

Абитуриент

Э. Н. Балаян

**РЕПЕТИТОР
ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ
В ВУЗЫ**

*1000 задач с решениями
3000 задач
для самостоятельного решения
Подготовка к ЕГЭ
и письменному экзамену*

*5-е издание,
переработанное и дополненное*

**Ростов-на-Дону
«Феникс»
2006**

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я729
КТК 444
Б 20

Б 20 **Балаян Э. Н.**
Репетитор по математике для поступающих в
вузы / Э. Н. Балаян. — Изд. 5-е, доп. и пере-
раб. — Ростов н/Д: Феникс, 2006. — 800 с. —
(Абитуриент).

ISBN 5-222-09502-9

Книга написана на основе действующей программы по математике для образовательных школ, гимназий, лицеев. Она содержит около 4000 задач, из которых более 1000 даны с решениями, а остальные предназначены для самостоятельного решения.

Каждая глава сопровождается краткими теоретическими сведениями и включает достаточное количество примеров с подробными решениями.

Задачи тщательно подобраны по принципу однородности тем, типов, методов решения и разбиты на две группы по уровню сложности.

В 12-й главе приводятся «нестандартные задачи» к ЕГЭ (типа С) с решениями и для самостоятельного решения.

В заключительной 13-й главе приводятся 10 вариантов тестов для подготовки к ЕГЭ, из которых вариант № 1 дается с полным решением и обоснованием.

Репетитор предназначен выпускникам и абитуриентам для самостоятельной подготовки к сдаче экзаменов в вузы, а также учителям математики и репетиторам.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я729

ISBN 5-222-09502-9

© Балаян Э. Н., 2006

© Оформление, изд-во «Феникс», 2006

*Светлой памяти заслуженного
учителя РФ Т. Х. Оганесовой
посвящается*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга предназначена для самостоятельного повторения основных тем школьного курса математики. Она поможет школьникам старших классов при подготовке к ЕГЭ и вступительным экзаменам в высшие учебные заведения.

Учитывая то, что уровень подготовки каждого выпускника отличается, автор счел необходимым расположить задания для самостоятельного решения по двум группам – А и Б (за исключением главы 12). Следует отметить, что задачи группы А по уровню их сложности примерно соответствуют заданиям базового и среднего уровня, поэтому умение решать задачи группы А достаточно для получения положительной оценки на ЕГЭ, но недостаточно для получения более высокой оценки. Задачи группы Б содержат упражнения, направленные на выработку умений и навыков на высоком уровне программных требований. Эти задачи предназначены учащимся, проявляющим повышенный интерес к изучению математики. Упражнения этой группы (особенно главы 12) могут быть использованы учителем на факультативных занятиях, для организации индивидуальной работы на уроках с сильными учениками, а также в работе математического кружка.

Наличие в книге задач двух уровней несомненно поможет учителю вести дифференцированное обучение учащихся. Задачи группы Б по сложности примерно соответствуют уровню требований технического вуза.

Назначение предлагаемой книги определило и ее структуру. Книга состоит из 13 глав. Каждая глава состоит из нескольких параграфов. Все параграфы построены в основном по одной и той же схеме. Они содержат: необходимый справочный материал, задачи с решениями (всего около 1000) и задачи для самостоятельного решения (всего около 3000).

Раздел «Справочные материалы» содержит необходимые формулы, рисунки, методические рекомендации и т. д. Этот раздел является своеобразным консультантом по вопросам теории.

Глава 10 (планиметрия) и глава 11 (стереометрия) содержат основные сведения из геометрии и достаточное количество задач с подробными решениями и для самостоятельного решения.

Особо следует отметить 12-ю главу «Нестандартные задачи» к ЕГЭ (тип С), посвященную уравнениям высших степеней, нелинейным системам алгебраических уравнений, иррациональным уравнениям и системам уравнений, тригонометрическим уравнениям, уравнениям и неравенствам с параметрами, а также комплексным упражнениям.

Все задачи этой главы (их около 430) авторские, составлены в разные годы.

Необходимость включения этой главы объясняется тем, что в последние годы на школьных экзаменах, а также на вступительных экзаменах в вузы предлагаются задачи, решаемые нешкольными методами. Они требуют сообразительности, хорошего владения некоторыми разделами элементарной математики, психологической подготовки и, конечно, высокой логической культуры.

Надо отметить, что нет и не может быть универсального метода решения «нестандартных» задач, основная сложность которых — непривычность. В 12-й главе приводятся подробные решения различных задач, причем в некоторых случаях — различные способы решения, что способствует творческой активности учащихся и повышению интереса к изучению математики.

Впервые в книгу включена система комплексных упражнений (§ 44) практически по всему школьному курсу алгебры, куда входят графики функций, уравнения (в основном с модулем) и неравенства. Преимущество этих упражнений в том, что каждое из них объединяет сразу несколько тем из курса математики, причем в результате преобразований они приводятся к простому виду и решаются довольно легко. Эти упражнения всегда вызывают повышенный интерес учащихся, способствуют развитию логического

мышления, созданию проблемной ситуации на уроке, формируют навыки тождественных преобразований, закрепляют усвоение основных положений курса алгебры и начал анализа.

Автор рекомендует читателю выбирать вначале те упражнения, которые соответствуют уровню его математической подготовки, а затем по мере приобретения навыков и умений переходить к более трудным.

12-ю главу следует изучать на заключительной стадии подготовки к экзаменам.

Для удобства пользования и контроля знаний в конце книги приводятся ответы на все задания для самостоятельного решения.

В последней, 13-й главе приводятся 10 авторских тестов, разработанных на основе нового общего плана, инструкция по выполнению работы и таблица перевода первичных баллов в тестовые и школьные отметки. Кроме того, вариант № 1 дается с полным решением и обоснованием, чтобы читатель имел возможность самостоятельно справиться с остальными вариантами.

В заключение отметим, что в рамках одной книги невозможно рассмотреть весь спектр задач ввиду их разнообразия, тем более, что развитие элементарной математики, математики конкурсного экзамена непрерывно продолжается и ее копилка пополняется новыми оригинальными идеями.

Автор будет признателен читателям, которые сообщат критические замечания и предложения с целью улучшения книги в шестом издании.

Глава 1

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 1. Выполнение арифметических действий

При решении задач на выполнение арифметических действий следует прежде всего определить порядок действий и обратить внимание на форму представления чисел. Складывать и вычитать десятичные дроби легче, чем обыкновенные, тогда как умножать и делить десятичные дроби, как правило, относительно сложнее, чем обыкновенные.

Поэтому важно выбрать подходящее представление чисел, а затем постараться максимально упростить арифметическое выражение.

Для нахождения *наибольшего общего делителя* (НОД) двух (и более) натуральных чисел надо:

1) разложить каждое из данных чисел на простые множители;

2) найти произведение простых множителей, входящих в каждое из данных чисел (с наименьшим из показателей, с которыми они встречаются в разложениях).

Если НОД чисел равен 1, то такие числа называются *взаимно простыми*. Например, числа 8 и 15 взаимно простые, так как $\text{НОД}(8; 15) = 1$.

Для нахождения *наименьшего общего кратного* (НОК) двух (и более) натуральных чисел надо:

1) разложить каждое из данных чисел на простые множители;

2) выписать все множители одного из чисел и дописать все недостающие множители из других чисел, а затем перемножить их (каждый множитель берет-

ся с наибольшим показателем из встречающихся в разложениях).

Для разложения числа на простые множители надо:

а) подобрать наименьшее простое число, на которое делится данное число;

б) представить данное число как произведение найденного простого множителя и некоторого натурального числа;

в) повторяем пункты а) и б) для нового натурального числа до тех пор, пока оно не станет равным единице.

Пример 1. Вычислить: $\left(172\frac{5}{6} - 170\frac{1}{3} + 3\frac{5}{12}\right) : 0,8$.

Решение

$$1) 172\frac{5}{6} - 170\frac{1}{3} + 3\frac{5}{12} = 172\frac{10}{12} - 170\frac{4}{12} + 3\frac{5}{12} = 5\frac{11}{12};$$

$$2) 5\frac{11}{12} : 0,8 = \frac{71}{12} : \frac{8}{10} = \frac{71}{12} : \frac{4}{5} = \frac{71 \cdot 5}{12 \cdot 4} = \frac{355}{48} = 7\frac{19}{48}.$$

Ответ: $7\frac{19}{48}$.

Пример 2. Вычислить:

$$\left(\frac{3\frac{1}{3} + 2,5}{2,5 - 1\frac{1}{3}} \cdot \frac{4,6 - 2\frac{1}{3}}{4,6 + 2\frac{1}{3}}\right) \cdot 5,2 : \left(\frac{0,05}{\frac{1}{7} - 0,125} + 5,7\right).$$

Решение

$$1) 3\frac{1}{3} + 2,5 = 3\frac{1}{3} + 2\frac{1}{2} = 3\frac{2}{6} + 2\frac{3}{6} = 5\frac{5}{6};$$

$$2) 2,5 - 1\frac{1}{3} = 2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3} = 2\frac{3}{6} - 1\frac{2}{6} = 1\frac{1}{6};$$

$$3) 5\frac{5}{6} : 1\frac{1}{6} = \frac{35}{6} : \frac{7}{6} = \frac{35 \cdot 6}{6 \cdot 7} = \frac{35}{7} = 5;$$

$$4) 4,6 - 2\frac{1}{3} = 4\frac{3}{5} - 2\frac{1}{3} = 4\frac{9}{15} - 2\frac{5}{15} = 2\frac{4}{15};$$

$$5) 4,6 + 2\frac{1}{3} = 4\frac{9}{15} + 2\frac{5}{15} = 6\frac{14}{15};$$

$$6) 2\frac{4}{15} : 6\frac{14}{15} = \frac{34}{15} : \frac{104}{15} = \frac{34 \cdot 15}{15 \cdot 104} = \frac{34}{104} = \frac{17}{52};$$

$$7) 5 \cdot \frac{17}{52} = \frac{85}{52};$$

$$8) \frac{1}{7} - 0,125 = \frac{1}{7} - \frac{125}{1000} = \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{8-7}{56} = \frac{1}{56};$$

$$9) 0,05 : \frac{1}{56} = 0,05 \cdot 56 = 2,8;$$

$$10) 2,8 + 5,7 = 8,5;$$

$$11) \frac{85}{52} \cdot 5,2 = 85 \cdot 0,1 = 8,5;$$

$$12) 8,5 : 8,5 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 3. Разложить на простые множители числа:

а) 320; б) 825.

Решение

$$\begin{array}{r|l} \text{а) } 320 & 2 \\ 160 & 2 \\ 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 320 = 2^8 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r|l} \text{б) } 825 & 3 \\ 275 & 5 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$825 = 3 \cdot 5^2 \cdot 11$$

Пример 4. Найти НОД чисел: а) 12 и 18; б) 280 и 120; в) 120, 144 и 324.

Решение

а)
$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{aligned} 12 &= 2^2 \cdot 3 \\ 18 &= 2 \cdot 3^2 \\ \text{НОД}(12; 18) &= 2 \cdot 3 = 6 \\ \text{Ответ: } 6. \end{aligned}$$

б)
$$\begin{array}{r|l} 280 & 2 \\ 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{aligned} 280 &= 2^3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 120 &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \\ \text{НОД}(280; 120) &= 2^3 = 8 \\ \text{Ответ: } 8. \end{aligned}$$

в)
$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 324 & 2 \\ 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{aligned} 120 &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \\ 144 &= 2^4 \cdot 3^2 \\ 324 &= 2^2 \cdot 3^4 \\ \text{НОД}(120, 144, 324) &= 2^2 \cdot 3 = 12 \\ \text{Ответ: } 12. \end{aligned}$$

Пример 5. Найти НОК чисел: а) 12 и 18; б) 270; 315; 300.

Решение

а) $12 = 2^2 \cdot 3, 18 = 2 \cdot 3^2$.
 $\text{НОК}(12; 18) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$
 Ответ: 36.

б)
$$\begin{array}{r|l} 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{aligned} 270 &= 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \\ 315 &= 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \\ 300 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ \text{НОК}(270; 315; 300) &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 18900 \\ \text{Ответ: } 18900. \end{aligned}$$

§ 2. Преобразование алгебраических выражений

Формулы сокращенного умножения

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — квадрат суммы.
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрат разности.
3. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — разность квадратов.
4. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ — куб суммы.
5. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$ — куб разности.
6. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ — сумма кубов.
7. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ — разность кубов.

Свойства степеней:

Для любых x, y и $a > 0, b > 0$ верны равенства:

1. $a^0 = 1$;
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
3. $a^x : a^y = a^{x-y}$;

$$4. (a^x)^y = a^{xy}; \quad 5. (ab)^x = a^x b^x; \quad 6. \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$

$$7. a^{-x} = \frac{1}{a^x}; \quad 8. a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Свойства арифметических корней

Для любых натуральных $n > 1$ и $k > 1$ и любых $a \geq 0, b \geq 0$ верны равенства:

$$1. \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad 2. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0);$$

$$3. (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; \quad 4. \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a};$$

$$5. \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \quad 6. (\sqrt[n]{a})^n = a \quad (a \geq 0);$$

$$7. \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ если } 0 \leq a < b;$$

$$8. \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{при } a \geq 0, \\ -a, & \text{при } a < 0; \end{cases}$$

$$9. \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|;$$

$$10. \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geq 0).$$

Пример 6. Разложить на множители:

a) $a^2b - 2b + ab^2 - 2a$; b) $1 - x^2 + 2xy - y^2$;
 c) $ab^2 - b^2y - ax + xy + b^2 - x$; d) $a^6 - b^6$.

Решение

Способ 1

a) Применив способ группировки, имеем:

$$a^2b - 2b + ab^2 - 2a = (a^2b + ab^2) - (2b + 2a) = ab(a + b) - 2(a + b) = (a + b)(ab - 2).$$

b) Здесь способ группировки не приводит к цели:

$$1 - x^2 + 2xy - y^2 = 1 - (x^2 - 2xy + y^2) = 1 - (x - y)^2 = 1^2 - (x - y)^2 = (1 - (x - y))(1 + (x - y)) = (1 - x + y) \times (1 + x - y).$$

c) Здесь можно сгруппировать сразу по 3 одночлена:

$$ab^2 - b^2y - ax + xy + b^2 - x = (ab^2 - b^2y + b^2) - (ax - xy + x) = b^2(a - y + 1) - x(a - y + 1) = (a - y + 1) \times (b^2 - x);$$

$$d) a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Способ 2

$$a^6 - b^6 = (a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4).$$

$$\text{Но } a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = (a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab) \text{ и т. д.,}$$

как и в I способе.

Пример 7. Упростить выражение:

a) $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a - b}{a + b}$; b) $\frac{x + y}{y} \cdot \left(\frac{x}{x + y} - \frac{x - y}{x} \right)$;

c) $\left(\frac{y}{4y + 16} - \frac{y^2 + 16}{4y^2 - 64} - \frac{4}{y^2 - 4y} \right) \cdot \frac{3y^2 - 24y + 48}{y + 4}$;

d) $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b + c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b + c}} \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) : \frac{a - b - c}{abc}$.

Решение

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a - b}{a + b} &= \frac{a^2 + b^2 - (a - b)(a - b)}{(a - b)(a + b)} = \\ &= \frac{a^2 + b^2 - (a - b)^2}{(a - b)(a + b)} = \frac{a^2 + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{(a - b)(a + b)} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) 1)} \quad \frac{x}{x + y} - \frac{x - y}{x} &= \frac{x^2 - (x - y)(x + y)}{x(x + y)} = \\ &= \frac{x^2 - (x^2 - y^2)}{x(x + y)} = \frac{x^2 - x^2 + y^2}{x(x + y)} = \frac{y^2}{x(x + y)}; \end{aligned}$$

$$\text{2)} \quad \frac{x + y}{y} \cdot \frac{y^2}{x(x + y)} = \frac{(x + y)y^2}{y \cdot x(x + y)} = \frac{y}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) 1)} \quad \frac{y}{4y + 16} - \frac{y^2 + 16}{4y^2 - 64} - \frac{4}{y^2 - 4y} &= \\ &= \frac{y}{4(y + 4)} - \frac{y^2 + 16}{4(y^2 - 16)} - \frac{4}{y(y - 4)} = \\ &= \frac{y^2(y - 4) - y(y^2 + 16) - 16(y + 4)}{4y(y^2 - 16)} = \\ &= \frac{y^3 - 4y^2 - y^3 - 16y - 16y - 64}{4y(y^2 - 16)} = \\ &= \frac{-4y^2 - 32y - 64}{4y(y^2 - 16)} = \frac{-4(y^2 + 8y + 16)}{4y(y^2 - 16)} = \\ &= -\frac{(y + 4)^2}{y(y - 4)(y + 4)} = -\frac{y + 4}{y(y - 4)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2)} \quad -\frac{y + 4}{y(y - 4)} \cdot \frac{3y^2 - 24y + 48}{y + 4} &= \\ &= -\frac{(y + 4) \cdot 3(y^2 - 8y + 16)}{y(y - 4)(y + 4)} = -\frac{3(y - 4)^2}{y(y - 4)} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{3(y-4)}{y} = \frac{3}{y}(4-y).$$

$$d) 1) \frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} = \frac{b+c-a}{a(b+c)}; 2) \frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} = \frac{b+c+a}{a(b+c)};$$

$$3) \frac{b+c-a}{a(b+c)} : \frac{b+c+a}{a(b+c)} = \frac{(b+c-a) \cdot a(b+c)}{a(b+c) \cdot (b+c+a)} =$$

$$= \frac{b+c-a}{b+c+a};$$

$$4) 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$$

$$= \frac{(b^2 + 2bc + c^2) - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} =$$

$$= \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc};$$

$$5) \frac{b+c-a}{b+c+a} \cdot \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc} = \frac{(b+c-a)^2}{2bc};$$

$$6) \frac{(b+c-a)^2}{2bc} : \frac{a-b-c}{abc} = \frac{(b+c-a)^2 \cdot abc}{2bc \cdot (a-b-c)} =$$

$$= \frac{(a-b-c)^2 \cdot a}{2(a-b-c)} = \frac{a}{2}(a-b-c).$$

$$\text{Ответ: } a) \frac{2ab}{a^2 - b^2}; b) \frac{y}{x}; c) \frac{3}{y}(4-y);$$

$$d) \frac{a}{2}(a-b-c).$$

Пример 8. Сократить дробь:

$$1) \frac{ax^2 - ax}{ax};$$

$$2) \frac{5x^2 - 12x + 4}{6 - 15x};$$

$$3) \frac{2 - 5m - 2n + 5mn}{10m^2 - 9m + 2}.$$

Решение

$$1) \frac{ax^2 - ax}{ax} = \frac{ax(x-1)}{ax} = x-1.$$

2) Разложим квадратный трехчлен на множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена. $D/4 = 36 - 20 = 16 = 4^2 > 0$,

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{5}, x_1 = 2, x_2 = \frac{2}{5}, \text{ тогда имеем } 5x^2 - 12x + 4 =$$

$$= 5(x-2)\left(x - \frac{2}{5}\right) = (x-2)(5x-2).$$

$$\frac{5x^2 - 12x + 4}{6 - 15x} = \frac{(x-2)(5x-2)}{3(2-5x)} =$$

$$= -\frac{(x-2)(5x-2)}{3(5x-2)} = -\frac{x-2}{3} = \frac{1}{3}(2-x).$$

3) Разложим числитель дроби на множители способом группировки: $2 - 5m - 2n + 5mn = (2 - 5m) - n(2 - 5m) = (2 - 5m)(1 - n)$.

Упростим знаменатель дроби: $D = 81 - 80 = 1 > 0$,

$$m_{1,2} = \frac{9 \pm 1}{20}, m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = \frac{2}{5}, \text{ тогда}$$

$$10m^2 - 9m + 2 = 10\left(m - \frac{1}{2}\right)\left(m - \frac{4}{5}\right) =$$

$$= 2\left(m - \frac{1}{2}\right) \cdot 5\left(m - \frac{2}{5}\right) = (2m-1)(5m-2).$$

$$\frac{2 - 5m - 2n + 5mn}{10m^2 - 9m + 2} = \frac{(2-5m)(1-n)}{(2m-1)(5m-2)} =$$

$$= \frac{(5m-2)(n-1)}{(2m-1)(5m-2)} = \frac{n-1}{2m-1}.$$

$$\text{Ответ: } 1) x-1; 2) \frac{1}{3}(2-x); 3) \frac{n-1}{2m-1}.$$

Пример 9. Вычислить:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + 0,2^{-4} \cdot 25^{-2} + \left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}.$$

Решение

$$(3^{-1})^{-10} \cdot (3^3)^{-3} + (5^{-1})^{-4} \cdot (5^2)^{-2} + 64^{3/9} = 3^{10} \cdot 3^{-9} + 5^4 \cdot 5^{-4} + 64^{1/3} = 3^{10-9} + 5^{4-4} + (4^3)^{1/3} = 3^1 + 5^0 + 4^1 = 3 + 1 + 4 = 8.$$

Ответ: 8.

Пример 10. Вычислить:

$$3\left(\frac{2}{\sqrt{10}+5} + \frac{5}{\sqrt{10}-2} - \frac{7}{\sqrt{10}}\right).$$

Решение

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{2}{\sqrt{10}+5} + \frac{5}{\sqrt{10}-2} &= \frac{2(\sqrt{10}-2) + 5(\sqrt{10}+5)}{(\sqrt{10}+5)(\sqrt{10}-2)} = \\ &= \frac{7\sqrt{10}+21}{(\sqrt{10}+5)(\sqrt{10}-2)} = \frac{7\sqrt{10}+21}{10+3\sqrt{10}-10} = \frac{7\sqrt{10}+21}{3\sqrt{10}}; \\ 2) \quad \frac{7\sqrt{10}+21}{3\sqrt{10}} - \frac{7}{\sqrt{10}} &= \frac{7\sqrt{10}+21-21}{3\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{3\sqrt{10}} = \frac{7}{3}; \end{aligned}$$

$$3) \quad 3 \cdot \frac{7}{3} = 7.$$

Ответ: 7.

Пример 11. Упростить выражение $\sqrt[8]{(3-\sqrt{10})^4}$.

Решение

$$\begin{aligned} \sqrt[8]{(3-\sqrt{10})^4} &= \sqrt{|3-\sqrt{10}|}. \text{ Но } 3-\sqrt{10} < 0, \text{ тогда} \\ \sqrt{|3-\sqrt{10}|} &= \sqrt{-(3-\sqrt{10})} = \sqrt{\sqrt{10}-3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{\sqrt{10}-3}$.

Пример 12. Упростить выражение $\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$.

Решение

Понятно, что данное выражение может упроститься, если подкоренное выражение будет представлено в виде квадрата разности двух каких-то чисел. Заметим, что, $8\sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4$, т. е. имеем удвоенное произведение двух чисел $\sqrt{3}$ и 4, сумма квадратов которых будет равна $(\sqrt{3})^2 + 4^2 = 19$, тогда имеем:
$$\sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{3} \cdot 4 + 16} = \sqrt{(\sqrt{3} - 4)^2} = |\sqrt{3} - 4|,$$
 и так как $\sqrt{3} - 4 < 0$, то $|\sqrt{3} - 4| = 4 - \sqrt{3}$.

Ответ: $4 - \sqrt{3}$.

Пример 13. Освободиться от иррациональности в

знаменателе дроби: 1) $\frac{6}{\sqrt{5} - 2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - 1}$.

Решение

1) Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\frac{6}{\sqrt{5} - 2} = \frac{6(\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{6(\sqrt{5} + 2)}{5 - 4} = 6(\sqrt{5} + 2).$$

2) Умножим числитель и знаменатель дроби на «неполный квадрат» суммы чисел $\sqrt[3]{3}$ и 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{3} - 1} &= \frac{(\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3} + 1}{(\sqrt[3]{3} - 1)((\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1}{(\sqrt[3]{3})^3 - 1} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1). \end{aligned}$$

Ответ: 1) $6(\sqrt{5} + 2)$; 2) $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1)$.

Пример 14. Упростить выражение:

$$1) \frac{x^{\frac{1}{2}} + 1}{x + x^{\frac{1}{2}} + 1} : \frac{1}{x^{\frac{3}{2}} - 1};$$

$$2) \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) : (a - b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Решение

1) Заметим, что $x^{\frac{3}{2}} - 1 = (x^{\frac{1}{2}})^3 - 1 =$

$$= (x^{\frac{1}{2}} - 1)(x + x^{\frac{1}{2}} + 1), \text{ тогда } \frac{x^{\frac{1}{2}} + 1}{x + x^{\frac{1}{2}} + 1} : \frac{1}{x^{\frac{3}{2}} - 1} =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}} + 1}{x + x^{\frac{1}{2}} + 1} \cdot (x^{\frac{1}{2}} - 1) \left(x + x^{\frac{1}{2}} + 1 \right) =$$

$$= (x^{\frac{1}{2}} + 1)(x^{\frac{1}{2}} - 1) = x - 1.$$

2) Так как $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = (\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3 =$
 $= (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)$, то, обозначив данное выражение через A , получим:

$$A = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : (a - b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} =$$

$$= \frac{a - \sqrt{ab} + b}{a - b} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} =$$

$$= \frac{a - \sqrt{ab} + b + 2\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} =$$

$$= \frac{a - \sqrt{ab} + b + 2\sqrt{ab} - 2b}{a - b} = \frac{a + \sqrt{ab} - b}{a - b} =$$

$$= \frac{(a - b) + \sqrt{ab}}{a - b} = \frac{a - b}{a - b} + \frac{\sqrt{ab}}{a - b} = 1 + \frac{\sqrt{ab}}{a - b}.$$

Ответ: 1) $x - 1$; 2) $1 + \frac{\sqrt{ab}}{a - b}$.

Задачи

Группа А

Выполнить арифметические действия:

1. $\left(\frac{5}{12} + \frac{3}{8}\right) \cdot \frac{12}{19}$; 2. $1\frac{2}{7} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} \cdot 2\frac{3}{4}$;

3. $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$;

4. $(20,88 : 18 + 45 : 0,36) : (19,59 + 11,95)$;

5. $\frac{\left(2\frac{3}{20} + 1\frac{5}{12}\right) : 27,7}{\left(1,75 \cdot \frac{2}{3} - 1,75 \cdot 1\frac{1}{8}\right) : \frac{7}{12}}$; 6. $(-6)^0 \cdot 81^{-2} \cdot 27^3$;

7. $\frac{16 \cdot 4^{-2} + 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{4 + \left(\frac{1}{16}\right)^{-1/2}}$;

8. $\frac{4^{-1} \cdot 3^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{5 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}$;

9. $(1,5)^3 \cdot (2,25)^{-1,5} \cdot (0,75)^{-1} \times$
 $\times \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(2\frac{1}{5}\right)^0 \right)$.

Упростить рациональные алгебраические выражения:

10. $\frac{x^2 - 16}{3x - 12}$; 11. $\frac{x^3 + 8}{x + 2}$; 12. $\frac{x^6 + x^4}{x^4 + x^2}$;

13. $\frac{a-2}{2} - \frac{a-3}{3} - 1$; 14. $\frac{x^2 - xy}{y} \cdot \frac{y^2}{x}$;

15. $\frac{(x+3)^2}{2x-4} : \frac{3x+9}{x^2-4}$; 16. $\frac{x-25}{5x-25} - \frac{3x+5}{5x-x^2}$.

17. $\frac{42}{4a^2-9} + \frac{8}{2a+3} + \frac{7}{3-2a}$; 18. $\frac{a^2}{a+1} - a + 1$.

Упростить иррациональные выражения:

19. $(2\sqrt{12} - \sqrt{3})^2$; 20. $\left(\frac{2}{3}\sqrt{18} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2$;

21. $(1 - \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2$; 22. $(\sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{3 + \sqrt{5}})^2$;

23. $\frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} + \frac{1}{7 - 4\sqrt{3}}$;

24. $\frac{0,625 \cdot 6,75^2 - 3,25^2 \cdot 0,625}{\sqrt{3,5^2 + 7 \cdot 2,75 + 2,75^2}}$;

25. $\frac{9}{5 - \sqrt{7}} + \frac{22}{7 + \sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$.

Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

26. $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; 27. $\frac{7}{5\sqrt[3]{49}}$; 28. $\frac{12}{3 - \sqrt{3}}$;

29. $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$; 30. $\frac{17}{3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}$.

Группа Б

Найти наибольший общий делитель данных чисел:

1. 6 и 8;	2. 12; 16 и 18;
3. 36 и 48;	4. 14; 28 и 70;
5. 60 и 240;	6. 30 и 102;
7. 165 и 154;	8. 33; 88 и 110.

Найти наименьшее общее кратное данных чисел:

9. 18 и 12;	10. 24; 4 и 144;
11. 32; 50 и 192;	12. 102 и 30;
13. 20 и 42;	14. 98; 50 и 12;
15. 30; 12 и 15.	

Упростить выражения и найти их значения:

16. $\left(\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^3 \cdot \frac{n^3 + 4n^2 + 4n}{3n^2 - 12n + 12}\right) \cdot \frac{n}{3}$ при $n = -0,5$;

$$17. \left(1 + \frac{x^{-n} + y^{-n}}{x^{-n} - y^{-n}} \right)^{-2}, \text{ при } x = 3; y = 0,75; n = 1;$$

$$18. 4x^3 - 8x^2 + 2x + 3 \text{ при } x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3});$$

$$19. \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} \text{ при } a = 3;$$

$$x = \sqrt{5};$$

$$20. \frac{(a-3)}{2+a} : \left(\frac{a^2 - 3a + 3}{4 - a^2} + \frac{3}{2+a} \right) \text{ при } a = \frac{1}{2};$$

$$21. \frac{m^{\frac{1}{2}}n^{-2} - n^{-\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{4}} - m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{2}}} \text{ при } m = 81, n = 0,1;$$

$$22. \frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \text{ при } a = \frac{1}{16}; b = \frac{1}{81}.$$

Упростить алгебраические выражения:

$$23. \left(a + \frac{ab}{a-b} \right) \left(\frac{ab}{a+b} - a \right) : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2};$$

$$24. \frac{\sqrt{x} + 1}{1 + \sqrt{x} + x} : \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}};$$

$$25. \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) (a+b+c)^{-2};$$

$$26. \left(\frac{1}{a - \sqrt{2}} - \frac{a^2 + 4}{a^3 - \sqrt{8}} \right) : \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{a} \right);$$

$$27. \frac{\sqrt[3]{a^5 b^{\frac{1}{2}} \sqrt{a^{-1}}}}{\left(a^{25} \sqrt{ab^3} \right)^2};$$

- $$28. \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) : (a - b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}};$$
- $$29. \frac{1}{a^2 + 5a + 6} + \frac{2a}{a^2 + 4a + 3} + \frac{1}{(a+1)^2 + a + 1} - \frac{2}{a+3};$$
- $$30. \frac{a-1}{a^{3/4} + a^{1/2}} \cdot \frac{a^{1/2} + a^{1/4}}{a^{1/2} + 1} \cdot a^{1/4};$$
- $$31. \left(\frac{9a - 25a^{-1}}{3a^{1/2} - 5a^{-1/2}} - \frac{a + 7 + 10a^{-1}}{a^{1/2} + 2a^{-1/2}} \right)^4;$$
- $$32. \left(\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a-1}} \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \right);$$
- $$33. \frac{a}{a^2 - 1} + \frac{a^2 + a + 1}{a^3 - a^2 + a - 1} + \frac{a^2 - a - 1}{a^3 + a^2 + a + 1} - \frac{2a^3}{a^4 - 1};$$
- $$34. \left(\sqrt{ab} - ab(a + \sqrt{ab})^{-1} \right) : \frac{2\sqrt{ab} - 2b}{a - b};$$
- $$35. \frac{a - c}{a^2 + ac + c^2} \cdot \frac{a^3 - c^3}{a^2b - bc^2} \cdot \left(1 + \frac{c}{a - c} - \frac{1 + c}{c} \right) :$$
- $$\quad : \frac{c(1 + c) - a}{bc};$$
- $$36. \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2a^2 : \sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab} - 3b}{a - b};$$
- $$37. \left(\frac{\sqrt[4]{ax^3} - \sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}} \right)^{-2} \cdot \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{a}{x} + \frac{a}{x}}};$$
- $$38. \frac{a - 5}{6 - 3a} + \frac{4(a + 1)}{a^2 + 4a} : \left(\frac{9a}{a^2 - 16} - \frac{a + 4}{a^2 + 4a} \right), a > 4;$$
- $$39. \left(\frac{x^{1/2} + 3y^{1/2}}{x - 2x^{1/2}y^{1/2} + y} + \frac{x^{1/2} - 3y^{1/2}}{x - y} \right) \cdot \frac{x^{1/2} - y^{1/2}}{2},$$
- $x \neq y, x > 0, y > 0;$

40. $\left(\frac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9} : \frac{x^{0.5}+3}{x^{1.5}-27} \right)^{0.5} - x^{0.5};$
41. $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}, x > 0, x \neq 1;$
42. $\frac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab} : \frac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{(a^3+b^3+a^2b+ab^2)(a^3-b^3)},$
 $a \neq \pm b;$
43. $\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}} + \frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a} \right) :$
 $:\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}, x > a > 0;$
44. $\left(\frac{2}{2a-b} + \frac{6b}{b^2-4a^2} - \frac{4}{2a+b} \right) : \left(1 + \frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2} \right),$
 $b \neq \pm 2a, a \neq 0;$
45. $\frac{x-1}{x+x^{1/2}+1} : \frac{x^{0.5}+1}{x^{1.5}-1} + \frac{2}{x^{-0.5}}, x > 0, x \neq 1;$
46. $\frac{a^3-b^3}{a^3b+2a^2b^2+ab^3} :$
 $:\left(\frac{a-b}{ab+b^2} - \frac{a+b}{a^2-ab} - \frac{3a+b}{b^2-a^2} \right);$
47. $\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2-4}} - \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}} \right) : \frac{a\sqrt{a^2-4}}{4}, |a| > 2;$
48. $\frac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}} + \frac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}, |x| > 2;$
49. $\frac{1}{2} \left(\frac{3x^{-1}}{x^2-x^{-1}} - \frac{x}{x^4-x} \right) (x^2+x+1), x \neq 0, x \neq 1;$
50. $\left(\frac{\frac{1}{a^2}+1}{\frac{1}{a^2}-1} + \frac{\frac{1}{a^2}-1}{\frac{1}{a^2}+1} - \frac{4}{a-1} \right)^{-3}, a \geq 0, a \neq 1.$

Глава 2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 3. Линейные уравнения

Уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b — некоторые действительные числа, называется *линейным уравнением* (или уравнением I степени).

1) Если $a \neq 0$, то линейное уравнение имеет *единственный корень* $x = -\frac{b}{a}$.

2) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение *не имеет корней*.

3) Если $a = 0$, $b = 0$, то уравнение *имеет бесконечно много корней*, т. е. $x \in R$.

Уравнение прямой имеет вид $y = ax + b$

Если прямая проходит через данную точку (x_0, y_0) , то это означает, что координаты точки удовлетворяют уравнению прямой, т. е. имеем $y_0 = ax_0 + b$.

Пример 1. Решить уравнение $2x + 3 = 8$.

Решение

$$2x = 8 - 3, 2x = 5, x = 5 : 2, x = 2,5.$$

Ответ: $x = 2,5$.

Пример 2. Решить уравнение $5x + 3(3x + 7) = 49$.

Решение

Раскроем скобки, применив distributive свойство умножения: $5x + 9x + 21 = 49$.

Приведем подобные члены: $14x + 21 = 49$.

Перенесем число 21 в правую часть уравнения:

$$14x = 49 - 21, \text{ или } 14x = 28, \text{ откуда } x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

Пример 3. Решить уравнение $\frac{x-4}{3} = 5 + \frac{2x+1}{4}$.

Решение

Умножим обе части уравнения на 12:

$$4(x-4) = 12 \cdot 5 + 3(2x+1).$$

Последовательно раскроем скобки, приведем подобные члены и найдем корень уравнения:

$$4x - 16 = 60 + 6x + 3, \quad 4x - 6x = 60 + 3 + 16,$$

$$-2x = 79, \text{ откуда } x = 79 : (-2), \quad x = -39,5.$$

Ответ: $x = -39,5$.

Пример 4. Решить уравнение $5(x+4) + 2x = 20 + 7x$.

Решение

$5x + 20 + 2x = 20 + 7x$, или $7x + 20 = 20 + 7x$, откуда $0 \cdot x = 0$, т. е. любое число является его решением.

Ответ: $x \in R$.

Пример 5. Решить уравнение $12x - 1 + 3(x+2) = 15x$.

Решение

Раскроем скобки, получим: $12x - 1 + 3x + 6 = 15x$, или $15x + 5 = 15x$.

Перенесем слагаемое $15x$ из правой части полученного уравнения в левую, а слагаемое 5 в правую, изменив при этом их знаки: $15x - 15x = -5$, или $0 \cdot x = -5$.

В этом случае это уравнение, а значит, и исходное не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Пример 6. Решить уравнение $\frac{x^2}{x-4} = \frac{16}{x-4}$.

Решение

Заметим, что $x - 4 \neq 0$, т. е. $x \neq 4$, так как на нуль делить нельзя.

Запишем уравнение в виде $\frac{x^2}{x-4} - \frac{16}{x-4} = 0$, или

$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = 0$. Дробь равна нулю, если числитель дроби равен нулю, а знаменатель $x - 4 \neq 0$, т. е.

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 0, & \{(x-4)(x+4) = 0, \\ x - 4 \neq 0, & \{x \neq 4. \end{cases}$$

$(x-4)(x+4) = 0$, откуда $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, и так как $x \neq 4$, то $x = -4$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = -4$.

Пример 7. Решить уравнение $\frac{2x^2 - 1}{x} + \frac{1}{x} = 2x^2$.

Решение

Так как $\frac{2x^2 - 1}{x} = \frac{2x^2}{x} - \frac{1}{x} = 2x - \frac{1}{x}$, то данное

уравнение примет вид $2x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 2x^2$, или $2x = 2x^2$, $x^2 - x = 0$, $x(x-1) = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Но $x = 0$ не является корнем исходного уравнения (на нуль делить нельзя), тогда $x = 1$ — единственный корень.

Ответ: $x = 1$.

Пример 8. Решить уравнение с параметром $x - 6 = 2ax$.

Решение

Запишем уравнение в виде $x - 2ax = 6$, или, вынося общий множитель x за скобки, имеем:

$$x(1 - 2a) = 6.$$

Если $1 - 2a = 0$, т. е. $2a = 1$, откуда $a = \frac{1}{2}$, то получим уравнение $x \cdot 0 = 6$, которое корней не имеет.

Если $1 - 2a \neq 0$, т. е. $a \neq \frac{1}{2}$, то $x = \frac{6}{1 - 2a}$ — единственный корень уравнения.

Ответ: при $a = \frac{1}{2}$ уравнение не имеет корней;

$$\text{при } a \neq \frac{1}{2} \quad x = \frac{6}{1 - 2a}.$$

Пример 9. Решить уравнение с параметром $(a^2 - 9)x = 7a^2 - 20a - 3$.

Решение

Заметим, что данное уравнение является линейным относительно переменной x и оно имеет смысл при любых $a \in \mathbb{R}$.

Запишем уравнение в виде $(a - 3)(a + 3)x = 7a^2 - 20a - 3$.

Но $7a^2 - 20a - 3 = (7a + 1)(a - 3)$.

Здесь мы использовали известное соотношение $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена. Тогда уравнение примет вид

$$(a - 3)(a + 3)x = (7a + 1)(a - 3).$$

Если $a - 3 = 0$, т. е. $a = 3$, то уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$, тогда его решением будет любое действительное число.

Если $a + 3 = 0$, т. е. $a = -3$, то получим $0 \cdot x = 120$, это уравнение не имеет корней.

Если $a \neq \pm 3$, то $x = \frac{7a + 1}{a + 3}$ — единственный корень уравнения.

Ответ: при $a = 3$ $x \in \mathbb{R}$;

при $a = -3$ корней нет;

$$\text{при } a \neq \pm 3 \quad x = \frac{7a + 1}{a + 3}.$$

Пример 10. При каком значении параметра a прямая $y = ax + 5$ проходит через точку $M(-3; 2)$?

Решение

Если данная прямая проходит через точку $M(-3; 2)$, то $x = -3$, $y = 2$, тогда получим уравнение $2 = -3a + 5$, или $3a = 3$, откуда $a = 1$.

Ответ: при $a = 1$.

Задачи
Группа А

Решить уравнения:

1. $4x - 5 = 0$; 2. $3x + 0,4 = 2x + 1,8$;

3. $6 - \frac{1}{3}x = 0$; 4. $9x - (x - 5) = 8$;

5. $11 - 3(x - 1,5) = 4 - 2x$; 6. $\frac{x}{8} - \frac{x}{5} = 1$;

7. $\frac{2x-1}{3} - \frac{2-x}{12} = \frac{x}{4}$; 8. $0,5x - \frac{x-1}{4} + \frac{5-x}{8} = 2$;

9. $x - 3 = 2(x - 1,5) - x$;

10. $(x - 3)(x + 4) - 2(3x - 2) = (x - 4)^2$;

11. $\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2}$;

12. $\frac{8}{3t-3} - \frac{2+t}{t-1} = \frac{5}{2-2t} - \frac{5}{18}$;

13. $\frac{5}{y-2} - \frac{4}{y-3} = \frac{1}{y}$;

14. $(x+1)^2 - 2(x+2)^2 = 1 + 3x - x^2$;

15. $\frac{4t+33}{21} = \frac{17+t}{14}$;

16. $0,3(x+1) - 0,6(x-5) = \frac{1}{2}x - 2$;

17. $\frac{4y-3}{5} - 2,8 = 0,2(5-4y)$; 18. $\frac{23}{4x} = 7 - \frac{1}{x}$;

19. $\frac{2x-3}{0,8} = \frac{4\frac{1}{2}}{6\frac{1}{3}}$;

20. $\frac{1 - 1\frac{5}{8}x}{6,5} = 1 - \frac{5}{8}x$.

Группа Б

Решить уравнения:

1. $\frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{12} + \frac{x}{4} + \frac{x}{72} = 1;$

2. $x(x-5) - (x-2)^2 = 13 + x;$

3. $\frac{4}{3}x - \frac{19}{36} + \frac{4}{9}x = 0;$

4. $\frac{8}{x} - \frac{3}{x^2} = 0;$

5. $\frac{10}{3} - \frac{7y+2}{6y+18} = 2 + \frac{3y-1}{4y+12};$

6. $\frac{3x-1}{6x-3} - \frac{1}{1-4x^2} = \frac{3x}{2x+1};$

7. $\frac{x+6}{x^2-7x} - \frac{4}{(7-x)^2} = \frac{1}{x-7};$

8. $\frac{2x+19}{5x^2-5} - \frac{17}{x^2-1} - \frac{3}{1-x} = 0;$

9. $\frac{3x-3}{2x^2-2} - \frac{2x+2}{3x^2+6x+3} = \frac{5(x-1)}{12x^2-24x+12};$

10. $2x(3x-2) - 3\left(1 - (2-x)(2x+3) - \frac{x-3}{2}\right) = 13.$

Указать, при каких значениях параметра a уравнение не имеет корней:

11. $ax + 3 = 2x;$

12. $(a^2 - 4)x = a^2 + a - 6;$

13. $\frac{3}{ax-4} = \frac{5}{3x-a};$

14. $\frac{2a-1}{2ax+3} = 1.$

Указать, при каких значениях параметра a уравнения имеют бесконечно много решений:

15. $(a^2 - 1)x = 2a^2 + a - 3;$

16. $a^2x = 1 + a + x;$

17. $a^2x = a(x+2) - 2;$

18. $\frac{a-1}{a(x-1)} + \frac{1}{a} = a;$

19. При каком значении параметра a прямая $y = ax - 4$ проходит через точку $M(-1; 4)$?

20. При каком значении параметра a уравнение $ax + 7 = 19x$ имеет корень, равный 2?

§ 4. Системы линейных уравнений

Система линейных уравнений с двумя переменными имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \quad (1)$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ — некоторые числа, x и y — переменные.

Систему вида (1) можно решать:

- 1) способом подстановки;
- 2) способом сложения;
- 3) графическим способом.

Число решений системы уравнений (1) можно определить по коэффициентам при соответствующих переменных x и y :

1) Если коэффициенты при x и y не пропорциональны, т. е. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение.

Графически это означает, что прямые пересекаются в точке $(x_0; y_0)$ (рис. 1).

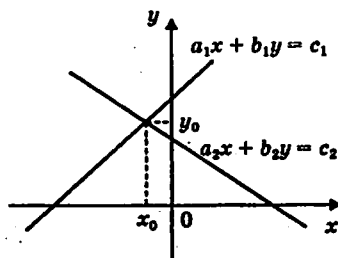


Рис. 1

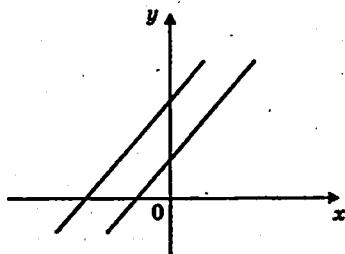


Рис. 2

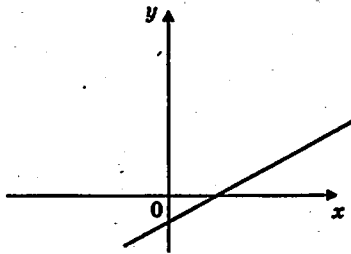


Рис. 3

2) Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений.

В этом случае прямые, являющиеся графиками уравнений системы (1), параллельны (рис. 2).

3) Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечное множество решений.

Графически это означает, что прямые совпадают (рис. 3).

1. Способ подстановки

Этим способом удобно решать такие системы линейных уравнений с двумя неизвестными, у которых хотя бы один из коэффициентов при x или y равен ± 1 .

Пример 1.
$$\begin{cases} 2x + y = 9, \\ 3x - 2y = 10. \end{cases}$$

Решение

Из первого уравнения системы выразим y через x : $y = 9 - 2x$. Полученное выражение подставим вместо y во второе уравнение данной системы: $3x - 2(9 - 2x) = 10$. Как видим, это уравнение содержит одну переменную x . Решим это уравнение: $3x - 18 + 4x = 10$, $7x = 10 + 18$, $7x = 28$, $x = 4$.

Учитывая подстановку, найдем соответствующее значение y : $y = 9 - 2 \cdot 4$, $y = 9 - 8 = 1$.

Итак, пара $(4; 1)$ — решение системы.

Ответ: $(4; 1)$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 4x - 3y = 11. \end{cases}$$

Решение

Из первого уравнения системы выразим x через y (можно и наоборот, так как коэффициенты при x и y равны по единице): $x = 1 - y$, тогда второе уравнение системы примет вид $4(1 - y) - 3y = 11$ или

$4 - 4y - 3y = 11$, $-7y = 11 - 4$, $-7y = 7$, $y = -1$, тогда $x = 1 - (-1)$, $x = 2$.

Итак, пара чисел $(2; -1)$ — решение исходной системы.

Ответ: $(2; -1)$.

2. Способ сложения

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Решение

Складывая и вычитая уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} 2x = 8 + 4, & 2x = 12, & x = 6, \\ 2y = 8 - 4, & 2y = 4, & y = 2. \end{cases}$$

Пара чисел $(6; 2)$ является решением данной системы уравнений.

Ответ: $(6; 2)$.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 3y = 9, \\ 2x + 3y = 12. \end{cases}$$

Решение

Как видно, в уравнениях данной системы коэффициенты при y — противоположные числа.

Поэтому, если мы сложим почленно левые и правые части уравнений, то получим уравнение с одной переменной: $5x + 2x = 9 + 12$, или $7x = 21$, откуда $x = 3$. Подставив значение x в одно из уравнений данной системы, например, во второе, получим: $2 \cdot 3 + 3y = 12$, $3y = 6$, $y = 2$.

Итак, пара чисел $(3; 2)$ — решение исходной системы.

Ответ: $(3; 2)$.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{8}{x-2y} + \frac{20}{3x+2y} = 3, \\ \frac{12}{x-2y} - \frac{40}{3x+2y} = 1. \end{cases}$$

Решение

Пусть $\frac{1}{x-2y} = a$, $\frac{1}{3x+2y} = b$, тогда данная система примет вид

$$\begin{cases} 8a + 20b = 3, \\ 12a - 40b = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Уравняем коэффициенты при b , для чего умножим обе части I уравнения системы (1) на 2 и сложим со II уравнением:

$$\begin{cases} 16a + 40b = 6, \\ 12a - 40b = 1, \end{cases} \text{ или } 16a + 12a = 7, 28a = 7, \text{ откуда}$$

$a = \frac{1}{4}$. Значение b найдем из I уравнения системы (1):

$$8 \cdot \frac{1}{4} + 20b = 3, 2 + 20b = 3, 20b = 1, b = \frac{1}{20}.$$

Учитывая подстановки, получим равносильную систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x-2y} = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{3x+2y} = \frac{1}{20}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-2y = 4, \\ 3x+2y = 20. \end{cases} \quad (2)$$

Складывая почленно левые и правые части уравнений системы (2), получим $x + 3x = 24$, $4x = 24$, откуда $x = 6$, тогда значение y найдем из I уравнения системы (2): $6 - 2y = 4$, $2y = 2$, откуда $y = 1$. Итак, пара чисел $(6; 2)$ — решение системы (2), а значит, и исходной системы.

Ответ: $(6; 2)$.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 13, \\ 3x + y + z = 8, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$

Решение

Вычтем из II уравнения системы III:

$3x + y + z - (x + y + z) = 8 - 6$, или $3x - x = 2$, $2x = 2$, откуда $x = 1$.

Подставим значение $x = 1$ в I и III уравнения исходной системы, тогда получим равносильную систему:

$$\begin{cases} 2 + y + 3z = 13, \\ 1 + y + z = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} y + 3z = 11, \\ y + z = 5. \end{cases}$$

Теперь вычтем из I уравнения полученной системы II:

$y + 3z - (y + z) = 11 - 5$, или $2z = 6$, $z = 3$, тогда $y = 5 - z$, $y = 5 - 3 = 2$.

Итак, тройка чисел (1, 2, 3) является решением исходной системы.

Ответ: (1, 2, 3).

3. Графический способ решения систем I степени

Пример 7. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

Решение

Чтобы решить графически систему уравнений, выразим в каждом уравнении y через x и составим таблицу значений. Так как графиком линейного уравнения с двумя неизвестными является прямая линия, то для построения последней достаточно двух точек.

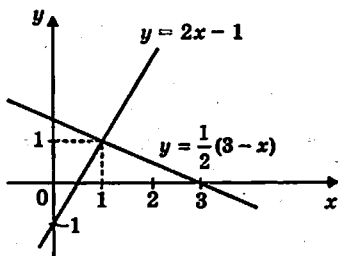


Рис. 4

$$y = \frac{1}{2}(3 - x),$$

$$y = 2x - 1$$

x	1	3
y	1	0

x	0	1
y	-1	1

Как видно из рис. 4, прямые пересекаются в точке (1; 1), значит, исходная система имеет единственное решение.

Ответ: (1; 1).

Пример 8. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 2y = 10, \\ 6x + 3y = 15. \end{cases}$$

Решение

Каждое из уравнений системы является линейной функцией.

Как видно из рис. 5, графики этих функций совпадают.

Каждую точку графика можно рассматривать как общую точку обеих прямых. Это означает, что исходная система уравнений имеет бесконечное множество решений. Выразим x через y (из любого уравнения системы): $x = \frac{1}{2}(5 - y)$; тогда решением системы бу-

дет любая пара чисел вида $\left(\frac{1}{2}(5 - m); m\right)$, где $m \in R$.

Ответ: любая пара чисел вида $\left(\frac{5 - m}{2}; m\right)$, $m \in R$.

Пример 9. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3y = 1, \\ 3x + 9y = 5. \end{cases}$$

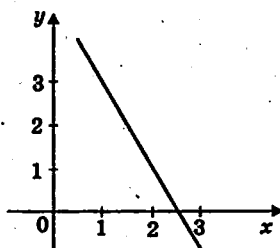


Рис. 5

Решение

Графики данной системы уравнений параллельны и не совпадают, т. е. система не имеет решений, так как два уравнения системы не могут выполняться одновременно

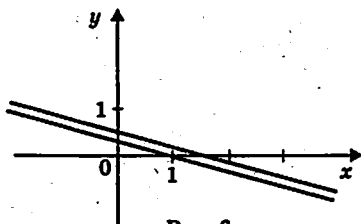


Рис. 6

(из I уравнения $x + 3y = 1$, а из II $x + 3y = \frac{5}{3}$) (рис. 6).

Ответ: нет решений.

Пример 10. При каких значениях параметра a система

тема $\begin{cases} x + (a - 1)y = a + 3, \\ (a + 2)x + 2ay = 6a + 8 \end{cases}$ уравнений имеет бесконечное множество решений?

Решение

Из I уравнения выразим x через y :

$$x = -(a - 1)y + a + 3, \text{ или } x = (1 - a)y + a + 3.$$

Подставим значение x во II уравнение системы:

$$(a + 2)((1 - a)y + a + 3) + 2ay = 6a + 8,$$

$$(a + 2)(1 - a)y + 2ay = 6a + 8 - (a + 2)(a + 3),$$

$$y \cdot (a + 2 - a^2 - 2a + 2a) = 6a + 8 - a^2 - 5a - 6,$$

$$y(-a^2 + a + 2) = -a^2 + a + 2, \text{ или}$$

$$y(a^2 - a - 2) = a^2 - a - 2,$$

$$y(a - 2)(a + 1) = (a - 2)(a + 1). \quad (1)$$

Отсюда видно, что при $a = 2$ и $a = -1$ уравнение (1) имеет вид $0 \cdot y = 0$, что верно при любых значениях y .

Ответ: при $a = 2$ и $a = -1$.

Задачи

Группа А

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 3y = 12, \\ 2y + 7 = 0. \end{cases}$

$$3. \begin{cases} 3x = -2, \\ 9x + y = 2. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 5x - 3y = 4, \\ 3x + 2y = 29. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 10x - 3y = 67, \\ 7y - 5x = 27. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 7x + 3y = 1, \\ 14x + 6y = 2. \end{cases}$$

Решить системы способом подстановки:

$$7. \begin{cases} x = 2 + y, \\ 3x - 2y = 9. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} y = 11 - 2x, \\ 5x - 4y = 8. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x - 3y = 12, \\ 2x + 4y = 90. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2x + y = 8, \\ 3x + 4y = 7. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 3x - y = 5, \\ 5x + 2y = 23. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 5x + 6y = 13, \\ 7x + 8y = 21. \end{cases}$$

Решить системы способом сложения:

$$13. \begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 11y = 9. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 9x - 17y = -14, \\ -9x + 15y = 12. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 4x - 7y = 30, \\ 4x - 5y = 90. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 13x - 8y = 28, \\ 11x - 8y = 24. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 40x + 3y = 10, \\ 20x - 7y = 5. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 5x - 2y = 1, \\ 15x - 3y = -3. \end{cases}$$

Решить графически системы уравнений:

$$19. \begin{cases} x + 5y = 7, \\ 3x - 2y = 4. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 2x + 10y = 13, \\ 0,4 + 2y = 5. \end{cases}$$

Группа Б

Решить системы уравнений:

$$1. \begin{cases} 4(x + 2y) - 8 = 5x - 2, \\ 3(2x - y) + 6 = 24y + 12. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 5(x - 3y) - 6 = 2x + 1, \\ 3(x + 6y) + 4 = 9y + 19. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{x+y}{8} + \frac{x-y}{6} = -5, \\ \frac{x+y}{4} - \frac{x-y}{3} = 10. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{x}{9} - \frac{x+7}{8} + \frac{y}{7} = 0, \\ \frac{x}{9} - \frac{y+9}{8} - \frac{y}{7} = 0. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{x-4}{3} = \frac{y+8}{5}, \\ \frac{1}{y} = \frac{50}{13x-30}. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x-y=2, \\ x^2-xy=10. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x+y=3, \\ 4x^2-y^2=15. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{8}{y} = 8, \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 51. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 30, \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 31. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{5}{8}, \\ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{3}{8}. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \frac{27}{2x-y} + \frac{32}{x+3y} = 7, \\ \frac{45}{2x-y} - \frac{48}{x+3y} = -1. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 5x + \frac{12}{y} = 8, \\ \frac{36}{y} = 24 - 15x. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \frac{x+2y+5}{2} + \frac{x-2y-5}{4} = 3, \\ \frac{x+2y+5}{2} - \frac{x-2y+5}{4} = 7. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x + 2y + 3z = 3, \\ 2x + 3y + z = 2, \\ 3x + y + 2z = 7. \end{cases} \quad 16. \begin{cases} 2x + y + 3z = 9, \\ x + y + z = 2, \\ 3x + y + z = 4. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x + y - z = 2, \\ 2x - y + 4z = 1, \\ -x + 6y + z = 5. \end{cases}$$

При каких значениях параметра a системы уравнений имеют решения? Найти эти решения.

$$18. \begin{cases} ax + y = 2a, \\ x + ay = 1. \end{cases} \quad 19. \begin{cases} x + (a - 1)y = 2, \\ (a + 1)x - y = a + 1. \end{cases}$$

При каких значениях параметра a системы не имеют решений?

$$20. \begin{cases} 2x + ay = 3, \\ 2x - 5ay = 7a - 1. \end{cases} \quad 21. \begin{cases} 4x - ay = -1 - a, \\ (a + 6)x + 2y = a + 3. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 8x + ay = 6, \\ 2ax + y = 5. \end{cases} \quad 23. \begin{cases} (a + 3)x - 2y = 5, \\ 2x - ay = 1. \end{cases}$$

При каких значениях параметра a системы имеют бесконечное множество решений?

$$24. \begin{cases} 2(a - 2)x + 54y = 9, \\ 2x + (a + 1)y = -1. \end{cases} \quad 25. \begin{cases} 6x - ay = 4, \\ ax - 6y = 4. \end{cases}$$

§ 5. Квадратные уравнения и уравнения, сводящиеся к квадратным. Теорема Виета и ее применение

1. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ (1), где a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется *квадратным*.

Если $a = 0$, то уравнение (1) будет линейным.

В уравнении (1) a называется *I* коэффициентом, b — *II* коэффициентом, c — свободным членом.

Выражение вида $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* (различителем) квадратного уравнения.

Наличие корней квадратного уравнения (1) зависит от знака дискриминанта D , поэтому решение уравнения следует начинать с вычисления D , чтобы выяснить, имеет ли квадратное уравнение (1) корни, а если имеет, то сколько?

Возможны 3 случая:

1) Если $D > 0$, то квадратное уравнение (1) имеет два различных действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{где } D = b^2 - 4ac.$$

2) Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень: $x = -\frac{b}{2a}$.

3) Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

2. Встречаются уравнения вида $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$ и $ax^2 = 0$, которые называются *неполными* квадратными уравнениями.

Если в квадратном уравнении (1) $c = 0$, то получим $ax^2 + bx = 0$, которое решается разложением левой части на множители: $x(ax + b) = 0$, откуда $x_1 = 0$,

$$x_2 = -\frac{b}{a};$$

если $b = 0$, то уравнение (1) примет вид $ax^2 + c = 0$.

Корни уравнения $ax^2 + c = 0$ существуют, если коэффициенты a и c имеют разные знаки, тогда

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}; \quad \text{в противном случае корней нет. Нако-$$

нец, если $b = 0$, $c = 0$, то уравнение (1) примет вид $ax^2 = 0$, откуда $x = 0$ — единственный корень.

3. Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Если коэффициент $a = 1$, то полученное квадратное уравнение называется *приведенным* и записыва-

ется в виде $x^2 + px + q = 0$, а корни (если $D \geq 0$) находят по формуле $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Если в уравнении (1) $a \neq 0$, $a \neq 1$, то оно называется квадратным уравнением общего вида.

4. Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называется биквадратным. Заменой неизвестного $x^2 = y$ оно сводится к решению квадратного уравнения.

Биквадратное уравнение приведенного вида $x^4 + px^2 + q = 0$ в случае, когда $q > 0$, можно привести к квадратному, разделив обе части его на x^2 и вводя новую переменную $x + \frac{\sqrt{q}}{x} = y$.

Этот прием особенно удобен, если q является квадратом рационального числа.

Если биквадратное уравнение имеет корень x_0 , то оно имеет и корень $-x_0$.

Сумма корней биквадратного уравнения равна нулю (по теореме Виета).

5. *Теорема Виета (прямая)*: если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Для приведенного уравнения $x^2 + px + q = 0$. (2)
 $x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 x_2 = q.$

Обратная теорема Виета (для приведенного уравнения) гласит: если числа p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p, x_1 x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения (2).

6. Разложение квадратного трехчлена на множители.

Если x_1 и x_2 — корни уравнения (1), то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \quad (3)$$

Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения (2), то $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$. (4)

Примеры решения квадратных уравнений

1. Неполные квадратные уравнения

Пример 1.

$$x^2 - 10x = 0.$$

Решение

$$x(x - 10) = 0, \text{ откуда}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 10.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 0, x_2 = 10.$$

Пример 2.

$$3x^2 - 12x = 0.$$

Решение

$$3x(x - 4) = 0,$$

$$x(x - 4) = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 0, x_2 = 4.$$

Пример 3.

$$36x^2 - 4 = 0.$$

Решение

$$(6x - 4)(6x + 4) = 0,$$

$$6x - 4 = 0 \text{ или } 6x + 4 = 0,$$

$$6x = 4, x_1 = \frac{2}{3},$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Ответ: } x_{1,2} = \pm \frac{2}{3}.$$

Пример 4.

$$3x^2 - 6 = 0.$$

Решение

$$3x^2 = 6, x^2 = 2,$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}:$$

$$\text{Ответ: } x_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

Пример 5.

$$4x^2 - 12 = 0.$$

Решение

$$4(x^2 - 3) = 0,$$

$$x^2 - 3 = 0,$$

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0,$$

$$x - \sqrt{3} = 0 \text{ или}$$

$$x + \sqrt{3} = 0,$$

$$x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}.$$

$$\text{Ответ: } x_{1,2} = \pm\sqrt{3}.$$

Пример 6.

$$5x^2 + 15 = 0.$$

Решение

$$5(x^2 + 3) = 0, 5 \neq 0,$$

$x^2 + 3 = 0$ — нет корней,
так как $x^2 + 3 > 0$ при
любом $x \in \mathbb{R}$.

Ответ: нет корней.

Пример 7.

$$12x^2 - 5x = 9x^2 + 7x.$$

Решение

$$12 - 9x^2 - 5x - 7x = 0, \\ \text{или } 3x^2 - 12x = 0 \text{ и т. д.} \\ (\text{см. пример 2})$$

Пример 8.

$$10(x-2) + 19 = \\ = (5x-1)(1+5x).$$

Решение

$$10x - 20 + 19 = \\ = (5x-1)(5x+1) \text{ или } \\ 10x - 1 = 25x^2 - 1, \\ 25x^2 - 10x = 0, \\ 5x(5x-2) = 0, 5 \neq 0, \\ x_1 = 0, 5x-2 = 0, \\ x_2 = 0,4.$$

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 0,4$.**Пример 9.**

$$\frac{5x^2 + 9}{6} - \frac{4x^2 - 9}{5} = 3.$$

Решение

Умножим обе части уравнения на 30:

$$5(5x^2 + 9) - 6(4x^2 - 9) = \\ = 90, \\ 25x^2 + 45 - 24x^2 + 54 = \\ = 90, \\ x^2 = 90 - 99 \text{ или } \\ x^2 = -9 - \text{нет корней.}$$

Ответ: корней нет.**Пример 10.**

$$(3x-8)^2 - (4x-6)^2 + \\ + (5x-2)(5x+2) = 96.$$

Решение

$$(3x-8-4x+6)(3x-8+ \\ + 4x-6) + 25x^2 - 4 = \\ = 96, \\ (-x-2)(7x-14) + \\ + 25x^2 - 4 = 96, \\ -7x^2 - 14x + 14x + \\ + 28 + 25x^2 - 4 = 96, \\ 18x^2 = 96 - 28 + 4 \text{ или } \\ 18x^2 = 72, x^2 = 4, \\ x_{1,2} = \pm 2.$$

Ответ: $x_{1,2} = \pm 2$.**2. Полные квадратные уравнения****Пример 11.**

$$2x^2 + 3x - 5 = 0.$$

Решение

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5), \\ D = 9 + 40 = 49 = 7^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{4}, x_1 = 1, \\ x_2 = -2,5.$$

Ответ: $x_1 = 1, \\ x_2 = -2,5$.**Пример 12.**

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x + 3 = 0.$$

Решение

$$D = 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3, \\ D = 4 - 3 = 1 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 1}{0,5},$$

$$x_1 = \frac{-1}{0,5} = -2,$$

$$x_2 = -\frac{3}{0,5} = -6.$$

Ответ: $x_1 = -2, x_2 = -6$.

Пример 14.

$$3x^2 - 7x + 8 = 0.$$

Решение

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8,$$

$$D = 49 - 96 = -47 < 0.$$

Так как $D < 0$,
то корней нет.

Ответ: корней нет.

Пример 13.

$$x(2x + 1) = 3x + 4.$$

Решение

$$2x^2 + x = 3x + 4,$$

$$2x^2 + x - 3x - 4 = 0,$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0,$$

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

$$\text{откуда } x_1 = -1,$$

$$x_2 = 2.$$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 2$.

Пример 15.

$$x^2 - 2,4x - 13 = 0.$$

Решение

Умножим обе части
уравнения на 5:

$$5x^2 - 12x - 65 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 36 +$$

$$+ 325 = 361 = 19^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 19}{5}, \quad x_1 = 5,$$

$$x_2 = -2,6.$$

Ответ: $x_1 = 5,$

$$x_2 = -2,6.$$

Пример 16.

$$\frac{2x - 5}{x - 1} = \frac{5x - 3}{3x + 5}.$$

Решение

Область определения уравнения: $x - 1 \neq 0, 3x + 5 \neq 0$,

т. е. $x \neq 1, x \neq -\frac{5}{3}$.

Уравнение представляет собой пропорцию

$$(2x - 5)(3x + 5) = (x - 1)(5x - 3),$$

$$6x^2 - 15x + 10x - 25 = 5x^2 - 5x - 3x + 3,$$

$$x^2 + 3x - 28 = 0, \text{ откуда}$$

$$x_1 = -7, x_2 = 4.$$

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x_1 = -7$, $x_2 = 4$.

Пример 17.

$$6x + \frac{(3+5x)^2}{2} = \frac{8-2x}{5} - \frac{(x+3)(x+7)}{2}.$$

Решение

Умножим обе части уравнения на 10:

$$60x + 5(3+5x)^2 = 2(8-2x) - 5(x+3)(x+7),$$

$$60x + 5(9+30x+25x^2) = 16x - 4x - 5(x^2+3x+7x+21) \text{ или}$$

$$60x + 45 + 150x + 125x^2 = 16x - 4x - 5x^2 - 50x - 105,$$

$$130x^2 + 264x - 16x + 150 = 0,$$

$$130x^2 + 248x + 150 = 0, \quad 65x^2 + 124x + 75 = 0,$$

$$D/4 = 62^2 - 65 \cdot 75 = 3844 - 4875 = -1031 < 0 - \text{нет корней.}$$

Ответ: корней нет.

Пример 18.

$$\frac{2x+1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+2} = 4 + \frac{x-7}{x-1}.$$

Решение

Если решать это уравнение обычным, стандартным путем, т. е. освободиться от знаменателя, то придется 4 раза находить произведение трех двучленов.

Можно убедиться в том, что даже при наиболее рациональном умножении этих двучленов получается довольно непростое решение.

Идея решения данного уравнения заключается в исключении целой части в каждой из дробей:

$$\frac{2(x+1)-3}{x+1} + \frac{3(x+2)-7}{x+2} = 4 + \frac{(x-1)-6}{x-1} \text{ или}$$

$$2 - \frac{3}{x+1} + 3 - \frac{7}{x+2} = 4 + 1 - \frac{6}{x-1}, \quad x \neq -1, \quad x \neq -2, \quad x \neq 1.$$

$$\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} - \frac{6}{x-1} = 0 \text{ или } 3(x+2)(x-1) + 7(x^2-1) - 6(x+1)(x+2) = 0,$$
$$3x^2 + 3x - 6 + 7x^2 - 7 - 6x^2 - 18x - 12 = 0 \text{ или}$$

$$4x^2 - 15x - 25 = 0, D = 225 + 400 = 625 = 25^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm 25}{8}, x_1 = 5, x_2 = -\frac{5}{4}.$$

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

$$\text{Ответ: } x_1 = 5, x_2 = -\frac{5}{4}.$$

Пример 19.

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} = \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 3}.$$

Решение

Заметим, что решение этого уравнения обычным способом слишком громоздкое.

Запишем уравнение в виде

$$\frac{(x+1)^2 + 1}{x+1} + \frac{(x+4)^2 + 4}{x+4} = \frac{(x+2)^2 + 2}{x+2} + \frac{(x+3)^2 + 3}{x+3}$$

или, исключая из дробей целые части, имеем

$$x+1 + \frac{1}{x+1} + x+4 + \frac{4}{x+4} = x+2 + \frac{2}{x+2} + x+3 + \frac{3}{x+3} \quad \text{или} \quad \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+4} = \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}. \quad (1)$$

Для упрощения вычислений запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{4}{x+4} - \frac{3}{x+3} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}, \text{ или } \frac{4(x+3) - 3(x+4)}{(x+4)(x+3)} = \frac{2(x+1) - (x+2)}{(x+2)(x+1)}, \text{ или}$$

$$\frac{x}{x^2 + 7x + 12} = \frac{x}{x^2 + 3x + 2}, x \neq -4, x \neq -3, x \neq -2, x \neq -1.$$

Следовательно, $x_1 = 0$ и $x^2 + 7x + 12 = x^2 + 3x + 2$, откуда $4x = -10$, $x_2 = -2,5$.

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -2,5$.

3. Уравнения, сводящиеся к квадратным

Пример 20.

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

Решение

Пусть $x^2 = t$, где $t \geq 0$, тогда получим:

$$t^2 - 10t + 9 = 0, \text{ откуда } t_1 = 1, t_2 = 9.$$

Если $t = 1$, то $x^2 = 1$, $x_{1,2} = \pm 1$,

если $t = 9$, то $x^2 = 9$, $x_{3,4} = \pm 3$.

Ответ: $x_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = \pm 3$.

Пример 21.

$$4x^4 - 5x^2 + 1,5 = 0.$$

Решение

Пусть $x^2 = t$, тогда $4t^2 - 5t + 1,5 = 0$,

$$D = 25 - 24 = 1 > 0, t_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{8}, t_1 = \frac{3}{4}, t_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Если } x^2 = \frac{3}{4}, \quad x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{если } x^2 = \frac{1}{2}, \text{ то } x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 22.

$$(6x^2 - 7x)^2 - 2(6x^2 - 7x) - 3 = 0.$$

Решение

Пусть $6x^2 - 7x = y$, тогда данное уравнение примет вид $y^2 - 2y - 3 = 0$, откуда $y_1 = 3$, $y_2 = -1$.

Учитывая подстановку, получим 2 квадратных уравнения:

$$1) 6x^2 - 7x = 3, 6x^2 - 7x - 3 = 0,$$

$$D = 49 + 72 = 11^2 > 0, x_{1,2} = \frac{7 \pm 11}{12}, \text{ откуда}$$

$$x_1 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}; x_2 = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

$$2) 6x^2 - 7x = -1, 6x^2 - 7x + 1 = 0,$$

$$D = 49 - 24 = 25 = 5^2 > 0,$$

$$x_{3,4} = \frac{7 \pm 5}{12}, x_3 = 1, x_4 = \frac{1}{6}.$$

Итак, данное уравнение имеет 4 корня.

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = 1, x_4 = \frac{1}{6}.$$

Пример 23.

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 1680.$$

Решение

Запишем данное уравнение в виде

$$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3) = 1680 \text{ или}$$

$$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 1680. \quad (1)$$

Пусть $x^2 + 5x + 5 = y$, тогда уравнение (1) примет вид $(y-1)(y+1) = 1680$ или $y^2 - 1 = 1680, y^2 = 1681$, откуда $y_{1,2} = \pm 41$.

Имеем два квадратных уравнения:

$$1) x^2 + 5x + 5 = 41, x^2 + 5x - 36 = 0, \text{ откуда}$$

$$x_1 = -9, x_2 = 4.$$

$$2) x^2 + 5x + 5 = -41, x^2 + 5x + 46 = 0,$$

$$D = 25 - 4 \cdot 46 = -159 < 0 - \text{нет корней.}$$

Итак, исходное уравнение имеет 2 корня.

$$\text{Ответ: } x_1 = -9, x_2 = 4.$$

Пример 24.

$$(x+5)^4 - 13(x+5)^2 x^2 + 36x^4 = 0.$$

Решение

Выделим в левой части уравнения полный квадрат, для чего прибавим к обеим частям по $25(x+5)^2 x^2$.

Данное уравнение примет вид

$$(x+5)^4 + 12(x+5)^2 x^2 + 36x^4 = 25(x+5)^2 x^2;$$

$$((x+5)^2 + 6x^2)^2 = (5(x+5)x)^2, \text{ откуда имеем:}$$

$$1) (x+5)^2 + 6x^2 = 5(x+5)x,$$

$$7x^2 + 10x + 25 = 5x^2 + 25x, 2x^2 - 15x + 25 = 0,$$

$$D = 225 - 200 = 25 = 5^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm 5}{4}, x_1 = 5, x_2 = \frac{5}{2}.$$

$$2) 7x^2 + 10x + 25 = -5x^2 - 25x,$$

$$12x^2 + 35x + 25 = 0,$$

$$D = 1225 - 1200 = 25 = 5^2 > 0,$$

$$x_{3,4} = \frac{-35 \pm 5}{24}, x_3 = -\frac{5}{4}, x_4 = -\frac{5}{3}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 5, x_2 = \frac{5}{2}, x_3 = -\frac{5}{4}, x_4 = -\frac{5}{3}.$$

Пример 25.

$$2(x^2 - x + 1)^2 = x^2(8x^2 - 5x + 5).$$

Решение

Запишем данное уравнение в виде

$$2(x^2 - x + 1)^2 = 5x^2(x^2 - x + 1) + 3x^4. \quad (1)$$

Заметим, что уравнение (1) является однородным относительно $x^2 - x + 1$ и x^2 и потому, разделив обе части полученного уравнения на $x^2(x^2 - x + 1) \neq 0$, получим

$$\frac{2(x^2 - x + 1)}{x^2} = 5 + \frac{3x^2}{x^2 - x + 1}.$$

$$\text{Пусть } \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = y, \text{ тогда имеем } 2y = 5 + \frac{3}{y},$$

$$2y^2 - 5y - 3 = 0, D = 25 + 24 = 49 = 7^2 > 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4}, y_1 = 3, y_2 = -\frac{1}{2}.$$

Учитывая подстановку, получим 2 квадратных уравнения:

$$1) \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = 3,$$

$$3x^2 = x^2 - x + 1 \text{ или } 2x^2 + x - 1 = 0,$$

$$D = 9 = 3^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -1.$$

$$2) \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

$$2x^2 - 2x + 2 = -x^2, 3x^2 - 2x + 2 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = 1 - 6 = -5 < 0 \text{ — нет корней.}$$

Итак, исходное уравнение имеет 2 корня.

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -1.$$

Пример 26.

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0.$$

Уравнение можно решить, перебирая все делители свободного члена. Однако это уравнение допускает более короткое и изящное решение:

$(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$, откуда по обратной теореме Виета получим $x^2 - 5x = -4$ или $x^2 - 5x = -6$.

Если $x^2 - 5x = -4$, то $x^2 - 5x + 4 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$,
если $x^2 - 5x = -6$, то $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

4. Применение теоремы Виета

Пример 27. Не решая уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$, вычислить сумму кубов его корней.

Решение

Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения, тогда

$$x_1 + x_2 = 5; x_1 \cdot x_2 = 6 \text{ и } x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 -$$

$$- 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 5^3 - 3 \cdot 6 \cdot 5 = 125 - 90 = 35.$$

Ответ: 35.

Пример 28. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 3x + m = 0$. При каком значении m разность корней данного уравнения будет равна 6?

Решение

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -3$, $x_1x_2 = m$.

Пусть $x_1 > x_2$, тогда, согласно условию, $x_1 - x_2 = 6$.

Для нахождения значения m нам надо найти корни x_1 и x_2 из системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3, \\ x_1 - x_2 = 6. \end{cases}$$

Складывая почленно левые и правые части, имеем

$$\begin{cases} 2x_1 = -3 + 6, \\ 2x_2 = -3 - 6, \end{cases} \begin{cases} 2x_1 = 3, \\ 2x_2 = -9, \end{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}, \\ x_2 = -\frac{9}{2}, \end{cases}$$

тогда $m = x_1 x_2$ или $m = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{27}{4}$.

Ответ: при $m = -\frac{27}{4}$.

Пример 29. Корни уравнения $x^2 - bx - b = 0$ таковы, что $x_1^3 + x_2^3 + x_1^3 x_2^3 = 27$. Найти b .

Решение

По теореме Виета $x_1 + x_2 = b$, $x_1 x_2 = -b$, тогда

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + x_1^3 x_2^3 &= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 \cdot (x_1 + x_2) + \\ &+ x_1^3 \cdot x_2^3 = 27, \\ b^3 + 3b^2 - b^3 &= 27, 3b^2 = 27, b^2 = 9, \text{ откуда } b = \pm 3. \end{aligned}$$

Ответ: $b = \pm 3$.

Пример 30. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + a - 2 = 0$ будет наименьшей?

Решение

Пусть $x_1^2 + x_2^2 = y$, где x_1 и x_2 — корни уравнения, тогда $y = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$. Согласно теореме Виета, имеем $x_1 + x_2 = -a$ и $x_1 x_2 = a - 2$, тогда $y = (-a)^2 - 2(a - 2) = a^2 - 2a + 4 = (a - 1)^2 + 3$.

Заметим, что $(a - 1)^2 \geq 0$ при любом $a \in R$, тогда y принимает наименьшее значение при $a = 1$.

Сумма квадратов корней исходного уравнения будет наименьшей и равной 3 при $a = 1$.

Ответ: при $a = 1$.

Пример 31. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 + 5x - 7 = 0$. Установить, правильной или неправильной дробью является значение дроби

$$\frac{2x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2}{4x_1^2x_2 + 4x_1x_2^2}.$$

Решение

Упростим данную дробь так:

$$\frac{2(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2}{4x_1x_2(x_1 + x_2)}. \quad (1)$$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$, $x_1x_2 = -\frac{7}{2}$, тогда значение (1) будет равно

$$\frac{2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}}{4 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)} = \frac{\frac{25}{2} + \frac{7}{2}}{35} = \frac{16}{35} < 1.$$

Значит, значение дроби есть правильная дробь.

Ответ: правильной.

Пример 32. Не решая уравнения

$4x^2 - \sqrt{85}x + 5\frac{1}{4} = 0$, вычислить разность кубов его корней.

Решение

Запишем данное уравнение в виде

$$x^2 - \frac{\sqrt{85}}{4}x + \frac{21}{16} = 0.$$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{85}}{4}$, $x_1x_2 = \frac{21}{16}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения.

Пусть для определенности $x_1 > x_2$, тогда, согласно условию, имеем

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)^3 + 3x_1x_2 \cdot (x_1 - x_2). \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Но } x_1 - x_2 &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \\ &= \sqrt{\frac{85}{16} - 4 \cdot \frac{21}{16}} = \sqrt{\frac{85 - 84}{16}} = \frac{1}{4}, \text{ тогда (1) примет вид} \end{aligned}$$

$$x_1^3 - x_2^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3 \cdot \frac{21}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 + 63}{64} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 33. При каком значении параметра a корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + 5x + a = 0$ удовлетворяют неравенству $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + a > 0$?

Решение

Если данное уравнение имеет корни, то дискриминант уравнения $D = 25 - 4a \geq 0$, откуда $a \leq \frac{25}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Из данного в условии соотношения для } x_1, x_2, a \\ \text{имеем } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + a &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + ax_1x_2}{x_1x_2} = \\ &= \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + ax_1x_2}{x_1x_2} = \frac{25 - 2a + a^2}{a}. \end{aligned}$$

Согласно условию имеем неравенство $\frac{25 - 2a + a^2}{a} > 0$.

Но $a^2 - 2a + 25 > 0$ при любом $a \in \mathbb{R}$ (так как $D < 0$ и I коэффициент положителен). Тогда $a > 0$.

Следовательно, $0 < a \leq \frac{25}{4}$.

Ответ: при $0 < a \leq \frac{25}{4}$.

Пример 34. Чему равна сумма углов α и β , если $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ являются корнями уравнения $4x^2 - 3x + 1 = 0$?

Решение

По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{3}{4}$, $x_1 x_2 = \frac{1}{4}$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения.

Используя формулу тангенса суммы и то, что $x_1 = \operatorname{tg} \alpha$, $x_2 = \operatorname{tg} \beta$, имеем

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = 1,$$

откуда $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 35. Сумма десяти первых членов арифметической прогрессии равна 140, а произведение $a_2 a_9 = 147$. Найти прогрессию, если она является возрастающей.

Решение

Согласно условию, $S_{10} = 140$, или $\frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 140$,

$a_1 + a_{10} = 28$. Кроме того, $a_2 a_9 = 147$.

Но $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9$ (по свойству арифметической прогрессии), тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a_2 + a_9 = 28, \\ a_2 \cdot a_9 = 147. \end{cases}$$

Используя обратную теорему Виета, составим уравнение: $x^2 - 28x + 147 = 0$, корни которого $x_1 = 7$, $x_2 = 21$.

Так как прогрессия возрастающая, то можно считать $a_2 = 7$, $a_9 = 21$, тогда имеем

$$\begin{cases} a_1 + d = 7, \\ a_1 + 8d = 21, \end{cases} \quad \text{откуда } 8d - d = 21 - 7, 7d = 14,$$

$d = 2$, значит, $a_1 = 7 - 2 = 5$. Имеем возрастающую прогрессию 5, 7, 12...

Ответ: $a_1 = 5$, $d = 2$.

Пример 36. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 5, \\ 2^{x+y} = 4. \end{cases}$$

Решение

Считая 2^x и 2^y корнями некоторого уравнения вида $z^2 - 5z + 4 = 0$, имеем $z_1 = 4$, $z_2 = 1$.

Если $2^x = 4$, $2^y = 1$, то $x = 2$, $y = 0$,

если $2^x = 1$, $2^y = 4$, то $x = 0$, $y = 2$.

Ответ: (2; 0), (0; 2).

Задачи

Группа А

Решить уравнения:

1. $x^2 + 6x = 0$;

2. $x^2 - 9 = 0$;

3. $3x^2 = 6x$;

4. $x^2 - 6x + 8 = 0$;

5. $x^2 + 2x + 1 = 0$;

6. $4x^2 = 0$;

7. $12x - 5x^2 = 0$;

8. $x^2 - 7 = 0$;

9. $x^2 + 2x + 5 = 0$;

10. $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$;

11. $\frac{19}{x-6} + x = 26$;

12. $\frac{x^2 - 25}{x+4} = 0$;

13. $\frac{6}{x} + \frac{6}{x+1} = 5$;

14. $\frac{14}{x^2} - \frac{5}{x} = 1$;

15. $\frac{3x}{x^2 - 1} = 0$;

16. $\frac{1}{x} = \frac{x}{2x+3}$;

17. $\frac{x^2 + 2x - 15}{x-2} = 0$;

18. $\frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 3 = 0$.

1. $\frac{x}{6} + \frac{6}{x} = \frac{5}{4}(x-1);$
2. $\frac{(x-12)^2}{6} - \frac{x}{9} + \frac{x(x-9)}{18} = \frac{(x-14)^2}{2} + 5;$
3. $\frac{3}{x-2} - \frac{4}{x-1} = \frac{1}{x-4} - \frac{2}{x-3};$
4. $\frac{2}{x^2-x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^3+1};$
5. $\frac{1}{x^3-x^2+x-1} - \frac{4}{x+1} = \frac{x^2+10x}{x^4-1} -$
 $-\frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1};$
6. $(x-3)(x-4)(x-7)(x-8) = 60;$
7. $\frac{2x}{4x^2+3x+8} + \frac{3x}{4x^2-6x+8} = \frac{1}{6};$
8. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0;$
9. $36x^4 - 5x^2 - 1 = 0;$
10. $(2x+1)^2 - 6(2x+1) + 5 = 0;$
11. $(x^2-7x)^2 + 2(x^2-7x-8) = 64;$
12. $(x^2-4x)^2 - 2(x-2)^2 = 7;$
13. $x^2(1+x)^3 + x^2 = 8(1+x)^2;$
14. $(2x^2-3x+1)^2 = 1-33x+22x^2;$
15. $x^4 - 2x^3 + x = 132;$
16. $(x^2-4x+5)^2 - (x-1)(x-3) = 4;$
17. $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0;$
18. $x^6 = \frac{257x^2 - 68}{68x^2 - 257};$
19. $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{x-3}{x+3} + \frac{x-2}{x+2};$
20. $\frac{10x-13}{2x-3} - \frac{8x-30}{2x-7} = \frac{5x-4}{x-1} - \frac{4x-17}{x-4};$

$$21. x^4 = \frac{11x - 6}{6x - 11};$$

$$22. \frac{(x^2 - x + 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + 1)} = \frac{9}{5};$$

23. В уравнении $x^2 + ax - 6 = 0$ один из корней равен 2. Найти другой корень и коэффициент a .

24. В уравнении $2x^2 + px + 3 = 0$ один из корней равен 3. Найти другой корень и коэффициент p .

25. При каком значении m уравнение $(m - 1)x^2 + (m + 4)x + m + 7 = 0$ имеет 1 корень?

26. При каком значении p уравнение $(p - 2)x^2 + 2(p - 2)x + 2 = 0$ не имеет действительных корней?

27. Найти наименьшее целое значение n , при котором уравнение $x^2 - 2(n + 2)x + n^2 + 12 = 0$ имеет два различных действительных корня.

28. При каком значении b разность корней уравнения $(b - 2)x^2 - (b - 4)x - 2 = 0$ равна 3?

29. В уравнении $x^2 - 4x + m = 0$ найти m , если известно, что сумма квадратов его корней равна 16.

30. Не решая уравнения $3x^2 - 5x - 2 = 0$, найти сумму кубов его корней.

31. В уравнении $x^2 - 2x + p = 0$ определить значение p , при котором выполняется равенство $7x_2 - 4x_1 = 47$, где x_1 и x_2 — корни уравнения.

32. При каком значении m корни уравнения $(m - 3)x^2 - 2mx + 6m = 0$ положительны?

33. При каких значениях a уравнение $9x^2 - 2x + a = 6 - ax$ имеет равные корни?

Разложить на множители:

$$34. x^2 - 2x - 35;$$

$$35. 3x^2 - 7x - 40;$$

$$36. x^2 - ax - 6a^2;$$

$$37. x^2 - 6bx - (4a^2 - 9b^2);$$

$$38. x^4 - 5x^2 + 4;$$

$$39. 4x^4 - 5x^2 + 1.$$

Сократить дроби:

$$40. \frac{x^2 + 6x - 91}{x^2 + 8x - 105};$$

$$41. \frac{2x^2 + 8x - 90}{3x^2 - 36x + 105};$$

$$42. \frac{x^2 - 9xy + 14y^2}{x^2 - xy - 2y^2};$$

$$43. \frac{2x^2 - xy - 3y^2}{2x^2 - 5xy + 3y^2};$$

$$44. \frac{x^4 - 9x^2 + 20}{x^4 - 10x^2 + 24}; \quad 45. \frac{6x^2 + 11x + 3}{3 + 5x - 12x^2}.$$

46. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\frac{1}{10 - \sqrt{72}}$ и $\frac{1}{10 + 6\sqrt{2}}$.

47. Составить биквадратное уравнение, сумма квадратов корней которого равна 50, а произведение корней равно 144.

§ 6. Системы нелинейных уравнений

Пусть дана система уравнений с двумя неизвестными вида

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решением системы (1) называется такая пара чисел (x_0, y_0) , которая при подстановке в каждое уравнение системы обращает их в верное числовое равенство.

Решить систему уравнений – значит найти все ее решения или установить, что их нет.

Если дается система из трех уравнений с тремя неизвестными, то в этом случае идет речь о нахождении троек чисел (x, y, z) , удовлетворяющих одновременно каждому из уравнений системы.

Аналогично можно говорить о системе, содержащей любое число уравнений с любым числом неизвестных.

Следует отметить, что нет общих методов решения нелинейных систем.

Две системы уравнений называются *равносильными*, если каждое решение одной системы является решением и другой системы, и наоборот.

Системы, которые не имеют решений, также считаются *равносильными*.

Используя такие известные методы, как метод подстановки, метод алгебраического сложения и метод введения новых переменных, мы заменяли одну сис-

тему уравнений другой, более простой, но равносильной исходной системе. Если же при решении системы мы применяли неравносильные преобразования, которые могли привести к расширению области определения какого-либо уравнения системы, а значит, и к появлению посторонних решений, то все найденные решения следует проверить подстановкой их в исходную систему.

Следует отметить, что, строго говоря, невозможно выделить один метод решения достаточно сложной системы, так как в ходе решения, как правило, используются различные приемы. Но методически очень важно в каждой системе выделить именно один метод.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3. \end{cases} \quad (1)$$

Решение

Эта система допускает различные способы решения.

Способ 1

Возведем в квадрат обе части II уравнения системы (1), тогда получим

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^2 y^2 = 9. \end{cases} \quad (2)$$

Заметим, что x^2 и y^2 можно считать корнями квадратного уравнения вида $t^2 - 10t + 9 = 0$.

Следовательно, $x^2 = 9$, $y^2 = 1$ или $x^2 = 1$, $y^2 = 9$.

Таким образом, система (2) имеет всего 8 решений: $(3, 1)$; $(3, -1)$; $(-3, 1)$; $(-3, -1)$; $(1, 3)$; $(1, -3)$; $(-1, 3)$; $(-1, -3)$.

Так как $xy = 3 > 0$, то x и y имеют одинаковые знаки. Тогда исходной системе (1) будут удовлетворять всего 4 пары решений.

Ответ: $(3, 1)$; $(-3, -1)$; $(1, 3)$; $(-1, -3)$.

Способ 2

Запишем систему (1) в виде

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ 2xy = 6. \end{cases} \quad (3)$$

Сложим и вычтем уравнения системы (3):

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 16, \\ (x - y)^2 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = \pm 4, \\ x - y = \pm 2. \end{cases}$$

Получим всего 4 системы линейных уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x + y = -4, \\ x - y = 2; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = -2; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x + y = -4, \\ x - y = -2. \end{cases} \end{array}$$

Складывая и вычитая левые и правые части полученных систем, получим 4 пары решений.

(3; 1), (-1; -3), (1; 3), (-3, -1).

Способ 3

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ 2xy = 6; \end{cases} \quad \text{складывая уравнения системы,}$$

имеем $x^2 + 2xy + y^2 = 16$, откуда $x + y = \pm 4$, тогда,

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 3, \end{cases}$$

откуда по обратной теореме Виета получим

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -3, \\ y_3 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = -3. \end{cases}$$

Способ 4

Выразим $x^2 + y^2$ через $x + y$ и xy :

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$, тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$$

Пусть $x + y = a$, $xy = b$, тогда имеем

$$\begin{cases} a^2 - 2b = 10, \\ b = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 16, \\ b = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} a = \pm 4, \\ b = 3. \end{cases}$$

Следовательно, получим систему

$$\begin{cases} x + y = \pm 4, \\ xy = 3 \end{cases} \quad \text{и т. д., как в 3-м способе.}$$

Способ 5

Из системы (1) следует, что $x \neq 0$, $y \neq 0$, тогда, разделив I уравнение исходной системы на II, получим

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3}, \text{ пусть } \frac{x}{y} = t, \text{ тогда имеем уравнение}$$

$$t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3} \text{ или } 3t^2 - 10t + 3 = 0, \frac{D}{4} = 25 - 9 = 4^2 > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 4}{3}, \text{ откуда } t_1 = 3, t_2 = \frac{1}{3}.$$

Учитывая подстановку и II уравнение исходной системы, получим

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x}{y} = 3, \\ xy = 3; \end{cases} \quad \text{перемножив левые и правые части, по-}$$

лучим $\frac{x}{y} \cdot xy = 9, x^2 = 9, x = \pm 3$, тогда $y = \frac{3}{x}$ или $y = \pm 1$.

Итак, система а) имеет решения (3; 1) и (-3; -1);

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{3}, \\ xy = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{y} \cdot xy = 1, \\ xy = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 1, \\ xy = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = \pm 3. \end{cases}$$

Система б) имеет решения (1; 3) и (-1; -3).

Всего исходная система имеет 4 пары решений.

Ответ: (3; 1), (-3; -1), (1; 3), (-1; -3).

Пример 2. Метод обращения к одному из следствий.

$$\text{Решить систему } \begin{cases} \frac{x^3}{y} + xy = 10, \\ \frac{y^3}{x} + xy = 2,5. \end{cases}$$

Решение

Способ 1

Перемножив уравнения системы, получим $x^2y^2 + y^4 + x^4 + x^2y^2 = 25$; $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 25$ или $(x^2 + y^2)^2 = 25$.

Так как $x^2 + y^2 > 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, то $x^2 + y^2 = 5$. (1)

Исходную систему запишем в виде

$$\begin{cases} \frac{x}{y}(x^2 + y^2) = 10, \\ \frac{x}{y}(x^2 + y^2) = \frac{5}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Разделив почленно I уравнение системы (2) на II,

$$\text{имеем } \frac{x^2}{y^2} = 4 \text{ или } x^2 = 4y^2. \quad (3)$$

Из соотношений (1) и (3) получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2 = 4y^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 4y^2 + y^2 = 5, \\ x^2 = 4y^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 4y^2, \\ y^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Исходная система имеет 2 пары решений.

Ответ: $(-2; -1)$, $(2; 1)$.

Способ 2

Запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = 10y, \\ y^3 + x^2y = 2,5x; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x^2 + y^2) = 10y, \\ y(x^2 + y^2) = 2,5x, \end{cases}$$

где $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Разделив I уравнение полученной системы на II, по-

$$\text{лучим } \frac{x}{y} = \frac{10y}{2,5x} \text{ или } \frac{x}{y} = \frac{4y}{x}, x^2 = 4y^2, \text{ откуда } x = \pm 2y.$$

Получим две системы:

$$1) \begin{cases} x = 2y, \\ x^3 + xy^2 = 10y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y, \\ 8y^3 + 2y^3 = 10y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y, \\ 10y^3 - 10y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y, \\ 10y(y^2 - 1) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = -2y, \\ -8y^3 - 2y^3 = 10y; \end{cases} \begin{cases} x = -2y, \\ -10y^3 = 10y; \end{cases} \begin{cases} x = -2y, \\ y^2 = -1 \end{cases}$$

— нет корней, значит, система 2) не имеет решений.

Ответ: $(-2; -1), (2; 1)$.

Пример 3. Метод замены переменных.

Решить систему
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{5}{6}, \\ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{35}{216}. \end{cases}$$

Решение

Пусть $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b$, тогда данная система примет

вид
$$\begin{cases} a + b = \frac{5}{6}, \\ a^3 + b^3 = \frac{35}{216}. \end{cases}$$

Так как $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$, то получим

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 - 3ab \cdot \frac{5}{6} = \frac{35}{216} \quad \text{или} \quad \frac{125}{216} - \frac{5}{2}ab = \frac{35}{216},$$

$$\frac{5}{2}ab = \frac{125}{216} - \frac{35}{216}, \quad \frac{5}{2}ab = \frac{90}{216}, \quad ab = \frac{90 \cdot 2}{216 \cdot 5}, \quad ab = \frac{1}{6}.$$

Имеем равносильную систему

$$\begin{cases} a + b = \frac{5}{6}, \\ ab = \frac{1}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{5}{6} - a, \\ 6a^2 - 5a + 1 = 0. \end{cases}$$

$$6a^2 - 5a + 1 = 0, \quad D = 25 - 24 = 1 > 0, \quad a_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12},$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{3}, \quad \text{тогда}$$

$$b_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \quad b_2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Учитывая подстановки, имеем

$$x_1 = \frac{1}{a_1} \text{ или } x_1 = 2, \quad y_1 = 3, \quad x_2 = 3, \quad y_2 = 2.$$

Ответ: (2; 3), (3; 2).

Пример 4. Метод применения равносильной совокуп-

ности систем. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 + xy = -8, \\ y^2 + xy = 12. \end{cases}$$

Решение

Складывая почленно левые и правые части системы, получим $x^2 + 2xy + y^2 = -8 + 12$ или $(x + y)^2 = 4$, откуда $x + y = \pm 2$. (1)

Запишем одно из уравнений данной системы, например, первое, в виде $x(x + y) = -8$.

Тогда, учитывая (1), имеем две системы:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} x + y = 2, \\ x(x + y) = -8; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2, \\ 2x = -8; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 6, \\ x = -4. \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} x + y = -2, \\ x(x + y) = -8; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -2, \\ x = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -6, \\ x = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Найденные пары удовлетворяют исходной системе.

Ответ: (-4; 6), (4; -6).

Пример 5. Метод замены суммы и произведения не-

известных. Решить систему
$$\begin{cases} (x^3 + 1)(y^3 + 1) = 18, \\ xy + x + y = 5. \end{cases}$$

Решение

Упростим I уравнение системы:

$$x^3 y^3 + x^3 + y^3 + 1 = 18,$$

$$x^3 y^3 + (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 17.$$

Пусть $x + y = a$, $xy = b$, тогда имеем

$$\begin{cases} b^3 + a^3 - 3ab = 17, \\ a + b = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} (a + b)^3 - 3ab(a + b) - 3ab = 17, \\ a + b = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 125 - 15ab - 3ab = 17, & \begin{cases} a + b = 5, \\ ab = 6, \end{cases} \\ \begin{cases} a + b = 5; \\ b = 3, \end{cases} & \begin{cases} a = 2, \\ b = 2. \end{cases} \end{cases}$$

откуда по обратной теореме Виета имеем

$$\begin{cases} a = 2, \\ b = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 3, \\ b = 2. \end{cases}$$

Учитывая подстановки, получим две системы:

$$а) \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 3, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = 2 - y, \\ y(2 - y) = 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - y, \\ y^2 - 2y + 3 = 0. \end{cases}$$

Уравнение $y^2 - 2y + 3 = 0$ не имеет корней, так как $D < 0$, значит, система а) не имеет решений.

$$б) \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Следовательно, решением исходной системы будет решение системы б).

Ответ: (2; 1), (1; 2).

Пример 6. Метод разложения на множители.

$$\text{Решить систему} \quad \begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 65, \\ (x - y)(x^2 - y^2) = 5. \end{cases}$$

Решение

Хотя левая часть каждого из уравнений системы разложена на множители, однако есть смысл записать систему в другом виде:

$$\begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 65, \\ (x + y)(x - y)^2 = 5. \end{cases}$$

Пусть $(x - y)^2 = a$, $x + y = b$.

Так как $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}((x - y)^2 + (x + y)^2) = \frac{1}{2}(a + b^2)$,
то последняя система примет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a+b^2)b = 65, \\ ab = 5; \end{cases} \begin{cases} ab + b^3 = 130, \\ ab = 5; \end{cases} \begin{cases} b^3 = 125, \\ ab = 5; \end{cases} \begin{cases} b = 5, \\ a = 1. \end{cases}$$

С учетом подстановок имеем систему $\begin{cases} x + y = 5, \\ (x - y)^2 = 1, \end{cases}$ которая равносильна двум линейным системам:

$$1) \begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1; \end{cases} \begin{cases} 2x = 6, \\ 2y = 4; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = -1, \end{cases} \begin{cases} 2x = 4, \\ 2y = 6, \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: (3; 2), (2; 3).

Пример 7. Метод подстановки $x = ty$ ($y = tx$).

Решить систему $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17. \end{cases}$

Решение

Пусть $x = ty$, тогда данная система примет вид

$$\begin{cases} y^2(3t^2 + 2t + 1) = 11, \\ y^2(t^2 + 2t + 3) = 17. \end{cases} \quad (1)$$

Разделим почленно I уравнение системы (1) на II:

$$\frac{3t^2 + 2t + 1}{t^2 + 2t + 3} = \frac{11}{17} \text{ или } 17(3t^2 + 2t + 1) = 11(t^2 + 2t + 3),$$

$$51t^2 + 34t + 17 = 11t^2 + 22t + 33 \text{ или } 10t^2 + 3t - 4 = 0, \text{ откуда } t_1 = -\frac{4}{5}, t_2 = \frac{1}{2}.$$

1) Если $t_1 = -\frac{4}{5}$, то из уравнения $y^2(t^2 + 2t + 3) = 17$ имеем $y^2\left(\frac{16}{25} - \frac{8}{5} + 3\right) = 17$ или

$$y^2 = \frac{25}{3}, y_{1,2} = \pm \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Так как $x = ty$, то $x_{1,2} = -\frac{4}{5} \cdot \left(\pm \frac{5}{\sqrt{3}} \right) = \mp \frac{4}{\sqrt{3}}.$

2) Если $t = \frac{1}{2}$, то $y^2 \left(\frac{1}{4} + 1 + 3 \right) = 17$ или $y^2 = 4$, от-

куда $y_{3,4} = \pm 2$ и $x_{3,4} = \frac{1}{2} \cdot (\pm 2) = \pm 1.$

Итак, исходная система имеет 4 пары решений.

Ответ: $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{5}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{4}{\sqrt{3}}; -\frac{5}{\sqrt{3}} \right), (1; 2), (-1; -2).$

Пример 8. Метод исключения одной из неизвестных.

Решить систему
$$\begin{cases} x^2 y^2 - 2x^2 + 3xy = 36, \\ 4x^2 y^2 - x^2 - 2xy = 123. \end{cases}$$

Решение

Как видно из условия, левые части уравнений системы содержат одни и те же комбинации неизвестных. Поэтому представляется целесообразным исключить из системы одно из неизвестных, а именно x^2 , для чего умножим обе части II уравнения на -2 и сложим с I:

$-7x^2 y^2 + 7xy = -210$ или $(xy)^2 - xy - 30 = 0$, откуда $xy = 6$ или $xy = -5.$

Таким образом, исходная система распадается на две системы:

1)
$$\begin{cases} xy = 6, \\ x^2 y^2 - 2x^2 + 3xy = 36, \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 6, \\ 36 - 2x^2 + 18 = 36; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 6, \\ x^2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 6, \\ x = \pm 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 3, \\ y = \pm 2. \end{cases}$$

Пары чисел $(-3; -2)$ и $(3; 2)$ удовлетворяют исходной системе.

$$2) \begin{cases} xy = -5, \\ x^2 y^2 - 2x^2 + 3xy = 36, \end{cases} \begin{cases} xy = -5, \\ -2x^2 = 26, \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = -5, \\ x^2 = -13. \end{cases}$$

Уравнение $x^2 = -13$ не имеет действительных корней, значит, система 2) не имеет решений. Следовательно, решением исходной системы является решение системы 1).

Ответ: $(-3; -2), (3; 2)$.

Пример 9. Метод обращения к квадратному уравнению. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 + 8x + 10y + 12 = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 - x + y - 6 = 0. \end{cases}$$

Решение

Идея решения системы заключается в том, что I уравнение рассматриваем как квадратное относительно переменной x :

$$\begin{aligned} x^2 + (y+8)x - (2y^2 - 10y - 12) &= 0, \\ D &= (y+8)^2 + 4(2y^2 - 10y - 12) = 9y^2 - 24y + 16 = \\ &= (3y-4)^2, \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(y+8) \pm (3y-4)}{2}, \quad x_1 = -2y-2, \quad x_2 = y-6.$$

Аналогично, решая II уравнение системы как квадратное относительно x , найдем $x_3 = 3-2y$, $x_4 = -2-y$. Таким образом, исходная система равносильна совокупности четырех линейных систем:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} x+2y = -2, \\ x+2y = 3; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} x+2y = -2, \\ x+y = -2; \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} x-y = -6, \\ x+2y = 3; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} x-y = -6, \\ x+y = -2. \end{cases} \end{array}$$

Заметим, что система а) не имеет решений, а системы б), в) и г) имеют соответственно решения: $(-2; 0)$, $(-3; 3)$, $(-4; 2)$.

Ответ: $(-2; 0), (-3; 3), (-4; 2)$.

Пример 10. Метод введения вспомогательного неизвестного. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{x+y}{5} = \frac{x+z}{6} = \frac{y+z}{7}, \\ (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 = 110. \end{cases}$$

Решение

Пусть $\frac{x+y}{5} = \frac{x+z}{6} = \frac{y+z}{7} = t$, тогда $x+y = 5t$,
 $x+z = 6t$, $y+z = 7t$, и II уравнение исходной системы примет вид
 $25t^2 + 36t^2 + 49t^2 = 110$ или $110t^2 = 110$, $t^2 = 1$,
 $t = \pm 1$.

Учитывая подстановки, имеем две системы:

$$1) \begin{cases} x+y = 5, \\ x+z = 6, \\ y+z = 7. \end{cases}$$

Складывая уравнения полученной системы, имеем
 $2(x+y+z) = 18$, $x+y+z = 9$, тогда $z = 9 - 5 = 4$,
 $y = 9 - 6 = 3$, $x = 9 - 7 = 2$.

$$2) \begin{cases} x+y = -5, \\ x+z = -6, \\ y+z = -7. \end{cases}$$

Аналогично решая, получим
 $x = -2$, $y = -3$, $z = -4$.

Ответ: $(-2; -3; -4)$, $(2; 3; 4)$.

Задачи

Группа А

Решить системы уравнений:

$$1. \begin{cases} x+y = 6, \\ xy = 8; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x-y = 7, \\ xy = -10; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ y - 3x = 7; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63, \\ x - y = -3; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}, \\ x + y = 12; \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} (x-2)(y+1) = 1, \\ x - y = 3; \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{x^2 + y + 1}{y^2 + x + 1} = \frac{3}{2}, \\ x - y = 1; \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} (x-2)(y-3) = 1, \\ \frac{x-2}{y-3} = 1; \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0, \\ y - x = 1. \end{cases}$$

Группа Б

Решить системы уравнений:

$$1. \begin{cases} x + 2xy + y = 10, \\ x - 2xy + y = -2; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} xy + x + y = 29, \\ xy - 2(x + y) = 2; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy, \\ 4x - 4y = xy; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18, \\ x^2 - y^2 + x - y = 6; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 10, \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = 10; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0, \\ (x-2)(y-1) = 0; \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} (x+y)^2 - 4(x+y) = 45, \\ (x-y)^2 2(x-y) = 3; \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x^2 + xy = a, \\ y^2 + xy = b; \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{x+m}{m} - \frac{y+m}{y} = 3, \\ \frac{y+m}{m} - \frac{x+m}{x} = \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 18, \\ xy + x^2 + y^2 = 19; \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x^3 - y^3 = 218, \\ x^2 + xy + y^2 = 109; \end{cases} \quad 12. \begin{cases} x^3 + y^3 = -217, \\ x + y = -7; \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Решить системы уравнений введением вспомогательного неизвестного:

$$14. \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{34}{15}, \\ x^2 + y^2 = 34; \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{13}{6}, \\ xy = 5; \end{cases} \quad 17. \begin{cases} \frac{4}{x+y} - \frac{12}{2x+y} = -1, \\ \frac{2}{x+y} + \frac{9}{2x+y} = 2; \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \\ x + y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3; \end{cases} \quad 19. \begin{cases} \frac{1}{3x} - \frac{1}{2y} = \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{9x^2} - \frac{1}{4y^2} = \frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \frac{1}{x+2y} + y = 2, \\ \frac{y}{x+2y} = -3; \end{cases} \quad 21. \begin{cases} \frac{1}{x^2 - y} + x = 3, \\ \frac{x}{x^2 - y} = 2. \end{cases}$$

Решить системы уравнений, левые части которых однородны относительно x и y :

$$22. \begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1, \\ 3xy + 7y^2 = 1; \end{cases} \quad 23. \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13; \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 2y^2 - 4xy + 3x^2 = 17, \\ y^2 - x^2 = 16; \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x^2 - 3xy + 5y^2 = 15, \\ 3x^2 + xy + 7y^2 = 17. \end{cases}$$

Решить системы уравнений:

$$26. \begin{cases} y^2 = 2x^2 - 3x, \\ 8x^2 = 3y - 2xy; \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 8x^3 - 12x^2 + 6x = y^3 + 1, \\ 8x^2 - xy - 4x = 2y^2; \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x(x+1)(x+2y) = 84, \\ x^2 + 2x + 2y = 19; \end{cases} \quad 29. \begin{cases} x^3 + y^3 = xy + 61, \\ x^2 + y^2 = x^2y^2 + 1; \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x^3 + y^3 = x^3y^3 + 1, \\ x^2 + y^2 = xy + 1; \end{cases} \quad 31. \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2y - x} = \frac{35}{4}, \\ \frac{x^3 + y^3}{2x - y} = 35; \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} x + \frac{12}{y} = x^2, \\ y + \frac{6}{x} = y^2; \end{cases} \quad 33. \begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ xy = 3; \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} x^4 + y^4 = 97, \\ x + y = 5; \end{cases} \quad 35. \begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ xy = 2; \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} xy(x+y) = 6, \\ x^2y^2(x^2 + y^2) = 20; \end{cases} \quad 37. \begin{cases} xy + x + y = 5, \\ x^2y^2 + x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} (x+y)^2 = 9(x-y)^3, \\ xy = 2(x-y); \end{cases} \quad 39. \begin{cases} (x+y)^2 = 9(x-y)^3, \\ xy = 2; \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} (x^2 + y^2)xy = 78, \\ x^4 + y^4 = 97. \end{cases}$$

Решить системы уравнений с тремя неизвестными:

$$41. \begin{cases} x - y = 2, \\ y + z = 7, \\ x^2 + z^2 = 41; \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} xy = 6, \\ yz = 12, \\ xz = 8; \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} xy = 4, \\ yz = 6, \\ x^2 + z^2 = 13; \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} x + y = 5, \\ x + z = 6, \\ xy + xz + yz = 29; \end{cases}$$

$$45. \begin{cases} \frac{x+y}{5} = \frac{x+z}{6} = \frac{y+z}{7}, \\ (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 = 110; \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} x^3 - xyz = 21, \\ y^3 - xyz = 2, \\ z^3 - xyz = -5; \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} \frac{4(x+y)}{x^2y^2} = 3z, \\ \frac{4(z+y)}{z^2y^2} = 3x, \\ \frac{x^3 + z^3}{x^2z^2} = y; \end{cases}$$

$$48. \begin{cases} \frac{y+1}{y-1} = 2x, \\ \frac{z+1}{z-1} = 3y, \\ \frac{x+1}{x-1} = 2z; \end{cases}$$

$$49. \begin{cases} \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} = \frac{1}{z}, \\ \frac{x^2 - y^2 - z^2}{2yz} = \frac{3}{x}, \\ \frac{x^2 - y^2 + z^2}{2xz} = \frac{2}{y}; \end{cases}$$

$$50. \begin{cases} \frac{xy}{x+1} = 1, \\ \frac{xz}{x+z} = 2, \\ \frac{yz}{y+z} = 3; \end{cases}$$

$$51. \begin{cases} \frac{xyz}{x+y} = 9, \\ \frac{xyz}{y+z} = 6, \\ \frac{xyz}{z+x} = 9; \end{cases}$$

$$52. \begin{cases} xy = x + 3y, \\ yz = z + 2y, \\ xz = 2x + 3z; \end{cases}$$

$$53. \begin{cases} x + y + z = 7, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21, \\ x^2 = yz; \end{cases}$$

$$54. \begin{cases} x + y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36; \end{cases}$$

$$55. \begin{cases} x + y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x^4 + y^4 + z^4 = 98. \end{cases}$$

§ 7. Текстовые задачи

Решение текстовых задач, пожалуй, является самым трудным для учащихся. Причина затруднений, по-видимому, заключается в том, что учитель старается обучить решению каждого типа задач в отдельности, а не сформировать у ученика способность анализировать всякую задачу (что крайне важно) вне зависимости от ее разновидности.

Предлагаемые задачи заимствованы из различных источников.

Оформлять решение задач можно как в виде таблиц, так и в виде кратких пояснений.

Рассмотрим типовые задачи и их решения.

Эти задачи можно условно разбить на следующие типы:

1. Задачи на числовые зависимости

Составление уравнений в задачах данного раздела следует непосредственно из условия задачи.

Пример 1. Найти двузначное число, если известно, что цифра его единиц на 2 больше цифры десятков и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

Решение

Всякое двузначное число можно записать в виде $\overline{xy}$ или в развернутом виде $10x + y$, где x — цифра десятков, y — цифра единиц.

Кроме того, $0 < x \leq 9, 0 \leq y \leq 9$.

Если цифра единиц на 2 больше цифры десятков, то получим уравнение $y - x = 2$.

Так как по условию задачи произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144, то получим $(10x + y)(x + y) = 144$.

Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y - x = 2, \\ (10x + y)(x + y) = 144. \end{cases}$$

Решая эту систему подстановкой, находим 2 реше-

ния: $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -3\frac{2}{11}, \\ y_2 = -1\frac{2}{11}. \end{cases}$

Вторая пара не подходит, так как x и y — целые положительные числа. Значит, искомое число 24.

Ответ: 24.

Пример 2. Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2, 5, а знаменатели соответственно пропорциональны числам 1, 3, 7. Среднее арифметическое этих дробей равно $\frac{200}{441}$. Найти эти дроби.

Решение

Пусть $x, 2x, 5x$ — числители дробей (согласно условию задачи), $y, 3y, 7y$ — знаменатели дробей. Тогда

искомые дроби имеют вид $\frac{x}{y}, \frac{2x}{3y}, \frac{5x}{7y}$.

Из условия задачи имеем

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{2x}{3y} + \frac{5x}{7y}\right) : 3 = \frac{200}{441} \text{ или}$$

$$\frac{21x + 14x + 15x}{21y} : 3 = \frac{200}{441}, \quad \frac{50x}{63y} = \frac{200}{441}, \text{ откуда}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{200}{441} \cdot \frac{63}{50} \text{ или } \frac{x}{y} = \frac{4}{7} - \text{I дробь, тогда } \frac{2x}{3y} = \frac{8}{21} -$$

$$\text{II дробь и } \frac{5x}{7y} = \frac{20}{49} - \text{III дробь.}$$

$$\text{Ответ: } \frac{4}{7}, \frac{8}{21}, \frac{20}{49}.$$

Пример 3. Найти все трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими свойствами: первая цифра числа в три раза меньше суммы двух других его цифр; разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 81.

Решение

Пусть $\overline{xuz} = 100x + 10y + z$ — искомое трехзначное число, где x — цифра сотен, y — цифра десятков, z — цифра единиц. Согласно условию, $3x = y + z$ и число $100x + 10y + z - (100x + 10z + y)$ делится на 81. Упрощая, имеем, что $9(y - z)$ делится на 81, т. е. $y - z$ кратно числу 9. Так как y и z — цифры, то имеем две возможности:

$$1) y - z = 0 \text{ и } 2) y - z = 9.$$

$$\text{Если } y - z = 0, \text{ то получим систему } \begin{cases} 3x = y + z, \\ y - z = 0, \end{cases}$$

откуда $3x = 2y$, что возможно при $x = 2, y = z = 3$, при $x = 4, y = z = 6$ и при $x = 6, y = z = 9$. Соответственно получим числа 233, 466 и 699, удовлетворяющие условию задачи.

$$\text{Если } y - z = 9, \text{ то получим систему } \begin{cases} 3x = y + z, \\ y - z = 9. \end{cases}$$

Заметим, что II уравнение системы возможно лишь при $z = 0$, $y = 9$; тогда $x = 3$ и искомое число равно 390. Таким образом, получим всего 4 числа.

Ответ: 233, 390, 466, 699.

Пример 4. Среднее пропорциональное двух чисел на 12 больше меньшего из этих чисел, а среднее арифметическое тех же чисел на 24 меньше большего из чисел. Найти эти числа.

Решение

Пусть x — меньшее, а y — большее число. Пусть для определенности $x < y$, тогда первое условие задачи дает

$\sqrt{xy} = x + 12$, а второе условие дает $\frac{x+y}{2} = y - 24$ или $y - x = 48$. Следовательно, имеем систему урав-

нений
$$\begin{cases} \sqrt{xy} = x + 12, \\ y - x = 48. \end{cases}$$

Решая систему, находим $x = 6$, $y = 54$.

Так как $x < y$, то найденная пара (6; 54) удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 6 и 54.

2. Задачи «на движение»

При решении задач «на движение» используются

известные формулы: $S = v \cdot t$; $v = \frac{S}{t}$; $t = \frac{S}{v}$.

При этом надо иметь в виду, что указанные величины должны быть в одной системе единиц, например: если путь в километрах, а время в часах, то скорость в километрах в час.

В задачах на движение по реке необходимо помнить следующие формулы:

$$v_{\text{по теч.}} = v_{\text{соб.}} + v_{\text{теч.}},$$

$$v_{\text{против теч.}} = v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч.}},$$

$$v_{\text{соб.}} = \frac{1}{2} (v_{\text{по теч.}} + v_{\text{против теч.}}).$$

Кроме того, заметим, что если два каких-либо тела начинают движение одновременно, то в случае, если

они встречаются, каждое с момента выхода и до встречи затрачивает, очевидно, одинаковое время. Точно так же обстоит дело в случае, если одно тело догоняет другое.

Если же тела выходят в разное время, то до момента встречи из них затрачивает времени больше то, которое выходит раньше.

Пример 5. Пешеход, идущий из совхоза на железнодорожную станцию, пройдя за первый час 3 км, рассчитал, что он опоздает к отходу поезда на 40 мин, если будет идти с той же скоростью. Поэтому остальной путь он прошел со скоростью 4 км/ч и прибыл на станцию за 15 мин до отхода поезда. Чему равно расстояние от совхоза до станции и с какой постоянной на всем пути скоростью пешеход пришел бы на станцию точно к отходу поезда?

Решение

Составим следующую таблицу:

Пешеход пришел бы на станцию	Расстояние, км	Скорость, км/ч	Время, ч
Точно	x	v	$\frac{x}{v}$
С опозданием	$x - 3$	3	$\frac{x-3}{3}$
С опережением	$x - 3$	4	$\frac{x-3}{4}$

Заметим, что $15 \text{ мин} = \frac{15}{60} \text{ ч} = \frac{1}{4} \text{ ч}$, а $40 \text{ мин} = \frac{2}{3} \text{ ч}$.

Тогда, уравнивая промежутки времени, записанные в I и II, в I и III строках, получим систему урав-

нений
$$\begin{cases} \frac{x}{v} = \frac{x-3}{3} + 1, \\ \frac{x}{v} = \frac{x-3}{4} + 1 + \frac{1}{4}, \end{cases}$$
 или, сравнивая правые части уравнений системы, имеем

$$\frac{x-3}{3} + 1 = \frac{x-3}{4} + \frac{5}{4} \text{ или } 4x - 12 + 4 = 3x - 9 + 15,$$

$$x = 14, \text{ тогда } v = \frac{14}{4} = 3,5 \text{ (км/ч).}$$

Ответ: 14 км; 3,5 км/ч.

Пример 6. Велосипедист и пешеход вышли из пунктов «А» и «В», расстояние между которыми 12 км, и встретились через 20 мин. Пешеход прибыл в пункт «А» на 1 ч 36 мин позже, чем велосипедист в «В». Найти скорость пешехода.

Решение

Обозначим через x км/ч скорость пешехода. Тогда 12 км из «В» в «А» пешеход пройдет за $12/x$ ч, а велосипедист это же расстояние из «А» в «В» на 1 ч 36 мин =

= 1,6 ч быстрее, т. е. за $\left(\frac{12}{x} - 1,6\right)$ ч со скоростью

$$12 : \left(\frac{12}{x} - 1,6\right) = \frac{12x}{12 - 1,6x} = \frac{3x}{3 - 0,4x} \text{ км/ч.}$$

Велосипедист и пешеход, двигаясь навстречу друг другу, расстояние 12 км прошли за 20 мин = $\frac{1}{3}$ ч.

Составим уравнение: $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{3 - 0,4x} = 12$ или $0,4x^2 - 20,4x + 108 = 0$, $x^2 - 51x + 270 = 0$, откуда $x_1 = 6$, $x_2 = 45$.

Значение $x = 45$ невозможно, так как x — скорость пешехода.

Ответ: 6 км/ч.

Пример 7. Найти длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы проехать с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

Решение

Пусть x — длина поезда, тогда скорость поезда мимо неподвижного пассажира — $\frac{x}{7}$ м/с, а скорость поезда мимо платформы будет $\frac{x+378}{25}$ м/с.

Согласно условию задачи эти скорости равны, т. е.

имеем уравнение $\frac{x}{7} = \frac{x+378}{25}$ или $25x - 7x = 378 \cdot 7$,
 $18x = 378 \cdot 7$, откуда $x = 147$.

Следовательно, длина поезда 147 м.

Ответ: 147 м.

Пример 8. Моторная лодка прошла 5 км по течению и 6 км против течения реки, затратив на весь путь 1 ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найти скорость лодки по течению.

Решение

Пусть собственная скорость движения лодки x (км/ч), где $x > 0$. Составим таблицу.

Величины	Процессы движения		Общие показатели
	по течению	против течения	
S , км	5	6	
v , км/ч	$x + 3$?	$x - 3$	
t , ч	$\frac{5}{x+3}$	$\frac{6}{x-3}$	1

$$\begin{aligned} S &= v \cdot t; \\ v_{\text{по теч.}} &= v_{\text{соб.}} + \\ &+ v_{\text{теч.р.}}; \\ v_{\text{пр.теч.}} &= v_{\text{соб.}} - \\ &- v_{\text{теч.р.}} \end{aligned}$$

Так как на весь путь моторная лодка затратила $\left(\frac{5}{x+3} + \frac{6}{x-3} \right)$ ч, а по условию на весь путь затрачен 1 ч, то получим уравнение $\frac{5}{x+3} + \frac{6}{x-3} = 1$,

$$\begin{cases} 5(x-3) + 6(x+3) = x^2 - 9, \\ x \neq \pm 3, \end{cases}$$

$5x - 15 + 6x + 18 = x^2 - 9$ или $x^2 - 11x - 12 = 0$, откуда $x_1 = 12$, $x_2 = -1$ (не годится, так как $x > 0$).

Если $x = 12$, то $x + 3 = 15$. Итак, скорость лодки по течению реки 15 км/ч.

Ответ: 15 км/ч.

Пример 9. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу и встретились через 3 ч 20 мин. Сколько времени понадобится каждому из них, чтобы пройти все расстояние, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на 5 ч позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый?

Решение

Так как в задаче нет никаких данных о пройденном расстоянии, то удобно все расстояние принять

за 1. Тогда скорость $v_1 = \frac{1}{x}$, а $v_2 = \frac{1}{y}$, где x часов —

время в пути первого пешехода, а y часов — время второго пешехода.

Согласно условию задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 3\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + 3\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y} = 1, \\ x - y = 5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{10}, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

Решая полученную систему способом подстановки, получим $x = 10$, $y = 5$.

Ответ: 10 ч; 5 ч.

3. Задачи на «совместную работу»

Основными компонентами этого типа задач являются: а) работа A ; б) время t ; в) производительность труда (работа в единицу времени).

Пример 10. Две бригады должны были закончить уборку урожая за 12 дней. После 8 дней совместной работы I бригада получила другое задание, поэтому II бригада закончила оставшуюся часть работы за 7 дней. На сколько дней II бригада убрала бы весь урожай быстрее I, если бы каждая бригада работала отдельно?

Решение

Обозначим весь урожай через 1. Пусть I бригада может убрать весь урожай за x дней, а II — за y дней.

Тогда производительность труда I бригады будет $-\frac{1}{x}$,

а II $-\frac{1}{y}$ — это часть урожая, которую убирает каждая бригада ежедневно.

Согласно условию задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 7 \cdot \frac{1}{y} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ \frac{8}{12} + 7 \cdot \frac{1}{y} = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 7 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{28}, \\ y = 21; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 28, \\ y = 21. \end{cases}$$

Итак, I бригада убереет весь урожай за 28 дней, а II — за 21 день, т. е. II бригада весь урожай убереет на 7 дней быстрее I.

Ответ: 7 дней.

Пример 11. Бассейн наполняется двумя трубами, действующими одновременно, за 2 ч. За сколько часов может наполнить бассейн I труба, если она, действуя одна, наполняет бассейн на 3 ч быстрее, чем II?

Решение

Обозначим через x время наполнения бассейна I трубой. Заметим, что, в каких единицах измеряется

объем бассейна, в задаче не сказано. Следовательно, для решения задачи это неважно, и мы вместо условных единиц и обозначения V можем принять в принципе любое число, из которого самое удобное – 1. Составим таблицу.

Величины	Процессы заполнения бассейна		
	I трубой	II трубой	I и II вместе
V	1	1	1
$N, 1/\text{ч}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{3}{x+3}$	$\frac{1}{2}$
$t, \text{ч}$	$x ?$ на 3 ч меньше, чем —	$x + 3$ ↑	2

N – работа в единицу времени;

$$V = N \cdot t;$$

$$N_{\text{совм.}} = N_I + N_{II};$$

$$t_{\text{совм.}} < t_I + t_{II}$$

Для составления уравнения используем связь величин во II строке таблицы: $N_I + N_{II} = N_{\text{совм.}}$, т. е.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}; \text{ область определения уравнения: } x \neq 0, x \neq -3.$$

Решая уравнение, находим $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.

Заметим, что оба корня удовлетворяют области определения уравнения, но корень $x = -2$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: I труба наполняет бассейн за 3 ч.

Пример 12. Первому трактору на вспашку всего поля требуется на 2 ч меньше, чем третьему, и на 1 ч больше, чем второму. При совместной работе первого и второго тракторов поле может быть вспахано за 1 ч 12 мин. Какое время на вспашку поля будет затрачено при совместной работе всех трех тракторов?

Решение

Пусть x ч – время, необходимое для вспашки поля I трактору, y ч – II и z ч – III трактору.

Примем площадь всего поля за 1, тогда $\frac{1}{x}$ — производительность I, $\frac{1}{y}$ — II и $\frac{1}{z}$ — III трактора.

Согласно условию задачи имеем $z - x = 2$ и $x - y = 1$.

Так как $1 \text{ ч } 12 \text{ мин} = \frac{6}{5} \text{ ч}$, то за это время I трактор выполнит $\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{5x}$ часть работы, а II — $\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{y} = \frac{6}{5y}$ — часть работы. Следовательно, имеем уравнение $\frac{6}{5x} + \frac{6}{5y} = 1$ или $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$.

Таким образом, задача сводится к решению системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} z - x = 2, \\ x - y = 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} z = x + 2, \\ y = x - 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Решив III уравнение системы, находим $x_1 = 3$, $x_2 = -0,4$ (не удовлетворяет условию задачи, так как $x > 0$).

Если $x = 3$, то $z = 3 + 2 = 5$ и $y = 3 - 1 = 2$.

Следовательно, при совместной работе трех тракторов производительность труда составит $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30}$, тогда время на вспашку поля тремя тракторами составит $\frac{30}{31}$ ч.

Ответ: $\frac{30}{31}$ ч.

4. Задачи «на сплавы и смеси»

Задачи этого раздела вызывают наибольшие затруднения. Речь в этих задачах идет о составлении смесей, сплавов, растворов и т. д. Решение этих задач связано с понятиями «концентрация», «процентное содержание», «влажность» и т. д.

Пример 13. Смешали 30 %-ный раствор соляной кислоты с 10 %-ным и получили 600 г 15 %-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Решение

Пусть было взято x граммов 30 %-ного раствора, а 10 %-ного — y граммов, тогда $x + y = 600$. Так как первый раствор 30 %-ный, то в x граммах этого раствора содержится $0,3x$ грамма кислоты. Аналогично в y граммах 10 %-ного раствора содержится $0,1y$ грамма кислоты. В полученной смеси по условию задачи содержится $600 \cdot 0,15 = 90$ г кислоты, следовательно, получим уравнение

$$0,3x + 0,1y = 90 \text{ или } 3x + y = 900.$$

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 600, \\ 3x + y = 900. \end{cases}$$

Вычитая из II уравнения I, получим $2x = 900 - 600$; откуда $x = 150$, тогда $y = 600 - 150 = 450$.

Ответ: 150 г, 450 г.

Пример 14. Вычислить массу и пробу сплава серебра с медью, зная, что сплавив его с 3 кг чистого серебра, получим сплав 900-й пробы (т. е. в сплаве 90 % серебра), а сплавив с 2 кг сплава 900-й пробы, получили сплав 840-й пробы.

Решение

Пусть масса данного сплава x кг, в нем содержится y % серебра: $0,01xy$ кг серебра находится в данном сплаве. $(x + 3)$ кг — масса нового сплава, в нем содержится $(0,01xy + 3)$ кг серебра.

Так как новый сплав 900-й пробы, значит, в нем содержится серебра $0,9(x + 3)$ кг. Следовательно, имеем уравнение $0,01xy + 3 = 0,9(x + 3)$.

$(x + 2)$ кг — масса *III* сплава 840-й пробы. В нем содержится $0,84(x + 2)$ кг серебра. Но этот сплав состоит из x кг данного ($0,01xy$ серебра) и 2 кг 900-й пробы (1,8 кг серебра). Получим второе уравнение:
 $0,01xy + 1,8 = 0,84(x + 2)$.

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 0,01xy + 3 = 0,9(x + 3), \\ 0,01xy + 1,8 = 0,84(x + 2). \end{cases}$$

Вычитая из *I* уравнения системы *II*, получим
 $3 - 1,8 = 0,9(x + 3) - 0,84(x + 2)$ или, упрощая, находим $x = 3$. Подставив значение $x = 3$ в *I* уравнение системы, находим $y = 80$.

Значит, данный сплав массой 3 кг содержит 80 % серебра.

Ответ: масса сплава 3 кг 800-й пробы.

Пример 15. Имеется кусок сплава меди с оловом массой 12 кг, содержащий 45 % меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому сплаву, чтобы получившийся новый сплав содержал 40 % меди?

Решение

Пусть x кг — масса олова, которую надо добавить к сплаву. Тогда получится сплав массой $(12 + x)$ кг, содержащий 40 % меди. Значит, в новом сплаве имеет-

ся $\frac{12 + x}{100} \cdot 40$ кг меди. Исходный сплав массой 12 кг содержал 45 % меди, т. е. меди в нем было

$\frac{12}{100} \cdot 45$ кг. Так как масса меди и в первоначальном, и в новом сплаве одна и та же, то получим уравнение

$\frac{12 + x}{100} \cdot 40 = \frac{12}{100} \cdot 45$ или $(12 + x) 8 = 12 \cdot 9$, откуда находим $x = 1,5$. Следовательно, к исходному сплаву надо добавить 1,5 кг олова.

Ответ: 1,5 кг.

5. Задачи «на проценты»

Пример 16. Если из 225 кг руды получается 34,2 кг меди, то каково процентное содержание меди в руде?

Решение

Если 225 кг руды — 100 %, то

34,2 кг — x %, откуда

$$x = 34,2 \cdot 100 : 225 \text{ или } x = 15,2 \%$$

Ответ: 15,2 %.

Пример 17. Цену товара сперва снизили на 20 %, затем новую цену снизили еще на 15 % и, наконец, после перерасчета произвели снижение ее на 10 %. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

Решение

Пусть x руб. — первоначальная цена товара, что соответствует 100 %. Тогда после I снижения цена товара будет $x - 0,2x = 0,8x$ (руб.).

После II снижения $0,8x - 0,15 \cdot 0,8x = 0,68x$ (руб.), а после III снижения $0,68x - 0,68x \cdot 0,1 = 0,612x$ (руб.).

Всего цена товара снизилась на $x - 0,612x = 0,388x$ (руб.).

Итак, $x - 100$ %,
 $0,388x - y$, откуда имеем

$$y = (0,388x \cdot 100) : x = 38,8 \%$$

Таким образом, первоначальную цену товара снизили всего на 38,8 %.

Ответ: на 38,8 %.

Пример 18. Антикварный магазин, купив два предмета за 225 000 руб., продал их, получив 40 % прибыли. Что стоит магазину каждый предмет, если на первом прибыли получено 25 %, а на втором 50 %?

Решение

Пусть I предмет куплен за x руб., тогда II куплен за $(225\,000 - x)$ руб. При продаже I предмета получено 25 % прибыли. Значит, он продан за $1,25x$ руб.

Второй предмет, на котором получено 50 % прибыли, продан за 1,5 (225 000 - x) руб. По условию общий % прибыли (по отношению к покупной цене 225 000 руб.) составлял 40 %. Значит, общая сумма выручки была $1,40 \cdot 225\,000 = 315\,000$ руб.

Имеем уравнение $1,25x + 1,5(225\,000 - x) = 315\,000$.

Умножая обе части уравнения на 4, получим

$$5x + 6(225\,000 - x) = 315\,000 \cdot 4, \text{ или}$$

$$6x - 5x = 6 \cdot 225\,000 - 4 \cdot 315\,000, \text{ откуда } x = 90\,000, \text{ тогда } 225\,000 - x = 135\,000.$$

Итак, I предмет куплен за 90 000 руб., II - за 135 000 руб.

Ответ: 90 000 руб., 135 000 руб.

Пример 19. Гипотенуза прямоугольного треугольни-

ка равна $3\sqrt{5}$ м. Определить катеты, если известно, что после того, как один из них увеличить на

$133\frac{1}{3}\%$, а другой на $16\frac{2}{3}\%$, сумма их длин делается равной 14 м.

Решение

Пусть длины катетов (в метрах) - x и y . Так как гипотенуза равна $3\sqrt{5}$ м, то по теореме Пифагора получим уравнение $x^2 + y^2 = (3\sqrt{5})^2$ или $x^2 + y^2 = 45$.

После увеличения на $133\frac{1}{3}\%$, т. е. на

$$133\frac{1}{3} : 100 = 1\frac{1}{3} \text{ своей длины, I катет станет равным}$$

$$2\frac{1}{3}x, \text{ а II катет после увеличения на } 16\frac{2}{3}\% \text{ будет}$$

$$\text{равен } 1\frac{1}{6}y. \text{ Получим уравнение } 2\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{6}y = 14.$$

В итоге имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ 2\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{6}y = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ \frac{7}{3}x + \frac{7}{6}y = 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ 2x + y = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + (12 - 2x)^2 = 45, \\ y = 12 - 2x, \end{cases}$$

откуда находим $x = 3$, $y = 6$. Значит, катеты равны 3 м и 6 м.

Ответ: 3 м; 6 м.

Пример 20. При выполнении работы по математике 12 % учеников класса вовсе не решили задачи, 32 % решили с ошибками, остальные 14 человек решили верно. Сколько учеников было в классе?

Решение

Верно решившие 14 человек составляют

$100\% - (12\% + 32\%) = 56\%$ всех учеников класса.

Тогда общее число учеников класса будет равно $14 \cdot 100 : 56 = 25$ (учеников).

Ответ: 25 учеников.

6. Задачи «на развлечение»

Пример 21. Из бака, наполненного спиртом, вылили часть спирта и долили водой; потом из бака вылили столько же литров смеси; после этого в баке осталось 49 л чистого спирта. Сколько литров спирта вылили в первый раз и сколько во второй, если вместимость бака 64 л?

Решение

Если в первый раз вылили x л спирта, то осталось $(64 - x)$ л спирта. Когда долили бак водой, получили 64 л смеси спирта и воды, в которой содержится $(64 - x)$ л спирта. Затем x л спирта смеси вылили, значит, вылили и спирт.

$\frac{x(64 - x)}{64}$ л спирта вылили во второй раз,

$(64 - x) - \frac{x(64 - x)}{64}$ л осталось в баке.

Так как в баке осталось 49 л спирта, то можно составить уравнение: $(64 - x) - \frac{x(64 - x)}{64} = 49$ или

$64(64 - x) - x(64 - x) = 64 \cdot 49$, или $(64 - x)^2 = 64 \cdot 49$, или $64 - x = \pm 56$, откуда $x_1 = 8$, $x_2 = 120$ (не удовлетворяет условию задачи).

Итак, в первый раз вылили 8 л спирта, а во второй

$$\frac{8 \cdot (64 - 8)}{64} = \frac{8 \cdot 56}{64} = 7 \text{ (л) спирта.}$$

Ответ: 8 л; 7 л.

Пример 22. Сосуд емкостью 8 л наполнен воздухом, содержащим 16 % кислорода. Из этого сосуда выпускают некоторое количество воздуха и впускают такое же количество азота, после чего опять выпускают такое же, как и в первый раз, количество смеси и опять дополняют таким же количеством азота. В новой смеси оказалось кислорода 9 %. Определить, по скольку литров выпускалось каждый раз из сосуда.

Решение

Пусть из сосуда выпущено x л воздуха и введено такое же количество азота. В оставшемся количестве $(8 - x)$ л воздуха содержится $(8 - x) \cdot 0,16$ л кислорода. Это количество приходится на 8 л смеси, так что

на 1 л приходится $\frac{(8 - x) \cdot 0,16}{8}$ л кислорода. Следова-

тельно, когда вторично x л смеси заменяется x л азота, остающееся количество $(8 - x)$ л смеси содер-

жит $\frac{(8 - x) \cdot 0,16}{8} \cdot (8 - x) = (8 - x)^2 \cdot 0,02$ л кислоро-

да. Значит, по отношению к общему количеству смеси (8 л) содержание кислорода составляет

$$\frac{(8 - x)^2 \cdot 0,02}{8} \cdot 100 = \frac{(8 - x)^2}{4}. \text{ Согласно условию, по-}$$

лучим уравнение $\frac{(8 - x)^2}{4} = 9$, откуда $(8 - x)^2 = 36$,

$$8 - x = \pm 6, \text{ т. е. } x_1 = 2, x_2 = 14.$$

Очевидно, что 14 л выпустить из сосуда, в котором было 8 л, невозможно.

Значит, каждый раз из сосуда выпускали по 2 л смеси.

Ответ: 2 л.

Задачи

Задачи на составление уравнений I степени

1. Числитель дроби на 3 меньше знаменателя. Если ее числитель и знаменатель увеличить на 4, то получится $\frac{2}{3}$. Найти дробь.

2. Знаменатель дроби на 5 больше ее числителя. Если к числителю этой дроби прибавить 14, а от знаменателя отнять 1, то получится дробь, обратная данной. Найти дробь.

3. Участок площадью 864 га разделен на 3 поля так, что третье поле имеет площадь, равную сумме площадей первых двух полей. Определить площадь каждого поля, если известно, что площадь второго поля относится к площади первого, как 11 : 5.

4. В одном элеваторе зерна было в 2 раза больше, чем в другом. Из первого элеватора вывезли 750 т зерна, а во второй элеватор привезли 350 т, после чего в обоих элеваторах зерна стало поровну. Сколько зерна было первоначально в каждом элеваторе?

5. Расстояние между городами А и В по шоссе равно 50 км. Из города А в город В отправился велосипедист, а через 1 ч 30 мин. вслед за ним отправился мотоциклист, который обогнал велосипедиста и прибыл в город В на 1 ч раньше его. Найти скорость каждого, зная, что мотоциклист двигался со скоростью в 2,5 раза большей, чем велосипедист.

6. Расстояние между двумя станциями электропоезд проходит за 1 ч 30 мин. Если скорость его увеличить на 10 км/ч, то это же расстояние электропоезд пройдет за 1 ч 20 мин. Определить расстояние между станциями.

7. Пассажир, ехавший в поезде со скоростью 40 км/ч, заметил что встречный поезд проехал мимо за 3 с. Определить скорость встречного поезда, если известно, что длина его 75 м.

8. Переднее колесо повозки на некотором расстоянии сделало на 15 оборотов более заднего. Окружность переднего колеса равна 2,5 м, а заднего — 4 м. Сколько оборотов сделало каждое колесо и какое расстояние проехала повозка?

9. Заказ по выпуску машин завод должен был выполнить за 15 дней. Но уже за два дня до срока завод не только выполнил план, но выпустил сверх плана еще 6 машин, так как ежедневно выпускал по 2 машины сверх плана. Сколько машин должен был выпустить завод по плану?

10. Смешивают 2 кг горячей воды и 3 кг воды при температуре 10°C . Температура смеси оказалась равной 40°C . Найти температуру взятой для смеси горячей воды.

Задачи на составление систем уравнений I степени

11. За три пары лыж и четыре пары коньков уплатили 4700 руб. Сколько стоит пара лыж и сколько стоит пара коньков, если две пары коньков дороже одной пары лыж на 100 руб.?

12. Пять одинаковых шариковых ручек дороже двух коробок цветных карандашей на 25 руб. 50 коп., а две шариковые ручки дешевле пяти коробок цветных карандашей на 15 руб. Сколько стоит одна шариковая ручка и одна коробка цветных карандашей?

13. Из двух сортов муки ценой 3 руб. 10 коп. и 4 руб. 60 коп. за килограмм составили 50 кг смеси ценой по 4 руб. за килограмм. Сколько килограммов муки каждого сорта входит в смесь?

14. Для технических целей смешали 5 л спирта I сорта и 7 л спирта II сорта и получили спирт крепостью 65° . Если взять 20 л I сорта и 4 л II сорта, то смесь выйдет крепостью 70° . Определить крепость спирта каждого сорта.

15. Из двух городов, расстояние между которыми 650 км, отправляются одновременно навстречу друг другу два поезда. Через 10 ч после отправления поезда встречаются. Если же первый поезд отправится на 4 ч 20 мин. раньше второго, то встреча произойдет через 8 ч после отправления второго поезда. Найти скорость каждого поезда.

16. Две бригады рабочих должны были по плану изготовить за месяц 680 деталей. Первая бригада перевыполнила месячное задание на 20 %, а вторая — на

15 %, и поэтому обеими бригадами было изготовлено сверх плана 118 деталей. Сколько деталей должна была по плану изготовить каждая бригада за месяц?

17. Токарь и ученик должны были изготовить за смену 65 деталей. Благодаря тому, что токарь перевыполнил план на 10 %, а ученик на 20 %, они изготовили 74 детали. Сколько деталей по плану должен был изготовить за смену токарь и сколько ученик?

18. По окружности, длина которой 999 м, движутся два тела по одному и тому же направлению и встречаются через каждые 37 мин. Определить скорость каждого тела, если известно, что скорость первого в 4 раза больше скорости второго.

Задачи на составление квадратных уравнений

19. Садовый участок, имеющий форму прямоугольника, одна сторона которого на 10 м больше другой, требуется обнести изгородью. Определить длину изгороди, если известно, что площадь участка равна 1200 м^2 .

20. От листа жести, имеющего форму квадрата, отрезали полосу шириной 3 дм, после чего площадь оставшейся части листа стала равна 10 дм^2 . Определить первоначальные размеры листа жести.

21. В зрительном зале клуба было 320 мест. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили еще один ряд, в зрительном зале стало 420 мест. Сколько стало рядов в зрительном зале клуба?

22. Лодка против течения прошла 22,5 км и по течению 28,5 км, затратив на весь путь 8 ч. Определить скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2,5 км/ч.

23. С аэродрома вылетают одновременно в пункт, отстоящий от него 3600 км, два самолета. Скорость первого из них на 120 км/ч больше скорости второго, а потому он прилетает к месту назначения на час раньше второго. Найти скорость каждого самолета.

24. Из пункта А отправили по течению реки плот. Через 5 ч 20 мин. вслед за плотом из того же пункта вышла моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 км. Найти скорость плота, если известно, что

скорость моторной лодки на 12 км/ч больше скорости плота.

25. Поезд должен был пройти 840 км. В середине пути он был задержан на 30 мин, а потому, чтобы прибыть вовремя, должен был увеличить скорость на 2 км/ч. Сколько времени поезд затратил на весь путь?

26. Двое рабочих, работая вместе, выполняют некоторую работу за 8 ч. Работая порознь, первый из них может выполнить всю работу на 12 ч скорее второго. За сколько часов каждый из них может выполнить всю работу?

27. Бак наполняется двумя кранами. Наполнение бака только через первый кран длится на 22 мин дольше, чем наполнение бака только через второй кран. Если же открыть оба крана, то бак наполнится через 1 ч. За какое время каждый кран в отдельности может наполнить бак?

28. К раствору, содержащему 40 г соли, добавили 200 г воды, после чего его концентрация уменьшилась на 10 %. Сколько воды содержал раствор и какова его концентрация?

29. Сумма двузначного числа с квадратом цифры его десятков равна 100. Найти это двузначное число, если цифра его десятков на 2 больше цифры единиц.

30. Цифра десятков двузначного числа на 1 больше цифры единиц. Найти это двузначное число, если произведение цифры его десятков на само число равно 96.

Задачи на составление систем уравнений II степени

31. При одновременном действии двух труб бассейн наполняется за 40 ч. Если бы одну треть бассейна наполнила первая труба, а затем остальную часть – вторая труба, то для наполнения бассейна понадобилось бы 78 ч. За сколько времени могла бы наполнить бассейн каждая труба, работая одна?

32. Два велосипедиста выехали одновременно из пунктов А и В, расстояние между которыми 28 км, и встретились через час. С какой скоростью двигался

каждый велосипедист, если один прибыл в пункт В на 35 мин. позже, чем другой в пункт А?

33. Два поезда выходят одновременно из пунктов М и N, расстояние между которыми 45 км, и встречаются через 20 мин. Поезд, вышедший из М, прибывает на станцию N на 9 мин раньше, чем другой поезд в М. Какова скорость каждого поезда?

34. Задумано двузначное число. Если к этому числу прибавить удвоенную сумму его цифр, то получится 96. Если же задуманное число умножить на сумму его цифр, то получится 952. Найти задуманное число.

35. Сумма двух чисел равна 20, а сумма их квадратов равна 218. Найти эти числа.

36. Найти два числа, сумма, разность и произведение которых находятся в соотношении 5 : 1 : 18.

37. Двузначное число втрое больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы равен утроенному исходному числу. Найти это число.

38. Две суммы составляют 10 000 руб. Процентная такса для каждой суммы равна $\frac{1}{1000}$, а общая сумма годового дохода составляет 580 руб. Как велика каждая сумма в отдельности?

39. Периметр прямоугольника равен 14 см, площадь его равна 12 см^2 . Каковы стороны прямоугольника?

40. Площадь прямоугольного треугольника равна 90 см^2 . Сумма площадей квадратов, построенных на его катетах, равна 369 см^2 . Каковы катеты этого треугольника?

§ 8. Иррациональные уравнения

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком корня (радикала), называются *иррациональными*. При решении иррациональных уравнений речь всегда идет о нахождении только действительных корней.

Основные методы решения иррациональных уравнений:

1) возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень;

2) введение новых переменных;

3) искусственные приемы решения.

Заметим, что все корни четной степени, входящие в уравнение, являются арифметическими, а все корни нечетной степени определены при любом действительном значении подкоренного выражения. При возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень следует учесть, что если n — четное число, то уравнение $(f(x))^n = (\varphi(x))^n$ является следствием уравнения $f(x) = \varphi(x)$, т. е. при переходе от уравнения $f(x) = \varphi(x)$ к уравнению $(f(x))^n = (\varphi(x))^n$ могут появиться посторонние корни.

При решении иррациональных уравнений используется формула $(\sqrt[n]{f(x)})^n = f(x)$, применение которой может привести к расширению области определения уравнения в случае четного n .

По этим причинам (и по другим) при решении иррациональных уравнений в большинстве случаев необходима проверка найденных корней.

Сам способ проверки зависит от вида найденных решений (простые или сложные), а также от способа решения уравнения.

В случае, когда при решении уравнений получают громоздкие корни (и проверка затруднительна), целесообразней переходить к равносильным системам уравнений и неравенств (смешанным системам).

1. Метод возведения обеих частей в одну и ту же степень

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+13} = 7$.

Решение

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x - 2 + 2\sqrt{(x-2)(2x+13)} + 2x + 13 = 49 \text{ или}$$

$$2\sqrt{(x-2)(2x+13)} = 38 - 3x. \quad (1)$$

Вновь возведем обе части (1) в квадрат:

$$4(2x^2 + 9x - 26) = 1444 - 228x + 9x^2 \text{ или}$$

$x^2 - 264x + 1548 = 0$, откуда находим
 $x_1 = 6$, $x_2 = 258$.

Проверка. $x_1 = 6$, $\sqrt{6-2} + \sqrt{2 \cdot 6 + 13} = 2 + 5 = 7$.
Значит, $x_1 = 6$ — корень уравнения;

$x_2 = 258$, $\sqrt{258-2} + \sqrt{2 \cdot 258 + 13} = 16 + 23 = 39 \neq 7$, т. е. $x_2 = 258$ — посторонний корень.

Ответ: $x = 6$.

Замечание. Если уединить один из радикалов, а затем возвести обе части полученного уравнения в квадрат, то опять получим то же уравнение.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + 2x - 2} + \sqrt{x^2 + 7x - 4} = 3.$$

Решение

Уединим один из радикалов:

$\sqrt{x^2 + 2x - 2} = 3 - \sqrt{x^2 + 7x - 4}$ и возведем обе части полученного уравнения в квадрат: $x^2 + 2x - 2 =$

$= 9 - 6\sqrt{x^2 + 7x - 4} + x^2 + 7x - 4$ или

$$6\sqrt{x^2 + 7x - 4} = 5x + 7.$$

Вновь возведем обе части полученного уравнения в квадрат: $36(x^2 + 7x - 4) = 25x^2 + 70x + 49$ или $11x^2 + 182x - 193 = 0$, откуда находим:

$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{193}{11}.$$

Проверка. $x_1 = 1$, $\sqrt{1+2-2} + \sqrt{1+7-4} = 1 + 2 = 3$.
Значит, $x_1 = 1$ — корень данного уравнения.

Попытка аналогично проверить второй корень приводит к сложным вычислениям. Поступим иначе.

Проверим, является ли $x_2 = -\frac{193}{11}$ корнем уравнения

$$6\sqrt{x^2 + 7x - 4} = 5x + 7. \quad (2)$$

Заметим, что при $x = -\frac{193}{11}$ левая часть уравнения (2) неотрицательна, а правая — отрицательна. Значит,

$x_2 = -\frac{193}{11}$ не является корнем уравнения (2), и так как уравнение (2) является следствием исходного уравнения, то тем более x_2 не является корнем данного уравнения.

Ответ: $x = 1$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x+3} = \sqrt[3]{12(x+1)}.$$

Решение

Возведем обе части уравнения в куб, применив формулу куба суммы двух чисел в виде $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. Тогда получим

$$x + 2x + 3 + 3\sqrt[3]{x(2x+3)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x+3}) = 12(x+1). \quad (3)$$

По условию $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x+3} = \sqrt[3]{12(x+1)}$, тогда

$$\sqrt[3]{x(2x+3) \cdot 12(x+1)} = 3(x+1). \quad (4)$$

Вновь возведем в куб обе части уравнения (4):

$$12x(x+1)(2x+3) = 27(x+1)^3 \text{ или}$$

$$(x+1)(12x(2x+3) - 27(x+1)^2) = 0,$$

$$\text{откуда } x_1 = -1 \text{ или } 12x(2x+3) - 27(x+1)^2 = 0,$$

$$24x^2 + 36x - 27x^2 - 54x - 27 = 0,$$

$$3x^2 + 18x + 27 = 0, x^2 + 6x + 9 = 0, (x+3)^2 = 0, \text{ от-}$$

куда $x_2 = -3$. Проверка показывает, что найденные корни удовлетворяют исходному уравнению.

Замечание. Известно, что при возведении обеих частей уравнения в нечетную степень не нарушается равносильность уравнения, тогда, казалось бы, найденные корни можно не проверять. Однако это не так. Объясняется это тем, что при переходе от уравнения

(3) к уравнению (4) мы заменили $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x+3}$ выражением $\sqrt[3]{12(x+1)}$, и если всякий корень уравнения (3) является и корнем уравнения (4), то обратное, вообще говоря, неверно. Следовательно, уравнение (4) является следствием уравнения (3). Вот почему необходима проверка корней. Следующий пример подтверждает сказанное.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}.$$

Решение

После почленного возведения уравнения в куб и подстановки $\sqrt[3]{x-1}$ вместо $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}$, имеем $x+1+3x+1+3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)} \cdot \sqrt[3]{x-1} = x-1$,

откуда $\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)(x-1)} = -(x+1)$ или

$$(x+1)(3x+1)(x-1) = -(x+1)^3.$$

Следовательно, либо $x+1=0$, т. е. $x_1 = -1$, либо $(3x+1)(x-1) = -(x+1)^2$, или $4x^2 = 0$, откуда $x_2 = 0$.

Подставляя найденные значения x в исходное уравнение, убеждаемся, что корень $x_2 = 0$ уравнению не удовлетворяет. Значит, данное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $x = -1$.

2. Метод введения новых переменных

Пример 5. Решить уравнение

$$3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2.$$

Решение

Понятно, что уединение корня и возведение обеих частей полученного уравнения в квадрат привело бы к довольно громоздкому уравнению, решить которое было бы весьма затруднительно. Вместе с тем, если записать данное уравнение в виде

$$3(x^2 + 5x + 1) + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 5, \text{ то, обозначив}$$

$$\sqrt{x^2 + 5x + 1} = y, \text{ где } y \geq 0, \text{ получим уравнение } 3y^2 +$$

$$+ 2y - 5 = 0, \text{ корни которого } y_1 = 1; y_2 = -\frac{5}{3}.$$

Так как $y \geq 0$, то y_2 не подходит.

Если $y = 1$, то $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 1$, $x^2 + 5x = 0$, $x(x+5) = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = -5$.

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -5$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} + 2\sqrt{(x-2)(x+6)} = 2(8-x).$$

Решение

Область определения уравнения находим из условий $x-2 \geq 0$; $8-x \geq 0$, откуда $2 \leq x \leq 8$.

Запишем данное уравнение в виде

$$(x-2) + 2\sqrt{(x-2)(x+6)} + (x+6) + \\ + (\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6}) = 20.$$

Полученное уравнение можно записать так:

$$(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6})^2 + (\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6}) = 20. \quad (5)$$

Пусть $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} = y$, где $y > 0$, тогда уравнение (1) примет вид $y^2 + y - 20 = 0$, откуда $y_1 = 4$, $y_2 = -5$ (не удовлетворяет условию $y > 0$).

Если $y = 4$, то, учитывая подстановку, получим

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} = 4. \quad (6)$$

Уравнение (6) можно решить обычным, стандартным способом: $\sqrt{x-2} = 4 - \sqrt{x+6}$, или

$$x-2 = 16 - 8\sqrt{x+6} + x+6, \text{ или}$$

$$8\sqrt{x+6} = 24, \quad \sqrt{x+6} = 3, \quad x+6 = 9, \text{ откуда } x = 3 \\ (\text{удовл., ООУ}).$$

Нетрудно проверить, что $x = 3$ — корень уравнения (6), и так как уравнение (6) равносильно исходному, то $x = 3$ является корнем и данного уравнения.

Ответ: $x = 3$.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt[3]{7-x} = \sqrt{x+3} - 2$.

Решение

Пусть $\sqrt[3]{7-x} = a$, $\sqrt{x+3} = b$, где $b \geq 0$.

Тогда $7-x = a^3$ и $x+3 = b^2$.

Складывая полученные равенства, имеем

$$a^3 + b^2 = 10. \quad (7)$$

Учитывая подстановки, данное уравнение примет вид $a = b - 2$ или $b = a + 2$. (8)

Таким образом, для нахождения a и b имеем систему уравнений
$$\begin{cases} a^3 + b^2 = 10, \\ b = a + 2. \end{cases}$$

Значение $b = a + 2$ подставим в I уравнение системы: $a^3 + (a + 2)^2 = 10$ или $a^3 + a^2 + 4a - 6 = 0$. (9)

Заметим, что $a = 1$ — корень уравнения (9), тогда $a^2(a - 1) + 2a(a - 1) + 6(a - 1) = 0$, или $(a - 1)(a^2 + 2a + 6) = 0$, откуда $a_1 = 1$ или $a^2 + 2a + 6 = 0$ — нет корней ($D < 0$).

Если $a = 1$, то из (8) имеем $b = 3$.

Так как $7 - x = a^3$, то $x = 7 - 1 = 6$.

Найденный корень удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ: $x = 6$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{2x+3}} = \frac{4x^2 + 13x - 10}{2x^2 + 5x + 3}.$$

Решение

Область определения уравнения (ООУ):

$$x + 1 > 0, 2x + 3 > 0.$$

Так как $2x^2 + 5x + 3 = (x + 1)(2x + 3)$, то

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 + 13x - 10}{2x^2 + 5x + 3} &= \frac{2(2x^2 + 5x + 3) + 3x - 16}{2x^2 + 5x + 3} = \\ &= 2 + \frac{3x - 16}{(x + 1)(2x + 3)}. \end{aligned}$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{2x+3}} = 2 + \frac{3x - 16}{(x + 1)(2x + 3)}. \quad (10)$$

Пусть $\begin{cases} \sqrt{x+1} = a, \\ \sqrt{2x+3} = b, \end{cases}$ где $a > 0, b > 0$, тогда

$$\begin{cases} x + 1 = a^2, \\ 2x + 3 = b^2. \end{cases} \quad (11)$$

Складывая левые и правые части системы (11), имеем: $3x + 4 = a^2 + b^2$ или $3x = a^2 + b^2 - 4$, тогда (10)

примет вид $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2 + \frac{a^2 + b^2 - 20}{ab}$ или $a + b = 2ab + a^2 + b^2 - 20$, $(a + b)^2 - (a + b) - 20 = 0$, откуда $a + b = 5$ или $a + b = -4$.

Учитывая подстановки, получим 2 уравнения:

$$1) \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 5, \sqrt{2x+3} = 5 - \sqrt{x+1},$$

$$2x + 3 = 25 - 10\sqrt{x+1} + x + 1 \text{ или}$$

$$\begin{cases} 10\sqrt{x+1} = 23 - x, \\ x \leq 23, \end{cases}$$

$100(x+1) = 529 - 46x + x^2$ или $x^2 - 146x + 429 = 0$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = 143$.

Корень $x_2 = 143$ не удовлетворяет условию $x \leq 23$, значит, не является корнем исходного уравнения.

Корень $x_1 = 3$ — корень данного уравнения.

$$2) \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = -4 \text{ — нет корней.}$$

Итак, исходное уравнение имеет единственный корень $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x-15} = 4$.

Решение

Область определения уравнения

$$\begin{cases} 97 - x \geq 0, \\ x - 15 \geq 0, \end{cases} \quad 15 \leq x \leq 97.$$

Пусть $\begin{cases} \sqrt[4]{97-x} = a, \\ \sqrt[4]{x-15} = b, \end{cases}$ где $a \geq 0$, $b \geq 0$, тогда данное

уравнение примет вид $a + b = 4$.

Учитывая подстановки, имеем $a^4 = 97 - x$ и $b^4 = x - 15$, или складывая $a^4 + b^4 = 82$.

Таким образом, для нахождения a и b имеем симметрическую систему уравнений

$$\begin{cases} a + b = 4, \\ a^4 + b^4 = 82, \\ a \geq 0, b \geq 0. \end{cases}$$

Упростим II уравнение полученной системы:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = ((a + b)^2 - 2ab)^2 - 2a^2b^2 = \\ &= (4^2 - 2ab)^2 - 2a^2b^2 = 82, \text{ или } (16 - 2ab)^2 - 2a^2b^2 = 82, \\ 4(8 - ab)^2 - 2a^2b^2 &= 82, 128 - 32ab + 2a^2b^2 - a^2b^2 = 41, \\ (ab)^2 - 32ab + 87 &= 0, \text{ откуда } (ab)_1 = 3, (ab)_2 = 29. \end{aligned}$$

Учитывая, что $a + b = 4$, получим 2 системы:

$$1) \begin{cases} a + b = 4, \\ ab = 3, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} a = 3, \\ b = 1; \end{cases} \begin{cases} a = 1, \\ b = 3, \end{cases}$$

$$x = b^4 + 15 = 97 - a^4,$$

$$x_1 = 16, x_2 = 96.$$

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

$$2) \begin{cases} a + b = 4, \\ ab = 29, \end{cases} \begin{cases} a = 4 - b, \\ (4 - b)b = 29, \end{cases}$$

$b^2 - 4b + 29 = 0$ — нет действительных корней, так как $D < 0$.

Итак, данное уравнение имеет два корня.

Ответ: $x_1 = 16, x_2 = 96$.

3. Искусственные приемы решения

Пример 10. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{1 - x + x^2} = 2.$$

Решение

Умножим обе части уравнения на выражение, сопряженное левой части уравнения:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{1 - x + x^2} \right) \times \\ & \times \left(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2} \right) = \\ & = 2 \left(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2} \right) \text{ или} \end{aligned}$$

$$1 + x + x^2 - (1 - x + x^2) = \\ = 2 \left(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2} \right) \text{ или}$$

$$\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2} = x. \quad (12)$$

Уравнение (12) вместе с данным решаем как систему:

$$\begin{cases} \sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{1 - x + x^2} = 2, \\ \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2} = x. \end{cases}$$

Складывая левые и правые части полученной системы, имеем $2\sqrt{1 + x + x^2} = 2 + x$ или $4(1 + x + x^2) = 4 + 4x + x^2$, $4x^2 - x^2 = 0$, $3x^2 = 0$, $x^2 = 0$, откуда $x = 0$.

Нетрудно проверить, что $x = 0$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 0$.

Пример 11. Решить уравнение

$$16x^2 + 9x + 117 = 24x \sqrt{x + 13}.$$

Решение

Запишем данное уравнение в виде

$$16x^2 - 24x\sqrt{x + 13} + 9(x + 13) = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) можно решить разными способами.

Способ 1

(выделение в левой части полного квадрата)

$$(4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3\sqrt{x + 13} + 3^2(x + 13) = 0 \text{ или}$$

$$(4x - 3\sqrt{x + 13})^2 = 0, \quad 4x = 3\sqrt{x + 13}, \quad x > 0 - \text{следует}$$

из условия исходного уравнения, так как

$16x^2 + 9x + 117 > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$ и $x + 13 \geq 0$. Далее имеем: $16x^2 = 9(x + 13)$ или $16x^2 - 9x - 117 = 0$,

откуда получим $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{78}{32} < 0$ (не годится).

Найденный корень $x = 3$ удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ: $x = 3$.

Способ 2 (замена переменной)

Заметим, что при $x = 0$ и при $x = -13$ равенство (13) не выполняется, тогда, разделив обе части (13) на $x\sqrt{x+13} \neq 0$, получим

$$16 \cdot \frac{x}{\sqrt{x+13}} + 9 \cdot \frac{\sqrt{x+13}}{x} - 24 = 0. \quad (14)$$

Пусть $\frac{x}{\sqrt{x+13}} = y$, где $x > 0$, тогда $y > 0$ и

$$16y + \frac{9}{y} - 24 = 0, \quad 16y^2 - 24y + 9 = 0, \quad (4y - 3)^2 = 0,$$

откуда $y = \frac{3}{4}$, тогда $\frac{x}{\sqrt{x+13}} = \frac{3}{4}$, $4x = 3\sqrt{x+13}$ и т. д. (см. I способ).

Способ 3 (приведение к однородному)

Пусть $\sqrt{x+13} = y$, тогда $9x + 117 = 9(x+13) = 9y^2$, и данное уравнение примет вид $16x^2 - 24xy + 9y^2 = 0$ — однородное уравнение II степени. Вместе с тем полученное уравнение можно представить в виде $(4x - 3y)^2 = 0$ и т. д., аналогично II способу.

Ответ: $x = 3$.

Пример 12. Решить уравнение

$$x = 2\sqrt{x-3} + \sqrt[4]{x^3 - 3x^2}.$$

Решение

Запишем данное уравнение в виде

$$x - \sqrt{x-3} = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x-3} + \sqrt{x-3} \quad \text{или} \\ x - \sqrt{x-3} = \sqrt[4]{x-3}(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x-3}). \quad (15)$$

Левую часть (15) разложим на множители

$$x - \sqrt{x-3} = (\sqrt{x} - \sqrt[4]{x-3})(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x-3}), \quad \text{тогда уравнение (15) примет вид} \\ (\sqrt{x} - \sqrt[4]{x-3})(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x-3}) = \sqrt[4]{x-3}(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x-3}). \quad (16)$$

Так как $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x-3} > 0$, то из (16) получим $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x-3} = \sqrt[4]{x-3}$ или $\sqrt{x} = 2\sqrt[4]{x-3}$,

$$\begin{cases} x^2 = 16(x-3), \\ x \geq 0; \end{cases} \quad x^2 - 16x + 48 = 0, \text{ откуда } x_1 = 4, x_2 = 12.$$

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 12$.

Пример 13. Решить уравнение

$$1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12x} \quad (17)$$

Решение

Способ 1

Область определения уравнения $x \neq 0, x^2 - 1 > 0$.

Умножим обе части уравнения (17) на $x \neq 0$:

$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}. \quad (18)$$

Возведем обе части (18) в квадрат:

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{x^2}{x^2 - 1} \right) + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} &= \frac{1225}{144} \text{ или} \\ \frac{x^4}{x^2 - 1} + 2 \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} &= \frac{1225}{144}. \end{aligned} \quad (19)$$

Пусть $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = y$, где $y > 0$, тогда уравнение (19)

$$\text{примет вид } y^2 + 2y - \frac{1225}{144} = 0.$$

Заметим, что освободиться от знаменателя в полученном уравнении нет необходимости:

$$\frac{D}{4} = 1 + \frac{1225}{144} = \frac{1369}{144} = \left(\frac{37}{12} \right)^2 > 0, \quad y_{1,2} = -1 \pm \frac{37}{12},$$

откуда $y_1 = \frac{25}{12}, y_2 = -\frac{49}{12} < 0$ (не удовл., так как $y > 0$).

Учитывая подстановку, получим

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{25}{12}, \text{ или } \frac{x^4}{x^2-1} = \frac{625}{144}, \text{ или}$$
$$144x^4 - 625x^2 + 625 = 0, D = 625^2 - 4 \cdot 625 \cdot 144 =$$
$$= 625 \cdot (625 - 576) = 25^2 \cdot 7^2 = 175^2 > 0;$$
$$x^2 = \frac{625 \pm 175}{288}, \text{ откуда } x^2 = \frac{800}{288} = \frac{25}{9},$$
$$x^2 = \frac{450}{288} = \frac{25}{16}.$$

Так как $x > 0$, то $x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = \frac{5}{4}$.

Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = \frac{5}{4}$.

Способ 2

Пусть $\sqrt{x^2-1} = y$, где $y > 0$, тогда $x^2 = y^2 + 1$, и уравнение (17) примет вид $1 + \frac{1}{y} = \frac{35}{12x}$. (20)

Возведем обе части уравнения (20) в квадрат:

$$1 + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2} = \frac{1225}{144x^2}, \text{ и так как } x^2 = y^2 + 1, \text{ то имеем}$$
$$1 + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2} = \frac{1225}{144(y^2+1)} \text{ или } y + 2 + \frac{1}{y} = \frac{1225y}{144(y^2+1)},$$

где $y > 0$. Полученное уравнение запишем в виде

$$y + \frac{1}{y} + 2 = \frac{1225}{144 \left(y + \frac{1}{y} \right)}.$$

Теперь идея решения понятна. Обозначим

$$y + \frac{1}{y} = t, \text{ тогда получим уравнение } t + 2 = \frac{1225}{144t}$$

$$\text{или } t^2 + 2t - \frac{1225}{144} = 0 \text{ и т. д., как в I способе.}$$

§ 9. Системы иррациональных уравнений

Такие системы решаются различными способами. Рассмотрим несколько примеров с применением различных идей решения.

Пример 14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ 2x - y = 17. \end{cases}$$

Решение

Пусть $\begin{cases} \sqrt{x} = u, \\ \sqrt{y} = v, \end{cases}$ тогда $\begin{cases} x = u^2, \\ y = v^2 \end{cases}$, где $u \geq 0, v \geq 0$.

Получим систему

$$\begin{cases} u + v = 4, \\ 2u^2 - v^2 = 17. \end{cases} \quad (21)$$

Полученную систему уравнений решим способом подстановки: $v = 4 - u$, тогда II уравнение системы (21) примет вид $2u^2 - (4 - u)^2 = 17$ или $2u^2 - 16 + 8u - u^2 = 17$, $u^2 + 8u - 33 = 0$, откуда $u_1 = 3$, $u_2 = -11$ (не подходит, так как $u \geq 0$).

Если $u = 3$, то $v = 4 - 3 = 1$, тогда $x = 3^2 = 9$; $y = 1$.

Найденная пара (9; 1) является решением исходной системы.

Ответ: (9; 1).

Пример 15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 1, \\ xy = -8. \end{cases}$$

Решение

Способ 1

Запишем данную систему в виде
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 1, \\ \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = -2. \end{cases}$$

Заметим, что $\sqrt[3]{x}$ и $\sqrt[3]{y}$ можно рассматривать как корни квадратного уравнения вида $z^2 - z - 2 = 0$.

Таким образом, $\sqrt[3]{x} = 2; \sqrt[3]{y} = -1$ или $\sqrt[3]{x} = -1, \sqrt[3]{y} = 2$; тогда $x_1 = 8, y_1 = -1, x_2 = -1, y_2 = 8$.

Итак, исходная система имеет 2 решения.

Ответ: $(8; -1); (-1; 8)$.

Способ 2

Возведем в куб обе части I уравнения системы, используя формулу $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$:

$$x + y = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3 - 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}), \text{ или } x + y = 1^3 - 3\sqrt[3]{-8 \cdot 1}, \text{ или } x + y = 7.$$

Решая полученное уравнение со II уравнением исходной системы, имеем

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = -8, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x_1 = 8, \\ y_1 = -1, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 8. \end{cases}$$

Ответ: $(8, -1), (-1, 8)$.

Пример 16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{6}, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

Решение

Пусть $\sqrt{\frac{x}{y}} = t$, тогда $\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{t}$, где $t > 0$.

Тогда I уравнение системы примет вид $t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6}$
или $6t^2 - 5t - 6 = 0$.

Решая полученное уравнение, находим

$$t_1 = \frac{3}{2}, t_2 = -\frac{2}{3}.$$

Так как $t > 0$, то корень $t = -\frac{2}{3}$ не подходит.

Если $t = \frac{3}{2}$, то $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{3}{2}$, $\frac{x}{y} = \frac{9}{4}$, $x = \frac{9}{4}y$.

Решая полученное уравнение со II уравнением данной системы способом подстановки, имеем

$$\begin{cases} x - y = 5, \\ x = \frac{9}{4}y; \end{cases} \begin{cases} \frac{9}{4}y - y = 5, \\ x = \frac{9}{4}y; \end{cases} \begin{cases} \frac{5}{4}y = 5, \\ x = \frac{9}{4}y; \end{cases} \begin{cases} y = 4, \\ x = 9. \end{cases}$$

Найденная пара удовлетворяет исходной системе.
 Ответ: (9; 4).

Пример 17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2y + y^2x = 20. \end{cases}$$

Решение

Способ 1

Пусть $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$, где $u \geq 0$, $v \geq 0$, тогда $x = u^2$, $y = v^2$, и данная система примет вид

$$\begin{cases} u^2v + uv^2 = 6, \\ u^4v^2 + u^2v^4 = 20; \end{cases} \begin{cases} uv(u + v) = 6, \\ u^2v^2(u^2 + v^2) = 20. \end{cases} \quad (22)$$

Пусть $\begin{cases} u + v = a, \\ uv = b \end{cases}$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$, тогда система (22)

примет вид $\begin{cases} ab = 6, \\ b^2(a^2 - 2b) = 20. \end{cases}$

Упростим II уравнение полученной системы, учитывая, что $ab = 6$: $a^2b^2 - 2b^3 = 20$ или $36 - 2b^3 = 20$,

$2b^3 = 16$; $b^3 = 8$, откуда $b = 2$, тогда $a = \frac{6}{2} = 3$.

Следовательно, $\begin{cases} u + v = 3, \\ uv = 2, \end{cases}$

откуда $\begin{cases} u = 2, \\ v = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} u = 1, \\ v = 2. \end{cases}$

Таким образом, $\begin{cases} x = 2^2 = 4, \\ y = 1^2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 4. \end{cases}$

Обе пары удовлетворяют исходной системе.

Ответ: (4; 1), (1; 4).

Способ 2

Пусть $x\sqrt{y} = u$, $y\sqrt{x} = v$, где $u \geq 0$, $v \geq 0$, тогда $u^2 = x^2y$, $v^2 = xy^2$, и данная система запишется в виде

$$\begin{cases} u + v = 6, \\ u^2 + v^2 = 20, \end{cases} \begin{cases} u + v = 6, \\ (u + v)^2 - 2uv = 20, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u + v = 6, \\ 36 - 2uv = 20, \end{cases} \begin{cases} u + v = 6, \\ uv = 8, \end{cases}$$

откуда имеем 2 пары решений: $u = 2$, $v = 4$ или $u = 4$, $v = 2$.

Учитывая подстановки, имеем системы:

$$1) \begin{cases} x\sqrt{y} = 2, \\ y\sqrt{x} = 4, \end{cases} \begin{cases} x^2y = 4, \\ xy^2 = 16, \end{cases}$$

перемножая уравнения системы, получим

$x^3y^3 = 64$, откуда $xy = 4$, тогда, решая полученное уравнение, например, с уравнением $x^2y = 4$, находим подстановкой $(xy) \cdot x = 4$, $4x = 4$, $x = 1$, тогда $y = 4$.

$$2) \begin{cases} x\sqrt{y} = 4, \\ y\sqrt{x} = 2. \end{cases}$$

Решая аналогично, получим $x = 4$, $y = 1$.

Ответ: (4; 1), (1; 4).

Пример 18. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7, \\ 3x+2y = 23. \end{cases}$$

Решение

Пусть $\sqrt{x+y} = u$, $\sqrt{2x+y+2} = v$, где $u \geq 0$, $v \geq 0$.

Тогда $x + y = u^2$, $2x + y + 2 = v^2$, значит, $u^2 + v^2 = 3x + 2y + 2$.

Но $3x + 2y = 23$, тогда $u^2 + v^2 = 25$.

Кроме того, I уравнение исходной системы с учетом подстановок примет вид $u + v = 7$.

Следовательно, для нахождения u и v имеем систему уравнений
$$\begin{cases} u + v = 7, \\ u^2 + v^2 = 25. \end{cases}$$

Полученную систему можно решать способом подстановки, а можно и так: $u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv$ или $25 = 49 - 2uv$, откуда $uv = 12$. Далее имеем

$$\begin{cases} u + v = 7, \\ uv = 12, \end{cases} \quad \begin{cases} u = 3, \\ v = 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u = 4, \\ v = 3. \end{cases}$$

Учитывая подстановки, получим две системы:

1) $\begin{cases} x + y = 9, \\ 2x + y + 2 = 16. \end{cases}$ Вычитая из II уравнения I, находим $x + 2 = 16 - 9$, $x_1 = 5$, тогда $y_1 = 9 - 5 = 4$.

2) $\begin{cases} x + y = 16, \\ 2x + y + 2 = 9; \end{cases}$ аналогично $x + 2 = -7$, $x_2 = -9$; $y_2 = 25$.

Найденные пары удовлетворяют исходной системе.

Ответ: (5; 4), (-9; 25).

Задачи

Группа А

Решить уравнения:

1. $\sqrt{x-4} = 3$;
2. $\sqrt[3]{x+1} = -2$;
3. $\sqrt[4]{x-5} = 2$;
4. $\sqrt{x} = 2 - x$;
5. $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+3}$;
6. $(x^2 - 9)\sqrt{2-x} = 0$;
7. $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 6$;
8. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} = 2$;
9. $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{3}$;
10. $(x-2)(x+3)\sqrt{x-8} = 0$;
11. $(x^2-1)\sqrt{2x-1} = 0$;
12. $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} = 6$;

13. $\sqrt{7-x} = x-1$; 14. $1 - \sqrt{1+5x} = x$;
 15. $\sqrt{37-x^2} + 5 = x$.

Группа Б

Решить уравнения:

1. $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 3$; 2. $\sqrt{x-5} + \sqrt{3-x} = 1$;
3. $\sqrt{2x+5} + \sqrt[4]{x+2} = 0$; 4. $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$;
5. $\sqrt{6x-x^2} - 5 + 6 = 2x$;
6. $x^2 - 4x + 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$;
7. $\sqrt[3]{16-x^3} = 4-x$; 8. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$;
9. $\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x} = 2$;
10. $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{4x-7}$;
11. $\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2-4x+4} = 3$;
12. $\sqrt[6]{x-6} + \sqrt{10x+5} = 2$;
13. $x^2 - 3x - 2\sqrt{x} + 5 = 0$;
14. $4x = (\sqrt{x} + 39)\left(1 - \sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$;
15. $\sqrt{5x^2 - 24x + 52} - \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3\sqrt{x-3}$;
16. $\sqrt{x^2 - 1} + 2 = 2x - \sqrt{2x^2 - 8x + 6}$;
17. $x^4 + 1 = x\sqrt{x^4 - 1}$;
18. $\sqrt{2-x} - \sqrt{x-1} = (\sqrt{2-x} + \sqrt{x-1})(3-2x)$;
19. $\sqrt{2x^2 - 1} + 4\sqrt{x^4 - x^2 + 1} = 2\sqrt{3}$;
20. $x^3 + 8 = 9\sqrt[3]{9x-8}$;
21. $(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})^3 + 2\sqrt{x(x+3)} = 33 - 2x$;
22. $\sqrt[3]{2x^2 + 8x + 72} + \sqrt[3]{3x^2 + 12x + 12} = \sqrt{12-4x-x^2}$;
23. $(\sqrt{x+8} + \sqrt{x})^3 - (\sqrt{x+8} - \sqrt{x})^2 = 60$;

24. $\sqrt{x^3 + 3x + 5} + \sqrt{x^3 + 3x + 12} = 7;$
25. $\sqrt[3]{(6+x)^2} - \sqrt[3]{(6+x)(3-x)} + \sqrt[3]{(3-x)^2} = 3;$
26. $8\sqrt[3]{x-4} + \sqrt[3]{x-5} = 6\sqrt[3]{(x-4)(x-5)};$
27. $\sqrt[3]{x} + 6 = (x-6)^3;$
28. $x - \sqrt{x} + \sqrt{x(x+2)} + \sqrt{x+2} = 2;$
29. $x^2 + 4x\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + 7x = 18;$
30. $(3x-1)\sqrt{1+x} + 2\sqrt{3-x} = 2\sqrt{9x^2 - 6x + 5};$
31. $\sqrt{1+x} - 3\sqrt{1-x} = \frac{2(5x-4)}{\sqrt{16+x^2}};$
32. $\sqrt{6 - \frac{6}{x}} + \sqrt{x - \frac{6}{x}} = x;$
33. $\frac{20}{\sqrt{x}} + x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} = 24;$
34. $\frac{x^2}{\sqrt{3x-5}} + \sqrt{3x-5} = \frac{5}{2}x;$
35. $2x + \frac{4}{x}(2x-7)^3 = \sqrt{x} + 7;$
36. $\frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{53 + 20x - x^2}} = 2;$
37. $\frac{x^3}{\sqrt{8 - x^2}} = 8 - x^2;$
38. $\frac{9x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} + x^2 + 2 = 3x(1 + \sqrt{x^2 + 2});$
39. $\frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} = x + \sqrt{x^2 - 16} - 6;$
40. $\frac{1}{\sqrt{13 - x^2}} + \frac{1}{x} = \frac{5}{6}.$

Решить системы иррациональных уравнений

$$41. \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ x + y = 10; \end{cases} \quad 42. \begin{cases} \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\frac{y+2}{2x-1}} = 2, \\ x + y = 2; \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 4; \end{cases} \quad 44. \begin{cases} 5\sqrt[3]{x-2y} + 3\sqrt[3]{x+y} = 13, \\ 3\sqrt[3]{x-2y} - 4\sqrt[3]{x+y} = 2; \end{cases}$$

$$45. \begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14, \\ x^2 + y^2 + xy = 84; \end{cases} \quad 46. \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3}, \\ xy = 9; \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ xy = 4; \end{cases} \quad 48. \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \\ x + y + xy = 9; \end{cases}$$

$$49. \begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{x+y} = 6, \\ \sqrt{x+y} - y + x = 2; \end{cases}$$

$$50. \begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

§ 10. Уравнения с модулем

При решении уравнений, содержащих переменную под знаком модуля (абсолютной величины), чаще всего применяются следующие методы:

1) раскрытие модуля на основании ее определения;

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

2) возведение обеих частей уравнения в квадрат;

3) метод разбиения на промежутки.

Рассмотрим применение этих методов на примерах.

Пример 1. Решить уравнение $|5x - 2| = 8$.

Решение

Способ 1

По определению модуля данное уравнение равносильно совокупности двух смешанных систем:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x - 2 \geq 0, \\ 5x - 2 = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x - 2 < 0, \\ 2 - 5x = 8. \end{cases}$$

Из системы а) находим $x_1 = 2$, а из системы б) имеем $x_2 = -1,2$.

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = -1,2$.

Способ 2

Так как обе части исходного уравнения неотрицательны, то оно равносильно уравнению

$|5x - 2|^2 = 64$; но $|t|^2 = t^2$, тогда получим равносильное уравнение $(5x - 2)^2 = 64$, откуда $5x - 2 = \pm 8$, зна-

чит, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{6}{5} = 1,2$.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 1,2$.

Пример 2. Решить уравнение $|5x - 2| = x + 6$. (1)

Решение

Это уравнение также можно решить двумя способами. Если решать уравнение (1) первым способом, то получим совокупность двух смешанных систем:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x - 2 \geq 0, \\ 5x - 2 = x + 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x - 2 < 0, \\ 2 - 5x = x + 6. \end{cases}$$

Из системы а) получим $x_1 = 2$, а из системы б) получим $x_2 = -\frac{2}{3}$.

При решении II способом заметим, что правая часть уравнения (1) должна быть неотрицательна, т. е. $x + 6 \geq 0$. Следовательно, при возведении обеих частей уравнения в квадрат получим уравнение, равносильное исходному. Значит, уравнение (1) равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} x + 6 \geq 0, \\ (5x - 2)^2 = (x + 6)^2, \end{cases}$$

откуда получим $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Пример 3. Решить уравнение $|5x - 2| = |x + 10|$.

Решение

Заметим, что решать данное уравнение относительно проще II способом, так как при этом мы получим одно уравнение, равносильное данному. И действительно: $(5x - 2)^2 = (x + 10)^2$ или $(5x - 2 - x - 10)(5x - 2 + x + 10) = 0$; $(4x - 12)(6x + 8) = 0$, откуда $4x - 12 = 0$ или $6x + 8 = 0$. Значит, $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{4}{3}$.

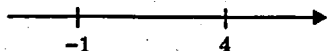
Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{4}{3}$.

Пример 4. Решить уравнение $|4 - x| - |x + 1| = 5$.

Решение

Это уравнение целесообразно решать III способом (методом разбиения на промежутки).

Выражения, стоящие под знаком модулей, обращаются в ноль при $x = 4$ и $x = -1$. Эти точки отмечаем на числовой прямой, которая при этом разбивается на 3 промежутка. Соответственно нам нужно рассмотреть 3 случая:



1) $x \leq -1$; 2) $-1 < x \leq 4$; 3) $x > 4$.

Решим данное уравнение на каждом из этих промежутков. Получим 3 уравнения, в каждом из которых на неизвестное наложено ограничение:

1) $x \leq -1$. В этом случае $4 - x > 0$; $x + 1 < 0$.

Исходное уравнение примет вид $4 - x + x + 1 = 5$ или $5 = 5$ — верно. Значит, уравнение выполняется при $x \leq -1$;

2) $-1 < x \leq 4$; $4 - x - (x + 1) = 5$ или $-2x = 2$, откуда $x = -1$ (не принадлежит промежутку);

3) $x > 4$; $x - 4 - (x + 1) = 5$ или $-5 = 5$ — неверно, значит, при $x > 4$ исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: $x \leq -1$.

Пример 5. Решить уравнение $|x - 4| + |x - 3| = x - 7$.

Решение

Заметим, что это уравнение напоминает предыдущее и может показаться, что его также лучше решать III способом. Однако из исходного уравнения следует, что $x - 7 > 0$, но тогда и $x - 4 > 0$, и $x - 3 > 0$. Следовательно, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x - 4 + x - 3 = x - 7, \\ x > 7 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 0, \\ x > 7, \end{cases} \quad \text{которая не имеет}$$

решений. Значит, исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Пример 6. Решить уравнение $|2x^2 - 3x + 1| = x - 1$.

Решение

Так как $x - 1 \geq 0$, т. е. $x \geq 1$, то данному уравнению соответствуют два уравнения:

1) $2x^2 - 3x + 1 = x - 1$,

$2x^2 - 4x + 2 = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x - 1)^2 = 0$, откуда $x - 1 = 0$, $x_1 = 1$.

Найденный корень $x_1 = 1$ удовлетворяет условию $x \geq 1$, значит, является корнем данного уравнения.

2) $2x^2 - 3x + 1 = 1 - x$,

$2x^2 - 2x = 0$, $x(x - 1) = 0$, откуда $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Корень $x_2 = 0$ не удовлетворяет условию $x \geq 1$, значит, не является корнем данного уравнения

Ответ: $x = 1$.

Пример 7. Решить уравнение $|x^3 - 2x| = 2x + 15$.

Решение

Данное уравнение равносильно двум смешанным системам:

$$1) \begin{cases} x^3 - 2x \geq 0, \\ x^3 - 2x = 2x + 15; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^3 - 2x < 0, \\ 2x - x^3 = 2x + 15. \end{cases}$$

Из системы 1) получим $x^3 - 4x - 15 = 0$, $x(x^2 - 9) + 5(x - 3) = 0$, $(x - 3)(x^2 + 3x + 5) = 0$, откуда $x_1 = 3$.
Уравнение $x^2 + 3x + 5 = 0$ не имеет действительных корней.

Из системы 2) имеем $x^3 = -15$, $x_2 = -\sqrt[3]{15}$.

Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = -\sqrt[3]{15}$.

Пример 8. Решить уравнение $|x^2 - 9| = x^2 - 9$.

Решение

Заметим, что $x^2 - 9 \geq 0$, тогда получим систему

$$\begin{cases} x^2 - 9 = x^2 - 9, \\ x^2 - 9 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ x \geq 3 \text{ или } x \leq -3. \end{cases}$$

Ответ: $x \geq 3$ или $x \leq -3$.

Пример 9. Решить уравнение $(x^2 + x)^2 + |x^2 + x| - 2 = 0$.

Решение

Так как $(x^2 + x)^2 = |x^2 + x|^2$, то, обозначив $|x^2 + x| = t$, где $t \geq 0$, получим $t^2 + t - 2 = 0$, откуда $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.
Так как $t \geq 0$, то $t = 1$, тогда $|x^2 + x| = 1$, откуда имеем

$$1) \quad x^2 + x = 1, \quad x^2 + x - 1 = 0,$$

$$D = 5 > 0, \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2};$$

$$2) \quad x^2 + x = -1,$$

$x^2 + x + 1 = 0$ — нет действительных корней.

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Задачи

Группа А

Решить уравнения:

1. $|x| = 4$;
2. $|x + 6| = 0$;
3. $|x - 7| = -2$;
4. $|4 - x| = 5$;
5. $|2x - 3| = x$;
6. $|2x - 5| = |x|$;
7. $9 - x = |3x + 1|$;
8. $|5 - x| = 4x - 10$;
9. $|2x - 1| + |x + 3| = 8$;
10. $2x + 1 = |2 - x|$.

Группа Б

1. $|x + 2| = \frac{2}{3 - x}$; 2. $|x^2 - 1| + x - 5 = 0$;
3. $\frac{3}{|4 - x|} = x$; 4. $|2x - 8| + |x - 3| + |x - 2| = 9$;
5. $|x^2 - 4| = x^2 - 4$; 6. $|3x - 5| = 5 - 3x$;
7. $x^3 + |x| = 0$; 8. $\left| \frac{x + 1}{x - 1} \right| = 1$;
9. $|3 + 2x - x^2| = 2$;
10. $x^2 + 3|x| + 2 = 0$;
11. $|x^2 - 9| + |x - 2| = 5$;
12. $|x^2 - 4| + |x^2 - 9| = 5$;
13. $3|x^2 + 4x + 2| = 5x + 16$;
14. $|x^2 + x| + 3x = 5$;
15. $|x - 2| + \sqrt{x - 2} = 4$;
16. $4|x^2 + 2x - 2| - (x^2 + 2x - 2)^2 = 3$;
17. $|x^2 - 5x + 9| = |x - 6|$;
18. $\frac{5}{3 - |x - 1|} = |x| + 2$;
19. $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$;
20. $|2x - x^2 - 3| = |x - x^2 - 1|$;
21. $|x - 4,2| \cdot (x - 4,2) = -1$;
22. $\sqrt{2x^2 + 3|x| + 9} + 2x^2 + 3|x| = 33$;
23. $||3 - 2x| - 1| = 2|x|$;
24. $4 - x = |2 - x^2|$;
25. $|8 - x| + |1 - x| = 1 - x^2$;
26. $2(x + 1)(|x| - 1) = -1$;
27. $2|x + 1| = (x + 1)^2 + 1$;
28. $|x^2 - x - 3| + x = -1$;
29. $|x^2 - 4x| + 3 = x^2 + |x - 5|$;
30. $|x^2 + 2x| - |x^2 - x| = |2 - x|$.

Глава 3

НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

§ 11. Линейные неравенства

Линейным неравенством называется неравенство вида $ax > b$ (или соответственно $ax < b$; $ax \geq b$; $ax \leq b$), где a и b — некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Решить неравенство — значит найти все его решения или установить, что их нет.

Решением неравенства с одной переменной называется множество таких значений переменной, при котором оно обращается в верное числовое неравенство.

В зависимости от знака a могут встретиться случаи:

1. Если $a > 0$, то решение неравенства $ax > b$ имеет вид $x > \frac{b}{a}$ (или $x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$).

2. Если $a < 0$, то решение неравенства $ax > b$ имеет вид $x < \frac{b}{a}$ (или $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$).

3. Если $a = 0$, то решение неравенства $ax > b$ примет вид $0 \cdot x > b$, и при $b \geq 0$ оно не имеет решения, при $b < 0$ оно верно при любых x .

Пример 1. Решить неравенство $15 - 6x \geq 0$.

Решение

Перенесем число 15 в правую часть с противоположным знаком, получим $-6x \geq -15$.

Теперь разделим обе части полученного неравенства на отрицательное число -6 , изменив знак неравенства на противоположный: $x \leq \frac{15}{6}$ или $x \leq \frac{5}{2}$.

Таким образом, множеством решений данного неравенства является промежуток $(-\infty; 2,5]$.

Ответ: $x \leq 2,5$.

Пример 2. Решить неравенство $2x + 3 > 1 - 4x$.

Перенесем неизвестные в левую часть неравенства, а числа в правую часть, изменив знаки на противоположные: $2x + 4x > 1 - 3$ или $6x > -2$.

Разделим обе части полученного неравенства на 6 , при этом знак неравенства не изменится: $x > -\frac{2}{6}$ или

$$x > -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x > -\frac{1}{3}$.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{3+x}{4} + \frac{2-x}{3} < 0$.

Решение

Умножим обе части неравенства на 12 :

$$3(3+x) + 4(2-x) < 0 \text{ или } 9 + 3x + 8 - 4x < 0.$$

Приведем подобные слагаемые: $-x + 17 < 0$ или $-x < -17$, откуда $x > 17$.

Ответ: $x > 17$.

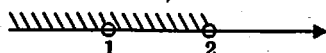
Пример 4. Найти наибольшее целое решение неравенства $(1,5 + 1,2x) - 2(1 - 1,4x) < 7,5$.

Решение

Раскроем скобки в левой части неравенства:

$$1,5 + 1,2x - 2 + 2,8x < 7,5 \text{ или } 1,2x + 2,8x < 7,5 - 1,5 + 2; 4x < 8, \text{ откуда } x < 2, \text{ тогда } x = 1 - \text{наибольшее целое решение неравенства.}$$

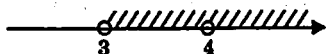
Ответ: $x = 1$.



Пример 5. Найти наименьшее целое решение неравенства $12 + 1,5y > 3(13 - 2,5y)$.

Решение

$12 + 1,5y > 39 - 7,5y$ или $1,5y + 7,5y > 39 - 12$,
 $9y > 27$, откуда $y > 3$, тогда $y = 4$ — наименьшее целое
 решение неравенства.



Ответ: $y = 4$.

Задачи

Группа А

Решить неравенства:

1. $2x - 3 \leq 0$; 2. $5x - 6 > 4 - 6x$;
3. $2(x - 3) > 4 + 5x$; 4. $5(x - 2) < 6x - 13$;
5. $\frac{x-3}{2} < 1$; 6. $\frac{4-3x}{8} \geq -1$;
7. $13(x + 4) - 3x < 10x$; 8. $21(2x + 3) - 12x > 30x$;
9. $5x + 9 > (8x + 3) - (3x - 1)$;
10. $6x - 1 < 2(3x - 5)$; 11. $\frac{5x-8}{8} + \frac{3-2x}{4} > 0$;
12. $\frac{x+1}{2} - 2x + 2\frac{1}{2} \geq 0$; 13. $\frac{x}{5} - 3\frac{1}{3} > 1\frac{3}{4} - \frac{5}{2}x$.

Группа Б

Найти наибольшее целое решение неравенства:

1. $-4x > 5$; 2. $-4x > -12$;
3. $x + 5 \geq 5,5x - 2$; 4. $1,8 - (2,4 - 0,25x) < 5,6$;
5. $\frac{x+1}{2} - \frac{2x+5}{6} \leq 0$; 6. $\frac{2x-1}{8} \leq \frac{3-x}{6}$;
7. $\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-1}{2} > 1$; 8. $(x+1)(x-3) < x(x+3)$.

Найти наименьшее целое решение неравенства:

9. $8(0,6 - x) < 24,2 - 7x$; 10. $4x \geq -\frac{1}{4}$;
11. $-6x \leq 24$;
12. $3(x - 2) - 4(x + 1) < 2(x - 3) - 1$;

$$13. \frac{2x-5}{3} - 4 > -x; \quad 14. \frac{x+2}{4} - \frac{5x}{11} \leq -3;$$

$$15. x+3 \leq \frac{2x-1}{6} - \frac{5-3x}{3};$$

$$16. \frac{2+x}{4} \leq \frac{4x+1}{6} + 1; \quad 17. x(x+5) + 5 > x^2 + x.$$

§ 12. Рациональные неравенства

Неравенство, содержащее только рациональные функции, называется *рациональным*.

Неравенства вида $P_n(x) > 0$ или $P_n(x) < 0$, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ или $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — мно-

гочлены соответственно степеней n и m , т. е.

$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$; $Q_m(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$, наиболее часто решаются *методом интервалов* (промежутков). Этот метод основан на одном важном свойстве рациональной функции: в интервале между двумя соседними нулями рациональная функция сохраняет знак. Если рассматривается дробно-рациональная функция, то те значения переменной x , при котором функция обращается в нуль, будем называть *нулями функции* (точки числителя), а точки, при котором знаменатель дроби обращается в нуль, — *точками разрыва функции*.

Сущность метода интервалов состоит в следующем. На числовой оси отмечают все нули и точки разрыва функции $f(x)$ (если они есть). При этом числовая ось разбивается на конечное число интервалов, на каждом из которых левая часть неравенства сохраняет постоянный знак. Чтобы установить этот знак, достаточно взять любую точку из интересующего нас промежутка и определить знак функции в этой точке. Что касается самих точек, то в случае строгого неравенства точки обозначают светлыми кружками. Это означает, что сами точки не входят во множество решений данного неравенства. В случае нестрогого не-

равенства точки наносят на числовую прямую *темными кружками*, а это означает, что сами точки также входят во множество решений данного неравенства. Понятно, что во всех случаях *точки разрыва функции* обозначают светлыми кружками.

Следует отметить, что наибольшие трудности возникают при определении знаков промежутков.

При решении неравенств методом интервалов могут встретиться следующие типы неравенств:

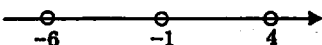
1. Простейшие неравенства, представленные в виде произведения линейных множителей

Пример 1. Решить неравенство $(x + 1)(x + 6)(x - 4) < 0$.

Решение

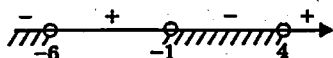
Рассмотрим функцию $f(x) = (x + 1)(x + 6)(x - 4)$. (1)

Найдем нули функции, для чего решим уравнение $f(x) = 0$ или $(x + 1)(x + 6)(x - 4) = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = -6$, $x_3 = 4$.



Отметим эти точки на числовой прямой. Так как мы решаем строгое неравенство, то все точки отмечаем светлыми кружками. На каждом из полученных промежутков каждый из множителей $(x + 1)$, $(x + 6)$ и $(x - 4)$ сохраняет знак, и, следовательно, сохраняет знак все выражение.

Для определения знаков промежутков достаточно знать, какой знак имеет функция в одном из промежутков, и, пользуясь свойством чередования знаков, найдем знаки во всех остальных промежутках. При этом удобно начинать с крайнего справа промежутка $(4; +\infty)$, так как в нем значение функции (1) заведомо положительно. Объясняется это тем, что при значениях x , взятых правее наибольшего из нулей функции, каждый из множителей $x + 1$, $x + 6$ и $x - 4$ положителен. Определим теперь, используя свойство чередования знаков на числовой прямой, знаки данной функции в каждом из остальных промежутков:



Как видно из рисунка, те значения x , при которых $f(x) < 0$ (заштрихованы), лежат в промежутках

$(-\infty; -6)$, $(-1; 4)$. Решение данного неравенства представляет собой объединение указанных промежутков.

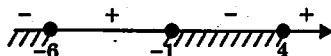
Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-1; 4)$.

Пример 2. Решить неравенство $(x + 1)(x + 6)(x - 4) \leq 0$.

Решение

Решение данного неравенства полностью соответствует приведенному выше. Отличие состоит лишь в том, что неравенство нестрогое, а потому нули функции входят во множество решений.

Такие точки, как было отмечено ранее, отмечаем темными кружками.



Ответ: $(-\infty; -6] \cup [-1; 4]$.

2. Простейшие неравенства, разлагающиеся на линейные множители

Мы рассмотрели неравенство, левая часть которой уже была разложена на линейные множители, а в правой части число 0. Рассмотрим неравенство, которое можно привести к аналогичному виду.

Пример 3. Решить неравенство $x^3 \geq 9x$.

Решение

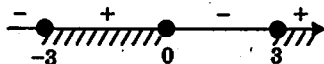
Запишем неравенство в виде $x^3 - 9x \geq 0$.

Вынесем общий множитель x за скобки:

$x(x^2 - 9) \geq 0$ или $x(x - 3)(x + 3) \geq 0$.

Решая методом интервалов, получим

$x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$.



Ответ: $[-3; 0] \cup [3; +\infty)$.

3. Простейшие дробно-рациональные неравенства без кратных корней

Пример 4. Решить неравенство

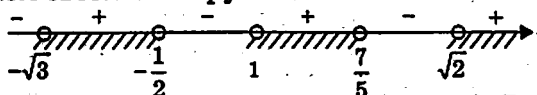
$$\frac{(x - 1)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})}{(2x + 1)(5x - 7)} > 0.$$

Решение

Функция $f(x) = \frac{(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})}{(2x+1)(5x-7)}$ обращается

в нуль в точках $x_1 = 1$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{2}$ и претерпевает разрыв в точках $x_4 = -\frac{1}{2}$ и $x_5 = \frac{7}{5}$.

Эти 5 точек разбивают числовую прямую на 6 промежутков. Так как неравенство строгое, то все точки отмечаем светлыми кружками:



Нам надо решить неравенство $f(x) > 0$. Решая методом интервалов, получим

$$\left(-\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{7}{5}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right).$$

Заметим, что ответ можно записать иначе:

$$-\sqrt{3} < x < -\frac{1}{2}, 1 < x < \frac{7}{5}, x > \sqrt{2}.$$

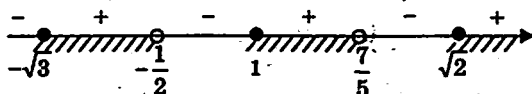
$$\text{Ответ: } \left(-\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{7}{5}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right).$$

Пример 5. Решить неравенство

$$\frac{(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})}{(2x+1)(5x-7)} \geq 0.$$

Решение

В данном случае нули функции принадлежат множеству решений данного неравенства, поэтому на рисунке они отмечаются темными кружками, а точки разрыва функции (как было отмечено ранее) — светлыми.



$$\text{Ответ: } \left[-\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[1; \frac{7}{5}\right) \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right).$$

4. Неравенство, содержащее множитель, не принимающий нулевого значения на числовой прямой

Пример 6. Решить неравенство $\frac{(6x-5)(2+x^2)}{(4-x^2)x} \leq 0$.

Решение

Запишем неравенство в виде $\frac{(6x-5)(2+x^2)}{-(x^2-4)x} \leq 0$.

Умножим обе части полученного неравенства на -1 , изменив знак неравенства на противоположный:

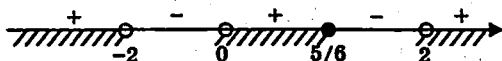
$$\frac{(6x-5)(2+x^2)}{(x-2)(x+2)x} \geq 0.$$

Заметим, что множитель $2+x^2 > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$. В этом случае полученное неравенство равносильно

неравенству $\frac{(6x-5)}{(x-2)(x+2)x} \geq 0$.

Тогда $x_1 = \frac{5}{6}$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, $x_4 = 0$.

Решаем полученное неравенство методом интервалов:



Ответ: $(-\infty; -2) \cup (0; 5/6] \cup (2; +\infty)$.

Пример 7. Решить неравенство $\frac{2x^2-5x-2}{3x-x^2-7} \leq 1$.

Решение

Перенесем 1 из правой части в левую и упростим полученную дробь:

$$\frac{2x^2-5x-2}{3x-x^2-7} - 1 \leq 0 \text{ или}$$

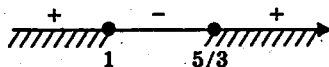
$$\frac{2x^2-5x-2-3x+x^2+7}{3x-x^2-7} \leq 0,$$

$$\frac{3x^2 - 8x + 5}{-(x^2 - 3x + 7)} \leq 0 \text{ или } \frac{3x^2 - 8x + 5}{x^2 - 3x + 7} \geq 0.$$

Заметим, что $x^2 - 3x + 7 > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$, так как дискриминант $D < 0$ и $a = 1 > 0$, тогда имеем равносильное неравенство

$$3x^2 - 8x + 5 \geq 0,$$

$$D/4 = 16 - 15 = 1 > 0, \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm 1}{3}, \text{ откуда } x_1 = \frac{5}{3}, \quad x_2 = 1.$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; 1] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right).$$

Пример 8. Решить неравенство

$$\frac{(x+1)(x^2+1)}{(x-3)(2-x)(-4-x^2)} \geq 0.$$

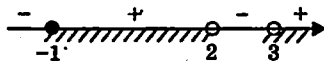
Решение

Запишем данное неравенство в виде

$$\frac{(x+1)(x^2+1)}{(x-3)(x-2)(x^2+4)} \geq 0; \text{ так как } x^2+1 > 0 \text{ и } x^2+4 > 0$$

при любом $x \in \mathbb{R}$, то получим равносильное неравен-

ство $\frac{x+1}{(x-3)(x-2)} \geq 0$. Решая методом интервалов, имеем $x_1 = -1$; $x_2 = 3$, $x_3 = 2$.



$$\text{Ответ: } [-1; 2) \cup (3; +\infty).$$

5. Простейшие неравенства с кратными корнями

Если в условии неравенства содержится множитель вида $(x-a)^{2n}$, где $n \in \mathbb{N}$, то точку $x = a$ будем называть *двойной*. Это означает, что при переходе через двойную точку функция не меняет знака.

Если же неравенство содержит множитель с нечетным показателем, то справа и слева от точки $x = a$

функция имеет разные знаки. В этом случае точку $x = a$ будем называть *простой*. Следовательно, при переходе через простую точку функция $f(x)$ меняет знак.

Пример 9. Решить неравенство

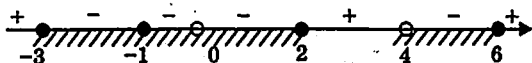
$$\frac{(x-2)^3(x+1)^4(x+3)^5(x-6)}{x^2(x-4)^3} \leq 0.$$

Решение

Нули функции: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$; $x_3 = -3$, $x_4 = 6$.

Точки разрыва функции: $x_5 = 0$, $x_6 = 4$.

Двойные точки: $x_2 = -1$ и $x_5 = 0$.



На рисунке нули функции отмечены закрашенными кружками, а точки разрыва — светлыми. Как видно, слева и справа от двойных точек -1 и 0 функция не меняет знака.

Следовательно, получим $-3 \leq x \leq -1$; $-1 \leq x \leq 0$; $0 < x \leq 2$; $4 < x \leq 6$ или короче $[-3; 0) \cup (0; 2] \cup (4; 6]$.

Ответ: $[-3; 0) \cup (0; 2] \cup (4; 6]$.

Пример 10. Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} - \frac{2x - 1}{x^3 + 1}}.$$

Решение

Нахождение области определения данной функции сводится к решению неравенства

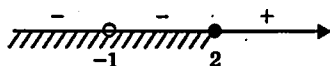
$$\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} - \frac{2x - 1}{x^3 + 1} \geq 0 \text{ или}$$

$$\frac{2(x+1) - (x^2 - x + 1) - (2x - 1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \geq 0,$$

$$\frac{-x^2 + x + 2}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \geq 0 \text{ или } \frac{x^2 - x - 2}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \leq 0.$$

Так как $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ и $x^2 - x + 1 > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$ (так как $D < 0$ и $a = 1 > 0$), то полученное неравенство равносильно неравенству

$\frac{(x+1)(x-2)}{x+1} \leq 0$. Заметим, что $x = 2$ — нуль функции, а точка $x = -1$ — точка разрыва функции. Отметим, что слева и справа от точки $x = -1$ функция не меняет знака.



Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-1; 2]$.

Задачи

Группа А

Решить неравенства

1. $3x^2 - 7x + 4 \leq 0$;
2. $x^2 - 3x + 5 > 0$;
3. $2 - x - x^2 \geq 0$;
4. $(3 - x)(x - 1)(x - 2)^2 > 0$;
5. $2x^2 + 2x + 1 > 0$;
6. $2x + 7 > \frac{x}{2} - 1$;
7. $x^2 - 5x + 9 \geq 3$;
8. $\frac{6x - 5}{4x + 1} < 0$;
9. $\frac{3}{x - 2} < 1$;
10. $\frac{4}{x + 2} > 3 - x$.

Найти наибольшее целое решение неравенства

11. $(x - 3)(x + 2) \leq 0$;
12. $x(9 - x) > 0$;
13. $x - x^2 \geq 0$;
14. $x^2 + 2x + 2 < 0$;
15. $x^2 \leq 9$;
16. $-x^2 - 4x + 5 \geq 0$;
17. $x^2(x - 3)(x + 4) \leq 0$;
18. $x^2(5 - x)(x + 2) > 0$;
19. $3x^2 - 7x + 2 < 0$;
20. $\frac{x - 4}{x} < 0$.

Найти наибольшее целое отрицательное решение неравенства

21. $x^2 + 5x + 6 > 0$;
22. $5x - 6 < x^2$;
23. $9 - x^2 < 0$;
24. $4x - x^3 > 0$;
25. $\frac{(x+1)(x-2)}{x} \geq 0$;
26. $\frac{x^2 + x}{3 - x} > 0$;
27. $x^2 + 4x + 5 > 0$;
28. $\frac{x + 7}{x - 4} > 0$.

Найти наименьшее целое число, входящее в область определения каждой из функций:

$$29. y = \sqrt{\frac{3}{x} - 2};$$

$$30. y = \sqrt{\frac{2+x}{3-x} - 2};$$

$$31. y = \sqrt{4 - x^2};$$

$$32. y = \sqrt{-x^2 - 4x + 21};$$

$$33. y = \sqrt{\frac{2}{x-3}};$$

$$34. y = \sqrt{x(1-x^2)};$$

$$35. y = \sqrt{\frac{x^2 + 3}{x}} + 4.$$

Группа Б

Найти наименьшее целое решение неравенства:

$$1. 4x^2 - 3x + 5 \leq 0; \quad 2. 9x^2 + 6x + 1 \leq 0;$$

$$3. (x-3)^2 \leq 49;$$

$$4. \frac{(x+1)(x-3)(x+2)^3 x^2}{(x+1)(x-1)(x-4)^4} \geq 0;$$

$$5. (x-3)^3 (x+1)^3 (x+2)^4 (3x-2) < 0;$$

$$6. x^3 - 64x > 0;$$

$$7. x^4 + 8x^3 + 12x^2 \geq 0; \quad 8. \frac{x^3 + x^2 + x}{9x^2 - 25} \geq 0;$$

$$9. (x^2 + 4x + 4)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4)(x^2 - 6x + 8) < 0;$$

$$10. \frac{x^2 - 6x}{x^2 + 6x + 9} \leq 0; \quad 11. \frac{2x^2 + 2x - 11}{x^2 + x + 1} < 1;$$

$$12. \frac{x^2 + 6x}{x^2 + 3x - 4} \leq 0; \quad 13. \frac{3 - x^2}{x^2 - 1} \leq -1;$$

$$14. \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} < \frac{3}{x+2};$$

$$15. \frac{10(5-x)}{3(x-4)} + \frac{11(6-x)}{3(4-x)} \geq \frac{5(6-x)}{x-2};$$

$$16. x^6 + 9x^3 + 8 \leq 0;$$

$$17. x^2 + \frac{27}{x} \leq 0;$$

$$18. \frac{2x-3}{x^2+3} \leq -1.$$

Найти длины интервалов, на которых выполняются неравенства:

$$19. \frac{1}{x} \geq \frac{1}{5};$$

$$20. \frac{x-3}{x+7} \geq 2;$$

$$21. \frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1} < 0;$$

$$22. \frac{x-2}{x^2+1} < -\frac{1}{2};$$

$$23. \frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} < 0;$$

$$24. \frac{x^2-5x+7}{-2x^2+3x+2} > 0;$$

$$25. 1 + \frac{12}{x^2} < \frac{7}{x};$$

$$26. x^4 - 2x^2 - 63 \leq 0;$$

$$27. \frac{x^4+x^2+3}{-x^2+x+2} > 0.$$

Найти середины интервалов, на которых выполняются неравенства:

$$28. \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-6} \leq 0;$$

$$29. \frac{36-x^2}{x^2+6x} > 0;$$

$$30. \frac{x^2-8x+16}{x^2-5x} \leq 0;$$

$$31. \frac{2x^2+5x+9}{x^2+1} > 3;$$

$$32. \frac{3x^2-11x+22}{x^2-4x+5} > 3.$$

Найти среднее арифметическое целых решений неравенства:

$$33. x^4 - 17x^2 + 16 \leq 0; \quad 34. \frac{(x-2)(x+5)^2}{-x-2} \geq 0;$$

$$35. -\frac{4}{x} \leq -\frac{1}{2};$$

$$36. \frac{(x^3-27)(-x^2-4)}{x^3+8} \geq 0;$$

$$37. \frac{9x^2+9x+7}{3x^2+2x-1} \geq 0;$$

$$38. \frac{15}{3x+4-x^2} > 1;$$

$$39. \frac{1-x+x^2-x^3}{x+8} \geq 0; \quad 40. \frac{1}{x+2} \geq \frac{2x}{x^2-9}.$$

Найти наименьшие натуральные решения неравенств:

41. $x^3 - 3x^2 - x + 3 > 0$; 42. $2x + 7 > \frac{x}{2} - 1$;

43. $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 1} > 0$; 44. $\frac{5}{2 + x} + \frac{1}{2 - x} < 1$;

45. $\frac{x^2 - 4x + 3}{x} > 0$; 46. $x > \frac{x^2 - 2x - 1}{x + 1}$.

Найти наибольшие решения неравенств:

47. $x^4 - 2x^2 - 63 \leq 0$; 48. $\frac{x + 1}{x - 1} \leq \frac{x + 5}{x + 1}$;

49. $\frac{6}{x - 5} \geq x$; 50. $\frac{3x^2 - 16x + 21}{x^2 + 4x + 4} \leq 0$.

§ 13. Системы неравенств

Несколько неравенств с одной переменной образуют систему неравенств, если ставится задача найти все общие решения данных неравенств.

Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называется *частным решением* системы неравенств, а множество всех частных решений представляет собой *общее решение* системы неравенств или просто решение системы неравенств.

Решить систему неравенств — значит найти все ее частные решения. Следует отметить, что решение системы неравенств представляет собой пересечение множеств решений неравенств системы, тогда как решение совокупности неравенств представляет собой объединение множеств решений неравенств, образующих совокупность.

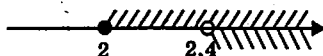
Неравенства, образующие систему, обозначаются *фигурной скобкой*, а неравенства, образующие совокупность, — *квадратной*. Иногда, неравенства, образующие совокупность, записывают в строчку через точку с запятой.

Пример 1. Решить систему и совокупность нера-

венств: а) $\begin{cases} 4x - 3 \geq 5, \\ 5x - 2 > 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - 3 \geq 5, \\ 5x - 2 > 10. \end{cases}$

а) Из первого неравенства системы имеем $4x \geq 5 + 3$, $4x \geq 8$, $x \geq 2$. Решая второе неравенство системы, имеем $5x > 10 + 2$, $5x > 12$, откуда $x > 2,4$.

Отметим полученные промежутки на одной координатной прямой в виде штриховки, причем решение I неравенства отметим над прямой, а II – под прямой:



Тогда решением системы неравенств будет пересечение множеств решений неравенств системы, т. е. двойное пересечение: $x > 2,4$ или $(2,4; +\infty)$.

б) Решением совокупности неравенств будет объединение решений неравенств совокупности, т. е. промежутков, на котором имеется хотя бы одна штриховка. В нашем примере имеем $x \geq 2$ или $[2; +\infty)$.

Ответ: а) $x > 2,4$; б) $x \geq 2$.

Замечание. Если в системе, состоящей из нескольких неравенств, одно является следствием другого (или других), то неравенство-следствие можно отбросить.

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x - 3 > x + 0,5, \\ 4 - 3x > 5 - 4x, \\ 0,5x + 1 < x. \end{cases}$$

Решение

Из I неравенства системы имеем $2x - x > 0,5 + 3$, или $x > 3,5$; из II неравенства получим $-3x + 4x > 5 - 4$, откуда $x > 1$. Наконец, из III неравенства получим $x - 0,5x > 1$ или $0,5x > 1$, откуда $x > 2$.

Следовательно, имеем равносильную систему

$$\begin{cases} x > 3,5, \\ x > 1, \\ x > 2, \end{cases} \quad \text{откуда } x > 3,5 - \text{решение исходной системы,}$$

так как, если выполняется *I* неравенство полученной системы, то тем более выполняются *II* и *III* неравенства, значит, *II* и *III* неравенства — следствия *I*.

Ответ: $x > 3,5$.

Пример 3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2 - \frac{5+x}{7} < 1 - \frac{9-x}{14}, \\ 12 - \frac{1}{3} \left(47 - \frac{60}{x} \right) > 3. \end{cases}$$

Решение

Упростим *I* неравенство системы, для чего умножим обе части на 14: $28 - 2(5+x) < 14 - (9-x)$, или $28 - 10 - 2x < 14 - 9 + x$, или $-3x < -13$, откуда

$$x > \frac{13}{3}.$$

Упростим *II* неравенство системы:

$$12 - \frac{47}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{60}{x} > 3, \text{ или } \frac{20}{x} > \frac{47}{3} - 9, \text{ или } \frac{20}{x} > \frac{20}{3},$$

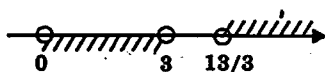
$$\text{или } \frac{1}{x} > \frac{1}{3}, \frac{3-x}{3x} > 0, \frac{3-x}{x} > 0.$$

Имеем равносильную систему
$$\begin{cases} x > \frac{13}{3}, \\ \frac{3-x}{x} > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решим неравенство $\frac{3-x}{x} > 0$ методом интервалов:

$$x_1 = 3, x_2 = 0 \quad \begin{array}{c} - \quad + \quad - \\ \hline 0 \quad \quad 3 \end{array} \quad 0 < x < 3.$$

Тогда решением системы (1), а значит, и данной системы неравенств будет пересечение множеств решений:



Как видно из рисунка, эти множества не пересекаются, значит, система (1), а следовательно, и данная, решений не имеет.

Ответ: нет решений.

Пример 4. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 4}{x} < 2, \\ x^2 \leq 16. \end{cases}$$

Решение

Упростим I неравенство системы:

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{x} - 2 < 0, \quad \frac{x^2 + 2x - 4 - 2x}{x} < 0,$$

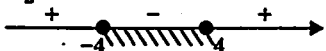
$$\frac{x^2 - 4}{x} < 0 \text{ или } \frac{(x-2)(x+2)}{x} < 0.$$

Полученное неравенство решим методом интервалов:

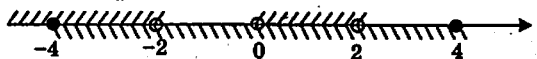
$$x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 0.$$

Значит, $x < -2, 0 < x < 2$.

Решим теперь II неравенство системы: $x^2 - 16 \leq 0$ или $(x-4)(x+4) \leq 0, x_1 = 4, x_2 = -4$.



Решением II неравенства системы будет $-4 \leq x \leq 4$. Отметив найденные решения I и II неравенств на общей числовой прямой, найдем пересечение решений:



$$-4 \leq x < -2; 0 < x < 2.$$

Ответ: $-4 \leq x < -2; 0 < x < 2$.

Пример 5. Решить систему неравенств

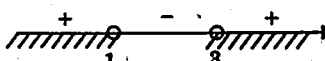
$$\begin{cases} \frac{x+3}{3-x} < 2, \\ x^3 < 16x, \\ 4 \geq x^2. \end{cases}$$

Решение

Преобразуем I неравенство системы $\frac{x+3}{3-x} - 2 < 0$,

или $\frac{x+3-6+2x}{3-x} < 0$, $\frac{3x-3}{3-x} < 0$, $\frac{3(x-1)}{x-3} > 0$, или

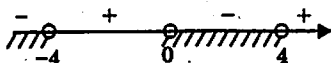
$\frac{x-1}{x-3} > 0$. $x_1 = 1$; $x_2 = 3$



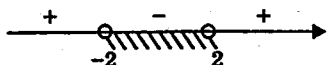
Получим $x < 1$, $x > 3$.

Решим II неравенство заданной системы:

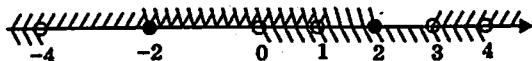
$x^3 - 16x < 0$, или $x(x-4)(x+4) < 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = 4$,
 $x_3 = -4$.



Наконец, решим III неравенство системы: $4 \geq x^2$
или $x^2 - 4 \leq 0$, $(x-2)(x+2) \leq 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.



Отметив найденные решения неравенств на общей числовой прямой, найдем пересечение полученных решений:



Ответ: $0 < x < 1$.

Пример 6. Решить двойное неравенство
 $-2 < 5 + 3x \leq 6$.

Решение

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 5 + 3x > -2, \\ 5 + 3x \leq 6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > -2 - 5, \\ 3x \leq 6 - 5, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > -7, \\ 3x \leq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\frac{7}{3}, \\ x \leq \frac{1}{3}, \end{cases}$$

откуда $-\frac{7}{3} < x \leq \frac{1}{3}$.

Замечание. Этот пример можно решить иначе:
 $-2 < 5 + 3x \leq 6$, $-2 - 5 < 3x \leq 6 - 5$,

$$-7 < 3x \leq 1, \quad -\frac{7}{3} < x \leq \frac{1}{3}.$$

Ответ: $-\frac{7}{3} < x \leq \frac{1}{3}$.

Пример 7. Решить совокупность неравенств

$$\begin{cases} x^3 \geq 100x, \\ \frac{(x+9)(7x-x^2-13)}{x^2-18x+45} \geq 0. \end{cases}$$

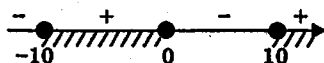
Решение

Упростим I неравенство совокупности:

$$x(x^2 - 100) \geq 0 \text{ или } x(x-10)(x+10) \geq 0;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 10, x_3 = -10.$$

Упростим II неравенство совокупности:

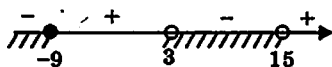


$$\frac{(x+9)(7x-x^2-13)}{x^2-18x+45} \geq 0 \text{ или}$$

$$\frac{(x+9)(x^2-7x+13)}{x^2-18x+45} \leq 0.$$

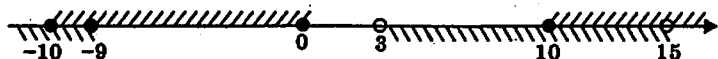
Заметим, что $x^2 - 7x + 13 > 0$ при любом $x \in R$, так как $D < 0$ и $a = 1 > 0$. Кроме того, $x^2 - 18x + 45 = (x-15)(x-3)$, следовательно, разделив обе части полученного неравенства на $x^2 - 18x + 45$, сократив при этом знак неравенства, получим равносильное неравенство:

$$\frac{x+9}{(x-15)(x-3)} \leq 0;$$



$$x_1 = -9, x_2 = 15, x_3 = 3.$$

Объединяя найденные решения каждого из неравенств совокупности, получим



$$(-\infty; 0] \cup (3; +\infty).$$

Ответ: $x \leq 0; x > 3$.

Пример 8. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + x - 6}}{x^2 - 4}.$$

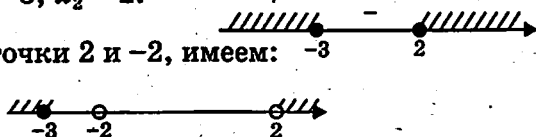
Решение

Нахождение области определения данной функции сводится к решению смешанной системы

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0, \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x + 3)(x - 2) \geq 0, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$$

Неравенство $(x + 3)(x - 2) \geq 0$ решим методом интервалов: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Исключая точки 2 и -2, имеем:



$$(-\infty; -3] \cup (2; +\infty).$$

Ответ: $D(y) = (-\infty; -3] \cup (2; +\infty)$.

Задачи

Группа А

Решить системы неравенств и указать наименьшее целое решение для каждой из них:

$$1. \begin{cases} x + 4 \geq 0, \\ 3x < 5; \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 2x - 3 > 8 - 3x, \\ 6 - x < 9 + 4x; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{x-2}{3} + \frac{x}{5} \geq \frac{3-2x}{15}, \\ \frac{5x-1}{3} - \frac{7x}{4} \leq \frac{1-3x}{12}; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3 - \frac{3-7x}{10} + \frac{x+1}{2} > 4 - \frac{7-3x}{5}, \\ 7(3x-6) + 4(17-x) > 11 - 5(x-3); \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x^2 \leq 9, \\ x^2 > 7; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x - 1 > 5x - 4, \\ 8x + 6 > 3x - 4, \\ 11x - 9 < 15x + 3; \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x(x - 5) < 0, \\ \frac{x + 4}{x - 2} \leq 0; \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{2x + 3}{3x - 2} < 2, \\ \frac{x + 3}{x - 3} < 1. \end{cases}$$

Решить двойные неравенства и указать наибольшее целое решение для каждого из них:

$$9. -4 < 2x - 1 < 3;$$

$$10. -7 < 4x - 3 \leq 5;$$

$$11. 0 \leq -2x < 8;$$

$$12. -1 \leq 3 - x \leq 1;$$

$$13. -1 \leq 2 - \frac{3}{2}x \leq 2.$$

Найти область определения функций:

$$14. y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{3 - 2x}; \quad 15. y = \sqrt{x^2} - \sqrt{3x - 1};$$

$$16. y = \sqrt{2x - x^2}; \quad 17. y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{6 - x};$$

$$18. y = \sqrt{x - 1}\sqrt{x + 1}; \quad 19. y = \sqrt{x^2 - 10x + 21};$$

$$20. y = \frac{1}{x - 1} + \sqrt{2 - x}.$$

Группа Б

Решить системы неравенств:

$$1. \begin{cases} 4x^2 + 5x - 6 > 0, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2 - 144 > 0, \\ x - 3 < 0; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 - 2x - 8 < 0, \\ x^2 + 4x - 5 > 0; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} (x^2 + 1)(x^2 - 2) \geq 0, \\ x < 3; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x^2 - 4x < 0, \\ x^2 - x - 6 \geq 0; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x + 1 > 0, \\ \frac{1}{2} - x > 0, \\ x^2 - 4 < 0; \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x + \frac{4}{3} \geq \frac{4}{3x}, \\ 9x^2 - 9x + 1 < 0, \\ 1 > \frac{1}{3x}; \end{cases} \quad 8. \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{4}{3} \geq \frac{x}{3}, \\ \frac{1}{x} + 1 > 0, \\ x^2 + 3x + 1 > 0; \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} (x^2 + 12x + 35)(1 + 2x)(3 - 2x) \geq 0, \\ (x^2 - 2x - 8)(1 - 2x) \leq 0; \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{1 - x^2}{x^2 + 2x - 8} \geq 0, \\ \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 7)}{9 - x^2} \leq 0. \end{cases}$$

Решить двойные неравенства и указать наибольшее целое решение для каждого из них:

$$11. 1 < \frac{1 + x}{1 - x} \leq 2; \quad 12. 6 < x^2 + x < 2;$$

$$13. 0 < \frac{x - 3}{x + 5} < \frac{1}{2}; \quad 14. x \leq x^2 + 20 \leq 9x;$$

$$15. 0 < \frac{3x - 1}{2x + 5} < 1.$$

Найти область определения функций и указать наименьшее целое значение x для каждой из них:

$$16. y = \sqrt{\frac{3 + x}{5 - x}}; \quad 17. y = \sqrt{2 - x} + \sqrt{1 + x};$$

$$18. y = \sqrt{\frac{6}{x} + x - 5}; \quad 19. y = \sqrt{\frac{x + 3}{x - 1}} + \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$20. y = \sqrt{\frac{8 + 3x}{12}} + \sqrt{-x}; \quad 21. y = \frac{\sqrt{4 - 3x - x^2}}{x + 4};$$

$$22. y = \frac{\sqrt{-x^2 + x + 12}}{x^2 - 2x}; \quad 23. y = \frac{\sqrt{-x^2 + x + 12}}{x^2 - 9};$$

$$24. y = \sqrt{9 - \left(\frac{4x - 22}{x - 5}\right)^2}; \quad 25. y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{-x^2 + 3x - 7}};$$

$$26. y = \frac{1}{\sqrt{14 + 5x - x^2}} + \sqrt{x^2 - x - 20};$$

$$27. y = \sqrt{\frac{\sqrt{17 - 15x - 2x^2}}{x + 3}}; \quad 28. y = \frac{\sqrt{3x - 7}}{\sqrt[6]{x + 1} - 2};$$

$$29. y = \sqrt{\frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}} + \sqrt{3x - 5};$$

$$30. y = \sqrt{\frac{x^4 - 3x^2 + x + 7}{x^4 - 2x^2 + 1}} - 1.$$

§ 14. Неравенства с модулем

Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля (абсолютной величины), решаются в зависимости от их типа различными способами.

Обычный путь решения неравенств с модулем состоит в следующем.

Неравенство вида $|a| \leq b$ равносильно двойному неравенству $-b \leq a \leq b$ или системе
$$\begin{cases} a \leq b, \\ a \geq -b. \end{cases}$$

Заметим, что в системе должны выполняться оба неравенства, что соответствует союзу «и».

Неравенство вида $|a| \geq b$ равносильно объединению неравенств
$$\begin{cases} a \geq b, \\ a \leq -b. \end{cases}$$

Объединение неравенств означает, что должно выполняться хотя бы одно из неравенств, что соответствует союзу «или».

Другой подход к неравенствам с модулем состоит в том, что числовая прямая разбивается на промежут-

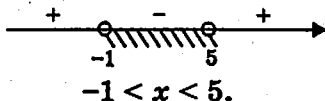
ки, на каждом из которых знак модуля можно опустить на основании определения модуля.

Пример 1. Решить неравенство $|x - 2| < 3$.

Решение

Способ 1

Известно, что $|a|^2 = a^2$. Учитывая, что обе части данного неравенства неотрицательны при всех x , то возведение их в квадрат приведет к неравенству, равносильному данному. Получим $(x - 2)^2 < 3^2$, или $x^2 - 4x - 5 < 0$. Применяв метод интервалов, получим $x_1 = 5$, $x_2 = -1$.



Ответ: $-1 < x < 5$.

Способ 2

По определению модуля

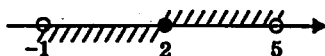
$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{если } x - 2 \geq 0, \\ 2 - x, & \text{если } x - 2 < 0. \end{cases}$$

Следовательно, данное неравенство равносильно совокупности двух систем: $\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x - 2 < 3; \end{cases} \begin{cases} x - 2 \leq 0, \\ 2 - x < 3. \end{cases}$

Решая первую систему, получим $\begin{cases} x \geq 2, \\ x < 5, \end{cases}$ откуда $2 \leq x < 5$.

Решая вторую систему, имеем $\begin{cases} x \leq 2, \\ x > -1, \end{cases}$ т. е. $-1 < x \leq 2$.

Объединяя найденные решения двух систем, найдем решение исходного неравенства: $-1 < x < 5$.



Ответ: $-1 < x < 5$.

Способ 3

Заметим, что геометрически $|x - 2|$ можно рассматривать как расстояние на числовой прямой между

точками x и 2. Следовательно, нам нужно найти все такие точки x , которые находятся от точки с координатой 2 меньше, чем на 3 единицы. Искомое решение: $(-1; 5)$.

Ответ: $-1 < x < 5$.

Замечание. Из приведенных способов решения наиболее предпочтительным является I, хотя II способ является наиболее универсальным, но с технической точки зрения он относительно сложен.

Пример 2. Решить неравенство $|4x - 3| \leq |2x + 3|$.

Решение

Так как обе части неравенства неотрицательны, то после возведения обеих частей неравенства в квадрат получим

$$(4x - 3)^2 \leq (2x + 3)^2, \text{ или } 12x^2 - 36x \leq 0, \text{ или } x^2 - 3x \leq 0, x(x - 3) \leq 0, \text{ откуда } 0 \leq x \leq 3.$$

Ответ: $0 \leq x \leq 3$.

Пример 3. Решить неравенство $\left| \frac{2x - 5}{x + 1} \right| \geq 1$.

Решение

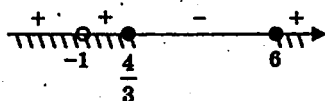
Данное неравенство равносильно неравенству

$$\left(\frac{2x - 5}{x + 1} \right)^2 \geq 1, \text{ или } \left(\frac{2x - 5}{x + 1} \right)^2 - 1 \geq 0.$$

Разлагая левую часть на множители, имеем

$$\left(\frac{2x - 5}{x + 1} - 1 \right) \left(\frac{2x - 5}{x + 1} + 1 \right) \geq 0 \text{ или } \frac{x - 6}{x + 1} \cdot \frac{3x - 4}{x + 1} \geq 0, \frac{3 \left(x - \frac{4}{3} \right) (x - 6)}{(x + 1)^2} \geq 0,$$

$$x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = 6, x_3 = -1.$$



$$(-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{4}{3}\right] \cup [6; +\infty).$$

Ответ: $x < -1$; $-1 < x \leq \frac{4}{3}$; $x \geq 6$.

Пример 4. Решить неравенство $|x^2 - 4x + 3| \leq 3x - x^2$.

Решение

Способ 1

Рассмотрим два случая:

1) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ и 2) $x^2 - 4x + 3 < 0$.

В первом случае имеем систему

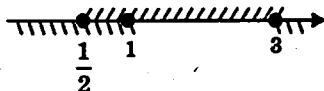
$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \leq 3x - x^2, \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 \leq 0, \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0, \end{cases}$$

решая которую, находим последовательно

довательно

$$\begin{cases} 2(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right) \leq 0, \\ (x-3)(x-1) \geq 0. \end{cases}$$



$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1; x = 3.$$

Во II случае имеем систему

$$\begin{cases} -(x^2 - 4x + 3) \leq 3x - x^2, \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leq 3, \\ (x-1)(x-3) < 0, \end{cases}$$

откуда $1 < x < 3$.

Объединяя найденные решения, получим $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$.

Ответ: $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$.

Способ 2

Данное неравенство запишем в виде

$3x - x^2 \geq |x^2 - 4x + 3| \geq 0$, откуда имеем $3x - x^2 \geq 0$. Но тогда обе части данного неравенства неотрицательны, и мы можем возвести их в квадрат; в результате получим систему неравенств

$$\begin{cases} 3x - x^2 \geq 0, \\ |x^2 - 4x + 3|^2 \leq (3x - x^2)^2. \end{cases}$$

Решим первое неравенство полученной системы методом интервалов: $x(3 - x) \geq 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = 3$;

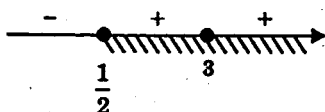


Решим второе неравенство системы:

$$\begin{aligned} (x^2 - 4x + 3)^2 &\leq (3x - x^2)^2, \text{ или} \\ (x^2 - 4x + 3 - 3x + x^2)(x^2 - 4x + 3 + 3x - x^2) &\leq 0, \\ (2x^2 - 7x + 3)(-x + 3) &\leq 0, \\ (2x^2 - 7x + 3)(x - 3) &\geq 0, \text{ или} \end{aligned}$$

$$2(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3) \geq 0, \text{ или } (x - 3)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0,$$

$$x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{2}.$$

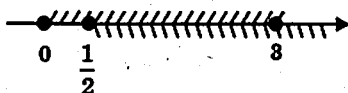


$$\text{Значит, } x \geq \frac{1}{2}.$$

Итак, для первого неравенства системы имеем $0 \leq x \leq 3$, а для второго имеем $x \geq \frac{1}{2}$.

Тогда решение системы неравенств, а значит, и исходного неравенства будет $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \leq x \leq 3.$$



Пример 5. Решить неравенство $|x^2 - 4x| + 3 \geq x^2 + |x - 5|$.

Решение

Если $x \leq 0$ или $4 \leq x \leq 5$, то данное неравенство примет вид $x^2 - 4x + 3 \geq x^2 - x + 5$ или $-3x \geq 2$, откуда

$$x \leq -\frac{2}{3}.$$

Если $0 \leq x \leq 4$, то получим $-x^2 + 4x + 3 \geq x^2 - x + 5$

или $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$, откуда $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

Наконец, если $x \geq 5$, то данное неравенство примет вид $x^2 - 4x + 3 \geq x^2 + x - 5$ или $5x \leq 8$, откуда $x \leq 1,6$.

Итак, $x \leq 1,6$ и $x \geq 5$ — противоречивые неравенства, значит, при $x \geq 5$ решений нет. Тогда решением данного неравенства будет

$$\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right].$$

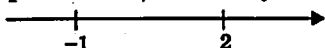
Ответ: $x \leq -\frac{2}{3}; \frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

Пример 6. Решить неравенство $|x + 1| - |x - 2| < 3$.

Решение

При $x = -1$, $|x + 1| = 0$; при $x = 2$, $|x - 2| = 0$.

Точки -1 и 2 разбивают числовую прямую на три промежутка:



Решим данное неравенство на каждом из промежутков:

1) $x < -1$, тогда имеем $-x - 1 + x - 2 < 3$ или $-3 < 3$, значит, $x \in \mathbb{R}$ и данное неравенство выполняется при $x < -1$;

2) $-1 \leq x < 2$, тогда $x + 1 + x - 2 < 3$, $2x < 4$, откуда $x < 2$. Значит, $-1 \leq x < 2$;

3) $x > 2$, тогда $x + 1 - x + 2 < 3$, $3 < 3$ — неверно, значит, при $x > 2$ данное неравенство не имеет решений.

Объединяя полученные решения, имеем $(-\infty; 2)$.

Ответ: $x < 2$.

Пример 7. Решить неравенство $|x^2 - 1| + |x^2 - 9| < 8$.

Решение

Пусть $x^2 = t$, где $t \geq 0$, тогда данное неравенство примет вид $|t - 1| + |t - 9| < 8$. Возможны случаи:

1) $0 \leq t \leq 1$, тогда $1 - t - t + 9 < 8$ или $t > 1$ — решений нет;

2) $1 < t < 9$, тогда $t - 1 - t + 9 < 8$ или $8 < 8$ — решений нет;

3) $t \geq 9$, тогда $t - 1 + t - 9 < 8$ или $t < 9$ — решений нет.

Следовательно, исходное неравенство не имеет решений:

Ответ: решений нет.

Пример 8. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} x - 2|x| > 1, \\ |x - 3| < 5. \end{cases}$$

Решение

Возможны 3 случая:

1) $x \geq 3$, тогда имеем систему
$$\begin{cases} x - 2x > 1, \\ x - 3 < 5, \end{cases}$$

$\begin{cases} x < -1, \\ x < 8, \end{cases}$ откуда $x < -1$ — нет решений;

2) $0 \leq x < 3$, тогда $\begin{cases} x - 2x > 1, \\ -x + 3 < 5, \end{cases}$ или $\begin{cases} x < -1, \\ x > -2, \end{cases}$ или $-2 < x < -1$ — не принадлежат промежутку $0 \leq x < 3$, т. е. решений нет;

3) $x < 0$, тогда имеем систему неравенств

$\begin{cases} x + 2x > 1, \\ -x + 3 < 5, \end{cases}$ или $\begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ x > -2, \end{cases}$ или $x > \frac{1}{3}$ и так как $x < 0$,

то решений нет.

Следовательно, исходная система не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Пример 9. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} |x - 2| \geq 3, \\ \left| \frac{x - 1}{x} \right| < 1. \end{cases}$$

Решение

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2 \geq 3, \\ x - 2 \leq -3, \\ -1 < \frac{x-1}{x} < 1; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x \geq 5, \\ x \leq -1, \\ \frac{x-1}{x} < 1, \\ \frac{x-1}{x} > -1; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x \geq 5, \\ x \leq -1, \\ -\frac{1}{x} < 0, \\ \frac{2x-1}{x} > 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x \geq 5, \\ x \leq -1, \\ x > 0, \\ x > \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Следовательно, $x \geq 5$ – решение данной системы.

Ответ: $x \geq 5$.

Пример 10. Решить систему неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} |x^2 + 5x| < 6, \\ |x + 1| \leq 1. \end{array} \right.$$

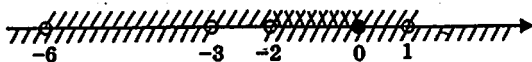
Решение

Данная система равносильна системе неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} -6 < x^2 + 5x < 6, \\ -1 \leq x + 1 \leq 1 \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 5x < 6, \\ x^2 + 5x > -6, \\ x + 1 \leq 1, \\ x + 1 \geq -1, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 5x - 6 < 0, \\ x^2 + 5x + 6 > 0, \\ x \leq 0, \\ x \geq -2, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (x-1)(x+6) < 0, \\ (x+2)(x+3) > 0, \\ -2 \leq x \leq 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -6 < x < 1, \\ -2 \leq x \leq 0, \\ x > -2, \\ x < -3, \end{array} \right.$$

откуда находим $-2 < x \leq 0$.



Ответ: $-2 < x \leq 0$.

Задачи

Группа А

Решить неравенства и указать наименьшее целое положительное решение для каждого из них:

1. $|x| < 5$;
2. $|x| \geq 7$;
3. $|x - 7| \leq 3$;
4. $|x + 4| > 2$;
5. $|x + 1| > -3$;
6. $|x - 11| < -13$;
7. $|x - 3,5| \leq 0$;
8. $|x - 9| \cdot (x - 8) > 0$;
9. $|6x - 1,5| \leq 8$;
10. $|5 - 2x| > 1$;
11. $|2x - 1| < |4x + 1|$;
12. $|1 - 2x| > 3 - x$;
13. $\left| \frac{x + 2}{2x - 3} \right| < 3$;
14. $x^2 + 5|x| - 24 > 0$;
15. $x^2 - |5x + 6| > 0$;
16. $2 \cdot |x + 1| > x + 4$;
17. $|2x - 1| + 5x \geq 2$;
18. $|x - 1| \leq \frac{x + 3}{3}$;
19. $x^2 > |x|$;
20. $x|x| > 7$.

Группа Б

Решить неравенства и указать наименьшее целое положительное решение для каждого из них:

1. $|2x^2 - 9x + 15| \geq 20$;
2. $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$;
3. $|x + 1| < |2x^2 + x - 1|$;
4. $\frac{|2 - x| - x}{|x - 3| - 1} \leq 2$;
5. $\frac{1}{x + 1} + \frac{2}{|x| - 1} \geq \frac{2}{x - 1}$;
6. $\frac{x^2 - 7|x| + 10}{(x - 3)^2} < 0$;
7. $\frac{|2 - x| - x}{|x - 3| - 1} \geq 2$;
8. $3|x - 1| + x^2 > 7$;
9. $\frac{|2x - 1|}{x^2 - x - 2} > \frac{1}{2}$;
10. $\left| \frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1} \right| \leq 3$;
11. $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$;
12. $\frac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 - 6x + 9} < 0$;
13. $2x \leq \frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3}$;
14. $|x| + |x - 1| < 5$;

$$15. |3x - 1| + |2x - 3| - |x + 5| < 2;$$

$$16. |2x + 1| - 5| > 2; \quad 17. |2x - |3 - x| - 2| \leq 4;$$

Решить системы неравенств:

$$18. \begin{cases} |x^2 + 5x| < 6, \\ |x + 1| \leq 1; \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} |x^2 - 4x| < 5, \\ |x + 1| < 3; \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} |x| \geq 1, \\ |x - 1| < 3. \end{cases}$$

§ 15. Иррациональные неравенства

Иррациональным неравенством называется неравенство, содержащее неизвестную величину под знаком корня (радикала).

При решении иррациональных неравенств используются те же приемы, что и при решении иррациональных уравнений. Если при решении иррациональных уравнений можно проверить найденные корни, то при решении иррациональных неравенств проверка подстановкой, как правило, невозможна, так как обычно решением неравенства является бесконечное множество.

Вместе с тем всякое иррациональное неравенство, содержащее переменное под знаком квадратного корня, после преобразований приводится к одному из

видов: $\sqrt{f(x)} < g(x)$ или $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

Аналогично неравенство $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq (g(x))^2. \end{cases}$$

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$$

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{3x-1} < x+4$.

Решение

Способ 1

Данное неравенство имеет вид $\sqrt{f(x)} < g(x)$, следовательно, оно равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 3x-1 \geq 0, \\ x+4 > 0, \\ 3x-1 < (x+4)^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{3}, \\ x > -4, \\ x^2 + 5x + 17 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{3}, \\ x^2 + 5x + 17 > 0. \end{cases}$$

Но $x^2 + 5x + 17 > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$, так как $D < 0$ и $a = 1 > 0$, тогда $x \geq \frac{1}{3}$ — решение данного неравенства.

Ответ: $x \geq \frac{1}{3}$.

Способ 2

Пусть $\sqrt{3x-1} = y$, где $y \geq 0$, тогда $y^2 = 3x-1$ и $x+4 = \frac{1}{3}(y^2 + 13)$. Имеем систему

$$\begin{cases} y < \frac{1}{3}(y^2 + 13), \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y^2 - 3y + 13 > 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Заметим, что $y^2 - 3y + 13 > 0$ при любом $y \in R$, так как $D < 0$ и $a = 1 > 0$, тогда последняя система равносильна неравенству $y \geq 0$. Значит, $3x - 1 \geq 0$, откуда

$$x \geq \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x \geq \frac{1}{3}$.

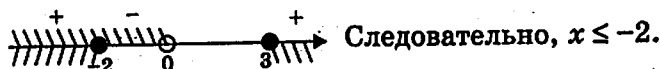
Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - x - 6} > x$.

Решение

Данное неравенство имеет вид $\sqrt{f(x)} > g(x)$, значит, оно равносильно совокупности систем неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0, \\ x < 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ x^2 - x - 6 > x^2. \end{cases}$$

Решая систему а), имеем $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.



При решении системы б) надо учесть, что I неравенство является следствием III неравенства, тогда

система б) равносильна системе $\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - x - 6 > x^2, \end{cases}$ или

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x < -6, \end{cases} \quad \text{которая не имеет решений.}$$

Следовательно, решение системы а) будет и решением исходного неравенства.

Ответ: $x \leq -2$.

Пример 3. Решить неравенство

$$2x^2 - 2x + 1 > \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Решение

Запишем данное неравенство в виде

$$2(x^2 - x + 1) - 1 > \sqrt{x^2 - x + 1}. \quad (1)$$

Заметим, что $x^2 - x + 1 > 0$ при любом $x \in R$, так как $D < 0$ и $a = 1 > 0$.

Пусть $\sqrt{x^2 - x + 1} = t$, где $t > 0$, тогда неравенство (1) примет вид $2t^2 - t - 1 > 0$, или, решая методом ин-

тервалов, получим $t < -\frac{1}{2}$ или $t > 1$, и так как $t > 0$,

то имеем лишь $t > 1$. Значит, $\sqrt{x^2 - x + 1} > 1$ или $x(x - 1) > 0$, откуда $x < 0$ или $x > 1$.

Ответ: $x < 0$; $x > 1$.

Пример 4. Решить неравенство $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} > 1$.

Решение

Заметим, что при $x > 1$ определена левая часть неравенства. Пусть $\sqrt[3]{2-x} = t$, тогда $t^3 = 2 - x$ и $x - 1 = 1 - t^3$. Имеем неравенство $t + \sqrt{1 - t^3} > 1$,

$\sqrt{1 - t^3} > 1 - t$, или $1 - t^3 > 1 - 2t + t^2$, или $t^3 + t^2 - 2t < 0$, $t(t^2 + t - 2) < 0$, $t(t + 2)(t - 1) < 0$, откуда $0 < t < 1$, $t < -2$, значит,

$$\begin{array}{ll} 0 < \sqrt[3]{2-x} < 1, & \text{или} \quad \sqrt[3]{2-x} < -2, \\ 0 < 2-x < 1, & 2-x < -8, \\ -2 < -x < -1, & -x < -10, \\ 1 < x < 2 & x > 10. \end{array}$$

Тогда решением исходного неравенства будет объединение полученных решений: $(1; 2) \cup (10; +\infty)$.

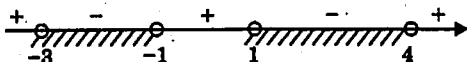
Ответ: $1 < x < 2$; $x > 10$.

Пример 5. Решить неравенство $\frac{x - 3\sqrt{x} - 4}{x + 2\sqrt{x} - 3} < 0$.

Решение

Заменой $\sqrt{x} = y$, где $y \geq 0$, данное неравенство сводится к рациональному: $\frac{y^2 - 3y - 4}{y^2 + 2y - 3} < 0$, которое решим методом интервалов:

$$\frac{(y-4)(y+1)}{(y+3)(y-1)} < 0, \quad y_1 = 4, \quad y_2 = -1; \quad y_3 = -3, \quad y_4 = 1.$$



Учитывая, что $y \geq 0$, имеем $1 < y < 4$ или $1 < \sqrt{x} < 4$, откуда $1 < x < 16$ – решение данного неравенства.

Ответ: $1 < x < 16$.

Пример 6. Решить неравенство $\frac{\sqrt{3x^2 + 4}}{x - 1} \geq 4$.

Решение

Так как $\sqrt{3x^2 + 4} > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$, то из данного неравенства имеем $x - 1 > 0$, т. е. $x > 1$.

Запишем данное неравенство в виде

$\sqrt{3x^2 + 4} \geq 4(x - 1)$, и так как обе части неравенства положительны, то, возведя в квадрат, получим равносильное неравенство

$$3x^2 + 4 \geq 16x^2 - 32x + 16; \quad 13x^2 - 32x + 12 \leq 0.$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, имеем $\frac{6}{13} \leq x \leq 2$.

Учитывая, что $x > 1$, имеем $1 < x \leq 2$.



Ответ: $1 < x \leq 2$.

Задачи

Группа А

Найти наименьшие целые решения неравенств:

1. $\sqrt{x-4} > 2$;
2. $\sqrt{x-1} < 3$;
3. $\sqrt{x+2} \geq 1$;
4. $\sqrt{x+5} > -2$;
5. $\sqrt{x^2-4} \leq -1$;
6. $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} < 0$;
7. $(x-3)\sqrt{x} < 0$;
8. $\sqrt{6-x} > \sqrt{x+2}$;
9. $\sqrt{x^2+x-2} < 2$;
10. $\sqrt{x^2+x+1} < 1$.

Группа Б

Найти наименьшие целые решения неравенств:

1. $\sqrt{x^2-x-12} < x$;
2. $\sqrt{3x-10} > \sqrt{6-x}$;
3. $\sqrt{4+3x-x^2} < 2$;
4. $\sqrt{x^3+3x+4} > -2$;
5. $\sqrt{x^2-3x+2} > 2-x$;
6. $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$;
7. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$;
8. $\sqrt{3x} \geq 1 + \sqrt{2x+1}$;
9. $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} > 8$;
10. $5\sqrt{x^2+5x+28} > x^2+5x+4$;
11. $\sqrt{\frac{x+3}{4-x}} \geq 2$;
12. $\sqrt{(x+4)(2x-1)} < 2(x+4)$;
13. $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0$;
14. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} \leq 1$;
15. $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-4} - \sqrt{4x+5} < 0$.

Найти среднее арифметическое целых решений для каждого из неравенств:

16. $\sqrt{x^2+11} < 31-x^2$;
17. $\sqrt{x^2-3x+5} + x^2 \leq 3x+7$;
18. $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{6-x} \geq \sqrt{2}$;
19. $\frac{x^2-13x+40}{\sqrt{19x-x^2-78}} \leq 0$;

$$20. 5 - x > \sqrt{2x - x^2}.$$

Найти наименьшие натуральные решения неравенств:

$$21. \sqrt{x^2 - 9} \leq x - 1;$$

$$22. \sqrt{4x^2 + 12x + 11} > \sqrt{(2 - x)(x - 3)};$$

$$23. \frac{2}{2 + \sqrt{4 - x^2}} + \frac{1}{2 - \sqrt{4 - x^2}} > \frac{1}{x};$$

$$24. \sqrt[3]{3 - x} + \sqrt{x - 2} > 1.$$

Найти наибольшие целые отрицательные решения неравенств:

$$25. x < \sqrt{9 - x^2};$$

$$26. \frac{x - 7}{\sqrt{4x^2 - 19x + 12}} < 0;$$

$$27. \sqrt{x^2 - 4x} + x < 6;$$

$$28. \sqrt{(x + 1)(x + 2)} - \sqrt{x^2 - x + 1} < 1;$$

$$29. \sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1;$$

$$30. \sqrt{x^2 - 6} + \sqrt{-x} > 0.$$

Решить неравенства:

$$31. (\sqrt{x} - 3)/(x - 2) > 0;$$

$$32. \sqrt{1 - \frac{x + 2}{x^2}} < \frac{2}{3};$$

$$33. x + 1 > \sqrt{x^2};$$

$$34. x - 1 < \sqrt{x^2 + 1};$$

$$35. 8 - 2x < \sqrt{-x^2 + 6x - 5};$$

$$36. x - 1 > 3\sqrt{x - 3};$$

$$37. \sqrt{x + 6} > \sqrt{x - 1} + \sqrt{2x - 5};$$

$$38. \sqrt{\frac{2x - 1}{x + 2}} - \sqrt{\frac{x + 2}{2x - 1}} \geq \frac{7}{12};$$

$$39. \sqrt[3]{x + 5} + 2 > \sqrt[3]{x - 3};$$

$$40. \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 - x.$$

Глава 4

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 16. Тождественные преобразования показательных и логарифмических выражений

Преобразования показательных и логарифмических выражений основаны на применении основных свойств соответствующих функций.

Логарифмом числа b по основанию a ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени x , в которую надо возвести число a , чтобы получить число b :

$$\log_a b = x, \text{ откуда } a^x = b. \quad (1)$$

Если в равенство (1) подставить значение $x = \log_a b$, то получим

$$a^{\log_a b} = b. \quad (2)$$

Это равенство справедливо при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ и называется *основным логарифмическим тождеством*.

С помощью (2) можно решать не очень сложные задачи.

Пример 1. Вычислить: а) $\log_4 32$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{\log_4 3}$.

Решение

а) Пусть $\log_4 32 = x$, тогда по определению логарифма имеем $4^x = 32$, или $2^{2x} = 2^5$; $x = 2,5$;

$$\begin{aligned}\text{б) так как } \frac{\sqrt{2}}{4} &= 2^{1/2} \cdot 2^{-2} = 2^{-3/2} = (4^{1/2})^{-3/2} = \\ &= 4^{-3/4}, \text{ то } \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{\log_4 3} = (4^{-3/4})^{\log_4 3} = (4^{\log_4 3})^{-3/4} = \\ &= 3^{-3/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{27}}.\end{aligned}$$

Заметим, что каждая из функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) является обратной по отношению к другой.

Пример 2. Вычислить $4^{-2 \log_4 3}$.

Решение

Используя свойства степени и формулу (2), найдем $4^{-2 \log_4 3} = (4^{\log_4 3})^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

Обычно применяются две системы логарифмов:

- 1) *десятичные*, или *бриггсовы*, в которых за основание принимается число 10 и обозначается символом $\lg$;
- 2) *натуральные*, или *неперовы*, где основанием служит число e , где $2 < e < 3$. Численно $e = 2,718281828...$ и обозначается символом $\ln$.

Так как все свойства логарифмов вытекают из соответствующих свойств степеней, то для преобразования показательных и логарифмических выражений надо уметь свободно обращаться со степенями.

Свойства степеней

Для любых x, y и $a > 0$, $b > 0$ верны равенства $a^0 = 1$; $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $a^x : a^y = a^{x-y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $(ab)^x = a^x b^x$;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; a^{-x} = \frac{1}{a^x}; a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Свойства логарифмов

$\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$; $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$ ($x > 0$, $y > 0$);

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$ ($x > 0$, $p \in R$);

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, где $x > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ формула перехода от основания a к основанию b .

В частности, если $x = b$, то $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ или $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Часто применяются соотношения

$\log_a b = \log_{a^p} b^p = p \log_{a^p} b$, где $p \neq 0$, $p \in R$.

Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $p \neq 0$, то $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$.

Пример 3. Вычислить $\log_3 18$, если $\log_3 12 = a$.

Решение

$$\log_3 18 = \log_3 (2 \cdot 3^2) = \log_3 2 + \log_3 3^2 = \log_3 2 + 2 \log_3 3 = \log_3 2 + 2 \cdot 1 = \log_3 2 + 2.$$

Остается вычислить $\log_3 2$, если $\log_3 12 = a$.

Заметим, что $\log_3 12 = \log_3 (4 \cdot 3) = \log_3 4 + \log_3 3 = \log_3 2^2 + 1 = 2 \log_3 2 + 1 = a$, откуда находим

$$2 \log_3 2 = a - 1 \text{ и } \log_3 2 = \frac{1}{2}(a - 1), \text{ тогда}$$

$$\log_3 18 = \frac{1}{2}(a - 1) + 2 = \frac{a - 1 + 4}{2} = \frac{a + 3}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a + 3}{2}.$$

Пример 4. Вычислить $(\sqrt[3]{5})^{\frac{3}{\log_2 5}}$.

Решение

Используя свойство логарифмов $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, перейдем в показателе степени к логарифму b по основанию 5:

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\frac{3}{\log_2 5}} = \left(\left(5\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{\log_2 5}} = 5^{\frac{1}{\log_2 5}} = 5^{\log_5 2} = 2,$$

согласно основному логарифмическому тождеству.

Ответ: 2.

Пример 5. Вычислить:

а) $10^{2-2\lg 5}$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2+2\log_{\frac{1}{4}} 6}$; в) $36^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{36} 64}$.

Решение

Используя основное логарифмическое тождество, имеем:

$$\begin{aligned} \text{а) } 10^{2-2\lg 5} &= 10^2 \cdot 10^{-2\lg 5} = 10^2 \cdot (10^{\lg 5})^{-2} = 10^2 \cdot 5^{-2} = \\ &= 100 \cdot \frac{1}{25} = 4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \left(\frac{1}{4}\right)^{2+2\log_{\frac{1}{4}} 6} &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2\log_{\frac{1}{4}} 6} = \frac{1}{16} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{16} \cdot 6^2 = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} = 2,25; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } 36^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{36} 64} &= 36^{\log_6 2} \cdot 36^{-\frac{1}{2}\log_{36} 64} = \\ &= 6^{2\log_6 2} \cdot \left(36^{\log_{36} 64}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(6^{\log_6 2}\right)^2 \cdot (64)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= 2^2 \cdot (8^2)^{-0,5} = 2^2 \cdot 8^{-1} = \frac{4}{8} = 0,5. \end{aligned}$$

Ответ: а) 4; б) 2,25; в) 0,5.

Пример 6. Вычислить:

а) $\log_{49} 16$, если $\log_{14} 28 = a$;

- б) $\log_{30} 8$, если $\lg 5 = a$ и $\lg 3 = b$;
 в) $\log_{12} 60$, если $\log_6 30 = a$, $\log_{15} 24 = b$.

Решение

а) $\log_{49} 16 = \log_{7^2} 4^2 = \log_7 4 = \log_7 2^2 = 2 \log_7 2$.

Пусть $\log_7 2 = x$, тогда $\log_{49} 16 = 2x$. Далее имеем

$$\log_{14} 28 = \frac{\log_7 28}{\log_7 14} = \frac{\log_7 (4 \cdot 7)}{\log_7 (2 \cdot 7)} = \frac{\log_7 4 + \log_7 7}{\log_7 2 + \log_7 7} =$$

$$= \frac{2x + 1}{x + 1}.$$

По условию $\log_{14} 28 = a$, тогда получим уравнение

$$\frac{2x + 1}{x + 1} = a, \quad 2x + 1 = ax + a, \quad (2 - a)x = a - 1, \quad \text{откуда}$$

$$x = \frac{a - 1}{2 - a}, \quad \text{тогда } \log_{49} 16 = 2x = \frac{2(a - 1)}{2 - a};$$

$$\text{б) } \log_{30} 8 = \log_{30} 2^3 = 3 \log_{30} 2 = 3 \cdot \frac{\lg 2}{\lg 30}.$$

Заметим, что $\lg 2 = \lg \frac{10}{5} = \lg 10 - \lg 5 = 1 - a$;

$$\lg 30 = \lg (2 \cdot 3 \cdot 5) = \lg 2 + \lg 3 + \lg 5 = 1 - a + b + a = 1 + b,$$

Итак, $\log_{30} 8 = \frac{3 \cdot (1 - a)}{1 + b}.$

$$\text{в) } \log_{12} 60 = \frac{\log_2 60}{\log_2 12} = \frac{\log_2 (2^2 \cdot 3 \cdot 5)}{\log_2 (2^2 \cdot 3)} =$$

$$= \frac{\log_2 2^2 + \log_2 3 + \log_2 5}{\log_2 2^2 + \log_2 3} = \frac{2 + \log_2 3 + \log_2 5}{2 + \log_2 3}.$$

Пусть $\log_2 3 = x$, $\log_2 5 = y$, тогда получим

$$\log_{12} 60 = \frac{2 + x + y}{2 + x}.$$

$$\text{Далее имеем } \log_6 30 = \frac{\log_2 30}{\log_2 6} = \frac{\log_2 (2 \cdot 3 \cdot 5)}{\log_2 (2 \cdot 3)} = \\ = \frac{1+x+y}{1+x};$$

$$\log_{15} 24 = \frac{\log_2 24}{\log_2 15} = \frac{\log_2 (2^2 \cdot 3)}{\log_2 (3 \cdot 5)} = \frac{\log_2 2^2 + \log_2 3}{\log_2 3 + \log_2 5} = \\ = \frac{3+x}{x+y}.$$

Итак, для нахождения x и y имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1+x+y}{1+x} = a, \\ \frac{x+3}{x+y} = b; \end{cases} \quad \begin{cases} 1+x+y = a(1+x), \\ x+3 = b(x+y). \end{cases}$$

Из II уравнения системы $y = \frac{x+3-bx}{b}$, тогда

I уравнение примет вид $1+x + \frac{x+3-bx}{b} = a(1+x)$
или $b+bx+x+3-bx = ab+abx$, $x-abx = ab-b-3$,
 $x(1-ab) = ab-b-3$, откуда $x = \frac{ab-b-3}{1-ab}$. Подстав-

ляя значение x в равенство $y = \frac{1}{b}(x+3-bx)$, нахо-

дим: $y = \frac{2a-b-2+ab}{ab-1}$, тогда после упрощений по-

лучим $\log_{12} 60 = \frac{2ab+2a-1}{ab+b+1}$.

Ответ: а) $\frac{2(a-1)}{2-a}$; б) $\frac{3(1-a)}{1+b}$; в) $\frac{2ab+2a-1}{ab+b+1}$.

Часто приходится прологарифмировать обе части данного выражения или, напротив, потенцировать.

Логарифмирование – это такое преобразование, при котором логарифм выражения с переменными приводится к сумме или разности логарифмов переменных.

Пример 7. Дано: а) $x = 4ab$; б) $x = \frac{a-c}{a+c}$;

в) $x = \sqrt[3]{ac} : \frac{2b}{a^2c}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Найти $\lg x$.

Решение

Логарифмируя, получим:

а) $\lg x = \lg(4ab) = \lg 4 + \lg a + \lg b = 2 \lg 2 + \lg a + \lg b$;

б) $\lg x = \lg \frac{a-c}{a+c} = \lg(a-c) - \lg(a+c)$;

в) $\lg x = \lg \left(\sqrt[3]{ac} : \frac{2b}{a^2c} \right) = \lg \left(\sqrt[3]{ac} \cdot \frac{a^2c}{2b} \right) =$

$= \lg \sqrt[3]{ac} + \lg \frac{a^2c}{2b} = \lg(ac)^{1/3} + \lg(a^2c) - \lg(2b) =$

$= \frac{1}{3} \lg ac + \lg a^2 + \lg c - (\lg 2 + \lg b) =$

$= \frac{1}{3} \lg a + \frac{1}{3} \lg c + 2 \lg a + \lg c - \lg 2 - \lg b =$

$= \frac{7}{3} \lg a + \frac{4}{3} \lg c - \lg 2 - \lg b.$

Потенцирование – это действие, обратное логарифмированию.

Пример 8. Найти x по данному его логарифму:

а) $\log_2 x = 3 \log_2 m - 4 \log_2 n$;

б) $\lg x = \frac{3}{2} \lg a - \frac{4}{3} \lg b$;

в) $\lg x = \lg(a-b) + \frac{1}{3} (2 \lg a + 3 \lg b).$

Решение

а) Потенцируя, получим $\log_2 x = \log_2 m^3 - \log_2 n^4 =$
 $= \log_2 \frac{m^3}{n^4}$, откуда $x = \frac{m^3}{n^4}$;

б) $\lg x = \lg a^{3/2} - \lg b^{4/3} =$
 $= \lg \frac{a^{3/2}}{b^{4/3}} = \lg \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{b^4}} = \lg \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^4}}$, значит, $x = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^4}}$;

в) $\lg x = \lg(a-b) + \frac{1}{3}(\lg a^2 + \lg b^3) =$
 $= \lg(a-b) + \frac{1}{3}(\lg(a^2 b^3)) = \lg(a-b) + \lg \sqrt[3]{a^2 b^3} =$
 $= \lg(a-b) \sqrt[3]{a^2 b^3} = \lg b \sqrt[3]{a^2} (a-b)$, откуда
 $x = b \sqrt[3]{a^2} (a-b)$.

Пример 9. Найти число x , если:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$; 2) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$; 3) $\log_{0,1} x = -1$.

Решение

По определению логарифма имеем:

1) $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = (2^{-1})^{-3} = 2^3 = 8$;

2) $x = (\sqrt{2})^4 = 2^2 = 4$;

3) $x = (0,1)^{-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = (10^{-1})^{-1} = 10$.

Ответ: 1) 8; 2) 4; 3) 10.

Пример 10. Найти основание x , если:

1) $\log_x 216 = 3$; 2) $\log_x \frac{1}{64} = -3$; 3) $\log_x \sqrt{8} = \frac{3}{4}$.

Решение

По определению логарифма имеем:

1) $x^3 = 216$, $x^3 = 6^3$, $x = 6$;

$$2) x^{-3} = \frac{1}{64}; x^{-3} = 4^{-3}, x = 4;$$

$$3) x^{3/4} = \sqrt[4]{8}, x^{3/4} = 2^{3/2}, x = \left(2^{3/2}\right)^{4/3}, x = 2^2 = 4.$$

Ответ: 1) 6; 2) 4; 3) 4.

Пример 11. Определить x , если:

$$1) \log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{64} = x; 2) \log_{0,32} \left(\frac{2}{5} \sqrt{2}\right) = x;$$

$$3) \log_{4\sqrt[4]{4}} x = -\frac{3}{4}.$$

Решение

По определению логарифма имеем:

$$1) (2\sqrt{2})^x = \frac{1}{64}, \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^6, 2^{\frac{3}{2}x} = 2^{-6}, \text{откуда}$$

$$\frac{3}{2}x = -6, \text{ тогда } x = -6 \cdot \frac{2}{3} = -4, x = -4;$$

$$2) (0,32)^x = \frac{2}{5} \sqrt{2}, \left(\frac{8}{25}\right)^x = \frac{2\sqrt{2}}{5} \text{ или}$$

$$\left(\frac{8}{25}\right)^{2x} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2, \left(\frac{8}{25}\right)^{2x} = \frac{8}{25}, 2x = 1, \text{откуда}$$

$$x = 0,5;$$

$$3) x = (4\sqrt[4]{4})^{-\frac{3}{4}} = \left(4 \cdot 4^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(4^{\frac{5}{4}}\right)^{-\frac{3}{4}} = 4^{-1} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 1) -4; 2) 0,5; 3) 0,25.

Пример 12. Найти x , если:

$$1) \lg x = \lg 0,25 + \lg 8; 2) \lg x = \frac{1}{2} \lg 12 + \frac{1}{2} \lg 3,$$

$$3) \lg x = -3 \lg 5 - 2 \lg 2.$$

Решение

1) $\lg x = \lg (0,25 \cdot 8)$, $\lg x = \lg 2$, $x = 2$;

2) $\lg x = \frac{1}{2}(\lg 12 + \lg 3)$, $\lg x = \frac{1}{2}\lg(12 \cdot 3)$,

$\lg x = \frac{1}{2}\lg 36$, $\lg x = \lg 36^{\frac{1}{2}}$, $x = 36^{\frac{1}{2}} = 6$; $x = 6$;

3) $\lg x = -(3 \lg 5 + 2 \lg 2)$, $\lg x = -(\lg 5^3 + \lg 2^2)$,
 $\lg x = -(\lg (5^3 \cdot 2^2))$, $\lg x = -\lg 500$, $\lg x = \lg 500^{-1}$,

$x = \frac{1}{500}$.

Ответ: 1) 2; 2) 6; 3) $\frac{1}{500}$.

Пример 13. Вычислить: 1) $\lg \left(2 - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} \cdot \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3} \right)$;

2) $\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$;

3) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.

Решение

1) Используя формулу $\log_b a \cdot \log_a b = 1$, получим

$$\lg \left(2 - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} \cdot \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3} \right) = \lg (2 - 1) = \lg 1 = 0.$$

2) Данное выражение приведем (по формуле перехода от одного основания к другому) к одному из оснований, например к основанию 3:

$$\begin{aligned} \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1 &= \log_3 7 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 7} \cdot \frac{\log_3 4}{\log_3 5} + 1 = \\ &= \log_3 4 + 1 = \log_3 4 + \log_3 3 = \log_3 12. \end{aligned}$$

3) Приведем к основанию 2:

$$\begin{aligned} \frac{\log_2 2}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 6} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 8} &= \\ = \frac{\log_2 2}{\log_2 8} &= \frac{1}{\log_2 2^3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: 1) 0; 2) $\log_3 12$; 3) $\frac{1}{3}$.

Замечание. Известно, что $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$. (1)
Если поставить в соответствие логарифму $\log_a b$

дробь $\frac{b}{a}$ и то же сделать для других логарифмов, то равенству (1) можно поставить в соответствие равен-

ство $\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, которое означает обычное сокращение на a .

Рассматривая пример 3), имеем после сокращений дробь $\frac{2}{8}$, которой соответствует $\log_8 2 = \frac{1}{3}$. (см. Шарыгин И. Математика для поступающих в вузы. М.: Дрофа, 1997. С. 139–140).

Задачи

Группа А

Вычислить:

1. $\log_2 16$;

2. $\log_2 32$;

3. $\log_3 27$;

4. $\log_3 81$;

5. $\log_2 \frac{1}{8}$;

6. $\log_3 \frac{1}{3}$;

7. $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$;

8. $\log_{\frac{1}{2}} 4$;

9. $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2}$;

10. $\log_6 216$;

11. $\log_5 \frac{1}{125}$;

12. $\log_{\frac{1}{2}} 27$;

13. $\log_{\frac{1}{6}} 36$;

14. $5^{\log_5 16}$;

15. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6}$;

16. $\left(\frac{1}{2}\right)^{6 \log_{\frac{1}{2}} 2}$;

17. $7^{\frac{1}{2} \log_7 9}$;

18. $9^{\log_3 12}$;

19. $0,125^{\log_{0,5} 1}$;

20. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2} \log_3 4}$;

21. $27^{-4 \log_{\frac{1}{3}} 5}$;

$$22. \left(\frac{1}{7}\right)^{1+2\log_{\frac{1}{7}} 3}; \quad 23. \log_{10} 8 + \log_{10} 125;$$

$$24. \log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}; \quad 25. \log_5 75 - \log_5 3;$$

$$26. \log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32; \quad 27. \log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10;$$

$$28. 2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}.$$

Найти x по данному его логарифму:

$$29. \log_2 x = \log_4 9; \quad 30. \log_4 x = \log_{\frac{1}{4}} 3;$$

$$31. \log_5 x = \log_{\frac{1}{5}} 25; \quad 32. \log_{\frac{1}{4}} x = \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$33. \lg x = 3 \lg 2; \quad 34. \lg x = \lg 7 + \lg 3;$$

$$35. \lg x = \lg 32 - \lg 8; \quad 36. \log_4 x = \log_2 3 + \log_2 \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$37. \log_2 x = \frac{1}{2} \log_2 5 + \frac{1}{2} \log_2 20;$$

$$38. \log_5 x = \log_5 \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{4} \log_5 0,25;$$

$$39. \log_3 x = \log_3 m - \log_3 n;$$

$$40. \lg x = \frac{1}{2} (\lg m + \lg n).$$

Прологарифмировать выражения:

$$41. x = abc; \quad 42. x = 3(a + b);$$

$$43. x = 3ab^2c^3; \quad 44. x = a^3\sqrt{b};$$

$$45. x = 5a\sqrt[4]{b^3c}; \quad 46. x = \frac{c^2d^3}{5mn^2};$$

$$47. x = m^{-2}n^{-3}; \quad 48. x = \frac{1}{2}m^{-4}\sqrt{2tg \alpha}.$$

Выразить:

$$49. \lg 15 \text{ через } \lg 3 \text{ и } \lg 5;$$

50. $\lg 50$ через $\lg 2$ и $\lg 5$;
 51. $\lg 56$ через $\lg 2$ и $\lg 7$;
 52. $\lg 0,75$ через $\lg 2$ и $\lg 3$.

Вычислить:

53. $\frac{\log_5 27}{\log_5 9}$; 54. $\frac{\log_7 8}{\log_7 15 - \log_7 30}$;
 55. $\frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$.

Группа Б

Вычислить:

1. $\log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}}$; 2. $\log_7 \frac{\sqrt[3]{7}}{49}$; 3. $\log_4 256$;
 4. $\log_7 \frac{1}{343}$; 5. $\frac{\log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2} \log_6 150}$;
 6. $\frac{3 \log_7 2 - \frac{1}{2} \log_7 64}{4 \log_5 2 + \frac{1}{3} \log_5 27}$; 7. $\frac{\log_2 192}{\log_2 2} - \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2}$;
 8. $\lg 7 (\log_7 2 + \log_7 5)$;
 9. $\frac{2}{3} \lg 0,001 + \lg \sqrt[3]{1000} - \frac{3}{5} \lg \sqrt{10000}$;
 10. $\log_{\frac{1}{4}} (\log_3 4 \cdot \log_2 3)$; 11. $5^{\frac{\lg 625}{\lg 25}}$;
 12. $\log_3 \log_2 8$; 13. $\frac{1}{3} \log_9 \log_2 8$;
 14. $3 \log_2 \log_4 16 + \log_{\frac{1}{2}} 2$; 15. $\log_{10} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$;
 16. $\log_2 \cos \frac{\pi}{3}$;

$$17. \log_3 1 - \log_4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \log_5 \cos 0;$$

$$18. \left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_9 4} + 25^{\log_{125} 8} \right) \cdot 49^{\log_7 2};$$

$$19. \log_3 (\log_2 5 \cdot \log_5 8);$$

$$20. 0,25 \left(1 + 4^{\log_2 5} \right)^{\log_{25} 4};$$

$$21. 36^{\log_6 5} + 10^{1 - \lg 2} - 3^{\log_9 36}.$$

Вычислить:

$$22. \log_{49} 28, \text{ если } \log_7 2 = m;$$

$$23. \log_8 16, \text{ если } \log_{12} 27 = a;$$

$$24. \log_{36} 9, \text{ если } \log_{36} 8 = x;$$

$$25. \log_{100} 40, \text{ если } \log_2 5 = c;$$

$$26. 3 \log_{\frac{a^3}{b}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}} + \log_{\frac{a^3}{b}} b, \text{ если } \log_a b = 2;$$

$$27. \log_{ab} \frac{\sqrt{b}}{a} + \log_{\sqrt{ab}} b + \log_a \sqrt[3]{b}, \text{ если } \log_a b = 2;$$

$$28. \left(25^{1/\log_5 5} + 49^{1/\log_7 7} \right)^{1/2};$$

$$29. \log_{\frac{1}{2}} \left(\log_3 \cos \frac{\pi}{6} - \log_3 \sin \frac{\pi}{6} \right);$$

$$30. \log_{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{\pi}{8} \right) + \log_{\sqrt{2}} \left(2 \cos \frac{\pi}{8} \right);$$

$$31. \log_3 \left(2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right) - \log_3 \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} \right);$$

$$32. \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \right) + \\ + \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \right);$$

$$33. 9^{\log_3 4} + \log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36;$$

34. $10^{0,5 \lg 16} + 14 \log_3 \sqrt{2} \cdot \log_4 81$;
 35. $16 (\log_9 45 - 1) \cdot \log_{11} 9 \cdot \log_5 121$.

Сравнить числа:

36. $\log_{\frac{1}{3}} 9$ и $\log_{\frac{1}{3}} 17$; 37. $\log_2 \frac{\sqrt{5}}{2}$ и $\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$;

38. $\lg \lg \lg 50$ и $\lg^3 50$;

39. $\frac{1}{2} (\lg 5 + \lg \sqrt{7})$ и $\lg \frac{5 + \sqrt{7}}{2}$;

40. $2^{\frac{2 \log_2 5 + \log_{\frac{1}{3}} 9}{9}}$ и $\sqrt{8}$.

Найти число x по его логарифму:

41. $\log_7 x = \log_7 28 - \log_7 98$;

42. $\log_3 x = \log_3 2\sqrt{2} + \log_3 3\sqrt{2}$;

43. $\lg x = \lg \frac{1}{4} + \lg \frac{1}{250}$;

44. $\log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} \frac{7}{3} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{9}{14} - 2 \log_{\frac{1}{3}} 7$;

45. $\log_{\sqrt{5}} x = 2 \log_{\sqrt{5}} 4 - \log_{\sqrt{5}} 2 + \log_{\sqrt{5}} 5$;

46. $\lg x = 3 \lg 4 - 2 \lg 3 + \frac{1}{3} \lg 27$;

47. $\log_2 x = 3 \log_2 (a + b) - 2 \log (a - b)$;

48. $\log_4 x = \frac{2}{5} \log_4 m - \frac{3}{4} \log_4 n$;

49. $\log_3 x = 5 \log_3 m +$
 $+ \frac{1}{2} \left(\log_3 (m + n) + \frac{1}{3} \log_3 (m - n) - \log_3 m - \log_3 n \right)$;

50. $\log_{\sqrt{2}} x = \log_{\sqrt{2}} b - \frac{1}{m} \log_{\sqrt{2}} (b - c) +$
 $+ m \log_{\sqrt{2}} (b + c)$.

Прологарифмировать выражения:

$$51. x = \frac{\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^3a}}; \quad 52. x = \frac{a\sqrt{b}\sqrt{a}\sqrt{b}}{b\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{a}};$$

$$53. x = \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{ab}}} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}; \quad 54. x = \sqrt[n+1]{a^n \sqrt[n]{b^{-1}}};$$

$$55. x = 3^{\sqrt[4]{4}}; \quad 56. x = 0,8^{\sqrt[4]{0,5}}.$$

Найти значения выражений:

$$57. \frac{2 \log_3 12 - 4 \log_3^2 2 + \log_3^2 12 + 4 \log_3 2}{3 \log_3 12 + 6 \log_3 2};$$

$$58. \frac{3 \log_5 15 \log_5 9 - 2 \log_5^2 15 - \log_5^2 9}{\log_5 9 - \log_5 15};$$

$$59. (\log_5 2 + \log_2 5 + 2) (\log_5 2 - \lg 2) \log_2 5 - \log_5 2;$$

$$60. (\log_5 7 + 9 \log_7 5 + 6) (\log_5 7 - 3 \log_{875} 7) \cdot \log_7 5 - \log_5 7.$$

§ 17. Показательные уравнения

Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения вида $a^x = a^b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, x — неизвестное. Это уравнение решается с помощью свойства степени: степени с одинаковым основанием $a > 0$, $a \neq 1$ равны только тогда, когда равны их показатели.

Рассмотрим различные типы показательных уравнений и методы их решения.

1. Решение уравнений с использованием свойств показательной функции

Пример 1. Решить уравнение $3 \cdot 27^x = 1$.

Решение

Запишем уравнение в виде $3 \cdot 3^{3x} = 1$ или $3^{1+3x} = 3^0$,
откуда $1 + 3x = 0$, $x = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $x = -\frac{1}{3}$.

Пример 2. Решить уравнение $3^{x^2-3x+2} = 1$.

Решение

$3^{x^2-3x+2} = 3^0$, откуда $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Пример 3. Решить уравнение

$$0,125 \cdot 4^{2x-8} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}} \right)^{-x}.$$

Решение

Приведем обе части уравнения к основанию 2,
учитывая, что $0,125 = \frac{1}{8}$, $0,25 = \frac{1}{4}$ и $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$.

$$\frac{1}{8} \cdot (2^2)^{2x-8} = \left(\frac{1}{4} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \right)^{-x}$$

$$\text{или } 2^{-3} \cdot 2^{4x-16} = \left(2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \right)^{-x}, \quad 2^{-3+4x-16} = 2^{\frac{5}{2}x}, \text{ откуда}$$

$$-3 + 4x - 16 = 2,5x \text{ или } 1,5 = 19, \quad 3x = 38, \quad x = \frac{38}{3}.$$

Ответ: $x = \frac{38}{3}$.

2. Решение уравнений, сводящихся к квадратным

Пример 4. Решить уравнение $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$.

Решение

Запишем уравнение в виде $5^{2x} \cdot 5^{-1} + 5^x \cdot 5 = 250$,

$\frac{1}{5} \cdot (5^x)^2 + 5 \cdot 5^x - 250 = 0$. Пусть $5^x = t$, где $t > 0$, тог-

да получим уравнение $\frac{1}{5}t^2 + 5t - 250 = 0$,

$$D = 25 - 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot (-250) = 25 + 200 = 225 = 15^2 > 0,$$

$t_{1,2} = \frac{-5 \pm 15}{2/5}$, $t_1 = 25$, $t_2 = -50$ (не удовлетворяет условию $t > 0$). Значит, $5^x = 25$, $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

Пример 5. Решить уравнение $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$.

Решение

Так как $3^{4\sqrt{x}} = (3^{2\sqrt{x}})^2$, то заменой $3^{2\sqrt{x}} = t$, где $t > 0$, данное уравнение сводится к квадратному: $t^2 - 4t + 3 = 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

Оба корня удовлетворяют условию $t > 0$.

Если $t = 1$, то $3^{2\sqrt{x}} = 1$ или $3^{2\sqrt{x}} = 3^0$, откуда имеем равносильное уравнение $2\sqrt{x} = 0$, $x_1 = 0$. Если $t = 3$, то $3^{2\sqrt{x}} = 3$, $2\sqrt{x} = 1$ или $4x = 1$, откуда $x_2 = \frac{1}{4}$.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

Пример 6. Решить уравнение $4^x \cdot 5^{x+1} = 5 \cdot 20^{2-x}$.

Решение

Запишем уравнение в виде $4^x \cdot 5^x \cdot 5 = 5 \cdot 20^2 \cdot 20^{-x}$

или $(4^x \cdot 5^x) = \frac{400}{20^x}$, или $20^x = \frac{400}{20^x}$; пусть $20^x = t$, где

$t > 0$, тогда получим уравнение $t = \frac{400}{t}$ или $t^2 = 400$,
 $t = 20$ (так как $t > 0$).

Если $t = 20$, то $20^x = 20$, откуда $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Пример 7. Решить уравнение $2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6$.

Решение

Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то уравнение запишется
в виде $2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{1-\sin^2 x} = 6$ или $2^{\sin^2 x} + \frac{8}{2^{\sin^2 x}} = 6$.

Пусть $2^{\sin^2 x} = t$, где $t > 0$, тогда получим $t + \frac{8}{t} = 6$
или $t^2 - 6t + 8 = 0$, откуда $t_1 = 2$, $t_2 = 4$. Имеем 2 урав-
нения:

$$1) 2^{\sin^2 x} = 2 \text{ или } \sin^2 x = 1,$$

$$\cos^2 x = 0, \cos x = 0,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) 2^{\sin^2 x} = 4, \sin^2 x = 2 - \text{нет корней, так как } |\sin x| \leq 1.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 8. Решить уравнение

$$64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0.$$

Решение

Так как $12^x > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$, то, разделив обе
части уравнения на $12^x \neq 0$, получим

$$64 \cdot \left(\frac{9}{12}\right)^x - 84 + 27 \cdot \left(\frac{16}{12}\right)^x = 0 \text{ или}$$

$$64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + 27 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x - 84 = 0.$$

Пусть $\left(\frac{3}{4}\right)^x = t$, где $t > 0$, тогда получим уравнение

$$64t + \frac{27}{t} - 84 = 0 \text{ или } 64t^2 - 84t + 27 = 0,$$

$$D/4 = 42^2 - 64 \cdot 27 = 36 = 6^2 > 0, \quad t_{1,2} = \frac{42 \pm 6}{64},$$

$$t_1 = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}, \quad t_2 = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}.$$

Если $t = \frac{3}{4}$, то $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4}$, откуда $x_1 = 1$;

если $t = \frac{9}{16}$, то $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{9}{16}$, откуда $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt{8 \cdot 3^{x+2} - 23} = 2 - 3^{x+1}.$$

Решение

Пусть $3^{x+1} = t$, где $t > 0$, тогда $3^{x+2} = 3 \cdot 3^{x+1} = 3t$,
и данное уравнение примет вид $\sqrt{24t - 23} = 2 - t$.

После возведения в квадрат и упрощений получим квадратное уравнение $t^2 - 28t + 27 = 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = 27$. Так как $2 - t \geq 0$, то корень $t = 27$ не подходит. Тогда $t = 1$ и $3^{x+1} = 1$, $x = -1$.

Ответ: $x = -1$.

Пример 10. Решить уравнение

$$(6 - \sqrt{35})^x + (6 + \sqrt{35})^x = 142.$$

Решение

Способ 1

Заметим, что

$$6 - \sqrt{35} = \frac{(6 - \sqrt{35})(6 + \sqrt{35})}{6 + \sqrt{35}} = \frac{1}{6 + \sqrt{35}}.$$

Пусть $(6 - \sqrt{35})^x = t$, где $t > 0$, тогда имеем

$$t + \frac{1}{t} = 142 \text{ или } t^2 - 142t + 1 = 0.$$

$$D/4 = 71^2 - 1 = 5040 > 0, t_{1,2} = 71 \pm 12\sqrt{35}, \text{ где}$$

$$t_1 = 71 + 12\sqrt{35} = (6 + \sqrt{35})^2 > 0 \text{ и}$$

$$t_2 = 71 - 12\sqrt{35} = (6 - \sqrt{35})^2 > 0.$$

Следовательно: 1) $(6 - \sqrt{35})^x = (6 + \sqrt{35})^2$ или

$$(6 + \sqrt{35})^x = (6 + \sqrt{35})^2, \text{ откуда } x_1 = -2;$$

$$2) (6 - \sqrt{35})^x = (6 - \sqrt{35})^2, x_2 = 2.$$

Итак, исходное уравнение имеет два корня.

Ответ: $x_1 = -2, x_2 = 2$.

Способ 2

Заметим, что $(6 - \sqrt{35})(6 + \sqrt{35}) = 1$, тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} (6 - \sqrt{35})^x + (6 + \sqrt{35})^x = 142, \\ (6 - \sqrt{35})^x \cdot (6 + \sqrt{35})^x = 1, \end{cases}$$

где $(6 - \sqrt{35})^x$ и $(6 + \sqrt{35})^x$ являются корнями квадратного уравнения $y^2 - 142y + 1 = 0$, $y_1 = 71 + 12\sqrt{35}$, $y_2 = 71 - 12\sqrt{35}$ и т. д. аналогично I способу.

3. Решение уравнений вынесением общего множителя за скобку

Пример 11. Решить уравнение $5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{2x-1} = 110$.

Решение

Вынесем за скобку 5^{2x-1} — степень с наименьшим показателем: $5^{2x-1}(5^2 - 3) = 110$, откуда $5^{2x-1} = 5$ или $2x - 1 = 1, 2x = 2, x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Пример 12. Решить уравнение $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$.

Решение

Вынесем за скобки 2^{x-3} , тогда получим
 $2^{x-3} \cdot (2^2 + 2 + 1) = 448$ или $2^{x-3} \cdot 7 = 448$,
откуда $2^{x-3} = 64$, $2^{x-3} = 2^6$, $x - 3 = 6$, $x = 9$.

Ответ: $x = 9$.

Замечание. За скобку целесообразно всегда выносить степень с наименьшим показателем, чтобы избежать появления дробных чисел в скобке.

Пример 13. Решить уравнение

$$5 \cdot 3^{2x-1} - 9^{x-0,5} = 9^x + 4 \cdot 3^{2x-2}.$$

Решение

Запишем уравнение в виде

$$5 \cdot 3^{2x-1} - 3^{2x-1} - 3^{2x} - 4 \cdot 3^{2x-2} = 0,$$

$$4 \cdot 3^{2x-1} - 3^{2x} - 4 \cdot 3^{2x-2} = 0;$$

вынесем за скобки 3^{2x-2} — степень с наименьшим показателем:

$$3^{2x-2} \cdot (4 \cdot 3 - 3^2 - 4) = 0, \quad 3^{2x-2} \cdot (-1) = 0 \text{ или } 3^{2x-2} = 0$$

— нет корней, так как $3^{2x-2} > 0$.

Ответ: нет корней.

Пример 14. Решить уравнение

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}.$$

Решение

$$3^x \cdot (1 + 3 + 3^2) = 5^x (1 + 5 + 5^2), \text{ или } 13 \cdot 3^x = 31 \cdot 5^x,$$

$$\frac{3^x}{5^x} = \frac{31}{13}, \text{ или } \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{31}{13}, \text{ откуда, логарифмируя обе}$$

части по основанию $\frac{3}{5}$ (можно по любому положи-

тельному основанию), получим $x = \log_{\frac{3}{5}} \frac{31}{13}$.

Ответ: $x = \log_{0,6} \frac{31}{13}$.

Пример 15. Решить уравнение

$$2^{x-1} + 2^{x-4} + 2^{x-2} = 6,5 + 3,25 + 1,625 + \dots$$

Решение

Заметим, что в правой части уравнения – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 0,5$.

Тогда данное уравнение примет вид

$$2^{x-4} \cdot (2^3 + 1 + 2^2) = \frac{6,5}{1 - 0,5} \text{ или } 2^{x-4} \cdot 13 = 13,$$

$$2^{x-4} = 1, x - 4 = 0, x = 4.$$

Ответ: $x = 4$.

4. Решение показательных уравнений логарифмированием обеих частей

Пример 16. Решить уравнение $5^x \cdot \sqrt[3]{8^{x-1}} = 500$.

Решение

Из условия следует, что $x \in N$, тогда

$$5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{3}} = 500 \text{ или } 5^x \cdot 8^{1-\frac{1}{3}} = 500,$$

$$5^x \cdot 8 \cdot 8^{-\frac{1}{3}} = 500, 2 \cdot 5^x = 125 \cdot 8^{\frac{1}{3}}.$$

Прологарифмируем обе части полученного уравнения по основанию 5 (или 8):

$$\log_5 (2 \cdot 5^x) = \log_5 \left(125 \cdot 8^{\frac{1}{3}} \right), \text{ или}$$

$$\log_5 2 + x = 3 + \frac{3}{x} \log_5 2, \text{ или}$$

$$x^2 + x \log_5 2 = 3x + 3 \log_5 2, x(x-3) + (x-3) \log_5 2 = 0, (x-3)(x + \log_5 2) = 0, \text{ откуда } x_1 = 3, x_2 = -\log_5 2.$$

Так как $x \in N$, то x_2 – не подходит.

Ответ: $x = 3$.

Пример 17. Решить уравнение $16^{\frac{x-1}{x}} \cdot 5^x = 100$.

Решение

Прологарифмируем данное уравнение по основанию 5 (или 2). Следует заметить, что можно, вообще

говоря, логарифмировать по любому основанию, но не совсем удачный выбор основания может привести к громоздким вычислениям.

Имеем $x + 4 \cdot \frac{x-1}{x} \log_5 2 = 2 + 2 \log_5 2$ или

$$x^2 + 4(x-1) \log_5 2 = 2x + 2x \log_5 2,$$

$$x^2 + 2x \log_5 2 - 2x - 4 \log_5 2 = 0,$$

$$x^2 + 2(\log_5 2 - 1)x - 4 \log_5 2 = 0; D/4 = (\log_5 2 - 1)^2 + 4 \log_5 2 = (\log_5 2 + 1)^2 > 0, x_{1,2} = 1 - \log_5 2 \pm (\log_5 2 + 1), \text{ откуда } x_1 = 2, x_2 = -2 \log_5 2.$$

Ответ: $x_1 = 2; x_2 = -2 \log_5 2$.

Пример 18. Решить уравнение $2^x - 3^x = \sqrt{6^x - 9^x}$.

Решение

Запишем уравнение в виде

$$2^x - 3^x - \sqrt{3^x(2^x - 3^x)} = 0 \text{ или}$$

$$\sqrt{2^x - 3^x}(\sqrt{2^x - 3^x} - \sqrt{3^x}) = 0, \text{ откуда:}$$

$$1) \sqrt{2^x - 3^x} = 0, 2^x = 3^x, \text{ откуда } x_1 = 0;$$

$$2) \sqrt{2^x - 3^x} = \sqrt{3^x}, 2^x - 3^x = 3^x, 2^x = 2 \cdot 3^x, \text{ или}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2, \text{ или, прологарифмировав обе части по осно-}$$

$$\text{ванию 2, получим } \log_2 \left(\frac{2}{3}\right)^x = \log_2 2, \text{ или}$$

$$x(\log_2 2 - \log_2 3) = 1, \text{ откуда } x_2 = \frac{1}{1 - \log_2 3}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{1 - \log_2 3}.$$

5. Решение уравнений с использованием свойства монотонности показательной функции

При решении некоторых типов показательных уравнений используются следующие свойства:

1) Если функция f возрастает (или убывает) на некотором промежутке, то на этом промежутке уравнение $f(x) = 0$ имеет не более одного корня.

2) Показательное уравнение вида $a^x + b^x = (a + b)^x$, где $a > 0$, $b > 0$ имеет единственный корень $x = 1$.

3) Сумма монотонно возрастающих (или монотонно убывающих функций) есть также функция монотонно возрастающая (монотонно убывающая).

Пример 19. Решить уравнение $2^x + 3^x = 35^{\frac{x}{3}}$.

Решение

Данное уравнение можно привести к виду $a^x + b^x = (a + b)^x$.

Запишем данное уравнение в виде $8^{\frac{x}{3}} + 27^{\frac{x}{3}} = 35^{\frac{x}{3}}$.
Очевидно, что $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

Пример 20. Решить уравнение $5^x + 12^x = 13^x$.

Решение

Разделим обе части уравнения на $13^x \neq 0$:

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1.$$

Имеем сумму двух монотонно убывающих функций. Нетрудно видеть, что $x = 2$ — единственный корень данного уравнения.

Ответ: $x = 2$.

Пример 21. Решить уравнение $5^x - 2^x = 3$.

Решение

$$5^x = 2^x + 3 \text{ или } 1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x.$$

Пусть $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1$.

Найдем $f'(x) = 3 \ln \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x \ln \frac{2}{5} < 0$.

Так как $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ монотонно убывающая, значит, $x = 1$ — единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 1$.

Пример 22. Решить уравнение $25^x = 4^x + 5^x + 16^x$.

Решение

Запишем уравнение в виде $25^x - 16^x = 4^x + 5^x$,
 $(5^x - 4^x)(5^x + 4^x) = 4^x + 5^x$; $4^x + 5^x > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$, тогда, разделив обе части на $4^x + 5^x \neq 0$, получим $5^x - 4^x = 1$, или, разделив на $4^x \neq 0$, имеем

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^x.$$

Заметим, что левая часть полученного уравнения монотонно возрастает, а правая — монотонно убывает, значит, данное уравнение может иметь не более одного корня. Этим корнем является число $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

6. Решение показательно-степенных уравнений

Уравнения, содержащие неизвестное как в показателе степени, так и в основании степени, называются *показательно-степенными*.

Это уравнения вида $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$. (1)

Корнями уравнения (1) считаются только решения

$$\text{смешанной системы } \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = \varphi(x) \end{cases}$$

и те значения x , для которых $f(x) = 1$, при условии, что при этих значениях определены $g(x)$ и $\varphi(x)$.

Если условием не исключается случай $f(x) \leq 0$ или $f(x) = 1$, то приходится рассматривать все случаи.

Пример 23. Решить уравнение $(x+2)^{x^2-4} = (x+2)^{3x}$.

Решение

Возможны случаи: 1) $x+2 = 1$, т. е. $x = -1$, тогда получим $1^{-3} = 1^{-3}$ — верное равенство, значит, $x = -1$ — корень данного уравнения;

2) $x+2 = -1$, т. е. $x = -3$, тогда уравнение примет вид $(-1)^{x^2-4} = (-1)^{3x}$. Этому уравнению могут удовлетворять только те значения x , при которых $x^2 - 4$ и $3x$ — целые числа (так как число (-1) можно возводить лишь в целую степень) одинаковой четности, т. е. либо оба четные, либо оба нечетные.

При $x = -3$ имеем $(-1)^5 = (-1)^9$ — верно, значит, $x = -3$ — корень данного уравнения;

3) $x+2 = 0$, откуда $x = -2$.

В этом случае исходное уравнение имеет вид $0^{x^2-4} = 0^{3x}$, и так как выражение 0^r имеет смысл лишь при $r > 0$, то значение $x = -2$ не подходит, т. е. $x = -2$ не является корнем данного уравнения;

4) $x+2 > 0$ и $x+2 \neq 1$, то из данного уравнения имеем $x^2 - 4 = 3x$ или $x^2 - 3x - 4 = 0$, откуда $x = 4$, $x = -1$.

При $x = 4$ получим $6^{12} = 6^{12}$ — верное равенство. Значит, $x = 4$ — корень исходного уравнения.

При $x = -1$ имеем $1^{-3} = 1^{-3}$ — верно, значит, $x = -1$ — корень исходного уравнения.

Итак, данное уравнение имеет 3 корня.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 4$.

Пример 24. Решить уравнение

$$(x^2 + x - 7)^{x^2+3} = (x^2 + x - 7)^{4x}.$$

Решение

Возможны случаи:

1) $x^2 + x - 7 = 1$, т. е. $x^2 + x - 8 = 0$. В этом случае данное уравнение примет вид $1^{x^2+3} = 1^{4x}$, т. е. $1 = 1$ — верное равенство. Значит, корни уравнения $x^2 + x - 8 = 0$ являются корнями исходного уравнения.

$$x^2 + x - 8 = 0, D = 1 + 32 = 33 > 0, x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2};$$

$$2) x^2 + x - 7 = -1, \text{ т. е. } x^2 + x - 6 = 0.$$

В этом случае данное уравнение имеет вид

$$(-1)^{x^2+3} = (-1)^{4x}.$$

Этому уравнению удовлетворяют лишь те значения x , при которых $x^2 + 3$ и $4x$ — целые числа одинаковой четности. Из уравнения $x^2 + x - 6 = 0$ находим $x = -3$, $x = 2$. Значение $x = -3$ удовлетворяет уравнению

$$(-1)^{x^2+3} = (-1)^{4x}, \text{ а значение } x = 2 \text{ не удовлетворяет.}$$

Значит, $x = -3$ — корень данного уравнения;

$$3) x^2 + x - 7 = 0. \text{ В этом случае имеем } 0^{x^2+3} = 0^{4x}.$$

Этому уравнению удовлетворяют лишь значения x , при которых $x^2 + 3 > 0$ (что верно при всех $x \in \mathbb{R}$) и

$4x > 0$, и в этом случае уравнение $0^{x^2+3} = 0^{4x}$ примет вид $0 = 0$ (где 0^r имеет смысл при $r > 0$).

Корни уравнения $x^2 + x - 7 = 0$ будут

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}, \text{ из которых значение}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{29}) \text{ не удовлетворяет условию } 4x > 0,$$

$$\text{а } x_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{29}) - \text{удовлетворяет.}$$

$$\text{Значит, } x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{29}) - \text{корень исходного урав-}$$

нения;

4) $x^2 + x - 7 > 0$ и $x^2 + x - 7 \neq 1$, тогда данное уравнение примет вид $x^2 + 3 = 4x$ или $x^2 - 4x + 3 = 0$, откуда $x = 1$, $x = 3$.

Если $x = 1$, то данное уравнение примет вид

$(-5)^4 = (-5)^4$ — верное равенство, значит, $x = 1$ — корень данного уравнения.

Если $x = 3$, то имеем $5^{12} = 5^{12}$ — верно, т. е. $x = 3$ — также корень данного уравнения. Таким образом, исходное уравнение имеет 6 корней.

Ответ: $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{33})$, $x_3 = -3$,

$x_4 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{29})$, $x_5 = 1$, $x_6 = 3$.

Пример 25. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}.$$

Решение

Запишем уравнение в виде $|x-3|^{\frac{x+1}{4}} = |x-3|^{\frac{x-2}{3}}$.

Корнями данного уравнения являются решения системы

$$\begin{cases} |x-3| > 0; \\ |x-3| \neq 1, \\ \frac{x+1}{4} = \frac{x-2}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq 2, x \neq 4, \\ 3x+3 = 4x-8, \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq 2, x \neq 4, \\ x = 11 \end{cases}$$

и, быть может, решения уравнения $|x-3| = 1$.

Как видим, $x = 11$ — решение системы, а условию $|x-3| = 1$ удовлетворяют $x = 2$ и $x = 4$.

Значения $x = 2$ и $x = 4$ также являются решениями системы, так как при этих значениях функции,

определены $\frac{x+1}{4}$ и $\frac{x-2}{3}$. Таким образом, исходное уравнение имеет 3 корня.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 11$.

Задачи

Группа А

Решить уравнения:

1. $2^x = 32$;

2. $3^x = 243$;

3. $2^{-x} = 16$;

4. $25^x = \frac{1}{5}$;

5. $3^{2x-1} = 81$;

6. $\sqrt{5^x} = \sqrt[3]{25}$;

$$7. \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^5;$$

$$9. 2^{x-2} = 1;$$

$$8. \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64};$$

$$10. a^{(x-2)(x-3)} = 1;$$

$$11. 1000 \cdot \sqrt[3]{0,1} = 100^x; \quad 12. 4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}};$$

$$13. 2^x \cdot 5^x = 0,1 \cdot (10^{x-1})^3; \quad 14. 2^{x+2} - 2^x = 96;$$

$$15. 7^x - 7^{x-1} = 6;$$

$$16. 3^{x+2} + 3^{x-1} = 28;$$

$$17. 7^{x+2} + 2 \cdot 7^{x-1} = 345; \quad 18. 3^{2x} - 3^x - 702;$$

$$19. 2^{2x+1} + 2^{x+2} = 16; \quad 20. 3^{2x+5} - 3^{x+2} = 2.$$

Группа Б

Решить уравнения:

$$1. 2^{x^2-3} = (2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}};$$

$$2. 3^{x^2 - \frac{1}{2}x} = (\sqrt{3})^{\frac{1-2x}{4}};$$

$$3. 4^x \cdot 3^{2x} = \sqrt{6^{x+3}};$$

$$4. \sqrt{0,8^{x(x-3)}} = 0,64;$$

$$5. \sqrt[3]{(3^{x+5})^{3x-1}} = \frac{1}{81\sqrt[3]{3}};$$

$$6. 25^{2x^2} - (\sqrt[3]{5})^{1-x} = 0;$$

$$7. \frac{0,2^{x+0,5}}{\sqrt{5}} = \frac{(0,04)^x}{25};$$

$$8. 10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950;$$

$$9. 3^x + 2^x - 3^{x-1} - 2^{x+1} = 0;$$

$$10. 3 \cdot 5^x - 5 \cdot 3^x = 5 \cdot 3^{x+2} - 3 \cdot 5^{x+1};$$

$$11. 5^{2x+1} + 9 \cdot 5^x - 2 = 0; \quad 12. 4^{1+x} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0;$$

$$13. 9^x + 3^{x+2} + 3^x = 39; \quad 14. 4^x + 2 \cdot 4^{1-x} - 6 = 0;$$

$$15. 2^x - \frac{6}{2^x + 1} = 0;$$

$$16. 7^{x-2}(7^x - 27) = 3 \cdot 7^{x-1} + 1;$$

$$17. 2^{x+2} - 9\sqrt{2^x} + 2 = 0;$$

$$18. 6 \cdot 4^x - 6^x - 2 \cdot 9^x = 0;$$

$$19. 4^{2x+1} - 7 \cdot 12^x + 3^{2x+1} = 0;$$

$$20. 4^{\sqrt{x-3}} + 2^{1+\sqrt{x-3}} = 24;$$

$$21. 4^{0,5+\sqrt{5-x}} - 5 \cdot 2^{\sqrt{5-x}} + 2 = 0;$$

$$22. \sqrt{9^{x-2} + 3^{x-1}} = 2; \quad 23. \sqrt{9^x + 9^{\frac{x+1}{2}}} = 2;$$

$$24. 4^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0;$$

$$25. 4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0;$$

$$26. 7^{x+2} - \frac{1}{7} \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x = 48;$$

$$27. 3^{2x-3} - 9^{x-1} + 27^{2x/3} = 675;$$

$$28. 5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1};$$

$$29. 4^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 9^{\frac{1}{x}};$$

$$30. 7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}.$$

Найти больший корень уравнения:

$$31. 16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0; \quad 32. 2^{x^2-7x+10} = 1;$$

$$33. 100^{x^2-1} = 10^{1-5x}; \quad 34. \left(2\frac{1}{3}\right)^{3-2x-x^2} = 1;$$

$$35. 100^{x^2-1} = 10^{1-5x}; \quad 36. 5^{0,1x} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-0,06} = 5x^2;$$

$$37. 3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0; \quad 38. 2^x \cdot 3^x = 36^{x^2};$$

$$39. 4 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 9 \cdot 4^x = 0;$$

$$40. 16 \cdot 9^x - 25 \cdot 12^x + 9 \cdot 16^x = 0.$$

Решить уравнения:

$$41. 64^{1/x} - 2^{3+3/x} + 12 = 0;$$

$$42. 5^{2x} = 3^{2x} + 2 \cdot 5^x + 2 \cdot 3^x;$$

$$43. x^{5 \sin 3x+2} = \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad 44. 2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2};$$

$$45. \left(\frac{5}{12}\right)^x \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{x-1} = (0,3)^{-1}; \quad 46. 5^x \cdot \sqrt[3]{8^{x-1}} = 500;$$

$$47. x^{5/4-2 \cos 3x} = \sqrt[4]{x};$$

$$48. 32^{(x+5)/(x-7)} = 0,25 \cdot 128^{(x+17)/(x-3)};$$

$$49. 2^x \cdot 5^{x-1} = 0,2 \cdot 10^{2-x};$$

$$50. \left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = 10;$$

$$51. 0,5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}; \quad 52. 0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x};$$

$$53. \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{2^{3x+3}} + 12 = 0;$$

$$54. 5^{x-1} + 5 \cdot 0,2^{x-2} = 26;$$

$$55. (0,6)^x \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3;$$

$$56. 6 \cdot 9^{1/x} - 13 \cdot 6^{1/x} + 6 \cdot 4^{1/x} = 0;$$

$$57. 3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6;$$

$$58. (x^2 - x - 1)^{x^2-1} = 1;$$

$$59. (x-2)^{x^2-x} = (x-2)^{12};$$

$$60. 8 - x \cdot 2^x + 2^{3-x} - x = 0;$$

$$61. (\sqrt[5]{3})^x + (\sqrt[10]{3})^{x-10} = 84;$$

$$62. 8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0; \quad 63. \frac{3^{\sqrt{-12x}} + 3}{4} = 3^{\sqrt{-3x}};$$

$$64. |x-3|^{3x^2-10x+3} = 1; \quad 65. \frac{8^x + 2^x}{4^x - 2} = 5;$$

$$66. 5^{1+x^3} - 5^{1-x^3} = 24;$$

$$67. 9^x + 6^x = 2^{2x+1};$$

$$68. 5^{x-1} + 5 \cdot 0,2^{x-2} = 26;$$

$$69. 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x;$$

$$70. 2^{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} \cdot 0,5^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} = 4^{\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}}.$$

§ 18. Логарифмические уравнения

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется *логарифмическим*.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида $\log_a x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильное уравнению $x = a^b$.

Решение логарифмического уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно каждой из систем:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Заметим, что переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$ может привести к появлению посторонних корней. Эти корни можно выявить либо с помощью подстановки их в исходное уравнение, либо с помощью нахождения области определения исходного уравнения, которая задается си-

стемой неравенств
$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим наиболее часто применяемые методы решения логарифмических уравнений.

1. Решение уравнений, основанных на определении логарифма

Пример 1. Решить уравнение $\log_2 (5 - x) = 3$.

Решение

По определению логарифма $5 - x = 2^3$, откуда $x = -3$. Так как $5 - x > 0$, то $x = -3$ — корень уравнения.

Ответ: $x = -3$.

Пример 2. Решить уравнение $\log_3 (\log_2 (x - 4)) = 1$.

Решение

Если $\log_2 (x - 4)$ считать числом, то по определению логарифма получим $\log_2 (x - 4) = 3$.

И снова по определению логарифма имеем $x - 4 = 2^3$, откуда $x = 12$.

Ответ: $x = 12$.

Замечание. Здесь проверка не нужна, так как $x - 4 = 8 > 0$.

Пример 3. Решить уравнение $\log_{3-x} (5x^2 + 8x + 1) = 1$.

Решение

Данное уравнение равносильно следующей смешанной системе:

$$\begin{cases} 5x^2 + 8x + 1 = 3 - x, \\ 5x^2 + 8x + 1 > 0, \\ 3 - x > 0, \\ 3 - x \neq 1. \end{cases}$$

Решим уравнение этой системы: $5x^2 + 9x - 2 = 0$, откуда находим $x_1 = 0,2$, $x_2 = -2$.

Оба корня удовлетворяют системе, а значит, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 0,2$; $x_2 = -2$.

Пример 4. Решить уравнение $\log_{\sqrt{x}-1}(2x-14) = 2$.

Решение

Данное уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} 2x - 14 = (\sqrt{x} - 1)^2, \\ 2x - 14 > 0, \\ \sqrt{x} - 1 > 0, \\ \sqrt{x} - 1 \neq 1. \end{cases}$$

Решим иррациональное уравнение, входящее в систему: $2x - 14 = x - 2\sqrt{x} + 1$ или $2\sqrt{x} = 15 - x$. (1)

Заметим, что $15 - x \geq 0$, т. е. $x \leq 15$.

Возведем обе части (1) в квадрат: $4x = 225 - 30x + x^2$, $x^2 - 34x + 225 = 0$, откуда $x_1 = 25$, $x_2 = 9$.

Хотя оба корня удовлетворяют области определения уравнения, но $x = 25$ не удовлетворяет условию $x \leq 15$.

Тогда $x = 9$ — единственный корень уравнения.

Ответ: $x = 9$.

Пример 5. Решить уравнение $\log_3(3^x - 6) = x - 1$.

Решение

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3^x - 6 = 3^{x-1}, \\ 3^x - 6 > 0, \end{cases} \quad \text{откуда } 3^x - 6 = 3^{x-1}, 3^x - 3^{x-1} = 6,$$

$3^{x-1} \cdot (3 - 1) = 6$, $3^{x-1} = 3$, откуда $x = 2$ — корень данного уравнения.

Ответ: $x = 2$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\log_3 \sqrt{130 - 7^{\log_x(6-x)}} = 2.$$

Решение

По определению логарифма имеем

$$\sqrt{130 - 7^{\log_x(6-x)}} = 9.$$

Возведем полученное уравнение в квадрат:

$$130 - 7^{\log_x(6-x)} = 81 \text{ или } 7^{\log_x(6-x)} = 49, \text{ откуда } \log_x(6-x) = 2.$$

Это уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} 6 - x = x^2, \\ 6 - x > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Решая уравнение системы, имеем $x^2 + x - 6 = 0$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Из этих двух значений всем остальным условиям системы удовлетворяет лишь $x = 2$. Таким образом, $x = 2$ — корень уравнения.

Ответ: $x = 2$.

2. Решение уравнений потенцированием

Пример 7. Решить уравнение

$$\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1.$$

Решение

Запишем уравнение в виде $\log_3(x+1)(x+3) = 1$.

С учетом области определения исходного уравнения имеем смешанную систему

$$\begin{cases} (x+1)(x+3) = 3, \\ x+1 > 0, \\ x+3 > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + 4x = 0, \\ x+1 > 0. \end{cases}$$

Решая уравнение $x^2 + 4x = 0$, имеем

$$x(x + 4) = 0, x_1 = 0, x_2 = -4.$$

Из найденных значений последней системе удовлетворяет лишь корень $x = 0$. Значит, $x = 0$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 0$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\log_7(2^x - 1) + \log_7(2^x - 7) = 1.$$

Решение

Область определения уравнения равносильна сис-

$$\text{теме неравенств } \begin{cases} 2^x - 1 > 0, \\ 2^x - 7 > 0, \end{cases} \text{ откуда } 2^x > 7.$$

Потенцируя данное уравнение, имеем

$\log_7(2^x - 1)(2^x - 7) = 1$, откуда по определению логарифма получим уравнение

$$(2^x - 1)(2^x - 7) = 7 \text{ или } (2^x)^2 - 8 \cdot 2^x = 0.$$

$$2^x(2^x - 8) = 0, 2^x > 0 \text{ при любом } x \in R.$$

Тогда $2^x - 8 = 0$, $2^x = 8$, откуда $x = 3$ — корень исходного уравнения ($2^x > 7$).

Ответ: $x = 3$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\log_6 \sqrt{x-2} + \frac{1}{2} \log_6(x-11) = 1.$$

Решение

Область определения данного уравнения равно-

$$\text{сильна системе неравенств } \begin{cases} x - 2 > 0, \\ x - 11 > 0, \end{cases} \text{ откуда } x > 11.$$

Запишем уравнение в виде

$$\log_6 \sqrt{x-2} + \log_6 \sqrt{x-11} = 1,$$

$$\log_6 \sqrt{(x-2)(x-11)} = 1, \text{ откуда } \sqrt{(x-2)(x-11)} = 6.$$

Возведя обе части полученного уравнения в квадрат и упрощая, имеем $(x-2)(x-11) = 36$, $x^2 - 13x - 14 = 0$, откуда $x_1 = 14$, $x_2 = -1$.

Так как $x > 11$, то корень $x_2 = -1$ не подходит.

Значит, $x = 14$ — корень данного уравнения.

Ответ: $x = 14$.

3. Применение основного логарифмического тождества

Пример 10. Решить уравнение $\log_2 (9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$.

Решение

Область определения уравнения

$$\begin{cases} 9 - 2^x > 0, \\ 3 - x > 0, \end{cases} \begin{cases} 2^x < 9, \\ x < 3, \end{cases} \quad x < 3.$$

Применив в правой части уравнения основное логарифмическое тождество, получим

$$\log_2 (9 - 2^x) = 3 - x.$$

По определению логарифма $9 - 2^x = 2^{3-x}$ или

$$9 - 2^x = \frac{8}{2^x}, \quad 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0, \quad \text{откуда } 2^x = 1, \quad x_1 = 0;$$
$$2^x = 8, \quad x_2 = 3 - \text{посторонний корень, так как } x < 3.$$

Ответ: $x = 0$.

Пример 11. Решить уравнение $\log_4 2^{4x} = 2^{\log_2 4}$.

Решение

Так как $2^{4x} > 0$ при всех $x \in R$ и $2^{\log_2 4} = 4$, то получим $\log_4 2^{4x} = 4$ или $2^{4x} = 4^4$, $2^{4x} = 2^8$, $4x = 8$, $x = 2$ — корень уравнения.

Ответ: $x = 2$.

Пример 12. Решить уравнение $2^{1+\log_2(x^2-3x+5)} = 3x$.

Решение

Запишем уравнение в виде $2 \cdot 2^{\log_2(x^2-3x+5)} = 3x$, где $x > 0$, так как $2^t > 0$ при любом $t \in R$.

Применяя основное логарифмическое тождество, имеем $2(x^2 - 3x + 5) = 3x$ или $2x^2 - 9x + 10 = 0$, откуда, решая, получим $x_1 = 2,5$, $x_2 = 2$.

Оба значения удовлетворяют условию $x > 0$, значит, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 2,5$; $x_2 = 2$.

4. Логарифмирование

Пример 13. Решить уравнение

$$(x+1)^{\lg(x+1)} = 100(x+1).$$

Решение

Область определения уравнения $x+1 > 0$, т. е. $x > -1$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10: $\lg(x+1) \lg(x+1) = \lg 100 + \lg(x+1)$ или $\lg^2(x+1) - \lg(x+1) - 2 = 0$ — квадратное уравнение относительно $\lg(x+1)$. Решая его, находим $\lg(x+1) = 2$, $x+1 = 100$, $x_1 = 99$; $\lg(x+1) = -1$, $x+1 = 0,1$, $x_2 = -0,9$.

Оба корня удовлетворяют условию $x > -1$, значит, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 99$, $x_2 = -0,9$.

Пример 14. Решить уравнение $10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20$.

Решение

Область определения уравнения задается условиями $x > 0$, $x \neq 1$. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10, предварительно упростив его: $(10^{\lg x})^{\lg x} + x^{\lg x} = 20$, $x^{\lg x} + x^{\lg x} = 20$, $x^{\lg x} = 10$, $\lg^2 x = \lg 10$ или $\lg^2 x = 1$, откуда $\lg x = \pm 1$, значит, $x_1 = 10$, $x_2 = 0,1$. Оба значения удовлетворяют ограничениям $x > 0$, $x \neq 1$, значит, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 10$, $x_2 = 0,1$.

Пример 15. Решить уравнение $x^{\lg 6} + 6^{\lg x} = 72$.

Решение

Область определения уравнения $x > 0$, $x \neq 1$.

Заметим, что $x^{\lg 6} = 6^{\lg x}$.

Чтобы доказать это, прологарифмируем обе части по основанию 10. Имеем $\lg 6 \lg x = \lg x \lg 6$. Следовательно, данное уравнение можно записать в виде

$2 \cdot 6^{\lg x} = 72$, или $6^{\lg x} = 36$, $6^{\lg x} = 6^2$, или $\lg x = 2$, откуда $x = 10^2 = 100$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 100$.

Пример 16. Решить уравнение $x^{2-\lg^2 x - \lg x^2} - \frac{1}{x} = 0$.

Решение

Область определения уравнения $x > 0$.

Запишем уравнение в виде $x^{2-\lg^2 x - \lg x^2} = x^{-1}$.

Прологарифмируем обе части полученного уравнения по основанию 10: $(2 - \lg^2 x - \lg x^2) \cdot \lg x = -\lg x$ или $\lg x \cdot (2 - \lg^2 x - \lg x^2 + 1) = 0$, откуда имеем:

1) $\lg x = 0$, $x = 10^0 = 1$; 2) $2 - \lg^2 x - \lg x^2 + 1 = 0$, или $\lg^2 x + 2 \lg x - 3 = 0$, где $\lg x^2 = 2 \lg x$, так как $x > 0$.

Решая это уравнение как квадратное относительно $\lg x$, находим $\lg x = -3$, $x = 10^{-3} = 0,001$;

$\lg x = 1$, $x = 10$.

Все три корня удовлетворяют условию $x > 0$, значит, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 10$, $x_3 = 0,01$.

Пример 17. Решить уравнение $x^{\log_{x^2}(x^2-1)} = 5$.

Решение

Заметим, что $x > 0$.

(1)

Кроме того, учитывая область определения логарифмической функции, имеем $x^2 - 1 > 0$ или $x^2 > 1$, $|x| > 1$, откуда $x > 1$, $x < -1$. (2). Из (1) и (2) следует, что $x > 1$ (при этом на основании логарифма автоматически выполняется ограничение $x \neq 1$).

Запишем исходное уравнение в виде $x^{\log_x \sqrt{x^2-1}} = 5$, или, используя основное логарифмическое тождество, имеем $\sqrt{x^2-1} = 5$; $x^2 - 1 = 25$, $x^2 = 26$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{26}$.

Так как $x > 0$, то $x = \sqrt{26}$ — корень данного уравнения.

Ответ: $x = \sqrt{26}$.

Пример 18. Решить уравнение $x^{2\lg^2 x} = 10x^3$.

Решение

Область определения уравнения $x > 0$. При этом обе части уравнения положительны. Тогда, прологарифмировав по основанию 10, получим

$$2\lg^2 x \cdot \lg x = \lg(10x^3), \text{ или } 2\lg^3 x = 1 + 3\lg x, \text{ или } 2\lg^3 x - 3\lg x - 1 = 0.$$

Разложив левую часть уравнения на множители, имеем $(\lg x + 1)(2\lg^2 x - 2\lg x - 1) = 0$, откуда:

$$1) \lg x + 1 = 0, \lg x = -1, x_1 = 0,1;$$

$$2) 2\lg^2 x - 2\lg x - 1 = 0.$$

Решая последнее уравнение как квадратное относительно $\lg x$, находим $(\lg x)_{2,3} = 0,5(1 \pm \sqrt{3})$, откуда $x_{2,3} = 10^{0,5(1 \pm \sqrt{3})}$. Все три корня удовлетворяют условию $x > 0$.

$$\text{Ответ: } x_1 = 0,1; x_{2,3} = 10^{0,5(1 \pm \sqrt{3})}.$$

5. Замена переменной

Пример 19. Решить уравнение $(\lg x)^2 - \lg x^3 + 2 = 0$.

Решение

Область определения уравнения $x > 0$.

Запишем данное уравнение в виде

$$(\lg x)^2 - 3\lg x + 2 = 0.$$

Пусть $\lg x = t$, тогда получим квадратное уравнение $t^2 - 3t + 2 = 0$, корни которого $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Тогда $\lg x = 1$, откуда $x_1 = 10$; $\lg x = 2$, $x_2 = 100$.

$$\text{Ответ: } x_1 = 10, x_2 = 100.$$

Пример 20. Решить уравнение

$$5\log_3 x - 9\sqrt{\log_3 x} - 2 = 0.$$

Решение

Пусть $\sqrt{\log_3 x} = t$, где $t \geq 0$, тогда $\log_3 x = t^2$, получим уравнение $5t^2 - 9t - 2 = 0$, корни которого $t_1 = 2$, $t_2 = -0,2$, и так как $t \geq 0$, то корень $t_2 = -0,2$ не подходит. Если $t = 2$, то $\log_3 x = 4$, откуда $x = 3^4 = 81$ — корень уравнения.

$$\text{Ответ: } x = 81.$$

Пример 21. Решить уравнение

$$\frac{16}{2 + \log_3 x} - 4 = 3 \log_3 x.$$

Решение

Пусть $2 + \log_3 x = t$, где $t \neq 0$, тогда $\log_3 x = t - 2$, и данное уравнение примет вид $\frac{16}{t} - 4 = 3(t - 2)$, или

$$\frac{16}{t} - 4 = 3t - 6, \text{ или } \frac{16}{t} - 3t + 2 = 0, 16 - 3t^2 + 2t = 0,$$

$3t^2 - 2t - 16 = 0$, откуда находим $t_1 = \frac{8}{3}$, $t_2 = -2$. Учитывая подстановку, получим:

$$1) \log_3 x = \frac{2}{3}, x_1 = 3^{2/3} = \sqrt[3]{9};$$

$$2) \log_3 x = -4, \text{ откуда } x_2 = 3^{-4} = \frac{1}{81}.$$

Так как $x > 0$ и $2 + \log_3 x \neq 0$, то $x_1 = \sqrt[3]{9}$ и $x_2 = \frac{1}{81}$ — корни исходного уравнения.

$$\text{Ответ: } x_1 = \sqrt[3]{9}, x_2 = \frac{1}{81}.$$

Пример 22. Решить уравнение $\sqrt{\lg(-x)} = \lg \sqrt{x^2}$.

Решение

Так как $-x > 0$, т. е. $x < 0$ и $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, то данное уравнение можно записать в виде

$\sqrt{\lg(-x)} = \lg(-x)$. Пусть $\sqrt{\lg(-x)} = t$, где $t \geq 0$, тогда получим $t = t^2$, откуда $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, значит, $\lg(-x) = 0$, $x_1 = -1$; $\lg(-x) = 1$, $x_2 = -10$.

$$\text{Ответ: } x_1 = -1, x_2 = -10.$$

Пример 23. Решить уравнение $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) =$

$$= 14 + \lg \frac{1}{x}.$$

Решение

Заметим, что $x > 0$. Упростим данное уравнение:

$(\lg 100 + \lg x)^2 + (\lg 10 + \lg x)^2 = 14 + \lg x^{-1}$ или $(2 + \lg x)^2 + (1 + \lg x)^2 = 14 - \lg x$. Пусть $\lg x = t$, тогда получим квадратное уравнение $2t^2 + 7t - 9 = 0$, корни

ни которого $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{9}{2}$. Тогда $\lg x = 1$, $x_1 = 10$;

$$\lg x = -\frac{9}{2}, x_2 = 10^{-9/2}.$$

Ответ: $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{-9/2}$.

6. Переход к другому основанию

Пример 24. Решить уравнение $1 + \log_2 (x - 1) = \log_{(x-1)} 4$.

Решение

Область определения уравнения $x > 1$, $x \neq 2$.

Используя формулу перехода, перейдем в правой части уравнения к основанию 2:

$$1 + \log_2 (x - 1) = \frac{\log_2 4}{\log_2 (x - 1)}.$$

Пусть $\log_2 (x - 1) = y$, тогда исходное уравнение примет вид:

$1 + y = \frac{2}{y}$, или $y^2 + y - 2 = 0$, откуда $y_1 = -2$,

$y_2 = 1$. Тогда получим $\log_2 (x - 1) = -2$, $x - 1 = 2^{-2}$,

$x_1 = \frac{5}{4}$; $\log_2 (x - 1) = 1$, $x - 1 = 2$, $x_2 = 3$.

Ответ: $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = 3$.

Пример 25. Решить уравнение $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.

Решение

Перейдем к основанию 2, используя формулу перехода:

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 16} + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \log_2 x = 7, \text{ или}$$

$$\frac{1}{4} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x = 7, \text{ или}$$

$$\log_2 x + 2 \log_2 x + 4 \log_2 x = 28, \quad 7 \log_2 x = 28, \text{ или}$$

$$\log_2 x = 4, \text{ откуда } x = 2^4 = 16.$$

Так как $x > 0$, то $x = 16$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 16$.

Пример 26. Решить уравнение

$$\log_2(x^2 - 1) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1).$$

Решение

Так как $\log_a b = \log_a b^k$, то

$$\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}(x - 1)^{-1} = -\log_2(x - 1), \text{ то}$$

исходное уравнение примет вид $\log_2(x^2 - 1) = -\log_2(x - 1)$ или $\log_2(x^2 - 1)(x - 1) = 0$, откуда по определению логарифма имеем $(x^2 - 1)(x - 1) = 1$, где

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ x - 1 > 0, \end{cases} \text{ откуда } x > 1.$$

Решим полученное уравнение $x^3 - x - x^2 + 1 = 1$, $x(x^2 - x - 1) = 0$, $x_1 = 0$ или $x^2 - x - 1 = 0$, $D = 5 > 0$,

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Так как $x > 1$, то корень $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ не подходит.

$x_1 = 0$ — также не удовлетворяет. Значит,

$x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ — единственный корень исходного уравнения.

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Пример 27. Решить уравнение.

$$\log_{0,5x} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0.$$

Решение

Перейдем во всех логарифмах к основанию 2:

$$\frac{\log_2 x^2}{\log_2 0,5x} - \frac{14 \log_2 x^3}{\log_2 16x} + \frac{40 \log_2 \sqrt{x}}{\log_2 4x} = 0,$$

$$\frac{2 \log_2 |x|}{\log_2 x - 1} - \frac{42 \log_2 x}{\log_2 x + 4} + \frac{20 \log_2 x}{\log_2 x + 2} = 0.$$

Так как $x > 0$, то $|x| = x$, тогда $\log_2 |x| = \log_2 x$.

Пусть $\log_2 x = u$, тогда получим уравнение

$$\frac{2u}{u-1} - \frac{42u}{u+4} + \frac{20u}{u+2}, \text{ корни которого:}$$

$$u_1 = 0, u_2 = -\frac{1}{2}, u_3 = 2.$$

Учитывая подстановку, получим

$$\log_2 x = 0, x_1 = 1, \log_2 x = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\log_2 x = 2, x_3 = 4.$$

Все найденные корни удовлетворяют условию $x > 0$, значит, являются корнями исходного уравнения.

$$\text{Ответ: } x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, x_3 = 4.$$

Пример 28. Решить уравнение $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$.

Решение

Запишем уравнение в виде

$$(3^{\log_3 x})^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162, \text{ где } x > 0, x \neq 1.$$

$$\text{Далее имеем } x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162, 2x^{\log_3 x} = 162$$

$$\text{или } x^{\log_3 x} = 81.$$

Прологарифмировав обе части полученного уравнения по основанию 3, получим $\log_3 x \cdot \log_3 x = \log_3 81$

или $(\log_3 x)^2 = 4$, откуда $\log_3 x = \pm 2$, тогда $x_1 = 9$, $x_2 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

Ответ: $x_1 = 9$, $x_2 = \frac{1}{9}$.

Пример 29. Решить уравнение

$$2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 0, (a \neq 1).$$

Решение

Перейдем во всех логарифмах к основанию a :

$$\frac{2\log_a a}{\log_a x} + \frac{\log_a a}{\log_a(ax)} + \frac{3\log_a a}{\log_a(a^2x)} = 0;$$

$$\frac{2}{\log_a x} + \frac{1}{1 + \log_a x} + \frac{3}{2 + \log_a x} = 0.$$

Пусть $\log_a x = y$, тогда получим

$$\frac{2}{y} + \frac{1}{1+y} + \frac{3}{2+y} = 0.$$

После преобразования получим $6y^2 + 11y + 4 = 0$, корни которого $y_1 = -\frac{4}{3}$ и $y_2 = -\frac{1}{2}$. Если

$\log_a x = -\frac{4}{3}$, то $x = a^{-4/3}$; если $\log_a x = -\frac{1}{2}$, то $x = a^{-1/2}$.

Так как $x > 0$, $x \neq 1$, то данное уравнение имеет два корня.

Ответ: $x_1 = a^{-4/3}$, $x_2 = a^{-1/2}$.

Пример 30. Решить уравнение

$$\frac{1 + 2\log_9 2}{\log_9 x} - 1 = 2\log_x 3 \log_9(12 - x).$$

Решение

Область определения уравнения $x > 0$, $x \neq 1$, $x < 12$.

Так как $2\log_x 3 = \log_x 9 = \frac{1}{\log_9 x}$, то исходное уравнение запишем в виде

$$\frac{\log_9 9 + \log_9 4}{\log_9 x} = 1 + \frac{\log_9 (12 - x)}{\log_9 x} \quad \text{или} \quad \log_9 (4 \cdot 9) = \log_9 x + \log_9 (12 - x). \text{ После потенцирования имеем } 36 = (12 - x)x \text{ или } x^2 - 12x + 36 = 0, (x - 6)^2 = 0, x - 6 = 0, x = 6.$$

Значение $x = 6$ удовлетворяет области определения уравнения, значит, $x = 6$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 6$.

§ 19. Системы показательных и логарифмических уравнений

Пример 31. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases}$$

Решение

Перемножив почленно левые и правые части системы, получим $2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 12 \cdot 18$ или $6^{x+y} = 6^3$, откуда $x + y = 3$. Решая полученное уравнение с одним из уравнений исходной системы, например, со вторым, имеем равносильную систему:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, & \begin{cases} 2^x \cdot 3^{3-x} = 12, \\ x + y = 3, & \begin{cases} y = 3 - x. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Решим I уравнение системы:

$$2^x \cdot 3^{3-x} = 12 \quad \text{или} \quad \frac{2^x}{3^x} \cdot 27 = 12, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{12}{27},$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9}, \quad \text{откуда } x = 2, \quad \text{тогда } y = 3 - 2 = 1.$$

Итак, пара (2; 1) является решением данной системы.

Ответ: (2; 1).

Пример 32. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2^{y-x}(x+y) = 1, \\ (x+y)^{x-y} = 2. \end{cases}$$

Решение

Область определения системы $x + y > 0$.

Запишем I уравнение системы в виде $x + y = 2^{x-y}$ и подставим во II уравнение. Тогда получим $(2^{x-y})^{x-y} = 2$,

$$2^{(x-y)^2} = 2, (x-y)^2 = 1.$$

Следовательно, получим совокупность двух систем:

$$1) \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 2 \end{cases} \text{ и } 2) \begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = 1/2. \end{cases}$$

Решая систему 1), получим
$$\begin{cases} 2x = 3, \\ 2y = 1, \end{cases} \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Аналогично из системы 2) имеем
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4}, \\ y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Найденные пары удовлетворяют условию $x + y > 0$, следовательно, являются решениями исходной системы.

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

Пример 33. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^{y-2} = 4, \\ x^{2y-3} = 64. \end{cases}$$

Решение

Область определения $x > 0$.

Прологарифмировав обе части каждого из уравнений системы по основанию 2, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x^{y-2} = \log_2 4, \\ \log_2 x^{2y-3} = \log_2 64 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (y-2) \log_2 x = 2, \\ (2y-3) \log_2 x = 6. \end{cases}$$

Разделив I уравнение полученной системы на II ,

получим $\frac{y-2}{2y-3} = \frac{1}{3}$ или $3y-6=2y-3$, откуда $y=3$.

Подставив значение $y=3$ в одно из уравнений последней системы, например в I , получим

$(3-2)\log_2 x = 2$ или $\log_2 x = 2$, т. е. $x=4$.

Ответ: $(4; 3)$.

Пример 34. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2, \\ \log_{27}(x+y) = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решение

Область определения системы $x > 0, y > 0$.

Так как $2 = \log_3 9$, то I уравнение системы примет вид $\log_3 xy = \log_3 18$, откуда $xy = 18$.

Из II уравнения системы по определению логарифма получим $x+y = 27^{2/3}$ или $x+y = 9$.

Имеем систему уравнений $\begin{cases} x+y=9, \\ xy=18. \end{cases}$

Решая ее, получим решение исходной системы.

Ответ: $(3; 6), (6; 3)$.

Пример 35. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{x+y} = 56, \\ 3 \cdot 2^x + 3^{x+y+1} = 87. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{x+y} = 56, \\ 3 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^{x+y} = 87; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{x+y} = 56, \\ 2^x + 3^{x+y} = 29. \end{cases}$$

Вычитая из I уравнения полученной системы II , получим $2 \cdot 3^{x+y} - 3^{x+y} = 27$ или $3^{x+y} = 27$, откуда $x+y=3$, тогда II уравнение последней системы примет вид $2^x + 3^3 = 29$, $2^x = 2$, $x = 1$.

Так как $x+y=3$ и $x=1$, то $y=3-1=2$.

Ответ: $(1; 2)$.

Пример 36. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^{\lg y} = 100, \\ \frac{x}{y} = 10. \end{cases}$$

Решение

Область определения системы уравнений $x > 0$; $y > 0$.

Логарифмируя I уравнение по основанию 10, получим $\lg x \lg y = \lg 100$ или $\lg x \lg y = 2$.

Имеем равносильную систему

$$\begin{cases} \lg x \lg y = 2, \\ \frac{x}{y} = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} \lg x \lg y = 2, \\ x = 10y; \end{cases} \quad \begin{cases} \lg(10y) \cdot \lg y = 2, \\ x = 10y. \end{cases}$$

Упростим I уравнение полученной системы:

$(\lg 10 + \lg y) \cdot \lg y = 2$, $(1 + \lg y) \lg y = 2$ или $\lg^2 y + \lg y - 2 = 0$, откуда $\lg y = -2$, $y_1 = 10^{-2} = 0,01$; $\lg y = 1$, $y_2 = 10$.

Так как $x = 10y$, то $x_1 = 0,1$; $x_2 = 100$.

Ответ: $(0,1; 0,01)$, $(100; 10)$.

Пример 37. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[y]{4^x} = 32\sqrt[3]{8^y}, \\ \sqrt[y]{3^x} = 3 \cdot \sqrt[y]{9^{1-y}}. \end{cases}$$

Решение

Область определения системы $x \in N$, $y \in N$, $x \neq 1$, $y \neq 1$.

Приведем I уравнение системы к основанию 2, а II уравнение — к основанию 3:

$$\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}} = 2^5 \cdot 2^{\frac{3y}{x}}, \\ 3^{\frac{x}{y}} = 3 \cdot 3^{\frac{2(1-y)}{y}} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{2x}{y} = 5 + \frac{3y}{x}, \\ \frac{x}{y} = 1 + \frac{2(1-y)}{y}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x}{y} = 5 + \frac{3y}{x}, \\ \frac{x}{y} = \frac{2-y}{y}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2x}{y} = 5 + \frac{3y}{x}, \\ x = 2 - y. \end{cases}$$

Пусть $\frac{x}{y} = t$, тогда $2t = 5 + \frac{3}{t}$, $2t^2 - 5t - 3 = 0$,

$$D = 25 + 24 = 7^2 > 0, \quad t_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4}, \quad t_1 = 3, \quad t_2 = -\frac{1}{2}.$$

Учитывая подстановку, имеем две системы:

$$1) \quad \begin{cases} \frac{x}{y} = 3, \\ x = 2 - y, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ x = 2 - y, \end{cases} \quad \begin{cases} 3y = 2 - y, \\ x = 3y, \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2}, \\ x = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Пара $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ не удовлетворяет условиям $x \in N, y \in N$, значит, не является решением исходной системы.

$$2) \quad \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{1}{2}, \\ x = 2 - y, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x, \\ x = 2 + 2x, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4, \\ x = -2 \end{cases} \quad \text{также не явля-}$$

ется решением данной системы.

Значит, исходная система не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 38. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4 \log_2 x + \log_2(y + 1) = 6, \\ \log_2 x \cdot \log_2(y + 1) = 2. \end{cases}$$

Решение

Область определения системы $x > 0, y + 1 > 0$.

Запишем систему в виде $\begin{cases} 4 \log_2 x + \log_2(y + 1) = 6, \\ 4 \log_2 x \cdot \log_2(y + 1) = 8, \end{cases}$

откуда имеем совокупность систем уравнений:

$$1) \begin{cases} 4 \log_2 x = 2, \\ \log_2(y+1) = 4, \end{cases} \begin{cases} \log_2 x = \frac{1}{2}, \\ y+1 = 16, \end{cases} \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = 15. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4 \log_2 x = 4, \\ \log_2(y+1) = 2, \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y+1 = 4, \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Итак, исходная система имеет два решения.

Ответ: $(\sqrt{2}; 15), (2; 3)$.

Пример 39. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 40, \\ \log_{\sqrt{2}}(x-y) = 2. \end{cases}$$

Решение

Область определения системы $x - y > 0$.

Из II уравнения системы по определению логарифма

имеем $x - y = (\sqrt{2})^2$, или $x - y = 2$, откуда $x = y + 2$, тогда I уравнение системы примет вид $2^{y+2} \cdot 5^y = 40$ или $4 \cdot (2^y \cdot 5^y) = 40$, $(2 \cdot 5)^y = 10$, $10^y = 10$, откуда $y = 1$, тогда $x = 3$.

Найденная пара $(3; 1)$ удовлетворяет условию $x - y > 0$, значит, является решением исходной системы.

Ответ: $(3; 1)$.

Пример 40. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10^{1-\lg(3x-y)} = 2, \\ 4x^2 - y - 15 = 0. \end{cases}$$

Решение

Область определения системы $3x - y > 0$.

Упростим I уравнение системы, используя основное логарифмическое тождество: $10 \cdot 10^{-\lg(3x-y)} = 2$, или

$10^{\lg(3x-y)^{-1}} = \frac{1}{5}$, или $\frac{1}{3x-y} = \frac{1}{5}$ откуда $3x - y = 5$. Име-

ем равносильную систему уравнений $\begin{cases} 4x^2 - y = 15, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$

Вычитая из I уравнения II, получим $4x^2 - 3x - 10 = 0$, откуда находим $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{5}{4}$, тогда $y = 3x - 5$, или

$$y_1 = 1, y_2 = -\frac{35}{4}.$$

Обе пары удовлетворяют условию $3x - y > 0$.

Ответ: (2; 1), $(-5/4; -35/4)$.

Задачи

Группа А

Решить уравнения:

1. $\log_2 x = \frac{1}{2}$;

2. $\log_{0,2} x = 4$;

3. $\log_6 (14 - 4x) = \log_6 (2x + 2)$;

4. $\log_3 (x^2 + 6) = \log_3 5x$;

5. $\lg (x^2 - 6) = \lg (8 + 5x)$;

6. $\log_7 (x^2 - 12x + 36) = 0$;

7. $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 3x - 1) = -2$;

8. $\log_4^2 x - \log_4 x - 2 = 0$;

9. $\log_{0,2}^2 x + \log_{0,2} x - 6 = 0$;

10. $3 \log_2 \frac{1}{2} - \log_2 \frac{1}{32} = \log_2 x$;

11. $4 \log_{0,1} x = \log_{0,1} 2 + \log_{0,1} 8$;

12. $\log_{0,5} (4x - 1) - \log_{0,5} (7x - 3) = 1$;

13. $\log_2 (x^2 + 4x + 3) = 3$;

14. $\lg^2 x = 1$; 15. $\log_{\sqrt{4}} (x - 1) = 6$.

Найти наибольший корень уравнения:

16. $\log_3 (x^2 - 1) = 1$;

17. $\lg (x^2 - 2x) = \lg (2x + 12)$;

18. $\log_6 (x^{-2} + 2) = 1$;

19. $\log_{0,1} (x^2 + 3x) = -1$;

$$20. 2 \lg(x-1) = \lg(12x - x^2 - 19);$$

$$21. x^{\lg x} = 10;$$

$$22. \lg(0,1x^2) \lg x = 1;$$

$$23. \log_x(8x-15) = 2;$$

$$24. \log_{x+1}(2x^2 - 10x + 13) = 1;$$

$$25. 3^{\log_3(x^2+x-1)} = 1.$$

Группа Б

$$1. \log_3 9^{2x-3} = 3^{\log_4 4};$$

$$2. \log_2(x^2 - 3) + 1 = \log_2(6x - 10);$$

$$3. \log_4^2(1+x^2) = 0,25;$$

$$4. \log_{0,5}(x+2) + \log_{0,5}(x+3) = \log_{0,5} 3 - 1;$$

$$5. 4^{\log_2 \lg x} = \lg x - \lg^2 x + 1;$$

$$6. \log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_8 x = 36;$$

$$7. \log_{x+2}(3x^2 - 12) = 2;$$

$$8. \log_2(3^x - 1) + \log_2(3^x - 2) = 1;$$

$$9. x^{0,5 \lg x} = 0,01x^2;$$

$$10. \log_3(4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1;$$

$$11. \log_{0,5}(\log_2^2 x - 3 \log_2 x + 4) = -1;$$

$$12. x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = 9;$$

$$13. 6x \cdot \log_8 x \cdot \log_x 16 = x^2 + 7;$$

$$14. 5 \log_{2x} x = 2 \log_{4x} x^3;$$

$$15. \log_2(-\sin x) - \log_4 \cos x + \frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{3}.$$

Найти наибольший корень уравнения:

$$16. x^{\lg x} = 1000 x^2;$$

$$17. \log_4(x+1) + \log_{x+1} 4 = 2,5;$$

$$18. \lg \frac{1}{x} \cdot \lg \frac{x}{10} = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{8};$$

$$19. \log_5^2 x \cdot \log_x 5 + 3 \log_x 5 = 4;$$

$$20. 7 \log_5^2(2x) - 20 \log_5(2x) - 3 = 0;$$

$$21. \lg^2 x^3 + \lg x^2 = 40;$$

$$22. 0,4^{\lg^2 x - 1} = 6,25^{-2 - \lg x^2};$$

$$23. 2 \log_x 5 + \log_5 x = 3;$$

$$24. \log_3^2 x + \log_9^2 x + \log_{27}^2 x = \frac{49}{9};$$

$$25. \log_{0,2} \sqrt{5x - 4} = \log_{0,2} x;$$

$$26. \log_{0,5}^2 x + 12 = 7 \log_2 x;$$

$$27. \sqrt{\log_2 x + 11} = 3 \log_8 x - 1;$$

$$28. \lg^2 x - 5 |\lg x| = 0;$$

$$29. \log_{0,5}^2 x - 3 |\log_{0,5} x| + \log_{0,5} x = 0;$$

$$30. \log_{\sqrt{3}} (3x - 2\sqrt{3x - 1}) = 2 \log_3 (2\sqrt{3x - 1} + 1).$$

Решить уравнения:

$$31. \log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3};$$

$$32. \frac{1}{\lg x - 6} + \frac{5}{\lg x + 2} = 1;$$

$$33. 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162;$$

$$34. x^{\log_2 x} = 8;$$

$$35. \lg \sqrt{x} = \sqrt{\lg x};$$

$$36. \log_2 (3x - 1) - \log_2 (4 - x) = 4 - \log_2 (x - 1);$$

$$37. \lg \frac{x + 6}{\sqrt{2x + 3}} = \lg 4;$$

$$38. \frac{\lg(35 - x^3)}{\lg(5 - x)} = 3;$$

$$39. \log_{\frac{1}{5}} \log_5 \sqrt{5x} = 0;$$

$$40. \log_4 \log_2 \log_3 (2x - 1) = \frac{1}{2};$$

$$41. \log_{\frac{1}{2}}^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8; \quad 42. x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4;$$

43. $x^{\log_3 x + 1} = 9x^2$; 44. $(\sqrt{x})^{\log_3 x - 1} = 5$;
 45. $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0$;
 46. $4 - \lg x = 3\sqrt{\lg x}$;
 47. $x^2 \cdot \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4$;
 48. $\lg \sqrt{x-5} + \lg \sqrt{2x-3} + 1 = \lg 30$;
 49. $\log_{\sqrt{2}} \frac{x^2 - 4x + 3}{4} = -2$;
 50. $\log_2(x+1)^2 + \log_2 \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 6$;
 51. $2\lg x - 5\sqrt{\lg x} + 2 = 0$;
 52. $\log_3 4 \cdot \log_2 x = 1$;
 53. $\sqrt{\log_2 x} - 0,5 = \log_2 \sqrt{x}$;
 54. $\log_4(2 + \sqrt{x+3}) = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$;
 55. $\log_2(4^x + 1) = x + \log_2(2^{x+3} - 6)$;
 56. $\lg^2 x - 3\lg x = \lg x^2 - 4$;
 57. $\log_x(9x^2) \cdot \log_3^2 x = 4$;
 58. $\log_3(4 \cdot 3^x - 1) = 2x + 1$;
 59. $\log_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) + 4 = 2x$;
 60. $2 \log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$.

Решить системы уравнений:

61. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 62. $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1, \\ \log_2 xy = 8; \end{cases}$
 63. $\begin{cases} 2^x - 2^y = 1, \\ 2^{3x} - 2^{3y} = 7; \end{cases}$ 64. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 144, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 2; \end{cases}$
 65. $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 3, \\ \log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 y = 3; \end{cases}$ 66. $\begin{cases} \log_y x = 2, \\ \log_{2y}(x+12) = 2; \end{cases}$

67. $\begin{cases} 5^x + 5^y = 3, \\ 5^{x+y} = 2; \end{cases}$
68. $\begin{cases} \lg \sqrt{x} - \lg y = 0, \\ x + y^2 = 18; \end{cases}$
69. $\begin{cases} 2 \cdot 3^x - 4^y = 14, \\ 3^x + 4^y = 13; \end{cases}$
70. $\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 2, \\ x(y - 2) = 27; \end{cases}$
71. $\begin{cases} x^y = 5x + 6, \\ \log_x 36 = y; \end{cases}$
72. $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 1, \\ y - 3x = 8; \end{cases}$
73. $\begin{cases} 8^x = 10y, \\ 2^x = 5y; \end{cases}$
74. $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}, \\ xy = 16; \end{cases}$
75. $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3}; \end{cases}$
76. $\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64; \end{cases}$
77. $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}; \end{cases}$
78. $\begin{cases} (x + y) \cdot 3^{y-x} = \frac{5}{27}, \\ 3 \log_5 (x + y) = x - y; \end{cases}$
79. $\begin{cases} \log_3 (x + 2y) - 2 \log_3 4 = 1 - \log_3 (x - 2y), \\ \log_{\frac{1}{4}} (x - 2y) = -1; \end{cases}$
80. $\begin{cases} 2^{x+2y} - \sqrt{2x+y} = 0, \\ 3\sqrt{2x+y} - 2^{x+2y} = -2; \end{cases}$
81. $\begin{cases} 5^{\sqrt{x}} = 5^{3-\sqrt{y}}, \\ (0,25^x)^y = 2^{-16}; \end{cases}$
82. $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = \frac{5}{2}, \\ 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1; \end{cases}$
83. $\begin{cases} 6^{2x} + 6^x \cdot y = 12, \\ y^2 + y \cdot 6^x = -8; \end{cases}$
84. $\begin{cases} \log_{13} (x^2 + y^2) = 0,5 \log_{\pi} \pi^2, \\ \log_3 x - 1 = \log_3 2 - \log_3 y; \end{cases}$
85. $\begin{cases} 9^x \cdot 3^{y-3} = 729, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

Глава 5

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

§ 20. Показательные неравенства

Показательными неравенствами называют *неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$.* (1)

Решение показательных неравенств основано на монотонности показательной функции.

Решение неравенств вида (1) и неравенств, сводящихся к этому виду, основано на следующих утверждениях: если $a > 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$; если $0 < a < 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

Пример 1. Решить неравенство: $3^{2x-5} > 27$.

Решение

Имеем $3^{2x-5} > 3^3$. Это неравенство равносильно неравенству того же смысла: $2x - 5 > 0$, откуда находим $2x > 5$, $x > 2.5$.

Ответ: $x > 2.5$.

Пример 2. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-8.5} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение

Так как $\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$, то данное неравенство примет вид $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-8,5} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$. Поскольку $0 < \frac{1}{2} < 1$, то полученное неравенство равносильно неравенству противоположного смысла: $3x - 8,5 > 0,5$, откуда $3x > 9$, т. е. $x > 3$.

Ответ: $x > 3$.

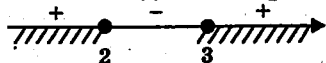
Пример 3. Решить неравенство $0,6^{x^2-2x} \leq 0,6^{3x-6}$.

Решение

Так как $0 < 0,6 < 1$, то данное неравенство равносильно неравенству $x^2 - 2x \geq 3x - 6$, т. е. $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

Решая полученное неравенство методом интервалов, получим $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Ответ: $x \leq 2$, $x \geq 3$.



Пример 4. Решить неравенство

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}.$$

Решение

$$2^{x+2} \cdot (1 - 2 - 2^2) > 5^{x+1} (1 - 5), \text{ или } -5 \cdot 2^{x+2} > -4 \cdot 5^{x+1}, -5 \cdot 4 \cdot 2^x > -4 \cdot 5 \cdot 5^x, \text{ или}$$

$$2^x < 5^x, \left(\frac{2}{5}\right)^x < 1, \text{ или } \left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^0.$$

Так как $0 < \frac{2}{5} < 1$, то $x > 0$.

Ответ: $x > 0$.

Пример 5. Решить неравенство $5^{2x+1} > 5^x + 4$.

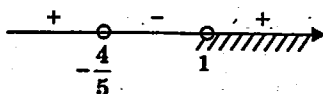
Решение

Запишем неравенство в виде $5 \cdot 5^{2x} - 5^x - 4 > 0$.

Пусть $5^x = t$, где $t > 0$, тогда $5t^2 - t - 4 > 0$.

Решим полученное неравенство методом интервалов, для чего найдем корни трехчлена $D = 1 + 80 =$

$$= 9^2 > 0, t_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{10}, t_1 = 1, t_2 = -\frac{4}{5}.$$



Так как $t > 0$, то $t > 1$, т. е. $5^x > 1$, откуда $x > 0$.

Ответ: $x > 0$.

Пример 6. Решить неравенство $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$.

Решение

Так как $9^x = 3^{2x} = (3^x)^2$ и $3^{x+2} = 9 \cdot 3^x$, то данное неравенство запишется в виде

$$\sqrt{(3^x)^2 - 9 \cdot 3^x} > 3^x - 9.$$

Пусть $3^x = y$, где $y > 0$, тогда $\sqrt{y^2 - 9y} > y - 9$ или $\sqrt{y(y-9)} - (y-9) > 0$, $\sqrt{y-9}(\sqrt{y} - \sqrt{y-9}) > 0$.

Так как $y - 9 > 0$, то $\sqrt{y} - \sqrt{y-9} > 0$, или

$\begin{cases} y > 9, \\ \sqrt{y} > \sqrt{y-9}; \end{cases}$ неравенство $\sqrt{y} > \sqrt{y-9}$ выполняется при $y > 9$, тогда $3^x > 9$, откуда $x > 2$.

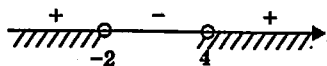
Ответ: $x > 2$.

Пример 7. Решить неравенство $36^x - 2 \cdot 18^x - 8 \cdot 9^x > 0$.

Решение

Так как $9^x > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то, разделив обе части неравенства на $9^x \neq 0$, получим равносильное не-

равенство: $\left(\frac{36}{9}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{18}{9}\right)^x - 8 > 0$ или $4^x - 2 \cdot 2^x - 8 > 0$; пусть $2^x = t$, где $t > 0$, тогда $t^2 - 2t - 8 > 0$, $t_1 = 4$, $t_2 = -2$.



Так как $t > 0$, то $t > 4$ или $2^x > 4$, откуда $x > 2$.

Ответ: $x > 2$.

Пример 8. Решить неравенство $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$.

Решение

Применяя способ группировки, получим

$$(25 \cdot 2^x - 25) - (10^x - 5^x) > 0 \text{ или}$$

$$25 \cdot (2^x - 1) - 5^x \cdot (2^x - 1) > 0, (2^x - 1)(25 - 5^x) > 0.$$

Полученное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$1) \begin{cases} 2^x - 1 > 0, \\ 25 - 5^x > 0; \end{cases} \begin{cases} 2^x > 1, \\ 5^x < 25; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ x < 2 \end{cases} \text{ или } 0 < x < 2.$$

$$2) \begin{cases} 2^x - 1 < 0, \\ 25 - 5^x < 0; \end{cases} \begin{cases} x < 0, \\ x > 2, \end{cases} \text{ нет решений.}$$

Итак, решением исходного неравенства будет решение системы 1).

Ответ: $0 < x < 2$.

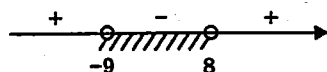
Пример 9. Решить неравенство $0,3^{2+4+\dots+2x} > 0,3^{72}$.

Решение

Так как $0 < 0,3 < 1$, то данное неравенство равносильно неравенству $2 + 4 + \dots + 2x < 72$ или $1 + 2 + \dots + x < 36$. Заметим, что левая часть полученного неравенства — возрастающая арифметическая прогрессия, где $a_1 = 2$, $d = 2$, $a_n = 2x$, x — натуральное число.

Тогда имеем $\frac{1+x}{2} \cdot x < 36$;

$$x(x+1) < 72; x^2 + x - 72 < 0; x_1 = -9; x_2 = 8.$$



$$-9 < x < 8.$$

Так как x — натуральное число, то $x = 1, 2, 3, \dots, 7$.

Ответ: $x = 1, 2, 3, \dots, 7$.

Пример 10. Решить неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} > 6,25$.

Решение

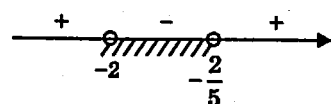
Так как $6,25 = 6\frac{1}{4} = \frac{25}{4} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$, то неравенство

запишется в виде $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} > \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$, откуда имеем

равносильное неравенство $\frac{6-5x}{2+5x} < -2$ или

$$\frac{6-5x}{2+5x} + 2 < 0, \quad \frac{6-5x+4+10x}{2+5x} < 0, \quad \frac{5x+10}{5x+2} < 0, \\ \frac{x+2}{5x+2} < 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов,

находим $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{2}{5}$. 

Ответ: $-2 < x < -\frac{2}{5}$.

Пример 11. Решить неравенство $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{8+x} - 81}{x^2 + 2x + 5} < 0$.

Решение

Так как $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 > 0$ при любом $x \in R$, то, умножив обе части неравенства на $x^2 + 2x + 5$,

получим равносильное неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{8+x} - 81 < 0$ или $3^{-(8+x)} < 3^4$.

Учитывая, что $3 > 1$, имеем равносильное неравенство того же смысла $-(8+x) < 4$, $8+x > -4$, откуда $x > -12$.

Ответ: $x > -12$.

§ 21. Показательно-степенные неравенства

Это неравенства, в котором неизвестное находится одновременно и в показателе степени, и в основании степени.

Пример 12. Решить неравенство $(x-3)^{2x^2-7x} > 1$.

Решение

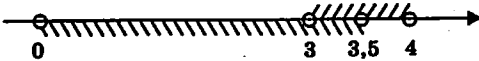
Возможны 2 случая: 1) $x-3 > 1$, т. е. $x > 4$.

В этом случае данное неравенство равносильно неравенству $2x^2 - 7x > 0$. Таким образом, имеем систему неравенств

$$\begin{cases} x > 4, \\ 2x^2 - 7x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ 2x(x-3,5) > 0, \end{cases} \quad \text{откуда находим } x > 4.$$

2) $0 < x-3 < 1$, т. е. $3 < x < 4$. В этом случае

получим систему неравенств $\begin{cases} 3 < x < 4, \\ 2x^2 - 7x < 0 \end{cases}$ или

$$\begin{cases} 3 < x < 4, \\ 2x(x-3,5) < 0. \end{cases}$$


$$3 < x < 3,5.$$

Ответ: $3 < x < 3,5$; $x > 4$.

Пример 13. Решить неравенство $(x^2 - 4x)^{x+2} \leq 1$.

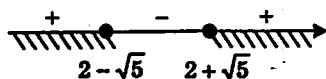
Решение

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

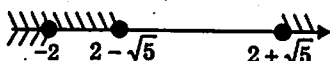
$$1) \begin{cases} x^2 - 4x \geq 1, \\ x + 2 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4x - 1 \geq 0, \\ x \leq -2. \end{cases}$$

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{D}{4} = 4 + 1 = 5 > 0, \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}.$$



Тогда решением системы 1) будет: $x \leq -2$.



$$2) \begin{cases} 0 < x^2 - 4x \leq 1, \\ x + 2 \geq 0, \end{cases} \begin{cases} x^2 - 4x \leq 1, \\ x^2 - 4x > 0, \\ x \geq -2, \end{cases} \begin{cases} x^2 - 4x - 1 \leq 0, \\ x(x - 4) > 0, \\ x \geq -2. \end{cases}$$

Решением неравенства $x^2 - 4x - 1 \leq 0$ будет

$$2 - \sqrt{5} \leq x \leq 2 + \sqrt{5}.$$

Решением неравенства $x(x - 4) > 0$ будет $x < 0$, $x > 4$.

Тогда решением системы неравенств 2) будет

$$2 - \sqrt{5} \leq x < 0, \quad 4 < x \leq 2 + \sqrt{5}.$$



Объединяя 1) и 2), получим решение исходного неравенства.

$$\text{Ответ: } x \leq -2, \quad -\sqrt{5} \leq x < 0, \quad 4 < x \leq 2 + \sqrt{5}.$$

Пример 14. Решить неравенство $(x^2 - x + 1)^x < 1$.

Решение

Заметим, что $x^2 - x + 1 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, так как дискриминант трехчлена $D < 0$ и $a = 1 > 0$.

Запишем данное неравенство в виде

$$(x^2 - x + 1)^x < (x^2 - x + 1)^0. \quad (1)$$

При этом возможны 2 случая: 1) $0 < x^2 - x + 1 < 1$;
2) $x^2 - x + 1 > 1$.

Следовательно, неравенство (1) равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 < 1, \\ x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 > 1, \\ x < 0 \end{cases}$$

или

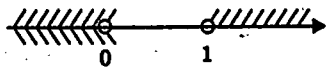
$$\begin{cases} x(x - 1) < 0, \\ x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x - 1) > 0, \\ x < 0. \end{cases}$$



$$0 < x < 1$$

Ответ: $x < 0$; $0 < x < 1$.



$$x < 0$$

Пример 15. Решить неравенство

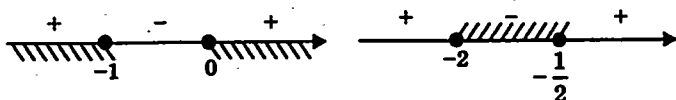
$$(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3.$$

Решение

$x^2 + x + 1 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, так как $D < 0$ и $a = 1 > 0$.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$1) \begin{cases} x^2 + x + 1 \geq 1, & \begin{cases} x(x+1) \geq 0, \\ \frac{2x+1}{x+2} \leq 0. \end{cases} \\ \frac{x+5}{x+2} \geq 3; \end{cases}$$



Общим решением системы 1) будет $-2 < x \leq -1$.

$$2) \begin{cases} 0 < x^2 + x + 1 \leq 1, & \begin{cases} x^2 + x \leq 0, \\ \frac{2x+1}{x+2} \geq 0. \end{cases} \\ \frac{x+5}{x+2} \leq 3; \end{cases}$$

Аналогично, решая систему неравенств 2), имеем

$-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$, тогда решением исходного неравенства будет объединение решений 1) и 2).

Ответ: $-2 < x \leq -1$; $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$.

Задачи

Группа А

Найти наибольшее целое значение x , удовлетворяющее неравенству:

$$1. 3^x < 9; \quad 2. \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}; \quad 3. 2^{3x} \leq \frac{1}{2};$$

$$4. 3^{\frac{x}{2}} < 9; \quad 5. 5^{2x^2-18} < 1; \quad 6. \left(\frac{2}{3}\right)^{3x+6} < \frac{4}{9};$$

$$7. (0,1)^{5x-9} < 0,001; \quad 8. \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2};$$

$$9. 0,6^{x^2+3x} \geq 1; \quad 10. \left(\frac{1}{3}\right)^{5-3x} \leq 81.$$

Найти наименьшее целое значение x , удовлетворяющее неравенству:

$$11. 0,13^{x-4} \leq 0,13^{2-x}; \quad 12. 3^{-4x} < \sqrt{3};$$

$$13. 2^{-x+5} < \frac{1}{4}; \quad 14. (0,2)^{\frac{2x}{3}} > 25;$$

$$15. 3^{6x-2} > \sqrt{3}; \quad 16. 2^{1,5x+3} > 16.$$

Группа Б

Найти наибольшее целое значение x , удовлетворяющее неравенству:

$$1. \left(\frac{1}{8}\right)^{-2x} < 4^3; \quad 2. 3^{\frac{x+1}{x}} < 3;$$

$$3. 3^{2x^2-6} \leq \frac{1}{81}; \quad 4. 8 \cdot 2^{x^2-3x} \leq (0,5)^{-1};$$

$$5. (0,25)^{3-0,5x^2} \leq 8; \quad 6. 2^{|x|-1} < 8;$$

$$7. \frac{2^x - 4}{2x^2 + 3} \leq 0; \quad 8. \sqrt{32} \cdot 2^{-4x^2} \geq 8^{3x};$$

$$9. 25 \cdot 0,04^{2x} > 0,2^{x(3-x)}; \quad 10. 9^{x+1} - 2 \cdot 3^x < 7;$$

$$11. 0,7^{x+2} \geq 0,7^{0,5}; \quad 12. \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt{5} \leq 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1};$$

$$13. 14^{x^2+x} \leq 196; \quad 14. 0,36^{\frac{7x+1}{2-x}} < 1;$$

$$15. 4^x \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^x \leq 2,25.$$

Решить неравенства:

$$16. \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}; \quad 17. 5^{2x+1} > 5^x + 4;$$

$$18. 3,3^{x^2+6x} < 1; \quad 19. 2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0;$$

$$20. 6^{\frac{x+5}{x^2-9}} > 1; \quad 21. \frac{3^x - 27}{x^2 - 4x + 4} \leq 0;$$

$$22. 1 < 3^{|x^2-x|} < 9; \quad 23. \frac{1}{3^x + 5} < \frac{1}{3^{x+1} - 1};$$

$$24. 4^{x+1,5} + 9^x < 9^{x+1}; \quad 25. \sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^{x-9};$$

$$26. (4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} > 1; \quad 27. |x-3|^{2x^2-7} > 1;$$

$$28. 3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} > 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1};$$

$$29. 2 \cdot 8^{\frac{2x^2+1}{x}} - 4^{3x} < 0;$$

$$30. (0,3)^{2+4+6+\dots+2x} > (0,3)^{80}.$$

Найти наименьшее целое значение x , удовлетворяющее неравенству:

$$31. 2 \cdot 5^x - 2 \cdot 3^{x-1} > 5 \cdot 5^x - 3^{x+2};$$

$$32. (0,4)^{\frac{2x-7}{x+1}} \geq \frac{5}{2}; \quad 33. \left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} > \left(\frac{9}{49}\right)^{x+1,5};$$

$$34. 7^{x+2} - 64 \cdot 8^x < 42 \cdot 7^x - 7 \cdot 8^{x+1};$$

$$35. 9^{x+1} - 27 \cdot 3^x + 3 < 3^x; \quad 36. \left(\frac{1}{27}\right)^{x^2+1} > 9^{x^2-8x};$$

$$37. (0,2)^{0,2x(x+2)} > (0,04)^{0,3}; \quad 38. \left(\frac{3}{2}\right)^{3-\frac{4}{x}} < \left(\frac{4}{9}\right)^{-1};$$

$$39. 2 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 5 > 3^{1-\sqrt{x}}; \quad 40. (x-3)^{x^2-9} > 1;$$

$$41. \left(\left(\frac{3}{7} \right)^{\frac{1}{x^2}} \right)^{x^2-2x} \geq 1; \quad 42. \left(\frac{2}{7} \right)^{3(2x-7)} \cdot 12,25^{\frac{4x+1}{2}} \leq 1;$$

$$43. |2^{4x^2-1} - 5| \leq 3; \quad 44. \sqrt{9^x - 3^{x+2}} \geq 3^x - 9;$$

$$45. 0,5^{2\sqrt{x}} + 2 \geq 3 \cdot 0,5^{\sqrt{x}}.$$

§ 22. Логарифмические неравенства

Неравенство, содержащее переменную только под знаком логарифма, называется *логарифмическим*.

Например, неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ при $a > 0$, $a \neq 1$ являются логарифмическими.

При решении логарифмических неравенств (как и показательных) следует учитывать свойства монотонности, область определения логарифмической функции и общие свойства неравенств.

При $a > 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ — системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Пример 1. Решить неравенство $\log_5 (x-3) < 2$.

Решение

Данное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} x-3 > 0, \\ x-3 < 5^2, \end{cases}$ где I неравенство характеризует

область определения логарифмической функции, а II — ее возрастание при основании $5 > 1$.

Далее имеем $\begin{cases} x > 3, \\ x < 28. \end{cases}$



Ответ: $3 < x < 28$.

Пример 2. Решить неравенство $\log_{0,3} (3x - 8) > \log_{0,3} (x^2 + 4)$.

Решение

Данное неравенство с учетом области определения логарифмической функции с основанием $0 < 0,3 < 1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 3x - 8 > 0, \\ x^2 + 4 > 0, \\ 3x - 8 < x^2 + 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > \frac{8}{3}, \\ x^2 + 4 > 0, \\ x^2 - 3x + 12 > 0. \end{cases}$$

Заметим, что $x^2 + 4 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $x^2 - 3x + 12 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, так как дискриминант $D < 0$ и $a = 1 > 0$. Значит, полученная система неравенств равносильна неравенству $x > \frac{8}{3}$.

Ответ: $x > \frac{8}{3}$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 2x - 8) \leq -4.$$

Решение

Так как $0 < \frac{1}{2} < 1$, то данное неравенство с учетом области определения логарифмической функции равносильно системе неравенств

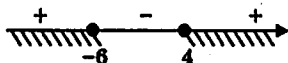
$$\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0, \\ x^2 + 2x - 8 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}. \end{cases}$$

Как видим, неравенства системы одинакового смысла, тогда имеем равносильное неравенство

$$x^2 + 2x - 8 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \quad \text{или} \quad x^2 + 2x - 8 \geq 16,$$

$$x^2 + 2x - 24 \geq 0, \quad x_1 = -6, \quad x_2 = 4.$$

Ответ: $x \leq -6, x \geq 4$.



Пример 4. Решить неравенство $\log_8(x^2 - 4x + 3) < 1$.
Решение

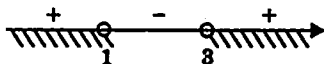
Способ 1

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ x^2 - 4x + 3 < 8, \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(x-3) > 0, \\ x^2 - 4x - 5 < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-3) > 0, \\ (x-5)(x+1) < 0. \end{cases}$$

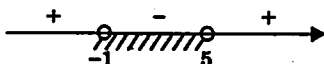
Решим методом интервалов I неравенство полученной системы: $x = 1, x = 3$.



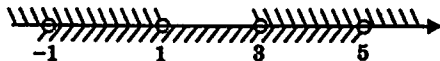
$$x < 1; x > 3.$$

Аналогично решаем II неравенство:

$$x = 5, x = -1.$$



Тогда решением системы неравенств, а значит, и исходного неравенства будет пересечение множеств решений неравенств:



Ответ: $-1 < x < 1; 3 < x < 5$.

Способ 2

Данное неравенство равносильно двойному неравенству $0 < x^2 - 4x + 3 < 8$, или $0 < (x-2)^2 - 1 < 8$, $1 < (x-2)^2 < 9$, или $1 < |x-2| < 3$, откуда имеем систему неравенств

$$\begin{cases} |x-2| < 3, \\ |x-2| > 1. \end{cases}$$

$$1) |x - 2| < 3, -3 < x - 2 < 3, -1 < x < 5;$$

2) $|x - 2| > 1$, откуда $x - 2 > 1$, т. е. $x > 3$ и $x - 2 < -1$, откуда $x < 1$.

Тогда решением системы неравенств будет пересечение неравенств 1) и 2), т. е. $-1 < x < 1, 3 < x < 5$.

Ответ: $-1 < x < 1; 3 < x < 5$.

Пример 5. Решить неравенство $\log_{1,5} \frac{2x - 8}{x - 2} < 0$.

Решение

Способ 1

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \frac{2x - 8}{x - 2} > 0, \\ \frac{2x - 8}{x - 2} < 1,5^0; \end{cases} \begin{cases} \frac{2(x - 4)}{x - 2} > 0, \\ \frac{2x - 8 - x + 2}{x - 2} < 0; \end{cases} \begin{cases} \frac{x - 4}{x - 2} > 0, \\ \frac{x - 6}{x - 2} < 0. \end{cases}$$

Решим каждое неравенство полученной системы методом интервалов:

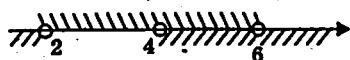
$$1) \frac{x - 4}{x - 2} > 0, x = 4, x = 2; \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline \text{---} 2 \quad \text{---} 4 \text{---} \\ \hline \end{array}$$

$$x < 2; x > 4$$

$$2) \frac{x - 6}{x - 2} < 0, x = 6, x = 2. \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline \text{---} 2 \quad \text{---} 6 \text{---} \\ \hline \end{array}$$

$$2 < x < 6$$

Общим решением системы неравенств, а значит, и данного неравенства будет пересечение решений 1) и 2):



Ответ: $2 < x < 6$.

Способ 2

Данное неравенство равносильно двойному неравенству

$$0 < \frac{2x - 8}{x - 2} < 1. \quad (1)$$

Вычтем от обеих частей неравенства (1) по -2 :

$$-2 < \frac{2x - 8}{x - 2} - 2 < 1 - 2 \quad \text{или} \quad -2 < \frac{-4}{x - 2} < -1,$$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{x-2} > \frac{1}{4} \text{ или } 2 < x-2 < 4, \text{ откуда } 4 < x < 6.$$

Этот способ, как видим, более короткий и изящный, кроме того, мы обошлись без применения метода интервалов.

Пример 6. Решить неравенство

$$\log_{1/3} \log_{1/2} \frac{x+4}{2x-3} < 0.$$

Решение

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{x+4}{2x-3} > 0, \\ \log_{1/2} \frac{x+4}{2x-3} > \left(\frac{1}{3}\right)^0 \end{cases}$$

Заметим, что при этом условии $\log_{1/2} \frac{x+4}{2x-3} > 0$ выполняется автоматически.

Далее, система примет вид:

$$\begin{cases} \frac{x+4}{2x-3} > 0, \\ \frac{x+4}{2x-3} < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

или $\begin{cases} \frac{x+4}{2x-3} > 0, \\ \frac{11}{2(2x-3)} < 0. \end{cases}$ Из II неравенства полученной си-

стемы следует, что $2x-3 < 0$, тогда I неравенство системы примет вид $x+4 < 0$.

Тогда имеем равносильную систему

$$\begin{cases} 2x-3 < 0, \\ x+4 < 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 3/2, \\ x < -4, \end{cases} \text{ откуда } x < -4 - \text{ решение системы, а значит, и данного неравенства.}$$

Ответ: $x < -4$.

Пример 7. Решить неравенство $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > 0$.

Решение

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$1) \begin{cases} x > 1, \\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 1, \\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \frac{3x-1}{x^2+1} < 1, \\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 0. \end{cases}$$

Решим системы:

$$1) \begin{cases} x > 1, \\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ \frac{3x-1-x^2-1}{x^2+1} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ \frac{-x^2+3x-2}{x^2+1} > 0. \end{cases}$$

Так как $x^2+1 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то получим

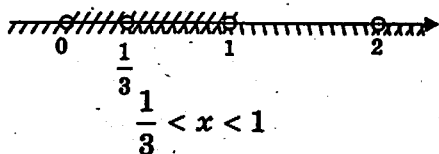
$$\begin{cases} x > 1, \\ -x^2+3x-2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x^2-3x+2 < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ (x-1)(x-2) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x-2 < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ x < 2, \end{cases} \text{ откуда } 1 < x < 2.$$

$$2) \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \frac{3x-1-x^2-1}{x^2+1} < 0, \\ 3x-1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < 1, \\ -x^2+3x-2 < 0, \\ x > \frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2 - 3x + 2 > 0, \\ x > \frac{1}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < 1, \\ (x-1)(x-2) > 0, \\ x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$



Ответ: $\frac{1}{3} < x < 1, 1 < x < 2$.

Пример 8. Решить неравенство $\log_4 x - \log_x 4 \leq \frac{3}{2}$.

Решение

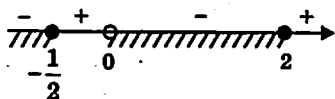
Заметим, что $\log_x 4 = \frac{1}{\log_4 x}$, тогда данное нера-

венство можно записать в виде $\log_4 x - \frac{1}{\log_4 x} \leq \frac{3}{2}$.

Пусть $\log_4 x = t$, тогда $t - \frac{1}{t} \leq \frac{3}{2}$, или

$$\frac{2t^2 - 3t - 2}{2t} \leq 0, \text{ или } \frac{2(t-2)\left(t + \frac{1}{2}\right)}{t} \leq 0;$$

$$t_1 = 2, t_2 = -\frac{1}{2}; t_3 = 0.$$



$$t \leq -\frac{1}{2}; 0 < t \leq 2.$$

Учитывая подстановку, имеем:

$$1) \log_4 x \leq -\frac{1}{2}, 0 < x \leq 4^{-1/2}, 0 < x \leq \frac{1}{2}.$$

$$2) 0 < \log_4 x \leq 2, \text{ или } 1 < x \leq 16.$$

Ответ: $0 < x \leq \frac{1}{2}; 1 < x \leq 16$.

Пример 9. Решить неравенство $\log_{2x+3} x^2 < 1$.

Решение

Данное неравенство равносильно совокупности систем:

$$1) \begin{cases} 2x + 3 > 1, \\ 0 < x^2 < 2x + 3, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 0 < 2x + 3 < 1, \\ x^2 > 2x + 3. \end{cases}$$

Решая систему 1), получим

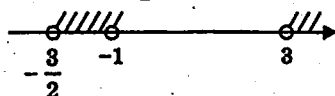
$$\begin{cases} x > -1, \\ (x-3)(x+1) < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > -1, \\ -1 < x < 3, \end{cases} \text{ т. е. } -1 < x < 3.$$

Решая систему 2), получим $\begin{cases} -\frac{3}{2} < x < -1, \\ (x-3)(x+1) > 0. \end{cases}$

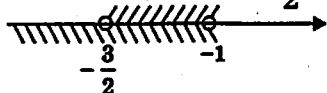
Полученная система равносильна совокупности двух систем:

$$а) \begin{cases} -\frac{3}{2} < x < -1, \\ x > 3; \end{cases} \quad б) \begin{cases} -\frac{3}{2} < x < -1, \\ x < -1. \end{cases}$$

Система а) не имеет решений:



Решением системы б) будет: $-\frac{3}{2} < x < -1$.



Ответ: $-\frac{3}{2} < x < -1$; $-1 < x < 3$.

Пример 10. Решить неравенство $|\log_3 x| < \left| \log_3 \frac{x}{9} \right|$.

Решение

Заметим, что $\log_3 \frac{x}{9} = \log_3 x - \log_3 9 = \log_3 x - 2$.

Поскольку обе части данного неравенства неотрицательны при всех $x > 0$, то после возведения в квадрат получим равносильное неравенство

$$\log_3^2 x - (\log_3 x - 2)^2 < 0 \text{ или } 4 \log_3 x - 4 < 0, \\ \log_3 x < 1, \text{ откуда } 0 < x < 3.$$

Ответ: $0 < x < 3$.

§ 23. Показательно-логарифмические неравенства

Это неравенства, содержащие неизвестное в основании и в показателе степени, причем показатель степени содержит логарифмы.

Пример 11. Решить неравенство $x^{\lg x} > 10$.

Решение

Так как $x > 0$, то, прологарифмировав обе части неравенства по основанию 10, получим равносильное неравенство: $\lg x^{\lg x} > \lg 10$ или $\lg^2 x > 1$, откуда $|\lg x| > 1$, $\lg x > 1$ и $\lg x < -1$.

Если $\lg x > 1$, то $x > 10$; если $\lg x < -1$, то $0 < x < 0,1$.

Ответ: $0 < x < 0,1$; $x > 10$.

Пример 12. Решить неравенство $x^{\frac{\lg x + 5}{3}} < 10^{\lg x + 1}$.

Решение

Так как $x > 0$, то, прологарифмировав обе части неравенства по основанию 10, получим

$$\frac{\lg x + 5}{3} \cdot \lg x < \lg x + 1 \text{ или } \lg^2 x + 2 \lg x - 3 < 0.$$

Пусть $\lg x = t$, тогда $t^2 + 2t - 3 < 0$, откуда имеем $-3 < t < 1$. Учитывая подстановку, получим $-3 < \lg x < 1$, откуда $10^{-3} < x < 10$.

Ответ: $0,001 < x < 10$.

Пример 13. Решить неравенство $x^{\lg^2 x - \lg x + 1} > 10$.

Решение

Так как $x > 0$, то имеем равносильное неравенство $(\lg^2 x - \lg x + 1) \lg x > 1$ или $\lg^2 x (\lg x - 1) + (\lg x - 1) > 0$, $(\lg x - 1)(\lg^2 x + 1) > 0$, откуда $\lg x - 1 > 0$ (ввиду того, что $\lg^2 x + 1 > 0$ при всех $x > 0$), тогда $\lg x > 1$, откуда $x > 10$.

Ответ: $x > 10$.

Пример 14. Решить неравенство

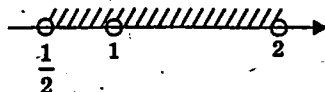
$$x^{\log_2 x} + 2x^{-\log_2 x} < 3.$$

Решение

Пусть, $x^{\log_2 x} = t$, где $t > 0$, $x > 0$. Тогда $t + \frac{2}{t} < 3$ или $t^2 - 3t + 2 < 0$, откуда находим $1 < t < 2$.

Значит, $1 < x^{\log_2 x} < 2$ или, логарифмируя обе части по основанию 2, имеем $0 < \log_2^2 x < 1$, или

$$\begin{cases} \log_2^2 x < 1, \\ x \neq 1 \end{cases} \quad |\log_2 x| < 1 \text{ или } -1 < \log_2 x < 1, \quad \frac{1}{2} < x < 2.$$



Ответ: $\frac{1}{2} < x < 1; 1 < x < 2$.

Задачи

Группа А

Найти наибольшее целое значение x , удовлетворяющее неравенству:

1. $\log_3 (4 - 2x) \geq 2$;

2. $\log_{\frac{1}{3}} (x - 1) \geq -2$;

3. $\log_{\frac{2}{3}} (2 - 5x) < -2$;

4. $\lg x < 2 - \lg 4$;

5. $\log_{\frac{1}{5}} (3x - 5) > \log_{\frac{1}{5}} (x + 1)$;

$$6. \log_{\frac{1}{3}}(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(12-x) \geq 2;$$

$$7. \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x - 6) \geq -3;$$

$$8. \log_3(7-x) > 1;$$

$$9. \log_{\frac{1}{2}}(3-5x) < -3;$$

$$10. \log_3(x^2 + 7x - 5) > 1;$$

$$11. \log_{\frac{2}{5}}(3x+1) < 2;$$

$$12. \log_{0,5} \frac{x}{3} \geq -2;$$

$$13. \log_{\sqrt{3}}(2x-3) < 4;$$

$$14. \log_{\frac{1}{3}}(5x-9) \geq \log_{\frac{1}{3}} 4x;$$

$$15. \log_2(5x-9) \leq \log_2(3x+1).$$

Найти наименьшее целое значение x , удовлетворяющее неравенству:

$$16. \log_{\frac{1}{4}} \frac{x}{5} > 1;$$

$$17. \log_{0,6}(2x-1) < \log_{0,6} x;$$

$$18. \log_3(8-6x) \leq \log_3 2x;$$

$$19. \log_{0,4}(12x+2) \geq \log_{0,4}(10x+16);$$

$$20. \lg(x^2 + 2x + 2) < 1; \quad 21. \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 2) > -2;$$

$$22. \lg(x^2 - 8) \leq \lg(2 - 9x);$$

$$23. \log_{\sqrt{2}}(x^2 + 10x) \geq \log_{\sqrt{2}}(x - 14);$$

$$24. \log_{0,3}(x^2 + 22) < \log_{0,3} 13x;$$

$$25. \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 0,5x) \leq 1.$$

Группа Б

Найти наибольшее целое значение x , удовлетворяющее неравенству:

$$1. \log_2^2 x > 4 \log_2 x - 3;$$

$$2. \log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x < -2;$$

$$3. 3 \log_4^2 x - 7 \log_4 x + 2 < 0;$$

$$4. \log_3 x < \log_3 72 - \log_3 8;$$

$$5. 4 \log_{0,6} x \geq \log_{0,6} 8 + \log_{0,6} 2;$$

$$6. \log_2 (7 - x) + \log_2 x \geq 1 + \log_2 3;$$

$$7. \lg x + \lg (7 - x) > 1;$$

$$8. \log_{\frac{1}{5}} (2 - x) \geq \log_{\frac{1}{5}} (2x + 4);$$

$$9. \lg (8x - 16) < \lg (3x + 1);$$

$$10. \log_{0,4} (7 - x) \geq \log_{0,4} (3x + 6);$$

$$11. \log_2 \log_{\sqrt{5}} (x - 1) < 1; \quad 12. \log_3 \log_{\frac{1}{2}} (2x + 1) > 0;$$

$$13. 5^{\log_5 (2x-1)} < 7; \quad 14. 13^{\log_{13} (1-3x)} > 7;$$

$$15. \log_4 \log_{1/\sqrt{3}} (2 - x) < \frac{1}{2};$$

$$16. \log_{\frac{1}{3}} (x + 2) - \log_9 (x + 2) > -\frac{3}{2}.$$

Решить неравенство:

$$17. \log_{\frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 3}{x - 7} < 0;$$

$$18. \log_{\frac{1}{2}} (2x + 3) > \log_{\frac{1}{2}} (x + 1);$$

$$19. \log_{2/3} (x^2 - 2,5x) < -1;$$

$$20. \log_x 3 \leq 4 \left(1 + \log_{\frac{1}{3}} x \right);$$

$$21. \log_{1/\sqrt{5}} (6^{x+1} - 36^x) \geq -2;$$

$$22. 5^{\log_2 (x^2 - 4x + 3,5)} > 0,2;$$

$$23. \log_{\frac{1}{3}} (\log_4 (x^2 - 5)) > 0;$$

$$24. (3x - 1) \log_2 x > 0;$$

$$25. \sqrt{x^{4 \lg x}} < 10x;$$

$$26. \log_3 (26 + 3^{-x}) < x + 3;$$

$$27. \lg^2 (-x) - \lg x^2 - 3 > 0;$$

$$28. \log_5 x - |\log_5 x| - 2 \leq 0;$$

$$29. \frac{\sqrt{x+3}}{\log_4 x^2};$$

$$30. \frac{5 \log_3^2 x}{x^2 - 9} < 0;$$

$$31. \log_{\frac{1}{2}} \left| 2 - \frac{1}{x} \right| < 2;$$

$$32. \log_{\frac{1}{2}} \log_4 \frac{2x-1}{x+1} < 1;$$

$$33. \log_x \log_9 (3^x - 9) < 1; \quad 34. \frac{x-1}{\log_3 (9 - 3^x) - 3} \leq 1;$$

$$35. \log_{\frac{1}{2}} \left(1 + x - \sqrt{x^2 - 4} \right) \leq 0;$$

$$36. \log_{2x+3} x^2 < 1;$$

$$37. \log_2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) > -1;$$

$$38. \log_x \frac{x+3}{x-1} > 1;$$

$$39. \log_{|x-4|} (2x^2 - 9x + 4) > 1;$$

$$40. 2^{\log_{0.4} x \cdot \log_{0.4} 2.5x} > 1; \quad 41. 3^{\lg x+2} < 3^{\lg x^2+5} - 2;$$

$$42. \log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1;$$

$$43. \log_x \log_2 (4^x - 12) \leq 1;$$

$$44. 25^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} \leq 30;$$

$$45. \log_5 (x+3) \geq \log_{x+3} 625;$$

$$46. \log_x \sqrt{21-4x} > 1;$$

$$47. \log_x (16 - 6x - x^2) \leq 1;$$

$$48. \log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5 > 1;$$

$$49. \log_x (2+x) < 1;$$

$$50. \log_2 \log_{0.2} \log_{32} \frac{x-1}{x+5} > 0.$$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 24. Преобразования тригонометрических выражений. Обратные тригонометрические функции

Основные формулы

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha};$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha;$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha.$$

2. Формулы сложения.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}; \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

3. Формулы двойного и тройного аргумента.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \\ \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \end{aligned}$$

4. *Формулы половинного аргумента (для функции $\sin$ и $\cos$ — формулы понижения степени).*

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2}; & \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2}; \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

5. *Универсальные тригонометрические подстановки.*

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; & \cos \alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

6. *Формулы преобразования суммы в произведение.*

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}; \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \\ a \sin \alpha + b \cos \alpha &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi), \end{aligned}$$

где $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

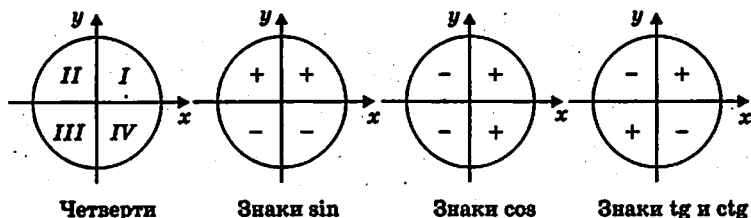
7. Формулы преобразования произведения в сумму.

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta);$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta);$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta).$$

8. Знаки тригонометрических функций.



9. Радианная и градусная меры углов.

$$1 \text{ рад.} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ; \quad \alpha \text{ рад.} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \alpha \right)^\circ;$$

$$1 \text{ рад.} \approx 57,3^\circ; \quad \alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \text{ рад.}; \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад.}$$

10. Период тригонометрических функций.

$T = 2\pi$ — период функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$;

$T = \pi$ — период функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$;

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ — периоды функций $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ и $y = A \cos(\omega x + \varphi)$;

$T = \frac{\pi}{\omega}$ — периоды функций $y = A \operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$ и $y = A \operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$.

11. Формулы приведения.

Название функции не изменяется				Название функции изменяется на сходное			
	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$

12. Значения тригонометрических функций для некоторых углов.

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctg α	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

13. Обратные тригонометрические функции.

1) Арксинус числа a , $-1 \leq a \leq 1$ (обозначается $\arcsin a$),

— такое число α , $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, синус которого равен a ;
 $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Например, $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, так как $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$; $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$, так как

$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$.

2) Арккосинус числа a , $-1 \leq a \leq 1$ (обозначается $\arccos a$), — такое число α , $0 \leq \alpha \leq \pi$, косинус которого равен a ;

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

Например, $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, так как $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и

$$0 \leq \frac{\pi}{6} \leq \pi, \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}, \text{ так как}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \text{ и } 0 \leq \frac{2\pi}{3} \leq \pi.$$

3) Арктангенс числа a , $a \in R$ (обозначается $\arctg a$),

— такое число α , $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, тангенс которого равен a ; $\arctg(-a) = -\arctg a$.

Например, $\arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, так как $\tg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ и

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}; \arctg(-1) = -\arctg 1 = -\frac{\pi}{4}, \text{ так как}$$

$$\tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tg \frac{\pi}{4} = -1 \text{ и } -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

4) Арккотангенс числа a , $a \in R$ (обозначается $\operatorname{arcc}tg a$), — такое число α , $0 < \alpha < \pi$, котангенс которого равен a ; $\operatorname{arcc}tg(-a) = \pi - \operatorname{arcc}tg a$.

Например, $\operatorname{arcc}tg 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$ и

$$0 < \frac{\pi}{4} < \pi; \operatorname{arcc}tg(-1) = \pi - \operatorname{arcc}tg 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

$$\text{так как } \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = -1 \text{ и}$$

$$0 < \frac{3\pi}{4} < \pi.$$

Пример 1. Найти радианную меру угла, равного:

1) 45° ; 2) 15° ; 3) 30° ; 4) 90° ; 5) 120° ; 6) 210° .

Решение

$$1) 45^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 45 \text{ рад.} = \frac{\pi}{4} \text{ рад.};$$

$$2) 15^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 15 \text{ рад.} = \frac{\pi}{12} \text{ рад.};$$

$$3) 30^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 30 \text{ рад.} = \frac{\pi}{6} \text{ рад.};$$

$$4) 90^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 90 \text{ рад.} = \frac{\pi}{2} \text{ рад.};$$

$$5) 120^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 120 \text{ рад.} = \frac{12\pi}{18} \text{ рад.} = \frac{2\pi}{3} \text{ рад.};$$

$$6) 210^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 210 \text{ рад.} = \frac{7\pi}{6} \text{ рад.}$$

Пример 2. Найти градусную меру угла, равного:

$$1) \pi \text{ рад.}; 2) \frac{\pi}{2} \text{ рад.}; 3) \frac{3\pi}{4} \text{ рад.}; 4) \frac{2\pi}{3} \text{ рад.};$$

$$5) \frac{6\pi}{5} \text{ рад.}; 6) \frac{\pi}{5} \text{ рад.}$$

Решение

$$1) \pi \text{ рад.} = 180^\circ;$$

$$2) \frac{\pi}{2} \text{ рад.} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ;$$

$$3) \frac{3\pi}{4} \text{ рад.} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{4} = 135^\circ;$$

$$4) \frac{2\pi}{3} \text{ рад.} = \frac{2 \cdot 180^\circ}{3} = 120^\circ;$$

$$5) \frac{6\pi}{5} \text{ рад.} = \frac{6 \cdot 180^\circ}{5} = 216^\circ;$$

$$6) \frac{\pi}{5} \text{ рад.} = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ.$$

Пример 3. Вычислить: 1) $3 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$;

2) $4 \cos \frac{\pi}{3} + 3 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} - 10 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$;

3) $2 \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3 \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 7,5 \operatorname{tg} (-\pi) + \frac{1}{8} \cos \left(-\frac{3}{2} \pi\right)$.

Решение

1) $3 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} =$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 1,5 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 1,5;$$

2) $4 \cos \frac{\pi}{3} + 3 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} - 10 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} =$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 \cdot 1 = 2 + 3 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 =$$

$$= -5 - \frac{\sqrt{2}}{2};$$

3) $2 \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3 \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 7,5 \operatorname{tg} (-\pi) + \frac{1}{8} \cos \left(-\frac{3}{2} \pi\right) =$

$$= -2 \sin \frac{\pi}{6} + 3 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - 7,5 \operatorname{tg} \pi + \frac{1}{8} \cos \frac{3}{2} \pi =$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 - 7,5 \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 0 = -1 + 3 = 2.$$

Пример 4. Вычислить $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если

$$\cos \alpha = -\frac{3}{5} \text{ и } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

Решение

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\sin \alpha < 0$, тогда

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{4}{5} : \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{3} \text{ и } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \sin \alpha = -\frac{4}{5}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}.$$

Пример 5. Вычислить $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если

$$\operatorname{tg} \alpha = 3 \text{ и } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

Решение

$$\text{Так как } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \text{ то } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}.$$

По условию $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, значит, $\cos \alpha < 0$.

Известно, что $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, откуда

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{10}, \text{ значит, } \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{и } \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Ответ: } \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}; \sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}.$$

Пример 6. Найти период функции:

$$1) y = \sin 2x; \quad 2) y = \cos \frac{x}{3};$$

$$3) y = \cos x \cos 4x; \quad 4) y = 4 \sin(x - 3) + 9 \cos \pi x.$$

Решение — 36 и 117 л. 0 — 88 л. 2 — 1782 — 1 п. 10

1) Чтобы число T было периодом функции, должно выполняться тождество $\sin(2x + 2T) = \sin 2x$, значит, $2T = 2\pi$, откуда $T = \pi$.

2) Аналогично $\frac{1}{3}T = 2\pi$, откуда $T = 6\pi$.

3) Известно, что $\cos \alpha \cos \beta =$

$$= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)), \text{ тогда } y = \cos x \cos 4x =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos(x - 4x) + \cos(x + 4x)) = \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 5x.$$

Заметим, что период функции $y = \cos 3x$ равен

$$T_1 = \frac{2\pi}{3}, \text{ а период функции } y = \cos 5x \text{ равен } T_2 = \frac{2\pi}{5}.$$

Наименьшее число, при делении которого на

$T_1 = \frac{2\pi}{3}$ и $T_2 = \frac{2\pi}{5}$ получаются целые числа, есть число 2π . Значит, период данной функции $T = 2\pi$.

4) Период функции $y = 4\sin(x - 3)$ равен

$$T_1 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi.$$

Период функции $y = 9\cos \pi x$ равен $T_2 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Периода у данной функции $y = 4\sin(x - 3) + 9\cos \pi x$ не существует, так как нет такого числа, при делении которого на 2π и на 2 получались бы целые числа.

Ответ: 1) π ; 2) 6π ; 3) 2π ; 4) не существует.

Пример 7. Определить знак произведения $\sin 47^\circ \cos 254^\circ \cos 383^\circ \sin(-88^\circ) \cos(-88^\circ) \sin 2$.

Решение

Заметим, что $\sin 47^\circ > 0$, так как 47° — угол I четверти, а синус в I четверти положителен;

$\cos 254^\circ < 0$, так как 254° — угол III четверти;

$\cos 383^\circ > 0$, так как 383° — угол I четверти;

$\sin(-88^\circ) = -\sin 88^\circ < 0$, так как 88° — угол I четверти;

$\sin 88^\circ > 0$, тогда $-\sin 88^\circ < 0$; $\cos(-88^\circ) = \cos 88^\circ > 0$, так как 88° — угол I четверти;

$\sin 2 > 0$, так как угол, величина которого 2 радиана, является углом II четверти и синус положителен. Таким образом, произведение положительно.

Ответ: знак положителен.

Пример 8. Упростить $\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

Решение

$$\begin{aligned} & \text{Упростим числитель дроби: } \cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = \\ & = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot (\sin^2 \alpha - 1) = -\operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha; \\ & \text{упростим знаменатель: } \sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = \\ & = \operatorname{tg}^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1) = -\operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{-\operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{-\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^6 \alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}^6 \alpha$.

Пример 9. Привести к тригонометрической функции острого угла: 1) $\sin 1915^\circ$; 2) $\cos 1915^\circ$; 3) $\cos (-2002^\circ)$; 4) $\operatorname{tg} (-2002^\circ)$; 5) $\operatorname{ctg} 27,3\pi$.

Решение

$$\begin{aligned} 1) \sin 1915^\circ &= \sin (5 \cdot 360^\circ + 115^\circ) = \sin 115^\circ = \\ &= \sin (90^\circ + 25^\circ) = \cos 25^\circ \text{ (период синуса } 2\pi, \text{ или } 360^\circ). \end{aligned}$$

$$2) \cos 1915^\circ = \cos 115^\circ = \cos (90^\circ + 25^\circ) = -\sin 25^\circ \text{ (период косинуса также равен } 2\pi, \text{ или } 360^\circ).$$

$$3) \cos (-2002^\circ) = \cos (2002^\circ) = \cos (5 \cdot 360^\circ + 202^\circ) = \cos 202^\circ = \cos (180^\circ + 22^\circ) = -\cos 22^\circ.$$

$$4) \operatorname{tg} (-2002^\circ) = -\operatorname{tg} 2002^\circ = -\operatorname{tg} (5 \cdot 360^\circ + 202^\circ) = -\operatorname{tg} 202^\circ = -\operatorname{tg} (180^\circ + 22^\circ) = -\operatorname{tg} 22^\circ.$$

$$5) \operatorname{ctg} 27,3\pi = \operatorname{ctg} (27\pi + 0,3\pi) = \operatorname{ctg} (0,3\pi) = \operatorname{tg} (0,5\pi - 0,3\pi) = \operatorname{tg} 0,2\pi.$$

$$\text{Ответ: 1) } \cos 25^\circ; 2) -\sin 25^\circ; 3) -\cos 22^\circ; 4) -\operatorname{tg} 22^\circ; 5) \operatorname{tg} 0,2\pi.$$

Пример 10. Вычислить без таблиц: 1) $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$; 2) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$; 3) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$.

Решение

1) Так как $\sin 75^\circ = \sin (90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ$, то $\sin 75^\circ \sin 15^\circ = \cos 15^\circ \sin 15^\circ =$

$$= \frac{1}{2} (2 \cos 15^\circ \sin 15^\circ) =$$

$$= \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 15^\circ) = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}.$$

2) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ =$

$$= \frac{1}{2 \sin 20^\circ} \cdot (2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ) \cos 40^\circ \cos 80^\circ =$$

$$= \frac{1}{2 \sin 20^\circ} \cdot \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ =$$

$$= \frac{1}{4 \sin 20^\circ} \cdot (2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ) \cdot \cos 80^\circ =$$

$$= \frac{1}{4 \sin 20^\circ} \cdot \sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ =$$

$$= \frac{1}{8 \sin 20^\circ} \cdot (2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ) = \frac{1}{8 \sin 20^\circ} \cdot \sin 160^\circ =$$

$$= \frac{1}{8 \sin 20^\circ} \cdot \sin(180^\circ - 20^\circ) = \frac{1}{8 \sin 20^\circ} \cdot \sin 20^\circ = \frac{1}{8}.$$

3) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \sin (90^\circ - 80^\circ) \sin (90^\circ - 40^\circ) \sin (90^\circ - 20^\circ) = \cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ = \frac{1}{8}.$
(См. 2)).

Ответ: 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{1}{8}$.

Пример 11. Найти $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$.

Решение

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -(\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha) = -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \times (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = -\cos 2\alpha \cdot 1 = -\cos 2\alpha.$$

$$\text{Далее находим: } \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5},$$

$$\text{тогда } \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 =$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = \frac{18}{25} - 1 = -\frac{7}{25}, \text{ значит,}$$

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -\cos 2\alpha = \frac{7}{25}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{7}{25}.$$

Пример 12. Доказать тождество:

$$1) \frac{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg}^4 \alpha;$$

$$2) \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

Решение

1) Упростим числитель дроби:

$$\begin{aligned} 3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha &= (4 + 4 \cos 2\alpha) - \\ &- (1 - \cos 4\alpha) = 4(1 + \cos 2\alpha) - 2 \sin^2 2\alpha = \\ &= 4 \cdot 2 \cos^2 \alpha - 2 (\sin 2\alpha)^2 = 8 \cos^2 \alpha - \\ &- 2 (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 = 8 \cos^2 \alpha - 8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= 8 \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = 8 \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 8 \cos^4 \alpha. \end{aligned}$$

Аналогично упростим знаменатель дроби:

$$\begin{aligned} 3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha &= (4 - 4 \cos 2\alpha) - (1 - \cos 4\alpha) = \\ &= 4(1 - \cos 2\alpha) - 2 \sin^2 2\alpha = 8 \sin^2 \alpha - 8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= 8 \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = 8 \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = 8 \sin^4 \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \frac{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} =$$

$$= \frac{8 \cos^4 \alpha}{8 \sin^4 \alpha} = \operatorname{ctg}^4 \alpha, \text{ и т. д.}$$

2) Упростим левую часть тождества, применяя формулу $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$:

$$\begin{aligned}\sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - \\ &- 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x \cdot 1 = \\ &= 1 - \frac{3}{4} \cdot (4\sin^2 x \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \cdot (2\sin x \cos x)^2 = \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x, \text{ что и требовалось доказать.}\end{aligned}$$

Пример 13. Сравнить $\sin 9$ и $\sin 10$.

Решение

Идея решения заключается в рассмотрении разности $\sin 10 - \sin 9$ и использовании разности синусов:

$$\sin 10 - \sin 9 = 2 \sin \frac{10 - 9}{2} \cos \frac{10 + 9}{2} = 2 \sin 0,5 \cos 9,5.$$

Так как угол $0,5$ находится в I четверти $\left(0 < 0,5 < \frac{\pi}{2}\right)$, то $\sin 0,5 > 0$. Остается выяснить, в какой четверти находится угол $9,5$. Заметим, что $3\pi < 9,5 < 3\pi + \frac{\pi}{2}$, тогда $\cos 9,5 < 0$. Выходит, что $\sin 10 - \sin 9 < 0$, т. е. $\sin 10 < \sin 9$, значит, $\sin 9 > \sin 10$.

Ответ: $\sin 9 > \sin 10$.

Пример 14. Вычислить без таблиц: 1) $\operatorname{tg} 67^\circ 30'$;

$$2) \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}.$$

Решение

1) Известно, что $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$, тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 67^\circ 30' &= \frac{1 - \cos 135^\circ}{\sin 135^\circ} = \frac{1 - \cos(90^\circ + 45^\circ)}{\sin(90^\circ + 45^\circ)} = \\ &= \frac{1 + \sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1.\end{aligned}$$

2) Так как $\sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$, то

$$\sin \frac{5\pi}{16} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{16} \right) = \cos \frac{3\pi}{16} \text{ и}$$

$$\sin \frac{7\pi}{16} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{16} \right) = \cos \frac{\pi}{16}.$$

Обозначив данное выражение через A , имеем:

$$\begin{aligned} A &= \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \cos^4 \frac{3\pi}{16} + \cos^4 \frac{\pi}{16} = \\ &= \left(\sin^4 \frac{\pi}{16} + \cos^4 \frac{\pi}{16} \right) + \left(\sin^4 \frac{3\pi}{16} + \cos^4 \frac{3\pi}{16} \right) = \\ &= \left(\sin^4 \frac{\pi}{16} + 2 \sin^2 \frac{\pi}{16} \cos^2 \frac{\pi}{16} + \cos^4 \frac{\pi}{16} \right) - \\ &\quad - 2 \sin^2 \frac{\pi}{16} \cos^2 \frac{\pi}{16} + \\ &\quad + \left(\sin^4 \frac{3\pi}{16} + 2 \sin^2 \frac{3\pi}{16} \cos^2 \frac{3\pi}{16} + \cos^4 \frac{3\pi}{16} \right) - \\ &\quad - 2 \sin^2 \frac{3\pi}{16} \cos^2 \frac{3\pi}{16} = \\ &= \left(\sin^2 \frac{\pi}{16} + \cos^2 \frac{\pi}{16} \right)^2 + \left(\sin^2 \frac{3\pi}{16} + \cos^2 \frac{3\pi}{16} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{16} \cos^2 \frac{\pi}{16} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(4 \sin^2 \frac{3\pi}{16} \cos^2 \frac{3\pi}{16} \right) = 2 - \frac{1}{2} \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} \right) = \\ &= 2 - \frac{1}{2} \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} \right) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 1,5. \end{aligned}$$

Ответ: 1) $\sqrt{2} + 1$; 2) 1,5.

Пример 15. Вычислить:

$$1) 2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{1}{2} \arccos(-1); 2) \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right);$$

$$3) \sin\left(\frac{1}{2} \arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right);$$

$$4) \operatorname{tg}\left(5 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$5) \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3.$$

Решение

$$1) 2 \cdot \left(-\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (\pi - \operatorname{arctg} 1) + \frac{\pi}{4} +$$

$$+ \frac{1}{2}(\pi - \arccos 1) = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot (\pi - 0) =$$

$$= -\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} =$$

$$= \frac{9\pi - 4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

$$2) \text{ Пусть } \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right) = x, \text{ тогда } \operatorname{ctg} x = -\frac{3}{4}.$$

Требуется найти $\sin \frac{x}{2}$. Известно, что

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \text{ где } \frac{x}{2} - \text{угол } I \text{ четверти, тогда}$$

$$\sin \frac{x}{2} > 0 \text{ и } \sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}.$$

Найдем значение $\cos x$ по формуле

$$\cos x = \frac{\operatorname{ctg} x}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}} \text{ или}$$

$$\cos x = \frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = -\frac{3}{5} \text{ (угол } x \text{ во II четверти).}$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } \sin \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{10}} = \\ &= \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

$$3) \text{ Пусть } \arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = x, \text{ тогда } \sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}},$$

$$\text{где } \cos x = \sqrt{1 - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{3} \text{ (} \cos x > 0 \text{).}$$

$$\sin \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{3}}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4) Так как $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$ и $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, то имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(5 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{3}\right) &= \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right) = \\ &= \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1. \end{aligned}$$

5) Пусть $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = x$, тогда

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} 2) + \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} 3)}{1 - \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} 2) \cdot \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} 3)} = \frac{2 + 3}{1 - 2 \cdot 3} = -1.$$

Так как $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 3 < \frac{\pi}{2}$, то

$$\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 < \pi, \text{ т. е. } \frac{\pi}{2} < x < \pi, \text{ тогда}$$

$$x = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{Ответ: 1) } \frac{5\pi}{6}; 2) \frac{2}{\sqrt{5}}; 3) -\frac{1}{\sqrt{3}}; 4) -1; 5) \frac{3\pi}{4}.$$

Пример 16. Доказать, что если $\cos \alpha + \cos \beta = a$ и

$$\sin \alpha + \sin \beta = b, \text{ то } \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

Решение

Так как $\cos \alpha + \cos \beta = a$, то

$$2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = a.$$

Аналогично $\sin \alpha + \sin \beta =$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = b.$$

Разделив обе части II равенства на I, получим

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{b}{a}. \quad (1)$$

Известно, что $\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, тогда

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} \text{ и, учитывая (1), имеем:}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{2 \cdot \frac{b}{a}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{2 \cdot \frac{b}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \text{ ч. т. д.}$$

Пример 17. Найти значение $\sin 18^\circ$ и $\cos 18^\circ$ (не пользуясь таблицами).

Решение

Заметим, что $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$. (1)

Но $\sin 54^\circ = \sin(3 \cdot 18^\circ) = 3 \sin 18^\circ - 4 \sin^3 18^\circ$ и $\cos 36^\circ = \cos(2 \cdot 18^\circ) = 1 - 2 \sin^2 18^\circ$ (здесь использовали соответственно формулы синуса тройного и косинуса двойного углов). Тогда равенство (1) примет вид

$$3 \sin 18^\circ - 4 \sin^3 18^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ \text{ или}$$

$$4 \sin^3 18^\circ - 2 \sin^2 18^\circ - 3 \sin 18^\circ + 1 = 0.$$

Пусть $\sin 18^\circ = x$, где $x > 0$ и $x \neq 1$, тогда получим уравнение $4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x^2(x - 1) + 2x(x - 1) - (x - 1) = 0$ или $(x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0$, откуда $x_1 = 1$ (не подходит, так как $\sin 18^\circ \neq 1$) или

$$4x^2 + 2x - 1 = 0, \text{ откуда } x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}. \text{ Учитывая,}$$

$$\text{что } x > 0, \text{ имеем } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{16}} =$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{16 - (5 + 1 - 2\sqrt{5})} = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

$$\text{Итак, } \sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \text{ и } \cos 18^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

$$\text{Ответ: } \sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1), \cos 18^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Пример 18. Доказать, что $\operatorname{tg}^2 72^\circ \cdot \operatorname{ctg}^2 54^\circ = 5$.

Решение

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2 72^\circ \cdot \operatorname{ctg}^2 54^\circ &= (\operatorname{tg} 72^\circ \cdot \operatorname{ctg} 54^\circ)^2 = \\&= (\operatorname{ctg} 18^\circ \cdot \operatorname{tg} 36^\circ)^2 = (\operatorname{ctg} 18^\circ \cdot \operatorname{tg}(2 \cdot 18^\circ))^2 = \\&= \left(\operatorname{ctg} 18^\circ \cdot \frac{2 \operatorname{tg} 18^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 18^\circ} \right)^2 = \left(\frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 18^\circ} \right)^2 = \\&= \frac{4}{(1 - \operatorname{tg}^2 18^\circ)^2}.\end{aligned}$$

Известно, что $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, тогда

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1, \quad 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = 2 - \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$\text{значит, } 1 - \operatorname{tg}^2 18^\circ = 2 - \frac{1}{\cos^2 18^\circ} = 2 - \frac{16}{10 + 2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{4 + 4\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{\sqrt{5}(1 + \sqrt{5})} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}^2 72^\circ \cdot \operatorname{ctg}^2 54^\circ =$

$$= 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 4 \cdot \frac{5}{4} = 5, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Пример 19. Доказать, что если $x = \operatorname{tg} 10^\circ$,

$y = \operatorname{tg} 25^\circ$, $z = \operatorname{tg} 55^\circ$, то $xy + yz + xz = 1$.

Решение

$$\begin{aligned}xy + yz + xz &= (x + z)y + zx = \\&= (\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 55^\circ) \operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 55^\circ \operatorname{tg} 10^\circ = \\&= \frac{\sin(10^\circ + 55^\circ)}{\cos 10^\circ \cos 55^\circ} \cdot \frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ} + \frac{\sin 55^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\cos 55^\circ \cdot \cos 10^\circ} = \\&= \frac{\sin 65^\circ \sin 25^\circ}{\cos 10^\circ \cos 55^\circ \cos 25^\circ} + \frac{\sin 55^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ \cdot \cos 55^\circ} = \\&= \frac{\sin 25^\circ}{\cos 10^\circ \cos 55^\circ} + \frac{\sin 55^\circ \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ \cos 55^\circ} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin 25^\circ + \sin 55^\circ \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ \cos 55^\circ} = \\
&= \frac{\sin 25^\circ + \frac{1}{2}(\cos 45^\circ - \cos 65^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 45^\circ + \cos 65^\circ)} = \\
&= \frac{2 \sin 25^\circ + \cos 45^\circ - \sin 25^\circ}{\cos 45^\circ + \sin 25^\circ} = \frac{\sin 25^\circ + \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ + \sin 25^\circ} = 1,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пример 20. Доказать, что если

$$7 \sin \beta = \sin (2\alpha + \beta), \text{ то } 3 \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = 4 \operatorname{tg} \alpha.$$

Решение

$$7 \sin \beta = 6 \sin \beta + \sin \beta = \sin (2\alpha + \beta), \text{ или } 6 \sin \beta = \sin (2\alpha + \beta) - \sin \beta = 2 \sin \alpha \cos (\alpha + \beta). \quad (1)$$

$$\text{С другой стороны, } 7 \sin \beta = 8 \sin \beta - \sin \beta, \text{ или } 8 \sin \beta = \sin (2\alpha + \beta) + \sin \beta = 2 \sin (\alpha + \beta) \cos \alpha. \quad (2)$$

Разделив обе части (2) на (1), получим

$$\frac{8 \sin \beta}{6 \sin \beta} = \frac{2 \sin (\alpha + \beta) \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cos (\alpha + \beta)} \text{ или}$$

$$\frac{4}{3} = \operatorname{tg} (\alpha + \beta) \operatorname{ctg} \alpha, \text{ откуда } 3 \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = 4 \operatorname{tg} \alpha.$$

Пример 21. Доказать тождество

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg} (45^\circ + \alpha), \text{ где } \alpha \neq 45^\circ + 180^\circ \cdot n.$$

Решение

Способ 1

Применяя формулы приведения, преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\sin (90^\circ - \alpha) + \sin \alpha}{\sin (90^\circ - \alpha) - \sin \alpha} = \\
&= \frac{2 \sin 45^\circ \cdot \cos (45^\circ - \alpha)}{2 \cos 45^\circ \cdot \sin (45^\circ - \alpha)} = \operatorname{ctg} (45^\circ - \alpha) = \\
&= \operatorname{tg} (90^\circ - (45^\circ - \alpha)) = \operatorname{tg} (45^\circ + \alpha).
\end{aligned}$$

Замечание. Решение относительно упрощается при замене $\cos \alpha$ на $\sin (90^\circ + \alpha)$.

Способ 2

Если использовать формулу $a \sin x + b \cos x = c$ введением вспомогательного угла, то получим

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} &= \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha)}{\sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha)} = \\ &= \frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos(45^\circ + \alpha)} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha). \end{aligned}$$

Способ 3

Разделим числитель и знаменатель данной дроби на $\cos \alpha \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} &= \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \alpha} = \\ &= \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha). \end{aligned}$$

Способ 4

Преобразуем правую часть данного тождества:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) &= \frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos(45^\circ + \alpha)} = \\ &= \frac{\sin 45^\circ \cos \alpha + \cos 45^\circ \sin \alpha}{\cos 45^\circ \cos \alpha - \sin 45^\circ \sin \alpha} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Способ 5

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) &= \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \\ &= \frac{\cos \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha)}{\cos \alpha \cdot (1 - \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Задачи

Группа А

1. Найти радианные меры углов, выраженных в градусах:

1) 50° ; 2) 105° ; 3) 45° ; 4) 140° ; 5) 30° ; 6) 210° .

2. Найти градусные меры углов, выраженных в радианах:

1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{9}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) 4; 6) 0,36.

Вычислить значения выражений:

3. $5 \sin \frac{\pi}{4} + 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - 5 \cos \frac{\pi}{4} - 10 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$;

4. $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$;

5. $2 \operatorname{tg}^2 60^\circ - \operatorname{ctg}^2 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 30^\circ$;

6. $2 \sin(-30^\circ) + 3 + 7,5 \operatorname{tg}(-180^\circ) + \frac{1}{8} \cos 270^\circ$;

7. $\sin 73^\circ \cos 13^\circ - \cos 73^\circ \sin 13^\circ$;

8. $\sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$;

9. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right)^2$; 10. $1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{12}$;

11. $-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cos^2 15^\circ$; 12. $\sin 315^\circ$;

13. $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3}$; 14. $\cos \left(-\frac{7\pi}{3} \right)$;

15. $\operatorname{tg} \frac{25\pi}{4}$; 16. $\cos \frac{21\pi}{4}$;

17. $\cos(-9\pi) + 2 \sin \left(-\frac{49\pi}{6} \right) - \operatorname{ctg} \left(-\frac{21\pi}{4} \right)$;

18. $\arcsin \frac{1}{2}$; 19. $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$;

20. $\operatorname{arctg}(-1)$;

21. $5 \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) - 3 \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

22. Вычислить: $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = 0,8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

23. Вычислить $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ и

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

24. Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$.

Упростить:

25. $\frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{\sin 2\alpha}$;

26. $\cos(\pi - \alpha) \cos(3\pi - \alpha) - \sin(\alpha - \pi) \sin(\alpha - 3\pi)$;

27. $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$;

28. $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2$;

29. $\sin(x - 2\pi) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \operatorname{tg}(\pi - x) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$;

30. $\cos 19^\circ 30' \cos 25^\circ 30' - \sin 19^\circ 30' \sin 25^\circ 30'$.

Группа Б

1. Найти $\cos \alpha$, если $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \frac{1}{8}$.

2. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Найти значение выражения:

а) $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$; б) $\frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$.

3. Известно, что $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$. Найти:

а) $\sin \alpha \cos \alpha$; б) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$; в) $\sin \alpha - \cos \alpha$.

4. Найти значение выражения $\sin \alpha \cos \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = 0,6$.

5. Найти значение выражения $\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha$, если $\cos \alpha - \sin \alpha = 0,2$.

6. Найти значение выражения:

а) $\cos 945^\circ - \sin 495^\circ + \operatorname{tg} 1800^\circ$;

б) $2 \sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right) + \cos(-9\pi)$.

Упростить выражения:

7. $\frac{2 \cos^2 2\alpha}{\sin 4\alpha \cos 4\alpha + \sin 4\alpha}$;

8. $\frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha - \cos 2\alpha}$;

9. $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} + \cos(1,5\pi + x)$;

10. $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;

11. $1 - \sin^2 \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)$;

12. $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$;

13. $\cos\left(\frac{7\pi}{5} + \alpha\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right) +$
 $+ \sin\left(\frac{7\pi}{5} + \alpha\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right)$;

14. $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$;

15. $\cos 2\alpha - \cos \alpha \cos 3\alpha$;

16. $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}$;

17. $\frac{1 + \sin \alpha - \cos 2\alpha - \sin 3\alpha}{2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1}$;

$$18. \operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right);$$

$$19. \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \arcsin a \right), \quad -1 \leq a \leq 1.$$

$$20. \sin \left(\arcsin \left(-\frac{1}{4} \right) \right); \quad 21. \sin \left(\pi + \arcsin \frac{2}{3} \right);$$

$$22. \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2 \right); \quad 23. \operatorname{ctg} (\operatorname{arctg} 1);$$

$$24. \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right); \quad 25. \cos (\operatorname{arctg} (-\sqrt{3})).$$

$$26. \cos^2 (\alpha + 6\pi) + \cos^2 (\alpha - 4\pi);$$

$$27. (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2;$$

$$28. \frac{\sin \alpha + 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)}{2 \cos \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) - \sqrt{3} \cos \alpha};$$

$$29. (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 + (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 -$$

$$- 2 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right);$$

$$30. \sin^2 (\alpha + 2\beta) + \sin^2 (\alpha - 2\beta) - 1;$$

$$31. 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + 1,5\alpha \right) - 1; \quad 32. \frac{\sin \alpha + \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \alpha + \cos \frac{\alpha}{2}};$$

$$33. \frac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos^2 18^\circ};$$

$$34. \left(\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) \cdot \sin 2\alpha;$$

$$35. \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{3} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} \right) \operatorname{tg} \frac{2\alpha}{3};$$

$$36. \operatorname{tg}(\alpha + 45^\circ) + \operatorname{tg}(2\alpha - 45^\circ) - 2\operatorname{tg} 2\alpha;$$

$$37. (3\sin \alpha + 4\cos \alpha)^2 + (4\sin \alpha - 3\cos \alpha)^2;$$

$$38. \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$39. \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2);$$

$$40. \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Вычислить:

$$41. \cos^2\left(\frac{\pi}{8} + 4\pi\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - 44\pi\right);$$

$$42. \operatorname{tg} 1800^\circ - \sin 495^\circ + \cos 945^\circ;$$

$$43. \frac{5\sin \frac{5\pi}{7} + 2\cos \frac{25\pi}{14}}{\sin \frac{2\pi}{7}};$$

$$44. \cos\left(\frac{1}{2} \arcsin 1 + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right);$$

$$45. \operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$46. \frac{1 - \cos 25^\circ + \cos 50^\circ}{\sin 50^\circ - \sin 25^\circ} - \operatorname{tg} 65^\circ;$$

$$47. \cos \frac{5\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7};$$

$$48. \sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ;$$

$$49. \cos^2 35^\circ + \cos^2 25^\circ - \cos^2 5^\circ;$$

$$50. \sin^2 10^\circ + \cos 50^\circ \cos 70^\circ;$$

$$51. 2\sin 70^\circ - \frac{1}{2\sin 10^\circ};$$

$$52. \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ \sin 40^\circ} + 4\cos 100^\circ;$$

$$53. \sin^4 x + \cos^4 x, \text{ если } \sin x \cos x = -0,5;$$

$$54. \sin x + \cos x, \text{ если } \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -\frac{7}{12} \text{ и}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2};$$

$$55. \cos(x + 4\pi), \text{ если } \cos(2\pi - x) = -\frac{3}{5};$$

$$56. \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right), \text{ если } \cos x = -0,6 \text{ и } \pi < x < \frac{3\pi}{2};$$

$$57. \operatorname{tg}(\alpha + \beta), \text{ если } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \text{ и}$$

$$\cos \beta = \frac{8}{17}, \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi;$$

$$58. \operatorname{ctg}(\alpha - \beta), \text{ если } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3} \text{ и } \operatorname{ctg} \beta = -1;$$

$$59. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \cos \alpha = 0,8 \text{ и } \pi < \alpha < 2\pi;$$

$$60. \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \cos \alpha = 0,6 \text{ и } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$61. \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}, \text{ если } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

Доказать тождество:

$$62. \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sin^2 \alpha = 1;$$

$$63. \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha};$$

$$64. \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha);$$

$$65. \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta};$$

$$66. \operatorname{tg} \alpha (1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha;$$

$$67. 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin \alpha;$$

$$68. \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

$$69. \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$70. 1 + \sin \alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$71. \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right);$$

$$72. \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right);$$

$$73. \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right);$$

$$74. 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$75. \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$76. \frac{2\cos 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right);$$

$$77. \frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$78. \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha;$$

$$79. \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{1}{8}(5 + 3\cos 4\alpha);$$

$$80. \sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha = \\ = \frac{1}{32}(\cos^2 4\alpha + 14\cos 4\alpha + 17).$$

81. Определить знак числа:

а) $\cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}$; б) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}$.

82. Сравнить: $\cos 1,3$ и $\cos 2,3$.

83. В какой четверти находится точка, соответствующая числу α , если $\sin \alpha - \cos \alpha = 1,4$?

84. Пусть α — один из углов прямоугольного треугольника.

Найти $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$.

85. Доказать, что синус суммы двух внутренних углов треугольника равен синусу его третьего угла.

86. Сравните числа:

1) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\arcsin \frac{2}{\sqrt{10}}$;

2) $\arccos \left(-\frac{4}{5}\right)$ и $\arccos \left(-\frac{1}{3}\right)$;

3) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}$ и $\operatorname{arctg} 3\sqrt{2}$.

87. Доказать, что если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ и $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha = 1$.

88. Угол при вершине равнобедренного треугольника имеет тангенс, равный $2\sqrt{2}$. Найти косинус этого угла.

89. Найти частное

$$\left\{ \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta} + \frac{1}{\sin \beta \sin \gamma} + \dots + \frac{1}{\sin x \sin y} + \frac{1}{\sin y \sin z} \right\} : \left\{ \frac{1}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{1}{\cos \beta \cos \gamma} + \dots + \frac{1}{\cos x \cos y} + \frac{1}{\cos y \cos z} \right\},$$

если $\alpha, \beta, \gamma, \dots, x, y, z$ образуют арифметическую прогрессию с разностью d .

90. Доказать, что если $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = a$, $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = b$, то $b + 2 = (a^2 - 2)^2$.

Найти период каждой из функций:

91. $y = \operatorname{tg} 2x$; 92. $y = \operatorname{tg} \frac{2x}{5}$;

93. $y = \operatorname{tg} x + \sin 2x - \operatorname{tg} 3x - \cos 4x$;

94. $y = \sin 2x$; 95. $y = \sin \frac{x}{2}$;

96. $y = \cos \frac{3x}{4}$; 97. $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$;

98. $y = \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right)$; 99. $y = \sin \frac{x}{7} + \operatorname{tg} \frac{x}{5}$;

100. $y = \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + 5 \operatorname{tg} \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$.

§ 25. Тригонометрические уравнения

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестная величина находится под знаком тригонометрической функции.

Если в данное уравнение входят разные тригонометрические функции, то при помощи соответствующих преобразований стремятся свести это уравнение к одному или нескольким простейшим уравнениям. Для этого все тригонометрические функции выражают через одну функцию, зависящую от одного и того же аргумента, после чего получают тригонометрическое уравнение, содержащее один и тот же аргумент.

1. $\sin x = a$, где $|a| \leq 1$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. $\cos x = a$, $|a| \leq 1$, $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. $\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Частные случаи ($a = 0$, $a = 1$, $a = -1$):

$\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z,$$

$$\cos x = 1, x = 2\pi n, n \in Z,$$

$$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\operatorname{tg} x = 0, x = \pi n, n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg} x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

Главный принцип – не терять корней. Одним из возможных методов отбора корней, отсеивания посторонних является проверка. Заметим, что в отличие от алгебраических уравнений трудности, возникающие с отбором корней, с проверкой, резко возрастают, так как проверять приходится целые серии, состоящие из бесконечного числа членов.

Замечание 1. В приведенных выше формулах запись решений имеет простую и однозначную форму. Однако в более сложных примерах форма записи множества решений не однозначна, но идентичность их можно доказать при помощи тождественных преобразований. Объясняется это тем, что различные методы решения приводят к различным формам записи ответа.

Замечание 2. Довольно часто множество решений уравнения записывается при помощи нескольких формул. Иногда их объединяют (хотя и не обязательно), и получается более простая форма записи ответа. И в этом случае различная форма записи ответа часто объясняется различными методами решения данного уравнения.

Замечание 3. Часто бывает, что одно и то же множество решений дается несколько раз. В таких случаях эти повторы можно исключить. Например, если при решении уравнений получены два множества решений:

$\frac{\pi}{2} + \pi n$ и $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, то, как видим, решения первой серии содержатся во второй, и тогда окончательная форма

записи ответа будет иметь вид $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Замечание 4. Возможен случай, когда найденные серии решений лишь частично пересекаются, тогда общая часть в записи окончательного ответа приводится лишь один раз без повторов.

Например, если при решении уравнения получены две серии решений: $\frac{\pi n}{3}$ и $\frac{\pi k}{2}$ ($n, k \in \mathbb{Z}$), то ни одно из этих серий не является частью другого, но если положить $n = 3m$, $k = 2m$ ($m \in \mathbb{Z}$), то получим в каждом случае πm . Значит, эту серию решений надо исключить в одной из серий, например во II серии, все четные значения k надо исключить и оставить лишь нечетные k вида $k = 2p + 1$ ($p \in \mathbb{Z}$).

Тогда обе серии решений примут вид $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi(2p+1)}{2}$, где $n, p \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим различные типы уравнений и методы их решений.

1. Решение простейших тригонометрических уравнений

Пример 1. Решить уравнение: 1) $\cos 2x = 0$;

2) $\cos 3x = -1$; 3) $\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$; 4) $\cos \frac{x}{4} = 1,5$.

Решение

$$1) \cos 2x = 0, 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos 3x = -1, 3x = \pi + 2\pi n, x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z};$$

$$3) \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}; \frac{x}{2} = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ или } \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \text{ откуда } x = \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$4) \cos \frac{x}{4} = 1,5 - \text{корней нет, так как } |\cos \alpha| \leq 1.$$

Ответ: 1) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3},$

$n \in \mathbb{Z}$; 3) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

4) корней нет.

Пример 2. Решить уравнение: 1) $\sin \frac{x}{2} = 1,$

2) $2 \sin x = \sqrt{3}$; 3) $\sin x (2 \sin x - 1) = 0.$

Решение

1) $\sin \frac{x}{2} = 1, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, x = \pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z};$

2) $2 \sin x = \sqrt{3}, \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ или $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}.$

3) $\sin x (2 \sin x - 1) = 0,$ откуда $\sin x = 0$ или
 $2 \sin x - 1 = 0,$ т. е. $\sin x = \frac{1}{2}.$

Из уравнения $\sin x = 0$ имеем $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ получим $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: 1) $x = \pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,$

$n \in \mathbb{Z}$; 3) $x = \pi n; x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 3. Решить уравнение:

1) $\operatorname{tg} 3x = 0$; 2) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$; 3) $\operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{3}.$

Решение

$$1) \operatorname{tg} 3x = 0, 3x = \pi n, x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$3) \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{3}, \text{ откуда } \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{и } \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{12} + \pi n,$$

$$\text{откуда } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: 1) } x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}; 2) x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$3) x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

2. Решение уравнений разложением на множители

Если левая часть уравнения разлагается на множители, то каждый из них приравнивается к нулю, и данное уравнение распадается на несколько более простых уравнений. При этом очень важно учесть, что корнями исходного уравнения будут только те из них, которые принадлежат области определения данного уравнения.

Пример 4. Решить уравнение $2\cos x \cos 2x = \cos x$.

Решение

Запишем данное уравнение в виде $\cos x (2\cos 2x - 1) = 0$, откуда $\cos x = 0$,

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ или } 2\cos 2x - 1 = 0, \cos 2x = \frac{1}{2},$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 5. Решить уравнение

$$\sin x - 1 = \sin x \cos x - \cos x.$$

Решение

Перенесем все члены уравнения в левую часть, а затем разложим ее в произведение, вынося общий множитель за скобки: $\sin x - \sin x \cos x - (1 - \cos x) = 0$, $\sin x (1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0$ или $(1 - \cos x) (\sin x - 1) = 0$, откуда $1 - \cos x = 0$, $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\sin x - 1 = 0$,

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = 2\pi n, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 6. Решить уравнение $\cos x - \cos 2x - \sin 3x = 0$.

Решение

Применяя формулы для разности синусов и синуса двойного угла, запишем уравнение в виде

$$2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2} = 0 \quad \text{или}$$

$$\sin \frac{3x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) = 0, \quad \text{откуда имеем:}$$

$$1) \sin \frac{3x}{2} = 0, \quad \frac{3x}{2} = \pi n, \quad x = \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} = 0. \quad \text{По формуле приведения}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right), \quad \text{тогда получим}$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) - \cos \frac{3x}{2} = 0.$$

Применяя формулу для разности косинусов, получим

$$2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0, \quad \text{откуда имеем:}$$

$$1) \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi n, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad x - \frac{\pi}{4} = \pi n, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, исходное уравнение состоит из трех бесконечных серий решений.

$$\text{Ответ: } x = \frac{2\pi n}{3}, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 7. Решить уравнение $\operatorname{tg} x (\sin x - 1) = 0$.

Решение

Считать данное уравнение равносильным совокупности уравнений $\operatorname{tg} x = 0$ и $\sin x - 1 = 0$ было бы ошибкой. Объясняется это тем, что из уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ находим $x = \pi n$; из уравнения $\sin x = 1$ получим

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, тогда множитель $\operatorname{tg} x$, входящий в данное уравнение, не имеет смысла, т. е. значения

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ не принадлежат области определения уравнения, это посторонние корни. Тогда $x = \pi n$ — корни исходного уравнения.

Ответ: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 8. Решить уравнение

$$(\operatorname{tg} x + 1) \left(2 \cos \frac{x}{2} - \sqrt{2} \right) = 0.$$

Решение

Данное уравнение распадается на 2 простейших:

$$1) \operatorname{tg} x + 1 = 0, \quad \operatorname{tg} x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что эти значения x являются корнями исходного уравнения, так как при этом значение выражения в первой скобке равно нулю, а выражение во второй скобке не теряет смысла;

$$2) \quad 2 \cos \frac{x}{2} - \sqrt{2} = 0, \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n,$$

откуда $x = \pm \frac{\pi}{2} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

При этих значениях x выражение во второй скобке левой части исходного уравнения равно нулю, а первый множитель не имеет смысла. Следовательно, эти значения не являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 9. Решить уравнение $\cos 3x \cos x = \cos 2x$.

Решение

Заметим, что $\cos 2x = \cos (3x - x) = \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x$, тогда данное уравнение примет вид $\sin x \sin 3x = 0$, откуда имеем:

1) $\sin x = 0, x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

2) $\sin 3x = 0, x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

Нетрудно видеть, что числа вида $x = \pi n$ содержатся среди чисел вида $x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$, так как если $n = 3k$,

то $\frac{\pi n}{3} = \pi k$. Значит, первая серия корней содержится во второй.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 10. Решить уравнение

$$\sin 2x \cdot \sin 4x \cdot \sin 6x = \frac{1}{4} \sin 4x.$$

Решение

Наиболее простым кажется такое решение:

1) $\sin 4x = 0; 4x = \pi n, x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$.

$$2) \sin 2x \sin 6x = \frac{1}{4} \text{ или } \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 8x) = \frac{1}{4},$$

$$\cos 8x - \cos 4x + \frac{1}{2} = 0; 2\cos^2 4x - \cos 4x - \frac{1}{2} = 0,$$

$$\cos 4x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}, x = \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Следует заметить, что более рациональным оказывается другое решение:

$$\sin 2x \sin 4x \sin 6x = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x, \text{ откуда:}$$

$$1) \sin 2x = 0, x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2\sin 4x \sin 6x = \cos 2x \text{ или } \cos 2x - \cos 10x = \\ = \cos 2x, \text{ откуда } \cos 10x = 0, 10x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10}, n \in \mathbb{Z}.$$

Сравнивая оба способа, видим, что II способ решения оказался относительно более простым и ответ значительно более удобным.

3. Решение уравнений, сводящихся к квадратным

Пример 11. Решить уравнение $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$.

Решение

Данное уравнение является квадратным относительно $\cos x$. Пусть $\cos x = y$, где $|y| \leq 1$, тогда получим уравнение $2y^2 - 5y + 2 = 0$. Решив его, найдем

$$y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = 2. \text{ Значение } y_2 = 2 \text{ не удовлетворяет ус-}$$

ловию, так как $|\cos x| \leq 1$. Следовательно, $\cos x = \frac{1}{2}$;

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 12. Решить уравнение $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$.

Решение

Так как $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то получим

$$2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0, 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Пусть $\cos x = y$, где $|y| \leq 1$, $2y^2 - y - 1 = 0$, $y_1 = 1$,

$$y_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$1) \cos x = 1, x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos x = -\frac{1}{2}, x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = 2\pi n, x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 13. Решить уравнение $\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 3 = 0$.

Решение

Так как $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, то

$\sin^2 2x = 4\sin^2 x \cos^2 x$, тогда получим

$$4\sin^2 x \cos^2 x + 4\sin^2 x - 3 = 0.$$

Но $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, тогда имеем

$$4\sin^4 x - 8\sin^2 x + 3 = 0.$$

Пусть $\sin^2 x = t$, тогда $4t^2 - 8t + 3 = 0$, откуда

$$t_1 = \frac{3}{2}, t_2 = \frac{1}{2}. \text{ Значит, } \sin^2 x = \frac{3}{2} - \text{нет корней, так}$$

$$\text{как } |\sin x| \leq 1, \text{ тогда } \sin^2 x = \frac{1}{2} \text{ или } \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{откуда } \cos 2x = 0, 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z}$.

Замечание 1. Решение несколько упростится, если перейти к $\cos 2x$: $1 - \cos^2 2x + 2(1 - \cos 2x) - 3 = 0$; $\cos^2 2x + 2\cos 2x = 0$, $\cos 2x(\cos 2x + 2) = 0$, и так как

$$\cos 2x + 2 \neq 0, \text{ остается } \cos 2x = 0, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание 2. Если при I способе заменить $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то получим после упрощения $4\cos^4 x = 1$,

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}, \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}, \cos 2x = 0, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 14. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0,5$.

Решение

Упростим левую часть уравнения, используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x =$

$$= 1 - \frac{1}{2}(4\sin^2 x \cos^2 x) = 1 - \frac{1}{2}(\sin 2x)^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Тогда данное уравнение примет вид

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \sin 2x - 0,5,$$

$2 - \sin^2 2x = 2\sin 2x - 1$ или $\sin^2 2x + 2\sin 2x - 3 = 0$ — квадратное уравнение относительно $\sin 2x$. Решая уравнение, находим $\sin 2x = 1$, $\sin 2x = -3$.

Если $\sin 2x = 1$, то $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin 2x = -3$ не имеет корней, так как $|\sin 2x| \leq 1$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 15. Решить уравнение $\operatorname{tg}^2 x - \frac{3}{\operatorname{ctg} x} - 4 = 0$.

Решение

Так как $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, то уравнение запишется в виде $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 4 = 0$ — квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$. Пусть $\operatorname{tg} x = y$, тогда имеем $y^2 - 3y - 4 = 0$, $y_1 = -1$, $y_2 = 4$.

1) $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\operatorname{tg} x = 4$,
 $x = \operatorname{arctg} 4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что левая часть исходного уравнения имеет смысл, если $\operatorname{tg} x \neq 0$ и $\operatorname{ctg} x \neq 0$ и так как для найденных корней $\operatorname{tg} x \neq 0$ и $\operatorname{ctg} x \neq 0$, то исходное уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 4 = 0$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. Решение однородных и сводящихся к ним уравнений

К простейшим уравнениям близко примыкают прежде всего уравнения, однородные относительно функций $\sin x$ и $\cos x$ 1-й, 2-й и более степеней.

Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называется *однородным уравнением 1-й степени*, а уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ называется *однородным уравнением 2-й степени*.

Аналогично может быть определено однородное тригонометрическое уравнение любой натуральной степени n .

Рассмотрим однородное уравнение 1-й степени.

Пусть $a \neq 0$, $b \neq 0$ (так как в противном случае имеем соответственно $b \cos x = 0$, т. е. $\cos x = 0$ и $\sin x = 0$ — частные случаи, не требующие отдельного обсуждения).

Разделим обе части уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$ на $\cos x$: $a \operatorname{tg} x + b = 0$ или $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$.

Заметим, что мы разделили обе части уравнения на $\cos x$. Если $\cos x = 0$, то получим $a \sin x = 0$, т. е.

$\sin x = 0$. Выходит, что и $\cos x = 0$, и $\sin x = 0$, что невозможно, ибо не будет выполняться основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Итак, в однородном тригонометрическом уравнении 1-й степени обе части уравнения можно делить на $\cos x \neq 0$ (можно и на $\sin x \neq 0$, но тогда получим уравнение относительно $\operatorname{ctg} x$).

Пример 16. Решить уравнение $\sin x - \cos x = 0$.

Решение

Разделим обе части уравнения почленно на $\cos x \neq 0$:

$$\operatorname{tg} x - 1 = 0, \operatorname{tg} x = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 17. Решить уравнение $\sin 3x + \cos 3x = 0$.

Решение

Разделив обе части уравнения на $\cos 3x \neq 0$, получим

$$\operatorname{tg} 3x + 1 = 0, \operatorname{tg} 3x = -1, 3x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n, \\ 3x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим теперь однородное уравнение 2-й степени: $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$.

Если $a \neq 0$, то, рассуждая аналогично, можно убедиться в том, что $\cos x$, а значит, и $\cos^2 x \neq 0$, а потому обе части уравнения можно разделить на $\cos^2 x \neq 0$. Тогда получим уравнение $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$ — квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$.

Если же в уравнении $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ коэффициент $a = 0$, то получим $b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$.

Это уравнение также является однородным уравнением 2-й степени, но разделить обе части на $\cos x$ теперь невозможно, так как $\cos x = 0$. Поэтому полученное уравнение проще решать методом разложения на

множители: $\cos x (b \sin x + c \cos x) = 0$, откуда $\cos x = 0$ или $b \sin x + c \cos x = 0$. Эти уравнения были рассмотрены нами ранее.

Пример 18. Решить уравнение $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$.

Решение

Данное уравнение является однородным уравнением 2-й степени. Разделив обе части на $\cos^2 x \neq 0$, получим $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} x = 3$.

Из первого уравнения имеем $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Из второго уравнения находим, что $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 19. Решить уравнение

$$\sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 0.$$

Решение

Делить обе части уравнения на $\cos^2 x$ нельзя, так как те значения x , при которых $\cos^2 x = 0$ удовлетворяют данному уравнению, а значит, деление на $\cos^2 x$ приведет к потере корней.

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$\cos x (\sqrt{3} \sin x - \cos x) = 0, \text{ откуда } \cos x = 0 \text{ или}$$

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0.$$

Из первого уравнения находим: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Второе уравнение — однородное I степени:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}, x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ легко можно привести к однородному уравнению 2-й степени. Для этого достаточно умножить правую

часть уравнения на $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, затем раскрыть скобки, перенести все члены в левую часть уравнения и привести подобные члены.

Пример 20. Решить уравнение

$$5 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 5 \text{ и найти}$$

корни на заданном промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение

Так как $5 = 5(\sin^2 x + \cos^2 x)$, то данное уравнение примет вид $5 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 6 \cos^2 x =$
 $= 5 \sin^2 x + 5 \cos^2 x$, $\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ или $\cos x(\sqrt{3} \sin x + \cos x) = 0$, откуда:

$$1) \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0 - \text{однородное уравнение}$$

$$1\text{-й степени: } \sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0, \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ откуда}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Остается из найденных серий решений выбрать те корни уравнения, которые принадлежат заданному

интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. удовлетворяют двойному

неравенству $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$:

$$a) x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \pi n < \frac{\pi}{2}, -1 < 1 + 2n < 1, -2 < 2n < 0,$$

$-1 < n < 0$ — нет целых значений n ;

$$б) x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{6} + \pi n < \frac{\pi}{2},$$

$-3 < -1 + 6n < 3, -2 < 6n < 4, -\frac{1}{3} < n < \frac{2}{3},$
откуда $n = 0$ — единственное целое значение.

Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{6}.$

Итак, на заданном промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ содержится единственный корень данного уравнения.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6}.$

5. Решение уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента

При решении различных тригонометрических уравнений иногда удается свести их к уравнению вида $a \sin x + b \cos x = c$, где $a, b, c \neq 0$.

Уравнение этого вида допускает различные способы решения.

Пример 21. Решить уравнение $4 \sin x + 3 \cos x = 5$.

Решение

Способ 1

Разделим обе части уравнения на 5:

$$\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x = 1.$$

Пусть $\frac{4}{5} = \sin \varphi$, где $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, получим $\frac{3}{5} = \cos \varphi$

$\left(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1 \right)$, и тогда данное уравнение примет вид $\sin \varphi \sin x + \cos \varphi \cos x = 1$ или $\cos(x - \varphi) = 1$, откуда $x - \varphi = 2\pi n$ и $x = 2\pi n + \varphi$, где $\varphi = \arccos \frac{3}{5}$, тогда $x = \arccos \frac{3}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x = \arccos \frac{3}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Способ 2

Используя формулы $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$,

$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ и записывая правую часть

уравнения в виде $5 = 5 \cdot 1 = 5 \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right)$,

получим

$$8 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 3 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) =$$

$$= 5 \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right),$$

$$8 \sin^2 \frac{x}{2} - 8 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0, \text{ или}$$

$$4 \sin^2 \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0, \text{ или}$$

$$\left(2 \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 = 0, \quad 2 \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 0 - \text{одно-}$$

родное уравнение I степени: $2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2},$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, \quad x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Способ 3

Используя формулы, выражающие $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (универсальные тригонометрические подстановки), получим

$$4 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + 3 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 5.$$

Пусть $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, тогда получим $\frac{8t}{1+t^2} + \frac{3-3t}{1+t^2} = 5$,
 $1+t^2 \neq 0$, $8t+3-3t^2 = 5+5t^2$ или $8t^2-8t+2=0$,
 $4t^2-4t+1=0$, $(2t-1)^2=0$, $2t-1=0$, $2t=1$, откуда
 $t = \frac{1}{2}$, и так как $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, то получим уравнение
 $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$, $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Но $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не имеет смысла, если $\cos \frac{x}{2} = 0$, т. е.

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, откуда $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Проверкой можно убедиться, что числа вида $\pi + 2\pi n$ не являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Замечание 1. При решении I способом вопрос о проверке корней отпадает, так как нельзя ни потерять решения, ни получить посторонние.

2. Этот способ решения дает возможность оценить наибольшее значение выражения $\sin x + \cos x$, а именно: $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$.

3. При решении данного уравнения различными способами мы получаем разные формы записи ответа, и приводить одно решение к другому (если этого не требуется) нет необходимости.

4. При решении уравнения II способом, также не нужна проверка найденных корней, а при решении III способом проверка обязательна, так как могут появиться посторонние корни.

Пример 22. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x.$$

Решение

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \sin 5x, \text{ или}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \sin 5x, \text{ или}$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin 5x, \sin 5x - \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0;$$

$$2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(3x + \frac{\pi}{8} \right) = 0, \text{ откуда:}$$

$$1) \sin \left(2x - \frac{\pi}{8} \right) = 0, 2x - \frac{\pi}{8} = \pi n, x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2},$$

$n \in \mathbb{Z};$

$$2) \cos \left(3x + \frac{\pi}{8} \right) = 0, 3x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ откуда}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

**6. Решение уравнений преобразованием
суммы тригонометрических функций
в произведение**

Пример 23. Решить уравнение $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$.

Решение

Применяя формулу суммы синусов, получим
 $2 \sin 2x \cos x = \sin 2x$ или $\sin 2x (2 \cos x - 1) = 0$.

$$\text{Отсюда: } 1) \sin 2x = 0, 2x = \pi n, x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2\cos x - 1 = 0, \cos x = \frac{1}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 24. Решить уравнение $\sin 3x - \sin 2x + \sin x - \sin 4x = 0.$

Решение

Запишем уравнение в виде $(\sin 3x + \sin x) - (\sin 4x + \sin 2x) = 0.$

Преобразуем каждую из сумм по формуле суммы синусов в произведение: $2 \sin 2x \cos x - 2 \sin 3x \cos x = 0.$

Вынесем общий множитель $2 \cos x$ за скобки:

$$2 \cos x (\sin 2x - \sin 3x) = 0.$$

Теперь разность $\sin 2x - \sin 3x$ преобразуем в произведение по формуле разности синусов, тогда уравнение примет вид

$$2 \cos x \cdot 2 \sin \left(-\frac{x}{2} \right) \cos \frac{5x}{2} = 0 \text{ или}$$

$$\cos x \cdot \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} = 0, \text{ откуда имеем:}$$

$$1) \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin \frac{x}{2} = 0, x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$3) \cos \frac{5x}{2} = 0, \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = 2\pi n, x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 25. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

Решение

Преобразуем обе части уравнения:

$$\sin 2x + (\sin 3x + \sin x) = \cos x + (1 + \cos 2x),$$

$$\sin 2x + 2\sin 2x \cos x = \cos x + 2\cos^2 x,$$

$\sin 2x (1 + 2\cos x) = \cos x (1 + 2\cos x)$ или
 $(1 + 2\cos x) (2\sin x \cos x - \cos x) = 0$, откуда:

1) $1 + 2\cos x = 0$, $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

3) $2\sin x - 1 = 0$, $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$,

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 26. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0$.

Решение

Используя формулу суммы тангенсов, имеем

$$\frac{\sin 3x}{\cos x \cdot \cos 2x} = 0; \begin{cases} \sin 3x = 0, \\ \cos x \neq 0, \text{ или} \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Остается сделать проверку:

а) $\frac{\pi n}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ при $2n = 3(2n + 1)$, что невозможно;

б) $\frac{\pi n}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ при $4n = 3(2n + 1)$, что также невозможно. Значит, посторонних корней нет.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

7. Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму

Пример 27. Решить уравнение
 $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x$.

Решение

Применяя формулу

$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$ к обеим частям уравнения, получим

$$\frac{1}{2} (\sin 8x + \sin 2x) = \frac{1}{2} (\sin 8x + \sin 4x) \text{ или} \\ \sin 2x - \sin 4x = 0.$$

Теперь применим формулу разности синусов
 $-2 \sin x \cos 3x = 0$, $\sin x \cos 3x = 0$, откуда имеем:
а) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) $\cos 3x = 0$, $3x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Уравнение $\sin 2x - \sin 4x = 0$ можно решить иначе: $\sin 2x - 2\sin 2x \cos 2x = 0$,
 $\sin 2x (1 - 2\cos 2x) = 0$ и т. д.

Пример 28. Решить уравнение
 $\sin 2x \cdot \sin 6x = \cos x \cdot \cos 3x$.

Решение

Используя формулы произведения синусов и косинусов двух аргументов, получим

$$\frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 8x) = \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 4x), \text{ или} \\ \cos 4x - \cos 8x = \cos 2x + \cos 4x, \\ \cos 8x + \cos 2x = 0, \text{ или } 2\cos 5x \cos 3x = 0,$$

откуда: а) $\cos 5x = 0$, $5x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) $\cos 3x = 0$, $3x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 29. Решить уравнение

$$\sin x \cos x \cos 2x \cos 8x = \frac{1}{4} \sin 12x.$$

Решение

Умножив обе части уравнения на 4 и используя формулу $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, получим $\sin 4x \cos 8x = \sin 12x$.

Теперь используем формулу произведения

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)). \text{ Имеем}$$

$$\frac{1}{2} (\sin(-4) + \sin 12x) = \sin 12x, \sin 12x + \sin 4x = 0.$$

Применив формулу суммы синусов, получим $2 \sin 8x \cos 4x = 0$, откуда: а) $\sin 8x = 0$, $8x = \pi n$,

$$x = \frac{\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } \cos 4x = 0, 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что корни уравнения $\cos 4x = 0$ содержатся среди корней уравнения $\sin 8x = 0$, тогда корни уравнения $\sin 8x = 0$ являются и корнями исходного уравнения.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z}$.

8. Решение уравнений с применением формул понижения степени

Пример 30. Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$.

Решение

Используя формулу $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ понижения степени, имеем $\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} = 1$ или $\cos 4x + \cos 2x = 0$.

К полученному уравнению применим формулу суммы косинусов: $2\cos 3x \cos x = 0$, откуда имеем:

$$\text{а) } \cos 3x = 0, \quad 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } \cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что все корни уравнения $\cos x = 0$ содержатся среди корней уравнения $\cos 3x = 0$, поэтому в ответ запишем лишь корни уравнения а).

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 31. Решить уравнение

$$\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}.$$

Решение

Используя формулу понижения степени

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \text{ имеем}$$

$$\frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2} + \frac{1 + \cos 10x}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{или}$$

$$\cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = 0,$$

$$\cos 8x + (\cos 10x + \cos 6x) = 0,$$

$$\cos 8x + 2\cos 8x \cos 2x = 0,$$

$$\cos 8x (1 + 2\cos 2x) = 0, \text{ откуда:}$$

$$\text{а) } \cos 8x = 0, \quad 8x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } 1 + 2\cos 2x = 0, \quad \cos 2x = -\frac{1}{2},$$

$$2x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{2} \right) + 2\pi n,$$

$$2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \text{ откуда } x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 32. Решить уравнение
 $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$.

Решение

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 8x), \text{ откуда}$$

$$\cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x,$$

$$2\cos 3x \cos x = 2\cos 7x \cos x \text{ или}$$

$$\cos x (\cos 3x - \cos 7x) = 0, \cos x \sin 5x \sin 2x = 0,$$

откуда имеем:

$$\text{а) } \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } \sin 5x = 0, x = \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{в) } \sin 2x = 0, x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что корни уравнения $\cos x = 0$ содержатся среди корней уравнения $\sin 2x = 0$, поэтому имеем

$$x = \frac{\pi n}{2} \text{ и } x = \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi n}{2}, x = \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 33. Решить уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$.

Решение

$$\begin{aligned} & \text{Запишем уравнение в виде } (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \\ & = \frac{7}{16}, \text{ или } \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^3 = \frac{7}{16}; \text{ или} \\ & 1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x + 1 + 3\cos 2x + \\ & + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x = \frac{7}{2}, 2\cos^2 2x = \frac{1}{2}, 1 + \cos 4x = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\cos 4x = -\frac{1}{2}, \text{ откуда } 4x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

9. Решение уравнений с применением формул двойного и тройного аргументов

Пример 34. Решить уравнение $\sin 2x = \sqrt{2} \cos x$.

Решение

Так как $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то данное уравнение примет вид $2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \cos x$.

Заметим, что разделить обе части полученного уравнения на $\cos x$ нельзя, так как это приведет к потере решений, являющихся корнями уравнения $\cos x = 0$. Запишем уравнение в виде

$$2 \sin x \cos x - \sqrt{2} \cos x = 0 \text{ или } \cos x (2 \sin x - \sqrt{2}) = 0, \\ \text{откуда имеем совокупность уравнений:}$$

$$\text{а) } \cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } 2 \sin x - \sqrt{2} = 0, \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 35. Решить уравнение $\sin 4x - \cos 2x = 0$.

Решение

Так как $\sin 4x = \sin (2 \cdot 2x) = 2 \sin 2x \cos 2x$, то данное уравнение примет вид

$$2 \sin 2x \cos 2x - \cos 2x = 0,$$

$$\cos 2x (2 \sin 2x - 1) = 0;$$

$$\cos 2x = 0 \text{ или } 2 \sin 2x - 1 = 0.$$

Из уравнения $\cos 2x = 0$ имеем:

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Из уравнения $2\sin 2x - 1 = 0$ находим:

$$\sin 2x = \frac{1}{2}; \quad 2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},$$

$n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 36. Решить уравнение

$$2\cos 4x \cos 2x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x.$$

Решение

Заметим, что $4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha = \cos 3\alpha$, тогда данное уравнение примет вид

$$2\cos 4x \cos 2x = \cos 6x, \text{ или } \cos 6x + \cos 2x = \cos 6x,$$

откуда $\cos 2x = 0, \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 37. Решить уравнение $\cos 3x + 2\cos x = 0$.

Решение

Применив формулу $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, получим $\cos x (4\cos^2 x - 1) = 0$ или $\cos x (2(1 + \cos 2x) - 1) = 0, \cos x (1 + 2\cos 2x) = 0$.

Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\cos x = 0$ или $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, откуда

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ и } x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 38. Решить уравнение $37 \operatorname{tg} 3x = 11 \operatorname{tg} x$.

Решение

Очевидно, что
$$\begin{cases} \cos 3x \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Применим формулу $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$, тогда данное уравнение запишется в виде

$$37. \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} - 11 \operatorname{tg} x = 0, \text{ или}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \left(\frac{100 - 4 \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} \right) = 0, \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0, \\ \operatorname{tg}^2 x = 25, \\ \operatorname{tg}^2 x \neq \frac{1}{3}, \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

или $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pm \arctg 5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pi n, x = \pm \arctg 5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

10. Решение уравнений с помощью замены переменных

Пример 39. Решить уравнение

$$2(\sin 2x + \cos 2x) + \sin 4x + 1 = 0.$$

Решение

Пусть $\sin 2x + \cos 2x = t$, тогда $t^2 = 1 + \sin 4x$, и данное уравнение примет вид $2t + t^2 = 0$ или $t(t + 2) = 0$, откуда $t_1 = 0, t_2 = -2$, так что данное уравнение равносильно совокупности уравнений:

1) $\sin 2x + \cos x = 0$ — однородное уравнение I степени.

$$\operatorname{tg} 2x + 1 = 0, 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

2) $\sin 2x + \cos 2x = -2$ — нет корней, так как

$$|\sin \alpha + \cos \alpha| = \sqrt{2} \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2}, \text{ так что } |t| \leq \sqrt{2}.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 40. Решить уравнение $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$.

Решение

Запишем уравнение в виде $\sin x (1 + \sin x) + \cos x (1 - \sin^2 x) = 0$, $(1 + \sin x) (\sin x + \cos x - \sin x \cos x) = 0$, откуда имеем:

1) $1 + \sin x = 0, \sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

2) $\sin x + \cos x - \sin x \cos x = 0.$

Пусть $\sin x + \cos x = t$, тогда $t^2 = 1 + 2\sin x \cos x$,

откуда $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$, и последнее уравнение примет вид

$$t - \frac{1}{2}(t^2 - 1) = 0, \text{ или } 2t - t^2 + 1 = 0, t^2 - 2t - 1 = 0,$$

$$D/4 = 1 + 1 = 2 > 0, t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}, \text{ тогда } \sin x + \cos x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Но $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ и $|t| \leq \sqrt{2}$, так что

значение $t = 1 + \sqrt{2}$ не подходит.

$$\text{Остается } \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 - \sqrt{2},$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

$$\text{откуда } x = (-1)^n \arcsin \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$,

$$x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 41. Решить уравнение $\sin 9x + 2\cos 6x = 2$.

Решение

Пусть $3x = y$, тогда уравнение примет вид

$$\sin 3y + 2 \cos 2y = 2.$$

Но $\sin 3y = 3 \sin y - 4 \sin^3 y$ и $\cos 2y = 1 - 2 \sin^2 y$, тогда получим уравнение

$$3 \sin y - 4 \sin^3 y + 2(1 - 2 \sin^2 y) = 2,$$

$$\sin y (3 - 4 \sin^2 y - 4 \sin y) = 0, \text{ откуда имеем:}$$

$$1) \sin y = 0, y = \pi n, \text{ т. е. } 3x = \pi n, x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) 3 - 4 \sin^2 y - 4 \sin y = 0, 4 \sin^2 y + 4 \sin y - 3 = 0.$$

Решая полученное уравнение, получим

$$\sin y = \frac{1}{2}, \sin y = -1,5.$$

Если $\sin y = \frac{1}{2}$, то $y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, или

$$3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \text{ откуда } x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

Если $\sin y = -1,5$, то корней нет, так как $|\sin y| \leq 1$.

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi n}{3}, x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 42. Решить уравнение

$$2 \sin^2 x + \sin x + \frac{1}{\sin x} + \frac{2}{\sin^2 x} = 6.$$

Решение

Запишем уравнение в виде

$$\left(\sin x + \frac{1}{\sin x} \right) + 2 \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) = 6.$$

Пусть $\sin x + \frac{1}{\sin x} = t$, тогда $\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = t^2 - 2$,

$$t + 2(t^2 - 2) = 6, 2t^2 + t - 10 = 0, \text{ откуда } t_1 = 2, t_2 = -\frac{5}{2}.$$

Учитывая подстановку, получим два уравнения:

$$1) \sin x + \frac{1}{\sin x} = 2, \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0,$$

$$(\sin x - 1)^2 = 0, \sin x = 1; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin x + \frac{1}{\sin x} = -\frac{5}{2}, 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0, \text{ от-}$$

$$\text{куда, решая, получим } \sin x = -2, \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Уравнение $\sin x = -2$ не имеет корней.

$$\text{Если } \sin x = -\frac{1}{2}, \text{ то } x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

11. Решение уравнений вида $f(x) = \sqrt{\varphi(x)}$

Пример 43. Решить уравнение

$$\sqrt{1 - \cos x} = \sin x, x \in [\pi; 3\pi].$$

Решение

$$\text{Область определения уравнения } \begin{cases} 1 - \cos x \geq 0, \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$1 - \cos x = \sin^2 x, \text{ или } 1 - \cos x = 1 - \cos^2 x, \\ \cos^2 x - \cos x = 0, \cos x (\cos x - 1) = 0, \text{ откуда:}$$

$$1) \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos x = 1, x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Так как $\sin x \geq 0$ и $x \in [\pi; 3\pi]$, то подходят лишь значения $x = 2\pi$ и $x = \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: $x = 2\pi$; $x = \frac{5\pi}{2}$.

Пример 44. Решить уравнение

$$\sqrt{3 \sin^2 x - 2} = 1 - 3 \cos x.$$

Решение

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$3 \sin^2 x - 2 = 1 - 6 \cos x + 9 \cos^2 x \text{ или}$$

$$3 - 3 \cos^2 x - 2 = 1 - 6 \cos x + 9 \cos^2 x,$$

$$12 \cos^2 x - 6 \cos x = 0,$$

$$2 \cos^2 x - \cos x = 0, \cos x (2 \cos x - 1) = 0, \text{ откуда:}$$

$$1) \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2 \cos x - 1 = 0, \cos x = \frac{1}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Итак, имеем три серии корней. Остается сделать проверку найденных корней:

$$a) x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\text{Левая часть: } \sqrt{3 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) - 2} = \sqrt{3 \cdot 1 - 2} = 1.$$

$$\text{Правая часть: } 1 - 3 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) = 1 - 3 \cdot 0 = 1.$$

Значит, числа вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$ — корни исходного уравнения;

$$b) x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n. \text{ Имеем } \sin \left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos \left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) = \frac{1}{2}.$$

Левая часть уравнения: $\sqrt{3 \cdot \frac{3}{4} - 2} = \frac{1}{2}$, а правая часть: $1 - 3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Как видим, равенство не имеет места, следовательно, $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ — посторонние корни для исходного уравнения.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

12. Решение уравнений с использованием ограниченности функций $\sin x$ и $\cos x$

Пример 45. Решить уравнение $\cos x + \cos \frac{3x}{4} = 2$.

Решение

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos \frac{3x}{4} = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = \frac{8\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Найдем пересечение полученных серий x_1 и x_2 :

$\frac{\pi k}{2} = \frac{8\pi n}{3}$ или $3k = 16n$, следовательно, $k = 16m$, где $m \in \mathbb{Z}$, тогда $x = 8\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = 8\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Пример 46. Решить уравнение $\cos^2 2x - \sin^4 4x + \cos x = 3$.

Решение

Имеем $\cos^2 2x \leq 1$, $-\sin^4 4x \leq 0$, $\cos x \leq 1$, значит, $\cos^2 2x - \sin^4 4x + \cos x \leq 2 < 3$, следовательно, данное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Пример 47. Решить уравнение $\sin x \sin 2x \sin 3x = 0,8$.

Решение

Преобразуя произведение в сумму, получим

$$\cos 2x \sin 2x - \sin 2x \cos 4x = \frac{8}{5} \text{ или}$$

$$\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x = \frac{16}{5}.$$

Так как $|\sin \alpha| \leq 1$, то левая часть уравнения не превосходит 3, т. е. данное уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

Пример 48. Решить уравнение $\sin \frac{5x}{4} + \cos x = 2$.

Решение

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin \frac{5x}{4} = 1, \\ \cos x = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = 2\pi k, \end{cases} \quad 2\pi k = \frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5},$$

откуда $k = \frac{1}{5}(4n + 1)$.

Так как $k \in \mathbb{Z}$, то $n = 1 + 5m$, $m \in \mathbb{Z}$, и тогда $x = 2\pi + 8\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = 2\pi + 8\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Пример 49. Решить уравнение

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2} - \cos x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2} + \cos x} = 1.$$

Решение

Легко заметить, что $\cos x = \pm \frac{1}{2}$ удовлетворяет

данному уравнению, откуда $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ и

$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. При других возможных значениях слева имеем сумму двух иррациональных чисел,

а справа — число 1. Следовательно, других решений данное уравнение не имеет.

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 50. Решить уравнение

$$\sqrt[6]{\frac{1}{2} - \cos x} + \sqrt[6]{\frac{1}{2} + \cos x} = 1.$$

Решение

Способ 1

Уравнение можно решить аналогично предыдущему, методом подбора. Приведем другой способ решения. Область определения уравнения равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \cos x \geq 0, \\ \frac{1}{2} + \cos x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} \cos x \leq \frac{1}{2}, \\ \cos x \geq -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

откуда $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$.

При $\cos x = \pm \frac{1}{2}$ имеем $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ и

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

При других значениях $\cos x$ слева имеем сумму двух иррациональных чисел, справа — число 1.

Способ 2

Пусть $\sqrt[6]{\frac{1}{2} - \cos x} = u$, $\sqrt[6]{\frac{1}{2} + \cos x} = v$, где $u \geq 0$, $v \geq 0$.

Тогда $\frac{1}{2} - \cos x = u^6$, $\frac{1}{2} + \cos x = v^6$, и, кроме того, исходное уравнение примет вид $u + v = 1$.

Имеем систему

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ \frac{1}{2} - \cos x = u^6, \\ \frac{1}{2} + \cos x = v^6, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} u + v = 1, \\ u^6 + v^6 = 1. \end{cases}$$

Заметим, что если u и v — дробные числа, то $u^6 < u$ и $v^6 < v$, значит, u и v — целые числа.

Тогда имеем две возможности:

$$1) \begin{cases} u = 0, \\ v = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} u = 1, \\ v = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \text{ и } x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Объединяя оба решения, можно ответ записать в виде $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1), k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1), k \in \mathbb{Z}.$$

§ 26. Решение систем тригонометрических уравнений

Если при решении тригонометрического уравнения оно распадалось на простейшие, то при решении каждого из них мы использовали один и тот же параметр. Другое дело когда решают систему уравнений. Использование одного и того же параметра (например, n) при решении системы уравнений может привести к потере решений, что является типичным для систем тригонометрических уравнений. Поэтому если данная система свелась к системе, состоящей из про-

стейших уравнений, то при решении каждого из них следует использовать свой целочисленный параметр.

Пример 51. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos y = -0,5, \\ \cos x \sin y = 0,5. \end{cases}$$

Решение

Складывая и вычитая уравнения системы, получим

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = 0, \\ \cos x \sin y - \sin x \cos y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(x + y) = 0, \\ \sin(y - x) = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \pi n, \\ y - x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = \pi n + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 2x = \pi n - \frac{\pi}{2} - 2\pi k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} - \pi k, \\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} + \pi k; \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(n - 2k)$, $y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(n + 2k)$,

$n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$

Пример 52. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$$

Решение

Заметим, что $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$,

$y \neq \frac{\pi}{2} + \pi l$, где $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Упростим II уравнение системы: $\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = 3$.

Учитывая I уравнение системы, имеем $\sin x \sin y = \frac{3}{4}$, и тогда $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\cos x \cos y} = 3$, откуда получим сис-

тему уравнений
$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4}; \end{cases}$$
 равносильную дан-

ной при условии, что $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ и $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Складывая почленно, а затем вычитая уравнения полученной системы, получим равносильную ей систему

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ \cos(x + y) = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - y = 2\pi k, \\ x + y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n. \end{cases}$$

Еще раз складывая и вычитая, имеем

$$\begin{cases} 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n + 2\pi k, \\ 2y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n - 2\pi k, \end{cases} \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n + \pi k, \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n - \pi k, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi(n + k)$, $y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi(n - k)$,
 $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 53. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sqrt{3}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Решение

Упростим I уравнение системы, применяя формулу суммы косинусов:

$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \sqrt{3}$, или, учитывая II уравнение данной системы, получим

$$2 \cdot \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{x-y}{2} = \sqrt{3} \quad \text{или} \quad 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \sqrt{3},$$

откуда $\cos \frac{x-y}{2} = 1$ и $x-y = 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Имеем рав-

носильную систему
$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{3}, \\ x-y = 4\pi n, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 4\pi n, \\ 2y = \frac{\pi}{3} - 4\pi n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ y = \frac{\pi}{6} - 2\pi n; \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, y = \frac{\pi}{6} - 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 54. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ 3 \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$$

Решение

Область определения системы – все действительные числа, исключая числа вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$.

Преобразуем II уравнение системы:

$$\frac{3 \sin x}{\cos x} = \frac{\sin y}{\cos y} \quad \text{или} \quad 3 \sin x \cos y - \sin y \cos x = 0.$$

Теперь подставим в полученное уравнение значение из I уравнения системы: $\frac{3}{4} - \sin y \cos x = 0$ или

$$\cos x \sin y = \frac{3}{4}.$$

Решая это уравнение с I уравнением исходной системы, получим равносильную систему при условии,

$$\text{что } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n : \begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \sin y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Сложив почленно уравнения полученной системы и затем вычитая из I уравнения II, получим систему

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin(x-y) = -\frac{1}{2}, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x-y = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k \end{cases} \text{ или:}$$

$$1) \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x-y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n + 2\pi k, \\ 2y = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n - 2\pi k, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n + 2\pi k, \\ 2y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n - 2\pi k, \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi(n+k), \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi(n-k), \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x-y = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} + 2\pi n + 2\pi k, \\ 2y = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi n - 2\pi k, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n + 2\pi k, \\ 2y = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n - 2\pi k, \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \pi(n+k), \\ y = \frac{2\pi}{3} + \pi(n-k). \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi(n+k), \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi(n-k), \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \pi(n+k), \\ y = \frac{2\pi}{3} + \pi(n-k), \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 55. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{3}{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение

Известно, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$, тогда I уравнение системы можно записать так:

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{5}{1}, \text{ или } \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}} = 5, \text{ или}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = 5;$$

учитывая II уравнение системы, получим

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = 5 \text{ или } \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = 5.$$

Следовательно, $x - y = 2 \operatorname{arctg} 5 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

По условию $x + y = \frac{\pi}{2}$. Имеем систему

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ x - y = 2 \operatorname{arctg} 5 + 2\pi n, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{arctg} 5 + 2\pi n, \\ 2y = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} 5 - 2\pi n, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 5 + \pi n, y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 5 - \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 5 + \pi n,$

$y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 5 - \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 56. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos x = 1 + \cos y, \\ \sqrt{2} \sin x = \sin y. \end{cases}$$

Решение

Возведем обе части уравнений системы в квадрат и сложим:

$$2\cos^2 x + 2\sin^2 x = (1 + \cos y)^2 + \sin^2 y, \text{ или} \\ 2 = 1 + 2\cos y + \cos^2 y + \sin^2 y, \text{ или}$$

$$2 = 1 + 2\cos y + 1, \text{ откуда } \cos y = 0, \text{ т. е. } y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ k \in \mathbb{Z}.$$

Для этих значений y будет $\sin y = (-1)^k$.

Имеем 2 случая: 1) $k = 2n$ — четное, тогда

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ т. е. } x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m;$$

$$2) k = 2n + 1 - \text{нечетное, тогда } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi m, y_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m, y_2 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}.$$

Задачи

Группа А

Решить уравнения:

1. $\cos 2x = 0$;

2. $\sin 4x = -1$;

3. $\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

4. $2 \sin 2x = -1$;

5. $\operatorname{tg} 2x = 1$;

6. $\operatorname{tg} 3x = 0$;

7. $\sin x (2 \sin x - \sqrt{2}) = 0$;

8. $2 \cos^2 3x - \cos 3x = 0$;

$$9. \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - 30^\circ\right) = 0; \quad 10. \operatorname{tg}^2 x = 1.$$

Найти корни уравнения на заданном промежутке.
 Ответ привести в градусах:

$$11. \cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2} \text{ на } [-360^\circ; 0^\circ];$$

$$12. \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -\frac{1}{2} \text{ на } [0^\circ; 90^\circ];$$

$$13. \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \text{ на } (0^\circ; 180^\circ);$$

$$14. \cos x \sin x = \frac{1}{4} \text{ на } [0; 45^\circ];$$

$$15. \cos^2 x + 3\cos x = 0 \text{ на } [0^\circ; 90^\circ];$$

$$16. \sin 3x = \sin x \text{ на } (0^\circ; 90^\circ).$$

Группа Б

Решить уравнения:

$$1. \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$2. 6 \cos^2 x + 5 \sin x - 7 = 0;$$

$$3. \cos x \operatorname{tg} 5x = 0;$$

$$4. \sin x \cdot \sin 7x = \sin 3x \cdot \sin 5x;$$

$$5. \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = 1;$$

$$6. \sin^2 3x + \sin x + \cos^2 3x = 0;$$

$$7. \frac{\sin x}{\sin 3x} = 0;$$

$$8. \frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = 0;$$

$$9. \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin x} = 0;$$

$$10. \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = 0;$$

$$11. \sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{1}{2};$$

$$12. \cos^2 x + 4\sin^2 x = 2\sin 2x;$$

$$13. 4(1 - \cos x) = 3\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2};$$

14. $\cos 2x - 5\sin x = 3$;
15. $2(\cos^4 x - \sin^4 x) = 1$;
16. $1 + \cos x + \cos 2x = 0$;
17. $\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = 1,5$;
18. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$;
19. $\sin x \sin 2x \sin 3x = 0,25 \sin 4x$;
20. $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} 2x$;
21. $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$;
22. $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$;
23. $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 0$;
24. $\cos 3x + \sin 5x = 0$;
25. $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x$;
26. $\sin x \sin 2x + \cos 3x = 0$;
27. $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}$;
28. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$;
29. $\operatorname{tg} x + \sin(\pi + x) = 2\sin^2 \frac{x}{2}$;
30. $3 + 5 \sin 2x = \cos 4x$;
31. $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{8}$;
32. $(\cos 6x - 1) \operatorname{ctg} 3x = \sin 3x$;
33. $3 \sin x = 2(1 - \cos x)$;
34. $4 \sin 3x + 3 = \sqrt{2} \sin 3x + 2$;
35. $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = 0$;
36. $4 \cos^2 6x + 16 \cos^2 3x = 13$;
37. $\sqrt{3} - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$;
38. $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = (\sin x + \cos x)^2$;

39. $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$;
 40. $\operatorname{ctg} x - 2\sin 2x = 1$;
 41. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \cos 3x$;
 42. $4\sin x + \cos x = 4$;
 43. $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$;
 44. $\sin x \cos x \sin 2x = \frac{1}{8}$;
 45. $\sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin 2x$;
 46. $\cos x \cos 2x \cos 4x = 1$;
 47. $\sin^3 x - \cos^3 x = 0$;
 48. $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$;
 49. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) = \sin x + \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right)$;
 50. $2 \operatorname{tg}^2 x + 3 = \frac{3}{\cos x}$.

Найти корни уравнения на заданном промежутке.
 Ответ привести в градусах.

51. $\cos 6x + \sin^2 3x = 0$ на $(90^\circ; 180^\circ)$;
 52. $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x$ на $[0^\circ; 45^\circ)$;
 53. $\sqrt{3}\sin x = \cos x$ на $(180^\circ; 270^\circ)$;
 54. $1 - \cos x = \sin \frac{x}{2}$ на $[0^\circ; 90^\circ]$;
 55. $\sin 3x = \sin 2x + \sin x$ на $(90^\circ; 180^\circ)$;
 56. $\cos^4 x - \sin^4 x = 0$ на $(0^\circ; 90^\circ)$;
 57. $\cos 2x + \sin x = 0$ на $[-60^\circ; 0^\circ]$;
 58. $\sin 4x = \sin 3x$ на $[340^\circ; 370^\circ]$;
 59. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{18}\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{9}\right) = -\frac{1}{4}$ на $(0^\circ, 90^\circ)$;
 60. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ на $[0^\circ, 180^\circ]$;
 61. $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$ на $[0^\circ; 90^\circ]$;

$$62. \sin x + \cos x = 1 \text{ на } (-360^\circ; 0^\circ);$$

$$63. \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \sin \frac{x}{2} \text{ на } [180^\circ, 360^\circ];$$

$$64. \cos 3x = 2 \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) \text{ на } (-90^\circ, 0^\circ);$$

$$65. 4 \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x \text{ на } (0^\circ; 30^\circ).$$

Решить системы уравнений:

$$66. \begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$67. \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \cos x \cos y = 0,5; \end{cases}$$

$$68. \begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 3; \end{cases}$$

$$69. \begin{cases} \cos(x + y) = -\frac{1}{2}, \\ \cos(x - y) = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$70. \begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$$

$$71. \begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{\sin x}{\sin y} = 2; \end{cases}$$

$$72. \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$$

$$73. \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}; \end{cases}$$

$$74. \begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$75. \begin{cases} 6 \cos x + 4 \cos y = 5, \\ 3 \sin x + 2 \sin y = 0. \end{cases}$$

Глава 7

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

§ 27. Производные элементарных функций. Правила дифференцирования

*Таблица производных элементарных
и сложных функций*

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
C , где $C - const$	0	$\ln(ax + b)$, $a \neq 0$	$\frac{a}{ax + b}$
Cx	C	$\log_a x$, $x > 0$, $a > 0$	$\frac{1}{x \ln a}$
x^p , $p \in R$	px^{p-1}	$\log_a(kx + b)$	$\frac{k}{(kx + b) \ln a}$
$ax + b$, $a \neq 0$	a	$\sin x$	$\cos x$
$(ax + b)^p$	$pa(ax + b)^{p-1}$	$\sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$
e^x	e^x	$\cos x$	$-\sin x$
e^{ax+b} , $a \neq 0$	ae^{ax+b}	$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$
a^x , $a > 0$, $a \neq 1$	$a^x \ln a$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
a^{kx+b} , $a > 0$, $a \neq 1$	$ka^{kx+b} \ln a$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\ln x$, $x > 0$	$\frac{1}{x}$		

Правила дифференцирования:

(u, v — функции, c — постоянная)

$$(cu)' = cu';$$

$$(u + v)' = u' + v';$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, где $g(f(x))$ — сложная функция.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ имеет вид $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, где (x_0, y_0) — точка касания, $f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона между касательной в точке (x_0, y_0) и положительным направлением оси OX .

1. Вычисление пределов

Пример 1. Вычислить: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{n^3}\right)$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n^2} - \frac{2}{n} + 3\right)$; 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2}{n^2 + 4}$.

Решение

1) Применив правило «предел произведения», получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{n^3}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(k \cdot \frac{1}{n^3}\right) = k \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3}\right) = k \cdot 0 = 0;$$

3) применив правило «предел суммы», имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n^2} - \frac{2}{n} + 3\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = \\ &= 0 - 0 + 3 = 3; \end{aligned}$$

4) разделим числитель и знаменатель дроби почленно на n^2 (наивысшую степень переменной n).

$$\begin{aligned} \text{Получим } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2}{n^2 + 4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2} - \frac{2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} = \frac{3 - 0}{1 + 0} = 3. \end{aligned}$$

Ответ: 1) 0; 2) 0; 3) 3; 4) 3.

Пример 2. Вычислить: 1) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + 1)$;

2) $\lim_{x \rightarrow -2} (2x^4 - 3x^3 + 5x - 1)$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2\pi x}{\sqrt{x} + 3}$; 5) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x - 4}$.

Решение

1) Выражение $2x^2 + 1$ определено в любой точке x , в частности в точке $x = 3$. Следовательно, функция $y = 2x^2 + 1$ непрерывна в точке $x = 3$, а потому предел функции при $x \rightarrow 3$ равен значению функции в точке $x = 3$.

$$\text{Имеем } \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + 1) = 2 \cdot 3^2 + 1 = 19.$$

2) Аналогично 1) имеем $\lim_{x \rightarrow -2} (2x^4 - 3x^3 + 5x - 1) = 2 \cdot (-2)^4 - 3 \cdot (-2)^3 + 5 \cdot (-2) - 1 = 32 + 24 - 10 - 1 = 45$.

3) Выражение $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$ определено в любой точке x , в частности в точке $x = 1$. Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = 1$, а потому предел функции при $x \rightarrow 1$ равен значению функции в точке $x = 1$. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} = \frac{1 - 3 + 1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}.$$

4) Аналогично 3) находим

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2\pi x}{\sqrt{x} + 3} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{1} + 3} = \frac{0}{4} = 0.$$

5) Здесь при $x = -2$ и числитель, и знаменатель обращаются в нуль, поэтому воспользоваться теоремой о пределе частного нельзя. Заметим, что

$\frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x-2)(x+2)}$. Так как при вычислении предела при $x \rightarrow -2$ предполагается, что $x \neq -2$, то дробь можно сократить на $(x+2)$. В результате получим

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-2-2} = -\frac{1}{4}.$$

6) Здесь при $x = 4$ и числитель, и знаменатель обращаются в нуль, значит, применить теорему о пределе частного нельзя. Упростим дробь, для чего умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x^2-7}-3)(\sqrt{x^2-7}+3)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-7-9}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{\sqrt{x^2-7}+3} = \frac{4+4}{\sqrt{9}+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: 1) 19; 2) 45; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) 0; 5) $-\frac{1}{4}$; 6) $\frac{4}{3}$.

2. Нахождение производных функций

Пример 3. Найти производную функции $y'(x)$, если:

1) $y = 4x - 3$; 2) $f(x) = (3x - 1)(4 - 5x)$;

3) $f(x) = \frac{1-2x}{1+2x}$; 4) $y = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

Решение

Способ 1

1) Используя формулу $(u + v)' = u' + v'$, получим $y' = (4x - 3)' = (4x)' - (3)' = 4 \cdot 1 - 0 = 4$.

2) Используя формулу производной произведения, имеем $f'(x) = ((3x - 1)(4 - 5x))' = (3x - 1)'(4 - 5x) + (3x - 1)(4 - 5x)' = 3(4 - 5x) + (3x - 1) \cdot (-5) = 17 - 30x$.

Способ 2

$f(x) = (3x - 1)(4 - 5x) = 12x - 4 - 15x^2 + 5x = 17x - 15x^2 - 4$, тогда $f'(x) = (17x - 15x^2 - 4)' = 17 - 15 \cdot 2x - 0 = 17 - 30x$.

3) Используя формулу производной дроби, имеем

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1 - 2x}{1 + 2x} \right)' = \frac{(1 - 2x)'(1 + 2x) - (1 - 2x)(1 + 2x)'}{(1 + 2x)^2} = \\ &= \frac{-2(1 + 2x) - (1 - 2x) \cdot 2}{(1 + 2x)^2} = \frac{-2 - 4x - 2 + 4x}{(1 + 2x)^2} = \\ &= -\frac{4}{(1 + 2x)^2}. \end{aligned}$$

4) Применяя формулы производных дроби и квадратного корня, имеем

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sqrt{x})'(x - 1) - \sqrt{x} \cdot (x - 1)'}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x - 1) - \sqrt{x} \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{x - 1 - 2x}{2\sqrt{x}(x - 1)^2} = \\ &= -\frac{x + 1}{2\sqrt{x}(x - 1)^2}. \end{aligned}$$

Ответ: 1) 4; 2) $17 - 30x$; 3) $-\frac{4}{(1 + 2x)^2}$;

4) $-\frac{x + 1}{2\sqrt{x}(x - 1)^2}$.

Пример 4. Найти значение производной функции в точке x_0 , если: 1) $y = (x^2 - 5x + 6)^4$, $x_0 = 1$;

2) $y = \frac{1}{(x^2 - 3)^3}$, $x_0 = -2$; 3) $y = \sqrt{x^4 - 3x}$, $x_0 = 2$;

4) $y = (x^2 + 1)\sqrt{2x^2 - 7}$, $x_0 = 2$.

Решение

1) Применяя формулу производной степенной функции для сложной функции, имеем $y' = 4(x^2 - 5x + 6)^3 \cdot (x^2 - 5x + 6)' = 4(x^2 - 5x + 6)^3(2x - 5)$, тогда $y'(x_0) = y'(1) = 4 \cdot (1 - 5 + 6)^3 \cdot (2 - 5) = 4 \cdot 2^3 \cdot (-3) = -96$.

2) Представим данную функцию в виде степени с отрицательным показателем:

$$y = (x^2 - 3)^{-3}, \text{ тогда } y' = ((x^2 - 3)^{-3})' = -3(x^2 - 3)^{-4} \cdot (x^2 - 3)' = -3(x^2 - 3)^{-4} \cdot 2x = -\frac{6x}{(x^2 - 3)^4}; y'(-2) = \frac{12}{1^4} = 12.$$

3) Заменим квадратный корень дробным показателем: $y = (x^4 - 3x)^{1/2}$, тогда

$$y' = \frac{1}{2}(x^4 - 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^4 - 3x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x^4 - 3x)^{1/2}} \cdot (4x^3 - 3) = \frac{4x^3 - 3}{2\sqrt{x^4 - 3x}};$$

$$y'(2) = \frac{4 \cdot 8 - 3}{2\sqrt{16 - 6}} = \frac{29}{2\sqrt{10}}.$$

4) По формуле производной произведения, квадратного корня (для случая сложной функции), имеем

$$y' = (x^2 + 1)' \cdot \sqrt{2x^2 - 7} + (x^2 + 1) \cdot \frac{(2x^2 - 7)'}{2\sqrt{2x^2 - 7}} =$$

$$= 2x\sqrt{2x^2 - 7} + \frac{(x^2 + 1)4x}{2\sqrt{2x^2 - 7}} =$$

$$= \frac{2x\sqrt{2x^2 - 7} \cdot \sqrt{2x^2 - 7} + 2x(x^2 + 1)}{\sqrt{2x^2 - 7}} =$$

$$= \frac{2x(2x^2 - 7) + 2x(x^2 + 1)}{\sqrt{2x^2 - 7}} = \frac{2x(3x^2 - 6)}{\sqrt{2x^2 - 7}} =$$

$$= \frac{6x(x^2 - 2)}{\sqrt{2x^2 - 7}}.$$

Тогда $y'(2) = \frac{6 \cdot 2 \cdot 2}{\sqrt{2 \cdot 4 - 7}} = 24.$

Ответ: 1) -96; 2) 12; 3) $\frac{29}{2\sqrt{10}}$; 4) 24.

Пример 5. Вычислить значение производной данной функции в точке x_0 , если:

1) $f(x) = 3 \sin x + 2, x_0 = \pi;$

2) $f(x) = \cos x + 3 \operatorname{ctg} x, x_0 = \frac{\pi}{2};$

3) $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \frac{x^2}{\pi} + x \sin \frac{\pi}{6}, x_0 = \frac{\pi}{6};$

4) $f(x) = \operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{8} \right), x_0 = \frac{\pi}{16}.$

Решение

1) $f'(x) = (3 \sin x + 2)' = 3 \cos x;$

$f'(x_0) = f'(\pi) = 3 \cos \pi = -3;$

2) $f'(x) = (\cos x + 3 \operatorname{ctg} x)' = -\sin x - \frac{3}{\sin^2 x};$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} - \frac{3}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} = -1 - \frac{3}{1} = -4;$

3) $f'(x) = \sqrt{3} \cos x + \frac{2x}{\pi} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} \cos x + \frac{2x}{\pi} + \frac{1}{2};$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{3};$

$$4) f'(x) = \left(\operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{8} \right) \right)' = \frac{\left(2x + \frac{\pi}{8} \right)'}{\cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{8} \right)} =$$

$$= \frac{2}{\cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{8} \right)};$$

$$f'(x_0) = f' \left(\frac{\pi}{16} \right) = \frac{2}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \right)} = \frac{2}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4.$$

Ответ: 1) $3\cos x$; 2) -4 ; 3) $2\frac{1}{3}$; 4) 4.

3. Уравнение касательной к графику функции

Пример 6. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение

Уравнение касательной к графику данной функции в точке $(x_0; y_0)$ имеет вид $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

1) Найдем $y_0 = y(x_0) = y(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 = -2$.

2) Найдем производную $y' = (x^2 - 3x)' = 2x - 3$.

3) Найдем $y'(x_0) = y'(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$.

Тогда уравнение касательной примет вид $y - (-2) = -1 \cdot (x - 1)$ или $y = -x - 1$.

Ответ: $y = -x - 1$.

Пример 7. Составить уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = -x^2 + 4$ параллельно прямой $y = -2x + 6$.

Решение

Так как касательная параллельна прямой $y = -2x + 6$, то ее угловой коэффициент $k = -2$. С другой стороны, $k = f'(x_0)$. Абсциссу точки касания x_0 находим из условия $f'(x_0) = -2$. Так как $f'(x) = (-x^2 + 4)' = -2x$, то $-2x_0 = -2$, откуда $x_0 = 1$. Тогда уравнение

касательной к графику функции $f(x)$ в его точке с абсциссой x_0 примет вид $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, где $x_0 = 1$, $y_0 = -1 + 4 = 3$, тогда $y - 3 = -2(x - 1)$, откуда $y = -2x + 5$.

Ответ: $y = -2x + 5$.

Пример 8. Найти координаты точек касания, в которых касательные к графику функции $y = \frac{2(x-1)}{x+1}$ имеют угловой коэффициент, равный 4.

Решение

Известно, что угловой коэффициент касательной к графику функции в точке графика с абсциссой x_0 равен значению производной функции в точке x_0 .

Данную функцию запишем в виде $y = \frac{2x-2}{x+1}$ или

$y = 2 - \frac{4}{x+1}$, тогда $y' = \frac{4}{(x+1)^2}$. Далее имеем $y' = 4$

или $\frac{4}{(x+1)^2} = 4$, т. е. $(x+1)^2 = 1$, откуда имеем $x = 0$

или $x = -2$. Если $x = 0$, то $y = -2$; если $x = -2$, то $y = 6$. Таким образом, имеются две точки касания, удовлетворяющие условию задачи.

Ответ: $(0; -2)$ и $(-2; 6)$.

Пример 9. Составить уравнение касательной к графику функции $y = -3x^2 + 6x + 1$ в точке пересечения этого графика с осью ординат.

Решение

Угловой коэффициент касательной, проведенной к заданной параболе в точке ее пересечения с осью ординат, т. е. в точке с абсциссой $x_0 = 0$, равен значению производной квадратичной функции в точке 0.

Так как $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$, то $f'(x) = -6x + 6$, откуда $f'(0) = 6$, тогда уравнение касательной примет вид $y - y(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$ или $y - 1 = 6(x - 0)$, откуда $y = 6x + 1$.

Ответ: $y = 6x + 1$.

Пример 10. При каких значениях a прямая $y = ax - 5$ касается кривой $y = 3x^2 - 4x - 2$?

Решение

Для того, чтобы прямая $y = ax - 5$ касалась кривой $y = 3x^2 - 4x - 2$ в точке с абсциссой x_0 , необходимо и достаточно, чтобы значения обеих функций при $x = x_0$ совпадали и значение a (угловой коэффициент прямой) было равно значению производной функции $y = 3x^2 - 4x - 2$ при $x = x_0$.

$y' = (3x^2 - 4x - 2)' = 6x - 4$, значит, искомые значения a должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} ax_0 - 5 = 3x_0^2 - 4x_0 - 2, \\ a = 6x_0 - 4, \end{cases} \quad \text{откуда, решая подстанов-$$

кой, находим $x_0 = -1$, $a = -10$ и $x_0 = 1$, $a = 2$.

Ответ: при $a = -10$ и $a = 2$.

4. Нахождение промежутков монотонности и точек экстремума функции

Пример 11. Доказать, что функция $y = 2x^5 + 4x^3 - 1$ возрастает на всей числовой прямой.

Решение

Найдем производную $y' = (2x^5 + 4x^3 - 1)' = 10x^4 + 12x^2$. Заметим, что $10x^4 + 12x^2 \geq 0$ при всех $x \in R$, а это и означает, что функция возрастает на всей числовой прямой.

Пример 12. Доказать, что функция $y = 4\cos x + \sin 3x - 8x$ убывает на всей числовой прямой.

Решение

Найдем производную данной функции:

$$y' = (4\cos x + \sin 3x - 8x)' = -4\sin x + 3\cos x - 8.$$

Заметим, что $y' < 0$, так как $-4\sin x \leq 4$; $3\cos x \leq 3$, тогда $-4\sin x + 3\cos x \leq 7$, значит, $-4\sin x + 3\cos x - 8 \leq -1$ и тем более меньше 0. Итак, $-4\sin x + 3\cos x - 8 < 0$ при всех $x \in R$, а это и означает, что функция убывает на всей числовой прямой.

Пример 13. Найти промежутки монотонности

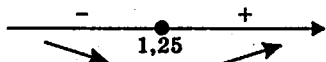
функции: 1) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$; 2) $f(x) = \frac{3}{x}$;

3) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$; 4) $f(x) = x^3 - 3x^2$;

5) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$.

Решение

1) Данная функция определена на всей числовой прямой. Найдем производную: $f'(x) = 4x - 5$. $f'(x) = 0$; $4x - 5 = 0$, откуда $x = 1,25$.



Так как $f'(x) < 0$ при $x < 1,25$ и $f'(x) > 0$ при $x > 1,25$, то на $(-\infty; 1,25]$ функция убывает, а на $[1,25; +\infty)$ возрастает (точка $x = 1,25$ включается в промежутки монотонности, так как в этой точке функция определена и непрерывна).

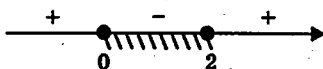
2) Область определения функции — вся числовая прямая, за исключением точки $x = 0$. Находим

$f'(x) = -\frac{3}{x^2}$. Очевидно, что $f'(x) < 0$ при всех $x \neq 0$,

т. е. данная функция убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; \infty)$.

3) Область определения данной функции задается неравенством $2x - x^2 \geq 0$ или $x^2 - 2x \leq 0$.

Квадратное уравнение $x^2 - 2x = 0$ имеет корни $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.



Неравенство $x^2 - 2x \leq 0$ справедливо при всех действительных значениях x в промежутке $[0; 2]$.

Следовательно, функция $y = 2x - x^2$ определена в промежутке $[0; 2]$. Найдем производную данной функции (для случая сложной функции):

$$f'(x) = \frac{(2x - x^2)'}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

Так как $\sqrt{2x - x^2} > 0$, то $f'(x) > 0$, если $1 - x > 0$, т. е. $x < 1$. Учитывая область определения функции $[0; 2]$, имеем $0 \leq x < 1$.

Заметим, что знаменатель $\sqrt{2x - x^2} > 0$, но при $x = 0$ и $x = 2$ знаменатель обращается в нуль, значит, x может принимать лишь значения $0 < x < 1$. Следовательно, на промежутке $[0; 1]$ функция $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ возрастает.

В интервале убывания функции $f'(x) < 0$, т. е. $1 - x < 0$, откуда $x > 1$. Кроме того, $0 < x < 2$, тогда $1 < x < 2$. Значит, функция $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ убывает на промежутке $[1; 2]$.

4) Данная функция определена на всей числовой прямой, так как f — многочлен.

Найдем производную $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f'(x) = 0$ или $3x^2 - 6x = 0$, $x^2 - 2x = 0$, $x(x - 2) = 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.



Так как $f'(x) > 0$ на $(-\infty; 0)$ и на $(2; +\infty)$ и $f'(x) < 0$ на $(0; 2)$, то на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$ функция возрастает, а на промежутке $[0; 2]$ убывает.

5) Заметим, что данная функция всюду непрерывна, кроме точки $x = 0$.

Найдем производную функции

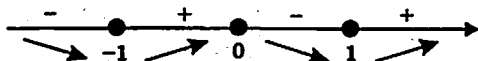
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^4 + 1}{x^2} \right)' = \frac{(x^4 + 1)' \cdot x^2 - (x^4 + 1) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \\ &= \frac{4x^3 \cdot x^2 - (x^4 + 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^5 - 2x}{x^4} = \\ &= \frac{2x(x^4 - 1)}{x^4} = \frac{2(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{x^3}; \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$, $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$, откуда $x = 1$, $x = -1$.

Кроме того, $x^2 + 1 > 0$ при всех $x \neq 0$.

Точка $x = 0$ — это точка разрыва функции.

Отметим точки -1 , 0 и 1 на числовой прямой и расставим знаки производной на полученных промежутках:



Следовательно, функция убывает на $(-\infty; -1]$ и на $(0; 1]$; возрастает на $[-1; 0]$ и на $[1; +\infty)$.

Ответ: 1) убывает на $(-\infty; 1,25]$; возрастает на $[1,25; +\infty)$;

2) убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$;

3) возрастает на $[0; 1]$, убывает на $[1; 2]$;

4) возрастает на $(-\infty; 0]$ и на $[2; +\infty)$; убывает на $[0; 2]$;

5) убывает на $(-\infty; -1]$ и на $(0; 1]$; возрастает на $[-1; 0]$ и на $[1; +\infty)$.

Пример 14. Найти точки экстремума функции

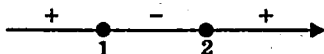
$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8.$$

Решение

Найдем производную данной функции:

$$y' = (2x^3 - 9x^2 + 12x - 8)' = 6x^2 - 18x + 12.$$

Приравняв найденную производную нулю, решим уравнение $6x^2 - 18x + 12 = 0$ или $x^2 - 3x + 2 = 0$, откуда $x = 1$ и $x = 2$ — это две стационарные точки данной функции. Отметим найденные точки на числовой прямой и укажем знаки производной слева и справа от стационарных точек.



Заметим, что в стационарных точках данная функция непрерывна, поэтому эти точки включаем в промежутки монотонности.

Так как производная $y'(x)$ при переходе через стационарную точку $x = 1$ меняет знак с плюса на минус, то $x = 1$ — точка максимума функции. Аналогично $x = 2$ — точка минимума функции. В точке максимума $x = 1$ имеем $y(1) = -3$; в точке минимума $x = 2$ имеем $y(2) = -4$.

Ответ: $x = 1$ — точка максимума, $y_{\max} = -3$;

$x = 2$ — точка минимума, $y_{\min} = -4$.

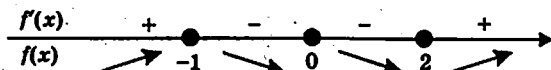
Пример 15. Найти промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции $f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 13$.

Решение

Данная функция определена при всех $x \in R$, так как $f(x)$ — многочлен. Найдем производную функции

$f'(x) = 60x^4 - 60x^3 - 120x^2$. Решив уравнение $f'(x) = 0$, найдем стационарные точки: $60x^4 - 60x^3 - 120x^2 = 0$ или $x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$, $x^2(x^2 - x - 2) = 0$, $x^2(x - 2)(x + 1) = 0$, откуда $x = 0$, $x = 2$, $x = -1$. Следовательно, данная функция имеет три стационарные точки.

Отметим эти точки на числовой прямой и укажем знаки промежутков, учитывая, что в стационарных точках данная функция определена и непрерывна:



Функция возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[2; +\infty)$; убывает на $[-1; 0]$ и на $[0; 2]$. Так как при переходе через стационарную точку $x = -1$ производная меняет знак с $+$ на $-$, то $x = -1$ — точка максимума и $f(-1) = -12 - 15 + 40 + 13 = 26$; при переходе через стационарную точку $x = 0$ знак производной не меняется, значит, эта точка не является точкой экстремума.

Аналогично $x = 2$ — точка минимума и $f(2) = 384 - 240 - 320 + 13 = -163$.

Ответ: возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[2; +\infty)$; убывает на $[-1; 0]$ и на $[0; 2]$;

$x = -1$ — точка максимума; $f_{\max} = 26$;

$x = 2$ — точка минимума, $f_{\min} = -163$.

5. Построение графика функции

Пример 16. Построить график функции

$$y = x^3 - 3x^2 + 4.$$

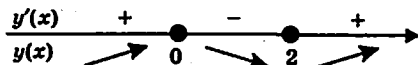
Решение

1. Найдем область определения функции: $D(y) = (-\infty; +\infty)$, так как y — многочлен.

2. Найдем производную: $y'(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)' = 3x^2 - 6x$.

3. Решая уравнение $3x^2 - 6x = 0$, находим стационарные точки: $3x(x - 2) = 0$, откуда $x = 0$ и $x = 2$.

4. Найдем промежутки монотонности функции:



при $x < 0$ $y'(x) > 0$, значит, на промежутке $(-\infty; 0]$ функция возрастает; при $0 < x < 2$ $y'(x) < 0$, значит,

на промежутке $[0; 2]$ функция убывает; при $x > 2$ $y'(x) > 0$, значит, на промежутке $[2; +\infty)$ функция возрастает.

5. Найдем точки экстремума и значения функции в этих точках.

Стационарная точка $x = 0$ является точкой максимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «+» на «-»; $y(0) = 4$.

Точка $x = 2$ — точка минимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «-» на «+»; $y(2) = 0$.

6. Найдем точки пересечения графика данной функции с осями координат:

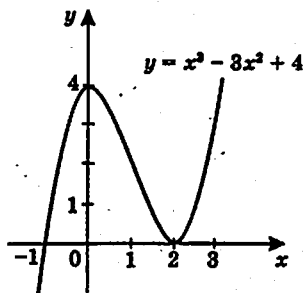
а) пересечение с осью OX : $y = 0$, $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$,
 $x^2(x - 2) - (x^2 - 4) = 0$, $(x - 2)(x^2 - x - 2) = 0$,
 $(x - 2)(x - 2)(x + 1) = 0$, откуда имеем две точки: $(2; 0)$ и $(-1; 0)$;

б) пересечение с осью OY : $x = 0$, $y = 4$, т. е. $(0; 4)$.

7. Дополнительные точки:

при $x = 1$ $y = 2$, при $x = 3$ $y = 4$.

8. На основании данных исследования строим график:



Пример 17. Построить график функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Решение

1. Область определения функции: $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

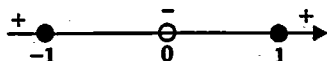
2. Данная функция нечетная, так как

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x). \text{ Поэтому сначала}$$

исследуем данную функцию и построим ее график при $x > 0$.

$$3. f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

4. Найдем стационарные и критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции. $x = 1$ и $x = -1$ — это стационарные точки.



Производная не существует в точке $x = 0$, но это не критическая точка, это точка разрыва функции.

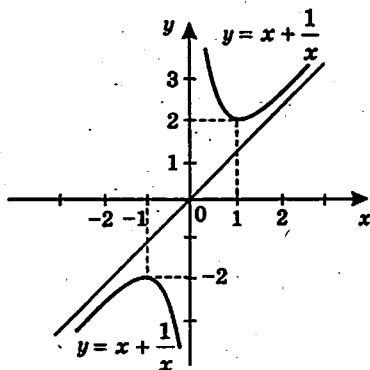
Так как мы рассматриваем случай, когда $x > 0$, то при $x > 1$ $f'(x) > 0$, следовательно, на промежутке $[1; +\infty)$ функция возрастает. На интервале $0 < x < 1$ производная $f'(x) < 0$, значит, на интервале $(0; 1]$ функция убывает. $x = 1$ — точка минимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «-» на «+». $f_{\min} = f(1) = 2$.

5. Дополнительные точки:

при $x = \frac{1}{2}$ $y = 2,5$,

при $x = 2$ $y = 2,5$.

6. Строим график.



6. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции

Пример 18. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ на отрезке $[-2; 1]$.

Решение

1) Имеем $y' = 6x^2 + 6x - 36$.

2) Производная существует при всех x , значит, критических точек у функции нет, а стационарные найдем из условия $y' = 0$. Имеем

$$6x^2 + 6x - 36 = 0; x^2 + x - 6 = 0; x_1 = -3, x_2 = 2.$$

Заметим, что $x_1 = -3 \notin [-2; 1]$ и $x_2 = 2 \notin [-2; 1]$.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения данная функция достигает на концах отрезка: $y(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3(-2)^2 - 36 \cdot (-2) = 68$ и $y(1) = 2 + 3 - 36 = -31$.

Итак, $y_{\text{наим.}} = y(1) = -31$; $y_{\text{наиб.}} = y(-2) = 68$.

Ответ: $y_{\text{наим.}} = -31$; $y_{\text{наиб.}} = 68$.

Пример 19. Найти наибольшее и наименьшее значения

функции $y = 2\cos x + x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение

$$1) y' = (2\cos x + x)' = -2\sin x + 1.$$

2) Производная существует в любой точке x , значит, критических точек нет, а стационарные найдем из условия $y' = 0$.

$$\text{Имеем } -2\sin x + 1 = 0; \sin x = \frac{1}{2},$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Из бесконечного числа стационарных точек надо выбрать те из них, которые принадлежат данному

отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Такая точка (как легко проверить)

всего одна: $x = \frac{\pi}{6}$ при $n = 0$.

3) Найдем значения функции в точках $x = \frac{\pi}{6}$,

$$x = -\frac{\pi}{2} \text{ и } x = \frac{\pi}{2}: y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6};$$

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ и } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Значит, } y_{\text{наим.}} = y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2},$$

$$y_{\text{наиб.}} = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Ответ: } y_{\text{наим.}} = -\frac{\pi}{2}, y_{\text{наиб.}} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}.$$

Пример 20. Число 50 записать в виде суммы двух положительных чисел, сумма кубов которых наименьшая.

Решение

Пусть x — I число, тогда II — $(50 - x)$, где $x > 0$. По условию задачи сумма кубов искомых чисел наименьшая, т. е. $x^3 + (50 - x)^3$ — наименьшая.

Задача свелась к нахождению такого значения x , при котором функция $f(x) = x^3 + (50 - x)^3$ принимает наименьшее значение на интервале $0 < x < 50$.

Найдем производную:

$$f'(x) = 3x^2 + 3(50 - x)^2 \cdot (50 - x)' = 3x^2 - 3(50 - x)^2.$$

Стационарные точки находим из уравнения

$$3x^2 - 3(50 - x)^2 = 0, x^2 - (50 - x)^2 = 0 \text{ или } (x - 50 + x)(x + 50 - x) = 0, 50(2x - 50) = 0, 2x = 50, \text{ откуда } x = 25 \in (0; 50).$$

25

При переходе через точку $x = 25$ производная меняет знак с «−» на «+», и поэтому $x = 25$ — точка минимума. Следовательно, наименьшее значение функции $f(x)$ достигается в стационарной точке $x = 25$ (это значение $f(25) = 25^3 + 25^3 = 31250$).

Итак, $x = 25$ — I число, тогда $50 - x = 50 - 25 = 25$ — II число. Значит, число 50 надо записать в виде $50 = 25 + 25$, тогда сумма кубов будет наименьшая.

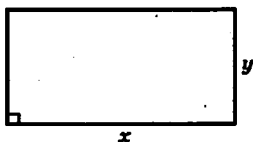
Ответ: $25 + 25$.

Пример 21. Из всех прямоугольников, площадь которых равна 9 см^2 , найти прямоугольник с наименьшим периметром.

Решение

Пусть x — длина, y — ширина прямоугольника, где $x > 0$, $y > 0$. Так как по условию $S = 9$,

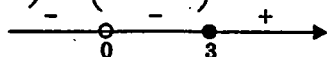
то имеем $xy = 9$, откуда $y = \frac{9}{x}$.



Тогда периметр $P = 2(x + y) = 2\left(x + \frac{9}{x}\right)$.

Рассмотрим функцию $P(x) = 2\left(x + \frac{9}{x}\right)$ при $x > 0$.

$$P'(x) = 2\left(1 - \frac{9}{x^2}\right) = 2\left(\frac{x^2 - 9}{x^2}\right), P'(x) = 0 \text{ при } x = 3.$$



При $0 < x < 3$, $P'(x) < 0$, а при $x > 3$, $P'(x) > 0$.

Значит, функция $P(x)$, непрерывная в точке $x = 3$, убывает при $0 < x \leq 3$ и возрастает при $x \geq 3$, следовательно, имеет наименьшее значение в стационарной точке $x = 3$.

Итак, $x = 3$ — длина прямоугольника, тогда

$$y = \frac{9}{x} = 3 \text{ — ширина прямоугольника и } P = 12 \text{ (см).}$$

Значит, прямоугольник будет иметь наименьший периметр, если его стороны будут равны по 3 см, т. е. прямоугольник будет квадратом.

Ответ: квадрат со стороной 3 см.

Пример 22. В правильной пирамиде $MABCD$ MO — высота пирамиды. Объем пирамиды

равен $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Найти

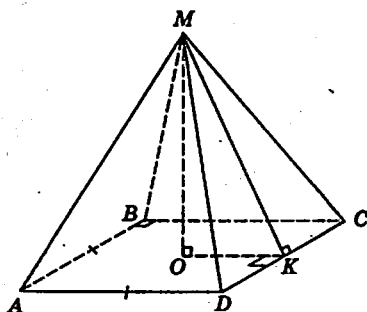
наименьшую площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение

Проведем апофему MK .

Пусть $OK = x$, где $x > 0$ — необходимое условие,

$$OM = y, \text{ тогда } V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot MO = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot OK)^2 \cdot y =$$



$= \frac{4}{3} x^2 y$. По условию задачи $V_{\text{пир.}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, тогда

$$\frac{4}{3} x^2 y = \frac{4\sqrt{2}}{3}, \quad x^2 y = \sqrt{2}, \quad \text{откуда } y = \frac{\sqrt{2}}{x^2}.$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} \cdot h, \quad \text{где } P_{\text{осн.}} = 4 AD = 8x, \quad h = MK, \quad \text{или}$$

$$MK = \sqrt{MO^2 + OK^2}, \quad \text{или } MK = h = \sqrt{y^2 + x^2}, \quad \text{поэто-}$$

$$\text{му } S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot 8x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 4x\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Так как } y = \frac{\sqrt{2}}{x^2}, \quad \text{то } S_{\text{бок}} = S(x) = 4x\sqrt{x^2 + \frac{2}{x^4}} \quad \text{или}$$

$$S(x) = 4\sqrt{x^4 + \frac{2}{x^2}}.$$

Рассмотрим непрерывную функцию

$$f(x) = x^4 + \frac{2}{x^2} \quad \text{при } x > 0.$$

$$\text{Найдем } f'(x) = 4x^3 - \frac{4}{x^3} = \frac{4}{x^3} (x^6 - 1); \quad f'(x) = 0$$

при $x = 1$. Заметим, что при $0 < x < 1$ $f'(x) < 0$; при $x > 1$ $f'(x) > 0$. Значит, функция f , непрерывная в точке 1, убывает при $0 < x \leq 1$ и возрастает при $x \geq 1$. Следовательно, функция f и $S_{\text{бок}} = 4\sqrt{f(x)}$ при $x = 1$ будут иметь наименьшие значения. При $x = 1$, $S_{\text{бок}} = 4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Задачи

Группа А

Вычислить:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right); \quad 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{x^3} - \frac{2}{x^7} \right);$$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{12}{x^{10}} - 1 \right)$; 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^5} + 8 \right)$;
 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(9 - \frac{4}{x^3} \right) \cdot \frac{11}{x^4}$; 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{19}{x^8} - 1 \right) \cdot \left(-\frac{2}{x^3} + 4 \right)$;
 7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x-1}$; 8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x-1}{5x+4}$.

Вычислить:

9. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 1)$; 10. $\lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{4x+1}{2x-4}$;
 11. $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+5}$; 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x+1}{x^2 - 2x - 1}$;
 13. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin \pi x}{x-1}$; 14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \pi x}{2x+1}$;
 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 - x}$; 16. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2 - 9}$.

Найти значение производной функции в точке x_0 :

17. $y = x^3 - 2x$, $x_0 = 1$; 18. $y = \frac{4}{x} - 3$, $x_0 = -2$;
 19. $y = \sqrt{x} - 9$, $x_0 = \frac{1}{4}$; 20. $y = 2 \operatorname{tg} x - 1$, $x_0 = -\frac{\pi}{4}$;
 21. $y = \frac{\cos x}{x}$, $x_0 = \pi$; 22. $y = x^2 \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
 23. $y = (4 - 5x)^7$, $x_0 = -2$;
 24. $y = \cos \left(\frac{\pi}{3} - 4x \right)$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$;
 25. $y = \operatorname{tg} \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$;
 26. $y = \sqrt{4 - 8x}$, $x_0 = 0$;
 27. $y = (2x + 1)^5$, $x_0 = -1$;
 28. $y = \operatorname{tg} 6x$, $x_0 = \frac{\pi}{24}$.

Найти тангенс угла между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью x :

29. $f(x) = x^5 - 3x$, $x_0 = 1$;

30. $f(x) = 2\sqrt{x} - 7$, $x_0 = \frac{1}{4}$;

31. $f(x) = \frac{4}{x} - 3$, $x_0 = -\frac{1}{2}$;

32. $f(x) = 11 - 2\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

33. $f(x) = \sqrt{16x + 21}$, $x_0 = \frac{1}{4}$;

34. $f(x) = \frac{18}{4x + 1}$, $x_0 = 0,5$.

Составить уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 , если:

35. $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$, $x_0 = -1$;

36. $f(x) = \frac{1}{x + 3}$, $x_0 = -2$;

37. $f(x) = \sqrt{2x - 3}$, $x_0 = 6$;

38. $f(x) = 2x - \cos 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Составить уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ с данным угловым коэффициентом k , если:

39. $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $k = 1$;

40. $f(x) = \frac{2}{3x - 1}$, $k = -\frac{3}{2}$;

41. $f(x) = \sqrt{3x - 2}$, $k = \frac{3}{2}$;

42. $f(x) = x + 2 \ln x$, $k = 3$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке:

43. $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 3$, $x \in [-3; 2]$;

$$44. f(x) = \frac{1}{x} + \ln x, x \in \left[\frac{1}{e}; e \right];$$

$$45. f(x) = x - \sqrt{x}, x \in [0,01; 2,25];$$

$$46. f(x) = 4x - 3 \operatorname{tg} x, x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right].$$

Решить задачи:

47. Число 8 разбить на 2 неотрицательных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

48. Найти такое неотрицательное число, чтобы разность между его кубом и утроенным этим числом была наименьшей.

49. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 12 см. Какими должны быть катеты, чтобы площадь квадрата, построенного на его гипотенузе, была наименьшей?

50. На окружности радиуса R дана точка A . Провести хорду BC параллельно касательной в точке A так, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей.

Группа Б

Вычислить:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 9}{x^2 - 1};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 2}{x^2 + 5x + 1};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x}{4x^2 + x + 1};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x^2 + 3}{2x^2 - 3x};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 9}{x^4 + 19};$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x^3}{x^4 + x - 1}.$$

Вычислить:

$$7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3};$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 4}{2x^2 + 7x - 4};$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{x^3 + 27};$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{1 - x^3};$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{ctg} x};$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin 5x + \sin 3x}.$$

Найти значение производной функции в точке x_0 :

13. $f(x) = -x^3 + x^2$, $x_0 = 0$;

14. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 3$;

15. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} + 1$, $x_0 = 1$;

16. $f(x) = (1+x)^4 (2x-1)^5$, $x_0 = 1$;

17. $f(x) = (5x-4)^6 \sqrt{3x-2}$;

18. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, $x_0 = 1$;

19. $f(x) = e^{3x-2} - \ln(3x-1)$, $x_0 = \frac{2}{3}$;

20. $f(x) = \frac{x}{1+e^x}$, $x_0 = 0$.

Составить уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 :

21. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = -2$; 22. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$;

23. $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$, $x_0 = 0$;

24. $f(x) = \sin 2x - \ln(x+1)$;

25. $f(x) = x^3 + 3x$, $x_0 = 3$; 26. $f(x) = x + \ln x$, $x_0 = e$.

27. Найти точки графика функции $f(x) = \sqrt{3x+1}$, в которых касательная к этому графику параллельна

прямой $y = \frac{3}{4}x$.

28. Найти уравнения касательных к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$, параллельных прямой $y = 6x$.

29. Найти ординату точки пересечения с осью OY касательной к графику функции $y = x^3 - 5$ в точке $(2; 3)$.

30. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \frac{x-4}{x-2}$ в точке пересечения его с осью абсцисс.

Найти промежутки монотонности функции:

31. $y = x^3 + 2x$; 32. $y = 60 + 45x - 3x^2 - x^3$;

33. $y = x^4 - 2x^2 - 3$; 34. $y = \frac{2}{x} + 1$;

35. $y = \frac{1 - 2x}{3 + 2x}$; 36. $y = \sqrt{1 - 2x}$.

Найти точки экстремума функции:

37. $y = x^3 - 7x^2 - 5x + 11$;

38. $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 13$;

39. $y = x - 2\sqrt{x - 2}$; 40. $y = x + \frac{4}{x}$.

Доказать, что данная функция возрастает:

41. $y = x^5 + 3x^3 + 7x + 4$; 42. $y = x + x^3 + \sin x$;

43. $y = 7x - \cos 2x$ на $(-\infty; +\infty)$;

44. $y = \frac{4x}{4x + 1}$ на $\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

Доказать, что данная функция убывает:

45. $y = \cos 3x + 2x$; 46. $y = \sin 3x - 4x$;

47. $y = -2x^5 - 7x^3 - x + 8$ на $(-\infty; +\infty)$;

48. $y = \frac{3x + 7}{x + 2}$, на $(-2; +\infty)$.

Построить график функции:

49. $y = -x^3 + 3x + 2$; 50. $y = x^4 - 2x^2 + 2$;

51. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3$; 52. $y = \frac{9}{x} - x$;

53. $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$; 54. $y = 3x^2 - 6x + 5$ на $[0; 3]$;

55. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ на $[-2; 4]$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

56. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ на $[-3; 2]$;

57. $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$, $[0; \pi]$;

58. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ на $[-4; 0]$;

59. $f(x) = 2\cos x + \sin 2x$, $[0, \pi]$;

$$60. f(x) = \sin x + 2\sqrt{2} \cos x, \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Задачи на наибольшее и наименьшее значения функций:

61. Сумма трех чисел равна 24. Отношение двух из них равно 1 : 3. Определить третье число так, чтобы произведение трех этих чисел было наибольшим.

62. Сумма двух чисел равна 84, а сумма квадрата одного из них с утроенным квадратом другого имеет наименьшее значение. Найти меньшее из этих двух чисел.

63. Найти косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, имеющего наибольшую площадь при данной постоянной длине медианы, проведенной к его боковой стороне.

64. В полукруг радиуса R вписан прямоугольник наибольшего периметра. Во сколько раз одна сторона прямоугольника больше другой?

65. Меньшее основание и боковые стороны равнобедренной трапеции равны между собой. Определить в градусах угол при большем основании трапеции так, чтобы она имела наибольшую площадь.

66. Из всех прямоугольников с периметром 48 см выделен тот, у которого диагональ имеет наименьшую длину. Найти квадрат длины диагонали этого прямоугольника.

67. Периметр осевого сечения конуса равен 56 см. Каким должен быть радиус основания, чтобы при этом объем конуса был наибольшим?

68. Открытый кузов грузового автомобиля имеет вид прямоугольного параллелепипеда. Отношение

длины кузова к ширине равно $\frac{5}{2}$, а площадь поверхности кузова 30 м^2 . Какова должна быть длина кузова, чтобы объем его был наибольшим?

69. В шар радиуса 6 см вписан конус наибольшего объема. Какова высота этого конуса?

70. Объем правильной треугольной призмы равен $6,75 \text{ см}^3$. Какой должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

Глава 8

ИНТЕГРАЛ

§ 28. Первообразная. Правила нахождения первообразных

*Таблица первообразных элементарных
и сложных функций*

Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$	Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$
C , где $C - const$	Cx	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$
$x^p, p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$ax + b, a \neq 0$	$\frac{1}{2} ax^2 + bx + C$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$(ax + b)^p, a \neq 0, p \neq -1$	$\frac{(ax + b)^{p+1}}{a(p+1)} + C$	$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
e^x	e^x	$\cos x$	$\sin x + C$
$e^{ax+b}, a \neq 0$	$\frac{1}{a} e^{ax+b} + C$	$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\operatorname{tg} x$	$-\ln \cos x + C$
$a^{kx+b}, a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^{kx+b}}{k \ln a} + C$	$\operatorname{ctg} x$	$\ln \sin x + C$
$\ln x, x > 0$	$x \ln x - x + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\log_a x, x > 0, a > 0$	$x \log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Функция $y = F(x)$ называется *первообразной* для функции $y = f(x)$ на некотором промежутке, если для

всех x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Например, функция $F(x) = x^2$ является первообразной для функции $y = 2x$, так как $(x^2)' = 2x$; функция $F(x) = \sin x$ — первообразная для функции $y = \cos x$, так как $(\sin x)' = \cos x$; функция $F(x) = \sqrt{x}$ — первообразная для функции $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на $(0; +\infty)$, так как для

всех $x > 0$ выполняется равенство $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, то все первообразные функции $f(x)$ можно представить в виде $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Графики всех первообразных для данной функции $f(x)$ представляют собой семейство интегральных кривых.

Правила нахождения первообразных

1. Если F — первообразная для f , а G — первообразная для g , то $F + G$ есть первообразная для $f + g$, т. е. $(F + G)' = f + g$.

2. Если F — первообразная для f , а $k = \text{const}$, то kF есть первообразная для kf , т. е. $(kF)' = kf$.

3. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а k и b — постоянные, $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная

для функции $f(kx + b)$, т. е. $\left(\frac{1}{k}F(kx + b)\right)' = f(kx + b)$.

Пример 1. Доказать, что функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если:

1) $F(x) = 2x^3$, $f(x) = 6x^2$, $(-\infty; \infty)$;

2) $F(x) = \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$, $f(x) = 2\sqrt{x}$, $[0; \infty]$;

$$3) F(x) = \operatorname{tg} x, f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$4) F(x) = 0,5x^{-4}, f(x) = -2x^{-5}, (-\infty; 0).$$

$$5) F(x) = \sin 4x, f(x) = 4\cos 4x, (-\infty; \infty).$$

$$6) F(x) = \log_3 x, f(x) = \frac{1}{x \ln 3}, (0; \infty).$$

Решение

1) Так как $F(x) = 2x^3$, то по определению $F'(x) = (2x^3)' = 6x^2 = f(x)$ для всех $x \in R$, ч. т. д.

$$2) \text{ Так как } F(x) = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}, \text{ то}$$

$$F'(x) = \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{0,5} = 2x^{0,5} = 2\sqrt{x} = f(x)$$

для всех $x \in [0; +\infty)$ для всех ч. т. д.

$$3) \text{ Так как, } F(x) = \operatorname{tg} x, \text{ то } F'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = f(x) \text{ для всех } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$4) \text{ Так как } F(x) = 0,5x^{-4}, \text{ то } F'(x) = (0,5x^{-4})' = -4 \cdot 0,5x^{-5} = -2x^{-5} = f(x) \text{ для всех } x \in (-\infty; 0), \text{ ч. т. д.}$$

$$5) \text{ Так как } F(x) = \sin 4x, \text{ то } F'(x) = (\sin 4x)' = 4 \cos 4x = f(x) \text{ для всех } x \in R, \text{ ч. т. д.}$$

$$6) \text{ Так как } F(x) = \log_3 x = \frac{1}{\ln 3} \cdot \ln x, \text{ то}$$

$$F'(x) = \left(\frac{1}{\ln 3} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{\ln 3} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln 3} = f(x) \text{ для всех } x \in (0; \infty), \text{ ч. т. д.}$$

Пример 2. Для функции $f(x) = x^2$ найти первообразную, график которой проходит через точку $A(2; 1)$.

Решение

Все первообразные функции $f(x) = x^2$ имеют вид

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C, \text{ где } C - \text{ постоянная. Так как график}$$

первообразной проходит через точку А (2; 1), то $x = 2$, $F(x) = 1$, тогда имеем $1 = \frac{8}{3} + C$, откуда $C = -\frac{5}{3}$. Следовательно, $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$.

Пример 3. Для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ найти первообраз-

ную, график которой проходит через точку М (1; -2).

Решение

Всякая первообразная данной функции $f(x)$ имеет вид $F(x) = 2\sqrt{x} + C$ (1), где $C - const$. Координаты точки М (1; -2) графика искомой первообразной согласно условию должны удовлетворять уравнению (1): $2\sqrt{1} + C = -2$, откуда $C = -4$.

Следовательно, $F(x) = 2\sqrt{x} - 4$ есть искомая первообразная.

Пример 4. Найти одну из первообразных функции $f(x) = x^3 - 3 \sin 2x$.

Решение

Используя правила интегрирования и таблицу первообразных для функции x^p при $p = 3$ и для $\sin 2x$ (для случая сложной функции), находим одну из первообразных данной функции:

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \text{ или}$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2} \cos 2x.$$

Пример 5. Найти общий вид первообразных для функции:

$$1) y = x^5 - \frac{1}{x^3};$$

$$2) y = \cos(4x - 3);$$

$$3) y = \frac{2}{\cos^2 2x};$$

$$4) y = \frac{1}{2} \cos 6x + 3 \sin 3x.$$

Решение

1) Так как для функции x^5 одна из первообразных есть $\frac{1}{6}x^6$, а для функции $\frac{1}{x^3}$ одной из первообразных является функция $-\frac{1}{2x^2}$, то по правилу 1 найдем, что для функции $x^5 - \frac{1}{x^3}$ одной из первообразных будет $F_1(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2x^2}$, а общий вид первообразной имеет вид $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2x^2} + C$, где $C = \text{const.}$

2) Одна из первообразных $f(x)$ есть функция $F_1(x) = \frac{1}{4}\sin(4x - 3)$, а множество всех первообразных данной функции имеет вид

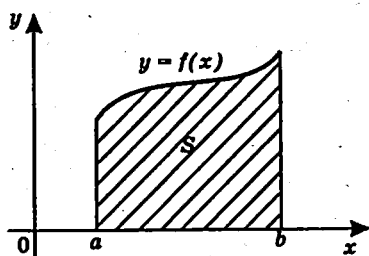
$$F(x) = \frac{1}{4}\sin(4x - 3) + C.$$

$$3) F(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x + C = \operatorname{tg} 2x + C.$$

$$\begin{aligned} 4) F(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \sin 6x + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cos 3x + C = \\ &= \frac{1}{12} \sin 6x - \cos 3x + C. \end{aligned}$$

§ 29. Площадь криволинейной трапеции. Вычисление интегралов

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком данной функции, положительным направлением оси OX и прямыми $x = a$ и $x = b$.



Площадь криволинейной трапеции вычисляют по формуле $S = F(b) - F(a)$ или

$S = F(x) \Big|_a^b$, где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

Разность $F(b) - F(a)$ называют интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ — формула Ньютона–Лейбница.}$$

Из двух последних формул имеем $S = \int_a^b f(x) dx$.

Числа a и b называются *пределами интегрирования*, причем a — нижний, b — верхний предел.

Знак $\int$ называется знаком интеграла, функция f — подынтегральной функцией, x — переменной интегрирования.

Заметим, что верхний предел интегрирования не обязательно больше нижнего предела; может быть $a > b$, $a = b$.

Формула Ньютона–Лейбница верна для любой непрерывной функции на отрезке $[a; b]$.

Свойства:

$$1) \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$3) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \text{ т. е. интеграл от суммы функций равен сумме интегралов;}$$

$$4) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \text{ т. е. постоянный множи-}$$

тель можно вынести за знак интеграла;

$$5) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ где } a < c < b.$$

Пример 6. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Решение

По формуле $S = \int_a^b f(x) dx$

находим $S = \int_1^2 x^2 dx$. Вычис-

лим этот интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

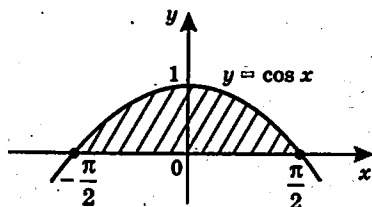
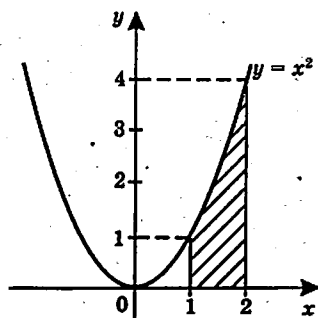
Заметим, что одной из первообразных функции $f(x) = x^2$ является $F(x) = \frac{1}{3} x^3$.

$$\begin{aligned} \text{Поэтому } S &= \int_1^2 x^2 dx = F(2) - F(1) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (2^3 - 1) = \frac{7}{3} \text{ (кв. единиц).} \end{aligned}$$

Пример 7. Найти площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке.

Решение

Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$, тогда



$$S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \\ = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 = 2. \\ S = 2 \text{ (кв. ед.)}$$

Пример 8. Вычислить интеграл:

$$1) \int_{-1}^2 x^2 dx; 2) \int_0^1 4x^3 dx; 3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx;$$

$$4) \int_0^{\pi/4} \cos \frac{x}{3} dx; 5) \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{2dx}{\sin^2 x};$$

$$6) \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx;$$

$$7) \int_1^4 \left(3x - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx; 8) \int_0^1 e^{4x} dx; 9) \int_1^2 \frac{6}{3x-1} dx;$$

$$10) \int_0^2 (2x^2 - 5x + 2) dx; 11) \int_3^7 \frac{3}{\sqrt{2x-5}} dx;$$

$$12) \int_0^{\pi} (\sin^4 x - \cos^4 x) dx;$$

$$13) \int_0^8 x^2 \sqrt{x+1} dx; 14) \int_4^5 \frac{x^2 - 6x + 10}{x-3} dx.$$

Решение

По формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^2 = \frac{1}{3} \cdot (2^3 - (-1)^3) = \frac{1}{3} \cdot (8 + 1) = 3;$$

$$2) \int_0^1 4x^3 dx = 4 \int_0^1 x^3 dx = 4 \cdot \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = x^4 \Big|_0^1 = 1^4 - 0 = 1;$$

$$\begin{aligned}
 3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx &= -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\
 &= -\frac{1}{2} (\cos 2\pi - \cos(-2\pi)) = \\
 &= -\frac{1}{2} (\cos 2\pi - \cos 2\pi) = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \int_0^{\pi/4} \cos \frac{x}{3} dx &= 3 \sin \frac{x}{3} \Big|_0^{\pi/4} = \\
 &= 3 \left(\sin \frac{\pi}{12} - \sin 0 \right) = 3 \sin \frac{\pi}{12}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{2dx}{\sin^2 x} &= 2 \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x} = 2(-\operatorname{ctg} x) \Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} = \\
 &= -2 \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = -2 \cdot 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx &= \\
 &= \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi/4} = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{1}{2} \cdot (1 - 0) = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \int_1^4 \left(3x - \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx &= \left(3 \cdot \frac{x^2}{2} - 4 \cdot 2\sqrt{x} \right) \Big|_1^4 = \\
 &= \left(\frac{3}{2} x^2 - 8\sqrt{x} \right) \Big|_1^4 = \frac{3}{2} \cdot 4^2 - 8\sqrt{4} - \left(\frac{3}{2} \cdot 1^2 - 8\sqrt{1} \right) = \\
 &= 24 - 16 - \left(\frac{3}{2} - 8 \right) = 16 - \frac{3}{2} = 14,5;
 \end{aligned}$$

$$8) \int_0^1 e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} (e^4 - e^0) = \frac{1}{4} (e^4 - 1);$$

$$9) \int_1^2 \frac{6}{3x-1} dx = 6 \int_1^2 \frac{dx}{3x-1} = 6 \cdot \frac{1}{3} \ln|3x-1| \Big|_1^2 = \\ = 2(\ln 5 - \ln 2) = 2 \ln 2,5;$$

$$10) \int_0^2 (2x^2 - 5x + 2) dx = \left(2 \cdot \frac{x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^2 = \\ = \frac{2}{3} \cdot 2^3 - \frac{5}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = \frac{16}{3} - 10 + 4 = \frac{16}{3} - 6 = -\frac{2}{3};$$

$$11) \int_3^7 \frac{3}{\sqrt{2x-5}} dx = 3 \int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{2x-5}} = \\ = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2x-5} \Big|_3^7 = 3\sqrt{2x-5} \Big|_3^7 = \\ = 3(\sqrt{2 \cdot 7 - 5} - \sqrt{2 \cdot 3 - 5}) = 3 \cdot (3 - 1) = 6;$$

$$12) \int_0^\pi (\sin^4 x - \cos^4 x) dx = \\ = \int_0^\pi (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \\ = \int_0^\pi (\sin^2 x - \cos^2 x) dx = - \int_0^\pi \cos 2x dx = \\ = -\frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^\pi = -\frac{1}{2} (\sin 2\pi - \sin 0) = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0;$$

$$13) \int_0^8 x^2 \sqrt{x+1} dx = \int_0^8 (x^2 - 1 + 1) \sqrt{x+1} dx = \\ = \int_0^8 ((x^2 - 1) \sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^8 \left((x-1)\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{x+1} \right) dx = \\
&= \int_0^8 \left((x+1-2)\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{x+1} \right) dx = \\
&= \int_0^8 \left(\sqrt{(x+1)^5} - 2\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{x+1} \right) dx = \\
&= \int_0^8 \left((x+1)^{5/2} - 2(x+1)^{3/2} + (x+1)^{1/2} \right) dx = \\
&= \left(\frac{2}{7}(x+1)^{7/2} - \frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \right) \Bigg|_0^8 = \\
&= \frac{2}{7} \cdot 9^{7/2} - \frac{4}{5} \cdot 9^{5/2} + \frac{2}{3} \cdot 9^{3/2} - \left(\frac{2}{7} - \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \right) = \\
&= \frac{2}{7} \cdot 3^7 - \frac{4}{5} \cdot 3^5 + \frac{2}{3} \cdot 3^3 - \left(\frac{30 - 84 + 70}{7 \cdot 5 \cdot 3} \right) = \\
&= 2 \cdot 3^3 \cdot \left(\frac{3^4}{7} - \frac{2}{5} \cdot 3^2 + \frac{1}{3} \right) - \frac{16}{7 \cdot 5 \cdot 3} = \\
&= 54 \cdot \left(\frac{81}{7} - \frac{18}{5} + \frac{1}{3} \right) - \frac{16}{7 \cdot 5 \cdot 3} = \\
&= 54 \cdot \left(\frac{81 \cdot 15}{5 \cdot 3 \cdot 7} - \frac{81 \cdot 21}{5 \cdot 3 \cdot 7} + \frac{35}{5 \cdot 3 \cdot 7} \right) - \frac{16}{7 \cdot 5 \cdot 3} = \\
&= \frac{872 \cdot 54}{5 \cdot 3 \cdot 7} - \frac{16}{7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{47072}{105} = 448 \frac{32}{105};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
14) \int_4^5 \frac{x^2 - 6x + 10}{x-3} dx &= \int_4^5 \frac{(x-3)^2 + 1}{x-3} dx = \\
&= \int_4^5 \left((x-3) + \frac{1}{x-3} \right) dx = \int_4^5 (x-3) dx + \int_4^5 \frac{dx}{x-3} =
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_4^5 + \ln|x-3| \Big|_4^5 = \frac{25}{2} - 15 - 8 + 12 + \ln 2 -$$

$$- \ln 1 = 12,5 - 11 + \ln 2 = 1,5 + \ln 2.$$

§ 30. Вычисление площадей с помощью интеграла

1. Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, то $S = \int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ (рис. 1).

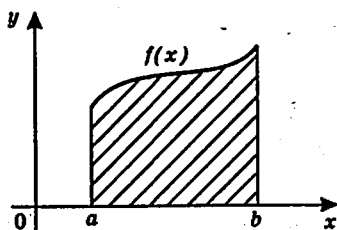


Рис. 1

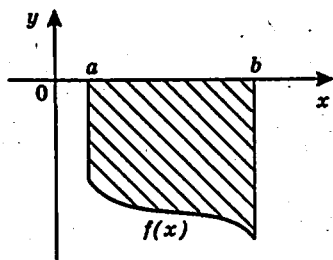


Рис. 2

2. Если непрерывная функция $f(x) \leq 0$ на отрезке $[a; b]$, то площадь соответствующей криволинейной трапеции находят по формуле (рис. 2)

$$S = - \int_a^b f(x)dx.$$

3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на отрезке как положительные, так и отрицательные значения, то для нахождения площади криволинейной трапеции необходимо разбить отрезок $[a; b]$ на такие части, в каж-

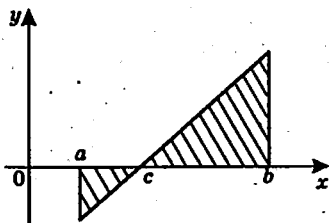


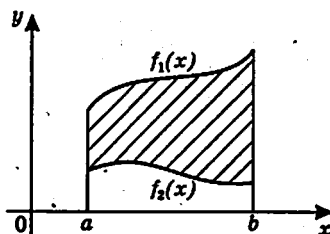
Рис. 3

дой из которых функция не изменяет свой знак, затем вычислить площади этих частей и сложить (рис. 3):

$$S = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. Если фигура ограничена графиками двух непрерывных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, где $f_1(x) \geq f_2(x)$, то площадь фигуры на отрезке $[a; b]$ находится по формуле

$$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx.$$



Пример 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = -3x$, $y = 0$ и $x = 2$;

2) $y = 3x - x^2$, $y = 0$ и $x = 4$;

3) $y = 1 - x$, $y = 4 - 3x - x^2$;

4) $y = \frac{4}{x}$ и $y + x = 5$;

5) $y = x^2 - 4x + 8$, $y = 4$, $x = 4$;

6) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$, $y = 0$;

7) $y = \sqrt{x}$, $y = |x - 6|$;

8) $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = 0$;

9) $y = 5 + 4x - x^2$; $2x - y - 3 = 0$;

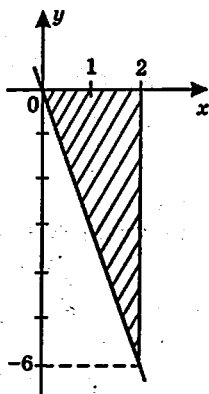
10) $x^2 + y^2 = 1$; $y = x^2 - 2x + 1$; $y > 0$.

Решение

1) На отрезке $[0; 2]$ функция $f(x) = -3x$ отрицательная. Тогда площадь искомой фигуры можно найти по

формуле $S = -\int_a^b f(x)dx$ или

$$S = -\int_0^2 (-3x)dx = 3\int_0^2 xdx = \frac{3}{2}x^2 \Big|_0^2 = 6.$$



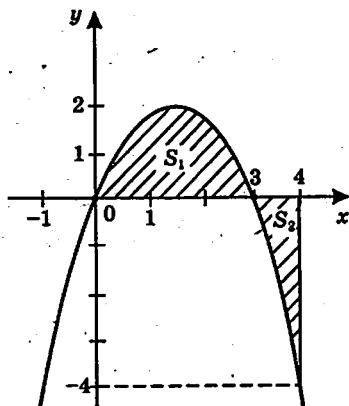
$$S = 6 \text{ (кв. ед.)}.$$

Замечание. Площадь искомой фигуры можно найти как площадь прямоугольного треугольника с кате-

тами длиной 2 и 6, т. е. $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6 \text{ (кв. ед.)}.$

2) Парабола $y = 3x - x^2$ пересекает ось Ox в точках $x = 0$ и $x = 3$.

Пусть S_1 и S_2 — площади частей фигуры, соответствующих отрезкам $[0; 3]$ и $[3; 4]$, а S — искомая площадь; тогда $S = S_1 + S_2$.



$$S_1 = \int_0^3 (3x - x^2) dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^3 =$$

$$= \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2} = 4,5;$$

$$S_2 = - \int_3^4 (3x - x^2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} x^2 \right) \Big|_3^4 =$$

$$= \frac{64}{3} - 24 - \left(9 - \frac{27}{2} \right) = \frac{11}{6}.$$

Следовательно, $S = 4,5 + \frac{11}{6} = \frac{19}{3} \text{ (кв. ед.)}.$

3) $y = 1 - x$ — прямая, $y = 4 - 3x - x^2$ — парабола.

Найдем абсциссы точек пересечения графиков данных функций (пределы интегрирования), для чего решим уравнение $1 - x = 4 - 3x - x^2$, или $x^2 + 2x - 3 = 0$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Следовательно, площадь искомой фигуры равна разности площадей криволинейной трапеции $ABCD$ и $\triangle ABD$

$$S_{ABCD} = \int_{-3}^1 (4 - 3x - x^2) dx = \left(4x - \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-3}^1 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) - \\
 &- \left(-12 - \frac{27}{2} + 9\right) = \\
 &= 4 + 3 - \frac{3}{2} + \frac{27}{2} - \\
 &- \frac{1}{3} = 18\frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{\triangle ABD} &= \frac{1}{2} AB \cdot AD = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.
 \end{aligned}$$

Тогда $S = 18\frac{2}{3} - 8 = 10\frac{2}{3}$ (кв. ед.).

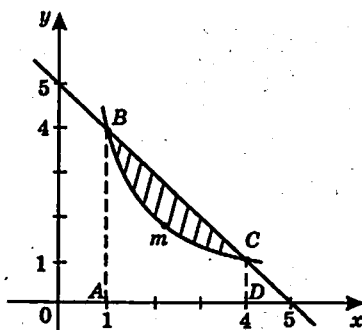
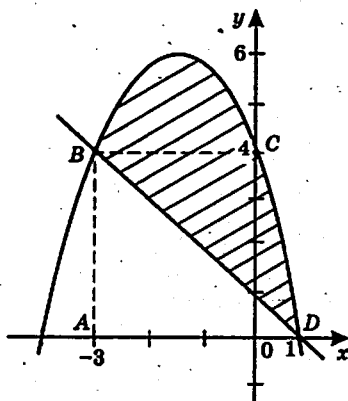
4) $y = \frac{4}{x}$ — гипербола,
 $y = 5 - x$ — прямая.

Найдем абсциссы точек пересечения графиков данных функций, для чего решим уравнение

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{x} &= 5 - x \text{ или } x^2 - 5x + \\
 + 4 &= 0, \text{ откуда } x_1 = 1, \\
 x_2 &= 4.
 \end{aligned}$$

Следовательно, искомая площадь будет равна разности площадей трапеции $ABCD$ и криволинейной трапеции $ABmCD$:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^4 (5 - x) dx - \int_1^4 \frac{4}{x} dx = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx = \\
 &= \left(5x - \frac{1}{2}x^2 - 4 \ln x\right) \Big|_1^4 =
 \end{aligned}$$

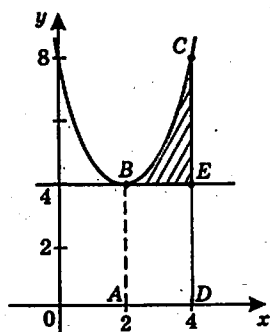


$$= 20 - 8 - 4 \ln 4 - \left(5 - \frac{1}{2} - 4 \ln 1 \right) =$$

$$= 7 + \frac{1}{2} - 4 \ln 4 = 7,5 - 8 \ln 2 \text{ (кв. ед.)}.$$

5) $y = x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4$ — парабола, $(2; 4)$ — координаты вершины параболы.

Если $y = 4$, то $x = 2$. Построим заданные линии. Тогда искомая площадь S будет равна разности площадей криволинейной трапеции $ABCD$ и прямоугольника $ABED$:



$$S = \int_2^4 (x^2 - 4x + 8) dx - \int_2^4 4 dx =$$

$$= \int_2^4 (x^2 - 4x + 4) dx =$$

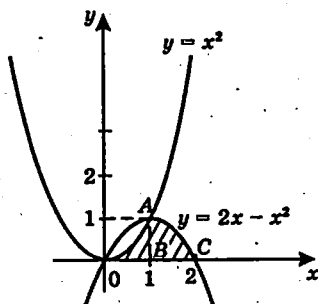
$$= \int_2^4 (x - 2)^2 dx = \frac{1}{3} (x - 2)^3 \Big|_2^4 = \frac{1}{3} (2^3 - 0) = \frac{8}{3}.$$

Итак, $S = \frac{8}{3}$ (кв. ед.).

6) Графиком функции $y = x^2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, так как $a = 1 > 0$.

Графиком функции $y = 2x - x^2$ также является парабола, ветви которой направлены вниз, так как $a = -1 < 0$.

Найдем абсциссы точек пересечения парабол, для чего решим уравнение $x^2 = 2x - x^2$, или $2x^2 - 2x = 0$; $x(x - 1) = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.



Как видно из рисунка, искомая площадь S равна сумме площадей двух криволинейных трапеций:

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 3 - 2 = 1.$$

$S = 1$ (кв. ед.).

7) График функции $y = \sqrt{x}$ имеет вид (рис. 1, а):

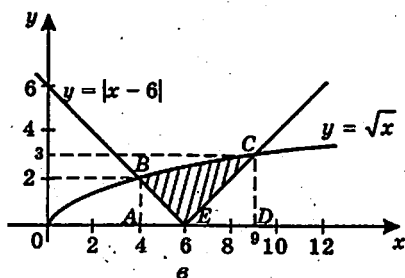
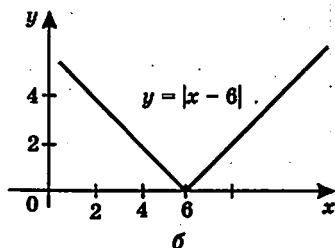
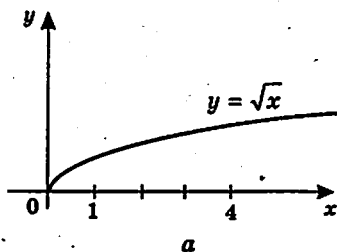


Рис. 1

График функции $y = |x - 6|$ изображен на рис. 1, б. Искомая фигура имеет вид (рис. 1, в):

$$S = S_{ABCD} - S_{ABE} - S_{CDE},$$

$$S_{ABCD} = \int_4^9 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_4^9 = \frac{2}{3} (9 \cdot 3 - 4 \cdot 2) = \frac{2}{3} \cdot 19 = \frac{38}{3};$$

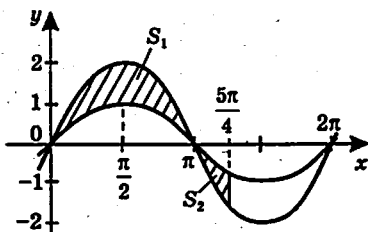
$$S_{ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2;$$

$$S_{CDE} = \frac{1}{2} CD \cdot ED = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}.$$

$$\text{Тогда } S = \frac{38}{3} - 2 - \frac{9}{2} = \frac{37}{6} = 6\frac{1}{6} \text{ (кв. ед.)}.$$

8) Искомая площадь S равна сумме S_1 и S_2 двух фигур, первая из которых ограничена линиями $y = \sin x$, $y = 2 \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$, вторая — линиями $y = \sin x$, $y = 2 \sin x$, $x = \pi$

$$\text{и } x = \frac{5\pi}{4}.$$



$$S_1 = \int_0^{\pi} (2 \sin x - \sin x) dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = 2;$$

$$S_2 = \int_{\pi}^{5\pi/4} (\sin x - 2 \sin x) dx = - \int_{\pi}^{5\pi/4} \sin x dx =$$

$$= \cos x \Big|_{\pi}^{5\pi/4} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \cos(\pi) =$$

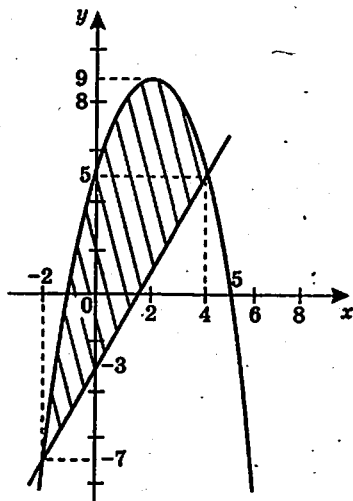
$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } S = S_1 + S_2 = 2 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$S = \frac{1}{2} (6 - \sqrt{2}) \text{ (кв. ед.)}.$$

9) Найдем абсциссы точек пересечения графиков данных функций, для чего решим уравнение $5 + 4x - x^2 = 2x - 3$ или $x^2 - 2x - 8 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

Изобразим фигуру, ограниченную данными линиями:



Площадь искомой фигуры находим по формуле

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx, \text{ где } f_1(x) = 5 + 4x - x^2,$$

$$f_2(x) = 2x - 3, \text{ тогда } S = \int_{-2}^4 (5 + 4x - x^2 - 2x + 3) dx =$$

$$= \left(8x + x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-2}^4 = 32 + 16 - \frac{64}{3} -$$

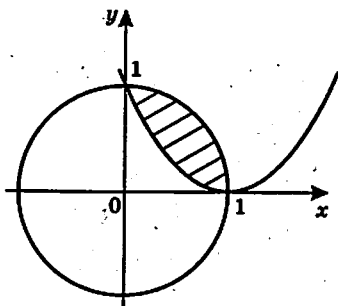
$$- \left(-16 + 4 + \frac{8}{3} \right) = 36.$$

Итак, $S = 36$ (кв. ед.).

10) $x^2 + y^2 = 1$ — уравнение окружности радиуса $r = 1$ с центром в начале координат.

$y = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ — парабола;

$(1; 0)$ — координаты вершины параболы;



(0; 1) – пересечение параболы с осью OY .

Искомая площадь равна разности площадей четверти круга и площади криволинейной трапеции, т. е.

$$S = \frac{1}{4} S_{кр.} - \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{1}{4} \pi \cdot 1^2 - \frac{1}{3} (x-1)^3 \Big|_0^1 = \\ = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12} (3\pi - 4).$$

$$\text{Итак, } S = \frac{1}{12} (3\pi - 4) \text{ (кв. ед.)}.$$

Задачи

Группа А

Доказать, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, если:

1. $F(x) = x^4, f(x) = 4x^3$;

2. $F(x) = x^{12}, f(x) = 12x^{11}$;

3. $F(x) = \frac{x^5}{5}, f(x) = x^4$;

4. $F(x) = \frac{x^4}{4} + 3, f(x) = x^3$;

5. $F(x) = x^3 + x^5, f(x) = 3x^2 + 5x^4$;

6. $F(x) = x^9 + x^{13}, f(x) = 9x^8 + 13x^{12}$;

7. $F(x) = 1,5 \sin x, f(x) = 1,5 \cos x$;

8. $F(x) = 4 \cos x, f(x) = -4 \sin x$.

Для функции $f(x)$ найти первообразную:

9. $f(x) = -\frac{2}{x^2}$;

10. $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$;

11. $f(x) = 3x^9$;

12. $f(x) = x^{-2} + x^2$;

13. $f(x) = x - \frac{3}{x^2}$;

14. $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$;

15. $f(x) = 15x^3 - 9x^5$;

16. $f(x) = 4 \cos x - 2 \sin x$;

17. $f(x) = \frac{3}{\cos^2 x}$;

18. $f(x) = \frac{6}{\sin^2 x} - \frac{9}{\cos^2 x}$;

$$19. f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right); \quad 20. f(x) = \frac{4}{\sqrt{6x+5}}.$$

Найти для функции первообразную, график которой проходит через точку M :

$$21. y = x^3, M(2; 1); \quad 22. y = \sqrt{x}, M(9; 10);$$

$$23. y = \frac{1}{\sqrt{x}}, M(4; 4) \quad 24. y = \cos 3x, M(0; 0);$$

$$25. f(x) = \sin x, M(-\pi; 0).$$

Вычислить интеграл:

$$26. \int_0^3 x^2 dx;$$

$$27. \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx;$$

$$28. \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx;$$

$$29. \int_0^{\ln 2} e^x dx;$$

$$30. \int_{-2\pi}^{\pi} \sin x dx;$$

$$31. \int_{-3\pi}^0 \cos 3x dx;$$

$$32. \int_{-2}^{-1} (5 - 4x) dx;$$

$$33. \int_0^2 (3x^2 - 4x + 5) dx;$$

$$34. \int_0^2 e^{3x} dx;$$

$$35. \int_1^9 \left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx;$$

$$36. \int_{-1}^0 \sqrt{3 - 5x} dx;$$

$$37. \int_4^9 \left(\frac{2x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx;$$

$$38. \int_{-4}^2 \frac{x dx}{\sqrt{2 - 0,5x}};$$

$$39. \int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx;$$

$$40. \int_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx.$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

41. $y = x^2, x = 4, y = 0$;

42. $y = x^3, y = 0, x = -3, x = 1$;

43. $y = 4x - x^2, y = 0$;

44. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}, y = 0, x = 1, x = 4$;

45. $y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = -3, x = -1$;

46. $y = \cos x, y = 0, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$;

47. $y = \sin \frac{x}{2}, y = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$;

48. $y = 2x, y = x - 2, x = 4$;

49. $y = x^2 - 1, y = 2x + 2$.

Группа Б

Найти одну из первообразных функций:

1. $f(x) = -\frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}$; 2. $f(x) = 4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}$;

3. $f(x) = 1 + 3e^x - 4\cos x$;

4. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} - 2e^{-x}$;

5. $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x+3}}$; 6. $f(x) = \frac{3}{x-3} - 2\sin(x-1)$;

7. $f(x) = 4\sin(4x+2) + \sqrt{\frac{x}{5}}$;

8. $f(x) = \frac{1}{5}(6x^3 - 3x + 2)$;

9. $f(x) = (3x-2)^3\sqrt{x}$; 10. $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x}}$;

11. $f(x) = \sin x \cos 3x - \cos x \sin 3x$;

$$12. f(x) = \sin 3x \cos 5x; \quad 13. f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}.$$

Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M :

$$14. f(x) = x^{-2}, M(1; -1);$$

$$15. f(x) = 2x - 4, M(-1; 2);$$

$$16. f(x) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}, M\left(-\frac{\pi}{4}; -1\right);$$

$$17. f(x) = \cos(2\pi - x), M\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right);$$

$$18. f(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{3}}, M\left(\frac{3\pi}{4}; 0\right);$$

$$19. f(x) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1; M\left(\frac{\pi}{3}; 16\right).$$

Вычислить интеграл:

$$20. \int_{-2}^{-1} \frac{5x^7 - 4x^6 + 2x}{x^3} dx;$$

$$21. \int_{-2}^{-1} \frac{3x^6 - 4x^5 - 7x^4 + 3x^2}{x^4} dx;$$

$$22. \int_{-1}^0 (x^2 - 2)(x + 1) dx;$$

$$23. \int_{-2}^{-1} \frac{4}{x^2} \left(1 - \frac{2}{x}\right) dx;$$

$$24. \int_1^3 \frac{3x-1}{\sqrt{x}} dx;$$

$$25. \int_2^7 \frac{4}{\sqrt{x+2}} dx;$$

$$26. \int_0^1 \frac{4}{3x+2} dx;$$

$$27. \int_2^3 \frac{(x+2)(x^2-3x+2)}{x-1} dx;$$

$$28. \int_{-1}^1 \frac{(x^2-16)(9-x^2)}{x^2-7x+12} dx; \quad 29. \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx;$$

$$30. \int_0^{\pi} (\sin^4 x + \cos^4 x) dx; \quad 31. \int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos 3x dx;$$

$$32. \int_0^{\pi/3} \cos 7x \cos 5x dx; \quad 33. \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 3x dx;$$

$$34. \int_0^3 x^2 \sqrt{x+1} dx; \quad 35. \int_3^4 \frac{x^2-4x+5}{x-2} dx.$$

Решить уравнение:

$$36. \int_{1/4}^t \frac{dx}{\sqrt{x}} = t;$$

$$37. \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2x+4}} dx = 2;$$

$$38. \int_0^t \cos^2 x dx = \frac{t}{2};$$

$$39. 2 \int_0^t \sin^2 x dx = t;$$

$$40. \int_0^t (2 \cos 2x + 6 \cos 6x) dx = 0.$$

Решить неравенство:

$$41. \int_0^t x^3 dx < 0,25;$$

$$42. \int_0^t (3x^2 - 8x + 3) dx > 0;$$

$$43. \int_{\pi/2}^t \cos 2x dx > \frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$44. \int_{\pi}^t \sin \frac{x}{2} dx > \sqrt{3}.$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$45. y = 4x - x^2, y = 4 - x;$$

$$46. y = x^2 + 1, y = x + 3;$$

$$47. y = x^3, y = 8, x = 1;$$

48. $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $x = 4$;
 49. $y = x^2 - 2x + 4$, $y = 3$, $x = -1$;
 50. $y = -x^2 - 6x$, $y = 9$, $x = -5$;
 51. $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 5$;
 52. $y = -x^2 + 4x + 5$, $y = 8$;
 53. $y = -\frac{1}{x}$, $y = 2$, $x = -2$, $x = -1$; $\ln 2 \approx 0,69$;
 54. $y = x^2 - 4x + 6$, $y = 1$, $x = -1$, $x = 3$;
 55. $y = x^2 - 6x + 10$, $y = 10 - 2x$;
 56. $y = -0,5x^2 + x + 4$, $y = 6 - x$, $x = -1$;
 57. $y = 4x - x^2$, $y = 2x - \frac{1}{3}x^2$;
 58. $y = 6x - x^2$, $y = 0$, $y = 5$;
 59. $y = \sin x$, $y = x + 1$, $x = 0$, $x = 2$, $\cos 2 \approx -0,41$;
 60. $y = \cos x$, $y = 3 - x$, $x = 0$, $x = -1$, $\sin 1 \approx 0,84$;
 61. $y = x^3$, $y = 10 - x$, $y = 0$;
 62. $y = |x| - 2$, $y = \frac{x}{2}$;
 63. $y = x^2$, $y = 2 - |x|$;
 64. $y = \sqrt{x-1}$, $y = 1$, $y = 0$, $x = 0$;
 65. $y = 3^x$, $y = 2^x$, $x = 1$.

Решить задачи:

66. Скорость движения тела задана уравнением $v = (3t^2 + 2t - 1)$ (в м/с). Найти путь, пройденный телом за 10 с от начала движения.

67. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v = (39,2 - 9,8t)$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

68. Для растяжения пружины на 0,04 м необходимо совершить работу 20 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу в 80 Дж?

69. Вычислить силу давления воды на вертикально погруженную треугольную пластину с основанием 9 м и высотой 2 м, если вершина лежит на свободной поверхности жидкости, а основание — параллельно ей.

ПРОГРЕССИИ

§ 31. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется такая числовая последовательность, в которой каждое число начиная со второго равно предыдущему, сложенному с постоянным для данной последовательности числом.

Это постоянное число называется *разностью прогрессии* и обозначается буквой d .

Арифметическая прогрессия обычно обозначается (a_n) .

Из определения следует: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = d$.

Если $d > 0$, то прогрессия называется *возрастающей*, если $d < 0$ — *убывающей*.

Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого

$n > 1$ верно равенство $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$.

Это свойство называется *характеристическим свойством* арифметической прогрессии.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ — формула n -го числа, где n — число членов.

Формула суммы n первых членов арифметической

прогрессии имеет вид $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Так как $a_n = a_1 + (n - 1)d$, то получим II формулу

суммы n первых членов: $S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n$.

Пример 1. Определить последний член арифметической прогрессии, в которой $a_1 = 8$, $d = 5$, $n = 15$.

Решение

По формуле $a_n = a_1 + (n - 1) d$ имеем
 $a_{15} = 8 + (15 - 1) \cdot 5 = 8 + 14 \cdot 5 = 78$.

Ответ: 15.

Пример 2. Найти сумму членов арифметической прогрессии, в которой $a_1 = 100$, $d = -2$, $n = 50$.

Решение

Так как $n = 50$, то, используя II формулу суммы n первых членов, имеем

$$S_{50} = \frac{2 \cdot 100 + (50 - 1) \cdot (-2)}{2} \cdot 50,$$

$$S_{50} = \frac{200 - 98}{2} \cdot 50 = 51 \cdot 50 = 2550.$$

Ответ: 2550.

Пример 3. Вычислить сумму всех двузначных натуральных чисел.

Решение

Дано: $a_1 = 10$, $d = 1$, $a_n = 99$, тогда $a_n = a_1 + (n - 1) d$, или $99 = 10 + (n - 1) \cdot 1$, откуда $n = 90$, тогда

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ или}$$

$$S_{90} = \frac{(10 + 99) \cdot 90}{2} = 109 \cdot 45 = 4905.$$

Ответ: 4905.

Пример 4. Найти x из уравнения $1 + 4 + 7 + \dots + x = 117$.

Решение

Заметим, что левая часть уравнения представляет собой сумму членов арифметической прогрессии, в которой $a_1 = 1$, $d = 3$, $a_n = x$.

$$a_n = a_1 + (n - 1) d \text{ или } x = 1 + (n - 1) 3, x = 3n - 2.$$

Используя формулу суммы членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, имеем

$$\frac{1+x}{2} \cdot n = 117 \text{ или } (1+x)n = 234. \text{ Так как } x = 3n - 2,$$

то $n = \frac{1}{3}(x+2)$, тогда получим уравнение

$$(1+x) \cdot \frac{1}{3}(x+2) = 234 \text{ или } (1+x)(x+2) = 702,$$

$x^2 + 3x - 700 = 0$, откуда находим $x_1 = 25$, $x_2 = -28$ (не подходит, так как $d > 0$).

Итак, $x = 25$.

Ответ: 25.

Пример 5. Между числами 7 и 35 вставить 6 чисел так, чтобы они вместе с данными числами составили арифметическую прогрессию.

Решение

Из условия имеем $a_1 = 7$, $a_8 = 35$. Задача сводится к определению разности d прогрессии по формуле $a_n = a_1 + (n-1)d$; $35 = 7 + (8-1) \cdot d$, $7d = 28$, $d = 4$.

Тогда $a_2 = a_1 + d = 7 + 4 = 11$, $a_3 = a_2 + d = 15$, $a_4 = 19$, $a_5 = 23$, $a_6 = 27$, $a_7 = 31$.

Пример 6. Определить первый член и разность арифметической прогрессии, в которой

$$a_7 - a_3 = 8, \quad a_2 \cdot a_7 = 75.$$

Решение

Нам надо найти a_1 и d . Имеем систему

$$\begin{cases} a_1 + 6d - (a_1 + 2d) = 8, & \begin{cases} d = 2, \\ (a_1 + d)(a_1 + 6d) = 75, \end{cases} \\ (a_1 + d)(a_1 + 6d) = 75, & \begin{cases} (a_1 + 2)(a_1 + 12) = 75. \end{cases} \end{cases}$$

Из II уравнения системы имеем

$$a_1^2 + 14a_1 - 51 = 0, \text{ откуда } (a_1)_1 = -17, (a_1)_2 = 3.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} a_1 = -17, \\ d = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 3, \\ d = 2. \end{cases}$$

Пример 7. Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии (a_n) , если $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.

Решение

Заметим, что $a_1 + a_{20} = a_6 + a_{15} = a_9 + a_{12}$, тогда

$a_1 + a_{20} = 20 : 2 = 10$, и так как $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, то на-

ходим: $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{10}{2} \cdot 20 = 100$.

Ответ: 100.

Пример 8. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 15, а сумма квадратов этих же чисел равна 93. Найти эти числа.

Решение

Пусть a_1, a_2, a_3 — искомые числа, образующие арифметическую прогрессию, тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 15, \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 93. \end{cases}$$

Согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии, получим $a_1 + a_3 = 2a_2$, тогда I уравнение системы примет вид $3a_2 = 15$, откуда $a_2 = 5$.

Подставляя значение $a_2 = 5$ во II уравнение, имеем

$$a_1^2 + a_3^2 = 68 \text{ или } a_1^2 + (a_1 + 2d)^2 = 68.$$

Кроме того, $a_2 = a_1 + d = 5$, тогда $a_1^2 + (5 + d)^2 = 68$.

Выразим d через a_1 ; $d = 5 - a_1$, значит,

$$a_1^2 + (10 - a_1)^2 = 68, \quad 2a_1^2 - 20a_1 + 32 = 0 \text{ или}$$

$$a_1^2 - 10a_1 + 16 = 0, \text{ откуда } (a_1)_1 = 2, (a_1)_2 = 8 \text{ и } d_1 = 3, d_2 = -3.$$

Ответ: 2, 5, 8.

§ 32. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется такая числовая последовательность, в которой каждый член начиная со второго равен предыдущему, умноженному на некоторое отличное от нуля постоянное число.

Это постоянное число называется *знаменателем прогрессии* и обозначается буквой q .

Геометрическая прогрессия часто обозначается (b_n) .

Из определения следует: $b_2 : b_1 = b_3 : b_2 = \dots = b_{n+1} : b_n = q$.

Последовательность (b_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член начиная со второго есть среднее геометрическое

соседних с ним членов, т. е. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Формула n -го числа геометрической прогрессии имеет вид $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Если $q \neq 1$, то сумма S_n первых n членов вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} \text{ или } S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$, называется *бесконечно убывающей*, а ее сумма опреде-

ляется по формуле $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Заметим, что если все члены геометрической прогрессии возвести в некоторую степень, то опять получим геометрическую прогрессию.

Так, последовательность чисел $b_1^2, b_1^2 q^2, b_1^2 q^4, \dots, b_1^2 q^{2n}$ — также геометрическая прогрессия с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2 .

Аналогично последовательность чисел $b_1^3, b_1^3 q^3, b_1^3 q^6, \dots, b_1^3 q^{3n}$ — также геометрическая прогрессия с первым членом b_1^3 и знаменателем q^3 и т. д.

Пример 9. Вычислить шестой член геометрической прогрессии 8, 4, 2, ...

Решение

Дано: $b_1 = 8$, $b_2 = 4$. Найдем знаменатель геометрической прогрессии: $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{2}$.

По формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$ находим $b_6 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$,

$$b_6 = 2^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример 10. Найти знаменатель и сумму членов геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 1,5$, $n = 4$, $b_4 = 96$.

Решение

Из формулы $b_n = b_1 q^{n-1}$ найдем знаменатель q :

$$b_4 = b_1 \cdot q^3, 1,5 \cdot q^3 = 96, q^3 = 96 : 1,5; q^3 = 96 \cdot \frac{2}{3},$$

$$q^3 = 64, \text{ откуда } q = \sqrt[3]{64} = 4.$$

По формуле $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$ имеем

$$S_4 = \frac{96 \cdot 4 - 1,5}{4 - 1} = \frac{382,5}{3} = 127,5.$$

Ответ: $q = 4$, $S_4 = 127,5$.

Пример 11. Определить число членов геометрической прогрессии, в которой $q = 2$, $b_n = 96$, $S_n = 189$.

Решение

По условию $b_n = 96$; с другой стороны, $b_n = b_1 q^{n-1}$, тогда $b_1 \cdot 2^{n-1} = 96$. (1)

$$\text{Кроме того, } S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} \text{ или } \frac{96 \cdot 2 - b_1}{2 - 1} = 189,$$

$192 - b_1 = 189$, откуда $b_1 = 192 - 189 = 3$.

Подставляя значение $b_1 = 3$ в (1), имеем $3 \cdot 2^{n-1} = 96$, $2^{n-1} = 32$, $2^{n-1} = 2^5$, $n - 1 = 5$, откуда $n = 6$.

Ответ: 6.

Пример 12. Между числами 1 и 16 вставить три числа так, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию.

Решение

Дано: $b_1 = 1$, $b_5 = 16$. Задача сводится к нахождению знаменателя прогрессии по формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$, $b_5 = b_1 q^4$ или $1 \cdot q^4 = 16$, откуда $q = \pm 2$. Так как прогрессия возрастающая, то $q = 2$, тогда $b_2 = b_1 q = 1 \cdot 2 = 2$, $b_3 = 4$, $b_4 = 8$.

Имеем прогрессию: 1; 2; 4; 8; 16.

Ответ: 1; 2; 4; 8; 16.

Пример 13. Определить первый член, знаменатель и число членов геометрической прогрессии, в которой $a_6 - a_4 = 216$; $a_3 - a_1 = 8$; $S_n = 40$.

Решение

Для нахождения a_1 и q имеем систему

$$\begin{cases} a_6 - a_4 = 216, \\ a_3 - a_1 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 q^5 - a_1 q^3 = 216, \\ a_1 q^2 - a_1 = 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 q^3 (q^2 - 1) = 216, \\ a_1 (q^2 - 1) = 8. \end{cases}$$

Разделив I уравнение полученной системы на II, имеем $q^3 = 216 : 8 = 27$, откуда $q = 3$.

Значение a_1 найдем из уравнения $a_1 (q^2 - 1) = 8$: $a_1 \cdot (3^2 - 1) = 8$, откуда $a_1 = 1$.

Число членов геометрической прогрессии найдем

по формуле $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, где $S_n = 40$, $b_1 = a_1 = 1$,

$$\frac{1 \cdot (3^n - 1)}{2} = 40, \quad 3^n - 1 = 80; \quad 3^n = 81, \quad n = 4.$$

Ответ: $a_1 = 1$; $q = 3$; $n = 4$.

Пример 14. Найти геометрическую прогрессию, состоящую из 6 членов, зная, что сумма трех первых ее членов равна 168, а сумма трех последних 21.

Решение

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 168, \\ b_4 + b_5 + b_6 = 21. \end{cases}$$

Заметим, что $b_4 + b_5 + b_6 = b_1q^3 + b_2q^3 + b_3q^3 = q^3(b_1 + b_2 + b_3)$.

Учитывая I уравнение системы, получим

$$168q^3 = 21, \quad q^3 = \frac{1}{8}, \quad \text{откуда } q = \frac{1}{2}.$$

Упростим I уравнение системы $b_1 + b_1q + b_1q^2 = 168$,

или $b_1(1 + q + q^2) = 168$; так как $q = \frac{1}{2}$, то

$$b_1 = 168 : \frac{7}{4} = 96.$$

Следовательно, $b_2 = b_1q = 96 \cdot \frac{1}{2} = 48$, $b_3 = 24$,
 $b_4 = 12$, $b_5 = 6$, $b_6 = 3$.

Ответ: 96; 48; 24; 12; 6; 3.

Пример 15. Найти три числа, образующих возрастающую геометрическую прогрессию, зная, что сумма их 26, а сумма квадратов этих чисел 364.

Решение

Способ 1

Пусть b_1, b_2, b_3 — искомые числа, образующие возрастающую геометрическую прогрессию. Согласно ус-

ловию имеем систему:
$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 26, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 = 26, & b_1^2(1 + q + q^2)^2 = 676, \\ b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 = 364; & b_1^2(1 + q^2 + q^4) = 364. \end{cases}$$

Разделим почленно I уравнение полученной системы на II :

$$\frac{(1+q+q^2)^2}{1+q^2+q^4} = \frac{13}{7}. \quad (1)$$

Заметим, что $1+q^2+q^4 = (1+q^2)^2 - q^2 = (1+q^2+q)(1+q^2-q)$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{(1+q+q^2)^2}{(1+q^2+q)(1+q^2-q)} = \frac{13}{7}, \text{ или } \frac{1+q+q^2}{1+q^2-q} = \frac{13}{7}, \text{ или}$$

$$7+7q+7q^2 = 13+13q^2-13q, \text{ или } 6q^2-20q+6=0, \text{ или}$$

$$3q^2-10q+3=0, \text{ откуда находим } q_1=3, q_2=\frac{1}{3}.$$

Так как по условию прогрессия возрастающая, то значение $q = \frac{1}{3}$ не подходит.

Ответ: $\begin{cases} b_1 = 2, \\ q = 3. \end{cases}$

Способ 2

$$\begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 = 26, \\ b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 = 364; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{b_1(1-q^3)}{1-q} = 26, \\ \frac{b_1^2(1-q^6)}{1-q^2} = 364. \end{cases}$$

Здесь мы использовали замечание, сделанное в конце теоретической части.

Разделим почленно II уравнение полученной системы на I : $\frac{b_1(1+q^3)}{1+q} = 14$.

А теперь разделим I уравнение системы на полученное:

$$\frac{(1-q^3) \cdot (1+q)}{(1+q^3) \cdot (1-q)} = \frac{13}{7}, \text{ или } \frac{1+q+q^2}{1-q+q^2} = \frac{13}{7}, \text{ или}$$

$$7 + 7q + 7q^2 = 13 - 13q + 13q^2, 6q^2 - 20q + 6 = 0,$$

или $3q^2 - 10q + 3 = 0, q_1 = 3, q_2 = \frac{1}{3}$ и т. д. (см. способ Г).

Ответ: $\begin{cases} b_1 = 2, \\ q = 3. \end{cases}$

Способ 3

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 26, & (b_1 + b_2 + b_3)^2 = 26^2, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364; & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2b_1b_2 + 2b_1b_3 + 2b_2b_3 = 676, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364. \end{cases}$$

$$364 + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) = 676 \text{ или } b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = 156. \quad (2)$$

Но $b_2^2 = b_1b_3$, тогда (2) примет вид

$$b_1b_2 + b_2^2 + b_2b_3 = 156 \text{ или } b_2(b_1 + b_2 + b_3) = 156.$$

Так как $b_1 + b_2 + b_3 = 26$, то $b_2 = 156 : 26 = 6$ и т. д.

Пример 16. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии: 16, 4, 1, ...

Решение

$$b_1 = 16, q = b_2 : b_1 = b_3 : b_2 = \frac{1}{4}, \text{ тогда}$$

$$S = \frac{b_1}{1-q}, S = \frac{16}{1-\frac{1}{4}} = \frac{16 \cdot 4}{4-1} = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}.$$

Ответ: $21\frac{1}{3}$.

Пример 17. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12,5, а сумма первого и второго членов ее 12. Найти эту прогрессию.

Решение

Согласно условию задачи $S = 12,5$ и $b_1 + b_2 = 12$.

Имеем систему уравнений:
$$\begin{cases} b_1 = 12,5 \cdot (1 - q), \\ b_1 + b_1 q = 12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = \frac{25}{2}(1 - q), \\ b_1(1 + q) = 12; \end{cases}$$

$$\frac{25}{2}(1 - q)(1 + q) = 12, \text{ или } 1 - q^2 = \frac{24}{25},$$

$$q^2 = 1 - \frac{24}{25}, q^2 = \frac{1}{25}, \text{ откуда } q = \pm \frac{1}{5}.$$

$$\text{Если } q = \frac{1}{5}, \text{ то } (b_1)_1 = \frac{25}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 10;$$

$$\text{если } q = -\frac{1}{5}, \text{ то } (b_1)_2 = \frac{25}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right) = 15.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} b_1 = 10, \\ q = \frac{1}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 15, \\ q = -\frac{1}{5}. \end{cases}$$

Пример 18. Найти третий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна 1,6, а второй член равен $-0,5$.

Решение

По условию $S = 1,6$; $b_2 = -0,5$, тогда имеем систе-

$$\text{му } \begin{cases} \frac{b_1}{1 - q} = 1,6, \\ b_1 q = -0,5. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на первое:

$$\begin{cases} q(1-q) = -\frac{15}{16}, \\ b_1 q = -0,5. \end{cases}$$

Упростим первое уравнение полученной системы:

$$q^2 - q - \frac{5}{16} = 0, \text{ откуда имеем } q_1 = \frac{5}{4} \text{ (не подходит,}$$

так как $|q| < 1$), $q_2 = -\frac{1}{4}$, тогда

$$b_1 = 2, b_3 = b_1 q^2, b_3 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Ответ: 0,125.

Пример 19. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов ее членов равна 40,5. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

Решение

Согласно условию задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 9, \\ \frac{b_1^2}{1-q^2} = 40,5; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 9, \\ \frac{b_1}{1-q} \cdot \frac{b_1}{1+q} = 40,5; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 9, \\ \frac{b_1}{1+q} = 4,5. \end{cases}$$

Разделим I уравнение полученной системы на II:

$$\frac{b_1}{1-q} \cdot \frac{1+q}{b_1} = 2 \text{ или } 1+q = 2-2q, 3q = 1, q = \frac{1}{3}.$$

Так как $\frac{b_1}{1-q} = 9$ и $q = \frac{1}{3}$, то $b_1 = 9\left(1 - \frac{1}{3}\right)$ или $b_1 = 9 - 3 = 6$.

Ответ: $b_1 = 6, q = \frac{1}{3}$.

Пример 20. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов 192. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

Решение

Имеем систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 4, \\ \frac{b_1^3}{1-q^3} = 192; \end{cases} \quad q \neq 1.$$

$$\begin{cases} b_1 = 4(1-q), \\ b_1^3 = 192 \cdot (1-q^3). \end{cases}$$

Подставляя значение b_1 из I уравнения во II, имеем $64(1-q)^3 = 192(1-q^3)$, $(1-q)^3 = 3(1-q^3)$ или

$$1 - 3q + 3q^2 - q^3 = 3 - 3q^3, \quad 2q^3 + 3q^2 - 3q - 2 = 0,$$

$$2(q^3 - 1) + 3q(q - 1) = 0,$$

$$(q - 1)(2(q^2 + q + 1) + 3q) = 0, \quad q \neq 1, \text{ тогда}$$

$$2q^2 + 5q + 2 = 0, \text{ откуда } q_1 = -2; \quad q_2 = -\frac{1}{2}.$$

Значение $q = -2$ не удовлетворяет условию задачи.

$$\text{Если } q = -\frac{1}{2}, \text{ то } b_1 = 4\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 6.$$

Ответ: $b_1 = 6, q = -\frac{1}{2}$.

Пример 21. Обратить бесконечную периодическую дробь $0,(15)$ в обыкновенную.

Решение

$$0,(15) = 0,151515... = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + ...$$

Следовательно, имеем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, где $b_1 = \frac{15}{100}$, $q = \frac{1}{100}$.

$$\begin{aligned}\text{Тогда } S &= \frac{b_1}{1-q} = \frac{15}{100} : \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{15}{100} \cdot \frac{100}{99} = \\ &= \frac{15}{99} = \frac{5}{33}.\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5}{33}$.

§ 33. Разные задачи на прогрессию

Пример 22. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 15. Если к ним прибавить соответственно числа 1, 4 и 19, то получатся три числа, составляющих геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

Решение

Согласно условию имеем $a_1 + a_2 + a_3 = 15$.

Но $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, тогда $2a_2 = a_1 + a_3$ или $3a_2 = 15$, откуда $a_2 = 5$. Значит, $a_1 + d = 5$, $a_1 = 5 - d$, $a_3 = 5 + d$.

По условию, $b_1 = a_1 + 1 = 6 - d$, $b_2 = a_2 + 4 = 9$ и $b_3 = a_3 + 19 = 5 + d + 19 = 24 + d$.

Но $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$, или $(6 - d)(24 + d) = 9^2$, или $144 - 24d + 6d - d^2 = 81$, $d^2 + 18d - 63 = 0$, откуда $d_1 = 3$, $d_2 = -21$, тогда $a_1 = 2$ или $a_1 = 26$.

В итоге получим две тройки чисел: 2; 5; 8 и 26; 5; -16.

Ответ: 2; 5; 8 и 26; 5; -16.

Пример 23. Определить, при каких x три числа a_1 , a_2 , a_3 , взятые в указанной последовательности, образуют арифметическую прогрессию, если $a_1 = \lg 2$; $a_2 = \lg(3^x - 3)$; $a_3 = \lg(3^x + 9)$.

Решение

Если тройка чисел a_1, a_2, a_3 образует арифметическую прогрессию, то согласно характеристическому свойству, имеем

$$\lg(3^x - 3) = \frac{\lg 2 + \lg(3^x + 9)}{2}, \text{ или}$$

$$\lg(3^x - 3)^2 = \lg(2 \cdot 3^x + 18), \text{ или } (3^x - 3)^2 = 2 \cdot 3^x + 18, \\ (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x + 9 = 2 \cdot 3^x + 18, (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 = 0,$$

$$\text{откуда } 3^x = 9, 3^x = -1.$$

Если $3^x = 9$, то $x = 2$; если $3^x = -1$, то корней нет, так как $3^x > 0$ при любом $x \in R$.

Ответ: при $x = 2$.

Пример 24. Тангенсы половинных углов прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найти углы треугольника.

Решение

Заметим, что данный прямоугольный треугольник не может быть равнобедренным. Пусть x — меньший угол, где $x < 45^\circ$, тогда углы треугольника будут:

$$x, \frac{\pi}{2} - x, \frac{\pi}{2}. \text{ Согласно условию числа } \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right),$$

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ образуют арифметическую прогрессию. Тогда на основании характеристического свойства арифметической прогрессии имеем

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right), \text{ или } 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

$$\left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^2 = 2 - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \text{ или } \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0,$$

корни которого $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -2 - \sqrt{5}$ и $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -2 + \sqrt{5}$.

Учитывая, что $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{8}$, берем $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{5} - 2$.

Тогда $\frac{x}{2} = \arctg(\sqrt{5} - 2)$; $x = 2 \arctg(\sqrt{5} - 2)$.

Ответ: $2 \arctg(\sqrt{5} - 2)$; $\frac{\pi}{2} - 2 \arctg(\sqrt{5} - 2)$; $\frac{\pi}{2}$.

Пример 25. При каком значении x последовательность $\sqrt{x-5}$, $\sqrt[4]{10x+4}$, $\sqrt{x+2}$ образует геометрическую прогрессию?

Решение

Если данная тройка образует геометрическую прогрессию, то согласно характеристическому свойству

имеем: $(\sqrt[4]{10x+4})^2 = \sqrt{x-5} \cdot \sqrt{x+2}$, где $x \geq 5$.

$$\sqrt{10x+4} = \sqrt{(x-5)(x+2)} \text{ или}$$

$$10x+4 = x^2 - 5x + 2x - 10, \quad x^2 - 13x - 14 = 0,$$

откуда $x_1 = 14$, $x_2 = -1$ (не подходит, так как $x \geq 5$).

Ответ: при $x = 14$.

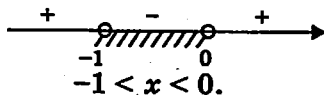
Пример 26. При каких значениях x бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $q = x^2 + x + 1$ имеет сумму?

Решение

Так как $q = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ при лю-

бом $x \in \mathbb{R}$, то достаточно решить неравенство $q < 1$ или $x^2 + x + 1 < 1$, $x^2 + x < 0$, $x(x+1) < 0$.

Решим полученное неравенство методом интервалов: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.



Ответ: при $-1 < x < 0$.

Задачи

Группа А

1. Определить n -й член арифметической прогрессии, если $a_1 = 110$, $d = -10$, $n = 11$.

2. Найти сумму членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 1$, $d = 3$, $n = 12$.

3. Найти сумму всех натуральных чисел от 2 до 98 включительно.

4. Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если $a_1 = -16$, $a_2 = -10$, $n = 12$.

5. Найти сумму всех двузначных чисел.

6. Найти седьмой член геометрической прогрессии, если $b_1 = 81$ и $q = \frac{1}{3}$.

7. Записать формулу n -го члена геометрической прогрессии: $3, 1, \frac{1}{3}, \dots$.

8. Найти знаменатель геометрической прогрессии, если $b_1 = 250$, $b_4 = -2$.

9. Найти сумму n первых членов геометрической прогрессии, если $b_1 = -2$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$.

10. В геометрической прогрессии найти число n членов, если $S_n = 635$, $b_1 = 5$, $q = 2$.

11. Найти сумму чисел, если ее слагаемые являются последовательными членами геометрической прогрессии $1 + 3 + 9 + \dots + 243$.

12. В геометрической прогрессии найти b_5 и S_4 , если $b_2 = 14$, $b_4 = 686$, $q > 0$.

13. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $6, 1, \frac{1}{6}, \dots$.

14. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 150. Найти q , если $b_1 = 75$.

15. Записать бесконечную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби: а) $0,(9)$; б) $0,2(3)$.

Группа Б

1. Найти разность арифметической прогрессии, если $a_1 = -4$, $a_9 = 0$.

2. При каких n члены арифметической прогрессии 15, 13, 11, ... отрицательны?

3. Найти девятый член и разность арифметической прогрессии, если $a_8 = 0,5$, $a_{10} = -2,5$.

4. Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, начиная с 3, чтобы их сумма была равна 75?

5. Найти a_1 и d арифметической прогрессии, если $a_{11} = 92$, $S_{11} = 22$.

6. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если $S_5 = 65$ и $S_{10} = 230$.

7. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, в которой $5a_1 + 10a_5 = 0$, $S_4 = 14$.

8. Найти x из уравнения $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$.

9. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна $14/9$. Найти эти числа.

10. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

11. Геометрическая прогрессия задана формулой

n -го члена: $b_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Найти S_6 .

12. В геометрической прогрессии найти q и b_3 , если $b_1 = 12$, $S_3 = 372$.

13. В геометрической прогрессии найти S_5 , если $b_3 - b_1 = 24$, $b_5 - b_1 = 624$.

14. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_4 = \frac{9}{8}$.

15. Решить уравнение $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = 1,5$, если $0 < x < 1$.

16. При каком значении x являются последовательными членами арифметической прогрессии числа: $3x^2$, 2, $11x$?

17. Доказать, что числа $\cos 2\alpha$, $\cos^2 \alpha$ и 1 являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии.

18. Между числами 4 и 9 вставить положительное число так, чтобы получилось три последовательных члена геометрической прогрессии.

19. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ и $a_1 a_2 a_3 = 80$.

20. Доказать, что для геометрической прогрессии справедливо равенство $b_n b_k = b_{n+l} b_{k-l}$. Вычислить $b_1 b_7$, если $b_3 b_5 = 72$.

21. Между числами $\frac{1}{3}$ и 27 вставить три числа так, чтобы получилось пять последовательных членов геометрической прогрессии.

22. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной: а) $0,444\dots$; б) $2,(05)$.

23. При каком значении x числа x , $\sqrt{4-3x}$, $3-2x$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

24. Три числа, сумма которых равна 24, являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если к этим числам прибавить соответственно 2, 2 и 7, то полученные числа будут последовательными членами геометрической прогрессии. Найти эти числа.

25. Доказать, что если положительные числа a , b , c являются последовательными членами арифмети-

ческой прогрессии, то числа $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$,

$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

26. Доказать, что числа $\frac{1}{\log_3 2}$, $\frac{1}{\log_6 2}$, $\frac{1}{\log_{12} 2}$ образуют арифметическую прогрессию.

27. Решить уравнение $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \dots \cdot 5^{2x} = (0,04)^{-28}$.

28. Найти три числа, образующих геометрическую прогрессию, если их произведение равно 64, а среднее арифметическое $14/3$.

29. Числа $5x - y$, $2x + 3y$ и $x + 2y$ составляют арифметическую прогрессию, а числа $(y + 1)^2$, $xy + 1$, $(x - 1)^2$ составляют геометрическую прогрессию. Найти x и y .

30. Три числа a , b , 12 в указанной последовательности составляют геометрическую прогрессию, а числа a , b , 9 — арифметическую прогрессию. Найти a и b .

Глава 10

ГЕОМЕТРИЯ

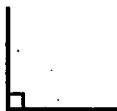
ПЛАНИМЕТРИЯ

Для успешного решения задач по геометрии необходимо не только знание аксиом и теорем, но и умение их применять.

В рамках предлагаемой книги основной упор делается на решение задач, сопровождаемых краткими пояснениями. Для удобства пользования книгой приводятся необходимые справочные материалы и формулировки некоторых теорем, активно использующихся при решении задач.

Справочные материалы

1. Классификация углов



Прямой угол



Острый угол



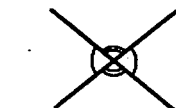
Тупой угол



Развернутый угол

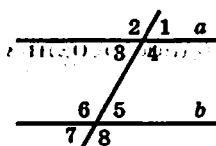


Смежные углы



Вертикальные углы

2. Углы при || прямых ($a \parallel b$, c — секущая)



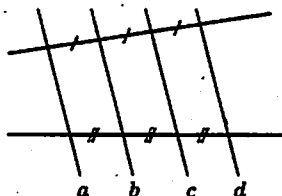
Соответственные углы: $\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 7$; $\angle 4$ и $\angle 8$.

Каждые два соответственных угла равны.

Внутренние накрест лежащие углы: $\angle 3$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$.

Внешние накрест лежащие углы: $\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$.
Каждые два накрест лежащих угла равны.
Внутренние односторонние углы: $\angle 3$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 5$.
Внешние односторонние углы: $\angle 1$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 7$.
Каждая пара односторонних углов равна в сумме 180° .

Теорема Фалеса: $a \parallel b \parallel c \parallel d$.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Пример 1. Разность двух углов, получившихся при пересечении двух прямых, равна 20° . Найти больший из этих углов.

Дано: $\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные,
 $\angle 2 - \angle 1 = 20^\circ$.

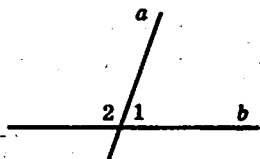
Найти $\angle 2$.

Решение

Пусть $\angle 2 > \angle 1$. Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = x + 20$.

Так как $\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные, то по теореме о смежных углах имеем: $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, или $x + x + 20 = 180$, или $2x = 160$, $x = 80$, тогда $\angle 2 = 80^\circ + 20^\circ = 100^\circ$.

Ответ: 100° .



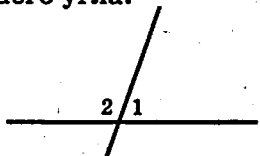
Пример 2. Один из смежных углов в 3 раза больше другого. Найти величину меньшего угла.

Решение

Пусть $\angle 1 = x$ — меньший угол, тогда $\angle 2 = 3x$, а их сумма равна 180° . Имеем уравнение $x + 3x = 180$, $4x = 180$, $x = 45$.

Итак, $\angle 1 = 45^\circ$ — величина меньшего угла.

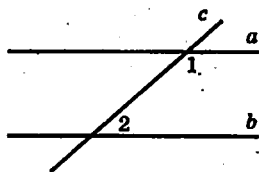
Ответ: 45° .



Пример 3. Один из двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей на 60° меньше другого. Найти больший из этих углов.

Решение

Дано: $a \parallel b$, c – секущая,
 $\angle 1$ и $\angle 2$ – внутренние
односторонние,
 $\angle 2 = \angle 1 - 60^\circ$.



Найти $\angle 1$.

Решение

Пусть $\angle 1$ и $\angle 2$ – внутренние односторонние углы при параллельных прямых a и b и секущей c . Пусть $\angle 1 > \angle 2$. Пусть $\angle 2 = x$, тогда $\angle 1 = x + 60$, а их сумма равна 180° (по теореме о сумме односторонних углов). Имеем уравнение $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, или $x + 60 + x = 180$, $2x = 120$, $x = 60$, тогда $\angle 1 = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

Ответ: 120° .

Пример 4. Один из двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей составляет 80% от другого. Найти величину большего угла.

Решение

Пусть величина большего угла равна x , тогда величина меньшего угла будет равна $0,8x$, а их сумма 180° . Имеем уравнение $x + 0,8x = 180$; $1,8x = 180$, $x = 100$.

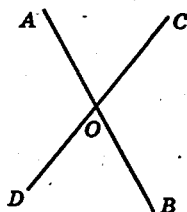
Ответ: 100° .

Пример 5. Прямые AB и CD пересекаются в точке O . Сумма углов AOD и COB равна 220° . Определить угол AOC .

Решение

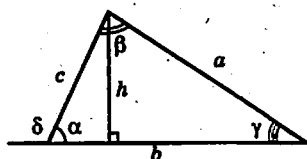
Так как $\angle AOD$ и $\angle COB$ вертикальные, то они равны, тогда $\angle AOD = \angle COB = 220^\circ : 2 = 110^\circ$. Заметим, что $\angle AOD$ и $\angle COB$ не могут быть острыми. $\angle AOC$ и $\angle AOD$ – смежные, тогда $\angle AOC = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Ответ: 70° .



§ 34. Треугольники

1. Произвольный треугольник



$$p = \frac{1}{2}(a + b + c) - \text{полупериметр};$$

α, β, γ – внутренние углы;

$\delta = \beta + \gamma$ – внешний угол треугольника;

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

r – радиус вписанной окружности;

R – радиус описанной окружности;

S – площадь треугольника;

$$S = \frac{1}{2}bh; S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha;$$

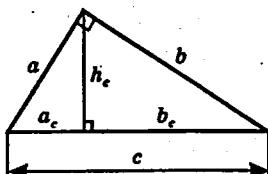
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} - \text{формула Герона}$$

$$S = pr; S = \frac{abc}{4R}; \left. \begin{array}{l} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{array} \right\} \text{неравенство треугольника;}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R - \text{теорема синусов;}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha - \text{теорема косинусов.}$$

2. Прямоугольный треугольник



$(a, b$ – катеты; c – гипотенуза;

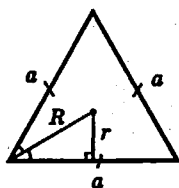
a_c, b_c – проекции катетов на гипотенузу);

$$S = \frac{1}{2}ab; S = \frac{1}{2}c \cdot h_c; R = \frac{1}{2}c; r = \frac{1}{2}(a + b - c);$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (теорема Пифагора);}$$

$h_c^2 = a_c \cdot b_c; a^2 = a_c \cdot c; b^2 = b_c \cdot c; c = 2m_c$, где m_c — медиана; $a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta = b \cdot \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \operatorname{ctg} \beta$.

3. Равносторонний треугольник



$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; a = R \sqrt{3} = 2r \sqrt{3};$$

$$R = 2r; R = \frac{a}{\sqrt{3}}; r = \frac{a}{2\sqrt{3}};$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Некоторые дополнительные соотношения между элементами треугольника

1) Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

2) Длина медианы треугольника выражается формулой $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$, где a, b, c — длины сторон.

3) Длина стороны треугольника выражается формулой $a = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}$, где m_a, m_b, m_c — длины медиан.

4) Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

5) Длина биссектрисы треугольника выражается через длины его сторон a, b и c по формуле...

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

6) Во всяком треугольнике зависимость между его высотами h_a, h_b, h_c и радиусом вписанной окружности

выражается формулой $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$.

7) Определение вида треугольника по его сторонам: пусть a, b и c — стороны треугольника, причем c — наибольшая сторона:

а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;

б) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный;

в) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный.

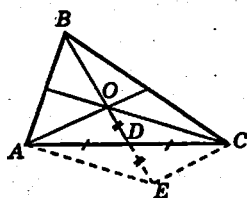
8) Около всякого треугольника можно описать окружность; центром окружности является точка пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам через их середины.

9) Во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности служит точка пересечения биссектрис.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Пример 6. По трем медианам m_a, m_b и m_c $\triangle ABC$, найти длину стороны $AC = b$.

Решение



Так как точка O — точка пересечения медиан, то

$$AO = \frac{2}{3} m_a, \quad OC = \frac{2}{3} m_c, \quad OD = \frac{1}{3} m_b.$$

Достроим $\triangle AOC$ до параллелограмма $AOCE$. Известно, что в параллелограмме сумма квадратов

диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон, т. е. $AC^2 + OE^2 = 2(AO^2 + OC^2)$ или

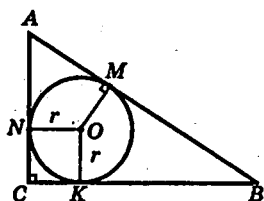
$$b^2 + \frac{4}{9} m_b^2 = 2 \left(\frac{4}{9} m_a^2 + \frac{4}{9} m_c^2 \right), \text{ откуда находим}$$

$$b = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_a^2 + m_c^2) - m_b^2}.$$

$$\text{Ответ: } b = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_a^2 + m_c^2) - m_b^2}.$$

Пример 7. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания окружности делит гипотенузу на отрезки 6 см и 9 см. Найти больший катет.

Решение



$AM = AN$; $BM = BK$ — как касательные, проведенные к окружности из одной точки.

$ON = OK = r$; $ON \perp AC$; $OK \perp CB$, тогда $CNOK$ — квадрат со стороной r . Так как по условию задачи $AM = 6$ см, $MB = 9$ см, то $AB = 6 + 9 = 15$ (см), тогда $AC = AN + NC = AM + r = 6 + r$ и $CB = CK + KB = r + BM = r + 9$.

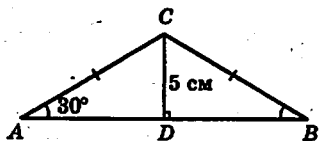
По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$ или $(6 + r)^2 + (9 + r)^2 = 15^2$, $2r^2 + 30r - 108 = 0$, $r^2 + 15r - 54 = 0$, откуда $r_1 = 3$; $r_2 = -18 < 0$. Итак, больший катет $CB = 9 + 3 = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

Пример 8. В равнобедренном треугольнике углы при основании 30° , а высота, опущенная на это основание, равна 5 см. Найти радиус описанной окружности.

Решение

Пусть $\angle A = \angle B = 30^\circ$ и $CD = 5$ см, тогда из $\triangle ADC$ $AC = 2CD = 10$ (см) (по свойству катета, лежащего против угла в 30°). По теореме



синусов для $\triangle ABC$ имеем $\frac{AC}{\sin \angle B} = 2R$ или

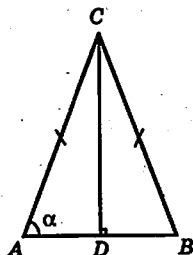
$$\frac{10}{\sin 30^\circ} = 2R, \text{ откуда } R = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10.$$

Ответ: 10 см.

Пример 9. Найти длину основания равнобедренного треугольника, площадь которого равна 25 см^2 , а углы α при основании таковы, что $\operatorname{tg} \alpha = 4$.

Решение

Так как $\triangle ABC$ – равнобедренный ($AC = BC$), то CD – медиана, биссектриса и высота. Тогда $AB \perp CD$ и $AD = DB$.



$$\text{Из } \triangle ADC \operatorname{tg} \alpha = \frac{CD}{AD};$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2AD \cdot CD = AD \cdot CD.$$

По условию задачи $\operatorname{tg} \alpha = 4$, тог-

$$\text{да } \frac{CD}{AD} = 4 \text{ или } CD = 4AD. \quad (1)$$

Так как $S_{\triangle ABC} = 25 \text{ см}^2$, то $AD \cdot CD = 25$.

$$\text{Учитывая (1), имеем } AD \cdot 4AD = 25, AD^2 = \frac{25}{4},$$

$$AD = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ (см)}. \text{ Тогда } AB = 2 \cdot AD = 5 \text{ (см)}.$$

Ответ: 5 см.

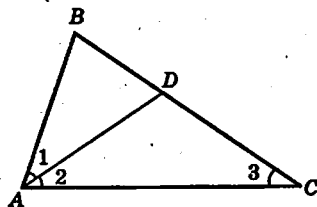
Пример 10. Известно, что в $\triangle ABC$ $\angle A = 2\angle C$, сторона BC на 2 см больше стороны AB , а $AC = 5$ см. Найти AB и BC .

Решение

Способ 1

Проведем биссектрису AD угла A , тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.

В $\triangle ADC$ углы при основании равны, т. е. $\angle 2 = \angle 3$ и $AD = DC$.



Пусть $AB = x$, $AD = DC = y$, тогда $BC = x + 2$, $BD = x + 2 - y$. Заметим, что $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ по двум углам ($\angle B$ – общий, $\angle 1 = \angle 3$). Из подобия имеем

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC} \text{ или } \frac{x}{x+2} = \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5}. \text{ Итак, для нахождения } x \text{ и } y \text{ имеем систему уравнений}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{x+2} = \frac{y}{5}, \\ \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5}, \end{cases} \begin{cases} 5x = xy + 2y, \\ 5x + 10 - 5y = xy, \end{cases} \text{откуда, вычи-}$$

тая из I уравнения II, получим $5y - 10 = 2y$, откуда $y = \frac{10}{3}$, тогда $5x = \frac{10}{3}x + \frac{20}{3}$, $15x - 10x = 20$, $5x = 20$, т. е. $x = 4$.

Итак, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

Ответ: $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

Способ 2

Пусть $\angle C = \alpha$, тогда $\angle A = 2\alpha$ и $\angle B = 180^\circ - 3\alpha$. Полагая $AB = x$, $BC = x + 2$, по теореме синусов имеем

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{x+2}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{\sin (180^\circ - 3\alpha)} \text{ или}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{x+2}{\sin 2\alpha}, \\ \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{5}{\sin 3\alpha}. \end{cases}$$

Из I уравнения системы находим $\frac{x+2}{x} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$,

$$\text{или } 1 + \frac{2}{x} = 2 \cos \alpha. \quad (1)$$

Из II уравнения получим $x = \frac{5 \sin \alpha}{\sin 3\alpha}$.

Так как $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$,

$$\text{то } x = \frac{5}{3 - 4 \sin^2 \alpha}.$$

Подставив значение x в (1), получим уравнение

$$1 + \frac{6 - 8 \sin^2 \alpha}{5} = 2 \cos \alpha, \text{ или}$$

$$5 + 6 - 8(1 - \cos^2 \alpha) = 10 \cos \alpha, \text{ или}$$

$$8 \cos^2 \alpha - 10 \cos \alpha + 3 = 0.$$

Решая уравнение, получим $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Если $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, то, учитывая (1), находим $x = 4$.

Если $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, то получим $1 + \frac{2}{x} = 1$, что невозможно. Итак, $AB = 4$ см, тогда $BC = x + 2 = 6$ (см).

Замечание. Если $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, то $\alpha = 60^\circ$, тогда $\angle C = 60^\circ$, $\angle A = 120^\circ$, что не может быть.

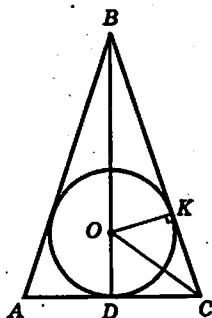
Ответ: $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

Пример 11. Найти радиус r окружности, вписанной в равнобедренный $\triangle ABC$, если $AB = BC = 10$ см и $AC = 12$ см.

Решение

Высоту BD найдем из $\triangle ABD$ по теореме Пифагора, где $AB = 10$ см,

$$AD = \frac{1}{2}AC = 6 \text{ см:}$$



$BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см). Тогда радиус r можно найти различными способами:

1) Из подобия $\triangle BOK$ и $\triangle BDC$: $\frac{OK}{BO} = \frac{DC}{BC}$;

$$\frac{r}{8-r} = \frac{6}{10}, \text{ откуда } r = 3 \text{ см.}$$

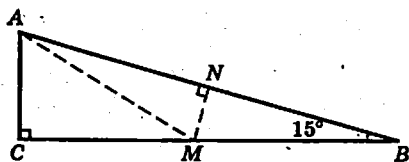
2) По свойству биссектрисы OC $\triangle BCD$: $\frac{OD}{BO} = \frac{DC}{BC}$

или $\frac{r}{8-r} = \frac{6}{10}$ и т. д.

3) По формуле $S = p \cdot r$, где $p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$ — полупериметр, имеем $r = \frac{S}{p} = \frac{6 \cdot 8}{6 + 8} = 3$ (см).

Ответ: 3 см.

Пример 12. Доказать, что площадь прямоугольного треугольника с острым углом в 15° составляет восьмую часть квадрата гипотенузы.



Решение

Способ 1

Пусть $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$.

Проведем AM так, чтобы $\angle BAM = 15^\circ$, тогда $\angle AMC = \angle MAB + \angle MBA = 30^\circ$ (внешний угол $\triangle AMB$); $AM = 2AC = 2b$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°). Значит, и $MB = 2b$.

Построим $MN \perp AB$, тогда $\triangle MNB \sim \triangle ACB$ и $\frac{MB}{AB} = \frac{NB}{BC}$ или $\frac{2b}{c} = \frac{c}{2a}$, откуда $ab = \frac{1}{4}c^2$, и так как $S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2}ab$, то $S_{\triangle ACB} = \frac{1}{8}c^2$, что и требовалось доказать.

Способ 2

$$a = c \cdot \cos 15^\circ; b = c \cdot \sin 15^\circ;$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c^2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \\ &= \frac{1}{4}c^2 (2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) = \frac{1}{4}c^2 \sin 30^\circ = \frac{1}{8}c^2, \text{ что и } \\ &\text{требовалось доказать.} \end{aligned}$$

Пример 13. Существует ли треугольник, стороны которого образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 13$?

Решение

Пусть стороны треугольника (если он существует) равны x , $x + 13$, $x + 26$, тогда по формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ или}$$

$$p = \frac{3}{2}(x+13); p-x = \frac{3}{2}(x+13) - x = \frac{1}{2}(x+39),$$

$p - (x + 13) = \frac{1}{2}(x + 13)$ и $p - (x + 26) = \frac{1}{2}(x - 13)$, тогда

$$S_{\Delta} = \frac{1}{4}(x + 13)\sqrt{3(x + 39)(x - 13)}.$$

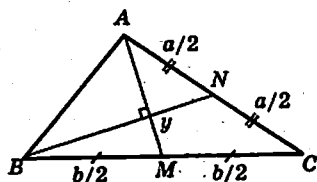
Пусть $x + 39 = m^2$, $x - 13 = 3n^2$, тогда $m^2 - 3n^2 = 52$, откуда $n^2 = \frac{1}{3}(m^2 - 52)$.

Наименьшее целое n достигается при $m = 8$, тогда $n^2 = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$, откуда $x = m^2 - 39 = 64 - 39 = 25$, тогда $x + 13 = 38$, и $x + 26 = 51$.

Итак, стороны треугольника равны 25, 38 и 51. Следует заметить, что такой треугольник не является единственным. Так, например, при $m = 10$, $n^2 = \frac{1}{3}(100 - 52) = 16$, откуда $n = 4$ и $x = m^2 - 39 = 61$, $x + 13 = 74$ и $x + 26 = 87$, т. е. имеем треугольник со сторонами 61, 74, 87 ед.

Ответ: существует, например, со сторонами 25, 38 и 51 ед.

Пример 14. Стороны $\triangle ABC$ равны соответственно $AC = a$, $BC = b$, а медианы AM и BN взаимно перпендикулярны. Найти длину третьей стороны AB .



Решение

Способ 1

Используя теорему косинусов для $\triangle AMC$, $\triangle BNC$ и $\triangle AOB$, имеем

$$AM^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ab \cos \angle C, \quad (1)$$

$$BN^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2 - ab \cos \angle C, \quad (2)$$

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C. \quad (3)$$

Так как по условию задачи $AM \perp BN$, то из $\triangle AOB$ имеем $AB^2 = AO^2 + BO^2$. (4)

По свойству медианы треугольника имеем:

$$BO = \frac{2}{3}BN, AO = \frac{2}{3}AM, \text{ тогда (4) примет вид}$$

$$AB^2 = \frac{4}{9}(AM^2 + BN^2). \quad (5)$$

Упростим (5) с учетом (1) и (2):

$$AB^2 = \frac{4}{9}(a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ab \cos \angle C + b^2 + \frac{1}{4}a^2 - ab \cos \angle C)$$

$$\text{или } AB^2 = \frac{1}{9}(5a^2 + 5b^2 - 8ab \cos \angle C). \quad (6)$$

Сравнивая (3) и (6), получим $4(a^2 + b^2) = 10ab \cos \angle C$,

$$\text{откуда } \cos \angle C = \frac{2(a^2 + b^2)}{5ab}, \text{ тогда (3) примет вид}$$

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{2(a^2 + b^2)}{5ab} \text{ или } AB^2 = \frac{1}{5}(a^2 + b^2),$$

$$\text{откуда } AB = \sqrt{\frac{1}{5}(a^2 + b^2)}.$$

$$\text{Ответ: } AB = \sqrt{\frac{1}{5}(a^2 + b^2)}.$$

Способ 2

Пусть $BO = 2n$,
 $ON = n$, $AO = 2m$,
 $OM = m$ (по свойству медианы).

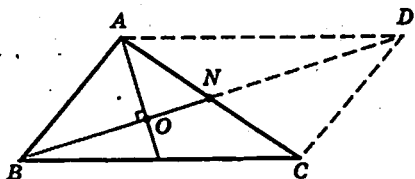
Дополним $\triangle ABC$ до параллелограмма

$ABCD$, тогда по свойству последнего имеем

$$2(AB^2 + BC^2) = BD^2 + AC^2 \text{ или, обозначив } AB = x, \text{ имеем } 2(x^2 + b^2) = 36n^2 + a^2. \quad (1)$$

$$\text{Из } \triangle AOB \text{ и } \triangle AON \text{ имеем: } x^2 = 4m^2 + 4n^2 \text{ и } 4m^2 + n^2 = \frac{1}{4}n^2, \text{ откуда } x^2 - \frac{1}{4}a^2 = 3n^2, \text{ значит}$$

$$n^2 = \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{1}{4}a^2\right). \quad (2)$$



Учитывая (2), равенство (1) примет вид

$$2(x^2 + b^2) = 12(x^2 - \frac{1}{4}a^2) + a^2 \text{ или } x^2 + b^2 = 6x^2 - a^2,$$

$$5x^2 = a^2 + b^2, \text{ откуда } x = AB = \sqrt{\frac{1}{5}(a^2 + b^2)}.$$

$$\text{Ответ: } AB = \sqrt{\frac{1}{5}(a^2 + b^2)}.$$

Пример 15. Найти площадь треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию с разностью $d = 2$, если известно, что произведение радиуса вписанной и описанной окружностей равно 130.

Решение

Пусть R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей. Известно, что если a, b, c —

стороны треугольника, то $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{p}$, где

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c) \text{ — полупериметр.}$$

Согласно условию задачи $R \cdot r = 130$.

Пусть $a = x$, $b = x + 2$, $c = x + 4$ — стороны треугольника, образующие арифметическую прогрессию с раз-

$$\text{ностью } d = 2, \text{ тогда } R \cdot r = \frac{abc}{4S} \cdot \frac{S}{p} = \frac{abc}{4p} =$$

$$= \frac{x(x+2)(x+4)}{2(3x+6)} = \frac{x(x+4)}{6} = 130, \text{ или } x^2 + 4x - 780 =$$

$= 0$, откуда $x_1 = 26$, $x_2 = -30$ (не удовлетворяет так как x — сторона треугольника). Итак, $x = 26$, тогда $x + 2 =$

$$= 28, x + 4 = 30, \text{ значит, } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{где } p = \frac{1}{2}(26 + 28 + 30) = 42, S = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} =$$

$$= \sqrt{14 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} = 14 \cdot 4 \cdot 6 = 336 \text{ (кв. ед.)}.$$

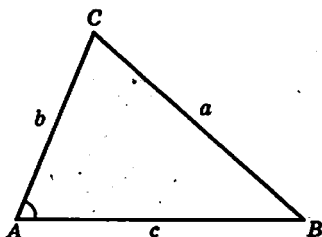
Ответ: 336 кв. ед.

Пример 16. В $\triangle ABC$ длины сторон a, b, c и площадь S связаны соотношением

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} (b^2 + c^2 - a^2). \text{ Найти } \angle A.$$

Решение.

Пусть $BC = a, AC = b, AB = c$.



Известно, что $S_{\triangle} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \angle A$. Кроме того, по теореме косинусов имеем $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$, откуда $bc = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot \cos \angle A}$, тогда $S_{\triangle} = \frac{1}{4} (b^2 + c^2 - a^2) \operatorname{tg} \angle A$.

По условию задачи $S_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}}{4} (b^2 + c^2 - a^2)$ или, сравнивая правые части полученных равенств, имеем

$\frac{1}{4} (b^2 + c^2 - a^2) \operatorname{tg} \angle A = \frac{\sqrt{3}}{4} (b^2 + c^2 - a^2)$, откуда имеем две возможности:

1) $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, т. е. $b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow \triangle ABC$ прямоугольный, где a — гипотенуза, b и c — катеты, тогда $\angle A = 90^\circ$. Но равенство $b^2 + c^2 = a^2$ невозможно, так как тогда, учитывая условие задачи, получим $S = 0$.

2) $b^2 + c^2 - a^2 \neq 0$, тогда имеем $\operatorname{tg} \angle A = \sqrt{3}$, $\angle A = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

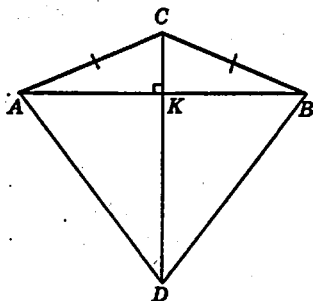
Пример 17. На основании равнобедренного треугольника построен правильный треугольник, площадь которого в 3 раза больше площади данного. Найти углы треугольника.

Решение

Пусть $AB = 2x, AC = y$.

По условию задачи

$$S_{\triangle ABD} = 3S_{\triangle ABC}.$$



Так как $\triangle ABD$ — правильный, то

$$S_{\triangle ABD} = \frac{(AB)^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}x^2, \quad (1)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CK = x \cdot CK. \quad (2)$$

$$\text{Из } \triangle AKC \text{ } CK = \sqrt{y^2 - x^2}. \quad (3)$$

Следовательно, $S_{\triangle ABC} = x \cdot \sqrt{y^2 - x^2}$. Так как

$$S_{\triangle ABD} = 3S_{\triangle ABC}, \text{ то, учитывая (1), (2) и (3), получим}$$

$$\sqrt{3}x^2 = 3x\sqrt{y^2 - x^2} \text{ или } 3x^2 = 9(y^2 - x^2), x > 0,$$

$$4x^2 = 3y^2, 2x = \sqrt{3}y, \text{ откуда } \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ и так как}$$

$\cos \angle CAK = \frac{x}{y}$, то $\cos \angle CAK = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $\angle CAK = 30^\circ$,
тогда $\angle CBK = 30^\circ$ и $\angle C = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$.
Итак, углы ABC равны $30^\circ, 30^\circ$ и 120° .

Ответ: $30^\circ, 30^\circ$ и 120° .

Пример 18. В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а разность двух неравных высот равна отношению периметра к боковой стороне. Найти боковую сторону.

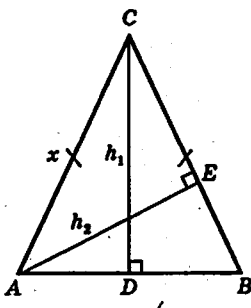
Решение

Пусть основание $AB = 10$ см, $AC = BC = x$. Пусть h_1 и h_2 — высоты треугольника, причем $h_1 > h_2$.

По условию задачи $h_1 - h_2 = \frac{P}{x}$, где P — периметр $\triangle ABC$

$$h_1 - h_2 = \frac{2x + 10}{x} = \frac{2(x + 5)}{x}. \quad (1)$$

$$\text{Из } \triangle ADC \text{ } x^2 = h_1^2 + 25, \quad (2)$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h_1 = 5h_1. \quad (3)$$

С другой стороны, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} x h_2. \quad (4)$

Сравнивая (3) и (4), имеем

$$5h_1 = \frac{1}{2} x h_2, \text{ откуда } h_2 = \frac{10h_1}{x}, \text{ тогда (1) примет вид}$$

$$h_1 - \frac{10h_1}{x} = \frac{2(x+5)}{x}, \text{ откуда } h_1 = \frac{2(x+5)}{x-10}.$$

Учитывая (2), имеем

$$x^2 = \frac{4(x+5)^2}{(x-10)^2} + 25 \text{ или } (x^2 - 25)(x-10)^2 = 4(x+5)^2.$$

Так как по смыслу задачи $x > 0$, то $x + 5 \neq 0$, тогда из последнего равенства получим

$$(x-5)(x-10)^2 = 4(x+5) \text{ или, упростив, имеем}$$

$$x^3 - 25x^2 + 196x - 520 = 0. \quad (5)$$

Можно убедиться в том, что $x = 13$ — корень уравнения (5), тогда левую часть уравнения можно преобразовать так: $x^2(x-13) - 12x(x-13) + 40(x-13) = 0$, $(x-13)(x^2 - 12x + 40) = 0$, откуда $x = 13$.

Уравнение $x^2 - 12x + 40 = 0$ не имеет действительных корней, так как $D < 0$.

Итак, боковая сторона $\triangle ABC$ равна 13 см.

$AC = CB = 13$ см.

Ответ: 13 см.

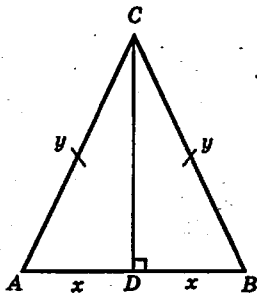
Пример 19. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 12, а сумма радиусов вписанной и описанной окружностей равна $83/8$. Найти стороны треугольника.

Решение

Пусть $AC = BC = y > 0$, $AB = 2x > 0$.

По условию $CD = 12$, тогда из $\triangle ADC$ получим

$$y^2 - x^2 = 144. \quad (1)$$



Известно, что $S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$, где $a = b = y, c = AB = 2x$,

$$\text{тогда } S_{\triangle ABC} = \frac{xy^2}{2R}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{С другой стороны, } S_{\triangle ABC} &= p \cdot r = \frac{1}{2}(2y + 2x)r = \\ &= (x + y)r; \quad S_{\triangle ABC} = (x + y)r. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Кроме того, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD = 12x. \quad (4)$$

Учитывая (4), соотношения (2) и (3) примут вид

$$\frac{xy^2}{2R} = 12x \text{ или } y^2 = 24R, \text{ откуда } R = \frac{y^2}{24}. \quad (5)$$

Аналогично из (3) имеем $(x + y)r = 12x$, откуда

$$r = \frac{12x}{x + y}. \quad (6)$$

По условию задачи $R + r = \frac{83}{8}$, тогда, складывая

$$(5) \text{ и } (6), \text{ получим } \frac{12x}{x + y} + \frac{y^2}{24} = \frac{83}{8} \text{ или, учитывая (1),}$$

$$\text{имеем систему уравнений } \begin{cases} \frac{12x}{x + y} + \frac{y^2}{24} = \frac{83}{8}, \\ y^2 - x^2 = 144. \end{cases}$$

Заметим, что решение полученной системы обычным способом, например, подстановкой, приводит к большим техническим сложностям. Приведем другой способ решения с помощью подстановки: $y = tx$, где $t > 0$.

$$\begin{cases} \frac{12x}{x + tx} + \frac{t^2 x^2}{24} = \frac{83}{8}, \\ t^2 x^2 - x^2 = 144; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{12}{1 + t} + \frac{t^2 x^2}{24} = \frac{83}{8}, \\ x^2 = \frac{144}{t^2 - 1}. \end{cases}$$

Подставив значение x^2 в I уравнение полученной системы, получим после упрощения $35t^2 - 96t + 13 = 0$,

откуда $t_1 = \frac{13}{5}$, $t_2 = \frac{1}{7}$.

Учитывая подстановку $y = tx$, получим две системы:

$$1) \begin{cases} y = \frac{13}{5}x, \\ y^2 - x^2 = 144; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = \frac{1}{7}x, \\ y^2 - x^2 = 144. \end{cases}$$

Из системы 1 имеем $x = 5$, $y = 13$.

Система 2 не имеет решений.

Итак, $x = 5$, $y = 13$, тогда $AB = 2x = 10$ и $AC = BC = 13$.

Ответ: 13, 13, 10.

Пример 20. В тупоугольном равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 1, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Найти площадь треугольника.

Решение
Пусть $AB = BC = 1$,

$AF = \frac{\sqrt{5}}{2}$ — медиана,

BE — высота $\triangle ABC$.

Достроим $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABCD$, тогда по свойству параллелограмма имеем

$BC^2 + AD^2 = 2(AB^2 + AC^2)$ или

$1 + (\sqrt{5})^2 = 2(1 + AC^2)$, откуда находим $AC = \sqrt{2}$,

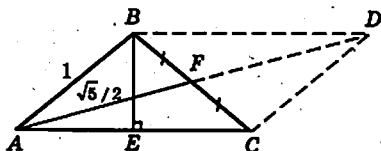
тогда $AE = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Из $\triangle AEB$ по теореме Пифагора

$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2}$ или

$BE = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; следовательно,

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$.



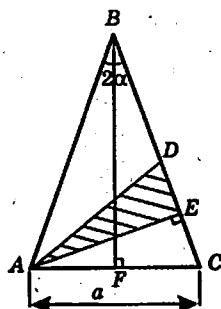
Итак, $S_{\triangle ABC} = 0,5$ (кв. ед.).

Ответ: 0,5.

Пример 21. В равнобедренном треугольнике с основанием a острый угол при вершине равен 2α . Найти площадь треугольника, заключенного между медианой и высотой, проведенными к боковой стороне.

Решение

Пусть в $\triangle ABC$ $AB = BC$, $AC = a$. $\angle B = 2\alpha$, AE — высота к боковой стороне BC , AD — медиана, тогда



$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AE \cdot DE. \quad (1)$$

Из $\triangle BFC$ $\angle C = 90^\circ - \alpha$, из $\triangle AEC$ $\angle EAC = 90^\circ - \angle C = \alpha$,

тогда $AE = a \cos \alpha$ и $DE = DC - EC = \frac{1}{2} BC - EC$. (2)

Из $\triangle AEC$ $EC = AC \sin \alpha = a \sin \alpha$, тогда (2) примет вид $DE = \frac{1}{2} BC - a \sin \alpha$.

Из $\triangle BFC$ $BC = \frac{FC}{\sin \alpha} = \frac{a}{2 \sin \alpha}$, значит,

$$DE = \frac{a}{4 \sin \alpha} - a \sin \alpha = \frac{a}{4} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - 4 \sin \alpha \right). \quad (3)$$

Учитывая (3) и $AE = a \cos \alpha$, равенство (1) примет вид

$$\begin{aligned} S_{\triangle ADE} &= \frac{1}{2} a \cos \alpha \cdot \frac{a}{4} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - 4 \sin \alpha \right) = \\ &= \frac{a^2}{8} \cos \alpha \cdot \frac{1 - 4 \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{a^2}{8} (1 - 4 \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg} \alpha \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

Замечание. Выражение в скобке можно разложить на множители (привести к виду, удобному для логарифмирования).

$$1 - 4 \sin^2 \alpha =$$

$$= 4 \left(\frac{1}{4} - \sin^2 \alpha \right) = 4 \left(\frac{1}{2} - \sin \alpha \right) \left(\frac{1}{2} + \sin \alpha \right) =$$

$$= 4 (\sin 30^\circ - \sin \alpha) (\sin 30^\circ + \sin \alpha) =$$

$$= 4 \cdot \left(2 \sin \frac{30^\circ - \alpha}{2} \cos \frac{30^\circ + \alpha}{2} \right) \cdot \left(2 \sin \frac{30^\circ + \alpha}{2} \cos \frac{30^\circ - \alpha}{2} \right) =$$

$$= 4 \cdot \left(2 \sin \frac{30^\circ - \alpha}{2} \cos \frac{30^\circ - \alpha}{2} \right) \cdot \left(2 \sin \frac{30^\circ + \alpha}{2} \cos \frac{30^\circ + \alpha}{2} \right) =$$

$$= 4 \sin (30^\circ - \alpha) \sin (30^\circ + \alpha), \text{ тогда}$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{a^2}{2} \sin (30^\circ - \alpha) \sin (30^\circ + \alpha) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Ответ: $\frac{a^2}{8} (1 - 4 \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg} \alpha$ или

$$\frac{a^2}{2} \sin (30^\circ - \alpha) \sin (30^\circ + \alpha) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Пример 22. Доказать, что если a и b — катеты, c — гипотенуза, то $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, где r — радиус вписанной окружности.

Решение

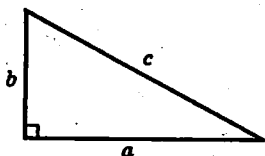
Способ 1

Идея решения задачи заключается в сравнении площадей.

$$S = \frac{1}{2} ab; \text{ с другой сторо-}$$

$$\text{ны — } S = pr = \frac{1}{2}(a + b + c)r,$$

откуда, сравнивая правые части, имеем



$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a+b+c)r, \text{ откуда } r = \frac{ab}{a+b+c}. \quad (1)$$

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$ или $(a+b)^2 - 2ab = c^2$, значит, $2ab = (a+b)^2 - c^2 = (a+b+c)(a+b-c)$, тогда (1) примет вид

$$r = \frac{2ab}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b-c}{2}.$$

Итак, $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$, что и требовалось доказать.

Способ 2

Из центра O вписанной окружности проведем радиусы OD , OE и OF в точки касания, тогда $OD \perp AC$, $OF \perp BC$, $OE \perp AB$.

Следовательно, $CFOD$ — квадрат, тогда $OD = OF = OE = r$, $AD = AC - CD = b - r$, $BF = BC - FC = a - r$. Но $AD = AE$ и $BF = BE$ как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки. Значит, $AE = b - r$, $BE = a - r$ и $AB = AE + BE$, т. е. $c = (b - r) + (a - r)$,

откуда получим $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$, что и требовалось доказать.

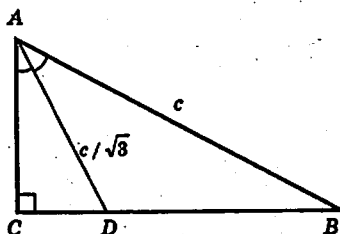
Пример 23. Найти катеты прямоугольного треугольника, если гипотенуза равна c , а биссектриса одного из острых углов равна $\frac{c}{\sqrt{3}}$.

Решение

Пусть $\angle CAD = \angle DAB = \alpha$.

Из $\triangle ACD$ $AC = AD \cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{3}} \cos \alpha$.

Из $\triangle ABC$ $AC = AB \cos 2\alpha = c \cos 2\alpha$.



Сравнивая правые части, имеем

$$\frac{c}{\sqrt{3}} \cos \alpha = \cos 2\alpha \text{ или } \sqrt{3} \cos 2\alpha - \cos \alpha = 0.$$

Так как $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$, то полученное уравнение примет вид: $2\sqrt{3} \cos^2 \alpha - \cos \alpha - \sqrt{3} = 0$, откуда находим $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Заметим, что $\angle A < 90^\circ$, тогда $\cos \alpha > 0$, так что значение $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ не подходит. Если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\alpha = 30^\circ$, значит, $\angle CAD = \angle DAB = 30^\circ$, а $\angle CAB = 60^\circ$ и $\angle B = 30^\circ$. Следовательно, $AC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} c$, $BC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $AC = \frac{c}{2}$, $BC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Замечание. Попытка решить задачу алгебраическим способом приводит к решению системы трех уравнений с тремя неизвестными, например: $AC = x$,

$$BC = y, CD = z, \text{ тогда } \begin{cases} x^2 + y^2 = c^2, \\ x^2 + z^2 = \frac{1}{3} c^2, \text{ и т. д.} \\ \frac{x}{c} = \frac{z}{y-z} \end{cases}$$

Пример 24. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b . Найти длину биссектрисы прямого угла.

Решение

Условие этой задачи заимствовано из книги Е. А. Островского и др. «Задачи по математике на вступительных экзаменах в вузах», изд. 2-е, № 271, с. 94. Приведем другие, более простые способы решения.

Способ 1

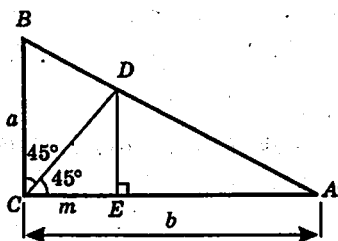
Из точки D опустим перпендикуляр DE на катет $AC = b$. Тогда $\angle CDE = 45^\circ$, т. е. $CE = DE = m$. Из $\triangle CED$ $CD = m\sqrt{2}$.

Заметим, что $\triangle AED \sim \triangle ACB$ (как прямоугольные с общим углом A).

Тогда $\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$ или $\frac{m}{b-m} = \frac{a}{b}$, откуда $m = \frac{ab}{a+b}$.

Значит, $CD = m\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.



Способ 2

Пусть $BD = x > 0$, $AD = y > 0$. По свойству биссектрисы треугольника

имеем $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.

С другой стороны, из $\triangle ABC$ имеем: $(x+y)^2 = a^2 + b^2$.

Полученные уравнения образуют систему

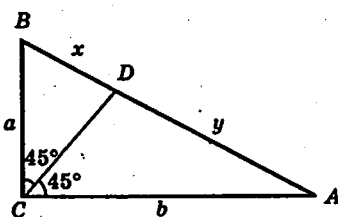
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{a}{b}, \\ (x+y)^2 = a^2 + b^2. \end{cases}$$

Из I уравнения системы $y = \frac{b}{a}x$, тогда уравнение при-

мер вид $(x + \frac{b}{a}x)^2 = a^2 + b^2$, откуда $x^2 = \frac{(a^2 + b^2)a^2}{(a+b)^2}$. (1)

Из $\triangle ABCD$ по теореме косинусов имеем $x^2 = a^2 + CD^2 - 2a \cdot CD \cdot \cos 45^\circ$ или, учитывая (1), по-

лучим $\frac{(a^2 + b^2)a^2}{(a+b)^2} = a^2 + CD^2 - \sqrt{2}a \cdot CD$ или



$CD^2 - \sqrt{2} a \cdot CD + \frac{2a^3b}{(a+b)^2} = 0$ — квадратное уравнение относительно CD .

Решая уравнение, находим

$$CD = \frac{\sqrt{2}a(a+b) \pm \sqrt{2}a(a-b)}{2(a+b)}.$$

Если $a > b$, то $CD = \frac{\sqrt{2}a(a+b+a-b)}{2(a+b)} = \frac{\sqrt{2}a^2}{a+b}.$

Если $a < b$ (как в нашем случае), то $CD = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}.$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}a^2}{a+b}$, если $a > b$; $\frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$, если $a < b$.

Способ 3 (рис. см. способ 2)

Пусть $\angle A = \alpha$, тогда BCD по теореме синусов имеем

$$\frac{CD}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{x}{\sin 45^\circ} \text{ или } \frac{CD}{\cos \alpha} = \sqrt{2} x. \quad (1)$$

Кроме того, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Из $\triangle ACB$ $(x+y)^2 = a^2 + b^2$, от-

куда $x + y = \sqrt{a^2 + b^2}$, $y = \frac{b}{a} x$, тогда $x + \frac{b}{a} x =$

$= \sqrt{a^2 + b^2}$; откуда $x = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{a+b}$, тогда, учитывая

(1), получим

$$\frac{CD}{\cos \alpha} = \frac{a\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{a+b}, \quad CD = \frac{a\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{a+b} \cos \alpha.$$

Но $\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{x+y} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, значит, $CD = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}.$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}ab}{a+b}.$

Замечание. Можно привести по крайней мере еще два способа решения.

Пример 25. Доказать, что для любого прямоугольного треугольника справедливо неравенство $c \geq (3\sqrt{3} - 1)r$, где c — гипотенуза, r — радиус вписанной окружности.

Решение

Известно, что среднее арифметическое n положительных чисел не меньше их среднего геометрического, поэтому, в частности,

$$\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ или}$$

$$\frac{3p - (a+b+c)}{3} = \frac{3p - 2p}{3} =$$

$$= \frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Но $S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr$, тогда

$$\frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{S^2}{p}} = \sqrt[3]{\frac{p^2 r^2}{p}} = \sqrt[3]{pr^2}, \text{ или } \frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{pr^2},$$

$$\text{или } \frac{p^3}{27} \geq pr^2, \text{ откуда } p \geq 3\sqrt{3}r. \quad (1)$$

Так как $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ и $r = \frac{S}{p} = \frac{ab}{a+b+c}$, то неравенство (1) примет вид:

$$\frac{1}{2}(a+b+c) \geq 3\sqrt{3} \cdot \frac{ab}{a+b+c}, \text{ или}$$

$$(a+b+c)^2 \geq 6\sqrt{3}ab, \text{ или } a^2 + b^2 + c^2 + 2ab +$$

$$+ 2ac + 2bc \geq 6\sqrt{3}ab.$$

Так как $a^2 + b^2 = c^2$, то $2c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \geq$

$$\geq 6\sqrt{3}ab \text{ или } c(a+b+c) \geq (3\sqrt{3} - 1)ab.$$

Но $a+b+c = 2p$, тогда

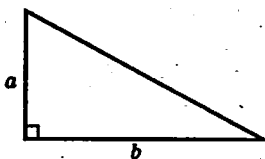
$2pc \geq (3\sqrt{3} - 1)ab$, и так как $ab = 2S_{\Delta}$, то имеем
 $2pc \geq 2(3\sqrt{3} - 1)S$, или, разделив обе части неравенства на $2p$ и учитывая, что $\frac{S}{p} = r$, получим

$c \geq (3\sqrt{3} - 1)\frac{S}{p}$, или $c \geq (3\sqrt{3} - 1)r$, что и требовалось доказать.

Пример 26. Найти углы прямоугольного треугольника, если известно, что $a^2 + b^2 = \frac{8}{\sqrt{3}}S$, где a и b — катеты, S — площадь.

Решение

Известно, что $S = \frac{1}{2}ab$, где a и b — катеты.



По условию $a^2 + b^2 = \frac{8}{\sqrt{3}}S$, тогда получим

$$a^2 + b^2 = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}ab, \text{ или } \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{4}{\sqrt{3}}, \text{ или}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{4}{\sqrt{3}}. \quad (1)$$

Пусть $\frac{a}{b} = x$, тогда (1) примет вид

$$x + \frac{1}{x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ или } x^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}x + 1 = 0, \text{ откуда находим}$$

$$x_1 = \sqrt{3}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Так как } \frac{a}{b} = x = \operatorname{tg} \alpha, \text{ то}$$

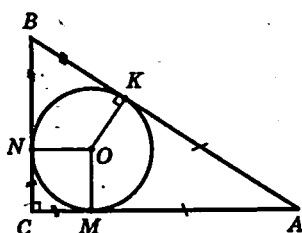
$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, т. е. углы прямоугольного треугольника равны 30° , 60° и 90° .

Ответ: 30° , 60° и 90° .

Пример 27. Доказать, что площадь прямоугольного треугольника можно найти по формуле $S = (2R + r)r$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

Решение

Способ 1



Пусть в $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) $OM = ON = OK = r$ — радиус вписанной окружности.

Так как $\triangle ABC$ — прямоугольный, то AB — диаметр описанной окружности, тогда $AB = 2R$.

Известно, что $S_{\triangle} = p \cdot r$, где p — полупериметр.

По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем $AC + BC = 2r + AB$,

$$\text{тогда } S = \frac{1}{2}(AC + BC + AB)r = \frac{1}{2}(2r + AB + AB)r = (r + AB)r = (r + 2R)r.$$

Итак, $S = (2R + r)r$, что и требовалось доказать.

Способ 2

Так как $\triangle ABC$ — прямоугольный, то $AB = 2R$, тогда

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BC. \text{ Пусть } AC = x > 0, BC = y > 0, \text{ тогда}$$

$$S = \frac{1}{2}xy. \quad (1)$$

$$\text{Из } ABC \quad x^2 + y^2 = 4R^2. \quad (2)$$

$$\text{Известно, что } r = \frac{AC + BC - AB}{2} \text{ или}$$

$$r = \frac{x + y - 2R}{2}, \text{ откуда } x + y = 2(R + r). \quad (3)$$

$$\text{Из (2) и (3) имеем систему } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4R^2 \\ x + y = 2(R + r) \end{cases}$$

Упростим 1 уравнение системы: $(x + y)^2 - 2xy = 4R^2$ или, учитывая (3), имеем: $4(R + r)^2 - 2xy = 4R^2$, от-

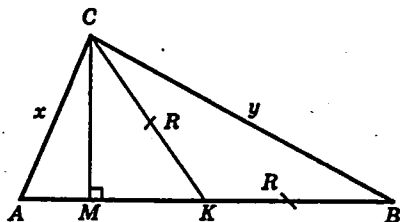
куда $2xy = 4(R+r)^2 - 4R^2$ или $\frac{1}{2}xy = (R+r) - R^2$; но

$\frac{1}{2}xy = S$, тогда $S = R^2 + 2Rr + r^2 - R^2$ или $S = r(2R+r)$, что и требовалось доказать.

Пример 28. В прямоугольном $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) разность между длинами медианы CK и высоты CM равна 7 см. Найти отношение R/r , если $S_{\triangle ABC} = 144 \text{ см}^2$.

Решение

Так как $\triangle ABC$ - прямоугольный, то $AB = 2R$ - диаметр описанной окружности, где $CK = AK = KB = R$. Пусть $AC = x > 0$, $BC = y > 0$, тогда



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}xy =$$

$$= pr = 144, \text{ откуда } xy = 288;$$

$$p = \frac{1}{2}(x + y + 2R) \text{ или } \frac{1}{2}(x + y + 2R)r = 144,$$

$$r = \frac{288}{x + y + 2R}, \text{ тогда}$$

$$\frac{R}{r} = R : \frac{x + y - 2R}{2} = \frac{2R}{x + y - 2R}, \text{ где } r = \frac{x + y - 2R}{2}.$$

По условию задачи $CK - CM = 7$ см или $R - CM = 7$.

$$\text{Но } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot CM, \text{ или } xy = 2R \cdot CM,$$

$$\text{откуда } CM = \frac{xy}{2R} = \frac{244}{2R} = \frac{144}{R}. \text{ Следовательно, имеем}$$

$$\text{уравнение } R - \frac{144}{R} = 7 \text{ или } R^2 - 7R - 144 = 0, \text{ откуда}$$

$$R = 16, R = -9 \text{ (не подходит, так как } R > 0).$$

Итак, $R = 16$. Кроме того, из $\triangle ACB$ $x^2 + y^2 = 4R^2$

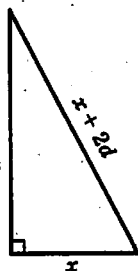
или $x^2 + y^2 = 1024$, и так как $xy = 288$, то получим

систему
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1024, \\ xy = 288; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1024, \\ 2xy = 576. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы и учитывая, что $x + y > 0$, имеем $(x + y)^2 = 1600$, откуда $x + y = 40$.

Тогда
$$\frac{R}{r} = \frac{2R}{x + y - 2R} = \frac{32}{40 - 32} = \frac{32}{8} = 4.$$

Ответ: 4.



Пример 29. Периметр прямоугольного треугольника равен 12 см. Найти радиус вписанной окружности, если известно, что стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию.

Решение

Пусть стороны треугольника равны $x, x + d, x + 2d$, где d — разность прогрессии. Так как по условию $P = 12$ см, то получим $x + (x + d) + (x + 2d) = 12$ или $3x + 3d = 12$, откуда $x + d = 4$. (1)

С другой стороны, по теореме Пифагора $x^2 + (x + d)^2 = (x + 2d)^2$, откуда $xd + d^2 = 4$. (2)

Равенства (1) и (2) рассматриваем как систему

$$\begin{cases} xd + d^2 = 4, \\ x + d = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} d(1 + d) = 4, \\ x + d = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} d = 1, \\ x = 3, \end{cases} \quad \text{тогда}$$

$$r = \frac{1}{2}(x + (x + d) - (x + 2d)) = \frac{x - d}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1.$$

Итак, $r = 1$.

Ответ: 1 см.

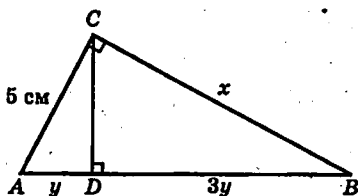
Пример 30. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит ее в отношении 1:3. Найти площадь треугольника, если один из катетов равен 5 см.

Решение

Пусть в $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$,

$$AC = 5 \text{ см}, \quad \frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}.$$

Пусть $AD = y > 0$, $BC = x > 0$, тогда $DB = 3y$, $AB = 4y$.



По теореме Пифагора из $\triangle ABC$ имеем

$$x^2 + 25 = 16y^2. \quad (1)$$

С другой стороны, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot 4y$, или $5x = 4y \cdot CD$. Но $CD^2 = AD \cdot DB$ (по свойству перпендикуляра CD , опущенного из вершины прямого угла C на гипотенузу AB). Значит, $CD^2 = 3y^2$, $CD = \sqrt{3} y$, тогда $5x = 4y \cdot \sqrt{3} y$ или $5x = 4\sqrt{3} y^2$. (2)

Соотношения (1) и (2) рассматриваем как систему

$$\begin{cases} x^2 + 25 = 16y^2, \\ 5x = 4\sqrt{3} y^2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{x^2 + 25}{5x} = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

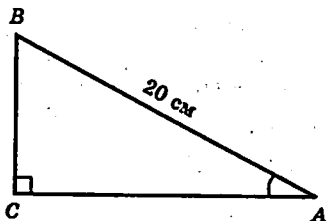
$$\sqrt{3} x^2 - 20x + 25\sqrt{3} = 0, \text{ откуда } x_1 = 5\sqrt{3}, \quad x_2 = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Корень $x_2 = \frac{5}{\sqrt{3}} < 5$ — не годится, так как $CB > AC$.

$$\text{Тогда } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{2} (\text{см}^2).$$

$$\text{Ответ: } \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ см}^2.$$

Пример 31. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 20 см, а косинус одного угла равен 0,8. Найти больший катет.



Решение

Пусть в $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $AB = 20$ см, $\cos \angle A = 0,8$.

Пусть AC — больший катет, тогда $\cos \angle A = \frac{AC}{AB}$, откуда $AC = 20 \cdot 0,8 = 16$ (см).

Ответ: 16 см.

Пример 32. В прямоугольном треугольнике тангенс одного угла равен 0,6. Меньший катет равен 3 см. Найти больший катет.

Решение (см. рис. к задаче № 31)

Пусть в $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $\operatorname{tg} \angle A = 0,6$, $BC = 3$ см — меньший катет, тогда по определению тангенса ост-

рого угла, имеем $\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC}$ или $0,6 = \frac{3}{AC}$, откуда

$$AC = \frac{3}{0,6} = 5 \text{ (см)}.$$

Ответ: 5 см.

Пример 33. Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника равны соответственно 2 и 5. Найти больший катет треугольника.

Решение

Пусть $r = 2$ и $R = 5$ — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей. Пусть x — больший катет, y — меньший.

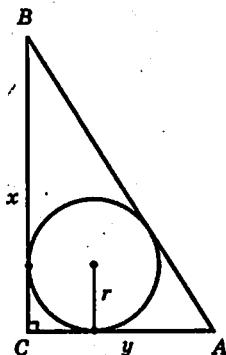
Известно, что в прямоугольном

треугольнике $r = \frac{1}{2}(x + y - z)$, где

$z = AB$ — диаметр описанной окружности (так как вокруг любого прямоугольного треугольника можно описать окружность, $\angle C = 90^\circ$).

Значит, $z = 2R = 10$, $x + y - z = 2r$ или $x + y = 14$.

Кроме того, $x^2 + y^2 = z^2$ или $x^2 + y^2 = 100$. Решая систему



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x + y = 14, \end{cases} \text{ находим больший катет } x = 8.$$

Ответ: 8.

§ 35. Четырехугольники

1. Многоугольник

(n — число сторон (углов))

1) Основные свойства:

$180^\circ(n - 2)$ — сумма внутренних углов;

360° — сумма внешних углов;

$\frac{1}{2}n(n - 3)$ — число диагоналей выпуклого n -угольника.

2) Правильный многоугольник

(α_n — величина угла, a_n — сторона)

$$\alpha_n = \frac{n - 2}{n} \cdot 180^\circ; a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n};$$

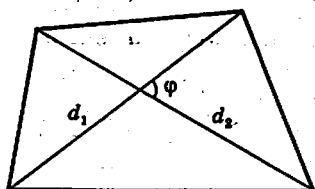
$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}; \alpha_n = r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

3) Описанный многоугольник

(p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности)

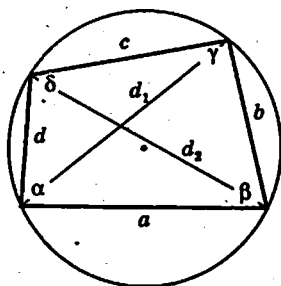
$$S = p \cdot r.$$

2. Произвольный выпуклый четырехугольник



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

3. Вписанный четырехугольник



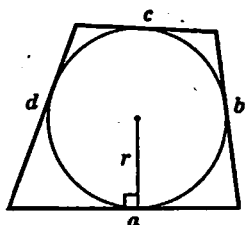
$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$ — сумма противоположных углов равна 180° ;

$ac + bd = d_1 d_2$ (теорема Птолемея);

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ — полупериметр.

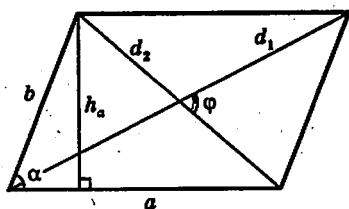
4. Описанный четырехугольник



$a + c = b + d$ — суммы противоположных сторон равны.

$$S = p \cdot r.$$

5. Параллелограмм

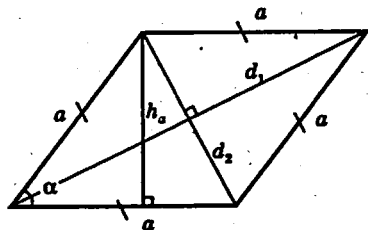


$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

$$S = ah_a = ab \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

6. Ромб

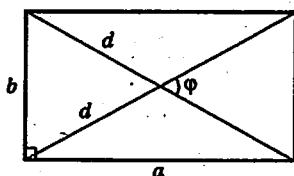


$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2,$$

$$S = ah_a = a^2 \sin \alpha =$$

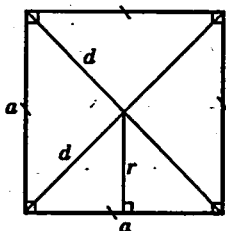
$$= \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2.$$

7. Прямоугольник



$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi.$$

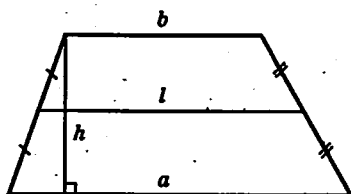
8. Квадрат



$$\begin{aligned} d & \text{ — диагональ,} \\ a & = R\sqrt{2}; \quad a = 2r, \\ d & = 2R, \end{aligned}$$

$$S = a^2 = \frac{1}{2} d^2.$$

9. Трапеция



$$l = \frac{1}{2}(a + b) \text{ — средняя линия трапеции;}$$

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h = l \cdot h \text{ — площадь трапеции.}$$

Решение задач

Пример 1. Найти сумму углов выпуклого: а) четырехугольника; б) пятиугольника; в) шестиугольника; г) десятиугольника.

Решение

Известно, что сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$, тогда:

$$\begin{aligned} \text{а) } 180^\circ(4 - 2) &= 360^\circ; & \text{б) } 180^\circ(5 - 2) &= 540^\circ; \\ \text{в) } 180^\circ(6 - 2) &= 720^\circ; & \text{г) } 180^\circ(10 - 2) &= 1440^\circ. \end{aligned}$$

Ответ: а) 360° ; б) 540° ; в) 720° ; г) 1440° .

Пример 2. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен:

$$\text{а) } 90^\circ; \text{ б) } 60^\circ; \text{ в) } 108^\circ; \text{ г) } 135^\circ?$$

Решение

Если выпуклый многоугольник имеет n сторон (углов), то получим уравнение:

а) $180^\circ(n-2) = 90^\circ n$, $2(n-2) = n$, $2n-4 = n$, $n = 4$.

б) $180^\circ(n-2) = 60^\circ n$, $3(n-2) = n$, $3n-6 = n$, $n = 3$.

в) $180^\circ(n-2) = 108^\circ n$, $5(n-2) = 3n$, $2n = 10$, $n = 5$.

г) $180^\circ(n-2) = 135^\circ n$, $4(n-2) = 3n$, $4n-3n = 8$, $n = 8$.

Ответ: а) 4; б) 3; в) 5; г) 8.

Пример 3. Найти углы выпуклого четырехугольника, если они пропорциональны числам 1, 3, 6, 8.

Решение

Пусть k — коэффициент пропорциональности углов выпуклого четырехугольника. Тогда углы его будут равны соответственно k , $3k$, $6k$, $8k$, а их сумма — 360° .

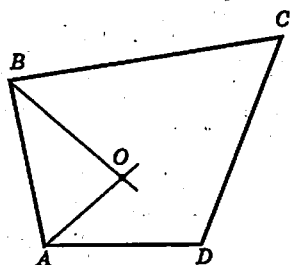
Имеем уравнение $k + 3k + 6k + 8k = 360$, $18k = 360$, откуда $k = 20$, значит, углы будут равны:

20° , $20^\circ \cdot 3 = 60^\circ$, $20^\circ \cdot 6 = 120^\circ$ и $20^\circ \cdot 8 = 160^\circ$.

Ответ: 20° , 60° , 120° , 160° .

Пример 4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O . Доказать, что угол между биссектрисами этих углов равен полусумме углов C и D ($\angle C + \angle D \leq 180^\circ$).

Решение



Пусть O — точка пересечения биссектрис углов A и B , тогда

$$\angle AOB = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B).$$

Так как сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360° , то $\angle A + \angle B = 360^\circ - (\angle C + \angle D)$. Тогда $\angle AOB =$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(360^\circ - (\angle C + \angle D))$$

$$\text{или } \angle AOB = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D).$$

Пример 5. Периметр параллелограмма равен 30 см. Найти стороны параллелограмма, если одна сторона на 3 см больше другой.

Решение

Пусть меньшая сторона параллелограмма равна x см, тогда большая сторона будет $(x + 3)$ см. Так как по условию задачи периметр равен 30 см, то получим уравнение $2(x + (x + 3)) = 30$ или $x + (x + 3) = 15$, $2x = 15 - 3$, $2x = 12$, $x = 6$, тогда $x + 3 = 9$.

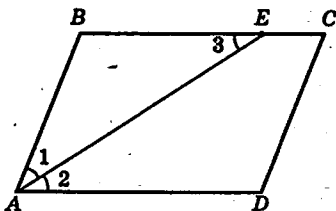
Значит, стороны параллелограмма 6 см и 9 см.

Ответ: 6 см и 9 см.

Пример 6. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке E . Найти периметр параллелограмма, если $BE = 12$ см, $EC = 9$ см.

Решение

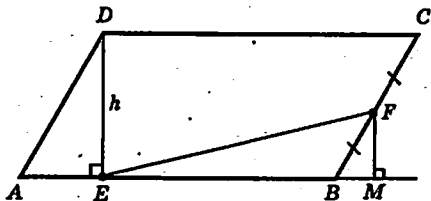
Так как AE – биссектриса $\angle A$, то $\angle 1 = \angle 2$. Так как $AD = BC$ (по свойству параллелограмма) и $AD \parallel BC$, то $\angle 2 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей AE . Тогда $\angle 1 = \angle 3$. Значит $\triangle ABE$ – равнобедренный (если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный). По условию задачи $BE = 12$ см, значит, $AB = 12$ см. Следовательно, $BC = BE + EC = 12 + 9 = 21$ (см). Если P – периметр $ABCD$, то



$$P = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot (12 + 21) = 66 \text{ (см)}.$$

Ответ: 66 см.

Пример 7. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ взята точка E так, что $BE : EA = 3 : 1$; F – середина BC . Найти отношение площади четырехугольника $BEDC$ к площади $\triangle BEF$, если DE – высота параллелограмма.



Решение

Пусть $DE = h$ — высота параллелограмма $ABCD$, тогда $FM = \frac{1}{2}h$, так как F — середина BC . Пусть $AE = x$, тогда $BE = 3x$. Значит, $AB = DC = 4x$.

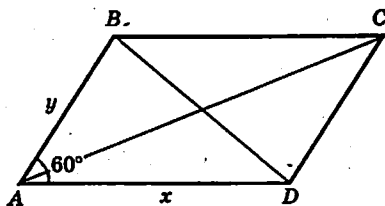
$$S_{BEDC} = \frac{DC + BE}{2} \cdot DE = \frac{4x + 3x}{2} \cdot h = \frac{7}{2}xh.$$

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2}BE \cdot FM = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \frac{1}{2}h = \frac{3}{4}xh, \text{ тогда}$$

$$S_{BEDC} : S_{\triangle BEF} = \frac{7}{2}xh : \frac{3}{4}xh = \frac{7 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 14 : 3.$$

Ответ: 14 : 3.

Пример 8. Острый угол параллелограмма равен 60° . Определить отношение длин сторон, если отношение квадратов длин диагоналей параллелограмма равно $19/7$.



Решение

Пусть $AB = y$, $AD = x$.

По условию $\angle A = 60^\circ$. Из $\triangle ABD$ по теореме косинусов имеем $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD \cos 60^\circ$,
 $BD^2 = x^2 + y^2 - xy$.

Так как $\angle BAD = 60^\circ$, то $\angle ADC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, тогда из $\triangle ADC$ аналогично находим $AC^2 = x^2 + y^2 + xy$.

Так как $AC > BD$, то данное отношение $19/7$ равно AC^2/BD^2 (а не BD^2/AC^2).

Имеем уравнение
$$\frac{x^2 + y^2 + xy}{x^2 + y^2 - xy} = \frac{19}{7} \text{ или}$$

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 + \frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 - \frac{x}{y}} = \frac{19}{7}, \text{ откуда находим } \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \text{ и } \frac{x}{y} = \frac{2}{3}.$$

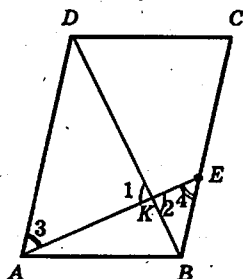
Заметим, что оба значения удовлетворяют условию задачи, так как дают фактически один и тот же параллелограмм.

Ответ: 3 : 2.

Пример 9. В параллелограмме $ABCD$ луч, проведенный из вершины A , делит сторону BC в отношении 3 : 5 ($BC > AB$). В каком отношении луч делит диагональ BD ?

Решение

По условию задачи $BE : EC = 3 : 5$. Заметим, что $\triangle AKD \sim \triangle EKD$ (по двум углам, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные и $\angle 3 = \angle 4$ — как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AE).



Из подобия имеем $\frac{BK}{KD} = \frac{BE}{AD}$. (1)

Но $BE : EC = 3 : 5$ (по условию) или $\frac{BE}{BC - BE} = \frac{3}{5}$.

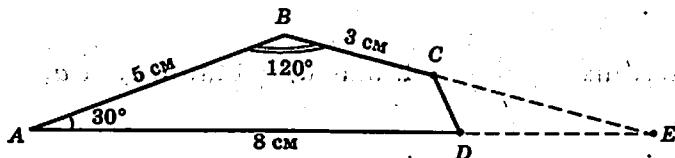
Так как $BC = AD$, то $\frac{BE}{AD - BE} = \frac{3}{5}$ или

$$\frac{AD - BE}{BE} = \frac{5}{3}, \quad \frac{AD}{BE} - 1 = \frac{5}{3}, \quad \frac{AD}{BE} = \frac{8}{3}, \quad \text{откуда}$$

$$\frac{BE}{AD} = \frac{3}{8}. \quad \text{Учитывая (1), имеем } \frac{BK}{KD} = \frac{3}{8}.$$

Ответ: 3 : 8.

Пример 10. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $AD = 8$ см, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 120^\circ$. Найти сторону CD .



Решение

Продолжим стороны BC и AD четырехугольника $ABCD$ до их пересечения в точке E . Тогда $\angle E = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ) = 30^\circ$. Так как $\angle A = 30^\circ$ и $\angle E = 30^\circ$, то $\triangle ABE$ — равнобедренный и $AB = BE = 5$ см. Так как $BC = 3$ см (по условию), то $CE = 2$ см.

$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot BE \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} AB \cdot AE \cdot \sin \angle A, \text{ или}$$

$$5 \sin 120^\circ = AE \cdot \sin 30^\circ, \text{ или } 5 \cos 30^\circ = (8 + DE) \cdot \frac{1}{2},$$

$$\text{или } 5\sqrt{3} = 8 + DE, \text{ откуда } DE = 5\sqrt{3} - 8.$$

Замечание. Для нахождения DE можно было использовать теорему синусов: $\frac{AB}{\sin \angle E} = \frac{AE}{\sin \angle B}$ и т. д.

Теперь из $\triangle DEC$ по теореме косинусов находим CD :
 $CD^2 = DE^2 + CE^2 - 2 \cdot DE \cdot CE \cos 30^\circ$ или

$$CD^2 = (5\sqrt{3} - 8)^2 + 4 - 2(5\sqrt{3} - 8) \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$CD^2 = 113 - 64\sqrt{3}, \text{ откуда } CD = \sqrt{113 - 64\sqrt{3}} \approx 1,5 \text{ (см).}$$

Ответ: $\approx 1,5$ (см).

Пример 11. Найти периметр ромба, если диагонали относятся как 3 : 4, а площадь ромба равна 96 см^2 .

Решение

Пусть d_1 и d_2 — диагонали ромба, P — периметр и

S — площадь, тогда $d_1 : d_2 = 3 : 4$ и $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = 96$, откуда $d_1 d_2 = 192$. Для нахождения d_1 и d_2 имеем систему

$$\begin{cases} \frac{d_1}{d_2} = \frac{3}{4}, \\ d_1 d_2 = 192. \end{cases} \quad \text{Перемножив уравнения системы,}$$

получим $d_1^2 = \frac{3}{4} \cdot 192$ или $d_1^2 = 144$, откуда $d_1 = 12$,

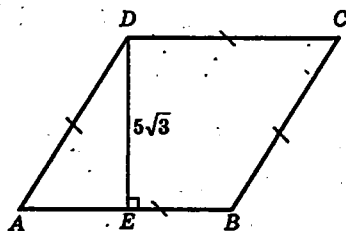
$$\text{тогда } d_2 = \frac{192}{12} = 16.$$

Если x — сторона ромба, то $x^2 = \left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2$,
или $4x^2 = d_1^2 + d_2^2$, $4x^2 = 12^2 + 16^2$, $4x^2 = 400$, $x^2 = 100$,
откуда $x = 10$, тогда $P = 4x = 40$ (см).

Ответ: 40 см.

Пример 12. Острый угол ромба относится к величине тупого угла как 1 : 2. Высота ромба равна $5\sqrt{3}$. Найти периметр ромба.

Решение



Пусть $DE = 5\sqrt{3}$ — высота ромба $ABCD$. Пусть $\angle A : \angle ADC = 1 : 2$.

Если $\angle A = x$, то $\angle ADC = 2x$ и так как эти углы внутренние односторонние, то их сумма равна 180° , т. е. имеем уравнение $x + 2x = 180$, $3x = 180$, $x = 60$.

Значит, $\angle A = 60^\circ$. Из $\triangle AED$ $\sin \angle A = \frac{DE}{AD}$, откуда нахо-

$$\text{дим } AD = \frac{DE}{\sin 60^\circ} = \frac{5\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 10, \text{ тогда } P_{ABCD} = 4 \cdot AD = 40.$$

Ответ: 40.

Пример 13. Определить сторону ромба, зная, что площадь его равна Q , а отношение диагоналей равно $m : n$.

Решение

Если обозначить диагонали ромба через $2x$ и $2y$, то согласно условию задачи получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2xy = Q, \\ \frac{x}{y} = \frac{m}{n}. \end{cases}$$

Перемножив левые и правые части, имеем $2x^2 = \frac{m}{n} \cdot Q$,

откуда $x = \sqrt{\frac{mQ}{2n}}$, тогда $y = \frac{Q}{2x} = \sqrt{\frac{nQ}{2m}}$. Сторону ромба найдем по теореме Пифагора

$$a^2 = x^2 + y^2, \text{ или } a^2 = \frac{mQ}{2n} + \frac{nQ}{2m}, a^2 = Q \cdot \frac{m^2 + n^2}{2mn},$$

откуда $a = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{2mn}} \cdot Q$, где a — сторона ромба.

Ответ: $\sqrt{\frac{m^2 + n^2}{2mn}} \cdot Q$.

Пример 14. Диагонали ромба $ABCD$ равны 15 м и 20 м. Из вершины C тупого угла проведены две высоты: CE и CF . Вычислить площадь $AECF$.

Решение

Если x — сторона ромба, то

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + BD^2},$$

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{15^2 + 20^2} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ (м)}.$$

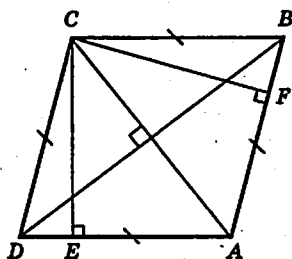
По формуле площади ромба имеем

$$S_{ABCD} = AD \cdot CE = AB \cdot CF = \frac{1}{2} AC \cdot BD, \text{ откуда нахо-}$$

$$\text{дим, что } CE = CF = \frac{AC \cdot BD}{\sqrt{AC^2 + BD^2}} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12 \text{ (м)}.$$

Следовательно, $\triangle AEC = \triangle AFC$ (по катетам CE и CF и гипотенузе AC). Значит, $S_{AECF} = 2S_{\triangle AEC} =$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} AE \cdot CE = 12 \cdot AE. \text{ Из } \triangle AEC \text{ находим длину отрез-}$$



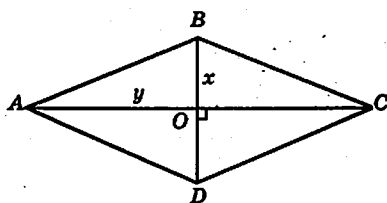
ка AE : $AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ (м), тогда $S_{AECF} = 12 \cdot 9 = 108$ (м²). Итак, $S_{AECF} = 108$ м².

Ответ: 108 м².

Пример 15. Периметр ромба содержит $2p$ см, сумма диагоналей его m см. Найти площадь ромба.

Решение

Пусть $BO = x$, $AO = y$, где $x > 0$, $y > 0$.



Тогда $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2xy$.

По условию задачи $AC + BD = m$ или

$$2x + 2y = m, \text{ откуда } x + y = \frac{m}{2}. \quad (1)$$

Из $\triangle AOB$, где $AB = \frac{1}{4} \cdot 2p = \frac{1}{2} p$, находим

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2. \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = \frac{m}{2}, \\ x^2 + y^2 = \frac{p^2}{4}. \end{cases}$$

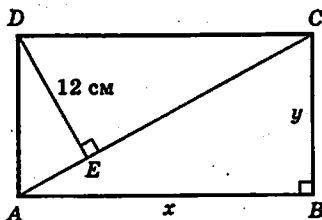
Возведя в квадрат обе части первого уравнения и вычтя второе, находим

$$2xy = \frac{m^2}{4} - \frac{p^2}{4}, \text{ значит, } S = \frac{1}{4} (m^2 - p^2) \text{ см}^2.$$

Ответ: $S = \frac{1}{4} (m^2 - p^2) \text{ см}^2$.

Пример 16. Найти периметр прямоугольника, диагональ которого равна 25 см, а высота, опущенная из вершины на диагональ, равна 12 см.

Решение



Пусть в прямоугольнике $ABCD$ диагональ $AC = 25$ см, $DE = 12$ см — высота, опущенная на диагональ.

Пусть $AB = x$, $BC = y$, где $x > 0$, $y > 0$.

Тогда $P = 2(x + y)$.

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ADC} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot DE = 300 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора имеем

$$x^2 + y^2 = 625. \quad (1)$$

Так как $S_{ABCD} = 300 \text{ см}^2$, а с другой стороны $S_{ABCD} = xy$, то $xy = 300$. (2)

Из соотношения (1) и (2) имеем систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 625, \\ xy = 300. \end{cases}$$

Заметим, что для нахождения периметра прямоугольника находить в отдельности x и y нет необходимости:

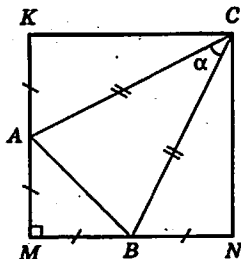
$$\begin{cases} (x + y)^2 = 625 + 2xy, \\ xy = 300; \end{cases}$$

$$(x + y)^2 = 625 + 600, \text{ или } (x + y)^2 = 1225,$$

откуда $x + y = 35$, тогда $P = 2(x + y) = 2 \cdot 35 = 70 \text{ (см)}$.

Ответ: 70 см.

Пример 17. В квадрате $KCNM$ на серединах сторон KM и MN отмечены точки A и B , которые соединены с вершиной C . Найти $\angle ACB$.



Решение

Пусть в квадрате $KCNM$ A — середина KM , B — середина MN .

Пусть $\angle ACB = \alpha$. Обозначим сторону квадрата через $2x$, тогда $AM = MB = x$.

$$\text{Из } \triangle AMB: AB^2 = x^2 + x^2, AB = x\sqrt{2}.$$

Из $\triangle AKC$: $AC^2 = AK^2 + KC^2$ или $AC^2 = 5x^2$, откуда $AC = x\sqrt{5}$.

Из $\triangle ABC$ по теореме косинусов находим AB :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \alpha \text{ или}$$

$$2x^2 = 10x^2 - 10x^2 \cos \alpha,$$

$$10x^2 \cos \alpha = 8x^2, x \neq 0, 10 \cos \alpha = 8,$$

$$\cos \alpha = 0,8, \text{ откуда } \angle ACB = \alpha = \arccos 0,8.$$

Ответ: $\arccos 0,8$.

Пример 18. Найти большую сторону прямоугольника, площадь которого 48 см^2 , а стороны относятся как $3 : 1$.

Решение

Пусть бóльшая сторона прямоугольника равна $3x$, тогда меньшая сторона будет x , а площадь равна $3x \cdot x = 48$ или $x^2 = 16$, откуда $x = 4$, тогда $3x = 12$. Итак, большая сторона равна 12 см .

Ответ: 12 см .

Пример 19. В квадрате со стороной a середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Вычислить площадь полученного треугольника.

Решение

Если a — сторона квадрата, то диагональ $AC = BD = a\sqrt{2}$. В $\triangle ABD$

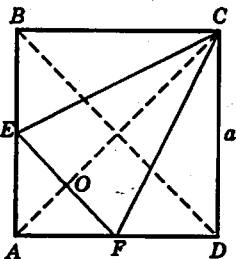
$$\text{средняя линия } EF = \frac{1}{2} BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

В равнобедренном $\triangle AOE$ стороны

$$AO = OE = \frac{a\sqrt{2}}{4}, \text{ поэтому } OC =$$

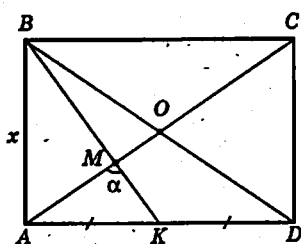
$$= AC - AO = \frac{3a\sqrt{2}}{4}. \text{ Значит, } S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} EF \cdot OC = \frac{3}{8} a^2.$$

Ответ: $\frac{3}{8} a^2$.



Пример 20. Точка K – середина стороны AD – прямоугольника $ABCD$. Найти угол между BK и диагональю AC , если известно, что $AD : AB = \sqrt{2}$.

Решение



Пусть $AB = x$, тогда $AD = x\sqrt{2}$.

Выразим через x все стороны $\triangle AMK$ и применим теорему косинусов для стороны AK . Это позволит вычислить косинус искомого угла AMK . Пусть $\angle AMK = \alpha$. Заметим, что AO и BK – медианы

$\triangle ABD$. Значит, $MK = \frac{1}{3}BK$, $AM = \frac{2}{3}AO$ (по свойству медиан треугольника). Значит,

$$MK = \frac{1}{3}BK = \frac{1}{3}\sqrt{AB^2 + AK^2} = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}x^2} = \frac{x}{\sqrt{6}}.$$

$$AM = \frac{2}{3}AO = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}\sqrt{AD^2 + CD^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(x\sqrt{2})^2 + x^2} = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

В $\triangle AMK$ $AK = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $AM = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $MK = \frac{x}{\sqrt{6}}$, тогда по теореме косинусов имеем: $AK^2 = AM^2 + MK^2 - 2AM \cdot MK \cos \alpha$ или

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x}{\sqrt{6}} \cos \alpha,$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}x^2 \cos \alpha, \text{ откуда находим } \cos \alpha = 0,$$

значит, $\alpha = 90^\circ$.

Итак, $\angle AMK = 90^\circ$.

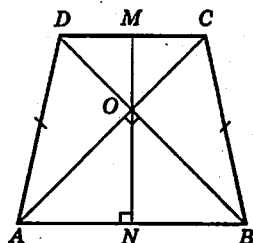
Ответ: 90° .

Пример 21. В равнобедренной трапеции средняя линия равна m , а диагонали взаимно перпендикулярны. Вычислить площадь трапеции.

Решение

Проведем высоту равнобедренной трапеции MN через точку пересечения диагоналей O ; точки M и N будут серединами оснований трапеции $ABCD$. Заметим, что $\triangle NOB$ и $\triangle OMC$ прямоугольные и равнобедренные, значит $MN = ON + OM = NB + MC = m$, тогда $S = m \cdot m = m^2$.

Ответ: $S = m^2$.



Пример 22. Доказать, что площадь равнобедренной

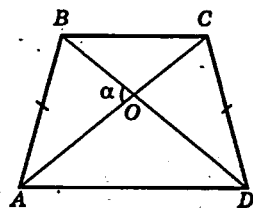
трапеции определяется по формуле $S = \frac{1}{2} m^2 \sin \alpha$, где m — длина диагонали, α — угол между ними.

Решение

Пусть в трапеции $ABCD$ $AB = CD$, AC и BD — диагонали, причем $AC = BD = m$ и $\angle AOB = \alpha$; $AO = x$, $CO = y$.

Заметим, что $S_{ABCD} = 2S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOD} = 2 \cdot \frac{1}{2} xy \sin \alpha + \frac{1}{2} y^2 \sin (180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2} x^2 \sin (180^\circ - \alpha) = xy \sin \alpha + \frac{1}{2} y^2 \sin \alpha + \frac{1}{2} x^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot (2xy + y^2 + x^2) = \frac{1}{2} (x + y)^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} m^2 \sin \alpha$, где $x + y = AC = BD = m$.

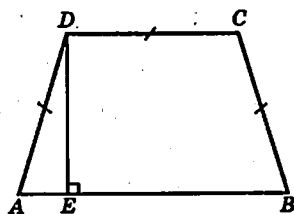
Итак, $S = \frac{1}{2} m^2 \sin \alpha$, что и требовалось доказать.



Замечание. Если $\alpha = 90^\circ$, то $AC \perp BD$, и в этом слу-

чае $S = \frac{1}{2} m^2$, где m — диагональ.

Пример 23. В равнобедренной трапеции площадью 27 см^2 боковая сторона равна меньшему основанию. Найти высоту трапеции, если она делит основание в отношении $4 : 9$.



Решение

Пусть $AE = 4x$, тогда $BE = 9x$ и $AB = 13x$. Пусть $AD = DC = y$, тогда

$$S = \frac{1}{2} (AB + DC) \cdot DE.$$

Так как по условию задачи $S = 27 \text{ см}^2$, то

$$\frac{1}{2} (13x + y) DE = 27 \text{ или } (13x + y) \cdot DE = 54. \quad (1)$$

С другой стороны, $AB = 2AE + DC = 8x + y$, тогда получим $8x + y = 13x$, откуда $y = 5x$.

Учитывая (1), имеем $(13x + 5x) \cdot DE = 54$ или

$$x \cdot DE = 3. \quad (2)$$

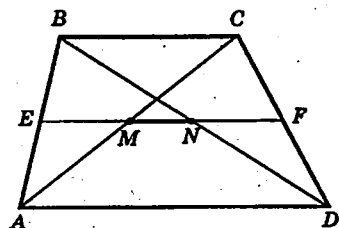
Из $\triangle AED$ $DE^2 = AD^2 - AE^2$ или $DE^2 = y^2 - (4x)^2$, $DE^2 = 9x^2$, $DE = 3x$, тогда (2) примет вид $x \cdot 3x = 3$, $3x^2 = 3$, $x^2 = 1$, $x = 1$, ($x > 0$).

Следовательно, $DE = 3x = 3 \text{ (см)}$.

Ответ: 3 см.

Пример 24. Основания трапеции a и b . Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

Решение



Так как по условию задачи точка M — середина диагонали AC и точка N — середина диагонали BD , то точки M и N лежат на средней линии трапеции EF . Так как EN — средняя

линия $\triangle ABD$, то $EN = \frac{1}{2} a$.

Аналогично $EM = \frac{1}{2}b$. Значит, $MN = EN - EM = \frac{1}{2}(a - b)$.

Ответ: $\frac{1}{2}(a - b)$.

Пример 25. Вычислить площадь трапеции, если параллельные стороны равны 16 см и 44 см, а непараллельные — 17 см и 25 см.

Решение

По условию задачи $AD = 44$ см и $BC = 16$ см, тогда $AE + FD = 28$ (см).

Пусть $AE = x$, тогда $FD = 28 - x$.

По условию $AB = 17$ см, $CD = 25$ см.

Значит, из $\triangle ABE$

имеем $BE^2 = 17^2 - x^2$. Аналогично из $\triangle CDF$ получим $CF^2 = 25^2 - (28 - x)^2$. Получим уравнение:

$17^2 - x^2 = 25^2 - (28 - x)^2$, откуда $x = 8$, тогда

$BE^2 = 17^2 - 64$, или $BE = \sqrt{225} = 15$ (см).

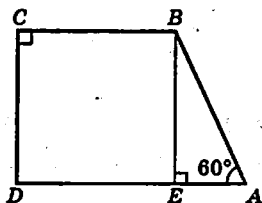
Следовательно, $S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BE = \frac{44 + 16}{2} \cdot 15 = 450$ (см²).

Ответ: 450 см².

Пример 26. Вычислить площадь прямоугольной трапеции, если даны: острый угол, равный 60° , и оба основания, соответственно равные a и b ($a > b$).

Решение

Проведем высоту BE трапеции $ABCD$. Так как $\angle A = 60^\circ$, то $\angle ABE = 30^\circ$, тогда $AB = 2AE = 2(a - b)$ и $BE = AE \operatorname{tg} 60^\circ = (a - b)\sqrt{3}$.

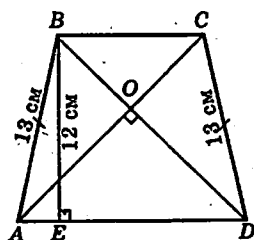


$$\text{Значит, } S = \frac{a+b}{2} \cdot BE = \frac{1}{2} \sqrt{3} (a^2 - b^2).$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3}}{2} (a^2 - b^2) \text{ (кв. ед.).}$$

Пример 27. В равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, известны боковая сторона и высота, соответственно равные 13 см и 12 см. Найти периметр трапеции.

Решение



Пусть в трапеции $ABCD$ $AB = CD = 13$ см. По условию $BE = 12$ см — высота трапеции. Известно, что если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то $S = h^2$, где h — высота трапеции (см. «Сборник задач по математике» под ред. М. И. Сканди и др. 5-е изд. М., 1997. С. 156).

$$\text{С другой стороны, } S = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BE. \quad (1)$$

Пусть $BC = 2x$, $AD = 2y$, тогда

$$S = \frac{1}{2} (2x + 2y) \cdot 12 = 12(x + y). \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), имеем $12(x + y) = h^2$ или $12(x + y) = 12^2$, откуда $x + y = 12$.

Так как $AB = 13$ см, то из $\triangle ABE$: $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = 5$ (см).

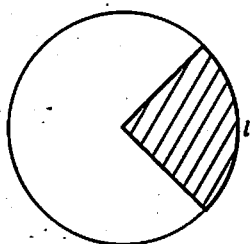
Но $AE = \frac{1}{2} (AD - BC) = \frac{1}{2} (2y - 2x) = y - x$, тогда $y - x = 5$.

Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ y - x = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = 17, \\ 2x = 7; \end{cases} \quad \text{значит, } P_{ABCD} = AD + BC + 2AB = (2y + 2x) + 2AB = 17 + 7 + 26 = 50 \text{ (см).}$$

Ответ: 50 см.

§ 36. Окружность и круг



(r – радиус, d – диаметр; C – длина окружности, S – площадь круга)

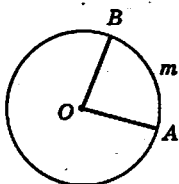
$$C = 2\pi r = \pi d; S = \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi d^2;$$

$$\pi = \frac{C}{d}, \pi \approx 3,14.$$

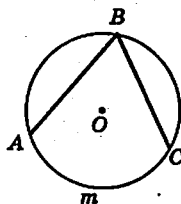
$$l = \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ} = r\alpha; S = \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} r^2 \alpha.$$

l – длина дуги; n° – градусная мера центрального угла; α – радианная мера центрального угла.

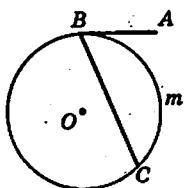
1. Углы и окружность



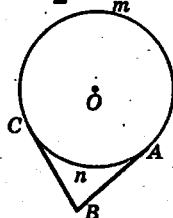
$$\angle AOB = \cup AmB$$



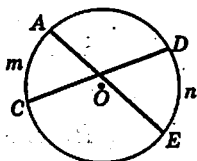
$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AmC$$



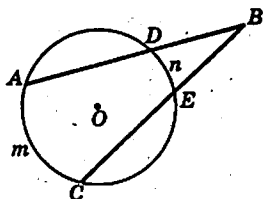
$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC$$



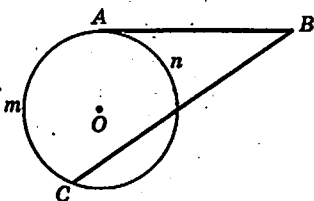
$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup AnC)$$



$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC + \cup EnD)$$

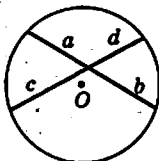


$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup DnE)$$

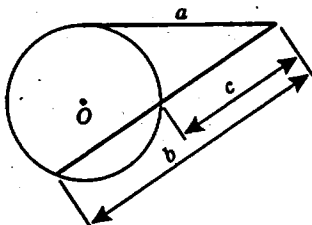


$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup AnD)$$

2. Пропорциональные отрезки



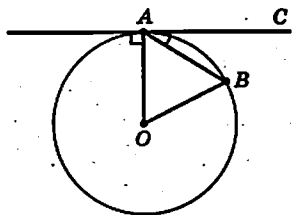
$$a \cdot b = c \cdot d$$



$$a^2 = b \cdot c$$

Решение задач

Пример 1. Через точку A окружности проведены касательная и хорда, равная радиусу окружности. Найти угол между ними.



Решение

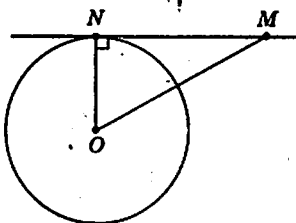
Пусть AC – касательная к окружности, AB – хорда. По условию задачи $OA = OB = AB$, т. е. $\triangle AOB$ – равносторонний, значит, $\angle OAB = 60^\circ$. Кроме того, $\angle OAC = 90^\circ$, так

как AC – касательная и $AC \perp OA$. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Ответ: 30° .

Пример 2. Прямая MN касается окружности с центром O радиуса $r = 2,5$ см. Найти MN , если $OM = 4$ см.

Решение



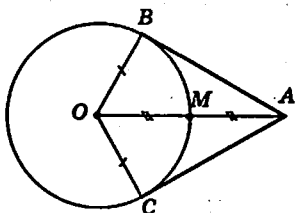
По условию задачи $ON = r = 2,5$ см, $OM = 4$ см. Заметим, что MON – прямоугольный, так как $ON \perp MN$ (по свойству касательной), тогда по теореме Пифагора

$$MN = \sqrt{4^2 - 2,5^2} = \sqrt{9,75} = \\ = \sqrt{9 \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{39}}{2} \text{ (см).}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{39}}{2}$ см.

Пример 3. Отрезки AB и AC являются отрезками касательных к окружности с центром O , проведенными из точки A . Найти $\angle BAC$, если середина отрезка AO лежит на окружности.

Решение



По условию AB и AC – отрезки касательных, проведенных из точки A ; тогда $AB = AC$. Кроме того, $OB = OC$ – как радиусы, OA – общая сторона, тогда $\triangle OAB = \triangle OAC$ (по трем сторонам) $OB \perp BA$ и $OC \perp CA$ (по свойству касательных).

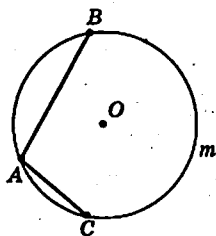
Так как M – середина AO , то

$$OM = OB = OC = \frac{1}{2} OA, \text{ тогда } \angle BAO = 30^\circ \text{ и } \angle BAC = \\ = \angle BAO + \angle CAO = 60^\circ.$$

Ответ: 60° .

Пример 4. Хорда AB стягивает дугу, равную 120° , а хорда AC — дугу в 40° . Найти $\angle BAC$.

Решение



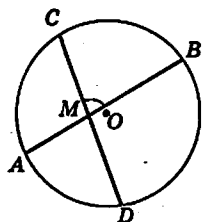
$\cup BmC = 360^\circ - (\cup AB + \cup AC) = 360^\circ - (120^\circ + 40^\circ) = 200^\circ$, тогда по свойству вписанного угла имеем

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BmC = 200^\circ : 2 = 100^\circ.$$

Ответ: 100° .

Пример 5. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M . Найти $\angle BMC$, если $\cup AD = 64^\circ$, $\cup BC = 80^\circ$.

Решение



Угол с вершиной внутри окружности равен полусумме дуг, заключенных между его сторонами, т. е.

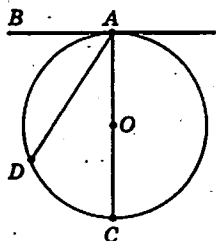
$$\angle CMB = \frac{1}{2} (\cup AD + \cup CB) = \frac{1}{2} (64^\circ + 80^\circ) = 72^\circ.$$

Итак, $\angle CMB = 72^\circ$.

Ответ: 72° .

Пример 6. Прямая AB — касательная к окружности, AD — хорда этой окружности. Доказать, что $\angle BAD$ измеряется половиной дуги AD , расположенной внутри $\angle BAD$.

Решение



Проведем диаметр AC , тогда $\angle BAC = 90^\circ$ по свойству касательной.

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cup ADC.$$

$$\angle DAC - \text{вписанный, } \angle DAC = \frac{1}{2} \cup DC.$$

$$\angle DAB = \angle BAC - \angle DAC =$$

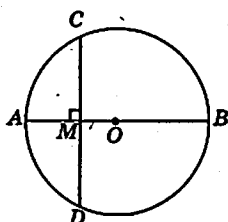
$$= \frac{1}{2} \cup ADC - \frac{1}{2} \cup DC = \frac{1}{2} (\cup ADC - \cup DC) = \frac{1}{2} \cup AD,$$

$\angle DAB = \frac{1}{2} \angle AD$, что и требовалось доказать.

Ответ; $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle AD$.

Пример 7. Диаметр AB окружности перпендикулярен к хорде CD и пересекает ее в точке M . Найти CD , если $AM = 8$ см, $MB = 16$ см.

Решение



1) Так как AB и CD – пересекающиеся хорды, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

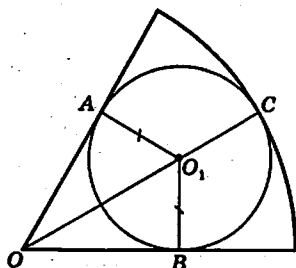
2) Так как $AB \perp DC$, то $MC = MD$ (диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду и стягиваемые ею дуги пополам).

3) $MD^2 = AM \cdot MB$ или $MD^2 = 8 \cdot 16$, $MD = \sqrt{8 \cdot 16} = 8\sqrt{2}$ (см),
тогда $CD = 2 \cdot MD = 16\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $16\sqrt{2}$ см.

Пример 8. В круговой сектор, дуга которого содержит 60° , вписан круг. Найти отношение площади сектора к площади этого круга.

Решение.



$OA \perp O_1A$ и $O_1B \perp OB$ – по свойству касательной.

Заметим, что $\triangle OBO_1 = \triangle OAO_1$ (по гипотенузе и катету). Следовательно,

$\angle O_1OA = \frac{1}{2} \angle AOB$,

т. е. $\angle O_1OA = 30^\circ$.

Отсюда $O_1A = OO_1 \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot OO_1$; $OC = OO_1 + O_1C$.

Пусть $O_1A = O_1B = r$, $OC = R$ – радиус кругового сектора. Так как $\angle O_1OA = 30^\circ$, то $OO_1 = 2r$, тогда $OC = R = 3r$.

Известно, что $S_{кр} = \pi r^2$,

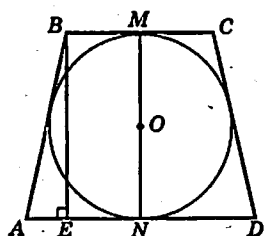
$$S_{\text{сектора}} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi R^2 = \frac{1}{6} \pi \cdot (3r)^2 = \frac{3}{2} \pi r^2,$$

$$\text{значит, } \frac{S_{\text{сек}}}{S_{\text{кр}}} = \frac{\frac{3}{2} \pi r^2}{\pi r^2} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: 3 : 2.

Пример 9. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Верхнее основание равно радиусу окружности и равно 2 см. Найти нижнее основание.

Решение



Пусть $AB = CD$. Пусть $AD = 2x$, $BC = 2$ см (по условию).

Кроме того, $BC = R = 2$, тогда $MN = BE = 4$ (см).

По свойству описанного четырехугольника имеем

$$AD + BC = AB + CD \text{ или } 2x + 2 = 2AB, x + 1 = AB. \quad (1)$$

$$\text{Но } AE = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(2x - 2) = x - 1. \quad (2)$$

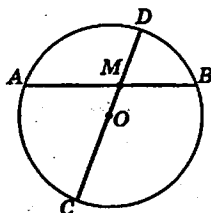
Из $\triangle AEB$ по теореме Пифагора получим

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 \text{ или, учитывая (1) и (2), имеем } (x + 1)^2 = (x - 1)^2 + 16, \text{ откуда находим } x = 4, \text{ тогда } AD = 2x = 8 \text{ (см).}$$

Ответ: 8 см.

Пример 10. Внутри круга, радиус которого равен 13 см, дана точка M , отстоящая от центра круга на 5 см. Через точку M проведена хорда $AB = 25$ см. Определить длину отрезков, на которые хорда AB делится точкой M .

Решение



Так как радиус $CO = 13$ см и $MO = 5$ см, то $MD = 13 - 5 = 8$ (см), $MC = CO + OM = 18$ (см).

Пусть $MB = x$, тогда $AM = AB - MB$ или $AM = 25 - x$.

По свойству пересекающихся хорд, имеем $AM \cdot MB = MD \cdot MC$ или $(25 - x)x = 18 \cdot 8$, откуда $x_1 = 16$, $x_2 = 9$.
Итак, $AM = 16$ см, $MB = 9$ см.

Ответ: 16 см и 9 см.

Пример 11. Стороны треугольника $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см. Две из них (a и b) служат касательными к кругу, центр которого лежит на третьей стороне. Определить радиус круга.

Решение

По условию задачи $a = BC = 13$ см, $b = CA = 14$ см, $c = AB = 15$ см.

Пусть $OE = OF = R$. Заметим, что $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC}$.

$$\text{Но } S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot OE = \frac{13}{2} R$$

$$\text{и } S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \cdot 14 R = 7R, \text{ тогда}$$

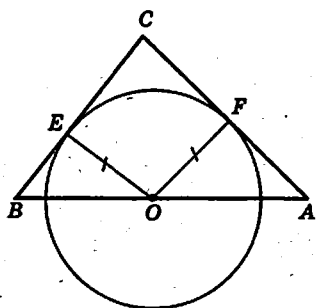
$$S_{\triangle ABC} = 13,5R.$$

С другой стороны, по формуле Герона имеем

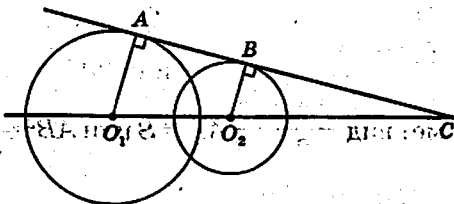
$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{1}{2}(13 + 14 + 15) = 21, \\ S_{\triangle ABC} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 7} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{Следовательно, } 13,5R = 84, \text{ откуда } R = 84 : 13,5 = \frac{56}{9}.$$

Ответ: $\frac{56}{9}$.



Пример 12. Расстояние между центрами двух окружностей, радиусы которых равны 17 см и 10 см, равно 21 см. Опреде-



лечь расстояние центров от точки, в которой прямая центров пересекается с общей касательной окружностей.

Решение

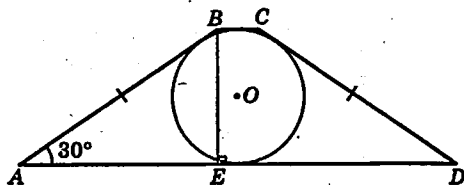
Так как расстояние между центрами окружностей меньше суммы, но больше разности их радиусов, то окружности пересекаются, значит, они имеют общую внешнюю касательную и не имеют общей внутренней касательной.

Полагая $O_1C = x$ и $O_2C = y$, имеем $x - y = O_1O_2 = 21$ и $x : y = O_1A : O_2B = 17 : 10$ (из подобия $\triangle CAO_1$ и $\triangle CBO_2$).

Получим систему уравнений
$$\begin{cases} x - y = 21, \\ x = 0,7y, \end{cases}$$
 откуда находим $x = O_1C = 51$ см, $y = O_2C = 30$ см.

Ответ: 51 см, 30 см.

Пример 13. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S . Определить боковую сторону этой трапеции, если известно, что острый угол при основании трапеции равен $\pi/6$.



сторону этой трапеции, если известно, что острый угол при основании трапеции равен $\pi/6$.

Решение

Площадь трапеции определяется по формуле

$$\frac{AD + BC}{2} \cdot BE = S. \quad (1)$$

Так как $\angle A = 30^\circ$, то $BE = \frac{1}{2}AB$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°).

По свойству описанного четырехугольника имеем $AD + BC = AB + CD$ или $2AB = AD + BC$, тогда (1) примет вид

$$\frac{2AB}{2} \cdot \frac{1}{2}AB = S \text{ или } AB^2 = 2S, \text{ откуда } AB = \sqrt{2S}.$$

Ответ: $\sqrt{2S}$.

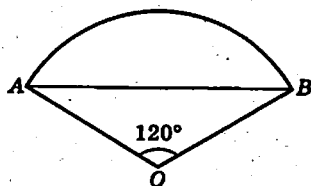
Пример 14. Найти площадь сегмента, если периметр его равен p , а дуга содержит 120° .

Решение.

Определить радиус R дуги окружности сегмента.

По условию $\cup AB + AB = p$.

$$\begin{aligned} \text{Но длина } \cup AB &= \frac{\pi R \cdot 120^\circ}{180^\circ} = \\ &= \frac{2\pi R}{3}. \end{aligned}$$



Длину хорды AB находим из $\triangle AOB$ по теореме синусов: $\frac{AB}{\sin 120^\circ} = 2R$ или $AB = 2R \sin (90^\circ + 30^\circ) = 2R \cos 30^\circ = R\sqrt{3}$.

Тогда имеем $\frac{2\pi R}{3} + R\sqrt{3} = p$, $(2\pi + 3\sqrt{3})R = 3p$, от-

куда $R = \frac{3p}{2\pi + 3\sqrt{3}}$. Следовательно, площадь S сегмента будет равна площади сектора без $S_{\triangle OAB}$, т. е.

$$S = \frac{\pi R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \pi R^2 - S_{\triangle OAB}.$$

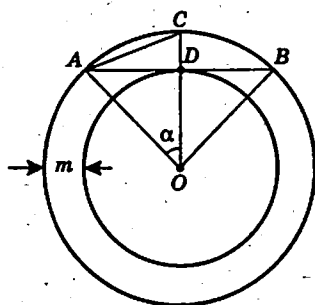
$$\text{Но } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin 120^\circ = \frac{1}{2} R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4},$$

значит, $S = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{3p}{2\pi + 3\sqrt{3}} \right)^2 - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$, откуда нахо-

$$\text{дим } S = \frac{3p^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{4(2\pi + 3\sqrt{3})^2} \text{ (кв. ед.)}.$$

$$\text{Ответ: } S = \frac{3p^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{4(2\pi + 3\sqrt{3})^2}.$$

Пример 15. Около правильного n -угольника со стороной a описана окружность и в него вписана окружность. Определить площадь кольца между этими окружностями и ширину его.



Решение

Пусть $AB = a$ — сторона правильного n -угольника,

тогда $\angle AOC = \alpha = \frac{180^\circ}{n}$, а

$\angle CAD = \frac{1}{2}\alpha = \frac{90^\circ}{n}$ (как вписанный, опирающийся на дугу α).

Пусть S — площадь кольца, тогда

$$S = \pi(OA^2 - OD^2) = \pi \cdot AD^2 = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \pi a^2.$$

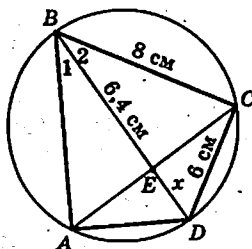
Пусть m — ширина кольца, тогда из $\triangle ADC$

$$m = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{90^\circ}{n}.$$

$$\text{Ответ: } S = \frac{1}{4} \pi a^2; m = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{90^\circ}{n}.$$

Пример 16. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность так, что диагональ BD является биссектрисой $\angle ABC$ и пересекается с диагональю AC в точке E , причем $BE = 6,4$ см. Найти радиус окружности, вписанной в $\triangle BCD$, если длина отрезка $CD = 6$ см и $BC = 8$ см.

Решение



Так как BD — биссектриса $\angle ABC$, то $\angle 1 = \angle 2$. Кроме того, $\angle ABD = \angle ACD = \angle CBD$ — как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AD ($\cup AD = \cup DC$). Тогда $\triangle BCD \sim \triangle CED$ (по двум углам).

Следовательно, $CD : DE = BD : CD$ или $CD^2 = DE \cdot BD$.

Пусть $DE = x$, где $x > 0$, тогда получим $x(x + 6,4) = 36$ или $x^2 + 6,4x - 36 = 0,5x^2 + 32x - 180 = 0$, откуда нахо-

дим $x_1 = 3,6$; $x_2 = -10 < 0$ (не подходит). Итак, $DE = 3,6$ см, тогда $BD = 6,4 + 3,6 = 10$ (см).

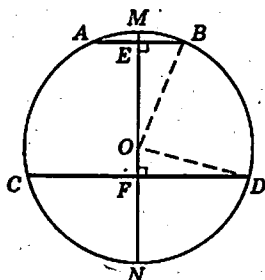
Выходит, что BCD — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора), так как $10^2 = 6^2 + 8^2$. Значит $r = \frac{1}{2}(BC + CD - BD) = 2$, где r — радиус окружности, вписанной в $\triangle BCD$.

Ответ: 2 см.

Пример 17. Две параллельные хорды равны 14 м и 40 м, а расстояние между ними 39 м. Определить радиус круга.

Решение

Способ 1



Пусть центр O круга расположен между данными хордами: $AB = 14$ м и $CD = 40$ м. Проведем диаметр MN , перпендикулярный данным хордам, тогда $EF = 39$ м (по условию), $EB = \frac{1}{2}AB = 7$ (м) и $FD = \frac{1}{2}CD = 20$ (м).

Рассмотрим $\triangle OEB$ и $\triangle OFD$. Пусть $OB = OD = R$, $OF = x$, тогда $OE = 39 - x$. По теореме Пифагора имеем $7^2 + (39 - x)^2 = R^2$ и $20^2 + x^2 = R^2$ или, сравнивая левые части полученных равенств, получим $49 + (39 - x)^2 = 400 + x^2$, откуда находим $x = 15$, тогда $R^2 = 400 + 225 = 625$, $R = 25$.

Ответ: 25 м.

Замечание. В условии задачи не сказано, как расположены данные хорды относительно центра круга: по разные или по одну сторону от него. Приведенное решение существенно связано с чертежом. Поэтому, вообще то говоря, нужно дополнительно исследовать, как изменится решение задачи и ответ к ней, если предположить, что обе данные хорды лежат по одну сторону от центра круга.

Способ 2 (рис. тот же)

Пусть $ME = x$, $FN = y$, где $x > 0$, $y > 0$, тогда (что существенно) независимо от расположения центра

круга относительно данных хорд AB и CD имеем систему уравнений

$$\begin{cases} FD^2 = MN \cdot FN, \\ BE^2 = ME \cdot EN \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y(39 + x) = 400, \\ x(39 + y) = 49. \end{cases}$$

Вычитая из I уравнения II , имеем: $39(y - x) = 351$, или $y - x = 9$, откуда $y = x + 9$.

Подставив значение y в уравнение $x(39 + y) = 49$ находим $x = 1$ ($x = -49 < 0$ — не подходит), тогда $y = 10$, и так как $2R = ME + EF + FN = 1 + 39 + 10 = 50$, то $R = 25$.

Как видим, при таком способе решения отпадает необходимость в дополнительном исследовании взаимного расположения данных элементов.

Пример 18. Доказать, что во всяком вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).

Решение

Способ 1

Построим угол ABF , равный $\angle CBD$.

$\angle BAF = \angle BDC$ — как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу BC .

Следовательно, $\triangle ABF \sim \triangle CBD$, откуда имеем $AB : AF = BD : CD$, или

$$AB \cdot CD = AF \cdot BD. \quad (1)$$

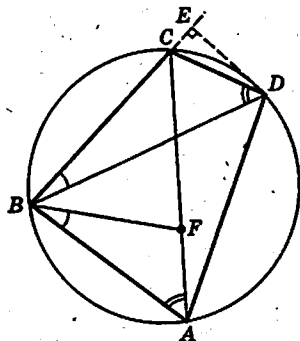
$$\begin{aligned} \angle ABD &= \angle ABC - \angle CBD = \\ &= \angle ABC - \angle ABF = \angle FBC. \end{aligned}$$

Далее, $\angle BCF = \angle BDA$ — как вписанные, опирающиеся на

одну и ту же дугу AB . Значит, $\triangle FBC \sim \triangle ABD$, откуда $BC : FC = BD : AD$ или $BC \cdot AD = FC \cdot BD$. (2)

Складывая почленно (1) и (2), имеем $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AF \cdot BD + FC \cdot BD = BD \cdot (AF + FC) = BD \cdot AC$.

Итак, $AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC$, что и требовалось доказать.



Способ 2 (рис. тот же)

Пусть $BD = m$; $AC = n$; $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $AD = d$ и $\angle BCD = \alpha$, тогда $\angle BAD = 180^\circ - \alpha$.

Из $\triangle BCD$ по теореме косинусов имеем

$$m^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \quad (1)$$

Аналогично из $\triangle BAD$ получим

$$m^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos (180^\circ - \alpha) = a^2 + d^2 + 2ad \cos \alpha. \quad (2)$$

Теперь исключим $\cos \alpha$, для чего умножим обе части (1) на ad , а обе части (2) — на bc и сложим почленно:

$$\begin{aligned} (ad + bc)m^2 &= adb^2 + adc^2 + bcd^2 + bca^2 = \\ &= (ab + cd)(bd + ac), \text{ откуда } m^2 = \frac{(ab + cd)(bd + ac)}{ad + bc}. \end{aligned}$$

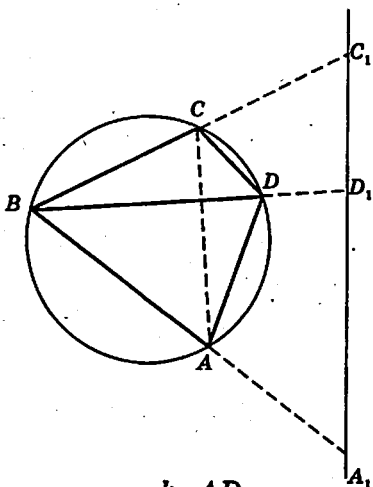
Аналогично для диагонали AC находим

$$n^2 = \frac{(ad + bc)(bd + ac)}{ab + cd}.$$

Перемножая полученные равенства, получим

$m^2 n^2 = (ac + bd)^2$, откуда $mn = ac + bd$, что и требовалось доказать.

Способ 3



Решение оказывается более простым, если использовать понятие инверсии. Взяв точку B за полюс, выполним над точками A , D и C произвольную инверсию, степень которой k .

Данная окружность при этом преобразуется в прямую, на которой будут лежать точки A_1 , D_1 и C_1 , обратные точкам A , D и C . В равенство $A_1 D_1 + D_1 C_1 = A_1 C_1$ подставим значения

$$A_1 D_1 = \frac{k \cdot AD}{BA \cdot BD};$$

$$D_1 C_1 = \frac{k \cdot DC}{BD \cdot BC}; \quad A_1 C_1 = \frac{k \cdot AC}{BA \cdot BC}.$$

Так как $A_1 D_1 + D_1 C_1 = A_1 C_1$, то получим

$\frac{k \cdot AD}{BA \cdot BD} + \frac{k \cdot DC}{BD \cdot BC} = \frac{k \cdot AC}{BA \cdot BC}$, откуда после преобразований получим $AD \cdot BC + DC \cdot BA = AC \cdot BD$, что и требовалось доказать.

Задачи

Группа А

1. Один из смежных углов в 8 раз меньше другого. Найти меньший угол.

2. Один из внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей на 60° меньше другого. Найти меньший из этих углов.

3. Найти неразвернутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если сумма двух из них равна 114° .

4. Луч OC делит $\angle AOB$ на два угла. Найти $\angle AOC$, если $\angle AOB = 155^\circ$ и $\angle AOC$ на 15° больше $\angle COB$.

5. Найти смежные углы, если их разность равна 35° .

6. Найти угол, образованный биссектрисами двух смежных углов.

7. Доказать, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

8. Углы треугольника пропорциональны числам $4 : 6 : 8$. Найти наименьший угол треугольника.

9. Угол при вершине равнобедренного треугольника на 30° больше угла при основании. Найти угол при вершине треугольника.

10. В равнобедренном треугольнике угол, смежный с углом при вершине треугольника, равен 40° . Найти угол при основании треугольника.

11. Найти периметр треугольника, две стороны которого равны 15 и 18, а высота, проведенная к большей из данных сторон, равна 12.

12. Длины сторон треугольника равны 20, 20 и 24. Найти косинус угла между неравными по длине сторонами треугольника.

13. Найти площадь треугольника, две стороны которого равны 6 см и 14 см, а угол между ними 30° .

14. В треугольнике даны стороны $a = \sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$. Угол A , противолежащий стороне a , равен 30° . Найти третью сторону.

15. В $\triangle ABC$ $BC = 12$ см, $AC = 8$ см и $\angle A = 2\angle B$. Найти AB .

16. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны соответственно 6 см и 10 см. Найти радиус вписанной окружности.

17. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 1 : 2, площадь треугольника равна 9 см^2 . Най-

ти $\frac{4}{\pi} S$, где S – площадь описанного круга.

18. Высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки 8 см и 32 см, а треугольник – на два треугольника. Найти площадь меньшего из них.

19. В прямоугольном треугольнике медианы, проведенные к катетам, равны $\sqrt{52}$ см и $\sqrt{73}$ см. Найти гипотенузу.

20. Точка, взятая на гипотенузе прямоугольного треугольника и одинаково удаленная от его катетов, делит гипотенузу на отрезки 30 см и 40 см. Найти сумму катетов.

21. Найти больший катет прямоугольного треугольника, если радиус вписанной окружности равен 2 см, а описанной – 5 см.

22. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 26 см, а его катеты относятся как 5 : 12. Найти больший катет треугольника.

23. Найти площадь равнобедренного прямоугольного треугольника по его гипотенузе, равной $4\sqrt{2}$.

24. В прямоугольном треугольнике медиана, опущенная из прямого угла, равна одному из катетов. Найти меньший угол треугольника.

25. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 3 см, а котангенс прилежащего угла равен 0,75. Найти гипотенузу.

26. Основание равнобедренного треугольника в 3 раза меньше его боковой стороны, а его периметр равен 14 см. Найти основание треугольника.

27. В равнобедренном $\triangle ABC$ с основанием AC внешний угол при вершине A равен 110° . Найти $\angle ABC$.

28. Найти высоту равнобедренного треугольника, если его основание равно 6, а боковая сторона 5.

29. Высота равнобедренного треугольника равна 15 см, а основание 16 см. Найти боковую сторону треугольника.

30. Периметр равнобедренного треугольника равен 16, боковая сторона меньше основания на 1. Найти высоту треугольника.

31. Доказать, что если в треугольнике выполняется соотношение $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$, то треугольник равнобедренный.

32. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, медиана, проведенная к боковой стороне, равна 5 см. Найти боковую сторону.

33. Найти радиус круга, описанного около равностороннего треугольника со стороной $a = 8\sqrt{3}$.

34. Найти площадь равностороннего треугольника со стороной $a = 4\sqrt{3}$.

35. Найти площадь равностороннего треугольника, если радиус вписанной окружности $r = 2\sqrt{3}$.

36. В равностороннем треугольнике высота равна 9. Найти радиус вписанной в треугольник окружности.

37. Радиус окружности равен 10 см. Найти длину медианы вписанного в нее правильного треугольника.

38. В равнобедренный треугольник вписана окружность радиуса $\sqrt{3}$. Угол при основании 60° . Найти основание.

39. Найти высоту, опущенную на боковую сторону равнобедренного $\triangle ABC$, если высота, проведенная из вершины на основание, равна $4\sqrt{3}$ и угол при вершине B равен 120° .

40. Найти площадь равнобедренного треугольника, если его основание равно 16, а боковая сторона 10.

41. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 4. Найти боковую сторону треугольника, если его периметр равен 30.

42. Найти большую сторону прямоугольника, площадь которого 200 см^2 , а стороны относятся как $4:1$.

43. Периметр прямоугольника равен 48 см. Одна сторона больше другой на 12 см. Найти меньшую сторону прямоугольника.

44. В прямоугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC . Известно, что $\angle ACB$ и 5 раз меньше $\angle CAB$. Найти $\angle CAB$.

45. В прямоугольнике площадь равна 96 см^2 , а диагональ 20 см . Найти большую сторону прямоугольника.

46. Стороны прямоугольника относятся как $4 : 3$. Найти площадь, если периметр равен 56 см .

47. Периметр параллелограмма равен 28 . Одна из сторон равна 8 . Найти меньшую сторону параллелограмма.

48. Сумма двух противоположных углов параллелограмма 102° . Найти больший угол параллелограмма.

49. Площадь параллелограмма равна 120 , а его высоты 8 и 12 . Найти периметр параллелограмма.

50. Диагонали параллелограмма равны 12 и 16 , а угол между ними 30° . Найти площадь параллелограмма.

51. Периметр параллелограмма равен 60 . Найти площадь параллелограмма, если его стороны относятся как $2 : 3$, а острый угол равен 30° .

52. Доказать, что если в четырехугольнике диагонали являются биссектрисами углов, то такой четырехугольник — ромб.

53. Перпендикуляр, опущенный из вершины параллелограмма на диагональ, делит диагональ на отрезки 6 и 15 см . Найти стороны и диагонали параллелограмма, если известно, что разность сторон равна 7 см .

54. Стороны параллелограмма равны $\sqrt{3}$ и $2\sqrt{3}$. Найти сумму квадратов длин диагоналей параллелограмма.

55. Диагонали параллелограмма равны $2\sqrt{3}$ и 80 , а угол между ними равен 60° . Найти площадь параллелограмма.

56. Сторона ромба равна 5 , а меньшая диагональ 6 . Найти большую диагональ.

57. Углы, образованные диагоналями ромба с его сторонами, относятся как $2 : 7$. Найти больший угол ромба.

58. Диагональ ромба образует с его стороной угол 25° . Найти больший угол ромба.

59. Сторона ромба равна $2\sqrt{5}$, а одна из диагоналей равна 4. Найти площадь ромба.

60. Определить площадь ромба, если его сторона равна 10, а диагонали относятся как 3 : 4.

61. Найти сторону ромба, если его острый угол 30° , а площадь равна 18.

62. Найти площадь ромба со стороной 4 см, если радиус вписанной окружности равен 1,5 см.

63. Средняя линия трапеции равна 9 см, а одно из оснований равно 6 см. Найти другое основание.

64. Периметр равнобедренной трапеции равен 36 см, а средняя линия равна 10 см. Найти боковую сторону трапеции.

65. В равнобедренной трапеции основания равны 10 см и 24 см, боковая сторона — 25 см. Найти высоту трапеции.

66. Углы при основании трапеции равны 90° и 45° . Одно основание в два раза больше другого и равно 24. Найти меньшую боковую сторону трапеции.

67. В равнобедренной трапеции основания 6 см и 10 см. Диагональ равна 10 см. Найти площадь трапеции.

68. В равнобедренной трапеции основания 6 см и 18 см, а боковая сторона — 10 см. Найти площадь трапеции.

69. Средняя линия равнобедренной трапеции равна 4 см. Площадь трапеции равна 8. Найти тангенс угла между диагональю и основанием трапеции.

70. Периметр описанной около окружности трапеции равен 30° . Найти длину средней линии.

71. Найти площадь круга, если длина его окружности равна $4\sqrt{\pi}$.

72. Длина окружности равна $8\pi\sqrt{3}$. Найти длину хорды, стягивающей дугу 120° .

73. Найти расстояние от центра окружности до хорды, равной 6 см, если радиус окружности равен 5 см.

74. Площади двух кругов относятся как 1 : 16. Найти длину окружности большего круга, если радиус меньшего круга равен $4/\pi$.

75. В окружности радиуса $36/5\pi$ найти длину дуги, содержащей 100° .

76. Две окружности касаются внешне в точке A , BC — их общая внешняя касательная. Доказать, что $\angle BAC = 90^\circ$.

77. На окружности с центром O лежит точка B . AB — хорда, AC — касательная, $\angle BAC = 35^\circ$. Найти $\angle AOB$.

78. Сторона квадрата равна 18 см. Чему равен радиус окружности, вписанной в квадрат?

79. Найти площадь квадрата, вписанного в окружность радиуса 6 см.

80. В окружность вписан прямоугольник со сторонами 16 см и 12 см. Найти радиус окружности.

81. Длина окружности 4π . Найти площадь квадрата, вписанного в эту окружность.

82. В круг вписан квадрат со стороной, равной $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$.

Найти радиус круга.

83. В окружности с центром O проведены диаметр AB и хорда BC , $\angle AOC = 60^\circ$. Найти $\angle ABC$.

84. Окружность вписана в правильный шестиугольник со стороной $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$. Найти длину окружности.

85. В окружности с центром O проведены диаметр AB и хорда BC ; $\angle AOC = 60^\circ$. Найти $\angle ABC$.

Группа Б

1. Прямоугольный треугольник

1. Из вершины прямого угла A прямоугольного треугольника к гипотенузе проведены медиана AM и высота AK . Найти длину отрезка MK , если катеты равны 6 см и $3\sqrt{5}$ см.

2. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10, а проекция меньшего катета на гипотенузу — 3,6. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

3. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания окружности и гипотенузы делит ее на отрезки длиной 3 см и 10 см. Найти больший катет.

4. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, а один из катетов равен 10 см. Найти проекцию другого катета на гипотенузу.

5. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

6. Найти биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами 18 и 24 см.

7. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника проведена биссектриса, делящая гипотенузу на отрезки m и n . Найти высоту, проведенную к гипотенузе.

8. В прямоугольном треугольнике найти угол между медианой и биссектрисой, проведенными из вершины острого угла, равного α .

9. Доказать, что если стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию с разностью $d = 1$, то $R = 2,5$, где R — радиус описанного круга.

10. Определить высоту прямоугольного треугольника, опущенного на гипотенузу, у которого радиусы вписанной и описанной окружностей равны соответственно R и r .

11. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки

длиной m и n . Доказать, что $R + r = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + 6mn + n^2}$.

12. В прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 5 см вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найти периметр квадрата.

13. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что он имеет с треугольником общий прямой угол. Периметр прямоугольника равен 25 см. Найти катет треугольника.

14. Сумма синусов острых углов прямоугольного треугольника равна k , а гипотенуза — c . Найти площадь треугольника.

15. Найти площадь прямоугольного треугольника с острым углом α , если известно, что расстояние от вершины другого острого угла до центра вписанной окружности равно m .

16. Найти площадь прямоугольного треугольника по гипотенузе c и радиусу вписанной окружности r .

17. В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен α . Найти отношение r/R , где r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей.

18. Площадь прямоугольного треугольника и биссектриса прямого угла численно равна по 1. Найти длину гипотенузы.

19. Найти площадь прямоугольного треугольника, если расстояния от центра вписанной окружности до вершин острых углов равны соответственно $\sqrt{2}$ см и 6 см.

20. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки длиной m и n . Доказать, что $S = mn$.

2. Равнобедренный треугольник

1. В равнобедренном треугольнике разность двух неравных внутренних углов равна 90° . Найти величину большего угла.

2. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 5 см, а косинус угла при основании 0,6. Найти радиус вписанного круга.

3. Найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 16 см и высотой 4 см.

4. В равнобедренном треугольнике основание равно $16\sqrt{3}$, угол при вершине 120° . Найти проекцию высоты на боковую сторону.

5. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 4 см. Медиана, проведенная к боковой стороне, равна 3 см. Найти квадрат длины основания.

6. Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, а боковая сторона 18 см. К боковым сторонам проведены высоты. Вычислить утроенную длину отрезка, концами которого служат основания высот.

7. Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, а боковая сторона — 18 см. К боковым сторонам проведены биссектрисы. Вычислить $10m$, где m — длина отрезка, концами которого служат основания биссектрис.

8. В равнобедренном треугольнике углы при основании 30° , а высота, опущенная на это основание, равна 5 см. Найти радиус описанной окружности.

9. Угол при основании равнобедренного треугольника равен $\operatorname{arcsctg} \frac{3}{4}$. Найти угол между медианой и биссектрисой, проведенными к боковой стороне.

10. Найти угол при вершине равнобедренного треугольника, если медиана, проведенная к боковой стороне, образует с основанием угол $\arcsin \frac{3}{5}$.

11. На основании равнобедренного треугольника построен квадрат, площадь которого в 4 раза больше площади треугольника. Найти углы треугольника.

12. В равнобедренном треугольнике с острым углом при вершине проведены к боковой стороне медиана и высота, длины которых соответственно равны 12 и $3\sqrt{15}$. Найти основание треугольника.

13. В равнобедренном треугольнике боковая сторона в 2 раза больше высоты, опущенной на боковую сторону. Доказать, что основание треугольника равно радиусу описанной окружности.

14. Периметр равнобедренного треугольника в 4 раза больше высоты, опущенной на основание. Найти отношение R/r , где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

15. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании в 6 раз больше косинуса угла при вершине. Найти синус угла при основании.

16. Найти площадь равнобедренного треугольника, если основание его 12 см, а высота, опущенная на основание, равна длине отрезка, соединяющего середины основания и боковой стороны.

17. Стороны треугольника равны 55, 55 и 66 см. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат основания биссектрис данного треугольника.

18. Вычислить площадь равностороннего треугольника по разности между стороной и высотой, равной d .

19. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на

гипотенузе, а две другие — на катетах. Сторона квадрата равна 3. Найти длину гипотенузы.

20. В равнобедренном треугольнике боковая сторона a , основание — b ($b < 2a$). Высота разделена в отношении $1 : 2$ (считая от вершины) и через точку деления проведена прямая, параллельная основанию. Определить площадь полученной трапеции.

3. Произвольный треугольник

1. В треугольнике внутренние углы относятся как $2 : 3 : 5$. Найти внешний угол треугольника, смежный с меньшим внутренним углом.

2. В остроугольном $\triangle ABC$, площадь которого 10 м^2 , сторона AC равна 5 м , $\text{tg } \angle BAC = 4$. Найти величину угла между сторонами AC и BC .

3. Найти меньшую высоту треугольника со сторонами $13, 14, 15$.

4. Найти синус $\angle A$ в $\triangle ABC$, если $BC = 3\sqrt{3}$, $AC = 15$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

5. В $\triangle ABC$ даны стороны $a = \sqrt{10}$, $b = 2$, $c = 3$. Найти длину медианы m_a .

6. В $\triangle ABC$ $\angle A = 45^\circ$ и $\text{ctg } \angle B = 0,25$. Найти сторону AB , если площадь треугольника равна 10 .

7. Найти периметр $\triangle ABC$, если $AB = 20 \text{ см}$, $AC = 21 \text{ см}$, а высота $BD = 12 \text{ см}$.

8. Высота треугольника равна 4 ; она делит основание на две части, относящиеся, как $1 : 8$. Найти длину прямой, параллельной высоте и делящей треугольник на равновеликие части.

9. Даны две стороны b и c треугольника и его площадь $S = \frac{2}{5}bc$. Найти третью сторону a треугольника, если $\angle A$ — острый.

10. Доказать, что прямая, проходящая через вершину A $\triangle ABC$ и середину медианы BD , делит сторону BC в отношении $1 : 2$.

11. Биссектриса угла треугольника делит противоположающую сторону на отрезки длиной 2 и 4 см , а высота, проведенная к той же стороне, равна $\sqrt{15} \text{ см}$. Найти стороны треугольника и определить его вид.

12. В $\triangle ABC$ $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 50^\circ$. Доказать, что стороны треугольника связаны соотношением $c^2 = b(a + b)$.

13. Доказать, что если в треугольнике две медианы взаимно перпендикулярны, то сумма их квадратов равна квадрату третьей медианы.

14. Основание треугольника равно 4. Медиана, проведенная к основанию, равна $\sqrt{6} - \sqrt{2}$, а один из углов при основании равен 15° . Найти острый угол между медианой и основанием.

15. Высота треугольника равна 6 см и делит угол в отношении 2 : 1, а основание треугольника — на отрезки, меньший из которых равен 3 см. Найти стороны треугольника.

16. В $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 15$ см, $AC = 12$ см и $BC = 9$ см из вершины C провели медиану и высоту. Найти площадь треугольника, заключенного между медианой и высотой.

17. Две стороны треугольника, образующие тупой угол, равны соответственно a и b . Найти биссектрису этого угла, если углы треугольника удовлетворяют соотношению $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$.

18. Длины двух сторон остроугольного треугольника равны 12 см и 16 см. Найти угол между ними, если медиана, проведенная к третьей стороне, равна длине этой стороны.

19. Доказать, что если стороны треугольника a , b , c ($a < b < c$) образуют арифметическую прогрессию, то

$\cos \angle B = 1 - \frac{r}{R}$, где r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей.

20. В $\triangle ABC$ длины сторон образуют арифметическую прогрессию, причем $BC < AC < AB$. Известно, что

$$\frac{r}{R} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}. \text{ Найти } \angle B.$$

4. Вписанные и описанные треугольники

1. В прямоугольном треугольнике с катетами 18 и 24 см найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

2. В окружность радиуса R вписан правильный $\triangle ABC$. Хорда BD пересекает AC в точке E так, что $AE : CE = 2 : 3$. Найти CD .

3. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, в 1,5 раза меньше радиуса описанной окружности. Найти угол при основании.

4. В прямоугольном треугольнике один катет равен 48 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 3,92 см. Найти длину вписанной окружности.

5. Найти радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 8, 15, 17.

6. Около $\triangle ABC$ с углом $B = 60^\circ$ описана окружность радиуса 4 см. Диаметр окружности, перпендикулярный к стороне BC , пересекает AB в точке M так, что $AM : BM = 2 : 3$. Найти площадь треугольника.

7. Один из углов треугольника равен 60° . Точка касания вписанной окружности делит противолежащую этому углу сторону на отрезки a и b . Найти площадь треугольника.

8. В треугольник со сторонами 16, 30 и 34 см вписана окружность. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат точки касания.

9. В $\triangle ABC$ $AC = b$, $AB = c$, $\angle A$ вдвое больше $\angle B$. Найти радиус описанной окружности.

10. Сторона треугольника равна 15, разность двух других сторон равна 1. Найти косинус угла, противолежащего данной стороне, если радиус вписанной окружности равен 4.

5. Параллелограмм

1. Острый угол ромба равен 30° , а площадь вписанного круга 4π . Найти площадь ромба.

2. Меньшая диагональ ромба равна $\sqrt{3}$, его площадь 1,5. Найти величину тупого угла ромба.

3. Диагонали параллелограмма соответственно равны 17 см и 19 см. Одна сторона 10 см. Найти другую сторону.

4. В параллелограмме боковая сторона равна 8 и острый угол при основании 30° . Найти проекцию высоты, опущенной на основание, на боковую сторону.

5. Найти острый угол ромба $ABCD$, если прямая, проведенная через вершину A , делит $\angle BAD$ в отношении 1 : 3, а сторону BC — в отношении 3 : 5.

6. В прямоугольник со сторонами 3 м и 4 м вписан другой прямоугольник, стороны которого относятся, как 1: 3. Найти стороны этого прямоугольника.

7. Периметр ромба равен 2 м; длины диагоналей его относятся как 3 : 4. Вычислить площадь ромба.

8. Диагонали ромба относятся как 3 : 4. Определить отношение площади ромба к площади круга, вписанного в ромб.

9. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M так, что $AM = \sqrt{2}$, $BM = 2$, $CM = 6$. Найти площадь прямоугольника $ABCD$, если известно, что $AD = 2AB$.

10. Стороны параллелограмма $ABCD$ равны 8 м и 5 м. Величина $\angle ABC = 120^\circ$. Найти радиус окружности, вписанной в $\triangle BCD$.

6. Трапеция

1. Периметр равнобедренной трапеции равен 40 см, а средняя линия – 12 см. Найти боковую сторону трапеции.

2. Угол при основании равнобедренной трапеции равен 60° . Боковая сторона равна меньшему основанию трапеции. Большее основание равно 20 см. Найти длину средней линии трапеции.

3. Основания равнобедренной трапеции равны $5\sqrt{3}$ см и $\sqrt{3}$ см, а угол при основании 60° . Найти площадь трапеции.

4. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Верхнее основание равно радиусу окружности и равно 2 см. Найти нижнее основание трапеции.

5. В равнобедренной трапеции диагональ делит острый угол пополам. Найти среднюю линию трапеции, если ее периметр равен 36 см, а большее основание 12 см.

6. Большее основание трапеции равно 24 см, а расстояние между серединами ее диагоналей равно 4 см. Найти меньшее основание.

7. Разность оснований равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна 8 см. Угол при основании трапеции α . Найти площадь трапеции,

если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

8. Середина нижнего основания трапеции является центром описанной окружности. Основания трапеции равна 4 см и 32 см. Найти величину диагонали трапеции.

9. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании и равны 13 и 15. Найти стороны трапеции, если ее высота – 12.

10. Доказать, что если боковые стороны трапеции перпендикулярны, то сумма квадратов ее оснований равна сумме квадратов диагоналей.

7. Разные задачи

1. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, у которого отношение длины описанной окружности к стороне многоугольника равно 2π ?

2. Около правильного многоугольника описана окружность, в него же вписана еще одна окружность. Площадь получившегося кольца равна 64π . Найти длину стороны многоугольника.

3. В окружность вписаны правильные треугольник и шестиугольник. Найти отношение площади треугольника к площади шестиугольника.

4. В выпуклом пятиугольнике два внутренних угла прямые, остальные относятся между собой как $2 : 3 : 4$. Найти больший угол.

5. Стороны треугольника 20, 34 и 42 см. Найти отношение площадей вписанного и описанного кругов.

6. Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна 3024 см^2 , а диагонали – 144 и 42 см. Найти длину отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD .

7. Стороны треугольника a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Доказать, что $ac = 6Rr$, где R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей.

8. Центр вписанной в треугольник окружности соединен отрезками с вершинами треугольника. Получились три треугольника с площадями 4, 13 и 15 см^2 . Найти стороны исходного треугольника.

9. Из точки, взятой на окружности радиуса R , проведены две равные хорды; угол между хордами равен α . Найти площадь части круга, заключенного между этими хордами.

10. В круг радиуса R вписаны правильный треугольник и квадрат, имеющие общую вершину. Найти площадь их пересечения.

11. Квадрат со стороной 4 см срезан по углам так, что получился правильный восьмиугольник. Найти площадь 8-угольника.

12. Стороны треугольника 20, 34 и 42 см. Найти площадь вписанного прямоугольника, если известно, что его периметр равен 45 см.

13. Основания трапеции 30 и 12 см, диагонали 20 и 34 см. Найти площадь трапеции.

14. Прямоугольник со сторонами 36 и 48 см разделен диагональю на два треугольника. В каждый из этих треугольников вписана окружность. Найти расстояние между их центрами.

15. На отрезке $AC = 12$ см взята точка B так, что $AB = 4$ см. На AC и на AB как на диаметрах построены окружности. Найти радиус окружности, касающейся двух данных и отрезка AC .

16. Длина окружности, в которую вписан правильный шестиугольник, равна $\sqrt{3}$. Чему равна длина окружности, вписанной в этот шестиугольник?

17. Из одной точки проведены к окружности две касательные. Длина каждой касательной 13 см, а расстояние между точками касания 24 см. Найти радиус окружности.

18. Длина окружности равна $6\sqrt{5}$ л. Найти площадь сектора с центральным углом 40° .

19. В треугольник вписана окружность. Прямые, соединяющие центр окружности с вершинами, делят треугольник на части с площадями 120, 104 и 112 см^2 . Найти радиус вписанной окружности.

20. Стороны треугольника пропорциональны числам 20, 21, 29. Разность между большей и меньшей сторонами равна 18. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.

Глава 11

СТЕРЕОМЕТРИЯ

При решении задач стереометрии возрастают требования к качеству чертежа и его наглядности.

Освоение принципов и техники построения пространственного чертежа – необходимое условие для успешного решения задач.

Пространственные тела можно условно разделить на удобные для пространственного изображения и неудобные. К первой категории относятся многогранники: параллелепипед, треугольная призма, треугольная и четырехугольная пирамида. Все остальные будем считать неудобными для изображения.

В некоторых случаях при решении задач можно вообще обойтись одним плоским чертежом или несколькими (в случае необходимости) и не строить пространственное изображение.

Основным средством решения задач является аналитический метод.

§ 37. Многогранники

К этому разделу отнесем два основных типа задач:

- 1) задачи на вычисление;
- 2) задачи на сечения.

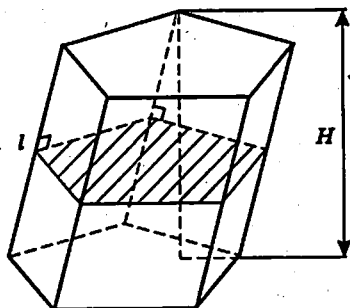
К задачам на вычисление относятся те, где требуется найти линейные элементы правильных призм и пирамид, а именно: сторону основания, боковое ребро, апофему и т. д., далее угловые элементы: двугранные углы при основании, линейные углы при вершине; площади: боковой поверхности, полной поверхности, основания.

В основе второго типа задач – задач на построение лежит умение построить сечение данного многогранника плоскостью и определить вид этого сечения. В задачах этого типа сечение задается точкой и прямой, тремя точками, двумя точками и прямой, параллельной плоскости сечения и т. д.

Справочные материалы

1. Призма

1) Произвольная призма

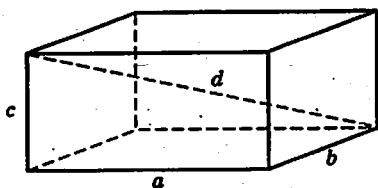


l – боковое ребро;
 P – периметр основания;
 S – площадь основания;
 H – высота;
 $P_{\text{сеч}}$ – периметр $\perp$ сечения;
 $S_{\text{сеч}}$ – площадь сечения;
 $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности;
 V – объем.
 $S_{\text{бок}} = P_{\text{сеч}} \cdot l; V = S \cdot H;$
 $V = S_{\text{сеч}} \cdot l.$

2) Прямая призма

$$S_{\text{бок}} = P \cdot H; S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}; V = S \cdot H.$$

2. Прямоугольный параллелепипед

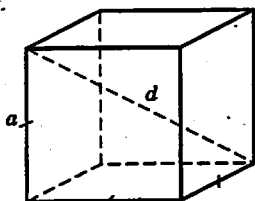


$$S_{\text{бок}} = P \cdot H;$$

$$V = abc;$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

3. Куб



$$V = a^3; d = a\sqrt{3}.$$

4. Пирамида

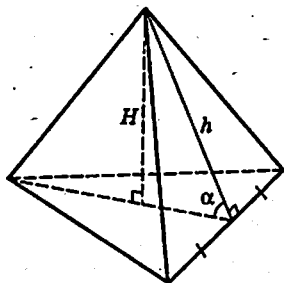
1) Произвольная пирамида

S – площадь основания;

H – высота;

V – объем; $V = \frac{1}{3} S \cdot H$; S_6 – площадь боковой поверхности; $S_{\pi} = S_6 + 2S_{\text{осн.}}$.

2) Правильная пирамида



h – апофема;

α – угол наклона граней к основанию;

$$S_6 = \frac{1}{2} P \cdot h; S_6 = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos \alpha};$$

$$S_{\pi} = S_6 + S_{\text{осн.}}; V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

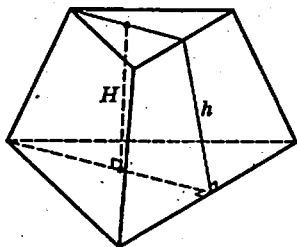
3) Произвольная усеченная пирамида

S_1 и S_2 – площадь оснований;

H – высота; V – объем;

$$V = \frac{H}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

4) Правильная усеченная пирамида



P_1 и P_2 – периметр оснований;

h – апофема;

S_6 – площадь боковой поверхности;

$$S_6 = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) h;$$

$$S_{\pi} = S_6 + S_1 + S_2.$$

Дополнительные соотношения между элементами призмы и пирамиды

1. Если в пирамиде $MA_1A_2...A_n$ все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы

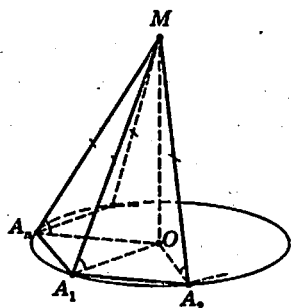


Рис. 1

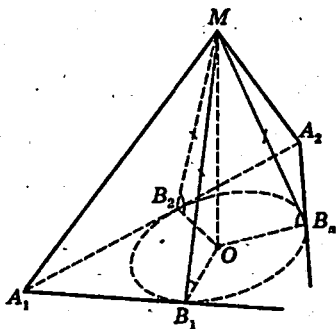


Рис. 2

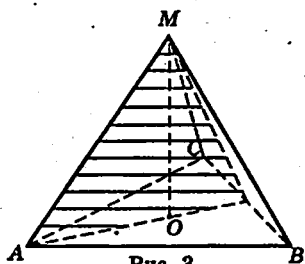


Рис. 3

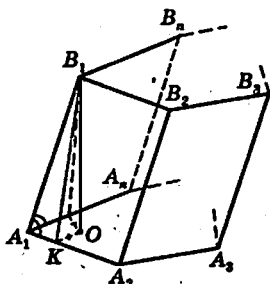


Рис. 4

(рис. 1), длины всех боковых ребер равны, то вершина M пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды (эта точка O является также точкой пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам основания пирамиды).

2. Если в пирамиде $MA_1A_2...A_n$ все боковые грани образуют с основанием равные углы и длины всех апофем боковых граней равны, то вершина M пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды (эта точка является также точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды) (рис. 2).

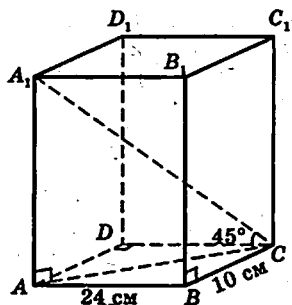
3. Если высота треугольной пирамиды $MAVC$ проходит через точку пересечения высот треугольника ABC , лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны, т. е. $AM \perp BC$, $MC \perp AB$ и $MB \perp AC$. Справедливо и обратное утверждение (рис. 3).

4. Если MO — высота пирамиды $MAVC$ и $MA \perp BC$, то $(MAO) \perp BC$ (рис. 3).

5. Если в наклонной призме $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ боковое ребро A_1B_1 составляет равные углы со сторонами основания, образующими вершину A_1 , то точка O основания высоты B_1O лежит на биссектрисе $\angle A_1$ (рис. 4).

1. Параллелепипед

Пример 1. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 24 см и 10 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45° . Найти боковое ребро параллелепипеда.



Дано:
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед.

$AB = 24$ см, $BC = 10$ см, $A_1 C$ – диагональ параллелепипеда, $\angle A_1 C A = 45^\circ$.

Найти боковое ребро AA_1 .

Решение

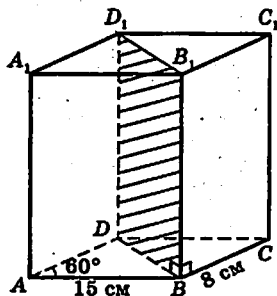
Так как параллелепипед прямой, то все его грани – прямоугольники. Из $\triangle ABC$, где $\angle B = 90^\circ$ найдем AC :

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}, AC = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} = 26 \text{ (см)}.$$

Так как $AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp AC$ (по определению перпендикулярности прямой и плоскости). Значит, $\triangle AA_1 C$ – прямоугольный, и так как $\angle A_1 C A = 45^\circ$ (по условию), то $\angle AA_1 C = 45^\circ$, т. е. $AC = AA_1 = 26$ см.

Ответ: 26 см.

Пример 2. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8 см и 15 см и образуют угол в 60° . Меньшая из площадей диагональных сечений равна 130 см^2 . Найти площадь поверхности параллелепипеда.



Дано:
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямой параллелепипед.

$AB = 15$ см, $BC = 8$ см,
 $\angle DAB = 60^\circ$, $S_{\text{сеч.}} = 130 \text{ см}^2$.

Найти $S_{\text{полн.}}$

Решение

Так как параллелепипед прямой, то боковые грани – прямоугольники. Заметим, что $DB < AC$, тогда $DD_1 B_1 B$ – наименьшее диагональное сечение.

Пусть $BB_1 = H$ — высота сечения (а значит, и параллелепипеда). Так как $BB_1 \perp (ABCD) \Rightarrow BB_1 \perp BD$.

Следовательно, сечение BB_1D_1D — прямоугольник.

$S_{\text{сеч}} = H \cdot BD = 130 \text{ (см}^2\text{)}$. Диагональ основания BD найдем из $\triangle DAB$ по теореме косинусов:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ, \text{ или } BD^2 = 169,$$

откуда $BD = 13 \text{ (см)}$, тогда $H = 130 : 13 = 10 \text{ (см)}$.

Так как прямой параллелепипед является одновременно и призмой, то $S_{\text{бок}} = P \cdot H$, где $P = 2(15 + 8) = 46 \text{ (см)}$, $H = 10 \text{ см}$, тогда $S_{\text{бок}} = 460 \text{ (см}^2\text{)}$.

$$S_{\text{осн}} = AB \cdot AD \sin 60^\circ = 15 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 60\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\pi} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 460 + 120\sqrt{3} = 20(23 + 6\sqrt{3}) \text{ см}^2.$$

Ответ: $20(23 + 6\sqrt{3}) \text{ см}^2$.

Пример 3. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет угол α с плоскостью боковой грани и угол β с плоскостью основания. Найти объем параллелепипеда, если его высота равна H .

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $D_1 B$ — диагональ параллелепипеда, $\angle D_1 B C_1 = \alpha$, $\angle D_1 B D = \beta$, $AA_1 = H$ — высота.

Найти V .

Решение

Заметим, что DB — проекция диагонали $D_1 B$ на плоскость основания $ABCD$, тогда $\angle D_1 B D = \beta$.

Аналогично BC_1 — проекция диагонали $D_1 B$ на плоскость боковой грани, тогда $\angle D_1 B C_1 = \alpha$. По условию высота прямоугольного параллелепипеда есть любое боковое ребро, значит,

$$\begin{aligned} AA_1 = DD_1 = BB_1 = CC_1 = H. \text{ Так как } DD_1 \perp (ABCD) \\ \Rightarrow D_1 D \perp DB, \text{ тогда из } \triangle D_1 D B \text{ имеем } \operatorname{tg} \beta = \\ = \frac{DD_1}{DB} = \frac{H}{DB}, \text{ откуда } DB = \frac{H}{\operatorname{tg} \beta} = H \operatorname{ctg} \beta. \text{ Аналогично} \end{aligned}$$

находим $D_1B = \frac{H}{\sin\beta}$. Пусть $AB = x$, $BC = y$, тогда из

$\triangle ADB$ по теореме Пифагора имеем $x^2 + y^2 = H^2 \operatorname{ctg}^2 \beta$. Из $\triangle BC_1D_1$: $D_1C_1 = D_1B \sin \alpha$, и так как $D_1C_1 = AB = x$,

$$\text{то } x = D_1B \sin \alpha = \frac{H}{\sin\beta}, \quad \sin \alpha = \frac{H \sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Подставляя значение x в равенство $x^2 + y^2 = H^2 \operatorname{ctg}^2 \beta$,

$$\begin{aligned} \text{имеем } y^2 &= H^2 \operatorname{ctg}^2 \beta - \frac{H^2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} = \\ &= H^2 \left(\frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} \right) = H^2 \cdot \frac{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta}, \end{aligned}$$

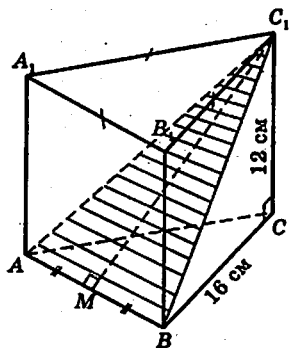
$$\text{откуда } y = \frac{H}{\sin\beta} \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}.$$

Следовательно, объем прямоугольного параллелепипеда

$$\begin{aligned} V &= xyH = \frac{H \sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{H}{\sin \beta} \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha} \cdot H = \\ &= \frac{H^3 \sin \alpha}{\sin^2 \beta} \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha} \text{ (куб. ед.)}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{H^3 \sin \alpha}{\sin^2 \beta} \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha} \text{ (куб. ед.)}.$$

2. Призма.



Пример 4. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 16 см, боковое ребро равно 12 см. Найти площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противоположащую вершину нижнего основания.

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма, $AB = BC = AC = 16$ см, $CC_1 = 12$ см.

Найти $S_{\text{сеч.}}$.

Решение

Так как призма правильная, то все боковые грани – равные прямоугольники. Тогда $BC_1 = AC_1$, т. е. сечение ABC_1 – равнобедренный треугольник с основанием $AB = 16$ см.

Далее, $C_1C \perp (ABC) \Rightarrow C_1C \perp BC$ (по определению перпендикулярности прямой и плоскости).

Из $\triangle C_1CB$ находим $BC_1 = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20$ (см). C_1M – медиана и высота равнобедренного

$\triangle ABC_1$, тогда $MB = \frac{1}{2}AB = 8$ (см) и из $\triangle C_1MB$ находим

$$C_1M = \sqrt{BC_1^2 - MB^2} \text{ или}$$

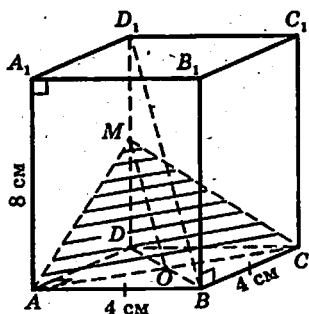
$$C_1M = \sqrt{400 - 64} = \sqrt{336} = \sqrt{16 \cdot 21} = 4\sqrt{21} \text{ (см).}$$

$$\text{Следовательно, } S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2}AB \cdot C_1M =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 4\sqrt{21} = 32\sqrt{21}.$$

Ответ: $32\sqrt{21}$ см².

Пример 5. В правильной четырехугольной призме через диагональ основания проведено сечение параллельно диагонали призмы. Найти площадь сечения, если сторона основания призмы равна 4 см, а ее высота 8 см.



Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – правильная четырехугольная призма, $AB = 4$ см, $AA_1 = 8$ см – высота, AC – диагональ основания $(AMC) \parallel D_1B$, D_1B – диагональ призмы.

Найти $S_{\text{сеч.}}$.

Решение

Через скрещивающиеся прямые D_1B и AC проведем

плоскость, параллельную D_1B . В плоскости D_1DB проведем $OM \parallel D_1B$, где O — точка пересечения диагоналей основания. Соединим точку M с точками A и C ; тогда $(AMC) \parallel D_1B$, так как известно, что если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна самой плоскости (признак параллельности прямой и плоскости).

Итак, $\triangle AMC$ — искомое сечение. Заметим, что $\triangle ADM = \triangle MDC$ (по трем сторонам). Далее, $DO = OB$ и $OM \parallel D_1B$ (по построению), значит, OM — средняя линия $\triangle D_1DB$, $DM = MD_1$. Так как $\triangle AMC$ — равнобедренный ($AM = MC$, $AO = OC$), то MO — медиана и вы-

сота. Из $\triangle ADB$, где $AB = AD = 4$ см, $DB = 4\sqrt{2}$ (см).

$$\text{Из } \triangle D_1DB \quad D_1B = \sqrt{D_1D^2 + DB^2} = \sqrt{8^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \text{ (см)}.$$

$$\text{Тогда } MO = \frac{1}{2} D_1B = 2\sqrt{6} \text{ (см)} \text{ и } S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} AC \cdot MO \text{ или}$$

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{12} = 8\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{Итак, } S_{\text{сеч.}} = 8\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Ответ: $8\sqrt{3} \text{ см}^2$.

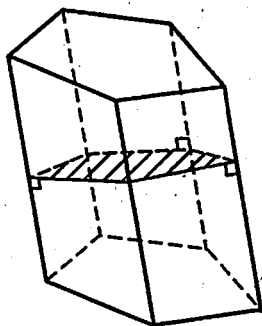
Пример 6. Доказать, что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.

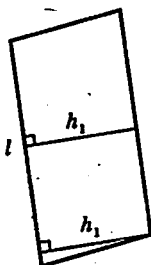
Решение

Пусть l — длина бокового ребра;

P_1 — периметр перпендикулярного сечения (на рис. заштриховано).

Заметим, что так как призма наклонная, то боковые грани — параллелограммы. Сечение перпендикулярно каждой боковой грани, т. е. перпендикулярно боковым ребрам.





Пусть h_1 — высота параллелограмма — одной из боковых граней, тогда $S = l \cdot h_1$ — площадь одной из боковых граней.

Так как таких граней всего n и каждая боковая грань имеет свою высоту, то имеем

$S_{\text{бок.}} = S_1 + S_2 + \dots + S_n = l \cdot h_1 + l \cdot h_2 + \dots + l \cdot h_n = l(h_1 + h_2 + \dots + h_n) = l \cdot P_{\perp}$, что и требовалось доказать.

Пример 7. Самая большая диагональ правильной шестиугольной призмы, имеющая длину m , составляет с боковым ребром призмы угол α . Определить объем призмы.

Решение

Заметим, что из каждой вершины призмы, например из вершины D_1 , можно провести три диагонали: D_1A , D_1F и D_1B . Они проектируются на плоскость основания $AB C D E F$ диагоналями основания AD , FD и BD .

Из приведенных трех наклонных D_1A , D_1F и D_1B та больше, у которой проекция больше. Следовательно, наибольшая наклонная будет AD_1 .

Так как призма правильная, то $DD_1 \perp (AB C D E F) \Rightarrow DD_1 \perp AD$. Из $\triangle ADD_1$, где $AD_1 = m$ и $\angle AD_1D = \alpha$ находим $D_1D = H = m \cos \alpha$ и $AD = m \sin \alpha$. Так как диагонали основания AD , BD и CE делят правильный шестиугольник на 6 правильных треугольников, то

$$S_{\triangle AOB} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \text{ где } a = AB = AO = BO, \text{ тогда } S_{\text{осн}} =$$

$$= 6 \cdot \frac{(AO)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} \sqrt{3} \cdot \left(\frac{AD}{2} \right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8} m^2 \sin^2 \alpha. \text{ Следова-}$$

$$\text{тельно, } V = S_{\text{осн}} \cdot H, \text{ или } V = \frac{3\sqrt{3}}{8} m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{8} m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$ (куб. ед.).

3. Пирамида

Пример 8. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 6 см и 14 см и одной из диагоналей 12 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 4 см. Найти боковые ребра пирамиды.

Дано: $MABCD$ – пирамида,

$ABCD$ – параллелограмм,

$DB = 12$ см, $AB = 14$ см, $BC = 6$ см, $MO = 4$ см – высота пирамиды.

Найти MA , MB , MC , MD .

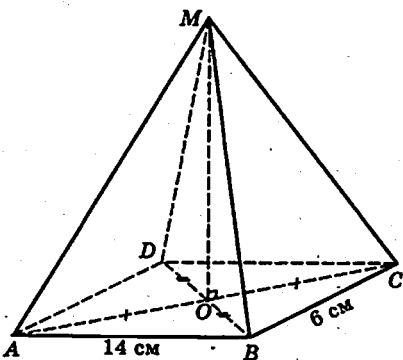
Решение

Так как $ABCD$ – параллелограмм, то диагонали его AC и BD в точке пересечения делятся пополам, т. е. $AO = OC$ и $OD = OB$. Тогда $AM = MC$ и $MB = MD$ как наклонные, имеющие равные проекции (так как MO – высота пирамиды, то $MO \perp (ABCD) \Rightarrow MO \perp AC$ и $MO \perp BD$). По свойству параллелограмма (связывающего стороны и диагонали) имеем $2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2$ или $2(196 + 36) = AC^2 + 144$, $AC^2 = 320$, откуда $AC = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$ (см), $AO = 4\sqrt{5}$ (см).

Из $\triangle AOM$ найдем $AM = \sqrt{AO^2 + MO^2} = \sqrt{80 + 16} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ (см).

Значит, $AM = MC = 4\sqrt{6}$ (см). Аналогично $OB = \frac{1}{2}BD = 6$ (см).

Из $\triangle MOB$ $MB = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (см).



$$MB = MD = 2\sqrt{13} \text{ (см.)}$$

$$\text{Ответ: } MA = MC = 4\sqrt{6} \text{ см; } MB = MD = 2\sqrt{13} \text{ см.}$$

Пример 9. Высота правильной треугольной пирамиды равна H , а двугранный угол при стороне основания равен 45° . Найти площадь поверхности пирамиды.

Дано: $MABC$ — правильная треугольная пирамида,
 $MO = H$ — высота пирамиды,

$$\angle ODM = 45^\circ.$$

Найти $S_{\text{пол.}}$

Решение

$$S_{\text{пол.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}$$

Так как пирамида правильная, то $\triangle ABC$ — равносторонний и точка O — центр вписанной и описанной окружностей. Пусть $AB = x$,

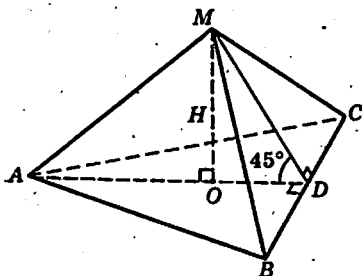
где $x > 0$, тогда $S_{\text{осн.}} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$ (площадь правильного треугольника).

Так как $MO = H$ — высота пирамиды, то $MO \perp (ABC) \Rightarrow MO \perp OD$, т. е. $\triangle MOD$ — прямоугольный и $\angle ODM = 45^\circ$ — двугранный угол при стороне основания (угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания).

В $\triangle MOD$ $\angle OMD = \angle ODM = 45^\circ$, т. е. $MO = OD = H$, тогда $MD = \sqrt{H^2 + H^2} = H\sqrt{2}$.

Следовательно, $S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} \cdot h$, где $P_{\text{осн.}} = 3AB = 3x$ и $h = MD = H\sqrt{2}$.

Так как $\triangle ABC$ — правильный, то $AB = 2r\sqrt{3} = 2 \cdot OD \sqrt{3} = 2H\sqrt{3}$, тогда $P_{\text{осн.}} = 3 \cdot 2H\sqrt{3} = 6\sqrt{3}H$ и $S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3}H \cdot H\sqrt{2} = 3\sqrt{6}H^2$.



$$\begin{aligned} \text{Теперь находим } S_{\text{полн.}} &= 3\sqrt{6}H^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2H\sqrt{3})^2 = \\ &= 3\sqrt{6}H^2 + 3\sqrt{3}H^2 = 3\sqrt{3}H^2(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

Ответ: $3\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)H^2$.

Пример 10. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными a , и углом между ними, равным α . Все боковые ребра наклонены к основанию под углом β . Определить объем пирамиды.

Дано: МАВС – пирамида,
 $\triangle ABC$ – равнобедренный,
 $AB = AC = a$, $\angle BAC = \alpha$;
 $\angle MAO = \angle MBO = \angle MCO = \beta$.

Определить объем V пирамиды.

Решение

Высота MO пирамиды МАВС должна проходить через центр окружности, описанной около равнобедренного $\triangle ABC$. Так как $\angle BAC =$

$= \alpha$ – произвольный, то положение центра O может быть в любой точке отрезка AD , где D – середина BC и даже на продолжении его за точку D , если угол α – тупой.

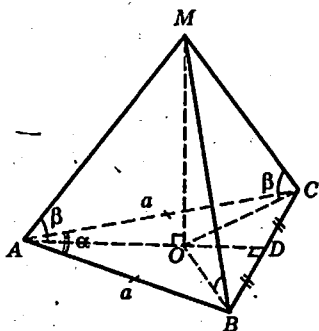
Из $\triangle AOM$, где $\angle OAM = \beta$ (по условию) и $AO = R$ – радиус описанной окружности, найдем высоту пирамиды MO :

$$\text{миды } MO: \operatorname{tg} \beta = \frac{MO}{R} \Rightarrow MO = R \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Из $\triangle ABC$ по теореме синусов получим $\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$,

откуда $R = \frac{BC}{2 \sin \alpha}$. Но $BC = 2BD$; $BD = a \sin \frac{\alpha}{2}$, тогда

$$\text{да } R = \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}, \text{ значит, } MO = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha}.$$



$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha.$$

$$\text{Следовательно, } V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot MO =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha \cdot \frac{a \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha} = \frac{1}{6} a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

$$\text{Итак, } V = \frac{a^3}{6} \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta \text{ (куб. ед.).}$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^3}{6} \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

Пример 11. Правильная четырехугольная пирамида со стороной основания, равной a , двугранным углом при основании, равным 2α , пересечена плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании. Найти площадь сечения.

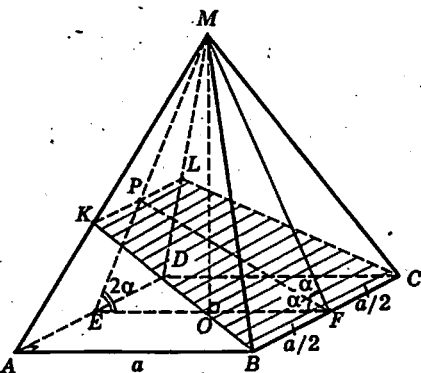
Дано: $MABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $AB = a$, $\angle OFM = 2\alpha$, $\angle EFP = \angle PFM = \alpha$.

Найти $S_{\text{сеч.}}$.

Решение

Пусть $KLBC$ — данное сечение. Проведем $(MFE) \perp BC$.

По условию $\angle MEF = \angle MFE = 2\alpha$, $\angle EFP =$



$$= \angle MFP = \alpha, BC = AD = EF = a. \text{ Тогда } S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} (KL + BC) \cdot PF \text{ или } S_{\text{сеч.}} = (BF + KP) \cdot PF. \text{ Из } \triangle EPF \angle EPF = 180^\circ - (2\alpha + \alpha) = 180^\circ - 3\alpha.$$

По теореме синусов имеем:

$$\frac{PF}{\sin 2\alpha} = \frac{EF}{\sin (180^\circ - 3\alpha)}, \text{ откуда } PF = \frac{a \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}.$$

Из подобия $\triangle MKP$ и $\triangle MAE$ имеем

$$\frac{KP}{AE} = \frac{MP}{ME}, \text{ откуда } KP = \frac{AE \cdot MP}{ME}.$$

Далее, из $\triangle MOE$ находим $ME = \frac{EO}{\cos 2\alpha}$ или $ME =$

$$= \frac{a}{2 \cos 2\alpha}. \text{ Так как } MF = ME \text{ и } \angle MPF = 180^\circ - \angle EPF = 180^\circ - (180^\circ - 3\alpha) = 3\alpha, \text{ то из } \triangle MPF \text{ имеем}$$

по теореме синусов $\frac{MP}{\sin \alpha} = \frac{MF}{\sin 3\alpha}$, откуда $MP =$

$$= \frac{MF \cdot \sin \alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{a \sin \alpha}{2 \cos 2\alpha \sin 3\alpha}. \text{ Следовательно, } KP =$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{a \sin \alpha}{2 \cos 2\alpha \sin 3\alpha} : \frac{a}{2 \cos 2\alpha} = \frac{a \sin \alpha}{2 \sin 3\alpha}.$$

$$\text{Итак, } S_{\text{сеч.}} = \left(\frac{a}{2} + \frac{a \sin \alpha}{2 \sin 3\alpha} \right) \cdot \frac{a \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} =$$

$$= \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2 \sin^2 3\alpha} \cdot (\sin 3\alpha + \sin \alpha) =$$

$$= \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2 \sin^2 3\alpha} \cdot 2 \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha = \frac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos \alpha}{\sin^2 3\alpha} \text{ (кв. ед.).}$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos \alpha}{\sin^2 3\alpha}.$$

4. Усеченная пирамида

Пример 12. Основаниями усеченной пирамиды являются правильные треугольники со сторонами 10 см и 6 см. Одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания и равно 2 см. Найти площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — усеченная пирамида.

$\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ — правильные.

$AC = 10$ см, $A_1C_1 = 6$ см, $CC_1 = 2$ см,

$CC_1 \perp (ABC)$ и
 $CC_1 \perp (A_1B_1C_1)$.

Найти $S_{\text{бок.}}$.

Решение

Так как по условию $CC_1 \perp (ABC)$, то $CC_1 \perp CD \perp CA \perp CB$, тогда трапеции AA_1C_1C и BB_1C_1C равны ($AC = CB$ и $A_1C_1 = C_1B_1$).

Значит, $S_{ACC_1A_1} = S_{BCC_1B_1}$.

Так как $AA_1 = BB_1$ и $AB \parallel A_1B_1$, то грань ABB_1A_1 — равнобедренная трапеция. Следовательно, $S_{\text{бок.}} = 2S_{ACC_1A_1} + S_{ABB_1A_1}$,

$$S_{ACC_1A_1} = \frac{1}{2}(AC + A_1C_1) \cdot CC_1 = \frac{1}{2}(10 + 6) \cdot 2 = 16 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{ABB_1A_1} = \frac{1}{2}(AB + A_1B_1) \cdot M_1D = \frac{1}{2}(10 + 6) \cdot M_1D = 8 \cdot M_1D.$$

Высоту боковой грани M_1D найдем из $\triangle M_1MD$, где $MM_1 = C_1C = 2$ см; $MD = CD - CM = CD - C_1M_1$.

Из $\triangle ADC$, где $AC = 10$ см, $AD = 5$ см, имеем

$$CD = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

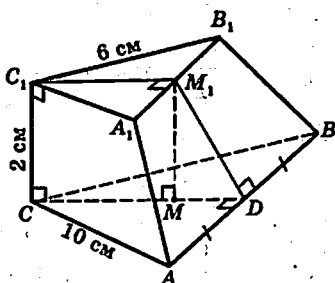
$$\text{Аналогично из } \triangle A_1M_1C_1 \quad C_1M_1 = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\text{тогда } MD = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

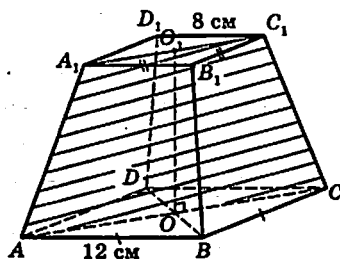
$$\text{Значит, } S_{ABB_1A_1} = 8 \cdot \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 8\sqrt{16} = 32 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{Итак, } S_{\text{бок.}} = 2 \cdot 16 + 32 = 64 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 64 см^2 .



Пример 13. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны 12 см и 8 см, а площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной гра-



ни, равна 30 см^2 . Найти объем усеченной пирамиды.

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида.

$AB = 12 \text{ см}$, $A_1 B_1 = 8 \text{ см}$.

$$S_{AA_1 C_1 C} = 30 \text{ см}^2$$

Найти $V_{\text{ус.пир.}}$.

Решение

Так как пирамида правильная, то

$$V_{\text{ус.пир.}} = \frac{H}{3} (S_n + S_s + \sqrt{S_n \cdot S_s}), \text{ где } H = OO_1,$$

$$S_n = S_{ABCD} = AB^2 = 144 (\text{см}^2), S_s = S_{A_1 B_1 C_1 D_1} = A_1 B_1^2 = 64 (\text{см}^2).$$

Остается найти высоту $OO_1 = H$ усеченной пирамиды.

Так как $AC \parallel A_1 C_1$ и $AA_1 = CC_1$, то сечение $AA_1 C_1 C$ — равнобедренная трапеция. По условию задачи $S_{AA_1 C_1 C} = 30 \text{ см}^2$.

$$\text{С другой стороны, } S_{AA_1 C_1 C} = \frac{AC + A_1 C_1}{2} \cdot O_1 O.$$

Из $\triangle ABC$ находим $AC = AB \sqrt{2} = 12 \sqrt{2} (\text{см})$; аналогично из $\triangle A_1 B_1 C_1$ $A_1 C_1 = 8 \sqrt{2} (\text{см})$, тогда $(12 \sqrt{2} + 8 \sqrt{2}) \cdot H = 2 \cdot 30$, откуда $H = \frac{3}{\sqrt{2}} (\text{см})$.

$$\begin{aligned} \text{Значит, } V_{\text{ус.пир.}} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} (144 + 64 + 12 \cdot 8) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (144 + 160) = \frac{304}{\sqrt{2}} = 152 \sqrt{2} (\text{см}^3). \end{aligned}$$

Ответ: $152 \sqrt{2} \text{ см}^3$.

5. Построение сечений

Пример 14. В тетраэдре $DABC$ точки M , N и K являются серединами ребер AD , AB и BC ; $DB = 5 \text{ см}$; $AC = 6 \text{ см}$. Доказать, что плоскость MNK проходит через середину P ребра DC , и найти периметр четы-

реугольника, полученного при пересечении тетраэдра плоскостью MNK .

Дано: тетраэдр $DABC$, M – середина AD , N – середина AB , K – середина BC ,

$DB = 5$ см, $AC = 6$ см.

1) Доказать, что плоскость MNK проходит через середину P ребра DC .

2) Найти P_{MNKP} .

Решение

1) Найдем точки пересечения плоскости MNK с ребрами тетраэдра. Так как N – середина AB и K – середина BC , то NK – средняя линия $\triangle ABC$, тогда $NK \parallel AC$.

$AC \subset (DAC)$, поэтому $NK \parallel (DAC)$, так как известно, что если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна данной плоскости (признак параллельности прямой и плоскости).

Заметим, что плоскости DAC и MNK имеют общую точку M , значит, они пересекаются по прямой MP , проходящей через точку M в плоскости DAC .

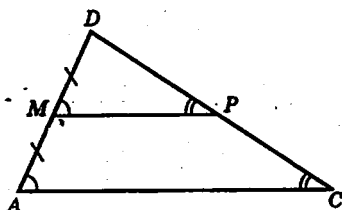
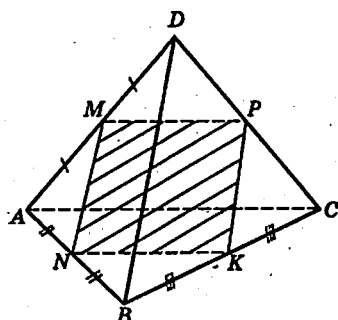
А нам известно, что если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой. Итак, $MP \parallel NK$, а раз $NK \parallel AC$, то $NK \parallel MP$ (две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу).

Пусть P – точка пересечения этой прямой с ребром DC . Докажем, что точка P – середина DC . $\triangle DMP \sim \triangle DAC$ (по двум углам).

$$\frac{DM}{DA} = \frac{DP}{DC} = \frac{MP}{AC} = \frac{1}{2},$$

т. е. P – середина DC .

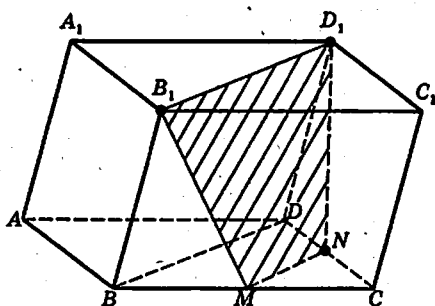
Выходит, что $MNKP$ – параллелограмм (по определению).



$$2) P_{MNKP} = 2(NK + PK) = 2\left(\frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BD\right) = AC + BD = 11 \text{ (см).}$$

Ответ: 11 см.

Пример 15. Изобразить параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и построить его сечение плоскостью, проходящей через точки B_1 , D_1 и середину ребра CD . Доказать, что построенное сечение – трапеция.



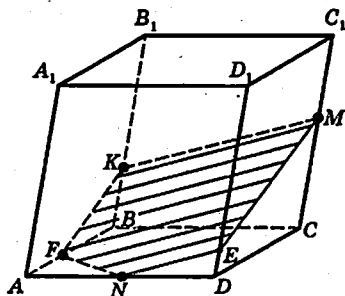
Решение

По условию точка N – середина DC .

Известно, что если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой. Значит, плоскость сечения пересечет основания $A_1 B_1 C_1 D_1$ и $ABCD$ по параллельным отрезкам. Проведем BD ; $BD \parallel B_1 D_1$. Из точки N проводим $MN \parallel BD$. Значит, $MN \parallel B_1 D_1$. Соединим точки B_1 и M ; D_1 и N . Тогда $B_1 D_1 NM$ – искомое сечение.

Таким образом, в четырехугольнике $B_1 D_1 NM$ имеем $B_1 D_1 \parallel NM$, значит, $B_1 D_1 NM$ – трапеция (по определению).

Пример 16. Построить сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью MNK , где точки M , N и K лежат соответственно на ребрах CC_1 , AD и BB_1 .



Построение

1. Так как $K \in B_1 B$ и $M \in C_1 C$, то $KM \subset (BB_1 C_1 C)$.
2. Точка $N \in (AA_1 D_1 D)$ и секущей плоскости.

3. Секущая плоскость, проходя через точку N , пересечет параллельные гра-

ни AA_1D_1D и BB_1C_1C по параллельным прямым; проводим в плоскости AA_1D_1D $NE \parallel KM$.

4. В плоскости DD_1C_1C проводим EM .

5. Секущая плоскость проходит через точку K и пересекает противоположные грани AA_1B_1B и DD_1C_1C по параллельным прямым; поэтому в плоскости грани AA_1B_1B проводим $KF \parallel ME$.

6. В плоскости $ABCD$ соединим точки F и N .

7. Пятиугольник $KMENF$ — искомое сечение.

§ 38. Круглые тела

Заметим, что круглые тела по сравнению с многогранниками относительно труднее поддаются изображению. Это замечание прежде всего относится к шару.

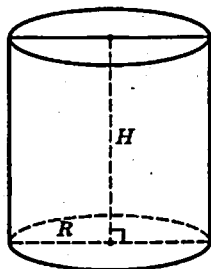
По указанной причине при решении стереометрических задач, как правило, сам шар (а тем более шары) стараются не изображать, тем более, что многие задачи на круглые тела сводятся к задачам планиметрии.

При решении задач, связанных с цилиндром, используются такие понятия, как высота, образующая, радиус основания, осевое сечение, основание, поверхности (боковая и полная) и соответственно параметры: площадь осевого сечения, площадь боковой и полной поверхностей, площадь основания, объем цилиндра, радиус основания.

Что касается прямого кругового конуса (или, просто конуса), то здесь добавляются: угол при вершине осевого сечения и угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

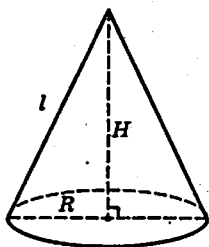
Справочные материалы

1. Цилиндр



$$\begin{aligned} H & - \text{высота;} \\ R & - \text{радиус основания;} \\ S_{\text{бок.}} & = 2\pi RH; \\ S_{\text{полн}} & = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}; \\ S_{\text{полн}} & = 2\pi R(R + H); \end{aligned}$$

$$V = \pi R^2 H = \frac{1}{4} \pi D^2 H.$$



2. Конус

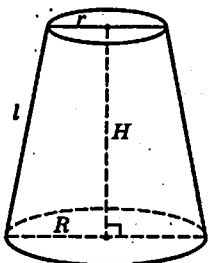
$$S_{\text{бок.}} = \pi R l;$$

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}};$$

$$S_{\text{полн.}} = \pi R(R + l);$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{12} \pi D^2 H.$$

3. Усеченный конус



$$S_{\text{бок.}} = \pi l(R + r);$$

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2;$$

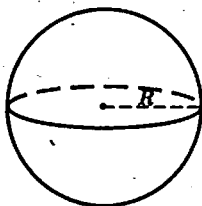
$$S_1 = \pi R^2;$$

$$S_2 = \pi r^2;$$

$$V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$

S_1 и S_2 — площади оснований.

4. Шар, сфера



R — радиус шара;

S — площадь сферической поверхности;

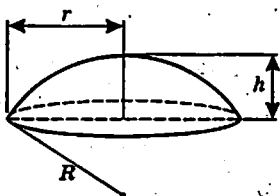
V — объем;

$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2;$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{6} \pi D^3.$$

5. Части шара

1) Шаровой сегмент



R — радиус шара;

h — высота сегмента;

S — площадь сферической поверхности сегмента;

r — радиус основания;

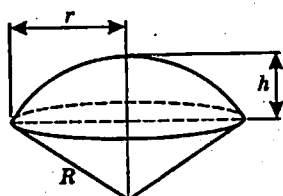
V — объем.

$$S = 2\pi R h = \pi D h = \pi(r^2 + h^2);$$

$$S_{\text{полн.}} = \pi(2Rh + r^2) = \pi(h^2 + 2r^2);$$

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right).$$

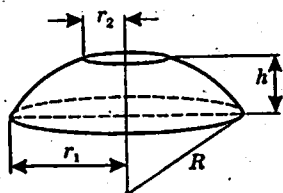
2) Шаровой сектор



$$S = \pi R(2h + r);$$

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{6} \pi D^2 h.$$

3) Шаровой пояс



h – высота пояса;

r_1 и r_2 – радиусы оснований;

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi R h = \pi D h;$$

$$S = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2);$$

$$V = \frac{1}{6} \pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

1. Цилиндр

Пример 1. Высота цилиндра равна 16 см, радиус равен 10 см. Найти площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси, если расстояние между этой плоскостью и осью цилиндра равно 6 см.

Дано: цилиндр

$$H = 16 \text{ см},$$

$$R = 10 \text{ см},$$

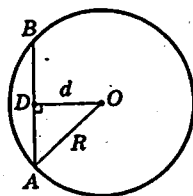
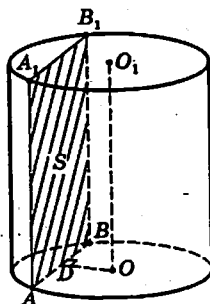
$$d = 6 \text{ см}.$$

Найти $S_{\text{сеч.}}$

Решение

Сечение AA_1B_1B – прямоугольник, так как $AA_1 \perp$ основанию $\Rightarrow AA_1 \perp AB$. Аналогично $AA_1 \perp A_1B_1$.

Кроме того, $AA_1 \parallel BB_1$ – как образующие цилиндра. $\triangle AOB$ – равнобедренный, так как $AO = BO = R$. Так



как $OD = d$ – расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения, то $OD \perp AB$, тогда $\triangle AOD$ – прямоугольный и $AD = \sqrt{R^2 - d^2}$, $AD = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ (см), тогда $AB = 2 \cdot AD = 16$ (см) и $S_{\text{сеч.}} = AB \cdot AA_1 = 16 \cdot 16 = 256$ (см²).

Ответ: 256 см².

Пример 2. Высота цилиндра на 12 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна 288π см². Найти радиус основания и высоту цилиндра.

Решение

Пусть H – высота, R – радиус основания цилиндра. По условию $H - R = 12$. (1)

Известно, что $S_{\text{полн.}} = 2\pi R(R + H)$, что по условию задачи равно 288π см². Следовательно, имеем

$$2\pi R(R + H) = 288\pi \text{ или } R(R + H) = 144. \quad (2)$$

Равенства (1) и (2) рассматриваем как систему уравнений

$$\begin{cases} H - R = 12, & H = R + 12, \\ R(R + H) = 144, & R(R + R + 12) = 144, \\ H = R + 12, & \\ R(R + 6) = 72. & \end{cases}$$

Решая уравнение $R^2 + 6R - 72 = 0$, находим $R_1 = 6$, $R_2 = -12$ (не подходит, так как $R > 0$).

Если $R = 6$, то $H = 6 + 12 = 18$.

Ответ: $R = 6$ см, $H = 18$ см.

Пример 3. Площадь основания цилиндра равна M , а площадь его осевого сечения равна Q . Найти объем цилиндра.

Решение

Пусть R – радиус основания цилиндра, H – высота. Так как осевое сечение цилиндра – прямоугольник, то $2R \cdot H = Q$. (1)

В основании цилиндра круг, тогда $\pi R^2 = M$. (2)

Следовательно, $V = \pi R^2 H = MH$.

Из (1) $R = \frac{Q}{2H}$, тогда (2) примет вид $\frac{\pi Q^2}{4H^2} = M$,

$$H^2 = \frac{\pi Q^2}{4M}, \text{ откуда } H = \frac{Q}{2} \sqrt{\frac{\pi}{M}}, \text{ значит, объем}$$

$$V = M \cdot \frac{Q}{2} \sqrt{\frac{\pi}{M}} = \frac{Q}{2} \sqrt{\pi M} \text{ (куб. ед.)}.$$

Ответ: $\frac{Q}{2} \sqrt{\pi M}$.

Пример 4. Какое количество нефти (в тоннах) вмещает цилиндрическая цистерна диаметром 18 м и высотой 7 м, если плотность нефти равна 0,85 г/см³.

Решение

Так как цистерна имеет форму цилиндра, то $V = \pi R^2 H$, где $R = 18 : 2 = 9$ (м), $V = \pi \cdot 81 \cdot 7 = 567\pi$ (м³).

Известно, что плотность $\rho = \frac{m}{V}$, откуда $m = \rho V$ или

$$m = 0,85 \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-6}} \cdot 567 \cdot 3,14 = 1513 \cdot 10^3 \text{ (кг)} = 1513 \text{ (т)}.$$

Ответ: 1513 т.

2. Конус

Пример 5. Осевое сечение конуса – прямоугольный треугольник. Найти площадь этого сечения, если радиус основания конуса равен 5 см.

Дано: конус ACB

$\angle ACB = 90^\circ$,

AO = 5 см.

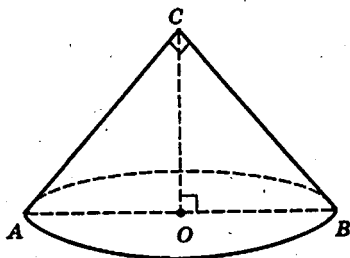
Найти $S_{\text{сеч.}}$

Решение

Так как AC = CB – как образующие конуса, то

$$S_{\text{сеч.}} = S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} AC \cdot CB.$$

Пусть AC = CB = x, тогда $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} x^2$.



Кроме того, по теореме Пифагора $AC^2 + CB^2 = AB^2$ или $x^2 + x^2 = 2(\cdot AO)^2$, $2x^2 = 100$, откуда $x^2 = 50$, тогда

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \cdot 50 = 25 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 25 см².

Пример 6. Через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в 120° , проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол в 45° . Найти площадь сечения, если радиус основания равен 8 см.

Дано: конус ABC .

DB – хорда основания,

$\angle CEO = 45^\circ$, $OB = 8$ см,

$\cup DmB = 120^\circ$.

Найти $S_{\text{сеч.}}$.

Решение

Если $\cup DmB = 120^\circ$, то $\angle DOB = 120^\circ$.

$\triangle CDB$ – сечение, где $CD = CB$ – как образующие конуса.

Проведем высоту CE – сечения. CE – высота и медиана равнобедренного $\triangle CDB$,

$$\text{тогда } S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} DB \cdot CE. \quad (1)$$

Из $\triangle DOB$ по теореме синусов имеем

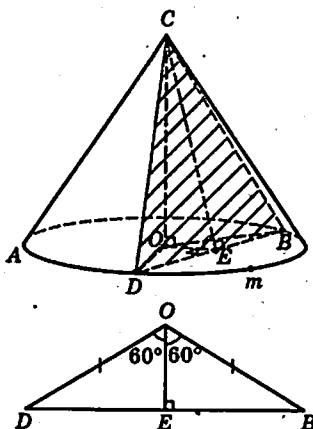
$$\frac{DB}{\sin 120^\circ} = \frac{OB}{\sin 30^\circ}, \quad DB = \frac{OB \cdot \sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{8 \cdot \cos 30^\circ}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

В $\triangle DEO$ $\angle ODE = 30^\circ$, тогда $OE = \frac{1}{2} OD = 4$ (см).

По условию $\angle CEO = 45^\circ$, значит,

$$CE = \frac{OE}{\sin 45^\circ} = 4\sqrt{2} \text{ (см)}.$$



Теперь из соотношения (1) находим площадь искомого сечения:

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{6} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $16\sqrt{6} \text{ см}^2$.

Пример 7. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α , а сумма длин его высоты и образующей равна m . Найти объем и полную поверхность конуса.

Дано: конус ABC .

$$\angle ACB = 2\alpha,$$

$$CO + AC = m.$$

Найти V и $S_{\text{пол.}}$

Решение

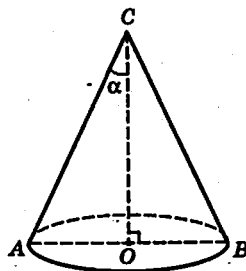
$$\text{Пусть } AO = R, CO = H, AC = l.$$

$$\text{По условию задачи } l + H = m.$$

Из $\triangle AOC$, где $\angle ACO = \alpha$, имеем

$$H = l \cos \alpha, R = l \sin \alpha, \text{ тогда (1) примет вид}$$

$$l + l \cos \alpha = m, l(1 + \cos \alpha) = m, \text{ откуда}$$



$$l = \frac{m}{1 + \cos \alpha} = \frac{m}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}; \text{ тогда } R = l \sin \alpha = \frac{m \sin \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Теперь находим } S_{\text{полн}} = \pi R(R + l) =$$

$$= \frac{\pi m \sin \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{m}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{m}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{\pi m^2 \sin \alpha}{4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}} (1 + \sin \alpha).$$

$$\text{Но } 1 + \sin \alpha = 1 + \cos (90^\circ - \alpha) = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$\text{тогда } S_{\text{полн}} = \frac{\pi m^2 \sin \alpha \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \cos^4 \frac{\alpha}{2}};$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{m^2 \sin^2 \alpha}{4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{m \cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\pi m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{24 \cos^6 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Ответ: } S_{\text{полн}} = \frac{\pi m^2 \sin \alpha \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \cos^4 \frac{\alpha}{2}} \text{ (кв. ед.);}$$

$$V = \frac{\pi m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{24 \cos^6 \frac{\alpha}{2}} \text{ (куб. ед.).}$$

3. Усеченный конус

Пример 8. Образующая усеченного конуса l составляет с плоскостью нижнего основания угол α и перпендикулярна к прямой, соединяющей верхний конец ее с нижним концом противоположной образующей. Найти боковую поверхность усеченного конуса.

Дано: ABV_1A_1 — усеченный конус;

$AA_1 = l$ — образующая;

$\angle A_1AC = \alpha$;

$AA_1 \perp A_1B$.

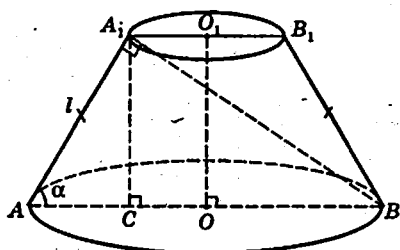
Найти $S_{\text{бок.}}$.

Решение

$S_{\text{бок.}} = \pi l(R + r)$, где $l = AA_1$, $R = AO$, $r = A_1O_1$. Из $\triangle A_1AC$ имеем $AC = l \cos \alpha$. Так как $AA_1 \perp A_1B$ (по условию), то $\triangle AA_1B$ — прямоуголь-

ный, тогда $AB = 2R = \frac{l}{\cos \alpha}$, значит, $AO = R = \frac{l}{2 \cos \alpha}$.

Следовательно, $A_1O_1 = CO = r = AO - AC$ или



$$r = \frac{l}{2 \cos \alpha} - l \cos \alpha = \frac{l}{2 \cos \alpha} (1 - 2 \cos^2 \alpha) = \frac{l(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{2 \cos \alpha}.$$

$$\begin{aligned} \text{Теперь находим } S_{\text{бок.}} &= \pi l(R + r) = \\ &= \pi l \left(\frac{l}{2 \cos \alpha} + \frac{l(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{2 \cos \alpha} \right) = \\ &= \frac{\pi l^2}{2 \cos \alpha} (1 + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \frac{\pi l^2}{2 \cos \alpha} \cdot 2 \sin^2 \alpha = \\ &= \pi l^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha. \end{aligned}$$

Итак, $S_{\text{бок.}} = \pi l^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha$ (кв. ед.).

Ответ: $S_{\text{бок.}} = \pi l^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha$.

Пример 9. Радиусы оснований усеченного конуса равны 6 м и 12 м, а образующая равна 10 м. Найти объем усеченного конуса.

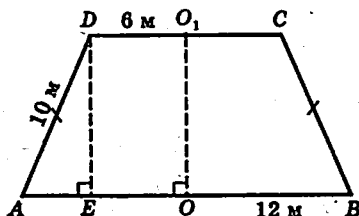
Дано: $ABCD$ – усеченный конус.

$AO = 12$ м; $DO_1 = 6$ м;

$AD = 10$ м.

Найти V .

Решение



$V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2)$, где $H = OO_1 = DE$. $R = AO = 12$ м, $r = DO_1 = 6$ м. Остается найти высоту $H = DE$. Рассмотрим осевое сечение усеченного конуса – равнобедренную трапецию $ABCD$. Высоту H найдем из $\triangle ADE$, где $AE = AO - EO = AO - DO_1 = 12 - 6 = 6$ (м).

$$\begin{aligned} \text{Тогда } DE = H &= \sqrt{AD^2 - AE^2}, H = \sqrt{10^2 - 6^2} = \\ &= \sqrt{64} = 8 \text{ (м)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Теперь находим объем } V &= \frac{\pi \cdot 8}{3} (12^2 + 12 \cdot 6 + 6^2) = \\ &= \frac{8\pi}{3} \cdot 252 = 672\pi \text{ (м}^3\text{)}. \end{aligned}$$

Ответ: $672\pi \text{ м}^3$.

4. Шар, сфера

Пример 10. Шар радиуса 26 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 10 дм от центра. Найти площадь сечения.

Дано: шар $(O; R)$.

$R = AO = 26$ дм,

$OC = 10$ дм.

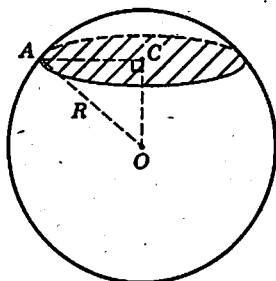
Найти $S_{\text{сеч.}}$.

Решение

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Пусть AC — радиус сечения, тогда $S_{\text{сеч.}} = \pi (AC)^2$. Заметим, что $OC \perp$ плоскости сечения, тогда $OC \perp AC$. Из прямоугольного $\triangle ACO$ находим

$$AC = \sqrt{AO^2 - OC^2}, \quad AC = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24 \text{ (дм)}, \text{ тогда } S_{\text{сеч.}} = \pi \cdot 24^2 = 576\pi \text{ (дм}^2\text{)}.$$

Ответ: $S_{\text{сеч.}} = 576\pi \text{ дм}^2$.



Пример 11. Вершины $\triangle ABC$ лежат на сфере радиуса 26 см. Найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB = 12$ см, $BC = 16$ см, $AC = 20$ см.

Дано: сфера $(O; R)$.

$R = OA = 26$ см,

$AB = 12$ см, $BC = 16$ см,

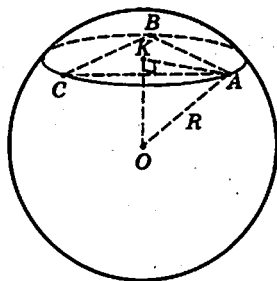
$AC = 20$ см,

точки A, B и C лежат на сфере.

Найти расстояние от центра сферы до плоскости $\triangle ABC$.

Решение

Плоскость $\triangle ABC$ пересекает сферу с центром O по окружности; эта окружность описана вокруг $\triangle ABC$. Из точки O проведем $OK \perp (ABC) \Rightarrow OK \perp AK$, т. е. OK есть расстояние от центра сферы до плоскости $\triangle ABC$, где точка K — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности. Соединим точку K с одной из вершин $\triangle ABC$, например, с точкой A и соединим точку A с центром O



сферы. По условию $AB = 12$ см, $BC = 16$ см и $AC = 20$ см. Заметим, что $20^2 = 12^2 + 16^2$, т. е. $\triangle ABC$ – прямоугольный (по обратной теореме Пифагора). Но тогда $\angle ABC$ – вписанный, значит, AC – диаметр окружности, описанной около $\triangle ABC$ и точка K – ее центр.

Значит, $AK = \frac{1}{2}AC = 10$ (см).

Из $\triangle AKO$ находим искомое расстояние:

$$OK = \sqrt{OA^2 - AK^2}, OK = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24 \text{ (см)}.$$

Ответ: 24 см.

Пример 12. В шаре проведена плоскость, перпендикулярная к диаметру и делящая его на части 12 см и 24 см. Найти объемы двух полученных частей шара.

Дано: шар $(O; R)$.

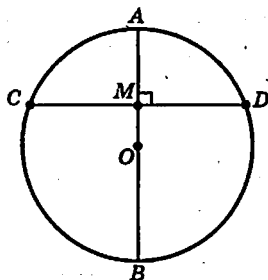
$AB \perp CD$,

$AM = 12$ см, $MB = 24$ см.

Найти V_1 и V_2 .

Решение

Рассмотрим сечение шара плоскостью большого круга, которая $\perp$ к плоскости, делящей диаметр AB на отрезки AM и MB .



$AB = AM + MB = 12 + 24 = 36$ (см), тогда $R = AO = 18$ см.

Заметим, что получившиеся части шара являются шаровыми сегментами.

$$V_1 = \pi \cdot AM^2 \left(AO - \frac{1}{3}AM \right) = \pi \cdot 12^2 (18 - 4) = 2016\pi \text{ (см}^3\text{)};$$

$$V_2 = V_{\text{ш.}} - V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 - V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 18^3 - 2016\pi = 7776\pi - 2016\pi = 5760\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: $V_1 = 2016\pi$ см³, $V_2 = 5760\pi$ см³.

5. Вписанные и описанные шары

Пример 13. Правильная треугольная пирамида вписана в сферу радиуса R . Найти объем пирамиды, если угол между ее высотой и боковым ребром равен α .

Дано: $MABC$ – правильная треугольная пирамида, вписанная в сферу.

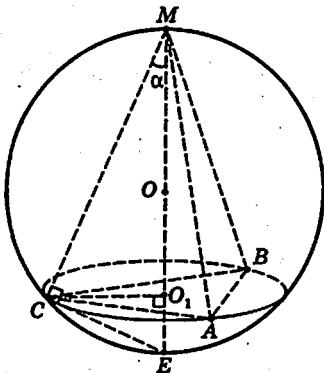
$OM = R$ – радиус сферы,
 $\angle O_1MC = \alpha$.

Найти объем пирамиды.

Решение

Пусть $MABC$ – правильная пирамида, вписанная в сферу с центром O . Проведем высоту пирамиды MO_1 , продолжив ее до пересечения в точке E со сферой.

Центр сферы O лежит на высоте MO_1 пирамиды. Соединим отрезками точки C и E , C и O_1 . По условию $MO = R$, $\angle CME = \alpha$.



$$\text{Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot MO_1.$$

Заметим, что $\angle MCE$ – вписанный, опирающийся на диаметр ME , значит, $\angle MCE = 90^\circ$. Из прямоугольных $\triangle MCE$ и $\triangle MCO_1$ находим: $MC = 2R \cos \alpha$; $MO_1 = MC \cos \alpha = 2R \cos^2 \alpha$; $CO_1 = MC \sin \alpha = 2R \cos \alpha \sin \alpha = R \sin 2\alpha$.

Так как точка O_1 есть центр окружности, описанной около основания пирамиды, и, следовательно, CO_1 есть радиус этой окружности, то сторона основания пирамиды $AC = CO_1 \sqrt{3} = R \sqrt{3} \sin 2\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Далее, } S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} (R \sqrt{3} \sin 2\alpha)^2 \sin 60^\circ = \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 \sin^2 2\alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 \sin^2 2\alpha \cdot 2R \cos^2 \alpha = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} R^3 \sin^2 2\alpha \cos^2 \alpha \text{ (куб. ед.)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3}}{2} R^3 \sin^2 2\alpha \cos^2 \alpha.$$

Пример 14. В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой касаются конус и шар, равен r . Найти объем конуса, если угол между его высотой и образующей равен α .

Решение

Пусть CAB – осевое сечение конуса. Проведем $MO \perp AC$ и $MN \perp CD$. Согласно условию $MN = r$, $\angle ACD = \alpha$, тогда $\angle MOC = 90^\circ - \alpha$, откуда $\angle OMN = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$. Так как $AM = AD$ – как отрезки касательных к окружности, проведенных из точки A , то AO – биссектриса $\angle CAB$, тогда

$$\angle OAD = \frac{1}{2} (90^\circ - \alpha) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Значит, $V = \frac{1}{3} \pi \cdot AD^2 \cdot CD$. Далее, из $\triangle OMN$ имеем

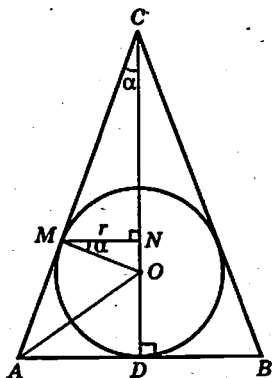
$$MO = \frac{r}{\cos \alpha}, \text{ и так как } OM = OD \text{ – как радиусы шара,}$$

$$\text{то из } \triangle ADO \text{ получим } AD = OD \operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$= \frac{r}{\cos \alpha} \cdot \operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right). \text{ Из } \triangle ADC \text{ находим}$$

$$CD = AD \operatorname{ctg} \alpha = \frac{r}{\cos \alpha} \cdot \operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{r}{\sin \alpha} \cdot \operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

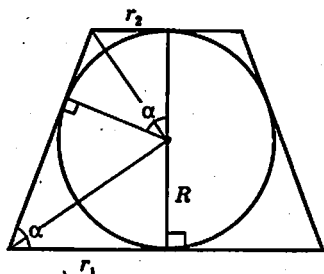


Следовательно, $V = \frac{\pi r^3 \operatorname{ctg}^3 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}$ (куб. ед.).

Ответ: $V = \frac{\pi r^3 \operatorname{ctg}^3 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}$.

Пример 15. В усеченный конус вписан шар. Сумма длин диаметров верхнего и нижнего оснований конуса в 5 раз больше длины радиуса шара. Найти угол между образующей усеченного конуса и плоскостью основания.

Решение



Рассмотрим осевое сечение усеченного конуса со вписанным в него шаром. Пусть r_1 — радиус нижнего основания, r_2 — радиус верхнего основания, R — радиус шара, α — искомый угол между образующей и плоскостью основания.

Согласно условию задачи имеем $2r_1 + 2r_2 = 5R$. (1)

Но $r_1 = R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ и $r_2 = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, тогда (1) примет вид

$$2R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 2R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 5R \text{ или } 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 5 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 2 = 0,$$

откуда находим $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$ или $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, откуда

$\alpha = 2 \operatorname{arctg} 2$ — не подходит, так как $2 \operatorname{arctg} 2 > \frac{\pi}{2}$, что

невозможно. Значит, $\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

Ответ: $\alpha = 2 \operatorname{arctg} 0,5$.

6. Тела вращения

Пример 16. Прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 5 см вращается вокруг гипотенузы. Найти площадь поверхности полученного тела.

Дано: $\triangle ACB$, $\angle C = 90^\circ$,

$AC = 12$ см, $BC = 5$ см,

AB — ось вращения.

Найти $S_{\text{т.в.}}$.

Решение

При вращении $\triangle ACB$ вокруг гипотенузы AB получим два конуса с общим основанием. Площадь поверхности тела вращения будет равна сумме площадей боковых поверхностей конусов ACC_1 и BCC_1 .

$S_{\text{бок.}} = \pi r l$, где $r = OC$ — радиус основания.

Из $\triangle ACB$ найдем гипотенузу

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{144 + 25} = 13 \text{ (см)}.$$

$$\text{Тогда } S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} AB \cdot CO, \text{ откуда}$$

$$CO = r = \frac{AC \cdot CB}{AB} = \frac{12 \cdot 5}{13} = \frac{60}{13} \text{ (см)}.$$

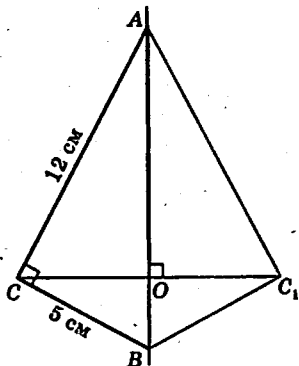
Теперь находим площадь поверхности тела вращения:

$$S_{\text{т.в.}} = S_{ACC_1} + S_{BCC_1} = \pi \cdot CO \cdot AC + \pi \cdot CO \cdot CB =$$

$$= \pi \cdot CO \cdot (AC + CB) =$$

$$= \pi \cdot \frac{60}{13} \cdot 17 = \frac{1020}{13} \pi = 78 \frac{6}{13} \pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

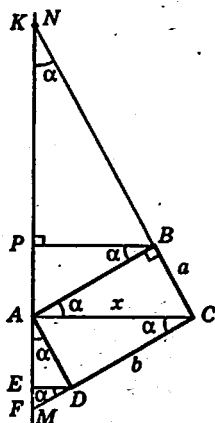
$$\text{Ответ: } 78 \frac{6}{13} \pi \text{ см}^2.$$



Пример 17. Найти объем фигуры, полученной при вращении прямоугольника со сторонами a и b вокруг оси, которая лежит в плоскости этого прямо-

угольника, перпендикулярна к его диагонали и проходит через ее конец.

Решение



Пусть прямоугольник $ABCD$ вращается вокруг оси MN . По условию $BC = a$ и $DC = b$; $AC \perp MN$.

Пусть $AC = x$, $\angle BAC = \alpha$.

Из $\triangle ABC$ $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, $AK = x \operatorname{ctg} \alpha$.

Аналогично $b = x \cos \alpha$;

$BP = b \cos \alpha = x \cos^2 \alpha$; $AF = x \operatorname{tg} \alpha$,

$a = x \sin \alpha$, $DE = a \sin \alpha = x \sin^2 \alpha$.

Следовательно, искомый объем

$V = V_{ABC} + V_{ACD}$. Но $V_{ABC} =$

$$= V_{AKC} - V_{AKB} = \frac{1}{3} \pi x^2 \cdot AK -$$

$$- \frac{1}{3} \pi \cdot BP^2 \cdot AK = \frac{1}{3} \pi x^3 \operatorname{ctg} \alpha (1 -$$

$$- \cos^4 \alpha) = \frac{1}{3} \pi x^3 \operatorname{ctg} \alpha (1 + \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha =$$

$$= \frac{1}{3} \pi x^3 \sin \alpha \cos \alpha (1 + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{3} \pi xab(1 + \cos^2 \alpha).$$

Аналогично находим, что $V_{ACD} = V_{AFC} - V_{AFD} =$

$$= \frac{1}{3} \pi xab(1 + \sin^2 \alpha).$$

$$\begin{aligned} \text{Таким образом, } V &= V_{ABC} + V_{ACD} = \frac{1}{3} \pi xab(1 + \\ &+ \cos^2 \alpha) + \frac{1}{3} \pi xab(1 + \sin^2 \alpha) = \frac{1}{3} \pi abx(2 + \cos^2 \alpha + \\ &+ \sin^2 \alpha) = \frac{1}{3} \pi abx \cdot 3 = \pi abx. \end{aligned}$$

Учитывая, что $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, получим

$$V = \pi ab \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (куб. ед.)}.$$

Ответ: $\pi ab \sqrt{a^2 + b^2}$.

Задачи

Группа А

1. Определить диагонали прямоугольного параллелепипеда, если измерения его равны 12; 16; 21.

2. Боковое ребро прямого параллелепипеда равно 5 м, стороны основания равны 6 м и 8 м и одна из диагоналей основания равна 12 м. Определить большую диагональ параллелепипеда.

3. Определить ребро куба, если его поверхность равна 5046 см^2 .

4. Определить поверхность куба по его диагонали l .

5. Определить поверхность прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: $a = 10 \text{ см}$, $b = 22 \text{ см}$, $c = 16 \text{ см}$.

6. Ребра прямоугольного параллелепипеда относятся как $3 : 7 : 8$, а поверхность содержит 808 см^2 . Определить ребра.

7. Ребро куба равно a . Определить расстояние от вершины куба до его диагонали.

8. Объем куба равен $2\sqrt{2}$. Чему равен радиус круга, описанного вокруг грани куба?

9. Диагональ куба равна 3. Найти его полную поверхность.

10. Площадь полной поверхности куба равна 3. Найти длину диагонали грани куба.

11. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 7 дм и 24 дм, а высота параллелепипеда равна 8 дм. Определить площадь диагонального сечения.

12. Определить объем куба по его диагонали l .

13. Определить объем куба по его поверхности S .

14. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3 . Определить ребро.

15. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 м, 50 м и 36 м. Найти ребро равновеликого ему куба.

16. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 35 см, а ребра относятся как $2 : 3 : 6$. Определить объем.

17. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда 2 м^2 , 3 м^2 и 6 м^2 . Найти его объем.

18. В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол в 30° , боковая поверхность равна S . Определить его объем.

19. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с одной гранью угол в 30° , а с другой – в 45° . Определить объем.

20. Кирпич размером $25\text{ см} \times 12\text{ см} \times 6,5\text{ см}$ весит $3,51\text{ кг}$. Найти его удельный вес.

21. В правильной четырехугольной призме площадь основания равна 144 см^2 , а высота равна 14 см . Определить диагональ этой призмы.

22. Определить диагональ правильной четырехугольной призмы, если диагональ основания равна 8 см , а диагональ боковой грани равна 7 см .

23. По стороне основания a и боковому ребру b определить полную поверхность правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

24. Определить полную поверхность правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ равна 14 см , а диагональ боковой грани равна 10 см .

25. По стороне основания a и боковому ребру b определить объем правильной треугольной призмы.

26. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна $3,5\text{ м}$, а диагональ боковой грани – $2,5\text{ м}$. Определить объем.

27. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 6 см , а боковая поверхность – 32 см^2 . Определить объем.

28. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10 см , 17 см и 21 см , а высота призмы – 18 см . Определить площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания.

29. Определить полную поверхность прямой треугольной призмы, если ее высота равна 50 см , а стороны основания – 40 см , 13 см , 37 см .

30. Площадь наибольшего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы равна 1 м^2 . Найти боковую поверхность.

31. В прямой треугольной призме стороны основания равны 4 см , 5 см и 7 см , а боковое ребро равно большей высоте основания. Определить объем призмы.

32. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 м , а расстояние между ними – 26 м , 25 м и 17 м . Определить ее объем.

33. Все ребра прямой треугольной призмы имеют длину $2\sqrt{3}$. Найти объем призмы.

34. В основании призмы лежит равносторонний треугольник, площадь которого равна $9\sqrt{3}$. Найти объем призмы, если ее высота в $\sqrt{3}$ раз больше стороны основания.

35. Объем прямой призмы, основание которой – правильный треугольник, равен $18\sqrt{3}$, ее высота равна 8. Найти сторону основания.

36. По данной стороне основания a и боковому ребру b определить высоту правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

37. По данной стороне основания a и высоте h определить апофему правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

38. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7 см, а сторона основания равна 8 см. Определить боковое ребро.

39. Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см; каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Вычислить высоту пирамиды.

40. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 14 см, а длина бокового ребра – 10 см. Определить площадь диагонального сечения.

41. В правильной треугольной пирамиде по стороне основания a и боковому ребру b определить площадь сечения, проведенного через боковое ребро и высоту пирамиды.

42. Высота пирамиды равна 16 м; площадь основания – 512 м^2 . На каком расстоянии от основания находится сечение, параллельное основанию, содержащее 50 м^2 ?

43. Определить боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если ее высота равна 4 см, а апофема 8 см.

44. В правильной четырехугольной пирамиде боковая поверхность равна $14,76 \text{ м}^2$, а полная поверхность – 18 м^2 . Определить сторону основания и высоту пирамиды.

45. В правильной четырехугольной пирамиде определить сторону основания, если боковое ребро равно 5 см, а полная поверхность – 16 см^2 .

46. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см. Стороны основания – 10 см и 2 см. Определить боковое ребро пирамиды.

47. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 12, а сторона основания равна 18. Найти $S_{\text{бок}}$.

48. Стороны основания правильной треугольной усеченной пирамиды 4 дм и 1 дм. Боковое ребро – 2 дм. Найти высоту.

49. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 2 см, а стороны основания 3 см и 5 см. Определить диагональ этой усеченной пирамиды.

50. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 4. Стороны оснований равны 2 и 8. Найти площади диагональных сечений.

51. Площади оснований усеченной пирамиды 9 см^2 и 25 см^2 . Найти площадь среднего сечения.

52. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований 8 м и 2 м. Высота равна 4 м. Найти полную поверхность.

53. Стороны основания правильной треугольной усеченной пирамиды 6 дм и 12 дм; высота равна 1 дм. Найти боковую поверхность.

54. Стороны основания правильной шестиугольной усеченной пирамиды 4 см и 2 см; высота – 1 см. Найти боковую поверхность.

55. По стороне основания a и боковому ребру b определить объем правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

56. В правильной четырехугольной пирамиде высота 3 м; боковое ребро – 5 м. Найти объем.

57. Объем правильной шестиугольной пирамиды 6 см^3 . Сторона основания – 1 см. Найти боковое ребро.

58. По ребру a правильного тетраэдра определить его поверхность и объем.

59. По ребру a правильного октаэдра определить его поверхность и объем.

60. Сторона основания правильной треугольной пирамиды a , а боковое ребро образует с плоскостью основания угол в 45° . Определить объем пирамиды.

61. Радиус основания цилиндра 2 м, высота – 3 м. Найти диагональ осевого сечения.

62. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого Q . Найти площадь основания.

63. Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см. Найти площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.

64. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения как $\pi : 4$. Найти угол между диагоналями осевого сечения.

65. Стороны прямоугольника a и b . Найти боковую поверхность цилиндра, полученного от вращения этого прямоугольника вокруг стороны, равной a .

66. Диаметр основания цилиндра равен 1, высота равна длине окружности основания. Найти $S_{\text{бок}}$.

67. Высота равностороннего цилиндра равна h . Найти $S_{\text{бок}}$.

68. Радиус основания цилиндра равен R ; боковая поверхность равна сумме площадей оснований. Найти высоту.

69. Площадь осевого сечения цилиндра равна Q . Найти боковую поверхность.

70. Чему равно отношение боковой поверхности цилиндра к площади его осевого сечения?

71. Какой высоты должен быть цилиндр, чтобы его боковая поверхность была в три раза больше площади основания?

72. Радиус основания конуса 3 м, высота – 4 м. Найти образующую.

73. Образующая конуса l наклонена к плоскости основания под углом 30° . Найти высоту.

74. Радиус основания конуса R . Осевым сечением служит прямоугольный треугольник. Найти его площадь.

75. Отношение площади основания конуса к площади осевого сечения равно π . Найти угол наклона образующей к основанию.

76. Высота конуса 20, радиус его основания 25. Найти площадь сечения, проведенного через вершину, если его расстояние от центра основания конуса равно 12.

77. Высота конуса – 6, радиус основания – 8. Найти $S_{\text{бок}}$.

78. Высота конуса – 4, образующая – 5. Найти $S_{\text{полн}}$.

79. Как относится боковая поверхность равнос-
тороннего конуса к боковой поверхности равнос-
тороннего цилиндра, имеющего такую же высоту?

80. Высота конуса — 4, радиус основания — 3; бо-
ковая поверхность конуса развернута на плоскость.
Найти угол полученного сектора.

81. Радиусы основания усеченного конуса 3 м и
6 м; высота — 4 м. Найти образующую.

82. Радиусы оснований усеченного конуса R и r ;
образующая наклонена к основанию под углом в 45° .
Найти высоту.

83. Высота усеченного конуса равна H ; определить
образующую, если она наклонена к основанию под
углом в 30° .

84. Радиусы оснований усеченного конуса 3 дм и
7 дм, образующая — 5 дм. Найти площадь осевого се-
чения.

85. Высота усеченного конуса 4 дм; радиусы его
оснований 2 дм и 5 дм. Найти $S_{\text{бок}}$.

86. Радиусы оснований усеченного конуса R и r .
Образующая наклонена к основанию под углом в 60° .
Найти $S_{\text{бок}}$.

87. Боковое ребро правильной четырехугольной
усеченной пирамиды равно 3 м, стороны оснований,
5 м и 1 м. Найти объем.

88. Определить объем правильной четырехуголь-
ной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна
9 см, а стороны оснований — 7 см и 5 см.

89. Радиусы оснований усеченного конуса R и r ,
образующая наклонена к основанию под углом в 45° .
Найти объем.

90. Объем усеченного конуса равен $584 \pi \text{ см}^3$, а ра-
диусы оснований 10 см и 7 см. Определить высоту.

91. Радиус шара R . Через конец радиуса проведена
плоскость под углом в 60° . Найти площадь сечения.

92. Радиус шара 1 м. Найти объем шара.

93. Радиусы трех шаров 3 см, 4 см и 5 см. Определить
радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

94. Внешний диаметр полого шара 18 см; толщина
стенок 3 см. Найти объем стенок.

95. Внутренний диаметр чугунного полого шара
8 см, а внешний 10 см. Определить вес шара. Удель-
ный вес чугуна 7,3.

96. Какую часть объема шара составляет объем сферического сегмента, у которого высота равна $0,1$ диаметра шара?

97. Радиус шарового сектора R , угол в осевом сечении 120° . Найти объем.

98. Определить объем шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см.

99. Радиус шара равен 5 см. Определить его поверхность ($\pi = 3,1416$).

100. Поверхность шара равна 225π м². Определить его объем.

101. По объему шара V определить его поверхность.

102. Полная поверхность равностороннего конуса равновелика поверхности шара, построенного на его высоте как на диаметре. Доказать.

103. Высота шарового пояса 7 см, а радиусы оснований 16 см и 33 см. Определить поверхность шарового пояса.

104. Кротовой сегмент с дугой в 120° и площадью Q вращается вокруг своей высоты. Определить полную поверхность полученного тела.

105. Ребра прямоугольного параллелепипеда 4 см, 6 см, 12 см. Найти радиус описанного шара.

106. Высота правильной четырехугольной призмы 2 см, сторона основания — 4 см. Найти радиус описанного шара.

107. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды 4 м, высота тоже 4 м. Найти радиус описанного шара.

108. В правильной треугольной усеченной пирамиде высота 17 см, радиусы окружностей, описанных около оснований, 5 см и 12 см. Найти радиус описанного шара.

109. Высота конуса 8 м, образующая — 10 м. Найти радиус вписанного шара.

110. Радиусы оснований усеченного конуса 3 м и 4 м; высота — 7 м. Найти радиус описанного шара.

Группа Б

Параллелепипеды и призмы

1. Найти площадь диагонального сечения куба, объем которого равен $4\sqrt{2}$.

2. Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, равна $18\sqrt{3}$. Найти длину ребра куба.

3. В прямом параллелепипеде стороны основания длиной 3 см и 4 см составляют угол в 60° , а боковое ребро есть средняя пропорциональная между сторонами основания. Определить диагонали этого параллелепипеда.

4. В прямом параллелепипеде боковое ребро равно 1 м, стороны основания равны 23 дм и 11 дм, а диагонали основания относятся как 2 : 3. Определить площади диагональных сечений.

5. Каждое ребро правильной треугольной призмы равно 3 м. Через сторону основания и середину оси проведена плоскость. Найти площадь сечения.

6. Основанием прямой призмы служит ромб; диагонали призмы равны 8 см и 5 см; высота — 2 см. Найти сторону основания.

7. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами 37 см, 13 см и 47 см. Найти расстояние между большей боковой гранью и противоположащим боковым ребром.

8. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 10 см и 17 см; одна из диагоналей основания равна 29 см. Определить полную поверхность параллелепипеда.

9. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с диагоналями в 6 см и 9 см; диагональ боковой грани равна 13 см. Определить полную поверхность этого параллелепипеда.

10. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 9 см, а полная поверхность равна 144 см^2 . Определить сторону основания и боковое ребро.

11. В прямой треугольной призме стороны основания относятся как 17 : 10 : 9, а боковое ребро равно 16 см; полная поверхность этой призмы содержит 1440 см^2 . Определить стороны основания.

12. В наклонной четырехугольной призме боковое ребро равно 8 см, а расстояние между последовательными боковыми ребрами 3 см, 6 см, 2 см и 7 см. Определить ее боковую поверхность.

13. В наклонной треугольной призме боковые ребра содержат по 8 см; стороны перпендикулярного се-

чения относятся как $9 : 10 : 17$, а его площадь равна 144 см^2 . Определить боковую поверхность этой призмы.

14. Измерения прямоугольного бруса: 3 см, 4 см и 5 см. Если увеличить каждое его ребро на x см, то поверхность увеличится на 54 см^2 . Как увеличится его объем?

15. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 13 дм и 37 дм, а большая диагональ основания равна 40 дм. Боковое ребро относится к большей диагонали параллелепипеда как $15 : 17$. Определить объем этого параллелепипеда.

16. Высота прямой треугольной призмы равна 5 м, ее объем равен 24 м^3 , а площади боковых граней относятся как $17 : 17 : 16$. Определить стороны основания.

17. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 см^2 , а площади боковых граней 9 см^2 , 10 см^2 и 17 см^2 . Определить объем.

18. Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и острым углом в 60° . Определить объем параллелепипеда.

19. В наклонной треугольной призме стороны основания равны 5 м, 6 м и 9 м; боковое ребро равно 10 м и составляет с плоскостью основания угол в 45° . Определить объем призмы.

20. В треугольной призме расстояния между боковыми ребрами относятся как $9 : 10 : 17$; боковое ребро равно 1 м; боковая поверхность равна 6 м^2 . Определить объем этой призмы.

Пирамида. Усеченная пирамида

1. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 6 см и высота 9 см; боковые ребра равны между собой, и каждое содержит 13 см. Определить высоту этой пирамиды.

2. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны содержат 3 см и 7 см, а одна из диагоналей 6 см; высота пирамиды, проходящая через точку пересечения диагоналей основания, равна 4 см. Определить боковое ребро пирамиды.

3. В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит высоту в отношении $3 : 4$ (от вершины к основанию, а площадь сечения меньше площади основания на 200 см^2 . Определить площадь основания.

4. В пирамиде площадь основания равна 150 см^2 , площадь параллельного сечения 54 см^2 , расстояние между ними равно 14 см . Определить высоту пирамиды.

5. Определить высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна a , а боковая поверхность вдвое больше площади основания.

6. Определить сторону основания и апофему правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро и боковая поверхность соответственно равны 10 см и 144 см^2 .

7. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 13 см , 14 см и 15 см . Боковое ребро, противолежащее средней по величине стороне основания, перпендикулярно к плоскости основания и равно 16 см . Определить полную поверхность этой пирамиды.

8. Основанием пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC , в котором гипотенуза $AB = 26 \text{ см}$ и катет $AC = 24 \text{ см}$; ребро SA перпендикулярно к плоскости основания ABC и равно 18 см . Определить $S_{\text{бок}}$.

9. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 63 см , апофема равна 65 см , а стороны оснований относятся как $7 : 3$. Определить эти стороны.

10. Стороны основания правильной треугольной усеченной пирамиды 2 см и 6 см . Боковая грань образует с большим основанием угол в 60° . Найти высоту.

11. Соответственные стороны оснований усеченной пирамиды относятся как $13 : 17$, а периметр среднего сечения равен 45 м . Определить периметры оснований.

12. Основания усеченной пирамиды содержат 18 м^2 и 128 м^2 . Определить площадь параллельного сечения, делящего высоту в отношении $2 : 3$ (начиная от меньшего основания).

13. Определить высоту правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если стороны ее оснований a и b , а боковая поверхность равновелика сумме оснований.

14. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 12 см, разность сторон оснований – 10 см и полная поверхность – 512 см^2 . Определить стороны оснований.

15. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды a , двугранный угол при основании равен 45° . Определить объем пирамиды.

16. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны содержат по 6 см, а третья сторона 8 см. Боковые ребра равны между собой и каждое содержит 9 см. Определить объем этой пирамиды.

17. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 39 см, 17 см и 28 см; боковые ребра равны каждое 22,9 см. Определить объем этой пирамиды.

18. В данной треугольной пирамиде двугранные углы при основании равны между собой; стороны основания: 7 см, 8 см и 9 см; объем пирамиды – 40 см^3 . Определить ее боковую поверхность.

19. Ромб со стороной в 15 см служит основанием пирамиды, каждая грань которой наклонена к основанию под углом в 45° . $S_{\text{бок.}} = 3 \text{ дм}^2$. Найти объем пирамиды.

20. Боковые грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, площади их равны 6 м^2 , 4 м^2 и 3 м^2 . Найти объем пирамиды.

21. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, у которой параллельные стороны равны 3 см и 5 см, а боковая сторона – 7 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания, и большее боковое ребро равно 10 см. Определить объем этой пирамиды.

22. Высота усеченной пирамиды равна 15 м; ее объем 475 м^3 ; площади оснований относятся как 4 : 9. Определить эти площади.

23. В усеченной пирамиде разность площадей оснований равна 6 см^2 , высота усеченной пирамиды 9 см и ее объем 42 см^3 . Определить площади оснований.

24. Объем усеченной пирамиды равен 1720 м^3 , ее высота 20 м; сходственные стороны двух оснований относятся как 5 : 8. Определить площади оснований.

25. Определить объем правильной треугольной усеченной пирамиды, у которой стороны оснований 30 м

и 20 м, а боковая поверхность равновелика сумме оснований.

Цилиндр. Конус. Усеченный конус

1. В цилиндре проведена параллельно оси плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 120° . Длина оси $h = 10$ см; ее расстояние от секущей плоскости $a = 2$ см. Определить площадь сечения.

2. В цилиндре радиус основания $r = 2$ см, а высота $h = 7$ см. Определить радиус круга, равновеликого полной поверхности этого цилиндра.

3. Боковая поверхность цилиндра равна S , а длина окружности основания C . Найти объем.

4. Определить объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, у которой каждое ребро равно a .

5. Найти высоту цилиндра, если площадь его основания равна 1, а площадь боковой поверхности — $\sqrt{\pi}$.

6. Высота цилиндра равна длине окружности основания. Найти диаметр основания, если объем цилиндра равен $432\pi^2$.

7. Высота конуса H . Угол между высотой и образующей равен 60° . Найти площадь сечения, проведенного через две взаимно перпендикулярные образующие.

8. В конусе даны радиус основания R и высота H . Определить ребро вписанного в него куба.

9. Равнобедренный треугольник вращается вокруг своей высоты. Определить стороны этого треугольника, если его периметр равен 30 см, а полная поверхность тела вращения равна 60π см².

10. Полукруг свернут в коническую поверхность. Найти угол между образующей и высотой конуса.

11. Радиус сектора равен 3 м; его угол 120° . Сектор свернут в коническую поверхность. Найти радиус основания конуса.

12. В равносторонний конус вписана правильная четырехугольная пирамида. Как относятся боковые поверхности конуса и пирамиды?

13. Радиусы оснований усеченного конуса и его образующая относятся как 1 : 4 : 5; высота равна 8 см. Найти $S_{\text{бок}}$.

14. Определить высоту усеченного конуса, если его полная поверхность равна $572\pi \text{ м}^2$, а радиусы оснований 6 м и 14 м.

15. Определить боковую поверхность усеченного конуса, у которого образующая составляет с плоскостью основания угол в 45° , а радиусы оснований R и r .

16. Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник; площадь его 9 м^2 . Найти объем конуса.

17. Площадь основания конуса 9л см; полная поверхность его $24\pi \text{ см}^2$. Найти объем конуса.

18. Высота и образующая конуса относятся как 4 : 5, а объем конуса $96\pi \text{ см}^3$. Найти его полную поверхность.

19. Высота конуса равна 15 м, а объем равен $320\pi \text{ м}^3$. Определить полную поверхность.

20. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны a . Найти объем тела вращения.

21. Треугольник со сторонами в 10 см, 17 см и 21 см вращается вокруг большей стороны. Определить объем и поверхность полученного тела.

22. Высота усеченного конуса равна 3. Радиус одного основания вдвое больше другого, а образующая наклонена к основанию под углом в 45° . Найти объем.

23. В усеченном конусе радиусы оснований и образующая относятся как 4 : 11 : 25, объем равен $181\pi \text{ м}^3$. Определить радиусы оснований и образующую.

24. Объем усеченного конуса равен 52 см^3 ; площадь одного основания в 9 раз более площади другого. Усеченный конус достроен до полного. Найти объем.

25. Равнобедренная трапеция с параллельными сторонами в 7 см и 17 см и площадью 144 см^2 вращается около средней высоты. Определить объем полученного тела.

Шар. Вписанный и описанный шары

1. Радиус шара равен 63 см. Точка находится на касательной плоскости на расстоянии 16 см от точки касания. Найти ее кратчайшее расстояние от поверхности шара.

2. Диаметр шара 25 см. На его поверхности даны точка A и окружность, все точки которой удалены (по

прямой линии) от A на 15 см. Найти радиус этой окружности.

3. Диагонали ромба 15 см и 20 см. Шаровая поверхность касается всех сторон его. Радиус шара 10 см. Найти расстояние его центра от плоскости ромба.

4. Дан шар. Плоскость, перпендикулярная к диаметру, делит его на две части: 3 см и 9 см. На какие части делится объем шара?

5. Диаметр шара, равный 30 см, служит осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 см. Определить объем шара, заключенной внутри цилиндра.

6. Радиусы оснований шарового слоя 3 м и 4 м, а радиус его шаровой поверхности 5 м. Найти объем слоя (два случая).

7. Радиус шара 9 дм. В него вписана правильная четырехугольная призма, высота которой 14 дм. Найти сторону основания призмы.

8. Около шара радиуса R описана правильная шестиугольная призма. Определить ее полную поверхность.

9. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см. Высота призмы 24 см. Найти радиус описанного шара.

10. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида, высота которой делится центром шара на две части: в 4 см и 5 см. Найти объем пирамиды.

11. Радиус шара 5 см. В шар вписан конус, радиус его основания 4 см. Найти высоту конуса.

12. Высота конуса 20 см, образующая — 25 см. Найти радиус вписанного полушара, основание которого лежит на основании конуса.

13. Радиус шара 10 см. В него вписан усеченный конус. Радиусы оснований конуса 6 см и 8 см. Найти его высоту (два случая).

14. Прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см вращается вокруг внешней оси, которая параллельна большему катету и отстоит от него на 3 см. Определить объем и поверхность тела вращения.

15. Треугольник со сторонами 9 см, 10 см и 17 см вращается вокруг высоты, проведенной из вершины его меньшего угла. Определить объем и поверхность полученного тела.

Глава 12

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ К ЕГЭ (ТИП С)

В данной главе приводятся подробные решения различных «нестандартных» задач и задач для самостоятельного решения, соответствующих по уровню сложности типу С.

Надо отметить, что нет и не может быть универсального метода решения «нестандартных» задач.

Предлагаемые «нестандартные» задачи и «нестандартные» методы их решения ни в кой мере не выходят за рамки программы для поступающих в вуз.

Многие виды задач, идеи их решений остались как бы «за кадром». Это вполне объяснимо, так как невозможно рассмотреть весь спектр этих задач ввиду их разнообразия, тем более, что развитие элементарной математики, математики конкурсного экзамена непрерывно продолжается и ее копилка пополняется новыми оригинальными идеями.

§ 39. Алгебраические уравнения высших степеней

Пример 1. Решить уравнение $4ax^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0$.

Решение

Умножим обе части уравнения на 2:

$$8ax^3 + 6x^2 - 12x + 8 = 0 \text{ или}$$

$$8ax^3 = -6x^2 + 12x - 8. \quad (1)$$

Прибавим к обеим частям (1) x^3 :

$$8ax^3 + x^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8.$$

Заметим, что правая часть полученного уравнения — куб разности двух чисел, тогда имеем

$$(8a + 1)x^3 = (x - 2)^3, \text{ или}$$

$$\sqrt[3]{8a + 1} x = x - 2, \text{ или } x(1 - \sqrt[3]{8a + 1}) = 2. \quad (2)$$

Если $1 - \sqrt[3]{8a + 1} = 0$, т. е. $\sqrt[3]{8a + 1} = 1$ или $8a + 1 = 1$, откуда $a = 0$, то уравнение (2), а значит, и исходное корней не имеет; если $a \neq 0$, то

$$x = \frac{2}{1 - \sqrt[3]{8a + 1}} - \text{корень данного уравнения.}$$

Ответ: если $a = 0$, то корней нет;

$$\text{если } a \neq 0, \text{ то } x = \frac{2}{1 - \sqrt[3]{8a + 1}}.$$

Пример 2. Решить уравнение $8(1 - 2x)^3 - 27(x - 1)^3 = 125 - 343x^3$.

Решение

Заметим, что $2(1 - 2x) - 3(x - 1) = 5 - 7x$, т. е. это равенство является тождеством. Учитывая, что члены исходного уравнения являются кубами членов этого тождества, разделим обе части данного уравнения на полученное тождество:

$$4(1 - 2x)^2 + 6(1 - 2x)(x - 1) + 9(x - 1)^2 = 25 + 35x + 49x^2,$$

$$4(1 - 4x + 4x^2) + 6(x - 2x^2 - 1 + 2x) + 9(x^2 - 2x + 1) =$$

$$= 25 + 35x + 49x^2,$$

$$4 - 16x + 16x^2 + 6x - 12x^2 - 6 + 12x + 9x^2 - 18x + 9 =$$

$$= 25 + 35x + 49x^2,$$

$$36x^2 + 51x + 18 = 0 \text{ или } 12x^2 + 17x + 6 = 0,$$

$$D = 289 - 288 = 1 > 0, x_{1,2} = \frac{-17 \pm 1}{24},$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = -\frac{3}{4}.$$

Еще один корень получим из уравнения

$$5 - 7x = 0, 7x = 5, \text{ откуда } x_3 = \frac{5}{7}.$$

Итак, исходное уравнение имеет ровно 3 корня.

$$\text{Ответ: } -\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; \frac{5}{7}.$$

Пример 3. Решить уравнение $(1 + 4x)(1 + 5x)(1 + 9x) = 81(9 + 4x)(9 + 5x)(1 + x)$.

Решение

Раскрытие скобок в обеих частях уравнения приводит к уравнению 3-й степени, решить которое не так-то просто.

Упростим по отдельности левую и правую части уравнения:

$$(1 + 4x)(1 + 5x)(1 + 9x) = (1 + 9x + 20x^2)(1 + 9x) = (1 + 9x)^2 + 20x^2(1 + 9x);$$

$$81(9 + 4x)(9 + 5x)(1 + x) = 9(9 + 4x)(9 + 5x)(9 + 9x) = (81 + 81x)(9 + 4x)(9 + 5x) = (81 + 81x)(81 + 81x + 20x^2) = (81 + 81x)^2 + 20x^2(81 + 81x).$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$(1 + 9x)^2 + 20x^2(1 + 9x) = (81 + 81x)^2 + 20x^2(81 + 81x),$$

$$(81 + 81x)^2 - (1 + 9x)^2 = 20x^2(1 + 9x) - 20x^2(81 + 81x),$$

$$(81 + 81x + 1 + 9x)(81 + 81x - 1 - 9x) = 20x^2(1 + 9x - 81 - 81x),$$

$$(82 + 90x)(80 + 72x) = 20x^2(-80 - 72x) \text{ или}$$

$$(80 + 72x)(20x^2 + 90x + 82) = 0, \text{ откуда}$$

$$1) 80 + 72x = 0,$$

$$72x = -80,$$

$$x_1 = \frac{10}{9}$$

$$2) 20x^2 + 90x + 82 = 0,$$

$$10x^2 + 45 + 41 = 0,$$

$$D = 2025 - 1640 = 385, x_{2,3} = \frac{-45 \pm \sqrt{385}}{20}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{10}{9}, x_{2,3} = \frac{-45 \pm \sqrt{385}}{20}.$$

Пример 4. Решить уравнение $2x^3 + 6x + 3 = 0$.

Решение

Испытывая делители свободного члена, можно убедиться, что данное уравнение не имеет целых корней.

Пусть $x = y - \frac{1}{y}$, тогда $x^3 = \left(y - \frac{1}{y}\right)^3 = y^3 - \frac{1}{y^3} -$

$- 3 \cdot \left(y - \frac{1}{y}\right)$, и данное уравнение примет вид

$$2\left(y^3 - \frac{1}{y^3}\right) - 6\left(y - \frac{1}{y}\right) + 6\left(y - \frac{1}{y}\right) + 3 = 0 \text{ или}$$

$$2\left(y^3 - \frac{1}{y^3}\right) + 3 = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) является квадратным относительно y^3 .

Пусть $y^3 = t$, тогда (1) примет вид $2\left(t - \frac{1}{t}\right) + 3 = 0$,

$$2t^2 + 3t - 2 = 0, D = 9 + 16 = 25 = 5^2 > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4}, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -2.$$

Учитывая подстановку $y^3 = t$, получим два уравнения:

$$1) y^3 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \quad 2) y^3 = -2, y_2 = -\sqrt[3]{2}.$$

Вспоминая, что $x = y - \frac{1}{y}$, имеем

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{2}; x_2 = -\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Как видно, $x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{2}$, так что исходное уравнение имеет единственный корень.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{2}.$$

Пример 5. Решить уравнение $9\sqrt{3}x^3 - 30x^2 + 9\sqrt{3}x - 2 = 0$.

Решение

Довольно сложное уравнение, если учесть, что оно, как и предыдущее, не имеет целых корней.

Пусть $x = \frac{y}{\sqrt{3}}$, тогда данное уравнение примет вид

$$9\sqrt{3} \cdot \frac{y^3}{3\sqrt{3}} - 30 \cdot \frac{y^2}{3} + 9\sqrt{3} \cdot \frac{y}{\sqrt{3}} - 2 = 0 \text{ или} \\ 3y^3 - 10y^2 + 9y - 2 = 0. \quad (1)$$

Заметим, что $y = 1$ — корень уравнения (1), тогда

$$3y^2(y - 1) - 7y(y - 1) + 2(y - 1) = 0,$$

$$(y - 1)(3y^2 - 7y + 2) = 0, \text{ откуда}$$

$$y - 1 = 0,$$

$$y_1 = 1,$$

$$\text{или } 3y^2 - 7y + 2 = 0, D = 49 - 24 = 5^2 > 0,$$

$$y_{2,3} = \frac{7 \pm 5}{6}, y_2 = 2, y_3 = \frac{1}{3}.$$

Учитывая, что $x = \frac{y}{\sqrt{3}}$, получим

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}, x_3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Следовательно, исходное уравнение имеет 3 корня.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Пример 6. Решить уравнение $2x^3 - 4\sqrt{13}x^2 + 23x + \sqrt{13} + 1 = 0$.

Решение

Это уравнение чем-то похоже на предыдущее, однако идея решения здесь иная.

Пусть $\sqrt{13} = a$, где $a > 0$, тогда получим

$$2x^3 - 4ax^2 + 2a^2x - 3x + a + 1 = 0 \text{ или}$$

$2xa^2 - (4x^2 - 1)a + (2x^3 + 1 - 3x) = 0$ — квадратное относительно a :

$$D = (4x^2 - 1)^2 - 8x(2x^3 + 1 - 3x) = 16x^4 - 8x^2 + 1 - 16x^4 - 8x + 24x^2 = 16x^2 - 8x + 1 = (4x - 1)^2;$$

$a_{1,2} = \frac{1}{4x}(4x^2 - 1 \pm 4x - 1)$, откуда $a_1 = \frac{1}{4x}(4x^2 + 4x - 2) = \frac{1}{2x}(2x^2 + 2x - 1)$; $a_2 = \frac{1}{4x}(4x^2 - 4x) = x - 1$, где $x \neq 0$ (что видно из исходного уравнения).

Итак, имеем два уравнения:

$$1) \frac{2x^2 + 2x - 1}{2x} = a,$$

$$2x^2 + 2x - 2ax - 1 = 0, \quad 2x^2 + 2(1 - a)x - 1 = 0, \\ D/4 = (1 - a)^2 + 2 = 3 - 2a + a^2,$$

где $D/4 > 0$ при любом a и тем более при $a = \sqrt{13}$.

$$x_{1,2} = \frac{a - 1 \pm \sqrt{3 - 2a + a^2}}{2},$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(\sqrt{13} - 1 \pm \sqrt{16 - 2\sqrt{13}}).$$

$$2) x - 1 = a, \text{ откуда } x_3 = a + 1 \text{ или } x_3 = \sqrt{13} + 1.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}(\sqrt{13} - 1 \pm \sqrt{16 - 2\sqrt{13}}); \sqrt{13} + 1.$$

Пример 7. Решить уравнение $(x^2 + 8x + 8)^3 = x^2(x^2 + 14x + 8)$.

Решение

Заметим, что $x = 0$ не является корнем уравнения, тогда, разделив обе части уравнения на $x^3 \neq 0$, получим

$$\left(\frac{x^2 + 8x + 8}{x}\right)^3 = \frac{x^2 + 14x + 8}{x} \text{ или}$$

$$\left(x + \frac{8}{x} + 8\right)^3 = x + \frac{8}{x} + 14. \quad (1)$$

Пусть $x + \frac{8}{x} = y$, тогда уравнение (1) примет вид $(y + 8)^3 = y + 14$ или $y^3 + 24y^2 + 192y + 512 = y + 14$, $y^3 + 24y^2 + 191y + 498 = 0$. (2)

Испытывая делители свободного члена, можно убедиться в том, что $y = -6$ — корень уравнения (2), тогда получим $y^2(y + 6) + 18y(y + 6) + 83(y + 6) = 0$ или $(y + 6)(y^2 + 18y + 83) = 0$, откуда $y = -6$ — единственный корень уравнения (2), так как уравнение $y^2 + 18y + 83 = 0$ не имеет действительных корней ($D/4 = 81 - 83 = -2 < 0$).

Итак, $y = -6$, тогда $x + \frac{8}{x} = -6$, или $x^2 + 6x + 8 = 0$, откуда $x_1 = -4$, $x_2 = -2$.

Ответ: -4; -2.

Пример 8. Решить уравнение $x^4 - (x - 1)(5x^2 - 4x + 4) = 0$.

Решение

Нетрудно видеть, что $x = 1$ не является корнем данного уравнения, тогда, разделив обе части уравнения на $(x - 1)^2 \neq 0$, получим

$$\frac{x^4}{(x - 1)^2} - \frac{5x^2 - 4x + 4}{x - 1} = 0, \text{ или}$$

$$\left(\frac{x^2}{x - 1}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x^2}{x - 1} + \frac{4(x - 1)}{x - 1} = 0, \text{ или}$$

$$\left(\frac{x^2}{x - 1}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x^2}{x - 1} + 4 = 0.$$

Пусть $\frac{x^2}{x - 1} = y$, тогда имеем $y^2 - 5y + 4 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = 4$. Получим два уравнения:

1) $\frac{x^2}{x - 1} = 1$, $x^2 - x + 1 = 0$ — нет корней, так как $D = -3 < 0$.

2) $\frac{x^2}{x - 1} = 4$, или $x^2 - 4x + 4 = 0$, $(x - 2)^2 = 0$, $x - 2 = 0$, откуда $x = 2$.

Ответ: 2.

Пример 9. Решить уравнение $x^4 + x^3 - x + 1 = 4x^2$.

Решение

Запишем уравнение в виде

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1 = 2x^2. \quad (1)$$

Прибавим к обеим частям (1) по $\frac{1}{4}x^2$:

$$\left(x^4 + x^3 + \frac{1}{4}x^2\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right) + 1 = 2x^2 + \frac{1}{4}x^2 \text{ или}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)^2 - 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right) + 1 = \frac{9}{4}x^2. \quad (2)$$

Теперь видим, что левая часть уравнения (2) — квадрат разности двух чисел: $x^2 + \frac{1}{2}x$ и 1, тогда

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1\right)^2 = \frac{9}{4}x^2, \text{ откуда имеем два уравнения:}$$

$$\begin{array}{ll} 1) x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = \frac{3}{2}x, \text{ или} & 2) x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = -\frac{3}{2}x, \\ x^2 - x - 1 = 0, & x^2 + 2x - 1 = 0, \\ D = 1 + 4 = 5 > 0, & D/4 = 1 + 1 = 2 > 0, \end{array}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Итак, исходное уравнение имеет 4 корня.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}), -1 \pm \sqrt{2}.$$

Пример 10. Решить уравнение $3x^4 + 12x^3 + 1 = 0$.

Решение

$$\text{Пусть } x = \frac{1}{y}, \text{ тогда получим } 3 \cdot \frac{1}{y^4} + 12 \cdot \frac{1}{y^3} + 1 = 0, \\ y^4 + 12y + 3 = 0, \text{ или } y^4 + 6y^2 + 9 = 6y^2 - 12y + 6,$$

$$(y^2 + 3)^2 = 6(y - 1)^2, \text{ откуда } y^2 + 3 = \pm \sqrt{6}(y - 1).$$

Следовательно, имеем два квадратных уравнения:

$$1) y^2 + 3 = \sqrt{6}(y - 1),$$

$$y^2 - \sqrt{6} y (3 + \sqrt{6}) = 0,$$

$$D = 6 - 4 \cdot (3 + \sqrt{6}) = -6 - 4\sqrt{6} < 0 - \text{нет корней,}$$

$$2) y^2 + 3 = -\sqrt{6} (y - 1) \text{ или}$$

$$y^2 + \sqrt{6} y + (3 - \sqrt{6}) = 0,$$

$$D = 6 - 4(3 - \sqrt{6}) = 4\sqrt{6} - 6 > 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{6} \pm \sqrt{6} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{6}} \right).$$

$$\text{Так как } x = \frac{1}{y}, \text{ то } x_{1,2} = \frac{2}{\sqrt{6} \left(-1 \pm \sqrt{4 - \sqrt{6}} \right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3 \left(-1 \pm \sqrt{4 - \sqrt{6}} \right)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{6}}{3 \left(-1 \pm \sqrt{4 - \sqrt{6}} \right)}.$$

Пример 11. Решить уравнение $(x^2 - 27)(x - 13)^2 + 169x^2 = 0$.

Решение

Заметим, что $x \neq 13$, тогда, разделив обе части уравнения на $(x - 13)^2 \neq 0$, получим

$$x^2 - 27 + \frac{169x^2}{(x - 13)^2} = 0 \text{ или } x^2 + \frac{169x^2}{(x - 13)^2} = 27. (1)$$

Выделим полный квадрат в левой части полученного уравнения, для чего прибавим к обеим частям (1)

$$\text{удвоенное произведение } \frac{2 \cdot 13x^2}{x - 13} :$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{13x}{x - 13} + \frac{169x^2}{(x - 13)^2} = 27 + \frac{26x^2}{x - 13}, \text{ или}$$

$$\left(x + \frac{13x}{x-13}\right)^2 = 27 + \frac{26x^2}{x-13}, \text{ или}$$

$$\left(\frac{x^2}{x-13}\right)^2 - 26 \cdot \frac{x^2}{x-13} - 27 = 0. \quad (2)$$

Пусть $\frac{x^2}{x-13} = y$, тогда (2) примет вид
 $y^2 - 26y - 27 = 0$, откуда $y_1 = 27$, $y_2 = -1$.
 Следовательно, получим два уравнения:

$$1) \frac{x^2}{x-13} = 27,$$

$$x^2 - 27x + 351 = 0,$$

$$D = 729 - 1404 = -675 < 0$$

- нет корней,

$$2) \frac{x^2}{x-13} = -1,$$

$$x^2 + x - 13 = 0,$$

$$D = 53 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{53}).$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{53}).$$

Пример 12. Решить уравнение $x(13-x)(13+x^2) = 42(x+1)^2$.

Решение

Так как $x = -1$ не является корнем уравнения, то, разделив обе части уравнения на $(x+1)^2 \neq 0$, получим

$$x \left(\frac{13-x}{x+1} \right) \cdot \frac{13+x^2}{x+1} = 42 \text{ или}$$

$$x \left(\frac{13-x}{x+1} \right) \left(x + \frac{13-x}{x+1} \right) = 42.$$

Пусть $x \cdot \frac{13-x}{x+1} = u$, $x + \frac{13-x}{x+1} = v$, тогда

$$uv = 42 \text{ и } u + v = \frac{x(13-x)}{x+1} + x + \frac{13-x}{x+1} =$$

$$= \frac{13-x}{x+1} \cdot (x+1) + x = 13 - x + x = 13.$$

Получим систему: $\begin{cases} u + v = 13, \\ uv = 42, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} u_1 = 6, \\ v_1 = 7, \end{cases}$

или $\begin{cases} u_2 = 7, \\ v_2 = 6. \end{cases}$ Имеем 2 уравнения:

$$1) x \cdot \frac{13-x}{x+1} = 6, \quad 13x - x^2 = 6x + 6, \\ x^2 - 7x + 6 = 0, \text{ откуда } x_1 = 1, x_2 = 6;$$

$$2) x \cdot \frac{13-x}{x+1} = 7, \quad 13x - x^2 = 7x + 7,$$

$$x^2 - 6x + 7, \quad D/4 = 9 - 7 = 2 > 0, \quad x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{2}.$$

Ответ: 1; 6; $3 \pm \sqrt{2}$.

Пример 13. Решить уравнение $(x^2 - 7x + 10)(x^2 + x - 2) = 2(x^2 - 3x - 10)$.

Решение

Так как $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$ и $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, то данное уравнение имеет вид $(x - 2)(x - 5)(x - 1)(x + 2) = 2(x^2 - 3x - 10)$.

Множители в левой части уравнения сгруппируем следующим образом:

$$(x - 1)(x - 2)(x - 5)(x + 2) = 2(x^2 - 3x - 10), \text{ или} \\ (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 10) = 2(x^2 - 3x - 10), \text{ или, вы-} \\ \text{нося общий множитель } x^2 - 3x - 10 \text{ за скобки, имеем} \\ (x^2 - 3x - 10)(x^2 - 3x + 2 - 2) = 0, \text{ или} \\ (x + 2)(x - 5)x(x - 3) = 0, \text{ откуда } x_1 = -2, x_2 = 5, \\ x_3 = 0, x_4 = 3.$$

Ответ: -2; 0; 3; 5.

Пример 14. Решить уравнение $(1 + 2002^2)x^2 + 2(x - 2002)(1 + 2002x) + 1 = 0$.

Решение

Запишем уравнение в виде

$$x^2 + 2002^2 x^2 + 1 + 2(x - 2002)(1 + 2002x) = 0 \text{ или} \\ (2002^2 x^2 + 2 \cdot 2002x + 1) + 2(x - 2002)(1 + 2002x) + \\ + x^2 - 2 \cdot 2002x = 0, \\ (2002x + 1)^2 + 2(x - 2002)(1 + 2002x) + x^2 - 2 \cdot 2002x = 0,$$

$$(2002x + 1)^2 + 2(2002x + 1)(x - 2002) + (x - 2002)^2 - 2002^2 = 0,$$

$$((2002x + 1) + (x - 2002))^2 - 2002^2 = 0,$$

$$(2003x - 2001)^2 - 2002^2 = 0.$$

Разлагая левую часть полученного уравнения на множители, получим

$$(2003x - 4003)(2003x + 1) = 0, \text{ откуда}$$

$$2003x - 4003 = 0 \text{ или } 2003x + 1 = 0.$$

$$x_1 = \frac{4003}{2003} = 1 \frac{2000}{2003}; \quad x_2 = -\frac{1}{2003};$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{2003}; \quad 1 \frac{2000}{2003}.$$

Пример 15. Решить уравнение $x^9 - 2002x^3 + \sqrt{2001} = 0$.

Решение

Пусть $\sqrt{2001} = a$, где $a > 0$, тогда $a^2 = 2001$ и $2002 = a^2 + 1$, тогда данное уравнение запишется в виде: $x^9 - (a^2 + 1)x^3 + a = 0$. (1)

Решить уравнение (1) — довольно сложная проблема, избежать которой можно так:

$$x^3 a^2 - a + (x^3 - x^9) = 0. \quad (2)$$

Как видим, уравнение (2) — квадратное относительно a .

$$D = 1 - 4x^3(x^3 - x^9) = 1 - 4x^6 + 4x^{12} = (1 - 2x^6)^2,$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm (1 - 2x^6)}{2x^3}, \text{ откуда } a_1 = \frac{1 - x^6}{x^3}, \quad a_2 = x^3.$$

Итак, имеем два уравнения:

$$1) \frac{1 - x^6}{x^3} = a, \text{ где } a > 0,$$

$$x^6 + ax^3 - 1 = 0, \quad D = a^2 + 4 > 0, \text{ тогда}$$

$$x^3 = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 + 4}),$$

$$\text{откуда } x_{1,2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 + 4})}.$$

Так как $a = \sqrt{2001}$, то

$$x_{1,2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-\sqrt{2001} \pm \sqrt{2005})}.$$

2) $x^3 = a$, откуда $x = \sqrt[3]{a}$ или

$$x_3 = \sqrt[3]{\sqrt{2001}}, \quad x_3 = \sqrt[6]{2001}.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-\sqrt{2001} \pm \sqrt{2005})}; \sqrt[6]{2001}.$$

Пример 16. Решить уравнение

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \dots + \left(x^{2001} + \frac{1}{x^{2001}}\right) = 2002.$$

Решение

Заметим, что при $x < 0$ левая часть уравнения отрицательна, а правая — положительна, так что уравнение не имеет отрицательных корней.

Кроме того, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $x^3 + \frac{1}{x^3} \geq 2$, ...,

$x^{2001} + \frac{1}{x^{2001}} \geq 2$, причем знак равенства выполняется лишь при $x = 1$.

Так как всего скобок 1001, то левая часть исходного уравнения равна 2002 только при $x = 1$.

Ответ: 1.

Пример 17. Решить уравнение

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \frac{205}{16} \left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Решение

$$\text{Пусть } x + \frac{1}{x} = y, \text{ тогда } x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 =$$

$$= y^2 - 2; \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) =$$

$$= (y^2 - 2)y - y = y^3 - 3y;$$

$$\text{тогда } x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) =$$

$$(y^3 - 3y)(y^2 - 2) - y = y^5 - 3y^3 - 2y^3 + 6 - y = y^5 - 5y^3 + 5y.$$

Следовательно, данное уравнение запишется в виде

$$y^5 - 5y^3 + 5y = \frac{205}{16}y \text{ или } 16y^5 - 80y^3 - 125y = 0,$$

$$y(16y^4 - 80y^2 - 125) = 0, \quad y \neq 0, \text{ так как } x + \frac{1}{x} \neq 0.$$

$$16y^4 - 80y^2 - 125 = 0, \quad D/4 = 40^2 + 16 \cdot 125 = 3600 =$$

$$= 60^2 > 0, \text{ тогда } y_{1,2}^2 = \frac{40 \pm 60}{16}, \text{ откуда } y_1^2 = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}$$

$$\text{или } y_{1,2} = \pm \frac{5}{2}; \quad y_2^2 = -\frac{20}{16} < 0 - \text{нет корней.}$$

Если $y = \pm \frac{5}{2}$, то с учетом подстановки получим два уравнения:

$$1) \quad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}, \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0, \quad D = 25 - 16 = 3^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

$$2) \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}, \quad 2x^2 + 5x + 2 = 0,$$

$$x_{3,4} = \frac{-5 \pm 3}{4}, \quad x_3 = -\frac{1}{2}, \quad x_4 = -2.$$

Итак, исходное уравнение имеет 4 корня.

$$\text{Ответ: } \pm \frac{1}{2}; \pm 2.$$

Пример 18. Решить уравнение $\left(\frac{x+2}{x}\right)^3 - 8\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^3 = 243$.

Решение

Раскрытие скобок и дальнейшее упрощение уравнения приводит лишь к ненужным осложнениям.

Пусть $\frac{x+2}{x} = a$, $2 \cdot \frac{x+2}{x-2} = b$, тогда данное уравнение примет вид $a^3 - b^3 = 243$. (1)

$$\begin{aligned} \text{Кроме того, } a - b &= \frac{x+2}{x} - 2 \cdot \frac{x+2}{x-2} = \\ &= (x+2) \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} \right) = (x+2) \cdot \frac{x-2-2x}{x(x-2)} = -\frac{(x+2)^2}{x(x-2)} = \\ &= -\frac{x+2}{x} \cdot \frac{x+2}{x-2} = -\frac{1}{2}ab, \quad a - b = -\frac{1}{2}ab. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) = 243$, то, учитывая (2), имеем $-\frac{1}{8}(ab)^3 + 3ab \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)ab = 243$,
 $(ab)^3 + 12(ab)^2 + 1944 = 0$.

Пусть $ab = t$, тогда $t^3 + 12t^2 + 1944 = 0$ или $t^2(t+18) - 6(t^2 - 324) = 0$, $t^2(t+18) - 6(t+18)(t-18) = 0$, $(t+18)(t^2 - 6t + 108) = 0$, откуда $t+18 = 0$ или $t^2 - 6t + 108 = 0$.

Если $t+18 = 0$, то $t = -18$, тогда $ab = -18$ и

$$\frac{(x+2)^2}{x(x-2)} = -9, \text{ или } x^2 + 4x + 4 = -9x^2 + 18x,$$

$$10x^2 - 14x + 4 = 0, \text{ или } 5x^2 - 7x + 2 = 0,$$

$$D = 49 - 40 = 9 > 0, \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{10}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 0,4;$$

если $t^2 - 6t + 108 = 0$, то корней нет, так как $D < 0$.

Итак, исходное уравнение имеет два корня.

Ответ: 0,4; 1.

Пример 19. Решить уравнение $x^3 - \frac{x^3 + 2}{(x+1)^3} - \frac{3x^2}{x+1} + 1 = 0$.

Решение

Заметим, что $x + 1 \neq 0$, т. е. $x \neq -1$, тогда
 $x^3(x+1)^3 - x^3 - 2 - 3x^2(x+1)^2 + (x+1)^3 = 0$, или
 $x^3(x+1)^3 - 3x^2(x+1)^2 - x^3 - 2 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$,
 $x^3(x+1)^3 - 3x^2(x+1)^2 + 3x(x+1) - 1 = 0$, или
 $(x^2 + x)^3 - 3(x^2 + x)^2 + 3(x^2 + x) - 1 = 0$.

Теперь идея решения становится ясной, — левая часть полученного уравнения представляет собой куб разности:

$$((x^2 + x) - 1)^3 = 0 \text{ или } x^2 + x - 1 = 0,$$

$$D = 1 + 4 = 5 > 0, \quad x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Пример 20. Решить уравнение

$$\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2 + \left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2 = \frac{13}{6} \cdot \frac{x^2-9}{x^2-4}.$$

Решение

Заметим, что $x \neq \pm 2$.

Пусть $\frac{x+3}{x+2} = a$, $\frac{x-3}{x-2} = b$, тогда данное уравне-

$$\text{ние запишется в виде } a^2 + b^2 = \frac{13}{6}ab. \quad (1)$$

Очевидно, что $b \neq 0$, так как в противном случае и $a = 0$, тогда $x = 3$ и $x = -3$ одновременно, что невозможно, поэтому, разделив обе части (1) на $b^2 \neq 0$, по-

$$\text{лучим: } \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \frac{13}{6} \cdot \frac{a}{b}; \text{ пусть } \frac{a}{b} = y, \text{ тогда}$$

$$y^2 - \frac{13}{6}y + 1 = 0 \text{ или } 6y^2 - 13y + 6 = 0, D = 25 = 5^2 > 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{12}, y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = \frac{2}{3}, \text{ тогда } \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \text{ и } \frac{a}{b} = \frac{2}{3}.$$

Учитывая подстановки $\frac{x+3}{x+2} = a$ и $\frac{x-3}{x-2} = b$, получим два уравнения:

$$1) \frac{x+3}{x+2} : \frac{x-3}{x-2} = \frac{3}{2}, \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{3}{2},$$

$$2(x^2 + x - 6) = 3(x^2 - x - 6),$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0, \text{ откуда } x_1 = -1; x_2 = 6;$$

$$2) \frac{x+3}{x+2} : \frac{x-3}{x-2} = \frac{2}{3}, \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{2}{3},$$

$$3(x^2 + x - 6) = 2(x^2 - x - 6),$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0, \text{ откуда } x_3 = -6, x_4 = 1.$$

Найденные корни удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $\pm 1; \pm 6$.

Пример 21. Решить уравнение $\frac{(4x^2 + 1)^2}{(2x - 1)^2 x} = 25$.

Решение

Запишем уравнение в виде $\frac{(2x - 1)^2 x}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{1}{25}$ или

$$\frac{4x^2 + 1 - 4x}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{1}{25},$$

$$\left(\frac{4x^2 + 1}{4x^2 + 1} - \frac{4x}{4x^2 + 1} \right) \cdot \frac{x}{4x^2 + 1} = \frac{1}{25}.$$

Заметим, что $4x^2 + 1 > 0$ при любом $x \in R$, тогда

$$\left(1 - 4 \cdot \frac{x}{4x^2 + 1} \right) \cdot \frac{x}{4x^2 + 1} = \frac{1}{25}.$$

Пусть $\frac{x}{4x^2 + 1} = y$, тогда получим уравнение

$$(1 - 4y)y = \frac{1}{25}, y - 4y^2 = \frac{1}{25} \text{ или}$$

$$100y^2 - 25y + 1 = 0, D = 625 - 400 = 225 = 15^2 > 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{25 \pm 15}{200}, y_1 = \frac{1}{5}, y_2 = \frac{1}{20}.$$

Учитывая подстановку, получим два уравнения:

$$1) \frac{x}{4x^2 + 1} = \frac{1}{5}, 4x^2 - 5x + 1 = 0,$$

$$D = 25 - 16 = 9 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8}, x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{4}.$$

$$2) \frac{x}{4x^2 + 1} = \frac{1}{20}, 4x^2 - 20x + 1 = 0,$$

$$D/4 = 100 - 4 = 96 > 0,$$

$$x_{3,4} = \frac{10 \pm 4\sqrt{6}}{4} = \frac{1}{2}(5 \pm 2\sqrt{6}).$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{4}; 1; \frac{1}{2}(5 \pm 2\sqrt{6}).$$

Пример 22. Решить уравнение

$$\frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2x-1)^2}{2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2x)^2} = \frac{13}{14}.$$

Решение

Известно, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (свойство производной пропорции), тогда получим

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2x)^2}{2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2x)^2} = \frac{27}{14} \text{ или}$$

$$\frac{1^2 + 2^2 + \dots + (2x)^2}{2^2(1^2 + 2^2 + \dots + x^2)} = \frac{27}{14} \quad (1)$$

Известно, что сумма квадратов натурального ряда чисел, начиная с единицы, определяется по формуле

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad (2)$$

$$\text{тогда } 1^2 + 2^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} \quad (3)$$

С учетом соотношений (2) и (3) уравнение (1) примет вид:

$$\frac{2x(2x+1)(4x+1)}{6} : \frac{2^2 \cdot x(x+1)(2x+1)}{6} = \frac{27}{14} \quad \text{или}$$

после сокращений получим

$$\frac{4x+1}{2(x+1)} = \frac{27}{14} \quad \text{или} \quad \frac{4x+1}{x+1} = \frac{27}{7},$$

$$7(4x+1) = 27(x+1), \quad 28x+7 = 27x+27,$$

откуда $x = 20$ — единственный корень исходного уравнения.

Замечание. Вывод формулы (2) имеется в ряде книг, например, см. *Соминский И. С. Элементарная алгебра (дополнительный курс). 3-е изд. М., 1967.*

Пример 23. Решить уравнение

$$\frac{144}{x(x+2)} = \frac{72}{x(x+1)} + x^2 + x.$$

Решение

Запишем уравнение в виде

$$\frac{144}{x(x+2)} - \frac{72}{x(x+1)} = x^2 + x. \quad (1)$$

Упростим левую часть уравнения (1):

$$\frac{144}{x(x+2)} - \frac{72}{x(x+1)} = \frac{144(x+1) - 72(x+2)}{x(x+1)(x+2)} =$$

$$= \frac{72}{(x+1)(x+2)}, \text{ где } x \neq 0, x \neq -1, x \neq -2, \text{ тогда урав-}$$

нение (1) примет вид: $\frac{72}{(x+1)(x+2)} = x^2 + x$, или

$$x(x+1)^2(x+2) = 72, \text{ или} \\ (x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 1) = 72. \quad (2)$$

Пусть $x^2 + 2x = y$, тогда (2) примет вид $y(y+1) = 72$, $y^2 + y - 72 = 0$, откуда $y_1 = -9$, $y_2 = 8$.

Учитывая подстановку, получим два квадратных уравнения:

1) $x^2 + 2x = -9$, или $x^2 + 2x + 9 = 0$ — нет корней, так как $D < 0$;

2) $x^2 + 2x = 8$, или $x^2 + 2x - 8 = 0$, $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

Итак, исходное уравнение имеет два корня.

Ответ: $-4; 2$.

Пример 24. Решить уравнение $\frac{1}{2x^2 - 5x + 3} +$

$$+ \frac{1}{6x^2 - 19x + 15} = 2(6x^2 - 16x + 9).$$

Решение

Заметим, что $2x^2 - 5x + 3 = (2x - 3)(x - 1)$ и $6x^2 - 19x + 15 = (2x - 3)(3x - 5)$, тогда данное уравнение примет вид

$$\frac{1}{(2x - 3)(3x - 5)} + \frac{1}{(2x - 3)(x - 1)} = 2(6x^2 - 16x + 9),$$

где $x \neq 1,5$, $x \neq \frac{5}{3}$, $x \neq 1$.

Приведем левую часть полученного уравнения к общему знаменателю:

$$\frac{x - 1 + 3x - 5}{(2x - 3)(3x - 5)(x - 1)} = 2(6x^2 - 16x + 9), \text{ или}$$

$$\frac{2(2x - 3)}{(2x - 3)(3x - 5)(x - 1)} = 2(6x^2 - 16x + 9), \text{ или}$$

$$\frac{1}{(3x-5)(x-1)} = 2(3x-5)(x-1) - 1.$$

Теперь идея решения становится понятной.

Пусть $(3x-5)(x-1) = y$, тогда получим уравнение

$$\frac{1}{y} = 2y - 1 \text{ или } 2y^2 - y - 1 = 0, D = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}, y_1 = 1, y_2 = -\frac{1}{2}.$$

Получим два уравнения:

$$1) (3x-5)(x-1) = 1,$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0,$$

$$D/4 = 16 - 12 = 4 = 2^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{3}, x_1 = 2, x_2 = \frac{2}{3}.$$

$$2) (3x-5)(x-1) = -\frac{1}{2},$$

$$6x^2 - 16x + 8 = -1,$$

$$6x^2 - 16x + 9 = 0,$$

$$D/4 = 64 - 54 = 10 > 0,$$

$$x_{3,4} = \frac{8 \pm \sqrt{10}}{6}.$$

$$\text{Ответ: } 2; \frac{2}{3}; \frac{1}{6}(8 \pm \sqrt{10}).$$

Пример 25. Решить уравнение $\frac{1}{(x+1998)(x+1999)} +$

$$+ \frac{1}{(x+1999)(x+2000)} + \frac{1}{(x+2000)(x+2001)} +$$

$$+ \frac{1}{(x+2001)(x+2002)} = \frac{1}{999999}.$$

Решение

Известно, что $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Используя это соотношение, данное уравнение легко упростится:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x+1998} - \frac{1}{x+1999} + \frac{1}{x+1999} - \frac{1}{x+2000} + \\ & + \frac{1}{x+2000} - \frac{1}{x+2001} + \frac{1}{x+2001} - \frac{1}{x+2002} = \\ & = \frac{1}{999999}, \text{ или } \frac{1}{x+1998} - \frac{1}{x+2002} = \frac{1}{999999}, \end{aligned}$$

$$\text{или } \frac{x+2002-x-1998}{(x+1998)(x+2002)} = \frac{1}{999999}, \text{ или}$$

$$\frac{4}{(x+1998)(x+2002)} = \frac{1}{999999}; \text{ пусть } x+2000 = y,$$

$$\text{тогда получим } \frac{4}{(y-2)(y+2)} = \frac{1}{999999}, \text{ или}$$

$$y^2 - 4 = 4 \cdot 999999, y^2 = 4 \cdot (999999 + 1), \text{ или}$$

$$y^2 = 4 \cdot 10^6, \text{ и так как } y = x + 2000, \text{ то}$$

$$(x+2000)^2 = 4 \cdot 10^6, \text{ откуда } x+2000 = \pm 2000,$$

$$\text{значит, } x_1 = 0, x_2 = -4000.$$

Ответ: -4000; 0.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения (1-25)

1. $85x^3 = 2000x - 1915$;
2. $4x^3 - 6x^2 + 3x - a = 0$;
3. $x^3 - 2x - \sqrt{3} = 0$;
4. $(x^2 + x + 1)^2 = x^2(7x^2 + x + 1)$;
5. $(x^2 + 8x + 8)^2 = x^3 + 10x^2 + 8x$;
6. $x^4 - 5\sqrt{2}x^3 + 12x^2 + 8\sqrt{2}x - 32 = 0$;
7. $(x^2 - 2a^2)^2 = 1 - 4\sqrt{2}ax$;
8. $x^4 + 12x + 3 = 0$;
9. $x(x-2)(x^2 - 4x - 1) = 12(2x + 1)^2$;
10. $(x+3)(x+4)(x+9)(x+12) = 3x^2$;
11. $3(x^2 + 2x + 4)^2 - 38(x-2)^2 = 55(x^3 - 8)$;
12. $(1+x)^4 + (1+x^2)^2 = 4x^2$;
13. $26x^2(x-4)^2 = 25(x^2 + (x-4)^2)$;
14. $x^2 - 7x + 12 = 20 \cdot \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 3x + 2}$;
15. $x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = 0$;
16. $4x^4 + 4x^3 - \frac{1}{2}x = 1$;
17. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 6$;
18. $\frac{16}{x^2} - \frac{5}{4}x^2 = 3x - 7$;
19. $x^2 + \frac{9x^2}{(x-3)^2} = 160$;
20. $\frac{16x^2}{25} - \frac{25}{x^2} = 4x^2 - 8x - 45$;
21. $\frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{3}{2}$;
22. $\frac{(10-x)^2 + (10-x)(x-2) + (x-2)^2}{(10-x)^2 - (10-x)(x-2) + (x-2)^2} = \frac{49}{19}$;

$$23. \frac{3}{12x^2 - 13x + 3} + \frac{3}{6x^2 + x - 1} = 12x^2 - 3x - 7;$$

$$24. \frac{x^2 - 4x + 8}{x} = \frac{x^2 - 2x + 8}{x^2 - 4x + 8};$$

$$25. \frac{x - 1997}{x + 1998} - \frac{x - 1998}{x + 1999} = \frac{x - 2000}{x + 2001} - \frac{x - 2001}{x + 2002}.$$

§ 40. Нелинейные системы алгебраических уравнений

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 9(x - y)^3, \\ xy = 2(x - y). \end{cases}$$

Решение

Запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 9(x - y)^3, \\ 4xy = 8(x - y). \end{cases}$$

Вычтем из I уравнения полученной системы II:

$$(x + y)^2 - 4xy = 9(x - y)^3 - 8(x - y) \text{ или}$$

$$(x - y)^2 = 9(x - y)^3 - 8(x - y). \quad (1)$$

Пусть $x - y = t$, тогда уравнение (1) примет вид $t^2 = 9t^3 - 8t$, или $t(9t^2 - t - 8) = 0$, откуда $t_1 = 0$ или $9t^2 - t - 8 = 0$, $D = 1 + 288 = 289 = 17^2 > 0$,

$$t_{2,3} = \frac{1 \pm 17}{18}, \quad t_2 = \frac{1 + 17}{18} = 1, \quad t_3 = \frac{1 - 17}{18} = -\frac{8}{9}.$$

С учетом подстановки $x - y = t$, имеем 3 системы:

$$1) \begin{cases} x - y = 0, \\ xy = 2(x - y); \end{cases} \quad \begin{cases} x = y, \\ x^2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2(x - y); \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2; \end{cases}$$

$$а) \begin{cases} x = -1, \\ y = -2; \end{cases} б) \begin{cases} x = 2, \\ y = 1; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - y = -\frac{8}{9}, \\ xy = 2(x - y); \end{cases} \begin{cases} x - y = -\frac{8}{9}, \\ xy = -\frac{16}{9}; \end{cases} \begin{cases} x = y - \frac{8}{9}, \\ y(y - \frac{8}{9}) = -\frac{16}{9}. \end{cases}$$

$$y^2 - \frac{8}{9}y = -\frac{16}{9}, \quad 9y^2 - 8y + 16 = 0,$$

$\frac{D}{4} = 16 - 144 = -128 < 0$, т. е. система 3) не имеет решений.

Ответ: (0; 0), (-1; -2); (2; 1).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 33y, \\ 8(x + y) = 3x^3y^2. \end{cases}$$

Решение

Перемножив левые и правые части уравнений системы, получим

$$\begin{aligned} 8(x^5 + y^5)(x + y) &= 99x^3y^3, \text{ или} \\ 8(x^6 + xy^5 + x^5y + y^6) &= 99x^3y^3. \end{aligned} \quad (1)$$

Очевидно, что пара чисел (0; 0) является решением исходной системы. Пусть $xy \neq 0$, тогда, разделив обе части (1) на $x^3y^3 \neq 0$, получим

$$8\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^3}{x^3}\right) = 99. \quad (2)$$

Пусть $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t$, тогда

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2;$$

$$\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) - \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) =$$

$$= (t^2 - 2) \cdot t - t = t^3 - 3t.$$

Уравнение (2) примет вид

$$8(t^3 - 3t + t^2 - 2) = 99 \text{ или } 8t^3 + 8t^2 - 24t - 115 = 0.$$

$$\text{Полагая } 2t = m, \text{ имеем } m^3 + 2m^2 - 12m - 115 = 0. (3)$$

Можно убедиться в том, что $m = 5$ — корень уравнения (3), тогда $m^2(m - 5) + 7m(m - 5) + 23(m - 5) = 0$, $(m - 5)(m^2 + 7m + 23) = 0$, откуда $m = 5$.

Уравнение $m^2 + 7m + 23 = 0$ не имеет корней, так как $D < 0$.

$$\text{Итак, } m = 5, \text{ тогда } 2t = 5, t = \frac{5}{2}.$$

Учитывая подстановку $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t$, имеем

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}; \text{ полагая } \frac{x}{y} = n, \text{ имеем } n + \frac{1}{n} = \frac{5}{2}, \text{ или}$$

$$2n^2 - 5n + 2 = 0, D = 25 - 16 = 9 > 0, n_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4},$$

$$n_1 = 2, n_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{x}{y} = 2, \frac{x}{y} = \frac{1}{2}.$$

Решая полученные уравнения, например, со II уравнением исходной системы, получим две системы:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ 8(x + y) = 3x^3y^2; \end{cases} \begin{cases} x = 2y, \\ 8 \cdot 3y = 3 \cdot 8y^3 \cdot y^2; \end{cases} \begin{cases} x = 2y, \\ y^5 = y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y, \\ y(y^4 - 1) = 0. \end{cases}$$

Пара $(0; 0)$ нами была получена ранее.

$\begin{cases} x = 2y, \\ y^4 = 1; \end{cases} \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = \pm 1; \end{cases}$ т. е. имеем две пары решений $(2; 1)$ и $(-2; -1)$;

$$2) \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2}, \\ 8(x+y) = 3x^3y^2; \end{cases} \begin{cases} y = 2x, \\ 8 \cdot 3x = 3x^3 \cdot 4x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x, \\ 2x = x^5; x \neq 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2x, \\ x^4 = 2; \end{cases} \begin{cases} x = \pm\sqrt[4]{2}, \\ y = \pm 2\sqrt[4]{2}. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система имеет ровно 5 пар решений.

Ответ: $(0; 0)$, $(2; 1)$, $(-2; -1)$, $(\sqrt[4]{2}; 2\sqrt[4]{2})$,
 $(-\sqrt[4]{2}; -2\sqrt[4]{2})$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y(x+y)^2 = 16, \\ y(x^3 - y^2) = 26. \end{cases}$$

Решение

Из I уравнения системы видно, что $y > 0$, тогда из II уравнения следует $x > y > 0$.

Выразим из I уравнения x через y : $(x+y)^2 = \frac{16}{y}$,

$x+y = \frac{4}{\sqrt{y}}$, $x = \frac{4}{\sqrt{y}} - y$, тогда II уравнение системы

$$\text{примет вид } y \left(\left(\frac{4}{\sqrt{y}} - y \right)^3 - y^2 \right) = 26. \quad (1)$$

Пусть $\sqrt{y} = t$, где $t > 0$, тогда уравнение (1) примет

$$\text{вид } t^2 \left(\left(\frac{4}{t} - t^2 \right)^3 - t^4 \right) = 26, \text{ или } \frac{(4-t^3)^3}{t} - t^6 = 26, \text{ или } (4-t^3)^3 - t^7 - 26t = 0. \quad (2)$$

Пусть $f(t) = (4 - t^3)^3 - t^7 - 26t$, тогда
 $f'(t) = 3(4 - t^3)^2 \cdot (-3t^2) - 7t^6 - 26$, или
 $f'(t) = -9t^2(4 - t^3)^2 - 7t^6 - 26$.

Как видно, $f'(t) < 0$ при всех $t \in R$, следовательно, функция $f(t)$ убывает, значит, уравнение $f(t) = 0$ имеет не более одного корня и $t = 1$ — корень уравнения

(2); тогда $\sqrt{y} = 1$, $y = 1$ и $x = \frac{4}{1} - 1 = 3$.

Итак, исходная система имеет единственное решение.

Ответ: (3; 1).

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^4 + 2xy^2 - 3x^2 = 0, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Решение

Естественная попытка решить систему способом подстановки приводит к уравнению 4-й степени.

Преобразуем 1 уравнение системы:

$$y^4 + 2xy^2 - 3x^2 = 0, (y^4 - xy^2) + (3xy^2 - 3x^2) = 0 \text{ или } y^2(y^2 - x) + 3x(y^2 - x) = 0, (y^2 - x)(y^2 + 3x) = 0, \text{ откуда } y^2 - x = 0 \text{ или } y^2 + 3x = 0. \text{ Имеем 2 системы:}$$

$$1) \begin{cases} y^2 - x = 0, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Складывая почленно, получим $y^2 - y = 2$, или $y^2 - y - 2 = 0$, откуда $y_1 = 2$, $y_2 = -1$, тогда $x = 2 + y$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1$.

$$2) \begin{cases} y^2 + 3x = 0, \\ x - y = 2; \end{cases} \begin{cases} y^2 + 3x = 0, \\ x = y + 2; \end{cases} \begin{cases} y^2 + 3(y + 2) = 0, \\ x = y + 2. \end{cases}$$

$y^2 + 3y + 6 = 0$ — нет корней, так как $D < 0$, значит система 2) не имеет решений, тогда решением исходной системы будет решение системы 1).

Ответ: (4; 2), (1; -1).

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy(x^2 - y^2) = 6, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} x^3y - xy^3 = 6, \\ (x^2 + y^2)^2 = 25; \end{cases} \begin{cases} x^3y - xy^3 = 6 \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 25 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 25 \\ \cdot 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 25x^3y - 25xy^3 = 150, \\ 6x^4 + 12x^2y^2 + 6y^4 = 150. \end{cases}$$

Вычитая из II уравнения полученной системы I, имеем $6x^4 + 6y^4 + 12x^2y^2 - 25x^3y + 25xy^3 = 0$. (1)

Уравнение (1) является однородным уравнением 4-й степени. Так как $x^2y^2 \neq 0$, (что видно из исходной системы), то разделив обе части (1) на $x^2y^2 \neq 0$, получим

$$6 \cdot \frac{x^2}{y^2} + 6 \frac{y^2}{x^2} + 12 - 25 \cdot \frac{x}{y} + 25 \frac{y}{x} = 0 \text{ или}$$

$$6 \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) - 25 \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) + 12 = 0. \quad (2)$$

Пусть $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = t$, тогда $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = t^2 + 2$, и уравнение (2) примет вид: $6(t^2 + 2) - 25t + 12 = 0$, $6t^2 - 25t + 24 = 0$, $D = 625 - 576 = 49 = 7^2 > 0$, $t_{1,2} = \frac{25 \pm 7}{12}$,

$$t_1 = \frac{8}{3}, \quad t_2 = \frac{3}{2}.$$

С учетом подстановки получим два уравнения:

$$1) \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{8}{3}; \text{ полагая } \frac{x}{y} = a, \text{ имеем } 3a^2 - 8a - 3 = 0,$$

$$D/4 = 16 + 9 = 25 = 5^2 > 0, \quad a_{1,2} = \frac{4 \pm 5}{3}, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Значит, } \frac{x}{y} = 3, \quad \frac{x}{y} = -\frac{1}{3}.$$

Решая полученные уравнения со II уравнением исходной системы, получим две системы:

$$a) \begin{cases} \frac{x}{y} = 3, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} x = 3y, \\ 10y^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = \frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}, \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{1}{3}, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} y = -3x, \\ 10x^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} y = -3x, \\ x^2 = \frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ y = \mp \frac{3}{\sqrt{2}}; \end{cases}$$

$$2) \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2}; \frac{x}{y} = b; \text{ тогда имеем } 2b^2 - 3b - 2 = 0,$$

$$D = 9 + 16 = 5^2 > 0, b_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4}, b_1 = 2, b_2 = -\frac{1}{2}.$$

Получим две системы:

$$a) \begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} x = 2y, \\ 5y^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 1; \end{cases} \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = \pm 1; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} y = -2x, \\ 5x^2 = 5; \end{cases} \begin{cases} y = -2x, \\ x^2 = 1; \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = \mp 2. \end{cases}$$

Все найденные пары удовлетворяют исходной системе.

$$\text{Ответ: } \left(\pm \frac{3}{\sqrt{2}}; \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \mp \frac{3}{\sqrt{2}} \right), (\pm 2; \pm 1), (\pm 1, \mp 2).$$

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + x^4 y^4 + y^4 = 33, \\ x - xy + y = 1. \end{cases}$$

Решение

Упростим I уравнение системы:

$$\begin{aligned}(x^4 + y^4) + x^4 y^4 &= 33, \text{ или} \\ (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 y^2 + x^4 y^4 &= 33, \text{ или} \\ ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2 y^2 + x^4 y^4 &= 33.\end{aligned}\quad (1)$$

Из II уравнения системы имеем
 $x + y = 1 + xy.$ (2)

Тогда уравнение (1) примет вид
 $((1 + xy)^2 - 2x^2 y^2 + x^4 y^4 = 33$ или
 $(1 + 2xy + x^2 y^2 - 2x^2 y^2 + x^4 y^4 = 33,$
 $(1 + x^2 y^2)^2 - 2x^2 y^2 + x^4 y^4 = 33,$
 $1 + 2x^2 y^2 + x^4 y^4 - 2x^2 y^2 + x^4 y^4 = 33,$
 $1 + 2x^4 y^4 = 33, 2x^4 y^4 = 32, x^4 y^4 = 16, xy = \pm 2.$

Учитывая (2), имеем две системы:

$$\begin{aligned}1) \quad & \begin{cases} x + y = 1 + xy, \\ xy = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases} \\ 2) \quad & \begin{cases} x + y = 1 + xy, \\ xy = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -1, \\ xy = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = -2. \end{cases}\end{aligned}$$

Следовательно, исходная система имеет 4 пары решений.

Ответ: (2; 1), (1; 2), (-2; 1), (1; -2).

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x + y)^2 (x - y) = 25, \\ (x^2 + y^2)(x - y) = 13. \end{cases}$$

Решение

Способ 1

Из условия следует, что $x \neq y$, тогда, разделив обе части I уравнения системы на II, получим

$$\begin{aligned}\frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2} &= \frac{25}{13}, \text{ или } 13(x + y)^2 = 25(x^2 + y^2), \\ 13x^2 + 26xy + 13y^2 &= 25x^2 + 25y^2, \text{ или} \\ 6x^2 + 6y^2 - 13xy &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Разделим обе части (1) на $y^2 \neq 0$ (или $x^2 \neq 0$);

$$6\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 13\left(\frac{x}{y}\right) + 6 = 0; \text{ пусть } \frac{x}{y} = t, \text{ тогда получим}$$

$$6t^2 - 13t + 6 = 0, D = 169 - 144 = 5^2 > 0, t_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{12},$$

$$t_1 = \frac{3}{2}, t_2 = \frac{2}{3}. \text{ С учетом подстановки имеем 2 системы:}$$

темы:

$$1) \begin{cases} (x^2 + y^2)(x - y) = 13, \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{9}{4}y^2 + y^2\right)\left(\frac{3}{2}y - y\right) = 13, & \left[\frac{13}{4}y^2 \cdot \frac{1}{2}y = 13, \right. \\ \left. x = \frac{3}{2}y; \right. & \left. x = \frac{3}{2}y. \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{13}{8}y^3 = 13, \\ x = \frac{3}{2}y; \end{cases} \quad \begin{cases} y^3 = 13, \\ x = \frac{3}{2}y; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ x = 3. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (x^2 + y^2)(x - y) = 13, \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{4}{9}y^2 + y^2\right)\left(\frac{2}{3}y - y\right) = 13, & \left[\frac{13}{9}y^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}y\right) = 13, \right. \\ \left. x = \frac{2}{3}y; \right. & \left. x = \frac{2}{3}y; \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{13}{27}y^3 = 13, \\ x = \frac{2}{3}y; \end{cases} \quad \begin{cases} y^3 = -27, \\ x = \frac{2}{3}y; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -3, \\ x = -2. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система имеет 2 пары решений.

Ответ: $(-2; -3), (3; 2)$.

Способ 2

$$\begin{cases} (x+y)^2(x-y) = 25, & \begin{cases} (x+y)(x^2-y^2) = 25, \\ (x^2+y^2)(x-y) = 13; \end{cases} \\ \begin{cases} x^3+x^2y-xy^2-y^3 = 25, \\ x^3+xy^2-x^2y-y^3 = 13. \end{cases} \end{cases}$$

Складывая и вычитая левые и правые части полученной системы, имеем

$$\begin{cases} 2x^3 - 2y^3 = 38, & \begin{cases} x^3 - y^3 = 19, \\ x^2y - xy^2 = 6; \end{cases} \\ 2x^2y - 2xy^2 = 12; & \begin{cases} (x-y)^3 + 3xy(x-y) = 19, \\ xy(x-y) = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} (x-y)^3 = 1, \\ xy(x-y) = 6; \end{cases} & \begin{cases} (x-y)^3 + 3 \cdot 6 = 19, \\ xy(x-y) = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} (x-y)^3 = 1, \\ xy(x-y) = 6; \end{cases} & \begin{cases} x-y = 1, \\ xy = 6; \end{cases} \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} x = 3, \\ y = 2; \end{cases} \begin{cases} x = -2, \\ y = -3. \end{cases}$

Способ 3

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x+y)^2(x-y) = 25, & \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \frac{25}{13} \text{ или} \\ (x^2+y^2)(x-y) = 13; \end{cases} \\ & \frac{(x^2+y^2)+2xy}{x^2+y^2} = \frac{25}{13}, \quad \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{25}{13}, \\ & 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{25}{13}, \quad \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{12}{13}, \\ & \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{13}{6} \text{ или } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}; \text{ пусть } \frac{x}{y} = t, \text{ тогда} \\ & t + \frac{1}{t} = \frac{13}{6}, \quad 6t^2 - 13t + 6 = 0, \quad D = 169 - 144 = 5^2 > 0, \\ & t_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{12}, \quad t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = \frac{2}{3} \text{ и т. д. (см. способ 1).} \end{aligned}$$

Способ 4

Пусть $y = tx$, тогда имеем
$$\begin{cases} (x + tx)(x^2 - t^2x^2) = 25, \\ (x^2 + t^2x^2)(x - tx) = 13; \end{cases}$$

$$\frac{x^3(1+t)(1-t^2)}{x^3(1+t^2)(1-t)} = \frac{25}{13} \quad \text{или} \quad \frac{(1+t)^2}{1+t^2} = \frac{25}{13} \quad \text{и т. д.}$$

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y - \sqrt{3}(4x + 3y) = \sqrt{2}; \\ 25x^2 + 48xy + 25y^2 = 1. \end{cases}$$

Решение

Упростим II уравнение системы: $(3x + 4y)^2 + (4x + 3y)^2 = 1$.

Пусть $\begin{cases} 3x + 4y = a, \\ 4x + 3y = b, \end{cases}$ тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} a - \sqrt{3}b = \sqrt{2}; \\ a^2 + b^2 = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Из системы $\begin{cases} 3x + 4y = a, \\ 4x + 3y = b \end{cases}$ выразим x и y через a и b :

$$\begin{cases} 3x + 4y = a, \\ 4x + 3y = b \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{vmatrix} \begin{cases} 9x + 12y = 3a, \\ 16x + 12y = 4b, \end{cases} \quad \text{откуда, вычитая из II уравнения I, имеем}$$

$$7x = 4b - 3a, \quad x = \frac{1}{7}(4b - 3a),$$

тогда из уравнения $3x + 4y = a$ имеем $y = \frac{a - 3x}{4}$ или

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4}(a - 3x) = \frac{1}{4}\left(a - \frac{3}{7}(4b - 3a)\right) = \frac{1}{28}(16a - 12b) = \\ &= \frac{1}{7}(4a - 3b). \end{aligned}$$

$$\text{Итак,} \quad x = \frac{1}{7}(4b - 3a); \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{7}(4a - 3b). \quad (4)$$

Пусть $a = \cos \alpha$, $b = \sin \alpha$, тогда (1) примет вид:

$$\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha = \sqrt{2} \text{ или}$$

$$2 \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) = \sqrt{2}, \quad 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \sqrt{2},$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ откуда } \frac{\pi}{3} + \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Имеем две возможности:

$$1) \quad \frac{\pi}{3} + \alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \text{ или } \alpha = -\frac{\pi}{12} + 2\pi n, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} a = \cos \alpha &= \cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{6} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}; \end{aligned}$$

$$b = \sin \alpha = -\sin \frac{\pi}{12} = -\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{6} \right)} = -\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Учитывая (3), имеем } x &= \frac{1}{7}(4b - 3a) = \\ &= \frac{1}{7} \left(-2\sqrt{2 - \sqrt{3}} - \frac{3}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} \right) = \\ &= -\frac{1}{14} \left(4\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 3\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Аналогично из (4) имеем: } y &= \frac{1}{7}(4a - 3b) = \\ &= \frac{1}{7} \left(2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \frac{3}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{14} \left(4\sqrt{2+\sqrt{3}} + 3\sqrt{2-\sqrt{3}} \right).$$

$$2) \frac{\pi}{3} + \alpha = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ откуда } \alpha = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi n,$$

$$\text{тогда } a = \cos \alpha = \cos \left(-\frac{7\pi}{12} \right) = \cos \frac{7\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{12} \right) =$$

$$= \sin \frac{6\pi - 7\pi}{12} = \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) = -\sin \frac{\pi}{12} =$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{6} \right)} = -\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}};$$

$$b = \sin \alpha = \sin \left(-\frac{7\pi}{12} \right) = -\sin \frac{7\pi}{12} = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{12} \right) =$$

$$= -\cos \frac{6\pi - 7\pi}{12} = -\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) = -\cos \frac{\pi}{12} = -\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

$$\text{Следовательно, } x = \frac{1}{7} (4b - 3a) =$$

$$= \frac{1}{7} \left(-2\sqrt{2+\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} \right) =$$

$$= -\frac{1}{14} \left(4\sqrt{2+\sqrt{3}} - 3\sqrt{2-\sqrt{3}} \right);$$

$$y = \frac{1}{7} (4a - 3b) = \frac{1}{7} \left(-2\sqrt{2-\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \right) =$$

$$= -\frac{1}{14} \left(4\sqrt{2-\sqrt{3}} - 3\sqrt{2+\sqrt{3}} \right).$$

Итак, исходная система имеет 2 пары решений.

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{1}{14} \left(4\sqrt{2-\sqrt{3}} + 3\sqrt{2+\sqrt{3}} \right),$$

$$y_1 = \frac{1}{14} \left(4\sqrt{2+\sqrt{3}} + 3\sqrt{2-\sqrt{3}} \right),$$

$$x_2 = -\frac{1}{14} \left(4\sqrt{2+\sqrt{3}} - 3\sqrt{2-\sqrt{3}} \right),$$

$$y_2 = -\frac{1}{14} \left(4\sqrt{2-\sqrt{3}} - 3\sqrt{2+\sqrt{3}} \right).$$

Замечание 1. Найденные пары чисел можно упростить, применяя формулы сложных радикалов

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Замечание 2. Систему уравнений (1) и (2) можно решить и способом подстановки.

Пример 9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 y^2 - 8x + y^2 = 0, \\ 7x^2 - 14x + 15 + y^3 = 0. \end{cases}$$

Решение

Попытка решить систему подстановкой или сложением ни к чему хорошему не приводит. Упростим I уравнение системы:

$$y^2(x^2 + 1) = 8x \text{ или } \frac{1}{y^2} = \frac{x^2 + 1}{8x}.$$

$$\text{Но } \frac{x^2 + 1}{8x} = \frac{1}{8} \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right) = \frac{1}{8} \left(x + \frac{1}{x} \right) \geq \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Тогда } \frac{1}{y^2} \geq \frac{1}{4}, \text{ т. е. } -2 \leq y \leq 2. \quad (1)$$

Упростим II уравнением системы:

$$7x^2 - 14x + 15 + y^3, \text{ или } 7(x-1)^2 + 8 + y^3 = 0, \text{ откуда следует, что } 8 + y^3 \leq 0, \text{ т. е. } y \leq -2.$$

Учитывая (1), имеем $\begin{cases} y \geq -2, \\ y \leq -2, \end{cases}$ откуда $y = -2$, тогда

$$7(x-1)^2 + 8 - 8 = 0, \quad 7(x-1)^2 = 0, \quad (x-1)^2 = 0, \\ x-1=0, \quad x=1.$$

Итак, $x=1, y=-2$ — единственное решение исходной системы.

Ответ: (1; -2).

Пример 10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x-y)^3 = 3x-y, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Решение

Пусть $\begin{cases} x+y=u, \\ x-y=v, \end{cases}$ тогда $\begin{cases} 2x=u+v, \\ 2y=u-v, \end{cases} \begin{cases} x=\frac{u+v}{2}, \\ y=\frac{u-v}{2}. \end{cases}$

В силу полученных соотношений исходная система примет вид

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = 10 \text{ или}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{u^2 + v^2}{2} = 10 \text{ и } 3x - y = 3 \cdot \frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2} = \\ = \frac{2u+4v}{2} = u+2v; \text{ следовательно, имеем систему}$$

$$\begin{cases} v^3 = u + 2v, \\ u^2 + v^2 = 20, \end{cases} \begin{cases} u = v^3 - 2v, \\ (v^3 - 2v)^2 + v^2 = 20, \end{cases} \text{ упростим II урав-}$$

нение полученной системы:

$$v^6 - 4v^4 + 4v^2 + v^2 = 20, \text{ или } v^6 - 4v^4 + 5v^2 - 20 = 0, \text{ или } v^4(v^2 - 4) + 5(v^2 - 4) = 0, (v^4 + 5)(v^2 - 4) = 0.$$

Так как $v^4 + 5 > 0$ при любом $v \in \mathbb{R}$, то $v^2 - 4 = 0$, $v^2 = 4$, откуда $v = \pm 2$.

Если $v_1 = 2$, то $u_1 = 2^3 - 2 \cdot 2 = 4$; если $v_2 = -2$, то $u_2 = -8 + 4 = -4$, тогда $3x - y = u + 2v$, или $3x - y = 4 + 4 = 8$ и $3x - y = -4 + 2 \cdot (-2) = -8$.

Получим две системы:

1) $\begin{cases} x-y=2, \\ 3x-y=8. \end{cases}$ Вычитая из II уравнения I, имеем:
 $2x = 6, x = 3$, тогда $y = x - 2 = 1$.

$$2) \begin{cases} x - y = -2, \\ 3x - y = -8; \end{cases} \text{аналогично } 2x = -6, x = -3, \text{ тогда } y = x + 2 = -1.$$

Следовательно, исходная система имеет две пары решений.

Ответ: (3; 1), (-3; -1).

Пример 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} - 3x + y = \frac{1}{3}, \\ \frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{91}{9}. \end{cases}$$

Решение

Заметим, что $x \neq 0$, $y \neq 0$, тогда получим

$$\begin{cases} 3(x^2 - 3xy + y^2) = y, \\ 9(x^4 + x^2y^2 + y^4) = 91x^3y^2. \end{cases} \quad (1)$$

Перемножим почленно левые и правые части системы (1):

$$27(x^2 - 3xy + y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) = 91x^3y^3. \quad (2)$$

Разделим обе части (2) на $x^3y^3 \neq 0$:

$$27 \cdot \frac{x^2 - 3xy + y^2}{xy} \cdot \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^2y^2} = 91 \text{ или}$$

$$27 \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 3 \right) \cdot \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 1 \right) = 91. \quad (3)$$

Теперь идея решения становится ясной.

Пусть $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t$, тогда $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = t^2 - 2$, и уравне-

ние (3) примет вид: $27(t - 3)(t^2 - 1) = 91$ или $27t^3 - 81t^2 - 27t - 10 = 0$.

Введем II подстановку: $3t = u$, тогда имеем

$$u^3 - 9u^2 - 9u - 10 = 0. \quad (4)$$

Заметим, что $u = 10$ — корень уравнения (4), тогда

$$u^2(u - 10) + u(u - 10) + (u - 10) = 0, \text{ или}$$

$(u - 10)(u^2 + u + 1) = 0$, откуда $u = 10$.

Уравнение $u^2 + u + 1 = 0$ не имеет действительных корней, так как $D < 0$.

Итак, $u = 10$, тогда $t = \frac{10}{3}$ и $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3}$.

Пусть $\frac{x}{y} = a$, тогда $3a^2 - 10a + 3 = 0$,

$$D/4 = 25 - 9 = 4^2 > 0,$$

$$a_{1,2} = \frac{5 \pm 4}{3}, \text{ откуда } a_1 = 3, a_2 = \frac{1}{3}.$$

Если $a = 3$, то $\frac{x}{y} = 3$; если $a = \frac{1}{3}$, то $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$.

Следовательно, имеем две системы:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{y} = 3, \\ 3(x^2 - 3xy + y^2) = y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ 3(9y^2 - 9y^2 + y^2) = y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y, \\ 3y^2 = y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ y(3y - 1) = 0, \end{cases} \quad \text{откуда имеем:}$$

$$a) \begin{cases} x = 3y, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Найденная пара $(0; 0)$ не удовлетворяет исходной системе, так как $x \neq 0, y \neq 0$.

$$б) \begin{cases} x = 3y, \\ 3y - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ 3y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{3}, \\ 3(x^2 - 3xy + y^2) = y; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x, \\ 3(x^2 - 9x^2 + 9x^2) = 3x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x, \\ 3x^2 = 3x; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x, \\ x(x - 1) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x, \\ x - 1 = 0, x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3, \\ x = 1. \end{cases}$$

Итак, исходная система имеет две пары решений.

Ответ: $(1; 3); (1; \frac{1}{3})$.

Пример 12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x(1-xy)}{y+x^3} = \frac{14}{5}, \\ \frac{y(1-xy)}{x+y^3} = \frac{21}{25}. \end{cases}$$

Решение

Запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} \frac{y+x^3}{x(1-xy)} = \frac{5}{14}, \\ \frac{x+y^3}{y(1-xy)} = \frac{25}{21}. \end{cases}$$

Вычтем из II уравнения I:

$$\frac{x+y^3}{y(1-xy)} - \frac{y+x^3}{x(1-xy)} = \frac{25}{21} - \frac{5}{14}, \text{ или}$$

$$\frac{x^2 + xy^3 - y^2 - x^3y}{xy(1-xy)} = \frac{35}{42}, \text{ или}$$

$$\frac{x^2(1-xy) - y^2(1-xy)}{xy(1-xy)} = \frac{5}{6},$$

$$\frac{(x^2 - y^2)(1-xy)}{xy(1-xy)} = \frac{5}{6} \text{ или } \frac{x^2 - y^2}{xy} = \frac{5}{6}, \text{ где } xy \neq 1.$$

Полученное уравнение запишем в виде $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}. (1)$

Пусть $\frac{x}{y} = t$, тогда (1) примет вид

$$t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6}, \text{ или } 6t^2 - 5t - 6 = 0, D = 169 = 13^2 > 0,$$

$t_{1,2} = \frac{5 \pm 13}{12}$, $t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = -\frac{2}{3}$; следовательно, получим две системы:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{2}, \\ \frac{y(1-xy)}{x+y^3} = \frac{21}{25}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y, \\ \frac{y\left(1 - \frac{3}{2}y^2\right)}{\frac{3}{2}y + y^3} = \frac{21}{25}. \end{cases}$$

Упростим II уравнение полученной системы, учитывая, что $y \neq 0$:

$$\frac{y\left(1 - \frac{3}{2}y^2\right)}{y\left(\frac{3}{2}y + y^3\right)} = \frac{21}{25} \quad \text{или} \quad \frac{1 - \frac{3}{2}y^2}{\frac{3}{2} + y^2} = \frac{21}{25}, \quad \frac{2 - 3y^2}{3 + 2y^2} = \frac{21}{25},$$

$50 - 75y^2 = 63 - 42y^2$, откуда $33y^2 = -13$ — нет корней, значит, система 1 не имеет решений.

$$2) \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{2}{3}, \\ \frac{y(1-xy)}{x+y^3} = \frac{21}{25}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y, \\ \frac{y\left(1 + \frac{2}{3}y^2\right)}{-\frac{2}{3}y + y^3} = \frac{21}{25}; \end{cases} \quad y \neq 0.$$

Упростим II уравнение системы: $\frac{1 + \frac{2}{3}y^2}{y^2 - \frac{2}{3}} = \frac{21}{25},$

$$\frac{3 + 2y^2}{3y^2 - 2} = \frac{21}{25} \quad \text{или} \quad 75 + 50y^2 = 63y^2 - 42,$$

$$13y^2 = 117; \quad y^2 = 9, \quad y_{1,2} = \pm 3.$$

Учитывая I уравнение $x = -\frac{2}{3}y$, получим

$$x_1 = -\frac{2}{3} \cdot 3 = -2, \quad x_2 = -\frac{2}{3} \cdot (-3) = 2.$$

Итак, исходная система имеет две пары решений.

Ответ: $(-2; 3), (2; -3)$.

Пример 13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x \left(\frac{1}{x^2 - y^2} + 1 \right) = 8, \\ 3y \left(\frac{1}{x^2 - y^2} - 1 \right) = 2. \end{cases}$$

Решение

Пусть $\frac{1}{x^2 - y^2} = t$, откуда $x^2 - y^2 = \frac{1}{t}$. (1)

Тогда данная система примет вид:

$$\begin{cases} 3x(t+1) = 8, \\ 3y(t-1) = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{8}{3(t+1)}, \\ y = \frac{2}{3(t-1)} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 = \frac{64}{9(t+1)^2}, \\ y^2 = \frac{4}{9(t-1)^2}. \end{cases}$$

Вычитая из I уравнения полученной системы II,

получим $x^2 - y^2 = \frac{64}{9(t+1)^2} - \frac{4}{9(t-1)^2}$, или, учитывая

(1), имеем $\frac{1}{t} = \frac{64}{9(t+1)^2} - \frac{4}{9(t-1)^2}$, или

$$\begin{aligned} 9(t+1)^2(t-1)^2 &= 64t(t-1)^2 - 4t(t+1)^2, \quad t \neq 0, \quad t \neq -1, \\ 9(t^2-1)^2 &= 64t(t^2-2t+1) - 4t(t^2+2t+1), \\ 9t^4 - 18t^2 + 9 &= 64t^3 - 128t^2 + 64t - 4t^3 - 8t^2 - 4t, \quad \text{или} \\ 9t^4 - 60t^3 + 118t^2 - 60t + 9 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как $t \neq 0$, то, разделив обе части (2) на $t^2 \neq 0$, получим

$$9t^2 - 60t + 118 - 60 \cdot \frac{1}{t} + 9 \cdot \frac{1}{t^2} = 0 \quad \text{или}$$

$$9 \left(t^2 + \frac{1}{t^2} \right) - 60 \left(t + \frac{1}{t} \right) + 118 = 0. \quad (3)$$

Пусть $t + \frac{1}{t} = z$, тогда $t^2 + \frac{1}{t^2} = z^2 - 2$, и уравнение (3) примет вид $9(z^2 - 2) - 60z + 118 = 0$,
 $9z^2 - 60z + 100 = 0$ или $(3z - 10)^2 = 0$, $3z - 10 = 0$,

$$3z = 10, z = \frac{10}{3}, \text{ тогда } t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}, 3t^2 - 10t + 3 = 0,$$

$$D/4 = 25 - 9 = 4^2 > 0, t_{1,2} = \frac{5 \pm 4}{3}, t_1 = 3, t_2 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Если } t = 3, \text{ то } x_1 = \frac{8}{3(3+1)} = \frac{2}{3}; y_1 = \frac{2}{3(3-1)} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Если } t = \frac{1}{3}, \text{ то } x_2 = \frac{8}{3\left(\frac{1}{3}+1\right)} = \frac{8}{4} = 2;$$

$$y_2 = \frac{2}{3\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \frac{2}{1-3} = -1.$$

Найденные пары удовлетворяют исходной системе.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right), (2; -1).$$

Пример 14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y^3} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} = 39, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Решение

Пусть $\frac{x}{y} = t$, тогда I уравнение системы примет вид $t^3 + t^2 + t = 39$. (1)

Заметим, что $t = 3$ — корень уравнения (1), тогда $t^2(t - 3) + 4t(t - 3) + 13(t - 3) = 0$ или $(t - 3)(t^2 + 4t + 13) = 0$, откуда $t = 3$.

Уравнение $t^2 + 4t + 13 = 0$ не имеет действительных корней, так как $D < 0$.

Итак, $t = 3$, тогда $\frac{x}{y} = 3$ или $x = 3y$.

Решая полученное уравнение со II уравнением исходной системы, имеем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x = 3y; \end{cases} \quad \begin{cases} 9y^2 + y^2 = 10, \\ x = 3y; \end{cases} \quad \begin{cases} 10y^2 = 10, \\ x = 3y; \end{cases}$$
$$\begin{cases} y^2 = 1, \\ x = 3y; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \pm 1, \\ x = \pm 3. \end{cases}$$

Ответ: $(-3; -1), (3; 1)$.

Пример 15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(4 - \frac{8y}{x+y}\right)^2 + \left(4 + \frac{8y}{x-y}\right)^2 = 68, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Решение

Упростим I уравнение системы:

$$\left(\frac{4x + 4y - 8y}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{4x - 4y + 8y}{x-y}\right)^2 = 68 \text{ или}$$

$$\left(\frac{4x - 4y}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{4x + 4y}{x-y}\right)^2 = 68;$$

$$16\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 + 16\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = 68,$$

$$4\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 + 4\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = 17, \quad x \neq \pm y \quad (1).$$

Пусть $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = t$, где $t > 0$, тогда (1) примет вид

$$\frac{4}{t} + 4t = 17 \text{ или } 4t^2 - 17t + 4 = 0, \quad D = 289 - 64 = 15^2 > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{17 \pm 15}{8}, t_1 = 4, t_2 = \frac{1}{4}.$$

Учитывая подстановку, имеем две системы:

$$1) \begin{cases} \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^2 = 4, & \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \pm 2, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases} \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 2, & \begin{cases} x+y = 2x-2y, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y, \\ 9y^2 + y^2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 3, \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = -2, & \begin{cases} y = -3x, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} y = -3x, \\ 10x^2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \mp 3, \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^2 = \frac{1}{4}, & \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \pm \frac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{2}, & \begin{cases} x = -3y, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3y, \\ y^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \mp 3, \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^2 = -\frac{1}{2}, & \begin{cases} y = 3x, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x, \\ x^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \pm 3, \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

Ответ: $(\pm 3; \pm 1), (\pm 1; \mp 3), (\mp 3; \pm 1), (\pm 1; \pm 3).$

Пример 16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1) = 21, \\ (x+1)(y+1) = 12. \end{cases}$$

Решение

Упростим I уравнение системы:

$$x^2y^2 - xy^2 + y^2 - x^2y + xy - y + x^2 - x + 1 = 21 \text{ или}$$

$$x^2y^2 - xy(x+y) - (x+y) + (x^2+y^2) + xy = 20,$$

$$x^2y^2 - xy(x+y) - (x+y) + (x+y)^2 - xy = 20. \quad (1)$$

Упростим II уравнение системы:

$$xy + x + y + 1 = 12, \text{ откуда } x + y = 11 - xy. \quad (2)$$

Подставляя значение (2) в (1), имеем

$$x^2y^2 - xy(11 - xy) - 11 + xy + (11 - xy)^2 - xy = 20,$$

$$3x^2y^2 - 33xy + 90 = 0 \text{ или } (xy)^2 - 11(xy) + 30 = 0,$$

$$\text{откуда } (xy)_1 = 5, (xy)_2 = 6.$$

Учитывая (2), получим две системы:

$$1) \begin{cases} x + y = 11 - xy, \\ xy = 5; \end{cases} \begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 5; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 5; \end{cases} \begin{cases} x = 5, \\ y = 1. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = 11 - xy, \\ xy = 6; \end{cases} \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 3; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases}$$

Следовательно, исходная система имеет 4 пары решений.

Ответ: (1; 5), (5; 1), (2; 3), (3; 2).

Пример 17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 - 2xy - 2y^2 + 3y = 1, \\ y^2 + y + 3xy = 15. \end{cases}$$

Решение

Идея решения системы заключается в следующем.

Рассматриваем I уравнение системы как квадратное относительно x :

$$4x^2 - 2yx - (2y^2 - 3y + 1) = 0,$$

$$D/4 = y^2 + 4(2y^2 - 3y + 1) = 9y^2 - 12y + 4 = (3y - 2)^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{y \pm (3y - 2)}{4}, \text{ откуда } x_1 = \frac{4y - 2}{4} = \frac{2y - 1}{2};$$

$$x_2 = \frac{-2y + 2}{4} = \frac{1 - y}{2}. \text{ Следовательно, имеем две системы:}$$

$$1) \begin{cases} x = \frac{2y-1}{2}, \\ y^2 + y + 3xy = 15; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{2y-1}{2}, \\ y^2 + y + \frac{3y(2y-1)}{2} = 15. \end{cases}$$

Упростим II уравнение полученной системы:
 $2y^2 + 2y + 6y^2 - 3y = 30, 8y^2 - y - 30 = 0,$

$$D = 1 + 960 = 961 = 31^2 > 0, y_{1,2} = \frac{1 \pm 31}{16},$$

$$y_1 = 2, y_2 = -\frac{15}{8}.$$

Учитывая I уравнение системы 1), имеем

$$x_1 = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$x_2 = \frac{2 \cdot \left(-\frac{15}{8}\right) - 1}{2} = \frac{-\frac{15}{4} - 1}{2} = -\frac{19}{8}.$$

Итак, исходная система имеет две пары решений.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{3}{2}; 2\right), \left(-\frac{19}{8}; -\frac{15}{8}\right).$$

Пример 18. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy - y^2 + y - 6 = 0, \\ x^2 + 2xy + y^2 - 4y - 12 = 0. \end{cases}$$

Решение

Нетрудно заметить, что из одного уравнения системы переменная x не выражается рационально через y и, наоборот, y через x . В данном случае легко исключить y^2 , для чего сложим почленно уравнения системы:

$$\begin{aligned} 2x^2 + xy - 3y - 18 &= 0 \text{ или} \\ (xy - 3y) + (2x^2 - 18) &= 0, \\ y(x - 3) + 2(x - 3)(x + 3) &= 0, \end{aligned}$$

$$(x-3)(y+2x+6)=0, \text{ откуда } x=3 \text{ или } y+2x+6=0.$$

Следовательно, имеем две системы:

$$1) \begin{cases} x^2 - xy - y^2 + y - 6 = 0, \\ x = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 - 3y - y^2 + y - 6 = 0, & \begin{cases} y^2 + 2y - 3 = 0, \\ x = 3. \end{cases} \end{cases}$$

Уравнение $y^2 + 2y - 3 = 0$ имеет корни $y_1 = -3, y_2 = 1$, тогда система 1) имеет две пары решений: $(3; -3), (3, 1)$.

$$2) \begin{cases} x^2 - xy - y^2 + y - 6 = 0, \\ y = -2x - 6. \end{cases}$$

Решая подстановкой, получим

$$x^2 + x(2x+6) - (2x+6)^2 - 2x - 6 - 6 = 0, \text{ или}$$

$$x^2 + 2x^2 + 6x - 4x^2 - 24x - 36 - 2x - 12 = 0, \text{ или}$$

$$x^2 + 20x + 48 = 0, D/4 = 100 - 48 = 52 > 0,$$

$$x_{3,4} = -10 \pm 2\sqrt{13}, \text{ тогда } y_{3,4} = -2(-10 \pm 2\sqrt{13}) - 6,$$

$$y_{3,4} = 14 \mp 4\sqrt{13}.$$

Таким образом, исходная система имеет 4 пары решений.

$$\text{Ответ: } (3; -3), (3; 1), (-10 \pm 2\sqrt{13}; 14 \mp 4\sqrt{13}).$$

Пример 19. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 28x^2 - 15y^2 - 10xy - 32x - 88y - 23 = 0, \\ 6x^2 - 12y^2 + 7xy + 20x - 71y - 52 = 0. \end{cases}$$

Решение

Идея решения системы заключается в следующем.

Умножим обе части II уравнения системы на 2:

$$12x^2 - 24y^2 + 14xy + 40x - 142y - 104 = 0. \quad (1)$$

Вычтем из I уравнения исходной системы уравнение (1):

$$16x^2 + 9y^2 - 24xy - 72x + 54y + 81 = 0 \text{ или}$$

$$(16x^2 - 24xy + 9y^2) - 18(4x - 3y) + 81 = 0,$$

$$(4x - 3y)^2 - 2 \cdot (4x - 3y) \cdot 9 + 9^2 = 0.$$

Как видим, левая часть полученного уравнения — квадрат разности:

$$(4x - 3y - 9)^2 = 0, \quad 4x - 3y - 9 = 0,$$

откуда $y = \frac{1}{3}(4x - 9)$ и II уравнение исходной системы примет вид

$$6x^2 - 12 \cdot \frac{1}{9}(4x - 9)^2 + \frac{7}{3}x(4x - 9) + 20x - \frac{71}{3}(4x - 9) - 52 = 0.$$

Умножим обе части полученного уравнения на 3:

$$18x^2 - 4(4x - 9)^2 + 7x(4x - 9) + 60x - 71(4x - 9) - 156 = 0 \text{ или}$$

$$18x^2 - 64x^2 + 288x - 324 + 28x^2 - 63x + 60x - 284x + 639 - 156 = 0,$$

$$18x^2 - x - 159 = 0, \quad D = 1 + 11448 = 11449 = 107^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 107}{36}, \text{ откуда } x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{106}{36} = -\frac{53}{18}.$$

$$\text{Так как } y = \frac{1}{3}(4x - 9), \text{ то } y_1 = \frac{1}{3}(12 - 9) = 1,$$

$$y_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{106}{9} - 9\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{187}{9}\right) = -\frac{187}{27}.$$

Таким образом, исходная система имеет две пары решений.

$$\text{Ответ: } (3; 1), \left(-\frac{53}{18}; -\frac{187}{27}\right).$$

Пример 20. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3y + xy^3 = \frac{15}{32}(x+y)^3, \\ x^4y + xy^4 = \frac{21}{64}(x+y)^4. \end{cases}$$

Решение

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} xy(x^3 + y^3) = \frac{15}{32}(x + y)^3, \\ xy(x^3 + y^3) = \frac{21}{64}(x + y)^4. \end{cases}$$

Так как $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ и $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$, то получим равносильную систему

$$\begin{cases} xy((x + y)^2 - 2xy) = \frac{15}{32}(x + y)^3, \\ xy((x + y)^3 - 3xy(x + y)) = \frac{21}{64}(x + y)^4. \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b, \end{cases}$ тогда получим систему:

$$\begin{cases} b(a^2 - 2b) = \frac{15}{32}a^3, \\ b(a^2 - 2b) = \frac{15}{32}a^3, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} b(a^3 - 3ab) = \frac{21}{64}a^4; \\ ab(a^2 - 3b) = \frac{21}{64}a^4. \end{cases} \quad (2)$$

Упростим уравнение (2): $a(b(a^2 - 3b) - \frac{21}{64}a^3) = 0$,

откуда $a = 0$ или $b(a^2 - 3b) - \frac{21}{64}a^3 = 0$.

1) Если $a = 0$, то из (1) имеем $b = 0$, тогда

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ xy = 0, \end{cases} \quad \text{откуда } x = 0, y = 0 - \text{одно из решений ис-}$$

ходной системы.

2) Если $b(a^2 - 3b) - \frac{21}{64}a^3 = 0$, то в силу (1) имеем

$$\text{систему } \begin{cases} b(a^2 - 2b) = \frac{15}{32}a^3, \\ b(a^2 - 3b) = \frac{21}{64}a^3. \end{cases}$$

Разделим уравнение (3) системы на (4):

$$\frac{b(a^2 - 2b)}{b(a^2 - 3b)} = \frac{15a^3}{32} \cdot \frac{64}{21a^3}, \text{ или } \frac{a^2 - 2b}{a^2 - 3b} = \frac{10}{7}, \text{ или}$$

$$10a^2 - 30b = 7a^2 - 14b, 3a^2 = 16b, \text{ откуда } b = \frac{3}{16}a^2.$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$\frac{3}{16}a^2 \left(a^2 - \frac{3}{8}a^2 \right) = \frac{15}{32}a^3, \text{ или } \frac{3}{16}a^2 \cdot \frac{5}{8}a^2 = \frac{15}{32}a^3,$$

$$\text{или } \frac{15}{16 \cdot 8}a^4 = \frac{15}{32}a^3, \text{ откуда } a^4 = 4a^3, \text{ или } a^3(a - 4) = 0,$$

откуда $a = 0$ или $a = 4$.

Случай $a = 0$ нами был рассмотрен.

$$\text{Если } a = 4, \text{ то } b = \frac{3}{16} \cdot 4^2 = 3. \text{ Итак, } a = 4, b = 3.$$

Учитывая подстановки, имеем

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x = 3, \\ y = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 3. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система имеет всего три пары решений.

Ответ: $(0; 0)$, $(3; 1)$, $(1; 3)$.

Задачи

Решить системы уравнений.

$$1. \begin{cases} (x+y)^2 = 9(x-y)^3, \\ xy = 2. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x^3y - xy^3 = 24, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 4(x+y), \\ 3x^2 - 2xy + 4y^2 = 5(x+y). \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ xy(x^2 + y^2) = 30. \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy + 12)(x + y) = 6. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x^4 + 3x^2y^2 + y^4 = 29, \\ x^3y + xy^3 = 10. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x(x+1)(2x^2 - 3y^2) = 12, \\ 2x + 4x^2 - 3y^2 = 14. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x^3 + y^3 = xy + 61, \\ x^2 + y^2 = xy + 13. \end{cases} \quad 9. \begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x^4y^2 + x^2y^4 = 20. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x^3 + 8y^3 = 27, \\ x^2 + 4y^2 = 9. \end{cases} \quad 11. \begin{cases} 4x^2 - 5xy + 24y - 44 = 0, \\ 5y^2 + 3xy - 12y - 8 = 0. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \frac{x(x+y^2)}{x^3 - y^3} = \frac{6}{7}, \\ \frac{y(x^2 + y)}{x^3 - y^3} = \frac{5}{7}. \end{cases} \quad 13. \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{5}{12}xy, \\ \frac{xy + 1}{xy - 1} = \frac{2x}{3y}. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x + \frac{x-y}{x^2 + y^2} = 2, \\ y = \frac{4(x+y)}{x^2 + y^2}. \end{cases} \quad 15. \begin{cases} \frac{7-y^2}{x^2 - 13} = 2, \\ x^3 + 33y = y^3 + 24x. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13, \\ x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 = 1. \end{cases}$$

17.
$$\begin{cases} xy + \frac{y}{x} = \frac{20}{39}(x^2 + y^2), \\ xy - \frac{x}{y} = \frac{9}{26}(x^2 + y^2). \end{cases}$$
18.
$$\begin{cases} xy(x^2 + 1)(y^2 + 1) = 300, \\ (x^2 - 1)(y^2 - 1) = 24. \end{cases}$$
19.
$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 2y^2 - 7x + 13y - 9 = 0, \\ x^2 + xy - 6y^2 - x + 2y = 0. \end{cases}$$
20.
$$\begin{cases} (x+1)^2(y+1)^2 = 18xy, \\ (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 5xy. \end{cases}$$

§ 41. Иррациональные алгебраические уравнения и системы уравнений

1. Иррациональные уравнения

Пример 1. Решить уравнение $(2-x)(4-\sqrt{x^2-16})=8$.

Решение

Раскроем скобки:

$$8 - 4x - 2\sqrt{x^2 - 16} + x\sqrt{x^2 - 16} = 8 \text{ или}$$

$$4x = \sqrt{x^2 - 16}(x - 2). \quad (1)$$

Возведем обе части (1) в квадрат:

$$16x^2 = (x^2 - 16)(x - 2)^2, \text{ или } 16x^2 = x^2(x - 2)^2 - 16(x - 2)^2, \\ 16(x^2 + (x - 2)^2) = x^2(x - 2)^2, \text{ или} \\ 16(2x^2 - 4x + 4) = (x^2 - 2x)^2, 32(x^2 - 2x + 2) = (x^2 - 2x)^2. \quad (2)$$

Пусть $x^2 - 2x = y$, тогда (2) примет вид

$$32(y + 2) = y^2 \text{ или } y^2 - 32y - 64 = 0, D/4 = 256 + 64 = \\ = 320 > 0. y_{1,2} = 16 \pm \sqrt{320} = 16 \pm 4\sqrt{5}.$$

С учетом подстановки имеем два уравнения:

$$1) x^2 - 2x = 16 + 4\sqrt{5},$$

$$x^2 - 2x - 4(4 + \sqrt{5}) = 0,$$

$$D/4 = 1 + 4(4 + \sqrt{5}) = 17 + 4\sqrt{5} > 0,$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{17 + 4\sqrt{5}}.$$

Оба корня удовлетворяют условию $x^2 - 16 \geq 0$.

$$2) x^2 - 2x = 16 - 4\sqrt{5},$$

$$x^2 - 2x - 4(4 - \sqrt{5}) = 0,$$

$$D/4 = 1 + 4(4 - \sqrt{5}) = 17 - 4\sqrt{5} > 0.$$

$$x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{17 - 4\sqrt{5}}.$$

Так как $\sqrt{17 - 4\sqrt{5}} \approx 2,84$, то корни $x_{3,4}$ не удовлетворяют условию $x^2 - 16 \geq 0$.

Ответ: $1 \pm \sqrt{17 + 4\sqrt{5}}.$

Пример 2. Решить уравнение $x\sqrt{x} = 2(x-1)(8x^2 - 17x + 8)$.

Решение

Довольно сложное уравнение. Идея решения пока неясна. Запишем уравнение в виде

$$x\sqrt{x} = (x-1)(16x^2 - 34x + 16), \text{ или}$$

$$x\sqrt{x} = (x-1)(16(x-1)^2 - 2x), \text{ или}$$

$$x\sqrt{x} = 16(x-1)^3 - 2x(x-1), \text{ где } x \geq 0.$$

Заметим, что $x = 1$ не является корнем уравнения, тогда, разделив обе части полученного уравнения на $(x-1)^3 \neq 0$, имеем

$$\frac{x\sqrt{x}}{(x-1)^3} = 16 - \frac{2x}{(x-1)^2} \text{ или}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)^3 = 16 - 2\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)^2. \quad (1)$$

Теперь идея решения становится ясной.

Пусть $\frac{\sqrt{x}}{x-1} = y$, тогда (1) примет вид

$$y^3 = 16 - 2y^2 \text{ или } y^3 + 2y^2 - 16 = 0. \quad (2)$$

Заметим, что $y = 2$ — корень уравнения (2), тогда $y^2(y - 2) + 4(y^2 - 4) = 0$ или $(y - 2)(y^2 + 4y + 8) = 0$, откуда $y = 2$ — единственный корень уравнения (2), так как уравнение $y^2 + 4y + 8 = 0$ не имеет действительных корней ($D < 0$).

Если $y = 2$, то $\frac{\sqrt{x}}{x-1} = 2$, или $\sqrt{x} = 2(x-1)$,

$$\begin{cases} x = 4(x-1)^2, \\ x \geq 1 \end{cases} \text{ или } 4x^2 - 9x + 4 = 0, D = 81 - 64 = 17 > 0.$$

$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{8}$; так как $x \geq 1$, то $x = \frac{1}{8}(9 + \sqrt{17})$ — единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{8}(9 + \sqrt{17})$.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = x^2 - 8x + 18$.

Решение

Способ 1

Пусть $f_1(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$ и $f_2(x) = x^2 - 8x + 18$.

Заметим, что $f'_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} + \frac{(5-x)'}{2\sqrt{5-x}} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}{2\sqrt{x-3}\sqrt{5-x}}, \text{ где } 3 < x < 5.$$

$f'_1(x) = 0$, если $\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3} = 0$ или

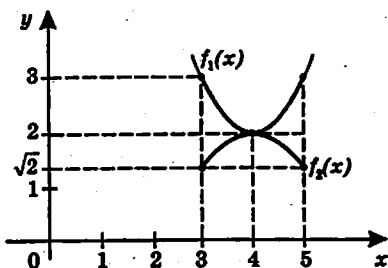
$\sqrt{5-x} = \sqrt{x-3}$, $5-x = x-3$, $2x = 8$, откуда $x = 4$, тогда $f_1(4) = 2$. Итак, $f_1(x) \leq 2$.

Аналогично $f'_2(x) = (x^2 - 8x + 18)' = 2x - 4$; $f'_2(x) = 0$; $2x - 8 = 0$, откуда $x = 4$; $f_2(4) = 2$, значит, $f_2(x) \geq 2$.

Тогда равенство $f_1(x) = f_2(x) = 2$ возможно при $x = 4$.

Ответ: 4.

Способ 2 (графический)



Как видно из рисунка, $f_1(x) = f_2(x) = 2$ при $x = 4$.

Ответ: 4.

Пример 4. Решить уравнение

$$2x - \sqrt{x-20}(\sqrt{13+x}+5) = 24.$$

Решение

Запишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{x-20}(\sqrt{13+x}+5) = 2(x-12), \text{ где } x \geq 20.$$

Умножим обе части полученного уравнения на

$$\sqrt{13+x}-5:$$

$$\sqrt{x-20}(13+x-25) = 2(x-12)(\sqrt{13+x}-5),$$

$$\sqrt{x-20}(x-12) = 2(x-12)(\sqrt{13+x}-5), \text{ откуда}$$

$$(x-12)(\sqrt{x-20}-2(\sqrt{13+x}-5)) = 0.$$

1) $x-12=0$, $x=12$ — не удовлетворяет, так как $x \geq 20$.

$$2) \sqrt{x-20}+10 = 2\sqrt{13+x}, \text{ или}$$

$$x-20+20\sqrt{x-20}+100 = 4(13+x), \text{ или}$$

$$20\sqrt{x-20} = 3x-28, \text{ или } 400(x-20) = (3x-28)^2,$$

$$9x^2-168x+784 = 400x-8000, \text{ или}$$

$$9x^2-568x+8784 = 0, D/4 = 284^2 - 9 \cdot 8784 = 80656 - 79056 = 1600 = 40^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{284 \pm 40}{9}, x_1 = 36, x_2 = \frac{244}{9} = 27\frac{1}{9}.$$

Найденные корни удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $27\frac{1}{9}$; 36.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{x+8\sqrt{x}} - \sqrt{x-8\sqrt{x}} = 4\sqrt{x^2-64x}.$$

Решение

Заметим, что $x=0$ — корень данного уравнения.

Пусть $x \neq 0$, тогда, возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$x+8\sqrt{x}+x-8\sqrt{x}-2\sqrt{x^2-64x}=16\sqrt{x^2-64x}, \text{ или}$$

$$2x-2\sqrt{x^2-64x}=16\sqrt{x^2-64x}, \text{ или}$$

$$x-\sqrt{x^2-64x}=8\sqrt{x^2-64x}.$$

Вновь возведя обе части уравнения в квадрат, имеем

$$x^2-2x\sqrt{x^2-64x}+x^2-64x=64\sqrt{x^2-64x},$$

$$x^2-x\sqrt{x^2-64x}-32x=32\sqrt{x^2-64x},$$

$$x^2-32x=(x+32)\sqrt{x^2-64x}, \text{ или}$$

$$\frac{\sqrt{x^2-64x}}{x} = \frac{x-32}{x+32}, \text{ или } \frac{x^2-64x}{x^2} = \frac{(x-32)^2}{(x+32)^2}.$$

Вычтем по 1 из обеих частей полученного уравнения:

$$\frac{x^2-64x}{x^2} - 1 = \frac{(x-32)^2}{(x+32)^2} - 1, \text{ или}$$

$$\frac{x^2-64x-x^2}{x^2} = \frac{(x-32)^2-(x+32)^2}{(x+32)^2}, x \neq 0, \text{ или}$$

$$\frac{-64x}{x^2} = \frac{(x-32-x-32)(x-32+x+32)}{(x+32)^2},$$

$$\frac{-64}{x} = \frac{-64 \cdot 2x}{(x+32)^2} \text{ или } \frac{1}{x} = \frac{2x}{(x+32)^2}, \text{ или}$$

$2x^2 = (x + 32)^2$, $\sqrt{2} x = \pm(x + 32)$, откуда:

1) $\sqrt{2} x = x + 32$, $(\sqrt{2} - 1)x = 32$,

$x = \frac{32}{\sqrt{2} - 1}$ или $x = 32(\sqrt{2} + 1)$;

2) $\sqrt{2} x = -(x + 32)$, $(\sqrt{2} + 1)x = -32$,

$x = -\frac{32}{\sqrt{2} + 1}$ — не удовлетворяет, так как $x > 0$.

Таким образом, исходное уравнение имеет два кор-
ня.

Ответ: 0; $32(\sqrt{2} + 1)$.

Пример 6. Решить уравнение

$$(x - 1)\sqrt{x} + \sqrt{4 - x} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

Решение

Попытка решить это уравнение обычным способом, т. е. возведением обеих частей в квадрат, ни к чему хорошему не приводит.

Здесь мы применим идею решения, основанную на применении неравенства Коши-Буняковского, вернее, его частный случай:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}.$$

Заметим, что знак равенства выполняется в случае коллинеарности векторов (a_1, b_1) и (a_2, b_2) .

В нашем случае левая часть исходного уравнения запишется в виде

$$\begin{aligned} (x - 1)\sqrt{x} + 1 \cdot \sqrt{4 - x} &\leq \sqrt{(x - 1)^2 + 1} \cdot \sqrt{y + (4 - y)} = \\ &= 2\sqrt{(x - 1)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Из коллинеарности векторов $(x - 1; 1)$ и

$$(\sqrt{x}; \sqrt{4 - x}) \text{ следует } \frac{x - 1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{4 - x}}. \quad (1)$$

Из (1) следует, что $x > 0$, $x < 4$ и $x > 1$, т. е. $1 < x < 4$, тогда получим: $(x - 1)\sqrt{4 - x} = \sqrt{x}$, или

$$\begin{cases} (x-1)^2(4-x) = x, \\ 1 < x < 4; \end{cases}$$

$$4x^2 - 8x - 4 - x^3 + 2x^2 - x = x, \text{ или } x^3 - 6x^2 + 10x - 4 = 0. \quad (2)$$

Заметим, что $x = 2$ — корень уравнения (2), тогда $x^2(x-2) - 4x(x-2) + 2(x-2) = 0$,
 $(x-2)(x^2 - 4x + 2) = 0$,
откуда $x_1 = 2$ или $x^2 - 4x + 2 = 0$, $D/4 = 4 - 2 = 2 > 0$
 $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{2}$, $x_3 = 2 - \sqrt{2}$ (не удовлетворяет, так как $x > 0$).

Ответ: 2; $2 + \sqrt{2}$.

Пример 7. Решить уравнение

$$4(x-1)(2x^2 - 4x + 1)\sqrt{x(2-x)} = 1.$$

Решение

Решать это уравнение обычным способом, как иррациональное с соответствующими преобразованиями, приводит к уравнению 8-й степени, решить которое невероятно сложно, тем более, что неизвестно, являются ли корни (если они существуют) целыми или дробными числами.

Учитывая вышеизложенное, очень важно найти идею решения в виде, например, удачной подстановки:

$$x = 1 + \cos t, \text{ где } t \in [0; \pi], \text{ тогда получим}$$

$$x - 1 = \cos t, \quad 2x^2 - 4x + 1 = 2(x-1)^2 - 1 =$$

$$= 2 \cos^2 t - 1 = \cos 2t,$$

$$\sqrt{x(2-x)} = \sqrt{(1+\cos t)(2-1-\cos t)} =$$

$$= \sqrt{(1+\cos t)(1-\cos t)} =$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t, \text{ так как по условию } 0 \leq t \leq \pi \text{ и } \sin t > 0.$$

С учетом этих преобразований, получим

$$4 \cos t \cos 2t \sin t = 1, \text{ или } (2 \cos t \sin t) \cdot 2 \cos 2t = 1,$$

$$\sin 2t \cdot 2 \cos 2t = 1, \text{ или } 2 \sin 2t \cos 2t = 1, \sin 4t = 1,$$

$$4t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ откуда } t = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \text{ тогда}$$

$$x = 1 + \cos t = 2 \cos^2 \frac{t}{2} = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4} \right), n \in \mathbb{Z}.$$

Остается найти границы n , учитывая, что $0 \leq t \leq \pi$,

$$\text{тогда } 0 \leq \frac{t}{2} \leq \frac{\pi}{2}, \text{ или } 0 \leq \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4} \leq \pi, \quad 0 \leq \pi + 4\pi n \leq 16\pi, \quad 0 \leq 1 + 4n \leq 16, \quad -1 \leq 4n \leq 15, \quad -\frac{1}{4} \leq n \leq \frac{15}{4},$$

откуда $n = 0, 1, 2, 3$.

$$\text{Ответ: } 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4} \right), \text{ где } n = 0, 1, 2, 3.$$

Пример 8. Решить уравнение $16x(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} = 3$.

Решение

Довольно сложное уравнение, решить которое, не зная идеи решения, очень проблематично.

$$\text{Пусть } x = \operatorname{tg} \alpha, \text{ тогда } x^2 + 1 = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} > 0,$$

где $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$; $2x^2 + 1 = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1$, и данное уравнение примет вид:

$$16 \operatorname{tg} \alpha (2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1) \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = 3, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$16 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 \right) = 3, \text{ или}$$

$$\frac{16 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{2 \sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 3,$$

$16 \sin \alpha (1 + \sin^2 \alpha) = 3(1 - \sin^2 \alpha)^2$, или
 $3 \sin^4 \alpha - 16 \sin^3 \alpha - 6 \sin^2 \alpha - 16 \sin \alpha + 3 = 0$, откуда
 видно, что $\sin \alpha \neq 0$, тогда, разделив обе части полученного уравнения на $\sin^2 \alpha \neq 0$, получим:

$$3 \sin^2 \alpha - 16 \sin \alpha - 6 - \frac{16}{\sin \alpha} + \frac{3}{\sin^2 \alpha} = 0 \text{ или}$$

$$3\left(\sin^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) - 16\left(\sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha}\right) - 6 = 0. \quad (1)$$

Пусть $\sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} = y$, тогда $\sin^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} = y^2 - 2$ и уравнение (1) примет вид

$$3(y^2 - 2) - 16y - 6 = 0, \quad 3y^2 - 16y - 12 = 0,$$

$$D/4 = 64 + 36 = 10^2 > 0, \quad y_{1,2} = \frac{8 \pm 10}{3},$$

$$y_1 = 6, \quad y_2 = -\frac{2}{3}.$$

Учитывая подстановку, получим два уравнения:

$$1) \sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} = 6 \text{ или } \sin^2 \alpha - 6 \sin \alpha + 1 = 0,$$

$$D/4 = 9 - 1 = 8 > 0, \quad (\sin \alpha)_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}, \text{ откуда}$$

$\sin \alpha = 3 + 2\sqrt{2}$ (не удовлетворяет, так как

$|\sin \alpha| \leq 1$) и $\sin \alpha = 3 - 2\sqrt{2}$.

$$\text{Но } x = \operatorname{tg} \alpha, \text{ тогда } x^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{(3 - 2\sqrt{2})^2}{1 - (3 - 2\sqrt{2})^2} = \frac{17 - 12\sqrt{2}}{12\sqrt{2} - 16} =$$

$$= \frac{(17 - 12\sqrt{2})(12\sqrt{2} + 16)}{144 \cdot 2 - 256} =$$

$$= \frac{204\sqrt{2} - 288 + 272 - 192\sqrt{2}}{32} = \frac{12\sqrt{2} - 16}{32} =$$

$$= \frac{2(3\sqrt{2} - 4)}{16}, \text{ откуда } x = \pm \frac{1}{4} \sqrt{2(3\sqrt{2} - 4)}.$$

Из исходного уравнения следует, что $x > 0$ (так как

$$2x^2 + 1 > 0 \text{ и } x^2 + 1 > 0), \text{ тогда } x = \frac{1}{4} \sqrt{2(3\sqrt{2} - 4)}.$$

2) $\sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} = -\frac{2}{3}$ или $3 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha + 3 = 0$ — нет корней, так как $D/4 = 1 - 9 = -8 < 0$.

Итак, исходное уравнение имеет единственный корень $x = \frac{1}{4} \sqrt{2(3\sqrt{2} - 4)}$.

Проверка показывает, что найденный корень удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ: $\frac{1}{4} \sqrt{2(3\sqrt{2} - 4)}$.

Замечание. Данное уравнение можно решать подстановкой $x = \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right)$ (см. № 65 (6), Шарыгин И. Ф.,

Голубев В. И. Факультативный курс по математике для 11-го класса. — М., 1991. С. 112).

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt{28x^2 - 28x + 11} +$
 $+ \sqrt{52x^2 - 52x + 113} = 38x - 38x^2 + \frac{5}{2}$.

Решение

Довольно сложное уравнение, и тем интересна идея решения, основанная на следующем:

$$28x^2 - 28x + 11 = 28 \left(x^2 - x + \frac{11}{28} \right) =$$

$$= 28 \left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{7} \right);$$

$$52x^2 - 52x + 113 = 52 \left(x^2 - x + \frac{113}{52} \right) =$$

$$= 52 \left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{25}{13} \right).$$

Значит, левую часть уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& \sqrt{28x^2 - 28x + 11} + \sqrt{52x^2 - 52x + 113} = \\
&= \sqrt{28\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{7}} + \sqrt{52\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{13}} = \\
&= \sqrt{28\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4} + \sqrt{52\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 100} \geq \\
&\geq \sqrt{4} + \sqrt{100} = 12 \text{ при любом } x \in R, \text{ причем знак ра-} \\
&\text{венства выполняется лишь при } x = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Преобразуем теперь правую часть исходного уравнения:

$$\begin{aligned}
38x - 38x^2 + \frac{5}{2} &= -38\left(x^2 - x - \frac{5}{76}\right) = \\
&= -38\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{24}{76} = -38\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 12 \leq 12 \text{ при} \\
&\text{любом } x \in R, \text{ причем знак равенства выполняется при} \\
&x = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, обе части исходного уравнения выполняются лишь при $x = \frac{1}{2}$, значит, уравнение имеет единственный корень $x = 0,5$.

Ответ: 0,5.

Пример 10. Решить уравнение $x = \sqrt{\sqrt{x} + 2} + 2$.

Решение

Запишем данное уравнение в виде

$$x - 2 = \sqrt{\sqrt{x} + 2}, \text{ где } x > 2.$$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат: $(x - 2)^2 = \sqrt{x} + 2$.

Пусть $f(x) = (x - 2)^2$, тогда $(x - 2)^2 = f(x)$ и $x - 2 = \sqrt{f(x)}$, $x = \sqrt{f(x)} + 2$ или $g(x) = \sqrt{x} + 2$ — обратная функция.

Имеем $f(x) = g(x)$; $f(x)$ — монотонно возрастающая на $[2; \infty)$ функция, значит, $f(x) = x$ или $(x - 2)^2 = x$, $x^2 - 5x + 4 = 0$, откуда $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ — не годится, так как $x > 2$.

Ответ: 4.

Пример 11. Решить уравнение

$$\sqrt{2(x^2 - 3x)} - 3\sqrt{x^2 - x + 4} = x + 3.$$

Решение

Попытка решать уравнение традиционным способом, т. е. возведением обеих частей в квадрат (предварительно уединив один из радикалов), лишь усложняет решение.

Идея решения основана на следующем приеме.

Умножим обе части уравнения на выражение, сопряженное левой части уравнения, т. е. на

$$2\sqrt{2(x^2 - 3x)} + 3\sqrt{x^2 - x + 4} = y > 0; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \left(2\sqrt{2(x^2 - 3x)} - 3\sqrt{x^2 - x + 4} \right) \times \\ & \times \left(2\sqrt{2(x^2 - 3x)} + 3\sqrt{x^2 - x + 4} \right) = y(x + 3), \text{ или} \end{aligned}$$

$$8(x^2 - 3x) - 9(x^2 - x + 4) = y(x + 3), \text{ или}$$

$$8x^2 - 24x - 9x^2 + 9x - 36 = y(x + 3),$$

$$-(x^2 + 15x + 36) = y(x + 3), \text{ или}$$

$$-(x + 3)(x + 12) = y(x + 3), \text{ откуда } x = -3 \text{ или}$$

$$y = -x - 12. \quad (2)$$

Легко убедиться, что $x = -3$ — корень исходного уравнения.

Складывая левые и правые части (2) (с учетом (1)) и исходного уравнения, имеем

$4\sqrt{2(x^2 - 3x)} = -9$ — нет корней, так как левая часть неотрицательна, а правая — отрицательна.

Ответ: -3.

Пример 12. Решить уравнение $(4x - 3)\sqrt{x - 5} + (4x - 13)\sqrt{x} = 135$.

Решение

С виду вроде бы обычное уравнение, однако «ключ» к решению найти не так-то просто.

Область определения уравнения $x \geq 5$.

Запишем данное уравнение в виде:

$$\begin{aligned} & (x\sqrt{x-5} - 5\sqrt{x-5}) + (3x\sqrt{x} - 15\sqrt{x}) + 3x\sqrt{x-5} + \\ & + x\sqrt{5} + 2\sqrt{x-5} + 2\sqrt{x} = 135, \\ & (x-5)\sqrt{x-5} + 3(x-5)\sqrt{x} + 3\sqrt{x-5} \cdot x + x\sqrt{x} + \\ & + 2(\sqrt{x-5} + \sqrt{x}) = 135, \\ & (\sqrt{x-5})^3 + 3(x-5)\sqrt{x} + 3\sqrt{x-5} \cdot x + x\sqrt{x} + \\ & + 2(\sqrt{x-5} + \sqrt{x}) - 135 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В представлении данного уравнения в виде (1) и заключается идея решения.

Заметим, что $(\sqrt{x-5})^3 + 3(x-5)\sqrt{x} + 3\sqrt{x-5} \cdot x + x\sqrt{x} = (\sqrt{x-5} + \sqrt{x})^3$, тогда уравнение (1) примет вид

$$(\sqrt{x-5} + \sqrt{x})^3 + 2(\sqrt{x-5} + \sqrt{x}) - 135 = 0. \quad (2)$$

Пусть $\sqrt{x-5} + \sqrt{x} = y$, где $y > 0$. (3)

Получим уравнение $y^3 + 2y - 135 = 0$. (4)

Можно проверить, что $y = 5$ — корень уравнения (4), тогда $(y^3 - 125) + 2(y - 5) = 0$ или

$$(y - 5)(y^2 + 5y + 25) + 2(y - 5) = 0,$$

$$(y - 5)(y^2 + 5y + 27) = 0,$$

откуда $y = 5$; уравнение $y^2 + 5y + 27 = 0$ не имеет действительных корней, так как $D < 0$.

Итак, $y = 5$ — единственный корень уравнения (4).

Учитывая подстановку (3), получим уравнение

$$\sqrt{x-5} + \sqrt{x} = 5, \quad \sqrt{x-5} = 5 - \sqrt{x} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x-5 = (5-\sqrt{x})^2, \\ x-5 \geq 0, \\ 5-\sqrt{x} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-5 = 25 - 10\sqrt{x} + x, \\ x \geq 5, \\ x \leq 25; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10\sqrt{x} = 30, \\ 5 \leq x \leq 25. \end{cases}$$

$\sqrt{x} = 3$, $x = 9$ — корень исходного уравнения.

Ответ: 9.

Пример 13. Решить уравнение

$$2\sqrt{x}(3x+1)(x+3) = (x+1)(x^2+14x+1).$$

Решение

Раскроем скобки в обеих частях уравнения:

$$2\sqrt{x}(3x^2+10x+3) = x^3+x^2+14x^2+14x+x+1 \text{ или}$$

$$x^3+15x^2+15x+1-6x^2\sqrt{x}-20x\sqrt{x}-6\sqrt{x}=0,$$

$$(x^3+3x^2+3x+1)-6\sqrt{x}(x^2+2x+1)+12x^2+12x-8x\sqrt{x}=0,$$

$$(x+1)^3-6\sqrt{x}(x+1)^2+12x(x+1)-8x\sqrt{x}=0,$$

$$(x+1)^3-3(x+1)^2 \cdot 2\sqrt{x}+3(x+1) \cdot 4x-8x\sqrt{x}=0,$$

$$((x+1)-2\sqrt{x})^3=0.$$

В этом и заключается идея решения.

Далее имеем $x+1-2\sqrt{x}=0$ или

$$(\sqrt{x}-1)^2=0, \sqrt{x}=1, \text{ отсюда } x=1.$$

Нетрудно проверить, что $x=1$ — корень исходного уравнения.

Ответ: 1.

Пример 14. Решить уравнение

$$\sqrt{4+x}+\sqrt{x}-\sqrt{4-x}=0.$$

Решение

Заметим, что $x \geq 0$, $4-x \geq 0$, т. е. $0 \leq x \leq 4$.

Очевидно, что $x=0$ — корень уравнения.

Докажем, что других корней уравнение не имеет.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{4+x} + \sqrt{x} - \sqrt{4-x}$.
Найдем производную $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4+x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{(4-x)'}{2\sqrt{4-x}}, \text{ или}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4+x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}}, \text{ или}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{4+x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{4-x}} \right) > 0$$

при $0 < x < 4$.

Следовательно, при любых допустимых значениях $f'(x) > 0$. Значит, функция $f(x)$ — возрастающая и $x = 0$ — единственный корень уравнения.

Ответ: 0.

Пример 15. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{x^2+2x}{x+1}} - \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{1}{x+1} = 1.$$

Решение

Запишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{\frac{x(x+2)}{x+1}} - \sqrt{\frac{x}{x+1}} = 1 - \frac{1}{x+1}, \text{ или}$$

$$\sqrt{\frac{x(x+2)}{x+1}} - \sqrt{\frac{x}{x+1}} = \frac{x}{x+1}, \text{ или}$$

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}} \left(\sqrt{x+2} - 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}} \right) = 0, \text{ откуда}$$

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}} = 0, \text{ или } \sqrt{x+2} - 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}} = 0.$$

Из I уравнения имеем $x_1 = 0$ — удовлетворяет исходному уравнению.

$$\text{Из II уравнения имеем } \sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{\frac{x}{x+1}}. \quad (1)$$

Возведем обе части уравнения (1) в квадрат:

$$x+2 = 1 + 2\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{x}{x+1}, \text{ или}$$

$$(x+2)(x+1) = (x+1) + 2\sqrt{x(x+1)} + x, \text{ или}$$

$x^2 + x + 1 = 2\sqrt{x(x+1)}$; пусть $\sqrt{x(x+1)} = y, y \geq 0$, тогда получим $y^2 + 1 = 2y$ или $(y-1)^2 = 0, y = 1$.

Учитывая подстановку, получим уравнение

$$x(x+1) = 1, x^2 + x - 1 = 0, D = 5 > 0, x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Найденные корни удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $0; \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$.

Замечание. Уравнение $x^2 + x + 1 = 2\sqrt{x(x+1)}$ можно решить иначе: $(\sqrt{x^2 + x} - 1)^2 = 0$ и т. д.

Пример 16. Решить уравнение

$$\frac{7}{x\sqrt{x^2+7}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{1}{6}.$$

Решение

Так как $\frac{7}{x\sqrt{x^2+7}} = \frac{\sqrt{x^2+7}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2+7}}$, то данное уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2+7}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2+7}} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{1}{6} \quad \text{или} \\ \frac{\sqrt{x^2+7}}{x} - 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+7}} + \frac{1}{6} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В этом и заключается идея решения.

Пусть $\frac{\sqrt{x^2+7}}{x} = y$, тогда уравнение (1) примет вид

$$y - \frac{2}{y} + \frac{1}{6} = 0 \quad \text{или} \quad 6y^2 + y - 12 = 0, D = 1 + 288 = 289 = 17^2 > 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm 17}{12}, y_1 = \frac{4}{3}, y_2 = -\frac{3}{2}.$$

Учитывая подстановку, имеем два уравнения:

$$1) \frac{\sqrt{x^2 + 7}}{x} = \frac{4}{3}; \text{ отсюда следует, что } x > 0,$$

так как $x^2 + 7 > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$, тогда

$$\frac{x^2 + 7}{x^2} = \frac{16}{9}, 16x^2 = 9x^2 + 63, 7x^2 = 63; x^2 = 9, x = \pm 3.$$

$x_1 = -3$ (не удовлетворяет, так как $x > 0$), $x_2 = 3$;

$$2) \frac{\sqrt{x^2 + 7}}{x} = -\frac{3}{2} \Rightarrow x < 0, \text{ тогда } \frac{x^2 + 7}{x^2} = \frac{9}{4},$$

$$9x^2 = 4x^2 + 28, 5x^2 = 28, x = \pm \frac{2}{5}\sqrt{35}, \text{ откуда}$$

$$x = -\frac{2}{5}\sqrt{35}, \text{ так как } x < 0.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{2}{5}\sqrt{35}; 3.$$

Пример 17. Решить уравнение $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}(x^2 + 3x - 1) = 3x^2 + x - 3.$

Решение

$$\text{Так как } \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0, \text{ то } -1 \leq x < 0, x \geq 1.$$

$$\text{Пусть } \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = t, \text{ где } t \geq 0, \text{ тогда данное уравне-}$$

ние примет вид

$$t(t^2x + 3x) = 3t^2x + x, \text{ или}$$

$$t^3x + 3tx - 3t^2x - x = 0, x \neq 0,$$

$$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0, \text{ или } (t - 1)^3 = 0, t - 1 = 0,$$

$$\text{откуда } t = 1, \text{ тогда } \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x}} = 1, x^2 - x - 1 = 0, D = 5 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}). \text{ Оба корня удовлетворяют ограниче-}$$

ниям $-1 \leq x < 0$ и $x \geq 1$, следовательно, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

Пример 18. Решить уравнение $\frac{3}{x} = 7x + \sqrt{1-x^2}$.

Решение

Из условия следует, что $x \neq 0$, $1-x^2 \geq 0$.

Запишем данное уравнение в виде:

$$3 = 7x^2 + x\sqrt{1-x^2}, \text{ или } 3 - 3x^2 = 4x^2 + x\sqrt{1-x^2}, \text{ или} \\ 3(1-x^2) = 4x^2 + x\sqrt{1-x^2}. \quad (1)$$

Так как $x = \pm 1$ не является корнем исходного уравнения, то, разделив обе части (1) на $1-x^2 \neq 0$, получим

$$3 = \frac{4x^2}{1-x^2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} \text{ или } 4 \cdot \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 3. \quad (2)$$

Пусть $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = y$, тогда уравнение (2) примет вид

$$4y^2 + y - 3 = 0, D = 1 + 48 = 49 > 0; y_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2};$$

$$y_1 = \frac{3}{4}, y_2 = -1.$$

Получим два уравнения:

$$1) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3}{4}; \begin{cases} \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{9}{16}, \\ x > 0, \\ 1-x^2 > 0; \end{cases}$$

$$16x^2 = 9 - 9x^2, 25x^2 = 9, x^2 = \frac{9}{25}, x = \frac{3}{5}.$$

$$2) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -1, \begin{cases} \frac{x^2}{1-x^2} = 1, \\ x < 1, \\ 1-x^2 > 0; \end{cases}$$

$$x^2 = 1 - x^2, 2x^2 = 1, x^2 = \frac{1}{2}, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{5}.$$

Пример 19. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{x+6} + \sqrt{x-6}}{2} = x + \sqrt{x^2 - 36} - 15.$$

Решение

Умножим обе части уравнения на 2:

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x-6} = 2x + 2\sqrt{x^2 - 36} - 30. \quad (1)$$

Пусть $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-6} = y$, где $y > 0$, тогда

$y^2 = 2x + 2\sqrt{x^2 - 36}$ и (1) с учетом подстановки примет вид $y = y^2 - 30$ или $y^2 - y - 30 = 0$, откуда $y_1 = 6, y_2 = -5$ (не удовлетворяет, так как $y > 0$).

Итак, $y = 6$, тогда $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-6} = 6$, или

$$\sqrt{x+6} = 6 - \sqrt{x-6}, \text{ или}$$

$$\begin{cases} x+6 = 36 - 12\sqrt{x-6} + x-6, \\ x \geq 6; \end{cases}$$

$$12\sqrt{x-6} = 24, \sqrt{x-6} = 2, x-6 = 4, x = 10.$$

Найденный корень удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ: 10.

Пример 20. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^3 + 1 + \left(\frac{2x^3 + 1}{x^3 - 1}\right)^3} = 4x.$$

Решение

Идея решения данного уравнения основана на использовании тождества Л. Эйлера:

$$a^3 + b^3 + \left(\frac{b(2a^3 + b^3)}{a^3 - b^3}\right)^3 = \left(\frac{a(a^3 + 2b^3)}{a^3 - b^3}\right)^3$$

(см. Макарычев Ю. Н. Алгебра - 8, № 240. С. 52. - М., 1989.)

Нетрудно заметить, что если в этом тождестве положить $b = 1$, то получим

$$a^3 + 1 + \left(\frac{2a^3 + 1}{a^3 - 1}\right)^3 = \left(\frac{a(a^3 + 2)}{a^3 - 1}\right)^3. \quad (1)$$

Как видно из (1), левая часть совпадает с подкоренным выражением исходного уравнения, тогда имеем:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x(x^3 + 2)}{x^3 - 1}\right)^3} = 4x, \text{ или } \frac{x(x^3 + 2)}{x^3 - 1} = 4x, \text{ или}$$

$$\begin{cases} x(x^3 + 2) = 4x(x^3 - 1) \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$x(4x^3 - 4 - x^3 - 2) = 0, \text{ откуда}$$

$$x_1 = 0 \text{ или } 4x^3 - x^3 - 6 = 0,$$

$$3x^3 = 6, x^3 = 2, x_2 = \sqrt[3]{2}.$$

Итак, исходное уравнение имеет два корня.

Ответ: 0; $\sqrt[3]{2}$.

Пример 21. Решить уравнение
$$\frac{\sqrt[3]{x-13} + \sqrt[3]{x-15}}{\sqrt[3]{x-13} - \sqrt[3]{x-15}} = x - 14.$$

Решение

Заметим, что $x = 15$ - корень данного уравнения.

Известно, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (свойство производной пропорции), тогда, полагая, что

$x \neq 15$, получим $\frac{\sqrt[3]{x-13}}{\sqrt[3]{x-15}} = \frac{x-13}{x-15}$ или

$$\frac{\sqrt[3]{x-13}}{\sqrt[3]{x-15}} \left(1 - \sqrt[3]{\left(\frac{x-13}{x-15} \right)^2} \right) = 0,$$

откуда имеем

$$1) \frac{\sqrt[3]{x-13}}{\sqrt[3]{x-15}} = 0, \sqrt[3]{x-13} = 0, x-13=0, x=13;$$

$$2) 1 - \sqrt[3]{\left(\frac{x-13}{x-15} \right)^2} = 0, \sqrt[3]{\left(\frac{x-13}{x-15} \right)^2} = 1 \text{ или}$$

$$\left(\frac{x-13}{x-15} \right)^2 = 1, \frac{x-13}{x-15} = \pm 1, \text{ откуда имеем:}$$

$$a) \frac{x-13}{x-15} = 1, x-13 = x-15 - \text{нет корней;}$$

$$6) \frac{x-13}{x-15} = -1, x-13 = -x+15, 2x=28, x=14.$$

Итак, исходное уравнение имеет всего 3 корня.

Ответ: 13, 14, 15.

Пример 22. Решить уравнение $\sqrt{x^3+36} - \sqrt{x^3+28} = 5x+17$.

Решение

Понятно, что возведение обеих частей уравнения в квадрат ни к чему не приведет. Умножим и разделим левую часть уравнения на $\sqrt{x^3+36} + \sqrt{x^3+28} \neq 0$ (сопряженное выражение):

$$\frac{(\sqrt{x^3+36}-\sqrt{x^3+28})(\sqrt{x^3+36}+\sqrt{x^3+28})}{\sqrt{x^3+36}+\sqrt{x^3+28}}=5x+17,$$

$$\text{или } \frac{x^3+36-x^3-28}{\sqrt{x^3+36}+\sqrt{x^3+28}}=5x+17, \text{ или}$$

$$\frac{8}{\sqrt{x^3+36}+\sqrt{x^3+28}}=5x+17.$$

Теперь идея решения становится ясной.

Заметим, что в левой части уравнения убывающая функция, а в правой — возрастающая, следовательно, оно может иметь не более одного корня и, как нетрудно проверить, $x = -3$ — корень последнего уравнения, а значит, исходное уравнение имеет единственный корень $x = -3$.

Ответ: $x = -3$.

Пример 23. Решить уравнение $2x - 6\sqrt[3]{x} = 5$.

Решение

Довольно сложное уравнение, если учесть, что оно не имеет целых корней.

Идея решения заключается в применении формулы

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b). \quad (1)$$

Запишем данное уравнение в виде $x - 3\sqrt[3]{x} = \frac{5}{2}$ или

$$x - 3\sqrt[3]{x} = 2 + \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Но $2 + \frac{1}{2} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3$, тогда с учетом (1) уравнение (2) примет вид

$$x - 3\sqrt[3]{x} = \left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 - 3\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right), \text{ или}$$

$$x - \left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 - 3\left(\sqrt[3]{x} - \left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right) = 0, \text{ или,}$$

обозначив $\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \alpha$, имеем

$$(\sqrt[3]{x})^3 - \alpha^3 - 3(\sqrt[3]{x} - \alpha) = 0,$$

$$(\sqrt[3]{x} - \alpha)(\sqrt[3]{x^2} + \alpha\sqrt[3]{x} + \alpha^2 - 3) = 0,$$

откуда имеем:

$$1) \sqrt[3]{x} - \alpha = 0, \sqrt[3]{x} = \alpha, x = \alpha^3, \text{ т. е.}$$

$$x = \left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3;$$

2) $\sqrt[3]{x^2} + \alpha\sqrt[3]{x} + \alpha^2 - 3 = 0$ — квадратное уравнение относительно $\sqrt[3]{x}$: $D = \alpha^2 - 4(\alpha^2 - 3) = 3(4 - \alpha^2)$.

Так как $\alpha = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > 2$, то $4 - \alpha^2 < 0$, так что уравнение (2) не имеет действительных корней. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень.

$$\text{Ответ: } \left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3.$$

Пример 24. Решить уравнение

$$\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{x-1} = \sqrt{1+x^3}.$$

Решение

Запишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^3-x^2} = \sqrt{1+x^3}, \text{ где } x \geq 1. \quad (1)$$

$$\text{Пусть } \begin{cases} \sqrt{1+x^2} = a, & \text{где } a > 0, \\ \sqrt{x^3-x^2} = b, & \text{где } b \geq 0, \end{cases} \text{ тогда}$$

$$\begin{cases} 1+x^2 = a^2, \\ x^3-x^2 = b^2 \end{cases} \text{ или, складывая уравнения системы,} \\ \text{получим } 1+x^3 = a^2 + b^2. \quad (2)$$

Тогда (1) примет вид $a - b = \sqrt{a^2 + b^2}$ или $(a - b)^2 = a^2 + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2$, $2ab = 0$, откуда $ab = 0$. Значит, $a = 0$ или $b = 0$.

Но $a > 0$, так как $a = \sqrt{1 + x^2} > 0$, тогда остается $b = 0$ или $x^3 - x^2 = 0$, $x^2(x - 1) = 0$, откуда $x_1 = 0$ (не удовлетворяет, так как $x \geq 1$); $x_2 = 1$.

Найденный корень удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ: 1.

Пример 25. Решить уравнение

$$x\sqrt[3]{x^3 - 37} \left(x - \sqrt[3]{x^3 - 37} \right) = 12.$$

Решение

Пусть $x^3 - 37 = y^3$ или $x^3 - y^3 = 37$. (1)

Тогда данное уравнение примет вид $xy(x - y) = 12$. (2)

Уравнения (1) и (2) решаем как систему

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 37, \\ xy(x - y) = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 - y^3 = 37, \\ 3xy(x - y) = 36 \end{cases} \text{ или, вычитая из}$$

I уравнения системы II, имеем $(x - y)^3 = 1$, откуда $x - y = 1$. Решая полученное уравнение с уравнением

(2), имеем равносильную систему
$$\begin{cases} x - y = 1, \\ xy(x - y) = 12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 12; \end{cases} \text{ откуда имеем две возможности:}$$

1) $\begin{cases} x = 4, \\ y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = -3, \\ y = -4. \end{cases}$

Нетрудно проверить, что $x_1 = 4$ и $x_2 = -3$ — корни исходного уравнения.

Ответ: -3; 4.

Пример 26. Решить уравнение

$$\sqrt[5]{(x - 1)(x + 30)} - \sqrt[5]{(x - 2)(x + 31)} = 2.$$

Решение

Пусть $(x-1)(x+30) = a^5$, $(x-2)(x+31) = b^5$, тогда данное уравнение примет вид $a - b = 2$. (1)

$$\text{Кроме того, } a^5 - b^5 = (x-1)(x+30) - (x-2)(x+31) = x^2 - x + 30x - 30 - x^2 + 2x - 31x + 62 = 32.$$

$$\text{Итак, } a^5 - b^5 = 32. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим систему уравнений

$$\begin{cases} a^5 - b^5 = 32, \\ a - b = 2. \end{cases}$$

$$\text{Но } a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = 32.$$

Учитывая (1), имеем

$$2(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = 32, \text{ или } a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = 16. \quad (3)$$

Так как $a - b = 2$, то $(a-b)^4 = 16$, или

$$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 = 16. \quad (4)$$

Вычитая из (3) (4), получим

$$5a^3b - 5a^2b^2 + 5ab^3 = 0, \text{ или } a^3b - a^2b^2 + ab^3 = 0, \text{ или } ab(a^2 - ab + b^2) = 0, \text{ откуда } ab = 0, \text{ или } a^2 - ab + b^2 = 0:$$

1) Если $ab = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$, тогда

$$(x-1)(x+30) = 0, \text{ откуда } x_1 = 1, x_2 = -30 \text{ или}$$

$$(x-2)(x+31) = 0, \text{ откуда } x_3 = 2, x_4 = -31.$$

2) Если $a^2 - ab + b^2 = 0$ или $(a-b)^2 + ab = 0$, то, учитывая (2), имеем $4 + ab = 0$.

$$\text{Получим систему } \begin{cases} 4 + ab = 0, \\ a - b = 2; \end{cases} \begin{cases} a = b + 2, \\ 4 + b(b+2) = 0; \end{cases}$$

$$b^2 + 2b + 4 = 0 - \text{нет корней, так как } D < 0.$$

Итак, исходное уравнение имеет всего 4 корня.

Ответ: -31; -30; 1; 2.

Пример 27: Решить уравнение

$$5\sqrt{x^2 + 9} + 4\sqrt{x^2 - 7} + 3\sqrt{x^2 + 20} + 2\sqrt{x^2 - 15} = \frac{57}{x+5}.$$

Решение

Заметим, что левая часть уравнения неотрицательна как сумма арифметических корней, тогда правая часть уравнения принимает лишь положительные значения. С увеличением x левая часть уравнения возрастает, а правая убывает, значит, исходное уравнение может иметь не более одного корня.

Нетрудно проверить, что $x = -4$ — корень уравнения.

Ответ: -4 .

2. Иррациональные системы

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y + \frac{7\sqrt{2x^2 - 5y + 3}}{10} = \frac{2x^2 + 1}{5}, \\ x^3 + 5y = 32. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем I уравнение системы:

$$10y + 7\sqrt{2x^2 - 5y + 3} = 2(2x^2 + 1), \text{ или}$$

$$7\sqrt{2x^2 - 5y + 3} = 2(2x^2 + 1) - 10y, \text{ или}$$

$$7\sqrt{2x^2 - 5y + 3} = 2(2x^2 - 5y + 3) - 4. \quad (1)$$

В представлении I уравнения исходной системы в виде (1) и заключается идея решения. Пусть

$$\sqrt{2x^2 - 5y + 3} = t, \text{ где } t \geq 0, \text{ тогда (1) примет вид}$$
$$7t = 2t^2 - 4 \text{ или } 2t^2 - 7t - 4 = 0, D = 49 + 32 = 9^2 > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm 9}{4}, t_1 = 4, t_2 = -0,5 \text{ (не удовлетворяет, так как } t \geq 0).$$

$$\text{Итак, } t = 4, \text{ тогда } \sqrt{2x^2 - 5y + 3} = 4, \text{ откуда}$$
$$2x^2 - 5y + 3 = 16 \text{ или } 2x^2 - 5y = 13. \quad (2)$$

Решая уравнение (2) с уравнением II исходной системы, получим равносильную систему

$$\begin{cases} x^3 + 5y = 32, \\ 2x^2 - 5y = 13. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, имеем

$$x^3 + 2x^2 - 45 = 0, \text{ или } (x^3 - 27) + 2(x^2 - 9) = 0,$$
$$(x - 3)(x^2 + 3x + 9 + 2x + 6) = 0, \text{ или}$$

$(x-3)(x^2+5x+15)=0$, откуда $x=3$. Уравнение $x^2+5x+15=0$ не имеет действительных корней, так как $D<0$.

Итак, $x=3$, тогда $2x^2-5y=13$, или $18-5y=13$, $5y=5$, $y=1$.

Ответ: (3; 1).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + (y-1)x^2 - \left(y + \frac{3}{y}\right)x - 3 = 0, \\ \sqrt{3x+xy} - \sqrt{1+xy} = 1. \end{cases}$$

Решение

Преобразуем I уравнение системы:

$$x^3y + x^2y^2 - x^2y - xy^2 - 3x - 3y = 0 \text{ или}$$

$$(x^2 - x)y^2 + (x^3 - x^2 - 3)y - 3x = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) рассматриваем как квадратное относительно переменной y :

$$D = (x^3 - x^2 - 3)^2 + 4(x^2 - x) \cdot 3x = (x^3 - x^2)^2 - 2(x^3 - x^2) \cdot 3 + 3^2 + 12x(x^2 - x) = (x^3 - x^2)^2 + 2(x^3 - x^2) \cdot 3 + 3^2 = (x^3 - x^2 + 3)^2 > 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{-(x^3 - x^2 - 3) \pm (x^3 - x^2 + 3)}{2(x^2 - x)}, \text{ откуда}$$

$$y_1 = \frac{3}{x^2 - x}, \quad y_2 = -x.$$

Учитывая II уравнение исходной системы, получим две системы:

$$1) \begin{cases} y = \frac{3}{x^2 - x}, \\ \sqrt{3x+xy} - \sqrt{1+xy} = 1, \end{cases} \quad \text{где } x \neq 0, x \neq 1.$$

Решим эту систему способом подстановки:

$$\sqrt{3x + \frac{3x}{x(x-1)}} - \sqrt{1 + \frac{3x}{x(x-1)}} = 1, \text{ или}$$

$$\sqrt{3x + \frac{3}{x-1}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{3}{x-1}}, \text{ или, возведя обе части в квадрат, получим}$$

Тогда $a_1 = 7 - 4 = 3$, $a_2 = 7 - \frac{37}{12} = \frac{47}{12}$.

Следовательно, $x_1 = \frac{1}{13} \cdot (32 - 45) = -1$;

$y_1 = \frac{1}{13} (48 - 9) = 3$;

$$x_2 = \frac{1}{13} \left(2 \cdot \left(\frac{37}{12} \right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{47}{12} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{13 \cdot 144} \cdot (2738 - 11045) = -\frac{639}{144} = -\frac{71}{16};$$

$$y_2 = \frac{1}{13} \left(3 \cdot \left(\frac{37}{12} \right)^2 - \left(\frac{47}{12} \right)^2 \right) = \frac{1898}{13 \cdot 144} = \frac{146}{144} = \frac{73}{72}.$$

Итак, исходная система имеет две пары решений.

Ответ: $(-1; 3)$, $\left(-\frac{71}{16}; \frac{73}{72}\right)$.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y + \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 7y} = \frac{x^2 - 2}{7}, \\ x^2(x^2y + 8) + 7 = \frac{x^2 - 7}{y}. \end{cases}$$

Решение

Упростим I уравнение системы:

$$\frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 7y} = \frac{1}{7} (x^2 - 7y - 2) \text{ или}$$

$$7 \sqrt{x^2 - 7y} = 2(x^2 - 7y - 2). \quad (1)$$

Теперь идея решения ясна. Пусть $\sqrt{x^2 - 7y} = t$, где $t \geq 0$, тогда получим уравнение $7t = 2(t^2 - 2)$ или $2t^2 - 7t - 4 = 0$, $D = 49 + 32 = 9^2 > 0$,

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm 9}{4}, t_1 = 4, t_2 = -\frac{1}{2} \text{ (не удовлетворяет, так как } t \geq 0).$$

Учитывая подстановку, имеем $x^2 - 7y = 16$. (2)

Умножим обе части (2) на y : $x^2y - 7y^2 = 16y$. (3)

Учитывая соотношения (2) и (3), упростим II урав-

$$\text{нение исходной системы: } x^2(x^2y + 8) + 7 = \frac{x^2 - 7}{y}, \text{ или}$$

$$(7y + 16)(7y^2 + 16y + 8) + 7 = \frac{7y + 16 - 7}{y}, y \neq 0,$$

$$y(7y + 16)(7y^2 + 16y + 8) + 7y = 7y + 16 - 7, \text{ или} \\ (7y^2 + 16y)(7y^2 + 16y + 8) = 9. \quad (4)$$

Пусть $7y^2 + 16y + 4 = u$, тогда $7y^2 + 16y = u - 4$ и $7y^2 + 16y + 8 = u + 4$, следовательно, (4) примет вид $(u - 4)(u + 4) = 9$ или $u^2 - 16 = 9$, $u^2 = 25$, $u_{1,2} = \pm 5$.

С учетом подстановки имеем два уравнения:

$$1) 7y^2 + 16y + 4 = 5, 7y^2 + 16y - 1 = 0,$$

$$D/4 = 64 + 7 = 71 > 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{1}{7}(-8 \pm \sqrt{71});$$

$$2) 7y^2 + 16y + 4 = -5 \text{ или } 7y^2 + 16y + 9 = 0,$$

$$D/4 = 64 - 63 = 1 > 0, y_{3,4} = \frac{-8 \pm 1}{7},$$

$$y_3 = -1, y_4 = -\frac{9}{7}.$$

Учитывая (2), имеем $x^2 - 7y = 16$, $x^2 = 7y + 16$, тогда:

$$a) x^2 = 7 \cdot \frac{1}{7}(-8 \pm \sqrt{71}) + 16, x^2 = 8 \pm \sqrt{71}, \text{ и так как}$$

$$x^2 \geq 0, \text{ то } x^2 = 8 + \sqrt{71}, \text{ откуда } x_{1,2} = \pm \sqrt{8 + \sqrt{71}};$$

$$б) x^2 = 7 \cdot (-1) + 16, x^2 = 9, x_{3,4} = \pm 3.$$

$$\text{Аналогично } x^2 = 7 \cdot \left(-\frac{9}{7}\right) + 16, x^2 = 7, x_{5,6} = \pm \sqrt{7}.$$

Все найденные пары удовлетворяют исходной системе.

$$\text{Ответ: } (\pm 3; -1), \left(\pm \sqrt{7}; -\frac{9}{7} \right), \\ \left(\pm \sqrt{8 + \sqrt{71}}; \frac{-8 + \sqrt{71}}{7} \right).$$

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{136y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\frac{32x}{y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}. \end{cases}$$

Решение

Перемножив обе части уравнений системы, полу-

чим $\sqrt{\frac{136 \cdot 32}{17}} = x + y - (x - y)$ или $\sqrt{\frac{17 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4}{17}} = 2y$,
откуда $2y = 16$, $y = 8$.

Чтобы найти значение x , нет необходимости под-
ставлять значение $y = 8$ в каждое уравнение исходной
системы. Проще всего возвести каждое уравнение в
квадрат, а затем сложить их:

$$\begin{cases} \frac{136y}{x} = x + y + 2\sqrt{x^2 - y^2} + x - y, \\ \frac{32x}{17y} = x + y - 2\sqrt{x^2 - y^2} + x - y. \end{cases}$$

Складывая почленно обе части системы, получим

$$\frac{136y}{x} + \frac{32x}{17y} = 4x \text{ или, разделив обе части полученно-}$$

$$\text{го уравнения на 4, имеем } \frac{34y}{x} + \frac{8x}{17y} = x.$$

Так как $y = 8$, то $\frac{34 \cdot 8}{x} + \frac{8x}{17 \cdot 8} = x$, $\frac{272}{x} + \frac{x}{17} = x$,

или $\frac{272}{x} = \frac{16}{17}x$, или, разделив обе части на 16, полу-

чим $\frac{17}{x} = \frac{x}{17}$, $x^2 = 17^2$, $x = \pm 17$.

Имеем две пары $(-17; 8)$ и $(17; 8)$.

Пара чисел $(-17; 8)$ не является решением, так как $x - y \geq 0$.

Ответ: $(17; 8)$.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{10x - y} + \sqrt{3x - y} = 3, \\ 2x + y + \sqrt{3x - y} = 5. \end{cases}$$

Решение

$$\text{Пусть } \begin{cases} 10x - y = a^3 & (1) \\ 3x - y = b^2 \quad b \geq 0. & (2) \\ 2x + y = c, & (3) \end{cases}$$

Тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} a + b = 3, \\ b + c = 5. \end{cases} \quad (4)$$

Складывая (1) и (3), а затем (2) и (3), получим

$$\begin{cases} 12x = a^3 + c & \cdot 5 \\ 5x = b^2 + c & \cdot 12 \end{cases} \quad \begin{cases} 60x = 5a^3 + 5c, \\ 60x = 12b^2 + 12c; \end{cases}$$

откуда $5a^3 + 5c = 12b^2 + 12c$, $5a^3 - 12b^2 - 7c = 0$.

Учитывая соотношения (4), имеем систему

$$\begin{cases} a + b = 3, \\ b + c = 5, \\ 5a^3 - 12b^2 - 7c = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 3 - b, \\ c = 5 - b, \\ 5(3 - b)^3 - 12b^2 - 7(5 - b) = 0. \end{cases}$$

Упростим III уравнение полученной системы:

$$5(27 - 27b + 9b^2 - b^3) - 12b^2 - 35 + 7b = 0;$$

$$5b^3 - 33b^2 + 128b - 100 = 0.$$

Заметим, что $b = 1$ — корень полученного уравнения, тогда $5b^2(b - 1) - 4(7b^2 - 32b + 25) = 0$;

$$5b^2(b - 1) - 4(b - 1)(7b^2 - 25) = 0,$$

$(b - 1)(5b^2 - 28b + 100) = 0$, откуда $b = 1$ — единственный корень.

Уравнение $5b^2 - 28b + 100 = 0$ не имеет корней, так как $D < 0$.

Если $b = 1$, то $a = 3 - 1 = 2$, $c = 5 - 1 = 4$, тогда из (2) и (3) имеем

$$\begin{cases} 3x - y = 1, \\ 2x + y = 4; \end{cases} \begin{cases} 5x = 5, \\ 3x - y = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ 3 - y = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Найденная пара удовлетворяет исходной системе.

Ответ: (1; 2).

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{x^2 - y^2} = 12, \\ y\sqrt{x^2 - y^2} = 48. \end{cases}$$

Решение

Представим I уравнение системы в виде

$$x + y - 12 = \sqrt{x^2 - y^2}. \quad (1)$$

Возведем обе части уравнения (1) в квадрат:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2(x + y) \cdot 12 + 144 = x^2 - y^2 \text{ или}$$

$$2y^2 + 2xy - 24x - 24y + 144 = 0,$$

$$y^2 + xy - 12x - 12y + 72 = 0. \quad (2)$$

Из II уравнения исходной системы имеем

$$\sqrt{x^2 - y^2} = \frac{48}{y}. \quad (3)$$

Подставляя значение (3) в I уравнение исходной системы, имеем

$$x + y - \frac{48}{y} = 12, \text{ или } y^2 + xy - 48 = 12y, \text{ или}$$

$$y^2 + xy = 12y + 48. \quad (4)$$

Уравнения (2) и (4) рассматриваем как систему

$$\begin{cases} y^2 + xy - 12x - 12y + 72 = 0, \\ y^2 + xy = 12y + 48; \\ 12y + 48 - 12x - 12y + 72 = 0, \\ y^2 + xy = 12y + 48; \\ 12x = 120, & \begin{cases} x = 10, \\ y^2 + 10y = 12y + 48; \end{cases} \\ x = 10, \\ y^2 - 2y - 48 = 0. \end{cases}$$

Из уравнения $y^2 - 2y - 48 = 0$ имеем $y_1 = 8$, $y_2 = -6$.
Но значение $y = -6$ не удовлетворяет II уравнению

исходной системы, так как $y\sqrt{x^2 - y^2} > 0$.

Таким образом, исходная система имеет единственное решение.

Ответ: (10; 8).

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^4 - 3y^2\sqrt{x} + 2x = 0, \\ y + 2\sqrt{x} = 6. \end{cases}$$

Решение

Преобразуем I уравнение системы:

$$y^4 - 2y^2\sqrt{x} - y^2\sqrt{x} + 2x = 0 \text{ или}$$

$$y^2(y^2 - 2\sqrt{x}) - \sqrt{x}(y^2 - 2\sqrt{x}) = 0, \text{ где } x \geq 0,$$

$$(y^2 - 2\sqrt{x})(y^2 - \sqrt{x}) = 0, \text{ откуда } y^2 - 2\sqrt{x} = 0 \text{ или}$$

$$y^2 - \sqrt{x} = 0, \text{ тогда получим две системы:}$$

$$1) \begin{cases} y^2 - 2\sqrt{x} = 0, \\ y + 2\sqrt{x} = 6. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, имеем $y^2 + y - 6 = 0$,
откуда $y_1 = -3$, $y_2 = 2$.

Подставляя найденные значения y в одно из уравнений системы 1), например во II, имеем:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} y = -3, \\ y + 2\sqrt{x} = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -3, \\ 2\sqrt{x} = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{81}{4}, \\ y = -3; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} y = 2, \\ y + 2\sqrt{x} = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ 2\sqrt{x} = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x} = 2, \\ y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 2. \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} y^2 - \sqrt{x} = 0 \\ y + 2\sqrt{x} = 6 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{matrix} \begin{cases} 2y^2 - 2\sqrt{x} = 0, \\ y + 2\sqrt{x} = 6. \end{cases} \end{aligned}$$

Складывая уравнения системы, имеем $2y^2 + y - 6 = 0$,

$$D = 1 + 48 = 7^2 > 0, y_{3,4} = \frac{-1 \pm 7}{4}, y_3 = \frac{3}{2}, y_4 = -2.$$

$$\text{с) } \begin{cases} y = \frac{3}{2}, \\ y + 2\sqrt{x} = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{2}, \\ 2\sqrt{x} = \frac{9}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{2}, \\ \sqrt{x} = \frac{9}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{81}{16} > 0, \\ y = \frac{3}{2}; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} y = -2, \\ 2\sqrt{x} = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2, \\ \sqrt{x} = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 16 > 0, \\ y = -2. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система имеет всего 4 пары решений.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{81}{4}; -3\right), (4; 2), \left(\frac{81}{16}; \frac{3}{2}\right), (16; -2).$$

Задачи

Решить уравнения (1–35):

$$1. \sqrt{x+1}(x^2 + x + 4) = 4 - 2x;$$

$$2. (2x - 1)(\sqrt{x} + 4x - 2) = x;$$

$$3. (3x + 1)^2 = 8\sqrt{x}(3x - 2\sqrt{x} + 1);$$

$$4. \sqrt{10 - x^2} \left(x + \sqrt{10 - x^2} \right) = \frac{12}{x};$$

$$5. x(3\sqrt{1+x} - 4\sqrt{1-x}) = 2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x});$$

$$6. x\sqrt{7-x} + 3\sqrt{x+1} = \sqrt{8(x^2+9)};$$

$$7. \sqrt{x} = x^2 - 4x + 2;$$

$$8. 2\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x} - \sqrt{x(x+3)} = x + 3;$$

$$9. \sqrt{(x+2)(x-3)} + \sqrt{x+2} - \sqrt{x-3} = x;$$

$$10. \sqrt[5]{7x-6} + \sqrt[5]{19x+13} = 3;$$

$$11. \sqrt{x^2-x+4} - \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{3x^2-3x+1};$$

$$12. \sqrt[3]{4x^2+7} + \sqrt{4x+7} = 5;$$

$$13. x + \sqrt{x^2-3x+2} = 3 - \sqrt{x-1} - \sqrt{x-2};$$

$$14. \frac{91(x+2)}{\sqrt{7x+2}} + \frac{7x^2+20}{7x+2} = 94;$$

$$15. \frac{x+1}{x^2+3} = \frac{\sqrt{x-3}+1}{x};$$

$$16. \sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{1 - \frac{1}{x}};$$

$$17. \frac{x^2-4x+9}{\sqrt{x}} = 3(x-3);$$

$$18. \sqrt[4]{x^4-81} + \sqrt[3]{x^4-17} + \sqrt{81-x^4} = 4;$$

$$19. x + \frac{4}{x^2} = 1 + \frac{4}{x}\sqrt{x-1};$$

$$20. \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-5}}{2} = \sqrt{x^2-2x-15} + x - 7;$$

$$21. \sqrt[3]{\frac{x+56}{x}} + 4\sqrt[3]{\frac{x+19}{x}} = 8;$$

$$22. \sqrt{13x^3-4} = 2 + \sqrt[3]{\frac{(x+2)^3+4}{13}};$$

$$23. 2x + \frac{4}{x}(2x-7)^3 = \sqrt{x} + 7;$$

$$24. (x-4)\sqrt[3]{\frac{x-4}{6-x}} + (6-x)\sqrt[3]{\frac{6-x}{x-4}} = 2;$$

$$25. x^3 - 1 = \sqrt{x}(3x^2 - 7x + 3);$$

$$26. \sqrt{x}(1-x+x^2) = 10(1-x)^3.$$

$$27. \sqrt[3]{x-2} \cdot \sqrt[3]{x-9} = \sqrt{x^2 - 11x + 10} + 2;$$

$$28. (\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1) = 2x;$$

$$29. \sqrt{x-3} + \sqrt[3]{2x+19} = 3 + \sqrt[4]{5-x};$$

$$30. \sqrt[4]{x^3-1} + \sqrt[4]{1-x^3} + \sqrt{8x^3-7} = 1;$$

$$31. x = 2 + 2\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x^3-x^2-4};$$

$$32. \sqrt{7x^2+x-3} - \sqrt{7x^2+x+1} = 2;$$

$$33. \sqrt[6]{6-2x} + \sqrt[4]{x-3} + \sqrt[3]{x+5} = 2;$$

$$34. \sqrt[4]{1-7x} + 3 - x = 0;$$

$$35. \sqrt{5-x^2} + \sqrt[4]{x^2+x-5} + \sqrt{3-x} = 3.$$

Решить системы уравнений:

$$1. \begin{cases} y\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{y^2-1} = \frac{5}{4}, \\ \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{y^2-1} + xy = \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} (y-1)\sqrt{1-x^2} - x^2 = 0, \\ 4(y-1)^2 + 3(y-1)\sqrt{1-x^2} = 3; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 19y^2 + 6\sqrt{x-19y^2+21} = x+30, \\ \frac{xy^2-16}{3} = \frac{2}{y^2} - \frac{38}{x} + \frac{3}{7}; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = 8; \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} \sqrt{3x+y+2} - \sqrt{x+y} = 2, \\ 2x+y = 4; \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} \sqrt{4x-3y} + 3\sqrt{2+x-y} = 5, \\ 4\sqrt{2+x-y} + \sqrt{3x+y-4} = 9; \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{2y-3} = 3, \\ 2y+3x+5 = 2xy; \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{2x-y+2} = 4, \\ 3x+y = 14; \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+7} + \sqrt{y^2-7} = 7, \\ x^2+y^2 = 25; \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} \sqrt{xy} - \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \\ x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = 2. \end{cases}$$

§ 42. Тригонометрические уравнения

Пример 1. Решить уравнение $8 \cos^6 x - \cos^2 2x = 7$.

Решение

Известно, что $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, тогда $\cos^6 x = (\cos^2 x)^3 = \frac{1}{8}(1 + \cos 2x)^3$, значит, $8 \cos^6 x = (1 + \cos 2x)^3 = 1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x$, и исходное уравнение примет вид $1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x = 7$, или $\cos^2 2x + \cos 2x - 2 = 0$, откуда $\cos 2x = 1$ или $\cos 2x = -2$.

Если $\cos 2x = 1$, то $2x = 2\pi n$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos 2x = -2$, то корней нет, так как $|\cos 2x| \leq 1$.

Ответ: πn , $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Найти все решения уравнения

$$4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} = 4, \text{ принадлежащие отрезку } [1; 3].$$

Решение

Запишем данное уравнение в виде

$$4^{\sin^2 x} + 4^{1-\sin^2 x} = 4, \text{ или}$$

$$4^{\sin^2 x} + \frac{4}{4^{\sin^2 x}} = 4; \text{ пусть } 4^{\sin^2 x} = t, \text{ где } t > 0, \text{ тогда}$$

$$\text{получим уравнение } t + \frac{4}{t} = 4, \text{ или } t^2 - 4t + 4 = 0,$$

$$(t - 2)^2 = 0, t - 2 = 0, t = 2, \text{ тогда } 4^{\sin^2 x} = 2, \text{ или}$$

$$2^{2\sin^2 x} = 2, 2\sin^2 x = 1, \text{ или } 1 - \cos 2x = 1, \cos 2x = 0,$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ откуда } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{По условию } x \in [1; 3], \text{ т. е. } 1 \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \leq 3,$$

$$4 \leq \pi + 2\pi n \leq 12, 4 - \pi \leq 2\pi n \leq 12 - \pi \text{ или}$$

$$\frac{4 - \pi}{2\pi} \leq n \leq \frac{12 - \pi}{2\pi}, \text{ откуда } n = 1 - \text{единственное целое}$$

значение, принадлежащее отрезку $[1; 3]$.

$$\text{При } n = 1, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\pi}{4}.$$

Пример 3. Найдите все решения уравнения

$$4 - 5 \cos x - 2 \sin^2 x = 0, \text{ удовлетворяющие неравенству } \sin x \leq 0.$$

Решение

Запишем данное уравнение в виде

$$4 - 5 \cos x - 2(1 - \cos^2 x) = 0 \text{ или}$$

$$2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0,$$

$$D = 25 - 16 = 9 > 0, \cos x = \frac{5 \pm 3}{4}, \text{ откуда } \cos x = 2 -$$

$$\text{нет корней, } \cos x = \frac{1}{2}, \text{ откуда } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Для любого корня I серии $\sin x_1 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$,

а из II серии $\sin x_2 = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$.

Значит, для любого корня из II серии неравенство $\sin x \leq 0$ выполняется.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. Найти целые корни уравнения

$$\cos\left(\pi\left(5x - \sqrt{25x^2 - 80x + 200}\right)\right) = 1.$$

Решение

Из условия имеем $\pi\left(5x - \sqrt{25x^2 - 80x + 200}\right) = 2\pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$ или $5x - \sqrt{25x^2 - 80x + 200} = 2n$, откуда

$$\sqrt{25x^2 - 80x + 200} = 5x - 2n, \text{ где } 5x - 2n \geq 0.$$

Кроме того, $25x^2 - 80x + 200 > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$, так как $D/4 = 1600 - 5000 = -3400 < 0$ и $a = 25 > 0$.

Далее имеем $25x^2 - 80x + 200 = 25x^2 - 20nx + 4n^2$,

$$\text{или } 20nx - 80x = 4n^2 - 200, \text{ или } x = \frac{n^2 - 50}{5(n - 4)}.$$

По условию $x, n \in \mathbb{Z}$, тогда

$$5x = \frac{(n - 4)(n + 4)}{n - 4} - \frac{34}{n - 4} = n + 4 - \frac{34}{n - 4}, \text{ значит, } 34 \text{ делится нацело на } n - 4; \text{ при этом } n - 4 = \pm 1, \pm 2, \pm 17, \pm 34.$$

Нетрудно проверить, что условию удовлетворяет значение $n = 5$, тогда $x = -5$ и $n = -30$, при этом опять $x = -5$.

Ответ: -5 .

Пример 5. Решить уравнение

$$4 \cos^4\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 7 \cos 4x + \sin 2x + 10.$$

Решение

Известно, что $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$, тогда

$$4 \cos^4 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \left(2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right)^2 = \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \right)^2 = \\ = (1 + \sin 2x)^2.$$

Кроме того, $\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x$, и данное уравнение примет вид

$$(1 + \sin 2x)^2 = 7(1 - 2 \sin^2 2x) + \sin 2x + 10 \text{ или} \\ 1 + 2 \sin 2x + \sin^2 2x = 7 - 14 \sin^2 2x + \sin 2x + 10, \\ 15 \sin^2 2x + \sin 2x - 16 = 0; \text{ пусть } \sin 2x = t, \text{ где } |t| \leq 1, \\ \text{тогда получим } 15t^2 + t - 16 = 0; D = 1 + 960 = 961 =$$

$$= 31^2 > 0, t_{1,2} = \frac{-1 \pm 31}{30}, \text{ откуда } t_1 = 1, t_2 = -\frac{16}{15}.$$

Имеем два уравнения: 1) $\sin 2x = 1, 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$,

откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\sin 2x = -\frac{16}{15} < -1$ — нет корней.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{2} \sin^3 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{3} \right) = \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2x}{3} \right).$$

Решение

Применение формулы приведения к правой части уравнения выглядит в качестве «приманки», так как при этом уравнение значительно усложняется.

Пусть $\frac{\pi}{4} + \frac{x}{3} = y$, тогда $\frac{3\pi}{2} + \frac{2x}{3} = 2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{3} \right) + \pi = \\ = \pi + 2y$, и данное уравнение примет вид

$\sqrt{2} \sin^3 y = \sin(\pi + 2y)$ или $\sqrt{2} \sin^3 y = -\sin 2y$; но $\sin 2y = 2 \sin y \cos y$, тогда $\sqrt{2} \sin^3 y + 2 \sin y \cos y = 0$ или $\sin y (\sqrt{2} \sin^2 y + 2 \cos y) = 0$, откуда $\sin y = 0$ или

$$\sqrt{2} \sin^2 y + 2 \cos y = 0.$$

Если $\sin y = 0$, то $y = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, тогда, учитывая подстановку, имеем

$$\frac{\pi}{4} + \frac{x}{3} = \pi n, x = -\frac{3\pi}{4} + 3\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Если $\sqrt{2} \sin^2 y + 2 \cos y = 0$, то $\sqrt{2}(1 - \cos^2 y) + 2 \cos y = 0$ или $\sqrt{2} \cos^2 y - 2 \cos y - \sqrt{2} = 0$,
 $D/4 = 1 + 2 = 3 > 0$,

$$\cos y = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \cos y = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1 - \text{нет корней,}$$

$$\cos y = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \text{ откуда } y = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

тогда, учитывая подстановку, имеем

$$\frac{\pi}{4} + \frac{x}{3} = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = -\frac{3\pi}{4} \pm \frac{1}{3} \arccos \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{3\pi}{4} + 3\pi n$;

$$-\frac{3\pi}{4} \pm \frac{1}{3} \arccos \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 7. Решить уравнение $5 \cos x - \sqrt{3} = 4 \cos^3 x$.

Решение

Данное уравнение является кубическим относительно $\cos x$ и его можно было бы легко решить, если бы оно имело целые корни или хотя бы один целый корень.

Запишем данное уравнение в виде

$$2 \cos x - \sqrt{3} = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \text{ или}$$

$$2 \cos x - \sqrt{3} = \cos x (2 \cos x - \sqrt{3})(2 \cos x + \sqrt{3}) \text{ или}$$

$$(2 \cos x - \sqrt{3})(2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x - 1) = 0, \text{ откуда}$$

$$2 \cos x - \sqrt{3} = 0, \text{ или } 2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x - 1 = 0.$$

$$\text{Из I уравнения имеем } 2 \cos x = \sqrt{3}, \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{тогда } x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Из II уравнения имеем } D = 3 + 8 = 11 > 0,$$

$$\cos x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{11}}{4}, \cos x = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{4}, \text{ откуда}$$

$$x = \pm \arccos \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{11}}{4} < -1 - \text{нет корней.}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \pm \arccos \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{4}.$$

Пример 8. Решить уравнение

$$\sin^3 x + \sin^2 x - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Решение

$$\text{Так как } 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \text{ то данное уравнение}$$

примет вид

$$\begin{aligned} \sin^3 x + \sin^2 x - 1 - \cos x &= 0, \text{ или} \\ \sin x (1 - \cos^2 x) - (1 - \sin^2 x) - \cos x &= 0, \\ \sin x (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x - \cos x &= 0, \text{ или} \\ \sin x (1 - \cos x)(1 + \cos x) - \cos x (1 + \cos x) &= 0, \\ (1 + \cos x)(\sin x (1 - \cos x) - \cos x) &= 0, \text{ откуда имеем:} \\ 1) 1 + \cos x = 0, \cos x = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ 2) \sin x (1 - \cos x) - \cos x = 0 \text{ или} \\ \sin x - \cos x - \sin x \cos x &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнение (1) представим в виде

$$\begin{aligned} (1 - 2 \sin x \cos x) + 2(\sin x - \cos x) - 1 &= 0 \text{ или} \\ (\sin x - \cos x)^2 + 2(\sin x - \cos x) - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $\sin x - \cos x = y$, тогда (2) примет вид

$$y^2 + 2y - 1 = 0, D/4 = 1 + 1 = 2 > 0, y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2},$$

$$y_1 = -1 + \sqrt{2}, \text{ тогда, учитывая подстановку, имеем}$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} - 1, \text{ или } \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x =$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}, \text{ или } \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\pi}{4} - x = (-1)^n \arcsin \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{4} - (-1)^{n+1} \arcsin \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Если $y_2 = -1 - \sqrt{2}$, то $\sin x - \cos x = -1 - \sqrt{2}$ или

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} > 1 - \text{нет корней.}$$

Ответ: $\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{4} - (-1)^{n+1} \arcsin \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 9. Решить уравнение $2(\sin 3x - \cos 3x) =$

$$= 3 \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right).$$

Решение

Так как $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ и $\cos 3x =$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x, \text{ то данное уравнение примет вид}$$

$$2(3 \sin x - 4 \sin^3 x - 4 \cos^3 x + 3 \cos x) =$$

$$= \frac{3(\sin x + \cos x)}{\sin x \cos x}, \text{ где } \sin x \neq 0, \cos x \neq 0.$$

Далее имеем $2(3(\sin x + \cos x) - 4(\sin^3 x +$

$$+ \cos^3 x)) = \frac{3(\sin x + \cos x)}{\sin x \cos x},$$

$$2(\sin x + \cos x)(3 - 4(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)) = 3(\sin x + \cos x) \\ = \frac{\sin x \cos x}{\sin x \cos x}, \text{ откуда имеем:}$$

$$1) \sin x + \cos x = 0, \operatorname{tg} x + 1 = 0, \operatorname{tg} x = -1,$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2(3 - 4(1 - \sin x \cos x)) = \frac{3}{\sin x \cos x} \text{ или}$$

$$2(3 - 4 + 4 \sin x \cos x) \sin x \cos x = 3,$$

$$(2 \sin 2x - 1) \sin 2x = 3, 2 \sin^2 2x - \sin 2x - 3 = 0,$$

$$D = 1 + 24 = 25 = 5^2 > 0, \sin 2x = \frac{1 \pm 5}{4}, \sin 2x = \\ = 1,5 - \text{нет корней, } \sin 2x = -1,$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} + \pi n, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. Уравнение $\sin 2x = -1$ можно записать в виде $\sin 2x + 1 = 0$ или $(\sin x + \cos x)^2 = 0$, откуда $\sin x + \cos x = 0$, что совпадает с 1).

Пример 10. Решить уравнение $\cos 3x - \sin 2x - \sin 3x = 1$.

Решение

Запишем данное уравнение в виде

$$\cos 3x - \sin 3x = 1 + \sin 2x. \quad (1)$$

Но $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$,

$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$ и

$$1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2,$$

тогда (1) примет вид

$$\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x - 3 \cos^2 x \sin x + \sin^3 x =$$

$$= (\sin x + \cos x)^2, \text{ или}$$

$$(\cos^3 x + \sin^3 x) - 3 \cos x \sin x (\cos x + \sin x) =$$

$$= (\sin x + \cos x)^2,$$

$$(\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x) -$$

$$- 3 \cos x \sin x (\cos x + \sin x) = (\cos x + \sin x)^2, \text{ или}$$

$$(\cos x + \sin x)(1 - \cos x \sin x) - 3 \cos x \sin x (\cos x + \sin x) =$$

$$+ \sin x - (\cos x + \sin x)^2 = 0,$$

$$(\cos x + \sin x)(1 - 4 \cos x \sin x - (\cos x + \sin x)) = 0,$$

$(\cos x + \sin x)(1 - 2 \sin 2x - (\cos x + \sin x)) = 0$, откуда:

1) $\cos x + \sin x = 0$ — однородное уравнение I степе-

ни $1 + \operatorname{tg} x = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) $1 - 2 \sin 2x - (\cos x + \sin x) = 0$.

Пусть $\cos x + \sin x = y$.

Тогда $y^2 = 1 + \sin 2x$, откуда $\sin 2x = y^2 - 1$. (2)

Получим уравнение

$1 - 2(y^2 - 1) - y = 0$ или $2y^2 + y - 3 = 0$;

$D = 1 + 24 = 5^2 > 0$,

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{4}, y_1 = 1, y_2 = -\frac{3}{2}.$$

Заметим, что найти значения x из (3) проще, чем из (2), но, учитывая, что при этом могут получиться посторонние корни (и тогда нужна будет проверка корней, так как из (2) $\Rightarrow$ (3), но не наоборот), целесообразно значения y подставить в (2)

Если $y = 1$, то получим $\cos x + \sin x = 1$, или

$$\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1, \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ или}$$

$$\frac{\pi}{4} - x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \text{ откуда:}$$

$$\text{а) } \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \text{ т. е. } x = 2\pi n;$$

$$\text{б) } \frac{\pi}{4} - x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Если $y = -\frac{3}{2}$, то $\cos x + \sin x = -\frac{3}{2}$ или

$$\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{3}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{3}{2\sqrt{2}} < -1 - \text{нет корней.}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $2\pi n$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 11. Решить уравнение $\sin 9x + 2 \cos 6x = 2$.

Решение

Способ 1

Запишем данное уравнение в виде

$$\sin 9x = 2(1 - \cos 6x). \quad (1)$$

Так как $1 - \cos 6x = 2 \sin^2 3x$, то уравнение (1) примет вид $\sin 9x = 4 \sin^2 3x$. (2)

Вычтем от обеих частей (2) $\sin 3x$:

$$\sin 9x - \sin 3x = \sin 3x (4 \sin 3x - 1) \text{ или}$$

$$2 \sin 3x \cos 6x = \sin 3x (4 \sin 3x - 1).$$

Отсюда имеем:

$$1) \sin 3x = 0, 3x = \pi n, x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2 \cos 6x - 4 \sin 3x + 1 = 0.$$

Так как $\cos 6x = 1 - 2 \sin^2 3x$, то имеем

$$2(1 - 2 \sin^2 3x) - 4 \sin 3x + 1 = 0 \text{ или}$$

$$4 \sin^2 3x + 4 \sin 3x - 3 = 0, D/4 = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0,$$

$$\sin 3x = \frac{-2 \pm 4}{4}, \sin 3x = -\frac{1}{2}, 3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z},$$

$\sin 3x = -1,5$ — нет корней.

$$\text{Ответ: } \frac{\pi n}{3}; (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

Способ 2

Пусть $3x = y$, тогда данное уравнение примет вид

$$\sin 3y + 2 \cos 2y = 2; \text{ так как } \sin 3y = 3 \sin y - 4 \sin^3 y$$

и $\cos 2y = 1 - 2 \sin^2 y$, то получим

$$3 \sin y - 4 \sin^3 y + 2(1 - 2 \sin^2 y) = 2 \text{ или}$$

$$3 \sin y - 4 \sin^3 y - 4 \sin^2 y = 0,$$

$$\sin y \cdot (3 - 4 \sin^2 y - 4 \sin y) = 0, \text{ откуда:}$$

$$1) \sin y = 0, y = \pi n, \text{ т. е. } 3x = \pi n, x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) 3 - 4 \sin^2 y - 4 \sin y = 0, 4 \sin^2 y + 4 \sin y - 3 = 0,$$

$$D/4 = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0, \sin y = \frac{-2 \pm 4}{4}, \sin y = \frac{1}{2},$$

$$\sin y = -1,5.$$

Если $\sin y = \frac{1}{2}$, то $y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, т. е.

$$3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \text{ откуда } x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

Если $\sin y = -1,5$, то корней нет, так как $|\sin y| \leq 1$.

Ответ: $\frac{\pi n}{3}; (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Данное уравнение можно также решить, используя ограниченность функций $\sin x$ и $\cos x$. Левая часть уравнения не превосходит 2 и равна 2, если

$$\begin{cases} \sin 9x = 0, \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \text{ и т. д.}$$

Пример 12. Решить уравнение

$$16(4 \cos^6 x - 1) = 15 \sqrt[3]{2(7 + 15 \cos 2x)}.$$

Решение

Идея решения данного уравнения заключается в следующем. Известно, что «если функция $f(x)$ возрастает, то уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) = x$ — равносильны; если $f(x)$ убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ является следствием уравнения $f(x) = x$ » (см.: Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. Факультативный курс по математике. Решение задач. 11 класс. — М., 1991. С. 88).

Известно, что $2 \cos 2x = \cos^2 x - 1$, тогда

$$16(4 \cos^6 x - 1) = 15 \sqrt[3]{2(7 + 30 \cos^2 x - 15)}, \text{ или}$$

$$16(4 \cos^6 x - 1) = 15 \sqrt[3]{4(15 \cos^2 x - 4)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Пусть } \cos^2 x = k \geq 0, \text{ тогда } 16(4k^3 - 1) = \\ = 15 \sqrt[3]{4(15k - 4)}, \frac{4(4k^3 - 1)}{15} = \frac{1}{4} \sqrt[3]{4(15k - 4)} \text{ или} \\ \frac{4(1 - 4k^3)}{15} = \frac{1}{4} \sqrt[3]{4(4 - 15k)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Покажем, что левая и правая части (1) представляют собой взаимно-обратные функции.

$$\text{Пусть } \frac{4(1 - 4k^3)}{15} = f(x), \text{ тогда } 4(1 - 4k^3) = 15 \cdot f(k),$$

$$1 - 4k^3 = \frac{15}{4} f(k); 4k^3 = 1 - \frac{15}{4} f(k),$$

$$k^3 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{15}{4} f(k) \right), \text{ откуда } k = \frac{1}{4} \sqrt[3]{4(4 - 15f(k))}, \text{ т. е.}$$

$$g(k) = \frac{1}{4} \sqrt[3]{4(4 - 15k)} - \text{правая часть (1).}$$

Итак, $f(k) = g(k) \Rightarrow f(k) = k$, т. е. $\frac{4(1 - 4k^3)}{15} = k$,
 $16k^3 + 15k - 4 = 0, (16k^2 - 1)k + 4(4k - 1) = 0$,
 $(4k - 1)(4k^2 + k + 1) = 0$, откуда $k = \frac{1}{4}$.

Уравнение $4k^2 + k + 1 = 0$ не имеет действительных корней, так как $D < 0$.

Итак, $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ или $\frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{4}$, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$,

$$2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \text{ откуда } x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 13. Решить уравнение
 $\sin^6 2x + \cos^6 2x = \sin^2 2x \cos^2 2x$.

Решение

Упростим левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} \sin^6 2x + \cos^6 2x &= (\sin^2 2x)^3 + (\cos^2 2x)^3 = \\ &= (\sin^2 2x + \cos^2 2x)(\sin^4 2x - \sin^2 2x \cos^2 2x + \cos^4 2x) = \\ &= \sin^4 2x - \sin^2 2x \cos^2 2x + \cos^4 2x. \end{aligned}$$

Тогда данное уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \sin^4 2x - \sin^2 2x \cos^2 2x + \cos^4 2x &= \sin^2 2x \cos^2 2x, \\ \sin^4 2x - 2 \sin^2 2x \cos^2 2x + \cos^4 2x &= 0, \text{ или} \\ (\cos^2 2x - \sin^2 2x)^2 &= 0, \text{ или} \\ \cos^2 2x - \sin^2 2x &= 0, \text{ или } \cos 4x = 0, \end{aligned}$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 14. Решить уравнение

$$\cos 3x - \cos^3 x = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sin 2x.$$

Решение

Известно, что $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$, тогда получим $4 \cos^3 x - 3 \cos x - \cos^3 x = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot 2 \sin x \cos x$,

$$3 \cos^3 x - 3 \cos x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin x \cos x, \text{ или}$$

$$\cos^3 x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \cos x, \text{ или}$$

$$\cos x (\cos^2 x - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \cos x, \text{ откуда имеем:}$$

$$1) \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos^2 x - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x, \text{ или } \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \sin^2 x = 0,$$

$$\sin x \left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0, \text{ откуда } \sin x = 0, x = \pi n, \text{ или}$$

$$\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 15. Решить уравнение

$$\left(\cos \frac{x}{4} - 2 \sin 2x \right) \sin 2x + \left(1 - \sin \frac{x}{4} - 2 \cos 2x \right) \times \\ \times \cos 2x = 0.$$

Решение

$$\sin 2x \cos \frac{x}{4} - 2 \sin^2 2x + \cos 2x - \cos 2x \sin \frac{x}{4} - \\ - 2 \cos^2 2x = 0,$$

$$(\sin 2x \cos \frac{x}{4} - \cos 2x \sin \frac{x}{4}) + \cos 2x = 2(\sin^2 2x + \cos^2 2x), \sin(2x - \frac{x}{4}) + \cos 2x = 2 \text{ или}$$

$$\sin \frac{7x}{4} + \cos 2x = 2. \quad (1)$$

Так как $\sin \frac{7x}{4} \leq 1$, $\cos 2x \leq 1$, то равенство (1) будет иметь место, если одновременно будут выполняться равенства $\sin \frac{7x}{4} = 1$ и $\cos x = 1$.

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \sin \frac{7x}{4} = 1, \\ \cos x = 1; \end{cases} \begin{cases} \frac{7x}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = 2\pi k; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{4}{7} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), \\ x = 2\pi k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi + 8\pi n}{7}, \\ x = 2\pi k, \end{cases} \text{ где } n, k \in \mathbb{Z}.$$

Исключая x , имеем $\frac{2\pi + 8\pi n}{7} = 2\pi k$, или

$2\pi + 8\pi n = 14\pi k$, или $1 + 4n = 7k$, откуда

$$n = \frac{7k - 1}{4} = 2k - \frac{k + 1}{4}, n = 2k - \frac{k + 1}{4}, \text{ и так как } n \in \mathbb{Z},$$

то $\frac{k + 1}{4} = m$, откуда $k = 4m - 1$, $m \in \mathbb{Z}$, тогда

$$x = 2\pi k = 2(4m - 1)\pi.$$

Ответ: $2\pi(4m - 1)$, $m \in \mathbb{Z}$.

Пример 16. Решить уравнение

$$\sin 2x = 1 + 2\sqrt{2} \sin^4 4x + \sin^8 4x.$$

Решение

Прибавим по единице к обеим частям уравнения:

$$1 + \sin 2x = 2 + 2\sqrt{2} \sin^4 4x + \sin^8 4x \text{ или}$$

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = (\sqrt{2})^2 + 2 \sin^4 4x + (\sin^4 4x)^2.$$

Теперь видно, что левая и правая части полученного уравнения — полные квадраты:

$$(\sin x + \cos x)^2 = (\sqrt{2} + \sin^4 4x)^2. \quad (1)$$

Так как $\sqrt{2} + \sin^4 4x \geq \sqrt{2} > 0$, то из (1) имеем

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} + \sin^4 4x. \quad (2)$$

Итак, $\sqrt{2} + \sin^4 4x \geq \sqrt{2}$; кроме того $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right) \geq \sqrt{2}$. Следовательно, уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2}, \\ \sin 4x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \sqrt{2}, \\ \sin 4x = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = 1, \\ \sin 4x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{4} + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ 4x = \pi k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Для нахождения общего решения полученной системы решим в целых числах уравнение

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n = \frac{\pi k}{4}, \text{ или } \pi + 8\pi n = \pi k, 1 + 8n = k, \text{ тогда}$$

$$x = \frac{\pi}{4} k, \text{ или } x = \frac{\pi}{4} (1 + 8n) = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. Фактически мы получили решение I уравнения последней системы, которое содержит все решения II уравнения системы.

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 17. Решить уравнение

$$\sqrt{2 + \sin^2 4x} = \sin 3x - \cos 3x.$$

Решение

Заметим, что $\sqrt{2 + \sin^2 4x} \geq \sqrt{2}$, а $\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$, следовательно, имеем систему

$$\begin{cases} \sqrt{2 + \sin^2 4x} = \sqrt{2}, \\ \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin^2 4x = 0, \\ \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = \pi n, \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi n}{4}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}; \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Найдем общее решение полученной системы, для чего решим уравнение $\frac{\pi n}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}$ в целых числах:

$$3\pi n = 3\pi + 8\pi k, \text{ или } n = 1 + \frac{8k}{3}, \text{ откуда } k = 3m, m \in \mathbb{Z},$$

тогда $n = 1 + 8m$ и $x = \frac{\pi}{4}(8m + 1)$, или $x = 2\pi m + \frac{\pi}{4}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Пример 18. Решить уравнение

$$\sin x + 3 + \sin 3x = 2 \cos 2x.$$

Решение

Запишем уравнение в виде

$$(\sin x + \sin 3x) + 3 - 2 \cos 2x = 0,$$

$$2 \sin 2x \cos x + 3 - 2 \cos 2x = 0. \quad (1)$$

Идея дальнейшего упрощения уравнения (1) заключается в том, что выражения $2 \sin 2x \cos x$ и $2 \cos 2x$ дополняем до полных квадратов:

$$\begin{aligned}
 &(\cos^2 x + 2 \cos x \sin 2x + \sin^2 2x) + (\cos^2 2x - 2 \cos 2x + 1) - \cos^2 x + (\cos^2 2x + \sin^2 2x) = 0 \text{ или} \\
 &(\cos x + \sin 2x)^2 + (\cos 2x - 1)^2 + (1 - \cos^2 x) = 0, \\
 &(\cos x + \sin 2x)^2 + (\cos 2x - 1)^2 + \sin^2 x = 0. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Равенство (2) выполняется тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю, т. е. уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x + \sin 2x = 0, \\ \cos 2x - 1 = 0, \\ \sin x = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решением III уравнения системы (3) будет $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, что не удовлетворяет I уравнению. Следовательно, система (3), а значит, и исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Пример 19. Решить уравнение $\cos^4 x + \sin^{10} x = 1$.

Решение

Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то $\cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2$, тогда исходное уравнение запишется в виде

$$(1 - \sin^2 x)^2 + \sin^{10} x = 1 \text{ или}$$

$$1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^{10} x = 1,$$

$$\sin^4 x - 2 \sin^2 x + \sin^{10} x = 0,$$

$$\sin^2 x (\sin^2 x - 2 + \sin^8 x) = 0, \text{ откуда имеем:}$$

$$1) \sin^2 x = 0, \sin x = 0, x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin^2 x + \sin^8 x = 2.$$

Ввиду того, что $\sin^2 x \leq 1$, последнее равенство

$$\text{возможно, если } \begin{cases} \sin^2 x = 1, \\ \sin^8 x = 1, \end{cases} \text{ откуда } \sin^2 x = 1,$$

$$1 - \sin^2 x = 0, \cos^2 x = 0, \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi k; n, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 20. Решить уравнение $\cos x = \sin^2 \frac{3x}{4}$.

Решение

Применяя формулу понижения степени для правой части уравнения, получим

$$\cos x = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{3x}{2} \right) \text{ или}$$

$$2 \cos x = 1 - \cos \frac{3x}{2}. \text{ Но } \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \text{ и}$$

$$\cos \frac{3x}{2} = \cos 3 \cdot \left(\frac{x}{2} \right) = 4 \cos^3 \frac{x}{2} - 3 \cos \frac{x}{2}. \text{ Тогда имеем}$$

$$2 \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \right) = 1 - \left(4 \cos^3 \frac{x}{2} - 3 \cos \frac{x}{2} \right) \text{ или}$$

$$4 \cos^2 \frac{x}{2} + 4 \cos^3 \frac{x}{2} - 3 \cos \frac{x}{2} - 3 = 0,$$

$$4 \cos^2 \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + 1 \right) - 3 \left(\cos \frac{x}{2} + 1 \right) = 0,$$

$$\left(\cos \frac{x}{2} + 1 \right) \left(4 \cos^2 \frac{x}{2} - 3 \right), \text{ откуда получим:}$$

$$1) \cos \frac{x}{2} + 1 = 0, \cos \frac{x}{2} = -1,$$

$$\frac{x}{2} = \pi + 2\pi n, x = 2\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) 4 \cos^2 \frac{x}{2} - 3 = 0 \text{ или } 2(1 + \cos x) - 3 = 0,$$

$$2 \cos x = 1, \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } 2\pi + 4\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 21. Решить уравнение $\sin x = 2 \sin 47^\circ \cos 7^\circ$.

Решение

Рассмотрим правую часть уравнения.

Заметим, что функция $y = \cos x$ убывает на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

и, следовательно, $\cos 7^\circ > \cos 45^\circ$, тогда $\cos 7^\circ > \frac{\sqrt{2}}{2}$,

функция $y = \sin x$ возрастает на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и, следова-

тельно, $\sin 47^\circ > \sin 45^\circ > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значит, $2 \sin 47^\circ \cos 7^\circ > 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

Получаем $\sin x > 1$ — нет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 22. Решить уравнение $\sin\left(\frac{1}{47} \arcsin x\right) = 1$.

Решение

Имеем $\frac{1}{47} \arcsin x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$,

$\arcsin x = 47\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ или

$\arcsin x = 47\pi\left(\frac{1}{2} + 2n\right)$, и так как

$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} \leq 47\pi\left(\frac{1}{2} + 2n\right) \leq \frac{\pi}{2}$,

$-\frac{1}{2} \leq 47\left(\frac{1}{2} + 2n\right) \leq \frac{1}{2}$, или $-\frac{1}{2} - \frac{47}{2} \leq 47 \cdot 2n \leq \frac{1}{2} - \frac{47}{2}$,

$-24 \leq 84n \leq -23$, или $-\frac{12}{47} \leq n \leq -\frac{23}{84}$; так как $n \in \mathbb{Z}$, то последнее неравенство не имеет решений в целых числах, значит, данное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 23. Решить уравнение

$$x^2 + (x + 2) \cos \frac{\pi x}{6} = \frac{x + 10}{2}.$$

Решение

Пусть $\cos \frac{\pi x}{6} = t$, где $|t| \leq 1$, тогда имеем

$$x^2 + (x + 2)t = \frac{x + 10}{2}. \quad (1)$$

Преобразуем уравнение (1):

$$x^2 + xt + 2t = \frac{x + 10}{2} \text{ или } x^2 + tx - \frac{1}{2}x + 2t - 5,$$

$$x^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)x + (2t - 5) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) рассматриваем как квадратное относительно x с параметром t :

$$D = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - 4(2t - 5) = t^2 - t + \frac{1}{4} - 8t + 20 = t^2 - 9t + \frac{81}{4} = \left(t - \frac{9}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ следовательно, при любом } t \text{ имеем}$$

$$x^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)x + (2t - 5) = (x - x_1)(x - x_2), \quad (3)$$

где x_1 и x_2 — корни (2):

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - t \pm \left(t - \frac{9}{2} \right) \right) = \frac{1}{4} (1 - 2t \pm (2t - 9));$$

$$x_1 = -2, x_2 = -t + \frac{5}{2}, \text{ тогда (3) примет вид}$$

$$x^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)x + (2t - 5) = (x + 2)\left(x + t - \frac{5}{2}\right).$$

Имеем систему

$$\begin{cases} (x + 2)\left(x + t - \frac{5}{2}\right) = 0, \\ \cos \frac{\pi x}{6} = t; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2, \\ x + t = \frac{5}{2}, \\ t = \cos \frac{\pi x}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2, \\ x + \cos \frac{\pi x}{2} = \frac{5}{2}; \end{cases} \quad x + \cos \frac{\pi x}{2} = \frac{5}{2}, \text{ или}$$

$$\frac{5}{2} - x = \cos \frac{\pi x}{6}, \text{ или}$$

$$-1 \leq \frac{5}{2} - x \leq 1, \quad -1 - \frac{5}{2} \leq -x \leq 1, \text{ откуда}$$

$$-\frac{7}{2} \leq -x \leq -\frac{3}{2}, \text{ или } \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}.$$

$$\text{Кроме того, } 0 < \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi x}{6} \leq \frac{7}{2} \cdot \frac{\pi}{6},$$

$$0 < \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi x}{6} \leq \frac{7\pi}{12} < \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Рассмотрим функции } f(x) = \frac{5}{2} - x \text{ и } g(x) = \cos \frac{\pi x}{6}$$

при $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{12}\right]$. На этом промежутке $f(x)$ монотонно убывает, а $g(x)$ монотонно возрастает. Значит, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня, который, как легко проверить, равен 2. Значит, исходное уравнение имеет в итоге 2 корня.

Ответ: ± 2 .

Пример 24. Решить уравнение

$$\frac{1}{1 + \cos^2 x} + \frac{1}{1 + \sin^2 x} = \frac{48}{35}.$$

Решение

Способ 1

Пусть $\begin{cases} 1 + \cos^2 x = a, \\ 1 + \sin^2 x = b, \end{cases}$ где $a > 0, b > 0$, тогда дан-

ное уравнение примет вид $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{48}{35}$. (1)

Кроме того, $a + b = 1 + \cos^2 x + 1 + \sin^2 x = 2 + (\cos^2 x + \sin^2 x) = 3$.

$$a + b = 3. \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) рассматриваем как систему

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{48}{35}, \\ a + b = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a+b}{ab} = \frac{48}{35}, \\ a + b = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{ab} = \frac{48}{35}, \\ a + b = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = 3, \\ ab = \frac{35}{16}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(3-a) = \frac{35}{16}, \\ b = 3-a; \end{cases} \quad a^2 - 3a + \frac{35}{16} = 0,$$

$$D = 9 - \frac{35}{4} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 > 0,$$

$$a_{1,2} = \frac{3 \pm \frac{1}{2}}{2} = \frac{6 \pm 1}{4}; \quad a_1 = \frac{7}{4}, \quad a_2 = \frac{5}{4}, \quad \text{тогда}$$

$$b_1 = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}, \quad b_2 = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}.$$

Так как $1 + \cos^2 x = a$, то $1 + \cos^2 x = \frac{7}{4}$, $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

или $1 + \cos 2x = \frac{3}{2}$, $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$,

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично $1 + \cos^2 x = \frac{5}{4}$, $\cos^2 x = \frac{1}{4}$, $1 + \cos 2x = \frac{1}{2}$,

$\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$; $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Способ 2

Так как $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$, то данное уравнение при-

мет вид $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \cos^2 x + \sin^2 x} + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{48}{35}$. (1)

Разделим числитель и знаменатель каждой дроби в левой части уравнения (1) на $\cos^2 x \neq 0$:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{2 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{2 \operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{48}{35}, \text{ или}$$

$$35(\operatorname{tg}^2 x + 1)(2 \operatorname{tg}^2 x + 1) + 35(\operatorname{tg}^2 x + 1)(2 + \operatorname{tg}^2 x) =$$

$$= 48(2 + \operatorname{tg}^2 x)(2 \operatorname{tg}^2 x + 1), \text{ или}$$

$$35(\operatorname{tg}^2 x + 1)(3 \operatorname{tg}^2 x + 3) = 48(2 + \operatorname{tg}^2 x)(2 \operatorname{tg}^2 x + 1),$$

$$35(\operatorname{tg}^2 x + 1)^2 = 16(2 + \operatorname{tg}^2 x)(2 \operatorname{tg}^2 x + 1), \text{ или}$$

$$35 \operatorname{tg}^4 x + 70 \operatorname{tg}^2 x + 35 = 80 \operatorname{tg}^2 x + 32 \operatorname{tg}^4 x + 32, \text{ или}$$

$$3 \operatorname{tg}^4 x - 10 \operatorname{tg}^2 x + 3 = 0.$$

Пусть $\operatorname{tg}^2 x = y$, тогда имеем $3y^2 - 10y + 3 = 0$;

$$D/4 = 25 - 9 = 16 = 4^2 > 0, y_{1,2} = \frac{5 \pm 4}{3}, y_1 = 3, a_2 = \frac{1}{3}.$$

Учитывая подстановку, имеем два уравнения:

$$1) \operatorname{tg}^2 x = 3, \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3},$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}, \operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 25. Решить уравнение

$$\sin^5 x - \cos^5 x + \sin 2x = 1.$$

Решение

Запишем уравнение в виде

$$\sin^2 x \cdot \sin^3 x - \cos^2 x \cos^3 x = 1 - \sin 2x \text{ или}$$

$$(1 - \cos^2 x) \sin^3 x - (1 - \sin^2 x) \cos^3 x = 1 - \sin 2x,$$

$$(\sin^3 x - \cos^3 x) - \sin^2 x \cos^2 x (\sin x - \cos x) =$$

$$= (\sin x - \cos x)^2,$$

$$(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x) =$$

$$= (\sin x - \cos x)^2,$$

$$(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x - \sin^2 x \cos^2 x - (\sin x - \cos x)) = 0, \text{ откуда имеем:}$$

$$1) \sin x - \cos x = 0, \text{ или } \operatorname{tg} x - 1 = 0, \operatorname{tg} x = 1,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) 1 + \sin x \cos x - \sin^2 x \cos^2 x - (\sin x - \cos x) = 0.$$

$$\text{Пусть } \sin x - \cos x = y, \text{ тогда } y^2 = 1 - 2 \sin x \cos x,$$

$$\text{откуда } \sin x \cos x = \frac{1}{2}(1 - y^2), \text{ значит,}$$

$$1 + \frac{1}{2}(1 - y^2) - \frac{1}{4}(1 - y^2)^2 - y = 0 \text{ или}$$

$$(1 - y) + \frac{1}{2}(1 - y)(1 + y) - \frac{1}{4}(1 - y)^2(1 + y)^2 = 0,$$

$$4(1 - y) + 2(1 - y)(1 + y) - (1 - y)^2(1 + y)^2 = 0,$$

$$(1 - y)(4 + 2 + 2y - (1 - y)(1 + y)^2) = 0, \text{ откуда } y_1 = 1,$$

$$6 + 2y - (1 - y^2)(1 + y) = 0 \text{ или}$$

$$6 + 2y - 1 + y^2 - y + y^3 = 0, y^3 + y^2 + y + 5 = 0.$$

$$\text{Так как } y = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right), \text{ то}$$

$$-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}.$$

С другой стороны, если уравнение $y^3 + y^2 + y + 5 = 0$ имеет корни, то они не могут быть положительными.

Тогда $-\sqrt{2} \leq y < 0$ и при этих значениях легко видеть, что последнее уравнение не имеет корней.

Итак, $y = 1$, тогда $\sin x - \cos x = 1$ или

$$\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1, x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n; (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 26. Решить уравнение $\operatorname{tg}^6 x + \operatorname{ctg}^6 x = 2$.

Решение

I способ

Упростим левую часть уравнения, учитывая, что $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^6 x + \operatorname{ctg}^6 x &= (\operatorname{tg}^2 x)^3 + (\operatorname{ctg}^2 x)^3 = (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x)(\operatorname{tg}^4 x - \\ &- \operatorname{tg}^2 x \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^4 x) = (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x)(\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x - 1) = \\ &= (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x)((\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x)^2 - 2 \operatorname{tg}^2 x \operatorname{ctg}^2 x - 1) = \\ &= (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x)((\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x)^2 - 3). \end{aligned}$$

Тогда данное уравнение примет вид $(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x)((\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x)^2 - 3) = 2$. (1)

Пусть $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = y$, где $y > 0$, тогда (1) примет вид $y(y^2 - 3) = 2$ или $y^3 - 3y - 2 = 0$. (2)

Заметим, что $y = 2$ — корень уравнения (2), тогда $y(y^2 - 4) + (y - 2)$ или $(y - 2)(y^2 + 2y + 1) = 0$, $(y - 2)(y + 1)^2 = 0$, откуда $y_1 = 2, y_2 = -1$.

Так как $y = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x > 0$, то корень $y_2 = -1$ не подходит.

Итак, $y = 2$, тогда $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2$, или

$$\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = 2, \text{ или } \operatorname{tg}^4 x - 2 \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0,$$

$$(\operatorname{tg}^2 x - 1)^2 = 0, \text{ или } \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0, \operatorname{tg}^2 x = 1, \operatorname{tg} x = \pm 1,$$

откуда $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

II способ

$\operatorname{tg}^6 x + \operatorname{ctg}^6 x \geq 2\sqrt{\operatorname{tg}^6 x \operatorname{ctg}^6 x} = 2$, равенство выполняется, если $\operatorname{tg}^6 x = \operatorname{ctg}^6 x$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 27. Решить уравнение.

$$\sqrt{10 - 8 \cos x} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2} \sin x} = 2\sqrt{3}.$$

Решение

Попытка решить это уравнение обычным способом, т. е. возведением обеих частей в квадрат и т. д., приводит к весьма сложным техническим трудностям.

Пусть $\sqrt{10 - 8 \cos x} = |\vec{a}|$, $\sqrt{6 - 4\sqrt{2} \sin x} = |\vec{b}|$, где

$$\vec{a} = (2\sqrt{2} - \sqrt{2} \cos x, \sqrt{2} \sin x),$$

$$\vec{b} = (\sqrt{2} \cos x, 2 - \sqrt{2} \sin x).$$

$$\begin{aligned} \text{Действительно, } |\vec{a}| &= \sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{2} \cos x)^2 + (\sqrt{2} \sin x)^2} = \\ &= \sqrt{8 - 8 \cos x + 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x} = \\ &= \sqrt{8 - 8 \cos x + 2} = \sqrt{10 - 8 \cos x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{b}| &= \sqrt{(\sqrt{2} \cos x)^2 + (2 - \sqrt{2} \sin x)^2} = \\ &= \sqrt{2 \cos^2 x + 4 - 4\sqrt{2} \sin x + 2 \sin^2 x} = \\ &= \sqrt{6 - 4\sqrt{2} \sin x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Кроме того, } |\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{8 + 4} = \sqrt{12} = \\ &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Таким образом, исходное уравнение примет вид

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|. \quad (1)$$

Соотношение (1) выполняется тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены. В этом случае справедливо равенство (условие коллинеарности

$$\text{векторов) } \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2} \cos x}{\sqrt{2} \cos x} = \frac{\sqrt{2} \sin x}{2 - \sqrt{2} \sin x} \text{ или}$$

$$\frac{2 - \cos x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sqrt{2} - \sin x},$$

$$2\sqrt{2} - 2\sin x - \sqrt{2}\cos x + \cos x \sin x = \cos x \sin x,$$

$$\text{или } 2\sqrt{2} - 2\sin x - \sqrt{2}\cos x = 0, \quad 2\sqrt{2} - 2\sin x = \\ = \sqrt{2}\cos x, \text{ или, разделив обе части на } \sqrt{2}, \text{ имеем}$$

$$2 - \sqrt{2}\sin x = \cos x.$$

$$\text{Так как } \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \text{ и } \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} -$$

$$- \sin^2 \frac{x}{2}, \text{ то получим } 2 \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) -$$

$$- 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} + 3 \sin^2 \frac{x}{2} - 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 - \text{однород-}$$

ное уравнение II степени. Разделив обе части на

$$\cos^2 \frac{x}{2} \neq 0, \text{ имеем}$$

$$1 + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0, \quad 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0,$$

$$D/4 = 2 - 3 = -1 < 0. \text{ Следовательно, полученное урав-}$$

нение, а значит, и исходное не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Пример 28. Решить уравнение

$$\cos x - \sqrt{5 - \cos^2 x} + 2 \cos x \sqrt{5 - \cos^2 x} = 3.$$

Решение

$$\text{Пусть } \cos x - \sqrt{5 - \cos^2 x} = y, \text{ где } y < 0.$$

$$\text{Тогда } y^2 = \cos^2 x - 2 \cos x \sqrt{5 - \cos^2 x} + 5 - \cos^2 x,$$

откуда

$2 \cos x \sqrt{5 - \cos^2 x} = 5 - y^2$, следовательно, исходное уравнение примет вид $y + 5 - y^2 = 3$ или $y^2 - y - 2 = 0$, откуда $y_1 = 2$, $y_2 = -1$.

Так как $y < 0$, то значение $y_1 = 2$ не подходит. Если $y = -1$, то получим:

$$\cos x - \sqrt{5 - \cos^2 x} = -1 \text{ или}$$

$$\cos x + 1 = \sqrt{5 - \cos^2 x},$$

$$\begin{cases} \cos^2 x + 2 \cos x + 1 = 5 - \cos^2 x, \\ 5 - \cos^2 x \geq 0, \\ \cos x + 1 \geq 0; \end{cases}$$

$2 \cos^2 x + 2 \cos x - 4 = 0$ или $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$, откуда $\cos x = -2$ — нет корней, или $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 29. Решить уравнение $\frac{\sin^6 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^6 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}$.

Решение

Умножим обе части уравнения на 4:

$$\frac{4 \sin^6 x}{\cos^2 x} + \frac{4 \cos^6 x}{\sin^2 x} = 2, \text{ или}$$

$$\frac{8 \sin^6 x}{2 \cos^2 x} + \frac{8 \cos^6 x}{2 \sin^2 x} = 2,$$

$$\frac{(1 - \cos 2x)^3}{1 + \cos 2x} + \frac{(1 + \cos 2x)^3}{1 - \cos 2x} = 2, \text{ или}$$

$$(1 - \cos 2x)^4 + (1 + \cos 2x)^4 = 2(1 - \cos^2 2x),$$

$$1 - 4 \cos 2x + 6 \cos^2 2x - 4 \cos^3 2x + \cos^4 2x + 1 + 4 \cos 2x + 6 \cos^2 2x + 4 \cos^3 2x + \cos^4 2x = 2 - 2 \cos^2 2x,$$

или $2 \cos^4 2x + 14 \cos^2 2x = 0$, $\cos^4 2x + 7 \cos^2 2x = 0$,
 $\cos^2 2x(\cos^2 2x + 7) = 0$, откуда имеем:

$$1) \cos^2 2x = 0, \cos 2x = 0, 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \\ n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos^2 2x + 7 = 0 - \text{нет корней, так как } |\cos 2x| \leq 1.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 30. Решить уравнение

$$\frac{4}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} - 4(1 + \operatorname{tg} x) = 2 \operatorname{ctg} x.$$

Решение.

Запишем данное уравнение в виде

$$\frac{4}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} - 4 \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x \right) - 4 = 0. \quad (1)$$

Известно, что $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$ и $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$,
тогда уравнение (1) примет вид

$$4(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 1 + \operatorname{ctg}^2 x - 4(\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x) - 4 = 0 \text{ или} \\ 4 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 4(\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x) + 1 = 0. \quad (2)$$

$$\text{Пусть } \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x = y, \quad (3)$$

$$\text{тогда имеем } 4 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4(\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 x) = \\ = 4(\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x)^2 - 4 = 4y^2 - 4, \text{ и уравнение (2) при-} \\ \text{мет вид}$$

$$4y^2 - 4 - 4y + 1 = 0 \text{ или } 4y^2 - 4y - 3 = 0,$$

$$D/4 = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0, y_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{4}, y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = -\frac{1}{2}.$$

Учитывая (3), получим два уравнения;

$$1) \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x = \frac{3}{2}, \text{ или } 2 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 1 = 0,$$

$D = 9 - 8 = 1 > 0$, $\operatorname{tg} x = \frac{3 \pm 1}{4}$, $\operatorname{tg} x = 1$, $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{tg} x = 0,5$, $x_2 = \operatorname{arctg} 0,5 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} x + \frac{1}{2 \operatorname{tg} x} = -\frac{1}{2}$ или
 $2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1 = 0$ — нет корней, так как $D = 1 - 8 = -7 < 0$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\operatorname{arctg} 0,5 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задачи

Решить уравнения:

1. $\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1} = 1$;

2. $2(\cos x - 1) = x^6$;

3. $16 \sin 2x \sin 3x \sin 5x = 13$;

4. $\sin^6 x + \cos^6 x + \sin^4 2x = 14$;

5. $\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$;

6. $\operatorname{tg} x = 3 \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$;

7. $\cos^3 x - \sin^3 x = 13 + \frac{1}{2} \sin 2x$;

8. $2 \sin x - 4 \sin^3 x = \sqrt{3} \cos x$;

9. $(5 - \sin x) \sin^4 \frac{x}{2} = (5 - \sin x) \sin^2 \frac{x}{2} - 1$;

10. $5 \sin x + 7 \cos x + \sin 3x + \cos 3x = 2\sqrt{2}(3 + \cos 2x)$;

11. $\cos 3x + \sin 3x = 2 \cos 2x$;

12. $\sin^2 x - \sin x + \cos x = \sin x \cos x$;

13. $6 + \sin^3 x = \sqrt[3]{\sin x - 6}$;

14. $1 + \sin^2 x - 2 \sin x \sin^2 3x = \cos^2 3x$;

15. $8 \cos x \sin^2 x = 2 \cos x - \cos^2 3x$;

16. $2 \cos^2 x - (\cos x + \sin x) + \sin 2x = 0$;

$$17. \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{tg} 2x = \frac{8}{\sqrt{3}};$$

$$18. \sin x \left(\cos \frac{x}{2} - 2 \sin x \right) + \cos x \sin \frac{x}{2} = 1;$$

$$19. \cos 4x + \sin \frac{3x}{2} = 2;$$

$$20. (\sin x + \cos x) \sin 6x = \sqrt{2};$$

$$21. \sin x + \sin^7 x - \sin 7x = 3;$$

$$22. \sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32};$$

$$23. \cos \left(\frac{1}{7} \arccos x \right) = -1;$$

$$24. \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} \cos x - \frac{4\pi}{3} \right) = 1;$$

$$25. \cos^4 14x - 2 \cos^2 14x + \cos^2 7x = -1;$$

$$26. \sin^2 6x - \cos^2 8x = \sin \left(\frac{7\pi}{2} + 14x \right);$$

$$27. 4 \cos^2 \frac{x}{3} \cos^2 \left(\frac{7\pi}{2} - \frac{x}{3} \right) - 4 \sin^3 \frac{2x}{3} + 3 = 0;$$

$$28. 2 \sin^2 3x + 2 \sqrt{2} \cos x \sin 3x - 2 \sin^2 x + 1 = 0;$$

$$29. \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg}^3 x = 3 \operatorname{tg} x;$$

$$30. 4 \sin^4 x (\sin 2x + 4) - 4 \sin^2 x (\sin 2x + 4) + 5 = 0;$$

$$31. \sin^3 x \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x = \frac{1}{8};$$

$$32. \sin^2 x \cos(\pi - 3x) + \cos^3 x \sin(\pi - 3x) = \frac{3}{4} \sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{8};$$

$$33. \sqrt{3} (\sin x - 1) + \cos x = 2 \sin 2x;$$

$$34. 73 \operatorname{tg} 3x = 23 \operatorname{tg} x;$$

$$35. \cos 6x - 2 \cos 4x = 2;$$

$$36. \sin^4 x + 4 \sin x - 1 = 0;$$

$$37. \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x};$$

$$38. \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} = \sqrt{\cos x};$$

$$39. \sin \left(\frac{\pi}{6} \cos 2x \right) = \cos \left(\frac{4\pi}{3} \sin x \right);$$

$$40. \operatorname{tg} \sqrt{x} = \operatorname{tg} \sqrt{x+16}.$$

§ 43. Уравнения и неравенства с параметрами

1. Рациональные уравнения и неравенства

Пример 1. При каких значениях параметра a выражение $(x_1 - 7x_2)(x_2 - 7x_1)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $x^2 - 3ax + a - \frac{1}{4}$, принимает наибольшее значение?

Решение

По теореме Виета имеем
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3a, \\ x_1 x_2 = a - \frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } (x_1 - 7x_2)(x_2 - 7x_1) &= x_1 x_2 - 7x_2^2 - 7x_1^2 + 49x_1 x_2 = \\ &= 50x_1 x_2 - 7(x_1^2 + x_2^2) = 50x_1 x_2 - 7((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2) = \\ &= 50 \left(a - \frac{1}{4} \right) - 7 \left(9a^2 - 2 \left(a - \frac{1}{4} \right) \right) = -63a^2 + 64a - 16. \end{aligned}$$

Графиком функции $y = -63a^2 + 64a - 16$ является парабола, ветви которой направлены вниз, так как $-63 < 0$, значит, наибольшее значение функции достигается в вершине параболы, абсцисса которой

$$x_0 = -\frac{b_1}{2a_1} = \frac{32}{63}, \text{ где } x_0 \text{ в данном случае — параметр } a.$$

Итак, $a = \frac{32}{63}$. Остается проверить существование

корней x_1 и x_2 при $a = \frac{32}{63}$:

$$x^2 - 3 \cdot \frac{32}{63}x + \frac{32}{63} - \frac{1}{4} = x^2 - \frac{32}{21}x + \frac{65}{252},$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{16}{21}\right)^2 - \frac{65}{252} = \frac{256}{441} - \frac{65}{252} > 0.$$

Ответ: при $a = \frac{32}{63}$.

Пример 2. При каком значении параметра a существует единственная тройка чисел (x, y, z) , удовлетворяющая равенствам $2(x + y + z) = 4x^2 + y^2$ и $x + 2y + 3z = a$?

Решение

- Так как $x + 2y + 3z = a$, то $z = \frac{a}{3} - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}y$, и первое уравнение примет вид

$$2\left(x + y + \frac{a}{3} - \frac{x}{3} - \frac{2y}{3}\right) = 4x^2 + y^2, \text{ или}$$

$$2\left(\frac{2x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{a}{3}\right) = 4x^2 + y^2, \text{ или}$$

$$4x + 2y + 2a = 12x^2 + 3y^2. \quad (1)$$

Представим (1) в виде $12x^2 - 4x + 3y^2 - 2y - 2a = 0$,
или $4x^2 - \frac{4}{3}x + y^2 - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}a = 0$, или

$$\left(2x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{9} - \frac{2a}{3} = 0.$$

Отсюда видно, что условию задачи удовлетворяет тройка чисел (x, y, z) , если $\frac{2}{9} + \frac{2a}{3} = 0$, откуда $9a = -3$, значит, $a = -\frac{1}{3}$.

Ответ: при $a = -\frac{1}{3}$.

Пример 3. Доказать, что для корней трехчлена

$x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$, где $p \in \mathbb{R}$, выполняется неравенство

$x_1^6 + x_2^6 > 11$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена.

Решение

Если x_1 и x_2 — корни трехчлена, то по теореме Вие-

та имеем
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2}. \end{cases}$$

Кроме того, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, имеем

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = p^2 + \frac{1}{p^2} \geq 2, \text{ тогда}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2p^2}\right)^2 =$$

$$= p^4 + 2 + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{2p^4} = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4};$$

$$x_1^6 + x_2^6 = (x_1^4 + x_2^4)(x_1^2 + x_2^2) - x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2) =$$

$$= \left(p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4}\right) \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right) - \frac{1}{4p^4} \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right) =$$

$$= \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right) \left(p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} - \frac{1}{4p^4}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(p^2 + \frac{1}{p^2} \right) \left(p^4 + 2 + \frac{1}{4p^4} \right) = p^6 + 3p^2 + \frac{9}{p^2} + \frac{1}{4p^6} = \\
&= \left(p^6 + \frac{1}{4p^6} \right) + \left(3p^2 + \frac{9}{p^2} \right) \geq 2\sqrt{p^6 \cdot \frac{1}{4p^6}} + 2\sqrt{3p^2 \cdot \frac{9}{p^2}} = \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 3\sqrt{3} = 1 + 6\sqrt{3} > 11, \text{ что и требовалось до-} \\
&\text{казать.}
\end{aligned}$$

Пример 4. При каких значениях параметров m и n многочлен $2x^5 - x^4 + x^2 + mx + n$ делится без остатка на $x^3 + x + 1$?

Решение

Если деление выполняется без остатка, то существует многочлен $ax^2 + bx + c$ такой, что имеет место тождество

$$(x^3 + x + 1)(ax^2 + bx + c) = 2x^5 - x^4 + x^2 + mx + n.$$

Упростим левую часть тождества и сгруппируем слагаемые при одинаковых степенях:

$$\begin{aligned}
&ax^5 + ax^3 + ax^2 + bx^4 + bx^2 + bx + cx^3 + cx + c = \\
&= 2x^5 - x^4 + x^2 + mx + n \text{ или} \\
&ax^5 + bx^4 + (a+c)x^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c = \\
&= 2x^5 - x^4 + x^2 + mx + n.
\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, получим $a = 2$, $b = -1$, $a + c = 0$, откуда $c = -2$, $b + c = m$, т. е. $m = -1 + (-2) = -3$, $c = n = -2$.

Итак, данный многочлен делится на многочлен $x^3 + x + 1$ при $m = -3$, $n = -2$.

Ответ: при $m = -3$, $n = -2$.

Пример 5. При каком значении параметра c один корень уравнения $x^2 - 10x + 2c^3 = 0$ равен кубу другого?

Решение

Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения.

Пусть $x_1 = x_2^3$, тогда по теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 x_2 = 2c^3 \end{cases} \quad \text{или, учитывая соотношение } x_1 = x_2^3,$$

получим:
$$\begin{cases} x_2^3 + x_2 = 10, \\ x_2^4 = 2c^3. \end{cases}$$

Решим I уравнение системы $x_2^3 + x_2 - 10 = 0$. (1)

Заметим, что $x_2 = 2$ — корень уравнения (1), тогда $x_2(x_2^2 - 4) + 5(x_2 - 2)$ или $(x_2 - 2)(x_2^2 + x_2 + 5) = 0$, откуда $x_2 = 2$; уравнение $x_2^2 + 2x_2 + 5 = 0$ не имеет корней, так как $D < 0$. Итак, $x_2 = 2$, тогда из II уравнения системы получим $2c^3 = 16$, $c^3 = 8$, $c = 2$.

Ответ: при $c = 2$.

Пример 6. При каких значениях параметра a уравнение $(x^2 - a)^2 - 10x^2 - 3x + a = 0$ имеет ровно 4 решения?

Решение

Запишем данное уравнение как квадратное относительно переменной a :

$$x^4 - 2ax^2 + a^2 - 10x^2 - 3x + a = 0 \quad \text{или}$$

$$a^2 - (2x^2 - 1)a + (x^4 - 10x^2 - 3x) = 0,$$

$$D = (2x^2 - 1)^2 - 4(x^4 - 10x^2 - 3x) = 4x^4 - 4x^2 + 1 - 4x^4 + 40x^2 + 12x = 36x^2 + 12x + 1 = (6x + 1)^2 > 0,$$

$$a_{1,2} = \frac{(2x^2 - 1) \pm (6x + 1)}{2}, \quad a_1 = x^2 + 3x; \quad a_2 = x^2 - 3x - 1.$$

Имеем две возможности:

1) $x^2 + 3x - a = 0$, $D_1 = 9 + 4a$;

2) $x^2 - 3x - a - 1 = 0$, $D_2 = 9 + 4(a + 1) = 4a + 13$.

Если $D_1 < 0$ или $D_2 < 0$, то не существует значения a , удовлетворяющего данному уравнению. Значит, если существует значение a , при котором исходное уравнение имеет 4 корня, то должны выполняться условия $D_1 > 0$ и $D_2 > 0$.

Если $D_1 > 0$, то $a > -\frac{9}{4}$; если $D_2 > 0$, то $a > -\frac{13}{4}$. Из

полученных неравенств следует, что $a > -\frac{9}{4}$.

Ответ: при $a > -2,25$.

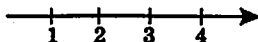
Пример 7. Сколько корней в зависимости от параметра a имеет уравнение $|x^2 - 5x + 6| + |x^2 - 5x + 4| = a$?

Решение

Рассмотрим функцию $y = |x^2 - 5x + 6| + |x^2 - 5x + 4|$.

Так как $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ и $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$, то $y = |(x - 2)(x - 3)| + |(x - 1)(x - 4)|$. (1)

Корни квадратных трехчленов отметим на числовой прямой:



Числовая прямая при этом разбивается на 5 промежутков:

1) если $x < 1$, то $y = x^2 - 5x + 6 + x^2 - 5x + 4 = 2x^2 - 10x + 10$;

2) если $1 \leq x < 2$, то $y = x^2 - 5x + 6 - x^2 + 5x - 4 = 2$;

3) если $2 \leq x < 3$, то $y = -x^2 + 5x - 6 - x^2 + 5x - 4 = -2x^2 + 10x - 10$;

4) если $3 \leq x < 4$, то $y = x^2 - 5x + 6 - x^2 + 5x - 4 = 2$;

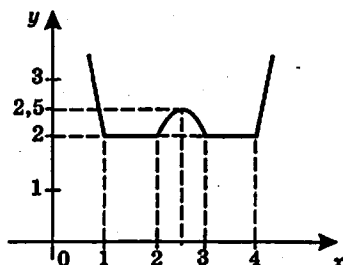
5) если $x \geq 4$, то $y = x^2 - 5x + 6 + x^2 - 5x + 4 = 2x^2 - 10x + 10$;

Для случая 3) $x_0 = -\frac{b}{2a} = 2,5$;

$$y_0 = -\frac{25}{2} + 25 - 10 = 2,5.$$

Итак $(2,5; 2,5)$, — координаты вершины параболы $y = -2x^2 + 10x - 10$.

Построим график функции, заданной равенством (1):



Ответ: если $a < 2$, то корней нет;

если $2 \leq a < 2,5$, то 4 корня;

если $a = 2,5$, то 3 корня;

если $a > 2,5$, то 2 корня.

Пример 8. В зависимости от значений параметра a

решить уравнение $x^5 - 5x^3 + 5x = a^5 + \frac{1}{a^5}$.

Решение

Пусть $y + \frac{1}{y} = x$, тогда $y^2 + \frac{1}{y^2} = x^2 - 2$;

$$y^3 + \frac{1}{y^3} = \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(y + \frac{1}{y}\right) = (x^2 - 2)x - x = x^3 - 3x;$$

$$y^4 + \frac{1}{y^4} = \left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) = (x^3 - 3x)x - (x^2 - 2) = x^4 - 4x^2 + 2;$$

$$y^5 + \frac{1}{y^5} = \left(y^4 + \frac{1}{y^4}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) = (x^4 - 4x^2 + 2)x - (x^3 - 3x) = x^5 - 5x^3 + 5x.$$

Учитывая левую часть исходного уравнения, имеем

$$y^5 + \frac{1}{y^5} = a^5 + \frac{1}{a^5}. \quad (1)$$

Теперь идея решения становится ясной.

Возможны следующие случаи:

1) если $a = -1$, то $y^5 + \frac{1}{y^5} = -2$, откуда $y = -1$, тог-

да $x = y + \frac{1}{y} = -2$;

2) если $a = 0$, то (1) не имеет корней;

3) если $a = 1$, то $y^5 + \frac{1}{y^5} = 2$, откуда $y = 1$ и $x = 2$;

4) если $a \neq \pm 1$, $a \neq 0$, то $y = a$, $x = a + \frac{1}{a}$.

Ответ: если $a = -1$, то $x = -2$;

если $a = 0$, то корней нет;

если $a = 1$, то $x = 2$;

если $a \neq \pm 1$, $a \neq 0$, то $x = a + \frac{1}{a}$.

Пример 9. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^3 + ax^2 + 56x - 64 = 0$ составляют геометрическую прогрессию?

Решение

Пусть $x_1 = m$, $x_2 = mq$, $x_3 = mq^2$ — корни данного уравнения, составляющие геометрическую прогрессию, где q — знаменатель прогрессии, тогда левую часть уравнения можно разложить на множители:

$$x^3 + ax^2 + 56x - 64 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = \\ = (x - m)(x - mq)(x - mq^2).$$

Раскрывая скобки в правой части полученного равенства и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим

$$x^3 + ax^2 + 56x - 64 = (x^2 - mx - mqx + m^2q)(x - mq^2) = \\ = x^3 - mx^2 - mqx^2 + m^2qx - mq^2x^2 + m^2q^2x + m^2q^3x - \\ - m^3q^3 = x^3 - (m + mq + mq^2)x^2 + (m^2q + m^2q^2 + m^2q^3)x - \\ - m^3q^3.$$

$$\text{Отсюда имеем систему } \begin{cases} m + mq + mq^2 = -a, \\ m^2q + m^2q^2 + m^2q^3 = 56, \\ m^3q^3 = 64; \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(1 + q + q^2) = -a, \\ m^2q(1 + q + q^2) = 56, \\ mq = 4. \end{cases}$$

Разделив обе части II уравнения на I, имеем

$$mq = -\frac{56}{a} \text{ и так как } mq = 4, \text{ то } -\frac{56}{a} = 4, \text{ откуда } a = -14.$$

Ответ: при $a = -14$.

Пример 10. При каких значениях параметров a , b , c , k имеет место равенство $(ax^2 + bx + c)^2 = (2x - 1)^4 + (kx + 1)^4$, где $x \in R$.

Решение

Так как данное равенство имеет место при любых x , то оно выполняется и при $x = \frac{1}{2}$, тогда

$$\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c\right)^2 = \left(\frac{1}{2}k + 1\right)^4. \quad (1)$$

Необходимым условием справедливости (1) является условие $\frac{1}{2}k + 1 = 0$, откуда $k = -2$, и при этом исходное равенство примет вид

$$(ax^2 + bx + c)^2 = (2x - 1)^4 + (-2x + 1)^4. \quad (2)$$

Сравняя в (2) коэффициенты при x^4 , получим $a^2 = 2^4 + 2^4$, $a^2 = 2 \cdot 16$, откуда $a = \pm 4\sqrt{2}$.

При найденных значениях a и k исходное равенство примет вид

$$(4\sqrt{2}x^2 + bx + c)^2 = (2x - 1)^4 + (1 - 2x)^4, \text{ или}$$

$$(4\sqrt{2}x^2 + bx + c)^2 = 2(2x - 1)^4, \text{ откуда}$$

$$4\sqrt{2}x^2 + bx + c = \sqrt{2}(2x - 1)^2, \text{ или}$$

$$4\sqrt{2}x^2 + bx + c = 4\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2}x + \sqrt{2}.$$

Сравняя в полученном равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x , получим $b = -4\sqrt{2}$, $c = \sqrt{2}$.

Ответ: при $a = \pm 4\sqrt{2}$; $b = -4\sqrt{2}$; $c = \sqrt{2}$; $k = -2$.

Пример 11. Решить неравенство

$$\frac{3x - a}{(a - 3)(x + 4)} - \frac{a}{a - 3} < \frac{4}{x + 4}.$$

Решение

Из условия следует, что $a \neq 3$, $x \neq -4$.

Упростим данное неравенство:

$$\frac{3x - a - a(x + 4) - 4(a - 3)}{(a - 3)(x + 4)} < 0, \text{ или}$$

$$\frac{3x - a - ax - 4a - 4a + 12}{(a - 3)(x + 4)} < 0,$$

$$\frac{-ax + 3x + (12 - 9a)}{(a - 3)(x + 4)} < 0, \text{ или } \frac{(a - 3)x - 3(4 - 3a)}{(a - 3)(x + 4)} > 0. \quad (1)$$

Неравенство (1) равносильно двум системам:

$$1) \begin{cases} (a - 3)x - 3(4 - 3a) > 0, & \begin{cases} x > \frac{3(4 - 3a)}{a - 3}, \\ x > -4; \end{cases} \\ (a - 3)(x + 4) > 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x < \frac{3(4 - 3a)}{a - 3}, \\ x < -4. \end{cases}$$

Для выбора решения каждой из них сравним величины $\frac{3(4 - 3a)}{a - 3}$ и -4 . Рассмотрим разность

$$\frac{3(4 - 3a)}{a - 3} - (-4) = \frac{12 - 9a + 4a - 12}{a - 3} = -\frac{5a}{a - 3},$$

$$-\frac{5a}{a - 3} < 0 \text{ при } a < 0 \text{ и при } a > 3;$$

$$-\frac{5a}{a - 3} > 0 \text{ при } 0 < a < 3; \quad -\frac{5a}{a - 3} = 0 \text{ при } a = 0.$$

$$\text{Значит, } \frac{3(4 - 3a)}{a - 3} < -4 \text{ при } a < 0 \text{ и при } a > 3;$$

$$\frac{3(4 - 3a)}{a - 3} \geq -4, \text{ если } 0 \leq a \leq 3.$$

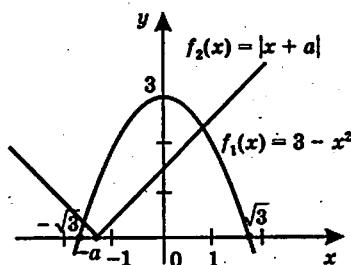
Отсюда следует решение неравенства (1), а значит, и исходного неравенства.

$$\text{Ответ: при } a < 0 \text{ и при } a > 3, \quad x < \frac{3(4 - 3a)}{a - 3}; \\ x > -4;$$

$$\text{при } 0 \leq a \leq 3, \quad x < -4, \quad x > \frac{3(4 - 3a)}{a - 3}.$$

Пример 12. При каких значениях параметра a неравенство $|x + a| + x^2 < 3$ имеет положительные решения?

Решение



Запишем данное неравенство в виде $|x + a| < 3 - x^2$. Приведем графическое решение неравенства, для чего рассмотрим функции $f_1(x) = 3 - x^2$ и $f_2(x) = |x + a|$.

Положительным решением данного неравенства будет то положительное значение $x = x_0$, при котором точка графика функции

$f_1(x)$ с абсциссой x_0 лежит выше точки графика функции $f_2(x)$ с той же абсциссой x_0 .

Если $x + a < 0$, то получим $x^2 - x - (a + 3) = 0$,

$D = 1 + 4(a + 3) = 0$, откуда $a = -\frac{13}{4}$. В этом случае

графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ касаются, тогда уравнение имеет единственный положительный корень $x = 0,5$, а при $a = 3$ график функции $f_2(x)$ проходит че-

рез точку $(0; 3)$. Значит, если $-\frac{13}{4} < a < 3$, то на ин-

тервале $(0; \sqrt{3})$ графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют точку пересечения, и, следовательно, исходное неравенство имеет положительные решения.

Ответ: при $-\frac{13}{4} < a < 3$.

Пример 13. Решить неравенство $(3 - a)x^2 + (7a - 19)x + (44 - 19a) > 0$, если $a \in (1; 2)$.

Решение

Запишем данное неравенство в виде

$$3x^2 - ax^2 + 7ax - 19x + 44 - 19a > 0 \text{ или}$$

$$(-x^2 + 7x - 19)a + (3x^2 - 19x + 44) > 0. \quad (1)$$

Левая часть (1) имеет вид $f(a, x) = f_1(x)a + f_2(x)$, где $f_1(x) = -x^2 + 7x - 19$, $f_2(x) = 3x^2 - 19x + 44$.

Заметим, что функция $f(a, x)$ является линейной относительно a , тогда неравенство $f(a, x) > 0$ будет выполняться при всех $a \in (1; 2)$, если

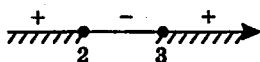
$$\begin{cases} f(1; x) = 2x^2 - 12x + 25 \geq 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(2; x) = x^2 - 5x + 6 \geq 0. & (2) \end{cases}$$

Решим неравенство (1): $D/4 = 36 - 50 = -14 < 0$, и так как I коэффициент равен 2, то $2x^2 - 12x + 25 > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$.

Решим неравенство (2) методом интервалов:

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0, x_1 = 2, x_2 = 3.$$



$$x \leq 2, x \geq 3$$

Следовательно, решением системы неравенств (1) и (2) будет решение неравенства (2), а значит, и исходного неравенства.

Ответ: $x \leq 2, x \geq 3$.

2. Иррациональные уравнения и неравенства

Пример 1. В зависимости от значений параметра a решить уравнение $a^2x^2 - 6ax + \sqrt{x-1} + 9 = 0$.

Решение

ОДЗ: $x \geq 1$. Разделив обе части данного уравнения

на $x^2 \neq 0$, получим $a^2 - \frac{6a}{x} + \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} + \frac{9}{x^2} = 0$ или, выделив полный квадрат, имеем

$$a^2 - 2a \frac{3}{x} + \left(\frac{3}{x}\right)^2 + \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} = 0 \text{ или}$$

$$\left(a - \frac{3}{x}\right)^2 + \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} = 0. \quad (1)$$

Так как оба слагаемых в левой части (1) неотрицательны, то имеем

$$\begin{cases} a - \frac{3}{x} = 0, \\ \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} = 0; \end{cases} \begin{cases} a = \frac{3}{x}, \\ \sqrt{x-1} = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ a = 3. \end{cases}$$

Ответ: если $a = 3$, то $x = 1$;
если $a \neq 3$, то корней нет.

Пример 2. Решить уравнение $a^2\sqrt{x-b^2-c^2} + b^2\sqrt{x-a^2-c^2} + c^2\sqrt{x-a^2-b^2} = a^3 + b^3 + c^3$, где $a > 0, b > 0, c > 0$ — параметры.

Решение

ОДЗ: $x \geq a^2 + b^2, x \geq b^2 + c^2, x \geq a^2 + c^2$.

Пусть $f(x) = a^2\sqrt{x-b^2-c^2} + b^2\sqrt{x-a^2-c^2} + c^2\sqrt{x-a^2-b^2}$.

Функция $f(x)$ представляет собой сумму трех строго возрастающих функций.

Кроме того, $f(a^2 + b^2 + c^2) = a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c = a^3 + b^3 + c^3$.

Следовательно, $x = a^2 + b^2 + c^2$ — корень исходного уравнения, и так как f — монотонно возрастающая функция на области определения уравнения, то других корней данное уравнение иметь не может.

Ответ: $x = a^2 + b^2 + c^2$.

Пример 3. В зависимости от значений параметра a решить уравнение $\sqrt{2x+a} = x-1$.

Решение

Это уравнение можно решать различными способами, которые в свою очередь могут быть использованы при решении различных типов уравнений.

Способ 1

Данное уравнение с учетом ОДЗ равносильно системе

$$\begin{cases} 2x + a = (x-1)^2, \\ x-1 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 4x + 1 - a = 0, \\ x \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Решим уравнение системы $x^2 - 4x + (1 - a) = 0$,

$$D/4 = 3 + a, x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3 + a}, x_1 = 2 - \sqrt{3 + a},$$

$$x_2 = 2 + \sqrt{3 + a}.$$

Отсюда следует, что при $a = -3$ данное уравнение примет вид

$$\sqrt{2x - 3} = x - 1 \text{ или } \begin{cases} 2x - 3 = (x - 1)^2, \\ x \geq 1,5; \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \text{ или } (x - 2)^2 = 0, x - 2 = 0, x = 2.$$

Если $a > -3$, то очевидно, что $x_1 < x_2$, и исходное уравнение будет иметь решения при тех значениях параметра a , при которых совместна система

$$\begin{cases} 2 - \sqrt{3 + a} \geq 1, \\ a > -3; \end{cases} \begin{cases} \sqrt{3 + a} \leq 1, \\ a > -3; \end{cases} \begin{cases} 3 + a \leq 1, \\ a > -3; \end{cases} \begin{cases} a \leq -2, \\ a > -3, \end{cases}$$

откуда имеем $-3 < a \leq -2$.

Исходное уравнение будет иметь только один корень x_2 , если $x_1 < 1$, $x_2 \geq 1$. В этом случае имеем систему

$$\begin{cases} 2 - \sqrt{3 + a} < 1, \\ 2 + \sqrt{3 + a} \geq 1; \end{cases} \begin{cases} \sqrt{3 + a} > 1, \\ \sqrt{3 + a} \geq -1, \end{cases} \text{откуда } \sqrt{3 + a} > 1$$

или $3 + a > 1$, $a > -2$.

Учитывая, что при $a < -3$, $D < 0$, для уравнения системы (1) получаем ответ.

Ответ: если $a < -3$, то решений нет;

если $a = -3$, то $x = 2$;

если $-3 < a \leq -2$, то $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3 + a}$;

если $a > -2$, то $x = 2 + \sqrt{3 + a}$.

Способ 2

Из системы (1) следует, что уравнение $\sqrt{2x + a} = x - 1$ будет иметь корни x_1 и x_2 в случае, если корни квадратного трехчлена $f(x) = x^2 - 4x + 1 - a$ не меньше 1, т. е. имеем систему

$$\begin{cases} \frac{D}{4} = 4 - (1 - a) > 0, \\ x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 > 1, \quad \begin{cases} 3 + a > 0, \\ -2 - a \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -3, \\ a \leq -2; \end{cases} \\ f(1) = 1 - 4 + 1 - a \geq 0; \end{cases}$$

откуда имеем $-3 < a \leq -2$.

Если $a = -3$, то из исходного уравнения получим:

$$\sqrt{2x - 3} = x - 1, \text{ откуда } x = 2 \text{ (см. способ 1).}$$

Если $f(1) = -2 - a < 0$, т. е. если $a > -2$, то исходное уравнение имеет корень $x = 2 + \sqrt{3 + a}$.

Если $a < -3$, то решений нет.

Способ 3

Если возвести обе части исходного уравнения в квадрат, то получим уравнение $x^2 - 4x + 1 - a = 0$, корни которого $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3 + a}$ (см. способ 1).

Но при возведении обеих частей иррационального уравнения в квадрат могли появиться лишние корни, поэтому необходимо сделать проверку корней:

$$1) x_1 = 2 - \sqrt{3 + a},$$

$$\text{тогда } \sqrt{2(2 - \sqrt{3 + a}) + a} = 2 - \sqrt{3 + a} - 1, \text{ или}$$

$$\sqrt{1 - 2\sqrt{3 + a} + (3 + a)} = 1 - \sqrt{3 + a}, \text{ или}$$

$$\sqrt{(1 - \sqrt{3 + a})^2} = 1 - \sqrt{3 + a}, \text{ или } |1 - \sqrt{3 + a}| = 1 - \sqrt{3 + a},$$

откуда $-3 < a \leq -2$;

$$2) x_2 = 2 + \sqrt{3 + a}, \text{ тогда аналогично получим } a \geq -3.$$

Так как при $a < -3$ корней нет, а при $a = -3$, $x = 2$, то получим ответ, аналогичный способам 1 и 2.

Способ 4

$$\sqrt{2x + a} = x - 1.$$

Пусть $y_1(x) = \sqrt{2x + a}$ и $y_2(x) = x - 1$. Тогда решениями исходного уравнения будут абсциссы точек пересечения этих графиков. Заметим, что при $a < -3$

графики данных функций не пересекаются, а значит, данное уравнение не имеет решений (рис. 1).

При $a = -3$ графики данных функций касаются и исходное уравнение имеет 1 корень $x = 2$ (рис. 2).

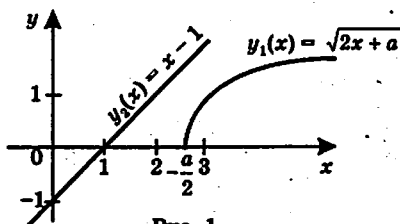


Рис. 1

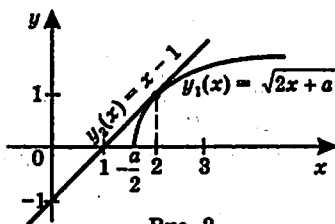


Рис. 2

При $-3 < a \leq -2$ данное уравнение имеет корни $x_1 = 2 - \sqrt{3+a}$ и $x_2 = 2 + \sqrt{3+a}$ (рис. 3). При $a > -2$ графики функций пересекаются в одной точке и исходное уравнение имеет один корень $x_2 = 2 + \sqrt{3+a}$ (рис. 4).

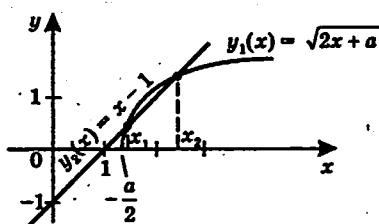


Рис. 3

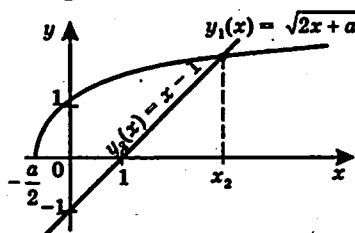


Рис. 4

Способ 5

Запишем систему $\begin{cases} x^2 - 4x + 1 - a = 0, \\ x \geq 1 \end{cases}$ в виде

$$\begin{cases} a = x^2 - 4x + 1, \\ x \geq 1 \end{cases} \text{ и построим}$$

график функции $a(x) = x^2 - 4x + 1$ или $a(x) = (x-2)^2 - 3$ в плоскости HOa , где $x > 1$ (рис. 5).

В результате придем к тем же выводам, описанным в четырех способах.

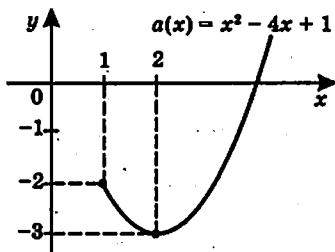


Рис. 5

Ответ: если $a < -3$, то решений нет;

если $a = -3$, то $x = 2$;

если $-3 < a \leq -2$, то $x = 2 \pm \sqrt{3+a}$;

если $a > -2$, то $x = 2 + \sqrt{3+a}$.

Пример 4. Решить неравенство $\sqrt{x+2} < a-1$.

Решение

Данное неравенство равносильно системе нера-

венств
$$\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ a-1 > 0, \\ x+2 < (a-1)^2, \end{cases} \quad \text{откуда при } a \leq 1 \text{ данное нера-}$$

венство решений не имеет;

если $a-1 > 0$, т. е. при $a > 1$, имеем

$$-2 \leq x < (a-1)^2 - 2 \text{ или } -2 \leq x < a^2 - 2a - 1.$$

Ответ: при $a \leq 1$ решений нет;

при $a > 1$ $-2 \leq x < a^2 - 2a - 1$.

Пример 5. В зависимости от значений параметра a

решить неравенство $\sqrt{2a+x} + \sqrt{2a-x} > a$.

Решение

Заметим, что при $a \leq 0$ данное неравенство не имеет решений.

Если $a > 0$, то ОДЗ задается условиями:

$$\begin{cases} 2a+x \geq 0, \\ 2a-x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq -2a, \\ x \leq 2a \end{cases} \quad \text{или } -2a \leq x \leq 2a. \quad (1)$$

При выполнении (1) возведем обе части исходного неравенства в квадрат:

$$2a+x+2a-x+2\sqrt{4a^2-x^2} > a^2,$$

$$2\sqrt{4a^2-x^2} > a^2-4a. \quad (2)$$

Возможны 3 случая:

1) $a^2-4a < 0$, тогда $a(a-4)$, откуда $0 < a < 4$.

Следовательно, неравенство (2) верно при всех $|x| \leq 2a$;

2) $a^2-4a = 0$, $a(a-4) = 0$, и так как $a > 0$, то $a = 4$.

При значении $a = 4$ неравенство (2) примет вид $2\sqrt{64 - x^2} > 0$, отсюда $64 - x^2 > 0$ или $|x| < 8$, т. е. $-8 < x < 8$;

3) $a^2 - 4a > 0$, т. е. $a(a - 4) > 0$, откуда $a > 4$.

Если $a > 4$, то, возведя обе части неравенства (2) в квадрат, получим равносильное неравенство $4(4a^2 - x^2) > (a^2 - 4a)^2$ или $16a^2 - 4x^2 > a^4 - 8a^3 + 16a^2$,

$$-4x^2 > a^4 - 8a^3, x^2 < \frac{a^3(8 - a)}{4}. \quad (3)$$

При $a \geq 8$ неравенство (3) не имеет решений.

Если $4 < a < 8$, то $|x| < \frac{a\sqrt{a(8 - a)}}{2}$, и так как

$$|x| \leq 2a, \text{ то } \frac{a\sqrt{a(8 - a)}}{2} \leq 2a \text{ или } \frac{a\sqrt{a(8 - a)}}{2} \leq a.$$

Ответ: при $a \leq 0$ и при $a \geq 8$ решений нет;

при $0 < a < 4$, $-2a \leq x \leq 2a$;

при $a = 4$, $-8 < x < 8$;

$$\text{при } 4 < a < 8, -\frac{a\sqrt{a(8 - a)}}{2} < x < \frac{a\sqrt{a(8 - a)}}{2}.$$

Пример 6. Решить неравенство $\sqrt{4 - x^2} > a - x$.

Решение

Построим графики функций $y = \sqrt{4 - x^2}$ и $y = a - x$.

Как видно из рисунка, если $a < -2$, то $-2 \leq x \leq 2$ — решение данного неравенства:

если $-2 \leq a < 2$, то

$$x_1 < x \leq 2;$$

если $2 \leq a < 2\sqrt{2}$, то

$x_1 < x < x_2$, где x_1 и x_2 —

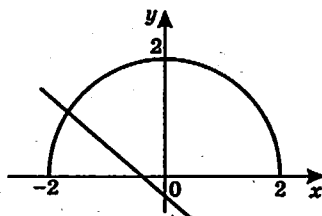
корни уравнения

$$\sqrt{4 - x^2} = a - x. \quad (1)$$

Найдем корни уравнения (1):

$$4 - x^2 = (a - x)^2 \text{ или } 4 - x^2 = a^2 - 2ax + x^2,$$

$$2x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0, D/4 = a^2 - 2(a^2 - 4) = 8 - a^2,$$



$$x_{1,2} = a \pm \sqrt{8 - a^2}, \text{ где } 8 - a^2 \geq 0, \text{ т. е. } |a| \leq 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Итак, } x_1 = a - \sqrt{8 - a^2}, x_2 = a + \sqrt{8 - a^2}.$$

Если $a > 2\sqrt{2}$, то исходное неравенство не имеет решений.

Ответ: если $a < -2$, то $-2 \leq x \leq 2$;

$$\text{если } -2 \leq a \leq 2, \text{ то } a - \sqrt{8 - a^2} < x < 2;$$

$$\text{если } 2 \leq a \leq 2\sqrt{2}, \text{ то}$$

$$a - \sqrt{8 - a^2} < x < a + \sqrt{8 - a^2};$$

$$\text{если } a > 2\sqrt{2}, \text{ то решений нет.}$$

Пример 7. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2ax - 3y = 2a + 3, \\ ax + (2a - 1)y = a + 5 \end{cases} \text{ имеет хотя бы одно решение.}$$

Решение

Из I уравнения системы имеем

$$y = \frac{1}{3}(2ax - 2a - 3), \text{ тогда II уравнение примет вид}$$

$$ax + (2a - 1) \cdot \frac{1}{3}(2ax - 2a - 3) = a + 5 \text{ или}$$

$$3ax + (2a - 1)(2ax - 2a - 3) = 3a + 15,$$

$$3ax + 4a^2x - 2ax - 4a^2 + 2a - 6a + 3 = 3a + 15, \\ ax(1 + 4a) = 4a^2 + 7a + 12. \quad (1)$$

Если $a = 0$ или $a = -\frac{1}{4}$, то уравнение (1), а значит, и данная система не имеет решений;

если $a \neq 0$ или $a \neq -\frac{1}{4}$, то уравнение (1), а значит, и данная система имеет единственное решение

$$x = \frac{4a^2 + 7a + 12}{a(1 + 4a)}, \text{ тогда } y = \frac{1}{3}(2ax - 2a - 3) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(2a \cdot \frac{4a^2 + 7a + 12}{a(1 + 4a)} - 2a - 3 \right) = \frac{21}{3(1 + 4a)} = \frac{7}{1 + 4a}.$$

Значит, данная система имеет хотя бы одно решение при любом a , кроме $a = 0$ и $a = -\frac{1}{4}$.

Ответ: при любом a , кроме $a = 0$ и $a = -\frac{1}{4}$.

Пример 8. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x, \\ x^2 + y^2 + 9a^2 = 4x + 6ay \end{cases} \text{ имеет решение?}$$

Решение

Запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} (x - 2)^2 = y + 4, & (y - 3a)^2 + y + 4 = 4, \\ (y - 3a)^2 + (x - 2)^2 = 4; & y + 4 \geq 0; \\ y^2 - (6a - 1)y + 9a^2 = 0, \\ y \geq -4. \end{cases}$$

Решим уравнение $y^2 - (6a - 1)y + 9a^2 = 0$,
 $D = (6a - 1)^2 - 36a^2 = 1 - 12a$,

$$y_{1,2} = \frac{(6a - 1) \pm \sqrt{1 - 12a}}{2} \text{ и с учетом неравенства}$$

$$y \geq -4, \text{ имеем } \frac{(6a - 1) \pm \sqrt{1 - 12a}}{2} \geq -4 \text{ или}$$

$$(6a - 1) \pm \sqrt{1 - 12a} \geq -8. \quad (1)$$

Пусть $\sqrt{1 - 12a} = t$, где $t \geq 0$, тогда (1) примет вид

$$\begin{aligned} 1 - 12a = t^2, \quad a = \frac{1}{12}(1 - t^2), \quad \frac{1}{2}(1 - t^2) - 1 \pm t \geq -8, \\ 1 - t^2 - 2 \pm 2t \geq -16, \text{ откуда имеем 2 неравенства:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad \begin{cases} 1 - t^2 - 2 + 2t \geq -16, \\ t \geq 0; \end{cases} \quad t^2 - 2t - 15 \leq 0, \quad t_1 = 5, \\ t_2 = -3 \text{ (не удовлетворяет).} \end{aligned}$$



$0 \leq t \leq 5$, тогда $0 \leq \sqrt{1-12a} \leq 5$ или
 $0 \leq 1-12a \leq 25$, $-1 \leq -12a \leq 24$,

$$-2 \leq a \leq \frac{1}{12}; \quad (2)$$

$$2) \begin{cases} t^2 + 2t - 15 \geq 0, \\ t \geq 0; \end{cases} \quad t_1 = -5, t_2 = 3.$$



$0 \leq t \leq 3$, или $0 \leq \sqrt{1-12a} \leq 3$, или

$$0 \leq 1-12a \leq 9, \text{ или } -\frac{2}{3} \leq a \leq \frac{1}{12}. \quad (3)$$

Объединяя (2) и (3), получим решение исходной

системы: $-2 \leq a \leq \frac{1}{12}$.

$$\text{Ответ: } -2 \leq a \leq \frac{1}{12}.$$

Пример 9. Найти все значения параметра a , при каж-

дом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 1, \\ x - y = a \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение.

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 1, \\ x = a + y; \end{cases} \quad \begin{cases} (a + y)^2 + 3y^2 = 1, \\ x = a + y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y^2 + 2ay + (a^2 - 1) = 0, \\ x = a + y. \end{cases}$$

Эта система будет иметь единственное решение при условии, если 1 уравнение системы будет иметь един-

ственное решение, что выполняется при условии, если:

$$D/4 = a^2 - 4(a^2 - 1) = 0 \text{ или } -3a^2 + 4 = 0, a^2 = \frac{4}{3},$$

$$a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Итак, исходная система имеет единственное решение, если $a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. Ясно, что при остальных значениях параметра a система будет иметь 2 решения, либо не иметь решений.

$$\text{Ответ: } a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Задачи

Решить уравнения (1-27)

1. Найти все значения параметра a , при каждом из которых решение уравнения $4a - 7x = 19 + 2ax - 3a$ больше 4.

2. Найти наибольшее целое a , при котором уравнение $2x^2 - 3ax + 8 = 0$ не имеет корней.

3. При каких значениях параметра a уравнение $3x^2 + (a^2 - 5a + 1)x - 2a^2 + 8a = 0$ имеет корни разных знаков?

4. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - x + 1| = a$ имеет единственное решение?

5. При каком значении параметра a один из корней уравнения $x^2 - (2a + 1)x + 4a - 3 = 0$ больше 3, а другой меньше 3?

6. При каких значениях a сумма кубов корней уравнения $x^2 + (6 - a - a^2)x - a^2 = 0$ равна нулю?

7. При каких значениях параметра a графики функций $y = 4ax^3 - 3$ и $y = (a + 5)x - 2$ не пересекаются?

8. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 2ax + a - 3 = 0$ является наименьшей?

9. При каких значениях параметра a сумма корней уравнения $3x^2 + (a^2 - 2)x + a - 4 = 0$ равна их произведению?

10. Найти все значения a , при которых сумма корней уравнения $x^2 - a(2x - 3) - 2 = 0$ равна сумме кубов корней.

11. В уравнении $3x^2 - ax - 10 = 0$ найти a , если между корнями x_1 и x_2 существует зависимость $2x_1 - 3x_2 = 9$ и a — целое число.

12. При каком значении параметра a кривая $y = \frac{1}{2}x^4 - 16x + a$ касается оси абсцисс?

13. При каких значениях параметра a функция $f(x) = 2ax^3 - 21ax^2 + 78ax - 38$ возрастает при всех значениях x ?

14. Решить уравнение $(x + 3a)(x + 4a)(x + 9a)(x + 12a) = 3a^2x^2$.

15. Решить уравнение $x^4 - a^2x^2 + 6a^3x - 2a^4 = 0$, где a — параметр.

16. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^3 - 9x^2 + ax - 15 = 0$ образуют арифметическую прогрессию?

17. При каких значениях параметра a больший корень уравнения $x^2 - a(a + 2)x + 2a^3 = 0$ больше $\frac{1}{4}$?

18. В зависимости от значений параметра a решить уравнение $a^2x^2 - 2(\sqrt{3} - 1)ax + \sqrt{x - 1} = 2\sqrt{3} - 4$.

19. В зависимости от значений параметра a решить уравнение $\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} = x$.

20. В зависимости от значений параметра a решить уравнение $x + \sqrt{x} = a$.

21. При каких значениях параметра a неравенство $3 - |x - a| > x^2$ имеет по крайней мере одно отрицательное решение?

22. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$ выполняется при всех $x > 0$?

23. В зависимости от значений параметра a решить неравенство $\sqrt{4x + a} + 1 \geq 2x$.

24. В зависимости от значений параметра a решить неравенство $x + 4a > 5\sqrt{ax}$.

25. Существует ли такое значение параметра a , при котором система
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 - x \leq 1, \\ x - y - a = 0 \end{cases}$$
 не имеет решений?

26. При каких значениях параметра a имеет решение система
$$\begin{cases} 2x^2 - 3ax - 9 \leq 0 \\ x^2 + ax - 2 \geq 0 \end{cases} ?$$

27. В зависимости от значений параметра a решить систему
$$\begin{cases} ax > -1, \\ x + a > 0. \end{cases}$$

3. Тригонометрические уравнения и неравенства

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $4 \cos \frac{x}{2} - 3 \sin \frac{x}{2} = a$ имеет решение?

Решение

Так как $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, то, разделив обе части данного уравнения на 5, получим

$$\frac{4}{5} \cos \frac{x}{2} - \frac{3}{5} \sin \frac{x}{2} = \frac{a}{5}. \quad (1)$$

Но $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$, значит, существует такое число φ , что $\sin \varphi = \frac{4}{5}$, $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ и (1) примет вид

$$\sin \varphi \cos \frac{x}{2} - \cos \varphi \sin \frac{x}{2} = \frac{a}{5} \text{ или } \sin \left(\varphi - \frac{x}{2} \right) = \frac{a}{5}. \quad (2)$$

Учитывая ограниченность синуса, заметим, что уравнение (2) имеет решение тогда и только тогда,

когда выполняется условие: $\left| \sin\left(\varphi - \frac{x}{2}\right) \right| \leq 1$ или

$$\left| \frac{a}{5} \right| \leq 1, \text{ откуда имеем } -5 \leq a \leq 5.$$

Ответ: $-5 \leq a \leq 5$.

Пример 2. При каком значении параметра a уравнение

$$\sin 2x - a \sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + 1 = 0 \text{ имеет один корень?}$$

Решение

Известно, что $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$, тогда данное уравнение примет вид

$$\sin 2x - a \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right) + 1 = 0 \text{ или}$$

$$\sin 2x - \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 1 = 0. \quad (1)$$

Но $\sin 2x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)$ и $\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) =$
 $= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$, тогда (1) примет вид:

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) - \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + 1 = 0 \text{ или}$$

$$1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) + \frac{a}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - \frac{a}{2} = 0. \quad (2)$$

Но $1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$, тогда (2) примет вид

$$2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \frac{a}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - \frac{a}{2} = 0 \text{ или}$$

$$\begin{aligned}
2\left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) + \frac{a}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \frac{a}{2} &= 0, \\
2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \frac{a}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \left(\frac{a}{2} - 2\right) &= 0, \\
4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - a\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + (a - 4) &= 0. \quad (3)
\end{aligned}$$

Пусть $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = y$, тогда (3) примет вид

$$4y^2 - ay + (a - 4) = 0. \quad (4)$$

Из исходного уравнения следует, что $D = 0$, или $a^2 - 16(a - 4) = 0$, или $D = (a - 8)^2 = 0$, $a - 8 = 0$, отку-

да $a = 8$, тогда $y = \frac{a}{8} = 1$.

Учитывая подстановку, получим $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$,

откуда $\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Кроме того, исходное уравнение имеет один корень, если $a = 0$, тогда $\sin 2x = -1$;

$$2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: при $a = 0$ и $a = 8$.

Пример 3. В зависимости от значений параметра a решить уравнение $x^2 - 6x \sin ax + 9 = 0$.

Решение

Представим данное уравнение в виде

$$(x - 3 \sin ax)^2 + 9(1 - \sin^2 ax) = 0. \quad (1)$$

Заметим, что оба слагаемых в левой части уравнения неотрицательны, поэтому уравнение (1) равно-

сильно системе $\begin{cases} x - 3 \sin ax = 0 \\ 1 - \sin^2 ax = 0 \end{cases}$ или двум системам:

$$1) \begin{cases} x = 3 \sin ax, \\ \sin ax = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ ax = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ a = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = 3 \sin ax, \\ \sin ax = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3, \\ ax = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3, \\ a = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: если $a = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, то $x = 3$;

если $a = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, то $x = -3$;

при других a уравнение корней не имеет.

Пример 4. Решить уравнение $\cos 2x = a(\cos x + \sin x)$.

Решение

Так как $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x) \times (\cos x + \sin x)$, то данное уравнение примет вид $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = a(\cos x + \sin x)$. (1)

Уравнение (1) равносильно двум уравнениям:

1) $\cos x + \sin x = 0$, $1 + \operatorname{tg} x = 0$, откуда

$$\operatorname{tg} x = -1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos x - \sin x = a, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Если $|a| > \sqrt{2}$, то уравнение 2) не имеет решений.

Если $|a| \leq \sqrt{2}$, то $x + \frac{\pi}{4} = \pm \arccos \frac{a}{\sqrt{2}} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$,

откуда $x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{a}{\sqrt{2}} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; a \in \mathbb{R}$

если $|a| > \sqrt{2}$, то решений нет;

если $|a| \leq \sqrt{2}$, то $x = -\frac{\pi}{4} = \pm \arccos \frac{a}{\sqrt{2}} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Пример 5. При каком значении параметра a уравнение $\sin^8 x + \cos^8 x = a$ имеет корни? Найти эти корни.

Решение

Упростим левую часть уравнения:

$$\begin{aligned}\sin^8 x + \cos^8 x &= (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2 \sin^4 x \cos^4 x = \\&= ((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x)^2 - \frac{1}{8} (2 \sin x \cos x)^4 = \\&= \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8} \sin^4 2x.\end{aligned}$$

Так как $\sin^8 x + \cos^8 x = a$, то получим равносильное уравнение $\left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8} \sin^4 2x = a$. (1)

Пусть $\sin^2 2x = y$, где $y \geq 0$, тогда (1) примет вид $\left(1 - \frac{1}{2} y\right)^2 - \frac{1}{8} y^2 = a$, или $1 - y + \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{8} y^2 = a$, или $y^2 - 8y + (8 - 8a) = 0$. (2)

Уравнение (2) имеет корни, если $D \geq 0$, т. е. $D/4 = 16 - (8 - 8a) \geq 0, 8a \geq -8$, откуда $a \geq -1$.

При $a \geq -1$, корни (2) будут: $y_{1,2} = 4 \pm \sqrt{8 + 8a}$ или $y_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{2(1+a)}$; учитывая, что $\sin^2 2x = y$, имеем $\sin^2 2x = 4 \pm 2\sqrt{2(1+a)}$ и так как $\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$, то $\frac{1}{2}(1 - \cos 4x) = 4 \pm 2\sqrt{2(1+a)}$ или $1 - \cos 4x = 8 \pm 4\sqrt{2(1+a)}$, откуда

$$\cos 4x = -7 \mp 4\sqrt{2(1+a)},$$

$$4x = \pm \arccos(-7 + 4\sqrt{2(1+a)}) + 2\pi n; \text{ так как}$$

$$|\cos 4x| \leq 1, \text{ то } x = \pm \frac{1}{4} \arccos(4\sqrt{2(1+a)} - 7) + \frac{\pi n}{2},$$

$$n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Кроме того, } \sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) = y, \text{ или}$$

$$1 - \cos 4x = 2y, \cos 4x = 1 - 2y, |1 - 2y| \leq 1, \text{ или}$$

$$-1 \leq 1 - 2y \leq 1, 0 \leq 2y \leq 2, 0 \leq y \leq 1, \text{ где}$$

$$y_{1,2} = 4 \pm \sqrt{8+8a}, a \geq -1, \text{ тогда } y = 4 - \sqrt{8+8a}.$$

$$\text{Имеем неравенство } 0 \leq 4 - \sqrt{8+8a} \leq 1 \text{ или}$$

$$3 \leq \sqrt{8+8a} \leq 4, 1 \leq 8a \leq 8, \text{ откуда } \frac{1}{8} \leq a \leq 1. \quad (3)$$

$$\text{Из неравенства } a \geq -1 \text{ и (3) имеем } \frac{1}{8} \leq a \leq 1.$$

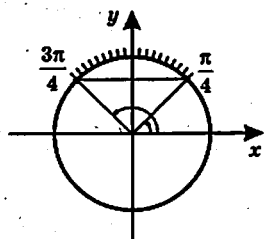
$$\text{Ответ: если } \frac{1}{8} \leq a \leq 1, \text{ то}$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{4} \arccos(4\sqrt{2(1+a)} - 7) + \frac{\pi n}{2},$$

$$n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 6. Решить неравенство $\sin ax \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение



На единичной окружности с центром в начале координат находятся две точки, ордината

каждой из которых равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Одна из них является концом каждой из дуг множества

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \text{ а дру-}$$

гая — концом каждой из дуг множества $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Как видно из рисунка, данное неравенство справедливо при $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq ax \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Следовательно, если $a > 0$, то

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n \right) \leq x \leq \frac{1}{a} \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right);$$

если $a < 0$, то $\frac{1}{a} \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right) \leq x \leq \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n \right)$; $n \in \mathbb{Z}$;

если $a = 0$, то решений нет.

Ответ: если $a > 0$, $\frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n \right) \leq x \leq \frac{1}{a} \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right)$;

если $a < 0$, $\frac{1}{a} \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right) \leq x \leq \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n \right)$,

$n \in \mathbb{Z}$;

если $a = 0$, то решений нет.

Пример 7. Решить неравенство $\operatorname{tg}(ax + 3) \geq b$.

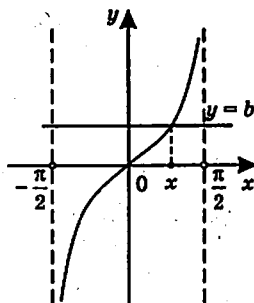
Решение

Решим данное неравенство графически, для чего построим графики функций $y = \operatorname{tg}(ax + 3)$ и $y = b$. На главной ветви тангенсоиды они пересекаются в точке $x = \arctg b$.

Выделим промежуток оси X , на котором главная ветвь тангенсоиды расположена выше прямой

$y = b$, — это интервал $(\arctg b; \frac{\pi}{2})$.

Учитывая, что период тангенса равен π , делаем вывод, что заданное неравенство выполняется,



если $\operatorname{arctg} b + \pi n \leq ax + 3 < \frac{\pi}{2} + \pi n$ или $-3 + \operatorname{arctg} b + \pi n \leq ax < -3 + \frac{\pi}{2} + \pi n$, следовательно, при $a < 0$,

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} - 3 + \pi n \right) < x \leq \frac{1}{a} (\operatorname{arctg} b - 3 + \pi n);$$

при $a > 0$, $\frac{1}{a} (\operatorname{arctg} b - 3 + \pi n) \leq x < \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} - 3 + \pi n \right)$.

Нетрудно видеть, что при $a = 0$ и $b \leq \operatorname{tg} 3$, $x \in R$.

Ответ: если $a > 0$, $\frac{1}{a} (\operatorname{arctg} b - 3 + \pi n) \leq x <$

$$< \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} - 3 + \pi n \right);$$

$$\text{если } a < 0, \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} - 3 + \pi n \right) < x \leq$$

$$\leq \frac{1}{a} (\operatorname{arctg} b - 3 + \pi n);$$

если $a = 0$ и $b \leq \operatorname{tg} 3$, $x \in R$.

Пример 8. Решить неравенство $\sin^6 x + \cos^6 x > a$.

Решение

Упростим левую часть неравенства, используя соотношения $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ и $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

Имеем $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = 1 \cdot ((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 -$

$$-\frac{3}{4} (4 \sin^2 x \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{8} (1 - \cos 4x) =$$

$$= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x.$$

Тогда данное неравенство примет вид

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x > a, \quad 5 + 3 \cos 4x > 8a, \quad \text{откуда}$$

$$\cos 4x > \frac{1}{3}(8a - 5). \quad (1)$$

Если $a \geq 1$, то $\frac{1}{3}(8a - 5) \geq 1$ и неравенство (1) не имеет решений;

если $\frac{1}{4} \leq a < 1$, то имеем $-1 \leq \frac{1}{3}(8a - 5) < 1$ из (1)

имеем $-\arccos \frac{1}{3}(8a - 5) + 2\pi n < 4x < \arccos \frac{1}{3}(8a - 5) + 2\pi n$,

или $-\frac{1}{4}\arccos \frac{1}{3}(8a - 5) + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{1}{4}\arccos \frac{1}{3}(8a - 5) + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

если $a < \frac{1}{4}$, то $\frac{1}{3}(8a - 5) < -1$, и данное неравенство справедливо при любых x .

Ответ: при $a \geq 1$ решений нет;

$$\begin{aligned} &\text{при } \frac{1}{4} \leq a < 1 \quad -\frac{1}{4}\arccos \frac{1}{3}(8a - 5) + \\ &+ \frac{\pi n}{2} < x < \frac{1}{4}\arccos \frac{1}{3}(8a - 5) + \frac{\pi n}{2}; \\ &\text{при } a < \frac{1}{4}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Задачи

Решить уравнения и неравенства.

1. При каких значениях a уравнение $3 \sin x + 5 \cos x = a$ имеет решение?

2. При какой зависимости между параметрами a и b имеет решение уравнение $\sin ax \cdot \sin bx = -1$?

3. При каких значениях параметра a уравнение $(x^2 + 16) \sin ax = 2(x^2 - 4x + 16)$ имеет решения? Найти эти решения.

4. Решить уравнение $\sin \sqrt{x} = a + 1$.
5. Решить уравнение $\operatorname{tg} |x - 2| = a$.
6. В зависимости от значений параметра a решить уравнение $\sin^4 x - \cos^4 x = a(\sin^8 x - \cos^8 x)$.
7. В зависимости от значений параметра a решить уравнение $\cos^4 x + \cos^4 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = a$.
8. Решить уравнение $\cos x - \sin x = a$.
9. Решить уравнение $\cos^2 x + 6 \sin x = 4a^2 - 2$.
10. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = a$.
11. Решить неравенство $\cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \geq a$.
12. Решить неравенство $\operatorname{ctg} |2x - 3| \leq a$.
13. Решить неравенство $\cos x - \frac{1}{\cos x} \leq a, a > 0$.

4. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

1. Показательные и логарифмические уравнения

Простейшим показательным уравнением с параметром является уравнение вида $a^x = b$, (1)
где $a > 0, a \neq 1$.

Если $b \leq 0$, то уравнение (1) не имеет корней, так как показательная функция принимает положительные значения.

Если $b > 0$, то уравнение (1) имеет единственное решение: $x = \log_a b$.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида $\log_a x = b$, где $a > 0, a \neq 1$.

При произвольном b уравнение имеет единственный корень $x = a^b$.

Пример 1. Решить уравнение $a^{x+2} = b^{1-x}$.

Решение

Заметим, что $a > 0, b > 0$. Если $a = b = 1$, то $x \in R$.

Если $a = 1, b \neq 1$, то $x = 1$; если $a \neq 1, b = 1$, то $x = -2$.

Если $a = 1, b \neq 1$, то, логарифмируя обе части данного уравнения по основанию a , имеем

$$(x+2) \log_a a = (1-x) \log_a b \text{ или } x+2 = \log_a b - x \log_a b, \\ (1 + \log_a b)x = \log_a b - 2. \quad (1)$$

Если $1 + \log_a b = 0$, т. е. при $b = \frac{1}{a}$ правая часть уравнения (1) будет равна -3 , значит, при $b = \frac{1}{a} \neq 1$ корней нет.

Если $b \neq \frac{1}{a}$, то исходное уравнение (что следует из

$$(1)) \text{ будет иметь корень } x = \frac{\log_a b - 2}{1 + \log_a b}.$$

Ответ: при $b = \frac{1}{a} \neq 1$ корней нет,

$$\text{при } b \neq \frac{1}{a}, x = \frac{\log_a b - 2}{1 + \log_a b}.$$

Пример 2. При каких значениях a уравнение $2 \cdot 5^{x-3} + 16 = 3a + a \cdot 5^{x-3}$ имеет решение?

Решение

Преобразуем данное уравнение:

$$2 \cdot 5^{x-3} - a \cdot 5^{x-3} = 3a - 16 \text{ или } (2-a)5^{x-3} = 3a - 16,$$

$$\text{откуда } 5^{x-3} = \frac{3a - 16}{2 - a}. \quad (1)$$

$$\text{Так как } 5^{x-3} > 0, \text{ то } \frac{3a - 16}{2 - a} > 0. \quad (2)$$

Решим неравенство (2) методом интервалов:

$$a_1 = \frac{16}{3}, a_2 = 2 \quad \begin{array}{c} - \quad + \quad - \\ \hline 2 \quad \frac{16}{3} \end{array} \rightarrow 2 < a < \frac{16}{3}.$$

Прологарифмируем обе части (1) по основанию 5:

$$\log_5 5^{x-3} = \log_5 \frac{3a-16}{2-a} \text{ или } x-3 = \log_5 \frac{3a-16}{2-a}, \text{ откуда}$$
$$x = 3 + \log_5 \frac{3a-16}{2-a}.$$

Ответ: при $2 < a < \frac{16}{3}$, $x = 3 + \log_5 \frac{3a-16}{2-a}$;
при других значениях a корней нет.

Пример 3. При каких значениях a уравнение $9^x - (a+4)3^x + a+3 = 0$ имеет один корень?

Решение

Пусть $3^x = y$, где $y > 0$, тогда получим:

$y^2 - (a+4)y + (a+3) = 0$ — квадратное уравнение относительно y .

$$D = (a+4)^2 - 4(a+3) = a^2 + 8a + 16 - 4a - 12 =$$

$$= (a+2)^2, y_{1,2} = \frac{a+4 \pm (a+2)}{2}, y_1 = a+3, y_2 = 1.$$

Далее имеем $\begin{cases} 3^x = a+3, \\ 3^x = 1; \end{cases}$ отсюда следует, что исходное уравнение имеет один корень, если $a \leq -3$ или $a = -2$.

Ответ: $a \leq -3$ или $a = -2$.

Пример 4. Решить уравнение $\log_4(ax) - \log_4 3x = \log_4(2x+1)$.

Решение

Если $a > 0$, $x > 0$, то $\log_4 \left(\frac{ax}{3x} \right) = \log_4(2x+1)$ или

$$\frac{a}{3} = 2x+1, 2x = \frac{a}{3} - 1, x = \frac{1}{6}(a-3).$$

Заметим, что $x > 0$ при $a-3 > 0$, т. е. при $a > 3$.

Ответ: при $a > 3$, $x = \frac{1}{6}(a-3)$;
при $a \leq 3$ корней нет.

Пример 5. Решить уравнение $\log_a x + 9 \log_x a = 3$.

Решение

Так как $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$, то данное уравнение запишем в виде

$$\frac{1}{2}(\log_a x + 9 \log_x a) = 3 \text{ или } \log_a x + 9 \log_x a = 6. \quad (1)$$

Пусть $\log_a x = y$, тогда $\log_x a = \frac{1}{y}$, и уравнение (1)

примет вид $y + \frac{9}{y} = 6$ или $y^2 - 6y + 9 = 0$,

$(y - 3)^2 = 0$, откуда $y = 3$. Учитывая подстановку, получим $\log_a x = 3$, откуда $x = a^3$.

Ответ: при $a > 0$, $a \neq 1$, $x = a^3$.

Пример 6. Решить уравнение $\lg 2ax + \lg x = \lg(x - 5)$.

Решение

Заметим, что $a > 0$, $x > 5$, тогда, потенцируя данное уравнение, получим

$$\lg(2ax^2) = \lg(x - 5) \text{ или } 2ax^2 - x + 5 = 0,$$

$$D = 1 - 40a, \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 40a}}{4a}. \quad (1)$$

$$\text{Из (1) имеем } \begin{cases} 1 - 40a \geq 0, \\ a > 0, \end{cases} \text{ откуда } 0 < a \leq \frac{1}{40}.$$

Учитывая, что $x > 5$, получим

$$\begin{cases} 0 < a \leq \frac{1}{40}, \\ 1 - \sqrt{1 - 40a} > 20a; \end{cases} \quad (2)$$

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 40a}}{4a} > 5. \quad (3)$$

Система (2) имеет решение при любых $0 < a \leq \frac{1}{40}$, а

неравенство (3) имеет смысл при любых $0 < a \leq \frac{1}{40}$.

Если $a = \frac{1}{40}$, то из (1) получим $x = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{40}} = 10$.

Ответ: при $a = \frac{1}{40}$ один корень $x = 40$;

при $0 < a < \frac{1}{40}$, $x = \frac{1}{4a} (1 \pm \sqrt{1 - 40a})$ — два корня;

при $a \leq 0$ или при $a > \frac{1}{40}$ — нет корней.

2. Показательные и логарифмические неравенства

Пример 7. Решить неравенство $a^{x^2+x} < a^6$, $a > 0$.

Решение

Заметим, что при $a = 1$, неравенство не имеет решений.

Если $a > 1$, то получим неравенство $x^2 + x - 6 < 0$ или $(x - 2)(x + 3) < 0$, откуда $-3 < x < 2$.

Если $0 < a < 1$, то $x^2 + x - 6 > 0$, откуда $x < -3$, $x > 2$.

Ответ: если $a > 1$, $-3 < x < 2$;

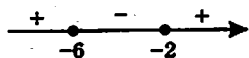
если $0 < a < 1$, $x < -3$, $x > 2$.

Пример 8. Решить неравенство $4^x - a \cdot 2^x - 2a - 3 \leq 0$.

Решение

Пусть $2^x = y$, где $y > 0$, тогда данное неравенство примет вид $y^2 - ay - (2a + 3) \leq 0$,

$$D = a^2 + 4(2a + 3) = a^2 + 8a + 12 = (a + 2)(a + 6).$$



Если $a \leq -6$, $a \geq -2$, то $y \in \left[\frac{a - \sqrt{D}}{2}; \frac{a + \sqrt{D}}{2} \right]$.

Когда $\frac{a + \sqrt{D}}{2} > 0$, т. е. $a + \sqrt{D} > 0$:

если $a \geq -2$, то $a + \sqrt{D} > 0$;

если $a \leq -6$, то $\sqrt{D} > -a$, так как $-a > 0$, $D > a^2$
или $(a+2)(a+6) > a^2$, $8a+12 > 0$, $8a > -12$,
откуда $a > -1,5$.

Итак, исходное неравенство имеет решение при $a \geq -2$.

Пример 9. Решить неравенство $a^{x^2-6x} < 1$.

Решение

Возможны два случая:

1) $a > 1$, тогда данное неравенство примет вид $x^2 - 6x < 0$, $x(x-6) < 0$, откуда $0 < x < 6$;

2) $0 < a < 1$, тогда имеем неравенство $x^2 - 6x > 0$, откуда $x < 0$ и $x > 6$.

Заметим, что при $a = 1$ нет решений.

Ответ: при $a > 1$, $0 < x < 6$;

при $0 < a < 1$, $x < 0$ и $x > 6$;

при $a = 1$ нет решений.

Пример 10. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{a}}(x+2a) < \log_a(x-2a)$.

Решение

Так как $x > 2a$, $a > 0$, $a \neq 1$ и $\log_{\frac{1}{a}}(x+2a) =$

$= \frac{1}{\log_a(x+2a)}$, то:

1) при $a > 1$, имеем $(x-2a)(x+2a) > 1$ или

$x^2 - 4a^2 > 1$, откуда $x > \sqrt{1+4a^2}$;

2) при $0 < a < 1$, $x^2 - 4a^2 < 1$ имеем

$2a < x < \sqrt{1+4a^2}$.

Ответ: при $a > 1$, $x > \sqrt{1+4a^2}$;

при $0 < a < 1$, $2a < x < \sqrt{1+4a^2}$.

Пример 11. Решить неравенство $2 \log_a(x-3) < \log_a(5-x)$.

Решение

Запишем неравенство в виде

$$\log_{1/a}(x-3)^2 < \log_a(5-x). \quad (1)$$

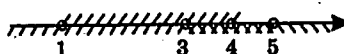
Возможны два случая:

1) $a > 1$, тогда неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} (x-3)^2 < 5-x, \\ x-3 > 0, \\ 5-x > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0, \\ x > 3, \\ x < 5. \end{cases} \quad (2)$$

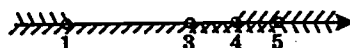
Из неравенства $x^2 - 5x + 4 < 0$ имеем $1 < x < 4$.

Тогда решением системы неравенств (2) будет


$$3 < x < 4;$$

2) $0 < a < 1$, тогда неравенство (1) равносильно си-

стеме
$$\begin{cases} (x-3)^2 > 5-x, \\ x-3 > 0, \\ 5-x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0, \\ x > 3, \\ x < 5, \end{cases}$$

откуда 
$$4 < x < 5.$$

Ответ: при $a > 1$, $3 < x < 4$;

при $0 < a < 1$, $4 < x < 5$.

Пример 12. Решить неравенство $\log_a x + \log_a(x-4) > 1$.

Решение

Заметим, что $x > 4$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Запишем данное неравенство в виде

$$\log_a x(x-4) > 1; \quad (1)$$

1) если $a > 1$, то из (1) получим $x(x-4) > a$ или

$$x^2 - 4x - a > 0; \quad (2)$$

$$D/4 = 4 + a, \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + a}.$$

Неравенство (2) выполняется при $x < 2 - \sqrt{4 + a}$

или при $x > 2 + \sqrt{4 + a}$, и так как $2 - \sqrt{4 + a} < 0$, а

должно быть $x > 4$, то имеем $x > 2 + \sqrt{4 + a}$;

2) если $0 < a < 1$, то из неравенства (1) имеем

$$x(x-4) < a \text{ или } x^2 - 4x - a < 0. \quad (3)$$

Неравенство (3) выполняется при

$$2 - \sqrt{4+a} < x < 2 + \sqrt{4+a}, \text{ и так как } x > 4, \text{ то при } 0 < a < 1 \text{ получим } 4 < x < 2 + \sqrt{4+a}.$$

Ответ: при $a > 1, x > 2 + \sqrt{4+a}$;

при $0 < a < 1, 4 < x < 2 + \sqrt{4+a}$.

Задачи

Решить уравнения и неравенства:

1. Решить уравнение $a^{x+1} = b^{3-x}, a \neq 1, b \neq 1$.
2. При каких значениях a уравнение $3 \cdot 4^{x-2} + 27 = a + a \cdot 4^{x-2}$ имеет решение?
3. При каких значениях a уравнение $4^x - (a+3)2^x + 4a - 4 = 0$ имеет один корень?
4. Решить уравнение $a^{4x} + a^{2x} = a^{6x}$.
5. Решить уравнение $a^x - a^{-x} = 2c$.
6. Решить уравнение $\lg(x-a) - 0,5 \lg(x-b) = \lg 2$.
7. Решить уравнение $\log_{2x}(ax+1) = 0,5$.
8. Решить уравнение $\log_{a^2} x + \log_{x^2} a = 1$.
9. Решить уравнение $2 \lg x - \lg(x-1) = \lg a$.
10. Решить уравнение $\log_2(ax) - \log_2 x = \log_2(x-1)$.
11. Решить неравенство $a^{x^2+x} < a^2, a > 0$.
12. Решить неравенство $\log_{1/x}(a-x) < 1$.
13. Решить неравенство $\log_a(x-2) + \log_a x > 1$.
14. Решить неравенство $2 \log_x a - 1 < \log_a x$.
15. Решить неравенство $\log_a x + \log_2 x > 1$.
16. Решить неравенство $x^{\log_a x} \geq x$.
17. Решить неравенство $x^{\log_a x} < a$.
18. Решить неравенство $a^{x^2-2x} < 1$.
19. Решить неравенство $4^x + 2^x < a$.
20. При каких значениях параметра a неравенство $\log_{a+1}(x^2+4) > 2$ справедливо при любом x ?

§ 44. Комплексные упражнения

1. Построение графиков функций

Пример 1. $y + \frac{|y|}{2} = \frac{x}{2} + |x|.$

Решение

$$1) \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ y + \frac{y}{2} = \frac{x}{2} + x; \end{cases} \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ 2y + y = x + 2x; \end{cases} \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ x = y; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x > 0, y < 0, \\ y - \frac{y}{2} = \frac{x}{2} + x; \end{cases} \begin{cases} x > 0, y < 0, \\ 2y - y = x + 2x; \end{cases} \begin{cases} x > 0, y < 0, \\ y = 3x; \end{cases}$$

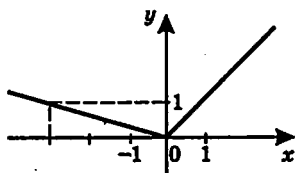
Случай 2) невозможен.

$$3) \begin{cases} x < 0, y < 0, \\ y - \frac{y}{2} = \frac{x}{2} - x; \end{cases} \begin{cases} x < 0, y < 0, \\ y' = -x; \end{cases}$$

Случай 3) невозможен.

$$4) \begin{cases} x < 0, y > 0, \\ y + \frac{y}{2} = \frac{x}{2} - x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0, y > 0 \\ y = -\frac{1}{3}x. \end{cases}$$

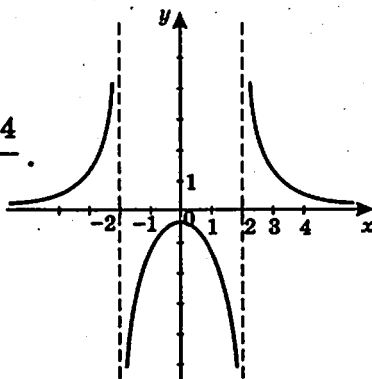


Пример 2. $y = \frac{x^2 + 2|x| + 4}{|x^3| - 8}.$

Решение

$D: x \neq \pm 2:$

$$1) \begin{cases} x \geq 0, \\ y = \frac{1}{x-2}; \end{cases}$$



$$2) \begin{cases} x < 0, \\ y = \frac{x^2 - 2x + 4}{-(x^3 + 8)}; \end{cases} \begin{cases} x < 0, \\ y = -\frac{1}{x+2}. \end{cases}$$

Пример 3. $y = \sqrt{\left(\frac{x-2}{x^3 - 8 - 6x(x-2)}\right)^{-1}} - \sqrt{\frac{4(3-x)^0}{x^{-2}}}.$

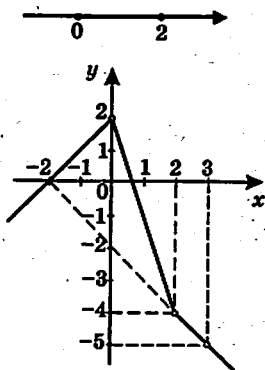
Решение

$$D: \begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq 2, \\ x \neq 0; \end{cases} y = \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x-2}} - \sqrt{4x^2} = |x-2| - 2|x|;$$

$$1) \begin{cases} x < 0, \\ y = 2 - x + 2x; \end{cases} \begin{cases} x < 0, \\ y = x + 2; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 0 < x < 2, \\ y = 2 - x - 2x; \end{cases} \begin{cases} 0 < x < 2, \\ y = -3x + 2; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x > 2, \\ y = -x - 2. \end{cases}$$



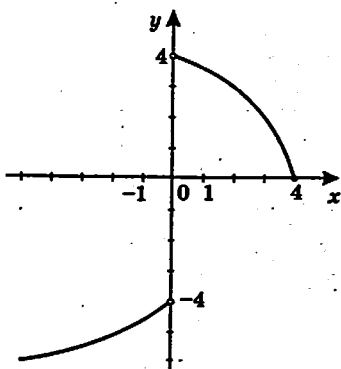
Пример 4. $y = \frac{2|x|}{x} \sqrt{4-x}.$

Решение

$$D: \begin{cases} x \neq 0, \\ x \leq 4; \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} 0 < x \leq 4, \\ y = 2\sqrt{4-x}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x < 0, \\ y = -2\sqrt{4-x}. \end{cases}$$



Пример 5. $y - |y| = x - |x|$.

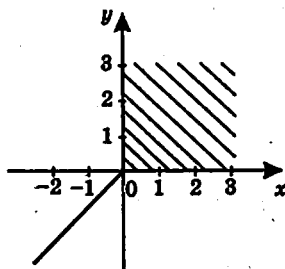
Решение

$$1) \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ y - y = x - x, \\ 0 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x < 0, y < 0, \\ y + y = x + x, \\ y = x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x > 0, y < 0, \\ y + y = x - x, \quad y = 0 - \text{не удовл.}, \\ y = 0; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x < 0, y > 0, \\ y - y = x + x, \quad x = 0 - \text{не удовл.}, \\ x = 0; \end{cases}$$



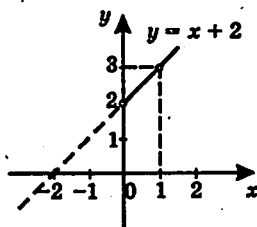
Пример 6. $y = (\log_{2003} x^{2003})^0 \cdot \frac{|x^3| + 8}{x^2 - 2x + 4}$.

Решение

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$y = 1 \cdot \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x^2 - 2x + 4},$$

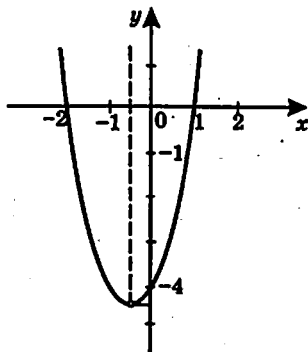
$$y = x + 2.$$



Пример 7. $y = \frac{((x^2 + x - 2)^2)'}{2x + 1}$.

Решение

$$\begin{cases} x \neq -0,5, \\ y = \frac{2(x^2 + x - 2)(2x + 1)}{2x + 1} = 2(x - 1)(x + 2). \end{cases}$$

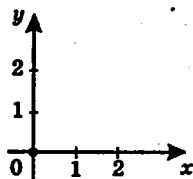


Пример 8. $y = \frac{\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\operatorname{arctg} \sqrt{3}}{\arcsin(2002^{2003})} \cdot {}^{2003}\sqrt{x}.$

Решение

$$y = \frac{\frac{2\pi}{3} - 2 \cdot \frac{\pi}{3}}{\arcsin(2002^{2003})} \cdot {}^{2003}\sqrt{x} =$$

$$= 0 \cdot {}^{2003}\sqrt{x} = 0; \quad \begin{cases} y = 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$$



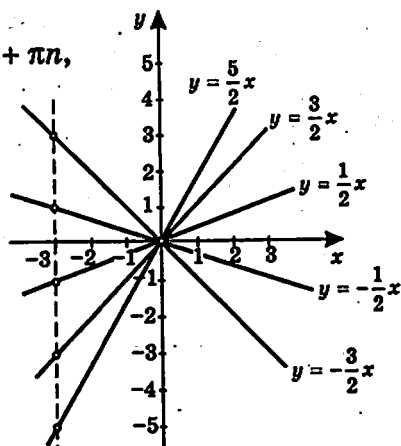
Пример 9. $\cos \frac{\pi y}{x} = \frac{x^3 + 8 + 6x(x+2)}{x+2} - x^2 - \frac{4}{x^{-1}} - 4x^0.$

Решение

$$\cos \frac{\pi y}{x} = \frac{(x+2)^3}{x+2} - x^2 - 4x - 4 = x^2 + 4x + 4 - x^2 - 4x - 4 = 0;$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi y}{x} = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\pi y}{x} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x \neq 0, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \left(\frac{1}{2} + n\right)x, \\ x \neq 0, \\ x \neq -2; \end{cases}$$



$$1) \begin{cases} n = 0, \\ y = \frac{1}{2}x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} n = 1, \\ y = \frac{3}{2}x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} n = 2, \\ y = \frac{5}{2}x; \end{cases}$$

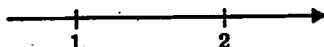
$$4) \begin{cases} n = -1, \\ y = -\frac{1}{2}x; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} n = -2, \\ y = -\frac{3}{2}x. \end{cases}$$

Пример 10. $y = |x^2 - 3x + 2| + x - 3$.

Решение

$$x_1 = 1, x_2 = 2$$



$$1) \begin{cases} x \leq 1, \\ y = x^2 - 3x + 2 + x - 3 = x^2 - 2x - 1; \end{cases}$$

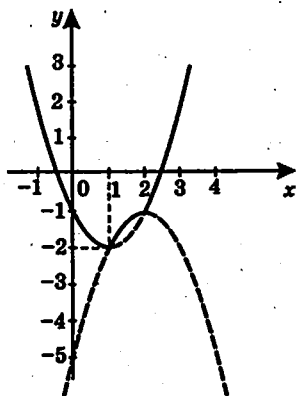
$$\begin{cases} x \leq 1, \\ y = x^2 - 2x - 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 1 < x \leq 2, \\ y = -x^2 + 3x - 2 + x - 3 = -x^2 + 4x - 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 < x \leq 2, \\ y = -x^2 + 4x - 5; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x > 2, \\ y = x^2 - 3x + 2 + x - 3 = x^2 - 2x - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2, \\ y = x^2 - 2x - 1. \end{cases}$$



2. Решение уравнений

Пример 1. Найти больший корень уравнения

$$\left(\operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{ctg} 140^\circ + \frac{x^2}{|x|} \right) (\sqrt{x^2} + \sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ) = (\sqrt{7} - x)(\sqrt{7} + x).$$

Решение

$$D: x \neq 0; \operatorname{ctg} 140^\circ = \operatorname{ctg} (180^\circ - 40^\circ) = -\operatorname{ctg} 40^\circ; \\ \sin^2 40^\circ = \sin^2 (90^\circ - 50^\circ) = \cos^2 50^\circ;$$

$$\left(-1 + \frac{x^2}{|x|} \right) (|x| + 1) = 7 - x^2;$$

$$1) x > 0, (x - 1)(x + 1) = 7 - x^2, \\ x^2 - 1 = 7 - x^2, 2x^2 = 8, x^2 = 4, \\ x = \pm 2; \text{ так как } x > 0, \text{ то } x = 2;$$

$$2) x < 0, (-1 - x)(1 - x) = 7 - x^2 \\ \text{или } 1 - x^2 = x^2 - 7, 2x^2 = 8, x^2 = 4, x = \pm 2, x = -2.$$

Тогда $x = 2$ — больший корень уравнения.

Ответ: $x = 2$.

Пример 2. Решить уравнение $(2x - 5)^2 + |y| = 0$.

Решение

$$\begin{cases} (2x - 5)^2 \geq 0, \\ |y| \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x - 5)^2 = 0, \\ |y| = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 2,5, \\ y = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x = 2,5; y = 0$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x - 2 + 2\sqrt{x - 3}} = 2\sqrt{x - 3}.$$

Решение

$$D: x \geq 3; \sqrt{1 + 2\sqrt{x - 3} + (x - 3)} = 2\sqrt{x - 3};$$

$$\sqrt{(1 + \sqrt{x - 3})^2} = 2\sqrt{x - 3}; \begin{cases} |1 + \sqrt{x - 3}| = 2\sqrt{x - 3}, \\ x \geq 3; \end{cases}$$

$$1 + \sqrt{x - 3} = 2\sqrt{x - 3}, \sqrt{x - 3} = 1, x - 3 = 1, x = 4.$$

Ответ: $x = 4$.

Пример 4. Решить уравнение $\cos 2003^\circ + \cos 23^\circ +$

$$+ \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{|x|} = \sqrt{x^2} - 3 \sin 30^\circ.$$

Решение

$$D: x \neq 0; \cos 2003^\circ = \cos (6 \cdot 360^\circ - 157^\circ) = \\ = \cos 157^\circ = \cos (180^\circ - 23^\circ) = -\cos 23^\circ;$$

$$-\cos 23^\circ + \cos 23^\circ + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{|x|} = |x| - 3 \cdot \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{|x|} = |x| - \frac{3}{2}; 2|x|^2 - 3|x| - 2 = 0, |x| = \frac{3 \pm 5}{4},$$

откуда $|x| = 2$, тогда $x = \pm 2$, $|x| = -\frac{1}{2}$ — нет корней.

Ответ: $x = \pm 2$.

Пример 5. Решить уравнение $3^{\frac{1}{\log_3 x}} = \sqrt{4-x}$.

Решение

$$D: \begin{cases} 0 < x \leq 4, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad 3^{\log_3 x} = \sqrt{4-x}; \quad 3^{\frac{1}{\log_3 x}} = \sqrt{4-x};$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{4-x}, \quad x = 4-x, \quad 2x = 4, \quad x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

Пример 6. Решить уравнение $(\cos 7 \cdot \cos (2\pi - 7) -$

$$- \sin 7 \sin (\pi + 7)) \sqrt{\frac{x^3 - 8}{x - 2}} = x + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}.$$

Решение

$$D: x \neq 2; (\cos^2 7 + \sin^2 7) \sqrt{x^2 + 2x + 4} =$$

$$= x + \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} = x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}; \quad \sqrt{x^2 + 2x + 4} = x - 1,$$

$$x - 1 > 0, \quad x^2 + 2x + 4 = x^2 - 2x + 1, \quad 4x = -3, \quad \text{откуда}$$

$$x = -\frac{3}{4} - \text{не удовлетворяет условию } x - 1 > 0.$$

Ответ: нет корней.

Пример 7. Решить уравнение $\sin (\pi \sqrt{4 - 3x - x^2}) = (|x| + x)^0$.

Решение

1) $x \leq 0, (|x| + x)^0 = (-x + x)^0 = 0^0$ — не существует.

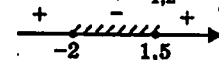
$$2) \begin{cases} x > 0, \\ 4 - 3x - x^2 \geq 0, \\ \pi \sqrt{4 - 3x - x^2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n = 0, 1, \dots; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ 4 - 3x - x^2 \geq 0, \\ \sqrt{4 - 3x - x^2} = \frac{1}{2} + 2n; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + 3x - 4 \leq 0, \\ 4 - 3x - x^2 = \left(\frac{1}{2} + 2n\right)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ -4 \leq x \leq 1, \\ 4 - 3x - x^2 = \frac{1}{4} + 2n + 4n^2; \\ 0 < x \leq 1, \\ 4x^2 + 12x - 15 + 2n + 4n^2 = 0; \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{4} \left(-6 \pm \sqrt{36 + 4(15 - 2n - 4n^2)} \right) = \\ = \frac{1}{2} \left(-3 \pm \sqrt{24 - 2n - 4n^2} \right),$$

$$24 - 2n - 4n^2 \geq 0, \quad 2n^2 + n - 12 \leq 0, \quad n_{1,2} = \frac{1}{4}(-1 \pm 7),$$

откуда $n_1 = 1,5; n_2 = -2$, 

$-2 \leq n \leq 1,5$, тогда $n = 0; \pm 1; -2$.

$$1) n = 0; \begin{cases} x = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{24}), \\ 0 < x \leq 1; \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}(-3 + 2\sqrt{6});$$

$$2) n = 1; \begin{cases} x = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{8}), \\ 0 < x \leq 1; \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}(-3 + 3\sqrt{2});$$

$$3) n = -1; \begin{cases} x = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{30}), \\ 0 < x \leq 1, \end{cases} \text{ нет решений;}$$

$$4) n = -2; \begin{cases} x = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{12}), \\ 0 < x \leq 1; \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}(-3 + 2\sqrt{3}).$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{2}(-3 + 2\sqrt{6}); x = \frac{3}{2}(-1 + \sqrt{2}); \\ x = \frac{1}{2}(-3 + 2\sqrt{3}).$$

Пример 8. Решить уравнение $\arccos \sqrt{1 - 2x - x^2} =$
 $= \arcsin \frac{1}{2}.$

Решение

$$D: 0 \leq 1 - 2x - x^2 \leq 1; \arccos \sqrt{1 - 2x - x^2} = \frac{\pi}{6},$$

$$\sqrt{1 - 2x - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 - 2x - x^2 = \frac{3}{4} \text{ или} \\ 4x^2 + 8x - 1 = 0,$$

$$x = \frac{1}{4}(-4 \pm \sqrt{20}), x = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

$$\text{Ответ: } x = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Пример 9. Решить уравнение $(\sin^2 x)' = \frac{2}{\pi}(\operatorname{arctg} x +$
 $+ \operatorname{arcctg} x).$

Решение

$$2 \sin x \cos x = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2}; \sin 2x = 1, 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$$\text{откуда } x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 10. Решить уравнение $2|x| \ln x +$

$$+ \frac{x^2 - 4}{|x| + 2} = \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{3}}.$$

Решение

$$D: x > 0; 2x \ln x + \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \frac{1}{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)},$$

$$2x \ln x + x - 2 = \frac{1}{-\cos \frac{\pi}{3}}; 2x \ln x + x - 2 = -2 \text{ или}$$

$$x(2 \ln x + 1) = 0, x_1 = 0 \text{ (не удовл., так как } x > 0),$$

$$2 \ln x + 1 = 0, \ln x = -\frac{1}{2}, x_2 = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} > 0.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

3. Решение неравенств

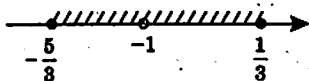
Пример 1. Найти наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{9x^2 + 12x + 4} \leq \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{2}$.

Решение

$$\sqrt{(3x+2)^2} \leq \sqrt{(3x-2)^2} + \sqrt{2}; \text{ так как } \sqrt{x^2} = |x| \text{ и}$$

$$3 - \sqrt{2} > 0, \text{ то получим } |3x+2| \leq 3 - \sqrt{2} + 2 \text{ или}$$

$$|3x+2| \leq 3, -3 \leq 3x+2 \leq 3, -5 \leq 3x \leq 1, -\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}.$$



Наименьшее целое решение: $x = -1$.

Ответ: $x = -1$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\left| \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1} \right| > |3x|^0 + 2,4 \cdot \left(\frac{6}{5} \right)^{-1} - \frac{x^{n+2}}{x^n}.$$

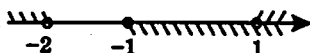
Решение

$$D: x \neq 0, \left| \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} \right| > 1 + \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{6} - \frac{x^n \cdot x^2}{x^n},$$

$$|x+1| > 1 + 2 - x^2, |x+1| > 3 - x^2:$$

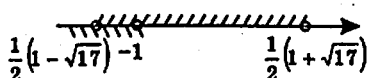
$$1) \begin{cases} x \geq -1, \\ x+1 > 3 - x^2; \end{cases} \begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 + x - 2 > 0; \end{cases}$$

$$x_1 = -2, x_2 = 1, x > 1;$$



$$2) \begin{cases} x < -1, \\ -(x+1) > 3 - x^2; \end{cases} \begin{cases} x < -1, \\ x^2 - x - 4 < 0; \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{17}).$$



Ответ: $x > 1, \frac{1}{2} (1 - \sqrt{17}) < x < -1.$

Пример 3. Решить неравенство $\frac{x^7 \cdot \operatorname{tg} 189^\circ \cdot \sin 180^\circ}{\operatorname{tg} 9^\circ} +$

$$+ \operatorname{ctg} 45^\circ + \sqrt{x^2 - 4x + 4} \geq 5.$$

Решение

$$\frac{x^7 \cdot \operatorname{tg} 189^\circ \cdot 0}{\operatorname{tg} 9^\circ} + 1 + |x - 2| \geq 5, 0 + 1 + |x - 2| \geq 5;$$

$$|x - 2| \geq 4; \begin{cases} x - 2 \geq 4, \\ x - 2 \leq -4; \end{cases} \begin{cases} x \geq 6, \\ x \leq -2. \end{cases}$$

Ответ: $x \geq 6, x \leq -2.$

Пример 4. Решить неравенство

$$\cos 30^\circ \sin^2 60^\circ \operatorname{tg}^2 30^\circ \cdot \frac{4x}{x-3} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{4x}{x-3} < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ или}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4x}{x-3} < \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x}{x-3} < \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{x}{x-3} < 1,$$

$$\frac{x}{x-3} - 1 < 0, \quad \frac{x - x + 3}{x-3} < 0,$$

$$\frac{3}{x-3} < 0, \quad x-3 < 0, \text{ откуда } x < 3.$$

Ответ: $x < 3$.**Пример 5. Решить неравенство**

$$\arcsin \sqrt{4-x^2} > \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

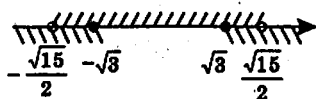
Решение

$$\begin{cases} 0 \leq 4-x^2 \leq 1, \\ \arcsin \sqrt{4-x^2} > \frac{\pi}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq 4-x^2 \leq 1, \\ \sqrt{4-x^2} > \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq 4-x^2 \leq 1, \\ 4-x^2 > \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} < 4-x^2 \leq 1; \quad 3 \leq x^2 < \frac{15}{4},$$

$$\sqrt{3} \leq |x| < \frac{\sqrt{15}}{2}, \quad |x| < \frac{\sqrt{15}}{2},$$

$$-\frac{\sqrt{15}}{2} < x < \frac{\sqrt{15}}{2}; \quad |x| \geq \sqrt{3} \quad \begin{cases} x \geq \sqrt{3}, \\ x \leq -\sqrt{3}. \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } -\frac{\sqrt{15}}{2} < x \leq -\sqrt{3}, \sqrt{3} \leq x < \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Пример 6. Решить неравенство

$$4^{\sqrt{x-3}} \leq \arccos(\cos 2\sqrt{2}).$$

Решение

$$D: x - 3 \geq 0; x \geq 3.$$

$$4^{\sqrt{x-3}} \leq 2\sqrt{2} \text{ или } 2^{2\sqrt{x-3}} \leq 2^{\frac{3}{2}}, 2\sqrt{x-3} \leq \frac{3}{2},$$

$$\sqrt{x-3} \leq \frac{3}{4}, \begin{cases} x-3 \leq \frac{9}{16}, \\ x \geq 3; \end{cases} \begin{cases} x \leq \frac{57}{16}, \\ x \geq 3, \end{cases} \text{ откуда } 3 \leq x \leq \frac{57}{16}.$$

$$\text{Ответ: } 3 \leq x \leq \frac{57}{16}.$$

Пример 7. Решить неравенство

$$\lg\left(\frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \lg\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{3}\right) \leq \lg \frac{2x - |x|}{3}.$$

Решение

$$\lg\left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \lg\left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3}\right) \leq \lg \frac{2x - |x|}{3};$$

$$\lg \frac{2}{3} + \lg \frac{2}{3} \leq \lg \frac{2x - |x|}{3}; \lg \frac{2x - |x|}{3} \geq \lg \frac{4}{9};$$

$$1) \begin{cases} x > 0, \\ \lg \frac{2x - x}{3} \geq \lg \frac{4}{9}; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ \frac{x}{3} \geq \frac{4}{9}; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ x \geq \frac{4}{3} \Rightarrow x \geq \frac{4}{3}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x < 0, \\ \lg \frac{2x + x}{3} \geq \lg \frac{4}{9}; \end{cases} \begin{cases} x < 0, \\ \lg x \geq \lg \frac{4}{9}; \end{cases} \begin{cases} x < 0, \\ x \geq \frac{4}{9} \end{cases} - \text{нет ре-}$$

шений.

Пример 8. Решить неравенство $3^{\frac{1}{\log_x 3}} \leq x^2 - 2x + 2$.

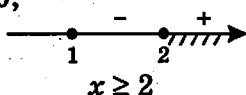
Решение

$$D: \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^2 - 2x + 2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad 3^{\log_3 x} \leq x^2 - 2x + 2;$$

$$x \leq x^2 - 2x + 2; \quad x^2 - 3x + 2 \geq 0,$$

$$x_1 = 1 - \text{не удовл.}$$

$$x_2 = 2.$$



Ответ: $x \geq 2$.

Пример 9. Решить неравенство

$$5^{\log_{\sqrt{5}}(x-1)} \leq \frac{\cos^4 x}{16} + \frac{\sin^2 x}{8} - \frac{\sin^4 x}{16}.$$

Решение

$$D: x > 1. \quad 5^{\log_{\sqrt{5}}(x-1)} = (\sqrt{5})^{2 \log_{\sqrt{5}}(x-1)} = (\sqrt{5})^{\log_{\sqrt{5}}(x-1)^2} =$$

$$= (x-1)^2; \quad (x-1)^2 \leq \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{16} + \frac{2 \sin^2 x}{16} \quad \text{или}$$

$$(x-1)^2 \leq \frac{1}{16} ((\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \sin^2 x),$$

$$(x-1)^2 \leq \frac{1}{16} ((\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \sin^2 x);$$

$$(x-1)^2 \leq \frac{1}{16} ((\cos^2 x + \sin^2 x));$$

$$(x-1)^2 \leq \frac{1}{16} \quad \text{или} \quad |x-1| \leq \frac{1}{4},$$

$-0,25 \leq x-1 \leq 0,25$, $0,75 \leq x \leq 1,25$, и так как $x > 1$, то $1 < x \leq 1,25$.

Ответ: $1 < x \leq 1,25$.

Пример 10. Решить неравенство

$$\sin^2 2003^\circ + \cos^2 203^\circ \geq 2 \sin \frac{x}{2}.$$

Решение

$$\sin^2 2003^\circ = \sin^2(5 \cdot 360^\circ + 203^\circ) = \sin^2 203^\circ;$$

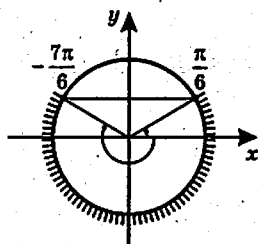
$$\sin^2 203^\circ + \cos^2 203^\circ \geq 2 \sin \frac{x}{2} \text{ или}$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \leq 1, \sin \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2};$$

$$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}; 2\pi n - \frac{7\pi}{6} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$4\pi n - \frac{7\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } 4\pi n - \frac{7\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



Задачи

Построить графики функций:

1. $y + \frac{|y|}{2} = \frac{x}{2} - |x|;$

2. $2|y| = \frac{y}{2x - y};$

3. $y = \frac{|x - 2|}{x - 2} (1 - x);$

4. $y = \frac{|x|x^2 - 7^0}{\sqrt{3}\operatorname{tg} 30^\circ + \sqrt{x^2} + \frac{1}{x^{-2}}};$

5. $y = \frac{3\operatorname{ctg} 81^\circ \cdot \operatorname{ctg} 9^\circ - x}{\operatorname{ctg}^2 30^\circ - \sqrt{x^2}};$

$$6. y = (\log_{13} x^{13})^0 \cdot \frac{|x^3| + 1}{x^2 - x + 1};$$

$$7. y = (x\sqrt{x})' + |x| \sqrt{\frac{1}{x}};$$

$$8. y = ((x^3 + (x^3)')^0 \sqrt{x} (\sqrt{x})');$$

$$9. y = \frac{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} - \arcsin \frac{1}{2}}{\arccos(2002^{2003})} \cdot 2003 \sqrt{x};$$

$$10. y = \sqrt{1 - \cos^2 x} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} \sqrt{x^2 + 2x + 1};$$

$$11. y = 2^{\frac{1}{\log_{\sin x} 2}};$$

$$12. \sin \frac{\pi y}{x} = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4} + \frac{(x - 2)^2}{2 - x};$$

$$13. y = |x^2 - 4x + 3| + |x - 2|;$$

$$14. y = 4^{\log_2 \frac{x^2 - 4}{x - 2}};$$

$$15. y = \sin^2 x - \frac{\sin^4 x}{2} + \frac{\cos^4 x}{2}.$$

Решить уравнения:

$$1. \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} = 2\sqrt{x - 1};$$

$$2. \sqrt{x^4 - 8x|x| + \frac{0,32}{0,02}} = 2003^\circ;$$

$$3. \sqrt{x^2 \sin^2 135^\circ - 2 \operatorname{ctg} 45^\circ} = 2 \cos 45^\circ;$$

$$4. \sqrt{-x} - 2x - 1 = 0;$$

$$5. \sin 2003^\circ \cdot \cos 270^\circ + \sin 30^\circ \cdot \frac{2}{|x|} = \sqrt{x^2} - 8 \operatorname{tg}^2 30^\circ;$$

$$6. 4^{\frac{1}{\log_x 16}} = \sqrt{2 - x};$$

$$7. 2\log_{\frac{1}{2}}(|x| + x) = -1;$$

$$8. \cos(\pi\sqrt{x^2 - 3x - 4}) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} - x + 2;$$

$$9. \arccos\sqrt{2 - 3x - x^2} = \arccos\frac{1}{2};$$

$$10. (\sin^2 x)' = -\frac{2}{\pi}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x);$$

$$11. 2^{\frac{1}{\log_x 2}} = x^2 - 4x + 4;$$

$$12. 3|x|^{\lg\left(\frac{2}{\pi}(\arcsin x + \arccos x)\right)} = 27^{x^2 - x + 1};$$

$$13. \lg \sin x + \lg \cos x = 1;$$

$$14. \frac{\operatorname{tg} 101^\circ \cdot \operatorname{tg} 11^\circ + x^{1,2} x^{\frac{4}{5}}}{|x| + 1} = 3x;$$

$$15. \sin 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) - \cos 2 \cdot \cos(\pi + 3) \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x - 1}} = \\ = x - \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}.$$

Решить неравенства:

$$1. \frac{x^2 - 4}{x + 2} - x \leq \frac{|x - 1|}{x - 1} (x + 3);$$

$$2. \sqrt{1 - 6x + 9x^2} \geq \frac{x^2 + x - 2}{x + 2};$$

$$3. \sqrt{-x} - 2x - 3 > 0;$$

$$4. 2x|x| - \frac{3}{x^{-2}} + x^0 < 0;$$

$$5. \frac{2\sin^2 45^\circ + \sqrt{x^2}}{\operatorname{ctg} 63^\circ \operatorname{ctg} 27^\circ - x^2} > 0;$$

$$6. \arcsin(3 - x^2) > \arccos \frac{1}{2};$$

$$7. \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|+x} \geq \operatorname{tg}\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$8. \ln x > 4^{\log_{10} 3};$$

$$9. \lg\left(\frac{3}{\pi} \arccos \frac{1}{2}\right) + \lg\left(\frac{3}{\pi} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geq \lg \frac{3x - |x|}{4};$$

$$10. \arccos(\log_{\frac{1}{3}} x) > \operatorname{arctg} 1;$$

$$11. (2x + |x|)^0 \ln x - \frac{|x|}{x} \cos \frac{7\pi}{3} \leq 0;$$

$$12. x^{\sqrt{x^2-4}} \cdot \operatorname{tg} 13^\circ \operatorname{tg} 73^\circ < (\operatorname{ctg} 2x);$$

$$13. \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} > \frac{\lg 0,1}{\sqrt{2}};$$

$$14. \operatorname{ctg} 45^\circ + \frac{x^7 \operatorname{tg} 269^\circ \cos 270^\circ}{\sin 37^\circ} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} \leq 3;$$

$$15. \frac{2^6 \cdot 4^3}{8^2 \cdot 64} \cdot \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \leq \frac{\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ}{\sqrt{3}}.$$

ТЕСТЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

§ 45. Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы дается 4 часа (240 мин). В работе 26 заданий. Они распределены на 3 части.

Часть 1 содержит 13 заданий (A1–A10 и B1–B3) обязательного уровня по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10–11 классов. К каждому заданию A1–A10 приведены 4 варианта ответа, из которых только один верный. При выполнении этих заданий надо указать номер верного ответа. К заданиям B1–B3 надо дать краткий ответ.

Часть 2 содержит 10 более сложных заданий (B4–B11, C1, C2) по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10–11 классов, а также различных разделов курсов алгебры и геометрии основной и средней школы. К заданиям B4–B11 надо дать краткий ответ, к заданиям C1 и C2 – записать решение.

Часть 3 содержит 3 самых сложных задания, два алгебраических (C3, C5) и одно геометрическое (C4).

За выполнение работы выставяются две оценки: аттестационная отметка и тестовый балл. Аттестационная отметка за усвоение курса «Алгебры и начал анализа» 10–11 классов выставяется по пятибалльной шкале. При ее выставлении не учитывается выполнение четырех заданий (B9, B10, B11, C4). В тексте работы номера этих заданий отмечены звездочкой.

Тестовый балл выставяется по 100-балльной шкале на основе первичных баллов, полученных за выполнение всех заданий работы.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удастся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

**§ 46. Таблица перевода первичных баллов
в тестовые и школьные отметки**

Первич- ный балл	Сертифи- кационный балл	Школь- ный балл	Первич- ный балл	Сертифи- кационный балл	Школь- ный балл
0	0	2	19	70	5
1	10	2	20	72	5
2	18	2	21	74	5
3	25	2	22	76	5
4	29	2	23	78	5
5	34	2	24	80	5
6	38	3	25	82	5
7	41	3	26	83	5
8	43	3	27	84	5
9	46	3	28	85	5
10	49	3	29	86	5
11	51	3	30	88	5
12	54	4	31	89	5
13	56	4	32	90	5
14	59	4	33	92	5
15	61	4	34	93	5
16	64	4	35	96	5
17	66	4	36	98	5
18	68	4	37	100	5

Вариант № 1

Часть 1

При выполнении заданий А1–А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «X» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного ответа.

А1. Вычислите: $\frac{\sqrt[10]{4^8}}{\sqrt[5]{8^2} \cdot \sqrt[5]{4}}$.

- 1) $\sqrt{2}$; 2) 4; 3) 1; 4) 0,5.

A2. Представьте в виде степени выражение $\frac{6 \cdot 8^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{8}{4}}}$.

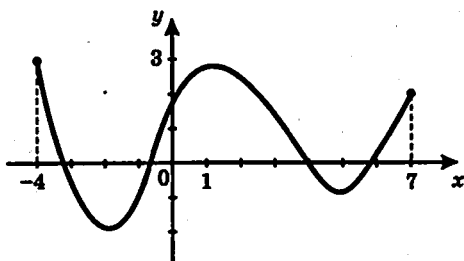
- 1) 3; 2) 4^2 ; 3) $2^{\frac{1}{3}}$; 4) $0,4^{-1}$.

A3. Найдите значение выражения $0,2 \cdot 13^{2 \log_{13} 5}$.

- 1) 0,5; 2) 5; 3) 4; 4) 12,5.

A4. Укажите промежуток, на котором функция $y = f(x)$ принимает только отрицательное значение

- 1) $(-4; -1)$; 2) $(-1; 2)$; 3) $(3; 5)$; 4) $(-3; -1)$.



A5. Найдите область определения функции

$$f(x) = \log_{0,2}(x^2 - x^3).$$

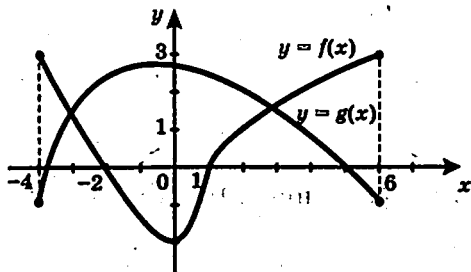
- 1) $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$; 2) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$;
3) $(-\infty; 1)$; 4) $(0; +\infty)$

A6. Укажите наибольшее значение функции

$$y = 2 \sin x - 3.$$

- 1) -5; 2) -1; 3) 2; 4) 1

A7. На рисунке изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-4; 6]$. Ука-



жите те значения x для которых выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$.

1) $[-3; 3]$;

2) $[-4; -3]$;

3) $[3; 6]$;

4) $[-4; -3] \cup [3; 6]$.

A8. Решите уравнение $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

1) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

2) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

3) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

A9. Решите неравенство $0, 2^{6-4x} \leq 25$.

1) $[2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 5]$; 3) $(-\infty; 2]$; 4) $(0, 2; +\infty)$.

A10. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 7 - 3x - 2x^2$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

1) $\frac{1}{4}$;

2) -3 ;

3) $-\frac{3}{4}$;

4) 2 .

Ответом на задания B1–B11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число нужно записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1. Найдите значение выражения $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + 4\alpha\right)$, если

$$\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

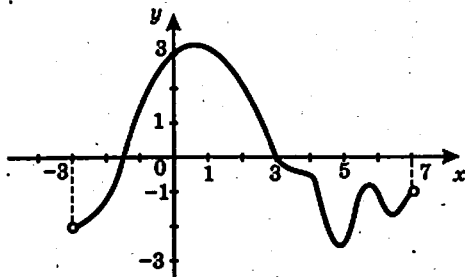
B2. Решите уравнение $\sqrt{16 - \sqrt{x+1}} = 4$.

В3. Решите уравнение $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{2}\right) = \log_{\sqrt{3}} 6 + \log_{\sqrt{3}} 2$.

Часть 2

В4. Вычислите: $\left(3,2\sqrt[3]{36\sqrt{6}} + 2,8\sqrt{6 \cdot \sqrt[3]{36}}\right)^{\frac{12}{11}}$.

В5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 7)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку x_0 , в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.



В6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2 \sin x - \cos 2x \text{ на отрезке } \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right].$$

В7. Решите уравнение $\sqrt{25 + 7x} = 0,5^{x+2}$.

В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

В8. Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого положительного значения x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(1 - 2x)(3x + 2)(4x + 1)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

В9. В стране 8 аэропортов. С наименьшего из них за сутки взлетает 4 самолета, а с каждого последующего в 2 раза больше. Сколько самолетов взлетает за сутки со всех 8 аэропортов?

B10. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $16/\sqrt{3}$ и составляет с боковым ребром угол 30° . Найдите объем параллелепипеда, если периметр его основания равен $20/\sqrt{3}$.

B11. В равнобедренной трапеции длина средней линии равна $5\sqrt{6}$, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1. Решите уравнение $\operatorname{tg} x \sin x - \frac{1}{2\cos x} = \cos x$.

C2. При каком наименьшем целом значении x соответствующие значения функций $f(x) = \log_3 x$ и $g(x) = \log_3(6 - x)$ будет отличаться меньше, чем на 2?

Часть 3

Для записи ответов на задания (C3–C5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполненного задания, а затем обоснованное решение.

C3. Найдите меньший острый угол прямоугольного треугольника (в радианах), имеющего наибольшую площадь среди всех треугольников, у которых сумма длин гипотенузы и одного из катетов равна 13.

C4. Около правильной треугольной пирамиды описан шар, радиус которого равен апофеме пирамиды. Найдите котангенс угла между апофемой и плоскостью основания пирамиды.

C5. Найдите наибольшее целое значение параметра a , при котором множество решений неравенства $x(x - 4) \leq (a + 1)(|x - 2| - 2)$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 3,8, и положительным знаменателем.

Вариант № 2

Часть 1

A1. Вычислите: $\sqrt[5]{-432} \cdot \sqrt[5]{18}$.

- 1) $-\sqrt[5]{2}$; 2) $\sqrt[5]{6}$; 3) 2; 4) -6.

A2. Представьте в виде степени выражение $\frac{15^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}}}{20^{\frac{1}{3}}}$.

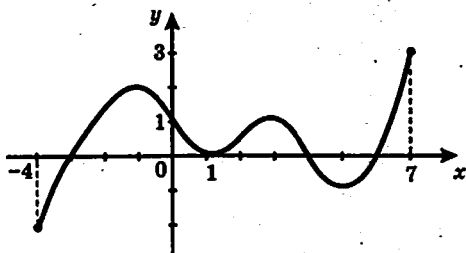
- 1) 6^{-1} ; 2) 4^3 ; 3) $5^{\frac{1}{2}}$; 4) 3.

A3. Найдите значение выражения $3^{5 \log_3 8}$.

- 1) 32; 2) 9; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{9}$.

A4. Укажите промежуток, на котором функция $y = f(x)$ принимает неотрицательные значения.

- 1) $[-3; 1) \cup (1; 3)$; 2) $[-3; 4] \cup [6; 7]$;
3) $(-4; 0)$; 4) $[6; 7]$.



A5. Найдите область определения функции

$$f(x) = \log_{0,3}(x^3 - x^2).$$

- 1) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0)$;
3) $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$; 4) $(1; +\infty)$.

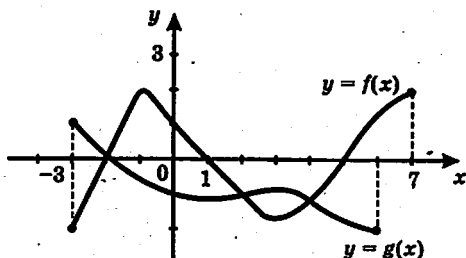
A6. Укажите наименьшее значение функции

$$y = 3 - \frac{1}{3} \cos x.$$

- 1) $\frac{8}{3}$; 2) $\frac{10}{3}$; 3) 2; 4) -5.

A7. На рисунке изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-3; 7]$. Укажите те значения x , для которых выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$.

- 1) $[-2; 2] \cup [4; 7]$; 2) $[-3; -4]$;
3) $[-3; -2] \cup [2; 4]$; 4) $[2; 4]$.



A8. Решите уравнение $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

- 1) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$;
3) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

A9. Решите неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-5} \geq 2,25$.

- 1) $(-\infty; 1,5]$; 2) $\left[\frac{2}{3}; \frac{5}{2}\right]$;
3) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$; 4) $[1,5; +\infty)$.

A10. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 4x^2 - 3x - 1$ и, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

- 1) $\frac{8}{3}$; 2) $-\frac{4}{3}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{3}{8}$.

В1. Найдите значение выражения $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - 8\alpha\right)$, если $\operatorname{ctg} 4\alpha = -\sqrt{7}$.

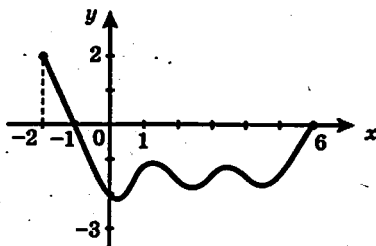
В2. Решите уравнение $\sqrt[3]{5 - \sqrt{x + 15}} = 1$.

В3. Решите уравнение $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{3}\right) = \log_{\sqrt{2}} 15 - \log_{\sqrt{2}} 6$.

Часть 2

В4. Вычислите: $\left(19,3\sqrt[3]{9\sqrt{3}} - 16,3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{9}}\right)^{\frac{3}{4}}$.

В5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-2; 6]$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите точку x_0 , в которой функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение.



В6. Найдите наименьшее значение функции $y = \sin x + \cos 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.

В7. Решите уравнение $1 + \sqrt{x} + 2\sqrt{-x} = 3^x$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

В8. Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = 7x(x + 3)(6x - 9)(2x + 1)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

- В9.** Смешали 15 %-ный и 30 %-ный растворы азотной кислоты и получили 20 %-ный раствор. Во сколько раз исходного 15 %-ного раствора было взято больше, чем 30 %-ного раствора?
- В10.** Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с гипотенузой равной 4, и острым углом 30° . Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 45° . Определить объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью.
- В11.** Средняя линия трапеции длиной 10 делит площадь трапеции в отношении 3 : 5. Найдите длину большего основания.
- С1.** Решите уравнение $\operatorname{tg}^4 x - 1 = \cos 2x$.
- С2.** При каком наибольшем целом значении x соответственные значения функций $f(x) = \log_4(x - 1)$ и $g(x) = \log_4(11 - x)$ будут отличаться меньше, чем на 1?

Часть 3

- С3.** Через какую точку графика функции $f(x) = \sqrt{2 - x}$ следует провести касательную, чтобы площадь треугольника, образованного этой касательной и осями координат, была наименьшей?
- С4.** Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 3, боковое ребро равно 8. Площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной скрещивающимся (непересекающимся) ее ребрам, равна 6. Найдите отношение площадей фигур, на которые эта плоскость разбивает основание пирамиды.
- С5.** Найдите все действительные значения a , при которых уравнение $x^8 + 2ax^4 + 1 = 0$ имеет ровно четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

Вариант № 3

Часть 1

A1. Вычислите: $\sqrt[4]{72 \cdot 18}$.

- 1) 6; 2) 12; 3) $\sqrt[4]{3}$; 4) $\sqrt[4]{2}$.

A2. Представьте в виде степени выражение $\frac{3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{7}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}}$.

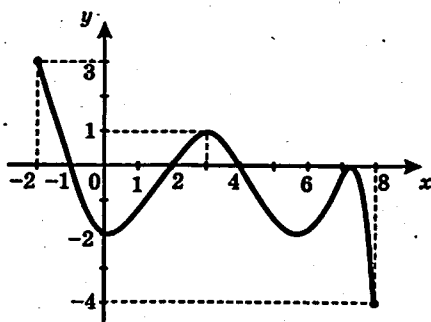
- 1) $9^{\frac{1}{3}}$; 2) 9^2 ; 3) 3^2 ; 4) $3^{\frac{2}{3}}$.

A3. Найдите значение выражения $\log_3 9 - \log_9 27$.

- 1) $\frac{1}{2}$; 2) 3; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) 9.

A4. Укажите множество значений функции, график которой изображен на рисунке.

- 1) $[-2; 8]$; 2) $[-2; -1] \cup [2; 4]$;
3) $[-4; 3]$; 4) $[-4; -2] \cup (-1; 3]$.



A5. Найдите область определения функции

$$f(x) = \log_{\frac{1}{6}}(36 - x^2).$$

- 1) $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$; 2) $(6; +\infty)$;
3) $(-6; 0) \cup (0; 6)$; 4) $(-6; 6)$.

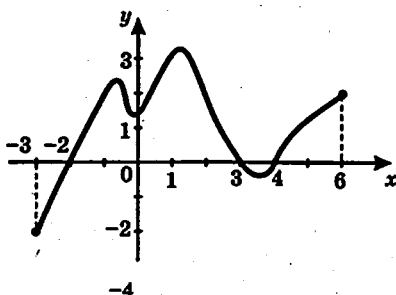
А6. Найдите множество значений функции

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 4.$$

- 1) $(-4; +\infty)$; 2) $(-2; 4)$;
3) $(0; 4]$; 4) $(4; +\infty)$

А7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $[-3; 6]$. Решите неравенство $f(x) \geq 0$.

- 1) $[-2; 3]$; 2) $[-2; 3] \cup [4; 6]$;
3) $[3; 4]$; 4) $[-3; -2] \cup [3; 4]$



А8. Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$.

- 1) $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
3) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

А9. Решите неравенство $\log_{0,2}(0,5x + 3) \leq 1$.

- 1) $(-6; +\infty)$; 2) $(-\infty; -5,6] \cup (0,2; +\infty)$;
3) $(1; 6) \cup (8; +\infty)$; 4) $[-5,6; +\infty)$.

А10. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x) = \frac{3}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -3$.

- 1) $-\frac{1}{3}$; 2) -1 ; 3) 6 ; 4) 3 .

В1. Найдите значение $\operatorname{tg}(\alpha + 45^\circ)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

В2. Решите уравнение $\frac{x-2}{\sqrt{x}-2} = 2-x$.

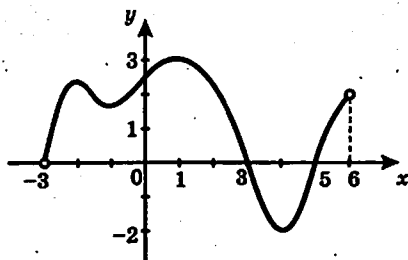
В3. Решите уравнение $\log_5(x-10) = 2 + \log_5 2$.

Часть 2

В4. Вычислите:

$$\left(\sqrt{\left(\sqrt{3} - \frac{5}{2} \right)^2} - \sqrt[3]{(2 - \sqrt{3})^3} \right)^2 - 2^{-\frac{3}{2}} \sin \frac{3\pi}{4}.$$

В5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 6)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку максимума функции $y = f(x)$.



В6. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x-1}} \text{ на отрезке } \left[\frac{3}{4}; 2 \right].$$

В7. Решите уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = \cos \sqrt{x-2}$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

В8. Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = (6x-5)(x^2+3)(4x^2-x)(x^2-1)$.

Найдите количество нулей функции $y = f(x)$.

В9. Зарплата вахтера составляла 4000 руб. Затем зарплату повысили на 20 %, а вскоре понизили на 20 %. Сколько стал получать вахтер?

В10. В основании прямой треугольной призмы лежит равнобедренный треугольник ABC , у которого $AB = BC = 6\sqrt[4]{3}$ и $\angle BAC = 75^\circ$. Через сторону AC проведена плоскость, составляющая угол в 30° к основанию. Найдите площадь сечения, если в сечении получился треугольник.

В11. Найдите длину боковой стороны равнобедренной трапеции, описанной около окружности, если острый угол при основании трапеции равен 60° , а площадь трапеции равна $288\sqrt{3}$.

С1. Решите уравнение $\operatorname{tg} x (\sin x - 1) = 0$.

С2. При каком наименьшем целом значении x соответственные значения функций $f(x) = \lg 2x$ и $g(x) = \lg(4 - x)$, будут отличаться не больше, чем на 1?

Часть 3

С3. Через какую точку графика функции $f(x) = 2 - x^2$, где $x \geq 0$, следует провести касательную, чтобы площадь треугольника, образованного этой касательной и осями координат, была наименьшей?

С4. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 3, боковое ребро равно 7. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной скрещивающимся (непересекающимся) ее ребрам и разбивающей два из боковых ребер пирамиды в отношении 3 : 7.

С5. Корни уравнения $x^3 + 3x^2 + ax - 8 = 0$ при некотором a образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите эту прогрессию.

Вариант № 4

Часть 1

A1. Вычислите: $\sqrt[3]{36 \cdot 48}$.

- 1) 4; 2) $\sqrt[3]{2}$; 3) 12; 4) 6.

A2. Представьте в виде степени выражение

$$\frac{2^{-6,3} \cdot 2^{3,7}}{16^{-3,1}}.$$

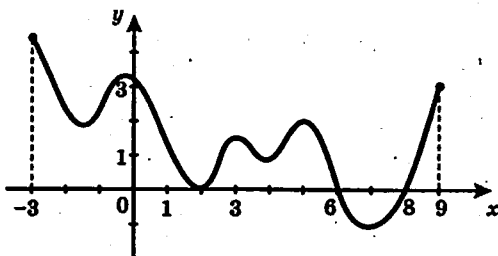
- 1) $2^{9,8}$; 2) $4^{-7,4}$; 3) $4^{18,3}$; 4) $2^{0,4}$.

A3. Найдите значение выражения $\log_4 64 + \log_8 64$.

- 1) $\log_2 5$; 2) 4; 3) $\log_2 3$; 4) 5.

A4. Функция $y = f(x)$ задана графиком на промежутке $[-3; 9]$. Укажите множество значений аргумента, при которых функция принимает неположительные значения.

- 1) (6; 8); 2) $\{2\} \cup [6; 8]$;
3) $(-3; 2) \cup (2; 6)$; 4) $(2; 6) \cup (8; 9]$.



A5. Найдите область определения функции

$$f(x) = \log_{0,8}(x^2 - 9).$$

- 1) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 2) (0,6; 3);
3) $(-3; 3)$; 4) $(3; +\infty)$.

A6. Найдите множество значений функции

$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x} - 5.$$

- 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) (0; 5);
3) $(-4; +\infty)$; 4) $(-5; +\infty)$.

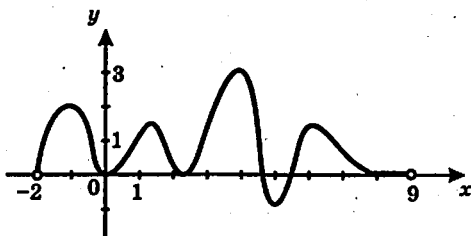
В3. Решите уравнение $\lg(3x - 2) = 3 - \lg 25$.

Часть 2

В4. Вычислите:

$$\left(\sqrt{\left(\sqrt{7} - \frac{7}{2} \right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{5}{2} - \sqrt{7} \right)^3} \right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} \cos \frac{7\pi}{4}.$$

В5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-2; 9)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите количество промежутков, на которых функция $y = f(x)$ возрастает.



В6. Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 2|x - 2|$.

В7. Решите уравнение $2 \sin \frac{\pi}{2} x = x^2 - 2x + 3$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

В8. Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = (x - 0,5)(2x + 3)(x + 1)(7x - 1)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

В9. Цену на товар снизили сначала на 20 %, а затем еще на 15 %. При этом он стал стоить 2380 рублей. Какова была первоначальная цена товара?

В10. В правильной треугольной призме через сторону основания проведено сечение под углом 30° к плоскости основания. Площадь полученного сечения равна 8. Найдите длину стороны основания призмы.

В11. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна $98\sqrt{3}$. Найдите длину средней линии трапеции, если угол при меньшем основании трапеции равен 120° .

С1. Решите уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0$.

С2. При каком наибольшем целом значении x соответственные значения функций $f(x) = \lg(x + 1)$ и $g(x) = \lg(7 - x)$ будут отличаться не больше, чем на 1?

Часть 3

С3. В равносторонний треугольник со стороной 8 вписан прямоугольник, две вершины которого лежат на основании, а две другие на боковых сторонах. Найдите наибольшую из площадей таких прямоугольников.

С4. В треугольной пирамиде $МABC$ все плоские углы при вершине A прямые, длина каждого ребра, исходящего из точки A , равна 9. Вычислите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости MBC и параллельно ребру BC .

С5. При каких значениях параметра a четыре корня уравнения $x^4 + (a - 3)x^2 + (a + 10)^2 = 0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

Вариант № 5

Часть 1

А1. Вычислите: $\sqrt[3]{-1,8} \cdot \sqrt[3]{0,12}$.

1) -3; 2) -0,6; 3) -0,4; 4) $-\sqrt[3]{2}$.

A2. Упростите выражение $3 \cdot \left(3^{\frac{1}{2}} a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \right)^6$.

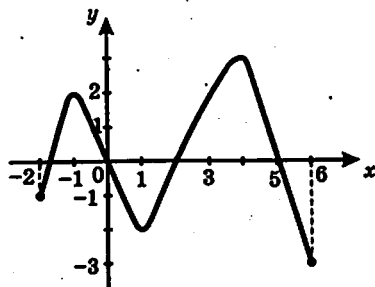
- 1) $243 a^{\frac{2}{3}}$; 2) $81 a^7$; 3) $27 a^3$; 4) $a^{\frac{1}{3}}$.

A3. Найдите значение выражения $16^{\log_4 3 - 0,25 \log_2 3}$.

- 1) 4; 2) 3; 3) 0,5; 4) 2.

A4. Функция $y = f(x)$ задана графиком на отрезке $[-2; 6]$. Укажите промежуток, которому принадлежат ее точки экстремума.

- 1) $[-2; 0]$; 2) $[-2; 6]$; 3) $[-1; 4]$; 4) $[0; 6]$.



A5. Найдите сумму целых чисел, принадлежащих

области определения функции $y = \sqrt{1 - 4x^3 \cdot 16^x}$.

- 1) -3; 2) 5; 3) 7; 4) 6.

A6. Найдите множество значений функции

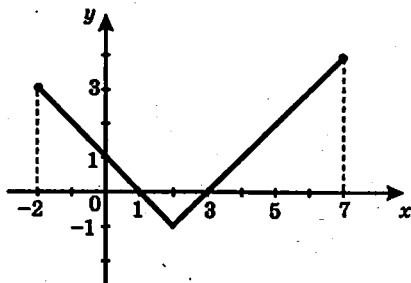
$$y = -\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x + 3.$$

- 1) $(-2; 3)$; 2) $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$;
3) $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$; 4) $(1; 5)$.

A7. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-2; 7]$.

Укажите решение неравенства $f(x) - 1 \leq 0$.

- 1) $[-2; 0]$; 2) $\{2\}$; 3) $[0; 4]$; 4) $[3; 7]$.



A8. Решите уравнение $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sin \frac{2\pi}{3}$.

1) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

3) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

A9. Найдите наибольшее целое значение x , удовлетворяющее неравенству $\log_{\frac{4}{3}}(2x - 5) + \log_{\frac{3}{4}} 13 < 0$.

1) 6; 2) 8; 3) 4; 4) 5.

A10. Точка движется по координатной прямой по закону $x(t) = 2,5t^2 - 4t - 11$, где $x(t)$ — координата точки в момент времени t . В какой момент времени скорость будет равна 21?

1) 8; 2) 12; 3) 10; 4) 5.

B1. Найдите значение выражения $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$,

если $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$.

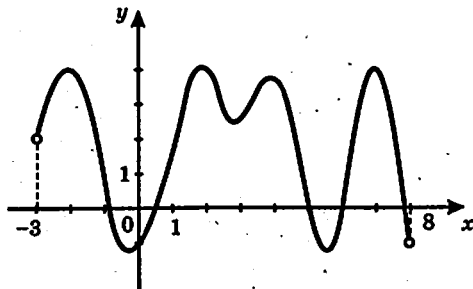
B2. Решите уравнение $\sqrt{x} - \sqrt{x+3} = 3$.

B3. Решите уравнение $\log_{4,3}(2x - 7) - \log_{4,3} 4 = \log_{4,3} 7$.

Часть 2

В4. Вычислите: $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - 8 \sin^2 \frac{33\pi}{16} \cos^2 \frac{31\pi}{16}$.

В5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 8)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите число точек максимума функции $y = f(x) - 3$ на промежутке $(-3; 8)$.



В6. Найдите наибольшее значение функции $y = -x^2 + 4|x + 1| - 6$ на отрезке $[-2; 1]$.

В7. Решите уравнение $13^x = \sqrt{177 - 8x}$. В ответе укажите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

В8. Найдите значение функции $y = f(x)g(-x) - f(-x)g(x)$ в точке $x_0 \neq 0$, если $y = f(x)$ — нечетная функция, $y = g(x)$ — четная, $f(x_0) = 4$, $g(x_0) = 3$.

В9. В первую поездку грузовик израсходовал 10 % бензина, во вторую — 25 % остатка. После этого бензина в баке осталось на 13 л меньше, чем было первоначально. Сколько литров бензина находилось в баке первоначально?

В10. В правильной треугольной призме площадь сечения, проходящего через боковое ребро призмы перпендикулярно противоположащей боковой грани, равна $\sqrt{3}$, а длина стороны основания призмы рав-

на $\sqrt[4]{3}$. Найдите площадь полной поверхности призмы.

В11. Окружность касается сторон угла с вершиной A в точках M и N . На этой окружности внутри $\triangle MAN$ взята точка O . Расстояние от точки O до прямых AM и AN равно соответственно 4 и 9. Найдите расстояние от точки O до хорды MN .

С1. Решите уравнение $2(\sin 2x + \cos 2x) + \sin 4x + 1 = 0$.

С2. Найдите все значения аргумента x , при которых

точки графика функции $y = \frac{3^{2x+1} + 9}{2x - 13}$ лежат не выше соответствующих точек графика функции $y = \frac{28 \cdot 3^x}{2x - 13}$.

Часть 3

С3. В фигуру, ограниченную параболой $y = 3 - x^2$ и осью Ox , поместили прямоугольник, две вершины которого лежат на параболе, а две другие — на оси Ox . Найдите наибольший из периметров таких прямоугольников.

С4. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, длины всех ребер равны 12. Через точку K , делящую отрезок AD в отношении $2 : 1$, считая от точки A , проведена плоскость, параллельная плоскости AMB . Вычислите площадь полученного сечения.

С5. Числа $2 \sin^2 x$, $\cos x - \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2 \sin^2 x}$ являются членами геометрической прогрессии с номерами p , $p + 1$, $p + 2$ соответственно. Известно, что 15-й член этой прогрессии равен $27/8$. Найдите все значения x и p .

Вариант № 6

Часть 1

A1. Вычислите: $\sqrt[4]{12 \cdot 108}$.

- 1) 16; 2) 4; 3) $\sqrt[4]{3}$; 4) 6.

A2. Упростите выражение $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^2 \cdot a^{\frac{2}{3}}$.

- 1) $a^{\frac{13}{6}}$; 2) $a^{\frac{9}{2}}$; 3) a ; 4) a^4 .

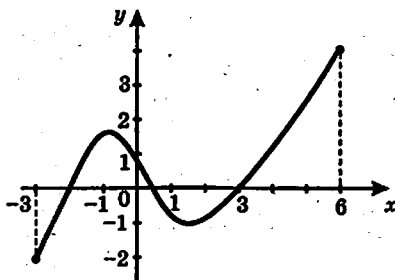
A3. Найдите значение выражения

$$10^{2 - \lg 2} - 25^{\log_5 7}.$$

- 1) 0,5; 2) -3; 3) 1; 4) 10.

A4. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-3; 6]$. Укажите число целых значений аргумента, при которых функция положительна.

- 1) 6; 2) 5; 3) 7; 4) 8.



A5. Найдите число целых значений аргумента из области определения функции $y = \sqrt{\log_4(3x - x^2 + 1)}$.

- 1) 4; 2) 3; 3) 5; 4) 2.

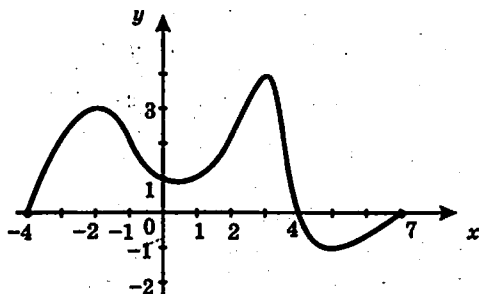
A6. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{6}{\pi} \arcsin x + 1.$$

- 1) $[1; 6]$; 2) $(-6; 6)$; 3) $[-2; 4]$; 4) $(-\infty; 1)$.

A7. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-4; 7]$.
Укажите количество целых решений неравенства $f(x) \geq 1$.

- 1) 5; 2) 7; 3) 9; 4) 8.



A8. Решите уравнение $\cos(2\pi - x) = \cos \frac{2\pi}{3}$.

1) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

3) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

A9. Найдите наибольшее целое x , удовлетворяющее

неравенству $\log_{0.25} \left(2 - \frac{x}{3} \right) + \log_4 2 > 0$.

- 1) -2; 2) 4; 3) 1; 4) 5.

A10. Точка движется по координатной прямой по закону $x(t) = 3,5t^2 + t - 13$, где $x(t)$ — координата точки в момент времени t . В какой момент времени скорость будет равна 43?

- 1) 4; 2) 6; 3) 7; 4) 10.

B1. Найдите значение $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = -3$.

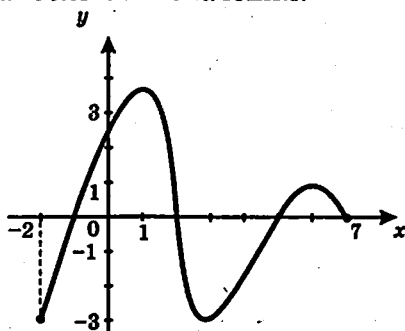
B2. Решите уравнение $\sqrt{x-18} - \sqrt{x-9} = -1$.

B3. Решите уравнение $\lg(13 - 4x) - \lg 7 = \lg 3$.

Часть 2

В4. Вычислите: $4 \sin 50^\circ - \frac{1}{\cos 20^\circ} + \sin 18^\circ \cos 36^\circ$.

- В5.** Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-2; 7]$. На рисунке изображен график ее производной. Определите точку оси Ox , в которой функция $y = f(x)$ достигает наибольшего значения.



- В6.** Найдите наибольшее значение функции

$$y = -\frac{182}{3^{-x} + 4^{-x}} \text{ на отрезке } [-3; 0].$$

- В7.** Решите уравнение $\log_4 x = 2^{-2x} - 0,25$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

- В8.** Найдите значение функции

$$y = g(-x) f(-x) f(x) - f(x) g(-x) g(x) \text{ в точке } x_0 \neq 0, \text{ если } y = f(x) - \text{четная функция, } y = g(x) - \text{четная, } f(x_0) = -3, g(x_0) = 4.$$

- В9.** Сосуд емкостью 10 л наполнен воздухом, содержащим 18 % кислорода. Из сосуда откачали некоторый объем воздуха и добавили такой же объем азота, после чего откачали такой же, как и в первый раз, объем смеси и дополнили таким же объемом азота. В новой смеси оказалось 4,5 % кислорода. Сколько литров смеси выпускалось каждый раз из сосуда?

B10. Через концы трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол, косинус которого равен $\frac{1}{8}$. Длины сторон основания равны 5 и 3. Найдите площадь полученного сечения.

B11. Около окружности радиуса $\sqrt{3}$ описана равнобокая трапеция с большим основанием 6. Боковые стороны трапеции продолжены до их пересечения. Найдите длину боковой стороны полученного равнобедренного треугольника.

C1. Решите уравнение

$$2 \sin^2 x + \sin x + \frac{1}{\sin x} + \frac{2}{\sin^2 x} = 6.$$

C2. Найдите наименьшее целое значение переменной x , при котором точки графика функции

$$y = \frac{5^{4x+1} - 126 \cdot 5^{2x}}{19x - 7}$$

лежат не ниже соответствующих

точек графика функции $y = \frac{25}{7 - 19x}$.

Часть 3

C3. В фигуру, ограниченную параболой $y = 5 - x^2$ и осью Ox , поместили прямоугольник, две вершины которого принадлежат параболе, а две другие — оси Ox . Найдите наибольший из периметров таких прямоугольников.

C4. Середины сторон основания правильной четырехугольной пирамиды объемом 108 служат вершинами основания правильной четырехугольной призмы объемом 54. Вычислите объем общей части призмы и пирамиды.

С5. Числа a, b, c являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите значение выражения

$$\frac{\log_b 3 (\log_a c - \log_c \sqrt[3]{a})}{\log_a 9 - \log_c 9}.$$

Вариант № 7

Часть 1

А1. Вычислите: $0,3 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15} - 0,1$.

- 1) 8,9; 2) 9,3; 3) 12,6; 4) 43,9.

А2. Представьте выражение $6^{3,2} : 6^{-\frac{7}{5}}$ в виде степени с основанием 6.

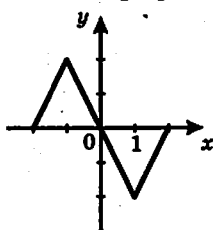
- 1) $6^{3,4}$; 2) $6^{4,6}$; 3) $6^{1,6}$; 4) $6^{1,8}$.

А3. Найдите значение выражения $\frac{3 \log_3 81}{\log_3 \sqrt{27}}$.

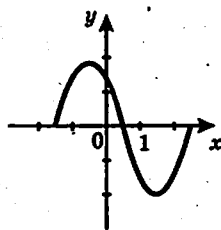
- 1) $\frac{8}{3}$; 2) 3; 3) $\frac{3}{8}$; 4) 8.

А4. Укажите график четной функции.

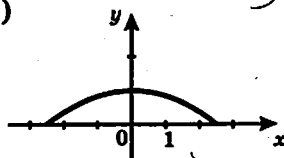
1)



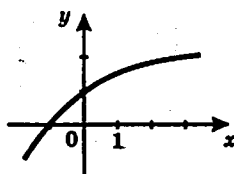
2)



3)



4)



A5. Найдите наименьшее целое число из промежутка $[-5; 5]$, входящее в область определения функции $y = \log_2(3x + 18 - x^2)$.

- 1) -2; 2) 3; 3) -1; 4) 0.

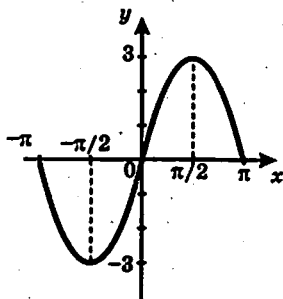
A6. Найдите множество значений функции

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2}.$$

- 1) $(0; +\infty)$; 2) $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$;
3) $(0; 9]$; 4) $(-\infty; +\infty)$.

A7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[-\pi; \pi]$. Укажите номер неравенства, которое не имеет решений.

- 1) $f(x) < 3$; 2) $f(x) > 4$; 3) $f(x) > 0$; 4) $f(x) \geq 3$.



A8. Решите уравнение $4\sin^2 2x = 3$.

- 1) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
3) $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 4) $(-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

A9. Решите неравенство $\sqrt[4]{9^{3x-1}} > 27^{-\frac{2}{3}}$.

- 1) $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 2) $(-\infty; 0)$;
3) $[3; +\infty)$; 4) $(-1; +\infty)$.

- A10.** При движении тела по прямой его скорость $v(t)$ в м/с изменяется по закону $v(t) = 13 + 7t + 3t^2$, где t — время в секундах. Каким будет ускорение тела (в м/с²) через 2 с после начала движения тела?
 1) 7; 2) 11; 3) 15; 4) 19.

B1. Найдите значение выражения

$$\cos(2\alpha - \pi), \text{ если } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

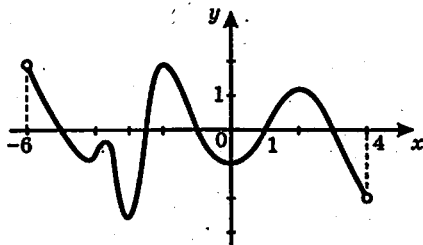
B2. Решите уравнение $\sqrt[3]{25^{x-1}} = \frac{5}{\sqrt[5]{5}}.$

B3. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(2x + 5) = 3^{\log_9 4}.$

Часть 2

B4. Вычислите: $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}.$

- B5.** Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 4)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите число точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси Ox .



- B6.** Найдите наименьшее значение функции $y = \log_2(x^2 - 6x + 17)$ на отрезке $[1; 5]$.

- B7.** Решите уравнение $3^x + 3^{2-x} = 6 \cos^2 \pi x$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

В8. Найдите значение функции

$y = f(-x) f(x) (g(-x))^2 + f(x) g(x) f(-x)$ в точке $x_0 \neq 0$, если $y = f(x)$ — нечетная функция, $y = g(x)$ — нечетная, $f(x_0) = -4$, $g(x_0) = -1$.

В9. Первое число составляет 120 % второго, а отношение первого числа к третьему равно $\frac{9}{8}$. Найдите первое число, если разность между третьим и вторым числами равна 20.

В10. Основанием прямой призмы является прямоугольный $\triangle ABC$. Радиус окружности описанной около него равен 10, катет AC стягивает дугу, равную 60° . Через диагональ боковой грани, проходящей через другой катет BC , проведена плоскость, перпендикулярная этой грани и образующая с плоскостью основания угол 30° . Найдите площадь сечения.

В11. Длина диагонали равнобедренной трапеции равна 12, длина боковой стороны равна 4, синус угла при основании равен 0,9. Вычислите $\sin \frac{\alpha}{2}$, где α — острый угол между диагоналями трапеции.

С1. Решите уравнение $8 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$.

С2. Найдите наибольшее целое значение x , при котором точки графика функции $y = \frac{\log_x^2(6x - 1,8)}{4x - 5}$ лежат ниже соответствующих точек графика функции $y = \frac{7,3}{15 - 7x}$.

Часть 3

С3. Число 50 записать в виде суммы двух положительных чисел, сумма кубов которых наименьшая.

С4. В правильной треугольной пирамиде высота равна 8, а плоский угол при вершине равен 30° . Найдите площадь сечения, проходящего через ребро основания и середину бокового ребра, скрещивающегося с ним.

С5. При каком наибольшем значении параметра a , все неотрицательные решения уравнения $\cos(7a - 2)x - \cos(9a + 4)x$, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

Вариант № 8

Часть 1

A1. Вычислите: $2\frac{17}{30} - 0,1 \cdot \sqrt{20} : 3\sqrt{5}$.

- 1) 8; 2) -13,5; 3) 10; 4) 2,5.

A2. Представьте выражение $\frac{7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{-\frac{1}{3}}}{7^{\frac{5}{2}}}$ в виде степени с основанием 7.

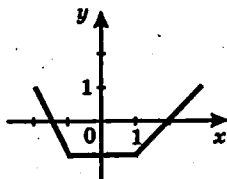
- 1) $7^{\frac{1}{3}}$; 2) $7^{-\frac{5}{3}}$; 3) $7^{-\frac{5}{2}}$; 4) $7^{\frac{3}{2}}$.

A3. Найдите значение выражения $\frac{12 \log_2 \sqrt{32}}{\log_2 64}$.

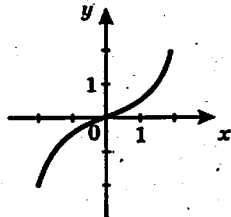
- 1) 5; 2) 12; 3) $\frac{12}{5}$; 4) $\frac{5}{12}$.

A4. Укажите график нечетной функции.

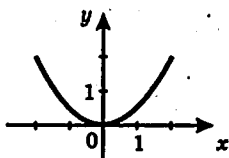
1)



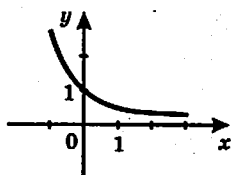
2)



3)



4)



A5. Найдите наибольшее целое число из промежутка $[-7; 7]$, входящее в область определения функции $y = \log_{0.2}(7x + 18 - x^2)$.

- 1) 0; 2) -1; 3) 5; 4) 7.

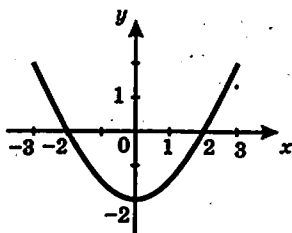
A6. Найдите множество значений функции

$$y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-1}.$$

- 1) $[5; +\infty)$; 2) $(0; 5]$;
 3) $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$; 4) $(0; +\infty)$.

A7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[-3; 3]$. Укажите номер неравенства, которое имеет единственное решение.

- 1) $f(x) \leq -1$; 2) $f(x) \geq 0$; 3) $f(x) \leq -2$; 4) $f(x) < 0$.



A8. Решите уравнение $4\cos^2 2x = 3$.

- 1) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$;
 3) $(-1)^n \frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

A9. Решите неравенство $\sqrt[5]{16^{x+100}} \geq 2^{8(x+1)}$.

- 1) $(-\infty; 10]$; 2) $[4; +\infty)$;
 3) $[2; +\infty)$; 4) $(-\infty; 4)$.

- A10.** При движении тела по прямой его скорость $v(t)$ в м/с изменяется по закону $v(t) = 9t^2 + 4t - 7$, где t — время в секундах. Каким будет ускорение тела (в м/с²) через 5 с после начала движения тела?
 1) 46; 2) 29; 3) 94; 4) 75.

B1. Найдите значение $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -1$ и $\operatorname{tg} \beta = 3$.

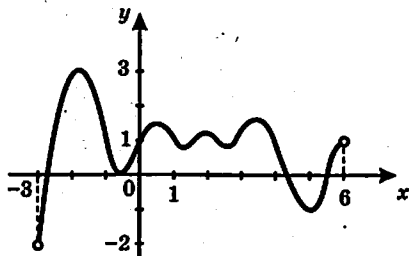
B2. Решите уравнение $\sqrt[3]{4^{x+2}} = \frac{4}{\sqrt[5]{2}}$.

B3. Решите уравнение $\log_2(5 - 2x) = 5^{\frac{2}{\log_2 5}}$.

Часть 2

B4. Вычислите: $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$.

B5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 6)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите число точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси Ox .



B6. Найдите наименьшее значение функции $y = 2 + 6^{\log_{36}(9x^2 - 30x + 25)}$ на отрезке $[-3; 1]$.

B7. Решите уравнение $2^x + 2^{-x} = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

B8. Четная функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой прямой. Ее график на положи-

тельной полуоси совпадает с графиком функции $y = (x + 2)(3x - 1)(3x + 7)(x - 5)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x + 1) = 0$ на отрезке $[-4, 5; 4, 5]$?

В9. В сентябре цена на капусту была снижена на 20 % по отношению к цене в августе. В октябре сентябрьская цена повысилась на 20 %. Сколько процентов составляет октябрьская цена по отношению к августовской?

В10. Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит параллелограмм, где $AD = 8$ и $\angle A = 45^\circ$. Точка $K \in AA_1$. Угол между сечением KCD призмы и плоскостью ABC равен 60° . Найдите отношение AK/A_1K , если расстояние между плоскостями ABC и $B_1C_1D_1$ равно $6\sqrt{6}$.

В11. В $\triangle ABC$ сторона $BC = 6,5$, $AC = 10$, $\sin \angle A = 0,1$. Найдите расстояние от центра окружности, описанной около $\triangle ABC$, до стороны AC .

С1. Решите уравнение $37 \operatorname{tg} 3x = 11 \operatorname{tg} x$.

С2. При каких значениях аргумента x из области определения функции $y = \frac{-10x^2 + 2 \cdot 36^x - 12 \cdot 6^x + 3x}{3 - 10x}$ значения функции его не превышают?

Часть 3

С3. Периметр осевого сечения конуса равен 56. Каким должен быть радиус основания, чтобы при этом объем конуса был наибольшим?

С4. Через диагональ BD основания правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$ проведено сечение BDN под углом 45° к плоскости основания. Точка N делит боковое ребро CM пополам. Найдите объем пирамиды $CDBN$, если длина ребра $MC = 6\sqrt{2}$.

С5. При каких значениях параметра a , уравнение $x(x^{12} - 2ax^6 + a^4) = 0$ имеет ровно пять корней, образующих арифметическую прогрессию?

Вариант № 9

Часть 1

A1. Вычислите:
$$\frac{-9 \cdot \sqrt{\frac{1}{36}} + \frac{\sqrt{256}}{2}}{13}.$$

- 1) 0,3; 2) 0,5; 3) 11; 4) -3.

A2. Представьте выражение $\frac{m^2 : n^{\frac{1}{6}}}{n^{-\frac{3}{2}} \cdot m^{\frac{2}{3}}}$ в виде степени с основанием mn .

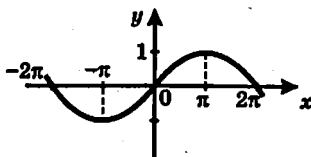
- 1) $(mn)^{-\frac{1}{3}}$; 2) $(mn)^{-\frac{2}{3}}$; 3) $(mn)^{\frac{1}{2}}$; 4) $(mn)^{\frac{4}{3}}$.

A3. Найдите значение выражения $11^{\frac{1}{4 \log_{16} 11}}$.

- 1) 2; 2) 4; 3) $\frac{11}{4}$; 4) $\frac{4}{11}$.

A4. График какой из перечисленных функций изображен на рисунке?

- 1) $y = -\sin 2x$; 2) $y = \sin \frac{x}{2}$;
3) $y = \sin 2x$; 4) $y = -2 \sin x$.



A5. Найдите наименьшее целое число из области определения функции $y = \frac{1}{3} \sqrt{\log_3 \frac{x}{3} - 1}$.

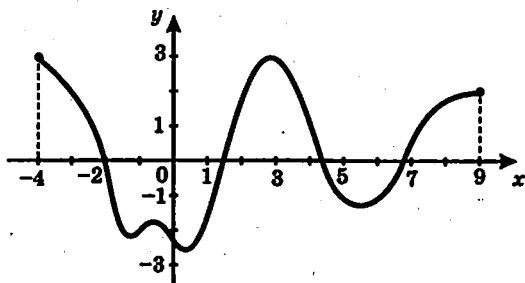
- 1) 9; 2) 4; 3) 2; 4) 5.

A6. Сколько целых чисел принадлежит множеству значений функции $y = 4 \cos^2 4x - 0,5$?

- 1) 3; 2) 5; 3) 4; 4) 2.

A7. Функция $y = f(x)$ заданна на промежутке $[-4; 9]$. Укажите количество целых решений неравенства $2f(x) - 1 \geq 0$.

- 1) 4; 2) 6; 3) 8; 4) 5.



A8. Решите уравнение $3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1$.

- 1) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
3) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

A9. Найдите наименьшее целое значение x , удовлетворяющее неравенству $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} \geq 4$.

- 1) 2; 2) 3; 3) 0; 4) -1.

A10. Функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x) = \ln(x^2 - 8) + 3$. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = F(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

- 1) 3; 2) 4; 3) $\ln 2$; 4) $\ln 0,2$.

B1. Найдите значение $\operatorname{ctg}^2 \left(\frac{7\pi}{2} + 2\alpha \right)$, если $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

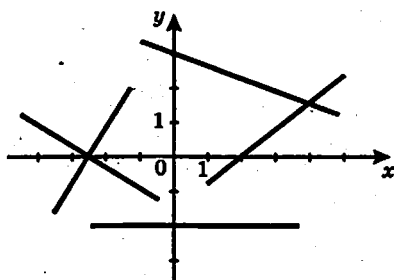
В2. Решите уравнение $\left(\frac{7}{20}\right)^{\frac{5}{\sqrt{x}}-3} = \left(\frac{20}{7}\right)^{\frac{7}{\sqrt{x}}+5}$.

В3. Решите уравнение $6^{\log_1 49 - \log_2 \frac{1}{8}} = \log_{\sqrt[3]{2}}(x - 2)$.

Часть 2

В4. Вычислите: $\left(13^3\sqrt{64\sqrt{8}} + 51\sqrt{8^3\sqrt{64}}\right)^{-\frac{2}{17}}$.

В5. На рисунке изображены прямые, являющиеся касательными к графику функции $y = f(x)$ в точках с абсциссами x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Определите количество неположительных чисел среди значений производной $y = f'(x)$ в точках x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .



В6. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{\arctg(4^{-x})}{\pi(x+2)} \text{ на отрезке } [-3; 0].$$

В7. Решите уравнение $27 \cdot 4^x + 7 \cdot 9^x = 15 \cdot 25^x$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

В8. Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. При всех неположительных x значение этой функции совпадает со значениями функции $g(x) = x(x + 35)$, которая также определена на

- всей прямой. Найдите произведение корней уравнения $f(x) + g(x) = 72$?
- В9.** К раствору, содержащему 60 г соли, добавили 200 г воды, после чего концентрация раствора изменилась на 15 %. Сколько воды содержал раствор?
- В10.** В треугольной призме расстояние между боковыми ребрами относятся как 9 : 10 : 17; боковое ребро равно 1; боковая поверхность равна 6. Определить объем этой призмы.
- В11.** Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник равен 3,5, а радиус описанной окружности равен 7,25. Найдите периметр треугольника.

С1. Решите уравнение $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = \frac{8}{\sin^3 2x} + 12$.

- С2.** Найдите сумму всех целых корней уравнения

$$\frac{|9 - x^2|}{|x + 3|} = |3 - |x||, \text{ не больших 4.}$$

Часть 3

- С3.** Объем правильной треугольной призмы равен 6,75. Какой должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?
- С4.** Около правильной четырехугольной пирамиды $МАВСD$ с основанием $ABCD$ описан шар. Центр шара делит высоту пирамиды в отношении 17 : 8, считая от вершины $М$. Найдите тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.
- С5.** Сколько существует неотрицательных значений параметра a , при которых все неотрицательные решения уравнения $\cos(10a - 3)x = \cos(12a + 5)x$, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

Вариант № 10

Часть 1

A1. Вычислите: $\frac{9\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} + \sqrt{0,16}}{2,8}$.

- 1) $\frac{1}{3}$; 2) -4 ; 3) $\frac{1}{7}$; 4) -2 .

A2. Представьте выражение $\frac{a^2 \cdot b^3}{a^{\frac{5}{7}} : b^{\frac{2}{7}}}$ в виде степени с основанием ab .

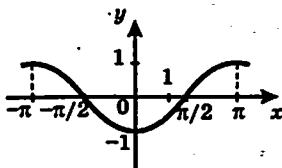
- 1) $(ab)^{\frac{19}{7}}$; 2) $(ab)^{-2}$; 3) $(ab)^{\frac{3}{7}}$; 4) $(ab)^{-4}$.

A3. Найдите значение выражения $64^{\frac{1}{3 \log_{27} 8}}$.

- 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) 8 ; 4) 9 .

A4. График какой из перечисленных функций изображен на рисунке?

- 1) $y = 2 \cos x$; 2) $y = -\cos x$;
3) $y = 2 \cos \frac{x}{2}$; 4) $y = -\cos 2x$.



A5. Укажите наибольшее целое число из области оп-

ределения функции $y = \frac{1}{3} \sqrt{1 - \log_3 \frac{x}{3}}$.

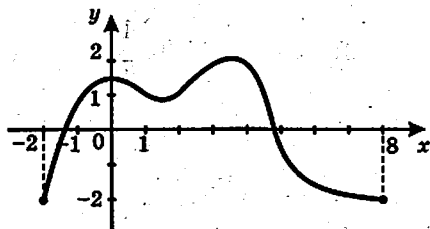
- 1) 8 ; 2) 1 ; 3) 9 ; 4) 6 .

A6. Сколько целых чисел принадлежит множеству значений функции $y = 5 \sin^2 5x - 0,5$?

- 1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 3.

A7. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-2; 8]$. Укажите количество целых решений неравенства $2f(x) + 1 \leq 0$.

- 1) 3; 2) 6; 3) 4; 4) 5.



A8. Решите уравнение $3 \operatorname{ctg}^2 2x = 1$.

- 1) $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$;
3) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

A9. Найдите наименьшее целое значение x , удовлетворяющее неравенству $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2x-7}{x+1}} \geq \frac{5}{2}$.

- 1) -3; 2) 4; 3) 0; 4) 1.

A10. Функция $F(x)$ является первообразной функции

$f(x) = \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} - x \right) + 0,25$. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = F(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = \pi$.

- 1) 0,25; 2) 1; 3) 2,25; 4) 0.

B1. Найдите значение $\operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi}{2} + 4\alpha \right)$, если $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}$.

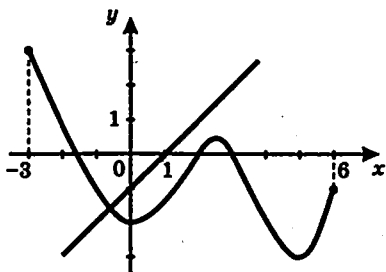
B2. Решите уравнение $\left(\frac{5}{6}\right)^{13\sqrt{x}+5} = \left(\frac{6}{5}\right)^{7\sqrt{x}-45}$.

В3. Решите уравнение $4^{\log_{\sqrt{7}} \sqrt{14} - \log_7 2} = \log_{\sqrt[3]{3}}(x - 7)$.

Часть 2

В4. Вычислите: $\left(8,2\sqrt[3]{49\sqrt{7}} - 1,2\sqrt{7\sqrt[3]{49}}\right)^{\frac{18}{11}}$.

В5. К графику функции $y = f(x)$ заданной на отрезке $[-3; 6]$, проведена касательная в точке с абсциссой x_0 . Определите значение выражения $x_0 + f(x_0)$, если на рисунке изображены эта касательная и график производной $y = f'(x)$ данной функции.



В6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 13 - 16^{\log_4 \sqrt{55-7x}} \text{ на отрезке } [-4; 6].$$

В7. Решите уравнение $13 \cdot 3^x + 9 \cdot 4^x = 3 \cdot 25^x$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

В8. Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. При всех неположительных x значения этой функции совпадают со значениями функции $g(x) = x(x + 24)$, которая также определена на всей прямой. Найдите произведение корней уравнения $f(x) + g(x) = 50$.

В9. Ученик купил две книги за 156 рублей. Если бы первая книга стоила бы на 25 % дороже, а вторая на 30 % дешевле, то их цены были бы одинаковы. Сколько рублей стоит вторая книга?

В10. Площадь основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $16\sqrt{3}$. Через прямую AB проведена секущая плоскость, составляющая угол 60° с ребром CC_1 . Найдите радиус окружности, описанной около получившегося в сечении треугольника.

В11. Две стороны остроугольного треугольника равны соответственно 7 и 15. Найдите радиус вписанного в треугольник круга, если радиус описанного круга равен 12,5.

С1. Решите уравнение
 $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 6 \operatorname{ctg}^2 x - 3 \operatorname{ctg} x - 1 = 0.$

С2. Найдите наибольшее целое значение x , при котором точки графика функции $y = \frac{2 \cdot 3^x + 9 \log_3 x}{18 - 5x}$ лежат не выше соответствующих точек графика функции $y = \frac{18 + 3^{x-1} \log_3 x^3}{18 - 5x}$.

Часть 3

С3. В правильной пирамиде $MABCD$ MO – высота пирамиды. Объем пирамиды равен $\frac{4}{3}\sqrt{2}$. Найдите наименьшую площадь боковой поверхности пирамиды.

С4. В шар радиуса 4 вписана правильная четырехугольная пирамида, основание которой делит перпендикулярный ему радиус пополам. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.

С5. При каких значениях параметра a , неравенство $\frac{x - 3a - 5}{x + 4a - 3} \leq 0$ выполняется для всех x из промежутка $2 \leq x \leq 4$.

§ 47. Ответы

Ответы к заданиям с выбором ответа

Номер вари- анта	Номер задания									
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
1	3	1	2	4	1	2	4	3	3	3
2	4	4	1	2	4	1	3	4	1	4
3	1	3	1	3	4	4	2	3	4	1
4	3	1	4	2	1	4	2	1	3	4
5	2	2	2	3	1	4	3	1	2	4
6	4	1	3	2	1	3	2	2	4	2
7	1	2	4	3	1	3	2	3	4	4
8	4	3	1	2	4	2	3	2	1	3
9	2	4	1	2	1	3	3	1	4	1
10	4	1	4	2	3	2	4	2	3	2

Ответы к заданиям с кратким ответом

Номер вари- анта	Номер задания										
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11
1	0,6	-1	24	36	3	3	-3	5	1020	48	150
2	0,75	1	7,5	9	6	0	0	3	2	2	15
3	-2	0	60	0	3	1	2	3	3840	18	24
4	-7	25	14	0	2	-5	1	4	3500	4	14
5	0,5	1	17,5	0	3	1	1	60	40	7,5	6
6	0,96	34	-2	2,25	2	-2	1	84	5	60	6
7	-0,6	2,2	-2,4	4	5	3	1	0	360	100	0,3
8	2	0,7	-5,5	4	4	4	2	3	88	2	12
9	8	36	8	0,5	3	0,125	0,5	-216	140	1	36
10	1,25	4	10	343	-5	0	1	-125	100	5	2

Ответы к заданиям с развернутым ответом

Номер вари- анта	Номер задания				
	C1	C2	C3	C4	C5
1	$\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	1	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{13}-1}{2}}$	2
2	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$	8	$\left(\frac{4}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$	1 : 3	$\frac{41}{-9}$
3	$\pi n, n \in \mathbb{Z}$	1	$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{4}{3} \right)$	4,41	-4; -1; 2
4	$\frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$	6	$8\sqrt{3}$	$9\sqrt{6}$	$-\frac{109}{7}$
5	$-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$	$(-\infty; -1] \cup [2; 6,5]$	8	$20\sqrt{3}$	$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}; p = 17$

Номер вари- анта	Номер задания				
	C1	C2	C3	C4	C5
6	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$ $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	1	12	50	$1\frac{1}{3}$
7	$-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},$ $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	3	$25 + 25$	$24\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})\sqrt{3\sqrt{3} - 1}$	20
8	$\pi n;$ $\pm \arctg 5 + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$(-\infty; 0,3] \cup [1; +\infty)$	11,2	36	$16\frac{16}{65}$
9	$(-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},$ $n \in \mathbb{Z}$	10	3	$\frac{5\sqrt{2}}{3}$	13
10	$\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	9	$4\sqrt{3}$	$\sqrt{7} - 1$	$(-\infty; -1] \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

§ 48. Решение варианта № 1

Часть 1

A1. Вычислите: $\frac{\sqrt[10]{4^8}}{\sqrt[5]{8^2 \cdot \sqrt{4}}}$.

- 1) $\sqrt{2}$; 2) 4; 3) 1; 4) 0,5.

Решение

Упростим числитель дроби:

$$\sqrt[10]{4^8} = 4^{\frac{8}{10}} = (2^2)^{\frac{4}{5}} = 2^{\frac{8}{5}}.$$

Упростим знаменатель дроби:

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{8^2 \cdot \sqrt{4}} &= \sqrt[5]{8^2 \cdot 4} = \sqrt[5]{(2^3)^2 \cdot 2^2} = \sqrt[5]{2^6 \cdot 2^2} = \\ &= \sqrt[5]{2^8} = 2^{\frac{8}{5}}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\frac{\sqrt[10]{4^8}}{\sqrt[5]{8^2 \cdot \sqrt{4}}} = \frac{2^{8/5}}{2^{8/5}} = 1.$

Верный ответ № 3.

A2. Представьте в виде степени выражение $\frac{6 \cdot 8^{\frac{2}{3}}}{16^{\frac{3}{4}}}$.

- 1) 3; 2) 4^2 ; 3) $2^{\frac{1}{3}}$; 4) $0,4^{-1}$.

Решение

Используя формулу $(a^x)^y = a^{xy}$, получим:

$$\frac{6 \cdot 8^{\frac{2}{3}}}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{6 \cdot (2^3)^{\frac{2}{3}}}{(2^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{6 \cdot 2^2}{2^3} = \frac{6}{2} = 3.$$

Верный ответ № 1.

A3. Найдите значение выражения $0,2 \cdot 13^{2 \log_{13} 5}$.

- 1) 0,5; 2) 5; 3) 4; 4) 12,5.

Решение

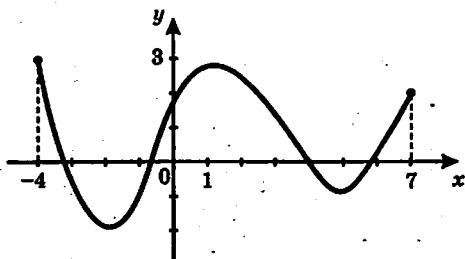
Используя формулы логарифма степени и основное логарифмическое тождество, получим:

$$0,2 \cdot 13^{2 \log_{13} 5} = 0,2 \cdot 13^{\log_{13} 5^2} = 0,2 \cdot 5^2 = \frac{1}{5} \cdot 25 = 5.$$

Верный ответ № 2.

А4. Укажите промежуток, на котором функция $y = f(x)$ принимает только отрицательные значения

- 1) $(-4; -1)$; 2) $(-1; 2)$; 3) $(3; 5)$; 4) $(-3; -1)$.



Решение

Та часть графика функции $y = f(x)$, которая расположена ниже оси Ox , соответствует отрицательным значениям функции. Таких промежутков, как видно из рисунка, два, из которых $(-3; -1)$ совпадает с ответом № 4.

Верный ответ № 4.

А5. Найдите область определения функции

$$f(x) = \log_{0,2}(x^2 - x^3).$$

1) $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$;

2) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$;

3) $(-\infty; 1)$;

4) $(0; +\infty)$.

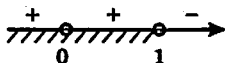
Решение

Поскольку логарифмическая функция определена для положительных значений аргумента, то получим неравенство:

$$x^2 - x^3 > 0 \quad \text{или} \quad x^2(1 - x) > 0.$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, и, учитывая, что $x = 0$ — кратная точка, находим:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$



Следовательно, $D(f) \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$.

Верный ответ № 1.

А6. Укажите наибольшее значение функции

$$y = 2 \sin x - 3.$$

- 1) -5; 2) -1; 3) 2; 4) 1.

Решение

Так как $-1 \leq \sin x \leq 1$, то $-2 \leq 2 \sin x \leq 2$.

Тогда $-2 + (-3) \leq 2 \sin x - 3 \leq 2 + (-3)$,

или $-5 \leq y \leq -1$.

Значит, $y = -1$ — наибольшее значение функции.

Верный ответ № 2.

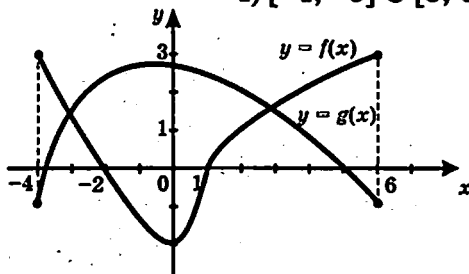
А7. На рисунке изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-4; 6]$. Укажите те значения x для которых выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$.

- 1) $[-3; 3]$;

- 2) $[-4; -3]$;

- 3) $[3; 6]$;

- 4) $[-4; -3] \cup [3; 6]$.



Решение

Как видно из рисунка, точки графика функции $y = f(x)$ расположены не ниже точек графика функции $y = g(x)$, если $-4 \leq x \leq -3$ и $3 \leq x \leq 6$.

Верный ответ № 4.

А8. Решите уравнение $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

- 1) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

- 3) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Решение

Так как $\left| -\frac{1}{2} \right| < 1$,

$$\text{то } 2x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n,$$

$$\text{или } 2x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi n,$$

$$2x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \text{ откуда } (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Верный ответ № 3.

A9. Решите неравенство $0,2^{6-4x} \leq 25$.

- 1) $[2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 5)$;
3) $(-\infty; 2]$; 4) $(0,2; +\infty)$.

Решение

$$\text{Так как } 0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1} \text{ и } 25 = 5^2,$$

то исходное неравенство примет вид:
 $(5^{-1})^{6-4x} \leq 5^2$ или $5^{4x-6} \leq 5^2$.

Поскольку $5 > 1$, то показательная функция $y = 5^x$ — возрастающая, тогда полученное неравенство равносильно неравенству $4x - 6 \leq 2$, или $4x \leq 8$, откуда $x \leq 2$, т. е. $x \in (-\infty; 2]$.

Верный ответ № 3.

A10. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x) = 7 - 3x - 2x^2$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

- 1) $\frac{1}{4}$; 2) -3 ; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) 2.

Решение

Известно, что $f'(x_0) = k$, где k — угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0 . Так как по условию $f(x) = 7 - 3x - 2x^2$, то $f'(x) = (7 - 3x - 2x^2)' = 0 - 3 - 4x$. Согласно условию

$$f'(x) = 0, \text{ или } -3 - 4x = 0, 4x = -3, \text{ откуда } x = -\frac{3}{4}.$$

Верный ответ № 3.

В1. Найдите значение выражения $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + 4\alpha\right)$, если

$$\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Решение

Используя формулы приведения, имеем:

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + 4\alpha\right) = \sin\left(4\pi + \left(\frac{\pi}{2} + 4\alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4\alpha\right) = \cos 4\alpha.$$

$$\text{Но } \cos 4\alpha = \cos 2(2\alpha) = 1 - 2\sin^2 2\alpha.$$

По условию $\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, тогда получим

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{9\pi}{2} + 4\alpha\right) &= 1 - 2\sin^2 2\alpha = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{5} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0,6.\end{aligned}$$

Ответ: 0,6.

В2. Решите уравнение $\sqrt{16 - \sqrt{x+1}} = 4$.

Решение

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$16 - \sqrt{x+1} = 16.$$

$$\sqrt{x+1} = 0, \text{ или } x+1 = 0, \text{ откуда}$$

$x = -1$. Проверка: $\sqrt{16 - \sqrt{-1+1}} = 4, 4 = 4$ — верно.
Значит, $x = -1$ — корень уравнения.

Ответ: -1.

В3. Решите уравнение $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{2}\right) = \log_{\sqrt{3}} 6 + \log_{\sqrt{3}} 2$.

Решение

$$\text{ОДЗ: } x > 0.$$

Потенцируя уравнение, имеем:

$$\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{2}\right) = \log_{\sqrt{3}}(6 \cdot 2), \text{ или}$$

$$\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{2}\right) = \log_{\sqrt{3}} 12, \text{ откуда } \frac{x}{2} = 12, x = 24.$$

Найденный корень удовлетворяет ОДЗ, значит является корнем исходного уравнения.

Ответ: 24.

Часть 2

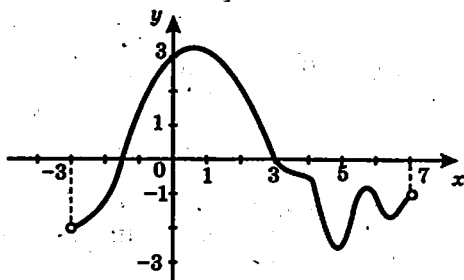
В4. Вычислите: $\left(3,2\sqrt[3]{36\sqrt{6}} + 2,8\sqrt{6 \cdot \sqrt[3]{36}}\right)^{\frac{12}{11}}.$

Решение

$$\begin{aligned} & \left(3,2\sqrt[3]{36\sqrt{6}} + 2,8\sqrt{6 \cdot \sqrt[3]{36}}\right)^{\frac{12}{11}} = \\ & = \left(3,2\sqrt[3]{6^2\sqrt{6}} + 2,8\sqrt{\sqrt[3]{6^3 \cdot 36}}\right)^{\frac{12}{11}} = \\ & = \left(3,2\sqrt[3]{\sqrt{6^4 \cdot 6}} + 2,8\sqrt{\sqrt[3]{6^3 \cdot 6^2}}\right)^{\frac{12}{11}} = \\ & = \left(3,2\sqrt[6]{6^5} + 2,8\sqrt[6]{6^5}\right)^{\frac{12}{11}} = \left(6 \cdot \sqrt[6]{6^5}\right)^{\frac{12}{11}} = \left(6 \cdot 6^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{12}{11}} = \\ & = \left(6^{\frac{11}{6}}\right)^{\frac{12}{11}} = 6^2 = 36. \end{aligned}$$

Ответ: 36.

В5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 7)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку x_0 , в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.



Решение

Как видно из рисунка, данная функция $y = f(x)$ имеет два экстремума: $x = -1,5$ — точка минимума функции и $x = 3$ — точка максимума, где и достигается наибольшее значение функции.

Ответ: 3.

В6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2 \sin x - \cos 2x \text{ на отрезке } \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right].$$

Решение

Так как $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$, то данная функция запишется в виде $y = 2 \sin^2 x + 2 \sin x - 1$.

Пусть $\sin x = t$, где $|t| \leq 1$, тогда

$$y = 2t^2 + 2t - 1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1.$$

Заметим, что абсцисса вершины параболы

$$y = 2t^2 + 2t - 1 \text{ будет равна } t_0 = -\frac{2}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}. \text{ Следова-}$$

тельно, на отрезке $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1 \right]$ функция $y(t)$ — возрастающая и наибольшее значение будет достигаться в точке $t = 1$ и равно $y(1) = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 3$.

Ответ: 3.

В7. Решите уравнение $\sqrt{25+7x} = 0,5x+2$.

Решение

Нетрудно проверить, что $x = -3$ — корень уравнения, так как при этом имеем:

$$\sqrt{25-21} = 0,5^{-1} \text{ или } 2 = 2 - \text{верно.}$$

Заметим, что левая часть исходного уравнения — возрастающая на $\left[-\frac{25}{7}; +\infty\right)$ функция, а правая часть — убывающая на $\mathbb{R}$ функция (поскольку $0 < 0,5 < 1$).

Следовательно, $x = -3$ — единственный корень уравнения.

Ответ: -3 .

В8. Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого положительного значения x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(1-2x)(3x+2)(4x+1)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

Решение

Известно, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Следовательно, нули функции, т. е. точки пересечения этого графика с осью Ox , также симметричны относительно начала координат. Отрицательными

корнями уравнения $g(x) = 0$ будут: $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$.

Поскольку при $x \leq 0$ значение функции $y = f(x)$ совпадает со значением функции $g(x)$, то симметричные

найденным точки будут: $x'_1 = \frac{2}{3}$, $x'_2 = \frac{1}{4}$.

Кроме того, корень $x_0 = 0$ симметричен сам себе. Значит, уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно 5 корней.

Ответ: 5.

В9. В стране 8 аэропортов. С наименьшего из них за сутки взлетает 4 самолета, а с каждого последующего в 2 раза больше. Сколько самолетов взлетает за сутки со всех 8 аэропортов?

Решение

Имеем геометрическую прогрессию:

4; 8; 16, ..., где $b_1 = 4$, $q = 2$, $n = 8$.

$$\text{Тогда } S_8 = \frac{b_1(q^8 - 1)}{q - 1}, \text{ или } S_8 = \frac{4 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = 4 \cdot ((2^4)^2 - 1) = 4 \cdot (16^2 - 1) = 4 \cdot 255 = 1020.$$

Ответ: 1020.

В10. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $16/\sqrt{3}$ и составляет с боковым ребром угол 30° . Найдите объем параллелепипеда, если периметр его основания равен $20/\sqrt{3}$.

Решение

Пусть $ABCD$ — прямоугольный параллелепипед, где

$A_1C = 16/\sqrt{3}$ — диагональ параллелепипеда, $\angle A_1CC_1 = 30^\circ$

и $P_{ABCD} = 20/\sqrt{3}$. Из $\triangle A_1CC_1$ находим:

$$CC_1 = A_1C \cos 30^\circ =$$

$$= \frac{16}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8,$$

$$A_1C_1 = AC = A_1C \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{16}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

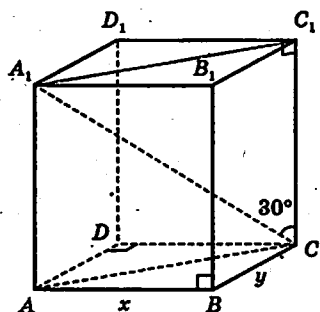
Пусть $AB = x$, $BC = y$, где $x > 0$, $y > 0$.

Из $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$) имеем: $x^2 + y^2 = AC^2$, или

$$x^2 + y^2 = \frac{64}{3}. \text{ По условию задачи } P_{ABCD} = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ или}$$

$$2(x + y) = \frac{20}{\sqrt{3}}, \text{ откуда } x + y = \frac{10}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно, имеем систему уравнений:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{64}{3}, \\ x + y = \frac{10}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Запишем 1-е уравнение системы в виде

$$(x + y)^2 - 2xy = \frac{64}{3}.$$

Учитывая 2-е уравнение, имеем:

$$\frac{100}{3} - 2xy = \frac{64}{3}, \quad 2xy = \frac{100}{3} - \frac{64}{3}.$$

$2xy = 12$, откуда $xy = 6$.

Тогда объем параллелепипеда будет равен:

$$V = AB \cdot BC \cdot CC_1 = xy \cdot 8 = 6 \cdot 8 = 48 \text{ (куб. ед.)}.$$

Ответ: 48.

З а м е ч а н и е. Как мы заметили, при решении системы уравнений, находить в отдельности x и y не было необходимости.

В11. В равнобедренной трапеции длина средней линии равна $5\sqrt{6}$, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

Решение

Пусть в трапеции $ABCD$ $AD = BC$, $MN = 5\sqrt{6}$ — средняя линия трапеции, $AC \perp BD$.

Через точку O пересечения диагоналей проведем высоту EF , тогда

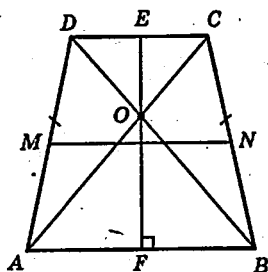
$$S_{ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \cdot EF =$$

$$= MN \cdot EF = 5\sqrt{6} \cdot EF,$$

где $MN = \frac{1}{2}(AB + DC)$ — средняя линия трапеции.

Так как $AC \perp BD$, то

$$OE = \frac{1}{2}DC \quad (OD = OC).$$



$$\text{Тогда } EF = \frac{1}{2}(AB + DC) = \frac{1}{2} \cdot 2MN = MN = 5\sqrt{6}.$$

Итак, $EF = MN = 5\sqrt{6}$, тогда

$$S_{ABCD} = 5\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{6} = 25 \cdot 6 = 150 \text{ (кв. единиц).}$$

Ответ: 150.

З а м е ч а н и е. Фактически мы доказали, что, если в равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то площадь равна квадрату высоты.

С1. Решите уравнение $\operatorname{tg} x \sin x - \frac{1}{2 \cos x} = \cos x$.

Решение

1-й способ

Так как $\cos x \neq 0$, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, то разделив обе части уравнения на $\cos x \neq 0$, получим:

$$\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2 \cos^2 x} = 1.$$

Но $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, тогда полученное уравнение

$$\text{примет вид } \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 1, \text{ или}$$

$$2 \operatorname{tg}^2 x - 1 - \operatorname{tg}^2 x = 2, \operatorname{tg}^2 x = 3, \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3},$$

$$\text{откуда } x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$$

2-й способ

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x - \frac{1}{2 \cos x} = \cos x.$$

$$2 \sin^2 x - 1 = 2 \cos^2 x; 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = -1,$$

$$2 \cos 2x = -1; \cos 2x = -\frac{1}{2};$$

$$2x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2\pi n; 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$\text{откуда } x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

С2. При каком наименьшем целом значении x соответственные значения функций $f(x) = \log_3 x$ и $g(x) = \log_3(6-x)$ будет отличаться меньше, чем на 2?

Решение

Согласно условию получим неравенство $|\log_3(6-x) - \log_3 x| < 2$, равносильное системе неравенств:

$$\begin{cases} \log_3 \frac{6-x}{x} < 2, \\ \log_3 \frac{6-x}{x} > -2, \\ 0 < x < 6; \end{cases} \begin{cases} \frac{6-x}{x} < 9, \\ \frac{6-x}{x} > \frac{1}{9}, \\ 0 < x < 6; \end{cases} \begin{cases} 6-x < 9x, \\ 6-x > \frac{1}{9}x, \\ 0 < x < 6; \end{cases} \begin{cases} 10x > 6, \\ \frac{10}{9}x < 6, \\ 0 < x < 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0,6, \\ x < 5,4, \\ 0 < x < 6. \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \text{|||||} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \rightarrow \\ 0 \quad 0,6 \qquad \qquad \qquad 5,4 \quad 6 \end{array}$$

Следовательно, $x \in (0,6; 5,4)$, откуда $x = 1$ — наименьшее целое значение.

Ответ: 1.

Часть 3

С3. Найдите меньший острый угол прямоугольного треугольника (в радианах), имеющего наибольшую площадь среди всех треугольников, у которых сумма длин гипотенузы и одного из катетов равна 13.

Решение

Пусть $AB = x$, $AC = y$, $\angle A = \alpha$, где $x > 0$, $y > 0$.

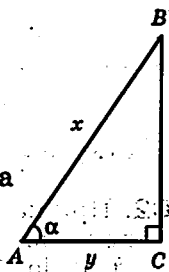
По условию $x + y = 13$, откуда $y = 13 - x$, тогда

$$\cos \alpha = \frac{y}{x} = \frac{13-x}{x}.$$

Известно, что $S = \frac{1}{2}xy \sin \alpha$.

Так как $0 < \alpha < 90^\circ$, то $\sin \alpha > 0$, тогда

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{13-x}{x}\right)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 - 169 + 26x - x^2}}{x} = \frac{\sqrt{13(2x-13)}}{x}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } S &= \frac{1}{2}x(13-x) \cdot \frac{\sqrt{13(2x-13)}}{x} = \\ &= \frac{\sqrt{13}}{2}(13-x)\sqrt{2x-13}. \end{aligned}$$

Заметим, что $13-x > 0$, $2x-13 > 0$, т. е. $6,5 < x < 13$.
Исследуем непрерывную функцию

$$S(x) = \frac{\sqrt{13}}{2}(13-x)\sqrt{2x-13} \text{ на } (6,5; 13):$$

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{\sqrt{13}}{2} \left(-\sqrt{2x-13} + (13-x) \cdot \frac{(2x-13)'}{2\sqrt{2x-13}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{13}}{2} \left(-\sqrt{2x-13} + \frac{13-x}{\sqrt{2x-13}} \right). \end{aligned}$$

$$S'(x) = 0, \text{ тогда } \frac{13-x}{\sqrt{2x-13}} = \sqrt{2x-13}, \text{ или}$$

$$13-x = 2x-13; 3x = 26, \text{ откуда } x = \frac{26}{3} \in (6,5; 13).$$

$$\begin{aligned} \text{Если } x &= \frac{26}{3}, \text{ то } \cos \alpha = \frac{13-x}{x} = \frac{13-\frac{26}{3}}{\frac{26}{3}} = \\ &= \frac{39-26}{26} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Значит, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, тогда меньший острый угол будет равен $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

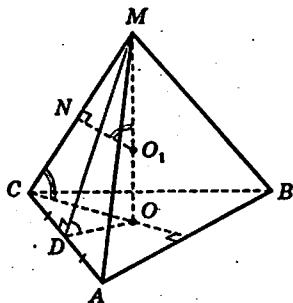
Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

С4. Около правильной треугольной пирамиды описан шар, радиус которого равен апофеме пирамиды. Найдите котангенс угла между апофемой и плоскостью основания пирамиды.

Решение

Пусть $MABCD$ – правильная треугольная пирамида. MD – апофема, $MD = MO_1$ (по условию), O_1 – центр описанного шара. Проведем серединный перпендикуляр O_1N к ребру MC . Обозначим $\angle MDO = \alpha$.

Заметим, что в прямоугольных треугольниках MNO_1 и MOC , $\angle CMO$ – общий тогда $\angle NO_1M = \angle MCO = \beta$. Так как $\triangle ABC$ правильный, то точка O – центр вписанной и описанной окружностей, тогда $CO = 2 \cdot DO$, значит, в $\triangle MOD$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MO}{DO} = \frac{2 \cdot MO}{CO} = 2 \cdot \frac{MO}{CO} = 2 \operatorname{tg} \beta.$$

Из $\triangle MNO_1$ $\sin \beta = \frac{MN}{MO_1}$, откуда $MN = MO_1 \sin \beta$, тогда $OC = 2 \cdot MN \cos \beta$. Подставляя значение $MN = MO_1 \sin \beta$, получим $OC = 2 MO_1 \sin \beta \cos \beta$.

$$\text{Из } \triangle MOD \text{ находим } \cos \alpha = \frac{OD}{MD}.$$

$$\text{Так как } OD = \frac{1}{2} OC, \text{ то } OD = \frac{1}{2} \cdot 2 MO_1 \sin \beta \cos \beta = MO_1 \sin \beta \cos \beta,$$

$$\text{тогда } \cos \alpha = \frac{MO_1 \sin \beta \cos \beta}{MD}.$$

Учитывая, что по условию задачи $MD = MO_1$, имеем $\cos \alpha = \sin \beta \cos \beta$. Итак, $\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \beta$ и $\cos \alpha = \sin \beta \cos \beta$.

Перемножим левые и правые части полученных равенств:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \beta \cos \beta, \text{ или}$$

$$\sin \alpha = 2 \sin^2 \beta, \text{ откуда } \sin^2 \beta = \frac{1}{2} \sin \alpha.$$

Теперь разделим почленно те же равенства:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \beta}, \text{ откуда } \cos^2 \beta = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}.$$

Складывая два последних равенства и, учитывая, что $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$, имеем:

$$\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = 1, \text{ или}$$

$$\frac{\sin \alpha}{2} + \frac{2(1 - \sin^2 \alpha)}{\sin \alpha} = 1;$$

$$\sin^2 \alpha + 4 - 4 \sin^2 \alpha = 2 \sin \alpha;$$

$$3 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 4 = 0.$$

Пусть $\sin \alpha = t$, где $|t| \leq 1$, тогда

$$3t^2 + 2t - 4 = 0, D/4 = 1 + 12 = 13 > 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}, \text{ откуда } t_1 = \frac{1}{3}(-1 - \sqrt{13}) - \text{не удов.}$$

$$\text{летворяет условию } |t| \leq 1, t_2 = \frac{1}{3}(\sqrt{13} - 1).$$

$$\text{Итак, } \sin \alpha = \frac{1}{3}(\sqrt{13} - 1).$$

$$\text{Известно, что } 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \text{ тогда}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{9}{(\sqrt{13} - 1)^2} - 1 = \frac{9 - 14 + 2\sqrt{13}}{(\sqrt{13} - 1)^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{13} - 5}{14 - 2\sqrt{13}}.$$

Освободимся от иррациональности в знаменателе полученной дроби:

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{13}-5}{14-2\sqrt{13}} &= \frac{(2\sqrt{13}-5)(7+\sqrt{13})}{2(7-\sqrt{13})(7+\sqrt{13})} = \\ &= \frac{14\sqrt{13}-35+26-5\sqrt{13}}{2(49-13)} = \frac{9\sqrt{13}-9}{2 \cdot 36} = \\ &= \frac{9(\sqrt{13}-1)}{2 \cdot 36} = \frac{\sqrt{13}-1}{8}.\end{aligned}$$

Итак, $\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{\sqrt{13}-1}{8}$, откуда

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{13}-1}{2}}.$$

Ответ: $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{13}-1}{2}}.$

С5. Найдите наибольшее целое значение параметра a , при котором множество решений неравенства $x(x-4) \leq (a+1)(|x-2|-2)$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 3,8, и положительным знаменателем.

Решение

Заметим, что $x(x-4) = (x-2)^2 - 4 = |x-2|^2 - 2^2 =$
 $= (|x-2|-2)(|x-2|+2).$

Тогда исходное неравенство запишется в виде

$$(|x-2|-2)(|x-2|+2) \leq (a+1)(|x-2|-2),$$

или $(|x-2|-2)(|x-2|+2-a-1) \leq 0$, или

$$(|x-2|-2)(|x-2|-(a-1)) \leq 0.$$

Пусть $|x-2| = t$, тогда получим неравенство

$$(t-2)(t-(a-1)) \leq 0. \quad (1)$$

Переменная t должна принадлежать промежутку, соединяющему точки $a-1$ и 2. Рассмотрим 3 случая взаимного расположения этих точек.

1) $a-1 = 2$, т. е. $a = 3$. В этом случае промежуток вырождается в точку.

Тогда $|x - 2| = 2$, откуда $x - 2 = \pm 2$, т. е. $x_1 = 0$; $x_2 = 4$. Как видим, при $a = 3$ условия задачи не выполнены, так как не содержится значение $x = 3,8$.

2) $a - 1 > 2$, т. е. $a > 3$. В этом случае решением неравенства (1) является промежуток $[2; a - 1]$. Тогда получим $2 \leq |x - 2| \leq a - 1$, что равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} |x - 2| \leq a - 1, \\ |x - 2| \geq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - a \leq x - 2 \leq a - 1, \\ \begin{cases} x - 2 \geq 2, \\ x - 2 \leq -2; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 - a \leq x \leq a + 1, \\ \begin{cases} x \geq 4, \\ x \leq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Следовательно, $x \in [3 - a; 0] \cup [4; a + 1]$.

Это решение также не удовлетворяет условиям задачи (не содержит значение $x = 3,8$).

3) $a - 1 < 2$, т. е. $a < 3$. Тогда решением неравенства (1) является промежуток $[a - 1; 2]$. Тогда получим $a - 1 \leq |x - 2| \leq 2$.

Далее имеем:

$$\begin{cases} |x - 2| \leq 2, \\ |x - 2| \geq a - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leq x - 2 \leq 2, \\ \begin{cases} x - 2 \geq a - 1, \\ x - 2 \leq 1 - a; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 4, \\ \begin{cases} x \geq a + 1, \\ x \leq 3 - a. \end{cases} \end{cases}$$

Следовательно, $x \in [0; 3 - a] \cup [a + 1; 4]$.

При $a + 1 \leq 3,8$, т. е. при $a \leq 2,8$ решение неравенства содержит точку $x = 3,8$ и все положительные числа, меньше $3 - a$, т. е. бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом, равным $3,8$ и положительным знаменателем, меньшим или

равным $\frac{3 - a}{3,8}$. Можно взять геометрическую прогресс-

сию с $b_1 = 3,8$ и $q = \frac{1}{19}$.

Ответ: $(-\infty; 2,8]$.

ОТВЕТЫ

Глава 1

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ

Группа А

1. $\frac{1}{2}$. 2. $\frac{55}{28}$. 3. $\frac{77}{30}$. 4. 4. 5. $-\frac{1}{11}$. 6. 3. 7. 1,25. 8. $\frac{3}{32}$.
9. 8. 10. $\frac{1}{3}(x+4)$. 11. $\frac{x^3+8}{x+2}$. 12. x^2 . 13. $\frac{1}{6}(a-6)$.
14. $y(x-y)$. 15. $\frac{1}{6}(x^2+5x+6)$. 16. $\frac{x-5}{5x}$.
17. $\frac{1}{2a+3}$. 18. $\frac{1}{a+1}$. 19. 27. 20. $15\frac{1}{8}$. 21. 8. 22. 2.
23. 14. 24. 3,5. 25. 6. 26. $\sqrt[3]{2}$. 27. $\frac{1}{5}\sqrt[3]{7}$. 28. $6+2\sqrt{3}$.
29. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. 30. $3\sqrt{5}+2\sqrt{7}$.

Группа Б

1. 2. 2. 2. 3. 12. 4. 14. 5. 60. 6. 6. 7. 11. 8. 11. 9. 36.
10. 144. 11. 4800. 12. 510. 13. 420. 14. 14700. 15. 60.
16. -0,6. 17. $2\frac{1}{4}$. 18. 1. 19. 4,8. 20. -0,6. 21. $33\frac{1}{3}$.
22. $\frac{2}{27}$. 23. $-\frac{a^4}{a^2+b^2}$. 24. $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$. 25. $\frac{1}{2}bc$. 26. $\frac{1}{a}$.
27. $a\frac{169}{60}b\frac{31}{30}$. 28. 1. 29. 0. 30. $\sqrt{a}-1$. 31. $16a^2$.

32. $\sqrt{a-1}$. 33. $\frac{a}{a^2-1}$. 34. $\frac{1}{2}a$. 35. $\frac{1}{a+c}$. 36. 3.
 37. $a + \sqrt{ax}$. 38. $\frac{1}{6}$. 39. $\frac{x+3y}{x-y}$. 40. $3 - 2\sqrt{x}$
 при $0 \leq x < 9$, -3 при $x > 9$. 41. $x - 1$. 42. $a - b$. 43. 1.
 44. $-\frac{1}{2a}$. 45. $x + 1$. 46. $\frac{a-b}{a+b}$. 47. 4. 48. x . 49. $\frac{1}{x-1}$.
 50. $\frac{1}{8}$.

Глава 2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 3

Группа А

1. $\frac{5}{4}$. 2. 1, 4. 3. 18. 4. $\frac{3}{8}$. 5. 11, 5. 6. $-\frac{40}{3}$. 7. 1. 8. 9.
 9. $x \in R$. 10. 8. 11. нет решений. 12. 4. 13. -3 .
 14. $-\frac{8}{9}$. 15. -3 . 16. $\frac{53}{8}$. 17. $-\frac{4}{3}$. 18. $\frac{27}{28}$. 19. $\frac{339}{190}$.
 20. $\frac{88}{39}$.

Группа Б

1. $\frac{24}{19}$. 2. $-\frac{17}{2}$. 3. $\frac{19}{64}$. 4. $\frac{3}{8}$. 5. $\frac{47}{7}$. 6. $-\frac{1}{2}$. 7. 21.
 8. 3. 9. 3. 10. 5. 11. $c = 2$. 12. При $a = -2$. 13. $a = \frac{9}{5}$
 или $a = \pm 2\sqrt{3}$. 14. При $a = 0$, $a = \frac{1}{2}$. 15. $a = 1$.

16. $a = -1$. 17. $a = 1$. 18. при $a = 1$, $x \in R$, кроме $x = 1$.
 19. $a = -8$. 20. $a = 15,5$.

§4

Группа А

1. (5; 3). 2. (1,5; -3,5). 3. $\left(-\frac{2}{3}; 8\right)$. 4. (5; 7). 5. (10; 11). 6. R . 7. (5; 3). 8. (4; 3). 9. (31,8; 6,6). 10. (5; -2).
 11. (3; 4). 12. (11; -7). 13. (2; 1). 14. $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.
 15. (60; 30). 16. (2; 1). 17. $\left(\frac{1}{4}; 0\right)$. 18. $\left(-\frac{3}{5}; -2\right)$.
 19. (2; 1). 20. Нет решений.

Группа Б

1. (10; 2). 2. $\left(4; \frac{1}{3}\right)$. 3. (20; 20). 4. (9; 7). 5. (10; 2).
 6. (5; 3). 7. (2; -1). 8. (2; 3). 9. (0,1; 4). 10. $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right)$.
 11. (5; 3). 12. (5; 1). 13. (2; -6). 14. (1; 2). 15. (2; -1; 1).
 16. (1; -2; 3). 17. (1; 1; 0). 18. $((1 - 2a^2)/(1 - a^2); a(1 - a^2))$, если $a \neq \pm 1$; нет решений, если $a = \pm 1$.
 19. $((a^2 + 1)/a^2; (a + 1)/a^2)$, если $a \neq 0$; нет решений, если $a = 0$. 20. $a = 0$. 21. $a = -4$. 22. $a = -2$.
 23. $a = -4$, $a = 1$. 24. $a = -7$. 25. $a = 6$.

§ 5

Группа А

1. $x_1 = 0$, $x_2 = -6$. 2. $x_{1,2} = \pm 3$. 3. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.
 4. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. 5. $x = -1$. 6. $x = 0$. 7. $x_1 = 0$, $x_2 = 2, 4$.
 8. $x_{1,2} = \pm \sqrt{7}$. 9. нет корней. 10. $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 3$.
 11. $x_1 = 7$, $x_2 = 25$. 12. $x_{1,2} = \pm 5$. 13. $x_1 = -0,6$, $x_2 = 2$.

14. $x_1 = -7, x_2 = 2$. 15. $x = 0$. 16. $x_1 = -1, x_2 = 3$.
 17. $x_1 = -5, x_2 = 3$. 18. $x_1 = 3, x_2 = 9$.

Группа В

1. $x_1 = -\frac{24}{13}, x_2 = 3$. 2. $x_1 = 15,8, x_2 = 18$. 3. $x_1 = 2,5,$

$x_2 = 5$. 4. $x = 2$. 5. $x = 4$. 6. $x_1 = 2, x_2 = 9$. 7. $x_1 = \frac{1}{4},$

$x_2 = 8$. 8. $x_{1,2} = \pm 2, x_{3,4} = \pm 3$. 9. $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$. 10. $x_1 = 0,$

$x_2 = 2$. 11. $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 5, x_4 = 8$. 12. $x_1 = -1,$

$x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 5$. 13. $x_1 = -2, x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}$.

14. $x_1 = 0, x_2 = 3, x_{3,4} = \pm 1,5$. 15. $x_1 = -3, x_2 = 4$.

16. $x_1 = 1, x_2 = 3$. 17. $x_1 = 1, x_2 = 2$. 18. $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2},$

$x_{3,4} = \pm 2$. 19. $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 0$. 20. $x = 2,5$. 21. $x_1 = -1,$

$x_2 = 0,5, x_3 = 2$. 22. $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$. 23. $x = -3, a = 1$.

24. $x = \frac{1}{2}, p = -7$. 25. $m_1 = -\frac{22}{3}, m_2 = 2$. 26. $2 < p < 4$.

27. $n = 3$. 28. $b_1 = 1,5; b_2 = 3$. 29. $m = 0$. 30. $\frac{215}{27}$.

31. $p = -15$. 32. $3 \leq m \leq 3,6$. 33. $a = 20 \pm 6\sqrt{5}$.

34. $(x-7)(x+5)$. 35. $(x-5)(3x+8)$. 36. $(x-3a)(x+2a)$.

37. $(x-3b+2a)(x-3b-2a)$. 38. $(x-1)(x+1)(x-2) \times$

$\times (x+2)$. 39. $\left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) (x-1)(x+1)$.

40. $\frac{x+13}{x+15}$. 41. $\frac{2(x+9)}{3(x-7)}$. 42. $\frac{x-7y}{x+y}$. 43. $\frac{x+y}{x-y}$.

44. $\frac{x^2-5}{x^2-6}$. 45. $\frac{2x+3}{3-4x}$. 46. $28x^2 - 20x + 1 = 0$.

47. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$.

Группа А

1. (2; 4). 2. (5; -2), (2; -5). 3. (± 3 ; ± 2), (± 2 ; ± 3).
 4. (0,25; 7,75), (-2; 1). 5. (-9; -6), (6; 9). 6. (4; 8),
 (8; 4). 7. (3; 0), (1; -2). 8. (2; 1), (3; 2). 9. (3; 4), (1; 2).
 10. (1; 2).

Группа Б

1. (3; 1), (1; 3). 2. (5; 4), (4; 5). 3. (0; 0), (4; 2), (-2; -4).
 4. (3; 2), (3; -3), (-4; 2), (-4; -3). 5. $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$, (3; 1).
 6. (2; 3), (0; 1), $\left(\frac{3}{2}; 1\right)$. 7. (6; 3), (-3; -2), (4; 5), (-1; -4).
 8. $\left(\pm \frac{a}{\sqrt{a+b}}; \pm \frac{b}{\sqrt{a+b}}\right)$. 9. (4m; m), $\left(-m; -\frac{m}{4}\right)$.
 10. (2; 3), (3; 2), $(-2 \pm \sqrt{7}; -2 \mp \sqrt{7})$. 11. (7; 5),
 (-5; -7). 12. (-6; -1), (-1; -6). 13. (2; 1), (1; 2).
 14. (± 5 ; ± 3), (± 3 ; ± 5). 15. (± 3 ; ± 2), (∓ 2 ; ± 3).
 16. (-5; -1), (5; 1). 17. (2; 2). 18. (2; 2). 19. $\left(\frac{8}{13}; \frac{12}{5}\right)$.
 20. (-7; 3), $\left(\frac{7}{3}; -1\right)$. 21. (1; 0.5), (2; 3).
 22. $\left(\pm \frac{1}{2}; \mp \frac{1}{2}\right)$, (± 2 ; ∓ 1). 23. (± 1 ; ± 2), (± 2 ; ± 1).
 24. (-3; -5), $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{13}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}\right)$, (3; 5). 25. (-1; -2),
 $\left(-\frac{10}{3}; -\frac{7}{3}\right)$, (1; 2), $\left(\frac{10}{3}; \frac{7}{3}\right)$. 26. (0; 0), (-1,5; 3).
 27. (2; 3), $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. 28. (-4; 5,5), (3; 2). 29. (4; 1), (1; 4).
 30. (1; 1), (1; 0), (0; 1). 31. (-2; -3), (2; 3). 32. (3; 2).

33. (3; 1), (1; 3). 34. (2; 3), (3; 2). 35. (-2; -1), (-1; -2), (2; 1), (1; 2). 36. (2; 1), (1; 2). 37. (2; 1), (1; 2). 38. (0; 0), (-1; -2), (2; 1). 39. (-1; -2), (2; 1). 40. (-3; -2), (-2; -3), (2; 3), (3; 2). 41. (5; 3; 4), (4; 2; 5). 42. (± 2 ; ± 3 , ± 4). 43. (± 2 ; ± 2 ; ± 3). 44. (1; 4; 5), (-1; 6; 7). 45. (-2; -3; -4), (2; 3; 4). 46. (3; 2; 1),

$\left(\frac{7}{\sqrt[3]{18}}; \frac{1}{\sqrt[3]{18}}; -\frac{5}{\sqrt[3]{18}}\right)$. 47. (± 1 ; ± 2 ; ± 1).

48. $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}; -\frac{1}{4}\right)$, $\left(2; \frac{5}{3}; \frac{3}{2}\right)$. 49. (3; 2; 1).

50. $\left(\frac{12}{7}; \frac{12}{5}; -12\right)$. 51. (-2; -6; -6), (2; 6; 6).

52. (0; 0; 0), (6; 2; 4). 53. (2; 4; 1), (2; 1; 4). 54. (2; 3; 1), (3; 2; 1), (3; 1; 2), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (1; 2; 3). 55. (2; 1; 3), (1; 2; 3), (2; 3; 1), (3; 2; 1), (3; 1; 2), (1; 3; 2).

§ 7

1. $\frac{2}{5}$. 2. $\frac{4}{9}$. 3. 135 га, 297 га, 432 га. 4. 1100 т, 2200 т. 5. 12 км/ч, 30 км/ч. 6. 120 км/ч. 7. 50 км/ч. 8. 40 оборотов, 25 оборотов, 100 м. 9. 150 машин. 10. 85°. 11. 900 руб. и 500 руб. 12. 7 руб. 50 коп. и 6 руб. 13. 20 кг по 3 руб. 10 коп. и 30 кг по 4 руб. 60 коп. 14. 72° и 60°. 15. 30 км/ч, 35 км/ч. 16. 320 дет. и 360 дет. 17. 40 дет. и 25 дет. 18. 36 м/мин, 9 м/мин. 19. 140 м. 20. 5 дм $\times$ 5 дм. 21. 21 ряд. 22. 7 км/ч. 23. 720 км/ч и 600 км/ч. 24. 3 км/ч. 25. 21 ч. 26. 12 ч и 24 ч. 27. 132 мин и 110 мин. 28. 160 ч и 20%. 29. 64. 30. 32. 31. за 90 ч и 72 ч или за 104 ч и 65 ч. 32. 12 км/ч, 16 км/ч. 33. 75 км/ч и 60 км/ч. 34. 47. 35. 13 и 7. 36. 9 и 6. 37. 27. 38. 7000 и 3000. 39. 4 см и 3 см. 40. 12 см и 15 см.

§ 8, 9

Группа А

1. $x = 13$. 2. $x = -9$. 3. $x = 21$. 4. $x = 1$. 5. $x = 6$. 6. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. 7. $x = 16$. 8. $x = 1$. 9. $x_{1,2} = \pm 2$.

10. $x = 8$. 11. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. 12. $x_1 = -8$, $x_2 = 27$.
 13. $x = 3$. 14. $x = 0$. 15. $x = 6$.

Группа Б

1. Нет решений. 2. Нет решений. 3. Нет решений.

4. $x = 4$. 5. $x = 3 + \frac{2}{\sqrt{5}}$. 6. $x = 2$. 7. $x = 2$. 8. $x = 2$.

9. $x_1 = -15$, $x_2 = 13$. 10. $x = 2$. 11. $x \geq 2$. 12. Нет решений. 13. Нет решений. 14. $x = 0$. 15. $x_1 = 4$, $x_2 = 8$. 16. $x = 1$. 17. Нет решений. 18. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$,

$x_3 = 1,5$. 19. $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. 20. $x_1 = 1$, $x_{2,3} =$

$= \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{33})$. 21. $x = 1$. 22. $x = -2$. 23. $x = 1$.

24. $x = 1$. 25. $x_1 = -5$, $x_2 = 2$. 26. $x_1 = \frac{251}{63}$,

$x_2 = \frac{16379}{4095}$. 27. $x = 8$. 28. $x = \frac{1}{4}$. 29. $x = 1$.

30. $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}(4 + \sqrt{17})$. 31. $x_1 = 0$, $x_2 = 0,8$.

32. $x = 3$. 33. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. 34. $x_1 = 2$, $x_2 = 10$.

35. $x = 4$. 36. $x_1 = -2$, $x_2 = 7$. 37. $x = 2$. 38. $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. 39. $x = 5$. 40. $x_1 = 3$, $x_2 = 2$,

$x_3 = -\frac{1}{10}(\sqrt{481} + 13)$. 41. $(8; 2)$, $(2; 8)$. 42. $\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

43. $(1; 81)$, $(81; 1)$. 44. $\left(\frac{10}{3}; -\frac{7}{3}\right)$. 45. $(2; 8)$, $(8; 2)$.

46. $(1; 9)$, $(9; 1)$. 47. $(1; 4)$, $(4; 1)$. 48. $\left(-9; -\frac{9}{4}\right)$,

$(4; 1)$. 49. $(2; 2)$. 50. $(2; 3)$, $\left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

§ 10

Группа А

1. $x_{1,2} = \pm 4$. 2. $x = -6$. 3. Нет корней. 4. $x_1 = -1$,
 $x_2 = 9$. 5. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. 6. $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = 5$. 7. $x_1 = -5$,
 $x_2 = 2$. 8. $x = 3$. 9. $x_1 = -\frac{10}{3}$, $x_2 = 2$. 10. $x = \frac{1}{3}$.

Группа Б

1. $x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{33})$. 2. $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. 3. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$,
 $x_3 = 2 + \sqrt{7}$. 4. $x_1 = 1$, $x_2 = 5,5$. 5. $x \geq 2$ или $x \leq -2$.
6. $x \leq \frac{5}{3}$. 7. $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. 8. $x = 0$. 9. $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$,
 $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{6}$. 10. Нет корней. 11. $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.
12. $[-3; -2] \cup [2; 3]$. 13. $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$. 14. $x_1 = -5$,
 $x_2 = 1$. 15. $x = \frac{1}{2}(13 - \sqrt{17})$. 16. $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$,
 $x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{2}$, $x_{6,7} = -1 \pm \sqrt{6}$. 17. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
18. $x_{1,2} = \pm 3$, $x_3 = -2 + \sqrt{5}$. 19. $x_1 = 1$, $x_{2,3} =$
 $= \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{17})$. 20. $x_{1,2} = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{17})$. 21. $x = 3,2$.
22. $x_{1,2} = \pm 3$. 23. $x = \frac{1}{2}$. 24. $x = 2$. 25. Нет корней.
26. $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_{2,3} = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. 27. $x_1 = -2$, $x_2 = 0$.
28. $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{5}$. 29. $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$,
 $x_3 = 2$. 30. $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$.

Глава 3

НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

§ 11

Группа А

1. $x \leq 1,5$. 2. $x > 1$. 3. $x < -\frac{10}{3}$. 4. $x > 3$. 5. $x < 5$. 6. $x \leq 4$.
7. Нет решений. 8. $x \in R$. 9. $x \in R$. 10. Нет решений.
11. $x > 2$. 12. $x \leq 2$. 13. $x > \frac{305}{162}$.

Группа Б

1. -2. 2. 2. 3. 1. 4. 24. 5. 2. 6. 1. 7. -1. 8. -4. 9. -19.
10. 0. 11. -4. 12. 0. 13. 4. 14. 18. 15. 15. 16. -1. 17. -1.

§ 12

Группа А

1. $1 \leq x \leq \frac{4}{3}$. 2. $x \in R$. 3. $-2 \leq x \leq 1$. 4. $1 < x < 2$,
 $2 < x < 3$. 5. $x \in R$. 6. $x > -\frac{16}{3}$. 7. $x \leq 2$, $x \geq 3$.
8. $-\frac{1}{4} < x < \frac{5}{6}$. 9. $x < 2$, $x > 5$. 10. $-2 < x < -1$, $x > 2$.
11. 3. 12. 8. 13. 1. 14. Нет решений. 15. 3. 16. 1.
17. 3. 18. 4. 19. 1. 20. 3. 21. -4. 22. -1. 23. -4. 24. -3.
25. -1. 26. -2. 27. Нет решений. 28. -8. 29. 1. 30. 2.
31. -2. 32. -7. 33. 4. 34. -1. 35. -3.

Группа Б

1. Нет решений. 2. Нет решений. 3. -4. 4. -2. 5. 1.
6. 1. 7. -2. 8. -1. 9. -1. 10. 0. 11. -3. 12. -6. 13. 0.
14. 0. 15. 7. 16. -2. 17. -3. 18. -2. 19. 5. 20. 10. 21. 1.
22. 4. 23. 6. 24. 2,5. 25. 1. 26. 6. 27. 3. 28. 0,5. 29. 3.
30. 2,5. 31. 2,5. 32. 1,75. 33. 0. 34. -0,6. 35. 4,5.

36. 1. 37. 0. 38. 1,5. 39. -3. 40. 0,5. 41. 4. 42. 1.
43. 3. 44. 1. 45. 4. 46. 1. 47. 3. 48. 3. 49. 6. 50. 3.

§ 13

Группа А

1. -4. 2. 2. 3. 2. 4. 1. 5. -3. 6. -1. 7. 1. 8. 2. 9. 1. 10. 2.
11. 0. 12. 4. 13. 2. 14. $x \leq 1$. 15. $x \geq \frac{1}{3}$. 16. $0 \leq x \leq 2$.
17. $1 \leq x \leq 6$. 18. $x \geq 1$. 19. $x < 3$, $x > 7$. 20. $-2 \leq x < 1$;
 $x > 1$.

Группа Б

1. $x > \frac{3}{4}$. 2. $x < -12$. 3. $1 < x < 4$. 4. $x < -\sqrt{2}$;

$\sqrt{2} < x < 3$. 5. $3 \leq x < 4$. 6. $-1 < x < \frac{1}{2}$.

7. $\frac{2}{3} \leq x < \frac{3+\sqrt{5}}{6}$. 8. $x < -\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$; $0 < x \leq 6$.

9. $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. 10. $-4 < x < -3$; $-2 \leq x \leq -1$; $1 \leq x \leq 2$.

11. Нет решений. 12. Нет решений. 13. 10. 14. 5.

15. 5. 16. -3. 17. -1. 18. 1. 19. 2. 20. -2. 21. -3.

22. -3. 23. -2. 24. 6. 25. -1. 26. 5. 27. -2. 28. 3. 29. 2.
30. -2.

§ 14

Группа А

1. 1. 2. 7. 3. 4. 4. 3. 5. $x \in R$. 6. Нет решений. 7. Нет
решений. 8. 10. 9. 1. 10. 1. 11. 1. 12. 2. 13. 3. 14. 4.
15. 7. 16. 3. 17. 1. 18. 1. 19. 2. 20. 3.

Группа Б

1. 5. 2. 3. 3. 2. 4. 3. 5. 2. 6. 4. 7. 3. 8. 3. 9. 3. 10. 1.
11. 2. 12. 4. 13. 1. 14. 1. 15. 1. 16. 4. 17. 1. 18. $-2 < x \leq 0$.
19. $-1 < x < 2$. 20. $-2 < x \leq -1$; $1 \leq x < 4$.

§ 15

Группа А

1. 9. 2. 1. 3. -1. 4. -5. 5. Нет решений. 6. 0. 7. 1. 8. -2.
9. -2. 10. Нет решений.

Группа Б

1. 4. 2. 5. 3. -1. 4. -1. 5. 3. 6. 0. 7. -1. 8. 12. 9. 11.
10. -8. 11. 3. 12. 1. 13. -2. 14. 3. 15. 4. 16. 0. 17. 1,5.
18. 4. 19. 7,5. 20. 1. 21. 3. 22. 2. 23. 1. 24. 12. 25. -1.
26. -1. 27. -1. 28. -2. 29. -1. 30. -3. 31. $0 \leq x < 2$; $x > 9$.

32. $-\frac{6}{5} < x \leq -1$; $2 \leq x < 3$; 33. $x < -\frac{1}{2}$. 34. $x \in R$.

35. $3 < x \leq 5$; 36. $3 \leq x < 4$; $x > 7$. 37. $2,5 \leq x <$

$< \frac{1}{2}(-5 + \sqrt{149})$. 38. $x < -2$; $x \geq 205,5$. 39. $x \in R$.

40. $x < -2$; $0 < x < 1$; $x > 1$.

Глава 4

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 16

Группа А

1. 4. 2. 5. 3. 3. 4. 4. 5. -3. 6. -1. 7. $-\frac{1}{4}$. 8. -2. 9. $-\frac{1}{3}$.

10. 3. 11. -3. 12. -3. 13. -2. 14. 16. 15. 6. 16. 64.

17. 3. 18. 144. 19. 1. 20. $\frac{1}{4}$. 21. 5^{12} . 22. $1\frac{2}{7}$. 23. 3.

24. 2. 25. 2. 26. -3. 27. 1,5. 28. -4. 29. 3. 30. $\frac{1}{3}$.

$$31. \frac{1}{25} \cdot 32. 2. 33. 8. 34. 21. 35. 4. 36. 2. 37. 10. 38. 2.$$

$$39. m/n. 40. \sqrt{mn}. 41. \lg x = \lg a + \lg b + \lg c.$$

$$42. \lg x = \lg 3 + \lg(a+b). 43. \lg x = \lg 3 + \lg a +$$

$$+ 2 \lg b + 3 \lg c. 44. \lg x = \lg a + \frac{1}{3} \lg b. 45. \lg x =$$

$$= \lg 5 + \lg a + \frac{3}{4} \lg b + \frac{1}{4} \lg c. 46. \lg x = 2 \lg c +$$

$$+ 3 \lg d - \lg 5 - \lg m - 2 \lg n. 47. \lg x = -2 \lg m -$$

$$- 3 \lg n. 48. \lg x = -\frac{1}{2} \lg 2 - 4 \lg m + \frac{1}{2} \lg \operatorname{tg} \alpha.$$

$$49. \lg 3 + \lg 5. 50. \lg 2 + 2 \lg 5. 51. \lg 7 + 3 \lg 2.$$

$$52. \lg 3 - 2 \lg 2. 53. 1,5. 54. -3. 55. 0,5.$$

Группа Б

$$1. -1,5. 2. -1\frac{2}{3}. 3. 4. 4. -3. 5. \frac{4}{3}. 6. 0. 7. -3. 8. 1.$$

$$9. -2,2. 10. -\frac{1}{2}. 11. 25. 12. 1. 13. \frac{1}{6}. 14. 2. 15. 0.$$

$$16. -1. 17. 0. 18. \frac{3}{4}. 16. 19. 1. 20. 1. 21. 24. 22. \frac{1}{2} + m.$$

$$23. \frac{4(3-a)}{3+a}. 24. 1 - \frac{2}{3}x. 25. \frac{c+3}{2(c+1)}. 26. \frac{3}{2}. 27. 2.$$

$$28. 10. 29. 1. 30. -1. 31. 0. 32. 1. 33. 20. 34. 18.$$

$$35. 32. 36. \log_{\frac{1}{3}} 9 > \log_{\frac{1}{3}} 17. 37. \log_2 \frac{\sqrt{5}}{2} > \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$38. \lg \lg \lg 50 < \lg^3 50. 39. \frac{1}{2} (\lg 5 + \lg \sqrt{7}) < \lg \frac{5 + \sqrt{7}}{2}.$$

$$40. 2^{2 \log_2 5 + \log_{\frac{1}{9}} 9} > \sqrt{8}. 41. \frac{2}{7}. 42. 12. 43. 0,001.$$

$$44. \frac{3}{98}. 45. 40. 46. \frac{64}{3}. 47. \frac{(a+b)^3}{(a-b)^2}. 48. \sqrt[5]{m^2} / \sqrt[4]{n^3}.$$

$$49. \frac{m^5 \sqrt{m+n} \sqrt[3]{m-n}}{\sqrt{mn}}. 50. \frac{b(b+c)^m}{\sqrt[3]{b-c}}. 51. \frac{31}{72} \lg a.$$

$$52. \frac{5}{8} (\lg a - \lg b). 53. \frac{1}{3} (\lg a - \lg b).$$

$$54. \frac{n \lg a}{n+1} - \frac{\lg b}{m(n+1)}. 55. \sqrt[5]{4} \lg 3. 56. \sqrt[4]{0,5} \lg 0,8.$$

$$57. 1. 58. 2. 59. 1. 60. 3.$$

§ 17

Группа А

$$1. 5. 2. 5. 3. -4. 4. -0,5. 5. 2,5. 6. \frac{4}{3}. 7. -5. 8. 3. 9. 2.$$

$$10. (2; 3). 11. \frac{1}{2}. 12. 35. 13. 1,5. 14. 5. 15. 1. 16. 1.$$

$$17. 1. 18. 3. 19. 1. 20. -2.$$

Группа Б

$$1. x_{1,2} = \pm 2. 2. x_1 = \frac{1}{4}; x_2 = \frac{1}{2}. 3. 1. 4. x_1 = -1; x_2 = 4.$$

$$5. x_1 = -4; x_2 = -\frac{2}{3}. 6. x_1 = -\frac{1}{3}; x_2 = \frac{1}{4}. 7. x = -1.$$

$$8. x = 3. 9. x = 1. 10. x = 2. 11. x = -1. 12. x_1 = -2;$$

$$x_2 = 1. 13. x = 1. 14. x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 1. 15. x = 1.$$

$$16. x = 2. 17. x_1 = -4; x_2 = 2. 18. x = 1. 19. x_1 = -1;$$

$$x_2 = 0. 20. x = 7. 21. x = 4. 22. x = 2. 23. x = 0.$$

$$24. x_1 = -1; x_2 = 1. 25. x_1 = \frac{9}{4}; x_2 = 3. 26. x = 0.$$

$$27. x = 3. 28. x = -2. 29. x = \log_{(\sqrt{5}-1)/2} \frac{3}{2}. 30. x = -1.$$

$$31. x = 2. 32. x = 5. 33. x = 0,5. 34. x = 1. 35. x = 0,5.$$

$$36. x = 0,3. 37. x = 1. 38. x = \frac{1}{2}. 39. x = 2. 40. x = 2.$$

41. $x_1 = 3\log_6 2$, $x_2 = 3$. 42. $x = 1$. 43. $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}$.
 44. $x_{1,2} = \pm \sqrt{3}$. 45. $x = -2$. 46. $x = 3$. 47. $x = \frac{\pi}{9}$; $x = 1$;
 $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. 48. $x = 10$. 49. $x = 1$.
 50. $x_{1,2} = \pm 2$. 51. $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. 52. $x = 6$. 53. $x = 3$.
 54. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. 55. $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = 3$. 56. $x_1 = -1$,
 $x_2 = 1$. 57. $x_1 = 1$, $x_2 = -2(1 + \log_3 2)$. 58. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$,
 $x_3 = 2$. 59. $x_{1,2} = \pm 3$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 4$. 60. $x = 2$.
 61. $x = 20$. 62. $x_1 = 3$, $x_2 = 3\log_6 2$. 63. $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 0$.
 64. $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$. 65. $x_1 = 1$, $x_2 = \log_2(3 +$
 $+\sqrt{29}) - 1$. 66. $x = 1$. 67. $x = 0$. 68. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
 69. $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$. 70. $x = 4$.

§ 18, 19

Группа А

1. $x = \sqrt{2}$. 2. $x = 0,0016$. 3. $x = 2$. 4. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
 5. $x = 7$. 6. $x_1 = 5$, $x_2 = 7$. 7. $x_1 = -5$, $x_2 = 2$. 8. $x_1 = \frac{1}{4}$,
 $x_2 = 16$. 9. $x_1 = 0,04$, $x_2 = 125$. 10. $x = 4$. 11. $x = 2$.
 12. Нет решений. 13. $x_1 = 3$, $x_2 = -5$, $x_3 = 1$.
 14. $x_1 = 0,1$, $x_2 = 10$. 15. $x = 17$. 16. $x = 2$. 17. $x = 6$.
 18. $x = 0,5$. 19. $x = 2$. 20. $x = 5$. 21. $x = 10$. 22. $x = 10$.
 23. $x = 5$. 24. $x = 4$. 25. $x = 1$.

Группа Б

1. $x = 2$. 2. $x = 2$. 3. $x_{1,2} = \pm 1$. 4. $x = 0$. 5. $x = 10$.
 6. $x = 64$. 7. $x = 4$. 8. $x = 1$. 9. $x = 100$. 10. $x_1 = 0$,
 $x_2 = 1$. 11. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. 12. $x = 5$. 13. $x = 7$. 14. $x_1 = 1$,

- $x_2 = 16$. 15. $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 16. $x = 0, 1$.
 17. $x = 15$. 18. $x = 1000$. 19. $x = 125$. 20. $x = 62, 5$.
 21. $x = 100$. 22. $x = 10^5$. 23. $x = 25$. 24. $x = 9$.
 25. $x = 4$. 26. $x = 16$. 27. $x = 32$. 28. $x = 10^5$. 29. $x = 16$.
 30. $x = 5\frac{2}{3}$. 31. $x_1 = \frac{1}{9}, x_2 = 9$. 32. $x_1 = 100, x_2 = 10^8$.
 33. $x_1 = \frac{1}{9}, x_2 = 9$. 34. $x_1 = 0, 5, x_2 = 8$. 35. $x_1 = 1,$
 $x_2 = 10^4$. 36. $x = 3$. 37. $x_1 = 6, x_2 = 14$. 38. $x_1 = 2, x_2 = 3$.
 39. $x = 5$. 40. $x = 41$. 41. $x_1 = 2^{-7}, x_2 = 2$. 42. Нет реше-
 ний. 43. $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 9$. 44. $x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = 25$. 45. $x = 10$.
 46. $x = 10$. 47. $x = 2$. 48. $x = 6$. 49. $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$.
 50. $x_1 = 3, x_2 = -5$. 51. $x_1 = 10^4, x_2 = \sqrt[4]{10}$. 52. $x = \sqrt{3}$.
 53. $x = 2$. 54. $x = 1$. 55. $x = 0$. 56. $x_1 = 10, x_2 = 10^4$.
 57. $x_1 = \frac{1}{9}, x_2 = 9$. 58. $x_1 = -1, x_2 = 0$. 59. $x = 2$.
 60. $x_1 = 3, x_2 = 3 + \sqrt{2}$. 61. (3; 2). 62. (4; 2). 63. (0; 1).
 64. (2; 4). 65. (3; 81). 66. (4; 2). 67. $(\log_5 2; 0), (0; \log_5 2)$.
 68. (9; 3). 69. (2; 1). 70. (27; 3). 71. (6; 2). 72. $\left(\frac{1}{3}; 9\right)$.
 73. $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$. 74. $\left(\frac{1}{4}; 64\right)$. 75. (3; 2). 76. (2; 32), (32; 2).
 77. (125; 4), (625; 3). 78. (4; 1). 79. (8; 2). 80. $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$.
 81. (8; 1), (1; 8). 82. $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{81}\right)$. 83. (1; -4). 84. (2; 3),
 (3; 2). 85. (1; 4).

Глава 5

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

§ 20, 21

Группа А

1. 1. 2. 1. 3. -1. 4. 3. 5. 2. 6. -2. 7. 2. 8. 0. 9. 0. 10. 3.
11. 3. 12. 0. 13. 8. 14. 4. 15. 1. 16. 1.

Группа Б

1. 0. 2. -1. 3. 1. 4. 2. 5. 3. 6. 3. 7. 2. 8. 0. 9. 0. 10. -1.
11. -1. 12. 0. 13. 1. 14. 1. 15. 2. 16. $x > 2$. 17. $x > 0$.

18. $-6 < x < 0$. 19. $x \geq \frac{1}{2} \log_2 0,75$. 20. $-5 < x < -3$;
 $x > 3$. 21. $x < 2$; $2 < x \leq 3$. 22. $-1 < x < 0$; $0 < x < 1$;
 $1 < x < 2$. 23. $-1 < x < 1$. 24. $x > 0$. 25. $x > 2$. 26. $x > 0$.
27. $x < 0$; $2 < x < 3,5$; $x > 4$. 28. $-1 < x < 1$;
29. $-3 < x < 0$. 30. $x = 1, 2, \dots, 8$. 31. 3. 32. 0. 33. -1.
34. 0. 35. -1. 36. 0. 37. -2. 38. 1. 39. 2. 40. 5. 41. 1.
42. 11. 43. -1. 44. 2. 45. 0.

§ 22, 23

Группа А

1. -30. 2. 10. 3. -1. 4. 24. 5. 2. 6. 11. 7. 7. 8. 3. 9. -2.
10. -9. 11. 7. 12. 12. 13. 5. 14. 9. 15. 5. 16. 1. 17. 2.
18. 1. 19. 0. 20. -3. 21. 0. 22. -10. 23. 15. 24. 1. 25. 3.

Группа Б

1. 1. 2. 3. 3. 15. 4. 8. 5. 2. 6. 6. 7. 4. 8. 1. 9. 3. 10. 6.
11. 5. 12. Нет решений. 13. 3. 14. -3. 15. 1. 16. 0.
17. $x > 7$. 18. Нет решений. 19. $x < -0,5$; $x > 3$.
20. $0 < x < 1$, $x = \sqrt{3}$. 21. $x \leq 0$; $\log_6 5 \leq x < 1$. 22. $x < 1$,
 $x > 3$. 23. $-3 < x < -\sqrt{6}$; $\sqrt{6} < x < 3$. 24. $0 < x < \frac{1}{3}$,

- $x > 1$. 25. $\frac{1}{\sqrt{10}} < x < 10$. 26. $x > 0$. 27. $x < -1000$;
 $-0,1 < x < 0$. 28. $x > 0$. 29. $-3 \leq x < -1$; $x > 1$.
 30. $0 < x < 1$; $1 < x < 3$. 31. $x < 0$; $0 < x < \frac{4}{9}$; $x > \frac{4}{7}$.
 32. $x < -1$. 33. $x > \log_3 10$. 34. $\log_3 0,9 \leq x < 2$.
 35. $x \geq 2$. 36. $-1,5 < x < 3$. 37. $\pi n + \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$.
 38. $1 < x < 3$. 39. $x < 0$; $x > 5$. 40. $0 < x < 0,4$; $x > 1$.
 41. $x > 0,01$. 42. $2^{-\sqrt{2}} < x < \frac{1}{2}$; $1 < x < 2^{\sqrt{2}}$.
 43. $\log_2 \sqrt{13} < x < 2$. 44. $0,2 \leq x \leq 5$. 45. $-3 < x \leq 2,96$;
 $x \geq 22$. 46. $1 < x < 3$. 47. $0 < x < 1$. 48. $1 < x < 4$.
 49. $\frac{1}{2}(\sqrt{113} - 7) < x < 2$; $0 < x < 1$. 50. $x < -11$.

Глава 6

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 24

Группа А

1. 1) $\frac{5\pi}{18}$; 2) $\frac{7\pi}{12}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{7\pi}{9}$; 5) $\frac{\pi}{6}$; 6) $\frac{7\pi}{6}$. 2. 1) 30° ;
 2) 20° ; 3) 120° ; 4) 135° ; 5) $\left(\frac{720}{\pi}\right)^\circ$; 6) $\left(\frac{324}{5\pi}\right)^\circ$. 3. -7.
 4. $-\frac{1}{4}$. 5. 2,75. 6. 2. 7. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 8. 1. 9. -1. 10. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 11. 1.
 12. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 13. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 14. $\frac{1}{2}$. 15. 1. 16. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 17. -1.
 18. $\frac{\pi}{2}$. 19. $-\frac{\pi}{3}$. 20. $-\frac{\pi}{4}$. 21. $-\frac{47\pi}{12}$. 22. $-\frac{3}{5}; \frac{4}{3}$.

$$23. \frac{4 - \sqrt{2}}{6} . 24. \frac{15}{8} . 25. \frac{1}{2 \sin \alpha} . 26. \cos 2\alpha . 27. \operatorname{tg} \alpha .$$

$$28. 4 . 29. \cos^2 x . 30. \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Группа Б

$$1. \pm \frac{3}{4} . 2. a) \frac{1}{3} ; б) 2 . 3. a) -\frac{3}{8} ; б) \frac{11}{16} ; в) \pm \frac{\sqrt{7}}{2} . 4. \frac{8}{25} .$$

$$5. \frac{37}{125} . 6. a) -\sqrt{2} ; б) -1 . 7. \frac{1}{\sin 4\alpha} . 8. -\frac{1}{\cos 2\alpha} . 9. 1 .$$

$$10. \sin 2\alpha . 11. 0 . 12. \operatorname{tg}^2 \alpha . 13. -1 . 14. \frac{1}{2} \cos^2 \alpha .$$

$$15. \sin \alpha \sin 3\alpha . 16. \cos 4\alpha . 17. 2 \sin \alpha . 18. 2 \sin \alpha .$$

$$19. a . 20. -\frac{1}{4} . 21. -\frac{2}{3} . 22. 2 . 23. 1 . 24. \frac{1}{2} . 25. \frac{1}{2} .$$

$$26. 2 \cos^2 \alpha . 27. 2 . 28. \sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha . 29. -4 .$$

$$30. -\cos 2\alpha \cos 4\beta . 31. \sin 3\alpha . 32. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} . 33. 1 .$$

$$34. 4 \sin \alpha . 35. 2 . 36. 0 . 37. 2 . 38. \operatorname{ctg}^6 \alpha . 39. 1 .$$

$$40. -\operatorname{tg} 2\alpha . 41. 1 . 42. -\sqrt{2} . 43. 7 . 44. 1 . 45. -\frac{1}{\sqrt{3}} .$$

$$46. 0 . 47. \frac{1}{8} . 48. \sin 1^\circ . 49. 0,5 . 50. \frac{1}{4} . 51. -1 . 52. 2 .$$

$$53. 0,5 . 54. 1,4 . 55. -0,6 . 56. -\frac{3+4\sqrt{3}}{10} . 57. 2\frac{5}{36} .$$

$$58. \frac{1}{7} . 59. -\frac{1}{3} . 60. 2 . 61. 1\frac{5}{6} . 81. a) \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} < 0 ;$$

$$б) \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} > 0 . 82. \cos 1,3 > \cos 2,3 . 83. \text{во II} .$$

$$84. \cos \alpha = \frac{9}{11} , \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{9} .$$

$$86. 1) \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} < \arcsin \frac{2}{\sqrt{10}} ;$$

$$2) \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) > \arccos\left(-\frac{1}{3}\right);$$

$$3) \operatorname{arctg} 2\sqrt{3} < \operatorname{arctg} 3\sqrt{2}. 88. \frac{1}{3}. 89. \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} z.$$

$$91. \frac{\pi}{2}. 92. \frac{5\pi}{2}. 93. \pi. 94. \pi. 95. 4\pi. 96. \frac{8\pi}{3}. 97. 2\pi. 98. 2\pi. 99. 70\pi. 100. 4\pi.$$

§ 25, 26

Группа А

$$1. \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z. 2. -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z. 3. \pm \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in Z.$$

$$4. (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z. 5. \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z. 6. \frac{\pi n}{3},$$

$$n \in Z. 7. \pi n; (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z. 8. \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3};$$

$$\pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z. 9. 60^\circ + 360^\circ n, n \in Z. 10. \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z. 11. -360^\circ. 12. 45^\circ. 13. 180^\circ. 14. 15^\circ. 15. 90^\circ. 16. 45^\circ.$$

Группа Б

$$1. -\frac{\pi}{4} + 3\pi n, n \in Z. 2. (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$n \in Z. 3. \frac{\pi n}{5}, n \in Z. 4. \frac{\pi n}{4}, n \in Z. 5. \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z.$$

$$6. -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z. 7. \text{Нет корней. } 8. \text{Нет корней.}$$

$$9. \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z. 10. \text{Нет корней. } 11. \pm \frac{2\pi n}{3} + 2\pi n,$$

$$n \in Z. 12. \pi n. 13. 2\pi n; 2\operatorname{arctg} \frac{3}{8} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$14. (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z. 15. \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

16. $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{2\pi n}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 17. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}; \pm \frac{\pi}{6} + \pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}$. 18. $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. 19. $\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$.
 20. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. 21. $2\pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
 22. $\frac{\pi n}{2}, (-1)^{n+1} \frac{\pi}{21} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$. 23. $\pi n, n \in \mathbb{Z};$
 $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{21} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$. 24. $-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$.
 25. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. 26. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
 27. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \pi n \pm \frac{\pi}{6}$. 28. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. 29. $2\pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}$. 30. $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. 31. $(-1)^n \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$.
 32. $\pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$. 33. $2\pi n; 2\arctg \frac{3}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
 34. $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$. 35. Нет корней. 36. $\frac{\pi n}{3} \pm \frac{\pi}{18},$
 $n \in \mathbb{Z}$. 37. $\pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. 38. $\pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
 39. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$. 40. $-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.
 41. $\pi n, (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. 42. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, 2\arctg \frac{3}{5} +$
 $+ 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 43. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. 44. $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},$
 $n \in \mathbb{Z}$. 45. $\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 46. $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 47. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
 48. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. 49. $\pi n; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 50. $2\pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}$. 51. 150° . 52. 0° . 53. 210° . 54. $0^\circ, 60^\circ$. 55. 120° . 56. 45° .
 57. -30° . 58. 360° . 59. 70° . 60. 105° . 61. $67,5^\circ$. 62. -270° .

63. 360° . 64. -60° . 65. $22,5^\circ$. 66. $(\pi(6n + 6k - 1)/6;$
 $\pi(6n - 6k - 1)/6); (\pi(6n + 6k + 1)/6, \pi(6n - 6k + 1)/6,$
 $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$. 67. $(\pi(4m + 1)/4; \pi(8n - 4m + 1)/4),$
 $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$. 68. $(\pi(6k + 6m - 1)/6; \pi(6k - 6m - 1)/6),$
 $(\pi(6k + 6l + 1)/6; \pi(6k - 6l + 1)/6; k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}.$
 69. $(\pi(6k + 6n \pm 1)/6; \pi(2k - 2n \pm 1)/2), (\pi(2k + 2n \pm 1)/2;$
 $\pi(6k - 6n \pm 1)/6); k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}.$

$$70. ((-1)^n \arcsin \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \frac{\pi}{12} + \pi n;$$

$$\frac{5\pi}{12} - (-1)^n \arcsin \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \pi n), n \in \mathbb{Z}.$$

$$71. (\pi(2n + 1)/2; -\pi(6n - 1)/6), n \in \mathbb{Z}.$$

$$72. \left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} - \pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$73. (\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \pi n), (\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n;$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \pi n), n \in \mathbb{Z}. 74. \left((-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right);$$

$$\left((-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$75. \left(\pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k; \mp \arccos \frac{1}{8} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$$

Глава 7

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

§ 27

Группа А

$$1. 0. 2. 0. 3. -1. 4. 8. 5. 0. 6. -4. 7. 2. 8. \frac{6}{5}. 9. 3. 10. -1.$$

$$11. 2. 12. -1. 13. 0. 14. 1. 15. 0. 16. \frac{1}{6}. 17. 1. 18. -1.$$

19. 1. 20. 4. 21. $\frac{1}{\pi^2}$. 22. π . 23. 20. 24. -21. 25. 3. 26. -2.
27. 10. 28. 12. 29. 2. 30. 2. 31. -16. 32. 2. 33. 1,6.

34. -8. 35. $y = 2 - 2x$. 36. $y = -x - 1$. 37. $y = \frac{1}{3}x + 1$.

38. $y = 4x - \frac{\pi}{2}$. 39. $y = x - 3$. 40. $3x + 2y - 5 = 0$ и
 $3x + 2y + 3 = 0$. 41. $3x - 2y - 1 = 0$. 42. $y = 3x - 2$.

43. $f_{\text{наиб.}} = 6\frac{1}{3}$; $f_{\text{наим.}} = 1\frac{5}{6}$. 44. $f_{\text{наиб.}} \approx 1,7$; $f_{\text{наим.}} = 1$.

45. $f_{\text{наиб.}} = 0,75$; $f_{\text{наим.}} = -0,25$. 46. $f_{\text{наиб.}} \approx 1,01$; $f_{\text{наим.}} = -1,01$. 47. $8 = 4 + 4$. 48. 1. 49. 6 и 6. 50. Хорда

должна быть проведена на расстоянии $\frac{3}{2}R$ от касательной.

Группа Б

1. 5. 2. 6. 3. 0. 4. -0,5. 5. 1. 6. 0. 7. 1. 8. 1. 9. $\frac{1}{9}$. 10. $\frac{2}{3}$.

11. 1. 12. 0. 13. 0. 14. $-\frac{5}{27}$. 15. $-\frac{1}{2}$. 16. 192. 17. 31,5.

18. 1. 19. 0. 20. 0,5. 21. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$. 22. $y = x + 1$.

23. $y = 1$. 24. $y = x$. 25. $y = 30x - 54$. 26. $y = (1 + e^{-1})x$.

27. (1; 2). 28. $y = 6x + \frac{19}{6}$. 29. -21. 30. 0,5. 31. Воз-

растает на R . 32. Возрастает на $[-5; 3]$, убывает на $(-\infty; -5]$ и на $[3; +\infty)$. 33. Убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[0; 1]$; возрастает на $[-1; 0]$ и на $[1; +\infty)$. 34. Убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$. 35. Убывает на $(-\infty; -1,5)$ и на

$(-1,5; +\infty)$. 36. Убывает на $(-\infty; \frac{1}{2}]$. 37. $x = -\frac{1}{3}$ - точ-

ка максимума, $x = 5$ - точка минимума. 38. $x = -1$,
 $x = 4$ - точки минимума, $x = 0$ - точка максимума.

39. $x = 3$ - точка минимума. 40. $x = -2$ - точка максимума, $x = 2$ - точка минимума. 56. $f_{\text{наиб.}} = 5$, $f_{\text{наим.}} =$

$$\begin{aligned}
 &= -11. \quad 57. f_{\text{наиб.}} = 1,5, f_{\text{наим.}} = -3. \quad 58. f_{\text{наиб.}} = 0, f_{\text{наим.}} = -4. \\
 &59. f_{\text{наиб.}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, f_{\text{наим.}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad 60. f_{\text{наиб.}} = 3, f_{\text{наим.}} = 1. \\
 &61. 8. \quad 62. 21. \quad 63. 0,8. \quad 64. 4. \quad 65. 60. \quad 66. 288. \quad 67. 11,2. \\
 &68. 5. \quad 69. 8. \quad 70. 3.
 \end{aligned}$$

Глава 8

ИНТЕГРАЛ

§ 28, 29, 30

Группа А

$$\begin{aligned}
 &9. \frac{2}{x}. \quad 10. -2\sqrt{x}. \quad 11. 0,3x^{10}. \quad 12. -\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3}. \quad 13. \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x}. \\
 &14. -\frac{1}{x^2} - 2\sqrt{x}. \quad 15. \frac{15}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^6. \quad 16. 4\sin x + 2\cos x. \\
 &17. 3\operatorname{tg} x. \quad 18. -6\operatorname{ctg} x - 9\operatorname{tg} x. \quad 19. \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right). \\
 &20. \frac{4}{3}\sqrt{6x+5}. \quad 21. \frac{1}{4}x^4 - 3. \quad 22. \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 8. \quad 23. 2\sqrt{x}. \\
 &24. \frac{1}{3}\sin 3x. \quad 25. -\cos x - 1. \quad 26. 9. \quad 27. \frac{3}{8}. \quad 28. 2. \quad 29. 1. \\
 &30. 2. \quad 31. 0. \quad 32. 11. \quad 33. 10. \quad 34. e^6 - e^2. \quad 35. 68. \\
 &36. \frac{2}{15}(16\sqrt{2} - 3\sqrt{3}). \quad 37. 14. \quad 38. -\frac{8}{3}. \quad 39. \frac{\pi}{12}. \quad 40. 2. \\
 &41. 21\frac{1}{3}. \quad 42. 20,5. \quad 43. 16. \quad 44. 2. \quad 45. \frac{2}{3}. \quad 46. \sqrt{2}. \quad 47. \sqrt{2}. \\
 &48. 18. \quad 49. 10\frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Группа Б

1. $-\frac{1}{x^2} - 3 \ln x$. 2. $3x\sqrt[3]{x} - 4x\sqrt{x}$. 3. $x + 3e^x - 4 \sin x$.
4. $8\sqrt{x} + 3 \ln x + 2e^{-x}$. 5. $\frac{9}{2}\sqrt[3]{(x+3)^2}$. 6. $3\ln(x-3) +$
 $+ 2 \cos(x-1)$. 7. $\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{5}} - \cos(4x+2)$. 8. $\frac{1}{10}(3x^4 -$
 $- 3x^2 + 4x)$. 9. $\left(\frac{9}{7}x - \frac{3}{2}\right)x\sqrt[3]{x}$. 10. $\left(\frac{1}{3}x - 3\right)2\sqrt{x}$
11. $\frac{1}{2} \cos 2x$. 12. $\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x$. 13. $\ln(x+2)$.
14. $-\frac{1}{x}, x > 0$. 15. $x^2 - 4x + 3$. 16. $\operatorname{tg} x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.
17. $\sin x$. 18. $-3\operatorname{ctg} \frac{x}{3} + 3$. 19. $\sin x + 1$. 20. 47.
21. 7,5. 22. $-\frac{11}{12}$. 23. 5. 24. $4\sqrt{3}$. 25. 8. 26. $\frac{4}{3} \ln 2,5$.
27. $2\frac{1}{3}$. 28. $-24\frac{2}{3}$. 29. 0,5. 30. $\frac{3\pi}{4}$. 31. -0,4. 32. $\frac{\sqrt{3}}{8}$.
33. π . 34. $16\frac{16}{105}$. 35. $1,5 + \ln 2$. 36. 1. 37. 6. 38. $\frac{\pi n}{2}$.
39. $\frac{\pi n}{2}$. 40. $\frac{\pi n}{4}$. 41. $-1 < x < 1$. 42. $0 < x < 1, x > 3$.
43. $\frac{\pi}{8} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \pi n$. 44. $\frac{5\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{7\pi}{3} + 4\pi n$.
45. 4,5. 46. 4,5. 47. 4,25. 48. $\frac{5}{3}$. 49. $\frac{8}{3}$. 50. $\frac{8}{3}$.
51. $\frac{32}{3}$. 52. $\frac{4}{3}$. 53. 1,31. 54. $\frac{40}{3}$. 55. $\frac{32}{3}$. 56. 4,5.
57. 3. 58. $\frac{76}{3}$. 59. 2,59. 60. 2,66. 61. 36. 62. $\frac{16}{3}$.

63. $\frac{7}{3}$. 64. $\frac{4}{3}$. 65. $\frac{2}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 2}$. 66. 1090 м. 67. 78,4 м.
68. 0,08 м. 69. $\approx 1,2 \cdot 10^6$ Н.

Глава 9

ПРОГРЕССИИ

§ 31, 32, 33

Группа А

1. 10. 2. 210. 3. 4850. 4. 204. 5. 4905. 6. $\frac{1}{9}$.

7. $b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. 8. $-\frac{1}{5}$. 9. $-\frac{31}{8}$. 10. 7. 11. 364.

12. $b_5 = 4802$; $S_4 = 800$. 13. 7,2. 14. $\frac{1}{2}$. 15. а) 1; б) $\frac{7}{30}$.

Группа Б

1. 0,5. 2. $n \geq 9$. 3. $a_9 = -1$; $d = -1,5$. 4. 10. 5. $a_1 = -88$;
 $d = 18$. 6. $a_1 = 5$, $d = 4$. 7. $a_1 = 8$, $d = -3$. 8. $x = 55$.

9. 1; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$. 10. 82350. 11. $-\frac{31}{32}$; 12. $q = 5$, $b_3 = 300$

или $q = -6$, $b_3 = 432$. 13. 781 или 521. 14. $6 + 4\sqrt{3}$;

15. $\frac{1}{3}$; 16. $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -4$. 18. 6. 19. $a_1 = 8$, $d = -3$

или $a_1 = 2$, $d = 3$. 20. 72. 21. $\frac{1}{3}$; 1; 3; 9; 27 или $\frac{1}{3}$;

-1 ; 3; -9 ; 27. 22. а) $\frac{4}{9}$; б) $2\frac{5}{99}$; 23. $x = 1$. 24. 3; 8; 13
или 18; 8; -2 . 27. $x = 7$. 28. 2; 4; 8. 29. $x = 0$, $y = 0$

или $x = \frac{10}{3}$, $y = \frac{4}{3}$ или $x = -\frac{3}{4}$, $y = -\frac{3}{10}$. 30. $a = 3$,
 $b = 6$ или $a = 27$, $b = 18$.

Глава 10

ГЕОМЕТРИЯ. ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 34, 35, 36

Группа А

1. 20° . 2. 60° . 3. 57° , 57° , 123° , 123° . 4. 85° . 5. $72^\circ 30'$ и $107^\circ 30'$. 6. 90° . 8. 40° . 9. 80° . 10. 20° . 11. 48. 12. 0,6.
13. 21 см^2 . 14. 3. 15. 10 см. 16. 2 см. 17. 45. 18. 64 см^2 .
19. 10 см. 20. 98 см. 21. 8 см. 22. 24 см. 23. 8. 24. 30° .
25. 5 см. 26. 2 см. 27. 40° . 28. 4. 29. 17 см. 30. 4. 32.
6 см. 33. 8. 34. 12. 35. 12. 36. 3. 37. 15. 38. 6. 39. 12.
40. 48. 41. 11. 42. $20\sqrt{2}$ см. 43. 6 см. 44. 75° . 45. 16 см.
46. 192 см^2 . 47. 6. 48. 129° . 49. 50. 50. 48. 51. 108.
53. 17; 20; 21; $\sqrt{337}$ см. 54. 30. 55. 120. 56. 8. 57. 140° .
58. 130° . 59. 16. 60. 96. 61. 6. 62. 12 см^2 . 63. 12 см.
64. 8 см. 65. 24 см. 66. 12. 67. 48 см^2 . 68. 96 см^2 .
69. 0,5. 70. 7,5. 71. $4\sqrt{\pi}$. 72. 12. 73. 4 см. 74. 32. 75. 4.
77. 70° . 78. 9 см. 79. 72 см^2 . 80. 10 см. 81. 8. 82. 8.
83. 30° . 84. 6. 85. 30° .

Группа Б

1. Прямоугольный треугольник

1. 0,5 см. 2. 2. 3. 12 см. 4. 21 см. 6. $9\sqrt{5}$ и $8\sqrt{10}$ см;

7. $\frac{mn(m+n)}{m^2+n^2}$; 8. $\text{arctg} \left(\frac{1}{2} \text{tg} \alpha \right) - \frac{\alpha}{2}$; 10. $\frac{r}{R}(2R+r)$.

12. 7,5 см. 13. 12,5 см. 14. $\frac{1}{4}c^2(k^2-1)$; $1 < k \leq \sqrt{2}$;

15. $m^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \text{ctg} \alpha$. 16. $(r+c)r$.

17. $2\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$; 18. 2; 19. $6,72 \text{ см}^2$.

2. Равнобедренный треугольник

1. 120° . 2. 1,5 см. 3. 10 см. 4. 4. 5. 10 см. 6. 28 см.

7. 48 см. 8. 10 см. 9. $\arctg \frac{1}{13}$; 10. $\arcsin \frac{72}{97}$; 11. 45° ,

45° , 90° . 12. $4\sqrt{10}$; 14. $\frac{25}{12}$. 15. 0,75. 16. $12\sqrt{3}$ см².

17. 360 см². 18. $(12 + 7\sqrt{3})d^2$. 19. 9. 20. $\frac{2}{9}b\sqrt{4a^2 - b^2}$.

3. Произвольный треугольник

1. 144° . 2. 45° . 3. 11,2. 4. 0,3. 5. 2. 6. 5. 7. 54 см. 8. 3.

9. $a = \sqrt{b^2 + c^2 - \frac{6}{5}bc}$ 11. 4; 6; 8 см или $2\sqrt{6}$; $4\sqrt{6}$;

6 см; тупоугольный. 14. 45° . 15. $3\sqrt{5}$; 10; 11 см.

16. 7,56 см². 17. $ab/a + b$ 18. $\arccos \frac{5}{8}$; 20. 30° .

4. Вписанные и описанные треугольники

1. $3\sqrt{5}$ см. 2. $\frac{3R\sqrt{57}}{19}$; 3. $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$; 4. 12π см;

5. 8,5. 6. $\frac{180\sqrt{3}}{19}$ см²; 7. $ab\sqrt{3}$; 8. $\frac{720}{17}$ см².

9. $b\sqrt{\frac{b}{3b-c}}$, $c < 3b$. 10. $\frac{5}{13}$.

5. Параллелограмм

1. 32. 2. 120° . 3. 15 см. 4. 2. 5. $\arccos \frac{7}{18}$. 6. $\frac{\sqrt{106}}{8}$ и

$\frac{3\sqrt{106}}{8}$ м. 7. 6 м². 8. 25 : 6л. 9. 20; 10,4 см². 10. $\sqrt{3}$ м.

6. Трапеция

1. 8 см. 2. 15 см. 3. 18 см². 4. 8. 5. 10 см. 6. 16 см. 7. 15 см².
8. 24 см. 9. 12,5; 19,4; 31,9; 14 см.

7. Разные задачи

1. 6. 2. 16. 3. 0,5. 4. 160° . 5. $\frac{784}{7225}$; 6. 75 см. 8. $\frac{8}{\sqrt{3}}$ см,

$\frac{26}{\sqrt{3}}$ см, 10 $\sqrt{3}$ см. 9. $R^2(\alpha + \sin \alpha)$. 10. $\frac{R^2}{4}(8\sqrt{3} - 9)$.

11. $32(\sqrt{2} - 1)$. 12. 120 см². 13. 336 см². 14. $12\sqrt{5}$ см.
15. 3 см. 16. 1,5. 17. 31,2 см. 18. 5. 19. 8 см. 20. 12 см.

Глава 11

СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 37, 38

Группа А

1. 29. 2. 13 м. 3. 29 см. 4. $2l^2$. 5. 1464 см². 6. 6 см,

14 см, 16 см. 7. $\frac{\sqrt{6}}{3}a$. 8. 1. 9. 18 10. 1. 11. 2 м².

12. $\frac{\sqrt{3}}{9}l^3$. 13. $\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{6}}$. 14. 3 см. 15. 30 м. 16. 4500 см³.

17. 6 м³. 18. $\frac{abS}{4(a+b)}$. 19. $\frac{\sqrt{2}}{8}l^3$. 20. 1,8. 21. 22 см.

22. 9 см. 23. 1) $3ab + \frac{a^2}{\sqrt{3}}$; 2) $4ab + 2a^2$; 3) $6ab + 3\sqrt{3}a^2$.

24. $192 + 32\sqrt{6}$ см². 25. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b$. 26. 3 м³. 27. $8\sqrt{2}$

или 32 см³. 28. 144 см². 29. 4980 см². 30. 3 м².

31. 48 см³. 32. 3060 м³. 33. 18. 34. 162. 35. 3.

36. 1) $\sqrt{b^2 - \frac{1}{3}a^2}$; 2) $\sqrt{b^2 - \frac{1}{2}a^2}$; 3) $\sqrt{b^2 - a^2}$.

$$37. 1) \frac{1}{2} \sqrt{4h^2 + \frac{1}{3}a^2}; 2) \frac{1}{2} \sqrt{4h^2 + a^2}; 3) \frac{1}{2} \sqrt{4h^2 + 3a^2}.$$

$$38. 9 \text{ см. } 39. 12 \text{ см. } 40. 14 \text{ см}^2. 41. \frac{1}{4} a \sqrt{3b^2 - a^2}.$$

$$42. 11 \text{ м. } 43. 288 \text{ см}^2. 44. 1,8 \text{ м и } 4 \text{ м. } 45. \sqrt{2} \text{ см.}$$

$$46. 9 \text{ см. } 47. 540. 48. 1 \text{ дм. } 49. 6 \text{ см. } 50. 20\sqrt{2}.$$

$$51. 16 \text{ см}^2. 52. 168 \text{ м}^2. 53. 54 \text{ дм}^2. 54. 36 \text{ см}^2.$$

$$55. 1) \frac{a^2}{12} \sqrt{3b^2 - a^2}; 2) \frac{1}{6} a^2 \sqrt{4b^2 - 2a^2};$$

$$3) \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3(b^2 - a^2)}. 56. 32 \text{ м}^3. 57. 7 \text{ см. } 58. a^2 \sqrt{3};$$

$$\frac{\sqrt{2}}{12} a^3. 59. 2a^2 \sqrt{3}; \frac{\sqrt{2}}{3} a^3. 60. a^3/12. 61. 5 \text{ м. } 62. \frac{\pi Q}{4}.$$

$$63. 36 \text{ см}^2. 64. 90^\circ. 65. 2\pi ab. 66. \pi^2. 67. \pi h^2. 68. R.$$

$$69. \pi Q. 70. \pi. 71. H = 1,5R. 72. 5 \text{ м. } 73. \frac{1}{2} l. 74. R^2.$$

$$75. 45^\circ. 76. 500. 77. 80\pi. 78. 24\pi. 79. 2:3. 80. 216^\circ.$$

$$81. 5 \text{ м. } 82. R - r. 83. 2H. 84. 30 \text{ дм}^2. 85. 35\pi \text{ дм}^2.$$

$$86. 2\pi(R^2 - r^2). 87. 10\frac{1}{3} \text{ м}^3. 88. 109 \text{ см}^3. 89. \frac{\pi}{3} (R^3 - r^3).$$

$$90. 8 \text{ см. } 91. \pi R^2/4. 92. \frac{4\pi}{3} \text{ м}^3. 93. 6 \text{ см. } 94. \approx 2148 \text{ см}^3.$$

$$95. \approx 1,9 \text{ кг. } 96. 0,028. 97. \frac{1}{3} \pi R^3. 98. 112,5\pi \text{ дм}^3.$$

$$99. \approx 314,16 \text{ см}^2. 100. 562,5 \pi \text{ м}^3. 101. \sqrt[3]{36\pi v^2}.$$

$$103. 910 \pi \text{ см}^2. 104. \frac{21\pi Q}{4\pi - 3\sqrt{3}}. 105. 7 \text{ см. } 106. 3 \text{ см.}$$

$$107. 3 \text{ м. } 108. 13 \text{ см. } 109. 3 \text{ м. } 110. 5 \text{ м.}$$

Группа Б

1. Параллелепипеды и призмы

$$1. 4. 2. 6. 3. 5 \text{ см, } 7 \text{ см. } 4. 2 \text{ м}^2 \text{ и } 3 \text{ м}^2. 5. \approx 6,928 \text{ м}^2. \\ 6. 4,5 \text{ см. } 7. 12 \text{ см. } 8. 1416 \text{ см}^2. 9. 288 \text{ см}^2. 10. 6 \text{ см и}$$

3 см или 4 см и 7 см. 11. 34 см, 20 см, 18 см.
12. 144 см^2 . 13. 576 см^2 . 14. Вдвое. 15. 36 м^3 . 16. 3,4 м;

3,4 м; 3,2 м. 17. 12 см^3 . 18. $\frac{\sqrt{2}}{2} a^3$. 19. 100 м^3 . 20. 1 м^3 .

2. Пирамида. Усеченная пирамида

1. 12 см. 2. 5 см и 6 см. 3. 245 см^2 . 4. 35 см. 5. $\frac{1}{2} a$.

6. 16 и 6 см; 12 и 8 см. 7. 448 см^2 . 8. 6 дм^2 . 9. 56 см и

24 см. 10. 2 см. 11. 448 см^2 . 12. 50 м^2 . 13. $\frac{ab}{a+b}$.

14. 2 см и 12 см. 15. $\frac{3}{4} a^3$. 16. 48 см^3 . 17. 420 см^3 .

18. 60 см^2 . 19. 500 см^3 . 20. 4 м^3 . 21. 80 см^3 . 22. 20 м^2 и 45 м^2 . 23. 2 см^2 и 8 см^2 . 24. 128 м^2 и 50 м^2 . 25. 1900 м^3 .

3. Цилиндр. Конус. Усеченный конус

1. $40\sqrt{3} \approx 70 \text{ см}^2$. 2. 6 см. 3. $SC/4\pi$. 4. $\frac{3}{4} \pi a^3$. 5. 0,5.

6. 12. 7. $2H^2$. 8. $\frac{HR\sqrt{2}}{H + R\sqrt{2}}$. 9. 11 см, 11 см, 8 см.

10. 30° . 11. 1 м. 12. $\pi : \sqrt{7}$. 13. $100 \pi \text{ см}^2$. 14. 15 м.

15. $\sqrt{2} \pi (R^2 - r^2)$. 16. $9\pi \text{ м}^3$. 17. $12 \pi \text{ см}^3$. 18. $96 \pi \text{ см}^2$.

19. $200 \pi \text{ м}^2$. 20. $\frac{1}{4} \pi a^3$. 21. 448π ; $216 \pi \text{ см}^2$. 22. 63π .

23. 2 м; 5,5 м. 24. 54 см^3 . 25. $457 \pi \text{ см}^3$.

4. Шар. Вписанный и описанный шары

1. 2 см. 2. 12 см. 3. 8 см. 4. 45π и $243 \pi \text{ см}^3$. 5. 3528 см^3 .

6. $12\frac{2}{3} \pi$ или $144\frac{2}{3} \pi$. 7. 8 дм. 8. $12\sqrt{3} R^2$. 9. 13 см.

10. 54 см^3 . 11. 8 см или 2 см. 12. 12 см. 13. 2 см или 14 см. 14. $280 \pi \text{ см}^3$; $270 \pi \text{ см}^2$. 15. $504 \pi \text{ см}^3$; $504 \pi \text{ см}^2$.

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ К ЕГЭ (тип С)

§ 39

Алгебраические уравнения высших степеней

1. $x_1 = 1$; $x_{2,3} = \frac{1}{34}(-17 \pm \sqrt{26333})$; 2. $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt[3]{2a-1})$.
3. $x = \sqrt{3}$. 4. $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. 5. $x_1 = -2$, $x_2 = -4$, $x_3 = -1$,
 $x_2 = -8$. 6. $x_1 = 2\sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$. 7. $x_{1,2} = -\sqrt{2}a \pm 1$.
8. $\frac{\sqrt{6}}{2}(-1 \pm \sqrt{4-\sqrt{6}})$; 9. $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{29}$; $x_3 = -3$;
 $x_4 = -1$. 10. $x_1 = -6$, $x_{2,3} = -8 \pm 2\sqrt{7}$. 11. $x_1 = 3$, $x_2 = 14$.
12. $x = -1$. 13. $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, $x_{3,4} = \frac{1}{13}(26 \pm 2\sqrt{39})$.
14. $x_{1,2} = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{41})$, $x_3 = -1$, $x_4 = 6$. 15. $x = \frac{2}{1-\sqrt[3]{2}}$.
16. $x_{1,2} = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{3+2\sqrt{17}})$. 17. $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$,
 $x_{3,4} = \pm \sqrt{3}$. 18. $x_1 = -4$, $x_2 = 2$. 19. $x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{55}$,
 $x_3 = 4$, $x_2 = 12$. 20. $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{5}{6}$, $x_3 = \frac{5}{7}$, $x_4 = 5$.
21. $x = 1$. 22. $x_1 = 5$, $x_2 = 7$. 23. $x_1 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = 1$,
 $x_{3,4} = \frac{1}{24}(3 \pm \sqrt{129})$. 24. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. 25. $x_1 = -2000$,
 $x_2 = -0,5$.

§ 40

Нелинейные системы алгебраических уравнений

1. $(-1; -2)$, $(2; 1)$. 2. $(3; 1)$, $(-3; -1)$, $(2\sqrt{2}; \sqrt{2})$,

- $(1; -3), (-1; 3), (-2\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (\sqrt{2}; -2\sqrt{2}),$
 $(-\sqrt{2}; 2\sqrt{2}).$ 3. $(0; 0), (1; 2), \left(\frac{44}{23}; \frac{4}{23}\right).$ 4. $(\pm 1; \pm 3),$
 $(\pm 3; \pm 1).$ 5. $(3; -2), (-2; 3).$ 6. $(1; 2), (2; 1), (-1; -2),$
 $(-2; -1).$ 7. $(-3; -\frac{4}{\sqrt{3}}), (-3; \frac{4}{\sqrt{3}}), (2; -\sqrt{2}), (2; \sqrt{2}).$
8. $(4; 1), (1; 4).$ 9. $(2; 1), (1; 2).$ 10. $(0; 1,5), (3; 0).$
11. $(2; 2), (-\frac{19}{5}; -\frac{8}{25}), (\frac{25}{7}; -\frac{8}{7}).$ 12. $(2; 1),$
 $(\frac{21}{43}; -\frac{35}{43}).$ 13. $(\pm 3; \pm 1).$ 14. $(2; 2), (0,6; -0,8).$
15. $(0; \pm\sqrt{33}), (\pm 4; \pm 1), (\pm 2; \pm 5).$ 16. $(\pm 2; \pm\sqrt{3}),$
 $(\pm\sqrt{3}; \pm 2).$ 17. $(\pm 3; \pm 2), (\pm\frac{3\sqrt{30}}{10}; \pm\frac{2\sqrt{30}}{3}).$
18. $(\pm 2; \pm 3), (\pm 3; \pm 2).$ 19. $(2; 1), (-1,8; -0,9),$
 $(\frac{56 \pm 18\sqrt{14}}{35}; \frac{-7 \mp 6\sqrt{14}}{35}).$ 20. $(\pm 2; \pm 3; \pm 4).$

§ 41

Иррациональные уравнения

1. $x = 0.$ 2. $x_1 = \frac{1}{32}(17 + \sqrt{33}), x_2 = \frac{1}{4}.$ 3. $x_1 = \frac{1}{9},$
 $x_2 = 1.$ 4. $x_1 = 1, x_2 = 3.$ 5. $x_1 = 0, x_2 = 0,8.$ 6. $x = 3.$
7. $x_1 = 4, x_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}).$ 8. $x = 1.$ 9. $x = 7.$ 10. $x = 1.$
11. $x_1 = 0, x_2 = 1.$ 12. $x = \frac{1}{2}.$ 13. $x = 2.$ 14. $x_1 = 1,$
 $x_2 = 2.$ 15. $x = 3.$ 16. $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$ 17. $x_1 = 9,$
 $x_2 = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{13}).$ 18. $x_{1,2} = \pm 3.$ 19. $x = 2.$ 20. $x = 6.$
21. $x = 8.$ 22. $x = 1.$ 23. $x = 4.$ 24. $x = 5.$
25. $x = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}).$ 26. $x = \frac{1}{8}(9 - \sqrt{17}).$ 27. $x_1 = 1,$

$$x_2 = 10. 28. x = 0. 29. x = 4. 30. x = 1.$$

31. $x = 10 + 4\sqrt{7}$. 32. Нет корней. 33. $x = 3$. 34. Нет корней. 35. $x = 2$.

Решить системы уравнений

$$1. \left(\frac{3}{4}; 1 \right), \left(0; \frac{5}{4} \right). 2. (-\sqrt{2\sqrt{3}-3}; \frac{1}{2}(5-\sqrt{3})),$$

$$(\sqrt{2\sqrt{3}-3}; \frac{1}{2}(5-\sqrt{3})).$$

$$3. \left(\frac{1}{7}(9\sqrt{140}-42); \pm \sqrt{\frac{1}{133}(9\sqrt{140}+42)} \right), (7; \pm 1),$$

$$\left(19; \pm \frac{\sqrt{133}}{19} \right). 4. (5; 2\sqrt{6}). 5. (3; -2). 6. (7; 8).$$

$$7. (9; 2), (2; 5,5). 8. (4; 2). 9. (\pm 2; \pm \sqrt{23}),$$

$$(\pm 2; \mp \sqrt{23}), (\pm 3; \pm 4), (\pm 3; \mp 4). 10. (4; 1).$$

§ 42

Тригонометрические уравнения

1. Нет корней. 2. $x = 0$. 3. Нет корней. 4. Нет корней.

$$5. x = \frac{\pi}{2} - 2\pi n; x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$6. x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}. 7. \text{ Нет корней.}$$

$$8. x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. 9. x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$$x = (-1)^n \arcsin(2 - 2\sqrt{2}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$10. x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. 11. x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$$

$$x = (-1)^n \arcsin a - \frac{\pi}{4} + \pi n, \text{ где } a = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{3}), n \in \mathbb{Z}.$$

$$12. x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. 13. \text{ Нет корней.}$$

$$14. x = \pi n, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. 15. x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$16. x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. 17. x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}. 18. x = -\pi + 4\pi m, m \in \mathbb{Z}. 19. x = \pi(4m - 1),$$

$$m \in \mathbb{Z}. 20. x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. 21. x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z}. 22. x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}. 23. \text{Нет корней.}$$

$$24. x = \pi + 2\pi n, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. 25. x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7},$$

$$n \in \mathbb{Z}. 26. x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{14}; x = \pi n, n \in \mathbb{Z}. 27. x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z}. 28. x = -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, -\frac{\pi}{8} + \pi n, x = -\frac{3\pi}{8} + \pi n,$$

$$x = \frac{5\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}. 29. x = \pi n; x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$30. x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. 31. x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$32. x = (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbb{Z}. 33. x = \frac{5\pi}{6} + \pi n,$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. 34. x = \pi n; x = \pi n \pm$$

$$\pm \operatorname{arctg} 7. 35. x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$36. x = (-1)^n \arcsin \frac{-1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2}} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$37. x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. 38. x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$39. x = \frac{\pi}{2} + \pi n; x = \pm \arcsin(2 - \sqrt{3}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$40. x = \frac{(16 - \pi^2)^2}{4\pi^2}.$$

Уравнения и неравенства с параметрами.

1; 2. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства

1. $-47 < a < -3,5$. 2. $a = 2$. 3. При $a < 0$ и $a > 4$.

4. При $a = 0,75$. 5. При $a > 1,5$. 6. При $a = -3$ и $a =$

2. 7. При $-25 < a < 1$. 8. При $a = \frac{1}{4}$. 9. При $a = -3$ и

$a = 2$. 10. $a = 0$, $a = 1$, $a = 1,25$. 11. $a = 1$. 12. При $a = 24$. 13. При $a > 0$. 14. Если $a = 0$, $x = 0$. Если

$a \neq 0$, $x = -6a$, $x = (-8 \pm 2\sqrt{7})a$. 15. Если $a = 0$, то

$x = 0$; если $a \neq 0$, $x = \frac{a}{2} \left(\sqrt{3} \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 1} \right)$. 16. При $a =$

$= 23$. 17. $a < -\frac{1}{2}$; $a > 2$, $\frac{1}{8} < a < 2$. 18. Если $a = \sqrt{3} - 1$,

то $x = 1$; если $a \neq \sqrt{3} - 1$, то корней нет. 19. Если $a < 0$, $0 < a < 2$, то решений нет; если $a = 0$, то $x = 0$; если

$a \geq 2$, то $x = 2\sqrt{a - 1}$. 20. Если $a \geq$, то

$x = \frac{1}{2} (2a + 1 - \sqrt{4a + 1})$; если $a < 0$, то решений нет.

21. $-\frac{13}{4} < a < 3$. 22. $a > 1$. 23. Если $a < -3$, то решение нет, если $-3 \leq a \leq -2$, то

$\frac{1}{2} (2 - \sqrt{a + 3}) \leq x \leq \frac{1}{2} (2 + \sqrt{a + 3})$; если $a > -2$, то

$-\frac{a}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} (2 + \sqrt{a + 3})$. 24. Если $a < 0$, то решений

нет; если $a = 0$, то $x > 0$; если $a > 0$, то $x \geq a$, $x > 16a$.

25. Не существует. 26. При любом a . 27. Если $a \leq -1$,

то решений нет; если $-1 < a < 0$, то $-a < x < -\frac{1}{a}$;

если $a = 0$, то $x > 0$; если $0 < a \leq 1$, то $x > -a$; если

$a > 1$, то $x > -\frac{1}{a}$.

3. Тригонометрические уравнения и неравенства

1. $-\sqrt{34} \leq a \leq \sqrt{34}$. 2. $\frac{a}{b} = \frac{4n+1}{4k-1}$ или $\frac{a}{b} = \frac{4n-1}{4k+1}$,

$k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$. 3. Если $a = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, то $x = 4$; при

других значениях параметра a решений нет.

4. $x = ((-1)^n \arcsin(a+1) + \pi n)^2$, где $n \in \mathbb{N}$

при $-2 \leq a \leq -1$, и $n = 0, 1, 2, \dots$ при $-1 < a \leq 0$.

5. $x = 2 \pm (\operatorname{arctg} a + \pi n)$, где $n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 0$) при $a \geq 0$, и $n \in \mathbb{N}$ при $a < 0$. 6. Если a — любое число, то

$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; кроме того, если $1 \leq a \leq 2$, то

$x_2 = \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{4-3a}{a} + \frac{\pi k}{2}$, $k, n \in \mathbb{Z}$ (при $a = 2$ получает корни первой серии).

7. Если $\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$, то

$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}(-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}(4a-3)}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, при

других a решений нет. 8. Если $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$, то

$x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{a}{\sqrt{2}} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; если $a < -\sqrt{2}$ и

$a > \sqrt{2}$, то решений нет. 9. Если $|a| \leq 2$, то

$x = (-1)^n \arcsin(3 - 2\sqrt{3-a^2}) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

если $|a| > \sqrt{2}$, то решений нет. 10. Если $a < \frac{1}{2}$,

$a > 1$, то решений нет; если $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$, то

$x = \pm \frac{1}{4} \arccos(4a-3) + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

11. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \arccos a + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \arccos a + \pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$. 12. $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} a + \frac{\pi n}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}$,

$$\frac{3}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{2} < x \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arccotg} a - \frac{\pi k}{2}, n, k \in \mathbb{Z}.$$

$$13. \text{ При } a > 0 \quad 2\pi n + \arccos \frac{1}{2} \left(a - \sqrt{a^2 + 4} \right) \leq x \leq$$

$$\leq -\arccos \frac{1}{2} \left(a - \sqrt{a^2 + 4} \right) + 2\pi + 2\pi n \text{ или}$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k, n \in \mathbb{Z}.$$

4. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

1. Если $a = 1$ и $b \neq 1$, то $x = 3$; если $a \neq 1$ и $b = 1$, то $x = -1$; если $a = 1$ и $b \neq 1$, то $(1 + \log_a b)x = 3\log_a b - 1$.

При $b = \frac{1}{a} \neq 1$ решений нет; при $b \neq \frac{1}{a}$, $x = \frac{3\log_a b - 1}{1 + \log_a b}$.

2. При $3 < a < 27$ $x = 2 + \log_4 \frac{a - 27}{3 - a}$. На остальных промежутках решений нет. 3. При $a \leq 1$, $a = 5$.

4. При $a > 0$ ($a \neq 1$) $x = \log_a \sqrt{0,5(1 + \sqrt{5})}$; при $a = 1$ корней нет. 5. При $a = 1$ и $c = 0$ $x \in \mathbb{R}$; при $a > 0$

($a \neq 1$) $x = \log_a (c + \sqrt{c^2 + 1})$; при $a = 1$ и $c \neq 0$ решений нет. 6. При $a = b$, $x = a + 4$, при $b - 1 \leq a < b$, $x = a +$

$+ 2 \pm 2\sqrt{a - b + 1}$; при $a > b$ $x = a + 2 + 2\sqrt{a - b + 1}$; при $a < b - 1$ решений нет. 7. Если $0 < a \leq 0,5$, то

$$x = \frac{1}{a^2} (1 - a \pm \sqrt{1 - 2a}); \text{ если } a < 0 \text{ } (a \neq -4), \text{ то}$$

$$x = \frac{1}{a^2} (1 - a - \sqrt{1 - 2a}); \text{ если } a = -4, \text{ то } x = 0,125.$$

При $a = 0$ или $a > 0,5$ решений нет. 8. При $a > 0$,

$$a \neq 1 \quad x = a. \quad 9. \text{ При } a > 4 \quad x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(a \pm \sqrt{a^2 - 4a} \right), \text{ при}$$

$a = 4$, $x = 2$. 10. При $a > 0$, $x = a + 1$. 11. Если $a = 1$, то решений нет; если $a > 1$, $-1 < x < 2$, если $0 < a < 1$, то $x < -1$, $x > 2$. 12. При $a \leq 0$ решений нет; при $0 < a < 1$, $0 < x < a$; при $1 < a < 2$, $0 < x < 1$;

при $a > 2$ $0 < x < \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4})$,

$1 < x < \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4})$. 13. Если $0 < a < 1$, то

$2 < x < 1 + \sqrt{1+a}$; если $a > 1$, то $x > 1 + \sqrt{1+a}$.

14. При $a > 1$, $\frac{1}{a^2} < x < 1$, $x > a$; при $0 < a < 1$,

$0 < x < a$, $1 < x < \frac{1}{a^2}$. 15. При $0 < a < 0,5$, и при

$a > 1$, $x > a^{\frac{1}{\log_2 2a}}$; при $0,5 < a < 1$, $0 < x < a^{\frac{1}{\log_2 2a}}$.

16. Если $a > 1$, то $x \geq a$ или $0 < x \leq 1$; если $0 < a < 1$,

то $a \leq x \leq 1$. 17. Если $0 < a < 1$, то
$$\begin{cases} 0 < x < a, \\ x > \frac{1}{a}. \end{cases}$$

Если $a > 1$, то $\frac{1}{a} < x < a$. 18. При $a > 1$, $0 < x < 2$;

при $0 < a < 1$ $\begin{cases} x < 0, \\ x > 2; \end{cases}$ при $a = 1$ решений нет. 19. При

$a \leq 0$ решений нет; при $a > 0$ $x < \log_2(\sqrt{1+4a} - 1)$.

20. При $0 < a < 1$.

Литература

Антонов Н. П., Выгодский М. Я. и др. Сборник задач по элементарной математике. – М.: Наука, 1983.

Балаян Э. Н. Как сдать ЕГЭ по математике на 100 баллов. 4-е изд. – Ростов н/Д, 2004.

Балаян Э. Н. Математика. Сам себе репетитор. Задачи повышенной сложности. – Ростов н/Д, 2004.

Балаян Э. Н. Микросправочник по математике для выпускников и абитуриентов. – Ростов н/Д, 2002.

Балаян Э. Н. Универсальный репетитор по математике. – Ростов н/Д, 2004.

Говоров В. М., Дыбов П. Т. и др. Сборник конкурсных задач по математике. – М.: Наука, 1983.

Гусев В. А. и др. Практикум по элементарной математике: Геометрия. – М.: Просвещение, 1992.

Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1976.

Кущенко В. С. Сборник конкурсных задач по математике с решениями. – Л.: Судостроение, 1965.

Рыбкин Н. Сборник задач по геометрии. Ч. 2. Стереометрия для 9 и 10-х классов средней школы. – М.: Просвещение, 1966.

Саакян С. М., Гольдман А. М., Денисов Д. В. Задачи по алгебре и началам анализа для 10–11-х классов. – М.: Просвещение, 1990.

Симонов А. Я. и др. Система тренировочных задач и упражнений по математике – М.: Просвещение, 1991.

Шарыгин И. Ф. Математика для поступающих в вузы. – М.: Дрофа, 1997.

Оглавление

Предисловие	3
Глава 1. Тожественные преобразования	
выражений	6
§ 1. Выполнение	
арифметических действий	6
§ 2. Преобразование алгебраических выражений ..	10
<i>Формулы сокращенного умножения</i>	10
<i>Свойства арифметических корней</i>	10
Задачи	18
Группа А	18
Группа Б	19
Глава 2. Алгебраические уравнения и системы	
уравнений	23
§ 3. Линейные уравнения	23
Задачи	27
Группа А	27
Группа Б	28
§ 4. Системы линейных уравнений	29
1. Способ подстановки	30
2. Способ сложения	31
3. Графический способ решения систем I степени .	33
Задачи	35
Группа А	35
Группа Б	36
§ 5. Квадратные уравнения и уравнения,	
сводящиеся к квадратным. Теорема Виета	
и ее применение	38
Примеры решения квадратных уравнений	41
1. Неполные квадратные уравнения	41
2. Полные квадратные уравнения	42
3. Уравнения, сводящиеся к квадратным	46
4. Применение теоремы Виета	49
Задачи	54
Группа А	54
Группа Б	55
§ 6. Системы нелинейных уравнений	57
Задачи	68
Группа А	68
Группа Б	69
§ 7. Текстовые задачи	73
1. Задачи на числовые зависимости	73
2. Задачи «на движение»	76

3. Задачи на «совместную работу»	80
4. Задачи «на сплавы и смеси»	84
5. Задачи «на проценты»	86
6. Задачи «на разбавление»	88
Задачи	90
Задачи на составление уравнений I степени	90
Задачи на составление систем уравнений	
I степени	91
Задачи на составление квадратных	
уравнений	92
Задачи на составление систем уравнений	
II степени	93
§ 8. Иррациональные уравнения	94
1. Метод возведения обеих частей	
в одну и ту же степень	95
2. Метод введения новых переменных	98
3. Искусственные приемы решения	102
§ 9. Системы иррациональных уравнений	107
Задачи	111
Группа А	111
Группа Б	112
§ 10. Уравнения с модулем	114
Задачи	118
Группа А	118
Группа Б	119
Глава 3. Неравенства и системы неравенств	120
§ 11. Линейные неравенства	120
Задачи	122
Группа А	122
Группа Б	122
§ 12. Рациональные неравенства	123
1. Простейшие неравенства, представленные	
в виде произведения линейных множителей ...	124
2. Простейшие неравенства, разлагающиеся на	
линейные множители	125
3. Простейшие дробно-рациональные	
неравенства без кратных корней	125
4. Неравенство, содержащее множитель,	
не принимающий нулевого значения	
на числовой прямой	127
5. Простейшие неравенства	
с кратными корнями	128
Задачи	130
Группа А	130
Группа Б	131
§ 13. Системы неравенств	133
Задачи	139
Группа А	139

Группа Б.....	140
§ 14. Неравенства с модулем	142
Задачи	150
Группа А.....	150
Группа Б.....	150
§ 15. Иррациональные неравенства	151
Задачи	156
Группа А.....	156
Группа Б.....	156
Глава 4. Показательные и логарифмические уравнения. Системы показательных и логарифмических уравнений.....	158
§ 16. Тождественные преобразования показательных и логарифмических выражений	158
Свойства степеней.....	159
Свойства логарифмов.....	160
Задачи	168
Группа А.....	168
Группа Б.....	170
§ 17. Показательные уравнения	173
1. Решение уравнений с использованием свойств показательной функции	173
2. Решение уравнений, сводящихся к квадратным.....	175
3. Решение уравнений вынесением общего множителя за скобку	178
4. Решение показательных уравнений логарифмированием обеих частей	180
5. Решение уравнений с использованием свойства монотонности показательной функции	182
6. Решение показательно-степенных уравнений ..	183
Задачи	186
Группа А.....	186
Группа Б.....	187
§ 18. Логарифмические уравнения	189
1. Решение уравнений, основанных на определении логарифма	190
2. Решение уравнений потенцированием	192
3. Применение основного логарифмического тождества	194
4. Логарифмирование	195
5. Замена переменной	197
6. Переход к другому основанию	199
§ 19. Системы показательных и логарифмических уравнений	203
Задачи	209

Группа А	209
Группа В	210
Глава 5. Показательные и логарифмические	
неравенства	214
§ 20. Показательные неравенства	214
§ 21. Показательно-степенные неравенства	219
Задачи	221
Группа А	221
Группа В	222
§ 22. Логарифмические неравенства	224
§ 23. Показательно-логарифмические	
неравенства	232
Задачи	233
Группа А	233
Группа В	234
Глава 6. Тригонометрия	237
§ 24. Преобразования тригонометрических	
выражений. Обратные тригонометрические	
функции	237
Основные формулы	237
Задачи	258
Группа А	258
Группа В	259
§ 25. Тригонометрические уравнения	266
1. Решение простейших	
тригонометрических уравнений	268
2. Решение уравнений разложением	
на множители	270
3. Решение уравнений, сводящихся	
к квадратным	274
4. Решение однородных и сводящихся	
к ним уравнений	277
5. Решение уравнений с помощью введения	
вспомогательного аргумента	281
6. Решение уравнений преобразованием суммы	
тригонометрических функций	
в произведение	284
7. Решение уравнений преобразованием	
произведения тригонометрических	
функций в сумму	287
8. Решение уравнений с применением	
формул понижения степени	288
9. Решение уравнений с применением формул	
двойного и тройного аргументов	291
10. Решение уравнений с помощью	
замены переменных	293
11. Решение уравнений вида $f(x) = \sqrt{\varphi(x)}$	296

12. Решение уравнений с использованием ограниченности функций $\sin x$ и $\cos x$	298
§ 26. Решение систем тригонометрических уравнений	301
Задачи	307
Группа А	307
Группа В	308
Глава 7. Производная функции и ее применение	312
§ 27. Производные элементарных функций.	
Правила дифференцирования	312
Таблица производных элементарных и сложных функций	312
Правила дифференцирования:	313
1. Вычисление пределов	313
2. Нахождение производных функций	315
3. Уравнение касательной к графику функции	319
4. Нахождение промежутков монотонности и точек экстремума функции	321
5. Построение графика функции	325
6. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции	327
Задачи	331
Группа А	331
Группа В	334
Глава 8. Интеграл	338
§ 28. Первообразная.	
Правила нахождения первообразных	338
Таблица первообразных элементарных и сложных функций	338
Правила нахождения первообразных	339
§ 29. Площадь криволинейной трапеции.	
Вычисление интегралов	342
§ 30. Вычисление площадей с помощью интеграла	349
Задачи	357
Группа А	357
Группа В	359
Глава 9. Прогрессии	363
§ 31. Арифметическая прогрессия	363
§ 32. Геометрическая прогрессия	367
§ 33. Разные задачи на прогрессию	376
Задачи	379
Группа А	379
Группа В	379

Глава 10. Геометрия	382
Планиметрия	382
Справочные материалы	382
§ 34. Треугольники	385
§ 35. Четырехугольники	414
1. Многоугольник (n — число сторон (углов))	414
2. Произвольный выпуклый четырехугольник	414
3. Вписанный четырехугольник	415
4. Описанный четырехугольник	415
5. Параллелограмм	415
6. Ромб	415
7. Прямоугольник	416
8. Квадрат	416
9. Трапеция	416
§ 36. Окружность и круг	432
Задачи	445
Группа А	445
Группа Б	450
Глава 11. Стереометрия	460
§ 37. Многогранники	460
Справочные материалы	461
1. Призма	461
2. Прямоугольный параллелепипед	461
3. Куб	461
4. Пирамида	462
Дополнительные соотношения между элементами призмы и пирамиды	462
1. Параллелепипед	464
2. Призма	466
3. Пирамида	470
4. Усеченная пирамида	474
5. Построение сечений	476
§ 38. Круглые тела	479
Справочные материалы	479
1. Цилиндр	479
2. Конус	480
3. Усеченный конус	480
4. Шар, сфера	480
5. Части шара	480
1. Цилиндр	481
2. Конус	483
3. Усеченный конус	486
4. Шар, сфера	488
5. Вписанные и описанные шары	490
6. Тела вращения	493
Задачи	495
Группа А	495
Группа Б	501

Глава 12. Нестандартные задачи к ЕГЭ (тип С)	509
§ 39. Алгебраические уравнения	
высших степеней	509
Задачи для самостоятельного решения	531
<i>Решить уравнения (1–25)</i>	<i>531</i>
§ 40. Нелинейные системы	
алгебраических уравнений	532
Задачи	561
§ 41. Иррациональные алгебраические	
уравнения и системы уравнений	562
1. Иррациональные уравнения	562
2. Иррациональные системы	587
Задачи	597
§ 42. Тригонометрические уравнения	600
Задачи	629
§ 43. Уравнения и неравенства с параметрами	631
1. Рациональные уравнения и неравенства	631
2. Иррациональные уравнения	
и неравенства	642
Задачи	652
3. Тригонометрические уравнения и неравенства ..	654
Задачи	662
4. Показательные и логарифмические уравнения	
и неравенства	663
1. Показательные и логарифмические	
уравнения	663
2. Показательные и логарифмические	
неравенства	667
Задачи	670
§ 44. Комплексные упражнения	671
1. Построение графиков функций	671
2. Решение уравнений	676
3. Решение неравенств	681
Задачи	686
Глава 13. Тесты для подготовки к ЕГЭ	690
§ 45. Инструкция по выполнению работы	690
§ 46. Таблица перевода первичных баллов	
в тестовые и школьные отметки	691
Вариант № 1	691
Часть 1	691
Часть 2	694
Часть 3	695
Вариант № 2	696
Часть 1	696
Часть 2	698
Часть 3	699
Вариант № 3	700

Часть 1	700
Часть 2	702
Часть 3	703
Вариант № 4	704
Часть 1	704
Часть 2	706
Часть 3	707
Вариант № 5	707
Часть 1	707
Часть 2	710
Часть 3	711
Вариант № 6	712
Часть 1	712
Часть 2	714
Часть 3	715
Вариант № 7	716
Часть 1	716
Часть 2	718
Часть 3	719
Вариант № 8	720
Часть 1	720
Часть 2	722
Часть 3	723
Вариант № 9	724
Часть 1	724
Часть 2	726
Часть 3	727
Вариант № 10	728
Часть 1	728
Часть 2	730
Часть 3	731
§ 47. Ответы	732
Ответы к заданиям с выбором ответа	732
Ответы к заданиям с кратким ответом	732
Ответы к заданиям с развернутым ответом	733
§ 48. Решение варианта № 1	735
Часть 1	735
Часть 2	740
Часть 3	746
Ответы	752
Литература	790

Балаян Эдуард Николаевич

**РЕПЕТИТОР ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ**

**Ответственный редактор Э. Юсупянц
Технический редактор Л. Багрянцева
Корректоры: О. Милованова
Художник В. Кириченко**

**Подписано в печать 18.07.2006.
Формат 80×108 1/32. Бумага тип. № 2.
Гарнитура Школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 42,0. Тираж 4000 экз.
Заказ № 2120.**

**Издательство «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80**

**Отпечатано с готовых диапозитивов
в типографии ОАО «Издательство «Самарский Дом печати».
443080, г. Самара, пр. К. Маркса, 201.
Качество печати соответствует качеству предоставленных диапозитивов.**

Издательство

Феникс

**Приглашает к сотрудничеству
АВТОРОВ для издания:**

- ✓ учебников для ПТУ, ссузов и вузов
- ✓ научной и научно-популярной литературы по
**МЕДИЦИНЕ и ВЕТЕРИНАРИИ, ЮРИСПРУДЕНЦИИ
и ЭКОНОМИКЕ, СОЦИАЛЬНЫМ и ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ**
- ✓ литературы по
ПРОГРАММИРОВАНИЮ и ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКЕ
- ✓ ПРИКЛАДНОЙ и ТЕХНИЧЕСКОЙ литературы
- ✓ литературы по СПОРТУ и БОЕВЫМ ИСКУССТВАМ
- ✓ ДЕТСКОЙ и ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ литературы
- ✓ литературы по КУЛИНАРИИ и РУКОДЕЛИЮ

Высокие гонорары!!!

Все финансовые затраты берем на себя!!!

**При принятии рукописи в производство
выплачиваем гонорар на 10 % выше
любого российского издательства!!!**

Рукописи не рецензируются и не возвращаются!

По вопросам издания книг:

Тел. 8 (863) 2618950 E-mail: office@phoenixrostov.ru

Наш адрес:

344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80

Факс: (863) 261-89-50

<http://www.Phoenixrostov.ru> E-mail: reclamabook@jeo.ru

Редакционно-издательский отдел

Осташов Сергей Александрович (руководитель отдела)

Тел.: (863) 261-89-75 e-mail: ostashov@phoenixrostov.ru

Юсупянц Эдуард Арамович (редактор)

Тел.: (863) 261-89-75 e-mail: eduard@phoenixrostov.ru

Жиляков Илья Юрьевич (редактор)

Тел.: (863) 261-89-75 e-mail: publish@phoenixrostov.ru

Багрянцева Людмила Андреевна

(технический редактор)

Тел.: (863) 261-89-75

Сайт издательства Феникс: <http://www.Phoenixrostov.ru>