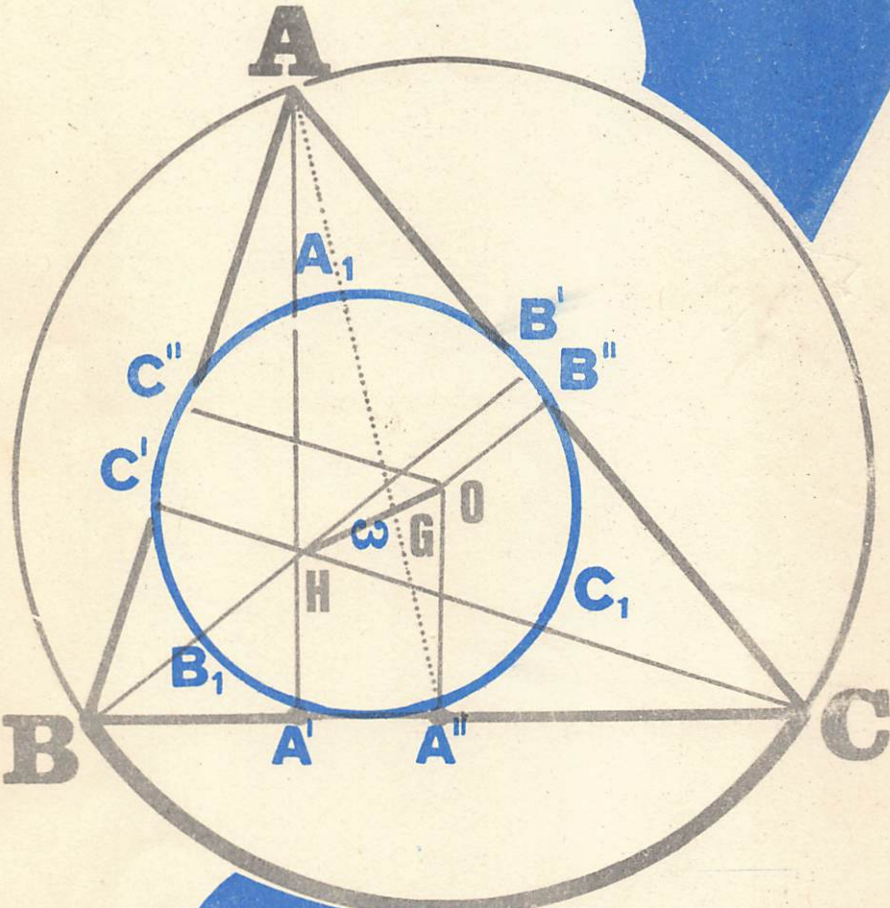
REVISTA MATEMATICA

PENTRU ELEVI



10

EDITURA PORTO-FRANCO

MATEMATICA

PENTRU ELEVI

Numărul 10

1991

EDITURA PORTO-FRANCO
GALAȚI

SPAȚIILE COLABORĂRII MATEMATICE

Redacția revistei „**MATEMATICA PENTRU ELEVI**" primește din partea cititorilor sugestii privind conținutul acestei publicații școlare. Consemnăm soluții la problemele publicate și așteptăm din partea colaboratorilor din țară propuneri de probleme și note matematice.

Materialele vor fi expediate pe adresa Liceului Teoretic „Vasile Alecsandri" Galați: str. Nicolae Bălcescu nr. 41, cod 6200; cu mențiunea: pentru revista „**MATEMATICA PENTRU ELEVI**".

O MATEMATICĂ A CERULUI ÎN POESIA LUI VASILE ALECSANDRI ?

„*Soarele și Luna ne plac*, scria G. Călinescu, *pentru că sînt geometrice și fac impresia a fi fost fabricate de un om primordial*". Propunîndu-vă acum să călătorim în cosmosul poesiei lui Vasile Alecsandri, ne amintim de o îndepărtată lecție de Astronomie din acest liceu binecuvîntat : „Depinde mult de lentila cu care privești stelele — spunea doamna profesoară. *Cu o lunetă obișnuită* se pot vedea mai puține stele decît cele reale ..." Nu vă ascundem faptul că multă vreme am căutat, dar nu în manuale de astronomie sau astrofizică, acea „*lunetă neobișnuită*". Ea ar fi trebuit *să ne spună* mai mult decît cărțile, mai mult decît sondele cosmice ; ea ar fi reușit să ne explice : de ce Soarele planetar are *lumină proprie* obținută prin reacțiile termo-nucleare ale hidrogenului și heliului, de ce primim, pe Pămîntul îndepărtat, la aproape 150 milioane km., doar a doua-miliarda parte din energia solară, de ce pe fotosferă se văd (fiindcă există !) pete, dar și protuberanțe luminoase, de ce „ne merge bine" sau nu — după felul în care radiațiile apollinice provoacă fenomenele geofizice ?...

Grecii cei vechi și înțelepți au pus și în Soare un zeu : pe Apollo. Cum l-au studiat — reprezintă, poate, o temă de meditație : am făcut-o tocmai în timpul eclipselor totale, în timpul absenței sale ! Iată un vers din Goethe : „*Alles nahe werde fern*" („Tot ce e apeoape ne îndepărtează"). Sîntem cosubstanțiali Soarelui, dar nu numai prin elementele chimice ce ne alcătuiesc „arsul, nedemnul pămînt" ; atunci cînd „Soarele emite" (arătîndu-și petele și faculele dantelate), pe Pămînt se nasc aurorele dar și furtunile magnetice. Nu găsiți că viețuind, sîntem foarte aproape de climatul artelor, al poesiei ?

Pentru Vasile Alecsandri cuvîntul trohaic „Soare" nu are ca prim referent principalul astru al sistemului planetar. „Absorbția telurică" ajunge în creația „regelui poesiei" precum un spectru de linii, subordonat unui sistem estetic și etic. Impresionist în fond, poetul are abilitatea de a conferi iluziei corporalitate ; iar această încercare de a smulge *frumosul* din zădărnicie se întrupează în cele patru coloane ale virtuților clasice, eline : „*sophrosinè*" — în folclor și în creația cu temă erotică ; „*dekaiosine*" — istoria ; „*sophia*" — natura ; „*andrèa*" — gîndirea și arta.

Pregnanța reliefurilor tematice de mai sus, nu lesne de definit, se poate verifica și prin „diagonalele" unei statistici. În *121 poeme* (ediția G.C. Nicolescu, 1966) ale lui Vasile Alecsandri am semnalat *215 transfigurări metaforice ale soarelui*. Aceasta ar fi o „supra-natură", matematică, a inefabilului — analizabilă mai ales la nivel lexical și simbolic. Poetul stăpînește lumea sensibilă, o distribuie pe categorii, într-o „procesiune" de construcţii substantivale (*188 ipostaze*), adjectivale (28), în pătrunderi verbale (4).

De pildă, „mîndra" Bucovină este „*căzută din soare*", ceasul dezrobirilor e vegheat de „*un soare mai falnic*", iar „*Libertatea-n faţa lumii a aprins un mîndru soare*". Propoziţii sacre ale conştiinţei noastre de români.

În semnul revelaţiilor divine, Alecsandri intuieşte o altă dimensiune a clasicităţii : „sophia" — înţelepciunea, descifrată în simfonismul naturii româneşti. Harfa de raze solare se confruntă cu mrejele obscurităţii. În „*pasteluri*" nu vom citi doar singurătăţile spaţiilor suspendate între pămînt şi cer. În aceste poeme, foşnesc mătăsuri ţesute din vechi gîndiri. *Imn către soare*, scris cu puţin înainte de moarte, reprezintă, credem, o expresie superlativă a apolinicului. *Demiurgul* a plăsmuit *soarele* prin cuvînt („*ţi-a zis să fii*") gest reluat de poet, fiindcă *rostirea* e simultană cu reflectarea eului creator („*cu mîndrie s-a oglindit în tine*"). Arta permanentizează conturul matricial al unui timp primordial („*Şi chipu-i sfinţit rămas-a în veci pe discul tău*").

În poezia lui Alecsandri, invocaţia trisilabică „*O, soare* !" — derivată din troheul cardinal, prin noul echilibru ritmic, şi alcătuind *o d e l t a* existenţială, îşi apropie Absolutul.

Acel „*înger căzut*" nu ni se pare ambiguu ; întors din peregrinarea spre întrebările ultime, poetul a devenit şi un contemplator al emoţiilor deteriorate, al priveliştilor letale. Un gînditor răsăritean (Lao Zi) plîngea cînd vedea culoarea albă, ştiind că ea nu va rezista timpului. Şi *cuvîntul*, *deci* şi *poesia* pot aluneca, cu neîndurare, din expansiunile lor eterice. Dar, SOARELE, duminica idealului absolut al artelor — adică frumosul moral („*kalokagatia*") este nădăjduim de neînfrînt. La Alecsandri, *tema soarelui* triumfă nu numai prin număr. Sugestivă ne va apare şi astăzi misterioasa sa erudiţie a luminii, „romanul" liric avînd, şi el, lumină proprie. Tema soarelui este, credem, tema autorului, o voce esenţializată a veşniciei, prin care Vasile Alecsandri — geniul tutelar al bătrînei noastre şcoli — şi-a apropiat destinul de acela al mult — încercatului nostru popor.

Ne-am întors — odată cu Soarele — spre biblioteca metaforelor lui Alecsandri, privind un poem al lui Octavio Paz, laureatul, în 1990, al Premiului Nobel pentru literatură : „*Desenez aceste litere/ aşa cum desenează ziua imaginile/ şi suflă asupra lor/ şi nu se mai întoarce* ..." Nu se mai întoarce ?

Totuşi, să ne reamintim un adagiu al lui Cervantes : „*Un om nu e un fluviu — să nu se poată întoarce înapoi* ...".

prof. VIRGIL NISTRU ŢIGĂNUŞ
— doctorand în filologie —
Liceul Teoretic „VASILE ALECSANDRI"
Galaţi

OPERATORI LALESCU ŞI ŞIRURI LALESCU

D.M. BĂTINEŢU-GIURGIU, *profesor la liceul „MATEI BASARAB" din Bucureşti*

Scopul acestei lucrări este de a atrage atenţia tineretului studios şi dornic de matematică din liceele noastre, asupra bogăţiei în rezultate şi idei valoroase existente în *tezaurul matematic românesc*, idei care pot fi studiate, aprofundate şi dezvoltate.

Prin tezaur matematic românesc voi înţelege operele matematice ale marilor noştri înaintaşi, precum şi tot ceea ce este original şi valoros în articolele şi problemele de matematică ale tuturor celor care s-au străduit şi au obţinut rezultate deosebite în matematica românească, din toate timpurile şi la toate nivelurile.

În lucrările citate la bibliografie cu numerele [7, [8], [9], [12], şi [14] am introdus mai întîi conceptul de *şir Lalescu* şi apoi am introdus anumite *clase de şiruri Lalescu*, demonstrînd totodată unele teoreme şi propoziţii care reprezintă proprietăţi şi aplicaţii ale acestor concepte.

De asemenea în lucrarea citată la bibliografie cu numărul [10] am introdus noţiunea de *operator Lalescu* şi am demonstrat cîteva propoziţii şi teoreme privind cei doi *operatori Lalescu* introduşi în lucrare.

Considerăm că acest subiect nu este încă epuizat, el poate fi studiat şi perfecţionat în cercurile de matematică ale elevilor.

În această lucrare vom introduce alte tipuri de *operatori Lalescu* şi vom arăta care este legătura dintre *operatorii Lalescu* şi dintre anumite *clase de şiruri Lalescu*.

Pentru orice mulţime nevidă M vom desemna prin $S(M)$ mulţimea tuturor şirurilor cu valori în M adică $S(M)=\{(a_n)_{n\geq 1} \mid a_n\in M,\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*\}$.

De asemenea pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$, $k\in\mathbb{N}$, $k\leq m$ vom nota cu A_m^k numărul aranjamentelor de m luate cîte k.

Definiţia 1. Pentru orice $k\in\mathbb{N}$, k fixat vom numi *operator Lalescu* operatorul $L: S(\mathbb{R}_+)\to S(\mathbb{R})$ unde pentru orice $(x_n)_{n\geq 1}\in S(\mathbb{R}_+)$,

$$L((x_n)_{n\geq 1}) = (y_n)_{n\geq 1}\in S(\mathbb{R}) \text{ şi}$$

$$y_n = \left(A_{n+1}^{n+1-k}\cdot x_{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} - \left(A_n^{n-k}\cdot x_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

Imaginea $(y_n)_{n\geq 1}$ a şirului $(x_n)_{n\geq 1}\in S(\mathbb{R}_+)$ prin *operatorul Lalescu* definit mai sus se va numi *şir Lalescu* definit de şirul $(x_n)_{n\geq 1}$.

Teorema 1. Pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1}\in S(\mathbf{R}^*_+)$ pentru care există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=x\in\mathbf{R}^*_+$ şirul Lalescu rezultat prin aplicarea operatorului L este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} L(x_n)=\frac{x}{e}$.

Demonstraţie. Mai întîi menţionăm că în continuare dacă $L((x_n)_{n\geq 1})=(y_n)_{n\geq 1}$ atunci în loc de y_n vom scrie $L(x_n)$. Într-adevăr, pentru demonstraţia teoremei observăm că:

$$L(x_n)=\sqrt[n]{A_n^{n-k}\cdot x_n}\cdot\left(\frac{\sqrt[n+1]{A_{n+1}^{n+1-k}\cdot x_{n+1}}}{\sqrt[n]{A^{n-k}\cdot x_n}}-1\right)=\sqrt[n]{A_n^{n-k}\cdot x_n}\cdot$$

$$\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n,\ (\forall)n\geq 2,\ n\geq k, \tag{1}$$

$$\text{unde } u_n=\frac{\sqrt[n+1]{A_{n+1}^{n+1-k}\cdot x_{n+1}}}{\sqrt[n]{A_n^{n-k}\cdot x_n}};\ (\forall)n\geq 2, n\geq k.$$

Deci,

$$\lim_{n\to\infty} L(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{A_n^{n-k}\cdot x_n}}{n}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{A_n^{n-k}\cdot x_n}}{n}\cdot 1\cdot\ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\left(A_{n+1}^{n+1-k}\cdot x_{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}}}{A_n^{n-k}\cdot x_n}\right)=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{A_n^{n-k}\ x_n}}{n}\right)\cdot\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{A_{n+1}^{n+1-k}\cdot x_{n+1}}{A_n^{n-k}\cdot x_n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{A_{n+1}^{n+1-k}\cdot x_{n+1}}}\right)\right)=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{A_n^{n-k}\cdot x_n}}{n}\right)\cdot\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{A_{n+1}^{n+1-k}}{n\cdot A_n^{n-k}}\cdot\frac{x_{n+1}}{x_n}\cdot\frac{n}{\sqrt[n+1]{A_{n+1}^{n+1-k}\cdot x_{n+1}}}\right)\right)=$$

$$=\frac{x}{e}\cdot\ln\left(1\cdot x\cdot\frac{x}{e}\right)=\frac{x}{e}\cdot\ln e=\frac{x}{e}$$ şi teorema este demonstrată.

Observaţii. 1.1. Dacă în definiţie 1 considerăm $k=0$ atunci obţinem *operatorul Lalescu* din definiţia 1 a lucrării [10].

1.2. Dacă în definiția 1 considerăm $x_n = \left(\frac{n}{A_n^{n-k}} \cdot a_n\right), (\forall) n \in N^*$ atunci obținem operatorul Lalescu introdus în [10] prin definiția 2.

1.3. În demonstrația teoremei 1 am folosit faptul că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{A_k^{n-k} \cdot x_n}}{n} = \frac{x}{e}, \qquad (2)$$

Într-adevăr, notînd $v_n = \frac{A_n^{n-k} \cdot x_n}{n^n}$, $(\forall) n \in N^*$ avem:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{A_{n+1}^{n+1-k} \cdot x_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{A_n^{n-k} \cdot x_n} = \frac{(n+1)!}{k!} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot \frac{k!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$= \frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot \frac{1}{e_n}$ de unde rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{x}{e}$ și deci conform teoremei *Cauchy — D'Alembert* rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{v_n} = \frac{x}{e}$ ceea ce demonstrează relația (2).

1.4. Tot în demonstrația teoremei 1 am folosit faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ și deci că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n - 1}{\ln u_n} = 1$. Faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ rezultă din relația (2) astfel:

$$u_n = \frac{\sqrt[n+1]{A_{n+1}^{n+1-k} \cdot x_{n+1}}}{\sqrt[n]{A_k^{n-k} \cdot x_n}} = \frac{\sqrt[n+1]{v_{n+1}}}{\sqrt[n]{v_n}} \cdot \frac{n+1}{n}$$ și atunci $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{x}{e} \cdot \frac{e}{x} \cdot 1 = 1.$

În continuare vom considera $m \in N^*$ și $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m) \in R^m$ precum și $\overline{(x_n)}_{n \geq 1} = ((x^{(1)}_n)_{n\geq 1}, (x^{(2)}_n)_{n\geq 1}, \ldots, (x^{(m)}_n)_{n\geq 1}) \in S(R_+)^m$ și astfel vom da următoarea:

Definiția 2. Numim *operator Lalescu* de m variabile operatorul $B: S(R_+)^m \to S(R)$ unde $B(\overline{(x_n)}_{n\geq 1}) = (y_n)_{n\geq 1} \in S(R)$ cu

$$y_n = (n+1)^{1-k_1-k_2-\ldots-k_m} \cdot \left(\prod_{i=1}^{m} x_{n+1}^{(i)}\right)^{\frac{1}{n+1}} - n^{1-k_1-k_2-\ldots-k_m} \cdot \left(\prod_{i=1}^{m} x_n^{(i)}\right)^{\frac{1}{n}}; \qquad (3)$$

Imaginea $(y_n)_{n\geq 1}$ a m-uplului de șiruri $\overline{(x_n)}_{n\geq 1} \in S(R_+)^m$ prin *operatorul Lalescu* de m variabile B se va numi un *șir Lalescu* de m variabile, definit de șirurile componente ale șirului $\overline{(x_n)}_{n\geq 1}$.

Pentru o mai bună înțelegere a celor prezentate ne vom referi pe scurt asupra *operatorului Lalescu* de două variabile $B : S(\mathbf{R}_+)^2 \to S(\mathbf{R})$,

$$B((x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}) = (n+1)^{1-s-t} \cdot (x_{n+1} \cdot y_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} - (x_n \cdot y_n)^{\frac{1}{n}} \cdot n^{1-s-t} = \\ = (z_n)_{n\geq 1} \in S(\mathbf{R}),\ (\forall) n \in \mathbf{N}^*, \quad (4)$$

Demonstrăm acum următoarea:

Teorema 2. Pentru orice $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \in S(\mathbf{R}^*_+)$ și pentru orice $(s, t) \in \mathbf{R}^2$ astfel încît există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{n^s \cdot x_n} = x \in \mathbf{R}^*_+$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{n^t \cdot y_n} = y \in \mathbf{R}^*_+$ *șirul Lalescu* rezultat prin aplicarea operatorului B este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} B((x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}) = \frac{x \cdot y}{e^{s+t}}. \quad (5)$$

Demonstrație. Fie $w_n = \frac{x_n \cdot y_n}{n^{n(s+t)}}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Atunci:

$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{x_{n+1} \cdot y_{n+1}}{x_n \cdot y_n \cdot n^{s+t}} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n+1)(s+t)}$ de unde prin trecere la limită deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{x \cdot y}{e^{s+t}}$ și atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{x_n \cdot y_n}}{n^{s+t}} = \frac{x \cdot y}{e^{s+t}}$, (conform teoremei *Cauchy—D'Alembert*), (6)

Să notăm $z_n = B((x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}) = (n+1)^{1-s-t} \cdot (x_{n+1} \cdot y_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} - n^{1-s-t} \cdot (x_n \cdot y_n)^{\frac{1}{n}}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

Avem deci:

$$z_n = n^{1-s-t} \cdot \sqrt[n]{x_n \cdot y_n} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-s-t} \frac{\sqrt[n+1]{x_{n+1} \cdot y_{n+1}}}{\sqrt[n]{x_n \cdot y_n}} - 1 \right) =$$

$$= \frac{\sqrt[n]{x_n \cdot y_n}}{n^{s+t}} \cdot n(p_n - 1) \text{ unde } p_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-s-t} \frac{\sqrt[n+1]{x_{n+1} \cdot y_{n+1}}}{\sqrt[n]{x_n \cdot y_n}},\ (\forall) n \geq 2$$

și evident conform relației (6) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$.

Prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{x_n \cdot y_n}}{n^{s+t}} \cdot \frac{p_n - 1}{\ln p_n} \cdot \ln p_n^n \right) = \frac{x \cdot y}{e^{s+t}} \cdot 1 \cdot \ln\left(\lim_{n\to\infty} p_n^n \right) =$$

$$= \frac{x \cdot y}{e^{s+t}} \cdot \ln \left(\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n(1-s-t)} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{x_{n+1}^{n} \cdot y_{n+1}^{n}}}{x_n \cdot y_n} \right) \right) = \frac{xy(1-s-t)}{e^{s+t}} +$$

$$+ \frac{xy}{e^{s+t}} \cdot \ln \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1} \cdot y_{n+1}}{x_n \cdot y_n \cdot n^{s+t}} \cdot \frac{n^{s+t}}{\sqrt[n+1]{x_{n+1} \cdot y_{n+1}}} \right) \right) = \frac{xy(1-s-t)}{e^{s+t}} +$$

$$+ \frac{xy}{e^{s+t}} \cdot \ln \left(xy \cdot \frac{e^{s+t}}{xy} \right) = \frac{xy}{e^{s+t}} \cdot (1-s-t+s+t) = \frac{xy}{e^{s+t}}$$ și astfel teorema este demonstrată.

Observația. 2.1. Pentru $s = 0$, $t = 1$ și $y_n = A_n^{n-k}$ unde $k \in N$ este fixat se obține rezultatele din teorema 1.

În încheiere ținem să remarcăm că prin bibliografia detaliată prezentată mai jos facem o informare științifică a cititorului care poate constitui punctul de plecare pentru noi concepte matematice și proprietăți care evaluează importanța șirului propus în Gazeta Matematică de marele matematician român *Traian Lalescu*.

B I B L I O G R A F I E

[1]. **Bătinețu-Giurgiu M.D.**, Problemele 17668, 21589, 21820, 21898, C : 844, C : 855, C : 890 C : 1000 din Gazeta Matematică

[2]. **Bătinețu M.D.**, **ȘIRURI**, Editura Albatros, București 1979.

[3]. **Bătinețu M.D**, o problemă cu ... probeme in R.M.T., anul XI, nr. 1,2 – 1980 pag. 31 – 36.

[4]. **Bătinețu M.D., Maftei V.I., Stancu-Minasian M.I.**, Exerciții și probleme de analiză matematică pentru clasele a XI-a și a XII-a, Editura Didactică și Pedagogică, 1981

[5]. **Bătinețu-Giurgiu M.D.**, Studiul, aprofundarea și dezvoltarea tezaurului matematic românesc, mijloc de educație; Lucrare prezentată la faza pe țară a Simpozionului Creativitate și Eficiență în Învățămînt, Iași 3–4 iunie 1989, Lucrare premiată cu premiul I.

[6]. **Bătinețu-Giurgiu M.D.**, Șomodi Marius, O metodă elementară de determinare a limitei șirului lui *Traian Lalescu*, în Gazeta Matématică nr. 3/1989 pag. 81 – 82.

[7]. **Bătinețu-Giurgiu M.D.**, Clase de șiruri *Traian Lalescu*, Sesiunea de Comunicări științifice a Institutului de Petrol și Gaze Ploiești, 6–7 mai 1989, Sinaia.

[8]. **Bătinețu Giurgiu M..**, ȘIRURI LALESCU, în R.M.T., anul XX, nr. 1,2 – 1989 pag. 37 – 38.

[9]. **Bătinețu Giurgiu M.D.**, Clase de șiruri *Lalescu*, Sesiunea științifică a Institutului Politehnic din Timișoara, 3–4 noiebrie 1989.

[10]. **Bătinețu-Giurgiu M.**, OPERATORUL LALESCU. Proprietăți. Aplicații, în M.F.G., nr. 8/1989 pag. 22–27.

[11]. **Bătinețu-Giurgiu M.D.**, Țena Marcel, Asupra unor clase de limite de șiruri, în M.E.G· nr. 9.

[12]. **Bătinețu-Giurgiu M..**, *Șirurile Lalescu* și problema 17668 din Gazeta Matematică, în R.M.T., anul XXI, nr. 1,2 – 1990 (sub tipar).

[13]. **Bătinețu-Giurgiu M.D.**, O altă metodă de determinare a limitei șirului *Traian Lalescu*, în Gazeta Matematică nr. 2/1990 (sub tipar).

[14]. **Bătinețu-Giurgiu M.D.**, *Șirurile Lalescu* și funcția lui *Euler* de speța a doua. *Funcții Euler-Lalescu*, în Gazeta Matematică, publicația metodică nr. 1/1990 (sub tipar).

[15]. Bencze Mihail, O generalizare a limitei lui *Traian Lalescu*, în Gazeta Matematică, publicația metodică nr. 4/1988 0ag. 158–159.
[16]. Blaga Alexandru, O generalizare a șirului lui *Traian Lalescu*, în R.M.T., anul XIX nr. 1,2–1988 pag. 33–34.
[17]. Dicu Mihai, O altă modalitate de abordare a șirului lui *Traian Lalescu*, în R.M.T., anul XX nr. 1,2 – 1989 pag. 37 – 38.
[18]. Iliescu Ilie, Ștefănică Dan, Troie Adrian, Asupra unor clase speciale de șiruri de numere reale, în M.E.G., nr. 9.
[19]. Lupaș Alexandru, Asupra problemei 579 (G.M.), în Gazeta Matematică nr. 8/1976 pag. 281 – 286.
[20]. Popoviciu Tiberiu, Asupra calculului unei limite, în Gazeta Matematică seria A, 1971 pag. 8 – 11.
[21]. Șomodi Marius, Asupra șirului lui *Traian Lalescu*, Sesiunea de comunicări a elevilor din municipiul București, iunie 1989.
[23]. Țena Marcel, O altă soluție a problemei 579 (G.M.), în repista „Licăriri" a liceului „*Nicolae Bălcescu*" din Craiova, anul 1978 pag. 13–14.
[24]. Vernescu Andrei, Rădulescu-Banu Andrei, Asupra șirului lui *Traian Lalescu*, în Gazeta Matematică nr. 2/1989 pag. 53–54.

FUNCŢII PE MULŢIMI FINITE

prezentare de ROMEO ZAMFIR, *profesor, Galaţi*

Propoziţia 1 (generalizarea exerciţiului 22, pag. 29, manualul de algebră clasa a IX-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1988) Fie $(A_i)_{1\le i\le n}$ *o familie de mulţimi finite. Atunci*

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{card} A_i-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\operatorname{card}(A_i\cap A_j)+\ldots\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\operatorname{card}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Demonstraţie. Vom dovedi relaţia prin inducţie matematică. Pentru $n=1$ relaţia se reduce la card $A_1=$ card A_1. Pentru $n=2$, considerînd $A_1\cap A_2=A_1\cup(A_2-(A_1\cap A_2))$, rezultă card $(A_1\cup A_2)=$ card A_1+ card $(A_2-(A_1\cap A_2))=$ card A_1+ card A_2- card $(A_1\cap A_2)$.

Să considerăm formula adevărată pentru cel mult $n-1$ mulţimi şi să o demonstrăm pentru n mulţimi. Avem:

card $(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=$ card $(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{n-1})+$ card A_n- card $((A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{n-1})\cap A_n)$, însă $(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{n-1})\cap A_n=\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_i\cap A_n)$;

$$\text{deci card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)+\operatorname{card} A_n-\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_i\cap A_n)\right).$$

Aplicînd ipoteza de inducţie, obţinem:

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{card} A_i-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}\operatorname{card}(A_i\cup A_j)+$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n-1}\operatorname{card}(A_i\cap A_j\cap A_k)-\ldots+(-1)^n\operatorname{card}(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})+$$

$$+\operatorname{card} A_n-\sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{card}(A_i\cap A_n)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}\operatorname{card}(A_i\cap A_j\cap A_n)+\ldots+$$

$+(-1)^{n+1}$ card$(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$, iar prin regruparea termenilor găsim relaţia din enunţul propoziţiei, relaţie care poartă numele de PRINCIPIUL INCLUDERII ŞI EXCLUDERII.

Propoziţia 2. *Fie A, B două mulţimi, B finită cu n elemente şi $f: A\to B$ o funcţie injectivă, atunci A este finită şi* card $A\le$ card $B=n$.

Demonstrație Presupunem că A este infinită, deci $\{f(x) / x \in A\}$ este infinită deoarece f este injectivă. Dar $\{f(x) / x \in A\} \subset B$ și B este finită. Contradicție! Deci A este finită.

Fie $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Deoarece f este injectivă avem: card $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)\} = m$ și $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)\} \subset B$, deci $m \leq n$.

Propoziția 3. *Fie A, B două mulțimi avînd m respectiv n elemente și $f: A \to B$ o funcție, atunci*

i) *Dacă f este surjectivă rezultă $m \geq m$;*
ii) *Dacă f este bijectivă rezultă $m = n$.*

Demonstrație. i) Din f surjectivă $\Rightarrow \{f(x) | x \in A\} = B \Rightarrow m \geq n$.

ii) Din propoziția 2 și i) se deduce ii).

Propoziția 4. *Fie A, B două mulțimi finite avînd fiecare n elemente, atunci numărul funcțiilor bijective de la A la B este n!*

Demonstrație. Demonstrația o vom face prin inducție matematică. Dacă $n = 1$, atunci $A = \{x\}$, $B = \{y\}$ și $f: A \to B$ este unică, afirmația este adevărată.

Presupunem afirmația adevărată pentru mulțimi avînd $n - 1$ elemente. Fie A, B mulțimi cîte n elemente. Să alegem un element $x \in A$, atunci putem scrie $A = A^{1} - \{x\}$, unde A^{1} are $n - 1$ elemente. Orice funcție bijectivă este determinată de valoarea $f(x) \in B$ și de o funcție bijectivă $g: A^{1} \to B^{1}$, unde $B^{1} = B - \{f(x)\}$. Putem alege pe $f(x)$ în n moduri, iar pe g în $(n-1)!$ moduri, conform ipotezei de inducție. Deci putem defini $n(n-1)! = n!$ funcții bijective de la A la B.

Propoziția 5. *Fie A, B, două mulțimi finite avînd m, respectiv n elemente, atunci:*

i) card $(\{f / f: A \to B\}) = n^m$;
ii) *numărul funcțiilor injective de la A la B este A_n^m (dacă $n \geq m$);*
iii) *numărul funcțiilor surjective de la A la B este:*
$$n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - C_n^3(n-3)^m + \dots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}$$
(dacă $n \leq m$).

Demonstrație. i) Demonstrația o vom face prin inducție după m. Dacă $m = 1$, considerînd $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, atunci $f_i: A \to B$, $f_i(x) = b_i$, $1 \leq i \leq n$ sînt toate funcțiile care le putem defini pe cele două mulțimi, unde x este unicul element din A. Observăm că afirmația este verificată.

Presupunem afirmația adevărată pentru o mulțime cu $m-1$ elemente și dorim să o demonstrăm pentru o mulțime cu m elemente.

Fie $A^{1} \subset A$, card $A^{1} = m-1$ și $\{x_0\} = A - A^{1}$. Putem scrie $A = A^{1} - \{x_0\}$.

Oricărei funcții $f: A \to B$ îi putem asocia restricția sa la A^{1}, anume funcția $g: A^{1} \to B$, $g(x) = f(x)$. Dacă $g: A^{1} \to B$ este o funcție, obținem pentru fiecare $y \in B$ o funcție $f_g^y: A \to B$ astfel:

$$f_g^y(x) = \begin{cases} g(x), & \text{dacă } x \in A^{1}; \\ y, & \text{dacă } x = x_0. \end{cases}$$

Așadar, oricărei funcții $g: A' \to B$ îi putem asocia n funcții distincte de la A la B ale cărei restricții la A' sînt egale cu g. Deci numărul funcțiilor de la A la B este $n \cdot n^{m-1} = n^m$.

ii) Demonstrația o vom face prin inducție după m. Dacă $m = 1$ putem defini n funcții astfel $f_i: A \to B, f_i(x) = y_i$, $1 \le i \le n$, unde x este unicul element al mulțimii A și $B = \{y_1, \dots, y_n\}$, afirmația fiind adevărată, deoarece $A_n^1 = n$.

Presupunem adevărată afirmația pentru o mulțime cu $m-1$ elemente și dorim să demonstrăm pentru o mulțime cu m elemente. Fie $A' \subset A$ o mulțime cu $m-1$ elemente.

Fiecare funcție injectivă $f: A \to B$ este determinată de o funcție $g: A' \to B$ și valoarea $f(x) \in B - \{g(x')/x' \in A'\}$, unde $\{x\} = A - A'$. Deoarece avem A_n^{m-1} posibilitățile de alegere a funcției g, conform ipotezei de inducție, și $n-m+1$ moduri de a alege pe $f(x)$, deoarece card $(B - \{g(x)/x' \in A'\}) = n-m+1$; rezultă că numărul funcțiilor injective este $(n-m+1) A_n^{m-1} = A_n^m$.

iii) Să notăm cu S_m^n numărul funcțiilor surjective de la mulțimea $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ la mulțimea $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ cu $m \ge n$. Pentru orice $1 \le i \le n$ să notăm cu A_i mulțimea funcțiilor de la A la B pentru care y_i nu este imaginea nici unui element din A.

Atunci mulțimea S^n_m a funcțiilor surjective coincide cu mulțimea funcțiilor de la A la B care nu aparține nici uneia din mulțimile A_i, deci:

card $S^n_m = n^m -$ card $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$, conform propoziției 1, rezultă:

$$\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{1 \le i \le n} \text{card } A_i - \sum_{1 \le i < j \le n} \text{card}(A_i \cap A_j) + \dots +$$

$$+ (-1)^{n+1} \text{ card}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Mulțimea A_i este de fapt mulțimea funcțiilor definite pe A cu valori în $B - \{y_i\}$, deci card $A_i = (n-1)^m$, $A_i \cap A_j$ este mulțimea funcțiilor definite pe A cu valori în $B - \{y_i, y_j\}$ deci card $(A_i \cap A_j) = (n-2)^m$ ș.a.m.d. În plus, sumele de mai sus conțin, respectiv, $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$ termeni egali.

Deci: card $S_m^n = n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - \dots + (-1)^n C_n^{n-1}$.

APLICAȚII

1. (Exercițiul 28, pag. 86 din manualul de algebră, clasa a XII-a, Editura Didactică și pedagogică, București, 1988).

Fie M o mulțime cu 3 elemente.
Cîte legi de compoziție se pot defini pe M?
Cîte din acestea sînt comutative?
Cîte admit element neutru?

Generalizare.

Soluție. Considerăm mulțimea K cu n elemente. O lege de compoziție pe M este o funcție $f: M \times M \to M$ Aplicînd propoziția 5 i) rezultă că pe mulțimea K putem defini n^{n^2} legi de compoziție.

Notăm : $N := \{\{a, b\}/a, b \in M\}$, $\mathcal{N} := \{g/g : N \to M\}$,
$\mathcal{M} := \{f/f$ lege de compoziție comutativă$\}$.

Definim $F: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $F(f) := g$, unde $g: N \to M$; $g(\{a,b\}) = f(a,b) = f(b,a)$. F este injectivă, deoarece dacă $f_1 \neq f_2$, există $(a,b) \in M \times M$ astfel încît $f_1(a,b) \neq f_2(a,b)$, de unde obținem : $F(f_1)(a,b) \neq F(f_2)(a,b)$, adică $F(f_1) \neq F(f_2)$. F este surjectivă, deoarece dacă $g \in \mathcal{N}$, atunci definim $f: M \times M \to M$, $f(a,b) := g(\{a,b\})$. Evident $f \in \mathcal{M}$ și $F(f) = g$.

Aplicînd propoziția 3 ii) rezultă card $\mathcal{M}$ = card $\mathcal{N}$ și aplicînd 5 i) card $\mathcal{N} = n^{n(n+1)/2}$, deoarece card $N = C_n^2 + C_n^1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Observație. Am considerat $\{a, a\} = \{a\}$, $(\forall) a \in M$.

Pentru a răspunde la ultima întrebare vom afla mulțimea elementelor care admit element neutru pe $x_i \in M$, $1 \leq i \leq n$, fixat, unde $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Notăm :

$E = M \times M - \{(x_i, x_j), (x_j, x_i)/x_j \in K\}$; $\mathcal{E} = \{h/h : E \to M\}$;
$\mathcal{L}_i = \{f/f$ lege de compoziție care admite element neutru pe $x_i\}$
$\mathcal{L} = \{f/f$ lege de compoziție care admite element neutru$\}$.

Observăm că : card $E = M \times M$ — card $\{(x_i,x_j), (x_j,x_i)/x_j \in M\} = n^2 - 2n + 1$, deoarece card $M \times M = n^2$, iar card $\{(x_i,x_j), (x_j,x_i)/x_j \in M\} = 2n - 1$.

Definim $G: \mathcal{L} \to \mathcal{E}$, $G(f) = h$, unde $h: E \to M$, $h(a, b) = f(a, b)$, $\forall (a,b) \in E$. Evident că G este injectivă, iar dacă $h \in \mathcal{E}$, atunci definim $f: M \to M$, $f(a,b) = h(a,b)$, $(\forall)$ $(a,b) \in E$, $f(x_i,x_j) = f(x_j,x_i) = x_j$, $(\forall)$ j, $1 \leq j \leq n$. Datorită modului cum a fost construită f, rezultă că ea este o lege de compoziție care admite pe x_i ca element neutru, deci $f \in \mathcal{L}_i$ și $G(f) = h$.

Aplicînd propoziția 3 ii) rezultă : card $\mathcal{L}_i$ = card $\mathcal{E}$ și aplicînd propoziția 5 i), obținem : card $\mathcal{E} = n^{n^2-2n+1}$, deci card $\mathcal{L}_i = n^{(n-1)^2}$;

Deoarece $\mathcal{L} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i$ și $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$ (altfel dacă există $f \in \mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j$, atunci $f \in \mathcal{L}_i$ și $f \in \mathcal{L}_j$, deci $f(x_i,x_j) = x_i = x_j$, adică $i = j$).

Aplicînd propoziția 1, rezultă card $\mathcal{L} = n \cdot$ card $\mathcal{L}_i = n \cdot n^{(n-1)^2} = n^{(n-1)^2+1}$.

Particularizînd, obținem : Pentru $n = 3$, pe mulțimea M se pot defini 3^9 legi de compoziție dintre care 3^6 sînt comutative și 3^5 admit element neutru.

2. (Exercițiul 23, pag. 20 din manualul de algebră, clasa a XII-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1988).

Notăm cu $\mathcal{M}$ mulțimea tuturor matricelor de tipul (m,n) în care toate elementele sînt numerele $+1$ sau -1 și astfel încît produsul numerelor din fiecare linie și din fiecare coloană să fie -1. Să se calculeze numărul elementelor mulțimii $\mathcal{M}$.

Soluție. Fie $A \in \mathcal{M}$, $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ atunci $\prod_{i=1}^{m} a_{ij} = -1$, de unde $a_{mj} = -\prod_{i=1}^{m-1} a_{ij}$, $(\forall)j$, $1 \le j \le n$, deoarece $a_{mj} \in \{-1,1\}$.

Analog $a_{in} = -\prod_{j=1}^{n-1} a_{ij}$, $(\forall)i$, $1 \le i \le m$, de unde rezultă :

$$(1)\quad a_{mn} = -(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{m-1}\left(\prod_{j=1}^{n-1} a_{ij}\right) = -(-1)^{m-1}\cdot\prod_{j=1}^{n-1}\left(\prod_{i=1}^{m-1} a_{ij}\right).$$

Vom demonstra că dacă $2 \nmid m-n$, atunci $\mathcal{M} = \emptyset$. Pentru a demonstra acest lucru vom demonstra : dacă $\mathcal{M} \ne \emptyset$, atunci $2/m-n$. Într-adevăr, dacă $A \in \mathcal{M}$, atunci din (1) se deduce $(-1)^{m-1} = (-1)^{n-1}$, adică m și n au aceeași paritate,

Considerăm cazul $2/m-n$. Definim :

$f: \mathcal{M}_{m-1,n-1}(\{-1,1\}) \to \mathcal{M}$. Fie $A \in \mathcal{M}_{m-1,n-1}(\{-1,1\})$, $A = (a_{ij})$

$$f(A) = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} -\prod_{j=1}^{n-1} a_{1j} \\ \vdots \\ -\prod_{j=1}^{n-1} a_{m-1,j} \end{matrix} \\ \hline -\prod_{i=1}^{m-1} a_{i1} \ldots -\prod_{i=1}^{m-1} a_{i,n-1} & -x \end{array}\right),$$

unde $x = (-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\left(\prod_{i=1}^{m-1} a_{ij}\right) = (-1)^{m-1}\prod_{i=1}^{m-1}\left(\prod_{j=1}^{n-1} a_{ij}\right)$;

Se constată că $f(A) \in \mathcal{M}$. f este evident injectivă, f este surjectivă, deoarece dacă luăm $A' \in \mathcal{M}$, atunci suprimînd ultima linie și ultima coloană, obținem o matrice A și evident $f(A) = A'$. Deci f este bijectivă.

Aplicînd 3 ii) rezultă : card $\mathcal{M}_{m-1,n-1}(\{-1,1\})$=card $\mathcal{M}$, iar aplicînd 5 i) avem : card $\mathcal{M}_{m-1,n-1}(\{-1,1\}) = 2^{(m-1)(n-1)}$, deci card $\mathcal{M} = 2^{(m-1)(n-1)}$.

Evident, am considerat m, $n \ge 2$, iar dacă $m = 1$ sau $n = 1$, atunci card $\mathcal{M} = 1$.

Răspunsul problemei este :

dacă $2 \nmid m-n$, atunci card $\mathcal{M} = 0$;
dacă $2/ m-n$, atunci card $\mathcal{M} = 2^{(m-1)(n-1)}$.

Observație. Am folosit $\mathcal{M}_{m-1,n-1}(\{-1,1\}) = \{A/A : \{1,2,\ldots, m-1\} \times \times \{1,2,\ldots,n-1\} \to \{-1,1\}\}$.

3. (Exercițiul 31, pag. 59 din manualul de algebră, clasa a **XII**-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1988).

Fie $(G, \cdot)$ un grup și H o submulțime finită a lui G. Următoarele afirmații sînt echivalente:

1) $x, y \in H \rightarrow xy \in H$;
2) H este subgrup al lui G.

Soluție. 2) $\rightarrow$ 1) trivial.

1) $\rightarrow$ 2). Fie $x \in H$. Definim $f : \mathbf{N}^* \rightarrow H$, $f(n) = x^n$; f este bine definită deoarece dacă $x \in H$, atunci $x^n \in H$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

f nu este injectivă (altfel, conform propoziției 2 $\rightarrow$ $\mathbf{N}^*$ — finită), deci $(\exists) k, m \in \mathbf{N}^*$, $k > m$ astfel încît $x^k = x^m$. Luăm $p = k - m$, deci $x^p = e$ și $x^{p-1} \cdot x = x \cdot x^{p-1} = e$, adică $e \in H$ și $x^{p-1} \in H$, este inversul lui x.

Exercițiul 7, pag. 9 din manualul de algebră, clasa a **XII**-a, Editura Didactică și Pedagogică, 1988, este o particularizare a aplicației 3.

BIBLIOGRAFIE

[1]. **Ion, D.I. ș.a., Probleme de algebră**, Editura didactică și Pedagogică, București, 1981.

INEGALITĂŢI CU CEVIENE IMPORTANTE ÎNTR-UN TRIUNGHI

Mircea Bîrsan, *elev, Lic. „C. Negruzzi" Iaşi*

1. Deducerea unor inegalităţi geometrice utilizînd identităţi cu numere complexe, ca punct de plecare, este un procedeu cunoscut. Astfel, aşa-numita „ teoremă a lui Pompeiu" este obţinută de marele matematician român în acest mod. În cele ce urmează, vom utiliza procedeul pentru stabilirea unor noi inegalităţi în triungui. În [3] se obţine o altă serie de inegalităţi geometrice folosind acest procedeu în alt mod.

2. Prin calcul direct se verifică identitatea

$$\frac{x(x-t)}{(x-y)(x-z)}+\frac{y(y-t)}{(y-z)(y-x)}+\frac{z(z-t)}{(z-x)(z-y)}=1, \tag{1}$$

unde $x,y,z,t\in \mathbf{C}$ şi x,y,z sînt distincte. Ca urmare, putem scrie

$$\left|\frac{x(x-t)}{(x-y)(x-z)}\right|+\left|\frac{y(y-t)}{(y-z)(y-x)}\right|+\left|\frac{z(z-t)}{(z-x)(z-y)}\right|\geq 1. \tag{2}$$

Fie P, P' două puncte oarecare în planul triunghiului ABC. Considerăm că, faţă de un reper cu originea în P, punctele A,B,C şi P' au afixele x,y,z şi t, respectiv. Din (2) şi din faptul că $|x|=PA$, $|x-t|=P'A$, $|y-z|=a$, etc., rezultă inegalitatea

$$\frac{PA\cdot P'A}{bc}+\frac{PB\cdot P'B}{ca}+\frac{PC\cdot P'C}{ab}\geq 1. \tag{3}$$

3. Vom arăta că avem egalitate în (3) dacă şi numai dacă punctela P şi P' sînt izogonale în raport cu triunguiul ABC. Evident, egalitatee în (3) sau, echivalent, în (2) are loc dacă şi numai dacă

$$\arg\frac{x(x-t)}{(x-y)(x-z)}=\arg\frac{y(y-t)}{(y-z)(y-x)}=\arg\frac{z(z-t)}{(z-x)(z-y)},$$

ceea ce se mai scrie

$$\arg\frac{0-x}{y-x}\cdot\frac{t-x}{z-x}=\arg\frac{0-y}{z-y}\cdot\frac{t-y}{x-y}=\arg\frac{0-z}{x-z}\cdot\frac{t-z}{y-z}.$$

Ştim că, date $Z(z)$, $Z'(z')$ şi Z'' (z''), avem $\arg\frac{z'-z}{z''-z} = \widehat{Z'ZZ''}$ [2, p. 31], acest unghi fiind orientat (latura ZZ'' trebuie rotită în sens direct pentru a coincide cu latura ZZ'). În consecință, în (3) avem egalitate dacă şi numai dacă

$$\widehat{PAB} + \widehat{P'AC} = \widehat{PBC} + \widehat{P'BA} = \widehat{PCA} + \widehat{P'CB}. \tag{4}$$

Pentru a vedea că relațiile (4) dau în acelaşi timp şi condițiile necesare şi suficiente pentru ca P şi P' să fie puncte izogonale, vom considera mai multe cazuri (după apartenența punctelor P şi P' la cele şapte regiuni determinate de dreptele suport ale laturilor triunghiului ABC) Dacă, de exemplu, P şi P' sînt în interiorul triunghiului (fig. 1),atunci, trecînd la măsurile unghiurilor, relațiile (4) devin :

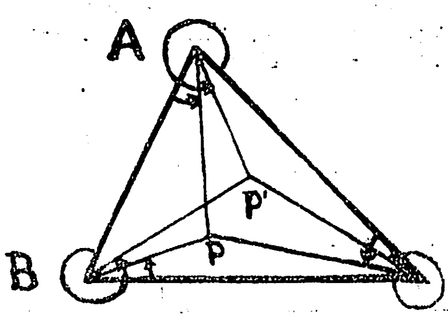


Fig. 1

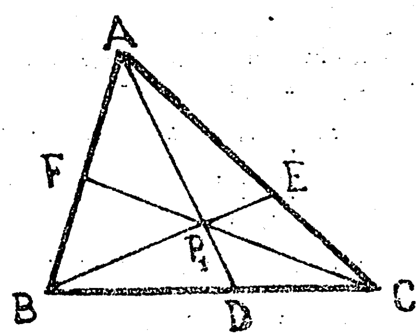


Fig. 2

$$+\mu(\widehat{PAB}) - \mu(\widehat{P'AC}) = +\mu(\widehat{PBC}) - \mu(\widehat{P'BA}) = +\mu(\widehat{PCA}) - \mu(\widehat{P'CB}) \tag{5}$$

(aici unghiurile sînt neorientate şi cu măsurile mai mici ca π). Izogonalul P_1 al punctului P este tot în interiorul triunghiului ABC [5, p. 59] şi condițiile precedente iau forma

$$\mu(\widehat{P_1AC}) - \mu(\widehat{P'AC}) = \mu(\widehat{P_1BA}) - \mu(\widehat{P'BA}) = \mu(\widehat{P_1CB}) - \mu(\widehat{P'CB}) = u. \tag{6}$$

Nu putem avea $u > 0$, căci din (6) ar urma $P' \in \mathrm{Int}\,(ACD) \cap \mathrm{Int}\,(BAE) \cap \cap\,\mathrm{Int}(CBF) = \emptyset$, ceea ce este absurd (fig. 2). Similar, $u < 0$ nu poate avea loc. Prin urmare $u = 0$ şi din (6) rezultă că P_1 şi P' coincid, adică P şi P' sînt izogonale în raport cu triunghiul ABC. Pentru alte poziții ale punctelor P şi P' semnele în (5) se schimbă şi atunci fie că aceste relații indică o contradicție (deci nu avem egalitate în (3)), fie că, prin intermediul unor relații de tip (6), arată că punctele P şi P' sînt izogonale.

4. Fie $p_a = AA_1$, $p_b = BB_1$, $p_c = CC_1$, unde A_1, B_1, C_1 sînt picioarele cevienelor AP, BP, CP, respectiv. De asemenea, fie α, β, γ coordonatele baricentrice ale punctului P, adică avem [5, p. 42]:

$$\frac{|\alpha|}{\sigma[PBC]} = \frac{|\beta|}{\sigma[PCA]} = \frac{|\gamma|}{\sigma[PAB]},$$

iar semnul lui α este $+$ sau $-$ după cum P și A sînt în același semiplan sau nu față de BC, etc. Relativ la punctul P' folosim notații similare (marcate cu un accent).

Să arătăm că, indiferent de poziția punctului P în planul triunghiului ABC, au loc relațiile:

$$PA = \frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\, p_a,\quad PB = \frac{\gamma+\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\, p_b,\quad PC = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\, p_c. \qquad (7)$$

Vom stabili numai prima egalitate și doar pentru pozițiile punctului P indicate în fig. 3 și 4. Avem:

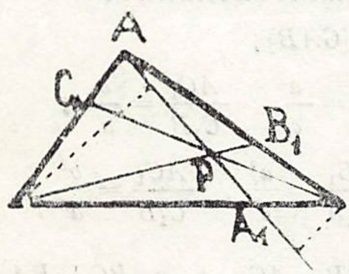


Fig. 3

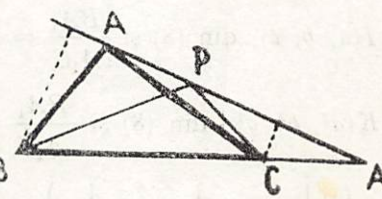


Fig. 4

$$\frac{PA}{AA_1} = \frac{\sigma[PAB]}{\sigma[A_1AB]} = \frac{\sigma[PCA]}{\sigma[A_1CA]},$$

de unde

$$\frac{PA}{AA_1} = \frac{\sigma[PAB] \pm \sigma[PCA]}{\sigma[A_1AB] \pm \sigma[A_1CA]} = \frac{\sigma[PAB] \pm \sigma[PCA]}{\sigma[PCB] \pm \sigma[PCA] + \sigma[PAB]}$$

(semnul $+$ corespunde cu fig. 3 și $-$ cu fig. 4), adică

$$\frac{PA}{p_a} = \frac{|\gamma| \pm |\beta|}{|\alpha| \pm |\beta| + |\gamma|} = \frac{\gamma+\beta}{\alpha+\beta+\gamma},$$

deoarece α, β, γ sînt pozitive în primul caz și $\alpha, \gamma > 0$, $\beta < 0$ în cazul al doilea.

Înlocuind în (3) PA, PB, PC prin expresiile lor date de (7) cît și $P'A$, $P'B$, $P'C$ prin expresii similare, obținem următoarea

Teoremă. Oricare ar fi punctele P și P' în planul triunghiului ABC este adevărată inegalitatea

$$(PP')\quad \frac{(\beta+\gamma)(\beta'+\gamma')}{bc}\, p_a p'_a + \frac{(\gamma+\alpha)(\gamma'+\alpha')}{ca}\, p_b p'_b +$$

$$+\frac{(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta')}{ab}\, p_c p'_c \geq (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha'+\beta'+\gamma')$$

semnul egal avînd loc dacă și numai dacă aceste puncte sînt izogonale.

5. Luînd punctele P, P', ce intervin în (PP'), oricare dintre punctele G, I, K (*Lemoine*), Γ (*Gergonne*), N(*Nagel*), vom obține inegalități cu unele ceviene importante. Notăm m_a, l_a, s_a, g_a, n_a lungimile cevienelor relative la latura BC determinate de punctele de mai sus (în aceeași ordine). Evident, pot fi considerate și alte puncte importante: H, I_a, I_b, I_c, etc.

Pentru determinarea coordonatelor baricentrice ale punctului P vor fi utile relațiile

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{|\gamma|}{|\beta|},\quad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{|\alpha|}{|\gamma|},\quad \frac{AC_1}{C_1B}=\frac{|\beta|}{|\alpha|},$$

care au o justificare imediată (fig. 3 sau 4). În consecință, pentru punctele importante la care ne-am referit, avem coordonatele baricentrice:

— $G(1, 1, 1)$, căci $\sigma[GBC]=\sigma[GCA]=\sigma[GAB]$;

— $I(a, b, c)$, din (8) și $\dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{c}{b}$, $\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{a}{c}$, $\dfrac{AC_1}{C_1B}=\dfrac{b}{a}$;

— $K(a^2, b^2, c^2)$, din (8) și $\dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{c^2}{b^2}$, $\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{a^2}{c^2}$, $\dfrac{AC_1}{C_1B}=\dfrac{b^2}{a^2}$;

— $\Gamma\left(\dfrac{1}{p-a}, \dfrac{1}{p-b}, \dfrac{1}{p-c}\right)$, din (8) și $AB_1=AC_1=p-a$, $BC_1=BA_1=$ $=p-b$, $CA_1=CB_1=p-c$;

— $N(p-a, p-b, p-c)$, din (8) și $BC_1=CB_1=p-a$, $AC_1=CA_1=p-$ $-b$, $BA_1=AB_1=p-c$.

Ținînd seama de acestea și utilizînd unele formule ca: $S=pr=\dfrac{abc}{4R}=$ $=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $\Sigma\dfrac{1}{p-a}=\dfrac{r+4R}{S}$, etc., precum și $l_a=\dfrac{2bc}{b+c}\cdot$ $\cdot\cos\dfrac{A}{2}$, $s_a(b^2+c^2)=2bc\,m_a$, obținem din (PP'), prin particularizarea pozițiilor punctelor P și P', următoarele inegalități (marcate pe margine tocmai cu perechea de puncte remarcabile considerată):

(GI) $$\Sigma\frac{b+c}{bc}\,m_a l_a \geq 3p$$

sau, eliminînd l_a, l_b și l_c,

(9) $$\Sigma\cos\frac{A}{2}\,m_a \geq \frac{3}{2}p;$$

$(G\Gamma)$ $\qquad \Sigma a \cos^2 \frac{A}{2}\, m_a g_a \geq \frac{8}{2} (r + 4R)S;$

(GN) $\qquad \Sigma a^3 m_a n_a \geq \frac{8}{2}\, p\, abc;$

(IK) $\qquad \Sigma a\, (b+c)\, (b^2+c^2)\, l_a s_a \geq 2p\, (a^2+b^2+c^2)\, abc$

sau inegalitatea echivalentă mai simplă

(10) $\qquad \Sigma bc \cos \frac{A}{2}\, m_a \geq \frac{1}{2}\, p\, (a^2+b^2+c^2);$

$(I\Gamma)$ $\qquad \Sigma \frac{a\,(b+c)\,(p-a)}{bc}\, l_a\, g_a \geq 2(r+4R)\, S$

sau

(11) $\qquad \Sigma \cos^3 \frac{A}{2}\, g_a \geq \frac{p(r+4R)}{4R};$

(IN) $\qquad \Sigma \frac{b+c}{bc}\, a\, l_a n_a \geq 2\, p^2$

sau

(12) $\qquad \Sigma\, a \cos \frac{A}{2}\, n_a \geq p^2;$

(ΓK) $\qquad \Sigma a^2\, (b^2+c^2) \operatorname{ctg} \frac{A}{2}\, s_a\, g_a \geq abc\, (a^2+b^2+c^2)\, (r+4R)$

sau, sub altă formă,

(13) $\qquad \Sigma a \operatorname{ctg} \frac{A}{2}\, m_a\, g_a \geq \frac{1}{2}\, (a^2+b^2+c^2)\, (r+4R);$

(KN) $\qquad \Sigma a^2\, (b^2+c^2)\, s_a\, n_a \geq p\, abc\, (a^2+b^2+c^2)$

sau

(14) $\qquad \Sigma a\, m_a\, n_a \geq \frac{1}{8}\, p\, (a^2+b^2+c^2);$

(ΓN) $\qquad \Sigma a^2 \cos^2 \frac{A}{2}\, g_a\, n_a \geq p^2\, r\, (r+4R).$

Observații. 1) Conform teoremei, inegalitățile precedente devin egalități dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.
2) Nu a fost luat în considerare cazul (GK) căci punctele G și K sînt izogonale și am fi obținut o egalitate (banală !).
3) Pentru a obține inegalități în care să apară lungimile cevienelor determinate de un singur punct, luăm în (3) unul dintre puncte O (ceea ce

înseamnă $OA = OB = OC = R$) şi relativ la al doilea punct utilizăm (7); sîntem conduşi la

$$(P) \qquad \Sigma \frac{\beta+\gamma}{bc} p_a \geq \frac{1}{R} (\alpha+\beta+\gamma).$$

Dacă punctul P este succesiv G, K, Γ, N, această inegalitate devine:

$$(15) \qquad \Sigma\, a\, m_a \geq 6\, S \text{ (evidentă, căci } \Sigma a\, m_a \geq \Sigma a\, h_a = 6S),$$

$$(16) \qquad \Sigma m_a \geq \frac{1}{2R} (a^2 + b^2 + c^2) \text{ [6, p. 213]},$$

$$(17) \qquad \Sigma a \cos^2 \frac{A}{2} g_a \geq \frac{S(r + 4R)}{R},$$

$$(18) \qquad \Sigma a^2 n_a \geq 4p^2 r,$$

semnul egal avînd loc dacă şi numai dacă punctele G, K, Γ, N coincid succesiv cu H (izogonalul lui O), adică triunghiul este echilateral.

4) Inegalităţi cu pătratele cevienelor determinate de un punct se obţin considerînd drept P şi P' în (PP') acelaşi punct $P(\alpha,\beta,\gamma)$:

$$(P^2) \qquad \Sigma \frac{(\beta+\gamma)^2}{bc} p^2_a \geq (\alpha+\beta+\gamma)^2$$

cu egalitate dacă şi numai dacă P este unul din punctele I, I_a, I_b, I_c. Prin particularizări evidente, putem scrie:

$$(G^2) \qquad \Sigma\, a\, m^2_a \geq \frac{9}{4} abc \text{ [6, p. 210]},$$

$$(K^2) \qquad \Sigma \frac{(b^2 + c^2)^2}{bc} s^2_a \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2,$$

sau, scrisă în altă formă,

$$(19) \qquad \Sigma\, bc\, m_a^2 \geq \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2)^2,$$

$$(\Gamma^2) \qquad \Sigma\, a^3 \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} g^2_a \geq abc\, (r + 4R)^2,$$

$$(N^2) \qquad \Sigma\, a^3 n^2_a \geq p^2\, abc,$$

acestea transformîndu-se în egalităţi dacă şi numai dacă triunghiul dat este echilateral.

6. Vom folosi acelaşi procedeu pentru a deduce şi alte tipuri de inegalităţi.

Se verifică uşor următoarele identităţi (în complex):

$$(20) \qquad \Sigma\, xy(x-y) = -(x-y)(y-z)(z-x),$$

$$(21) \qquad \Sigma x(y-z)^3 = (x-y)(y-z)(z-x)(x + y + z),$$

$$(22) \qquad \Sigma x^3(y-z) = -(x-y)(y-z)(z-x)(x + y + z).$$

Acestea conduc — procedînd ca în secțiunea 2 — la următoarele inegalități relative la distanțele punctului P la vîrfurile triunghiului ABC:

(23) $$a\,PB\cdot PC + b\,PC\cdot PA + c\,PA\cdot PB \geq abc,$$

(24) $$a^2\,PA + b^2\,PB + c^2\,PC \geq 3abc\,PG,$$

(25) $$a\,PA^3 + b\,PB^3 + c\,PC^3 \geq 3abc\,PG \text{ [6, p. 339].}$$

Datorită formulelor (7), putem trece (23) — (25) în inegalități cu cevienele prin punctul P:

(26) $$\Sigma a(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)\,p_b p_c \geq abc(\alpha+\beta+\gamma)^2,$$

(27) $$\Sigma a^2(\beta+\gamma)\,p_a \geq 3abc(\alpha+\beta+\gamma)PG,$$

(28) $$\Sigma a(\beta+\gamma)^3 p_a^3 \geq 3abc\,(\alpha+\beta+\gamma)^3\,PG.$$

Dacă în (26) luăm P în pozițiile G, I, K, Γ și N, vom obține:

(29) $$\Sigma a\, m_b m_c \geq \frac{9}{4}\,abc \text{ [4]};$$

(30) $$\Sigma \frac{1}{bc(b+c)}\, l_b l_c \geq \frac{4p^2}{(a+b)(b+c)(c+a)};$$

(31) $$\Sigma a\,(c^2+a^2)(a^2+b^2)\, s_b s_c \geq abc\,(a^2+b^2+c^2)^2,$$

echivalentă cu

(31') $$\Sigma a^2\, m_b m_c \geq \frac{1}{4}\,(a^2+b^2+c^2)^2;$$

(32) $$\Sigma \frac{1}{p-a}\, g_b g_c \geq \frac{1}{p}\,(r+4R)^2;$$

(33) $$\Sigma n_b n_c \geq p^2.$$

Se poate arăta (în maniera din secțiunea 3) că (26) devine egalitate dacă și numai dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic și P este ortocentrul său; ca urmare, în inegalitățile (29) — (33) apare semnul egal dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

În ce privește inegalitățile (27) și (28), să observăm că distanța PG, este cunoscută în cazul cînd P este un punct important [1]. În consecință putem obține noi inegalități, care, uneori, nu au o formă simplă.

BIBLIOGRAFIE

[1]. V. Băndilă, O generalizare a unei relații a lui Leibniz și aplicarea ei la calculul distanțelor dintre unele puncte remarcabile ale unui triunghi, G.M. — 2/1985, p. 35—41.

[2]. D. Brânzei, S. Anița, C. Cocea, Planul și spațiul euclidian, Ed. Acad. R.S.R., București, 1986.

[3]. C. Cocea, Stabilirea unor inegalități cu ajutorul numerelor complexe (va apare în R.M.T.).

[4]. G. Istrate, Problema L: 291, Matematica pentru elevi, Galați, nr. 7/1989, p. 119.

[5]. T. Lalescu, Geometria triunghiului, Ed. tineretului, 1958.

[6]. D.S. Mitrinovic, J.E. Pečarić, V. Volonec, Recent Advances in Geometric Inequalities Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1989.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ, 1990, JUDEȚUL GALAȚI

CLASA a VI-a

1. 6 muncitori au început o lucrare pe care și-au propus să o termine în 20 de zile lucrînd cîte 8 ore pe zi. După 4 zile 2 muncitori sînt detașați la o altă lucrare. În cîte zile se va termina lucrarea inițială dacă muncitorii care rămîn vor lucra cîte 6 ore pe zi?

* * *

2. Să se arate că $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ dacă și numai dacă $\frac{7a - 4b}{2a + 3b} = \frac{1}{21}$

prof. **RODICA MATEI**

3. Să se determine cel mai mare număr natural $\overline{abc}$, scris în baza zece știind că: $13a - 12b + 4c = 0$.

* * *

4. Fie ABC un triunghi oarecare cu $m(\widehat{A}) < 90°$. Perpendicularele în punctul A pe dreptele AB și AC conțin respectiv punctele M și N astfel încît $(AM) \equiv (AB)$ (M și C în semiplane opuse determinate de dreapta AB) și $(AN) \equiv (AC)$ (N și B în semiplane opuse determinate de dreapta AC).

a) Cercetați dacă $(MC) \equiv (NB)$.

b) Arătați că bisectoarele unghiurilor $\widehat{MAN}$ și $\widehat{BAC}$ sînt semidrepte opuse.

* * *

CLASA a VII-a

1. a) Arătați că oricare ar fi trei numere întregi există două cu suma divizibilă cu 2.

b) Arătați că oricare ar fi patru numere întregi există două a căror sumă sau diferență este divizibilă cu 5.

prof. **C. URSU**

2. Să se reprezinte grafic funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ştiind că:

$$f(x) = \begin{cases} (a-1)x + 2, \text{ pentru } x \leq -1; \\ 2x + 1, \text{ pentru } x > -1, \end{cases}$$

şi că punctul $A(-2; 4)$ aparţine graficului.

prof. V. DRĂGUŢ

3. Două cercuri de centre O şi O' sînt tangente exterioare în punctul A. Fie T şi T' punctele în care o tangentă comună exterioară „atinge" respectiv cercurile. Linia centrelor OO' taie a doua oară cercurile în M şi M'. Demonstraţi că $TMM'T'$ este patrulater inscriptibil.

* * *

4. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil şi E punctul de intersecţie al diagonalelor AC şi BD. Se notează cu Q, F, G, H picioarele perpendicularelor duse din E respectiv pe AB, BC, CD şi DA.

a) Să se demonstreze că punctul E este egal depărtat de laturile patrulaterului $HQFG$.

b) Să se determine condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească patrulaterul $ABCD$ pentru ca patrulaterul $HQFG$ să fie inscriptibil.

prof. I. BOSTAN

CLASA a VIII-a

1. Să se descompună în factori ireductibili polinomul:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z).$$

* * *

2. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} mx + n, \text{ dacă } x \leq 0; \\ nx + m, \text{ dacă } x > 0, \end{cases}$ unde $m, n \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x-1)$.

b) Să se determine g în condiţiile în care $g(0) = 2$ şi $g(2) = 0$.

* * *

3. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}^*$. Să se arate că dacă $a + b + c = 3$, atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{b^2}{c^2} + 1\right) + \frac{1}{b^2}\left(\frac{c^2}{a^2} + 1\right) + \frac{1}{c^2}\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right) \geq \frac{6}{abc}.$$

MARINELA VASILIU *elevă Liceul „Vasile Alecsandri"*

4. O dreaptă d înţeapă planul α fără a fi perpendiculară pe el. Arătaţi că există cel puţin o dreaptă g în α care să fie perpendiculară pe d. Este g unică?

prof. DAN MAYER

5. Se proiectează un punct O exterior planului unui triunghi ABC pe laturile AB, BC, CA respectiv în punctele F, D, E.

a) Să se arate că $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + BF^2 + CD^2$.

b) Dacă O este egal depărtat de laturile triunghiului ABC, atunci $AC \perp BO$ dacă şi numai dacă $AB = BC$.

* * *

CLASA a IX-a

1. Fie ABC un triunghi. Să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel cu $(AB) \equiv (AC)$ dacă şi numai dacă $(\forall)$ $M \in \text{Int } ABC$ avem satisfăcută relaţia $AM < \min\ (AB,\ AC)$.

Prof. VASILE POPA

2. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ pentru care avem: $x^2 - mx + 2 \geq 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{Z}$.

JENICĂ CRÎNGANU, *asistent, Univ. Galaţi*

3. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Să se arate că ecuaţia: $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ nu are rădăcini reale.

* * *

4. Fie triunghiul ABC şi $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$, $G \in \text{Int } ABC$.

a) Să se arate că $(BB') \cap (CC') \neq \emptyset$.

b) Orice dreaptă care conţine pe G intersectează triunghiul în două puncte.

Prelucrare *prof.* C. URSU

5. Să se arate că produsul a două funcţii bijective f, $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ nu poate fi funcţie bijectivă.

JENICĂ CRÎNGANU *asistent Univ. Galaţi*

CLASA a X-a

1. Să se rezolve inecuaţia: $8^x + 4^x > 5^x$.

* * *

2. Fie ecuaţia: $az^2 + bz + c = 0$; a, b, $c \in \mathbf{C}$ şi $\arg\ a + \arg\ c = 2\arg\ b$, $|a| + |c| = |b|$. Să se arate că ecuaţia are cel puţin o rădăcină de modul unu.

* * *

3. Să se rezolve în $\mathbf{Z}$ ecuaţia: $2^x + 3^x = 4^x + x$.

JENICĂ CRÎNGANU *asistent, Univ. Galaţi*

4. Să se determine toate funcţiile monotone $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietatea:

$$f(2^x) = 1 - f(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

JENICĂ CRÎNGANU *asistent, Univ. Galaţi*

5. Fie trapezul $ABCD$ în care $AB \| CD$, $AC \cap BD = \{P\}$. Să se afle locul geometric al punctului X ce aparţine interiorului sau fronteirei unghiurilor $\widehat{APB}$ sau $\widehat{CPD}$ astfel încît $\sigma(XAC) = \sigma(XBD)$.

Prelucrare *prof.* C. URSU

CLASA a XI-a

1. Fie $\sigma \in S_n$. Să se arate că $(\exists)\ p \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $\sigma^p = e$.

* * *

2. Să se afle $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încît: $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(an - \sqrt{-2 + bn + cn^2}\right) = 1$

3. Să se arate că $f: \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $n \geq 2$, $f(A) = A^2 + A$ nu este injectivă.

JENICĂ CRÎNGANU *asistent, Univ. Galaţi*

4. Fie $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ surjectivă. Să se studieze convergenţa şirului:

$$a_n = \frac{n^2}{f(n)},\ n \geq 1.$$

JENICĂ CRÎNGANU *asistent, Univ. Galaţi*

5. Fie S_n mulţimea permutărilor de gradul n, $n \geq 4$. Notăm:

$$A_n = \{\sigma \mid \sigma \in S_n,\ \varepsilon(\sigma) = 1\};$$
$$A'_n = \{\sigma \in A_n \mid \sigma(1) < \sigma(2)\};$$
$$A''_n = \{\sigma \in A_n \mid \sigma(1) > \sigma(2)\}.$$

Să se demonstreze că mulţimile A'_n şi A''_n au acelaşi număr de elemente.

Prof. VASILE POPA

CLASA a XII-a

1. Să se arate că funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq 0; \\ \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$

nu are primitive.

* * *

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $H \subset G$ o mulţime finită. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sînt echivalente;

a) $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$;
b) H este subgrup.

* * *

3. Să se calculeze o primitivă a funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{\ln x - 1}{x^2}.$$

Prof. GH. P. PĂDURARIU

4. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit, $n \in \mathbf{N}$, impar şi $H = \{x \in \sigma \mid x^n = e\}$. Să se arate că H are un număr impar de elemente.

JENICĂ CRÎNGANU *asistent, Univ. Galaţi*

5. Arătaţi că nu există funcţii mărginite $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^*_+$ care admit primitive $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că: $F(x) = (f \circ f)(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

JENICĂ CRÎNGANU *asistent, Univ. Galaţi*

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ, 1990, JUDEŢUL BRAŞOV

CLASA a IX-a

1. Să se rezolve în $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ ecuaţia :

$$x^2 + 2 = x + 3y.$$

M. STOENESCU, *profesor, Braşov*

2. Să se arate că dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ verifică simultan relaţiile :

$$f^2(x^3) - f(x) \leq 2;$$
$$f^3(x) - 3f(x^3) \geq 2, \ (\forall) x \in \mathbf{R},$$

atunci f nu este injectivă.

V. DRĂGHICI şi R. DÂMBOIANU, *profesori, Braşov*

3. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{B}$ şi $\widehat{C}$ ale triunghiului ABC intersectează laturile opuse în punctele P, respectiv Q. Să se arate că dacă $(PC) \equiv (QB)$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

GH. LAZEA, *profesor, Făgăraş*

4. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) şi $AA' \perp BC$, $A' \in BC$. Fie $M \in AA'$, $[MA] \equiv [MA']$ şi $P \in AC$, $[PA] \equiv [PC]$. Notăm $BM \cap AC = \{N\}$ şi $BP \cap AA' = \{R\}$. Să se arate că $m(\widehat{PNR}) = 90°$.

P. GIURGESCU, *profesor, Braşov*

CLASA a X-a

1. Să se arate că :

$$\{x \in \mathbf{R} / 2^x + 1 \geq 3^x\} - \{x \in \mathbf{R} / 20^x + 15^x \leq 12^x\} = [-2; 1].$$

SORIN COCOROADĂ, *profesor, Făgăraş*

2. a) Să se demonstreze inegalitatea :

$$\log_2(x+2) - \log_x 2 + \log_x(x+2) \geq 3, \ (\forall) \ x \in (1, \infty).$$

b) Să se calculeze partea întreagă a numărului

$$a = \log_3 \frac{7+4\sqrt{3}}{4} + \log_2(\sqrt{3}+2)$$

VIOREL DRĂGHICI, *profesor, Brașov*

3. Fie SA și SB tangentele din S la cercul circumscris triunghiului ascuțitunghic ABC. Să se demonstreze:

$$SC = \frac{m_c}{\cos C},$$

unde m_c este lungimea medianei corespunzătoare laturii $[AB]$.

RADU DÂMBOIANU, *profesor, Brașov*

4. Arătați că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea:

$$h_a + h_b + h_c \leq 4R_1^2(1 + \cos A\cos B\cos C).$$

Notațiile fiind cele cunoscute.

MARIA ȚUȚUIAN, *profesoară, Brașov*

CLASA a XI-a

1. Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbf{R}^* \text{ și } B = \begin{pmatrix} 0 & a & b\lambda \\ 0 & \lambda-2 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că există $\lambda \in \mathbf{R}$ și un cel mai mic $n_1 \in \mathbf{N}^*$, astfel încît $B^{n_1} = 0$, pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$ și pentru λ astfel găsit, să se afle $(A + B)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

GH. LAZEA

2. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots\ldots 1 \\ 1 & i\sqrt{3} & 1 \ldots\ldots 1 \\ 1 & 1 & i\sqrt{3} \ldots 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 \ldots i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Să se determine $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încît $\det A^n \in \mathbf{R}$.

MARIA ȚUȚUIAN

3. Să se demonstreze că șirul de numere reale pozitive $(a_n)_{n \geq 1}$, cu proprietatea: $3a^2_{n+3} + 2a_n a_{n+3} \leq a^2_n$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, este convergent

ALEXANDRU OȚET

4. Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_1 = 1$ şi

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \cdot x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n^{k-1}}, \quad n\geq 1.$$

a) Să se determine termenul general al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.
b) Să se determine valorile lui $k\in \mathbf{N}^*$ pentru care şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

E. SCHNEIDER

CLASA a XII-a

1. Există funcţii $f:(-\infty, 3)\to \mathbf{R}$, care admit primitive şi îndeplinesc relaţia:

$$(f\circ f)(x) = x^2 - 6x + 8, \text{ pentru orice } x\in(-\infty, 3)?$$

SORIN COCOROADĂ

2. Să se calculeze:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}\,dx, \quad x\in(0,\infty).$$

PETRE CRĂCANĂ

3. Fie $M_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \middle|\ a, b\in \mathbf{R} \right\}$, unde n este un număr natural nenul, dat.

Să se arate că $(M_n, \cdot)$ este grup abelian.

MIHAIL BENCZE

4. a) Să se arate că $f: \mathbf{R}\to(-1,1)$, $f(x) = \dfrac{a^x-1}{a^x+1}$, $a>1$, este izomorfism de la grupul $(\mathbf{R}, +)$ la grupul $(G, \circ)$, unde $G = (-1,1)$ şi $x\circ y = \dfrac{x+y}{1+xy}$, $(\forall)x, y\in G$.

b) Să se arate că:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n+1} = \frac{2^n\cdot n!-1}{2^n\cdot n!+1}, \ (\forall)n\in \mathbf{N}^*.$$

ALEXANDRU OŢET

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „GHEORGHE VRĂNCEANU” DĂRMANEȘTI, BACĂU — mai, 1990

CLASA a VI-a

1. Să se arate că

$$\frac{7 \cdot 2^n \cdot 5^{n+1} \cdot 13^n + 11 \cdot 2^n \cdot 5^{n+1} + 7 \cdot 13^n + 11}{21 \cdot 13^n + 33}$$ este număr natural,

$(\forall) n \in \mathbf{N}$.

EMILIA ȚIFLEA, *profesoară, Bacău*

2. Fie $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + 3^4 - 3^5 + \ldots + 3^{1000} - 3^{1001}$.
Să se arate că S este divizibil prin 182.

ADRIAN GAVRILIU, *profesor, Suceava*

3. Să se arate că dacă a, b, c sînt numere naturale nenule diferite între ele, atunci $ab + bc + ca + 1 \leq 2abc$.

CONSTANTIN IONESCU-ȚIU, *profesor, București*

4. În triunghiul $\widehat{ABC}$ se știe că $m(\widehat{ABC}) = 2\,m\,(\widehat{ACB})$, iar bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$ intersectează latura (AC) în D. Pe semidreapta $(BD$ se ia un punct E astfel încît $(BE) \equiv (AC)$ Perpendiculara din D pe DC intersectează mediatoarea segmentului (BC) în O.

Să se arate că:

a) $AB = AE = EC$;
b) $DO \perp AE$;
c) $AB \perp BO$

GH. NEAGU, *profesor, Bacău*

CLASA a VII-a

1. Fie $a, b \in \mathbf{Z}$ astfel încît $a + b$ nu este divizibil nici cu 2, nici cu 3. Să se arate că $a^2 - ab + b^2 - 1$ este divizibil cu 6.

GH. NEAGU, *profesor, Bacău*

2. Fie funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} ax + b, \text{ dacă } x < -1; \\ \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}, \text{ dacă } x \in [-1,2]; \\ cx + 2, \text{ dacă } x > 2. \end{cases}$

Pentru ce valori ale lui a, b, c funcţia f este monotonă şi $f(-2) = 1$?

AVRAM ŢIFLEA, *profesor, Bacău*

3. Fie un triunghi dreptunghic cu catetele a şi b. Pe ipotenuză se construieşte un pătrat în exteriorul triunghiului. Să se determine distanţa de la vîrful unghiului drept la centrul acestui pătrat.

* * *

4. Fie triunghiul ABC şi $D \in (BC)$. De o parte şi de alta a dreptei BC se iau punctele M şi N astfel încît $BM \| CN$ $(BM) \equiv (AB)$ şi $(CN) \equiv (CA)$. Să se demonstreze că punctele M, N, D sînt coliniare dacă şi numai dacă (AD) este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

RADU SPOIALĂ şi ADRIAN GAVRILIU, *profesori, Suceava*

CLASA a VIII-a

1. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$x^3 - 2x^2y + 4xy^2 - 4xy + 4y^2 - 2y + 1 = 0.$$

AVRAM ŢIFREA, *profesor, Bacău*

2. Să se arate că singurele numere reale x care face adevărată egalitatea:

$$\max\left(\sqrt{x^2}, \frac{1}{|x|}\right) - \min\left(|x|, \frac{1}{x}\right) = 1 \text{ este } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ şi } \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

ION RADU, *profesor, Bacău*

3. Pe planul hexagonului regulat $ABCDEF$ de latură 6 cm, se ridică perpendiculara $AM = 12$ cm.

a) Să se determine poziţia punctului N pe dreapta AM astfel încît $(NBF) \| (MCE)$

b) Să se calculeze distanţa dintre planele (NBF) şi (MCE).

c) Să se determine poziţia punctului S pe dreapta AM astfel încît $(SBF) \perp (MCE)$.

ROMULUS VALERIU POP, *profesor, Baia Mare*

4. Fie tetraedrul $OABC$ şi I_1, I_2, I_3 centrele cercurilor înscrise triunghiurilor OAB, OAC, OAB. Dacă planele $(I_1I_2I_3)$ şi (ABC) sînt paralele să se arate că:

$$\frac{AB}{OA+OB+AB}=\frac{AC}{OA+OC+AC}=\frac{BC}{OB+OC+BC}.$$

DAN POPESCU, *profesor, Suceava*

CLASA a IX-a

1. Să se arate că:

$$\frac{1}{6n+1}+\frac{1}{6n+2}+\frac{1}{6n+3}+\ldots+\frac{1}{36n}>\frac{4}{3},\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*.$$

ENACHE PĂTRAŞCU, *profesor, Focşani*

2. Fie $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f(x-y)\leq xf(y),\ (\forall)x,\ y\in\mathbb{R}.$$

Arătaţi că $f\equiv 0$.

JENICĂ CRÎNGANU, *asistent, Univ. Galaţi*

3. Fie ABC un triunghi oarecare. Bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ intersectează (BC) în D, mediatoarea segmentului (BC) intersectează pe (AC) în E. Pe semidreapta $(BE$ se ia un punct F astfel ca $BF=AB$. Se notează $AD\cap BE=\{G\}$, $DF\cap AC=\{H\}$.

Să se arate că:

a) $ABDF$ este patrulater inscriptibil;

b) Dreapta determinată de centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD şi GHF este perpendiculară pe AF.

GH. NEAGU, *profesor, Bacău*

4. Fie triunghiul ABC, I_b centrul cercului exînscris triunghiului aferent laturii (AC), M mijlocul laturii (AB), N intersecţia cercului înscris triunghiului cu latura (AC).

Dacă $BC>AC$, să se arate că M, N, I_b sînt coliniare dacă şi numai dacă $m(\hat{A})=90°$.

DAN POPESCU, *profesor, Suceava*

CLASA a X-a

1. Să se arate că $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}<2^{n-2}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$, $n\geq 11$, unde $\left[\frac{n}{2}\right]$ reprezintă partea întreagă a numărului $\frac{n}{2}$.

ION LIXANDRU, *profesor, Galaţi*

2. Să se rezolve ecuaţia: $2^x+3^x+12^x+18^x=35\cdot 6^{x-1}$.

ENACHE PĂTRAŞCU, *profesor, Focşani*

3. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel dacă şi numai dacă

$$1 + a^2 + 4\sin^2\frac{A}{2}\left(\cos^2\frac{A}{2} - bc\right) = \frac{a}{R}.$$

D. SECLĂMAN, *profesor, Craiova*

4. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC cu $m(\hat{A}) = 30°$. Să se arate că oricare ar fi punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$ perimetrul triunghiului $A'B'C'$ este mai mare sau egal cu înălţimea din A.

ENACHE PĂTRAŞCU, *profesor, Focşani*

CLASA a XI-a

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze A^n, $n \in N^*$.

ENACHE PĂTRAŞCU, *profesor, Focşani*

2. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiei: „Există o funcţie nenulă $f: R \to R$ pentru care $f(x+y) = |f(x)| \cdot |f(y)|$, $(\forall)\ x, y \in R^*$ şi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$"

DAN ZAHARIA *profesor, Oneşti*

3. Fie $x_1 \in R$ şi $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 + x_n^2}{n}}$, $(\forall)\ n \in N^*$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^a \cdot x_n$, unde $a \in R$.

DAN POPESCU, *profesor, Suceava*

4. Se dau punctele $A(a, 0)$, $B(0, b)$.

a) Să se determine cercul care trece prin A şi este tangent la axa ordonatelor în punctul B;

b) Să se afle locul geometric al proiecţiei ortogonale a originii pe dreptele care trec prin punctul A.

ŞTEFAN ANTOHE *lector doctor, Univ. Galaţi*

CLASA a XII-a

1. Fie $n \in N$, $n \geq 2$. Se consideră în Z_n sistemul:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Să stabilească o condiţie necesară şi suficientă ca sistemul să aibă soluţie unică şi în acest caz să se rezolve.

DAN ZAHARIA *profesor, Oneşti*

2. Fie $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{\sqrt{16n^2 + (4k+1)^2}}$. Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} a_n$.

ENACHE PĂTRAŞCU *profesor Focşani*

3. Considerăm a, b, c elemente ale inelului necomutativ $(A, +, \cdot)$. Dacă $ac = ca$, iar a şi $c + ab$ sînt inversabile, atunci $c + ba$ este inversabil.

MIHAI PITICARI, *profesor, Cîmpulung — Moldovenesc*

4. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie injectivă. Dacă $f + \sin f$ are primitive pe $\mathbf{R}$, atunci f este continuă.

MIHAI PITICARI, *profesor, Cîmpulung — Moldovenesc*

CHESTIUNI DE EXAMENE

SUBIECTELE
DATE LA EXAMENUL DE BACALAUREAT — MATEMATICĂ
IUNIE 1990

SUBIECTUL nr. 1

Fie $P(x) = x^3 - 3x + 2$, $x \in \mathbf{R}$.

a) Să se rezolve ecuaţia $P'(x) = 0$ (3 puncte)

b) Să se reprezinte grafic funcţia:

$$f : (1,\infty) \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}$$ (1 punct);

c) Să se calculeze integrala:

$$I = \int_2^3 \frac{P(x)\,P''(x) - P'(x)}{P^2(x)}\,dx$$ (1 punct).

SUBIECTUL nr. 2

a) Pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, se notează $a * b = a + b + 10$. Să se arate ca $\mathbf{R}$ este un grup abelian în raport cu operaţia $*$. (2 puncte)

b) Să se determine parametrul real m dacă sistemul:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0, \\ 2x - y + mz = 0, \\ 4x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

admite soluţii nenule şi apoi să se calculeze raportul:

$$\frac{x - y}{x + z},\ z \neq 0$$ (1 punct)

c) Să se dea un exemplu de inel finit şi necomutativ. (1 punct)

SUBIECTE DATE LA EXAMENUL DE ADMITERE LA FACULTATEA DE MATEMATICĂ DIN CADRUL UNIVERSITĂŢII DIN BUCUREŞTI IULIE, 1990

PROBA DE ALGEBRĂ

1. $$4x - m^2 - m + 3 < 0,\ m \in R \qquad (1)$$

Să se afle valorile parametrului real m astfel încît $S \neq \varnothing$; să se afle valorile parametrului real m astfel încît S să fie infinită(S fiind mulţimea soluţiei inecuaţiei (1)).

2. I Considerăm funcţiile $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Să se arate că:

a) dacă f şi g sînt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă.

b) dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă.

II. Dacă $g o f$ este surjectivă rezultă că g este surjectivă. Justificaţi răspunsul.

3. Fie $f \in R[x]$; $f(x) = (x+1)^m - (x+1)^n$, cu $m, n \in N$ Să se arate că $x^2 + x + 1 \mid f(x)$ dacă şi numai dacă $6 \mid m - n$.

4. Fie sistemul :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + \alpha x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + \beta x_4 = \gamma, \alpha, \beta \gamma \in R. \end{cases}$$

Să se determine α, β, γ astfel încît sistemul să fie compatibil şi matricea sistemului să aibă rangul 2; să se rezolve în acest caz.

5. Fie $K = (0, +\infty)$ pe care definim legile de comparaţie:

$$x \odot y = x^{\ln y}, \qquad x \oplus y = x \cdot y$$

Să se arate că $(K, \oplus, \odot)$ formează un corp izomorf cu corpul numerelor reale.

ANALIZĂ MATEMATICĂ, 16 iulie 1990, ora 10,00

1. Fie $(x_n)_n \in N$ un şir de numere reale definit astfel

$$x_0 = 0,\ x_{n+1} = x_n^2 + 1,\ (\forall)\ n \in N.$$

Să se studieze convergența lui.

2. Să se calculeze :

$$\lim_{x \to \infty} x\left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1\right]$$

3. Să se arate :

$$1 < \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\pi}{2}, \ (\forall)\ x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right]$$

4. Să se calculeze primitivele funcţiei :

$$f : (-2 ; +\infty) \to \mathbf{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x + 4}.$$

5. Fie $A = [-1 ; 1]$

$$C(A) = \{f \mid f : A \to \mathbf{R}, \text{ cont.}\}$$
$$D(A) = \{f \mid f : A \to \mathbf{R}, \text{ deriv.}\}$$
$$I(A) = \{f \mid f : A \to \mathbf{R}, \text{ int.}\}$$

Să se arate că $D(A) \subset C(A) \subset I(A)$ şi că aceste incluziuni sînt stricte.

GEOMETRIE — 17 iulie 1990, ora 10,00

1. Să se enunţe teorema celor trei perpendiculare şi reciprocele ei.
2. Pe cercul $C(0, r)$ se consideră două puncte A şi B fixe, diametral opuse, şi $M(M \neq A, M \neq B)$ un punct mobil. Să se găsească locul geometric al centrului de greutate al triunghiului ABM.
3. Să se rezolve ecuaţia :

$$\sin x + \cos x - 1 = \sin x \cdot \cos x$$

4. Se consideră două cercuri necoplanare care au două puncte comune. Să se arate că există o sferă care le conţine.
5. Să se arate că trei tangente distincte la parabolă $P : y^2 = 2px$ determină un triunghi al cărui ortocentru aparţine directoarei parabolei.

SUBIECTELE DATE LA EXAMENUL DE ALGEBRĂ ŞI ANALIZĂ MATEMATICĂ LA INSTITUTUL POLITEHNIC IAŞI IULIE, 1990

1. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}} (y - x) = 4. \end{cases}$$

2. Se consideră matricea :

$$M = \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 1 & x-1 & -1 \\ 2 & -1 & x-1 \end{pmatrix}.$$

a) să se rezolve ecuaţia det $M = 0$;

b) să se determine valorile lui x pentru care ecuaţia :

($*$) $M \cdot X = B$ admite şi soluţii diferite de soluţia banală.

$$\text{unde } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) să se rezolve ecuaţia ($*$) pentru $x = -1$.

3. Fie mulţimea $G = (-1, 1)$ şi „$*$" o lege de compoziţie astfel încît

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}, \ (\forall) \ x, y \in G.$$

a) Să se arate că $(G, *)$ este grup comutativ;

b) fie funcţia $f : \mathbf{R}^*_+ \to G$, definită astfel :

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}, \ (\forall) \, x \in \mathbf{R}^*_+.$$

Arătaţi ca funcţia f este un izomorfism de la grupul $(\mathbf{R}^*_+, \cdot)$ la grupul $(G, *)$, unde $(\mathbf{R}^*_+, \cdot)$ este grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive.

4. Fie şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin relaţia $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n \geq 0$, $a_0 = 2$.

a) să se determine a_n şi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} [(n+1)!\ \ln a_n]$.

5. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to R$ definiţia prin

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

a) Să se reprezinte grafic funcţia f, folosind şi derivata a doua;
b) Să se determine primitivele funcţiei f;
c) Să se calculeze aria delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele :

$$x = \frac{1}{e^2} \text{ şi } x = e^2.$$

SUBIECTELE
DATE LA ADMITEREA ÎN FACULTĂȚILE UNIVERSITĂȚII DIN GALAȚI — IULIE, 1990

PROBELE DE CONCURS

Nr. crt.	DISCIPLINELE	FACULTATEA	SPECIALIZĂRILE	COD
1.	Algebră și Elemente de analiză matematică M_1	Mecanică ingineri-zi și seral	TCM zi și seral UTS zi și seral Mașini și echipamente termice seral și zi UTIA zi Mașini unelte zi	M_1A F_1A
2.	Geometrie plană și în spațiu și trigonometrie M_2	Mecanică - zi și seral	— „ —	M_2A
3.	Algebră Geometrie plană și trigonometrie M_3	Mecanică subingineri seral	Tehnologia sudării — seral	M_3A
4.	Algebră M_4	Industria alimentară și Tehnica piscicolă	Tehnologia produselor alimentare — zi și seral	M_4A
5.	Algebră M_4	— —	Tehnica piscicola — zi	M_4B
6.	Algebră M_4	Industrie alimentară și Tehnică Piscicolă Subingineri — seral —	Tehnologia produselor alimentare de origine vegetala — seral	M_4C M_4C
7.	Algebră M_6D	Litere și științe — zi —	Matematica Informatica — zi	M_4D
8.	Elemente de analiză matematică M_5A	— „ —	— „ —	M_6A

9.	**Geometrie plană și în spațiu, Trigonometrie și geometrie analitică M_6A**	— „ —	— „ —	M_6A
10.	**Algebră și Elemente de analiză matematică M_1E**	— „ —	Chimie fizică — zi	M_1E
11.	**Algebră și Elemente de analiză matematică — M_1F**	Studii economice	Management — zi Marketing — zi Finanțe, Contabilitate — zi	M_1F

M_2A

1\. a) Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$, astfel încît sistemul:

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 0, \\ x + \alpha y - z = 0, \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

să admită și soluții nenule.

b) Pentru α determinant, să se arate că mulțimea V a soluțiilor sistemului, este un grup relativ la operația $*$: $V \times V \to V$, dată prin :

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

2\. a) Să se reprezinte grafic funcția $f: D \to \mathbf{R}$, dată prin $f(x) =$

$$= \frac{1}{x+2} \cdot e^{|x|}.$$

b) Să se studieze numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

3\. a) Să se arate ca funcția

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x}, & x < 0; \\ \sin x, & x \geq 0, \end{cases}$$

admite primitive.

b) Să se calculeze o primitivă a lui f.

BAREM M_1A

1. Din oficiu		1 p
a)	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\det A = -\alpha - 2$	2 p

Caz I. $\alpha \neq -2$ soluție nulă

Caz II. $\alpha = -2$ are și soluții nenule

Δ principal $= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A = 2$ — 2 p

$\begin{cases} 2x - y = 3z \\ x - 2y = z \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{5\lambda}{3},\ y = \dfrac{1}{3}\lambda,\ z = \lambda$ — 1 p

---

b) parte stabilă — 1 p

element neutru — 1 p

asociativitate — 1 p

existența elementului simetric — 1 p

---

2. Din oficiu — 1 p

$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$; $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2}\, e^{-x} & x < 0,\ x \neq -2 \\ \dfrac{1}{x+2}\, e^{x} & x \geq 0 \end{cases}$ — 1 p

---

$D = \mathbb{R} - \{-2\}$ — 0,5 p

$A\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ — 0,5 p

$\lim\limits_{x \nearrow 2} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \searrow 2} f(x) = \infty$, $x = -2$ asimptotă verticală — 0,5 p

---

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$, f continuă — 1 p

---

Nu are asimptote oblice (justificare) — 0,5 p

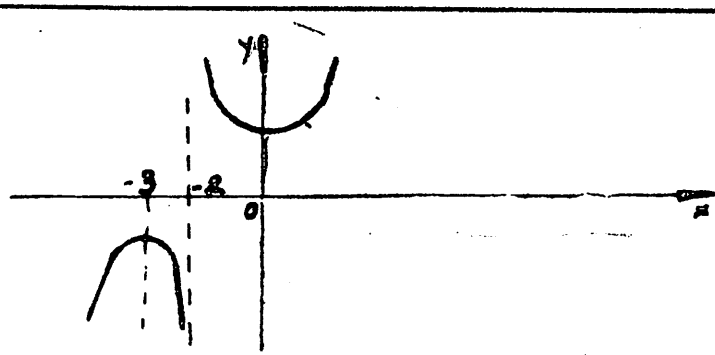
$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{(x+2)^2} \cdot e^{x} & , x > 0 \\ -\dfrac{x+3}{(x+2)^2} \cdot e^{-x} & , x < 0 \end{cases}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3$ — 1,5 p

---

$\lim\limits_{x \nearrow 0} f'(x) = \dfrac{-3}{4}$, $\lim\limits_{x \searrow 0} f'(x) = \dfrac{1}{4}$, $x = 0$ punct unghiular — 1 p

x	$-\infty$			-3		-2				0					∞
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	|	$-$	$-$	$-\frac{3}{4}$	|	$\frac{1}{4}$	$+$	$+$	$+$	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$-e^3$	$-\infty$	|	$\infty \searrow$		$\searrow$	$\frac{1}{2}$		$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	∞

0,5 p



1 p

$\lambda < -e^3$ două soluţii; $\quad -e^3 < \lambda < \frac{1}{2}$ nu are soluţii;

$\lambda = -e^3$ o soluţie $\quad \lambda = \frac{1}{2}$ o soluţie;

$\lambda > \frac{1}{2}$ două soluţii

1 p

3. Din oficiu 1 p

a)

$\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow f$ continuă în $x = 0$ 2 p 2 p

f continuă $\Rightarrow f$ admite primitive 2 p

b)

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + c_1, & x \geq 0 \\ e^x(x-1) + c_2, & x < 0 \end{cases}$$ 2 p

$\lim\limits_{x \nearrow 0} F(x) = c_2 - 1$

$\lim\limits_{x \searrow 0} F(x) = c_1 - 1$ 1 p

F continuă $\Rightarrow c_1 = c_2 = c$ 1 p

$$F(x) = \begin{cases} -\sin x + c, & x \geq 0 \\ e^x(x-1) + c, & x < 0 \end{cases}$$ 1 p

---

M_2B

1\. a) Să se discute sistemul:

$$\begin{cases} 2x - y + z - t = 1, \\ x + y + \alpha z + t = -1, \\ x - y + z + \beta t = \gamma \end{cases}$$

în funcţie de parametrii reali α, β, γ, şi să se rezolve în cazul $\alpha = -1$.

2\. a) Să se reprezinte grafic funcţia

$$f: [-2\pi, 2\pi] \to \mathbf{R}, \text{ dată prin } f(x) = x - \sin x$$

b) Pentru $x \in (0, \pi)$ să se arate că $\dfrac{\sin x}{x} < 1$

3\. a) Să se arate că funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^5} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \text{ dacă } x \neq 0; \\ 0 & , \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

admite primitive.

b) Să se calculeze o primitivă a lui f.

BAREM M_1B

1. Din oficiu 1 p

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \beta \end{pmatrix}, \quad d_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha + 1$$ 1 p

---

Caz I. $\alpha \neq -1$, rang $A = 3$ 1 p

Caz II. $\alpha = -1$,

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \beta \end{vmatrix} = 3\beta + 3$$ 1 p

---

1°) $\beta \neq -1$, rang $A = 3$ 1 p

$$\begin{cases} 2x - y - t = 1 - z \\ x + y + t = -1 + z \\ x - y + \beta t = \gamma - z, \end{cases} \qquad x = 0,\ y = \frac{\gamma - 1}{\beta + 1},\ z = \lambda, \quad t = \frac{\lambda - \beta + \lambda\beta - \gamma}{\beta + 1}$$ 2 p

---

$2°)\ \beta = -1,\ \text{rang}\ A = 2,\ \Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ 1 p

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \gamma \end{vmatrix} = 3\gamma - 3$$

$\gamma \neq 1$ sistem incompatibil 1 p

$\gamma = 1$ sistem compatibil

$$\begin{cases} 2x - y = 1 - z + t \\ x + y = -1 + z - t, \end{cases} \quad x = 0,\ y = -1 + \lambda - \delta,\ t = \delta$$ 1 p

2. Din oficiu 1 p

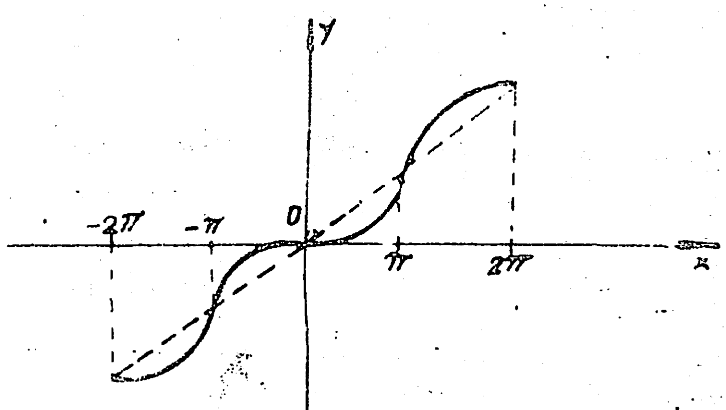
a) $A(0,0)$ 0,5 p

$f'(x) = 1 - \cos x,\ f'(0) = 0,\ x = 0,\ x = -2\pi,\ x = 2\pi$ 1,5 p

$f''(0) = \sin x,\ f''(x) = 0,\ x = 0,\ x = \pm\pi,\ x = \pm 2\pi$ 1 p

x	-2π	$-\pi$	0	π	2π
f'	$0\ +$	$+$	$0\ +$	$+\ +$	0
f''	$0\ +$	0	$-0\ +$	$0\ -$	0
f	$-2\pi \nearrow$	$-\pi \nearrow$	$0 \nearrow$	$\pi \nearrow$	2π

1,5 p



1,5 p

b) $\sin x < x$, pentru $x \in (0, \pi)$, (orice metodă) 3 p

3. Din oficiu 1 p

a)	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow f$ continuă in $x = 0$	2 p
	f continuă pe $\mathbf{R} \Rightarrow f$ admite primitive sau enunţă teorema : $(\forall)$ f continuă admite primitive)	2 p
b)	$\frac{1}{x^2} = y$ (sau altă substituţie care convine)	1 p
	formula de integrare prin părţi (in general sau aplicată)	1 p
	$I = \frac{1}{2}(ye^{-y} + e^{-y}) + C,\ x \neq 0$	1 p
	$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)e^{-\frac{1}{x^2}} + C, & x \neq 0 \\ C & x = 0 \end{cases}$	1p

M_1C

1. Să se rezolve ecuaţia :

$$\log_a 2 + \log_a(4^{x-2} + 9) = \log_a 10 + \log_a(2^{x-2} + 1).$$

2. Să se determine $m, n \in \mathbf{N}$ astfel încît in dezvoltarea $\left(x^m + \frac{1}{x^2}\right)^n$ suma coeficienţilor binomiali să fie 256, iar termenul al 5-lea să nu conţină pe x.

3. Se dă funcţia $f : D \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x + 1}$$

a) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încît graficul funcţiei f să admită asimptotă oblică $y = x + 3$.

b) Cu a şi b determinanţi să se găsească asimptota verticală a graficului funcţiei f.

BAREM M_1C

1.	Din oficiu	1 p
	Condiţii	2 p
	$\log x + \log(xy)$ (sau aplicată direct)	1 p
	$2(4^{x-2} + 9) = 10\ (2^{x-2} + 1)$	2 p
	$4^{x-2} - 5 \cdot 2^{x-2} + 4 = 0$	1 p

	$2^{x-2} = t,\ t^2 - 5t + 4 = 0$		1 p
	$t_1 = 1,\ t_2 = 4$		1 p
	$x_1 = 2,\ x_2 = 4$		1 p
2.		Din oficiu	1 p
	Suma coeficienților termenilor $= 2^n$.		2 p
	$T_{k+1} = C^k_n a^{n-k} b^k$		3 p
	$T_5 = C^4_8\ x^{4m-8}$		1 p
	$m = 2$		1 p
3.		Din oficiu	1p
a)	$m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$		2 p
	$n = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx]$		2 p
	$m = a = 1$		1 p
	$n = b = 3$		1 p
	$D = \mathbf{R} / \{-1\}$		1 p
	$\lim\limits_{x \nearrow -1} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x \searrow -1} f(x) = -\infty$		2 p

M₁D

1. Să se determine numerele complexe z astfel încît

$$\overline{z} = z^3.$$

2. Să se rezolve ecuația

$$x + 1 + x + 4 + x + 7 + \ldots + x + 28 = 155.$$

b) Este progresie geometrică șirul în care suma primilor n termeni este dată de formula :

$$S_n = 2^n - 1\ ?$$

3. a) Să se expliciteze funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată prin

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\cos x + |x - 1| e^{nx}}{1 + e^{nx}}$$

b) Să se cerceteze continuitatea funcţiei de la punctul a).

BAREM M_1D

1. VARIANTA 1	Din oficiu	1 p
$z = a + bi$; $a, b \in \mathbf{R}$, $\bar{z} = a - bi$		1 p
$a - bi = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i$		1 p
$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = a \\ 3a^2b - b^3 = -b \end{cases}$		1 p
$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$		1 p
$\begin{cases} a = 0 \\ 3a^2 - b^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$ şi $\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$		1 p
$\begin{cases} a^2 - 3b^2 = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$		1 p
$\begin{cases} a^2 - 3b^2 = 1 \\ 3a^2 - b^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow a, b \notin \mathbf{R}$		1 p
$z = 0$, $z = i$, $z = -i$, $z = 1$, $z = -1$		1 p
VARIANTA 2	Din oficiu	1 p
$\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert^3$		2 p
$\lvert z\rvert = 1$ sau $\lvert z\rvert = 0$		1 p
$z = 0$		1 p
$\lvert z\rvert^2 = z^4$		3 p
$z^4 = 1$		1 p
$z = \pm 1$, $z = \pm i$		1 p
2.	Din oficiu	1 p
a) $\gamma = 3$		1 p
$a_n = a_1 + (n - 1)\gamma$		1 p

$x + 28 = x + 1 + 3(n-1) \Rightarrow n = 10$	1 p
$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)^n}{2}$	1 p
$(2x + 29)5 = 155 \Rightarrow x = 1$	1 p
b) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = 2^n$	1 p
$a_n = 2^{n-1}$	1 p
$a_{n+1}/a_n = 2 \quad \forall n \geq 1$	1 p
(a_n) Progresie geometrică	1 p

OBSERVAȚIE. Orice altă variantă se punctează corespunzător.

3. Din oficiu	1 p
a) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ +\infty, & x > 0 \end{cases}$	1 p
$x < 0,\ f(x) = \cos x$	1 p
$x = 0,\ f(0) = 1$	1 p
$x > 0,\ f(x) = \lvert x - 1\rvert$	2 p
$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \lvert x-1\rvert, & x > 0 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0)$, f continuă în $x = 0$	1 p
$\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 1} f(x) = f(1)$, f continuă în $x = 1$ sau se folosește compunerea funcțiilor continue	2 p
f continuă pe $\mathbf{R}$	1 p

M_1E

1. Fie polinoamele $f = x^5 - x^4 + ax^3 + bx^2 + x - 2$ și

$$g = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 4;\ a,\ b \in \mathbf{R}.$$

a) Să se determine rădăcinile polinomului g.
b) Să se determine a și b astfel încît f și g să aibă două rădăcini comune.

2. Să se rezolve inecuaţia:

$$\log_9(2^{4x} - 3 \cdot 2^{2x} + 2) \geq \log_3 \sqrt{6}.$$

3. a) Să se afle $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ astfel încît funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată prin:

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & , x \leq 1 \\ -x^2 + \alpha x + \beta & , x > 1 \end{cases}$$ să fie derivabilă pe $\mathbf{R}$.

b) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f cu α şi β găsiţi la punctul a).

M_1F

1. Fie ecuaţia:

$$x^4 - x^3 + mx^2 + 2x + n = 0; \quad m,n \in \mathbf{R}$$

a) Să se calculeze: $E = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

b) Să se determine m şi n şi apoi să se rezolve ecuaţia dată ştiind ca admite rădăcina $1 - i$.

2. Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încît sistemul:

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 0, \\ 2x - y + 3z + (\alpha - 3)t = 0, \\ x + y + z + t = 0, \\ 2x + (\alpha - 1)y + 2z + \alpha t = 0 \end{cases}$$

să aibă soluţii nenule şi în cazul $\alpha = 0$ să se rezolve.

3.

a) Să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx.$

M_2A

1. Se dau punctele fixe A,B,A_1,B_1 astfel încît $(AB) \equiv (A_1B_1)$.

a) Să se arate ca orice punct M cu proprietatea
(*) $MA^2 + MB^2 = MA_1^2 + MB_1^2$ este egal departat de mijloacele segmentelor (AB) şi (A_1B_1).

b) Să se găsească locul geometric al punctelor M care au proprietatea (*).

2. Se dă un cilindru circular drept de volum πa^3 şi de arie laterală $ka^2 (k > 0)$.

a) Să se găsească raza bazei şi înălţimea cilindrului în funcţie de a şi k.

b) Să se determine valoarea lui k astfel încît în cilindrul dat să poată fi înscrisă o sferă şi să calculeze volumul acestei sfere.

3. Dacă $a + b + c = 2\pi$, atunci:

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}.$$

M_2B

1. Triunghiul MAB înscris în cercul $C(o, r)$ are vîrfurile A și B fixe, iar punctul M variabil pe cerc.
Să se afle locurile geometrice descrise de:
a) ortocentrul triunghiului MAB;
b) centrul cercului înscris în triunghiul MAB.
2. Fie o piramidă patrulateră regulată avînd înălțimea și latura bazei egale cu a. Să se afle raza sferei circumscrise piramidei și volumul sferei.
3. Dacă $a + b + c = 2\pi$, să se arate că are loc relația:

$$\sin a + \text{sib } b + \sin c = 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}.$$

M_2C

1. Printr-un punct variabil D situat pe latura (BC) a triunghiului ABC se duce o paralelă la mediana AM, M fiind mijlocul laturii (BC). Această paralelă intersectează dreptele AB și AC în punctele E, respectiv F.

a) Să se arate că $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$,

b) $DE + DF = \text{const.}$
2. Un trunghi de con are aria laterală egală cu $4\pi a^2$, înălțimea sa este a, iar generatoarea este egală cu suma razelor bazelor ($a > 0$).
a) Să se calculeze în funcție de a razelor bazelor și aria laterală a conului din care face parte trunchiul de con.
b) În trunchiul de con se înscrie o sferă. Se cere raza cercului de tangența al sferei cu suprafața laterală a trunchiului de con.
3. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{4}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - \cos x - 3\sin x - 1 = 0.$$

M_2D

1. Se consideră două cercuri $C(O_1,r_1)$ și $C(O_2,r_2)$ $r_1 < r_2$, tangente exterioare în punctul T. Tangenta exterioară comună AB se intersectează cu tangenta în T la cele două cercuri în punctul C, iar cu linia centrelor O_1O_2 în punctul M.
a) Să se calculeze lungimea segmentelor (AB) și (TC) în funcție de r_1 și r_2.
b) Să se arate că dreptele AT și BT sînt perpendiculare.
c) Să se calculeze lungimea segmentului (MO_1) și măsura unghiului $\widehat{O_1MA}$ în cazul particular $r_1 = a$, $r_2 = 3a$.

2. Fie semidreptele $[Ox$, $[Oy$, $[Oz$ perpendiculare două cîte două $A \in [Ox$, $B \in [Oy$, $C \in [Oz$ astfel încît $OA = OB = OC = a$. Prin mijlocul înălţimii din O a piramidei $[OABC]$ se duce un plan α paralel cu baza ABC, care taie OA, OB, OC în M, N, P.

a) Să se afle volumul trunchiului de piramidă $[ABCMNP]$.

b) Să se afle aria triunghiului BMP.

3. Dacă $x = y + z$, să se arate că:

$$\cos x + \cos y + \cos z + 1 = 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}.$$

M_3A

1. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

pentru orice număr natural $n \geq 2$.

2. Fie $\widehat{AOB}$ un unghi drept, M şi N puncte variabile respectiv pe $(OA$ şi $(OB$, iar $KNPQ$ un pătrat astfel încît punctele O şi P să se afle de o parte şi de alta a segmentului (MN). Fie E centrul pătratului.

a) Să se arate că $OMEN$ este patrulater inscriptibil.

b) Să se afle locul geometric al punctului E.

3. a) Ştiind că în triunghiul dreptunghic ABC $(\hat{A} = 90°)$ are loc relaţia:

$$\frac{a+b}{c} = k \quad , (k > 0)$$

unde $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ în funcţie de k.

b) Dacă într-un triunghi oarecare ABC are loc relaţia $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$, atunci triunghiul este dreptunghic sau isoscel.

M_4A

1. Să se determine numerele complexe Z astfel încît

$$\overline{Z} = Z^3.$$

2. Fie polinoamele

$$f = x^5 - x^4 + ax^3 + bx^2 + x - 2 \text{ şi}$$
$$g = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 4, \text{ cu } a, b \in \mathbf{R}.$$

a) Să se determine rădăcinile polinomului g.

b) Să se găsească a şi b astfel încît polinoamele f şi g să aibă două rădăcini comune.

3. Fie $a,b,c \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$. Pe $\mathbf{Z}$ definim legea de compoziţie „$*$"

$$x * y = axy + b(x + y) + c, \ \forall\ x,y \in \mathbf{Z}.$$

a) Ce relaţie satisface a,b,c pentru ca „$*$" să fie asociativă?

b) Dacă b divide c şi $b^2 - b - ac = 0$, atunci legea de compoziţie „$*$" are element neutru.

M_4B

1. Să se rezolve inecuaţia :

$$\log_9(2^{4x} - 3 \cdot 2^{2x} + 2) \geq \log_3 \sqrt{6}.$$

2. Să se rezolve ecuaţia :

a) $x + 1 + x + 4 + x + 7 + \ldots + x + 28 = 155$.

b) Este progresie geometrică şirul pentru care suma primilor n termeni este dată de formula $S_n = 2^n - 1$?

3. Fie matricele : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \beta \end{pmatrix}$

$$\text{şi } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Să se afle $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ astfel încît rang $A = 2$.
b) Cu α şi β aflaţi la a), să se calculeze $A \cdot B$.

M_4C

1. Să se demonstreze inegalitatea :

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24},$$

pentru orice număr natural $n \geq 2$.

2. Fie ecuaţia $x^3 + px + q = 0$.

a) Dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuaţiei date să se afle relaţia între p şi q $(p \neq q)$ astfel încît :

$$x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

b) Dacă $q = p$, $p \in \mathbf{R} - \{0\}$ arătaţi că relaţia aflată la punctul a) nu are loc.

3. Se consideră corpul M al matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$, legile de compoziţie fiind adunarea şi înmulţirea matricelor.

a) Să se arate că aplicaţia $f : \mathbf{C} \to M$ definită prin $f(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, unde $z = a + bi$, are proprietățile :

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$$
$$f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1)f(z_2), \forall z_1, z_2 \in C$$

b) Să se arate că aplicația f este izomorfism între M și corpul numerelor complexe **C**.

M_4D

1. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} A_x^y = 7 A_x^{y-1}; \\ 6C_x^y = 5 \cdot C_x^{y+1}. \end{cases}$$

2. Fie matricele :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \beta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Se cer α și $\beta \in \mathbf{R}$ astfel încît rang $A = 2$.
b) Cu α și β determinați mai sus să se calculeze $A \cdot B$.
3. Fie $a,b,c \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$. Pe $\mathbf{Z}$ definim legea de compoziție „$*$".

$$x * y = axy + b(x + y) + c, \forall x,y \in \mathbf{Z}$$

a) Ce relație satisface a,b,c pentru ca „$*$" să fie asociativă.
b) Dacă b divide c și $b^2 - b - ac = 0$, atunci legea de compoziție „$*$" are element neutru.

M_6A

1. a) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$, unde

$$a_n = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right)^{\frac{kn^2}{2}}$$

b) Pentru $k \in \mathbf{N}$, $k > 0$, să se găsească

$$\lim_{n \to \infty} (b_1 + b_2 + \ldots + b_n), \text{ unde } b_k = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

2. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin :

$$f(x) = \begin{cases} xe^x, & \text{pentru } x \leq 1, \\ 2ex + \beta, & \text{pentru } x \geq 1. \end{cases}$$

a) Să se determine $\beta \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(2) = 3e$.
b) Să se reprezinte grafic funcția obținută.

3. Să se calculeze :

$$\int_{-1}^{1} (x-2)\, e^{2|x|}\, dx.$$

M_6A

1. Fie trunchiul de piramidă regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu înălţimea $12a$ şi cu baza mare pătratul $ABCD$ de latură a.

a) Să se afle latura bazei mici, ştiind că volumul trunchiului de piramidă este $7a^3$.

b) Să se afle distanţa de la muchia BC la faţa $ADD'A'$.

2. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc egalitatea :

$$\frac{b+c}{2c\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2}+C\right)}{\sin(A+B)}.$$

3. Se dau dreptele $d_1 : y = 2x$, $d_2 : y = -2x$, $d_3 : m \cdot x + y = 1$, $m \in \mathbf{R} / \{-2,2\}$.

a) Să se afle coordonatele punctelor $A = d_1 \cap d_3$, $B = d_2 \cap d_3$.

b) Să se găsească m astfel încît $OA = OB$.

c) Să se determine m astfel încît dreapta d_3 să fie tangentă cercului dat prin ecuaţia $x^2 + y^2 = 1/4$.

Rubrica „Chestiuni de examen" a fost realizată sub îngrijirea profesorului Constantin Ursu din Galaţi.

SOLUȚIILE UNOR PROBLEME DIN „TESTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ" PUBLICATE ÎN M.E.G., NR. 9

prezentare de VASILE POPA și IOAN TODERIȚĂ, profesori, Galați

TESTUL 1

1.1. *Arătați că există* $x_0 \in (0,1)$ *astfel încît pentru orice* $a, b \in \mathbf{R}$ *cu* $0 < a < b < x_0$ *să avem:*

$$a^{a(b+1)} > b^{b(a+1)}.$$

Soluție. Fie $0 < a < b$. Relația din enunț se scrie, prin logaritmare, sub forma: $a(b+1)\ln a > b(a+1)\ln b \Leftrightarrow \dfrac{a\ln a}{a+1} > \dfrac{b\ln b}{b+1}$, (1).

Fie $f:(0,\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$, avem:

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x+1) - x\ln x}{(x+1)^2} = \frac{x\ln x + \ln x + x + 1 - x\ln x}{(x+1)^2} = \frac{\ln x + x + 1}{(x+1)^2}.$$

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x + x + 1) = -\infty \Rightarrow (\exists)\ x_0 \in (0,1)$ astfel încît $\ln x + x + 1 < 0$, $(\forall)\ x \in (0, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$, $(\forall)\ x \in (0, x_0) \Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $(0, x_0)$ și atunci, dacă $0 < a < b < x_0$, rezultă relația (1), care este echivalentă cu cea din enunț.

1.2. *Fie* $m, n \in \mathbf{N}^*$, $n > 1$ *și* $f:(0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n \cdot \ln^m x$. *Să se afle punctele de inflexiune ale funcției* f, *apoi calculați produsul acestora.*

Soluție. Fie $m \geq 2$. Avem:

$$f'(x) = nx^{n-1}\ln^m x + mx^{n-1}\ln^{m-1}x;$$

$$f''(x) = x^{n-2}\ln^{m-2}x[n(n-1)\ln^2 x + (2mn - m)\ln x + m(m-1)].$$

Ecuația $f''(x) = 0$, $x > 0$, are rădăcinile $x_1 = 1$ (pentru $m > 2$) și cele date de ecuaţia : $n(n-1)\ln^2 x + (2mn - m)\ln x + m(m-1) = 0$, care sînt :

$x_2 = \exp\left(\dfrac{-2mn + m - \sqrt{\Delta}}{2n(n-1)}\right)$, $x_3 = \exp\left(\dfrac{-2mn + m + \sqrt{\Delta}}{2n(n-1)}\right)$, unde $\Delta =$
$= m(m + 2n^2 - 4n) > 0$. Avem $x_2, x_3 \neq 1$.

Am notat $e^x = \exp(x)$.

Produsul este $\exp\left(\dfrac{m(1-2n)}{n(n-1)}\right)$. Precizăm că x_1 este punctde inflexiune pentru m impar.

Dacă $m = 1$, avem : $f''(x) = x^{n-2}[n(n-1)\ln x + 2n - 1] \Rightarrow x_0 =$

$$= \exp\left(\frac{1-2n}{n(n-1)}\right).$$

1.3. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir strict crescător de numere naturale nenule avînd proprietatea că* a_{n+1} *se divide prin* a_n, *pentru orice* $n \geq 1$. *Să se demonstreze că şirul* $(b_n)_{n\geq 1}$ *definit astfel* :

$$b_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}, \ (\forall) n \geq 1$$

este convergent.

Soluţie. Deoarece a_n / a_{n+1} $(\exists) k_n \in \mathbf{N}$ a.î. $a_{n+1} = k_n a_n$, dar $a_{n+1} > a_n$, rezultă $k_n \geq 2$. Aşa că : $a_{n+1} \geq 2a_n$.

Se obţine : $a_{n+1} \geq 2a_n \geq 2^2 a_{n-1} \geq \ldots \geq 2^n a_1$; $(\forall) n \geq 1$.

Avem : $b_n \leq \dfrac{1}{a_1}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) < 2 \cdot \dfrac{1}{a_1}$.

Rezultă că şirul (b_n) este mărginit şi, evident, strict crescător, deci convergent.

1.4. *Fie funcţia* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \prod_{i=1}^{n} \cos a_i x$, *unde* $a_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1,n}$. *Să se calculeze limita* :

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^t f(x)\, dx.$$

Soluţie. Avem cazul exceptat $\dfrac{0}{0}$, deci cu regula lui *l'Hospital* se obţine :

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^t f(x)\, dx = \lim_{t\to 0} f(t) = 1.$$

1.5. *Să se calculeze*: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 a^k$, *unde* $a \in (-1,1)$.

Soluție. Fie $f(x) = x + x^2 + \dots + x^n = \dfrac{x^n - x}{x-1}$, $f: (-1,1) \to \mathbf{R}$.

Avem: $f'(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} = \dfrac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(x-1)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow xf'(x) = x + 2x^2 + \dots + nx^n = \frac{(n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2}.$$

Prin derivare se obține:

$$1 + 2^2x + \dots + n^2x^{n-1} = \frac{(n-1)^2x^{n+1} - (2n^2-2n-1)x^n + n^2x^{n-1} - 1 - x}{(x-1)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2a^k = \frac{-(n-1)^2a^{n+2} + (2n^2-2n-1)a^{n+1} - n^2a^n + + a + a^2}{(1-a)^3}$$

Deci limita este: $\dfrac{a+a^2}{(1-a)^3}$.

TESTUL 2

2.1. *Să se arate că* $(\forall)$ $x, y \in [\mathrm{e}, \infty)$ *cu* $x \le y$, *avem satisfăcută inegalitatea*:

$$y(\ln x)^{\ln x} \le x(\ln y)^{\ln y}.$$

Soluție: Fie $x \le y$; $x, y \ge \mathbf{e}$; inegalitatea din enunț este echivalentă cu: $\ln y + \ln x \cdot \ln(\ln x) \le \ln x + \ln y \cdot \ln(\ln y)$ sau cu

$$\ln x\,[\ln(\ln x) - 1] \le \ln y\,[\ln(\ln y) - 1], \ (1).$$

Fie funcția $f: [\mathrm{e}, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x\,[\ln(\ln x) - 1] \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$.

Deoarece f este crescătoare, avînd $f' \ge 0$, rezultă inegalitatea (1), deci și inegalitatea din enunț.

2.2. *Arătați că*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^kC_{n-1}^k}{n-k+1} = 1.$$

Soluție. Fie $a_n = \int\limits_0^1 x(x+n)^{n-1}\,dx = \int\limits_0^1 \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k n^k x^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{n^kC_{n-1}^k}{n-k+1}$

Dar $a_n = \int\limits_0^1 x(x+n)^{n-1}\,dx = \dfrac{1}{n}\int\limits_0^1 x\cdot((x+n)^n)'\,dx = \dfrac{1}{n}\cdot x(x+n)^n\Big|_0^1 -$

$$\frac{1}{n}\cdot\int_0^1 (x+n)^n\,dx = \frac{(n+1)^n}{n}-\frac{1}{n}\left[(n+1)^n-\frac{n^{n+1}}{n+1}\right]=\frac{n^n}{n+1}.$$

Aşa că: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$

2.3. *Să se calculeze limita:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x+x^2+x^3+\ldots+x^n}-x\cdot\sqrt[n]{n}}{x-1}\right).$$

Soluţie. Avem cazul exceptat $\frac{0}{0}$. Aplicînd *l'Hosspital* se obţine:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x+x^2+\ldots+x^n}-x\sqrt[n]{n}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+2x+\ldots+nx^{n-1}}{n\cdot\sqrt[n]{(x+x^2+\ldots x^n)^{n-1}}}-\right.$$

$$\left.-\sqrt[n]{n}\right)=\frac{n+1}{2\sqrt[n]{n^{n-1}}}-\sqrt[n]{n}=\frac{n+1}{2n}\cdot\sqrt[n]{n}-\sqrt[n]{n}=-\frac{n-1}{2n}\cdot\sqrt[n]{n}.$$

Rezultă că limita cerută este egală cu $-\frac{1}{2}$.

2.4. *Fie* $n\in\mathbf{N}^*$ *şi* $a\in\mathbf{R}^*_+$. *Să se demonstreze inegalitatea:*

$$\frac{e^a}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^a}<\left((1+\frac{a}{n}\right)^n<e^a.$$

Soluţie. Inegalitatea din partea stîngă se mai scrie sub forma:

$$e^{\frac{a}{n}}<\left(1+\frac{a}{n}\right)^{1+\frac{a}{n}}\quad\text{sau}\quad\frac{a}{n}<\left(1+\frac{a}{n}\right)\ln\left(1+\frac{a}{n}\right),\ (1).$$

Fie funcţia $f\colon[0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x\Rightarrow f'(x)=$ $=\ln(1+x)>0$ $(\forall)$ $x>0$. Deci f este strict crescătoare pe $[0,\infty)$. Cum $f(0)=0$, rezultă $f(x)>0$; $(\forall)$ $x>0$; de unde se deduce (1).

Deoarece, avem $e^x>x+1$, $(\forall)$ $x>0$, rezultă şi inegalitatea din dreapta.

2.5. Calculaţi: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\max\{(x+1)^x,\,x^{x+1}\}}{(x+1)^{x+1}}$.

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{x+1}}{(x+1)^{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\infty$, rezultă că $(\exists)$ $a>0$; astfel încît $x^{x+1}>(x+1)^x$; $(\forall)$ $x>a$.

Deci $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\max\{(x+1)^x,\,x^{x+1}\}}{(x+1)^{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{x+1}}{(x+1)^{x+1}}=\frac{1}{e}$.

TESTUL 3

3.1. *Calculați*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} \sum_{1\leq i<j\leq n} \sqrt{ij}.$$

Soluție. Aplicînd de două ori teorema lui *Stolz-Cesaro* se obține:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} \sum_{1\leq i<j\leq n} \sqrt{ij} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}\,(1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n})}{(n+1)^2(n+2)-n^2(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}\,(1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n})}{(n+1)(3n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}(3n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \cdot \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}(3n+2)} \right) = \frac{1}{3} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} = \frac{1}{3} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}\,[(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n})}{3n^2+3n+1} = \frac{2}{9}.$$

3.2. *Dacă șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este definit astfel*: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^{p-1}}$, *să se arate că*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^p}{n+1} = p, \text{ unde } p \geq 2, p \in \mathbb{N}.$$

Soluție. Observăm că șirul (x_n) are termenii pozitivi și $x_{n+1} - x_n > 0$, $n \geq 1$ rezultă că (x_n) este șir strict monoton, deci are limită. Notăm: $l = \lim_{n\to\infty} x_n$. Trecînd la limită în relația de recurență se obține: $l = l +$

$$+ \frac{1}{l^{p-1}} \Rightarrow \frac{1}{l^{p-1}} = 0 \Rightarrow l = \infty.$$

Aplicînd teorema lui *Stolz-Cesaró* se obține:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^p - x_n^p}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(x_n + \frac{1}{x_n^{p-1}}\right)^p - x_n^p\right] = \lim_{n\to\infty} \left(C_p^1 + C_p^2 \frac{1}{x_n^p} + \ldots + C_p^p \frac{1}{x_n^{p(p-1)}}\right) = p.$$ Rezultă că avem satisfăcută relația din enunț.

3.3. *Dacă $a > 0$, arătați că există $c_a \in (a, a+1)$, astfel încît:*

$$\ln c_a = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\prod_{k=1}^{a}\sin(an+k)x\right)}{n^{\frac{n+1}{n}}} - \frac{\ln nx}{n^{\frac{1}{n}}}\right).$$

Soluție. Avem:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(\prod_{k=1}^{a}\sin(an+k)x\right)}{n^{n+\frac{1}{n}}} - \frac{\ln nx}{n^{\frac{1}{n}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^{n+\frac{1}{n}}}\lim_{n\to\infty}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(an+k)x}{nx}\right) = \frac{1}{n^{n+\frac{1}{n}}}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{an+k}{n}\right).$$

Deci, membrul al doilea al egalității din enunț este:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{an+k}{n}\right) = \lim\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(a+\frac{a}{\mathrm{n}}\right) =$$

$$= \int_0^1 \ln(a+x)\,dx = (a+x)\ln(a+x)\Big|_0^1 - 1 = (a+1)\ln(a+1) - a\ln a - 1$$

Considerăm funcția $f\colon (0,\infty)\to \mathbf{R}$, $f(x) = x\ln x$, căreia îi aplicăm teorema lui *Lagrange pe intervalul* $(a, a+1)$: $(\exists)$ $c_a \in (a, a+1)$ a.î. $f(a+1) - f(a) = f'(c_a) \Rightarrow (a+1)\ln(a+1) - a\ln a = \ln c_a + 1$; de unde rezultă relația din enunțul problemei.

3.4. *Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel ca șirul $(u_n)_{n\geq 0}$ definit astfel: $u_0 = 1$, $u_1 = a$, $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1} - n^2$, $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}^*$, să fie crescător.*

Soluție. Considerăm șirul $(z_n)_{n\geq 1}$; $z_n = u_n - u_{n-1}$, $(\forall)$ $n \geq 1$. Relația de recurență devine: $z_{n+1} = 2z_n - n^2$. O soluție particulară a recurenței în z_n este: $z_n = n^2 + 2n + 3$, după cum se poate verifica direct. Soluția ecuației omogene: $z_{n+1} = 2z_n$ este $z_n = k\cdot 2^n$, deci soluția generală a recurenței este:

$$z_n = k\cdot 2^n + n^2 + 2n + 3,$$

care pentru $n = 1$ dă: $z_1 = 2k + 6 \Leftrightarrow a - 1 = 2k + 6 \Leftrightarrow k = \dfrac{a-7}{2}$.

Deci $z_n = (a-7)2^{n-1} + n^2 + 2n + 3$.

Șirul $(u_n)_{n\geq 0}$ este crescător dacă și numai dacă $z_n \geq 0$, $(\forall)$ $n \geq 1$. Dacă $a \geq 7 \Rightarrow z_n > 0$, $n \geq 1 \Rightarrow (u_n)$ — șir crescător. Dacă $a < 7 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = -\infty$; deci nu convine.

3.5. *Să se demonstreze că :*

$$(1+x^{-1})^{x+1} \geq \frac{4}{x} e^{\frac{x-1}{x+1}}, \ (\forall)\ x \in [1, \infty).$$

Soluție. Prin logaritmare, relația din enunț este echivalentă cu :

$$(x+1)\ln\frac{x+1}{x} - \frac{x-1}{x+1} + \ln x - \ln 4 \geq 0, \ (1).$$

Considerăm funcția $f: [1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x+1)\ln\frac{x+1}{x} - \frac{x-1}{x+1} +$
$$+\ln x - \ln 4.$$

Avem : $f'(x) = \ln\frac{x+1}{x} + \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} > 0$; $(\forall)$ $x \geq 1$. Rezultă că f este strict crescătoare. Cum $f(1) = 0 \Rightarrow (1)$.

TESTUL 4

4.1. *Să se calculeze limita :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{1}{\sqrt{ij}}.$$

Soluție. Aplicînd de două ori teorema lui *Stolz-Cesaró se obține* :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{1}{\sqrt{ij}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 2.$$

4.2. *Să se arate că :*

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{2x} + \sin^2 x}\, dx\right)^2 \geq 2 - 2e^{\frac{\pi}{2}} + e^{\pi}.$$

Soluție. Se știe că : $\displaystyle\int_a^b \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}\, dx \geq \sqrt{\left(\int_a^b f(x)\, dx\right)^2 + \left(\int_a^b g(x) dx\right)^2}$.

Într-adevăr, avînd în vedere inegalitatea :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \geq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} B_k\right)^2}$, $k \geq 1$, ușor de demonstrat prin inducție, rezultă:

$$\int_a^b \sqrt{f^2(x)+g^2(x)}\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|\Delta_n\|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{f^2(\xi_k^n)+g^2(\xi_k^n)}\,(x_k^n - x_{k-1}^n) \geq$$

$$\geq \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|\Delta_n\|\to 0}} \sqrt{\left[\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n)\right]^2 + \left[\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n)\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 + \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^2}.$$

Luăm $f(x) = e^x$ și $g(x) = \sin x \Rightarrow$ relația din enunț.

4.3. *Dacă* $a_i \in \mathbb{R}_+^*$, $i = \overline{1, p+2}$, *să se calculeze*:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_p} + a_{p+1}}{a_{p+2}}\right)^n, \text{ unde } p \in \mathbb{N}^*. \text{ Discuție.}$$

Soluție. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_p} + a_{p+1}}{a_{p+2}} = \frac{p + a_{p+1}}{a_{p+2}}.$$

Dacă $p + a_{p+1} > a_{p+2}$, limita este ∞; dacă $p + a_{p+1} < a_{p+2}$ limita este 0; iar dacă $p + a_{p+1} = a_{p+2}$ limita se calculează astfel:

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left[\frac{n}{a_{p+2}}\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{a_i} - p\right)\right] = \exp\left[\frac{1}{a_{p+2}} \cdot \ln \prod_{i=1}^{n} a_i\right] = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{a_{p+2}}}.$$

4.4. *Demonstrați că pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *și orice* $x \in (0,1)$ *are loc inegalitatea*:

$$e^x\left(1 - \frac{1}{n!}\right) + \frac{x+1}{n!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Soluție. Există identitatea: $e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt$, ușor de dovedit prin inducție și folosind integrarea prin părți.

Fie $a_n = \int_0^x (x-t)^n e^t\,dt$. Atunci $a_{n+1} - a_n = \int_0^x e^t (x-t)^n (x-t-1)\,dt <$ < 0, deci (a_n) este descrescător $\Rightarrow a_n \leq a_1 = e^x - x - 1$, de unde se deduce inegalitatea din enunț.

4.5. *Dacă* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *este o funcție crescătoare, să se arate că are loc inegalitatea*:

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,dt > (1).$$

Soluție. Avem: $(1) \Leftrightarrow \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,dt \le \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)\,dt$. Dar $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)\,dt =$

$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(t + \frac{b-a}{2}\right) dt$, deoarece f este crescătoare, rezultă:

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,dt \le \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(t + \frac{b-a}{2}\right) dt.$$

PROBLEME PROPUSE PENTRU CICLUL PRIMAR

P : 83. Mama, tata, bunica și copilul au împreună 127 ani. Știind că numărul anilor copilului reprezintă cea mai mare cifră ; dacă sfertului vîrstei mamei înmulțit cu 5, i se scade 5, se obține vîrsta tatălui ; bunica este de două ori în mai vîrstă decît tata, să se afle vîrsta fiecăruia.

GEORGETA BOBOCEA, *învățătoare, Galați*

P : 84. Se dau trei numere cu suma egală cu 38. Dacă *a* este mai mare decît *b* cu 7, iar *c* este mai mic decît *b* cu 5, să se afle numerele *a*, *b*, *c*.

GEORGETA BOBOCEA, *învățătoare, Galați*

P : 85. Să se afle un număr de cinci cifre, știind că suma dintre a treia cifră și a doua este egală cu suma dintre a patra cifră și a treia și egală cu prima cifră ; suma dintre a treia cifră și a cincea este egală cu a doua cifră ; a treia cifră este 3 ; suma dintre a cincea cifră și a patra este egală cu prima cifră minus 1.

GEORGETA BOBOCEA, *învățătoare, Galați*

P : 86. Găsiți cele mai mici, respectiv cele mai mari numere naturale de forma :

$$\overline{aba},\ \overline{aaba},\ \overline{aaab},\ \overline{abcd},$$

unde *a*, *b*, *c*, *d* reprezintă cifre distincte.

MARICICA STANCIU, *institutor, Galați*

P : 87. Găsiți toate numerele naturale de patru cifre distincte care îndeplinesc simultan condițiile :

a) cifra miilor este cu 3 mai mare decît cifra sutelor ;
b) cifra sutelor este cu 2 mai mică decît cifra zecilor ;
c) cifra unităților este de două ori mai mică decît cifra sutelor.

MARICICA STANCIU, *institutor, Galați*

P : 88. Reconstituiți adunarea :

$$\begin{array}{r} REFORMA\ + \\ FORMA \\ RMA \\ \hline 2382801 \end{array}$$

MARICICA STANCIU, *institutor, Galați*

PROBLEME PROPUSE PENTRU GIMNAZIU

CLASA a V-a

G : 373. Cîte numere naturale cuprinse între 500 şi 1000, împărţite la 5, 8, 10, 12 dau restul 4?

DRAGOMIR C., *profesor, Săpata de Sus, Argeş*

G : 374. Arătaţi că nu există numărul de forma: $N=\overline{aa}^{1988}+\overline{bb}^{1988}+\overline{cc}^{1988}$ cu $a,b,c \neq 0$ şi a,b,c, cifre consecutive, care să fie pătrate perfecte.

CECILIA SOLOMON, *profesoară, Galaţi*

G : 375. Să se afle numerele naturale de forma $\overline{xyzzx}$ ştiind că este divizibil cu 9 şi $x+y=z$.

MARIA MINEA, *profesoară, Galaţi*

G : 376. Să se arate că orice număr de forma:

$$A=\overline{abc2}^1+\overline{abc2}^2+\overline{abc2}^3+\ldots+\overline{abc2}^{20},$$ se divide cu 10.

VASILICA DRĂGAN, *profesoară, Galaţi*

G : 377. Fie numărul: $E=2^{2n+1}\cdot 15^{2n-1}+6^{2n}\cdot 5^{2n}-10^{2n-1}\cdot 3^{2n}$, cu $n\in N^*$. Este numărul E divizibil cu 310, dar cu 930?

MIHAI FETECĂU, *profesor, Galaţi*

CLASA a VI-a

G : 378. Într-un patrulater convex, măsurile unghiurilor sale sînt invers proporţionale cu numerele 6,2,4,3. Ştiind că una din diagonalele sale formează cu două din laturi un triunghi isoscel, să se afle unghiurile formate de aceea diagonală cu celelalte două laturi.

ANETA VĂLEANU, *profesor, Galaţi*

G : 379. Să se determine n natural astfel încît:

7^n+3^n să se dividă la 5.

MARIA MINEA, *profesoară, Galaţi*

G : 380. Să se arate că 547 divide pe S, unde $S = 1 + (-3)^1 + (-3)^2 + ... + (-3)^{1987}$

MIHAI FETECĂU, *profesor, Galați*

G : 381. Să se arate că dacă a şi b sînt numere strict pozitive, atunci

$$\sqrt{a^2+b^2} < a+b \le \sqrt{2a^2+2b^2} < (a+b)\sqrt{2} \le 2\sqrt{a^2+b^2}.$$

C. IONESCU - ŢIU, *profesor, Bucureşti*

G : 382. Să se arate că dacă $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{6}{7}$, atunci

$$\sqrt{5x^2-8x+4} + \sqrt{5y^2-12y+9} + \sqrt{5x^2+5y^2-8xy} = \sqrt{13},$$

$$(5x-4)\sqrt{5x^2+5y^2-8xy} + (5x-4y)\sqrt{5x^2-8x+4} = 0,$$

$$(5y-6)\sqrt{5x^2+5y^2-8xy} + (5y-4x)\sqrt{5y^2-12y+9} = 0.$$

L. IONESCU - ŢIU, *profesor, B ucureşti*

G : 383. În două ceşti avem cantităţi egale de cafea. În prima ceaşcă avem o cantitate de 30% zahăr, iar în a doua ceaşcă se află 5% zahăr.Din prima ceaşcă se toarnă un sfert din cantitate, în ceaşca a II-a. Amestecăm şi luăm un sfert din ceaşca a doua şi punem în prima ceaşcă. Să se găsească concentraţia finală a zahărului în cele două ceşti.

BIANCA OUATU, *elevă, Galaţi, Şc. Gen.* 10

CLASA a VII-a

G : 384. Să se arate că oricare ar fi $x, y, z \in \mathbf{R}_+$, astfel încît $x+3y+5z = 1$ atunci : $\sqrt{2x+1} + \sqrt{6y+3} + \sqrt{10z+5} \le 7$.

MARIA şi ANTON NEGRILĂ, *profesori, Ploieşti*

G : 385. Determinaţi soluţiile întregi ale ecuaţiei :

$$(x^2-xy-y+1)\cdot(x^2-xy-y+3) = 48.$$

DRAGOŞ CONSTANTINESCU, *profesor, Rm. Vîlcea*

G : 386. Se dă un triunghi dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90°$). Se construiesc în exterior pe laturile lui, triunghiurile echilaterale ABD, ACE şi BCF.

a) Să se determine pe latura BF a triunghiului BCF, două puncte M şi N astfel ca :

$$A_{BCM'M} = A_{ACE},\ MM' \parallel BC,\ M' \in CF;$$
$$A_{BCN'N} = A_{ABD},\ NN' \parallel BC,\ N' \in CF.$$

b) Să se determine aria trapezului $MM'N'N$, în funcţie de laturile triunghiului ABC.

C. DRAGOMIR, *profesor, Săpata de Sus, Argeş*

G : 387. Fie $a,b,c \in \mathbf{R}^*_+$, astfel încît $abc \geq \frac{1}{16}$. Atunci are loc inegalitatea :

$$abc + ab + ac + bc + a + b + c \geq 1$$

MIHAI FETECĂU, *profesor, Galați*

G : 388. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 3$, $BC = 6\sqrt{3}$. Pe latura AD se construiește în exterior triunghiul ADE echilateral și se ia punctul M, mijlocul laturii BC.

a) Să se arate că patrulaterul $AMDE$ este inscriptibil.

b) Să se calculeze raza cercului circumscris patrulaterului $AMDE$.

c) Să se arate că patrulaterul $AMFE$ este dreptunghi, F fiind punctul diametral opus lui A.

MARIA MINEA, *profesoară, Galați*

G : 389. Fie $a,b,c \in (0,1)$. Să se demonstreze :

$$0 < a + b + c - ab - bc - ca < 1.$$

VASILE POPA, *profesor, Galați*

G : 390. Știind că cercul circumscris triunghiului ABC are raza de $\sqrt{3}$ ori mai mică decît latura „a" a triunghiului și laturile „a" și „b" satisfac egalitatea $2a^2 = 3b^2$. Să se afle unghiurile triunghiului ABC și cea de-a treia latură „c" a triunghiului în funcție de latura „a".

SORIN BOBOCEA, *elev, Liceul „Vasile Alecsandri"*

CLASA a VIII-a

G : 391. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 50; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 50, \ x, y, z \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

IONUȚ SÎRBU, *elev, Bacău*

G : 392. Un tetraedru regulat $[VABC]$ are muchia de lungime „a". Fie $M \in (VC)$, $N \in (VB)$ și $Q \in (AC)$ astfel încît $VM = CM$, $BN = \frac{1}{4} \cdot VB$ și $AQ = \frac{1}{4} \cdot AC$. Dacă planul α determinat de punctele M, N, Q intersectează pe AB în P și $MN \cap QP = \{O\}$, se cere :

1) Să se determine distanța de la punctul O la planul (VAB) ;

2) Să se determine aria poligonului de secțiune făcut de planul α în tetraedrul $[VABC]$;

3) Să se determine distanțele de la punctul O la muchiile tetraedrului $[VABC]$;

4) Să se calculeze raportul $\frac{\text{volum}\,[OANP]}{\text{volum}\,[VABC]}$.

MIHAI FETECĂU, *profesor, Galați*

G : 393. Să se afle numărul $A = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$ știind că $2A$ are 24 divizori naturali, iar $5A$ are 25 divizori naturali (α, $\beta \in \mathbf{N}^*$).

MARIA MINEA, *profesoară, Galați*

G : 394. Dacă a,b,c, sînt laturile unui triunghi, atunci ecuația :
$x^2 - (a^2+b^2+c^2)x + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 0$, nu admite soluții reale

DRAGOȘ CONSTANTINESCU, *prof. Rm. Vîlcea*

G : 395. Fie $x,y,z \in \mathbf{R}^*$. Să se arate că există inegalitatea :

$$\frac{x}{5x+y+z} + \frac{y}{x+5y+z} + \frac{z}{x+y+5z} \leq \frac{3}{7}.$$

MARIA și ANTON NEGRILĂ, *profesori, Ploiești*

PROBLEME PROPUSE PENTRU LICEU

CLASA a IX-a

L : 426. Să se determine parametrul real m astfel încît :

$$x^2 + y^2 - mxy + 1 \geq 0, \ (\forall) \ x, y \in Z.$$

JENICĂ CRÎNGANU, *asistent, Univ. Galați*

L : 427. Se consideră funcțiile :

$$f, g : R \to R, \ f(x) = x + |x^2 - 1|, \ g(x) = (m+1)x - m, \ (\forall) \ x \in R.$$

Să se determine parametrul real m astfel încît graficele celor două funcții să se intersecteze în trei puncte distincte, unul dintre acestea fiind punctul $A(1,1)$.

EFRIM DOREL, *profesor, Tg. Bujor*

L : 428. Găsiți condiția necesară și suficientă impusă întregilor a și b pentru ca prin adunări și scăderi succesive între ei să poată fi obținut orice număr întreg.

VIOREL MIHALEF, *student, Iași*

L : 429. Să se afle cea mai mică valoare pe care o poate lua funcția $f : R^3 \to R$ dată de : $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 2xy + 4y + 4} + \sqrt{2y^2 + 2yz + z^2}$.

JENICĂ CRÎNGANU, *asistent, Univ. Galați*

L : 430. Fie $a \in R^*_+$. Să se arate că nu există funcții surjective $f : N \to N$, cu proprietatea : $f(n) \geq an^2$, $(\forall)$ $n \in N$.

JENICĂ CRÎNGANU, *asistent, Univ. Galați*

L : 431. Fiind date funcțiile polinomiale de gradul întîi $f, g, h : R \to R$, cu proprietatea că $f - g$, $f - h$ sînt funcții constante, să se arate că :

$$f \circ (g^{-1} \circ h) = h \circ (g^{-1} \circ f) = f - g + h.$$

IONEL TUDOR, *profesor, Călugăreni*

L : 432. Să se demonstreze inegalitatea :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)^{ab} \leq n^{1+ab},$$

unde $x_k \in [1, ab]$, $(\forall)$ $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, iar $ab \in N^* - \{1\}$.

C. DRAGOMIR, *profesor, Săpata de Sus, Argeș*

L : 433. Fie $x, y, z \in R^*_+$. Să se demonstreze inegalitatea :

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz \geq \frac{1}{2}(x + y)(y + z)(z + x)$$

VIRGIL NICULA, *profesor, București*

CLASA a X-a

L : 434. Fie a, $b \in R$, astfel încît $a + b > 0$. Să se arate că pentru orice $n \in N^*$, avem :

$$(a+b)(a^2+b^2) \ldots (a^n+b^n) \leq 2^{n-1}\left[a^{\frac{n(n+1)}{2}} + b^{\frac{n(n+1)}{2}}\right].$$

ION LIXANDRU, *profesor, Galați*

L : 435. Să se arate că dacă a, b sînt două numere complexe nenule cu proprietatea :

$$|a - b|^n = |a^n - b^n|, \ (\forall) \ n \in N^*, \text{ atunci } a = b.$$

JENICĂ CRÎNGANU, *asistent, Univ. Galați*

L : 436. Să se arate că :

$$\frac{C^1_{k-1} + C^2_{2k-1} + C^3_{3k-1} + \ldots + C^n_{nk-1}}{C^1_k + C^2_{2k} + C^3_{3k} + \ldots + C^n_{nk}} = \frac{k-1}{k}, \ n \in N^*, \ k \in N^* - \{1\}.$$

IONEL TUDOR, *profesor, Călugăreni*

L : 437. Să se arate că în orice triunghi există inegalitatea :

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \geq \sqrt{\frac{2}{Rr}},$$

unde l_a, l_b, l_c sînt bisectoarele triunghiului.

RADU ROPOTĂ, *student, Iași*

L : 438. Să se arate că în orice triunghi există inegalitățile :

$$1) \ r_a + r_b + r_c \geq 9r;$$
$$2) \ m_a m_b m_c \geq Sp.$$

DUMITRU NEAGU, *profesor, Miroslava, Iași*

L : 439 Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea :

$$m_a m_b m_c l_a l_b l_c \geq p^2 S^2$$

RADU ROPOTĂ, *student, Iași*

L : 440. Dacă $M \in \text{Int } ABCD$, unde $ABCD$ este paralelogram, arătați că :

$S^2 \leq MA^2 \cdot MC^2 + MB^2 \cdot MP^2$, $S = \sigma(ABCB)$, știind că $m(\widehat{DMC}) + m(\widehat{AMB}) = 270°$.

I. TODERIȚĂ profesor, Galați

CLASA a XI-a

L : 441. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin :

$$x_{n+1} = \left(2 - x_n^{-\frac{1}{n}}\right)^{n+1}, (\forall)\ n \geq 1 \text{ și } x_1 = 2.$$

Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și să i se calculeze limita.

ION LIXANDRU, profesor, Galați

L : 442. Fie $A = \begin{pmatrix} a-b & c \\ c & a+b \end{pmatrix}^p + \begin{pmatrix} a+b & -c \\ -c & a-b \end{pmatrix}^p$, unde $p \in N^*$, $a, b \in R$ cu $a^2 = b^2 + c^2$. Să se calculeze det A.

IOAN TODERIȚA, profesor, Galați

L : 443. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_n > 0$, $(\forall) n \in N^*$, definit astfel :

$$a_{n+1} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1 + a_n^2}{a_n}, (\forall) n \geq 1.$$

a) Să se demonstreze că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$.

b) Să se arate că șirul $y_n = \dfrac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{\sqrt{n}}$ este convergent.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} y_n$.

C. URSU, profesor, Galați

L : 444. Fie $x_0 \in R_+^*$ și $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale pozitive astfel încît :

$$x_n^2 \cdot x_{n-1} + 2x_n - x_{n-1} = 0 ; (\forall)\ n \geq 1.$$

Să se arate că (x_n) este convergent și să se determine limita seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n.$$

ȘTEFAN ANDREI, student, Iași

L : 445. Fie $(a_n)_{n\geq 2}$ un şir de numere reale pozitive astfel încît :

$$\lim_{n\to\infty} n(a_{n+1} - a_n) = 1.$$

Să se demonstreze că :

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$;

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

JENICĂ CRÎNGANU, *asistent, Univ. Galaţi*

L : 446. Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel :

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{1}{i^a j^b}, \text{ unde } a, b \in \mathbf{R}.$$

(Generalizarea problemei *C*. **841** — G.M. 11—12/1988)

ION LIXANDRU, *profesor, Galaţi*

L : 447. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir monoton de numere reale pozitive astfel încît $\lim_{n\to\infty} n(a_{n+2} - a_n) = 1$.

Să se demonstreze că :

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$;

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

JENICĂ CRÎNGANU, *asistent, Univ. Galaţi*

L : 448. Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, unde

$$a_k = \frac{1}{(k+1)\sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{(k+1)^2 k^2} + k\sqrt[3]{k+1}}.$$

Să se determine $n \in \mathbf{N}^*$ pentru care $x_n \notin \left(\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right)$.

IONEL TUDOR, *profesor, Călugăreni, Giugiu*

L : 449. Fie a, b, $c \geq 0$. Demonstraţi inegalitatea :

$$\frac{\sqrt{a+b+c}}{1+\sqrt{a+b+c}} + \frac{\sqrt{b+c}}{1+\sqrt{b+c}} + \frac{\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}} \geq \frac{\sqrt{a+4b+9c}}{1+\sqrt{a+4b+9c}}.$$

RĂZVAN SATNOIANU, *student, Bucureşti*

L : 450. Să se afle maximul expresiei următoare :

$$\frac{1}{\lg(y^4)\cdot\lg(10x)-\lg(x^4)+3}$$; unde $x, y \in \mathbf{R}$ şi satisfac următoarele condiţii : $y > 0$, $\frac{x}{\sqrt{y}} \geq 10$, $\left(\frac{x}{y}\right)^7 \leq \frac{100}{x}$.

GHEORGHE PUŞCAŞU, *profesor, Tg. Bujor*

L : 451. Fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă în zero, fără puncte fixe pe $\mathbf{R}^*$ cu $g'(0) = 1$, $g(0) = 0$.

Arătaţi că nu există funcţii $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, neconstante, astfel ca :

$$f(x+y) - f(x) = g(y);\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}.$$

IOAN TODERIŢĂ, *profesor, Galaţi*

L : 452. Fie $A = \{a, b, c\} \subset \mathbf{Z}$. Să se arate că ecuaţia $\tau^3 = e$ admite o singură soluţie în mulţimea permutărilor mulţimii A, de forma $x \xrightarrow{\tau} P(x)$; $(\forall)\ x \in A$, unde $P \in \mathbf{Z}[X]$.

ALEXANDRU DONESCU, *p[illegible]or, Galaţi*

L : 453. Fie matricele $A \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbf{R})$, $B \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbf{R})$ $(2 \leq k \leq n)$ astfel încît rang $(AB) = k$ şi $(AB)^2 = AB$.

a) Să se demonstreze că rang $(BA) = k$;
b) Să se determine BA.

C. URSU, *profesor, Galaţi*

CLASA a XII-a

L : 454. Să se determine rangul matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$$\text{unde } a_{ij} = \int_0^1 \left(\int_0^1 u^i v^j \, du \right) dv.$$

SORIN ALEXE, *asistent, Univ. Galaţi*

L : 455. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ şi $a \geq 0$ are loc inegalitatea :

$$\frac{a}{1^2} + \frac{a^2}{2^2} + \ldots + \frac{a^n}{n^2} \leq \frac{n}{2}\left(a + \frac{a^n}{n^2}\right).$$

(În legătură cu nota matematică : „Asupra unei inegalităţi" din G.M. nr. 1/1989).

VIOREL ANDREI, *conf. univ. dr., Univ. Galaţi*

L : 456. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x^n}, & \text{dacă } x \neq 0; \text{ unde } n \in \mathbf{N}^* \\ 0 & \text{,dacă } x = 0, \end{cases}$

Să se arate că f admite primitive.

P. ASAFTEI, *profesor, Iaşi*

L : 457. Să se afle $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ astfel încît numărul:

$$I = \int_a^b \frac{1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2}}{1 + x + \ldots + x^{n-1}}\, dx$$

să fie raţional, ştiind că a, $b \in \mathbf{Q} \cap (1, \infty)$.

CHIŢA POPOVICI, *profesoară, Galaţi*

L : 458. Există funcţii $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ care admit primitive astfel încît $f(a) \neq f(b)$ şi orice valoare raţională este luată de către f de un număr par (finit) de ori?

D. M. BĂTINEŢU - GIURGIU, *profesor, Bucureşti*

L : 459. Fie a_1, a_2, $a_3 \in \mathbf{R}$, distincte şi

$$\sin \frac{1}{a_1 - a_2} \sin \frac{1}{a_2 - a_3} \sin \frac{1}{a_3 - a_1} \neq 0.$$

Să se demonstreze că există A_1, A_2, $A_3 \in \mathbf{R}^*$ astfe lîncît funcţia : $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} A_1 \cdot \sin \dfrac{1}{x - a_1} + A_2 \cdot \sin \dfrac{1}{x - a_2} + \\ \qquad + A_3 \cdot \sin \dfrac{1}{x - a_3} \quad \text{dacă } x \neq a_1, a_2, a_3; \\ 0, \text{ dacă } x \in \{a_1, a_2, a_3\}, \end{cases}$$

să admită primitive.

VASILE POPA, *profesor, Galaţi*

L : 460. Fie $a \in \mathbf{R}$ şi funcţia $f : [a, a+1] \to \mathbf{R}$, derivabilă, cu derivata continuă. Să se arate că:

$$\int_a^{a+1} f^2(x)\, dx - \left(\int_a^{a+1} f(x)\, dx \right)^2 \leq \frac{(\max |f'(x)|)^2}{12}.$$

RADU ROPOTĂ *student, Iaşi*

PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA OLIMPIADEI INTERNAȚIONALE DE MATEMATICĂ

O : 36. Fie $x, y \in \mathbf{Z}$ astfel încît $x^2+y^2+3 \geq 6\ xy$. Arătați că :

$$x^2 + y^2 \geq 6\ xy.$$

JENICĂ CRÎNGANU, *asistent, Univ. Galați*

O : 37. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$ și avem :

$$\sin a + \sin b + \sin c = 0 \text{ și } \cos a + \cos b + \cos c = 0$$

atunci avem și

$$\sin na + \sin nb + \sin nc = 3 \cdot \delta_{n,3k} \cdot \sin \frac{n(a+b+c)}{3}$$

$$\cos na + \sin nb + \sin nc = 3 \cdot \delta_{n,3k} \cdot \cos \frac{n(a+b+c)}{3}$$

pentru orice $n \in \mathbf{Z}$ și $k = \left[\frac{n}{3}\right]$, iar $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } i \neq j \\ 1, & \text{dacă } i = j \end{cases}$ pentru orice i și j numere întregi.

IONEL TUDOR, *profesor, Călugăreni*

O : 38. Se consideră un triunghi ABC, I punctul de intersecție al bisectoarelor, A', B', C' simetricele punctelor A, B, respectiv C față de I. Să se arate că $[ABC] \cap [A'B'C']$ determină o suprafață hexagonală, avînd frontiera hexagon circumscriptibil, apoi să se calculeze perimetrul și aria suprafeței hexagonale în funcție de lungimile laturilor triunghiului.

VASILE POPA, *profesor, Galați*

O : 39. Să se stabilească dacă există o mulțime finită K de puncte în spațiu, nesituate toate în același plan, așa ca pentru orice dreaptă ce conține cel puțin două puncte din K să existe o altă dreaptă, paralelă aceasta (dar distinctă de ea), care să conțină și ea cel puțin două puncte din K.

* * *

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

BACĂU, Școala Generală Nr. 19, clasa a VIII-a: Antoniu Flavia (4 Blănaru Oana (12), Dumitriu Lineta (5), Filioreanu Nicoleta(6);

CLUJ, Liceul Industrial Nr. 8, clasa a XI-a: Olteanu LucianTiberiu (20); Liceul „E. Racoviță", clasa a VIII-a: Tudor Bunea (8); fără mențiune de școală: Pop Daniela (13) — clasa a VIII-a;

GALAȚI, Școala Generală Nr. 10, clasa a VII-a: Gheorghieș Ovidiu (9), Necula Adriana Cătălina (12); Școala Generală Nr. 13, clasa a VII-a: Anghel Iulia (10), Axente Ionuț (8), Bulai Doina (9), Cânipă Marlena (10), Cernamoriț Ancuța (10), Costea Zenaida (11), Dănilă Mioara (7) Dobre Cătălina (16), Ghinea Ciprian (6), Ghioc Claudia (9), Rusu Gabriela (6), Torcaciu Valentina (9), Ștefan Simona (10); Școala Generală Nr. 22; clasa a VII-a: Bianca Nuță (12), Lungu Nicoleta (7); clasa a VIII-a: Szabo Daniela (10); Școala Generală Nr, 40, clasa a VII-a: Dascălu Nicoleta (7), Săvescu Alice (15), Solomon Simona (10); Liceul „Vasile Alecsandri", clasa a IX-a: Maxin Daniel (9);

MOINEȘTI (BACĂU)' Școala Generală Nr. 2, clasa a IV-a: Crețu Marinela (8); Liceul Industrial Nr. 2, clasa a IX-a: Lovin Radu (4);

TECUCI, Școala Generală Nr. 5, clasa a VII-a; Anghele Mihaela (9) Anghelina Valentina (12), Corodeanu Cleopatra (7), Cucu Mara Mihaela (11), Giurgea Delia-Roxana (10), Țopa Loredana (10).

ERATA la nr. 9

	pag.	Rîndul	În loc de ...	eS va citi ...
1.	82	4 de jos	$\prod_{k=0}^{n}$	$\prod_{k=1}^{n}$
2.	84	2 de jos	$P(t)Q(t)$	$P(t)Q'(t)$
3.	85	3 de sus	1234567890 11	12345679011
4.	87	4,5,6	$A \cup B - C$ ...	$(A \cup B) - C$ ...
5.	95	15 de sus	$\overline{ac} = \overline{bd}$	$a\bar{c} = b\bar{d}$
6.	168	3 de sus	e_{x}^{1}	$e^{\frac{1}{x}}$

CUPRINS

Tiparul executat sub c-da nr. 253
la Intreprinderea Poligrafică Galați
B-dul George Coșbuc nr. 223 A
România