

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI TINERETULUI

Petre Năchilă

Cătălin Năchilă

**M<sub>3</sub>**

# MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a **XII** -a

Filiera vocațională

Profil artistic

Specializările:

- arhitectură
- arte ambientale
- design



MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI TINERETULUI

**Petre Năchilă**

**Cătălin Năchilă**

# MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a **XII-a**

## M3

*Filiera vocațională*

**Profil artistic**

Specializările: arhitectură, arte ambientale și design



**Manualul a fost aprobat prin Ordinul Ministrului Educației, Cercetării și Tineretului nr. 1342/35 din 19.06.2007, în urma evaluării calitative și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al Ministrului Educației și Cercetării nr. 5959 din 22.12.2006.**

**Referenți:** prof. univ. dr. *Ion Iarca*  
conf. dr. *Dinu Tănase*

**Redactor:** Dana Năstase

**Tehnoredactor:** Camelia Cristea

**Coperta:** Cătălin Năchilă, Ion Tilea

© 2007 – SIGMA

Toate drepturile asupra prezentei ediții aparțin Editurii SIGMA. Nicio parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă fără acordul scris al Editurii SIGMA.

**ISBN 978-973-649-363-8**

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**NĂCHILĂ, PETRE**

**Matematică : manual M3 : clasa a XII-a / Petre Năchilă, Cătălin Năchilă. - București : Sigma, 2007**  
ISBN 978-973-649-363-8

I. Năchilă, Cătălin

51(075.35)

**Editura SIGMA**

**Sediul central:**

Str. G-ral Berthelot, nr. 38, sector 1, București, cod 010169  
Tel. / fax: 021-313.96.42; 021-315.39.43; 021-315.39.70  
e-mail: office@editurasigma.ro; web: www.editurasigma.ro

**Distribuție:**

Tel. / fax: 021-243.42.40; 021-243.40.52; 021-243.40.35  
Puteți transmite comenzi folosind apelul UniTel la numerele:  
080.10000.10; 080.10000.11 (în rețeaua ROMTELECOM)  
e-mail: comenzi@editurasigma.ro; sigmadistrib@yahoo.com

Manualele Sigma pot fi găsite on-line și la  
**www.clopotel.ro** și **www.calificativ.ro**

# CAPITOLUL I

## PRIMITIVE

### I.1. Probleme care conduc la noțiunea de primitivă

Analiza matematică, ramură importantă a matematicii, are la bază studiul limitelor și funcțiilor. Analiza matematică cuprinde calculul diferențial și integral, studiul ecuațiilor diferențiale, al ecuațiilor cu derivate parțiale, teoria funcțiilor de variabilă reală, de variabilă complexă, analiza numerică, analiza funcțională, calculul variațiilor.

Calculul diferențial și integral a fost creat de Isaac Newton (1642-1727) și Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), care au elaborat reguli generale de derivare și integrare și pe care le-au aplicat în mecanică și geometrie. Contribuții importante la dezvoltarea analizei matematice au avut: Jean Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Lagrange (1736-1813), Brook Taylor (1685-1731), Joseph Fourier (1768-1830), Jacopo Riccati (1676-1754), Karl Gauss (1777-1855), Augustin Cauchy (1789-1857), Niels Abel (1802-1829), Gaston Darboux (1842-1917), Lejeune Dirichlet (1805-1859), Emile Picard (1856-1941), Emile Borel (1871-1956). Dintre matematicienii români enumerăm: Dimitrie Pompeiu (1873-1954), Traian Lalescu (1882-1929), Simion Stoilow (1887-1961), Miron Nicolescu (1903-1974), Caius Iacob (1912-1992), Gheorghe Marinescu (n. 1919).

În studiul capitolului „Derivate” s-a arătat că, fiind dată o funcție  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă pe intervalul  $I$ , se poate determina o funcție  $f': I \rightarrow \mathbb{R}$  numită *derivata* funcției  $f$ .

În multe probleme practice apare necesitatea determinării funcțiilor a căror derivată este o funcție dată.

EXEMPLU



1. Să se determine funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pentru care panta tangentei în punctul  $M(x, f(x))$  de pe graficul lui  $f$  este  $f'(x) = -2\sin x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  și care trece prin punctul  $A\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$ .

Funcțiile  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea  $F'(x) = -2\sin x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , sunt date de  $F(x) = 2\cos x + \mathcal{C}$ , unde  $\mathcal{C}$  este o constantă reală arbitrară. Deoarece graficul lui  $F$  conține punctul  $A\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$ , rezultă  $\mathcal{C} = 1$ . Funcția este  $F(x) = 2\cos x + 1$ .

2. Un mobil se deplasează rectiliniu în intervalul de timp  $[0, 20]$  cu viteza  $v(t) = 3t^2 - 2t + 3$ ,  $\forall t \in [0, 20]$ . Știind că  $s: [0, 20] \rightarrow \mathbb{R}$  este funcția spațiu și că  $s(0) = 0$ , se cere să se determine  $s(20)$ .

Avem  $s'(t) = v(t)$  pentru orice  $t \in [0, 20]$ . Trebuie deci determinată funcția  $s : [0, 20] \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietățile  $s'(t) = 3t^2 - 2t + 3$ ,  $\forall t \in [0, 20]$  și  $s(0) = 0$ . Rezultă imediat că  $s(t) = t^3 - t^2 + 3t + \mathcal{C}$ ,  $\forall t \in [0, 20]$ , unde  $\mathcal{C}$  este o constantă reală arbitrară. Din condiția  $s(0) = 0$  rezultă  $\mathcal{C} = 0$  și atunci  $s(t) = t^3 - t^2 + 3t$ ,  $\forall t \in [0, 20]$ . Deducem că  $s(20) = 7660$ .

3. Se consideră un mediu având temperatura constantă  $T_0 = 30^\circ\text{C}$ , în care se scufundă un corp având temperatura inițială de  $150^\circ\text{C}$ . Se presupune că viteza de răcire a corpului, la orice moment dat  $t$ , este direct proporțională cu diferența dintre temperatura  $T(t)$  a corpului și temperatura  $T_0$  a mediului. Să se determine după cât timp temperatura corpului ajunge la  $90^\circ\text{C}$ , dacă într-un minut temperatura a coborât la  $120^\circ\text{C}$ .

Vom nota cu  $k$  factorul de proporționalitate.

Avem  $T(0) = 150^\circ$ . Din ipoteză avem  $T'(t) = k(T_0 - T(t))$ , care se scrie sub formele

echivalente  $\frac{T'(t)}{T_0 - T(t)} = k$ ,  $[\ln(T(t) - T_0) + kt]' = 0$  pentru orice  $t \in I = [0, t_0]$ . Obținem  $\ln(T(t) - T_0) + kt = \mathcal{C}$  pentru orice  $t \in I$ . Deoarece  $T(1) = 120^\circ$ , rezultă  $\mathcal{C} = k + \ln 90$  și avem  $\ln(T(t) - T_0) = -kt + k + \ln 90$ . Dacă  $T(t_1) = 90$ , atunci  $\ln 60 = -kt_1 + k + \ln 90$  și deci  $t_1 = \frac{k + \ln \frac{3}{2}}{k}$  (minute).



1. Să se determine funcția  $F$  pentru care panta tangentei în punctul  $M(x, f(x))$  de pe graficul lui  $f$  este indicat în fiecare caz, iar  $F$  trece prin punctul (sau punctele) indicat (indicate):

- a)  $f(x) = 2x + 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $A(0, 2)$ ;
- b)  $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $A(-1, 1)$ ;
- c)  $f(x) = |x|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $A(-2, 1)$ ,  $B(4, 3)$ .

2. Un mobil se deplasează în intervalul de timp  $[0, 10]$  cu viteza  $v(t) = 4t^3 + 2t + 2$ ,  $\forall t \in [0, 10]$ . Știind că  $s : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$  este funcția spațiu și că  $s(0) = 0$ , să se determine  $s(5)$  și  $s(10)$ .

## I.2. Primitivele unei funcții

În toate exemplele prezentate anterior s-a considerat o funcție  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval inclus în  $\mathbb{R}$  și s-a cerut determinarea unei funcții  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ , având proprietatea  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in I$ . Problema determinării funcției  $F$  se descompune de fapt în trei probleme:

- o problemă de existență (trebuie demonstrat că funcțiile  $F$  există);
- gradul de generalitate a soluției (trebuie studiat dacă soluția este unică sau sunt mai multe soluții);
- determinarea funcției  $f$ .

În cazul punctului b), să presupunem că există funcțiile  $F_1, F_2$  astfel încât  $F_1'(x) = f(x)$ ,  $F_2'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in I$ . Obținem imediat că  $(F_2(x) - F_1(x))' = 0$  și deci  $F_2(x) = F_1(x) + \mathcal{C}$ , unde  $\mathcal{C}$  este o constantă reală arbitrară. În concluzie, dacă există o funcție  $F$ , atunci există o infinitate de funcții care diferă de  $F$  printr-o constantă reală arbitrară. Toate primitivele se obțin din  $F$  printr-o „deplasare” paralelă cu axa  $Ox$  (figura 1).

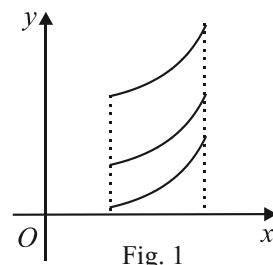


Fig. 1

De problemele puse anterior se ocupă calculul integral (denumire propusă în 1690 de Jacques Bernoulli).

**Definiție.** Fie  $I$  interval inclus în  $\mathbb{R}$  și fie funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Spunem că funcția  $f$  admite primitive pe  $I$  dacă există  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $F$  este derivabilă pe  $I$  și  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in I$ .

Funcția  $F$  se numește *primitiva* lui  $f$  (sau *antiderivata*) pe intervalul  $I$ .

Procedeeul (operația) prin care se determină primitivele unei funcții se numește *integrare* (*antiderivare*). Denumirile vin din limba latină: „primitivus”–cel dintâi, „integrare”–restabilire, întregire.



- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 1$ ,  $F(x) = x^2 + x$ .
- $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2}{x}$ ,  $F(x) = 2 \ln x$ .
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -2 \sin x \cos x$ ,  $F(x) = -\sin^2 x$ .

### Observații.

■ Dacă o funcție  $f$  admite „o” primitivă  $F$  pe intervalul  $I$ , atunci  $f$  admite „mai multe” primitive. De exemplu, funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 1$ , admite pe  $\mathbb{R}$  și primitivele  $x^2 + x + 1$ ,  $x^2 + x - 2$ ,  $x^2 + x - 2\sqrt{3}$ , etc..

■ Determinarea unei primitive este, în unele cazuri, problemă fără „soluție” (în sensul că, deși primitiva există, aceasta nu se poate exprima cu ajutorul funcțiilor elementare cunoscute: polinomiale, raționale, putere, radical, exponențiale, logaritmice, trigonometrice). De exemplu, funcțiile  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \sin x^2$ ;  $f_2 : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \frac{\sin x}{x}$ ;  $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = e^{-x^2}$ .

■ Dacă  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ , prin derivata lui  $F$  în  $x = a$ , respectiv  $x = b$ , înțelegem derivata la dreapta în  $x = a$ , respectiv derivata la stânga în  $x = b$ .

**Teoremă.** Dacă  $F_1, F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  sunt două primitive definite pe intervalul  $I \subset \mathbb{R}$  ale funcției  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , atunci acestea diferă printr-o constantă (există  $c \in \mathbb{R}$  astfel încât  $F_1(x) = F_2(x) + c, \forall x \in \mathbb{R}$ ).

*Demonstrație.* Deoarece  $F_1$  și  $F_2$  sunt derivabile pe  $I$  și  $F_1' = F_2' = f$  rezultă că  $F_1 - F_2$  este derivabilă pe  $I$  și  $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Deci există  $c \in \mathbb{R}$  astfel încât  $F_1 = F_2 + c$ .

**Notății.**  $\mathcal{F}(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}\}$ ,  $\mathcal{C} = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ constantă}\}$ .

Observăm că  $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}(I)$ . Pe  $\mathcal{F}(I)$  introducem două operații:

➤ „adunarea funcțiilor”:  $f + g : I \rightarrow \mathbb{R}$  dată de  $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in I$ ;

➤ „înmulțirea cu scalari”:  $\alpha f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dată de  $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in I, \alpha \in \mathbb{R}$ .

Dacă  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(I)$  și  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}(I), \mathcal{F} \neq \emptyset, \mathcal{G} \neq \emptyset$  și  $\alpha \in \mathbb{R}$  definim următoarele operații:

$$\mathcal{F} + \mathcal{G} = \{f + g : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}, \quad \alpha \mathcal{F} = \{\alpha f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

Dacă  $\mathcal{F} = \{f_0\}$ , atunci  $\mathcal{F} + \mathcal{G} = \{f_0\} + \mathcal{G} = \{f_0 + g \mid g \in \mathcal{G}\}$ .

Se demonstrează (prin dublă incluziune) următoarele egalități de mulțimi:

$$1. \alpha \mathcal{C} = \mathcal{C}, \forall \alpha \in \mathbb{R}^*; \quad 2. \mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}.$$

### Observație.

Dacă  $F_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$  este o primitivă a lui  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , atunci orice altă primitivă este de forma  $F_0 + \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$ . De aceea, în loc de „ $f$  admite primitivă” vom spune „ $f$  admite primitive”.

**Definiție.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție care admite primitive pe intervalul  $I \subset \mathbb{R}$ . Mulțimea tuturor primitivelor lui  $f$  pe intervalul  $I$  se numește *integrala nedefinită* a lui  $f$  și se notează  $\int f(x) dx$ . Dacă  $F$  este o primitivă a lui  $f$  avem  $\int f(x) dx = F(x) + \mathcal{C}$ .

Notăția a fost introdusă în 1675 de Wilhelm Leibniz.

### Observație.

Definiția primitivei unei funcții poate fi extinsă și la funcții definite pe reuniuni finite de intervale disjuncte. În acest caz, însă, nu orice două primitive diferă printr-o constantă.



Fie funcția  $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 3$ . Două primitive ale lui  $f$  sunt

$$F_1, F_2: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ date de } F_1(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 1, & x < 1 \\ x^2 - 3x + 2, & x > 1 \end{cases}, F_2(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x < 1 \\ x^2 - 3x + 4, & x > 1 \end{cases}.$$

$$\text{Atunci } F_1(x) - F_2(x) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ -2, & x > 1 \end{cases}.$$

**Teoremă.** Fie funcțiile  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  care admit primitive pe  $I$  și fie  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Atunci funcțiile  $f + g$  și  $\alpha f$  admit primitive pe  $I$  și au loc relațiile:

- a)  $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ ;      b)  $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$ ;  
c)  $\int f(x) dx = \int f(x) dx + \mathcal{C}$ .

*Demonstrație.* Fie  $F$  și  $G$  primitive ale lui  $f$ , respectiv  $g$ . Atunci  $F$  și  $G$  sunt derivabile pe  $I$  și  $F' = f$ ,  $G' = g$ ; deci  $F + G$ ,  $\alpha F$  sunt derivabile pe  $I$  și  $(F + G)' = F' + G' = f + g$ ,  $(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f$ . Rezultă că  $F + G$  este o primitivă a lui  $f + g$ , iar  $\alpha F$  este o primitivă a lui  $\alpha f$ . Avem deci  $\int f(x) dx = F(x) + \mathcal{C}$ ,  $\int g(x) dx = G(x) + \mathcal{C}$ ,  $\int (f(x) + g(x)) dx = F(x) + G(x) + \mathcal{C}$ ,  $\int \alpha f(x) dx = \alpha F(x) + \mathcal{C}$  și atunci  $\int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + \mathcal{C} + G(x) + \mathcal{C} = (F(x) + G(x)) + (\mathcal{C} + \mathcal{C}) = F(x) + G(x) + \mathcal{C} = \int (f(x) + g(x)) dx$ ,  $\alpha \int f(x) dx = \alpha(F(x) + \mathcal{C}) = \alpha F(x) + \alpha \mathcal{C} = \alpha F(x) + \mathcal{C} = \int \alpha f(x) dx$

**Observație.** Pentru egalitatea  $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$  este esențial faptul că  $\alpha \neq 0$ . Dacă  $\alpha = 0$  avem  $\alpha f(x) = 0$  pentru orice  $x \in I$  și o primitivă a lui  $\alpha f$  este funcția constantă 0. Avem  $\int \alpha f(x) dx = 0 + \mathcal{C} = \mathcal{C}$ , iar  $\alpha \int f(x) dx = \{0 \cdot F(x) \mid F \text{ primitivă a lui } f\} = \{0\}$ . În acest caz avem  $\alpha \int f(x) dx \subset \int \alpha f(x) dx$  (incluziune strictă).

### Observații.

■ Proprietățile a) și b) din teorema anterioară arată că integrala nedefinită este liniară pe mulțimea funcțiilor ce admit primitive pe intervalul  $I$ .

■ Rezultatul din teorema precedentă poate fi extins astfel:

„Fie  $f_1, f_2, \dots, f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , funcții ce admit primitive pe intervalul  $I$ , iar  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^*$ ,  $n$  fixat. Atunci funcția  $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n$  admite primitive și  $\int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x)) dx = \alpha_1 \int f_1(x) dx + \alpha_2 \int f_2(x) dx + \dots + \alpha_n \int f_n(x) dx$ ”.

Enunțați teorema corespunzătoare referitoare la funcțiile derivabile.

## Tabel de integrale nedefinite

Nr. crt.	Funcția	Integrala nedefinită
1.	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}$
2.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset (0, \infty), f(x) = x^a, a \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + \mathcal{C}$
3.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset (0, \infty), f(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + \mathcal{C}$
4.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset (-\infty, 0), f(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + \mathcal{C} = \ln x  + \mathcal{C}$
5.	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}$
6.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}, a > 0, I \subset \mathbb{R} - \{-a, a\}$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + \mathcal{C}$
7.	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, a \neq 0$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \mathcal{C}$
8.	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}$
9.	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C}$
10.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, I \subset \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}$
11.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}, I \subset \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}$
12.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x, I \subset \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x  + \mathcal{C}$
13.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x, I \subset \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x  + \mathcal{C}$
14.	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}, a \neq 0$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + \mathcal{C}$
15.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}},$ $a > 0, I \subset (-\infty, -a)$ sau $I \subset (a, \infty)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left x + \sqrt{x^2 - a^2}\right  + \mathcal{C}$
16.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, a > 0, I \subset (-a, a)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + \mathcal{C}$

**Probleme rezolvate 1.** Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:

a)  $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + \frac{2}{x}, x > 0$ ;      b)  $f(x) = \frac{5}{x^2 + 4} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}, x \in (-2, 2)$ ;

c)  $f(x) = \frac{6}{x^2 - 9} - \frac{3}{\sqrt{x^2 - 9}}, x > 3$ ;      d)  $f(x) = \frac{3}{\sin^2 x} - 2 \operatorname{tg} x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ;

e)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}} - \frac{2}{16x^2 - 25}, x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ;      f)  $f(x) = 3e^{2x} - \frac{5}{x+1}, x > -1$ .

*Soluții.* a)  $\int f(x) dx = 4 \int x^3 dx - 3 \int x^2 dx + 2 \int \frac{dx}{x} = 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \ln x + \mathcal{C} = x^4 - x^3 + 2 \ln x + \mathcal{C}$

b)  $\int f(x) dx = 5 \int \frac{dx}{x^2 + 2^2} - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{2^2 - x^2}} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - 3 \arcsin \frac{x}{2} + \mathcal{C} = \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - 3 \arcsin \frac{x}{2} + \mathcal{C}$

c)  $\int f(x) dx = 6 \int \frac{dx}{x^2 - 3^2} - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3^2}} = \frac{6}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| - 3 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 9} \right| + \mathcal{C} = \ln \frac{x-3}{x+3} - 3 \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 9} \right) + \mathcal{C}$

d)  $\int f(x) dx = 3 \int \frac{dx}{\sin^2 x} - 2 \int \operatorname{tg} x dx = -3 \operatorname{ctg} x + 2 \ln |\cos x| + \mathcal{C} = -3 \operatorname{ctg} x + 2 \ln(\cos x) + \mathcal{C}$

e)  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - x^2}} - \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \arcsin \frac{x}{\frac{2}{3}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{4}} \ln \left| \frac{x - \frac{5}{4}}{x + \frac{5}{4}} \right| + \mathcal{C} =$   
 $= \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2} - \frac{1}{20} \ln \left| \frac{4x-5}{4x+5} \right| + \mathcal{C}$

f)  $\int f(x) dx = 3 \int e^{2x} dx - 5 \int \frac{dx}{x+1} = \frac{3}{2} e^{2x} - 5 \ln(x+1) + \mathcal{C}$

2. Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f$  să admită primitive pe  $\mathbb{R}$ , unde

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + a, & x \leq 0 \\ e^x + b, & x > 0 \end{cases}.$$

*Soluție.* O primitivă a lui  $f$  este de forma  $F(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + ax + \mathcal{C}, & x \leq 0 \\ e^x + bx + \mathcal{C}_1, & x > 0 \end{cases}$ . Deoarece  $F$

este derivabilă în 0 rezultă că  $F$  este continuă în 0 și deci  $\lim_{x \nearrow 0} F(x) = F(0) = \lim_{x \searrow 0} F(x)$ ,

adică  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$ . Deoarece  $F$  este derivabilă în 0 rezultă că  $F'_s(0) = F'_d(0) \in \mathbb{R}$ , adică

$\lim_{x \nearrow 0} (3x^2 - 2x + a) = \lim_{x \searrow 0} (e^x + b) \Leftrightarrow a = b + 1$ . Deci primitiva lui  $f$  este de forma

$$F(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + ax + \mathcal{C}, & x \leq 0 \\ e^x + (a-1)x + \mathcal{C}, & x > 0 \end{cases}, \text{ unde } a, \mathcal{C} \in \mathbb{R}.$$

3. Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = (a \sin x + b \cos x)e^{-2x}$ , să fie o primitivă a funcției  $f(x) = e^{-2x} \sin x$ .

*Soluție.*  $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [-(2a+b)\sin x + (a-2b)\cos x]e^{-2x} = e^{-2x} \sin x$ ,  
 $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -(2a+b) = 1, a-2b = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{5}, b = -\frac{1}{5}$ .



1. Să se determine primitivele următoarelor funcții:

a)  $f(x) = x^5 - 4x^3 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}, x > 0$ ;      b)  $f(x) = 3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x}, x > 0$ ;

c)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{5}{2}\sqrt{x^3}, x > 0$ ;      d)  $f(x) = 3e^{3x} - 4e^{-2x}, x \in \mathbb{R}$ ;

e)  $f(x) = -2 \operatorname{tg} 2x + 3 \operatorname{ctg} 3x, x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ ;      f)  $f(x) = \frac{8}{\cos^2 4x} - \frac{6}{\sin^2 2x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$ ;

g)  $f(x) = \frac{1}{2x-4} - \frac{5}{3x+6}, x < -2$ ;      h)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}-2}{x^2-4}, x > 2$ ;

i)  $f(x) = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2, x \in \mathbb{R}$ ;      j)  $f(x) = \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ;

k)  $f(x) = \frac{2x^2-3}{(x^2-4)(x^2+1)}, x < -2$ ;      l)  $f(x) = \frac{4-2\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}, x \in \mathbb{R}$ ;

m)  $f(x) = x(x+a)(x+b), x \in \mathbb{R}$ ;      n)  $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ;

o)  $f(x) = \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}, x \in (0, \sqrt{2})$ ;      p)  $f(x) = \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}, x > 0, m, n \in \mathbb{N}^*$ .

2. Să se determine primitivele următoarelor funcții:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2e^x + 3x, & x \leq 0 \\ x^2 + 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$ ;      b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, & x \leq 1 \\ 1 + \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$ ;

c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1}, & x \leq 0 \\ 2 - \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ ;      d)  $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3 + \operatorname{tg} x, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ \sin x + 3 \cos x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ ;

e)  $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ ;      f)  $f: [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \min(x^2 - 4, x + 2)$ .

### I.3. Operații cu funcții care admit primitive

În cele ce urmează vom determina primitivele unor funcții pornind de la primitivele cunoscute ale altor funcții folosindu-ne de compunerea unei funcții  $f$  cu o funcție  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

Vom determina unul sau mai mulți parametri astfel încât anumite funcții să admită primitive.

Fie funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = 3x - 2$ . Ne propunem determinarea unei primitive a funcției  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = (3x - 2)^3$ . Observăm  $h = f \circ g$ . O primitivă a funcției  $f$

este  $F(x) = \frac{x^4}{4} + \mathcal{C}$ , iar o primitivă a lui  $h$  este  $H(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-2)^4}{4} + \mathcal{C} = \frac{1}{12}(3x-2)^2 + \mathcal{C}$ .

Generalizarea este dată de următoarea teoremă:

**Teoremă.** Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval și funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție care admite o primitivă

$F: I \rightarrow \mathbb{R}$  a lui  $f$ . Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Atunci  $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + \mathcal{C}$ .

*Demonstrație.* Considerăm funcția  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J$  interval, unde  $g(x) = f(ax + b)$ .

Atunci funcția  $f \circ g: J \rightarrow \mathbb{R}$  admite primitiva  $G: J \rightarrow \mathbb{R}$  dată de  $G(x) = \frac{1}{a}F(ax + b)$ .

Într-adevăr,  $G'(x) = \frac{1}{a}(ax + b)' \cdot F'(ax + b) = f(ax + b)$ .

EXEMPLU



1.  $\int (4x-1)^2 dx = \frac{1}{12}(4x-1)^3 + \mathcal{C}$ .

2.  $\int (-2x+3)^3 dx = -\frac{1}{8}(-2x+3)^4 + \mathcal{C}$ .

3.  $\int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \ln(2x-1) + \mathcal{C}$ ,  $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ .

4.  $\int \sin(3x+2) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x+2) + \mathcal{C}$ .

#### Probleme rezolvate

1. Fie funcțiile  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (x+a)f(x)$ ,  $h(x) = xf(x+a)$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ .

a) Să se demonstreze că, dacă  $g$  și  $h$  admit primitive pe  $\mathbb{R}$ , atunci  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

b) Să se determine o primitivă a lui  $f$  cu ajutorul primitivelor lui  $g$  și  $h$ .

*Soluție.* a) Fie  $G$  o primitivă a lui  $g$  și  $H$  o primitivă a lui  $h$ . Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  avem  $g(x+a) - h(x) = (x+2a)f(x+a) - xf(x+a) = 2af(x+a)$  și atunci

$f(x) = \frac{1}{2a}[g(x) - h(x-a)]$ . O primitivă a funcției  $x \rightarrow h(x-a)$  este  $x \rightarrow H(x-a)$ .

Deci o primitivă a lui  $f$  este  $F(x) = \frac{1}{2a}[G(x) - H(x-a)]$ .

## 2. Calculul primitivelor unei funcții definite pe subintervale

Considerăm o funcție  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  care admite primitive pe intervalul  $I$ . Fie  $A \subset I$ ,  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset I$  cu  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  fixat. Vom considera intervalele  $I_1 = I \cap (-\infty, a_1]$ ,  $I_2 = (a_1, a_2]$ , ...,  $I_n = (a_{n-1}, a_n]$ ,  $I_{n+1} = I \cap (a_n, \infty)$ .

Pe fiecare interval  $I_k$ , funcția  $f$  admite primitiva  $F_k(x) = F(x) + \mathcal{C}_k$ , unde  $F$  este primitiva lui  $f$  (pe intervalul  $I$ ).

În orice punct  $a \in A$  avem  $F(a) = F(a - 0) = F(a + 0)$ .

Dacă  $a$  este extremitatea stângă a lui  $I$  avem  $F(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} F(x)$ .

Dacă  $a$  este extremitatea dreaptă a lui  $I$  avem  $F(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} F(x)$ .

Constantele  $\mathcal{C}_k$  există deoarece funcția  $F_k$  și restricția lui  $F$  la intervalul  $I_k$  au aceeași derivată. Funcția  $F$  fiind derivabilă este și continuă (deci este continuă și în punctele lui  $A$ ).

a) Să se determine  $\int |2x - 6| dx$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

*Soluție.* Avem  $f(x) = \begin{cases} -2x + 6, & x \leq 3 \\ 2x - 6, & x > 3 \end{cases}$ .

Considerăm intervalele  $I_1 = (-\infty, 3]$ ,  $I_2 = (3, \infty)$ . Pe aceste intervale avem următoarele primitive  $F_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F_1(x) = -x^2 + 6x + \mathcal{C}_1$ ,  $F_2(x) = x^2 - 6x + \mathcal{C}_2$ .

O primitivă a lui  $f$  pe  $\mathbb{R}$  va fi de forma  $F(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x + \mathcal{C}, & x \leq 3 \\ x^2 - 6x + 18 + \mathcal{C}, & x > 3 \end{cases}$ .

**Observație.** Dacă avem de calculat  $\int f(x) dx$ ,  $f$  continuă pe intervalul  $I \subset \mathbb{R}$ , este suficient să verificăm doar condițiile de continuitate ale funcției  $F$  în punctele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (aceste condiții dau relațiile între constante fără a mai fi necesară verificarea derivabilității în aceste puncte).

b) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1, & x \leq 0 \\ ax + 1, & x \in (0, 1] \\ bx - 2, & x > 1 \end{cases}$  să admită primitiva  $F$  pe  $\mathbb{R}$ .

*Soluție.* O primitivă  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este de forma:  $F(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + x + \mathcal{C}_1, & x \leq 0 \\ \frac{ax^2}{2} + x + \mathcal{C}_2, & x \in (0, 1] \\ \frac{bx^2}{2} - 2x + \mathcal{C}_3, & x > 1 \end{cases}$

Din condițiile  $F(0) = F(0 - 0) = F(0 + 0)$ ,  $F(1 - 0) = F(1) = F(1 + 0)$  obținem  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ ,  $\frac{a}{2} + 1 + \mathcal{C}_2 = \frac{b}{2} - 2 + \mathcal{C}_3$ .

Deoarece  $F$  este derivabilă în 0 și 1 rezultă că  $F'_s(0) = F'_d(0)$ .

$$F'_s(1) = F'_d(1), \text{ adică } \lim_{x \nearrow 0} (3x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \searrow 0} (ax + 1) \text{ și } \lim_{x \nearrow 1} (ax + 1) = \lim_{x \searrow 1} (bx - 2).$$

$$\text{Obținem } b = a + 3 \text{ și deci } F(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + x + \mathcal{C}, & x \leq 0 \\ \frac{ax^2}{2} + x + \mathcal{C}, & x \in (0, 1] \\ \frac{(a+3)x^2}{2} - 2x + \frac{9}{2} + \mathcal{C}, & x > 1, \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

3. Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = x|x-a| - |x-b|$ , să fie primitiva unei funcții  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Soluție.* Vom analiza trei cazuri.

Observăm că  $F$  este continuă pe  $\mathbb{R}$  pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Cazul 1: } a < b. \text{ Atunci avem } F(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + x - b, & x < a \\ x^2 - ax + x - b, & x \in [a, b] \\ x^2 - ax - x + b, & x < b \end{cases}.$$

$$\text{Avem } F'(x) = \begin{cases} -2x + a + 1, & x < a \\ 2x - a + 1, & x \in (a, b) \\ 2x - a - 1, & x > b \end{cases}.$$

Funcția  $F$  este derivabilă în  $a$  și  $b$  dacă și numai dacă  $\lim_{x \nearrow a} (-2x + a + 1) = \lim_{x \searrow a} (2x - a + 1)$ ,

$\lim_{x \nearrow b} (2x - a + 1) = \lim_{x \searrow b} (2x - a - 1) \Leftrightarrow -a + 1 = a + 1, 2b - a + 1 = 2b - a - 1$  (imposibil).

$$\text{Cazul 2: } a = b. \text{ Avem } F(x) = \begin{cases} -(x-a)^2, & x < a \\ (x-a)^2, & x \geq a \end{cases} \text{ și deci}$$

$$F'(x) = \begin{cases} -2(x-a), & x < a \\ 2(x-a), & x > a \end{cases}.$$

Deoarece  $F'_s(a) = F'_d(a) = 0$ , rezultă că  $F$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și obținem

$$f(x) = \begin{cases} -2(x-a), & x < a \\ 2(x-a), & x \geq a \end{cases}, \text{ adică } f(x) = 2|x-a|.$$

Cazul 3:  $a > b$ . Avem 
$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + x - b, & x < b \\ -x^2 + ax - x + b, & x \in [b, a] \\ x^2 - ax - x + b, & x > a \end{cases}$$

Rezultă că 
$$F'(x) = \begin{cases} -2x + a + 1, & x < b \\ -2x + a - 1, & x \in (b, a) \\ 2x - a - 1, & x > a \end{cases}$$

Atunci  $F'_s(b) = F'_d(b)$ ,  $F'_s(a) = F'_d(a) \Leftrightarrow -2b + a + 1 = -2b + a - 1$ ,  $-a - 1 = a - 1$  (imposibil).

Rezultă că  $F$  admite primitive pe  $\mathbb{R} \Leftrightarrow a = b$ .



1. Să se determine următoarele integrale nedefinite:

a)  $\int \sin 2x dx$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;      b)  $\int \sin(2x+3) dx$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;

c)  $\int \cos 4x dx$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;      d)  $\int e^{2x+1} dx$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;

e)  $\int e^{-2x+1} dx$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;      f)  $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$ ,  $x > 1$ .

2. Determinați următoarele integrale nedefinite și intervalul maxim de definiție:

a)  $\int (ax+b)^n dx$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ;      b)  $\int \frac{1}{ax-a} dx$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ ;

c)  $\int \sqrt{x^4} dx$ ;      d)  $\int \sqrt{x^3} dx$ ;      e)  $\int \left(x^2 - x + \frac{1}{x}\right) dx$ .

3. Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât următoarele funcții să admită primitive pe domeniul maxim de definiție:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$ ;      b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} a - 2x, & x \leq 0 \\ 0, & x \in (0, 1) \\ \ln x + b, & x \geq 1 \end{cases}$ ;

c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \leq 1 \\ x^3 + a^2x + b, & x > 1 \end{cases}$ ;      d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^4 + ax + a, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ \ln(x+1) + b, & x > 0 \end{cases}$ .

4. Să se determine  $a, b, c \in \mathbb{R}$  astfel încât  $F$  să fie primitiva lui  $f$  în următoarele cazuri:

a)  $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = a \cos x + x^2 - 2x + b$ ,  $f(x) = -\sin x + 2x - 2$ ;

$$\text{b) } f, F : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \sqrt[3]{x} + a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x + c, f(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x};$$

$$\text{c) } f, F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = a\sqrt{x} \sin x + b \cos x, f(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos x + \sin x;$$

$$\text{d) } f, F : (3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4x + 3}, f(x) = \frac{-3x^2 + 2x + 5}{(x^2 - 4x + 3)^2}.$$

5. Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  să fie primitiva unei funcții  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  în cazurile:

$$\text{a) } F(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 0; \\ ax + b, & x > 0 \end{cases};$$

$$\text{b) } F(x) = x^2 \cdot |x - a| - |x - b|.$$

6. Să se determine  $a, b, c$  astfel încât funcția  $F(x) = \begin{cases} a \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}}, & x \in [0, \pi) \\ \frac{\pi}{b} + c, & x = \pi \end{cases}$  să fie o

primitivă a funcției  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$ .

7. Să se determine o primitivă  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x|x - 2|$ , având proprietatea  $F(1) = 1$ .

8. Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $F : \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = (ax + b)\sqrt{2x + 1}$  să fie o primitivă a funcției  $f : \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2x + 1}$ .

## I.4. Funcții care admit primitive.

### Funcții care nu admit primitive

În acest paragraf vor fi date câteva criterii privind existența primitivelor unor anumite categorii de funcții. Se va face legătura între noțiunea de primitivă, pe de o parte, și noțiunile de continuitate, respectiv proprietatea lui Darboux, pe de altă parte.

**Teoremă.** O funcție care admite primitive are proprietatea lui Darboux.

*Demonstrație.* Dacă  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  este o primitivă a lui  $f$  pe intervalul  $I$ , atunci  $F$  este derivabilă și  $F' = f$ . Conform teoremei lui Darboux, derivata oricărei funcții derivabile are proprietatea lui Darboux.

**Observație.** Dacă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție astfel încât imaginea ei  $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$  nu este interval, atunci  $f$  nu admite primitive.

Într-adevăr, dacă  $f$  ar admite primitive, atunci  $f$  ar avea proprietatea lui Darboux și atunci  $f(I)$  ar fi interval.

**Exercițiul rezolvat 1.** Să se demonstreze că următoarele funcții nu admit primitive pe  $\mathbb{R}$ :

$$\mathbf{a)} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]; \quad \mathbf{b)} f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}; \quad \mathbf{c)} f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}.$$

*Soluții.* **a)**  $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$  nu este interval; **b)**  $f(\mathbb{R}) = \{-1, 0, 1\}$  nu este interval; **c)**  $f$  are proprietatea Darboux pe intervalul  $I$  dacă, pentru orice  $a, b \in I$ ,  $a < b$  și orice  $\alpha$  cuprins între  $f(a)$  și  $f(b)$  există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $f(c) = \alpha$ . Luăm  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = \sqrt{5}$ . Atunci  $f(a) = 3\sqrt{3}$ ,  $f(b) = 5\sqrt{5}$ . Luăm  $\alpha = 8 \in (3\sqrt{3}, 5\sqrt{5})$ . Dacă  $c \in \mathbb{Q}$ ,  $f(c) = 8$ , rezultă  $c = 8 \notin (\sqrt{3}, \sqrt{5})$ . Dacă  $c \notin \mathbb{Q}$ ,  $f(c) = 8$ , rezultă că  $c^3 = 8$ , adică  $c = 2$  (contradicție). Deci  $f$  nu are proprietatea lui Darboux și deci  $f$  nu admite primitive.

**Exercițiul rezolvat 2.** Să se dea exemple de funcții  $f, g$  definite pe un interval  $I$  astfel încât  $f$  și  $g$  să nu admită primitive pe  $I$ , dar  $f + g$ , respectiv  $f \cdot g$ , să admită primitive pe  $I$ .

*Soluție.* Funcțiile  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} -2, & x \in \mathbb{Q} \\ 2, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} 2, & x \in \mathbb{Q} \\ -2, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$  nu admit

primitive pe  $\mathbb{R}$  deoarece  $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g = \{-2, 2\}$  nu este interval. Deoarece  $(f+g)(x) = 0$ ,  $f(x)g(x) = -4, \forall x \in \mathbb{R}$ , atunci  $f + g$  admite primitiva  $c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , iar  $f \cdot g$  admite primitiva  $-4x + c, c \in \mathbb{R}$ .

**Teoremă.** Orice funcție  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continuă pe intervalul  $I$  admite primitive pe  $I$ .

Demonstrația teoremei va fi făcută în capitolul următor.

**Exercițiul rezolvat 3.** Să se determine  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f$  să admită primitive pe  $\mathbb{R}$ ,

$$\text{unde } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}.$$

*Soluție.* Observăm că  $f$  nu este funcție continuă (nu există  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ). Avem

$$\left(x^2 \cos \frac{1}{x}\right)' = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \text{ și deci } \sin \frac{1}{x} = \left(x^2 \cos \frac{1}{x}\right)' - 2x \cos \frac{1}{x}. \text{ Funcția } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ este continuă pe } \mathbb{R}. \text{ Într-adevăr, } 0 \leq \left|2x \cos \frac{1}{x}\right| \leq 2|x|, \forall x \neq 0,$$

arată că  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$ . Deci  $g$  admite o primitivă  $G$  și atunci o primitivă a lui  $f$  este

$$\text{de forma } F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} - G(x) + c, & x \neq 0 \\ -G(0) + c, & x = 0 \end{cases}. \text{ Din condiția de derivabilitate în } x = 0 \text{ rezultă}$$

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} - G(x) + G(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cos \frac{1}{x} - \frac{G(x) - G(0)}{x}\right) = -g(0) = 0.$$

Deoarece  $F'(0) = f(0) = \alpha$  rezultă  $\alpha = 0$ .

**Observații.** ■ Există funcții care nu sunt continue, dar admit primitive.

■ Dacă  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  sunt continue pe  $I$ , atunci funcțiile  $\min(f, g)$  și  $\max(f, g)$  admit primitive (deoarece sunt funcții continue).

**Exercițiul rezolvat 4.** Să se determine  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f$  să admită primitive pe  $\mathbb{R}$ ,

$$\text{unde } f(x) = \begin{cases} (2x+3)e^x, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}.$$

*Soluție.* Fie funcțiile  $g(x) = \begin{cases} (2x+3)e^x, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$ ,  $h(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \alpha - 3, & x = 0 \end{cases}$ . Observăm că

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$  și deci  $g$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ . Rezultă că  $g$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ . Funcția  $f$

admite primitive pe  $\mathbb{R}$  dacă și numai dacă funcția  $h$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ , adică dacă și numai dacă  $\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$ .

**Teoremă.** Fie funcția  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  și  $c \in (a, b)$ . Dacă  $f$  admite primitive pe  $[a, c]$  și admite primitive pe  $[c, b]$ , atunci  $f$  admite primitive pe  $[a, b]$ .

*Demonstrație.* Fie  $F_1: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  primitiva lui  $f$  pe  $[a, c]$  și  $F_2: [c, b] \rightarrow \mathbb{R}$  primitiva lui  $f$  pe  $[c, b]$ . În cazul în care există, primitiva lui  $f$  pe  $[a, b]$  are forma

$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & x \in [a, c] \\ F_2(x) + \alpha, & x \in (c, b] \end{cases}$ . Funcția  $F$  e continuă în  $x = c$  dacă și numai dacă

$\lim_{x \nearrow c} F(x) = F(c) = \lim_{x \searrow c} F(x) \Leftrightarrow F_1(c) = F_2(c) + \alpha \Leftrightarrow \alpha = F_1(c) - F_2(c)$ . Avem  $F'(x) = f(x)$

pentru orice  $x \in [a, b] - \{c\}$ . Demonstrăm că  $F'(c) = f(c)$ . Avem:  $F'_s(c) = \lim_{x \nearrow c} \frac{F_1(x) - F_1(c)}{x - c} =$

$$= (F_1)'_s(c) = f(c), \quad F'_d(c) = \lim_{x \searrow c} \frac{F_2(x) + \alpha - F_1(c)}{x - c} = \lim_{x \searrow c} \frac{F_2(x) - F_2(c)}{x - c} = (F_2)'_d(c) = f(c)$$

și deci  $F'(c) = f(c)$ .

**Exercițiul rezolvat 5.** Să se determine o primitivă a funcției  $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = |x+1| + |x-1| - |2x| + 2.$$

*Soluție.* Observăm că  $f$  este o funcție continuă (fiind sumă de funcții continue). Avem:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [-2, -1] \\ 2x + 4, & x \in (-1, 0) \\ -2x + 4, & x \in [0, 1] \\ 2, & x \in (1, 2] \end{cases} \quad \text{și} \quad F(x) = \begin{cases} 2x + a, & x \in [-2, -1] \\ x^2 + 4x + b, & x \in (-1, 0) \\ -x^2 + 4x + c, & x \in [0, 1] \\ 2x + d, & x \in (1, 2] \end{cases}.$$

Condițiile de continuitate a lui  $F$  în punctele  $-1, 0, 1$  dau:  $-2 + a = 1 - 4 + b$ ,  $b = c$ ,

$-1 + 4 + c = 2 + d$ . Obținem  $b = c = a + 1$ ,  $d = a + 2$ .

**Observație.** Deoarece  $f$  este continuă (și deci admite primitive) nu mai este necesară verificarea condițiilor de derivabilitate pentru funcția  $F$  (în punctele  $-1, 0, 1$ ).

**Exercițiul rezolvat 6.** Să se determine  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f$  să admită primitive

$$\text{pe } [-1, 1], \text{ unde } f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} + \alpha^2 + 1, & x \in [-1, 0) \\ 2, & x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} + \alpha + 1, & x \in (0, 1] \end{cases}.$$

$$\text{Soluție. Definim funcțiile } g, h: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} \alpha^2 + 1, & x \in [-1, 0) \\ 2, & x = 0 \\ \alpha + 1, & x \in (0, 1] \end{cases}.$$

Avem  $f = g + h$  și cum  $f$  și  $g$  admit primitive rezultă că este necesar ca  $h$  să admită primitive. Obținem deci  $\alpha^2 + 1 = 2 = \alpha + 1$ , de unde  $\alpha = 1$ .



1. Știind că  $f$  admite primitive pe intervalul  $I$ , să se demonstreze că  $g$  admite primitive pe  $I$ , unde  $g(x) = f(ax + b)$ ,  $ax + b \in I$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

2. Fie  $f, g, h, k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$  astfel încât pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  avem  $g(x) = (x + a)f(x)$ ,  $h(x) = (x - a)f(x)$ ,  $k(x) = xf(x)$ . Știind că  $g$  și  $h$  admit primitive pe  $\mathbb{R}$ , să se demonstreze că  $f$  și  $k$  admit primitive pe  $\mathbb{R}$ .

3. Fie funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $f(0) = g(0) = \alpha$ ,  $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \cos^2 \frac{1}{x}$ ,  $\forall x \neq 0$ . Să se demonstreze că  $f$  și  $g$  admit primitive pe  $\mathbb{R}$  dacă și numai dacă  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

4. Fie  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Știind că  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ ,  $g$  este derivabilă și  $g'$  continuă pe  $\mathbb{R}$ , să se demonstreze că  $h = fg$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

5. Să se demonstreze că următoarele funcții nu admit primitive:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - [x] = \{x\}$ ;      b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ ;

c)  $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 2^x, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ ;      d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0, (\alpha \neq 0) \end{cases}$ ;

e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0, (\alpha \neq 1) \end{cases}$ ;      f)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0, (\alpha \neq 1) \end{cases}$ .

6. Să se demonstreze că următoarele funcții admit primitive și să se determine acestea:

a)  $f(x) = \begin{cases} \max(|x|, x^2), & x \in [-1, 0) \\ \min(x, x^2), & x \in [0, 1] \end{cases}$ ;      b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \min(x, x^2, x^3), & x \leq 0 \\ \max(x, x^2, x^3), & x > 0 \end{cases}$ ;

c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2 + 4}, & x \leq 0 \\ x + \frac{1}{2}, & x > 0 \end{cases}$ ;      d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2 + \sin x, & x < 0 \\ 3\sqrt{x} + 2, & x \geq 0 \end{cases}$ .

7. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție care admite primitive pe  $\mathbb{R}$ . Să se demonstreze că următoarele funcții admit primitive pe  $\mathbb{R}$ :

a)  $f_1(x) = e^x f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;      b)  $f_2(x) = (ax^2 + bx + c)f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;  
c)  $f_3(x) = xe^x f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;      d)  $f_4(x) = xf(x + a)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

8. Să se demonstreze că funcția  $f(x) = ([x]^2 - [x])(\{x\}^2 + \{x\})$  admite primitive pe  $[0, 2)$ . Să se determine o primitivă.

9. Să se determine  $a, b, c \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{axe^{nx} + bx^2 + c}{e^{nx} + 1}$  să admită primitive pe  $\mathbb{R}$ .

## I.5. Integrarea prin părți

Se știe că, dacă  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  sunt derivabile pe intervalul  $I$ , atunci funcția  $fg$  este derivabilă pe  $I$  și avem  $(fg)' = f'g + fg'$ .

O primă metodă ce permite determinarea primitivelor unei funcții este integrarea prin părți (descoperită de Brook Taylor în anul 1715).

**Teoremă.** Dacă funcțiile  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  sunt funcții derivabile cu derivatele funcții continue pe intervalul  $I$ , atunci funcțiile  $fg, f'g$  și  $fg'$  admit primitive pe  $I$  și mulțimile lor de primitive sunt legate prin relația:  $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ .

*Demonstrație.* Deoarece orice funcție derivabilă este continuă, produsul și suma (sau diferența) a două funcții continue este funcție continuă, rezultă că funcțiile  $fg, f'g$  și  $fg'$  sunt continue și deci admit primitive. Atunci:

$$f(x)g(x) + \mathcal{C} = \int (fg)'(x)dx = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx + \mathcal{C}$$

**Probleme rezolvate.** Să se determine primitivele următoarelor funcții:

1)  $f(x) = x^2 e^x, x \in \mathbb{R};$

2)  $f(x) = x \ln x, x > 0;$

3)  $f(x) = \sin x \ln(\cos x), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

4)  $f(x) = \frac{\ln(\ln x)}{x}, x > 1;$

5)  $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

6)  $f(x) = \frac{x}{1 + \cos x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

7)  $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, x \in (-a, a), a > 0;$  8)  $f(x) = \sqrt{x^2 + \alpha}, x \in I$  intervalul cu  $x^2 + \alpha > 0;$

9)  $f(x) = x\sqrt{x^2 - 4},$  unde  $x > 2;$

10)  $g(x) = x^2\sqrt{x^2 - 4},$  unde  $x > 2.$

*Soluții.* 1)  $\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - 2 \int e^x x dx = x^2 e^x - 2 \int (e^x)' x dx =$   
 $= x^2 e^x - 2 \left( x e^x - \int e^x dx \right) = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + \mathcal{C} = e^x (x^2 - 2x + 2) + \mathcal{C};$

2)  $\int x \ln x dx = \int \left( \frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \left( \ln x - \frac{1}{2} \right) + \mathcal{C};$

3)  $\int \sin x \ln(\cos x) dx = \int (-\cos x)' \ln(\cos x) dx = -\cos x \ln(\cos x) - \int (-\cos x) \cdot \frac{-\sin x}{\cos x} dx =$   
 $= -\cos x \ln(\cos x) - \int \sin x dx = \cos x (1 - \ln(\cos x)) + \mathcal{C};$

$$4) \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \int \ln(\ln x) \cdot (\ln x)' dx = (\ln x) \ln(\ln x) - \int \ln x \cdot \frac{1}{\ln x} dx =$$

$$= (\ln x) \ln(\ln x) - \ln x + \mathcal{C} = [\ln(\ln x) - 1] \ln x + \mathcal{C};$$

$$5) \int \frac{x dx}{\cos^2 x} = \int x(\operatorname{tg} x)' dx = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x \operatorname{tg} x + \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = x \operatorname{tg} x + \ln(\cos x) + \mathcal{C};$$

$$6) \int \frac{x dx}{1 + \cos x} = \int \frac{x dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \int x \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)' dx = x \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \int \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) dx = x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \int \frac{\left( \cos \frac{x}{2} \right)'}{\cos \frac{x}{2}} dx =$$

$$= x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \ln \cos \frac{x}{2} + \mathcal{C};$$

$$7) I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx. \text{ Deoarece}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\int x \left( \sqrt{a^2 - x^2} \right)' dx = -x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = -x \sqrt{a^2 - x^2} + I \text{ și}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}, \text{ rezultă că } I = \frac{1}{2} \left( x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + \mathcal{C};$$

$$8) I = \int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = \int \frac{x^2 + \alpha}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}.$$

$$\text{Avem } \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx = \int x \left( \sqrt{x^2 + \alpha} \right)' dx = x \sqrt{x^2 + \alpha} - \int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = x \sqrt{x^2 + \alpha} - I \text{ și}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right| + \mathcal{C}. \text{ Obținem deci } I = \frac{1}{2} \left( x \sqrt{x^2 + \alpha} + \alpha \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right| \right) + \mathcal{C}.$$

$$9) I = \int x \sqrt{x^2 - 4} dx = \int \frac{x^3 - 4x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}} dx - 4 \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx =$$

$$= \int x^2 \left( \sqrt{x^2 - 4} \right)' dx - 4 \int \left( \sqrt{x^2 - 4} \right)' dx = x^2 \sqrt{x^2 - 4} - 2 \int x \sqrt{x^2 - 4} dx - 4 \sqrt{x^2 - 4} =$$

$$= (x^2 - 4) \sqrt{x^2 - 4} - 2I. \text{ Deci } I = \frac{1}{3} (x^2 - 4) \sqrt{x^2 - 4} + \mathcal{C}.$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad I &= \int \frac{x^2(x^2-4)}{\sqrt{x^2-4}} dx = \int \frac{x^4}{\sqrt{x^2-4}} dx - 4 \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx = \int x^3 (\sqrt{x^2-4})' dx - 4 \int x (\sqrt{x^2-4})' dx = \\
 &= x^3 \sqrt{x^2-4} - 3 \int x^2 \sqrt{x^2-4} dx - 4x \sqrt{x^2-4} + 4 \int \sqrt{x^2-4} dx ; \\
 I &= x^3 \sqrt{x^2-4} - 3I - 4x \cdot \sqrt{x^2-4} + 2 \left( x \sqrt{x^2-4} - 4 \ln \left( x + \sqrt{x^2-4} \right) \right) ; \\
 4I &= x \sqrt{x^2-4} \cdot (x^2-2) - 8 \ln \left( x + \sqrt{x^2-4} \right) ; \quad I = \frac{1}{4} x \sqrt{x^2-4} \cdot (x^2-2) - 2 \ln \left( x + \sqrt{x^2-4} \right) + \mathcal{C} .
 \end{aligned}$$

**Observație.**  $\text{sh}, \text{ch}, \text{th} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $\text{th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ,  
 $\text{cth} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ ,  $\text{cth} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ .



A. Să se determine primitivele următoarelor funcții:

1.  $f(x) = xe^x, x \in \mathbb{R}$ ;
2.  $f(x) = xe^{-x}, x \in \mathbb{R}$ ;
3.  $f(x) = x^2 e^x, x \in \mathbb{R}$ ;
4.  $f(x) = \ln x, x > 0$ ;
5.  $f(x) = (x \ln x)^3, x > 0$ ;
6.  $f(x) = \cos x \ln(\sin x), x \in (0, \pi)$ ;
7.  $f(x) = x \text{sh } x, x \in \mathbb{R}$ ;
8.  $f(x) = x \text{ch } x, x \in \mathbb{R}$ ;
9.  $f(x) = x^2 \text{sh } x, x \in \mathbb{R}$ ;
10.  $f(x) = x^2 \text{ch } x, x \in \mathbb{R}$ ;
11.  $f(x) = \ln \left( x + \sqrt{1+x^2} \right), x > 0$ ;
12.  $f(x) = \frac{x \ln \left( x + \sqrt{1+x^2} \right)}{\sqrt{1+x^2}}, x > 0$ ;
13.  $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x}, x \in (-1, 1)$ ;
14.  $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}, x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$ ;
15.  $f(x) = \frac{x}{1 - \cos x}, x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$ ;
16.  $f(x) = \arcsin x, x \in (-1, 1)$ ;
17.  $f(x) = \text{arctg } x, x \in \mathbb{R}$ ;
18.  $f(x) = e^x \cos x, x \in \mathbb{R}$ ;
19.  $f(x) = e^x \sin x, x \in \mathbb{R}$ ;
20.  $f(x) = e^{2x} \cos 3x, x \in \mathbb{R}$ ;
21.  $f(x) = e^{3x} \sin 2x, x \in \mathbb{R}$ ;
22.  $f(x) = e^x \cos^2 x, x \in \mathbb{R}$ ;
23.  $f(x) = e^x \sin^2 x, x \in \mathbb{R}$ ;
24.  $f(x) = x \text{tg}^2 x, x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$ ;
25.  $f(x) = \ln(x^2 + 1), x \in \mathbb{R}$ ;
26.  $f(x) = \ln(1-x), x < 1$ ;

27.  $f(x) = \cos(\ln x), x > 0$  ;      28.  $f(x) = \sin(\ln x), x > 0$  .
29.  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, x > 0$  ;      30.  $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ;
31.  $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ;      32.  $f(x) = \frac{x}{\operatorname{ch}^2 x}, x \in \mathbb{R}$  ;
33.  $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sh}^2 x}, x > 0$  ;      34.  $f(x) = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$  ;
35.  $f(x) = x^2 \sqrt{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$  ;      36.  $f(x) = x \sqrt{1-x^2}, x \in (-1, 1)$  ;
37.  $f(x) = x^3 \sqrt{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$  ;      38.  $f(x) = x \cos^2 x, x \in \mathbb{R}$  ;
39.  $f(x) = 9x^2 \ln(x+1), x > -1$  ;      40.  $f(x) = \ln^2 x, x > 0$  .

**B.** Să se determine primitivele următoarelor funcții:

1.  $f(x) = \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$  ;      2.  $f(x) = x^3 e^{x^2}, x \in \mathbb{R}$  ;
3.  $f(x) = x^5 e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$  ;      4.  $f(x) = \frac{x \ln(x+1)}{(x+1)^2}, x > -1$  ;
5.  $f(x) = \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}, x \in (0, \pi)$  ;      6.  $f(x) = \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ;
7.  $f(x) = \frac{x \cos x}{\sin^3 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ;      8.  $f(x) = x^4 e^x, x \in \mathbb{R}$  ;
9.  $f(x) = x^4 \ln^3 x, x > 0$  ;      10.  $f(x) = \cos^5 x, x \in \mathbb{R}$  ;
11.  $f(x) = \operatorname{tg}^6 x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ;      12.  $f(x) = \operatorname{ctg}^3 x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ;
13.  $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x, x \in \mathbb{R}$  ;      14.  $f(x) = \sin^2 x \cos^4 x, x \in \mathbb{R}$  ;
15.  $f(x) = \frac{1}{\cos^6 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ;      16.  $f(x) = x^2 \sqrt{9-x^2}, x \in (-3, 3)$  ;
17.  $f(x) = x e^x \sin x, x \in \mathbb{R}$  ;      18.  $f(x) = x e^x \cos x, x \in \mathbb{R}$  ;
19.  $f(x) = x e^x \sin^2 x, x \in \mathbb{R}$  ;      20.  $f(x) = x e^x \cos^2 x, x \in \mathbb{R}$  .

## I.6. Integrarea anumitor tipuri de funcții

În paragraful I.5 s-a pus problema determinării unor integrale nedefinite de forma  $\int P(x)e^{\alpha x} dx$ ,  $\int P(x)\sin \alpha x dx$ , unde  $P$  este polinom de gradul  $n \in \mathbf{N}^*$ . Problema s-a rezolvat integrând prin părți de  $n$  ori. Pentru  $n$  suficient de mare, calculul a devenit greoi. În cele ce urmează vom prezenta o altă variantă de determinare a primitivelor.

1)  $\int P(x)e^{\alpha x} dx$ ,  $P$  polinom de gradul  $n \in \mathbf{N}^*$ . Integrând prin părți obținem

$$\int f(x) dx = \frac{1}{\alpha} \int P(x)(e^{\alpha x})' dx = \frac{1}{\alpha} P(x)e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int P'(x)e^{\alpha x} dx.$$
 Procedeu continuă și, în final, obținem  $\int P(x)e^{\alpha x} dx = Q(x)e^{\alpha x} + \mathcal{C}$ , unde  $Q \in \mathbf{R}[X]$ ,  $\text{grad } Q = n$ . Coeficienții polinomului  $Q$  se determină din condiția  $(Q(x)e^{\alpha x})' = P(x)e^{\alpha x}$  (prin metoda coeficienților nedeterminați).

Pentru cazul particular  $\int (x^2 - 2x + 3)e^{2x} dx$ , avem:

$$\begin{aligned} ((ax^2 + bx + c)e^{2x})' &= (x^2 - 2x + 3)e^{2x} \Leftrightarrow e^{2x}(2ax^2 + 2bx + 2c + 2ax + b) = e^{2x}(x^2 - 2x + 3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2ax^2 + (2b + 2a)x + 2c + b = x^2 - 2x + 3, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow 2a = 1, 2b + 2a = -2, 2c + b = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}, c = \frac{9}{4}. \text{ Deci } \int (x^2 - 2x + 3)e^{2x} dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right)e^{2x} + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

2)  $\int P(x)\sin \alpha x dx$ ,  $P$  polinom de grad  $n \in \mathbf{N}^*$ . Integrând prin părți obținem

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= -\frac{1}{\alpha} \int P(x)(\cos \alpha x)' dx = -\frac{1}{\alpha} P(x)\cos \alpha x + \frac{1}{\alpha} \int P'(x)\cos \alpha x dx = -\frac{1}{\alpha} P(x)\cos \alpha x + \\ &+ \frac{1}{\alpha^2} \int P'(x)(\sin \alpha x)' dx = -\frac{1}{\alpha} P(x)\cos \alpha x + \frac{1}{\alpha^2} P'(x)\sin \alpha x - \frac{1}{\alpha^2} \int P''(x)\sin \alpha x dx. \end{aligned}$$

Continuând procedeul ajungem în final la:  $\int P(x)\sin \alpha x dx = Q(x)\cos \alpha x + T(x)\sin \alpha x$ , unde  $Q$  și  $T$  sunt polinoame cu coeficienți reali astfel încât  $\text{grad } Q = n$ ,  $\text{grad } T = n - 1$ . Coeficienții lui  $Q$  și  $T$  se pot determina derivând relația dată și identificând.

Pentru cazul particular  $\int (x^2 + 2x + 1)\sin 2x dx$  avem:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 2x - 1)\sin 2x dx &= (ax^2 + bx + c)\cos 2x + (mx + p)\sin 2x + \mathcal{C}. \text{ Obținem} \\ (x^2 + 2x - 1)\sin 2x &= (-2ax^2 - 2bx - 2c + m)\sin 2x + (2ax + b + 2mx + 2p)\cos 2x, \text{ de unde} \\ x^2 + 2x - 1 &= -2ax^2 - 2bx - 2c + m \text{ și } (2a + 2m)x + b + 2p = 0 \Leftrightarrow -2a = 1, -2b = 2, \\ -2c + m &= -1, 2a + 2m = 0, b + 2p = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}, b = -1, m = \frac{1}{2}, c = \frac{3}{4}, p = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Rezultă  $\int (x^2 + 2x - 1) \sin 2x \, dx = \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{4}\right) \cos 2x + \frac{1}{2}(x+1) \sin 2x + \mathcal{C}$ .

3)  $\int P(x) \cos \alpha x \, dx$ ,  $P$  polinom de grad  $n \in \mathbb{N}^*$

Avem:  $\int P(x) \cos \alpha x \, dx = Q(x) \sin \alpha x + T(x) \cos \alpha x$ , grad  $Q = n$ , grad  $T = n - 1$ .

Pentru cazul particular  $\int (2x^2 - 3x + 1) \cos 2x \, dx$  avem:  $\int (2x^2 - 3x + 1) \cos 2x \, dx = (ax^2 + bx + c) \sin 2x + (mx + p) \cos 2x + \mathcal{C}$ . Prin derivare rezultă  $(2x^2 - 3x + 1) \cos 2x = (2ax^2 + 2bx + 2c + m) \cos 2x + (2ax + b - 2mx - 2p) \sin 2x$ . Obținem relațiile  $2x^2 - 3x + 1 = 2ax^2 + 2bx + 2c + m$ ,  $(2a - 2m)x + b - 2p = 0$ . Prin identificarea coeficienților avem  $2a = 2$ ,  $2b = -3$ ,  $2c + m = 1$ ,  $2a - 2m = 0$ ,  $b - 2p = 0$  și deci  $a = 1$ ,  $b = -\frac{3}{2}$ ,  $m = 1$ ,  $c = 0$ ,  $p = -\frac{3}{4}$ , adică  $\int (2x^2 - 3x + 1) \cos 2x \, dx = \left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) \sin 2x + \left(x - \frac{3}{4}\right) \cos 2x + \mathcal{C}$ .

4)  $\int P(x) \cos^m x \, dx$ ,  $\int P(x) \sin^m x \, dx$ , polinom de grad  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ .

Utilizând formulele  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ ,  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ,  $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ ,

calculul primitivelor date se reduce la calculul unor primitive de forma  $\int Q(x) \cos kx \, dx$ ,  $\int R(x) \sin kx \, dx$ , unde  $Q$  și  $R$  sunt polinoame din  $\mathbb{R}[X]$ , iar  $k \in \mathbb{N}^*$ .



Să se determine  $\int (x^2 - 2x + 1) \cos^3 x \, dx$ .

*Soluție.* Avem  $\int (x^2 - 2x + 1) \cos^3 x \, dx = \int (x^2 - 2x + 1) \cos^2 x \cos x \, dx = \int (x^2 - 2x + 1) \frac{1 + \cos 2x}{2} \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int (x^2 - 2x + 1) \cos x \, dx + \frac{1}{2} \int (x^2 - 2x + 1) \cos 2x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int (x^2 - 2x + 1) \cos x \, dx + \frac{1}{4} \int (x^2 - 2x + 1) (\cos 3x + \cos x) \, dx = \frac{1}{2} \int (x^2 - 2x + 1) \cos x \, dx + \frac{1}{4} \int (x^2 - 2x + 1) \cos 3x \, dx + \frac{1}{4} \int (x^2 - 2x + 1) \cos x \, dx = \frac{1}{4} \int (x^2 - 2x + 1) \cos 3x \, dx + \frac{3}{4} \int (x^2 - 2x + 1) \cos x \, dx$ .

5)  $\int e^{ax} \cos \beta x \, dx$ ,  $\int e^{ax} \sin \beta x \, dx$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^*$ .

Avem  $F(x) = \int e^{ax} \cos \beta x \, dx = \frac{1}{\beta} \int e^{ax} (\sin \beta x)' \, dx = \frac{1}{\beta} e^{ax} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{ax} \sin \beta x \, dx$ .

$G(x) = \int e^{ax} \sin \beta x \, dx = \frac{1}{\beta} \int e^{ax} (-\cos \beta x)' \, dx = -\frac{1}{\beta} e^{ax} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \int e^{ax} \cos \beta x \, dx$ .

$F$  și  $G$  se determină rezolvând următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} G \\ G(x) = -\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} G \end{cases}$$

Obținem  $F(x) = \frac{e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x)}{a^2 + b^2} + \mathcal{C}$ ,  $G(x) = \frac{e^{\alpha x}(\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{a^2 + b^2} + \mathcal{C}$ .

6)  $\int P(x) \ln x dx$ ,  $P$  polinom de grad  $n \in \mathbb{N}^*$ . Fie  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ . Antiderivând prin

părți obținem  $\int P(x) \ln x dx = Q(x) \ln x - \int \frac{1}{x} Q(x) dx$ , unde  $Q(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ .



Să se determine  $\int (x^2 - 3x + 1) \ln x dx$ .

*Soluție.*  $\int (x^2 - 3x + 1) \ln x dx = \int \left( \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x \right)' \ln x dx = \left( \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x \right) \ln x - \int \left( \frac{x^2}{3} - \frac{3x}{2} + 1 \right) dx = \left( \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{3x^2}{4} - x + \mathcal{C}$ .



Să se determine primitivele următoarelor funcții:

1.  $f(x) = (2x^2 - 3x)e^{2x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
2.  $f(x) = (x^3 - 2x^2 + x)e^{2x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
3.  $f(x) = (-3x^2 + 2x)\sin 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
4.  $f(x) = (4x^3 - 3x^2 + x - 1)\sin 3x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
5.  $f(x) = (-4x^2 + 2x - 1)\cos(-2x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
6.  $f(x) = (-3x^3 + 2x^2 - 1)\cos 3x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
7.  $f(x) = (x^2 + 2x - 1)\sin^2 x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
8.  $f(x) = (-3x^2 + 2x)\sin^3 x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
9.  $f(x) = (-3x^2 + 4x - 1)\cos^2 x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
10.  $f(x) = (-x^3 + 2x)\cos^3 x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
11.  $f(x) = e^{2x}\sin 3x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
12.  $f(x) = e^{-4x}\cos 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
13.  $f(x) = (x^2 - 3x + 2)\ln x$ ,  $x > 0$ .
14.  $f(x) = (x^3 - 4x)\ln 2x$ ,  $x > 0$ .
15.  $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)\ln 3x$ ,  $x > 0$ .
16.  $f(x) = (2x^2 - 3x + 2)e^x + (2x - 3)e^{2x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
17.  $f(x) = (3x^2 - 4x + 1)\sin x + (3x + 1)\cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
18.  $f(x) = (4x^3 - 3x^2 - 2x)e^x + (2x^2 + 3x - 2)\ln x$ ,  $x > 0$ .

## I.7. Schimbarea de variabilă

Schimbarea de variabilă în calculul primitivelor se efectuează pentru a reduce calculul unei primitive mai complicate la calculul unei primitive mai simple.

### Teoremă (prima metodă de schimbare de variabilă)

Fie  $I$  și  $J$  două intervale din  $\mathbb{R}$  și fie funcțiile  $I \xrightarrow{g} J \xrightarrow{h} \mathbb{R}$  având proprietățile:

- a)  $g$  este derivabilă pe  $I$ ;
- b)  $h$  admite primitive (fie  $H$  o primitivă a sa).

Atunci funcția  $(h \circ g)g'$  admite primitive pe  $I$  și, în plus, avem

$$\int h(g(x))g'(x)dx = H(g(x)) + \mathcal{C}.$$

*Demonstrație.* Deoarece  $H \circ g$  este o funcție derivabilă pe  $I$  (fiind compunere de funcții derivabile) și  $(H \circ g)' = H'(g) \cdot g' = h(g) \cdot g' = (h \circ g) \cdot g'$ , rezultă că  $H \circ g$  este o primitivă a lui  $(h \circ g) \cdot g'$ .

Practic procedăm astfel: avem de calculat integrala  $I_1 = \int f(x)dx$ , unde  $x \in I$ . Scriem funcția  $f$  sub forma  $f(x) = (h \circ g)(x) \cdot g'(x) = h(g(x)) \cdot g'(x)$ . Notăm  $g(x) = t \in J$ ; diferențiem formal  $dg(x) = g'(x)dx = dt$  și obținem egalitatea formală  $g'(x)dx = dt$ . Obținem integrala  $I_2 = \int h(t)dt = H(t) + \mathcal{C}$ . Atunci obținem  $I_1 = H(g(x)) + \mathcal{C}$ .

**Observații.** ■ Nu putem scrie egalitatea  $I_1 = I_2$  deoarece  $I_1$  reprezintă o mulțime de funcții definite pe  $I$ , iar  $I_2$  reprezintă o mulțime de funcții definite pe  $J$ .

■ Mulțimile  $I_1$  și  $I_2$  pot fi diferite chiar și atunci când  $I = J$ , dar  $g$  nu este funcția identică (definită pe  $I$ ).

**Exercițiul rezolvat 1.** Să se determine primitivele funcțiilor:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$ ;      b)  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$ .

*Soluții.* a) Luăm  $g(x) = \cos x$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  și atunci  $g'(x) = -\sin x$ . Rezultă că  $f(x) = -\frac{g'(x)}{1 + g^2(x)}$ ,  $h(t) = -\frac{1}{1 + t^2}$ ,  $h: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Avem  $I_2 = \int h(t)dt = -\int \frac{dt}{1 + t^2} = -\arctg t + \mathcal{C}$ , deci  $I_1 = \int f(x)dx = -\arctg(\cos x) + \mathcal{C}$ .

b) Luăm  $g(x) = \ln x$ ,  $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  și deci  $g'(x) = \frac{1}{x}$ . Rezultă că  $f(x) = g^3(x)g'(x)$ . Notăm  $h(t) = t^3$ ,  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și atunci  $I_2 = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + \mathcal{C}$ . Obținem  $I_1 = \frac{1}{4} \ln^4 x + \mathcal{C}$ .

## Tabel de integrale nedefinite

Nr. crt.	Integrala nedefinită	Condiții pentru $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ și alte condiții
1.	$\int g^n(x) \cdot g'(x) dx = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + \mathcal{C}$	$n \in \mathbb{N}$
2.	$\int g^a(x) \cdot g'(x) dx = \frac{g^{a+1}(x)}{a+1} + \mathcal{C}$	$a \neq -1, g(I) \subset (0, \infty)$
3.	$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln g(x)  + \mathcal{C}$	$g(x) \neq 0, \forall x \in I$
4.	$\int a^{g(x)} \cdot g'(x) dx = \frac{a^{g(x)}}{\ln a} + \mathcal{C}$	$a > 0, a \neq 1$
5.	$\int \frac{g'(x)}{g^2(x) - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{g(x) - a}{g(x) + a} \right  + \mathcal{C}$	$g(x) \notin \{-a, a\}, \forall x \in I, a \neq 0$
6.	$\int \frac{g'(x)}{g^2(x) + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{g(x)}{a} + \mathcal{C}$	$a \neq 0$
7.	$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{a^2 - g^2(x)}} dx = \arcsin \frac{g(x)}{a} + \mathcal{C}$	$a > 0, g(I) \subset (-a, a)$
8.	$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g^2(x) + a^2}} dx = \ln \left( g(x) + \sqrt{g^2(x) + a^2} \right) + \mathcal{C}$	$a \neq 0$
9.	$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g^2(x) - a^2}} dx = \ln \left  g(x) + \sqrt{g^2(x) - a^2} \right  + \mathcal{C}$	$g(I) \subset (-\infty,  a )$ sau $g(I) \subset ( a , \infty), a \neq 0$
10.	$\int \sin g(x) \cdot g'(x) dx = -\cos g(x) + \mathcal{C}$	
11.	$\int \cos g(x) \cdot g'(x) dx = \sin g(x) + \mathcal{C}$	
12.	$\int \frac{g'(x)}{\cos^2 g(x)} dx = \operatorname{tg} g(x) + \mathcal{C}$	$g(x) \notin \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \forall x \in I$
13.	$\int \frac{g'(x)}{\sin^2 g(x)} dx = -\operatorname{ctg} g(x) + \mathcal{C}$	$g(x) \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \forall x \in I$
14.	$\int \operatorname{tg} g(x) \cdot g'(x) dx = -\ln \cos g(x)  + \mathcal{C}$	$g(x) \notin \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \forall x \in I$
15.	$\int \operatorname{ctg} g(x) \cdot g'(x) dx = \ln \sin g(x)  + \mathcal{C}$	$g(x) \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \forall x \in I$
16.	$\int \operatorname{sh} g(x) \cdot g'(x) dx = \operatorname{ch} g(x) + \mathcal{C}$	
17.	$\int \operatorname{ch} g(x) \cdot g'(x) dx = \operatorname{sh} g(x) + \mathcal{C}$	

**Exercițiul rezolvat 2.** Să se determine primitivele funcțiilor:

$$\text{a) } f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sin x}; \quad \text{b) } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^6 + 1}}.$$

$$\text{Soluție. a) } \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\sin^2 x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{1 - \cos^2 x} dx.$$

Luând  $g(x) = \cos x$ ,  $g : (0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$ ,  $h(t) = -\frac{1}{1-t^2}$ ,  $h : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  obținem

$$I_2 = -\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \mathcal{C} = \frac{1}{2} \ln \frac{1-t}{1+t}, \text{ deci } I_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \mathcal{C}.$$

$$\text{b) Scriind formal avem } t = x^3, dt = 3x^2 dx \text{ și atunci } I_2 = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{1}{3} \ln \left( t + \sqrt{t^2 + 1} \right) + \mathcal{C}.$$

$$\text{Obținem } I_1 = \frac{1}{3} \ln \left( x^3 + \sqrt{x^6 + 1} \right) + \mathcal{C}.$$

**Exercițiul rezolvat 3.** Să se calculeze  $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ .

*Soluție.* Funcția  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , este definită pe un interval  $I \subset \mathbb{R}$  pentru care  $f(x) > 0, \forall x \in I$ .

*Cazul I.*  $a > 0$ . Avem  $f(x) = \frac{1}{4a} \left[ (2ax + b)^2 - \Delta \right]$ , unde  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Dacă  $\Delta < 0$  putem lua  $I = \mathbb{R}$ . Dacă  $\Delta > 0$ , considerând  $x_1 < x_2$  rădăcinile ecuației  $f(x) = 0$ , putem lua  $I \subset (-\infty, x_1)$  sau  $I \subset (x_2, \infty)$ . În toate cazurile avem  $(2ax + b)^2 - \Delta > 0$ . Considerăm

funcția  $g(x) = 2ax + b$  și avem  $g^2(x) > \Delta$ ,  $g'(x) = 2a, \forall x \in I$ . Notând  $2ax + b = t$ ,

$$h(x) = \sqrt{x^2 - \Delta}, \text{ avem } h(g(x)) = \sqrt{(2ax + b)^2 - \Delta} = 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c} \text{ și atunci}$$

$$h(g(x)) \cdot g'(x) = 4a\sqrt{a} \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c}. \text{ Obținem } \int h(x) dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - \Delta} - \frac{\Delta}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - \Delta} \right| + \mathcal{C} \text{ și}$$

$$\text{atunci } \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{4a} \left[ (2ax + b) \sqrt{f(x)} - \frac{\Delta}{2\sqrt{a}} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a} \sqrt{f(x)} \right| \right] + \mathcal{C}.$$

*Cazul II.*  $a < 0$ . Acest caz este posibil numai dacă  $\Delta > 0$  și deci  $I \subset (x_1, x_2)$ . Avem

$$f(x) = -\frac{1}{4a} \left( \Delta - (2ax + b)^2 \right). \text{ Notând } h(x) = \sqrt{\Delta - x^2}, \text{ avem } h(g(x)) = \sqrt{\Delta - (2ax + b)^2} =$$

$$= 2\sqrt{-a} \sqrt{ax^2 + bx + c}, h(g(x))g'(x) = 4a\sqrt{-a} \sqrt{ax^2 + bx + c}. \text{ Deoarece } \int h(x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{\Delta - x^2} + \frac{\Delta}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{\Delta}} + \mathcal{C}, \text{ obținem } \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{4a\sqrt{-a}} \left[ (2ax + b) \sqrt{-a} \sqrt{f(x)} + \frac{\Delta}{2} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} \right] + \mathcal{C}.$$

EXEMPLU



Să se determine primitivele funcțiilor:

a)  $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$ ,  $x > 1$ ;    b)  $f(x) = \sqrt{-4x^2 + 4x + 3}$ ,  $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .

Soluții: a) Avem cazul  $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$  cu  $a = 2 > 0$ ,  $\Delta = 1 > 0$ . Luăm  $t = 4x - 3$  și

rezultă că:  $\int f(x) dx = \frac{1}{8} \left[ (4x - 3)\sqrt{2x^2 - 3x + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln |4x - 3 + 2\sqrt{2(2x^2 - 3x + 1)}| \right]$ .

b) Avem cazul  $g(x) = -4x^2 + 4x + 3$  cu  $a = -4 < 0$ ,  $\Delta = 64 > 0$ .

Obținem

$$\int \sqrt{-4x^2 + 4x + 3} dx = \frac{1}{4 \cdot (-4)\sqrt{4}} \left[ (-8x + 4) \cdot \sqrt{-4x^2 + 4x + 3} + \frac{64}{2} \arcsin \frac{-8x + 4}{\sqrt{64}} \right] + \mathcal{C}$$

adică  $\int \sqrt{-4x^2 + 4x + 3} dx = \frac{2x - 1}{4} \sqrt{-4x^2 + 4x + 3} + \arcsin \frac{2x - 1}{2} + \mathcal{C}$ .

**Exerciții rezolvate**

Să se determine primitivele următoarelor funcții:

4.  $f(x) = \cos^2 \sqrt{x}$ ,  $x > 0$ .    5.  $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Soluții.

4. Notăm  $x = t^2$ ,  $t > 0$  și atunci  $dx = 2t dt$ ,  $t = \sqrt{x}$ . Avem de calculat primitiva

$$\int 2t \cos^2 t dt = \int t(1 + \cos 2t) dt = \frac{t^2}{2} + \int t \cos 2t dt = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \int t(\sin 2t)' dt = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} t \sin 2t - \frac{1}{2} \int \sin 2t dt = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t + \mathcal{C}.$$

Primitiva cerută este  $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{x} \sin 2\sqrt{x} + \frac{1}{4} \cos 2\sqrt{x} + \mathcal{C}$ .

5. Luăm  $x = \ln t$ ,  $t > 0$  și avem  $dx = \frac{1}{t} dt$ ,  $t = e^x$ . Avem de calculat primitiva

$$\int \frac{t^2}{t+2} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{t}{t+2} dt = \int \left(1 - \frac{2}{t+2}\right) dt = t - 2 \ln |t+2| + \mathcal{C}$$

Primitiva cerută este  $e^x - 2 \ln(e^x + 2) + \mathcal{C}$ .

PROBLEME



PROPUSE

Să se determine primitivele următoarelor funcții:

1.  $f(x) = x\sqrt{1+9x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;    2.  $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^3 - 27}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;

3.  $f(x) = (x^3 - 1)\sqrt{x^4 - 4x + 1}$ ,  $x \in (2, \infty)$ ;    4.  $f(x) = e^x \sin(e^x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;

5.  $f(x) = \sin^n x \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;    6.  $f(x) = e^x \cos(e^x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;

7.  $f(x) = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$
8.  $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$
9.  $f(x) = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$
10.  $f(x) = \frac{e^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}, x \in (0, \pi);$
11.  $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$
12.  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}, x > 1;$
13.  $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, x > 0;$
14.  $f(x) = x^2 e^{x^3}, x \in \mathbb{R};$
15.  $f(x) = \frac{x}{\ln(x^{x^2})}, x > 1;$
16.  $f(x) = e^{2x^2 + \ln x}, x > 0;$
17.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R};$
18.  $f(x) = \frac{x}{x^4 + 1}, x \in \mathbb{R};$
19.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}, x \in (-1, 1);$
20.  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + 2 \cos x}}, x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right);$
21.  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$
22.  $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x}}, x \in (0, \pi);$
23.  $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1}, x \in \mathbb{R};$
24.  $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R};$
25.  $f(x) = \frac{x^3}{(1 + x^2)^2}, x \in \mathbb{R};$
26.  $f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}, x > 1;$
27.  $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}, x > 1;$
28.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}}, x \in \mathbb{R};$
29.  $f(x) = \frac{1}{\sin x}, x \in (0, \pi);$
30.  $f(x) = \frac{1}{\cos x}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$
31.  $f(x) = \frac{\ln x}{x(1 - \ln^2 x)}, x > e;$
32.  $f(x) = \frac{\ln \sqrt{x}}{x}, x > 1;$
33.  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}, x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right);$

34.  $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + a^2}, x \in \mathbb{R}, a \neq 0;$     35.  $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}, x \in \mathbb{R};$
36.  $f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x}, x \in \mathbb{R};$     37.  $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \in (0,1).$
38.  $f(x) = x + \frac{3}{\sqrt{x}}, x > 0;$     39.  $f(x) = x^2(1 - \sqrt[3]{x}), x > 0;$
40.  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[3]{x}}, x > 0;$     41.  $f(x) = \frac{x}{(x^2 + a^2)^2}, a \neq 0;$
42.  $f(x) = \sin^3 x \cos x, x \in \mathbb{R};$     43.  $f(x) = \sin^n x \cos x, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*;$
44.  $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$     45.  $f(x) = \operatorname{tg}^2 x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$
46.  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^n x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), n \geq 2;$     47.  $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, x > 0;$
48.  $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}, x \in \mathbb{R};$     49.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0;$
50.  $f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x}, x \in \mathbb{R};$     51.  $f(x) = \frac{3x-1}{3x^2 - 2x + 3}, x > 0;$
52.  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}, x \in \left(\frac{1}{e}, e\right);$     53.  $f(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}, x > 0;$
54.  $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R};$     55.  $f(x) = \frac{1}{2 + \sqrt{x}}, x > 0.$

## I.8. Descompunerea funcțiilor raționale în funcții raționale simple

Problema care se pune este determinarea primitivelor unor funcții de forma  $\frac{P(x)}{Q(x)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval,  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ ,  $Q(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in I$ . Primitivele unor astfel de funcții sunt funcții elementare ce se pot determina. Ele sunt combinații liniare de funcții raționale, funcții logaritmice și funcții trigonometrice inverse.

**Definiție.** O funcție  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $I$  este interval, se numește *funcție rațională* dacă există polinoamele  $P$  și  $Q$  cu coeficienți reali astfel încât  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  pentru orice  $x \in I$  ( $Q(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in I$ ). O funcție rațională  $f$  se numește *funcție rațională simplă* dacă are una din următoarele forme:

a)  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  (funcție polinomială);

b)  $f(x) = \frac{A}{(x-a)^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \neq 0$ ;

c)  $f(x) = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ .

Următoarea teoremă arată că orice funcție rațională se poate scrie ca o sumă finită de funcții raționale simple. Calculul primitivei unei funcții raționale se reduce la calculul primitivelor unor funcții raționale simple.

**Teoremă.** Fie funcția rațională  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $Q(x) \neq 0$ , pentru orice  $x \in I$ , iar  $P$  și  $Q$  polinoame prime între ele. Dacă avem  $Q(x) = (x - \alpha_1)^{n_1} (x - \alpha_2)^{n_2} \dots (x - \alpha_k)^{n_k} \cdot (x^2 + a_1 x + b_1)^{m_1} (x^2 + a_2 x + b_2)^{m_2} \dots (x^2 + a_p x + b_p)^{m_p}$ , unde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ ,  $n_1, n_2, \dots, n_k, m_1, m_2, \dots, m_p \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_i^2 - 4b_i < 0$  pentru orice  $i = \overline{1, p}$ , atunci  $f$  se descompune în mod unic sub forma:  $f(x) = T(x) + \sum_{i=1}^k \left[ \frac{A_1^i}{(x - \alpha_i)^{n_i}} + \frac{A_2^i}{(x - \alpha_i)^{n_i-1}} + \dots + \frac{A_{i-1}^i}{(x - \alpha_i)^2} + \frac{A_i^i}{x - \alpha_i} \right] + \sum_{i=1}^p \left[ \frac{B_1^i x + C_1^i}{(x^2 + a_i x + b_i)^{m_i}} + \frac{B_2^i x + C_2^i}{(x^2 + a_i x + b_i)^{m_i-1}} + \dots + \frac{B_i^i x + C_i^i}{x^2 + a_i x + b_i} \right]$ , unde  $T$  este un polinom cu coeficienți reali,  $A_j^i, B_j^i, C_j^i$ ,  $j = \overline{1, i}$  sunt constante reale.

**Observație.** „ $i$ ” nu este exponent ci „indice” în notația  $A_j^i$  (a nu se confunda nici cu „aranjamente de  $j$  elemente luate câte  $i$ ”).

### Metoda coeficienților nedeterminați

- se efectuează împărțirea cu rest a lui  $P$  la  $Q$  (evident în cazul în care  $\text{grad } P \geq \text{grad } Q$ ) și obținem  $P = TQ + R$ , unde  $R$  este restul (evident  $\text{grad } R < \text{grad } Q$ );
- se descompune  $Q$  în factori ireductibili peste  $\mathbb{R}$ ;
- se scrie formula de descompunere ca în enunțul teoremei;
- se elimină numitorul și se identifică coeficienții celor două polinoame, obținându-se un sistem linear în care necunoscutele sunt coeficienții din descompunere;
- se rezolvă sistemul.

**Exercițiul rezolvat 1.** Să se descompună în funcții raționale simple:

$$\text{a) } f(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}; \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2}.$$

*Soluții.* a)  $f(x) = 2x + 1 + \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}$ . Avem  $\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ .

Prin eliminarea numitorului rezultă  $x = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$ , de unde

$x = (A+B)x^2 + (2A+C)x + A - B - C$ . Identificând coeficienții obținem  $A+B=0$

$2A+C=1, A-B-C=0$  și deci  $A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{1}{2}$ .

Altfel, în egalitatea  $x = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$ :

- făcând  $x=1$  rezultă  $1=4A$ , adică  $A = \frac{1}{4}$ ;

- făcând  $x=-1$  rezultă  $-1=-2C$ , adică  $C = \frac{1}{2}$ ;

- făcând  $x=0$  rezultă  $0=A-B-C$  și atunci  $B=A-C = -\frac{1}{4}$ .

În concluzie,  $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right)$ .

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^3}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

**I)** Eliminând numitorul rezultă  $x^3 = (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2+2)$  (1)

$x^3 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (A+2C)x + B+2D$ . Identificând coeficienții obținem

$A+C=1, B+D=0, A+2C=0, B+2D=0$  care are soluția  $A=2, B=0, C=-1, D=0$ .

**Observație.** Funcția  $f$  este impară și atunci  $B=D=0$ .

**II)** În egalitatea (1) luăm  $x=i$  și obținem  $-i=Ci+D$ . Cum  $C$  și  $D$  sunt numere reale

rezultă  $C = -1, D = 0$ . În egalitatea (1) luăm  $x = i\sqrt{2}$  și obținem  $-2i\sqrt{2} = -Ai\sqrt{2} - B$ .

Deoarece  $A$  și  $B$  sunt numere reale rezultă  $A = 2, B = 0$ . Deci  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2} - \frac{x}{x^2 + 1}$ .

În cele ce urmează vom trata numai cazul în care grad  $P \leq 4$ . Vom exemplifica prin exemple în care grad  $P = 4$ .

### A. Cazul în care numitorul are numai rădăcini reale

#### A1. Numitorul are toate rădăcinile reale diferite

În acest caz putem considera  $Q(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ , unde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq b \neq c \neq d \neq a$ .

$$\text{Atunci } f(x) = T(x) + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d}.$$

EXEMPLU



Să se descompună în funcții raționale simple  $f: (3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{5x^3 - 19x^2 + 12x + 6}{x(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

*Soluție.* Avem  $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x-3}$  și prin eliminarea numitorului obținem:  $A(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) + B(x^3 - 5x^2 + 6x) + C(x^3 - 4x^2 + 3x) + D(x^3 - 3x^2 + 2x) = 5x^3 - 19x^2 + 12x + 6 \Rightarrow (A + B + C + D)x^3 + (-6A - 5B - 4C - 3D)x^2 + (11A + 6B + 3C + 2D)x - 6A = 5x^3 - 19x^2 + 12x + 6$ . Identificând coeficienții obținem sistemul  $A + B + C + D = 5, -6A - 5B - 4C - 3D = -19, 11A + 6B + 3C + 2D = 12, -6A = 6$ , care are soluția  $A = -1, B = 2, C = -3, D = 1$ .

Indicăm acum o altă metodă pentru determinarea coeficienților  $A, B, C, D$  în cazul funcției date mai sus.

$$\text{Avem } xf(x) = A + x\left(\frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x-3}\right) = \frac{5x^3 - 19x^2 + 12x + 6}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Înlocuind  $x$  cu 0 obținem  $A = -1$ .

$$\text{Avem } \left(\frac{A}{x} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x-3}\right)(x-1) + B = \frac{5x^3 - 19x^2 + 12x + 6}{x(x-2)(x-3)}.$$

Luând  $x = 1$  obținem  $B = 2$ .

$$\text{Avem } C + (x-2)\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{x-2}\right) = \frac{5x^3 - 19x^2 + 12x + 6}{x(x-1)(x-3)}.$$

Luând  $x = 2$  obținem  $C = -3$ .

$$\text{Avem } D + (x-3)\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}\right) = \frac{5x^3 - 19x^2 + 12x + 6}{x(x-1)(x-2)}.$$

Luând  $x = 3$  obținem  $D = 1$ .

**A2.** Numitorul este de forma  $Q(x) = (x - a)^2(x - b)(x - c)$ ,  $a \neq b \neq c \neq a$ .

Atunci avem  $f(x) = T(x) + \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{x-c}$ .

EXEMPLU



Să se descompună în funcții raționale simple

$$f: (-\infty, -1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^5}{(x-1)^3(x+1)}.$$

*Soluție.* Avem  $f(x) = x + 2 + g(x)$ , unde  $g(x) = \frac{4x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{(x-1)^3(x+1)}$ .

Luăm  $g(x) = \frac{4x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$ .

Înmulțind cu  $x + 1$  obținem  $\frac{4x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{(x-1)^3} = D + (x+1) \left[ \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} \right]$ .

Luând  $x = -1$  rezultă  $D = -\frac{1}{8}$ . Înmulțind cu  $(x - 1)^3$  avem:

$$\frac{4x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{x+1} = A + (x-1)B + (x-1)^2C + (x-1)^3 \cdot \frac{D}{x+1}.$$

Luând  $x = 1$  rezultă  $A = \frac{1}{2}$ . Rezultă că  $\frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{4x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{(x-1)^3(x+1)}$

$$-\frac{1}{2(x-1)^3} - \frac{1}{8(x+1)} \Leftrightarrow \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{31x^3 - 13x^2 - 31x + 13}{8(x-1)^3(x+1)}.$$

Eliminând numitorul rezultă  $8B(x^2 - 1) + 8C(x - 1)^2(x + 1) = 31x^3 - 13x^2 - 31x + 13 \Leftrightarrow 8B(x^2 - 1) + 8C(x^3 - x^2 - x + 1) = 31x^3 - 13x^2 - 31x + 13$ .

Prin identificare rezultă  $8C = 31$ ,  $8B - 8C = -13$ , de unde  $C = \frac{31}{8}$ ,  $B = \frac{9}{4}$ .

Rezultă că  $f(x) = \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{9}{4(x-1)^2} + \frac{31}{8(x-1)} + \frac{1}{8(x-1)} + x + 2$ .

**A3.** Numitorul este de forma  $Q(x) = (x - a)^2(x - b)^2$ ,  $a \neq b$

Atunci avem  $F(x) = T(x) + \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{C}{(x-b)^2} + \frac{D}{x-b}$ . (1)

Dacă se înmulțește (1) cu  $(x - a)^2$  și în egalitatea obținută se înlocuiește  $x = a$ , se determină  $A$ . Dacă se înmulțește (1) cu  $(x - b)^2$  și în egalitatea obținută se înlocuiește  $x = b$ , se determină  $C$ .

Se determină expresia  $E(x) = f(x) - T(x) - \frac{A}{(x-a)^2} - \frac{C}{(x-b)^2}$ .

Se obține  $E(x) = \frac{B}{x-a} + \frac{D}{x-b}$ , iar  $B$  și  $D$  se determină prin metoda coeficienților nedeterminați sau prin înmulțire cu  $x-a$  și se ia  $x=a$  și se determină  $B$ , respectiv prin înmulțire cu  $x-b$  și se determină  $D$ .

### B. Cazul în care numitorul are rădăcini complexe (care nu sunt reale)

**B1.** Numitorul este de forma  $Q(x) = (x-a)(x-b)(x-z)(x-\bar{z})$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ .

Atunci avem  $f(x) = T(x) + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{Cx+D}{(x-z)(x-\bar{z})}$ , dacă  $a \neq b$ , respectiv

$$f(x) = T(x) + \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{Cx+D}{(x-z)(x-\bar{z})}, \text{ dacă } a = b.$$

EXEMPLU



Să se descompună în funcții raționale simple  $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-x)(x^2+2x+3)}.$$

$$\text{Avem } f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}.$$

$$\text{Înmulțind cu } x \text{ rezultă } \frac{1}{(x-1)(x^2+2x+3)} = A + x \left( \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3} \right).$$

$$\text{Luând } x = 0 \text{ rezultă } A = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Înmulțind cu } x-1 \text{ rezultă } \frac{1}{x(x^2+2x+3)} = B + (x-1) \left( \frac{A}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3} \right).$$

$$\text{Luând } x = 1 \text{ rezultă } B = \frac{1}{6}.$$

De aici înainte putem proceda în două variante.

$$\begin{aligned} \text{I. Avem } \frac{Cx+D}{x^2+2x+3} &= \frac{1}{x(x-1)(x^2+2x+3)} + \frac{1}{3x} - \frac{1}{6(x-1)} \Leftrightarrow \frac{Cx+D}{x^2+2x+3} \\ &= \frac{x^3-x}{6x(x-1)(x^2+2x+3)} \Leftrightarrow \frac{Cx+D}{x^2+2x+3} = \frac{x+1}{6(x^2+2x+3)} \Rightarrow C = \frac{1}{6}, D = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

II. Ecuația  $x^2 + 2x + 3 = 0$  are rădăcinile  $-1 \pm i\sqrt{2}$ .

$$\text{Înmulțind cu } x^2 + 2x + 3 \text{ avem } \frac{1}{x^2-x} = Cx + D + (x^2 + 2x + 3) \left( \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \right). \text{ Luând}$$

$$x = -1 + i\sqrt{2} \text{ obținem } \frac{1}{3\sqrt{2}}i = C(-1 + i\sqrt{2}) + D = D - C + Ci\sqrt{2}.$$

Identificând părțile reale și părțile imaginare rezultă  $D = C = \frac{1}{6}$ .

**B2.** Numitorul este de forma  $\mathbb{Q}(x) = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)(x - z_2)(x - \bar{z}_2)$ , unde  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ .

EXEMPLU



Să se descompună în funcții raționale simple  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{15x + 10}{(x^2 + 2x + 5)(x^2 + 2x + 10)}.$$

Avem  $f(x) = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 5} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 10}$  (1). Ecuațiile  $x^2 + 2x + 5 = 0$  și  $x^2 + 2x + 10 = 0$  au rădăcinile  $-1 \pm 2i$ , respectiv  $-1 \pm 3i$ . Înmulțind (1) cu  $x^2 + 2x + 5$

rezultă  $\frac{15x + 10}{x^2 + 2x + 10} = Ax + B + (x^2 + 2x + 5) \cdot \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 10}$ .

Înlocuind  $x = -1 + 2i$  rezultă  $-1 + 6i = B - A + 2iA$  și deci  $B - A = -1$ ,  $2A = 6$ , de unde  $A = 3$ ,  $B = 2$ .

Înmulțind (1) cu  $x^2 + 2x + 10$  rezultă:

$$\frac{15x + 10}{x^2 + 2x + 5} = Cx + D + (x^2 + 2x + 10) \cdot \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 5}.$$

Înlocuind  $x = -1 + 3i$  rezultă  $1 - 9i = (D - C) + 3iC$  și deci  $C = -3$ ,  $D = -2$ .

### Observații

■ Putem descompune în funcții raționale simple fracția  $f$  astfel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{5(3x + 2)}{(x^2 + 2x + 10)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{(3x + 2)[(x^2 + 2x + 10) - (x^2 + 2x + 5)]}{(x^2 + 2x + 10)(x^2 + 2x + 5)} = \\ &= \frac{(3x + 2)(x^2 + 2x + 10)}{(x^2 + 2x + 5)(x^2 + 2x + 10)} - \frac{(3x + 2)(x^2 + 2x + 5)}{(x^2 + 2x + 5)(x^2 + 2x + 10)} = \frac{3x + 2}{x^2 + 2x + 10} - \frac{3x + 2}{x^2 + 2x + 5}. \end{aligned}$$

■ Dacă funcția  $f$  este funcție pară (adică  $f(-x) = f(x)$ ), atunci luăm

$$f(x) = T(x) + \frac{A}{(x - z_1)(x - \bar{z}_1)} + \frac{B}{(x - z_2)(x - \bar{z}_2)}.$$

EXEMPLU



Fie funcția  $f(x) = \frac{ax^2 + b}{(x^2 + c)(x^2 + d)}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  nu sunt simultan nule,

$c > 0$ ,  $d > 0$ . Luăm atunci  $f(x) = \frac{A}{x^2 + c} + \frac{B}{x^2 + d}$ .

Obținem  $ax^2 + b = (A + B)x^2 + Ad + Bc$  și deci  $A + B = a$ ,  $Ad + Bc = b$ .

C. Să se analizeze cazurile pentru care avem:

a)  $Q(x) = (x - a)^3$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ;

b)  $Q(x) = (x - a)^2(x - b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$ ;

c)  $Q(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$  (distincte);

d)  $Q(x) = (x - a)(x - z)(x - \bar{z})$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .



Să se descompună în funcții raționale simple următoarele funcții raționale:

- |                                    |   |
|------------------------------------|---|
| 1. $\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}$       | 2. $\frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)}$             |
| 3. $\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$      | 4. $\frac{4x^2}{(x^2-4)(x^2-9)}$          |
| 5. $\frac{x^4}{x^4-1}$             | 6. $\frac{1}{x^2-2x+5}$                   |
| 7. $\frac{2x+1}{4x^2+4x+2}$        | 8. $\frac{x^2}{(x-1)^3(x+2)}$             |
| 9. $\frac{x^2+x}{(x^2-4)^2}$       | 10. $\frac{1}{x^4-x^3+x-1}$               |
| 11. $\frac{x^3+2x}{x^2(x^2+1)}$    | 12. $\frac{x^2}{1-x^4}$                   |
| 13. $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}$     | 14. $\frac{1}{x^3+1}$                     |
| 15. $\frac{x}{x^3+8}$              | 16. $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$             |
| 17. $\frac{x^2+x+1}{x^4+6x^2+1}$   | 18. $\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}$ |
| 19. $\frac{x^4-x}{x^4+3x^2+2}$     | 20. $\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^2}$            |
| 21. $\frac{(x+1)^3}{3x^4+10x^2+3}$ | 22. $\frac{1}{x^4+16}$                    |
| 23. $\frac{1}{(x^2+1)^2}$          | 24. $\frac{1}{x^4+x^2+1}$                 |
| 25. $\frac{1}{x^4-3x^2+2}$         | 26. $\frac{1}{x^4-x^2+1}$                 |
| 27. $\frac{1}{x^4-4x^2}$           |   |

## I.9. Determinarea primitivelor funcțiilor raționale simple

### Exerciții rezolvate

1.  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ .

Soluție.  $\int f(x) dx = \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1} x^n}{n} + \dots + \frac{a_1 x^2}{2} + a_0 x + \mathcal{C}$ .

2.  $f(x) = \frac{A}{(x-a)^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \neq 0$ .

Soluție. Avem  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $I \subset (-\infty, a)$  sau  $I \subset (a, \infty)$ . Dacă  $n=1$  avem  $\int f(x) dx = \int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + \mathcal{C}$ . Dacă  $n \geq 2$ , atunci  $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{A}{(x-a)^{n-1}} + \mathcal{C}$ .

3.  $f(x) = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $b^2 - 4ac < 0$ .

Soluție. Deoarece  $(ax^2+bx+c)^n = a^n \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)^n$  și constanta „iese” în afara semnelui „integrală”, putem considera  $f(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}$  cu  $\Delta = a^2 - 4b < 0$ . Deoarece

$\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n} dx = A \int \frac{x}{(x^2+ax+b)^n} dx + B \int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n} dx$ , calculul se reduce la determinarea următoarelor primitive: **3.a)**  $\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n} dx$  și **3.b)**  $\int \frac{x}{(x^2+ax+b)^n} dx$ .

Avem  $x^2+ax+b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$ . Dacă  $\Delta = a^2 - 4b < 0$ , atunci  $b - \frac{a^2}{4} > 0$  și

determinarea primitivei **3.a)**, făcând substituția  $x + \frac{a}{2} = t$ , se reduce la determinarea primitivei

$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$ . Aceasta a fost determinată în paragraful I.4 (exercițiul rezolvat 4).

Dacă  $\Delta = a^2 - 4b > 0$ , atunci  $x^2+ax+b=0$ , are două rădăcini reale (distincte sau nu),

iar calculul lui **3.a)** se reduce la determinarea unor primitive de forma **2**.

Pentru calculul primitivei de forma **3.b)** se procedează astfel:  $\frac{x}{(x^2+ax+b)^n} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+a-a}{(x^2+ax+b)^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+ax+b)'}{(x^2+ax+b)^n} - \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{(x^2+ax+b)^n}. \text{ Atunci } \int \frac{x}{(x^2+ax+b)^n} dx =$$

$$= -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2+ax+b)^{n-1}} - \frac{a}{2} \int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n} dx. \text{ Am redus determinarea unei}$$

primitive de forma **3.b)** la determinarea unei primitive de forma **3.a)**.

4. Să se determine primitivele funcțiilor:

a)  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 1, x \in \mathbb{R};$

b)  $f(x) = \frac{5}{(x+1)^4}, x > -1;$

c)  $f(x) = \frac{4}{(2x-1)^3}, x > \frac{1}{2};$

d)  $f(x) = \frac{7}{(-2x+3)^4}, x < \frac{3}{2};$

e)  $f(x) = \frac{1}{(x^2+9)^2}, x \in \mathbb{R};$

f)  $f(x) = \frac{1}{2x^2+x+1}.$

*Soluții.* a)  $\int f(x) dx = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + x^2 - x + \mathcal{C}.$

b)  $\int f(x) dx = -\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{(x+1)^3} + \mathcal{C}.$

c)  $\int f(x) dx = \frac{4}{8} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} + \mathcal{C} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} + \mathcal{C} = \frac{-1}{(2x-1)^2} + \mathcal{C}.$

d)  $\int f(x) dx = 7 \int \frac{dx}{(2x-3)^4} = \frac{7}{16} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^4} = \frac{7}{16} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^3} + \mathcal{C} = -\frac{7}{6} \cdot \frac{1}{(2x-3)^3} + \mathcal{C}$

e) Avem  $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{x^2+3^2} = \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} + \mathcal{C}, I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{9} \int \frac{9dx}{(x^2+9)^2} =$   
 $= \frac{1}{9} \int \frac{(x^2+9) - x^2}{(x^2+9)^2} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{x^2+9} dx - \frac{1}{9} \int x \cdot \frac{x}{(x^2+9)^2} dx = \frac{1}{9} I_1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{-1}{2} \int x \cdot \left(\frac{1}{x^2+9}\right)' dx =$   
 $= \frac{1}{9} I_1 + \frac{1}{18} \left(\frac{x}{x^2+9} - I_1\right) + \mathcal{C} = \frac{1}{18} \left(I_1 + \frac{x}{x^2+9}\right) + \mathcal{C} = \frac{1}{18} \left(\frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} + \frac{x}{x^2+9}\right) + \mathcal{C}.$

f)  $\int \frac{dx}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \arctg \frac{x + \frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} + \mathcal{C} =$   
 $= \frac{2\sqrt{7}}{7} \arctg \frac{4x+1}{\sqrt{7}} + \mathcal{C}.$

5. Să se determine primitivele funcțiilor:

$$\text{a) } f(x) = \frac{6x+6}{3x^2+5x+3}, x \in \mathbb{R}; \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}, x \in \mathbb{R}; \quad \text{c) } f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Soluții. a) } f(x) = \frac{6x+5}{3x^2+5x+3} + \frac{1}{3x^2+5x+3} = \frac{(3x^2+5x+3)'}{3x^2+5x+3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \ln(3x^2+5x+3) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{6}{\sqrt{11}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{5}{6}}{\frac{6}{\sqrt{11}}} + \mathcal{C} = \ln(3x^2+5x+3) + \frac{2\sqrt{11}}{11} \operatorname{arctg} \frac{6x+5}{\sqrt{11}} + \mathcal{C}.$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{x^2}{(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Deoarece  $f$  este funcție pară rezultă  $B = D = 0$ . Obținem  $A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ,  $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$  și deci

$$f(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{x}{2\sqrt{2}(x^2-x\sqrt{2}+1)} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1} +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2-x\sqrt{2}+1} \Rightarrow \int f(x) dx = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2+x\sqrt{2}+1) +$$

$$+ \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} dx + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2-x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \mathcal{C} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \left[ \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1) \right] + \mathcal{C}.$$

c) Vom da o soluție fără a proceda la descompunerea în funcții raționale simple. Pentru

$$x \neq 0 \text{ avem } f(x) = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}. \text{ Notăm } t = x - \frac{1}{x} \text{ și atunci } dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2.$$

Avem  $\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + \mathcal{C}$ . Deoarece  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$  rezultă că  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

O primitivă a lui  $f$  are forma: 
$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + a, & x < 0 \\ b, & x = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + c, & x > 0 \end{cases} .$$
 Deoarece  $F$  este continuă

în 0 rezultă  $F(0-0) = F(0) = F(0+0) \Leftrightarrow \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + a = b = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} + c$ . Deoarece  $F'(0) = f(0) = 1$

rezultă  $b = 1$ . Primitiva lui  $f$  este 
$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + 1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{4}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + 1 + \frac{\pi\sqrt{2}}{4}, & x > 0 \end{cases} .$$



1. Să se descompună în funcții raționale simple:

a)  $f(x) = \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}, x > 1$ ;    b)  $f(x) = \frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)}, x > 1$ ;

c)  $f(x) = \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}, x < -2$ ;    d)  $f(x) = \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}, x > -1$ ;

e)  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3(x+1)}, x > 1$ ;

f)  $f(x) = \frac{1}{x^4-x^3+x-1}, x > 1$ ;

g)  $f(x) = \frac{x^2-x}{x^4+3x^2+2}, x \in \mathbb{R}$ ;

h)  $f(x) = \frac{(x+1)^3}{3x^4+10x^3+3}, x \in \mathbb{R}$ .

2. Să se determine primitivele următoarelor funcții raționale:

a)  $f(x) = \frac{4}{2x-9}, x > \frac{9}{2}$ ;

b)  $f(x) = \frac{3x+5}{2x-7}, x > \frac{7}{2}$ ;

c)  $f(x) = \frac{1}{(4x-1)^3}, x > \frac{1}{4}$ ;

d)  $f(x) = \frac{1}{x^2-2x+5}, x \in \mathbb{R}$ ;

e)  $f(x) = \frac{4x+3}{4x^2+6x+5}, x \in \mathbb{R}$ ;

f)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+16}, x \in \mathbb{R}$ ;

g)  $f(x) = \frac{x^4}{x^4+1}$ ;

h)  $f(x) = \frac{1}{x^4+x^2+1}, x \in \mathbb{R}$ ;

i)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^4+3x^3+5x^2+3x+1}, x \in \mathbb{R}$ ;

j)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}, x \in \mathbb{R}$ ;

k)  $f(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}, x \in \mathbb{R}$ ;

l)  $f(x) = \frac{2x^3+2x^2+3x}{(x^2+x+2)^2}$ .

## I.10. Integrarea funcțiilor raționale

Pentru determinarea primitivelor unei funcții raționale oarecare vom scrie funcția ca o sumă finită de funcții raționale simple, vom determina primitivele acestora și apoi primitiva funcției raționale date.

**Exercițiul rezolvat 1.** Să se determine primitivele funcțiilor:

a)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x}, x < -1;$       b)  $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}, x > -1;$

c)  $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}, x > 1;$       d)  $f(x) = \frac{x + 1}{(x^2 + 4x + 5)^2}, x \in \mathbb{R}.$

*Soluții.* a)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ . Eliminând numitorul rezultă  $x^2 - 3x + 2 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$ .

Obținem sistemul  $A+B=1, 2A+B+C=-3, A=2$  și deci  $A=2, B=-1, C=-6$  și atunci  $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2}$ . Primitiva:  $\int f(x)dx = 2\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + \mathcal{C} = \ln \frac{-x^2}{x+1} + \frac{6}{x+1} + \mathcal{C}$ .

**Observație.** Pentru  $x > -1$  primitiva este  $\ln \frac{x^2}{x+1} + \frac{6}{x+1} + \mathcal{C}$ .

b) Avem  $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$  și deci  $x^2 = A(x+2)^2 + B(x+1)(x+2) + C(x+1)$ . Luând  $x = -2$  și apoi  $x = -1$  rezultă  $C = -4, A = 1$ . Luând apoi  $x = 0$  rezultă  $0 = 4A + 2B + C$  și atunci  $B = 0$ . Primitiva este  $\int f(x)dx = \int \frac{dx}{x+1} - 4 \int \frac{dx}{(x+2)^2} = \ln|x+1| + \frac{4}{x+2} + \mathcal{C} = \ln(x+1) + \frac{4}{x+2} + \mathcal{C}$ .

c)  $f(x) = \frac{x^4}{(x-1)(x^2+x+1)} = x + \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = x + \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ . Din  $x = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) \Leftrightarrow x = (A+B)x^2 + (A-B+C)x + A-C$  rezultă  $A+B=0,$

$A-B+C=1, A-C=0$  și atunci  $A=C=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}$ . Obținem  $\int \frac{x}{x^3-1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{6} \int \frac{(x^2+x+1)' dx}{x^2+x+1} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dots$ . Rezultă că  $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}$ .

**Observație.** Pentru  $x < -1$  primitiva are aceeași expresie (de ce?).

$$\begin{aligned} \text{d) Avem } x^2 + 4x + 5 &= (x+2)^2 + 1. \text{ Notând } x+2 = t \text{ obținem } \int \frac{t-1}{(t^2+1)^2} dt = \\ &= \int \frac{t dt}{(t^2+1)} - \int \frac{(1+t^2) - t^2}{(t^2+1)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+1)' dt}{(t^2+1)^2} - \int \frac{dt}{t^2+1} + \int t \left( -\frac{1}{2(t^2+1)} \right)' dt = \\ &= -\frac{1}{2(t^2+1)} - \arctg t - \frac{t}{2(t^2+1)} + \int \frac{dt}{2(t^2+1)} = -\frac{t+1}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2} \arctg t + \mathcal{C} \end{aligned}$$

$$\text{Atunci primitiva este } \int f(x) dx = -\frac{1}{2} \left( \frac{x+3}{x^2+4x+5} + \arctg(x+2) \right) + \mathcal{C}.$$



Să se determine următoarele integrale nedefinite:

1.  $\int \frac{x dx}{2x^2 + 3x + 1}, x > -\frac{1}{2};$
2.  $\int \frac{x dx}{2x^2 - 3x - 2}, x > 2;$
3.  $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx, x > 4;$
4.  $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx, x < -2;$
5.  $\int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x}, x > \frac{3}{2};$
6.  $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx, x > 1;$
7.  $\int \frac{32x dx}{(2x-1)(4x^2 - 16x + 15)}, x > \frac{5}{2};$
8.  $\int \frac{x dx}{x^4 - 3x^2 + 2}, x > \sqrt{2};$
9.  $\int \frac{(2x^2 - 5) dx}{x^4 - 5x^2 + 6}, x > \sqrt{3};$
10.  $\int \frac{3x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^4 - x^2} dx, x > 1;$
11.  $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx, x > 2;$
12.  $\int \frac{1}{x} \cdot \left( \frac{x+2}{x-1} \right)^2 dx, x > 1;$
13.  $\int \frac{(x^3 + 1) dx}{x^3 - x^2}, x > 1;$
14.  $\int \frac{x^2 - 3x + 3}{(x-2)^3} dx, x > 2;$
15.  $\int \frac{dx}{x^4 - x^2}, x > 1;$
16.  $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2 (x+4)^2}, x > -2;$
17.  $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3 (x-5)} dx, x > 5;$
18.  $\int \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^4 dx, x > 0;$
19.  $\int \frac{x^5 dx}{(x-1)^2 (x^2 - 1)}, x > 1;$
20.  $\int \frac{(x^2 - 2x + 3) dx}{(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x)}, x > 3;$

$$21. \int \frac{7x^3 - 9}{x^4 - 5x^3 + 6x^2} dx, x > 3;$$

$$23. \int \frac{x dx}{x^3 - 1}, x > 1;$$

$$25. \int \frac{(x^4 + 1) dx}{x^3 - x^2 + x - 1}, x > 1;$$

$$27. \int \frac{dx}{x^4 + x^3 + x^2 + x}, x > 0;$$

$$29. \int \frac{(x^5 + 2x^3 + 4x + 4)}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx, x > 0;$$

$$31. \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx, x \in \mathbb{R};$$

$$33. \int \frac{(3x + 5) dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}, x \in \mathbb{R};$$

$$35. \int \frac{(x^3 + 1) dx}{(x^2 - 4x + 5)^2}, x \in \mathbb{R};$$

$$37. \int \frac{dx}{(x^4 - 1)^2}, x \in \mathbb{R};$$

$$39. \int \frac{3x^3 + 10x^2 - 2x}{(x^2 - 1)^2} dx, x > 1;$$

$$41. \int \frac{1}{x^4 + x^2 + x} dx, x \in \mathbb{R};$$

$$43. \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx, x \in \mathbb{R};$$

$$45. \int \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} dx, x \in \mathbb{R};$$

$$22. \int \frac{dx}{x^3 + x^2}, x > 0;$$

$$24. \int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} dx, x > 1;$$

$$26. \int \frac{x^2 dx}{x^4 - 1}, x > 1;$$

$$28. \int \frac{dx}{(x + 1)^2(x^2 + 1)}, x > -1;$$

$$30. \int \frac{(x^3 - 6) dx}{x^4 + 6x^2 + 8}, x \in \mathbb{R};$$

$$32. \int \frac{(5x^2 - 12) dx}{(x^2 - 6x + 13)^2}, x \in \mathbb{R};$$

$$34. \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R};$$

$$36. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 4}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx, x \in \mathbb{R};$$

$$38. \int \frac{x dx}{(1 + x^2)(1 + x)^2}, x > -1;$$

$$40. \int \frac{(x^2 - 4) dx}{x^4 - 2x^2 + 1}, x > 1;$$

$$42. \int \frac{1}{x^4 - x^2 + 1} dx; x \in \mathbb{R};$$

$$44. \int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx, x \in \mathbb{R};$$

$$46. \int \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx, x \in \mathbb{R}.$$

## \*I.11. Integrarea funcțiilor trigonometrice

1. Integrale de forma  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ .

a) Dacă  $m = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , luăm  $\cos x = t$  și obținem integrala unei funcții polinomiale.

Avem  $\sin^{2k+1} x \cos^n x = -(1 - \cos^2 x)^k \cos^n(x)(\cos x)'$ .

Obținem integrala  $\int (1 - t^2)^k t^n (-dt) = -\int t^n (1 - t^2)^k dt$ .

b) Dacă  $n = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , luăm  $\sin x = t$ . Obținem integrala  $\int t^m (1 - t^2)^k dt$ .

c) Dacă  $m = 2k$ ,  $n = 2p$ ,  $k, p \in \mathbb{N}$ , se trece la arce duble cu ajutorul formulelor  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ ,  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ ,  $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ . Se ajunge la o integrală de forma a) sau b).

**Exercițiul rezolvat. 1.** Să se determine primitivele funcțiilor:

a)  $f(x) = \sin^2 x \cos^3 x$ ;      b)  $f(x) = \sin^3 x \cos^4 x$ ;      c)  $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$ .

*Soluții.* a)  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (\sin^2 x - \sin^4 x)(\sin x)' dx =$   
 $= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + \mathcal{C}.$

b)  $\int \sin^3 x \cos^4 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \sin x dx = -\int (\cos^4 x - \cos^6 x)(\cos x)' dx =$   
 $= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + \mathcal{C}.$

c)  $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \left( \frac{\sin 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx =$   
 $= \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + \mathcal{C}.$

**Exercițiul rezolvat. 2.** Să se determine primitivele funcțiilor:

a)  $f(x) = \sin^8 x \cos^3 x$ ;      b)  $f(x) = \sin^7 x \cos^4 x$ ;      c)  $f(x) = \sin^2 x \cos^4 x$ .

*Soluții.* a)  $\int \sin^8 x \cos^3 x dx = \int \sin^8 x (1 - \sin^2 x)(\sin x)' dx = \int (\sin^8 x - \sin^{10} x)(\sin x)' dx =$   
 $= \frac{1}{9} \sin^9 x - \frac{1}{11} \sin^{11} x + \mathcal{C}.$

b)  $\int \sin^7 x \cos^4 x dx = -\int (1 - \cos^2 x)^3 \cos^4 x (\cos x)' dx =$   
 $= \int (\cos^{10} x - 3\cos^8 x + 3\cos^6 x - \cos^4 x)(\cos x)' dx = \frac{1}{11} \cos^{11} x - \frac{1}{3} \cos^9 x + \frac{3}{7} \cos^7 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + \mathcal{C}.$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \sin^2 x \cos^4 x &= (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x = \frac{1}{2} \sin^2 2x (1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \sin^2 2x - \frac{1}{2} \sin^2 2x \cdot \cos 2x = \\
 &= \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) - \frac{1}{2} \sin^2 2x \cos 2x. \text{ Rezultă că } \int f(x) dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{16} \sin 4x - \frac{1}{4} \int (\sin^2 2x)(\sin 2x)' dx = \\
 &= \frac{x}{4} - \frac{1}{16} \sin 4x - \frac{1}{12} \sin^3 2x + \mathcal{C}.
 \end{aligned}$$

2. Integrale de forma  $\int F(\sin x, \cos x) dx$ , unde  $F$  este funcție rațională în variabilele  $\sin x$  și  $\cos x$ .

a) Prin schimbarea de variabilă  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  se deduce  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$  și se obține integrala unei funcții raționale în  $t$ .

b) Dacă  $F(-\sin x, -\cos x) = F(\sin x, \cos x)$ , se efectuează schimbarea de variabilă  $\operatorname{tg} x = t$ . Atunci avem  $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ ,  $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ ,  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ .

c) Dacă  $F(-\sin x, \cos x) = -F(\sin x, \cos x)$ , se efectuează schimbarea de variabilă  $\cos x = t$ . Obținem  $\sin^2 x = 1 - t^2$ ,  $dt = -\sin x dx$ .

**Exercițiul rezolvat.** Să se determine primitivele funcțiilor:

a)  $f(x) = \frac{1}{1 + \sin x + \cos x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

b)  $f(x) = \frac{1}{2 \sin^2 x + \cos^2 x}, x \in \mathbb{R};$

c)  $f(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{tg}^2 x + \sin^2 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

d)  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x + 2 \cos^2 x}, x \in \mathbb{R}.$

*Soluții.* a) Facem schimbarea  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + \mathcal{C}$

și deci  $\int f(x) dx = \ln\left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + \mathcal{C}.$

b) Facem schimbarea  $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow \int \frac{1}{\frac{2t^2}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{2t^2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}) + \mathcal{C}$

și deci  $\int f(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + \mathcal{C}.$

$$\text{c) } t = \sin x \Rightarrow \int \frac{dt}{\frac{t^2}{1-t^2} + t^2} = \int \frac{(1-t^2) dt}{t^2(2-t^2)} = \frac{1}{2} \cdot \left( \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t^2-2} \right) = -\frac{1}{2t} + \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t} + \mathcal{C}$$

$$\text{și deci } \int f(x) dx = \frac{-1}{2 \sin x} + \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{\sqrt{2} - \sin x}{\sqrt{2} + \sin x} + \mathcal{C}.$$

$$\text{d) } \text{Avem } f(x) = \frac{\sin x}{1 + (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x} = \frac{(-\cos x)'}{2 + \cos^2 x}. \text{ Notăm } \cos x = t \text{ și}$$

$$\text{obținem } \int \frac{-dt}{2+t^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + \mathcal{C}. \text{ Deci } \int f(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\cos x}{\sqrt{2}} \right) + \mathcal{C}.$$

3. Integrale de forma  $\int \sin mx \cos nx dx$ ,  $\int \sin mx \sin nx dx$ ,  $\int \cos mx \cos nx dx$ .

Se utilizează formulele: **a)**  $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$ ;

**b)**  $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$ ;

**c)**  $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$ .

### Exercițiul rezolvat

$$\text{a) } \int \sin 6x \cos 8x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 14x - \sin 2x) dx = -\frac{1}{28} \cos 14x + \frac{1}{4} \cos 2x + \mathcal{C};$$

$$\text{b) } \int \sin 9x \sin 6x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 3x - \cos 15x) dx = \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{30} \sin 15x + \mathcal{C};$$

$$\text{c) } \int \cos 4x \cos 6x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 10x + \cos 2x) dx = \frac{1}{20} \sin 10x + \sin 2x + \mathcal{C}.$$



Să se calculeze integralele nedefinite:

1.  $\int \sin 3x \cos 5x dx, x \in \mathbb{R};$       2.  $\int \sin 10x \sin 15x dx, x \in \mathbb{R};$

3.  $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx, x \in \mathbb{R};$

4.  $\int \sin^2 x \cos^4 x dx, x \in \mathbb{R};$

5.  $\int \sin^3 x \cos^2 x dx, x \in \mathbb{R};$

6.  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx, x \in (0, \pi);$

7.  $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx, x \in (0, \pi);$
8.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$
9.  $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$
10.  $\int \frac{dx}{3+5 \cos x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$
11.  $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx, x \in (0, \pi);$
12.  $\int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$
13.  $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right);$
14.  $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$
15.  $\int \frac{\sin 2x dx}{1+\sin^2 x}, x \in \mathbb{R};$
16.  $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx, x \in \mathbb{R};$
17.  $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6 \sin x + 5} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$
18.  $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}, x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right);$
19.  $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$
20.  $\int \frac{\cos x}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$
21.  $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin x + \sin 3x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right);$
22.  $\int \frac{\cos^4 x dx}{1+\cos^2 x}, x \in \mathbb{R}.$

Să se determine câte un interval pe care se pot calcula primitivele următoarelor funcții și să se determine aceste primitive:

23.  $f(x) = \cos^3 x$
24.  $f(x) = \operatorname{tg}^4 x$
25.  $f(x) = \sin^4 x$
26.  $f(x) = \frac{1}{1+\sin x}.$
27.  $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$
28.  $f(x) = \frac{\cos 2x}{1+\sin x \cos x}$
29.  $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x$
30.  $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^4 x$
31.  $f(x) = \operatorname{ctg}^3 x$
32.  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$
33.  $f(x) = \frac{1}{\sin x}.$
34.  $f(x) = \frac{1-\sin x}{\cos x}$
35.  $f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}$
36.  $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}$
37.  $f(x) = \frac{1}{\cos x - \sin x}$
38.  $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}$
39.  $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$
40.  $f(x) = \frac{1}{\cos x + 2 \sin x + 3}$

## PROBE DE EVALUARE

Pentru testele următoare, timpul efectiv de lucru este de 50 minute.

### TESTUL 1

1. Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât următoarea funcție să admită primitive pe  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x \leq 0 \\ ax + b, & x > 0 \end{cases} \quad (1,5 \text{ p})$$

2. Să se demonstreze că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ , nu admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

(1,5 p)

3. Să se determine primitivele funcțiilor:

a)  $f(x) = \ln^2 x, x > 0$  (1,5 p)

b)  $f(x) = e^x \sin 2x, x \in \mathbb{R}$  (1,5 p)

c)  $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  (1,5 p)

d)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}, x \in \mathbb{R}$ . (1,5 p)

### TESTUL 2

1. Să se determine primitivele funcțiilor:

a)  $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$  (1,5 p)

b)  $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  (1,5 p)

c)  $f(x) = x \arctg x, x \in \mathbb{R}$  (1,5 p)

2. Să se demonstreze că următoarele funcții admit primitive pe  $\mathbb{R}$  și să se determine o primitivă a lor:

a)  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1}, & x \geq 1 \\ 3x^2 - 2x, & x \leq 1 \end{cases}$  (1,5 p)

b)  $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x \geq 1 \\ x^2 - x, & x < 1 \end{cases}$  (1,5 p)

3. Fie  $I_n = \int \ln^n x dx, x > 0, n \in \mathbb{N}^*$ . Să se arate că  $I_n = x \ln^n x - n I_{n-1}$ . (1,5 p)

### TESTUL 3

1. Să se demonstreze că următoarele funcții admit primitive pe  $\mathbb{R}$  și să se determine o primitivă a lor:

a)  $f(x) = \begin{cases} (x-1)e^x, & x \leq 1 \\ x^2 \ln x, & x > 1 \end{cases}$  (1,5 p)

b)  $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1), & x > 0 \\ xe^x, & x \leq 0 \end{cases}$  (1,5 p)

2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = [2x - 1]$ .

a) Să se demonstreze că  $f$  nu admite primitive pe  $\mathbb{R}$  (1,5 p)

b) Demonstrați că există o infinitate de intervale pe care  $f$  admite primitive.

(1 p)

c) Determinați lungimea maximă a acestor intervale.

(1 p)

3. Fie  $I_n = \int \frac{x^n}{2x+1} dx$ ,  $x > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Să se arate că  $2I_n + I_{n-1} = \frac{x^n}{n} + \mathcal{C}$ . (1 p)

b) Să se determine  $I_1, I_2, I_3$ . (1,5 p)

### TESTUL 4

1. Să se determine primitivele:

a)  $\int \sin^3 x dx$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (1,5 p)

b)  $\int \frac{3x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$ ,  $x > 3$  (1,5 p)

c)  $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 3} dx$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (1,5 p)

2. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left\{ \frac{2x+1}{2} \right\}$ , unde  $\{a\}$  înseamnă partea fracționară a lui  $a$ .

a) Să se demonstreze că  $f$  nu admite primitive pe  $\mathbb{R}$ . (1,5 p)

b) Demonstrați că există o infinitate de intervale pe care  $f$  admite primitive.

(1,5 p)

3. Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f$  să admită primitive pe  $[0, \pi]$ , unde

$$f(x) = \begin{cases} a + \sin x, & x \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \\ b - \cos x, & x \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right] \end{cases}. \quad (1,5 p)$$

## TESTUL 5

1. Să se determine primitivile:

a)  $\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x) dx, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  (1,5 p)

b)  $\int \frac{4}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} dx, x > 1$  (1,5 p)

c)  $\int \frac{1}{x(x^2 + 4)} dx, x < 0$  (1,5 p)

2. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x^2 + 4}, & x \leq 0 \\ \sin x + b, & x > 0 \end{cases}$ . Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f$

să admită primitive pe  $\mathbb{R}$  și să se determine o primitivă. (1,5 p)

3. a) Să se determine funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} \max(x, x^2, x^3), & x \leq 0 \\ \min(x, x^2, x^3), & x > 0 \end{cases} \quad (1,5 \text{ p})$$

b) Să se determine o primitivă a funcției  $f$ . (1,5 p)

## TESTUL 6

1. Să se determine primitivile:

a)  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  (1,5 p)

b)  $\int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx, x \in \mathbb{R}$  (1,5 p)

c)  $\int \frac{x^4 + x + 1}{x^3 + 1} dx, x > -1$  (1,5 p)

2. Fie  $I_n = \int \frac{x^n}{x^2 + x + 1} dx, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Să se arate că  $I_{n+2} + I_{n+1} + I_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}$ . (1,5 p)

b) Să se determine  $I_1, I_2, I_3$ . (3 p)

## TESTUL 7

1. Să se determine primitivele:

a)  $\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx, x \in \mathbb{R}$  (1,5 p)

b)  $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx, x \in \mathbb{R}$  (1,5 p)

c)  $\int \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx, x \in \mathbb{R}$ . (1,5 p)

2. Să se determine intervalele pe care funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  admite primitive, unde

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (1,5 \text{ p})$$

3. Fie funcțiile  $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $f(x) = (x - 1)e^x$  și  $F(x) = (x - 2)e^x + e$ .

a) Să se demonstreze că  $F$  este o primitivă a lui  $f$ . (1 p)

b) Să se determine  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{(x - 1)^2}$ . (1 p)

c) Să se determine  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{xe^x}$ . (1 p)

## TESTUL 8

1. Fie funcțiile  $f, F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $f(x) = \left(\frac{1}{x+1} - \ln(x+1)\right) \cdot \frac{1}{x^2}$  și

$$F(x) = \frac{1}{x}[a + 2x + b \ln(x+1)]. \quad (1,5 \text{ p})$$

Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  știind că  $F$  este o primitivă a lui  $f$ .

2. Să se determine următoarele primitive:

a)  $\int \frac{1}{x(1 + \ln^n x)} dx, x > 0$  (1,5 p)

b)  $\int \frac{\cos 2x}{1 + \sin x \cos x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$  (1,5 p)

c)  $\int x^2 \sqrt{1 - x^2} dx, x \in (-1, 1)$ . (1,5 p)

3. Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} ax + 2, & x < 1 \\ 2 \ln x + b, & x \geq 1 \end{cases}$

să admită o primitivă pe  $\mathbb{R}$  și să se determine o primitivă a sa. (1,5 p)

4. Fie funcțiile  $f, F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \ln^2 x$ ,  $F(x) = x^2(a \ln^2 x + b \ln x + c)$ ,

$a, b, c \in \mathbb{R}$ . Să se determine  $a, b, c$  știind că  $F$  este o primitivă a lui  $f$ . (2 p)

# CAPITOLUL II

## INTEGRALA DEFINITĂ

### II.1. Probleme care conduc la noțiunea de integrală definită

Geometria elementară arată cum se pot determina ariile pentru figuri geometrice plane mărginite de segmente de dreaptă și arce de cerc. Problema geometrică generală a calculului ariei unei figuri plane mărginită de curbe arbitrare poate fi rezolvată numai cu ajutorul analizei matematice (a calculului integral). În matematică sunt cunoscute diferite moduri de a defini integrala, denumite după numele matematicianului care a studiat-o: *integrala Riemann* (Bernhard 1826-1866), *integrala Darboux* (Gaston 1842-1917), *Lebesgue* (Henri 1875-1941).

Metoda de definire a integralei constă în găsirea unui procedeu prin care putem asocia unei funcții  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , un anumit număr  $A(f)$ . Fie o funcție pozitivă  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ . Împărțim segmentul  $[a, b]$  în  $n$  părți prin punctele  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ . Notăm  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ . Dreptele paralele  $x = x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  formează „trapeze curbilinii” (figura 1). Pe trapezele curbilinii cu vârfurile

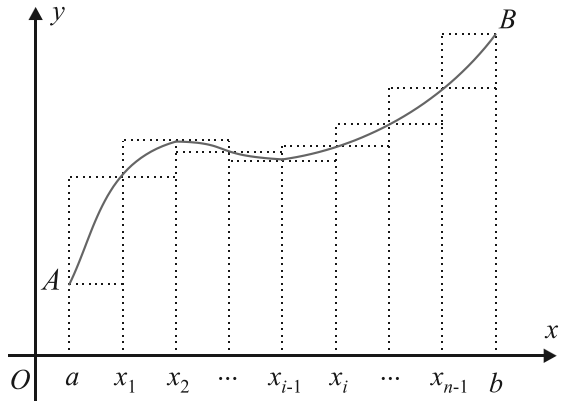


Fig. 1

$x_{i-1}$ ,  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  construim două dreptunghiuri cu aceeași bază  $x_{i-1}x_i$  și cu înălțimile

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x). \text{ Atunci } a_n = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i = b_n.$$

Cele două sume reprezintă șiruri de numere reale pozitive. În cazul în care aceste șiruri au aceeași limită finită pentru orice puncte  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$  din  $[a, b]$ , se va nota cu  $A(f)$  limita lor, iar  $A(f)$  va reprezenta integrala definită a funcției  $f$  pe intervalul  $[a, b]$ . Ea va fi notată cu  $\int_a^b f(x) dx$ .



Fie funcția  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Împărțim

segmentul  $[0, 1]$  în  $n$  părți egale prin punctele

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}. \text{ Avem atunci } m_i = \frac{(i-1)^2}{n^2}, M_i = \frac{i^2}{n^2}, i = \overline{1, n}.$$

Cele două sume sunt 
$$\frac{1}{n} \left( \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \right) =$$

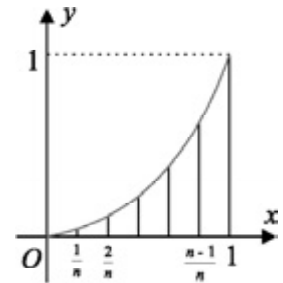


Fig. 2

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \left( \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \right) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}, \text{ respectiv}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \text{ și limita lor comună pentru } n \rightarrow \infty \text{ este } \frac{1}{3}.$$

$$\text{Deci } \int_a^b f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

**Observație.** O primitivă a funcției  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  este  $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , iar  $F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$ .



Fie funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

Graficul acestei funcții este redat în figura 3. Notăm cu  $\mathcal{A}(x)$  aria suprafeței mărginită de  $Ox$ , curba dată și dreptele paralele cu  $Oy$  ce trec prin punctele  $A(1, 1)$  și  $M\left(x, \frac{1}{x}\right)$ ,  $x > 1$ .

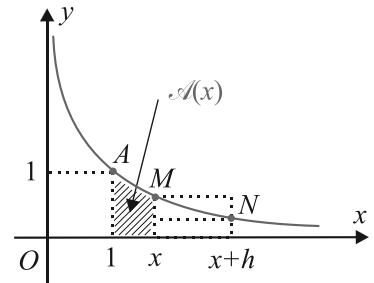


Fig. 3

Dacă  $h > 0$  (vezi figura 3) avem  $h \cdot f(x+h) < \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) < h \cdot f(x)$  și deci  $f(x+h) < \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} < f(x)$  (1).

Dacă  $h < 0$  (vezi figura 4) avem

$$-hf(x) < \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x+h) < -hf(x+h) \text{ și,}$$

ca în cazul de mai sus,

$$f(x+h) < \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} < f(x) \quad (2).$$

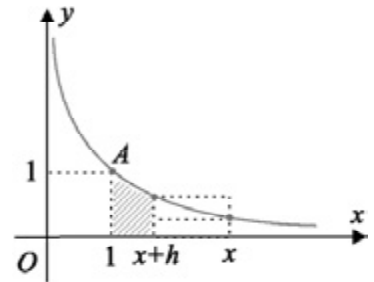


Fig. 4

Deoarece  $f(x) = \frac{1}{x}$  este funcție continuă pe  $(0, \infty)$  rezultă că  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$  și din (1) și (2) rezultă că  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = f(x) = \frac{1}{x}$ . Deci  $\mathcal{A}$  este o funcție ce admite pe  $f$  ca derivată pe  $[1, \infty)$  și în plus  $\mathcal{A}(1) = 0$ . Deci  $\mathcal{A}$  este o primitivă a lui  $f$  pe  $[1, \infty)$  astfel încât  $\mathcal{A}(1) = 0$  și atunci  $\mathcal{A}(x) = \ln x$ .

**Observație.** Dacă  $0 < x < 1$ , luând  $\mathcal{A}(x)$  aria suprafeței mărginită de  $Ox$ , curba  $f(x) = \frac{1}{x}$  și dreptele paralele cu  $Oy$  ce trec prin  $A(1,1)$  și  $M\left(x, \frac{1}{x}\right)$ , rezultă că  $\mathcal{A}(x)$  este un număr pozitiv, anume  $\mathcal{A}(x) = -\ln x = |\ln x|$ .



1. Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă pe  $[a, b]$ .

Fie  $F, G: [a, b]$  două primitive ale lui  $f$  pe  $[a, b]$ .

Notăm  $F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$ .

a) Să se demonstreze că  $F(x) \Big|_a^b = G(x) \Big|_a^b$ .

b) Să se demonstreze că  $\int_a^b f(x) dx$  nu depinde de alegerea primitivei  $F$  a lui  $f$  pe  $[a, b]$ .

c) Să se verifice rezultatul de la b) pentru funcțiile următoare:

$f_1: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x \ln x; \quad f_2: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x \sin x$ .

2. Să se aplice metoda prezentată anterior pentru calculul ariilor suprafețelor mărginite de  $Ox$ , graficul funcției  $f$  și dreptele de ecuații  $x = a, x = b$  în cazurile:

a)  $f(x) = 2x^2, a = 0, b = 1$ ;

b)  $f(x) = 3x^2 + 1, a = 0, b = 1$ ;

c)  $f(x) = 3x^2 + 2x + 1, a = 0, b = 1$ .

3. Folosind definiția pentru  $\int_a^b f(x) dx$  dată la exercițiul 1, să se demonstreze că:

a)  $\int_a^a f(x) dx = 0$ ;

b)  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ ;

c) dacă  $F$  este o primitivă a lui  $f$ , atunci  $\int_a^t f(t) dx$  este o primitivă a lui  $f$  ce se anulează în  $t = a$ .

4. Fie funcția  $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2, a > 0$ . Folosind metoda prezentată anterior și figura 5, să se demonstreze că aria  $S$  a figurii hașurate (segmentul parabolic  $AOB$ ) este

$$S = \frac{2}{3} \cdot A_{ABCD}.$$

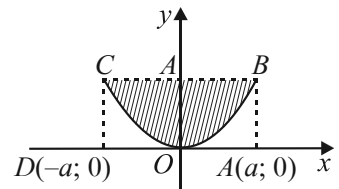


Fig. 5

## II.2. Definirea integralei definite a unei funcții continue

### Observații.

■ Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă pe intervalul  $[a, b]$  și  $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  două primitive ale lui  $f$  pe  $[a, b]$ . Notăm  $F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ . Deoarece  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , avem  $G(x) \Big|_a^b = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$ .

■ Numărul  $F(b) - F(a)$  este independent de alegerea primitivei  $F$  a lui  $f$  pe intervalul  $[a, b]$ .

**Definiție.** Fie  $f$  o funcție continuă pe intervalul  $I \subset \mathbb{R}$ . Fie  $F$  o primitivă a lui  $f$  pe  $I$  și fie  $a, b$  două elemente oarecare al lui  $I$ . Numărul  $F(b) - F(a)$ , notat  $\int_a^b f(x) dx$ , se numește *integrala definită a lui  $f$  pe  $[a, b]$* .

EXEMPLU



Pentru orice  $x > 1$  avem  $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_1^x = \ln x$ .

**Observații.** ■  $\int_1^x \frac{dy}{y} = \ln y \Big|_1^x = \ln x$  arată că variabila  $t$  nu intervine în „final” și că poate fi înlocuită cu orice literă cu excepția lui  $x$ .

■  $\int_a^a f(x) dx = F(x) \Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0$ .

■  $\int_b^a f(x) dx = F(x) \Big|_b^a = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x) dx$ .

■  $\int_a^t f(x) dx = F(x) \Big|_a^t$  este o primitivă a lui  $f$  ce se anulează în  $t = a$ .

**Teoremă.** Fie funcțiile  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue pe  $[a, b]$  și fie  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Atunci avem:

a)  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ ;

b)  $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$ .

*Demonstrație.* Fie  $F$  și  $G$  două primitive ale lui  $f$ , respectiv  $g$ . Atunci  $F + G$  este o primitivă a lui  $f + g$  și avem  $\int_a^b (f + g)(x) dx = [F(x) + G(x)] \Big|_a^b = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ .

Pentru  $\alpha = 0$  avem  $\int_a^b \alpha f(x) dx = \int_a^b 0 dx = c \Big|_a^b = c - c = 0 = \alpha \int_a^b f(x) dx$ .

Pentru  $\alpha \neq 0$  funcția  $\alpha F$  este o primitivă a lui  $\alpha f$  și

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha F(x) \Big|_a^b = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha (F(b) - F(a)) = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

**Observații.** ■ Dacă  $F$  este primitiva funcției continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , formula  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  se numește *formula lui Leibniz–Newton*.

■ Există funcții integrabile care nu sunt funcții continue.

Definirea integralei definite (pentru aceste cazuri) depășește cadrul manualului.

■ Există funcții integrabile care nu admit primitive. Există funcții care admit primitive și nu sunt integrabile.

**Exercițiu rezolvat.** Să se determine:

a)  $\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x + 2) dx$ ;                      b)  $\int_1^e 3 \cdot \frac{\ln x + 2}{x} dx$ .

*Soluții.* a)  $\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x + 2) dx = (x^3 - x^2 + 2x) \Big|_{-1}^2 = 2^3 - 2^2 + 2 \cdot 2 - [(-1)^3 - (-1)^2 + 2 \cdot (-1)] = 12$ .

b)  $\int_1^e 3 \cdot \frac{\ln x + 2}{x} dx = 3 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx + 6 \int_1^e \frac{1}{x} dx = \frac{3}{2} \ln^2 x \Big|_1^e + 6 \ln x \Big|_1^e = \frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}$ .



Să se determine următoarele integrale definite  $\int_a^b f(x) dx$  determinând inițial o primitivă  $F$  a lui  $f$ :

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1. $\int_1^e x \ln x dx$  | 2. $\int_1^e \ln^2 x dx$  | 3. $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx$                            |
| 4. $\int_0^1 (x^2 + 2x) e^{3x} dx$  | 5. $\int_0^\pi x \sin x dx$   | 6. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ |
| 7. $\int_0^\pi e^x \sin x dx$   | 8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$                             | 9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$              |
| 10. $\int_0^1 x \arctg x dx$  | 11. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x dx$            | 12. $\int_0^1 x e^{-x} dx$                             |
| 13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$                                    | 14. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$      | 15. $\int_1^{\sqrt{e}} \sqrt{x} \ln x dx$              |
| 16. $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$  | 17. $\int_e^{\frac{\pi}{2}} x e^x \sin x dx$                          | 18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x e^x \cos x dx$           |
| 19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$                           | 20. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$ | 21. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tg^3 x + \tg x) dx$      |
| 22. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx$ | 23. $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$                                   | 24. $\int_0^1 \frac{e^{\tg x}}{\cos^2 x} dx$           |

25.  $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx.$

26.  $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x-1} dx$

27.  $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$

28.  $\int_{-1}^1 \frac{x-2}{x^2-4x+5} dx$

29.  $\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1} dx$

30.  $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)} dx$

Să se determine următoarele integrale definite:

31.  $\int_1^2 \left(4x^3 - 3x^2 + \frac{2}{x}\right) dx;$

32.  $\int_1^e \left(x^5 - 4x^3 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx;$

33.  $\int_0^1 (3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x}) dx;$

34.  $\int_0^1 (3e^{3x} - 4e^{-2x}) dx;$

35.  $\int_4^5 \left(\frac{6}{x^2-9} - \frac{3}{\sqrt{x^2-9}}\right) dx;$

36.  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{\sin^2 x} - 2 \operatorname{tg} x\right) dx;$

37.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}} - \frac{2}{16x^2-25}\right) dx;$

38.  $\int_{\frac{\pi}{20}}^{\frac{\pi}{12}} \left(\frac{8}{\cos^2 4x} - \frac{6}{\sin^2 2x}\right) dx;$

39.  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx;$

40.  $\int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{10}} \frac{\sqrt{x^2-4}-2}{x^2-4} dx;$

41.  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - x) dx;$

42.  $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} dx;$

43.  $\int_0^1 \sqrt{1+t} dt;$

44.  $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y+1}} dy;$

45.  $\int_0^{16} \frac{dt}{\sqrt{t+9} - \sqrt{t}};$

46.  $\int_0^1 \frac{y dy}{(y^2+1)^2};$

47.  $\int_1^2 \frac{e^x}{x^2} dx;$

48.  $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2};$

49.  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+4x+5};$

50.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx.$

## II.3. Proprietăți ale integralei definite

În clasa a XI-a au fost prezentate rezultate privind legătura între semnul primei derivate a unei funcții derivabile și monotonia funcției, între semnul derivatei a doua și concavitățile sau convexitățile funcției, precum și teorema de medie. În acest paragraf vor fi prezentate câteva rezultate legate de semnul unei funcții continue și semnul integralei definite și se va da teorema de medie pentru funcții continue.

**Teoremă.** Fie funcția continuă  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ . Atunci  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

*Demonstrație.* Fie  $F$  primitiva lui  $f$  ce se anulează în  $a$ . Pentru orice  $x \in [a, b]$  avem  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ,  $F'(x) = f(x) \geq 0$ . Deci  $F$  este crescătoare pe  $[a, b]$  și deci  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \geq 0$  deoarece  $a \leq b$ .

**Consecințe.** Fie  $f, g$  funcții continue pe  $[a, b]$ . Atunci avem:

**a)**  $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ ;    **b)**  $f \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq 0$ .

*Demonstrație.* **a)**  $g - f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

**b)**  $f \leq 0 \Rightarrow -f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (-f(x)) dx \geq 0 \Rightarrow -\int_a^b f(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq 0$ .

**Observații.** ■ Dacă  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$  nu rezultă că  $f \geq 0$ .



Fie  $f(x) = 3x^2 - 2x$ . Avem  $\int_0^2 f(x) dx = (x^3 - x^2) \Big|_0^2 = 4 > 0$  și  $f(x) \leq 0$  pentru orice  $x \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \subset [0, 2]$ .

■ Putem compara integralele definite a două funcții definite pe același interval  $[a, b]$  fără a le calcula efectiv.



Să se demonstreze că  $\int_1^2 x dx < \int_1^2 (e^x - 1) dx < \int_1^2 xe^x dx$ .

Fie  $f(x) = x$ ,  $g(x) = e^x - 1$ ,  $h(x) = xe^x$ . Avem  $f'(x) = 1$ ,  $g'(x) = e^x$ ,  $h'(x) = e^x + xe^x$ . Deoarece  $1 < e^x < e^x + xe^x$  pentru orice  $x > 0$  (și deci și pentru  $x \in [1, 2]$ ) rezultă că  $f(x) < g(x) < h(x)$  și atunci  $\int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 g(x) dx < \int_1^2 h(x) dx$ .

Se știe că funcția continuă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este mărginită și își atinge marginile, adică există  $\alpha, \beta \in [a, b]$  astfel încât  $f(\alpha) = m \leq f(x) \leq M = f(\beta)$  pentru orice  $x \in [a, b]$ .

**Teoremă.** Fie funcția continuă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  și fie  $m$  și  $M$  marginile lui  $f$  pe  $[a, b]$ .

Atunci avem  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

*Demonstrație.*  $m \leq f(x) \leq M$  pentru orice  $x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \Rightarrow$   
 $\Rightarrow mx \Big|_a^b \leq \int_a^b f(x) dx \leq Mx \Big|_a^b \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

**Observație.** Numărul  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  se numește *valoarea medie a lui  $f$  pe  $[a, b]$* .

**Teorema de medie (Cauchy-1821).** Fie funcția continuă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Atunci există

$c \in [a, b]$  astfel încât  $\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f(c)$ .

*Demonstrație.*  $f$  fiind continuă, rezultă că  $f$  este mărginită și atinge marginile  $m$  și  $M$ .

Am demonstrat că  $m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx \leq M$ . Deoarece  $f$  este continuă pe  $[a, b]$ , atunci  $f$  are proprietatea Darboux și deci există  $c \in [a, b]$  astfel încât  $f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$ .

**Exercițiul rezolvat 1.** Să se calculeze  $\lim_{x \searrow 0} \int_1^{1+x} \ln t dt$ .

*Soluție.* Conform teoremei de medie există  $c \in [1, 1+x]$  astfel încât  $\int_1^{1+x} \ln t dt = x \ln c$  și deci  $\lim_{x \searrow 0} \int_1^{1+x} \ln t dt = \lim_{x \searrow 0} x \ln c = 0$ .

**Exercițiul rezolvat 2.** Fie funcția continuă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  având proprietatea  $3 \int_0^1 f(x) dx = 1$ . Să se demonstreze că există  $x_0 \in (0, 1)$  astfel încât  $f(x_0) = x_0^2$

*Soluție.*  $3 \int_0^1 f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - x^2) dx = 0$ .

Atunci există  $x_0 \in (0, 1)$  astfel încât  $(f(x_0) - x_0^2)(1-0) = 0$  și deci  $f(x_0) = x_0^2$ .

**Teoremă.** Fie  $f$  o funcție continuă pe intervalul  $I$ . Pentru orice  $a, b, c \in I$  avem

$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

*Demonstrație.* Fie  $F$  o primitivă a lui  $f$  pe  $I$ . Avem  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =$   
 $= F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_c^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

**Exercițiul rezolvat 3.** Să se determine  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ , unde  $f(x) = \min(x, x^2)$ .

*Soluție.* Funcția  $f$  este dată de  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 0] \\ x^2, & x \in (0, 1] \end{cases}$ . Deoarece  $f$  este continuă pe  $[-1, 1]$

rezultă că  $f$  este continuă și pe  $[-1, 0]$ ,  $[0, 1]$  pe care admite primitivele  $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$ ,  $x \in [-1, 0]$ ,

$$F_2(x) = \frac{x^3}{3}, x \in [0, 1]. \text{ Atunci } \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.$$

Fie  $f$  funcție continuă pe  $[a, b]$ . Ne propunem să calculăm  $\int_a^b f(x) dx$  efectuând schimbarea de variabilă liniară (afină)  $x = \alpha t + \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ . Dacă  $x = a$ , fie  $c = \frac{a-\beta}{\alpha}$ , iar dacă  $x = b$ , fie  $d = \frac{b-\beta}{\alpha}$ . Fie  $F$  o primitivă a lui  $f$  pe  $[a, b]$ .

Avem  $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(\alpha t + \beta) \Big|_c^d$ . Deoarece  $(F(\alpha t + \beta))' = \alpha F'(\alpha t + \beta) = \alpha f(\alpha t + \beta)$  rezultă că  $F(\alpha t + \beta) \Big|_c^d = \int_c^d \alpha f(\alpha t + \beta) dt$  și deci  $\int_a^b f(x) dx = \int_c^d \alpha f(\alpha t + \beta) dt$ .

Am demonstrat astfel următoarea teoremă:

**Teoremă.** Fie funcția continuă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  și fie funcția liniară  $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ ,  $g(t) = \alpha t + \beta$ . Atunci avem  $\int_a^b f(x) dx = \int_c^d \alpha f(\alpha t + \beta) dt$ , unde  $c = g^{-1}(a)$ ,  $d = g^{-1}(b)$ .

**Exercițiul rezolvat 4.** Fie  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  funcție continuă,  $a > 0$ .

a) Dacă  $f$  este funcție pară pe  $[-a, a]$ , atunci  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

b) Dacă  $f$  este funcție impară pe  $[-a, a]$ , atunci  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

*Soluție.* a)  $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$ . Punând  $x = -t$  avem  $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) = -\int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(x) dx$  și deci  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ . b)  $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t) dt = -\int_0^a f(t) dt = -\int_0^a f(x) dx$  deoarece  $f$  este impară și deci  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

EXEMPLU



$$1. \int_{-1}^1 (5x^4 - 3x^2 + 2) dx = 2 \int_0^1 (5x^4 - 3x^2 + 2) dx = 2(x^5 - x^3 + 2x) \Big|_0^1 = 4.$$

$$2. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^3 x \cos^4 x dx = 0 \text{ deoarece } f(x) = x^2 \sin^3 x \cos^4 x \text{ este funcție impară.}$$

**Exercițiul rezolvat 5.** Fie funcția  $f$  continuă pe  $\mathbb{R}$  și periodică cu perioada  $T > 0$ .

Atunci pentru orice  $a \in \mathbb{R}$  avem  $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$ .

*Soluție.*  $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx$ .

Luând  $x = t + T$  avem  $\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(t + T) dt = \int_0^a f(t) dt = -\int_a^0 f(t) dt = -\int_a^0 f(x) dx$  deoarece  $f(t + T) = f(t)$ . Rezultă că  $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$ .



Să se calculeze  $I = \int_a^{a+\frac{2\pi}{3}} \sin 6x \cos 15x dx$ .

Demonstrăm că funcția  $f(x) = \sin 6x \cos 15x$  este periodică și îi determinăm perioada principală. Funcțiile  $x \rightarrow \sin 6x$  și  $x \rightarrow \cos 15x$  au perioadele  $\frac{2k\pi}{6}$ , respectiv  $\frac{2n\pi}{15}$ ,  $k, n \in \mathbb{Z}^*$ . Din  $\frac{2k\pi}{6} = \frac{2n\pi}{15}$  rezultă  $5k = 2n$ . Cele mai mici numere naturale nenule care satisfac egalitatea  $5k = 2n$  sunt  $k = 2$  și  $n = 5$ . Perioada principală este deci  $T = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ . Avem  $\int_a^{a+T} f(x) dx = \text{constant}$ . Luând  $a = -\frac{\pi}{3}$  rezultă  $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 6x \cos 15x dx$ . Deoarece  $f$  este impară rezultă că  $I = 0$ .

**Exercițiul rezolvat 6.** Să se demonstreze că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  avem  $\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$ .

*Soluție.*  $(x+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \Rightarrow \int_0^1 (x+1)^n dx = \sum_{k=0}^n C_n^k \int_0^1 x^k dx \Rightarrow \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_0^1 \Rightarrow \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1}$ .

**Exercițiul rezolvat 7.** Să se demonstreze că:

a)  $\ln 2 \leq \int_0^1 \frac{2x dx}{1+x^n} < 1$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ;      b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{1+x^2} = 0$ .

*Soluții.* a)  $\frac{2x}{1+x^2} \leq \frac{2x}{1+x^n} < 2x$  pentru orice  $x \in (0,1)$  și orice  $n \geq 2$ . Rezultă

$\int_0^1 \frac{2x dx}{1+x^2} \leq \int_0^1 \frac{2x dx}{1+x^n} < \int_0^1 2x dx \Rightarrow \ln(1+x^2) \Big|_0^1 \leq \int_0^1 \frac{2x dx}{1+x^n} < x^2 \Big|_0^1 \Rightarrow \ln 2 \leq \int_0^1 \frac{2x dx}{1+x^n} < 1$ .

$$b) n \leq x \leq n+1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \Rightarrow 0 < \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 0.$$



1. Să se determine valoarea medie pentru următoarele integrale definite și, când este posibil, punctul corespunzător:

$$a) \int_0^1 x^2 dx; \quad b) \int_{-\pi}^{\pi} (a + b \cos x) dx; \quad c) \int_0^{\pi} \sin^2 x dx;$$

$$d) \int_0^{\pi} \sin^4 x dx; \quad e) \int_1^4 \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx; \quad f) \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x^2 + x} dx; \quad g) \int_0^2 \frac{dx}{e^x + 1}.$$

2. Să se demonstreze că:

$$a) 2 < \int_0^1 \sqrt{4+x^2} dx < \sqrt{5};$$

$$b) \frac{2}{9} < \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^2} < \frac{2}{7};$$

$$c) \int_1^2 e^{x^2} dx > e^2 - e;$$

$$d) \frac{2}{3} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} < \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$e) \frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} < \frac{\pi}{4\sqrt{2}};$$

$$f) \frac{1}{2} \leq \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \leq \frac{\pi}{6}, \forall n \in \mathbf{N}^*;$$

$$g) \frac{2\pi}{13} < \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} < \frac{2\pi}{7};$$

$$h) \frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{x} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Să se demonstreze că:

$$a) \int_1^2 \ln(1+x^2) dx < \frac{1}{2}; \quad b) \int_{e-1}^{e^2-1} \ln x dx > 2(e^2 - e - 2); \quad c) \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} x dx > \frac{7}{12};$$

$$d) \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \sin x dx > \frac{2095}{31104}; \quad e) \int_0^1 \ln(x+1) dx \geq 2 - 4 \ln \frac{3}{2}; \quad f) \int_2^3 \frac{\ln x}{x-1} dx \leq \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

$$g) \int_0^1 (1+x\sqrt{e^x}) dx < e-1;$$

$$h) \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \operatorname{tg} x) dx > \frac{\pi^2}{16};$$

$$i) \int_0^1 e^x dx \leq \int_0^1 (1+x)^{1+x} dx;$$

$$j) \frac{2}{e} \leq \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \leq 2.$$

4. Să se calculeze:

$$a) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^{10} \sin^7 x dx;$$

$$b) \int_{-1}^1 \frac{x^7 - 3x^5 - 2x^3 + x}{\cos^2 x} dx;$$

$$c) \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

5. a) Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuă. Să se demonstreze că  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$  ;

b) Fie  $f : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  continuă pe  $[a, b]$ . Știind că  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , să se demonstreze că  $a = b$ .

6. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuă pe  $\mathbb{R}$  cu proprietatea  $f(x) + f(-x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Să se arate că pentru orice  $a \in \mathbb{R}$  avem: a)  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ ; b)  $\int_0^{2a} f(x) dx = 2a^2$ .

7. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuă pe  $\mathbb{R}$  cu proprietatea  $f(1+x) + f(1-x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Să se arate că pentru orice  $a \in \mathbb{R}$  avem: a)  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ ; b)  $\int_0^{2a} f(x) dx = 2a^2$ .

8. Fie funcția continuă  $f : [a-b, a+b] \rightarrow \mathbb{R}, b > 0$ , având proprietatea

$\alpha f(a-x) + \beta f(a+x) = \gamma, \forall x \in [-b, b], \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ . Să se demonstreze că:

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x) dx = \frac{2\gamma b}{\alpha + \beta}, \text{ unde } \alpha + \beta \neq 0.$$

9. Fie funcțiile  $f$  și  $g$  continue pe  $\mathbb{R}$  și fie  $a, b \in \mathbb{R}$ . Să se arate că:

$$\text{a) } \int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot \int_0^1 f(a+(b-a)x) dx; \quad \text{b) } \int_a^b f(x)g(a-x) dx = \int_0^a g(x)f(a-x) dx.$$

10. a) Fie funcția  $f$  impară cu perioada  $T > 0$  și cu derivata continuă. Să se demonstreze

$$\text{că: } \int_0^{2T} \frac{xf'(x) dx}{1+f^2(x)} = 0.$$

b) Să se calculeze:  $I_1 = \int_0^{k\pi} \frac{x \sin x dx}{1+\cos^2 x}$ ;  $I_2 = \int_0^{k\pi} \frac{x \cos x dx}{1+\sin^2 x}$ , unde  $k \in \{1, 2\}$ .

$$11. \text{ Să se demonstreze că } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} C_n^k}{k}.$$

12. Să se demonstreze că  $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$ , pentru orice  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .

13. Fie  $0 < y < x$ . Să se demonstreze că  $\frac{x+y}{2} > \frac{x-y}{\ln x - \ln y}$ .

14. Fie funcția  $f$  continuă  $f : [a-b, a+b] \rightarrow \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}, b > 0$ , având proprietatea

$$f(a+x) = f(a-x), \forall x \in [-b, b]. \text{ Să se demonstreze că } \int_{a-b}^{a+b} f(x) dx = 2 \int_a^{a+b} f(x) dx.$$

15. a) Fie funcția continuă  $f : [a-b, a+b] \rightarrow \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}, b > 0$ , având proprietatea

$$f(a+x) = -f(a-x), \forall x \in [-b, b]. \text{ Să se demonstreze că } \int_{a-b}^{a+b} f(x) dx = 0.$$

b) Să se calculeze  $\int_0^2 \frac{(x-1) dx}{2x^2 - 4x + 3}$ ;  $\int_{-1}^1 \frac{(x-1) dx}{(x^2 - 2x + 2)^n}, n \in \mathbb{N}^*$ .

## II.4. Integralele definite pentru funcții raționale

Vom determina integrale definite de forma  $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ , unde  $P$  și  $Q$  sunt polinoame de grad cel mult 4 pentru care  $Q(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$ .

Avem  $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx = F(b) - F(a)$ , unde  $F$  este o primitivă a funcției  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, x \in [a, b]$ .

**Exerciții rezolvate.** Să se determine următoarele integrale definite:

$$1. \int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{\sqrt{3}-5}{2}} \frac{1}{x^2 + 5x + 7} dx$$

$$2. \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{7}-3}{4}} \frac{1}{2x^2 + 3x + 2} dx$$

$$3. \int_1^2 \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx$$

$$4. \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

$$5. \int_0^{1/2} \frac{2x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$$

$$6. \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$$

$$7. \int_4^5 \frac{5x^3 - 19x^2 + 12x + 6}{x(x-1)(x-2)(x-3)} dx$$

$$8. \int_2^3 \frac{x^5}{(x-1)^3(x+1)} dx$$

$$9. \int_2^3 \frac{1}{(x^2 - x)(x^2 + 2x + 3)} dx$$

$$10. \int_1^2 \frac{15x + 10}{(x^2 + 2x + 5)(x^2 + 2x + 10)} dx$$

*Soluții.* Pentru determinarea primitivelor  $F$  vom avea în vedere afirmațiile din capitolul I, paragrafele 8, 9, 10.

$$1. \text{ Avem } x^2 + 5x + 7 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2. \text{ Obținem: } \int \frac{1}{x^2 + 5x + 7} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx =$$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+5}{\sqrt{3}}\right)^2} dx. \text{ Luând } t = \frac{2x+5}{\sqrt{3}} \text{ obținem } \frac{4}{3} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{t^2 + 1} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg t + \mathcal{C} \text{ și deci}$$

$$\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{\sqrt{3}-5}{2}} \frac{1}{x^2 + 5x + 7} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+5}{\sqrt{3}} \Big|_{-\frac{5}{2}}^{\frac{\sqrt{3}-5}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\arctg 1 - \arctg 0) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

$$2. \text{ Avem } 2x^2 + 3x + 2 = 2 \left[ \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} \right]. \text{ Obținem } \int \frac{\frac{\sqrt{7}-2}{4}}{2x^2 + 3x + 2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{7}-3}{4}} \frac{1}{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} dx = \frac{8}{7} \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{7}-3}{4}} \frac{1}{\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctg \frac{4x+3}{\sqrt{7}} \Big|_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{7}-3}{4}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} (\arctg 1 - \arctg 0) = \frac{\pi}{2\sqrt{7}}.$$

3. Avem  $\frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ , de unde rezultă  $x^2 - 3x + 2 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$ . Identificând coeficienții obținem  $A = 2$ ,  $A + B = 1$ ,  $2A + B + C = -3$ , și deci  $A = 2$ ,  $B = -1$ ,  $C = -6$ . Rezultă că  $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx - 6 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx - \int \frac{1}{x+1} dx =$

$$= 2 \ln|x| + \frac{6}{x+1} - \ln|x+1| + \mathcal{C} = \ln \left| \frac{x^2}{x+1} \right| + \frac{6}{x+1} + \mathcal{C}. \text{ Deci } \int_1^2 \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \ln \frac{8}{3} - 1.$$

4. Avem  $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$ .

Obținem  $\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}$ . Prin identificarea coeficienților obținem

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}, C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, B = D = \frac{1}{2} \text{ și deci } \int \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx - \int \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left( \int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx + \int \frac{\sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx - \int \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} dx + \int \frac{\sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} [\ln(x^2 + x\sqrt{2} + 1) - \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1)] + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \arctg \frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \arctg \frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) + \mathcal{C}.$$

Notând  $\alpha = \arctg \frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \arctg \frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$  și aplicând formula  $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y}$ ,

rezultă  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}$ .

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \right|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln 5 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg 2.$$

5. Avem  $\frac{2x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = 2x + 1 + \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = 2x + 1 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ .

Eliminând numitorul rezultă  $x = (A + B)x^2 + (2A + C)x + A - B - C$ . Obținem  $A + B = 0$ ,

$2A + C = 1$ ,  $A - B - C = 0$  și deci  $A = \frac{1}{4}$ ,  $B = -\frac{1}{4}$ ,  $C = \frac{1}{2}$ .

Integrala devine  $I = \left[ x^2 + x + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{1}{2(x+1)} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{17}{12} + \frac{1}{4} \ln 3$ .

6. Avem  $\frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2} = \frac{x^3}{(x^2 + 2)(x^2 + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$ . Obținem

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2} - \frac{x}{x^2 + 1} \text{ și integrala devine } I = \ln(x^2 + 2) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \ln \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

7. Avem  $f(x) = \frac{5x^3 - 19x^2 + 12x + 6}{x(x-1)(x-2)(x-3)} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x-3}$  și deci

$$\int_4^5 f(x) dx = \ln \left| \frac{(x-1)^2(x-3)}{x(x-2)^3} \right| \Big|_4^5 = \ln \frac{1024}{405}.$$

8. Avem  $f(x) = \frac{x^5}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{9}{4(x-1)^2} + \frac{31}{8(x-1)} + x + 2.$

Atunci  $\int_2^3 f(x) dx = \left[ -\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{9}{4(x-1)} + \frac{31}{8} \ln|x-1| + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_2^3 = \frac{45}{4} + 31 \ln 2.$

9. Avem  $f(x) = \frac{1}{(x^2-x)(x^2+2x+3)} = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{6(x-1)} + \frac{1}{6} \cdot \frac{x+1}{(x+1)^2+2}.$

Rezultă că  $\int_2^3 f(x) dx = \left[ \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{x^2} \right| + \frac{1}{6\sqrt{2}} \arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right]_2^3 = \frac{1}{6} \ln \frac{8}{9} + \frac{1}{6\sqrt{2}} \left( \arctg 2\sqrt{2} - \arctg \frac{3}{\sqrt{2}} \right).$

10. Avem  $f(x) = \frac{15x+10}{(x^2+2x+5)(x^2+2x+10)} = \frac{3x+2}{x^2+2x+10} - \frac{3x+2}{x^2+2x+5} = \frac{3(x+1)-1}{(x+1)^2+9}$

$-\frac{3(x+1)-1}{(x+1)^2+4}.$  Notând  $x+1=t$  obținem  $g(t) = \frac{3t-1}{t^2+9} - \frac{3t-1}{t^2+4}; x=1 \Rightarrow t=2, x=2 \Rightarrow t=3$

și atunci  $\int_2^3 g(t) dt = \left[ \frac{3}{2} \ln \frac{t^2+9}{t^2+4} - \left( \frac{1}{3} \arctg \frac{t}{3} - \frac{1}{2} \arctg \frac{t}{2} \right) \right]_2^3 = \frac{3}{2} \ln \frac{144}{169} + \frac{\pi}{24} + \frac{1}{3} \arctg \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \arctg \frac{1}{2}$



Să se determine următoarele integrale definite:

1.  $\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+5} dx$

2.  $\int_1^2 \frac{1}{x^3+x} dx$

3.  $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{a}{(x-a)(x-2a)} dx, a > 0$

4.  $\int_0^1 \frac{x^2-3x+1}{(x^2+4)(x^2+1)} dx$

5.  $\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+x^2+1} dx$

6.  $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+2x+5)} dx$

7.  $\int_0^1 \frac{x}{2x^2+3x+1} dx$

8.  $\int_1^2 \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$

9.  $\int_{-2}^{-1} \frac{(x+2)^2}{x(x-1)^2} dx$

10.  $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$

11.  $\int_0^1 \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} dx$

12.  $\int_0^1 \frac{x^2-1}{(x^2+1)(x^2+x+1)^2} dx.$

## II.5. Integrarea prin părți a integralelor definite

Se demonstrează următoarea:

**Teoremă.** Dacă  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sunt două funcții derivabile pe  $[a, b]$  cu derivatele continue pe  $[a, b]$ , atunci avem:  $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$ .

*Demonstrație.* Deoarece  $f$  și  $g$  sunt derivabile, rezultă că ele sunt continue pe  $[a, b]$  și deci  $f'g$ ,  $fg'$  și  $(fg)' = fg' + f'g$  sunt continue pe  $[a, b]$  și atunci admit primitive pe

$[a, b]$ . Avem:  $\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx$  și deci

$$(fg)(x)\Big|_a^b = f(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

**Exercițiul rezolvat 1.** Să se determine următoarele integrale definite:

a)  $\int_0^1 (x^2 - 3x + 2)e^x dx$ ;      b)  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \ln(\sin x) dx$ ;      c)  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 - \cos x} dx$ .

*Soluții.* a)  $\int_0^1 (x^2 - 3x + 2)e^x dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)(e^x)' dx = (x^2 - 3x + 2)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x - 3)e^x dx =$   
 $= -2 - \int_0^1 (2x - 3)(e^x)' dx = -2 - (2x - 3)e^x \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 e^x dx = -2 + e - 3 + 2e^x \Big|_0^1 = 3e - 7$

b)  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \ln(\sin x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\sin x) \cdot (\sin x)' dx = \ln(\sin x) \cdot \sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} dx =$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{3} \ln \frac{\sqrt{3}}{2e} + \ln 2e \right).$

c)  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 - \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x \left( -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)' dx = -x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} dx =$   
 $= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left( \sin \frac{x}{2} \right)'}{\sin \frac{x}{2}} dx = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 2 \ln \left( \sin \frac{x}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln 2.$

**Exercițiul rezolvat 2.** Fie  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ .

a) Să se determine  $I_n$ .      b) Să se demonstreze că  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n} = 0$ .

c) Demonstrați că  $\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n))^2}{[3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)]^2 (2n+1)}$  (formula lui John Wallis, 1616-1703).

**Soluții. a)**  $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^0 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ ,  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ . Pentru  $n \geq 2$

avem  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (-\cos x)' dx = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx =$

$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$  și deci  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ . Obținem  $I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} =$

$= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot I_{2n-3} = \dots = \frac{2n(2n-2) \cdot \dots \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \cdot \dots \cdot 3} \cdot I_1 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$ ,  $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2n-2} =$

$= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{2n-4} = \dots = \frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2} \cdot I_0 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{\pi}{2}$ .

**b)** Fie  $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$ . Șirul este mărginit deoarece  $0 < a_n < 1$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Avem  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1} < 1$ , deci șirul este strict descrescător. Rezultă că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este

convergent și limita lui se află în  $[0, 1)$ . Deoarece  $0 < a_n < \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$  rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

și deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**c)** Pentru orice  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , avem  $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$  și deci

$I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$ , adică  $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$ .

Obținem  $\frac{1}{2n+1} \cdot \left[ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \right]^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n} \cdot \left[ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right]^2$ . Prin trecere la

limită rezultă formula lui Wallis.

**Exercițiul rezolvat 3.** Se consideră șirurile:  $a_n = \int_0^1 x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) dx$ ,

$b_n = \int_0^1 x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) dx$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**a)** Să se demonstreze că  $(-1)^n \cdot \frac{a_n}{n!} = \frac{b_n}{n!} - \frac{b_{n-1}}{(n-1)!}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;

**b)** Să se determine  $b_n$  în funcție de  $a_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ ;

**c)** Să se demonstreze că șirul  $\left(\frac{b_n}{n!}\right)_{n \geq 1}$  este convergent.

**Soluții. a)** Efectuând schimbarea de variabilă  $x = 1 - t$  obținem

$a_n = (-1)^n \cdot \int_0^1 (t-1)t(t+1)\dots(t+n-2) dt = (-1)^n \int_0^1 t(t+1)(t+2)\dots(t+n-2)[(t+n-1)-n] dt =$

$$= (-1)^n \int_0^1 t(t+1)\dots(t+n-1) dt - n \cdot (-1)^n \int_0^1 t(t+1)\dots(t+n-2) dt = (-1)^n b_n - n(-1)^{n-1} b_{n-1},$$

de unde  $(-1)^n \cdot \frac{a_n}{n!} = \frac{b_n}{n!} - \frac{b_{n-1}}{(n-1)!}$ ,  $\forall n \geq 1$ .

**b)** Avem  $b_1 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ . Adunând egalitățile **a)**  $\forall k = \overline{1, n}$  avem  $\frac{b_n}{n!} - \frac{b_1}{1!} = \sum_{k=2}^n (-1)^k \cdot \frac{a_k}{k!}$ ,  
adică  $b_n = n! \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n (-1)^k \cdot \frac{a_k}{k!} \right]$ .

**c)** Pentru orice  $x \in (0, 1)$  avem  $x-1 < 0, x-2 < 0, \dots, x-n+1 < 0$ ; rezultă că  $x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \dots \cdot (x-n+1)$  are semnul lui  $(-1)^{n-1}$ . Atunci  $(-1)^n a_n < 0$ , adică  $(-1)^n \cdot \frac{a_n}{n!} < 0$ . Rezultă  $\frac{b_n}{n!} < \frac{b_{n-1}}{(n-1)!}$ . Pentru orice  $x \in (0, 1)$  avem  $x(x+1)\dots(x+n-1) > 0$  și deci  $\frac{b_n}{n!} > 0$ . Șirul  $\left( \frac{b_n}{n!} \right)_{n \geq 1}$  este descrescător și mărginit inferior, deci este convergent.



Să se determine următoarele integrale definite:

1.  $\int_1^e \ln x dx$ ;
2.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ ;
3.  $\int_0^1 x e^{-x} dx$ ;
4.  $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ ;
5.  $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx$ ;
6.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$ ;
7.  $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$ ;
8.  $\int_1^2 x \log_2 x dx$ ;
9.  $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$ ;
10.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx$ ;
11.  $\int_1^e \ln^3 x dx$ ;
12.  $\int_1^3 x^2 \ln x dx$ ;
13.  $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$ ;
14.  $\int_0^1 \arcsin x dx$ ;
15.  $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$ ;
16.  $\int_1^e \frac{e \ln^2 x}{x^2} dx$ ;
17.  $\int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx$ ;
18.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x dx$ ;
19.  $\int_0^1 x^2 \arccos x dx$ ;
20.  $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ ;
21.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$ ;
22.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \ln(\cos x) dx$ ;
23.  $\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx$ ;
24.  $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$ ;

$$25. \int_0^1 \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3)e^{2x} dx; \quad 26. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 2x - 1)\sin 2x dx; \quad 27. \int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{29}} x\sqrt{x^2 - 4} dx;$$

$$28. \int_{2\sqrt{2}}^3 x^2\sqrt{x^2 - 4} dx; \quad 29. \int_0^1 x^2\sqrt{x^2 + 1} dx; \quad 30. \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx.$$

31. Să se determine următoarele integrale definite:

$$a) \int_0^2 \ln(1 + |x - 1|) dx; \quad b) \int_0^2 f(x) dx, \text{ unde } f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \in [0, 1] \\ e(2x - 1), & x \in (1, 2] \end{cases};$$

$$c) \int_0^2 f(x) dx, \text{ unde } f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-x}, & x \in [0, 1] \\ \frac{\ln^2 x}{x}, & x \in (1, 2] \end{cases}; \quad d) \int_{-1}^1 f(x) dx, \text{ unde } f(x) = \frac{|e^x - 1|}{e^x + 1}.$$

32. Să se determine  $a, b \in \mathbb{Q}$  astfel încât  $I \in \mathbb{Q}$ , unde  $I = \int_{-1}^1 (x^2 + a|x| + b)e^{|x|} dx$ .

33. Fie  $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $J_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Să se demonstreze că șirurile sunt convergente.

b) Să se arate că  $I_n = e - nI_{n-1}$  și să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$ .

34. Fie  $I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Să se calculeze  $I_1$  și  $I_2$ .

b) Să se demonstreze că șirul este convergent.

c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

35. Fie  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^n x dx$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Să se demonstreze că:

$$a) I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}, \forall n \geq 3; \quad b) I_n < \frac{1}{2n-2}, \forall n \geq 2; \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0.$$

36. Fie  $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Să se calculeze  $I_n$  pentru  $n \in \{0, 1, 2\}$ .

b) Să se arate că  $I_n = \frac{2^n}{2n+3} I_{n-1}$ .

c) Să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

37. Fie șirul  $(I_n)_{n \geq 0}$  definit prin  $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$ ,  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1 + x^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Să se demonstreze că: a)  $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ;

b)  $I_n \geq I_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ;

c)  $2I_n \in \left[ \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} \right]$ ,  $n \geq 2$ ;

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2nI_n = 1$ .

## II.6. Schimbarea de variabilă pentru integrale definite

Ca și în cazul determinării primitivelor unei funcții, schimbarea de variabilă pentru integrale definite se efectuează pentru a reduce calculul integralelor definite complicate la calculul unor integrale definite mai simple.

### **Teoremă** (prima metodă de schimbare de variabilă)

Fie  $g : [a, b] \rightarrow J, f : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J$  interval din  $\mathbb{R}$  astfel încât  $f$  este continuă pe  $J$ ,  $g$  este derivabilă cu derivata  $g'$  continuă pe  $[a, b]$ . Atunci avem

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

*Demonstrație.* Deoarece  $f$  este continuă pe  $J$  rezultă că  $f$  admite primitive pe  $J$ .

Fie  $F : J \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a lui  $f$ . Deoarece  $f$  și  $g$  sunt funcții continue și  $g'$  este continuă, rezultă că funcția  $(f \circ g) \cdot g'$  este continuă și deci este integrabilă. Atunci funcția  $F \circ g : I \rightarrow \mathbb{R}$  este o primitivă a lui  $(f \circ g) \cdot g'$  deoarece  $(F \circ g)' = F'(g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'$ .

Aplicând formula lui Leibniz-Newton avem

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = (F \circ g)(x) \Big|_a^b = F(g(x)) \Big|_a^b = F(t) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

### **Probleme rezolvate**

Să se determine următoarele integrale definite.

1.  $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$
2.  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$
3.  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$
4.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$
5.  $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$
6.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x) dx.$

*Soluții.* 1. Fie funcția  $g : [0, 1] \rightarrow [1, 2]$ , unde  $g(x) = x^4 + 1$ . Funcția  $g$  este derivabilă cu derivata  $g'(x) = 4x^3$ , care este funcție continuă. Luăm  $f(x) = \frac{1}{x}$  și avem  $g(0) = 1, g(1) = 2$ .

$$\text{Integrala devine } \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{(x^4 + 1)'}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \ln t \Big|_1^2 = \frac{1}{4} \ln 2.$$

Să observăm că am notat  $t = g(x)$  și atunci  $dt = 4x^3 dx$ .

Noile limite de integrare sunt  $t_1 = x_1^4 + 1 = 1, t_2 = x_2^4 + 1 = 2$ .

$$2. \text{ Avem } \frac{\sin^3 x}{\cos x} = \frac{\sin x(1 - \cos^2 x)}{\cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} (-\cos x)' = -\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} (\cos x)'$$

Luăm  $t = g(x) = \cos x, f(t) = -\frac{1-t^2}{t} = t - \frac{1}{t}, t_1 = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, t_2 = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Rezultă

$$\text{că avem: } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(t - \frac{1}{t}\right) dt = \left(\frac{t^2}{2} - \ln t\right) \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \ln \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}.$$

3. Avem  $\frac{\ln^2 x}{x} = (\ln^2 x) \cdot (\ln x)'$ . Luăm  $t = g(x) = \ln x, f(t) = t^2, t_1 = \ln 1 = 0, t_2 = \ln e = 1$ .

Rezultă că avem:  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ .

4. Avem  $e^{\sin x} \cos x = e^{\sin x} (\sin x)'$ . Luăm  $t = g(x) = \sin x, t_1 = g(0) = 0, t_2 = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f(t) = e^t$ .

Rezultă că avem:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx = \int_0^1 e^t dt = e^t \Big|_0^1 = e - 1$ .

5. Avem  $(\sqrt{x^2 + 2x + 2})' = \frac{(x^2 + 2x + 2)'}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$ .

Luăm  $t = g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}, f(t) = t, t_1 = 0, t_2 = 1$ .

Rezultă că avem  $\int_0^1 \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \int_0^1 dt = 1$ .

6. Avem  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) = \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x)'$ .

Luăm  $t = g(x) = \operatorname{tg} x, t_1 = g(0) = 0, t_2 = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, f(t) = t$ .

Rezultă că avem  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x) dx = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$ .

### ***Integrarea funcțiilor pare. Integrarea funcțiilor impare***

Fie  $a > 0$  și funcția continuă  $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Vom demonstra că  $\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f \text{ funcție pară} \\ 0, & f \text{ funcție impară} \end{cases}$ .

Fie  $I = \int_{-a}^a f(x) dx, I_1 = \int_{-a}^0 f(x) dx, I_2 = \int_0^a f(x) dx$ .

Avem  $I = I_1 + I_2$ . În  $I_1$  efectuăm schimbarea de variabilă  $x = -t$  și deci  $dx = -dt$ . Obținem:

$I_1 = \int_a^0 f(-t)(-dt) = -\int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt$ . Dacă  $f$  este funcție pară avem  $f(-t) = f(t)$  și

deci  $I_1 = \int_0^a f(t) dt = I_2$  și atunci  $I = 2I_2$ .

Dacă  $f$  este funcție impară avem  $f(-t) = -f(t)$  și rezultă că  $I_1 = -I_2$  și atunci  $I_1 + I_2 = 0$ .

### ***Integrarea funcțiilor periodice***

Fie  $T > 0$  și fie  $D \subset \mathbb{R}$  astfel încât pentru orice  $x \in D$  să avem  $x + T \in D, x - T \in D$ .

Fie o funcție  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  continuă și periodică de perioadă  $T$ . Atunci avem  $f(x + T) = f(x)$ ,

$\forall x \in D$ . Atunci pentru orice  $[a, b] \subset D$ ,  $\forall n \in \mathbf{Z}$ , avem  $\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ .

Într-adevăr, luând  $x = t + nT$ , obținem  $\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx = \int_a^b f(t + nT)dt = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$ .

**EXEMPLU**



Să se determine  $\int_0^\pi |\sin 6x| dx$ .

*Soluție.* Luăm  $x = \frac{t}{6}$  și obținem  $I = \int_0^\pi |\sin 6x| dx = \frac{1}{6} \int_0^{6\pi} |\sin t| dt$ . Funcția

$g(t) = |\sin t|$ ,  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , are perioada principală  $T = \pi$ . Atunci obținem:

$$I = \frac{1}{6} \left( \int_0^\pi |\sin t| dt + \int_\pi^{2\pi} |\sin t| dt + \int_{2\pi}^{3\pi} |\sin t| dt + \int_{3\pi}^{4\pi} |\sin t| dt + \int_{4\pi}^{5\pi} |\sin t| dt + \int_{5\pi}^{6\pi} |\sin t| dt \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 \int_0^\pi |\sin t| dt = \frac{1}{6} \cdot 6 \int_0^\pi \sin t dt = -\cos t \Big|_0^\pi = 2.$$

**PROBLEME**



Să se determine următoarele integrale definite:

1.  $\int_0^1 \frac{x}{x^4 + 1} dx$
2.  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$
3.  $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx$
4.  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
5.  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$
6.  $\int_0^1 x e^{-x^3} dx$
7.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$
8.  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$
9.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$
10.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx$
11.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$
12.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$
13.  $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
14.  $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$
15.  $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$
16.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$
17.  $\int_0^{e^2} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$
18.  $\int_0^{e^2} \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$
19.  $\int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx$
20.  $\int_{-1}^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$
21.  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$
22.  $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$
23.  $\int_1^3 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$
24.  $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx, a > 0$
25.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx$
26.  $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$
27.  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$
28.  $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$
29.  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 - 2|x| + 2} dx$
30.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2x| dx$
31.  $\int_{-3}^3 \frac{x^3 + x}{1 + x^2 + x^4} dx$
32.  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \ln x^2 dx$
33.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx$
34.  $\int_0^{4\pi} |\cos x| dx$
35.  $\int_{-6\pi}^{6\pi} |\sin 2x| dx$
36.  $\int_{-5\pi}^{5\pi} \sin x \cos^2 x dx$
37.  $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$
38.  $\int_0^1 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$
39.  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

## II.7. Probleme de sinteză

1. Fie  $g(m) = \int_1^3 \frac{dx}{|x-m|+1}$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .

a) Să se determine  $g(m)$ .

b) Să se calculeze  $\lim_{m \rightarrow \infty} g(m)$ .

*Soluție.* a)  $m \leq 1 \Rightarrow g(m) = \int_1^3 \frac{1}{x-m+1} dx = \ln(x-m+1) \Big|_1^3 = \ln \frac{4-m}{2-m}$ . Dacă  $m \in (1, 3]$

avem  $g(m) = \int_1^m \frac{1}{m-x+1} dx + \int_m^3 \frac{1}{x-m+1} dx = -\ln(m-x+1) \Big|_1^m + \ln(x-m+1) \Big|_m^3 = \ln m(4-m)$

Dacă  $m > 3$  avem  $\int_1^3 \frac{1}{m-x+1} dx = -\ln(m-x+1) \Big|_1^3 = \ln \frac{m}{m-2}$ .

b)  $\lim_{m \rightarrow \infty} g(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \ln \frac{m}{m-2} = 0$ .

2. Să se determine  $\int_1^3 |(x-1)(x-2)(x-3)| dx$ .

*Soluția 1.* Avem  $f(x) = |(x-1)(x-2)(x-3)| = |x-1| \cdot |x-2| \cdot |x-3|$ .

Pentru  $x \in [1, 3]$  avem  $x-1 \geq 0$ ,  $x-3 \leq 0$  și deci

$$f(x) = (x-1)(3-x)|x-2| = \begin{cases} (x-1)(x-2)(x-3), & x \in [1, 2] \\ -(x-1)(x-2)(x-3), & x \in (2, 3] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 11x - 6, & x \in [1, 2] \\ -(x^3 - 6x^2 + 11x - 6), & x \in (2, 3] \end{cases}$$

Deoarece  $f$  este funcție continuă (fiind modulul unei funcții continue) rezultă că  $f$  este integrabilă și avem  $\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx =$

$$= \left( \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x \right) \Big|_1^2 - \left( \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{2}.$$

*Soluția 2.* Efectuăm schimbarea de variabilă  $x-2 = t$ . Deoarece  $x \in [1, 3]$  rezultă că  $t \in [-1, 1]$  și obținem funcția  $g(t) = (t+1)t(t-1) = t^3 - t$ , care este o funcție impară și deci  $t \rightarrow |g(t)|$  este funcție pară. Valoarea integralei este dată de

$$\int_{-1}^1 |g(t)| dt = 2 \int_0^1 |g(t)| dt = 2 \int_0^1 (t-t^3) dt = 2 \left( \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

3. Fie funcția  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x-[x]}{2x-[x]+1}$ , unde  $[x]$  este partea întregă a numărului

real  $x$ .

a) Să se demonstreze că  $f$  nu admite primitive pe  $[0, 2]$ .

b) Să se demonstreze că  $f$  este integrabilă pe  $[0, 2]$  și să se determine  $\int_0^2 f(x)dx$ .

$$\text{Soluție. a) Avem } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x+1}, & x \in [0, 1] \\ \frac{x-1}{2x}, & x \in [1, 2) \\ 0, & x = 2 \end{cases}.$$

Avem  $\int \frac{x}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \ln(2x+1)\right) + \mathcal{C}_1$  pentru  $x \in [0, 1)$  și

$\int \frac{x-1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2} (x - \ln x) + \mathcal{C}_2$  pentru  $x \in [1, 2)$ . Dacă  $f$  ar admite primitive pe

$$[0, 2], \text{ atunci primitiva este de forma } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \ln(2x+1) + \mathcal{C}_1, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln x + \mathcal{C}_2, & x \in [1, 2) \\ \mathcal{C}_3, & x = 2 \end{cases}$$

Punând condițiile ca  $F$  să fie continuă în punctele 1 și 2 rezultă că

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \ln 3 + \mathcal{C}_1 = \frac{1}{2} + \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_3. \text{ Deci } F \text{ are forma } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \ln(2x+1) + \mathcal{C}, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln 3 + \mathcal{C}, & x \in [1, 2) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \ln 3 + \mathcal{C}, & x = 2 \end{cases}$$

Deoarece  $F$  este derivabilă în 1, avem  $F'_s(1) = F'_d(1) \Leftrightarrow \lim_{x \nearrow 1} \frac{x}{2x+1} = \lim_{x \searrow 1} \frac{x-1}{2x} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = 0$  (imposibil). Rezultă că  $f$  nu admite primitive pe  $[0, 2]$ .

Altfel,  $x = 1$  este punct de discontinuitate de prima speță pentru  $f$  și deci  $f$  nu admite primitive.

b) Deoarece  $f$  este integrabilă pe  $[0, 1]$  și pe  $[1, 2]$  rezultă că  $f$  este integrabilă pe  $[0, 2]$

și avem  $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{2x+1} dx + \int_1^2 \frac{x-1}{2x} dx =$

$$= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \ln(2x+1)\right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln x\right) \Big|_1^2 = 1 - \frac{1}{4} \ln 12.$$

**4.** Fie funcția  $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$  bijectivă, crescătoare, derivabilă și cu derivata continuă.

Să se demonstreze că  $\int_0^b f(x)dx + \int_c^d f^{-1}(x)dx = bd - ac$ .

*Soluție.* Fie  $x = f(t) \Leftrightarrow t = f^{-1}(x)$ . Deoarece  $f$  este crescătoare și  $f$  derivabilă avem

$$a = f^{-1}(c), d = f^{-1}(b). \text{ Obținem } \int_a^b f(x)dx + \int_c^d f^{-1}(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b t f'(t)dt =$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b x f'(x)dx = \int_a^b (f(x) + x f'(x)) dx = \int_a^b (x f(x))' dx = x f(x) \Big|_a^b = b f(b) - a f(a) = bd - ac.$$

5. Să se demonstreze că 
$$\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

*Soluție.* Considerăm funcția  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (1+x)^n$ .

Avem  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$ . Integrând în ambii membri pe  $[0, 1]$  obținem  $\int_0^1 (1+x)^n dx =$   
 $= \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$ , respectiv  $\int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_0^1 = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1}$ .

6. Fie funcția  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ . Fie șirul  $(I_n)_{n \geq 0}$  definit astfel:

$$I_0 = \int_0^1 f(x) dx, I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx, n \geq 1.$$

a) Să se calculeze  $I_0$  și  $I_1$ .

b) Să se demonstreze că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , avem  $I_{n+2} + 2I_{n+1} + 2I_n = \frac{1}{n+1}$ .

c) Să se demonstreze că șirul  $(I_n)$  este descrescător.

d) Să se demonstreze că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , avem  $5I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \leq 5I_n$ .

e) Să se demonstreze că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ , avem  $\frac{4}{5(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{5(n-1)}$ .

f) Să se demonstreze că  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{5}$ .

*Soluție.* a)  $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \arctg(x+1) \Big|_0^1 = \arctg 2 - \arctg 1 = \arctg \frac{1}{3}$ ;

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + x + 2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2 + 2x + 2)'}{x^2 + 2x + 2} dx - I_0 = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) \Big|_0^1 - I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} - \arctg \frac{1}{3}.$$

b)  $I_{n+2} + 2I_{n+1} + 2I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x^2 + 2x + 2)}{x^2 + 2x + 2} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$ .

c)  $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^{n+1} \leq x^n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^{n+1}}{x^2 + 2x + 2} \leq \frac{x^n}{x^2 + 2x + 2} \leq \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \Rightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq I_1$ .

d) Avem  $5I_{n+2} \leq I_{n+2} + 2I_{n+1} + 2I_n \leq 5I_n \Rightarrow 5I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \leq 5I_n$ .

e) De la punctul d) avem  $5I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1}$  și deci  $I_n \leq \frac{1}{5(n-1)}, \forall n \geq 2$ . Din

$$\frac{1}{n+1} \leq 5I_n \Rightarrow I_n \geq \frac{1}{5(n+1)} \text{ și deci } \frac{1}{5(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{5(n-1)}, \forall n \geq 2.$$

f) Din punctul e) rezultă  $\frac{n}{5(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{5(n-1)}$ . Rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5(n+1)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} nI_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5(n-1)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{5}.$$



1. Să se determine primitivele următoarelor funcții:

a)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$

b)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}$

c)  $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$

d)  $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

e)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 1}$

f)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$

g)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$

h)  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + 6x^2 + 1}$ .

2. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă.

a) Să se demonstreze că:

i)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx$  ;

ii)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(b - x) dx$  ;

iii)  $\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a (f(x) + f(2a - x)) dx$  .

b) Să se determine următoarele integrale definite:

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{tg} x dx$  ;

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$  ;

$I_3 = \int_0^{2a} (2ax - x^2) \arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx$  ;

$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx$  ;

$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$  ;

$I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$  .

3. Fie șirul  $(I_n)_{n \geq 0}$  definit prin  $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+3} dx$ ,  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+3} dx$ ,  $n \geq 1$ .

a) Să se calculeze  $I_0$  și  $I_1$ .

b) Să se demonstreze că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  avem  $I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+1}$ .

c) Să se demonstreze că șirul  $(I_n)$  este monoton și mărginit.

d) Să se demonstreze că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  avem  $4I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 4I_n$ .

e) Să se demonstreze că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  avem  $\frac{1}{4(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{4n}$ .

f) Să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ .

4. Se definește șirul  $(I_n)_{n \geq 0}$  astfel:  $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx$ ,  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx$ ,  $\forall n \geq 1$ .

a) Să se determine  $I_0$  și  $I_1$ .

b) Să se demonstreze că  $0 \leq \frac{x^n}{4-x^2} \leq x^n$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

c) Să se studieze monotonia și mărginirea șirului  $(I_n)$ .

d) Să se demonstreze că  $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

e) Să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

5. Se definește șirul  $(I_n)_{n \geq 0}$  astfel:  $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+6x+10} dx$ ,  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+6x+10} dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Să se determine  $I_0$  și  $I_1$ .

b) Să se demonstreze că:

$$\text{i) } I_{n+2} + 6I_{n+1} + 10I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \text{ii) } I_{n+1} \leq I_n, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\text{iii) } 17I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \leq 17I_n, \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \text{iv) } \frac{1}{17(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{17(n-1)}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

c) Să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a I_n$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

6. Se consideră funcțiile  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite prin:  $f_0(x) = \cos x$ ,  $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Să se determine  $f_0(\pi)$  și  $f_1(\pi)$ .

b) Să se determine  $\int_0^{2\pi} f_1(x) dx$ .

c) Să se determine  $f_{10}(x)$ .

d) Să se demonstreze că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)}{n} = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{N}$ .

7. Se consideră funcțiile  $I_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite prin:  $I_0(x) = 1$ ,  $I_{n+1}(x) = \int_0^x I_n(x) dt$ .

a) Să se determine funcțiile  $I_1$  și  $I_2$ .

b) Să se determine  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

d) Să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_0(1) + I_1(1) + \dots + I_n(1)}{n}$ .

8. Se consideră funcțiile  $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite prin:  $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ ,  
 $F(x) = 1 + \int_0^x f(t) dt$ .

- Să se demonstreze că  $F$  este o primitivă a lui  $f$ .
- Să se determine o expresie mai simplă pentru  $(x - 1)F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- Să se demonstreze că  $F(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- Să se demonstreze că  $F$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .
- Să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{F(n)}$ .

9. Se consideră funcțiile  $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite prin  $f(x) = 2 + \arcsin(\sin x)$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

- Să se determine perioada principală a funcției  $f$ .
- Să se demonstreze că  $2 - \frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq 2 + \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- Să se demonstreze că orice primitivă a funcției  $f$  este strict monotonă pe  $\mathbb{R}$ .
- Să se demonstreze că  $F(x) = 2x + \frac{x^2}{2}$ ,  $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- Să se determine  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ .

10. Se consideră șirul  $(I_n)_{n \geq 0}$  definit prin  $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$ ,  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Să se determine  $I_0, I_1, I_2$  și  $I_3$ .
- Să se demonstreze că  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .
- Să se demonstreze că  $I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{n+1}{n} I_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- Să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$ .

# PROBE DE EVALUARE

Pentru testele următoare, timpul efectiv de lucru este de 50 minute.

## TESTUL 1

1. Să se determine următoarele integrale definite:

a)  $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx$  ;

b)  $\int_0^\pi e^x \cos x dx$  ;

c)  $\int_0^\pi x^2 \cos^2 x dx$  ;

d)  $\int_0^{\sqrt{5}} \ln(x^2 + 1) dx$  ;

e)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \operatorname{tg}^2 x dx$  ;

f)  $\int_1^2 (x^2 + 1)e^{x-1} dx$  .

(6 p)

2. Fie  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x \cdot \min\{1, x^2\}$ .

a) Să se demonstreze că  $f$  este integrabilă.

(1,5 p)

b) Să se determine  $\int f(x) dx$  .

(1,5 p)

## TESTUL 2

1. Să se determine următoarele integrale definite:

a)  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} dx$  ;

b)  $\int_0^\pi e^x \cos^2 x dx$  ;

c)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)e^x dx$  ;

d)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x-2} dx$  ;

e)  $\int_0^1 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$  ;

f)  $\int_0^1 \arcsin x dx$  .

(6 p)

2. Fie  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2|x| + 2}$ .

a) Să se demonstreze că  $f$  este integrabilă.

(1,5 p)

b) Să se determine  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  .

(1,5 p)

### TESTUL 3

1. Să se determine următoarele integrale definite:

a)  $\int_0^1 (x^2 + 1)e^{-x} dx$ ;      b)  $\int_1^{e^2} x \ln x dx$ ;  
c)  $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ ;      d)  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$ ;  
e)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$ ;      f)  $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{a^2 - x^2} dx, a > 0.$       (6 p)

2. Să se demonstreze în două moduri că  $\int_0^e \ln(1+x) dx > \int_0^e \frac{x}{x+1} dx$ .      (2 p)

3. Fie  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{3^x + 2} dx, n \geq 1$ , unde  $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{3^x + 2} dx$ . Să se arate că  
 $2I_{n+1} + 2I_n = \frac{1}{n+1}$ .      (1 p)

### TESTUL 4

1. Să se determine valoarea medie pentru funcția  $f: \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$ , precum și punctul corespunzător.      (2 p)

2. Fie  $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx, I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 2x + 3} dx$ . Să se arate că  
 $I_{n+2} + 2I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+1}$ .      (2 p)

3. Să se determine următoarele integrale definite:

a)  $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{1 + e^x} dx$ ;      b)  $\int_2^4 \sqrt{x^2 - 4} dx$ ;  
c)  $\int_0^1 \arccos x dx$ ;      d)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 1} dx$ ;  
e)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x) dx$ ;      f)  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx$ .      (6 p)

## TESTUL 5

1. Fie o funcție  $f$  cu proprietatea  $\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}$ ,  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  funcție continuă. Să se demonstreze că există  $c \in (0, 1)$  astfel încât  $\frac{1}{1+c} < f(c) < \frac{1}{2c}$ . **(1,5 p)**

2. Să se determine următoarele integrale definite:

a)  $\int_{-1}^1 (2^x + 2^{-x}) \operatorname{tg} x dx$ ;      b)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$ ;

c)  $\int_0^1 \frac{x}{x^4 + 4} dx$ ;      d)  $\int_0^2 x \ln(1+x) dx$ ;

e)  $\int_1^{\ln^2 x} \frac{dx}{x^2}$ ;      f)  $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 3} dx$ . **(6 p)**

3. Să se determine  $\int_0^{8\pi} |\cos x| dx$ . **(1,5 p)**

## TESTUL 6

1. Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 4$ . Să se determine:

a)  $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx$ ;      b)  $\int_{-\pi}^{\pi} |\cos x| dx$ . **(3 p)**

2. Fie o funcție continuă  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $2 \int_0^1 f(x) dx = 1$ . Să se demonstreze că există  $a \in (0, 1)$  astfel încât  $f(a) = a$ . **(2 p)**

3. Fie șirul  $(I_n)_{n \geq 0}$  definit astfel:  $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx$ ,  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2} dx$ ,  $\forall n \geq 1$ .

a) Să se determine  $I_0$  și  $I_1$ . **(1 p)**

b) Să se demonstreze că  $I_{n+1} + 2I_n = \frac{1}{n+1}$  și că  $I_{n+1} \leq I_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . **(1,5 p)**

c) Să se demonstreze că  $3I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq I_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . **(1,5 p)**

# CAPITOLUL III

## APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE

### III.1. Aria unei suprafețe plane

Vom da o interpretare geometrică primitivelor, analoagă cu cea care a fost dată funcției logaritmice.

Fie planul  $\mathcal{P}$  raportat la sistemul ortogonal  $xOy$ .

**Definiție.** Spunem că o parte  $S$  a planului  $\mathcal{P}$  este *măsurabilă* dacă i se poate asocia un număr  $\mathcal{A}(S) \geq 0$  (numit aria lui  $S$ ), care are următoarele proprietăți:

- a) dacă  $S, S' \subset \mathcal{P}$  sunt măsurabile, atunci  $S \cup S'$  și  $S - S'$  sunt măsurabile;
- b) dacă  $S, S' \subset \mathcal{P}$  și  $S \cap S' = \emptyset$ , atunci  $\mathcal{A}(S \cup S') = \mathcal{A}(S) + \mathcal{A}(S')$ ;
- c) aria pătratului cu lungimea laturii egală cu 1 este 1;
- d) aria unui dreptunghi este egală cu produsul lungimilor laturilor sale;
- e) un segment de dreaptă are aria 0.

**Observații.** ■ Dacă  $S, S' \subset \mathcal{P}$  sunt măsurabile, atunci  $S \cap S'$  și  $\emptyset$  sunt măsurabile. Într-adevăr, avem  $S \cap S' = S - (S - S')$ ,  $\emptyset = S - S$ .

■  $\mathcal{A}(S \cup S') = \mathcal{A}(S) + \mathcal{A}(S') - \mathcal{A}(S \cap S')$  și  $S' \subset S \Rightarrow \mathcal{A}(S') \leq \mathcal{A}(S)$ .

Fie funcția continuă  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  și fie  $G_f$  reprezentarea grafică a lui  $f$  în planul  $\mathcal{P}$  raportat la sistemul ortogonal  $xOy$ . Fie  $S$  partea din plan limitată de  $G_f$ ,  $Ox$  și paralelele la  $Oy$  ce trec prin punctele  $A(a, f(a))$ ,  $B(b, f(b))$ . Avem  $S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ . Demonstrăm că  $S$  este măsurabilă. Fie  $S_x$  partea din plan limitată de  $G_f$ ,  $Ox$  și paralelele la  $Oy$  ce trec prin punctele  $A(a, f(a))$  și  $M(x, f(x))$ .  $S_x$  este reprezentată în figurile 1 și 2.

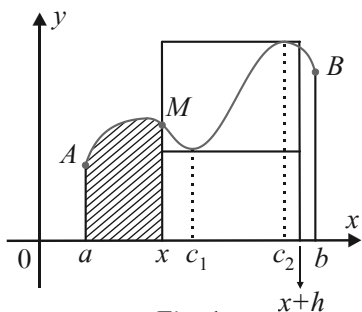


Fig. 1

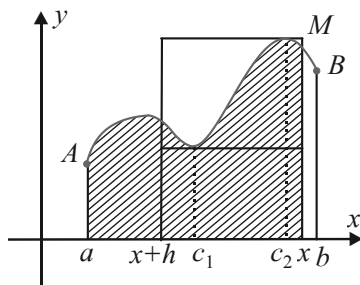


Fig. 2

Fie aplicația  $\mathcal{A} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $x \rightarrow \mathcal{A}(x)$ , unde  $\mathcal{A}(x)$  este aria lui  $S_x$ .

Dacă  $h > 0$  și  $a \leq x + h \leq b$ , fie  $c_1, c_2 \in [x, x + h]$  astfel încât  $f(c_1)$  și  $f(c_2)$  reprezintă cea mai mică, respectiv cea mai mare valoare a lui  $f$  pe  $[x, x + h]$ . Atunci  $\mathcal{A}(x + h) - \mathcal{A}(x)$

este cuprinsă între ariile a două dreptunghiuri,  $f(c_1) \cdot h \leq \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) \leq f(c_2) \cdot h$  și deci  $f(c_1) \leq \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq f(c_2)$  (1).

Dacă  $h < 0$  și  $a \leq x+h \leq b$  avem  $f(c_1) \leq \frac{\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x+h)}{-h} \leq f(c_2)$  și obținem din nou inegalitățile (1).

Deoarece  $f$  este continuă, rezultă că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\alpha > 0$  astfel încât pentru orice  $t \in [a, b]$ ,  $t \in (x-\alpha, x+\alpha)$ , avem  $f(t) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$ . Alegem  $h \in (-\alpha, \alpha)$  și atunci:

$$f(x) - \varepsilon < f(c_1) < f(x) + \varepsilon$$

$$f(x) - \varepsilon < f(c_2) < f(x) + \varepsilon$$

$$f(x) - \varepsilon < \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} < f(x) + \varepsilon$$

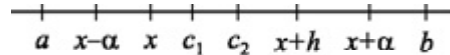


Fig. 3

Rezultă că  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = f(x)$ , ceea ce revine la  $\mathcal{A}'(x) = f(x)$ . Deci  $\mathcal{A}$  este o primitivă a lui  $f$  ce se anulează în  $a$ , adică  $\mathcal{A}(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Aria lui  $S$  este  $\mathcal{A}(b) = \int_a^b f(t) dt$ .

**Teoremă.** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  este o funcție continuă pe  $[a, b]$ , atunci  $\int_a^b f(x) dx$  este aria porțiunii din plan (raportat la un sistem ortogonal  $xOy$ ) definită prin  $a \leq x \leq b$ ,  $0 \leq y \leq f(x)$ .

**Observații.** Putem nota, în caz general, prin  $[a, b]$  mulțimea numerelor reale cuprinse între  $a$  și  $b$ , unde  $a > b$  sau  $a \leq b$ .

Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuă pe  $[a, b]$ .

a)  $f \geq 0, a < b \Rightarrow \mathcal{A}(S) \geq 0$  (figura 4);

b)  $f \leq 0, a < b \Rightarrow \mathcal{A}(S) \leq 0$  (figura 5);

c)  $f \geq 0, a > b \Rightarrow \mathcal{A}(S) \leq 0$  (figura 6);

d)  $f \leq 0, a > b \Rightarrow \mathcal{A}(S) \geq 0$  (figura 7).

În toate aceste cazuri se spune că  $\int_a^b f(x) dx$  reprezintă „aria algebrică” a lui  $S$ .

Vom considera în continuare că aria unei porțiuni  $S$  din plan este pozitivă. Deci în cazurile b) și c) vom considera „modulul” integralei

$$\int_a^b |f(x)| dx.$$

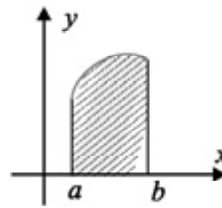


Fig. 4

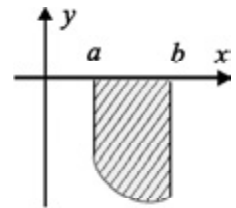


Fig. 5

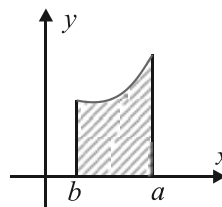


Fig. 6

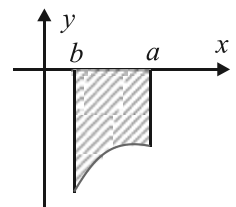


Fig. 7

**Consecință.** Fie funcțiile  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue pe  $[a, b]$  astfel încât  $f(x) \geq g(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Atunci mulțimea

$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ , cuprinsă între graficele  $G_f$  și  $G_g$  și paralelele  $x = a, x = b$  la  $Oy$ , are arie și

$$\mathcal{A}(S) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

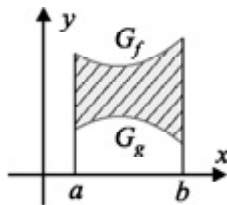


Fig. 8

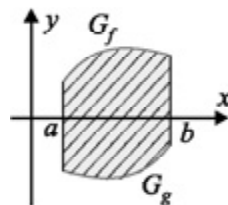


Fig. 9

**Exercițiul rezolvat 1.** Să se determine aria discului de rază  $r$ .

*Soluție.* Cercul are ecuația  $x^2 + y^2 = r^2$ . Axele  $Ox$  și  $Oy$  împart discul în patru regiuni care au ariile egale (fig. 10). Atunci

$$\mathcal{A} = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 \left( r^2 \arcsin \frac{x}{r} + x \sqrt{r^2 - x^2} \right) \Big|_0^r = 2 \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \pi r^2$$

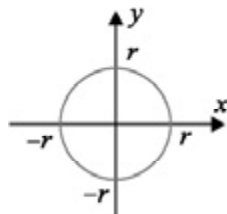


Fig. 10

**Exercițiul rezolvat 2.** Să se determine aria mulțimii  $S$  delimitată de curbele  $y = 2 - x^2$  și  $y^3 = x^2$ .

*Soluție.* Soluțiile în  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ale sistemului format din cele două ecuații sunt  $(-1, 1)$  și  $(1, 1)$ . Reprezentarea grafică este dată în figura 11.

$$\text{Avem } \mathcal{A}(S) = 2 \int_0^1 \left( 2 - x^2 - x^{\frac{2}{3}} \right) dx = 2 \left( 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \right) \Big|_0^1 = \frac{32}{15}$$

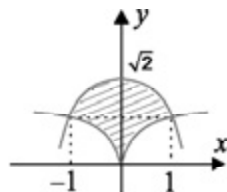


Fig. 11

**Exercițiul rezolvat 3.** Să se determine aria

mulțimii mărginită de graficul funcției

$$f: \left[ \frac{-4\pi}{3}, \frac{19\pi}{6} \right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x \text{ și axa } Ox.$$

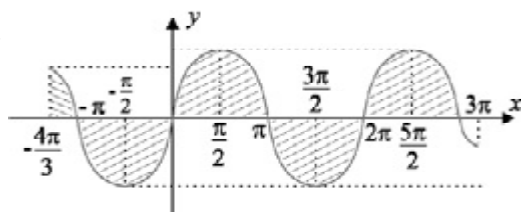


Fig. 12

*Soluție.* Funcția  $f(x) = \sin x$  este o funcție

continuuă și impară cu perioada principală  $2\pi$ . Conform unui rezultat obținut în paragraful

$$V.5 \text{ avem } \int_a^{a+2\pi} \sin x dx = \int_0^{2\pi} \sin x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Deci } \mathcal{A}(S) &= 4 \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{-\frac{4\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} \sin x dx + \left| \int_{\frac{19\pi}{6}}^{\frac{19\pi}{3}} \sin x dx \right| = -4 \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx + \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx = 8 - \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 10 - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

**Exercițiul rezolvat 4.** Să se determine aria mulțimii din plan delimitată de curbele de ecuații  $y^2 = 4x$  și  $y^4 = 16x$ .

*Soluție.* Soluțiile reale ale sistemului sunt  $(0,0)$ ,  $(1,2)$ ,  $(1,-2)$ , iar graficele sunt redată în figura 13. Avem

$$\mathcal{A}(S) = 2 \int_0^1 (-\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) dx = 2 \left( -\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{5} \cdot x^{\frac{5}{4}} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{15}.$$

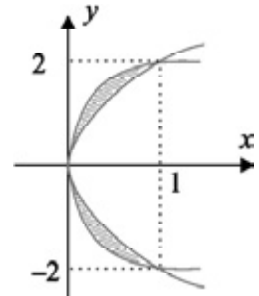


Fig. 13



Să se determine aria mulțimii din plan cuprinsă între curbele având ecuațiile:

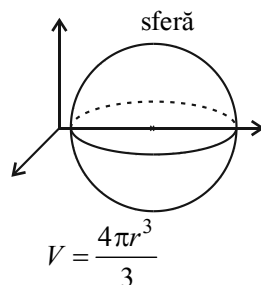
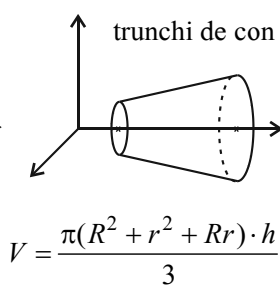
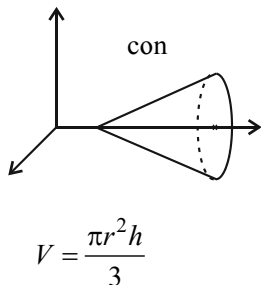
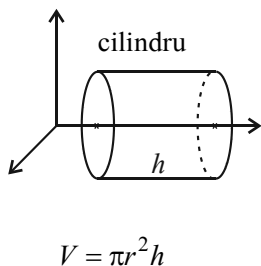
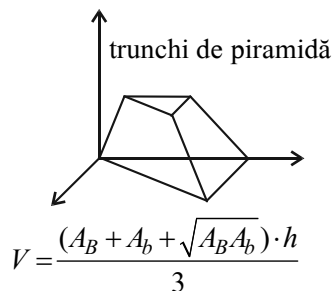
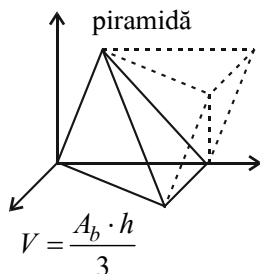
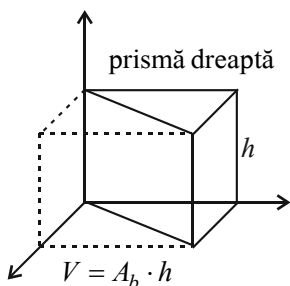
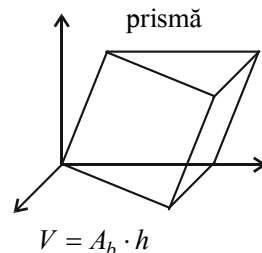
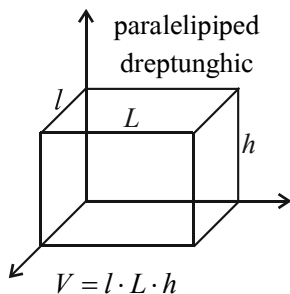
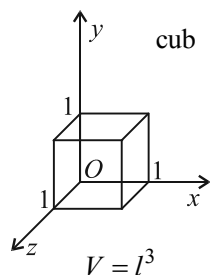
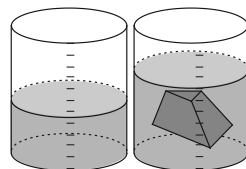
1.  $y = 4x - x^2$  și  $Ox$ ;
2.  $y = 4x(x-1)(x-2)$  și  $Ox$ ;
3.  $y = 2x - x^2$ ,  $y = -x$ ;
4.  $y = 2x + 1$ ,  $y = x - 1$ ;
5.  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{x}$ ;
6.  $y = x^2$ ,  $y = \frac{x^3}{3}$ ;
7.  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$ ,  $x = 1$ ;
8.  $y^2 = 16 - 8x$ ,  $y^2 = 24x + 48$ ;
9.  $y = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $y = \frac{x^2}{2}$ ;
10.  $y = \frac{x^2}{2}$  și  $x^2 + y^2 = 8$ ;
11.  $y = x^2$ ,  $2y = x^2$ ,  $y = 2x$ ;
12.  $y = 2x^2 e^x$ ,  $y = -x^3 e^x$ ;
13.  $y = \frac{\ln x}{4x}$ ,  $y = x \ln x$ ;
14.  $y = x^3$ ,  $y = 8$  și  $Oy$ ;
15.  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ,  $a > 0$ ;
16.  $y = x^3$ ,  $y = 2x$ ,  $y = x$ ;
17.  $y = x + e^{-x}$ ,  $y = x$ ,  $x \in [0, 1]$ ;
18.  $y = x^4$ ,  $y = \sqrt{x}$ ;
19.  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x = y^2$ ;
20.  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ;
21.  $y = 2^x$ ,  $y = 2^{-x}$ ,  $y = 2$ ;
22.  $y = 2x - x^2$ ,  $y = mx$ ,  $m \in (0, 2)$ ;
23.  $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 6x + 8}$ ,  $x = 1$ ,  $x = -2$ ;
24.  $y = -x + 2 - 4 \frac{\ln x}{x}$ ,  $y = -x + 2 - \frac{4}{x}$ ,  $x = 1$ .

25. Fie  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - x^2$ . Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât dreapta  $y = mx$  să împartă subgraficul lui  $f$  în două mulțimi de arii egale.

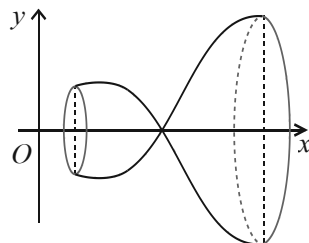
## III.2. Volumul unui corp de rotație

Volumul unui corp (în spațiul tridimensional) este numărul care indică câte cuburi și fracțiuni de cub cu latura unitate „încap“ (pot fi distribuite) în tot interiorul corpului.

Am învățat formule pentru calculul volumului anumitor corpuri geometrice. Volumul unui corp mai complicat nu poate fi calculat cu ajutorul unei formule simple, dar putem să-l aflăm dacă reușim să-l scufundăm într-un vas gradat; avem  $1l = 1\text{dm}^3 = 0,001\text{m}^3$ .



Un corp de rotație este caracterizat de o axă de rotație și de o generatoare. Ne vom ocupa în continuare de volumele corpurilor de rotație care au ca axă de rotație  $Ox$  și ca generatoare graficul unei funcții.



- Care dintre corpurile geometrice de mai sus se pot obține prin rotirea graficului unei funcții în jurul axei  $Ox$ ?

**Definiție.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Mulțimea punctelor din spațiu  $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2 + z^2} \leq |f(x)|\}$  se numește *corpul de rotație* (în jurul axei  $Ox$ ) determinat de funcția  $f$ .

Următoarea teoremă ne indică formula de calcul pentru volumul unui corp de rotație:

**Teoremă.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Corpul de rotație determinat de  $f$  are volumul  $\mathcal{V} = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ .

### Volumul conului

**Teoremă.**

Volumul conului de rotație cu raza  $r$  și înălțimea  $h$  este  $\frac{\pi hr^2}{3}$ .

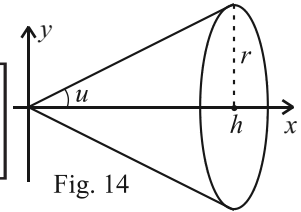


Fig. 14

*Demonstrație.*

Generatoarea conului este graficul funcției  $f : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \operatorname{tg} u = \frac{r}{h} x$ .

$$V = \pi \int_0^h f^2(x) dx = \pi \int_0^h x^2 \frac{r^2}{h^2} dx = \pi \frac{x^3}{3} \frac{r^2}{h^2} \Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

### Volumul sferei

**Teoremă.** Volumul sferei cu raza  $r$  este  $\frac{4\pi r^3}{3}$ .

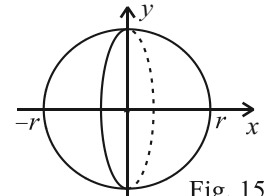


Fig. 15

*Demonstrație.* Din ecuația cercului  $\mathcal{C}(0, r)$ :  $x^2 + y^2 = r^2$  deducem  $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ .

Sfera este corpul geometric de rotație determinat de funcția  $f : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ .

$$V = \pi \int_0^r f^2(x) dx = \pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left( r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^r = \frac{4\pi r^3}{3}$$

### Volumul elipsoidului

**Teoremă.** Volumul elipsoidului format prin rotirea elipsei de ecuație  $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  în jurul axei  $Ox$  este  $V = \frac{4\pi ab^2}{3}$ .

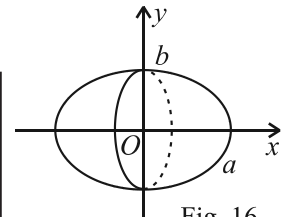


Fig. 16

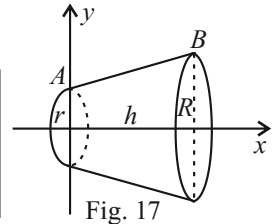
*Demonstrație.* Din ecuația elipsei deducem că  $y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ . Elipsoidul este generat de graficul funcției  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ . Volumul elipsoidului este

$$V = \pi \int_{-a}^a f^2(x) dx = \pi \int_{-a}^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^a = \frac{4\pi ab^2}{3}$$

**Observație.** Pentru  $a = b = R$  se obține volumul sferei  $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ .

### Volumul trunchiului de con

**Teoremă.** Volumul trunchiului de con de raze  $R$  și  $r$  și de înălțime  $h$  este  $V = \frac{\pi h(R^2 + Rr + r^2)}{3}$ .



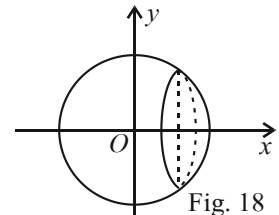
*Demonstrație.* Ecuația dreptei ce trece prin punctele  $A(0, r)$ ,  $B(h, R)$  este  $y = \frac{R-r}{h}x + r$  (figura 17). Trunchiul de con poate fi obținut prin rotația graficului funcției  $f : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{R-r}{h}x + r$ , în jurul axei  $Ox$ .

$$\begin{aligned} \text{Obținem } V &= \pi \int_0^h f^2(x) dx = \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h}x + r\right)^2 dx = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h}{R-r} \left(\frac{R-r}{h}x + r\right)^3 \Big|_0^h = \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h}{R-r} (R^3 - r^3) = \frac{\pi h(R^2 + Rr + r^2)}{3}. \end{aligned}$$

**Observație.** Luând  $r = 0$  (în volumul trunchiului de con) se obține volumul conului circular drept de rază  $R$  și înălțime  $h$ , anume  $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$ .

### Volumul segmentului de sferă

**Teoremă.** Volumul unui segment de sferă de înălțime  $h$  din sfera de rază  $R$  este  $V = \frac{\pi h^2(3R - h)}{3}$ .



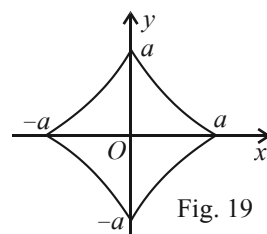
*Demonstrație.* Segmentul de sferă se obține prin rotația graficului funcției  $f : [R-h, R] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ , în jurul axei  $Ox$  (figura 18). Obținem  $V = \pi \int_{R-h}^R (R^2 - x^2) dx =$

$$= \pi \left( R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{R-h}^R = \pi \left( R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - \pi \left[ R^2(R-h) - \frac{(R-h)^3}{3} \right] = \frac{\pi h^2(3R - h)}{3}.$$

**Observație.** Pentru  $h = R$  se obține volumul emisferei  $V = \frac{2\pi R^3}{3}$ .

## Volumul astroidului

**Teoremă.** Volumul astroidului obținut prin rotația astroidei de ecuație  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ,  $a > 0$ , în jurul uneia din axele sale este  $V = \frac{36\pi a^3}{105}$ .



*Demonstrație.* Astroida este simetrică față de ambele axe de coordonate (figura 19). Considerăm  $V'$ , volumul obținut prin rotația graficului funcției  $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$  în jurul lui  $Ox$ . Rezultă că

$$\begin{aligned} V &= 2V' = 2\pi \int_0^a f^2(x) dx = 2\pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = 2\pi \int_0^a \left(a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2\right) dx = \\ &= 2\pi \left(a^2x - \frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_0^a = \frac{36\pi a^3}{105}. \end{aligned}$$



1. Calculați volumul unui tetraedru regulat și al unui cub, ambele de latură  $l$ . Comparați volumele obținute.

2. Calculați volumul conului de rotație cu rază  $r = 4$  cm și înălțimea  $h = 6$  cm.

3. Calculați volumul unei sfere cu raza  $r = 2$  cm.

4. Calculați volumul corpului de rotație determinat de funcția  $f$ . Desenați corpul obținut.

a)  $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ ;      b)  $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - x^2$ ;

c)  $f: [e, e^2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ;      d)  $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$ ;

e)  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - \ln x$ ;      f)  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ -x, & x \in (1, 2] \end{cases}$ .

5. Să se determine volumul corpului de rotație determinat de graficul funcției  $f$  în următoarele cazuri:

a)  $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{2px}$ ,  $a > 0$ ,  $p > 0$ ;      b)  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^x$ ;

c)  $f: [1, e^2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ ;      d)  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x\sqrt{1-x}$ ;

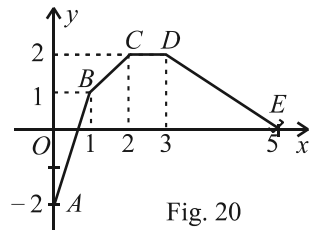
e)  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;      f)  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ ;

g)  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-x}$ ;      h)  $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \ln x$ .

### III.3. Lungimea graficului unei funcții derivabile cu derivata continuă

Fie funcția  $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x \in [0, 1] \\ x, & x \in (1, 2) \\ 2, & x \in [2, 3] \\ -x + 5, & x \in (3, 5] \end{cases}$

Graficul acestei funcții este redat în figura 20 și este dat de reuniunea segmentelor  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$ ,  $[DE]$ , unde avem  $A(0, -2)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(2, 2)$ ,  $D(3, 2)$ ,  $E(5, 0)$ . Lungimea acestui grafic este dată de  $l(G_f) = AB + BC + CD + DE =$

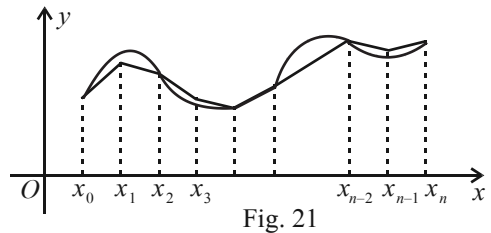


$$= \sqrt{(1-0)^2 + (f(1) - f(0))^2} + \sqrt{(2-1)^2 + (f(2) - f(1))^2} + \sqrt{(3-2)^2 + (f(3) - f(2))^2} + \sqrt{(5-3)^2 + (f(5) - f(3))^2} = \sqrt{10} + \sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} = \sqrt{10} + 3\sqrt{2} + 1.$$

Fie o funcție  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă și cu derivata  $f'$  funcție continuă. Pe graficul funcției considerăm punctele  $A_i(x_i, f(x_i))$ ,  $i = \overline{0, n}$ , unde  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ .

Observăm că

$$\begin{aligned} A_{i-1}A_i &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \\ &= (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} = \\ &= (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + f'^2(x_i)}, \text{ unde punctul } c_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ rezultă din aplicarea teoremei lui Lagrange} \end{aligned}$$



funcției  $f$  pe intervalul  $[x_{i-1}, x_i]$ .

$\Delta = (a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b)$  se numește diviziune a intervalului  $[a, b]$  (figura 21).

Considerăm funcția  $f_\Delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f_\Delta(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})$ ,  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , care reprezintă ecuația dreptei  $A_{i-1}A_i$  pe fiecare interval  $[x_{i-1}, x_i]$ .

**Definiție.** Lungimea graficului funcției  $f_\Delta$  este numărul

$$l(f_\Delta) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Vom considera norma diviziunii  $\Delta$  numărul  $\|\Delta\| = \max(x_i - x_{i-1})$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Dacă  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  putem considera că  $l(f_\Delta)$  „aproximează” lungimea graficului funcției  $f$ .

**Teoremă.** Fie funcția  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă cu derivata continuă. Atunci graficul lui  $f$  are lungime, care este dată de  $l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .

**Probleme rezolvate**

Să se determine lungimile graficelor funcțiilor:

1.  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ .
2.  $f: [1, e^2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$ .
3.  $f: \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(\sin x)$ .

*Soluții.* 1. Graficul funcției  $f$  este arcul  $OA$  din figura 22.

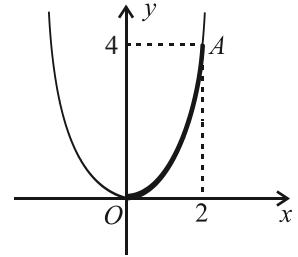


Fig. 22

Avem:  $l(f) = \int_0^2 \sqrt{1 + ((x^2)')^2} dx = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{\frac{1}{4} + x^2} dx =$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{x}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + x^2} + \frac{1}{8} \ln \left( x + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2} \right) \right] \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{17}{4}} + \frac{1}{16} \ln \frac{\sqrt{17}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \sqrt{17} + \frac{1}{16} \ln \sqrt{17}.$$

2. Graficul funcției este redat în figura 23. Funcția  $f$  este derivabilă și derivata  $f': [1, e^2] \rightarrow \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{x}$ , este o funcție continuă. Lungimea graficului este

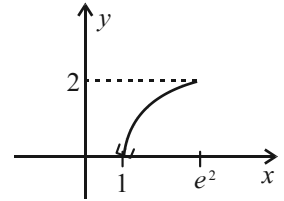


Fig. 23

$$l(f) = \int_1^{e^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_1^{e^2} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx.$$

Efectuăm schimbarea de variabilă  $t = \sqrt{x^2 + 1}$ . Notăm  $a = \sqrt{e^4 + 1}$ . Lungimea graficului

este  $l(f) = \int_{\sqrt{2}}^a \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = t \Big|_{\sqrt{2}}^a + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_{\sqrt{2}}^a = a - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{(a-1)(\sqrt{2}+1)}{(a+1)(\sqrt{2}-1)}$ .

3. Funcția  $f: \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ , este derivabilă și cu derivata  $f': \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f'(x) = \text{ctgx}$

funcție continuă. Lungimea graficului este  $l(f) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \text{ctg}^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx =$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t^2}{1-t^2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} - t \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

4. Să se determine lungimea cercului de rază  $R$ .

*Soluție.* Considerăm cercul cu centrul în  $O$  și de rază  $R$  (figura 24). Din ecuația cercului  $x^2 + y^2 = R^2$  obținem

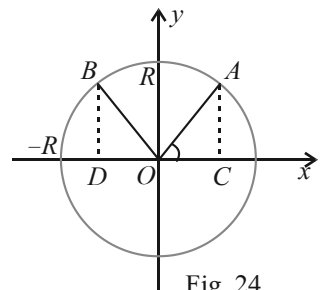


Fig. 24

$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ . Cercul este reuniunea graficelor funcțiilor  $f, g : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $g(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$ , care au graficele simetrice față de  $Ox$ . Lungimea cercului este de 4 ori lungimea arcului  $\widehat{AB}$ , unde  $\mu(\widehat{xOA}) = \frac{\pi}{4}$ ,  $\mu(\widehat{AOB}) = \frac{\pi}{2}$ . Obținem

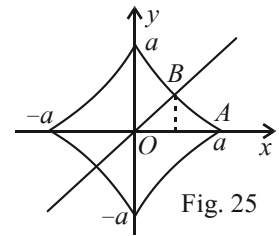
$C\left(R\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), D\left(-\frac{R\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ . Fie  $a = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ . Lungimea graficului este dată de

$$l(f) = 4 \int_{-a}^a \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = 4 \int_{-a}^a \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 4R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_{-a}^a = 4R \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\pi R.$$

5. Să se determine lungimea asteroidei.

*Soluție.* Vom considera asteroida de ecuație  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ,  $a > 0$ .

Graficul asteroidei fiind simetric față de axele de coordonate și bisectoarele lor, atunci lungimea graficului este de 8 ori lungimea arcului  $AB$ , unde avem  $A(a, 0)$ ,  $B(b, b)$ , și  $b = 2^{-\frac{2}{3}}$  este abscisa punctului de intersecție a asteroidei cu bisectoarea de ecuație  $y = x$ .



Obținem  $f'(x) = \frac{3}{2} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}\right) = -x^{-\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

Atunci  $1 + (f'(x))^2 = 1 + x^{-\frac{2}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right) = a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}}$ ,  $\forall x \in [b, a]$ . Lungimea graficului asteroidei

este  $8 \int_b^a a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{2}{3}} dx = 12 a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} \Big|_b^a = 6a$ .



Să se determine lungimile graficelor următoarelor funcții:

1.  $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ ;    2.  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - x^2$ ;

3.  $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ ;    4.  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$ ;

5.  $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2\sqrt{x}$ ;

6.  $f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ;

7.  $f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1 - x^2)$ ;

8.  $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1 + \cos x)$ ;

9.  $f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - \ln x$ ;

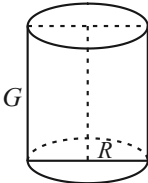
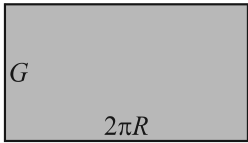
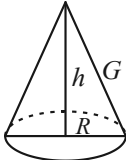
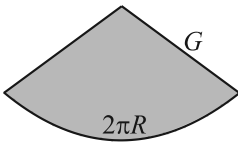
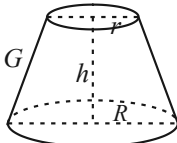
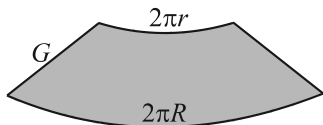
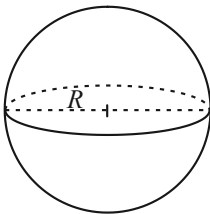
10.  $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{x}$ ;

11.  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ;

12.  $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2x + x^2}$ .

### III.4. Aria unei suprafețe de rotație

Ca și în cazul volumelor corpurilor geometrice, se va folosi o formulă cu integrala definită pentru calculul ariei suprafeței obținută prin rotirea în jurul axei  $Ox$  a graficului unei funcții derivabile cu derivata continuă. Reamintim formulele pentru ariile unor corpuri de rotație, precum și desfășurarea plană a lor.

Corpul și aria (laterală)	Reprezentarea geometrică	Desfășurarea plană
<p>Cilindrul</p> $A = 2\pi RG$		
<p>Conul</p> $A = \pi RG$		
<p>Trunchiul de con</p> $A = \pi G(R + r)$		
<p>Sfera</p> $A = 4\pi R^2$		<p>Suprafața unei sfere nu are o desfășurare plană.</p>

**Definiție.** Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  o funcție continuă.

Mulțimea  $S_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2 + z^2} = f^2(x), x \in [a, b]\}$  se numește *suprafața de rotație* determinată de funcția  $f$  (obținută prin rotația graficului funcției  $f$  în jurul axei  $Ox$ ).

**Observație.** O „justificare” a teoremei care urmează o reprezintă aproximarea ariei suprafeței  $S_f$  cu suprafețele laterale ale unor „trunchiuri de con” (figura 26).

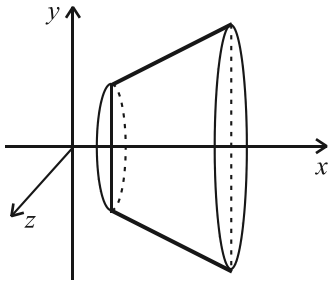


Fig. 26 a)

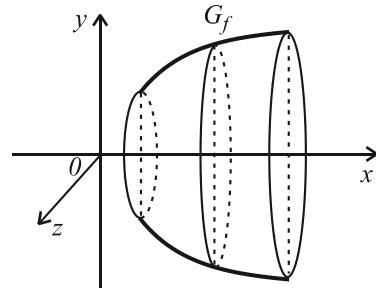


Fig. 26 b)

**Teoremă.** Fie o funcție  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  derivabilă cu derivata continuă. Atunci  $S_f$  are arie și aria este dată de  $A(S_f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .

**Observații.**

■ Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , atunci avem  $A(S_f) = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .

■ Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  este o funcție cu derivata continuă pe  $(a, b)$  astfel încât funcția  $f \cdot \sqrt{1 + (f')^2}$  are limite finite în  $a$  și  $b$ , atunci suprafața de rotație determinată de  $f$  are aria  $A(S_f) = 2\pi \int_a^b h(x) dx$ , unde  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este prelungirea prin continuitate a funcției  $f \cdot \sqrt{1 + (f')^2}$  la intervalul închis  $[a, b]$ .

**Probleme rezolvate**

**1.** Aria sferei de rază  $R$  este  $4\pi R^2$ .

*Soluție.* Suprafața sferei se obține prin rotirea graficului funcției

$f: [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ , în jurul axei  $Ox$  (figura 27).

Funcția  $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$  este continuă pe intervalul  $(-R, R)$ .

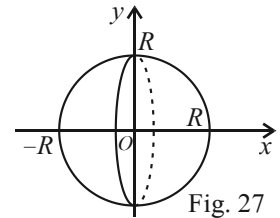


Fig. 27

Prelungirea prin continuitate a funcției  $f \cdot \sqrt{1 + (f')^2}$  pe intervalul  $[-R, R]$  este funcția

$$h(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} = \sqrt{(R^2 - x^2) \left(1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}\right)} = R.$$

Aria sferei este deci

$$A(S_f) = 2\pi \int_{-R}^R R dx = 2\pi R x \Big|_{-R}^R = 4\pi R^2.$$

**Observație.** Putem calcula aria sferei și astfel:

$$A(S_f) = 2\pi \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-R+\varepsilon}^{R-\varepsilon} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = 2\pi \int_{-1}^1 R dx = 4\pi R^2.$$

2. Aria obținută prin rotirea în jurul lui  $Ox$  a graficului elipsei de ecuație  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a > b > 0$ , este  $2\pi ab \left( \frac{\arcsin e}{e} + \sqrt{1 - e^2} \right)$ , unde  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{c}{a}$  se numește *excentricitatea elipsei*.

*Soluție.* Din ecuația elipsei se obține  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ . Considerăm funcția  $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (\text{figura } 28). \quad \text{Funcția}$$

$$f'(x) = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

este continuă pe intervalul  $(-a, a)$

și avem  $f(x)f'(x) = -\frac{b^2x}{a^2}$  pentru orice  $x \in (-a, a)$ . Prelungirea prin continuitate a funcției

$$f \cdot \sqrt{1 + (f')^2} \text{ la intervalul } [-a, a] \text{ este funcția dată de } h(x) = \sqrt{f^2(x) + (f(x) \cdot f'(x))^2} =$$

$$= \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{b^4}{a^4}x^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (ex)^2}. \text{ Aria va fi dată de}$$

$$A(S_f) = \frac{2\pi b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - (ex)^2} dx = 2\pi ab \left( \frac{\arcsin e}{e} + \sqrt{1 - e^2} \right).$$

3. Să se determine ariile suprafețelor de rotație determinate de următoarele funcții:

a)  $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$ ;

b)  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

*Soluții.* a) Graficul funcției  $f$  este redat în figura 29.

Avem  $f'(x) = -\sin x$  continuă pe  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  și  $f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}$ .

Efectuând schimbarea de variabilă  $t = \sin x$  rezultă că  $A(S_f) = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} dt =$

$$= \pi \left[ t\sqrt{1 + t^2} + \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) \right] \Big|_0^1 = \pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})).$$

b) Graficul funcției  $f$  este redat în figura 30.

Avem  $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e}$  funcție continuă pe  $[0, 1]$  și

$$f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})\sqrt{(e^x + e^{-x})^2} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}). \text{ Aria suprafeței}$$

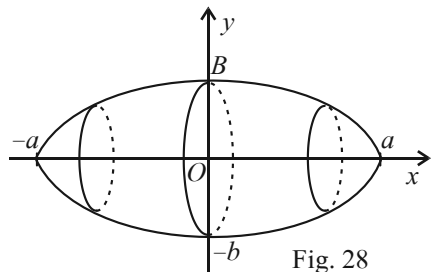


Fig. 28

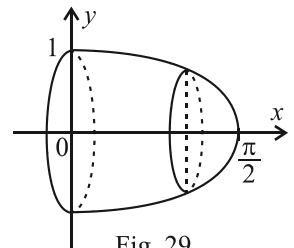


Fig. 29

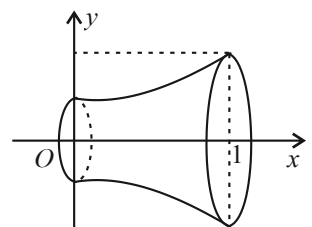


Fig. 30

de rotație este  $A(S_f) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx = \frac{\pi}{4} (e^{2x} + x - e^{-2x}) \Big|_0^1 = \frac{\pi(e^4 + e^2 - 1)}{4e^2}$ .

4. Să se determine aria suprafeței de rotație a unui paraboloid de înălțime  $h$ .

*Soluție.* Considerăm parabola de ecuație  $y^2 = 2px$ ,  $p > 0$ . Paraboloidul se obține prin rotația graficului funcției

$f: [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{2px}$  în jurul axei  $Ox$  (fig. 31). Avem

$f'(x) = \sqrt{\frac{p}{2x}}$  continuă pe  $(0, h]$ . Prelungirea prin continuitate

a funcției  $f \cdot \sqrt{1+(f')^2}$  la intervalul  $[0, h]$  este funcția  $g(x) = \sqrt{p} \cdot \sqrt{2p+x}$ . Aria suprafeței de

rotație este  $A(S_f) = 2\pi\sqrt{p} \int_0^h \sqrt{2x+px} dx = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3} (2x+p)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^h = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3} \left[ (2h+p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}} \right]$ .

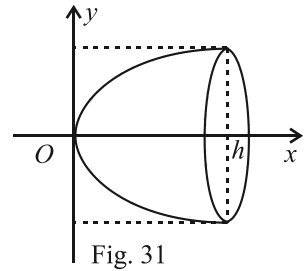


Fig. 31



1. Să se determine ariile laterale ale următoarelor corpuri:

- a) conul circular drept;
- b) trunchiul de con circular drept;
- c) cilindrul circular drept.

2. Să se determine ariile suprafețelor de rotație (în jurul axei  $Ox$ ) pentru următoarele funcții:

- a)  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 + \sqrt{2x}$ ;
- b)  $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2}$ ;
- c)  $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{2x}$ ;
- d)  $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2\sqrt{x}$ ;
- e)  $f: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ ;
- f)  $f: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

### III.5. Centrul de greutate al unei suprafețe plane

În clasele anterioare s-a demonstrat că, dacă  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$  sunt vârfurile unui triunghi (figura 32),

atunci avem  $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$  și  $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$ .

Analog s-a demonstrat că, dacă  $M$  este mijlocul segmentului  $(AB)$  avem  $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ .

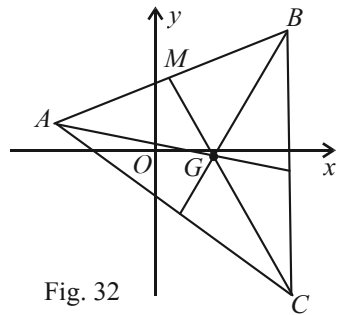


Fig. 32

Vom extinde aceste rezultate prin următoarea:

**Teoremă.** Fiind date  $n$  puncte  $A_1, A_2, \dots, A_n$  (în plan sau în spațiu),  $n \geq 2$ , atunci:

- a) există un punct unic  $G$  astfel încât  $\sum_{k=1}^n \overline{GA}_k = \overline{GA}_1 + \overline{GA}_2 + \dots + \overline{GA}_n = \vec{0}$ ;
- b) pentru orice punct  $M$  (din plan sau spațiu) avem  $\sum_{k=1}^n \overline{MA}_k = n\overline{MG}$ .

*Demonstrație.* Pentru  $n = 2$  luăm  $G$  mijlocul lui  $(A_1A_2)$ . Cum  $\overline{GA}_1$  și  $\overline{GA}_2$  sunt vectori opuși rezultă că  $\overline{GA}_1 + \overline{GA}_2 = \vec{0}$ . Pentru orice punct  $M$  avem  $\overline{MA}_1 + \overline{MA}_2 = (\overline{MG} + \overline{GA}_1) + (\overline{MG} + \overline{GA}_2) = 2\overline{MG} + (\overline{GA}_1 + \overline{GA}_2) = 2\overline{MG}$ . În plus  $G$  este unic.

Pentru  $n = 3$ , fie  $G_3$  mijlocul lui  $(A_1A_2)$ .

Fie  $G \in (A_3G_3)$  astfel încât  $GA_3 = 2GG_3$ . Acest punct  $G$  este unic (figura 33). Rezultă că  $\overline{GA}_1 + \overline{GA}_2 = 2\overline{GG}_3 = \overline{AG}_3$  și deci  $\overline{GA}_1 + \overline{GA}_2 + \overline{GA}_3 = \vec{0}$ . Pentru orice punct  $M$  avem  $\overline{MA}_1 + \overline{MA}_2 + \overline{MA}_3 = (\overline{MG} + \overline{GA}_1) + (\overline{MG} + \overline{GA}_2) + (\overline{MG} + \overline{GA}_3) = 3\overline{MG} + (\overline{GA}_1 + \overline{GA}_2 + \overline{GA}_3) = 3\overline{MG}$ .

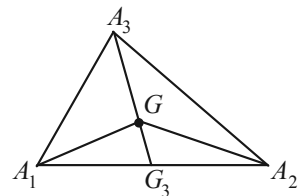


Fig. 33

Pentru  $n = 4$  considerăm punctul  $G_4$  pentru care  $\overline{G_4A}_1 + \overline{G_4A}_2 + \overline{G_4A}_3 = \vec{0}$  (punctul  $G_4$  există și este unic din cazul  $n = 3$ ).

Se ia punctul  $G \in (A_4G_4)$  astfel încât  $GA_4 = \frac{3}{4}A_4G_4$ , adică  $3\overline{GG}_4 + \overline{GA}_4 = \vec{0}$ . Rezultă imediat că  $\overline{GA}_1 + \overline{GA}_2 + \overline{GA}_3 + \overline{GA}_4 = \vec{0}$ . Rezultă imediat că  $\overline{GA}_1 + \overline{GA}_2 + \overline{GA}_3 + \overline{GA}_4 = \vec{0}$ .

Deoarece pentru  $i = \overline{1,4}$  avem  $\overline{MA}_i = \overline{MG} + \overline{GA}_i$  rezultă că  $\sum_{i=1}^4 \overline{MA}_i = \sum_{i=1}^4 (\overline{MG} + \overline{GA}_i) = 4\overline{MG} + \sum_{i=1}^4 \overline{GA}_i = 4\overline{MG}$ .

Procedeeul continuă pentru  $n \geq 5$ .

**Definiție.** Se numește *punct ponderat* orice pereche  $(A, a)$  formată dintr-un punct  $A$  și un număr real  $a$  (numit ponderea sau masa lui  $A$ ).

**Teoremă.** Pentru orice sistem de două puncte ponderate  $(A, a)$  și  $(B, b)$  cu  $a + b \neq 0$ , există și este unic un punct  $G$  cu proprietatea că  $a\overline{GA} + b\overline{GB} = \vec{0}$ .

*Demonstrație.*  $a\overline{GA} + b\overline{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overline{GA} + b(\overline{GA} + \overline{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow (a + b)\overline{GA} = -b\overline{AB} = b\overline{BA} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{b}{a+b}\overline{AB}$ . Ultima relație arată că  $G$  este un punct unic pe  $AB$ .

- Observații.** ■ Dacă  $a + b = 0$  și  $A \neq B$ , atunci  $G$  nu există.  
 ■ Dacă  $a + b = 0$  și  $A = B$ , atunci  $G$  este nedeterminat.

**Definiție.** Pentru sistemul de puncte ponderate  $(A, a)$  și  $(B, b)$  cu  $a + b \neq 0$ , punctul  $G$  cu proprietatea  $a\overline{GA} + b\overline{GB} = \vec{0}$  se numește *baricentrul* acestor puncte. Dacă  $a = b \neq 0$ ,  $G$  se numește *izobaricentru* (sau centru de greutate) al sistemului de puncte  $A$  și  $B$ .

**Observație.** Dacă  $a = b \neq 0$ , atunci  $G$  este mijlocul lui  $(AB)$ .

**Teoremă.** Fie  $G$  baricentrul sistemului de puncte ponderate  $(A, a)$ ,  $(B, b)$ , cu  $a + b \neq 0$ .

a) Pentru orice punct  $M$  (din plan sau spațiu) avem  $a\overline{MA} + b\overline{MB} = (a + b)\overline{MG}$ .

b) Dacă într-un sistem de coordonate avem  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ , atunci

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a + b}, y_G = \frac{ay_A + by_B}{a + b}.$$

*Demonstrație.* a)  $a\overline{MA} + b\overline{MB} = a(\overline{MG} + \overline{GA}) + b(\overline{MG} + \overline{GB}) = (a + b)\overline{MG} + (a\overline{GA} + b\overline{GB}) = (a + b)\overline{MG}$ .

b) Luăm ca punct  $M$ , originea sistemului de coordonate. Atunci  $\overline{OG} = \frac{a}{a+b}\overline{OA} + \frac{b}{a+b}\overline{OB}$

și deci  $x_G\vec{i} + y_G\vec{j} = \frac{a}{a+b}(x_A\vec{i} + y_A\vec{j}) + \frac{b}{a+b}(x_B\vec{i} + y_B\vec{j}) \Leftrightarrow x_G\vec{i} + y_G\vec{j} = \frac{ax_A + bx_B}{a+b}\vec{i} + \frac{ay_A + by_B}{a+b}\vec{j} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a + b}, y_G = \frac{ay_A + by_B}{a + b}.$$

**Teoremă.** Fie sistemul de puncte ponderate  $(A_i, a_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $n \geq 2$ , astfel încât

$$a = \sum_{i=1}^n a_i \neq 0.$$

a) Există și este unic un punct  $G$  astfel încât  $\sum_{i=1}^n a_i\overline{GA}_i = \vec{0}$ .

b) Dacă  $M$  este un punct oarecare în plan sau spațiu avem  $\sum_{i=1}^n a_i\overline{MA}_i = a\overline{MG}$ .

*Demonstrație.* Fie funcția  $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V}$ ,  $f(M) = \sum_{i=1}^n a_i \overline{MA_i}$ , unde  $\mathcal{S}$  este spațiul, iar  $\mathcal{V}$  mulțimea vectorilor din spațiu. Fie  $O$  un punct fixat în  $\mathcal{S}$ . Atunci avem

$$f(M) = \sum_{i=1}^n a_i (\overline{OA_i} - \overline{OM}) = \sum_{i=1}^n a_i \overline{OA_i} - \sum_{i=1}^n a_i \cdot \overline{OM} = \sum_{i=1}^n a_i \overline{OA_i} - a \cdot \overline{OM} = f(O) - a \cdot \overline{OM}.$$

Cum  $0, A_i, a_i$  sunt fixate, condiția ca să existe un punct  $G$  cu  $f(G) = \vec{0}$ , devine  $OG = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n a_i \overline{OA_i}$ . Deci punctul  $G$  există.

Din  $\overline{OG} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n a_i \overline{OA_i}$  rezultă că  $f(O) = a \cdot \overline{OG}$  și deci  $G$  este unic.

$$\text{Avem } f(M) = a \cdot \overline{OG} - a \cdot \overline{OM} = a \overline{MG}.$$

**Observații.** ■ Dacă  $G$  este baricentrul sistemului de puncte ponderate  $(A_i, a_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\sum_{i=1}^n a_i = a \neq 0$ , atunci într-un sistem de coordonate  $Oxyz$  baricentrul  $G$  are coordonatele  $x_G = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n a_i x_i$ ,  $y_G = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n a_i y_i$ ,  $z_G = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n a_i z_i$ .

■ Dacă  $n = 3$ ,  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ , coordonatele centrului de greutate sunt  $x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ ,  $y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$ .

### Probleme rezolvate

**1.** Punctele  $A, B, C$  sunt coliniare dacă și numai dacă există  $a, b, c \in \mathbb{R}$  nu toate nule astfel încât  $a + b + c = 0$  și  $a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC} = \vec{0}$ , unde  $M$  este un punct oarecare.

*Soluție.* Fie  $c \neq 0$ . Cum  $a + b = -c$ , avem  $a + b \neq 0$ . Atunci există un punct unic  $G \in AB$  astfel încât  $a\overline{MA} + b\overline{MB} = (a + b)\overline{MG}$ . Dacă  $a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC} = \vec{0}$ , rezultă că  $(a + b)\overline{MG} = -c\overline{MC} = (a + b)\overline{MC}$  și deci  $C = G \in AB$ .

Reciproc, dacă  $A, B, C$  sunt coliniare, atunci există  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\overline{MB} - \overline{MA} = \alpha\overline{MC} - \alpha\overline{MA}$ , adică  $(\alpha - 1)\overline{MA} + \overline{MB} - \alpha\overline{MC} = \vec{0}$ . Luăm  $a = \alpha - 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = -\alpha$  și atunci  $a + b + c = 0$ .

**2.** Fie  $A, B, C$  trei puncte necoliniare fixate. Să se determine mulțimea punctelor  $M \in (ABC)$  pentru care  $|\overline{MA} - 2\overline{MB} + 3\overline{MC}| = 8$ .

*Soluție.* Fie  $G$  baricentrul sistemului de puncte ponderate  $(A, 1), (B, -2), (C, 3)$ . Deoarece  $1 + (-2) + 3 \neq 0$ , există un punct unic  $G \in (ABC)$  astfel încât  $\overline{MA} - 2\overline{MB} + 3\overline{MC} = (1 - 2 + 3)\overline{MG} = 2\overline{MG}$ . Obținem  $|2\overline{MG}| = 8$ , adică  $|\overline{MG}| = 4$ . Locul geometric este cercul de centru  $G$  și rază 4.

Vom extinde aceste concepte de la sisteme discrete (sisteme cu număr finit de puncte) la plăci plane cu o infinitate de puncte (adică plăci a căror grosime este suficient de mică astfel încât poate fi neglijabilă). Vom identifica aceste plăci cu mulțimi de puncte din plan care au arie. Vom considera că toate plăcile sunt omogene, adică masa fiecărei părți din placă este direct proporțională cu aria părții respective. Pentru început fie dreptunghiul  $D$ , care poate fi identificat cu produsul cartezian  $[a, b] \times [c, d]$ . Centrul de greutate al dreptunghiului are coordonatele  $x_G = \frac{a+b}{2}$ ,  $y_G = \frac{c+d}{2}$  (figura 34).

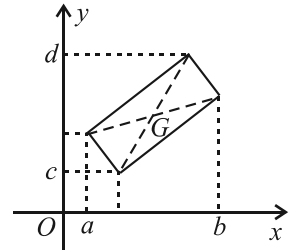


Fig. 34

Fie funcțiile  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $f \leq g$ . Vom calcula coordonatele baricentru plăcii  $S = \{(x, y) | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ . Fie  $\Delta = (a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b)$  o diviziune a intervalului  $[a, b]$ . Pentru orice  $i = \overline{0, n-1}$  vom considera dreptunghiul

$D_i = [x_i, x_{i+1}] \times [f(x_i), f(x_{i+1})]$  (fig. 35), care are baricentru  $x_{G_i} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ ,  $y_{G_i} = \frac{f(x_i) + g(x_i)}{2}$ .

Aproximăm placa  $S$  cu reuniunea de dreptunghiuri  $D_0, D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$ , care are baricentru

$$\text{cu } x_G = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_{G_i} \cdot \text{aria}(D_i)}{\text{aria } S} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_{G_i} [g(x_i) - f(x_i)] (x_{i+1} - x_i)}{\sum_{i=0}^{n-1} [g(x_i) - f(x_i)] (x_{i+1} - x_i)},$$

$$y_G = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [g^2(x_i) - f^2(x_i)] (x_{i+1} - x_i)}{\sum_{i=0}^{n-1} [g(x_i) - f(x_i)] (x_{i+1} - x_i)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} y_{G_i} \text{aria}(D_i)}{\text{aria } S}.$$

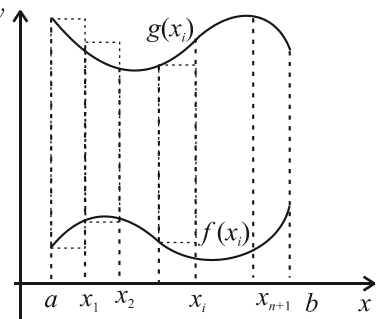


Fig. 35

Din aceste considerații rezultă următoarea:

**Teoremă.** Fie  $S$  o placă plană mărginită de funcțiile continue  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $f \leq g$  și  $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \neq 0$ .

Centrul de greutate al plăcii este punctul  $G$  de coordonate:

$$x_G = \frac{\int_a^b x [g(x) - f(x)] dx}{\int_a^b [g(x) - f(x)] dx}, \quad y_G = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [g^2(x) - f^2(x)] dx}{\int_a^b [g(x) - f(x)] dx}.$$

**Observație.** Dacă  $f \geq 0, g = 0, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , centrul de greutate  $G$  al plăcii omogene  $S$  mărginită de graficul lui  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = a, x = b$  are coordonatele:

$$x_G = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}, \quad y_G = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

**Probleme rezolvate**

1. Să se determine coordonatele centrului de greutate al suprafeței delimitate de graficul funcției  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 0, x = 1$  (fig. 36).

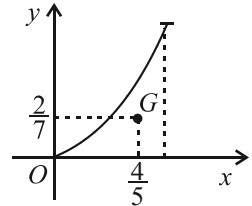


Fig. 36

*Soluție.* Avem  $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5}$ ;

$\int_0^1 f(x) dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{2} \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{1}{14}$ .

Coordonatele centrului de greutate sunt  $x_G = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$ ,  $y_G = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{7}$ .

2. Să se determine coordonatele centrului de greutate al suprafeței determinate de parabola  $y^2 = x$  și dreapta  $x = 4$ .

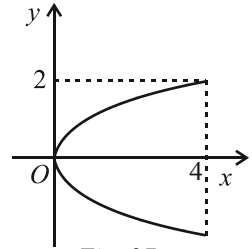


Fig. 37

*Soluție.* Suprafața este determinată de graficele funcțiilor  $g, f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}, f(x) = -\sqrt{x}$ , care sunt simetrice față de  $Ox$  (figura 37).

Avem  $\int_0^4 x [g(x) - f(x)] dx = 2 \int_0^4 x \sqrt{x} dx = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^4 = \frac{128}{5}$ ,

$\int_0^4 (g(x) - f(x)) dx = 2 \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{32}{3}$ ,  $\int_0^4 (g^2(x) - f^2(x)) dx = 0$

și deci  $x_G = \frac{128}{5} \cdot \frac{3}{32} = \frac{12}{5}$ ,  $y_G = 0$ .

3. Să se determine coordonatele centrului de greutate al unui semidisc cu centrul în originea sistemului de coordonate, de rază  $R$  și aflat deasupra axei  $Ox$ .

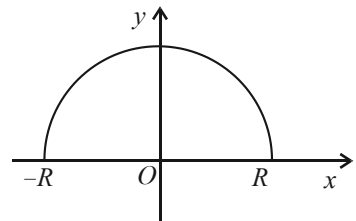


Fig. 38

*Soluție.* Suprafața este determinată de axa  $Ox$ , dreptele  $x = -R, x = R$  și graficul funcției  $f: [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  (figura 38).

Avem  $\int_{-R}^R x f(x) dx = \int_{-R}^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx = 0$  (deoarece funcția este impară) și deci  $x_G = 0$ .

Avem  $\int_{-R}^R f(x) dx = 2 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \pi R^2$ ,  $\frac{1}{2} \int_{-R}^R f^2(x) dx = \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \left( R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^R =$   
 $= \frac{2R^3}{3}$  și deci  $y_G = \frac{2R}{3\pi}$ .



Să se determine coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor omogene determinate de:

1.  $f(x) = 1$ ,  $g(x) = 5$ ,  $h(x) = 2x + 1$ ;

2.  $f(x) = x - 1$ ,  $g(x) = 2x + 3$ ,  $h(x) = -x + 3$ ;

3.  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x$ ;

4.  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x^3$ ;

5.  $f(x) = 9 - x^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ;

6.  $y = -2$ ,  $y = 2$ ,  $y^2 = x - 1$ ;

7.  $f(x) = -x^2 + 3$ ,  $g(x) = x^2 - 2x - 1$ ;

8.  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \cos x$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ;

9.  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in [1, 5]$ ;

10.  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ .

# PROBE DE EVALUARE

Pentru testele următoare, timpul efectiv de lucru este de 50 minute.

## TESTUL 1

1. Să se determine aria suprafeței cuprinsă între graficele curbelor de ecuații  $x^2 = 4y$ ,  $y^2 = 4x$ .  
(1,5 p)
2. Să se determine volumul corpului de rotație determinat de graficul funcției  $f(x) = \ln(x + e)$ ,  $f: [-e + 1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ .  
(1,5 p)
3. Să se determine lungimea graficului funcției  $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ .  
(2 p)
4. Să se determine aria suprafeței de rotație determinată de graficul funcției  $f: \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{ctgx}$ .  
(2 p)
5. Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii omogene determinate de graficele funcțiilor  $f, g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $g(-x) = 2x$ .  
(2 p)

## TESTUL 2

1. Să se determine aria mulțimii între curbele de ecuații  $f(x) = x \ln x$ ,  $g(x) = x$  și dreptele de ecuații  $x = 1$ ,  $x = e$ .  
(1,5 p)
2. Să se determine volumul corpului de rotație determinat de graficul funcției  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}$ .  
(1,5 p)
3. Să se determine lungimea graficului funcției  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ . (2 p)
4. Să se determine aria suprafeței de rotație determinată de graficul funcției  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$ .  
(2 p)
5. Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii omogene determinate de graficele funcțiilor  $f, g: \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}x$  și dreptele de ecuații  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$ .  
(2 p)

### TESTUL 3

1. Să se determine aria suprafeței cuprinsă între axa  $Ox$ , axa  $Oy$  și cercul de centru  $A(2, 2)$  și rază 2. **(1,5 p)**

2. Să se determine volumul corpului de rotație determinat de graficul funcției  $f: [1, e^2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \ln x$ . **(1,5 p)**

3. Să se determine lungimea graficului funcției  $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ . **(2 p)**

4. Să se determine aria suprafeței de rotație determinată de graficul funcției  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . **(2 p)**

5. Să se determine coordonatele centrului de greutate determinat de graficele funcțiilor  $f, g: \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x, g(x) = \operatorname{ctgx}$  și drepte de ecuații  $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{2}$ . **(2 p)**

### TESTUL 4

1. Să se determine aria suprafeței cuprinsă între axa  $Ox$ , axa  $Oy$  și cercul de centru  $A(a, a)$  și rază  $a, a > 0$ . **(1,5 p)**

2. Să se determine volumul corpului de rotație determinat de graficul funcției  $f: [e; e^2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \ln x$ . **(1,5 p)**

3. Să se determine lungimea graficului funcției  $f: [a; 4a] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{ax}$ . **(2 p)**

4. Să se determine aria suprafeței de rotație determinată de graficul funcției  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . **(2 p)**

5. Să se determine coordonatele centrului de greutate determinat de graficele funcțiilor  $f, g: \left[0; \frac{\pi}{4}\right], f(x) = \cos x, g(x) = \operatorname{tgx}$  și drepte de ecuații  $x = 0, x = \frac{\pi}{4}$ . **(2 p)**

## PROBLEME DE SINTEZĂ

1. Fie funcția  $f: \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ .

a) Determinați  $m$  astfel încât  $f(x) \geq m, \forall x \geq 1$ ;

b) Fie șirurile  $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}, (c_n)_{n \geq 0}$  definite astfel:  $a_0 = 2, a_{n+1} = f(a_n), \forall n \geq 0$ ,  
 $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n}, c_n = \ln(b_n), \forall n \geq 0$ .

Determinați formula termenului general pentru fiecare șir și  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

2. Fie funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ . Fie

șirurile  $(I_n)_{n \geq 8}, (a_n)_{n \geq 8}, (b_n)_{n \geq 8}$  definite astfel:  $I_n = \int_8^n f(x) dx, a_n = \sum_{k=8}^n f(k), b_n = a_n - I_n$ .

a) Trasați graficul funcției  $f$ .

b) Demonstrați:  $a_{n+1} - f(8) \leq I_n \leq a_n, \forall n \geq 8$ .

c) Determinați  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

d) Demonstrați că  $(b_n)$  este convergent.

3. Fie funcțiile  $f, g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x, f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}.$$

Fie  $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_1^x f(t) dt$ .

a) Demonstrați că ecuația  $g(x) = 0$  admite o soluție unică  $\alpha \in (1, e)$ .

b) Trasați graficul funcției  $f$ .

c) Demonstrați că  $F$  este derivabilă pe  $(0, \infty)$ .

d) Demonstrați:  $\frac{\ln x}{(1+x)^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x^2}, \forall x \geq 1$ .

e) Demonstrați că pentru orice  $x > 1$ :

$$\ln 2 + \ln \frac{x}{x+1} - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$$

f) Știind că există  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ , arătați că  $a \in [\ln 2; 1]$ .

4. Fie funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}, g(x) = x - e^{x-1}. \text{ Fie}$$

$$I = \int_0^1 f(x) dx, I_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx, n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Studiați monotonia funcției  $g$  și demonstrați că  $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$  și  $1 - xe^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

b) Trasați graficul funcției  $f$  și demonstrați că  $1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}, \forall x \geq 0$ .

c) Calculați  $I_1$  și  $I_2$ .

d) Demonstrați că pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  avem:

$$1 + xe^{-x} + x^2 e^{-2x} + \dots + x^n e^{-nx} = \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}}.$$

5. Fie funcția  $f_n: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ 2n+1, & x = 0 \end{cases} \text{ unde } n \in \mathbb{N}.$$

a) Demonstrați că  $f_n$  este continuă pe  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

b) Este  $f_n$  derivabilă pe  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ?

c) Determinați  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$ .

6. Fie funcția  $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Funcția  $f$  are următorul tabel de variație:

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$+\infty$					
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$				
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$2$	$\nearrow$	$+\infty$

a) Determinați coeficienții  $a, b, c$ .

b) Trasați graficul funcției  $f$ .

c) Determinați asimptotele graficului și poziția graficului față de asimptota oblică.

d) Determinați aria domeniului limitat de graficul funcției și dreptele de ecuații  $y = x + 1$ ,  $x = -n$ ,  $x = -n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ .

7. Pentru orice  $x > 0$  definim funcțiile:

$$F(x) = \int_1^x \cos(\ln t) dt, \quad G(x) = \int_1^x \sin(\ln t) dt.$$

a) Determinați două relații între  $F$  și  $G$ .

b) Determinați  $F$  și  $G$ .

8. Fie șirul  $x_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$ ,  $n \geq 1$ .

a) Determinați o formulă mai simplă pentru

suma:  $1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Calculați  $x_n + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$ .

c) Determinați  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

9. Fie  $f: \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ ,

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x} dx.$$

a) Demonstrați  $1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$ ,  $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

b) Demonstrați  $I - J = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$ .

c) Calculați  $J$ .

d) Determinați  $a$  și  $b$  astfel încât

$$a \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq b.$$

10. Fie funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

a) Studiați variația funcției  $f$ .

b) Comparați numerele  $a^b$  și  $b^a$ ,  $0 < a < b$ .

c) Comparați numerele  $e^\pi$  și  $\pi^e$ .

d) Determinați  $m, n \in \mathbb{N}^*$  distincte astfel încât  $f(m) = f(n)$ .

e) Pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  comparați numerele

$$\left(\sqrt{n+1}\right)^{\sqrt{n}} \text{ și } \left(\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n+1}}.$$

11. Fie funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{2x+a}{3} - \sqrt[3]{ax^2}, \quad a > 0. \text{ Fie } b, c > 0.$$

a) Demonstrați că  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x > 0$  și rezolvați ecuația  $f(x) = 0$ .

b) Demonstrați că  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot \left(\frac{b+c}{2}\right)^2}$ .

c) Demonstrați că  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ .

12. Fie funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \ln(1+nx) - \frac{n}{n+1} \ln x, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrați că:

a)  $f(x) > \ln(1+n)$ ,  $\forall x > 0$ ,  $x \neq 1$ ;

b)  $x^n < \left(\frac{1+nx}{1+n}\right)^{n+1}, \forall x > 0, x \neq 1;$

c)  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, n \geq 1;$

d)  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}, n \geq 1.$

13. Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  definit prin

$$x_0 = a > 0, x_{n+1} = x_n^2 + x_n, \forall n \geq 0.$$

Determinați  $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k}, n \geq 1.$

14. Studiați monotonia, mărginirea și convergența șirurilor:

a)  $x_n = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{3}}}, n$  radicali,  $n \geq 1;$

b)  $x_0 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \forall n \geq 0.$

15. Se consideră funcțiile

$$f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x) - x \text{ și}$$

$$g: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{-x}{1+x}$  și

$$g'(x) = \frac{x^2}{1+x}, \forall x > -1.$$

b) Să se calculeze  $f'(0)$  și  $g'(0)$ .

c) Să se arate că  $f(x) < 0 < g(x), \forall x > 0.$

d) Să se arate că  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3},$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*.$

16. Se consideră funcțiile  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_0(x) = \cos x$  și  $f_{n+1}(x) = f'_n(x), \forall n \in \mathbb{N}$  și  $\forall x \in \mathbb{R}.$

a) Să se calculeze  $f_0(\pi).$

b) Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_0(x)$  nu există.

c) Să se calculeze  $f_1(\pi).$

d) Să se calculeze  $\int_0^{2\pi} f_1(x) dx.$

e) Să se determine  $f_{10}(x), x \in \mathbb{R}.$

f) Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)}{n} = 0, x \in \mathbb{R}.$$

17. Fie funcțiile  $I_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, I_0(x) = 1$  și

$$I_{n+1}(x) = \int_0^x I_n(t) dt, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Să se calculeze

$$I_0(1) + I_0(2) + \dots + I_0(2003).$$

b) Să se determine  $I_1(x), x \in \mathbb{R}.$

c) Să se determine asimptota către  $+\infty$  la graficul funcției  $I_1(x).$

d) Utilizând metoda inducției matematice,

să se arate că  $I_n(x) = \frac{x^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}.$

e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x).$

f) Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_0(1) + I_1(1) + \dots + I_n(1)}{n} = 0.$$

18. Se consideră șirul  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}},$  definit prin

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}, I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se calculeze  $I_0.$

b) Să se verifice că  $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

c) Utilizând metoda integrării prin părți,

să se arate că  $nI_n = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$ ,  
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

d) Să se arate că  $I_{n+1} \leq I_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

f) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ .

19. Se consideră șirul  $(I_n)_{n \geq 0}$ , definit prin

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \text{ și } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx.$$

a) Să se calculeze  $I_0$  și  $I_1$ .

b) Să se verifice relația

$$I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

c) Să se arate că  $I_n \geq I_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

d) Să se deducă inegalitățile

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}, \forall n \geq 2.$$

e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ .

f) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( nI_n - \frac{1}{2} \right) \sqrt{n}$ .

20. Se consideră funcția

$$f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

a) Să se determine asimptota verticală a graficului funcției  $f$ .

b) Să se determine asimptota la  $+\infty$  a graficului funcției  $f$ .

c) Să se arate că  $f(x) - 1 + x - x^2 \leq 0$ ,  
 $\forall x \geq 0$ .

d) Să se arate că

$$f(x) - 1 + x - x^2 + x^3 \geq 0, \forall x \geq 0.$$

e) Să se deducă inegalitățile

$$1 - x + x^2 - x^3 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2, \forall x \geq 0.$$

f) Să se arate că aria cuprinsă între graficul

funcției  $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{1+x^9}$ , axa

$Ox$  și dreptele  $x=0$  și  $x=1$ , este un număr real cuprins în intervalul  $(0,91; 0,96)$ .

21. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = e^x + e^{-x}.$$

a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .

c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .

d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{f'(x)}$ .

e) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe intervalul  $[0, \infty)$  și strict descrescătoare pe pe intervalul  $(-\infty, 0]$ .

f) Să se arate că ecuația  $f(x) + f(21x) = f(2x) + f(1986x)$  are numai soluția  $x=0$ .

22. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = (x+1)^3 - x^3.$$

a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .

c) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .

d) Să se determine valoarea minimă a funcției  $f$  pe  $\mathbb{R}$ .

e) Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0) + f(1) + \dots + f(n)}{n^3}.$$

f) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{xf'(x)}$ .

## PROBLEME RECAPITULATIVE – ALGEBRĂ (pentru Bacalaureat)

1. Să se demonstreze că:  $\overline{0,(xyz)} + \overline{0,(yzx)} + \overline{0,(zxy)} = \overline{0,x(yz)} + \overline{0,y(zx)} + \overline{0,z(xy)}$ .

2. Să se demonstreze că nu există numere raționale  $\frac{m}{n}$  astfel încât:

a)  $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3$ ;    b)  $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = p, p$  număr prim;    c)  $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 5$ .

3. Să se demonstreze că: a)  $\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ;

b)  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \notin \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

4. Să se determine  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n!+2} \in \mathbb{Q}\}$ , unde  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, \forall n \in \mathbb{N}^*; 0! = 1$ .

5. Fie numerele  $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{Z}$ . Știind că  $x + y \in \mathbb{Q}^*$ , să se decidă care dintre numerele  $x^2 - y^2, mx + ny$  este rațional sau irațional.

6. Să se demonstreze că pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}, x > 0$ , există  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât  $nx > y$  („proprietatea lui Arhimede“).

7. Fie  $r \in \mathbb{Q}_+^*$  o aproximare a lui  $\sqrt{2}$ . Să se demonstreze că  $\frac{r+2}{r+1}$  este o aproximare „mai bună“ pentru  $\sqrt{2}$  (adică  $\left|\frac{r+2}{r+1} - \sqrt{2}\right| \leq |r - \sqrt{2}|$ ).

8. Fie  $a, b \in \mathbb{Q}$  astfel încât  $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0$ . Să se demonstreze că  $a = b = 0$ .

9. Fie  $a, b, c$  cifre nenule distincte și  $x = \sqrt{0,a(b)+0,b(c)+0,c(a)}$ . Să se determine  $x$  știind că  $x \in \mathbb{Q}$ .

10. Să se demonstreze că următoarele numere sunt iraționale:

a)  $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ ;    b)  $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{2\sqrt{13}-5}$ .

11. Fie  $x, y \in \mathbb{N}$ . Să se demonstreze că:

a) dacă  $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ , atunci  $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ ;

b) dacă  $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$ , atunci  $\sqrt{x} \in \mathbb{N}, \sqrt{y} \in \mathbb{N}$ .

12. Să se determine numărul tripletelor  $(x, y, z)$  formate din cifre nenule distincte astfel încât: a)  $\sqrt{x,y(z) + y,z(x) + z,x(y)} \in \mathbb{Q}$ ;

b)  $\sqrt{x,(yz) + y,(zx) + z,(xy)} \in \mathbb{Q}$ .

13. Știind că numărul radicalilor din scrierea numerelor  $a$  și  $b$  este 2000, unde  $a = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$ ,  $b = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}$ , să se determine partea întreagă a acestor numere.

14. Să se efectueze:

a)  $\sqrt{2x + 2 + 2\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{2x + 2 - 2\sqrt{2x + 1}}, x \geq -\frac{1}{2}$ ;

b)  $\sqrt{2x + 2 + \sqrt{4x + 3}} + \sqrt{2x + 2 - \sqrt{4x + 3}}, x \geq -\frac{3}{4}$ .

15. Să se determine  $f(x_0)$  în cazurile următoare:

a)  $f(x) = \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}, x_0 = \frac{2ab}{b^2 + 1}, a > 0, b \neq 0$ ;

b)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}, x_0 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right), \frac{a}{b} > 0$ ;

c)  $f(x) = \frac{\sqrt{(x^2 + a^2)^{-1}} + \sqrt{(x^2 - a^2)^{-1}}}{\sqrt{(x^2 + a^2)^{-1}} - \sqrt{(x^2 - a^2)^{-1}}}, x_0 = a\sqrt{\frac{m^2 + n^2}{2mn}}, m \cdot n > 0, a > 0$ .

16. Să se compare numerele:

a)  $a = \sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{13}}$  și  $b = \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{17}}$ ;

b)  $A = \sqrt{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}}, B = \sqrt{\sqrt{y+a} - \sqrt{y}},$  dacă  $x > y \geq 0, a > 0$ .

17. Să se demonstreze că:

a)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^n + (\sqrt{2} - 1)^n + (\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^n \geq 4, n \in \mathbb{N}^*$ ;

b)  $\sqrt{1 - a^2} + \sqrt{1 - b^2} \leq 2\sqrt{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}, \forall a, b \in [-1, 1]$ .

18. Să se rezolve ecuațiile:

a)  $3x - \sqrt{8 - 3x} \sqrt{(-x)^x} = 5\sqrt{2x}$ ; b)  $2x + 2\sqrt{x^3 x^3} = 2\sqrt{x^3}$ ; c)  $2x + 1\sqrt{11 - 4x} \sqrt{(-2x)^{3x}} = 3x - \sqrt{7x + 2}$ .

19. a) Fie  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$  astfel încât  $a + b + c = 0$ .

Să se demonstreze că  $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$ .

b) Să se calculeze:  $\sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$ .

20. Să se determine valoarea expresiei:

a)  $\left[ \frac{(x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} + (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} - (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}} \right]^{-2}$  pentru  $x = a\sqrt{\frac{m^2 + n^2}{2mn}}$ ,  $a > 0$ ,  $m > 0$ ,  $n > 0$ ;

b)  $\left( x^{-2} + a^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left( a^{-2} + a^{-\frac{4}{3}}x^{-\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}}$  pentru  $x = \left( b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{2}{3}}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ;

c)  $\left[ \frac{(a+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (b+x)^{-\frac{1}{2}} + (a-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x-b)^{-\frac{1}{2}}}{(a+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (b+x)^{-\frac{1}{2}} - (a-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x-b)^{-\frac{1}{2}}} \right]^{-2}$  pentru  $x = \sqrt{ab}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

d)  $(1+x^{-1})^{-2} + (1-x^{-1})^{-2}$  pentru  $x = (1-a^{-1})^{\frac{1}{2}}(1+a^{-1})^{\frac{1}{2}}$ ,  $a > 1$ .

21. Cunoscând  $a$  și  $b$ , să se determine  $c$  în cazurile:

a)  $a = \log_{60} 4$ ,  $b = \log_{60} 6$ ,  $c = \log_{24} 2$ ;

b)  $a = \log_{12} 2$ ,  $b = \log_{12} 5$ ,  $c = \log_6 40$ .

22. Să se determine numărul funcțiilor inversabile  $f: A \rightarrow A$  știind că :

a)  $A = \{1, 2\}$ ;      b)  $A = \{a, b, c\}$ .

23. Să se studieze injectivitatea, surjectivitatea, respectiv bijectivitatea funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , unde:

a)  $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \in \mathbb{Q} \\ mx+3, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ ;      b)  $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3+1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ .

24. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{8^x + 27^x}{3 \cdot 12^x + 8 \cdot 18^x + 5 \cdot 27^x}$ . Să se demonstreze că  $f(x) \geq \frac{1}{9}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

25. Fie  $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ . Să se studieze monotonia funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a^{b^x} + b^{a^x}$ .

26. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a^x + a^{-x}$ ,  $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ . Să se demonstreze că:

a)  $\text{Im } f = [2, \infty)$ ;

b)  $f$  este strict descrescătoare pe  $(-\infty, 0]$  și strict crescătoare pe  $[0, \infty)$ .

27. Fie  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a^x + a^{1-x}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

a) Să se studieze monotonia lui  $f$ .

b) Să se demonstreze că  $2\sqrt{a} \leq f(x) \leq a+1$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .

28. Să se determine semnul funcțiilor:

a)  $f(x) = \log_{8-2x}(x-1)$ ;

b)  $f(x) = \log_{x-1}(x^2 - 5x + 4)$ ;

c)  $f(x) = \log_{x+2}(-x^2 + 3x + 18)$ .

29. Să se demonstreze că următoarele numere sunt iraționale:

a)  $\log_3 2$ ;      b)  $\log_3 10$ ;      c)  $\log_3 6$ ;      d)  $\log_5 15$ .

30. Fie  $a, b, c \in (0, 1)$  sau  $a, b, c \in (1, \infty)$ . Să se arate că:

a)  $\log_a bc + \log_b ac + \log_c ab \geq 6$ ;      b)  $(\log_a bc) \cdot (\log_b ac) \cdot (\log_c ab) \geq 8$ .

31. Fie  $a, b \in (1, \infty)$ . Să se demonstreze că:

a)  $\log_a(b+1) > \log_a b > \log_{a+1} b$ ;      b)  $\log_a(b+1) > \log_{a+1}(b+1) > \log_{a+1} b$ .

32. Să se demonstreze că:

a)  $(\log_2 7)^{-1} + (\log_{24} 7)^{-1} < 2$ ;      b)  $\frac{1}{\log_9 18 - \log_{18} 36} > 12$ ;

c)  $-6 < \frac{1}{\log_{3a} 9a - \log_a 3a} < -2$  pentru  $a \in (3, 9)$ .

33. Fie  $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ . Să se studieze monotonia funcției  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = \log_a x^2 + a^{\sqrt{x^2}}$ ;      b)  $f(x) = a^{b^x} + b^{\log_a x}$ ;

c)  $f(x) = \log_a x + \log_b x$ ;      d)  $f(x) = a^{\log_b x} + b^{\log_a x}$ .

**Să se rezolve ecuațiile:**

34.  $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$ ;

35.  $\sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}} = 2$ ;

36.  $\sqrt{3x + \sqrt{x+2}} + \sqrt{3x - \sqrt{x+2}} = 2 + 2\sqrt{2}$ ;

37.  $\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$ ;

38.  $\sqrt{2x + \sqrt{2x^2 - x - 1}} + \sqrt{2x - \sqrt{2x^2 - x - 1}} = 2\sqrt{2}$ ;

39.  $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$ ;

40.  $\sqrt[3]{x+16} - \sqrt[3]{x+9} = 1$ ;

41.  $\sqrt[3]{x} + 6 = 2\sqrt[3]{x^2}$ ;

42.  $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{7-x} = 2$ ;

43.  $\sqrt[3]{x+45} = 1 + \sqrt[3]{x-16}$ ;

44.  $\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{8+x} = 2\sqrt{2}$ ;



$$62. \frac{1}{2^x - 1} \leq \frac{1}{1 - 2^{x-1}}.$$

$$63. \text{ a) } \log_{x-1}(x^2 - 7x + 11) = 1; \quad \text{ b) } \log_{x+1}(2x^2 + x + 6) = 2;$$

$$\text{ c) } \frac{2 \lg x}{\lg(5x - 4)} = 1; \quad \text{ d) } \log_2[3 - \log_3(x + 1)] = 0.$$

$$64. \text{ a) } \log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11; \quad \text{ b) } \log_x 9 + \log_{x^2} 81 = 3;$$

$$\text{ c) } \log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 4; \quad \text{ d) } (\log_x 2) \cdot (\log_{2x} 2) = \log_{4x} 2.$$

$$65. \text{ a) } 1 + \log_2 x = \log_2(x + 1); \quad \text{ b) } 2 \lg(x + 1) - \lg\left(x - \frac{1}{2}\right) = \lg 2(x + 3);$$

$$\text{ c) } \lg 2 + \lg(4^{x-1} + 9) = 1 + \lg(2^{x-1} + 1); \quad \text{ d) } \log_2(17 - 3^x) = 5 - x.$$

$$66. \text{ a) } (\log_x 2) \cdot \left(\log_{\frac{x}{2}} 2\right) + \log_{\frac{x}{16}} 2 = 0; \quad \text{ b) } \log_{x^2} 9 + \log_{3x} 81 = 3;$$

$$\text{ c) } \log_9(\log_3 x) + \log_3(\log_9 x) = 2; \quad \text{ d) } (\log_x 3)(\log_{3x} 2) = \log_{9x} 3.$$

$$67. \text{ a) } \log_x 2 = \frac{\log_{4x} 2}{\log_{2x} 2};$$

$$\text{ b) } (\log_x 3)(\log_{3x} 3)(\log_3 9x) = 1;$$

$$\text{ c) } \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right) = \log_4\left(\log_4 \frac{x}{2}\right); \quad \text{ d) } \log_{2x}\left(\frac{2}{x}\right) + \log_2^2 x = 1.$$

$$68. \text{ a) } \left|2 + \log_{\frac{1}{3}} x\right| + 3 = \left|1 - \log_{\frac{1}{3}} x\right|;$$

$$\text{ b) } |x - 1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x - 1|^3;$$

$$\text{ c) } |x - 2|^{\log_2(5-x)} = |x - 2|^{\log_2 x};$$

$$\text{ d) } \log_{|x-2|}(x^2 - 4) = 1.$$

$$69. \text{ a) } x^{\lg x} = 100x;$$

$$\text{ b) } x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4;$$

$$\text{ c) } 5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x - 1} - 5^{\lg x - 1};$$

$$\text{ d) } x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{\lg x + 1}.$$

$$70. \text{ a) } 5^x = 5 - \log_3 x;$$

$$\text{ b) } \log_4(2x + 2) = 9 - x;$$

$$\text{ c) } \log_2(x + 1) + \log_3(2x + 1) = 2x;$$

$$\text{ d) } \log_2(x^2 + 1) - \log_2 x = 3x^2 - 2x^3.$$

71. Să se demonstreze că:

$$\text{ a) } \sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1;$$

$$\text{ b) } \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!};$$

$$\text{ c) } \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!}{(2k-2)!} = n^2;$$

$$\text{ d) } \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{n+1};$$

$$\text{ e) } \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)!}{(k-1)!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

72. Să se demonstreze că:

**a)**  $(2n + 1)! > 2^{2n} \cdot (n!)^2, n \geq 1$ ; **b)**  $n^{2n} > (2n)!, n \geq 3$ ; **c)**  $2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! > ((n + 1)!)^n, n \geq 2$ .

73. Să se rezolve ecuațiile:

**a)**  $n! + 1 = (n + 1)^2$ ; **b)**  $(n - 3)! + n = n^2$ .

74. Să se rezolve sistemele:

**a)**  $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 10 \\ C_x^y : C_x^{y-1} = \frac{5}{3} \end{cases}$ ; **b)**  $\begin{cases} A_x^y = 9 \cdot A_x^{y-1} \\ 2C_x^y = 3C_x^{y-1} \end{cases}$ ; **c)**  $C_{x+1}^{y+1} = C_{x+1}^y = 2C_{x+1}^{y-1}$ .

75. Să se calculeze sumele:

**a)**  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)! + k!}$ ; **b)**  $\sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!}$ .

76. Să se demonstreze că:

**a)**  $C_n^k = C_{n-2}^k + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2}, 2 \leq k \leq n - 2$ ;  
**b)**  $C_n^k = C_{n-3}^k + 3C_{n-3}^{k-1} + 3C_{n-3}^{k-2} + C_{n-3}^{k-3}, 3 \leq k \leq n - 3$ ;

77. Să se determine termenul care nu conține pe  $x$  din dezvoltarea:

**a)**  $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$ ; **b)**  $\left(\frac{2x}{y} - \frac{\sqrt{y}}{2x}\right)^{12}$ .

78. Să se determine  $x$  știind că pentru dezvoltarea:

**a)**  $(\sqrt{x} + x^{-1})^6$  avem  $T_5 = \frac{5}{9}$ ; **b)**  $(x + \sqrt{5})^6$  avem  $T_5 - T_3 = 300$ .

79. Fiind dată următoarea dezvoltare  $(x - 2)^{100} = a_0 + a_1x + \dots + a_{100}x^{100}$  determină:

**a)**  $a_{97}$ ; **b)**  $a_0 + a_1 + \dots + a_{100}$ .

80. Să se determine rangul celui mai mare termen din dezvoltările:

**a)**  $\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right)^{100}$ ; **b)**  $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right)^{100}$ .

81. Să se determine suma coeficienților dezvoltărilor:

**a)**  $(3x^2 - 2x)^{50}$  **b)**  $(4x - 5y)^{200}$  **c)**  $(5x^4 - 3y^5)^n, n \in \mathbb{N}^*$

82. Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltările:

**a)**  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{50}$  **b)**  $(\sqrt[3]{2} + \sqrt{5})^{200}$  **c)**  $(\sqrt[3]{6} + \sqrt{4})^{100}$

83. Să se determine numărul natural  $n$  știind că în dezvoltarea:

**a)**  $(5 + n)^n$  termenul al zecelea este cel mai mare;  
**b)**  $(7 + 3n)^n$  al șaselea termen este cel mai mare.

84. Fie vectorii  $\vec{u}(2, 3)$ ,  $\vec{v}(4, \alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Să se determine  $\alpha$ :

- a) știind că  $\vec{u}$  și  $\vec{v}$  sunt coliniari;  
b) știind că  $\vec{u}$  și  $\vec{v}$  sunt ortogonali.

85. Fie punctele  $A(a, b)$ ,  $B(c, d)$  și  $k \in \mathbb{R} - \{-1\}$ . Să se determine coordonatele unui punct  $M$  astfel încât  $\overline{AM} = k\overline{AB}$ .

86. Fie punctele distincte  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3)$  în plan. Să se demonstreze că  $A_1A_2 \perp A_1A_3 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) = 0$ .

87. Fie punctele distincte  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3)$  în plan.

- a) Să se demonstreze că  $A_1, A_2, A_3$  sunt coliniare dacă și numai dacă  $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$ .

*Observație.* Egalitatea de mai sus trebuie interpretată în cazuri particulare astfel:

$$x_2 = x_1 \Leftrightarrow x_3 = x_1; \quad y_2 = y_1 \Leftrightarrow y_3 = y_1.$$

- b) Să se demonstreze că  $A_1, A_2, A_3$  sunt coliniare dacă și numai dacă  $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$ .

88. Să se determine coordonatele vectorilor  $\vec{u}$  și  $\vec{v}$  știind că:

$$\text{a) } \begin{cases} 2\vec{u} + 3\vec{v} = 3\vec{i} + 10\vec{j} \\ -3\vec{u} + 4\vec{v} = -13\vec{i} + 2\vec{j} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3\vec{u} - 2\vec{v} = -\vec{i} + 8\vec{j} \\ -2\vec{u} + 3\vec{v} = 4\vec{i} - 7\vec{j} \end{cases}$$

89. Să se determine coordonatele vectorilor  $\vec{u}$  și  $\vec{v}$  știind că:

$$\text{a) } \begin{cases} |\vec{u}| = 5 \\ |\vec{u} - \vec{i}| = 2\sqrt{5} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} |\vec{v} + \vec{j}| = 3\sqrt{2} \\ |\vec{v} - \vec{i}| = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

90. Fie  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 4)$ . Să se determine  $C(x, 6)$  și  $D(y, 0)$  astfel încât să fie îndeplinite condițiile:      a)  $A, B, C$  coliniare;      b)  $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ .

91. Fie punctele  $A(1, 3)$ ,  $B(5, 0)$ ,  $C(-1, -3)$ . Să se determine:

- a) ecuațiile dreptelor  $AB, BC, CA$ ;  
b) ecuațiile medianelor triunghiului  $ABC$ ;  
c) coordonatele centrului de greutate al triunghiului  $ABC$ .

92. Să se determine tangentele unghiurilor dintre axele de coordonate și vectorii:

$$\text{a) } 2\vec{i} - 2\vec{j}; \quad \text{b) } -4\vec{i} + 4\sqrt{3} \cdot \vec{j}; \quad \text{c) } 4\vec{i} + 4\vec{j}.$$

**93.** Laturile  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  ale unui triunghi  $ABC$  au ecuațiile:  $4x - 3y = 6$ ;  $2x + 3y = 5$ ;  $x = 3$ . Să se determine coordonatele punctelor  $A$ ,  $B$ ,  $C$  și ecuațiile medianelor triunghiului  $ABC$ .

**94.** Laturile triunghiului  $ABC$  au ecuațiile:  $AB : x - 2y - 2 = 0$ ;  $BC : 2x + y - 2 = 0$ ;  $AC : x - y + 2 = 0$ . Să se determine coordonatele vârfurilor triunghiului și ale centrului de greutate, precum și ecuațiile medianelor triunghiului  $ABC$ .

**95.** Să se determine ecuațiile înălțimilor triunghiului  $ABC$  și coordonatele ortocentrului în cazurile:

**a)**  $A(-1, -1)$ ,  $B(3, -2)$ ,  $C(1, 5)$ ;      **b)**  $A(2, 6)$ ,  $B(5, -3)$ ,  $C(5, 1)$ .

**96.** Să se determine ecuațiile mediatoarelor triunghiului  $ABC$  și coordonatele centrului cercului circumscris în cazurile:

**a)**  $A(-1, 3)$ ,  $B(3, 1)$ ,  $C(1, -3)$ ;      **b)**  $A(3, -2)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(5, 2)$ .

**97.** Să se determine ecuațiile laturilor triunghiului  $ABC$  când cunoaștem  $B(-1, -1)$ ,  $C(3, 1)$  și ortocentrul  $H(1, 2)$ .

**98.** Un paralelogram are două laturi de ecuații  $2x - y = 0$  și  $3x - y - 1 = 0$ , iar centrul este  $E(2, 3)$ . Să se determine ecuațiile celorlalte două laturi.

**99.** Un triunghi  $ABC$  are vârful  $A(1, 1)$  și ecuațiile a două înălțimi  $x + y + 3 = 0$ , respectiv  $3x - 2y - 5 = 0$ . Să se determine ecuațiile laturilor triunghiului și coordonatele ortocentrului.

**100.** Fie dreapta  $d : 3x + 2y + 1 = 0$  și punctul  $A(2, 3)$ . Să se determine:

**a)** două drepte  $d_1, d_2$  ce trec prin  $A$  și fac cu  $d$  un unghi de  $45^\circ$ ;

**b)** două drepte  $d_1, d_2$  care împreună cu  $d_1, d_2$  determină un pătrat.

**101.** Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  și dreptele  $d : ax + y + a^2 = 0$ ,  $d' : bx + y + b^2 = 0$ .

**a)** În ce condiții  $d$  și  $d'$  sunt secante? Dar perpendiculare?

**b)** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție.

**102.** Fie dreptele  $d_m : (2m - 1)x - 2my - m - 2 = 0$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .

**a)** Să se demonstreze că dreptele  $d_m$  trec printr-un punct fix.

**b)** În ce condiții avem  $d_m \parallel Ox$ ? Dar  $d_m \parallel Oy$ ?

**c)** În ce condiții dreapta  $d_m$  este paralelă (respectiv perpendiculară) cu (pe) dreapta  $d : 2x - y + 1 = 0$ ?

**d)** Să se determine  $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$  astfel încât  $d_{m_1} \parallel d_{m_2}$ .

**e)** Să se determine  $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$  astfel încât  $d_{m_1} \perp d_{m_2}$ .

**103.** Fie dreptele  $d_m : mx + (m - 1)y - m + 2 = 0$ . Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  știind că  $d_m$  taie  $Ox$  și  $Oy$  în  $A$ , respectiv  $B$  și că  $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = 13$ .

**104.** Să se determine coordonatele punctului  $C$  știind că triunghiul  $ABC$  este echilateral, unde  $A(-1, 1)$ ,  $B(2, 5)$ .

**105.** Fie rombul  $ABCD$  cu diagonalele paralele cu axele de coordonate. Să se determine coordonatele vârfurilor  $C$  și  $D$  știind că avem  $A(-2, -3)$ ,  $B(1, 1)$ .

**106.** Fie triunghiul  $ABC$  în care  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ . Să se demonstreze că, dacă  $AD$  este mediană, atunci avem  $4AD^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$  (teorema medianei).

**107.** Fie  $A, B, C$  trei puncte coliniare în planul  $\mathcal{P}$  cu  $B \in (AC)$ . Să se demonstreze că pentru orice punct  $M$  al planului  $\mathcal{P}$  avem:

$$AM^2 \cdot BC - BM^2 \cdot AC + CM^2 \cdot AB = AB \cdot AC \cdot BC \quad (\text{relația lui Stewart}).$$

**108.** Să se determine:

- a) ecuațiile bisectoarelor interioare și exterioare ale triunghiului  $ABC$ ;
- b) simetricile vârfurilor față de laturile opuse;
- c) aria triunghiului, coordonatele cercului înscris și raza acestuia în cazurile:

**i)**  $A(2, 1)$ ,  $B(-2, -1)$ ,  $C(0, 4)$ ;

**ii)**  $A(2, 4)$ ,  $B(-2, 2)$ ,  $C(1, -1)$ .

**109.** Fie punctele  $A(3, 1)$ ,  $B(1, 7)$  și dreapta  $d : x - 3y + 2 = 0$ . Să se determine:

- a) simetricile lui  $A$  și  $B$  în raport cu  $d$ ;
- b) ecuația simetricii dreptei  $AB$  în raport cu  $d$ .

**110. a)** Fie dreapta  $d : ax + by + c = 0$  și punctul  $A(\alpha, \beta)$ . Fie  $B$  simetricul lui  $A$  față de  $d$ . Să se determine coordonatele lui  $B$ .

**b)** Să se trateze cazurile particulare: **i)**  $A(0, 0)$ ,  $d : 4x + 3y - 12 = 0$ ;

**ii)**  $A(2, 1)$ ,  $d : 2x - 3y + 4 = 0$ .

**111.** Fie punctele  $A(4, 0)$ ,  $B(0, 3)$ ,  $C(0, -3)$ . Fie  $M \in BC$  astfel încât  $y_M = a$  și  $N(0, \alpha)$ ,  $|\alpha| > 3$ .

**a)** Să se calculeze distanțele de la  $M$  la  $AB$  și  $AC$  și să se demonstreze că suma acestor distanțe este constantă.

**b)** Să se calculeze distanțele de la  $N$  la  $AB$  și  $AC$  și să se determine o relație între aceste distanțe.

## PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA EXAMENULUI DE BACALAUREAT

1. Fie  $n \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $n$  nu este divizibil cu 3. Să se determine restul împărțirii lui  $n^2$  la 12.

2. Să se rezolve ecuația  $x^2 - 4x + 1 = 2\sqrt{4 - 4x + x^2}$ .

3. Fie  $x, y, z \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x + y + z = 0$ . Să se demonstreze că:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \cdot \frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \frac{x^7 + y^7 + z^7}{7}.$$

4. Să se demonstreze că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  avem:

a)  $11 \mid 3^{n+3} - 4^{4n+2}$ ;      b)  $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ ;      c)  $24 \mid 13^{n+1} + 6 \cdot 3^n + 5$ .

5. Să se demonstreze că: a)  $\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+2} + \dots + \frac{1}{8n} > \frac{5}{8}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ;

b)  $220 \mid a$ , unde  $a = 220^{119^{69}} + 69^{220^{119}} + 119^{69^{220}}$ ;      c)  $21 \mid 2^{4^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

6. Să se rezolve ecuația  $\frac{|x-a|}{x-a} + \frac{|x-2a|}{x-2a} = \frac{|x+a|}{x+a} + \frac{|x+2a|}{x+2a}$ , unde  $a > 0$ .

7. Să se rezolve și să se discute inecuația  $\frac{x-m}{1-mx} \geq 1, m \in \mathbb{R}$ .

8. Să se rezolve și să se discute ecuația  $|x-a| + |x-b| = x$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ .

9. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a)  $\begin{cases} |x-y| + 2|y| = 2 \\ mx + 2y = 2m, m \in \mathbb{R} \end{cases}$ ;

b)  $\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ xy + x^2 + y^2 = 7 \end{cases}$ ;

c)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2 + 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a, a \in \mathbb{R} \end{cases}$ ;

d)  $\begin{cases} (x+y)^3 + x^2y^2(x+y) = 39 \\ x^3y^3 + xy(x+y)^2 = 26 \end{cases}$ .

10. Să se demonstreze că, dacă ecuațiile  $x^2 + ax + b = 0$ ,  $x^2 + cx + d = 0$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , au o rădăcină irațională comună, atunci  $a = c, b = d$ .

11. Fie funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $g(x) = m(x-a)$ ,  $f(x) = \begin{cases} -(x-a)^2, & x \leq a \\ (x-a)^2, & x > a \end{cases}$ ,  $a, m \in \mathbb{R}$ .

a) Să se determine  $m$  știind că cele două grafice au trei puncte comune.

b) Să se rezolve inecuația  $f(x) \geq g(x)$ .

12. Fie  $m \in \mathbb{R}^*$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i = \overline{1, 2000}$ ,  $f(x) = \sum_{i=1}^{2000} (mx - a_i)^2$ .

a) Să se determine valoarea minimă a lui  $f$ .

b) Să se demonstreze că, dacă  $\sum_{i=1}^{2000} a_i^2 = 2000$ , atunci  $\left| \sum_{i=1}^{2000} a_i^2 \right| \leq 2000$ .

13. Fie numerele reale  $a, b, c$  nenule și distincte. Fie mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c = 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid cx^2 + bx + a = 0\}$ . Să se demonstreze că:

a)  $A$  și  $B$  au același număr de elemente;

b) dacă  $A \cup B$  are trei elemente, atunci  $A \cap B$  are un element.

14. Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1} \in [-3, 5]$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

15. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m^2 - 1)x^2 - 2(m^2 + 2)x + m^2 - 4$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .

a) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât ecuația  $f(x) = 0$  să aibă o singură rădăcină în  $[-1, 1]$ .

b) Să se demonstreze că parabolele  $y = f(x)$  trec printr-un singur punct fix.

16. Să se demonstreze că:

a)  $0 < b < a < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+1-\sqrt{1-a^2}}{b+1-\sqrt{1-b^2}}$ ;      b)  $1 < b < a < \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{1-\sqrt{a^2-1}}{1-\sqrt{b^2-1}}$ .

17. Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x-a} + \sqrt{b-x}$ . Să se studieze monotonia funcției și să se determine punctele de extrem.

18. Să se determine imaginea funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ .

19. Fie  $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$ . Să se determine  $f(x_0)$  unde  $x_0 = a + \frac{1}{a}$ ,  $a > 0$ .

20. Să se determine  $x \in \mathbb{R}$  știind că:

a)  $\sqrt{26+x\sqrt{3}} + \sqrt{26-x\sqrt{3}} = 3\sqrt{6}$ ;      b)  $\sqrt[3]{26+x\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26-x\sqrt{3}} = 4$ .

21. Fie  $a_n = (\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^n$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ . Să se arate că:

a)  $a_{m+n} = a_m a_n - a_{m-n}$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m > n$ ;

b)  $2 \mid a_n \Leftrightarrow 2 \mid n$ ;

c)  $a_n = k\sqrt{2}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , pentru orice  $n$  impar.

22. Fie progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  având termenii strict pozitivi. Să se calculeze suma:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}} - \frac{1}{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}} - \dots + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}.$$

23. Să se determine progresia geometrică cu 5 termeni știind că suma primilor trei termeni este 30, iar suma ultimilor trei termeni este 120.

24. Fie  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$  definite astfel  $f(0) = 2$ ,  $2 \cdot f(n) = f(n-1) + 5, \forall n \geq 1$ ,  $g(n) = f(n) - 5$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Să se determine:

a)  $g(n)$ ;      b)  $f(n)$ ;      c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ .

25. Fie  $a_1 \in \mathbb{R} - \{-3\}$ ,  $a_{n+1} = \frac{5a_n + 3}{a_n + 3}$ ,  $b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1}$ . Să se determine  $a_n, b_n$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

26. Fie  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a^x b^{1-x} + a^{1-x} b^x$ ,  $a, b \in (0, \infty) - \{1\}$ .

a) Să se studieze monotonia funcției.

b) Să se demonstreze că  $2\sqrt{ab} \leq f(x) \leq a + b, \forall x \in [0, 1]$ .

27. Să se rezolve ecuația:  $\frac{1}{a^{(x-1)(x-2)}} + \frac{1}{a^{(x-1)(x-3)}} = \frac{2a^2}{a^{(x-2)(x-3)}}, a > 0, a \neq 1$ .

28. Să se rezolve ecuațiile:      a)  $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ ;      b)  $\frac{3}{5^{x+2}} + \frac{2}{5^{2x+3}} = 1$ .

29. Să se rezolve:      a)  $\log_{x^2-x-2}(9-x^2)^{\frac{1}{9-x^2}} \geq 0$ ;

b)  $\log_m x + \log_{mx} x + \log_m x \log_{\frac{m}{x}} x \geq 0, m > 0, m \neq 1$ ;

c)  $\begin{cases} \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 y} = \frac{5}{6} \\ \frac{\log_2 x}{\log_2 y} + \frac{\log_2 y}{\log_2 x} = \frac{13}{6} \end{cases}$ ;      d)  $\begin{cases} \log_3^3 x + \log_3^3 y = 19 \log_3 xy \\ \log_3^3 x - \log_3^3 y = 7 \log_3 \frac{x}{y} \end{cases}$ ;

e)  $\sqrt{\log_a a^2 \sqrt{ax} + \log_x a^2 \sqrt{ax}} + \sqrt{\log_a a^2 \sqrt{\frac{x}{a}} + \log_x a^2 \sqrt{\frac{a}{x}}} = a, a^2 \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ;

f)  $\frac{1}{\sqrt{\log_{|x+a|} a}} + \frac{1}{\sqrt{\log_{|x-a|} a}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\log_{|x^2-a^2|} a}}, a > 0, a \neq 1$ .

30. Se dau șirurile  $a_n = n - \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 3k + 1}{k^2 + 3k + 2}$ ,  $b_n = \prod_{k=1}^n a_k$ .

a) Să se studieze monotonia, mărginirea șirurilor date și să se determine numerele

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

b) Să se determine  $k \in \mathbf{N}^*$  astfel încât  $|a_n - a| \leq \frac{1}{1000}$  pentru orice  $n \geq k$ .

c) Să se determine vecinătatea lui  $b$  în care sunt cuprinși toți termenii șirului  $(b_n)$  cu excepția primilor 4 termeni.

31. Să se determine limitele șirurilor:

a)  $a_n = \sum_{k=1}^n \log_1 \frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$ ;

b)  $a_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k+n} \left(a + \frac{i}{n}\right)^2$ ,  $k \in \mathbf{N}^*$  fixat;

c)  $a_n = \left[ \frac{(n+k+1)(n+k+2)\dots(n+2k)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \right]^{n^\alpha}$ ,  $k \in \mathbf{N}^*$  fixat,  $\alpha > 0$ ;

d)  $a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n}$ ,  $\forall n \geq 1$ .

32. Să se determine șirurile de numere întregi care verifică condiția  $a_{n+2} = \frac{na_n + 1}{a_n + n}$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

33. Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit astfel:  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{1 + nx_n}$ ,  $\forall n \geq 1$ . Să se demonstreze că  $n - 2 \leq x_n \leq n + 2$ ,  $\forall n \geq 1$  și să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ .

34. Să se determine  $a, b, c \in \mathbf{R}$  astfel încât:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{n^3 + an^2} - \sqrt{n^2 - an} \right) = 1$ ;      b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^4 + 2n^3} - an^2 - bn - c \right) = 0$ .

35. Să se determine următoarele limite:

a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2 - \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x - \cos x}}$ ;      b)  $\lim_{x \searrow 0} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg}^2 x}$ ;      c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1 - nx + n}{(n-1)^2}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ ;

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx(x^m - 1) - mx(x^n - 1)}{(x-1)^2}$ ,  $m, n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ ;

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \dots \cos nx}{x^2}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ ;      f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \sqrt{\cos 3x}}{x^2}$ .

36. Să se studieze continuitatea funcțiilor:

$$\text{a) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sin x| e^{nx} + |\cos x|}{e^{nx} + 1};$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases};$$

$$\text{c) } f(x) = [x]^2, x \in [0, 2];$$

$$\text{d) } f(x) = [\ln x], x \in [1, e^3];$$

$$\text{e) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-1| e^{nx} + a(x+1)^2 e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}, a \in \mathbb{R};$$

$$\text{f) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x + |x-1| e^{nx}}{1 + e^{nx}}.$$

37. Fie funcția  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continuă pe  $[0, \infty)$ , cu proprietatea  $f(x) = f(x^2), \forall x \geq 0$ . Să se demonstreze că  $f$  este constantă.

38. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x|x - a_1|, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sum_{k=2}^n |x - a_k|, n \geq 2, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f(x) + g(x), a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . În ce condiții  $h$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$ ?

39. Fie  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x, g(x) = e^x \sin x$ . Să se demonstreze că graficele celor două funcții au puncte comune și că în punctele comune au tangență comună.

40. Fie  $F$  funcție polinomială asociată unui polinom cu coeficienții reali astfel încât  $F'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(x-2)^4$ . Să se determine numărul rădăcinilor reale multiple ale ecuației  $F(x) = 0$ .

41. Fie  $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\frac{2 - |x-2|}{|x-2| + 2}}, D \subset \mathbb{R}$  fiind domeniul maxim de definiție.

a) Să se determine domeniile maxime de continuitate și derivabilitate.

$$\text{b) Să se calculeze } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)^{\frac{2}{|x-2|}};$$

$$\text{c) Să se calculeze } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)^{\frac{2}{x-2}}.$$

42. Să se studieze derivabilitatea următoarelor funcții definite pe domeniul maxim:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|};$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n, & x \in [-1, 0) \\ px^2 + 4x + 1, & x \in [0, 1] \end{cases} \text{ cu } f(-1) = f(1);$$

$$\text{c) } f(x) = \max(1, x^2, x^3);$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x^2 + |x^2 + x - 2|}{x + |x + 1|}.$$

43. Să se traseze graficele următoarelor funcții pe domeniul maxim de definiție:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2};$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 1};$$

$$\text{c) } f(x) = (x - 2)^2(x + 1);$$

$$\text{d) } f(x) = e^{2x} - 2e^x;$$

$$\text{e) } f(x) = |x^3 + 2x| - |6 - 3x|;$$

$$\text{f) } f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4}.$$

$$\begin{array}{lll} \text{g)} f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}; & \text{h)} f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{x}; & \text{i)} f(x) = \frac{1 + 2 \ln x}{x}; \\ \text{j)} f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-1}; & \text{k)} f(x) = \frac{3 - \ln x}{1 + \ln x}; & \text{l)} f(x) = |e^{2x} - e^x| - 2. \end{array}$$

44. Fie șirul  $I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

- a) Să se calculeze  $I_1, I_2$ .  
 b) Să se demonstreze că șirul este convergent.

45. Fie  $f: [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 \left[ \frac{x}{2} \right] - 1$ , unde  $[a]$  înseamnă partea întreagă a numărului  $a$ .

- a) Să se reprezinte grafic funcția  $F: [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .  
 b) Să se determine aria domeniului mărginit de graficul lui  $F$ , axa  $Ox$  și dreptele  $x = -2$ ,  $x = 4$ .

46. Să se determine  $I(a) = \int_{-2}^2 \frac{|x-2| + a}{|x-a| + 2} dx$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

# MODELE DE PROBLEME PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x^2 + x - m, m \in \mathbb{R}$ .

a) Să se determine  $f'(x)$ .

b) Să se calculeze  $\int_0^1 xf'(x)dx$ .

c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^n}, n \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

d) Să se studieze monotonia funcției  $f$ .

e) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f(x) \geq -2$  pentru  $x \geq 0$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - e^{-x}$ .

a) Să se determine  $f'(x)$ .

b) Să se studieze monotonia funcției  $f$ .

c) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f(x) \geq \frac{e^2 - 1}{e}$  pentru orice  $x \geq a$ .

d) Să se calculeze  $\int_{-1}^1 f(x)dx$ .

e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(1) + f(2) + \dots + f(n)]$ .

3. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 9x^2 + 26x + 24$ .

a) Să se calculeze  $f(x) - (x + 2)(x + 3)(x + 4)$ .

b) Să se rezolve ecuația  $f'(x) = 0$ .

c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției  $f$ .

d) Să se determine  $\int_0^1 f(x)dx$ .

e) Determinați două funcții  $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$  astfel încât  $g(x) = f(x) + h(x), \forall x \in \mathbb{R}$ .

4. Se consideră funcția  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{9x^2 - 1}$ .

Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $x_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ .

a) Să se demonstreze că  $f(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3x-1} - \frac{1}{3x+1} \right)$

b) Să se determine  $f'(x)$ ,  $x \geq 1$ .

c) Să se calculeze  $\int_3^5 f(x) dx$ .

d) Să se determine formula termenului general al șirului  $(x_n)_{n \geq 1}$ .

e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} (4x_n)^n$ .

5. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{-1} \ln x$ .

a) Să se determine  $f'(x)$ ,  $x > 0$ .

b) Să se studieze monotonia funcției  $f$ .

c) Să se determine maximul local al funcției  $f$ .

d) Să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x)$ .

e) Să se determine  $\lim_{n \searrow 0} f(x)$ .

6. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{3x^2 + 3x + 1}{(x^2 + x)^3}$ .

Se consideră șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $a_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ .

a) Să se demonstreze că există  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f(x) = \frac{a}{x^3} + \frac{b}{(x+1)^3}$ ,  $\forall x > 0$ .

b) Să se determine formula termenului general al șirului  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

c) Să se studieze convergența șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$ .

d) Să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

e) Să se determine  $\int_1^2 f(x) dx$ .

7. Se consideră funcția  $f: (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ .

a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x > 2$ .

b) Să se determine  $\lim_{x \searrow 2} \frac{f(x)}{x - 2}$ .

c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - \sqrt{5}}{x - 3}$ .

d) Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției  $f$ .

e) Să se studieze monotonia funcției  $f$ .

f) Să se determine aria suprafeței plane determinate de graficul lui  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = \sqrt{5}$ ,  $x = 2\sqrt{2}$ .

8. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{2x} + 1$ .

a) Să se determine  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f(x) > a$  și  $f'(x) > b$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

c) Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției  $f$ .

d) Să se determine  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$ .

e) Să se demonstreze că avem  $a^2 + a + 1 > 0$  și  $a^2 - a + 1 > 0$  pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ .

f) Determinați două funcții  $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$  astfel încât  $f(x) + h(x) = g(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

9. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - x - a$ ,  $g(x) = f'(x)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

a) Să se determine funcția  $g$ .

b) Să se studieze monotonia funcției  $f$ .

c) Să se determine  $a$  știind că  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [0, \infty)$ .

d) Pentru  $a = 1$ , să se rezolve în numere reale ecuația  $f(x) + 3g(x) = 4e^x - x - 3$ .

e) Să se determine  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f(x)}{f'(x)} \right)$ .

10. Se consideră funcția  $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ .

a) Să se calculeze  $f(x) - f(-x)$ ,  $x \in [-3, 3]$ .

b) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (-3, 3)$ .

c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției  $f$ .

d) Să se calculeze  $\int_{-2}^2 f(x) dx$ .

e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( \int_0^{\frac{3}{n}} f^2(t) dt \right)$ .

11. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{5}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}$ .

a) Să se calculeze  $f(x) + \frac{1}{x^2 + 9}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Să se determine  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

c) Să se studieze monotonia funcției  $f$  pe intervalul  $[3, \infty)$ .

d) Să se determine asimptotele la graficul funcției  $f$ .

e) Să se determine punctele de extrem local ale funcției  $f$ .

f) Să se calculeze  $\int_2^3 f'(x) dx$ .

g) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\sqrt{5k+1})$ .

12. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 1 - \ln x$ .

a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x > 0$ .

b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$ .

c) Să se studieze monotonia funcției  $f$ .

d) Să se calculeze  $\int_1^2 f(x) dx$ .

e) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ .

13. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

- a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- b) Să se studieze monotonia funcției  $f$ .
- c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției  $f$ .
- d) Să se determine o primitivă a funcției  $f$ .
- e) Să se calculeze  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .
- f) Să se determine numărul soluțiilor ecuației  $f(n) + f(-n) = 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $|n| \leq 100$ .

14. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e-a}{e^{x+1}}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

- a) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  știind că  $f(x) + \frac{1}{e^{x+1}} = \frac{1}{e^x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- b) Să se determine asimptotele la graficul funcției  $f$ .
- c) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  știind că  $f(x) + f'(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Fie  $a = 1$  și fie șirul  $a_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ ,  $n \geq 1$ .

- d) Să se determine formula termenului general al șirului  $(a_n)$ .
- e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- f) Să se determine aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 0$  și  $x = 1$ .

15. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x+a}{x^2+2}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

- a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- b) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  știind că  $f$  este strict crescătoare pe  $[1, \infty)$ .
- c) Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației  $f(x) = 1$  pentru  $a \in \mathbb{R}$ .
- d) Să se demonstreze că  $-\frac{3}{4} \leq f(x) \leq 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , pentru  $a = 1$ .
- e) Să se determine  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xf(x)$ .
- f) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$  pentru  $a = 1$ .

16. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 1$  și fie șirul  $a_n = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}, n \geq 2$ .

a) Să se determine  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 7}{x - 2}$ .

b) Să se calculeze  $f(x - 1) - f(-x), x \in \mathbb{R}$ .

c) Să se determine formula termenului general al șirului  $(a_n)$ .

d) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \int_0^n f(t) dt$ .

f) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{2} a_n \right)^{n+1}$ .

17. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 - x^2 + 1$ .

Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a funcției  $f$ .

a) Să se determine  $f(a) + f(-a)$  și  $f(a) - f(-a), a \in \mathbb{R}$ .

b) Să se demonstreze că  $f(x) = \frac{x^6 + 1}{x^2 + 1}, \forall x \in \mathbb{R}$ .

c) Să se determine  $f'(x), x \in \mathbb{R}$ .

d) Să se determine punctele de extrem local ale funcției  $f$ .

e) Să se demonstreze că  $f(x) \geq \frac{3}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$ .

f) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x)}{F(x)}$ .

g) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

18. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$ .

a) Să se calculeze  $f(a) + f(a + 1), a \in (0, \infty)$ .

b) Să se determine  $f'(x), x \in (0, \infty)$ .

c) Să se calculeze  $\int_1^{e-1} xf'(x) dx$ .

d) Să se studieze monotonia funcției  $f$ .

e) Să se calculeze  $\int_1^e \left( f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) \right) dx$ .

f) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f'(k)$ .

19. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+2)^2}$ .

a) Să se calculeze  $f(x) + \frac{1}{(x+2)^2}$ ,  $x > 0$ .

b) Să se determine  $f'(x)$ ,  $x > 0$ .

c) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

d) Să se determine termenul general al șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $a_n = \sum_{k=0}^n f(k)$ .

e) Să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

f) Să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(n+1)^2}$ .

20. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^4 - 4x + 1$ .

a) Să se determine  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Să se demonstreze că  $f(x) \geq 2x(x-2)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

c) Să se studieze monotonia funcției  $f$ .

d) Să se determine punctele de extrem local ale funcției  $f$ .

e) Să se calculeze  $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$ .

f) Să se demonstreze că  $\int_e^{e^2} \frac{x-2}{f(x)} dx \leq \frac{1}{2}$ .

21. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - x$ .

a) Să se determine  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Să se rezolve ecuațiile  $f(x) = 0$  și  $f'(x) = 0$ .

c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției  $f$ .

d) Să se determine  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .

e) Să se verifice dacă este adevărată egalitatea:

$$f'(x) = \frac{1}{2}[(f'(x))^2 + f'(x) + 1] - \frac{1}{2}[(f'(x))^2 - f'(x) + 1], \forall x \in \mathbb{R}.$$

22. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$  și șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit prin

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k).$$

- Să se calculeze  $f(x) + \frac{1}{x+2}$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- Să se determine  $f'(x)$ ,  $x > 0$ .
- Să se studieze monotonia funcției  $f$ .
- Să se determine formula termenului general  $a_n$ .
- Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) \left( \frac{1}{2} - a_n \right)$ .
- Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+2} f(x) dx$ .

23. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ .

- Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- Să se calculeze  $\int_1^2 \frac{f'(x)}{x^2} dx$ .
- Să se studieze monotonia funcției  $f$ .
- Să se determine punctele de extrem local.
- Să se determine  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \leq 4$ .
- Să se determine  $\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x) - f(-x)}{x^3} dx$ ,  $a \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ .

24. Fie mulțimea  $A = \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$ . Se consideră funcțiile  $f, g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ,  $g(x) = f'(x)$ ,  $h(x) = g'(x)$ .

Se consideră funcția  $k(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$ ,  $h: A \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Să se determine  $g(x)$ ,  $x \in A$  și  $h(x)$ ,  $x \in A$ .
- Să se rezolve ecuația  $f(x) = 0$ .
- Să se demonstreze că  $g(x) = f(x)k(x)$ ,  $\forall x \in A$ .
- Să se studieze monotonia funcției  $k$ .
- Să se demonstreze că  $h'(x)f^2(x) = f(x)h(x) - g^2(x)$ ,  $\forall x \in A$ .
- Să se determine  $\int_{-2}^{-1} h(x) dx$ .
- Să se demonstreze că  $g^2(x) > h(x)f(x)$ ,  $\forall x \in A$ .

# SOLUȚII

## CAPITOLUL I

- I.2. 1. a)**  $\frac{x^6}{6} - x^4 + 3\ln x - \frac{2}{x}$ ; **b)**  $2x\sqrt{x} + 3x\sqrt[3]{x} + \mathcal{C}$ ; **c)**  $2\sqrt{x} - x^2\sqrt{x} + \mathcal{C}$ ; **d)**  $e^{3x} + 2e^{-2x} + \mathcal{C}$ ;  
**e)**  $-\ln(\cos 2x) - \ln(\cos 3x) + \mathcal{C}$ ; **f)**  $2\operatorname{tg} 4x + 2\operatorname{ctg} 3x + \mathcal{C}$ ; **g)**  $\frac{1}{2}\ln(4-2x) - \frac{5}{3}\ln(-3x-6) + \mathcal{C}$ ;  
**h)**  $\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right) - \ln\frac{x-2}{x+2} + \mathcal{C}$ ; **i)**  $x + \cos x + \mathcal{C}$ ; **j)**  $-\operatorname{ctg} x + \cos x + \mathcal{C}$ ; **k)**  $\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\ln\frac{x-2}{x+2} + \mathcal{C}$ ;  
**l)**  $2\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - 2\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right) + \mathcal{C}$ ; **m)**  $\frac{x^4}{4} + \frac{a+b}{3}x^3 + \frac{abx^2}{2} + \mathcal{C}$ ; **n)**  $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - 2x + \mathcal{C}$ ;  
**o)**  $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} - \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 2}\right) + \mathcal{C}$ ; **p)**  $\frac{2x^{2m}\sqrt{x}}{4m+1} - \frac{4x^{m+n}\sqrt{x}}{2m+2n+1} + \frac{2x^{2n}\sqrt{x}}{4n+1} + \mathcal{C}$ .

$$2. \mathbf{a)} F(x) = \begin{cases} 2e^x + \frac{3x^2}{2} + a, & x \leq 0 \\ \frac{x^3}{3} + x^2 + x + a, & x > 0 \end{cases}; \quad \mathbf{b)} F(x) = \begin{cases} \ln|x| - \frac{1}{x} + a, & x \leq 1 \\ x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + a - \frac{7}{3}, & x > 1 \end{cases};$$

$$\mathbf{c)} F(x) = \begin{cases} 2\operatorname{arctg} x + a, & x \leq 0 \\ 2x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + a, & x > 0 \end{cases}; \quad \mathbf{d)} F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 2x + a, & x \in [-3, -2] \\ \frac{x^3}{3} - 4x + a - 7\frac{1}{3}, & x \in (-2, 3) \\ \frac{x^2}{2} + 2x + a - 20\frac{5}{6}, & x \in [3, 4] \end{cases}$$

- I.3. 1. a)**  $-1$ ; **b)**  $a=b=0$ ; **c)**  $b=a^2 - a, a \in \mathbb{R}$ ; **d)**  $a=b=2$ . **2. a)**  $a=1, b=1$ ; **b)**  $a=1, b=-1, c \in \mathbb{R}$ ;  
**c)**  $a=1, b=-1$ ; **d)**  $a=1, b=-1, c=2$ . **3. a)**  $a=-2, b=0$ ; **b)**  $a=b=\pm 1$ .

**I.4. 1.**  $F' = f, G' = g, G(x) = \frac{1}{a}F(ax+b)$ . **2.**  $G' = g, H' = f \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2a}(G(x) - H(x))$ ;

$K(x) = \frac{1}{2a}(G'(x) + H'(x))$ . **3.**  $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}, x \neq 0$ ;  $f(0) = \frac{1}{2} - (1 - 2\alpha) \Rightarrow f$  admite

primitive  $\Leftrightarrow 1 - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ . Analog  $\alpha = \frac{1}{2}$  pentru  $g$ . **4.**  $F' = f \Rightarrow fg = (Fg)' - Fg'$ .

**5. a)**  $x \rightarrow x$  admite primitive,  $x \rightarrow [x]$  nu admite primitive rezultă  $x \rightarrow \{x\}$  nu admite primi-

tive; **b)** Imaginea intervalului  $(\sqrt{15}, \sqrt{17})$  nu este interval; **d)**  $g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  admite

$$\text{primitiva } G, F(x) = \begin{cases} -x^2 \sin \frac{1}{x} + 2G(x), & x \neq 0 \\ 2G(0), & x = 0 \end{cases},$$

$F'(0) = 2g(0) = 0$  e primitiva lui  $f \Leftrightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ . e)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \Rightarrow \forall \varepsilon \in (0, 1)$  există vecinătatea  $V = V(\varepsilon)$  a lui 0 astfel încât  $\varepsilon < f(x) < 1, \forall x \in V \cap (0, \infty)$ . Există  $a > 0$  astfel încât  $(0, a) \subset V \cap (0, \infty) \Rightarrow f(0) = 0 < \varepsilon < f(a), f(x) > \varepsilon, \forall x \in (0, a) \Rightarrow \text{Im } f((0, a)) \neq \text{interval}$ .

f) analog cu e). 6. Funcțiile sunt continue, deci admit primitive. a) Avem  $f(x) = -x, x \in [-1, 0)$ ;

$f(x) = x^2, x \in [0, 1]$  rezultă  $F(x) = -\frac{x^2}{2} + a, x \in [-1, 0)$ ;  $F(x) = \frac{x^3}{3} + a, x \in [0, 1]$ . 7. Se

aplică rezultatul problemei 4. 8.  $[x] = 0, x \in [0, 1); [x] = 1, x \in [1, 2) \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in [0, 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x) = c$ . 9.  $x < 0 \Rightarrow f(x) = bx^2 + c, f(0) = \frac{c}{2}; f(a) = ax, x > 0$ . Luăm  $c = 0$  și

$F(x) = \frac{bx^3}{3} + \alpha, x \leq 0, F(x) = \frac{ax^2}{2} + \alpha, x > 0$ .

- I.5. A) 1.**  $e^x(x-1)$ . **2.**  $-e^{-x}(x+1)$ . **3.**  $e^x(x^2-2x+2)$ . **4.**  $x(\ln x - 1)$ . **5.**  $\frac{x^4}{4} \left( \ln^3 x - \ln^2 x + \frac{3}{8} \ln x - \frac{3}{8} \right)$ .
- 6.**  $(\ln(\sin x) - 1) \sin x$ . **7.**  $x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ . **8.**  $x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$ . **9.**  $x^2 \operatorname{ch} x - 2x \operatorname{sh} x + 2 \operatorname{ch} x$ .
- 10.**  $x^2 \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{sh} x + 2 \operatorname{sh} x$ . **11.**  $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$ . **12.**  $\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x$ .
- 13.**  $\frac{1}{2}(x^2-1) \ln \frac{1+x}{1-x} + x$ . **14.**  $-x \operatorname{ctg} x + \ln(\sin x)$ . **15.**  $-x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \ln \sin^2 \frac{x}{2}$ . **16.**  $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ .
- 17.**  $x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}$ . **18.**  $\frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x)$ . **19.**  $\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$ . **20.**  $\frac{1}{13} e^{2x} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x)$ .
- 21.**  $\frac{1}{13} e^{3x} (3 \sin 2x - 2 \cos 2x)$ . **22.**  $\frac{e^x}{10} (5 + \cos 2x + 2 \sin 2x)$ . **23.**  $\frac{e^x}{10} (5 - \cos 2x - 2 \sin 2x)$ .
- 24.**  $x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln(\cos x)$ . **25.**  $x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x$ . **26.**  $-x - \ln(1-x)$ .
- 27.**  $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$ . **28.**  $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$ . **29.**  $-\frac{\ln x}{x}$ . **30.**  $-x \operatorname{ctg} x + \ln(\sin x)$ .
- 31.**  $x \operatorname{tg} x + \ln(\cos x)$ . **32.**  $x \operatorname{th} x - \ln \operatorname{ch} x$ . **33.**  $-x \operatorname{cth} x + \ln \operatorname{sh} x$ . **34.**  $x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x$ .
- 35.**  $\frac{1}{8} \left( 2x^3 \sqrt{x^2+1} + x \sqrt{x^2+1} - \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right)$ . **36.**  $\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3}$ ; **37.**  $\sqrt{x^2+1} \left[ \frac{1}{5} (x^2+1)^2 - \frac{1}{3} (x^2+1) \right]$ .
- 38.**  $\frac{1}{8} (2x^2 + 2x \sin 2x + \cos 2x)$ . **39.**  $3(x^3+1) \ln(x+1) - x^3 + \frac{3x^2}{2} - 3x$ . **40.**  $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2)$ .

**B) 1.**  $\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - \frac{x^2}{6} + \frac{2}{3} \ln(x^2 + 1)$ . **2.**  $\frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x^2}$ . **3.**  $-\frac{1}{2}e^{x^2}(x^4 + 2x^2 + 2)$ .  
**4.**  $\ln^2(x+1) + \frac{\ln(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1}$ . **5.**  $-x - \operatorname{ctg} x \ln(\sin x)$ . **6.**  $(\ln(\operatorname{tg} x) - 1) \operatorname{tg} x$ ; **7.**  $\frac{-x - \cos^2 x}{2 \sin^2 x}$ .  
**8.**  $e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)$ . **9.**  $\frac{x^5}{5} \left( \ln^3 x - \frac{3}{5} \ln^2 x + \frac{6}{25} \ln x - \frac{6}{125} \right)$ . **10.**  $\frac{\sin x}{5} \left( \cos^4 x + \frac{4}{3} \cos^2 x + \frac{8}{3} \right)$ .  
**11.**  $\frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x|$ . **12.**  $-\frac{1}{2 \sin^2 x} - \ln(\sin x)$ . **13.**  $-\frac{\cos^3 x}{5} \left( \sin^2 x + \frac{2}{3} \right)$ .  
**14.**  $\frac{\sin^3 x \cos^3 x}{6} + \frac{\sin^3 x \cos x}{8} - \frac{\sin x \cos x}{16} + \frac{x}{16}$ . **15.**  $\frac{\operatorname{tg} x}{15} \left( \frac{3}{\cos^4 x} + \frac{4}{\sin^2 x} + 8 \right)$ .  
**16.**  $\frac{x^3}{4} \sqrt{9-x^2} - \frac{9x}{8} \sqrt{9-x^2} + \frac{81}{8} \operatorname{arcsin} \frac{x}{3}$ . **17.**  $\frac{xe^x}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{e^x \cos x}{2}$ . **19., 20.**  $I_1 + I_2 = \int x e^x dx = (x-1)e^x$ ,  $I_1 - I_2 = \int x e^x \cos 2x dx = \frac{xe^x(\cos 2x + 2 \sin 2x)}{5} - \frac{e^x}{25} (4 \sin 2x - 3 \cos 2x) \Rightarrow I_1, I_2$ .  
**I.7. 1.**  $1 + 9x^2 = t^2 \Rightarrow I = \frac{1}{27} \sqrt{(1+9x^2)^3}$ . **2.**  $t = x^3 - 27 \Rightarrow I = \frac{1}{4} \sqrt[3]{(x^3 - 27)^4}$ .  
**3.**  $x^4 - 4x + 1 = t \Rightarrow I = \frac{3}{16} \sqrt[3]{(x^4 - 4x + 1)^4}$ . **4.**  $t = e^x \Rightarrow I = -\cos(e^x) + \mathcal{C}$ . **5.**  $\sin x = t \Rightarrow I = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1}$ . **6.**  $t = e^x \Rightarrow I = \sin(e^x)$ . **7.**  $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow I = \ln(\operatorname{tg} x)$ . **8.**  $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow I = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$ .  
**9.**  $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow I = e^{\operatorname{tg} x}$ . **10.**  $t = \operatorname{ctg} x \Rightarrow I = -e^{\operatorname{ctg} x}$ . **11.**  $t = \cos x \Rightarrow I = -\ln(\cos x) + \frac{\cos^2 x}{2}$ .  
**12.**  $t = \ln x \Rightarrow I = \ln(\ln x)$ . **13.**  $t = \sqrt{x} \Rightarrow I = 2e^{\sqrt{x}}$ . **14.**  $t = x^3 \Rightarrow I = \frac{1}{3} e^{x^3}$ . **15.**  $t = \ln x \Rightarrow I = \ln(\ln x)$ . **16.**  $t = x^2 \Rightarrow I = \frac{1}{4} e^{2x^2}$ . **17.**  $4x^2 + 1 = t \Rightarrow I = \frac{1}{4} \sqrt{4x^2 + 1}$ . **18.**  $t = x^2 \Rightarrow I = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2$ .  
**19.**  $t = x^2 \Rightarrow I = \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} x^2$ . **20.**  $-\sqrt{1+2 \cos x}$ . **21.**  $-\frac{3}{2} \sqrt[3]{\cos^2 x}$ . **22.**  $\frac{4}{3} \sqrt{\sin^3 x}$ .  
**23.**  $t = e^x \Rightarrow I = \operatorname{arctg} e^x + x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1)$ . **24.**  $e^x = t \Rightarrow I = \operatorname{arctg} e^x$ . **25.**  $1 + x^2 = t \Rightarrow I = \frac{1}{2} \left[ \ln(1+x^2) + \frac{1}{1+x^2} \right]$ . **26.**  $t = \ln x \Rightarrow I = \ln(\ln(\ln x))$ . **27.**  $I = \frac{\ln^4 x}{4}$ . **28.**  $t = 1 + e^{2x} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+e^{2x}} - 1}{\sqrt{1+e^{2x}} + 1}$ . **29.**  $f(x) = \frac{1}{2} \left( \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \Rightarrow I = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$ . **30.**  $\ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$ .  
**31.**  $t = \ln x \Rightarrow I = -\frac{1}{2} \ln |1 - \ln^2 x|$ . **32.**  $\frac{2}{3} \sqrt{\ln^3 x}$ . **33.**  $2\sqrt{1+x^2}$ . **34.**  $\frac{1}{2} \ln(e^{2x} + a^2)$ .  
**35.**  $\operatorname{arctg}(\sin x)$ . **36.**  $-\ln(1 + \cos^2 x)$ . **37.**  $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow I = t - \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}$ .

38.  $\frac{x^2}{2} + 6\sqrt{x}$ . 39.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^3\sqrt{x}}{10}$ . 40.  $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ . 41.  $-\frac{1}{2(x^2+a^2)}$ . 42.  $\frac{\sin^4 x}{4}$ .  
 43.  $\frac{\sin^{n+1} x}{n+1}$ . 44.  $\frac{1}{2\cos^2 x}$ . 45.  $\operatorname{tg} x - x$ . 46.  $-\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x}$ . 47.  $2e^{\sqrt{x}}$ . 48.  $\ln(1 + e^x)$ .  
 49.  $\frac{\ln^2 x}{2}$ . 50.  $-\ln(1 + \cos^2 x)$ . 51.  $\ln\sqrt{3x^2 - 2x + 3}$ . 52.  $\arcsin(\ln x)$ . 53.  $\sin(\ln x)$ . 54.  $\operatorname{arctg} e^x$ .  
 55.  $2\sqrt{x} - 4\ln(2 + \sqrt{x})$ .

**I.8. 1.**  $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$ . **2.**  $f(x) = x - 2 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$ .

**3.**  $f(x) = x^2 + x + 4 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$ . **4.**  $f(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x+3}$ .

**5.**  $f(x) = 1 + \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1}\right) = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{2(x^2+1)}$ .

**6.**  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2 + 2^2}$ . **7.**  $\frac{2x+1}{(2x+1)^2 + 1}$ . **8.**  $f(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$ .

**9.**  $f(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$ . **10.**  $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$ .

**11.**  $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ . **12.**  $f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}$ .

**13.**  $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ . **14.**  $f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$ .

**15.**  $f(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4}$ . **16.**  $f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}$ .

**17.**  $f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+3+2\sqrt{2}} + \frac{Cx+D}{x^2+3-2\sqrt{2}}$ . **18.**  $f(x) = x - 2 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$ .

**19.**  $f(x) = 1 + \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$ .

**I.9. 1. a)**  $-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x+2}$ ; **b)**  $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{x+2}$ ; **c)**  $x^2 + x + 4 +$

$+ 2 \cdot \frac{1}{x} + 5 \cdot \frac{1}{x-2} - 5 \cdot \frac{1}{x+2}$ ; **d)**  $\frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2}$ ; **e)**  $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x+1}$ ;

**f)**  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x+1}{x^2-x+1}$ ; **g)**  $-\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x+2}{x^2+2}$ ; **h)**  $\frac{x}{3x^2+1} + \frac{1}{x^2+3}$ .

2. a)  $2\ln(2x-9)$ ; b)  $\frac{3x}{2} + \frac{31}{4}\ln(2x-7) + \mathcal{C}$ ; c)  $-\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{(4x+1)^2}$ ; d)  $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}$ ;

e)  $\frac{1}{2}\ln(4x^2+6x+5)$ ; g)  $x - \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)$ ;

h)  $-\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg}x$ ; i)  $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \mathcal{C}$ ;

j)  $\int \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5}$ ;  $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow \int \frac{dt}{t^2 + 3t + 3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ ;

k)  $x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow I = \int \frac{dx}{t^2 + 3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + \mathcal{C} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \mathcal{C}$ .

**I.10. 1.**  $\ln\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}$ ; **2.**  $\frac{1}{5}\ln\left[(x-2)^2\sqrt{2x+1}\right]$ ; **3.**  $\ln\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}$ ; **4.**  $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}$ ;

**5.**  $\frac{3}{11}\ln(3x+1) + \frac{2}{33}\ln(2x-3) - \frac{1}{3}\ln x$ ; **6.**  $\frac{1}{4}x + \ln x - \frac{7}{16}\ln(2x-1) - \frac{9}{16}\ln(2x+1)$ ;

**7.**  $\ln\frac{(2x-1)(2x-5)^5}{(2x-3)^6}$ ; **8.**  $\ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}$ ; **9.**  $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}$ ; **10.**  $\frac{2}{x} + \ln(x^3-x)$ ;

**11.**  $\ln\frac{x^2}{x+1} + \frac{6}{x+1}$ ; **12.**  $\ln\frac{x^4}{(x-1)^3} - \frac{9}{x-1}$ ; **13.**  $x + \frac{1}{x} + \ln\frac{(x-1)^2}{x}$ ; **14.**  $\ln(x-2) - \frac{2x-3}{2(x-2)^2}$ ;

**15.**  $\frac{1}{x} + \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ ; **16.**  $2\ln\frac{x+4}{x+2} - \frac{5x+12}{x^2+6x+8}$ ; **17.**  $\frac{3}{2(x-2)^2} + \ln(x-5)$ ; **18.**  $x - \ln(x+1)^8 - \frac{8(9x^2+12x+5)}{3(x+1)^3}$ ; **19.**  $\frac{(x+2)^2}{2} - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{9}{4(x-1)} + \frac{1}{8}\ln(x-1)^3(x+1)$ ; **20.**  $\frac{1}{x-1} + \ln\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x}$ ;

**21.**  $\frac{3}{2x} - \frac{5}{4}\ln x + 20\ln(x-3) - \frac{47}{4}\ln(x-2)$ ; **22.**  $\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ; **23.**  $\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ ;

**24.**  $\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{x-1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}$ ; **25.**  $\frac{(x+1)^2}{2} + \ln\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arctg}x$ ; **26.**  $\frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$ ;

**27.**  $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$ ; **28.**  $\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1} - \frac{1}{2(x+1)}$ ; **29.**  $\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\ln(x^2+2x+2) -$

$-2\operatorname{arctg}(x+1)$ ; **30.**  $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + 2\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)$ ; **31.**  $\frac{2-x}{4(x^2+2)} + \ln\sqrt{x^2+2} - \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$ ;

$$32. \frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)} + \frac{53}{16} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2}; 33. \frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)} + \operatorname{arctg}(x+1); 34. \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x;$$

$$35. \frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)} + \frac{1}{2} \ln(x^2-4x+5) + \frac{15}{2} \operatorname{arctg}(x-2); 36. \frac{3x-14}{x^2-2x+2} + \ln(x^2-2x+2) + 15 \operatorname{arctg}(x-1).$$

**I.11.** 1.  $-\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x$ ; 2.  $-\frac{1}{50} \sin 25x + \frac{1}{10} \sin 5x$ ; 3.  $\frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6} + 3 \sin \frac{x}{6}$ ;

4.  $\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}$ ; 5.  $\frac{1}{15} \cos^3 x (3 \cos^2 x - 5)$ ; 6.  $\frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$ ; 7.  $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}$ ;

8.  $\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - 2 \operatorname{ctg} 2x$ ; 9.  $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + 3 \ln(\operatorname{tg} x) - \frac{3}{2 \operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{4 \operatorname{tg}^4 x}$ ; 10.  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} \right|$ ;

11.  $x - \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ; 12.  $-x + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}$ ; 13.  $-\ln |\cos x - \sin x|$ ; 14.  $-\frac{1}{2(1-\cos x)^2}$ ; 15.  $\ln(1 + \sin^2 x)$ ;

16.  $\frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x}$ ; 17.  $\frac{1}{4} \ln \frac{5 - \sin x}{1 - \sin x}$ ; 18.  $\frac{x}{2} + \ln \sqrt{|\cos x + \sin x|}$ ; 19.  $-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{3\pi}{8} - \frac{x}{2} \right) \right| + \mathcal{C}$ . 20.  $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow \int \frac{dt}{t^3 + 1}$ . 23.  $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + \mathcal{C}$ .

24.  $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + \mathcal{C}$ . 25.  $\frac{3x}{8} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + \mathcal{C}$ . 26.  $\operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \mathcal{C}$ .

27.  $2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - x + \mathcal{C}$ . 28.  $\ln(2 + \sin 2x) + \mathcal{C}$ . 29.  $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \mathcal{C}$ . 32.  $\ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + \mathcal{C}$ .

34.  $\ln(1 + \sin x) + \mathcal{C}$ . 35.  $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3 \sin^3 x} + \mathcal{C}$ . 36.  $2\sqrt{\cos x} \left( \frac{\cos^2 x}{5} - 1 \right) + \mathcal{C}$ .

37.  $\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{3\pi}{8} \right) \right| + \mathcal{C}$ . 38.  $\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + \mathcal{C}$ . 40.  $\operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right) + \mathcal{C}$ .

**Testul 1.** 1.  $f$  continuă în  $0 \Leftrightarrow b = 2, a \in \mathbb{R}$ . 2. Avem  $f(x) = -1, x < 0$  și  $f(x) = 1, x > 0$ . Deoarece  $\operatorname{Im} f = \{-1, 1, 2\}$  nu este interval,  $f$  nu admite primitive. 3. a)  $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + \mathcal{C}$ ;

b)  $\frac{1}{5} e^x (\sin 2x - 2 \cos 2x) + \mathcal{C}$ ; c)  $-x \operatorname{ctg} x + \ln(\sin x) + \mathcal{C}$ ; d)  $2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 4} + \mathcal{C}$ .

**Testul 2.** 1. a)  $\int (x^2 + x + 1)e^x dx = e^x(ax^2 + bx + c) \Rightarrow (x^2 + x + 1)e^x = e^x(ax^2 + bx + c + 2ax + b)$

$\Rightarrow a = 1, b = -1, c = 2$ ; b)  $x \operatorname{tg} x + \ln(\cos x) + \mathcal{C}$ ; c)  $\frac{1}{2}(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \mathcal{C}$ ;

2. a)  $f$  continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive de forma  $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2-1} - \ln(x + \sqrt{x^2-1})] + \mathcal{C}_1, & x \geq 1 \\ x^3 - x^2 + \mathcal{C}_2, & x < 1 \end{cases}$

$F$  continuă în 1  $\Rightarrow \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ ; **b)**  $f$  continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive de forma

$$F(x) = \begin{cases} x \ln x - x + \mathcal{C}_1, & x \geq 1 \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \mathcal{C}_2, & x < 1 \end{cases} \cdot F \text{ continuă în } 1 \Rightarrow \mathcal{C}_1 - 1 = \mathcal{C}_2 - \frac{1}{6}.$$

**Testul 3. 1. a)**  $f$  continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive de forma

$$F(x) = \begin{cases} xe^x - 2e^x + \mathcal{C}_1, & x \leq 1 \\ x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + \mathcal{C}_2, & x > 1 \end{cases} \cdot F \text{ continuă în } 1 \Leftrightarrow \mathcal{C}_1 - e = 2 + \mathcal{C}_2.$$

**b)**  $f$  continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive de forma:

$$F(x) = \begin{cases} e^x(x-1) + \mathcal{C}_1, & x \leq 0 \\ x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \arctg x + \mathcal{C}_2, & x > 0 \end{cases} \cdot F \text{ continuă în } 0 \Leftrightarrow \mathcal{C}_1 - 1 = \mathcal{C}_2.$$

**2. a)**  $\text{Im} f = \mathbb{Z}$  nu este interval  $\Rightarrow f$  nu admite primitive. **b)**  $2x-1 \in (n, n+1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_n = \left[ \frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2} \right], n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{3. a)} \quad 2I_n + I_{n-1} = \int \frac{2x^n + x^{n-1}}{2x+1} dx = \int x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n} + \mathcal{C};$$

$$\mathbf{b)} \quad I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1-1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \left( 1 - \frac{1}{2x+1} \right) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \ln(2x+1) + \mathcal{C};$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} - I_1 \right) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \ln(2x+1) + \mathcal{C}; \quad I_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{3} - I_2 \right) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2-x}{8} - \frac{1}{16} \ln(2x+1) + \mathcal{C}.$$

$$\mathbf{Testul 4. 1. a)} \quad \frac{1}{3} \sin^3 x + \mathcal{C}; \quad \mathbf{b)} \quad \int \frac{3x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx = \int \left( \frac{-4}{x-1} + \frac{11}{x-2} + \frac{7}{x-3} \right) dx =$$

$$= -4 \ln(x-1) + 11 \ln(x-2) + 7 \ln(x-3) + \mathcal{C} = \ln \frac{(x-2)^{11}(x-3)^7}{(x-1)^4} + \mathcal{C};$$

$$\mathbf{c)} \quad \int \frac{x}{x^2+2x+3} dx = \int \frac{(x+1)'}{(x+1)^2 + (\sqrt{2})^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \mathcal{C}.$$

**2. a)**  $f(x) = \left\{ x + \frac{1}{2} \right\}$ ;  $f(x+1) = \left\{ x + \frac{1}{2} + 1 \right\} = \left\{ x + \frac{1}{2} \right\} = f(x) \Rightarrow f$  are perioada 1. Atunci pe

$$\left[ -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \text{ avem } f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ x - \frac{1}{2}, & x \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \end{cases}. \text{ Dacă } f \text{ admite primitiva } F, \text{ atunci}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{2} + \mathcal{C}_1, & x \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \frac{x^2-x}{2} + \mathcal{C}_2, & x \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \end{cases} \cdot F \text{ continuă în } \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathcal{C}_2 = \frac{1}{2} + \mathcal{C}_1 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{2} + c, & x \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \frac{x^2-x}{2} + \frac{1}{2} + c, & x \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \end{cases}$$

$F$  derivabilă în  $\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \nearrow \frac{1}{2}} \left( x + \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \searrow \frac{1}{2}} \left( x - \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow 1 = 0$  (fals). Deci  $f$  nu admite primitive pe

$\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ . **b)** Intervalele sunt de forma  $I_n = (n, n+1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **3.**  $f$  continuă în  $\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow b = a+1$

**Testul 5. 1. a)**  $\int \operatorname{tg}^2(1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} x)' dx = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \mathcal{C}$  ;

**b)**  $\int \frac{4}{(x^2-1)(x^2+1)} dx = 2 \int \left( \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2-1} \right) dx = 2 \operatorname{arctg} x + \ln \frac{x-1}{x+1} + \mathcal{C}$  ;

**c)**  $\int \frac{1}{x(x^2+4)} dx = \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4} \right) dx = \frac{1}{4} \ln x - \frac{1}{8} \ln(x^2+4) + \mathcal{C}$  .

**2.**  $f$  continuă în  $0 \Leftrightarrow b = 2a$ . Fie  $F$  o primitivă a  $f$ . Atunci:

$$F(x) = \begin{cases} 2a \ln(x + \sqrt{x^2+4}) + \frac{ax}{2} \sqrt{x^2+4} + \mathcal{C}_1, & x \leq 0 \\ -\cos x + \mathcal{C}_2, & x > 0 \end{cases} . F \text{ este continuă în } 0 \Leftrightarrow 2a \ln 2 + \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 - 1 .$$

Avem deci  $b = 2a$  și  $F(x) = \begin{cases} 2a \ln(x + \sqrt{x^2+4}) + \frac{ax}{2} \sqrt{x^2+4} + \mathcal{C}, & x \leq 0 \\ -\cos x + 2a + 1 + c + 2a \ln 2, & x > 0 \end{cases}$  .

**3. a)** Avem  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^3, & x \in (0, 1) \\ x, & x > 0 \end{cases}$  ; **b)** Deoarece  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  admite primitive

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \mathcal{C}_1, & x \leq 0 \\ \frac{x^4}{4} + \mathcal{C}_2, & x \in (0, 1) \\ \frac{x^2}{2} + \mathcal{C}_3, & x \geq 1 \end{cases} . F \text{ continuă în } 0 \text{ și } 1 \Rightarrow \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2, \quad \mathcal{C}_3 + \frac{1}{2} = \mathcal{C}_2 + \frac{1}{4} \Rightarrow \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_3 = \mathcal{C} ,$$

$$\mathcal{C}_3 = \mathcal{C} - \frac{1}{4} .$$

**Testul 6. 1. a)**  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x) \sin x}{\cos x} dx$ ,  $t = \cos x \Rightarrow -\int \frac{1-t^2}{t} dt = -\ln|t| + \frac{t^2}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = -\ln \cos x + \frac{\cos^2 x}{2} + \mathcal{C} ; \text{ b) } \int \frac{1}{(4+x^2)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{(4+x^2) - x^2}{(x^2+4)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2+4} dx -$$

$$-\frac{1}{4} \int x \cdot \frac{x}{(x^2+4)^2} dx = \frac{1}{4} I - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} I_1 - \frac{x}{2(x^2+4)} \right), \quad I_1 = \int \frac{1}{x^2+4} dx \Rightarrow I = \frac{x}{8(x^2+4)} + \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \mathcal{C}$$

**c)**  $\int \frac{x^4+x+1}{x^3+1} dx = \int \left( x + \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}$

$$2. \text{ a) } I_{n+2} + I_{n+1} + I_n = \int \frac{x^n(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}$$

$$\text{b) } I_1 = \int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1) - 1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}.$$

$$I_2 = \int \frac{x^2}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{(x^2 + x + 1) - x - 1}{x^2 + x + 1} dx = \int \left(1 - \frac{x}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x^2 + x + 1}\right) dx =$$

$$= x - I_1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C} = \dots; \quad I_3 = \frac{x^2}{2} - I_2 - I_1.$$

$$\text{Testul 7. 1. a) } \int \frac{(-\cos x)'}{1 + \cos^2 x} dx = -\operatorname{arctg}(\cos x) + \mathcal{C}; \quad \text{b) } \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx;$$

$$t = x - \frac{1}{x} \Rightarrow J = \int \frac{1}{t^2 - 2} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} + \mathcal{C} \Rightarrow I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \mathcal{C}.$$

$$\text{c) } \int \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{(x^2 + 4) - (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \frac{1}{3} \int \left( \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 4} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left( \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) + \mathcal{C}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \Rightarrow f(0+0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} = 0;$$

$f(0-0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} = 0$ . Deci  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$  și atunci  $f$  admite primitive pe orice

interval  $I \subset \mathbb{R}$ . 3. a)  $F'(x) = ((x-2)e^x + e)^x = (x-2)e^x + e^x = (x-1)e^x = f(x)$ ;

b) Limita este de forma  $\frac{0}{0}$ . Avem  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F'(x)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)e^x}{2(x-1)} = \frac{e}{2}$ ;

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)e^x}{(x+1)e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)}{x+1} = 1.$$

$$\text{Testul 8. 1. a) } F'(x) = \frac{1}{x^2} [-a - 2x - b \ln(x+1)] + \frac{2}{x} + \frac{b}{x(x+1)} = f(x) \Rightarrow a = b = 1.$$

$$2. \text{ a) } \ln x = t \Rightarrow J = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + \mathcal{C} \Rightarrow I = \operatorname{arctg}(\ln x) + \mathcal{C};$$

$$\text{b) } I = \int \frac{\cos 2x}{1 + \frac{1}{2} \sin 2x} dx = 2 \int \frac{(\sin 2x + 2)'}{\sin 2x + 2} dx = 2 \ln(2 + \sin 2x) + \mathcal{C};$$

$$\text{c) } x = \sin t \Rightarrow J = \int \sin t \cos^2 t dt = -\int \cos^2 t (\cos t)' dt = -\frac{\cos^3 t}{3} + \mathcal{C} \Rightarrow I = -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} + \mathcal{C}.$$

3.  $f$  continuă în 1  $\Leftrightarrow a + 2 = b$ . O primitivă a lui  $f$  este de forma

$$F(x) = \begin{cases} \frac{ax^2}{2} + 2x + \mathcal{C}_1, & x < 1 \\ 2(x \ln x - x) + bx + \mathcal{C}_2, & x \geq 1 \end{cases}. F \text{ continuă în } 1 \Leftrightarrow \frac{a}{2} + 2 + \mathcal{C}_1 = -2 + b + \mathcal{C}_2.$$

$$4. F'(x) = 2a \ln^2 x + 2(a+b)x \ln x + (b+2c)x = f(x) \Leftrightarrow 2a = 1, a+b = 0, b+2c = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{4}.$$

## CAPITOLUL II

$$\text{II.1. 1. } G(x) = F(x) + c \Rightarrow G(x)|_a^b = (F(x) + c)|_a^b \Rightarrow G(b) - G(a) = F(b) - F(a).$$

$$2. \text{ a) } \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}; \text{ b) } (x^3 + x) \Big|_0^1 = 2; \text{ c) } (x^3 + x^2 + x) \Big|_0^1 = 3; \text{ 4. } S = \frac{2x^3}{3} \Big|_{-a}^a = \frac{4a^3}{3} = \frac{2}{3} A_{ABCD}.$$

$$\text{II.2. 1. } \frac{e^2 + 1}{4}; \text{ 2. } x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) \Big|_1^e = e - 2. \text{ 3. } \frac{e^2 - 1}{4};$$

$$4. \frac{1}{3} \left( x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{4}{27} \right) e^{3x} \Big|_0^1 = \frac{17e^3 + 4}{27}. \text{ 5. } (-x \cos x + \sin x) \Big|_0^\pi = \pi. \text{ 6. } (x \sin x + \cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

$$7. \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} \Big|_0^\pi = \frac{e^\pi + 1}{2}. \text{ 8. } (-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x) \Big|_0^\pi = \pi - 2.$$

$$9. (x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2 - 8}{4}. \text{ 10. } \frac{\pi - 2}{4}. \text{ 11. } (x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi\sqrt{3} - \pi - 6\sqrt{3} + 6}{12}. \text{ 12. } \frac{e - 2}{e}. \text{ 13. } x \operatorname{tg} x + \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 14. } \frac{\pi(9 - 4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

$$15. \frac{2}{3} x \sqrt{x} \left( \ln x - \frac{2}{3} \right) \Big|_1^{e^2} = \frac{4 - 4\sqrt{e^3}}{9}. \text{ 16. } (\ln(\ln x) - 1) \ln x \Big|_e^{e^2} = \ln 4 - 1. \text{ 17. } \frac{x e^x}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi e^{\frac{\pi}{2}} - 2}{4}. \text{ 19. } -\operatorname{arctg}(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \text{ 20. } \left( \ln(\sin x) - \frac{\sin^2 x}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}. \text{ 21. } \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

$$22. \ln \left( \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln(\sqrt{3} + 1). \text{ 23. } \frac{\ln^4 x}{4} \Big|_1^e = \frac{1}{4}. \text{ 24. } e^{\operatorname{tg} x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = e - 1. \text{ 25. } \operatorname{arctg} e^x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4};$$

$$26. (e^x + \ln(e^x - 1)) \Big|_1^2 = e^2 - e + \ln(e + 1). \text{ 27. } -\frac{1}{2(1 + \ln x)^2} \Big|_e^{e^2} = \frac{5}{72}. \text{ 28. } \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 5) \Big|_{-1}^1 = -\frac{1}{2} \ln 5.$$

$$29. \left[ \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4} (\operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1)) \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(3 - 2\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2}; \quad 30. \frac{1}{2}.$$

$$31. 8 + \ln 2; \quad 32. \frac{e^6}{6} - e^4 - \frac{2}{e} + 5\frac{5}{6}; \quad 33. 5; \quad 34. e^3 + \frac{2}{e^2} - 5; \quad 35. \ln \frac{7}{4(4 - \sqrt{7})^3}; \quad 36. 2\sqrt{3} - \ln 3;$$

$$37. \frac{1}{3} \arcsin \frac{3}{4} - \frac{1}{20} \ln \frac{3}{7}; \quad 38. 2\sqrt{3} + 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{5} - 3 \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{20}; \quad 39. \frac{3 + \sqrt{3}}{6}; \quad 40. \ln \frac{(3 + \sqrt{10})(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{10} - 1)^2 (\sqrt{2} + 1)^2};$$

$$41. \frac{4\sqrt{3} - \pi}{3}; \quad 42. \frac{\pi}{2} - \ln(4 + 2\sqrt{3}); \quad 43. \frac{2(2\sqrt{2} - 1)}{3}; \quad 44. \frac{23}{3}; \quad 45. 12; \quad 46. \frac{1}{4}; \quad 47. e - \sqrt{e};$$

$$48. \frac{1}{5} \ln \frac{4}{3}; \quad 49. \operatorname{arctg} \frac{1}{7}; \quad 50. \frac{4}{3}.$$

$$\text{II.3. 1. a) } \frac{1}{3}; c = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \text{b) } a, c \in \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}; \quad \text{c) } \frac{1}{2}; c \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}; \quad \text{d) } \frac{3}{8}; c \in \left\{ \arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}, \pi - \arcsin \sqrt{\frac{3}{8}} \right\};$$

$$\text{e) } \frac{20}{9}; c = \frac{\sqrt{10 + \sqrt{19}}}{3}; \quad \text{f) } 2 \ln \frac{6}{5}; \quad \text{g) } 2 + \ln \frac{2}{e^2 + 1}. \quad 2. \text{ e) } 4 - x^2 \geq 4 - x^2 - x^3 \geq 4 - 2x^2, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{4 - 2x^2}}; \quad \text{f) } \sqrt{1 - x^2} \leq \sqrt{1 - x^{2n}} \leq 1, \forall x \in [-1, 1], n \geq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 - x^{2n}}} \geq 1. \quad 3. \text{ a) } \ln(1 + x^2) < x; \quad \text{b) } \ln x > \frac{2(x - 1)}{x + 1}; \quad \text{c) } \operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}, x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\text{d) } \sin x > x - \frac{x^3}{6} \text{ pentru } x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right); \quad \text{e) } \ln(x + 1) \geq \frac{2x}{x + 2}, \forall x \geq 0; \quad \text{g) } 1 + x\sqrt{e^x} < e^x;$$

$$\text{h) } \sin x + \operatorname{tg} x > 2x, x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right). \quad 4. \text{ Integralele sunt nule deoarece funcțiile sunt continue și impare.}$$

$$5. \text{ a) } -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \forall x \in [a, b] \text{ și se integrează; b) } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow F'(x) = f(x) > 0$ . Cum  $F$  este injectivă rezultă  $a = b$ . **6.; 7.; 8.** Cazul mai general este:  
 „Dacă  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ ,  $g$  este continuă pe  $\mathbb{R}$  cu primitiva  $G$  și dacă

$$\alpha f(x + b) + \beta f(c - x) = g(x + b), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ atunci } I_{a,d} = \int_a^d f(x) dx = \frac{G(d) - G(a)}{\alpha + \beta}, \text{ unde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*,$$

$$a + d = b + c. \text{ Din } \alpha f(x) + \beta f(b + c - x) = g(x) \text{ rezultă } f(x) = \frac{g(x)}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} f(b + c - x), \text{ deci}$$

$$I_{a,d} = \frac{1}{\alpha} \int_a^d g(x) dx - \frac{\beta}{\alpha} \int_a^d f(b + c - x) dx = \frac{1}{\alpha} (G(d) - G(a)) + \frac{\beta}{\alpha} I_{a,d}, \text{ etc. } \quad 9. \text{ a) } x = a + t(b - a);$$

$$\text{b) } x = a - t. \quad 10. \text{ a) Aplicăm rezultatul precedent pentru } \alpha = \beta = 1, b = 2T, c = 0,$$

$$g(x) = 2T \cdot \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}. \quad \text{b) Pentru } k = 1 \text{ avem } I_1 = -I_2 = \frac{\pi^2}{4}. \text{ Pentru } k = 2 \text{ avem } I_1 = I_2 = 0.$$

11. Se integrează  $\frac{1-(1-x)^n}{x}$  în două moduri.

12.  $t = 1 - x$ . 13.  $t > 1 \Rightarrow \frac{1}{2t} > \frac{2}{(1+t)^2} \Rightarrow \frac{1}{2} \int_1^x \frac{dt}{t} > 2 \int_1^x \frac{dt}{(1+t)^2} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{x}{y} > \frac{x-y}{x+y}$ , etc.

14.  $\int_{a-b}^{a+b} f(x) dx = \int_{-b}^b f(a+t) dt = \int_{-b}^b f(a-t) dt$ . 15. a)  $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt$ ; b) Funcțiile date au

proprietatea  $f(1+x) = -f(1-x)$  și deci integralele sunt nule.

II.4. 1.  $\arctg \frac{1}{7}$ . 2.  $\frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$ . 3.  $\ln \frac{3}{2}$ . 4.  $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2+4}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2}$ .

5.  $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$ . 7.  $\ln \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}$ . 8.  $\frac{x}{4} + \ln x - \frac{1}{6} \ln(2x-1)^7(2x+1)^9$ .

9.  $4 \ln|x| - 3 \ln|x-1| - \frac{9}{x-1}$ . 10.  $\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2(x+1)}$ .

11.  $2 \ln \left| \frac{x+4}{x+2} \right| - \frac{5x+12}{x^2+6x+8}$ . 12.  $\ln \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ .

II.5. 1. 1; 2.  $\frac{\pi}{2} - 1$ ; 3.  $1 - \frac{2}{e}$ ; 4.  $\frac{e^\pi + 1}{2}$ ; 5.  $\frac{e^2 + 3}{8}$ ; 6.  $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ ; 7.  $\pi^3 - 6\pi$ ;

8.  $2 - \frac{3}{\ln 6}$ ; 9. 1; 10.  $\frac{e^\pi - 2}{5}$ ; 11.  $6 - 2e$ ; 12.  $9 \ln 3 - \frac{26}{9}$ ; 13.  $\frac{\pi - \ln 4}{4}$ ; 14.  $\frac{\pi - 2}{2}$ ; 15.  $\frac{\pi - 2}{4}$ ;

16.  $2 - \frac{5}{e}$ ; 17.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$ ; 18.  $\frac{\pi - 2}{8}$ ; 19.  $\frac{2}{9}$ ; 20.  $\frac{e^\pi + 1}{2}$ ; 21.  $\frac{1}{3}$ ; 22.  $\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \ln \sqrt{2}) - 1$ ; 23.  $\frac{\ln 2e}{6}$ ;

24.  $\ln \frac{4}{e}$ ; 25.  $\frac{13e - 18}{8}$ ; 30. 2; 31. a)  $4 \ln 2 - 2$ ; b)  $1 + 2e$ ; c)  $\ln 2 - \frac{1}{e}$ ; d)  $4 \ln \frac{2e}{e+1}$ .

32.  $I = 2(a-b-2) + 2e(1+b) \in \mathbb{Q} \Rightarrow b = -1, a \in \mathbb{R}$ . 33. a) Șirurile sunt descrescătoare și mărginite inferior de 0; b) limitele sunt 0. 34. a)  $I_1 = 2 \ln 2 - 1, I_2 = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$ ; b)  $0 \leq I_n \leq \ln 2$ ;

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ . 36. a)  $I_0 = \frac{2}{3}, I_1 = \frac{4}{15}, I_2 = \frac{6}{105}$ ; c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .

II.6. 1.  $\frac{1}{2} \arctg x^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}$ . 2.  $\arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$ . 3.  $\frac{1}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ . 4.  $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$

$= \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ . 5.  $\frac{1}{2} \arcsin x^2 \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{12}$ . 6.  $-\frac{e^{-x^2}}{2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2e}$ . 7.  $\frac{1}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$ . 8.  $-\frac{1}{\sin x} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$

$$= \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \cdot \mathbf{9.} \frac{\sin^4 x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{10.} -\frac{\cos^4 x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{11.} \arctg(\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \cdot \mathbf{12.} \arctg(-\cos 0) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\mathbf{13.} 2e^{\sqrt{x}} \Big|_1^4 = 2(e^2 - e). \mathbf{14.} \frac{1}{2} \ln^2 x \Big|_1^e = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{15.} -\frac{1}{\ln x} \Big|_e^{e^2} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{16.} -\ln(1 + \cos^2 x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2.$$

$$\mathbf{17.} \sin(\ln x) \Big|_e^2 = \sin 2 - \sin 1 \cdot \mathbf{18.} -\cos(\ln x) \Big|_e^2 = \cos 1 - \cos 2 \cdot \mathbf{19.} \left( \arctg e^x + x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) \right) \Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} + \arctg e + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{e^2 + 1} \cdot \mathbf{20.} \arctg e^x \Big|_{-1}^1 = \arctg e - \arctg \frac{1}{e} \cdot \mathbf{21.} \cos \frac{1}{x} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{4}{\pi}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}.$$

$$\mathbf{22.} 2\arctg \sqrt{2x-1} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{6} \cdot \mathbf{23.} 2\arctg \sqrt{x} \Big|_1^3 = \frac{\pi}{6} \cdot \mathbf{24.} \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

$$\mathbf{25.} \left( 2\arctg \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} \right) \Big|_0^1 = \frac{6 + \pi - 3\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Testul 1. 1. a) } \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx = \left( \frac{1}{4} - \arcsin x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8};$$

$$\mathbf{b) } \int_0^\pi e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \Big|_0^\pi = \frac{1}{2} (-e^\pi - 1);$$

$$\mathbf{c) } \int_0^\pi x^2 \cos^2 x dx = \left( \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4} x^2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{2\pi^3 + 3}{12};$$

$$\mathbf{d) } \int_0^{\sqrt{3}} \ln(x^2 + 1) dx = [x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2\arctg x] \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \ln 4 - 2\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3};$$

$$\mathbf{e) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \tan^2 x dx = \left( x \tan x - \frac{x^2}{2} + \ln(\cos x) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi^2}{18} - \ln 2;$$

$$\mathbf{f) } \int_1^2 (x^2 + 1)e^{x-1} dx = (x^2 - 2x + 3)e^{x-1} \Big|_1^2 = 3e - 2.$$

$$\text{Testul 2. 1. a) } I = \left( \frac{1}{2} \arctg^2 x \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi^2}{18}; \mathbf{b) } \int_0^\pi e^x \cos^2 x dx = \frac{e^x}{10} (5 + 2\sin 2x + \cos 2x) \Big|_0^\pi = \frac{3(e^\pi - 1)}{5}$$

$$\mathbf{c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)e^x dx = -e^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1; \mathbf{d) } \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} dx = \left( 2\sqrt{x} + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} \right| \right) \Big|_0^1 =$$

$$= 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(\sqrt{2} - 1); \mathbf{e) } \int_0^1 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = (-x + 4\sqrt{x} - 4 \ln(1 + \sqrt{x})) \Big|_0^1 = 3 - \ln 4;$$

$$\mathbf{f) } \int_0^1 \arcsin x dx = (x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\mathbf{2. a) } f \text{ continuă pe } [-1, 1] \Rightarrow f \text{ integrabilă; } \mathbf{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}, & x \in [-1, 0] \\ \frac{1}{x^2 - 2x + 2}, & x \in (0, 1] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x+1) + \mathcal{C}_1, & x \in [-1, 0] \\ \operatorname{arctg}(x-1) + \mathcal{C}_2, & x \in (0, 1] \end{cases}; \int_{-1}^1 f(x) dx = \operatorname{arctg}(x+1)|_{-1}^0 + \operatorname{arctg}(x-1)|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

**Testul 3. 1. a)**  $-(x^2 + 2x + 3)e^{-x}|_0^1 = 3 - \frac{6}{e}$ ; **b)**  $\left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}\right)|_1^{e^2} = \frac{3e^4 - 1}{4}$ ;

**c)**  $-\operatorname{arctg}(\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ ; **d)**  $\frac{\ln^3 x}{x}|_1^e = \frac{1}{e}$ ; **e)**  $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = 2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x})|_0^1 = \frac{4-\pi}{2}$ ;

**f)**  $\left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \right)|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{\ln 3}{a}$ .

**2. Fie**  $f: (0, e) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ . Avem  $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow f$  strict crescătoare

$\Rightarrow f(x) > \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow \ln(x+1) > \frac{x}{x+1} \Rightarrow \int_0^e \ln(x+1) dx > \int_0^e \frac{x}{x+1} dx$ . În al doilea mod,

avem  $\int_0^e \ln(x+1) dx = [(x+1)\ln(x+1) - x - 1]|_0^e = (e+1)\ln \frac{e+1}{e} + 1$ ,

$\int_0^e \frac{x}{x+1} dx = [x - \ln(x+1)]|_0^e = e - \ln(e+1)$  etc.

**3.**  $3I_{n+1} + 2I_n = \int_0^1 \frac{3x^{n+1} + 2x^n}{3x+2} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ .

**Testul 4. 1.**  $\frac{1}{\frac{\pi}{3} - 0} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx = -\frac{3}{\pi} \ln \cos x|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3 \ln 2}{\pi}$ .

**2.**  $I_{n+2} + 2I_{n+1} + 3I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} + 3x^n}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}|_0^1 = \frac{1}{n+1}$ .

**3. a)**  $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^x + 1} dx = \left(\frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln(e^x + 1)\right)|_0^1 = \frac{(e-1)^2}{2} + \ln(e+1)$ ;

**b)**  $\int_2^4 \sqrt{x^2 - 4} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 - 4} - 4 \ln(x + \sqrt{x^2 - 4}))|_2^4 = 4\sqrt{3} + 2 \ln(2 - \sqrt{3})$ ;

**c)**  $\int_0^1 \arccos x dx = (x \arccos x - \sqrt{1-x^2})|_0^1 = 1$ ; **d)**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx = \ln(1 + \sin^2 x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2$ ;

**e)**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{lg}^4 x) dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} = \frac{1}{3}$ ; **f)** Funcția este impară și deci integrala este nulă.

**Testul 5. 1.** Avem  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ . Rezultă că  $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = 0$ .

Se aplică formula de medie.

**2. a)**  $\int_{-1}^1 (2^x + 2^{-x}) \operatorname{tg} x dx = 0$ , deoarece  $(2^x + 2^{-x}) \operatorname{tg} x = f(x)$  este funcție impară;

$$\text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\cos^2 x} dx = e^{\sqrt{x}} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = e^{\sqrt{3}} - 1; \quad \text{c) } \int_0^1 \frac{x}{x^4 + 4} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2)'}{x^4 + 4} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 4} dt = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{2};$$

$$\text{d) } \int_0^2 x \ln(x+1) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+1) \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = \ln \sqrt{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{e) } \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{\ln^2 x + 2 \ln x + 2}{x} \Big|_1^e = \frac{2e - 5}{e};$$

$$\text{f) } \int_0^1 \sqrt{x^2 + 3} dx = \frac{1}{2} \left[ x\sqrt{x^2 + 3} + 3 \ln(x + \sqrt{x^2 + 3}) \right] \Big|_0^1 = 1 + \frac{3}{2} \ln \sqrt{3}.$$

$$3. \int_0^{8\pi} |\cos x| dx = 4 \int_0^{2\pi} |\cos x| dx = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 16 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 16$$

**Testul 6. 1. a)**  $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = 2 \int_0^{\pi} |\sin x| dx = 2n \int_0^{\pi} \sin x dx - 4n$ ; **b)** Analog obținem  $4n$ .

2.  $2 \int_0^1 f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - x) dx = 0 \Leftrightarrow$  există  $a \in (0, 1)$  astfel încât  $0 = \int_0^1 (f(x) - x) dx = f(a) - a$  și deci  $f(a) = a$ .

$$3. \text{ a) } I_0 = \ln(x+2) \Big|_0^1 = \ln \frac{3}{2}; \quad I_1 = \int_0^1 \left( 1 - \frac{2}{x+2} \right) dx = x - 2 \ln(x+2) \Big|_0^1 = 1 + 2 \ln \frac{2}{3};$$

$$\text{b) } I_{n+1} + 2I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + 2x^n}{x+2} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1};$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^{n+1} \leq x^n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^{n+1}}{x+2} \leq \frac{x^n}{x+2} \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n;$$

c) Rezultă din relațiile de la b).

### CAPITOLUL III

$$\text{III.1 1. } \frac{32}{3}; \quad \text{2. } 2; \quad \text{3. } \frac{9}{2}; \quad \text{4. } \frac{16}{3}; \quad \text{5. } \frac{1}{3}; \quad \text{6. } \frac{9}{4}; \quad \text{7. } \frac{(e-1)^2}{e}; \quad \text{8. } \frac{32\sqrt{6}}{2}; \quad \text{9. } \frac{3\pi-2}{6};$$

$$\text{10. } 2\pi + \frac{4}{3} \text{ și } 6\pi - \frac{4}{3}; \quad \text{11. } 4; \quad \text{12. } \frac{18}{e^2} - 2; \quad \text{13. } \frac{3 - \ln 4 - 2 \ln^2 2}{16}; \quad \text{14. } 12; \quad \text{15. } \frac{3\pi a^2}{8}; \quad \text{16. } \frac{3}{2};$$

$$\text{17. } 1 - e^{-1}; \quad \text{18. } \frac{7}{15}.$$

$$\text{III.2 2.) } 32\pi. \quad \text{3. } \frac{32\pi}{3}. \quad \text{4. a) } \frac{33\pi}{5}; \quad \text{b) } \pi \left( \frac{129}{7} - \frac{65}{3} + \frac{33}{5} \right); \quad \text{c) } \frac{7\pi}{3}; \quad \text{d) } \frac{\pi(e^6 - 1)}{2e^2}; \quad \text{e) } \frac{\pi(e^6 - 1)}{2e^2};$$

$$\text{f) } \frac{38\pi}{15}. \quad \text{5. a) } \pi p a^2; \quad \text{b) } \frac{\pi(e^2 - 1)}{4}; \quad \text{c) } \frac{\pi(e^4 - 1)}{4}; \quad \text{d) } \frac{\pi}{12}; \quad \text{e) } \frac{\pi}{2}; \quad \text{f) } \frac{2\pi}{15}; \quad \text{g) } \frac{\pi(e^2 - 1)}{2e^2}; \quad \text{h) } \frac{\pi(2e^3 + 3)}{9}.$$

$$\text{III.3 1. } 4\sqrt{5}; \quad \text{2. } \left[ x\sqrt{x^2 - 2x + \frac{5}{4}} + \frac{1}{8} \ln \left( x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + \frac{5}{4}} \right) \right] \Big|_0^2 = \sqrt{5} + \frac{1}{8} \ln \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}.$$

$$3. \left[ x\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{8} \ln \left( x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \right) \right]_1^2 = \frac{2\sqrt{17} - \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{8} \ln \frac{4 + \sqrt{17}}{2 + \sqrt{5}}. \quad 4. \sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} + \ln \frac{\sqrt{1 + e^2} - 1}{e(\sqrt{2} - 1)}.$$

$$5. t = \sqrt{\frac{x+1}{x}}; l = \left( \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{3 - 2\sqrt{2}}{5 - 2\sqrt{6}} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} \right)$$

$$6. \frac{\pi}{6}. \quad 7. \ln 3 - \frac{1}{2}. \quad 8. \ln(3 + 2\sqrt{2}). \quad 9. x^2 + 1 = t^2 \Rightarrow l = \left( t + \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \right) \Big|_{\sqrt{2}}^2 = 2 - \sqrt{2} + \ln(9 - 6\sqrt{2}).$$

$$10. \frac{8(10\sqrt{10} - 1)}{27}. \quad 11. \frac{e^2 - 1}{2e}. \quad 12. \left( 2x + \frac{1}{2} \ln \frac{x}{x+2} \right) \Big|_1^2 = 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

$$\text{III.4 2. a) } \frac{8\pi}{5}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}); \quad \text{b) } f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \frac{3}{8}\sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(f) = \pi \left( \frac{5}{4} \arcsin \frac{x}{2} + \frac{3}{16} x\sqrt{4 - x^2} \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{5\pi^2}{4}; \quad \text{c) } \frac{2\pi}{3}(7\sqrt{7} - 3\sqrt{3}); \quad \text{d) } \frac{4\pi(5\sqrt{5} - 3\sqrt{3})}{3};$$

$$\text{e) } \pi \left( e\sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} + \ln \frac{e + \sqrt{1 + e^2}}{1 + \sqrt{2}} \right); \quad \text{f) } \pi \left[ \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{2} \right].$$

III.5 1. Cele trei drepte se intersectează în punctele  $A(1, 5)$ ,  $B(1, 3)$ ,  $C(2, 5)$ . Rezultă

$$G\left(\frac{4}{3}, \frac{13}{3}\right). \quad 2. A(-4, 5), B(2, 1), C(0, 3) \Rightarrow G\left(-\frac{2}{3}, 3\right). \quad 3. y = x^2, y = x \Rightarrow A(0, 0), B(1, 1);$$

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}; \quad \int_0^1 x(x - x^2) dx = \frac{1}{12}; \quad \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \frac{2}{15}; \quad x_G = \frac{1}{12} : \frac{1}{6} = \frac{1}{2}; \quad y_G = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{15} : \frac{1}{6} = \frac{2}{5}$$

$$4. y = x, y = x^3 \Rightarrow A(0, 0), B(1, 1); \quad \int_0^1 (x - x^3) dx = \frac{1}{4}; \quad \int_0^1 x(x - x^3) dx = \frac{2}{15};$$

$$\int_0^1 (x^2 - x^6) dx = \frac{4}{21} \Rightarrow x_G = \frac{2}{15} : \frac{1}{4} = \frac{8}{15}, \quad y_G = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{21} : \frac{1}{4} = \frac{8}{21}. \quad 5. f(x) = 0 \Rightarrow x \in \{\pm 3\};$$

$$\int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = 2 \int_0^3 (9 - x^2) dx = 36; \quad \int_{-3}^3 (9x - x^3) dx = 0, \quad \int_{-3}^3 (9 - x^2)^2 dx = \frac{54}{5}; \quad x_G = 0, \quad y_G = \frac{136}{45}.$$

6. Vezi figura 1. Avem  $f_1(x) = \sqrt{x-1}$ ,  $f_2(x) = -\sqrt{x-1}$ ;

$$\int_1^5 (\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}) dx = \frac{32}{3}; \quad \int_1^5 2x\sqrt{x-1} dx = \frac{544}{15};$$

$$\int_1^5 [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx = 0 \Rightarrow x_G = \frac{33}{10}, \quad y_G = 0.$$

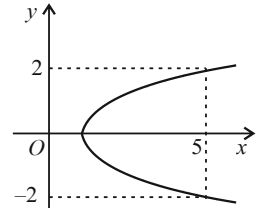


Fig. 1

$$7. y = -x^2 + 3, y = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow A\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \quad B\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} (-x^2 + 3 - x^2 + 2x - 1) dx = \frac{5\sqrt{5} - 6}{6} + \frac{5\sqrt{5} + 6}{6} = \frac{5\sqrt{5}}{3}; \quad \int_{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} x(-x^2 + 3 - x^2 + 2x - 1) dx = \frac{5\sqrt{5}}{3};$$

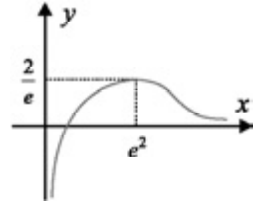
$$\int_{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} [(-x^2 + 3)^2 - (x^2 - 2x + 1)^2] dx = 4 \int_{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} (x^3 - 2x^2 + x + 2) dx = \frac{17\sqrt{5}}{12} \Rightarrow x_G = 1; \quad y_G = \frac{17}{40}.$$

8.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx = \sqrt{2} - 1$ ;  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\cos x - \sin x) dx = (x \sin x + x \cos x - \sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}-4}{4}$ ;  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \Rightarrow x_G = \frac{4}{\pi}, y_G = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$ .

## PROBLEME DE SINTEZĂ

1. a)  $f(x) = 1 + \frac{(x-1)^2}{2x-1} \Rightarrow m=1$ ; b)  $c_{n+1} = \ln \frac{(a_n-1)^2}{a_n^2} = 2 \ln \frac{a_n-1}{a_n} = 2 \ln b_n = 2c_n$ ;  $c_n = -2^n \ln 2$ ;  
 $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$ ;  $a_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}} \rightarrow 1$ .

2. a)  $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$ ,  $f'(e^2) = 0$ ; Graficul este redat în figura alăturată;



b)  $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k), \forall t \in [k, k+1], k \geq 8 > e^2 \Rightarrow$

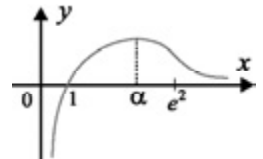
$$\Rightarrow \int_k^{k+1} f(k+1) dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt \Rightarrow f(k+1) \int_k^{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \int_k^{k+1} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k); \int_8^{n+1} f(t) dt = \sum_{k=8}^{n+1} \int_k^{k+1} f(t) dt \Rightarrow f(9) + \dots + f(n+1) \leq \int_8^{n+1} f(t) dt \leq$$

$$\leq f(8) + f(9) + \dots + f(n) \Rightarrow a_{n+1} - f(8) \leq I_n \leq a_n, \forall n \geq 8$$
; c)  $I_n = (2\sqrt{x} \ln x) \Big|_8^{n+1} - \int_8^{n+1} \frac{2\sqrt{x}}{x} dx =$   
 $2\sqrt{n+1}(\ln(n+1) - 2) - 12\sqrt{2} \ln 2 + 8\sqrt{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \infty; a_n \geq I_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ;

d)  $b_{n+1} - b_n = f(n+1) > 0, \forall n \geq 8 \Rightarrow (b_n)$  strict crescător;  $a_{n+1} - f(8) \geq a_n - f(8) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 0 \leq a_n - \int_8^{n+1} f(t) dt \leq f(8) \Rightarrow 0 \leq b_n \leq f(8)$ . Deci  $(b_n)$  e convergent și are limita în  $\left(0, \frac{\ln 8}{\sqrt{8}}\right)$ .

3. a)  $g'(x) = -4x \ln x \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (0, 1), g'(1) = 0, g'(x) < 0, \forall x > 1$ . Avem  $g(1) = 2, g(e) = 1 - e^2 < 0 \Rightarrow \alpha \in (1, e)$ ; Graficul este redat în figura alăturată;



b)  $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$ ; c)  $F'(x) = f(x)$ ; d)  $x \geq 1 \Rightarrow x^2 < 1+x^2 < (1+x)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} < \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{\ln x}{(1+x)^2} \leq \frac{\ln x}{1+x^2} \leq \frac{\ln x}{x^2};$$
 e)  $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = -\frac{1}{t} \ln t \Big|_1^x + \int_1^x \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + 1;$

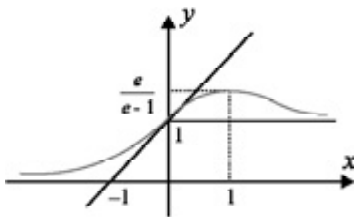
$$\int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt = -\frac{1}{1+t} \ln t \Big|_1^x + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = -\frac{\ln x}{1+x} - \ln \frac{x}{x+1} + \ln 2$$
. Pentru  $x > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt \leq \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt \Rightarrow$  inegalitatea cerută; **f)** Se trece la limită în inegalitatea de la e) și rezultă  $\ln 2 \leq a \leq 1$ .

**4. a)**  $g'(x) = 1 - e^{-x-1}$ . Funcția  $g$  este strict crescătoare pe  $(-\infty, 1]$  și strict descrescătoare pe  $[1, \infty)$ . Cum  $g(1) = 0 \Rightarrow g(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .  $x - e^{-x-1} \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{-x}(x - e^{-x-1}) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$ . Avem  $-xe^{-x} \geq -\frac{1}{e} \Rightarrow 1 - xe^{-x} \geq 1 - \frac{1}{e} > 0$ .

**b)**  $f'(x) = \frac{e^{-x}(1-x)}{(1-xe^{-x})^2}$ ;  $f'(x) > 0, \forall x < 1$ ;  $f'(x) < 0, \forall x > 1$ ;

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq f(1) = \frac{e}{e-1}, \forall x \geq 0$ ; **c)**  $I_1 = -xe^{-x} \Big|_0^1 +$



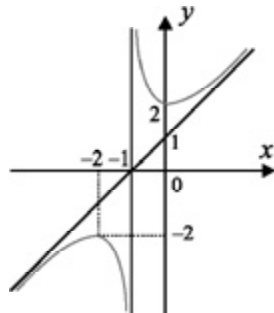
$+ \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$ ;  $I_2 = \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx = \left( -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) e^{-2x} \Big|_0^1 = \frac{e^2 - 5}{4e^2}$ ; **d)**  $1 + xe^{-x} +$

$+(xe^{-x})^2 + \dots + (xe^{-x})^n = \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}}$ .

**5. a)**  $\lim_{x \searrow 0} f_n(x) = 2n+1 = f_n(0) \Rightarrow f_n$  continuă în 0; **b)** da; **c)**  $I_n = I_{n-1}, \forall n \geq 1 \Rightarrow I_n = I_0 = \frac{\pi}{2}$ .

**6. a)**  $f(-2) = -2, f'(-2) = 0, f(0) = 2, f'(0) = 0 \Rightarrow -2a + b - c = -2, b + c = 2, a - c = 0 \Rightarrow a = b = c = 1$ ; **b)**  $x = -1, y = x + 1$  sunt asimptote. **c)**  $x < -1 \Rightarrow$  graficul se află sub asimptota  $y = x + 1$ ;  $x > -1 \Rightarrow$  graficul se află deasupra asimptotei  $y = x + 1$ .

**d)**  $\int_{-n-1}^{-n} \left( x + 1 - x - 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = -\ln|x+1| \Big|_{-n-1}^{-n} = \ln \frac{n+1}{n}$ .



**7. a)**  $F(x) = x \cos(\ln x) - 1 + G(x)$ ;  $G(x) = x \sin(\ln x) - F(x)$ ; **b)**  $F(x) = \frac{1}{2} [x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - 1]$ ,

$G(x) = \frac{1}{2} [-x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) + 1]$ . **8. a)**  $(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$ ; **b)**  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ ;

**c)**  $\left| x_4 - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{1}{2n+3} \Rightarrow x_n \rightarrow \frac{\pi}{4}$ .

**9. a)**  $f'(x) = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$ . Avem tabelul alăturat; **b)**  $x \in \left[ 0, \frac{1}{2} \right] \Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x} \Rightarrow$

$x$	0	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	1	$\frac{2}{\sqrt{e}}$

$$\Rightarrow f(x) - (1+x)e^{-x} = x^2 f(x) \Rightarrow I - J = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx;$$

$$\text{d) } a = \frac{1}{24}, b = \frac{1}{12\sqrt{e}}.$$

10. a) Avem tabelul alăturat; b) A compara  $a^b$  și  $b^a$  revine la a compara  $f(a)$  cu  $f(b)$ ;

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	0
$f(x)$	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	0

$$\text{Dacă } 0 < a < b \leq e \Rightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow a^b < b^a;$$

$$\text{Dacă } e < a < b \Rightarrow a^b > b^a;$$

$$\text{c) } e < \pi \Rightarrow f(e) > f(\pi) \Rightarrow e^\pi > \pi^e;$$

d) Fie  $1 \leq n < m$ . Convine  $n=2$  și rezultă  $2^m = m^2 \Rightarrow m=4$ ; e) Fie  $a = (\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$ ,  $b = (\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$ . Pentru  $n=1 \Rightarrow a > b$ . Pentru  $n \leq 7 \Rightarrow b < a$ . Pentru  $n \geq 8 \Rightarrow b > a$ .

$x$	0	$a$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$\frac{a}{3}$	0	$+\infty$

$$\text{11. a) } f'(x) = \frac{2(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a})}{3\sqrt[3]{x}};$$

$$\text{b) } f(x) \geq 0, \forall x > 0 \Rightarrow f\left(\frac{b+c}{2}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot \left(\frac{b+c}{2}\right)^2}$$

$$\text{c) } \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 \geq bc \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

$$\text{12. a) } f'(x) = \frac{n(x-1)}{(n+1)(1+nx)x}; \text{ b) } f(x) > \ln(1+n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(1+nx) - \ln(n+1) > \frac{n}{n+1} \ln x \Rightarrow (n+1) \ln \frac{1+nx}{n+1} > n \ln x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+nx}{n+1}\right)^{n+1} > x^n; \text{ c) Se ia } x = 1 + \frac{1}{n} \text{ în inegalitatea de la b); d) Se ia } x = -\frac{n}{n+1} \text{ în inegalitatea}$$

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$		$\ln(1+n)$	$\nearrow$

de la b).

$$\text{13. } \frac{1}{1+x_n} = \frac{x_n}{x_n^2+x_n} = \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_n^2}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_{n+1}-x_n}{x_n x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

$$\text{14. a) } 0 < x_n < x_{n+1} \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2}, x_n \rightarrow \frac{1+\sqrt{13}}{2}; \text{ b) } 1 < x_n \leq 2, \forall n \geq 2; x_0 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2n}; x_1 \geq x_3 \geq \dots \geq x_{2n+1};$$

$$\text{c) } x_{2n} \rightarrow a, x_{2n+1} \rightarrow b \Rightarrow a = 1 + \frac{1}{b}, b = 1 + \frac{1}{a} \Rightarrow a = b; a = 1 + \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

15. a) Se verifică prin calcul direct.

b) Avem  $f'(0) = g'(0) = 0$ .

c) Din tabela de semn rezultă  $f(x) < 0$  și  $g(x) > 0, \forall x > 0$ .

$x$	-1	0	$\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$
$f'(x)$		+	-

d) Utilizăm formula primilor  $n$  termeni ai unei progresii aritmetice: rezultă

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = n^2.$$

$x$	-1	0	$\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow \infty$
$g'(x)$		+	0
		+	+

e) Pentru  $n = 1$  se verifică ușor. Să arătăm acum  $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ . Avem

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3} + (2n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(4(n + 1)^2 - 1)}{3}.$$

Ultima egalitate se verifică prin calcul direct.

f) Din c) rezultă  $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x, \forall x > 0$ . Vom avea

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} < \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}; \quad \frac{3}{n^2} - \frac{3^2}{2n^4} < \ln\left(1 + \frac{3}{n^2}\right) < \frac{3}{n^2}; \dots;$$

$$\frac{2n - 1}{n^2} - \frac{(2n - 1)^2}{2n^4} < \ln\left(1 + \frac{2n - 1}{n^2}\right) < \frac{2n - 1}{n^2}$$

Adunând aceste inegalități rezultă (din d) și e))

$$1 - \frac{n(4n^2 - 1)}{2 \cdot 3 \cdot n^4} < \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{3}{n^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{2n - 1}{n^2}\right) < 1.$$

Trecând la limită, obținem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{3}{n^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{2n - 1}{n^2}\right) \right) = 1$ .

16. a)  $f_0(\pi) = \cos \pi = -1$ .

b) Dacă  $x_n = 2n\pi$ , atunci  $f_0(x_n) = 1$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_0(x_n) = 1$ . Dacă  $y_n = 2n\pi + \pi$ , atunci  $f_0(y_n) = -1$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_0(y_n) = -1$ . Deci  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_0(x)$  nu există.

c)  $f_1(\pi) = f_0(\pi) = -\sin \pi = 0$ .

d)  $\int_0^{2\pi} f_1(x) dx = \int_0^{2\pi} (-\sin x) dx = -\int_0^{2\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_0^{2\pi} = 0$ .

e)  $f_0(x) = \cos x$ ;  $f_1(x) = -\sin x$ ;  $f_2(x) = -\cos x$ ;  $f_3(x) = \sin x$ ;  $f_4(x) = \cos x$ .

Deci valoarea funcției se repetă din 4 în 4, rezultă  $f_{10}(x) = f_2(x) = -\cos x$ .

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)}{n} = 0$  deoarece numărătorul este constant, putând lua una din valorile 0,  $\cos x$ ,  $\cos x - \sin x$ ,  $-\sin x$ . Cum numitorul tinde la  $\infty$ , rezultă fracția tinde la 0.

17. a) Suma cerută este 2003. b)  $I_1(x) = \int_0^x dt = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

c) Cum  $\lim_{x \rightarrow \infty} (I_1(x) - x) = 0$ , rezultă că  $y = x$  este asimptota oblică a funcției  $I_1(x)$  către  $+\infty$ .

d) Arătăm prin inducție matematică egalitatea  $I_n(x) = \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$ . Pentru  $n = 1$  s-a verificat; să arătăm că  $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ . Avem

$$I_{n+1}(x) = \int_0^x I_n(t) dt = \int_0^x \frac{t^n}{n!} dt = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_0^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ ceea ce trebuia arătat.}$$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Într-adevăr, fie  $x > 0$  și  $a_n = \frac{x^n}{n!}$ . Atunci  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1} < 1$

deci  $a_{n+1} < a_n, \forall n \geq n_0$ . Rezultă că șirul este descrescător și cum  $a_n > 0$ , șirul este mărginit. Deoarece  $a_{n+1} = \frac{x}{n+1} \cdot a_n$ , trecând la limită obținem  $L = 0 \cdot L$  sau  $L = 0$ . Când

$x = 0$  este evident, iar pentru  $x < 0$  se observă că  $\frac{x^n}{n!} = (-1)^n \frac{(-x)^n}{n!}$  care are limita 0.

f)  $0 < \frac{I_0(1) + I_1(1) + \dots + I_n(1)}{n} = \frac{1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}}{n} < \frac{3}{n}$ , de unde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_0(1) + I_1(1) + \dots + I_n(1)}{n} = 0.$$

18. a)  $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2$ .

b)  $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

c)  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ . Fie  $f(x) = \frac{x}{1+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ ;  $g'(x) = x^{n-1} \Rightarrow g(x) = \frac{x^n}{n}$ .

Avem  $I_n = \frac{x^{n+1}}{n(x+1)} \Big|_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$ , deci  $nI_n = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$ .

d) Cum  $x^{n+1} \leq x^n, \forall x \in [0, 1]$ , rezultă că  $\frac{x^{n+1}}{1+x} \leq \frac{x^n}{1+x}, \forall x \in [0, 1]$ , deci  $I_{n+1} \leq I_n$ .

e) Avem  $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ . Deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .

f) Analog, se obține că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx = 0$  și din c) rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{2}$ .

19. a)  $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ , iar  $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$ .

b)  $I_{n+2} + I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x^2+1)}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ .

c) Cum  $x^n \geq x^{n+1}, \forall x \in [0, 1]$ , rezultă  $\frac{x^n}{1+x^2} \geq \frac{x^{n+1}}{1+x^2}, \forall x \in [0, 1]$  și, integrând,

obținem  $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \geq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2} dx$ , adică  $I_n \geq I_{n+1}$ .

d) Avem  $\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+2} \leq 2I_n$ , de unde rezultă  $I_n \geq \frac{1}{2(n+1)}$  și

$\frac{1}{n-1} = I_n + I_{n-2} \geq 2I_n$ , de unde rezultă  $I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$ . Deci

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}, \forall n \geq 2.$$

e)  $\frac{n}{2(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{2(n-1)}$ , de unde rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{2}$ .

f)  $\frac{n}{2(n+1)} - \frac{1}{2} \leq nI_n - \frac{1}{2} \leq \frac{n}{2(n-1)} - \frac{1}{2}$ , sau  $-\frac{1}{2(n+1)} \leq nI_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2(n-1)}$ , de unde

$$\frac{-\sqrt{n}}{2(n+1)} \leq \sqrt{n} \left( nI_n - \frac{1}{2} \right) \leq \frac{\sqrt{n}}{2(n-1)}. \text{ Obținem că } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left( nI_n - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

20. a)  $x = -1$  este asimptota verticală.

b) Cum  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , rezultă că  $y = 0$  este asimptotă orizontală la  $+\infty$ .

c)  $f(x) - 1 + x - x^2 = \frac{1 - (1+x)(1-x+x^2)}{1+x} = \frac{1-1-x^3}{1+x} \leq 0, \forall x \geq 0$ .

d)  $f(x) - 1 + x - x^2 + x^3 = \frac{1 - (1+x)(1-x+x^2-x^3)}{1+x} = \frac{1-1+x^4}{1+x} \geq 0, \forall x \geq 0$ .

e) Din c) și d) rezultă  $1 - x + x^2 - x^3 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2, \forall x \geq 0$ .

f) Din e) rezultă  $1 - x^9 + x^{18} - x^{27} \leq \frac{1}{1+x^9} \leq 1 - x^9 + x^{18}, \forall x \geq 0$ , pe care integrând-

o obținem  $1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{19} - \frac{1}{28} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^9} \leq 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{19}$ . De aici rezultă că aria căutată,

adică  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^9}$  este un număr cuprins în intervalul  $(0,91; 0,96)$ .

21. a)  $f'(x) = e^x - e^{-x}$ . b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = e - e^{-1}$ .

c)  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (e^x + e^{-x}) dx = e^x \Big|_0^1 - e^{-x} \Big|_0^1 = e - 1 - (e^{-1} - 1) = e - e^{-1}$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^t \Big|_0^x - e^{-t} \Big|_0^x}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1 - e^{-x} + 1}{e^x - e^{-x}} = 1$ .

e)  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x}$ ;  $e$  este supraunitar, deci  $x > -x \rightarrow x > 0 \Rightarrow x \in (0, \infty)$ . Deci funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $[0, \infty)$  și strict descrescătoare pe  $(-\infty, 0]$ .

f)  $f(x) + f(21x) = f(2x) + f(1986x)$ .

Dacă  $x > 0$ , atunci  $x < 2x \Rightarrow f(x) < f(2x)$  și  $21x < 1986x \Rightarrow f(21x) < f(1986x)$ ; rezultă  $f(x) + f(21x) < f(2x) + f(1986x)$  și deci  $x > 0$  nu poate fi soluție.

Dacă  $x < 0$ , atunci  $x > 2x \Rightarrow f(x) < f(2x)$  și  $21x > 1986x \Rightarrow f(21x) < f(1986x)$ ;

rezultă  $f(x) + f(21x) < f(2x) + f(1986x)$  și deci  $x < 0$  nu poate fi soluție.  
 $x = 0$  se verifică ușor că e soluție.

22. a)  $f'(x) = 6x + 3$ .

b)  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$ , deci  $f$  este strict crescătoare pe intervalul  $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$  și cum  $f'(x) \leq 0$  pe  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ , rezultă că  $f$  este strict descrescătoare pe  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ .

c)  $f''(x) = 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , deci  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .

d)  $f(x) = 3x^2 + 3x + 1$ , deci valoarea minimă a funcției  $f$  este  $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{1}{4}$ .

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0) + f(1) + \dots + f(n)}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 - 0^3 + 2^3 - 1^3 + \dots + (n+1)^3 - n^3}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1$ .

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 3x + 1}{x(6x + 3)} = \frac{1}{2}$ .

23. a) Evident.

b)  $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Din tabel rezultă cerința.

d)  $f''(x) = (2^x + 2^{-x})(\ln 2)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , deci funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{\ln 2}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{1}{\ln 2}$ .

f) Se observă că  $x = 1$  este soluție. Dacă  $x \in (0, 1)$ , atunci  $x > x^2$  și  $f(x) > f(x^2)$  iar  $x^{21}, x^{1986}$ , de unde  $f(x^{21}) > f(x^{1986})$ .

Deci în acest caz avem  $f(x) + f(x^{21}) > f(x^2) + f(x^{1986})$ , adică  $x \in (0, 1)$  nu este soluție.

Dacă  $x > 1$ , atunci  $x < x^2$  și  $x^{21} < x^{1986}$ , care vor conduce la

$f(x) + f(x^{21}) < f(x^2) + f(x^{1986})$ , deci nici  $x > 1$  nu poate fi soluție. Rezultă că  $x = 1$  este soluție unică.

# PROBLEME RECAPITULATIVE – ALGEBRĂ

1.  $\sum \overline{0,(xyz)} = \sum \frac{xyz}{999} = \sum \frac{100x+10y+z}{999} = \frac{111(x+y+z)}{999} = \frac{x+y+z}{9}$ ,  $\sum \overline{0,x(yz)} = \sum \frac{99x+10y+z}{900} =$   
 $= \frac{100(x+y+z)}{900} = \frac{x+y+z}{9}$ . 2. a), b). Presupunem că există  $m, n \in \mathbb{N}^*$  prime între ele

astfel încât  $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = p \Leftrightarrow m^2 = n^2 p$ . Cum  $(m^2, n^2) = 1$ , deoarece  $(m, n) = 1$ , rezultă că  $p \mid m^2$  și deci  $p \mid m$ . Există  $k \in \mathbb{N}^*$  cu  $m = kp$ . Rezultă că  $k^2 p^2 = n^2 p \Leftrightarrow k^2 p = n^2$ . Analog

găsim  $n = dp, d \in \mathbb{N}^*$ . Avem  $p \mid m, p \mid n$ , deci  $(m, n) \neq 1$  (contradicție). c) Analog.

3. a)  $\frac{1}{n^2-1}, \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ . b)  $\frac{1}{n} \in (0, 1], \frac{1}{n+1} \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \frac{1}{n+2} \in \left(0, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow a = \frac{1}{n} +$   
 $+\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \in \left(0, 1\frac{5}{6}\right]$ . Dacă  $a \in \mathbb{N}$  atunci avem  $a = 1 \Leftrightarrow 3n^2 + 6n + 2 = n^3 + 3n^2 + 2n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^3 + 4n + 2 = 0$  (fals). 4. Fie  $f(n) = n! + 2$ . Avem  $f(0) = 3; f(1) = 3; f(2) = 4; f(3) = 8;$   
 $f(4) = 14$ . Pentru  $n \geq 5$  avem  $u(n! + 2) = 2$ , deoarece  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$  se termină în 0.

Cum  $u(x)$  (ultima cifră a lui  $x$ ) nu poate fi 2, 3, 7, 8 pentru că pentru că  $u(x) = k^2$ , rezultă

că  $A = \{2\}$ . 6. Pentru  $y \leq 0$  luăm  $n = 1$ . Pentru  $y > 0$  luăm  $n = \left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil + 1$ .

7.  $\left| \frac{r+2}{r+1} - \sqrt{2} \right| \leq |r - r\sqrt{2}| \Leftrightarrow |(r-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})| \leq |(r-\sqrt{2})(r+1)| \Leftrightarrow \sqrt{2}-1 \leq r+1 \Leftrightarrow r \geq \sqrt{2}-2$ .

8. Dacă  $a = b = 0$  rezultă  $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0$ . Presupunem că  $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0$  și  $a \neq 0, b \neq 0$ . Atunci

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{b}{a}$  (contradicție cu  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}, -\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ ). Deci  $a = b = 0$ .

9.  $x = \sqrt{\frac{9a+b+9b+c+9c+a}{90}} = \sqrt{\frac{a+b+c}{9}} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow a+b+c = k^2$ . Cum  $a, b, c$  sunt cifre nenule distincte

rezultă  $0+1+2 \leq a+b+c \leq 7+8+9$ . Deci  $a+b+c \in \{9; 16\}$ . Luăm cazul  $0 < a < b < c \leq 9$ . Pentru  $a+b+c=9$ , respectiv  $a+b+c=16$  obținem 3, respectiv 8 soluții. Atunci avem  $(3+8) \cdot 6 = 66$  soluții.

10. a) Fie  $a = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}, b = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ . Atunci avem  $x = a + b, ab = 1, x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 = 10\sqrt{2} + 3x \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$ . b)  $\sqrt{13}$ . 12.  $\sum \overline{x,y(z)} = \sum \left(x + \frac{9y+z}{90}\right) = \frac{10(x+y+z)}{9}$ . Avem

$\sqrt{\frac{10(x+y+z)}{9}} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 10(x+y+z) = 10k^2 \Leftrightarrow x+y+z = 10 \Rightarrow 4 \cdot 6 = 24$  soluții. 13.  $\sqrt{2} < a < 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow [a]=1; \sqrt{6} < b < 3 \Rightarrow [b]=2. \mathbf{14. a)} \sqrt{(\sqrt{2x+1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2x+1}-1)^2} = |\sqrt{2x+1}+1| + |\sqrt{2x+1}-1| =$$

$$= \begin{cases} 2, x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \\ 2\sqrt{2x+1}, x > 0 \end{cases}. \mathbf{b)} \sqrt{2x+2 \pm \sqrt{4x+3}} = \sqrt{\frac{4x+4 \pm 2\sqrt{4x+3}}{2}} = \frac{|\sqrt{4x+3} \pm 1|}{\sqrt{2}} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, x \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \sqrt{2(4x+3)}, x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\mathbf{15. a)} \frac{b^2+1+|b^2-1|}{2b}; \mathbf{b)} \frac{|a-b|}{|a+b|-|a-b|}; \mathbf{c)} \frac{|m-n|+|m+n|}{|m-n|-|m+n|}. \mathbf{16. a)} 1515; \mathbf{b)} 0,6\sqrt{2}; \mathbf{c)} 8.$$

$$\mathbf{17.} (\sqrt{3}-\sqrt{2})^n + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^n + (\sqrt{2}-1)^n + (\sqrt{2}+1)^n \geq$$

$$\geq 2\sqrt{[(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})]^n} + 2\sqrt{[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)]^n} = 2+2=4;$$

$$\mathbf{b)} 1-a^2+1-b^2+2\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leq 4-a^2-b^2-2ab \Leftrightarrow \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leq 1-ab \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-a^2-b^2+a^2b^2 \leq 1-2ab+a^2b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$

$$\mathbf{18. a)} 3x-1=a \in \mathbf{N}, a \geq 2 \Rightarrow x = \frac{a+1}{3} \in \left\{\frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \dots\right\} = A; 8-3x=b \in \mathbf{N}, b \geq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{8-b}{3} \in \left\{\frac{6}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \dots\right\} = B; 5x=c \in \mathbf{N}, c \geq 2 \Rightarrow x = \frac{c}{5} \in \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots\right\} = C. \text{ Deci } x \in A \cap B \cap C = \{2\}.$$

$$\text{Se arată că } x=2 \text{ este soluția. } \mathbf{19. a)} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{abc} = 0 \Leftrightarrow a+b+c=0. \mathbf{b)} \text{ Suma este } \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) + \dots + \left(1-\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right) = \frac{9801}{100}.$$

$$\mathbf{20. a)} \frac{|m-n|+|m+n|}{|m-n|-|m+n|}; \mathbf{b)} \sqrt[3]{ab} \cdot \sqrt{b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}; \mathbf{c)} \frac{b}{a}; \mathbf{d)} x = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \Rightarrow f(x_0) = \frac{a-1}{a}.$$

$$\mathbf{21. a)} 4 = 60^a, 6 = 60^b \Rightarrow c = \log_{60} a + b \frac{60^{\frac{a}{b}}}{b} = \frac{a}{2(a+b)}.$$

$$\mathbf{b)} 2 = 12^a, 5 = 12^b, 6 = \frac{12}{2} = 12^{1-a}, 40 = 2^3 \cdot 5 = 12^{3a+b} \Rightarrow c = \frac{3a+b}{1-a}.$$

$$\mathbf{22. a)} 2; \mathbf{b)} 6. \mathbf{23. a)} f \text{ este bijectivă } \Leftrightarrow m \in \mathbf{Q}^*; \mathbf{b)} f^{-1}(x) = \begin{cases} x+2, x \in \mathbf{Q} \\ \sqrt[3]{x-1}, x \in \mathbf{R}-\mathbf{Q} \end{cases}.$$

$$\mathbf{24. a)} f(x) \geq \frac{1}{9} \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{3x} + 9 \cdot 3^{2x} \geq 3 \cdot 2^x \cdot 3^x + 8 \cdot 2^x \cdot 3^{2x} + 5 \cdot 3^{3x}. \text{ Notând } \left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0 \Rightarrow 4t^3 - 8t^2 - 3t + 9 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2t-3)^2(t+1) \geq 0 \text{ (adevărată). } \mathbf{26. a)} a^x + a^{-x} \geq 2\sqrt{a^x + a^{-x}} = 2 \Rightarrow \text{Im } f \subset [2, \infty). \text{ Trebuie}$$

demonstrat că  $\forall y \geq 2$  există  $x \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a^x + a^{-x} = y$ . Fie  $a^x = t > 0$ . Atunci  $t + \frac{1}{t} = y \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t^2 - ty + 1 = 0. \text{ Luăm } t = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}. \text{ b) Fie } 0 \leq x < y. \text{ Atunci } f(x) - f(y) = a^{-x-y}(a^x - a^y)(a^{x+y} - 1).$$

Dacă  $a > 1$  avem  $a^x - a^y < 0$ ,  $a^{x+y} - 1 > 0$  și deci  $f(x) < f(y)$ . Dacă  $a \in (0, 1)$  avem  $a^x - a^y > 0$ ,  $a^{x+y} - 1 < 0$  și deci  $f(x) < f(y)$ . Deci  $f$  este strict crescătoare pe  $[0, \infty)$ . Analog se

arată că  $f$  este strict descrescătoare  $(-\infty, 0]$  sau folosim faptul că  $f$  este funcție pară. **27. a)** Avem  $f(1-x) = a^{1-x} + a^x = f(x)$  pentru orice  $x \in [0, 1]$ . Demonstrăm că  $f$  este strict crescătoare pe

$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  și atunci rezultă că  $f$  este strict crescătoare pe  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ . Fie  $\frac{1}{2} \leq x < y$ . Atunci rezultă că

$x + y - 1 > 0$ . Avem  $f(x) - f(y) = a^{1-x-y}(a^x - a^y)(a^{x+y-1} - 1)$ . Dacă  $a > 1$  avem  $a^x - a^y < 0$ ,  $a^{x+y-1} - 1 > 0$  și deci  $f(x) < f(y)$ . Dacă  $a \in (0, 1)$  avem  $a^x - a^y > 0$ ,  $a^{x+y-1} < 0$

și deci  $f(x) < f(y)$ . În consecință rezultă că  $f$  este strict crescătoare pe  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ . **b)** Pentru

$x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  avem  $f(0) \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow a + 1 \geq f(x) \geq 2\sqrt{a}$ . Pentru  $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$  avem

$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{a} \leq f(x) \leq a + 1$ . **28. a)**  $D = (2, 3) \cup (3, 10)$ . Avem  $f(x) < 0$  pentru

$x \in (2, 3) \cup (9, 10)$  și  $f(x) > 0$  pentru  $x \in (3, 9)$ ; **b)**  $D = (4, \infty)$ ;  $f(x) > 0$  pentru  $x \in \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \infty\right)$ .

**29. a)** Avem  $0 < \log_3 2 < 1$ . Presupunem că există  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(m, n) = 1$ ,  $m < n$  astfel încât  $\log_3 2 = \frac{m}{n}$ . Avem deci  $3^{\frac{m}{n}} = 2 \Leftrightarrow 3^m = 2^n$  (fals). **c)**  $\log_3 6 = 1 + \log_3 2 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \log_3 2 \in \mathbb{Q}$  (fals).

**d)**  $\log_5 15 = 1 + \log_5 3$ . **30.** Dacă  $a, b, c \in (0, 1)$  sau  $a, b, c \in (1, \infty)$  avem  $\log_a b > 0$ , etc.. Atunci

$$\log_a b + \log_b a = \log_a b + \frac{1}{\log_b a} \geq 2, \text{ etc. a) } \sum \log_a bc = (\log_a b + \log_b a) + (\log_a c + \log_c a) +$$

$(\log_b c + \log_c b) \geq 2 + 2 + 2 = 6$ . **b)** Fie  $x = \log_a b$ ,  $y = \log_a c$ ,  $z = \log_b c$ . Atunci

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + z\right)\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{\frac{z}{x}} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{yz}} = 8.$$

$$\mathbf{32. a)} \frac{1}{\log_2 7} + \frac{1}{\log_{24} 7} = \log_7 48 < 2; \text{ b) } \frac{1}{\log_9 18 - \log_{18} 36} = \frac{1}{\frac{1}{\log_2 9} - \frac{1}{\log_2 18}} = \frac{\log_2 9 \cdot \log_2 18}{\log_2 18 - \log_2 9} =$$

$$= (\log_2 9)(1 + \log_2 9) > 3(1 + 3) = 12; \text{ c) Fie } x = \log_3 a \in (1, 2). \text{ Avem } \log_{3a} 9a = 1 + \log_{3a} 3 = 1 + \frac{1}{1 + \log_3 a} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1+x}; \log_a 3a = 1 + \log_a 3 = 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{x+1}{1+x}. \text{ Deci } E = \frac{1}{\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+1}{x}} = -x^2 - x \in (-6, -2)$$

pentru  $x \in (1, 2)$ . **34.**  $\left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$ . **35.**  $\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2} = 2 \Leftrightarrow |\sqrt{2x-1}+1| + |\sqrt{2x-1}-1| = 2 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ . **36.** **2.** **37.**  $x^2 + x - 2 + 2x^2 - 3x + 1 + 2\sqrt{(x^2 + x - 2)(2x^2 - 3x + 1)} = 3x^2 - 4x + 1$  pentru  $x \in (-\infty, -2] \cup [1, \infty) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2(x+2)(2x-1)} = 1-x \Leftrightarrow x=1$  sau  $2x^2 + 3x - 3 = 0 \Rightarrow x \in \left\{1; \frac{-3-\sqrt{33}}{4}\right\}$ . **39.** **1.** **40.**  $\{-8\}$ . **41.**  $\{4\}$ ; **42.**  $\{-1; 7\}$ . **43.**  $20^3 = (x+45)(x-16)$ . **44.**  $\{0\}$ . **45.**  $\{-1\}$ . **46.**  $\{1\}$ . **47.**  $\sqrt[3]{(2x-1)(x+7)(3x+6)} = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}; -7; -2\right\}$ . **48.**  $\sqrt{x^2+9} + \sqrt{(2y-1)^2+1} \geq \sqrt{9} + \sqrt{1} = 4 \Leftrightarrow x=0, y=\frac{1}{2}$ . **49.**  $\sqrt{x-1} = a \geq 0$ ,  $\sqrt{y-4} = b \geq 0, \sqrt{y-9} = c \geq 0 \Rightarrow 2(a+2b+3c) = a^2 + b^2 + c^2 + 14 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 0 \Leftrightarrow a=1, b=2, c=3 \Leftrightarrow x=2, y=8, z=18$ . **50.** a) 1; b) 2; c)  $\emptyset$ ; d) 3. **51.** a)  $\{0; \log_6 7\}$ ; b) 3; c) -2; d)  $\left\{0; \frac{1}{4}\right\}$ . **52.** a) 4; b)  $\frac{1}{2}$ ; c) 2; d)  $\{\pm 1; \pm 2\}$ . **53.** a) 2; b) 3; c) 2; d) 2. **54.** a)  $\frac{3}{2}$ ; b)  $\frac{3}{2}$ ; c)  $[-1, \infty) \cup \{-3\}$ . **55.** a)  $\{\pm 6\}$ ; b)  $\{\pm 3\}$ ; c)  $\{\pm 8\}$ ; d)  $\{\pm 2\}$ . **56.** a)  $\pm\sqrt{5}$ ; b)  $\pm\sqrt{2}$ ; c)  $\frac{3}{2}; 1 + \log_2 \sqrt{3}$ ; d)  $\pm 1$ . **57.**  $[1; \infty)$ ; **58.**  $(-\infty; 0] \cup [4; \infty)$ . **59.**  $(-\infty, 2]$ . **60.**  $\emptyset$ . **61.**  $[-1; 7]$ . **62.**  $\left[0, \log_2 \frac{3}{4}\right) \cup (1, \infty)$ . **63.** a) 6; b)  $\emptyset$ ; c) 4; d) 8. **64.** a) 64; b)  $3\sqrt[3]{3}$ ; c) 4; d)  $2^{\pm\sqrt{2}}$ . **65.** a) 1; b) 1; c)  $\{2; 3\}$ ; d) 2. **66.** a)  $\left\{4, \frac{1}{4}\right\}$ ; b)  $\left\{3, \frac{1}{27}\right\}$ ; c) 9; d)  $3^{\pm\sqrt{2}}$ . **67.** a)  $2^{\pm\sqrt{2}}$ ; b)  $3^{\pm\sqrt{2}}$ ; c) 4; d)  $\left\{\frac{1}{4}; 1; 2\right\}$ . **68.** a)  $[9; \infty)$ ; b)  $\left\{\frac{1}{10}; 2; 1000\right\}$ ; c)  $\left\{2, \frac{5}{2}\right\}$ ; d) -3. **69.** a)  $\left\{\frac{1}{10}, 100\right\}$ ; b)  $\emptyset$ ; c) 100; d)  $\{10; 10^{-4}\}$ . **70.** a) 1; b) 7; c)  $\{0; 1\}$ ; d) 1. **71.** a)  $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = \sum_{k=1}^n (k+1-1)k! = \sum_{k=1}^n ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1$ ; b)  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ ; c)  $\sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!}{(2k-2)!} = \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ ; d)  $\sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ ; e)  $\sum_{k=1}^n \frac{(k+1)!}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^n (k^2 + k) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ . **72.** a)  $P(1) : 3! > 2^2$  (adevărată);  $P(n+1) : (2n+3)! = (2n+1)!(2n+2)(2n+3) > 2^{2n} \cdot (n!)^2 (2n+2)(2n+3) \geq 2^{2n+2} [(n+1)!]^2 \Leftrightarrow (2n+2)(2n+3) \geq 4(n+1)^2 \Leftrightarrow 4n^2 + 10n + 6 \geq 4n^2 + 8n + 4$  (adevărată). b)  $P(3)$  este adevărată. Avem

$$P(n+1): (n+1)^{2n+2} = n^{2n} \cdot \frac{(n+1)^{2n+2}}{n^{2n}} > (2n)! \cdot \frac{(n+1)^{2n+2}}{n^{2n}} \geq (2n+2)! \Leftrightarrow (n+1)^{2n+2} \geq n^{2n} (2n+1)(2n+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n+1)^{2n+1} \geq 2 \cdot n^{2n} (2n+1) \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \cdot (n+1) \geq 4n+2. \text{ Dar } \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \cdot (n+1) = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2 (n+1) \geq$$

$$\geq 2^2 (n+1) > 4n+4 > 4n+2. \text{ c) } P(2) \text{ este adevărată. } P(n+1): 2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! (2n+2)! > ((n+1)!)^n \cdot$$

$(2n+2)! > ((n+2)!)^{n+1}$ , ultima inegalitate fiind echivalentă cu  $(n+2)(n+3)\dots(2n+2) > (n+2)^{n+1}$  (adevărată). **73. a)**  $n! = n^2 + 2n$ . Observăm că 0, 1, 2, 3 nu sunt soluție, iar  $n=4$  este soluție. Pentru  $n \geq 5$  avem  $(n-1)! = n+2 \Leftrightarrow (n-1)! - (n-1) = 3 \Leftrightarrow (n-1)[(n-2)! - 1] = 3$ . Cum  $n \geq 5$  avem

$$(n-1)[(n-2)! - 1] \geq 4 \cdot 5 = 20 > 3. \text{ b) } (n-3)[(n-4)! - n^2 - 3n - 8] = 24. \text{ Se iau cazurile}$$

$$n-3 \in \{4, 6, 8, 12, 24\}. \text{ 74. a) } (15; 6); \text{ b) } (14; 6); \text{ c) } (2; 1). \text{ 75. a) } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)! + k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!(1+k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}. \text{ b) } \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k!(k^2+4k+4)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!(k+2)} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{(k+2)!} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}. \text{ 76. a) } C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-1} +$$

$$+ C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2} = C_{n-2}^k + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2}. \text{ b) } C_n^k = C_{n-2}^k + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2} = C_{n-3}^k + C_{n-3}^{k-1} + 2(C_{n-3}^{k-1} + C_{n-3}^{k-2}) +$$

$$+ C_{n-3}^{k-2} + C_{n-3}^{k-3} = C_{n-3}^k + 3C_{n-3}^{k-1} + 3C_{n-3}^{k-2} + C_{n-3}^{k-3}. \text{ 77. a) } C_{15}^6; \text{ b) } C_{12}^6 y^{-3}. \text{ 78. a) } 27; \text{ b) } \{\pm 1; \pm 2\}.$$

$$\text{80. a) } 21; \text{ b) } 15. \text{ 81. a) } 1; \text{ b) } (-1)^{200} = 1; \text{ c) } (5-3)^n = 2^n. \text{ 82. a) } 26; \text{ b) } 66; \text{ c) } 34. \text{ 83. a) } 12; \text{ b) } 6.$$

$$\text{84. a) } \frac{2}{4} = \frac{3}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 6; \text{ b) } 2 \cdot 4 + 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{8}{3}. \text{ 85. Fie } M(x, y). \text{ Avem}$$

$$(x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j} = k[(c-a)\vec{i} + (d-b)\vec{j}] \Leftrightarrow x = a + k(c-a); \quad y = b + k(d-b).$$

$$\text{86. } \overline{A_1 A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1), \overline{A_1 A_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1). \text{ Avem } A_1 A_2 \perp A_1 A_3 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) +$$

$$+ (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) = 0. \text{ 87. a) } A_1, A_2, A_3 \text{ sunt coliniare } \Leftrightarrow \overline{A_1 A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

$$\overline{A_1 A_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1) \text{ sunt coliniari } \Leftrightarrow \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}. \text{ b) Rezultă din relația de la a).}$$

$$\text{88. Notăm } \vec{u}(a, b), \vec{v}(x, y). \text{ a) } \begin{cases} (2a+3x)\vec{i} + (2b+3y)\vec{j} = 3\vec{i} + 10\vec{j} \\ (-3a+4x)\vec{i} + (-3b+4y)\vec{j} = -13\vec{i} + 2\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3x=3; & 2b+3y=10 \\ -3a+4x=-13; & -3b+4y=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=3, \quad x=-1, \quad b=2, \quad y=2 \Leftrightarrow \vec{u}(3, 2), \vec{v}(-1, 2);$$

b)  $\begin{cases} 3\vec{u} - 2\vec{v} = -\vec{i} + 8\vec{j} \\ -2\vec{u} + 3\vec{v} = 4\vec{i} - 7\vec{j} \end{cases} \cdot 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} \\ 3\vec{v} = 6\vec{i} - 3\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}(1, 2) \\ \vec{v}(2, -1) \end{cases}$ . **89.** a) Fie  $\vec{u}(x, y)$ . Avem

$x^2 + y^2 = 25$ ,  $(x-1)^2 + y^2 = 20$ . Prin scăderea ecuațiilor rezultă  $x = 3$ . Avem  $\vec{u}(3, 4)$  sau  $\vec{u}(3, -4)$ . b) Fie  $\vec{v}(x, y)$ . Avem  $x^2 + (y+1)^2 = 18$ ,  $(x-1)^2 + y^2 = 8$ . Prin scăderea ecuațiilor se va obține  $y = 5 - x$ . Înlocuind în a doua ecuație rezultă  $(x-3)^2 = 0$ . Obținem  $\vec{v}(3, 2)$ .

**90.** a)  $A, B, C$  coliniare  $\Leftrightarrow \frac{x-1}{3-1} = \frac{6-2}{4-2} \Leftrightarrow x = 5$ . b)  $\overline{AB}(2, 2)$ ,  $\overline{CD}(y-5, -6)$  sunt ortogonali

$\Leftrightarrow 2(y-5) - 2 \cdot 6 = 0 \Leftrightarrow y = 11$ . **91.** a)  $AB : 3x + 4y - 15 = 0$ ,  $BC : x - 2y - 5 = 0$ ,  $AC : 3x -$

$-y = 0$ ; b)  $M\left(3, \frac{3}{2}\right)$ ,  $MC : 9x - 8y - 15 = 0$ ,  $N(0, 0)$ ,  $BN : x - 5y = 0$ ,  $P\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ ,  $PA : 9x +$

$+ 2y - 15 = 0$ . c)  $G\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ . **92.** a)  $-1$ ; b)  $-\sqrt{3}$ ; c)  $1$ . **93.**  $A(3, 2)$ ,  $B\left(\frac{11}{6}, \frac{4}{9}\right)$ ,

$C\left(3, -\frac{1}{3}\right)$ ,  $M\left(\frac{29}{12}, \frac{1}{18}\right)$ ,  $N\left(3, \frac{5}{6}\right)$ ,  $P\left(\frac{29}{12}, \frac{11}{9}\right)$ ;  $AM : 2x - 3y = 0$ ,  $BN : 42x - 126y + 159 = 0$ ,

$CP : 168x + 63y - 483 = 0$ . **94.**  $A(-6, -4)$ ,  $B\left(\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ ,  $C(0, 2)$ ,  $M\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ ,  $N(-3, -1)$ ,

$P\left(-\frac{12}{5}, -\frac{11}{5}\right)$ ,  $G\left(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ ;  $AM : 12x - 11y + 6 = 0$ ,  $BN : x - 7y - 4 = 0$ ,  $CP : 7x - 4y + 8 = 0$ .

**95.** a)  $AA' : 7x + 2y + 9 = 0$ ,  $BB' : 3x - y - 11 = 0$ ,  $CC' : x + 4y - 21 = 0$ ,  $H(1, -8)$ .

**96.** a)  $x - 3y = 0$ ,  $x + 2y = 0$ ,  $2x - y = 0$ ,  $O(0, 0)$ . **97.**  $AB : 2x - y + 1 = 0$ ,  $AC : 2x + 3y - 9 =$

$0$ ,  $BC : x - 2y - 1 = 0$ . **98.**  $y = 2x - 2$ ,  $y = 3x - 4$ . **99.**  $x = y$ ,  $2x + 3y = 5$ ,  $2x + 13y - 75 = 0$ .

**100.** a)  $y - 3 = m(x - 2)$ ;  $\left| \frac{m + \frac{3}{2}}{1 - \frac{3m}{2}} \right| = 1 \Rightarrow m \in \left\{ 5, -\frac{1}{5} \right\} \Rightarrow d_1 : 5x - y - 7 = 0$ ,  $d_2 : x + 5y - 17 = 0$ .

b)  $d_1 \cap d = B(1, -2)$ ,  $d_2 \cap d = C(-3, 4)$ . Dreapta ce trece prin  $B$  și este paralelă cu  $d_2$  are ecuația  $x + 5y + 9 = 0$ . Dreapta ce trece prin  $C$  și este paralelă cu  $d_1$  are ecuația  $5x - y + 19 = 0$ .

**101.** a)  $a \neq b$ ;  $d \perp d' \Leftrightarrow (-a) \cdot (-b) = -1 \Leftrightarrow ab = -1$ . b)  $a \neq b$ ;  $(a-b)x + a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -(a+b)$ ,  $y = ab$ . **102.** a)  $-x - 2 + m(2x - 2y - 1) = 0$ ;  $-x - 2 = 0$ ;  $2x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow A\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ .

b)  $d_m \parallel Ox \Leftrightarrow 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ ;  $d_m \parallel Oy \Leftrightarrow m = 0$ .

c)  $m_d = 2$ ;  $d_m \parallel d \Leftrightarrow \frac{2m-1}{2m} = 2 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$ ;  $d_m \perp d \Leftrightarrow \frac{2m-1}{2m} \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$ .

d)  $\frac{2m_1-1}{2m_1} = \frac{2m_2-1}{2m_2}$ ,  $m_1 \neq m_2$  este imposibil. e)  $\frac{2m_1-1}{2m_1} \cdot \frac{2m_2}{2m_2-1} = -1 \Rightarrow m_1 + m_2 = 4m_1m_2$ .

103.  $d_m \cap Ox = A\left(\frac{m-2}{m}, 0\right); d_m \cap Oy = B\left(0, \frac{m-2}{m-1}\right)$ .  $\frac{m^2}{(m^2)^2} + \frac{(m-1)^2}{(m-2)^2} = 13 \Leftrightarrow 11m^2 - 50m + 51 = 0 \Rightarrow m \in \left\{3, \frac{17}{11}\right\}$ .

104. Avem  $AB = 5$ . Fie  $C(x, y)$ . Se rezolvă sistemul  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$ ;  $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$ . 105. *Cazul 1.*  $AC \parallel Ox$ ,  $BD \parallel Oy$  (figura 6). Obținem  $y_C = -3, x_D = 1$ . Fie  $E(1, -3)$  mijlocul diagonalelor. Obținem  $C(4, -3), D(1, -7)$ . *Cazul 2.*  $AC \parallel Oy$ ,  $BD \parallel Ox$  (figura 7). Obținem  $C(-2, 5), D(-5, 1)$ .

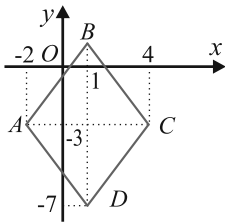


Figura 6.

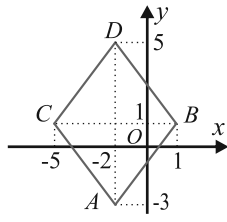


Figura 7.

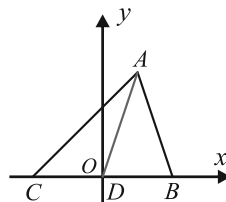


Figura 8.

106. Alegem  $Ox = BC, D = O$  (figura 8). Fie  $B\left(-\frac{a}{2}, 0\right), C\left(\frac{a}{2}, 0\right), A(m, n)$ . Din  $AB = c,$

$AC = b$  avem  $\left(m + \frac{a}{2}\right)^2 + n^2 = c^2; \left(m - \frac{a}{2}\right)^2 + n^2 = b^2$ . Rezultă

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 2\left(m^2 - am + \frac{a^2}{4} + n^2 + m^2 + am + \frac{a^2}{4} + n^2\right) - a^2 = 4(m^2 + n^2) = 4AO^2 = 4AD^2.$$

108. a) i)  $AB : x - 2y = 0, AC : 3x + 2y - 8 = 0, BC : 5x - 2y + 8 = 0$ . Bisectoarele unghiurilor

$A, B, C$  au respectiv ecuațiile:  $\frac{x-2y}{\sqrt{5}} = \pm \frac{3x+2y-8}{\sqrt{13}}; \frac{x-2y}{\sqrt{5}} = \pm \frac{5x-2y-8}{\sqrt{29}}; \frac{3x+2y-8}{\sqrt{13}} = \pm \frac{5x-2y+8}{\sqrt{29}}$ .

109. b) Fie  $C(1, 1), D(-2, 1) \in d$ . Fie  $C', D'$  simetricele lui  $C$  și  $D$  față de  $A$ . Avem  $C'(5, 1), D'(8, 2)$ . Simetrica lui  $AB$  în raport cu  $d$  este dreapta  $C'D' : x - 3y - 2 = 0$ .

110. a)  $m_{AB} = -\frac{a}{b}; AB : y - \beta = \frac{b}{a}(x - \alpha)$ . Rezolvând sistemul format din ecuațiile dreptelor

$AB$  și  $d$  obținem coordonatele lui  $M$  (mijlocul lui  $(AB)$ ):  $x_M = \frac{b^2\alpha - ab\beta - ac}{a^2 + b^2};$

$y_M = \frac{a^2\beta - ab\alpha - bc}{a^2 + b^2}$ . Rezultă  $B\left(\frac{(b^2 - a^2)\alpha - 2ab\beta - 2ac}{a^2 + b^2}, \frac{(a^2 - b^2)\beta - 2ab\alpha - 2bc}{a^2 + b^2}\right)$ .

b) i)  $\alpha = \beta = 0, a = 4, b = 3, c = -12 \Rightarrow B\left(\frac{96}{25}, \frac{72}{25}\right);$  ii)  $B\left(\frac{6}{13}, \frac{43}{13}\right)$ . 111. Caz general. Fie

$M$  punct interior triunghiului  $ABC$  și fie  $N, P$  proiecțiile lui  $M$  pe laturile  $AB$  și  $AC$  ale triunghiului isoscel  $ABC$  (figura 9). Luăm  $A(0, b)$ ,  $B(a, 0)$ ,  $C(-a, 0)$ ,  $M(\alpha, 0)$  cu  $-a < \alpha < a$ . Dreptele  $AB$  și  $AC$  au ecuațiile  $bx + ay - ab = 0$ ,  $bx - ay + ab = 0$ . Atunci

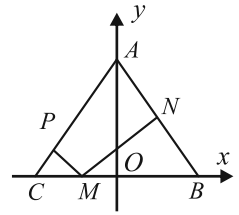


Figura 9.

$$MN + MP = \frac{|b\alpha - ab| + |b\alpha + ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \text{ct.}$$

b) Modulul diferenței distanțelor este o constantă.

## MODELE DE PROBLEME PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT

1. a)  $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ ; b)  $\int_0^1 xf'(x)dx = \int_0^1 (3x^3 + 2x^2 + x)dx = \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{23}{12}$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^n} = \begin{cases} \infty, & n \in \{1, 2\} \\ 1, & n = 3 \\ 0, & n = 4 \end{cases}$ . d)  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$  strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

e)  $f(x) \geq -2, \forall x \geq 0, f$  strict crescătoare pe  $\mathbb{R} \Rightarrow f(0) \geq -2 \Rightarrow -m \geq -2 \Rightarrow m \in (-\infty, 2]$ .

2. a)  $f'(x) = e^x + e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ ; b)  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$  strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ ;

c)  $f(x) \geq \frac{e^2 - 1}{e} = e - e^{-1}, \forall x \geq a, f$  strict crescătoare pe  $\mathbb{R}, f(1) = e - e^{-1} \Rightarrow a \leq 1$ .

d)  $f(-x) = e^{-x} - e^x = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$  impară pe  $[-1, 1] \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ .

e) Fie  $a_n = \sum_{k=1}^n (e^k - e^{-k}) = \sum_{k=1}^n e^k - \sum_{k=1}^n e^{-k} = \frac{e(e^n - 1)}{e - 1} - \frac{1}{e} \cdot \frac{1 - \frac{1}{e^n}}{1 - \frac{1}{e}}$ . Deoarece

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e(e^n - 1)}{e - 1} = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \cdot \frac{1 - \frac{1}{e^n}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e - 1}$ , rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ . 3. a) Avem  $x^3 + 9x^2 + 26x + 24 =$

$= (x + 2)(x + 3)(x + 4)$  și atunci  $f'(x) - (x + 2)(x + 3)(x + 4) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

b)  $f'(x) = 3x^2 + 18x + 26$ . Din  $f'(x) = 0$  rezultă  $x = \frac{-9 \pm \sqrt{3}}{3}$ . c) Avem următorul tabel de variație:

$x$	$-\infty$	$\frac{-9 - \sqrt{3}}{3}$	$\frac{-9 + \sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $a$	$\searrow$	$b$ $\nearrow$ $+\infty$

$x = \frac{-9 - \sqrt{3}}{2}$  este abscisa punctului de maxim local, iar  $x = \frac{-9 + \sqrt{3}}{3}$  este abscisa punctului

de minim local. d)  $\int_0^1 f(x) dx = \left( \frac{x^4}{4} + 3x^2 + 13x^2 + 24x \right) \Big|_0^1 = 40 \frac{1}{4}$ . e) Luăm de exemplu

$$h(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 24, g(x) = x. \quad 4. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{(3x-1)(3x+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3x+1) - (3x-1)}{(3x-1)(3x+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3x-1} - \frac{1}{3x+1} \right). \text{ b) } f'(x) = \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{(3x+1)^2} - \frac{1}{(3x-1)^2} \right]. \text{ c) } \int_3^5 f(x) dx = \frac{1}{6} \int_3^5 \left( \frac{(3x-1)'}{3x-1} - \frac{(3x+1)'}{3x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3x-1}{3x+1} \right| \Big|_3^5 = \frac{1}{6} \ln \frac{35}{32}. \text{ d) } x_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6n+2}.$$

e)  $(4x_n)^n = \left[ \left( 1 - \frac{2}{3n+1} \right)^{\frac{3n+1}{-2}} \right]^{\frac{-2n}{3n+1}} \rightarrow e^{-\frac{2}{3}}$ . 5. a)  $f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ . b), c) Avem

următorul tabel de variație:

$x$	$0$	$e$	$-\infty$
$f'(x)$	$///$	$+++$	$0 \quad - \quad - \quad -$
$f(x)$	$///$	$\nearrow$	$\frac{1}{e} \quad \searrow$

Funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $(0, e)$  și strict descrescătoare pe  $(e, \infty)$ . Punctul de maxim

local este  $\left( e, \frac{1}{e} \right)$ . d) Aplicând regula lui l'Hospital în cazul  $\frac{\infty}{\infty}$  avem  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ .

e)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ . 6. a)  $f(x) = \frac{(x+1)^3 - x^3}{(x+1)^3 x^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}$ . Luăm  $a = 1, b = -1$ .

b)  $a_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k^3} - \frac{1}{(k+1)^3} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^3}$ . c)  $a_{n+1} - a_n = 1 - \frac{1}{(n+2)^3} - 1 + \frac{1}{(n+1)^3} = \frac{1}{(n+1)^3} > 0 \Rightarrow$  șirul este strict crescător. Avem  $0 < a_n < 1$  și deci șirul este mărginit. Șirul este deci convergent.

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ . e)  $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left( \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx = \left( -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2(x+1)^2} \right) \Big|_1^2 = \frac{11}{36}$ .

7. a)  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ ; b)  $\lim_{x \searrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \searrow 2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = \lim_{x \searrow 2} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = \infty$ . c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - \sqrt{5}}{x-3} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = f'(3) = \frac{3}{\sqrt{5}}. \text{ d) Funcția } f \text{ este continuă pe domeniul de definiție și graficul}$$

nu are asimptote verticale. Avem  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1, n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4} + x} = 0. \text{ Graficul are asimptota oblică } y = x \text{ spre } +\infty. \text{ e) } f'(x) > 0, \forall x > 2 \Rightarrow$$

$f$  strict crescătoare pe  $(2, \infty)$ . f)  $I = \int \sqrt{x^2 - 4} dx = \int \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 - 4}} dx = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 4}} - 4 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}} =$   
 $= I_1 - 4I_2$ ;  $I_1 = \int x(\sqrt{x^2 - 4})' dx = x\sqrt{x^2 - 4} - I$ ;  $I_2 = 4 \ln(x + \sqrt{x^2 - 4}) \Rightarrow I = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2 - 4} -$

$-4 \ln(x + \sqrt{x^2 - 4})] \Rightarrow$  aria este  $4 \ln \frac{2\sqrt{2} + 2}{\sqrt{5} + 1} + \sqrt{5} - 2\sqrt{2}$ . **8.** a)  $f'(x) = 2e^{2x}$ . b) Deoarece

$f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  rezultă că  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ . Avem  $f(x) > \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1,$

$f'(x) > \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$ . Avem deci  $a \leq 1, b \leq 0$ . c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$  asimptotă orizontală spre  $+\infty$ . Deoarece  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ , graficul nu admite asimptote verticale. Deoarece

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ , graficul nu admite asimptote oblice sau orizontale spre  $+\infty$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 2$ . e)  $a^2 \pm a + 1 = \left(a \pm \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall a \in \mathbb{R}$ .

f)  $g(x) = \frac{1}{2}[(f'(x))^2 + f'(x) + 1], h(x) = \frac{1}{2}[(f'(x))^2 - f'(x) + 1]$ . **9.** a)  $g(x) = e^x - 1$ ; b) Avem următorul tabel de variație:

$x$	$-\infty$	$0$	$-\infty$
$f'(x)$	$- - -$	$0 + + +$	
$f(x)$	$\infty \searrow$	$1 - a$	$\nearrow +\infty$

Funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $(-\infty, 0)$  și strict crescătoare pe  $(0, \infty)$ .

c)  $f$  strict crescătoare pe  $[0, \infty) \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 1 - a, \forall x \geq 0$ . Din  $1 - a \leq 0 \Rightarrow a \in [1, \infty)$ .

d)  $f(x) + 3g(x) = 4e^x - x - 3 \Leftrightarrow -4 = -3$  (fals). Ecuația nu are soluție.

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x - a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x} - \frac{a}{e^x}} = 1$ .  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) = 0$

**10.** a)  $f(x) - f(-x) = \sqrt{9 - x^2} - \sqrt{9 - x^2} = 0 \Rightarrow f(x) = f(-x), \forall x \in [-3, 3] \Rightarrow$

$f$  funcție pară. b)  $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$ . c) Avem următorul tabel de variație:

$x$	$-3$	$0$	$3$
$f'(x)$	$///$	$+$	$-$
$f(x)$	$///$	$0 \nearrow$	$3 \searrow$

Punctele  $(-3, 0), (3, 0)$  sunt puncte de minim local, iar punctul  $(0, 3)$  este punct de maxim local.

d) Fie  $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx, x \in [-a, a], a > 0$ . Avem  $I = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx -$   
 $-\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - J$ ;  $J = -\int x(\sqrt{a^2 - x^2})' dx = -x\sqrt{a^2 - x^2} + I \Rightarrow I =$

$= \frac{1}{2} \left( x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + \mathcal{C}$ . Deoarece  $f$  este funcție pară, aria cerută este

$$A = x\sqrt{2^2 - x^2} + 2^2 \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^2 = 4 \arcsin 1 = 2\pi. \text{ e) } \text{Avem } \int_0^3 f^2(t) dt = \int_0^3 (4 - t^2) dt = \left( 4t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^3 =$$

$$= \frac{12}{n} - \frac{9}{n^3} \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( \frac{12}{n} - \frac{9}{n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (12n^2 - 9) = \infty. \text{ 11. a) } f(x) = \frac{(x^2 + 9) - (x^2 + 4)}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} =$$

$$= \frac{1}{x^2 + 4} - \frac{1}{x^2 + 9} \Rightarrow f(x) + \frac{1}{x^2 + 9} = \frac{1}{x^2 + 4}; \text{ b) } f'(x) = \left( \frac{1}{x^2 + 4} \right)' - \left( \frac{1}{x^2 + 9} \right)' =$$

$$= 2x \left( \frac{1}{(x^2 + 9)} - \frac{1}{(x^2 + 4)^2} \right) = \frac{-2x(10x^2 + 65)}{(x^2 + 4)^2(x^2 + 9)^2}. \text{ c) } \text{Deoarece } f'(x) < 0, \forall x \geq 3 \Rightarrow f \text{ strict}$$

descrescătoare pe  $[3, \infty)$ . d) Deoarece  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ , rezultă că graficul lui  $f$  nu admite asimptote verticale. Deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , rezultă că  $y = 0$  este asimptotă orizontală spre  $+\infty$  și spre  $-\infty$ . e) Avem următorul tabel de variație:

$x$	$-\infty$	$0$	$-\infty$	
$f'(x)$	$+$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$0$	$\nearrow$	$\frac{5}{36}$	$\searrow$
			$0$	

Punctul  $\left(0, \frac{5}{36}\right)$  este punct de maxim local.

f)  $\int_2^3 f'(x) dx = f(x) \Big|_2^3 = f(3) - f(2) = -\frac{25}{936}$ . g) Avem  $a_n = \sum_{k=1}^n f(\sqrt{5k+1}) =$

$$= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{5k+5} - \frac{1}{5k+10} \right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{5n+10} \text{ și deci } a_n \rightarrow \frac{1}{10}. \text{ 12. a) } f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 0$ . c) Avem următorul tabel de variație:

$x$	$0$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$\searrow$	$0$	$+$	$+$
$f(x)$	$\infty$	$\searrow$	$2$	$\nearrow$
			$+\infty$	

Funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $(0, 1)$  și strict crescătoare pe  $(1, \infty)$ .

d) Avem  $\int \ln x dx = \int x' \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + \mathcal{C}$ . Atunci  $\int_1^2 f(x) dx =$

$$= \left( \frac{x^2}{2} + 2x - x \ln x \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{2} - 2 \ln 2. \text{ e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 1.$$

13. a)  $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$ . b), c) Avem următorul tabel de variație:

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$0$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$
			$\frac{1}{2}$	$\searrow$
			$0$	

Punctul  $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$  este punct de minim local, iar punctul  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$  este punct de maxim local. Funcția  $f$  este strict descrescătoare pe intervalele  $(-\infty, -1]$  și  $[1, \infty)$  și strict crescătoare pe intervalul  $[-1, 1]$ . d) Avem  $\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$ . e)  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$  deoarece  $f$  este funcție impară pe  $[-1, 1]$ . f) Deoarece  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  rezultă că  $f(n) + f(-n) = 0$  pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $|n| \leq 100$ . Numărul soluțiilor ecuației este  $2 \cdot 100 + 1 = 201$ .

14. a)  $f(x) = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{x+1}} = \frac{e-1}{e^{x+1}} \Rightarrow a = 1$ . b) Avem  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  și deci  $y = 0$  este asimptotă

orizontală spre  $+\infty$ . Avem  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{e^x} - \frac{a}{e^{x+1}} \right) = \begin{cases} +\infty, & a < e \\ 0, & a = e \\ -\infty, & a > e \end{cases}$  c)  $f(x) + f'(x) =$

$$= \frac{e-a}{e^{x+1}} - \frac{e-a}{e^{x+1}} = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}. \text{ d) } a_n = \sum_{k=1}^n \frac{e-1}{e^{k+1}} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{e^k} - \frac{1}{e^{k+1}} \right) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^{n+1}}.$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e}. \text{ f) } \int_0^1 \frac{e-1}{e^{x+1}} dx = \int_0^1 (e^{-x} - e^{-x-1}) dx = (-e^{-x} + e^{-x-1}) \Big|_0^1 = \frac{1}{e^2} - \frac{2}{e} + 1 = \left( \frac{e-1}{e} \right)^2.$$

15. a)  $f'(x) = \frac{-2x^2 - 2ax + 4}{(x^2 + 2)^2}$ ; b)  $f'(1) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 1$ . c)  $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = a \Rightarrow$

$(x-1)^2 = a-1$ . Dacă  $a > 1$ , ecuația are două rădăcini reale distincte  $1 \pm \sqrt{a-1}$ . Dacă  $a = 1$ , ecuația are rădăcina dublă 1. Dacă  $a < 1$  ecuația nu are rădăcini reale. d) Pentru  $a = 1$  avem

$f'(x) = -\frac{2(x^2 + x - 2)}{(x^2 + 2)^2}$  și următorul tabel de variație.

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$				
$f'(x)$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$
$f(x)$	$0$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$1$	$\searrow$	$0$	

Avem deci  $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$  și atunci

$$-\frac{3}{4} \leq f(x) \leq 1.$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + ax}{x^2 + 2} = 2. \text{ f) } \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+2} dx = \int_0^1 \frac{(x^2+2)'}{x^2+2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+(\sqrt{2})^2} dx =$$

$$= \ln(x^2+2) \Big|_0^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \ln \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 16. a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-7}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} =$$

$$= f'(2). \text{ Deoarece } f'(x) = 2x+1 \text{ rezultă că limita este } 5. \text{ b) } f(x-1) - f(-x) = (x-1)^2 +$$

$$+ (x-1) + 1 - x^2 + x - 1 = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ c) Avem } \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} = \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{f(k)}{f(k-1)}.$$

$$\text{Atunci } a_n = \left( \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} \right) \left( \prod_{k=2}^n \frac{f(k)}{f(k-1)} \right) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{f(n)}{f(1)} = \frac{n^2+n+1}{3(n+1)}. \text{ d) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^3} \int_0^n f(t) dt \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^3} \left( \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_0^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left( \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + n \right) = \frac{1}{3}$$

f)  $\left(\frac{3}{2}a_n\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4n} + \frac{3}{2n^2}\right)^{n+1} \rightarrow 0$ . **17. a)**  $f(a) + f(-a) = a^4 - a^2 + 1 + a^4 - a^2 + 1 = 2f(a)$ ;  
 $f(a) - f(-a) = f(a) - f(a) = 0$ . **b)** Deoarece  $(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = x^6 + 1$  rezultă că  $f(x) = \frac{x^6 + 1}{x^2 + 1}$ .

**c)**  $f'(x) = 4x^3 - 2x$ . **d), e)** Avem  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ . Avem următorul tabel de variație:

$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$0$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$				
$f'(x)$	-	-	0	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$1$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Punctele  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$  sunt puncte de minim local, iar punctul  $(0, 1)$  este punct de

maxim local. Avem  $f(x) \geq \frac{3}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$ . **f)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - x^3 + x}{\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x} = 5$ ;

**g)**  $\int_0^1 f(x) dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x\right) \Big|_0^1 = \frac{13}{15}$ . **18. a)**  $f(a) + f(a+1) = \ln \frac{a+1}{a} + \ln \frac{a+2}{a+1} = \ln \frac{a+2}{a}$ ;

**b)** Pentru  $x > 0$  avem  $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$  și deci  $f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$ . **c)**  $\int_1^{e-1} xf'(x) dx =$   
 $= -\int_1^{e-1} \frac{1}{x+1} dx = -\ln(x+1) \Big|_1^{e-1} = \ln \frac{e}{e}$ ; **d)**  $f'(x) < 0, \forall x > 0 \Rightarrow f$  strict descrescătoare pe  $(0, \infty)$ .

**e)** Avem  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x}} = \ln(x+1)$  și deci  $f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = \ln x$ . **f)**  $\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) dx =$

$= \int_1^e \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^e = 1$ . **g)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f'(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{k(k+1)}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) =$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} - 1\right) = -1$ . **19. a)**  $f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2 - (x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$ . **b)**  $f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+2)^3} = \frac{-2(3x^2 + 9x + 7)}{(x+1)^3(x+2)^3}$ .

**c)**  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2}\right) dx = \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ ; **d)**  $a_n = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2}\right] =$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{(n+2)^2}$ ; **e)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{4}$ ; **f)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(n+1)^2} = 0$ . **20. a)**  $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1) =$

$= 4(x-1)(x^2 + x + 1)$ ; **b)**  $f(x) \geq 2x(x-2) \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 \geq 0$ .

c), d) Avem următorul tabel de variație:

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-2$	$+\infty$

Funcția are un singur punct de extrem local: punctul  $(1, -2)$  este punct de minim local.

e)  $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^2 \left(x^2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4 \ln x - \frac{1}{x}\right) \Big|_1^2 = \frac{17}{6} - 4 \ln 2$ . f) Funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $[1, \infty)$ , iar  $[e, e^2] \subset [1, \infty)$ . Avem  $f(x) \geq f(e) = e^4 - 4e^2 + 1 > 0$ . Cum  $f(x) \geq 2x(x-2)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , rezultă că  $\frac{x-2}{f(x)} \leq 2x$  pentru  $x \in [e, e^2]$  și atunci avem:

$$\int_e^{e^2} \frac{x-2}{f(x)} dx \leq \int_e^{e^2} \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln x \Big|_e^{e^2} = \frac{1}{2}. \quad \mathbf{21. a)} f'(x) = 3x^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

b)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 0; 1\}$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ . c) Avem următorul tabel de variație:

$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$-\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$+\infty$

Punctul  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$  este punct de maxim local, iar punctul  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$  este punct de minim local. d) Funcția  $f$  este funcție impară și deci  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$ . e) Egalitatea este adevărată.

$$\mathbf{22. a)} f(x) = \frac{1}{(x+2)(x+1)} = \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+2)(x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \Rightarrow f(x) + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+1}.$$

b)  $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = -\frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2}$ . c) Deoarece  $f'(x) < 0$  pentru  $x > 0$ , rezultă

că  $f$  este strict descrescătoare pe  $(0, \infty)$ . d)  $a_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$ .

$$\mathbf{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) \left(\frac{1}{2} - a_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2. \quad \mathbf{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{x+1}{x+2}\right) \Big|_n^{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{(n+3)(n+2)}{(n+4)(n+1)}\right) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5n + 6}{n^2 + 5n + 4}\right) = \ln 1 = 0. \quad \mathbf{23. a)} f'(x) = 3x^2 - 2x - 1.$$

b)  $\int_1^2 \frac{f'(x)}{x^2} dx = \int_1^2 \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(3x + 2 \ln x + \frac{1}{x}\right) \Big|_1^2 = \frac{5}{2} + \ln 4$ . c), d) Avem  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$ .

Rezultă următorul tabel de variație:

$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$3$	$\frac{49}{27}$	$+\infty$

Funcția este strict crescătoare pe intervalele  $(-\infty, -1)$  și  $(\frac{1}{3}, \infty)$ , respectiv strict descrescătoare pe intervalul  $[-1, \frac{1}{3}]$ . Punctul  $(-1; 3)$  este punct de maxim local, iar punctul  $(\frac{1}{3}, \frac{49}{27})$  este

punct de minim local. e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^n} = \begin{cases} \infty, & n \in \{1; 2\} \\ 1, & n = 3 \\ 0, & n = 4 \end{cases}$ ; f)  $\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x) - f(-x)}{x^3} dx =$   
 $= \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{2x^3 - 2x}{x^3} dx = 2 \int_{\frac{1}{a}}^a \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = 2 \left(x + \frac{1}{x}\right) \Big|_{\frac{1}{a}}^a = 0$ . **24.** a)  $g(x) = 3x^2 - 12x + 11$ ;  $h(x) = 6x - 12$ .

b) Avem  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ . Din  $f(x) = 0$  rezultă  $x \in \{1, 2, 3\}$ . Cum  $1, 2, 3 \notin A$ , ecuația  $f(x) = 0$  nu are soluții (în  $A$ ).

c) Avem  $f(x)k(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) +$   
 $+(x-1)(x-2) = g(x), \forall x \in A$ . d) Avem  $k'(x) = -\left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-3)^2}\right] < 0$ ,

$\forall x \in A$ . Rezultă că funcția  $k$  este strict descrescătoare pe intervalele  $(-\infty, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, \infty)$ . e) Se verifică direct sau rezultă din relația c) și din  $g(x) = f'(x)$ ,  $h(x) = g'(x)$ .

f)  $\int_{-2}^{-1} h(x) dx = \int_{-2}^{-1} (6x-2) dx = (3x^2 - 12x) \Big|_{-2}^{-1} = 21$ . g) Deoarece  $h'(x)f^2(x) = 6f^2(x) > 0, \forall x \in A$ , rezultă că  $g^2(x) = f(x)h(x) - 6f^2(x) > f(x)h(x), \forall x \in A$ .

## BIBLIOGRAFIE

- I.D. Ion, Nicolae R. – „*Algebră*”, Editura Didactică și Pedagogică, București 1981
- Năchilă P., Becheanu M., Brânzei D. – „*Subiecte posibile pentru admitere*”, Editura Paralela 45, Pitești 1997
- Năchilă P., Stoica C. – „*Probleme pentru admiterea în învățământul superior*”, Editura Scorpion, București 1997
- Nicolescu M. – „*Analiză Matematică*”, Editura Didactică și Pedagogică, București 1980
- Roșculeț M. – „*Analiza matematică*”, Editura Didactică și Pedagogică, București 1984
- Sirețchi Gh. – „*Calcul diferențial și integral*”, Editura Științifică și Enciclopedică, București 1985
- Donciu N., Flondor D. – „*Algebră și analiză matematică*”, Editura Didactică și Pedagogică, București 1967
- Chițescu I., Alexandrescu P. – „*Analiza matematică*”, Editura Paralela 45, Pitești 2000

# CUPRINS

## Capitolul I. Primitive

I.1. Probleme care conduc la noțiunea de primitivă .....	3
I.2. Primitivele unei funcții .....	5
I.3. Operații cu funcții care admit primitive .....	11
I.4. Funcții care admit primitive. Funcții care nu admit primitive .....	16
I.5. Integrarea prin părți .....	20
I.6. Integrarea anumitor tipuri de funcții .....	24
I.7. Schimbarea de variabilă .....	27
I.8. Descompunerea funcțiilor raționale în funcții raționale simple .....	33
I.9. Determinarea primitivelor funcțiilor raționale simple .....	40
I.10. Integrarea funcțiilor raționale .....	44
*I.11. Integrarea funcțiilor trigonometrice .....	47
Probe de evaluare .....	51

## Capitolul II. Integrala definită

II.1. Probleme care conduc la noțiunea de integrală definită .....	55
II.2. Definirea integralei definite a unei funcții continue .....	58
II.3. Proprietăți ale integralei definite .....	61
II.4. Integralele definite pentru funcții raționale .....	67
II.5. Integrarea prin părți a integralelor definite .....	70
II.6. Schimbarea de variabilă pentru integrale definite .....	74
II.7. Probleme de sinteză .....	77
Probe de evaluare .....	83

## Capitolul III. Aplicații ale integralei definite

III.1. Aria unei suprafețe plane .....	86
III.2. Volumul unui corp de rotație .....	90
III.3. Lungimea graficului unei funcții derivabile cu derivata continuă .....	94
III.4. Aria unei suprafețe de rotație .....	97
III.5. Centrul de greutate al unei suprafețe plane .....	101
Probe de evaluare .....	107
Probleme de sinteză .....	109
Probleme recapitulative – algebră (pentru bacalaureat) .....	113
Probleme pentru pregătirea examenului de bacalaureat .....	123
Modele de probleme pentru examenul de bacalaureat .....	129
<i>Soluții</i> .....	137
Bibliografie .....	175

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + \mathcal{C}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + \mathcal{C}$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + \mathcal{C}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C}$$



9 789736 493638