

*Ministerul Educației și Cercetării*  
*Agencia Națională pentru Curriculum și Evaluare*  
*Proiectul „Reforma Învățământului în Republica Moldova”*

*Pregătirea pentru examenul național de  
bacalaureat la disciplina MATEMATICA*

# DOMENIUL *ALGEBRĂ*. SARCINI PRACTICE

## I. Momente cheie în rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor:

### ➤ DOMENIUL DE VALORI ADMISIBILE

$$\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow g(x) \neq 0,$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$\log_{f(x)} g(x) \Rightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$$

$$\arcsin f(x) \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 1$$

## DOMENIUL *ALGEBRĂ*. SARCINI PRACTICE

➤ **MULȚIMEA DE VALORI:**

$$\sqrt[2n]{f(x)} \geq 0,$$

$$a^x > 0,$$

$$\log_a g(x) \in \mathbb{R},$$

$$\sin f(x), \cos f(x) \in [-1, 1]$$

DETERMINĂM SAU NU DETERMINĂM **DVA**?  
 ROLUL ECHIVALENTELOR

1. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\frac{\sqrt{3-2x}-x}{9-x^2} = 0$ .

Rezolvare  $\frac{\sqrt{3-2x}-x}{9-x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3-2x}-x=0 \\ 9-x^2 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3-2x}=x \\ x^2 \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq \pm 3 \\ x^2 = 3-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 3 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ \Delta' = 1 + 3 = 4 \\ \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 3 \\ \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Răspuns:  $S = \{1\}$

2. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\sqrt{5-x} = \sqrt{2x^2-10x-13}$ .

Rezolvare  $\sqrt{5-x} = \sqrt{2x^2-10x-13} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ 2x^2-10x-13 \geq 0 \\ 5-x = 2x^2-10x-13 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ 2x^2-9x-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 81+144=225 \\ x = \frac{9-15}{4} = -\frac{3}{2} \\ x = \frac{9+15}{4} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x = -\frac{3}{2} \\ x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x = -\frac{3}{2} \\ x \leq 5 \\ x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-\frac{3}{2}\} \cup \emptyset$

$\Leftrightarrow x \in \{-\frac{3}{2}\}$

Răspuns:  $S = \{-\frac{3}{2}\}$

## **BAC 2017**

**Determinați valorile parametrului real  $m$ , pentru care ecuația**  
$$\sqrt{x^2 - 2mx + m^2 + m} = \sqrt{2m - x}$$
 **admite o singură soluție reală.**

### **2015, TEST PENTRU EXERSARE NR. 2**

**Determinați valorile reale ale parametrului  $a$ , pentru care ecuația**  
$$2\ln x = \ln(2(a + 1)x - a^2 - 2a)$$
 **are o singură soluție reală.**

### **DETERMINĂM DVA PENTRU ECUAȚIA:**

$$\log_4 \log_3 \log_2 \frac{16}{3x-1} = 0?$$

### **CUM CALCULĂM EFICIENT DVA AL EXPRESIEI:**

$$E(X) = \left(1 - \frac{4}{X+1}\right) : \left(\frac{X}{X+1} - \frac{1}{1-X} - \frac{2X}{X^2-1}\right)?$$

**3. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația**  $\left| \begin{array}{cc} 0 & \sqrt{2x-x^2} \\ 4-x & \sqrt{x-1} \end{array} \right| = 0.$

Rezolvare: Calculăm DVA:  $\begin{cases} 2x-x^2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;2] \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1;2] \Rightarrow \text{DVA} = [1;2]$

Pe DVA obținem ecuația  $-(4-x) \cdot \sqrt{2x-x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ \sqrt{2x-x^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \notin \text{DVA} \\ 2x-x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \notin \text{DVA} \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$

Răspuns:  $S = \{2\}$

4. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\sqrt{4-x} - \sqrt{1-3x} = 1$ .

Rezolvare:  $\sqrt{4-x} - \sqrt{1-3x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{4-x} = 1 + \sqrt{1-3x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 1-3x \geq 0 \\ 4-x = (1+\sqrt{1-3x})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x \geq 0 \\ 4-x = 2-3x+2\sqrt{1-3x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ \sqrt{1-3x} = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ x+1 \geq 0 \\ 1-3x = x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1; \frac{1}{3}] \\ x^2+5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1; \frac{1}{3}] \\ \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Răspuns:  $S = \{0\}$

5. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\frac{0,2^{x-0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0,04^{x-1}$ .

Rezolvare:  $\frac{0,2^{x-0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0,04^{x-1} \quad \overset{a^{f(x)} = a^{g(x)}}{\iff}$

$$\iff \frac{5^{\frac{1}{2}-x}}{5^{\frac{1}{2}}} = 5 \cdot (5^{-2})^{x-1} \iff 5^{-x} = 5^{1-2x+2} \iff$$

$$\iff -x = 3 - 2x \iff x = 3. \quad \text{Răspuns: } S = \{3\}$$

6. Determinați suma soluțiilor reale ale ecuației  $\sqrt{x-3} \cdot (2^x + 2^{5-x} - 18) = 0$ .

Rezolvare:  $\sqrt{x-3} \cdot (2^x + 2^{5-x} - 18) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3} = 0 \\ 2^x + 2^{5-x} - 18 = 0 \Leftrightarrow \\ x \in \mathbb{QVA} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ 2^x + \frac{32}{2^x} - 18 = 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 2^x = t, t > 0 \\ t + \frac{32}{t} - 18 = 0 \mid \Leftrightarrow \\ x \geq 3 \end{cases} \mid \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 2^x = t, t > 0 \\ t^2 - 18t + 32 = 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 - 18t + 32 = 0 \\ t = 2 \\ t = 16 \end{cases} \mid \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 2^x = 2 \\ 2^x = 16 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \\ x=4 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = 3 + 4 = 7$$

Respons: 7.

7. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\log_3(x^2 - x - 20) - \log_3(x + 4) = 1$ .

Rezolvare  $\log_3(x^2 - x - 20) - \log_3(x + 4) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 20 > 0 \\ x + 4 > 0 \\ \log_3 \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 20 > 0 \\ x + 4 > 0 \\ \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} = 3 \mid \cdot (x + 4) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 20 > 0 \\ x + 4 > 0 \\ x^2 - x - 20 = 3(x + 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 > 0 \\ x^2 - 4x - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x = -4 \\ x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8. \quad \text{Răspuns: } S = \{8\}$$

8. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\log_3 x^2 - \log_3^2(-x) = -3$ .

Rezolvare:  $\log_3 x^2 - \log_3^2(-x) = -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \log_3 |x| - \log_3^2(-x) = -3$

Calculăm DVA:

$\begin{cases} |x| > 0 \\ -x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}^* \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{DVA} = (-\infty; 0)$

Pe DVA  $|x| = -x \Rightarrow 2 \log_3(-x) - \log_3^2(-x) = -3$

Notăm  $\log_3(-x) = t \Rightarrow 2t - t^2 = -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3(-x) = -1 \\ \log_3(-x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = 3^{-1} \\ -x = 3^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = -27 \end{cases}$

Răspuns:  $S = \{-27; -\frac{1}{3}\}$

9. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} \log_2 m & 2\log_2 m - 1 \\ 2 & \log_2(2m) \end{pmatrix}$ .

Rezolvare: 1. Calculăm DVA:  $\begin{cases} m > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0 \Rightarrow DVA = (0; +\infty)$

2. A-inversabilă  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ .

3.  $\det A = \log_2 m \cdot (1 + \log_2 m) - 2 \cdot (2\log_2 m - 1) = \log_2^2 m - 3\log_2 m + 2$ .

4. Fie  $\det A = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 m - 3\log_2 m + 2 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 m = t \\ t^2 - 3t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 m = t \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 m = \log_2 2 \\ \log_2 m = \log_2 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 4 \end{cases}$

5. Concluzie:  $m \in DVA \setminus \{2, 4\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m \in (0; +\infty) \setminus \{2, 4\}$

Răspuns:  $m \in (0; +\infty) \setminus \{2, 4\}$

# METODE DE REZOLVARE A INECUAȚIILOR

➤ REZOLVAREA CELOR MAI SIMPLE TIPURI DE INECUAȚII, BAZATE PE PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR

➤ TRECEREA LA TOTALITĂȚI DE SISTEME DE INECUAȚII:

$$f(x)g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}, \quad f(x)g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \\ f(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \leq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \\ f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}.$$

# METODE DE REZOLVARE A INECUAȚIILOR

➤ **OBTINEREA UNOR INECUAȚII / SISTEME ECHIVALENTE:**

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases},$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}.$$

# METODE DE REZOLVARE A INECUAȚIILOR

## ➤ METODA INTERVALELOR

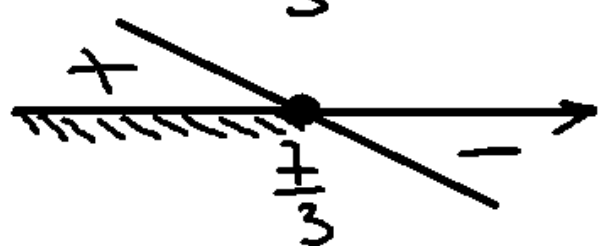
### Etape:

1. Se scrie inecuația în forma  $f(x) \geq 0$ , ( $\leq$ ,  $>$ ,  $<$ ), unde  $f$  este funcție continuă.
2. Se determină domeniul de definiție al funcției  $f$ .
3. Se determină zerourile funcției  $f$ .
4. Pe axa numerelor depunem domeniul de definiție și zerourile funcției  $f$ .  
Acele zerouri determină pe domeniul de definiție un șir de intervale.  
Întrucât funcția  $f$  este continuă, pe fiecare dintre intervalele deschise disjuncte obținute, ea are un semn constant pe fiecare dintre aceste intervale.  
Determinăm aceste semne.
5. Se selectează intervalele pe care funcția are un anumit semn, inclusiv capetele dacă ne interesează.

➤ Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuațiile:

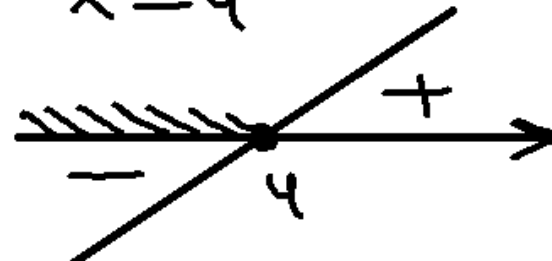
1.  $-3x + 7 \geq 0$ ;      2.  $\frac{x-1}{4} - \frac{5-2x}{12} \leq 1$ ;      3.  $(x-3)^2(x-2)(x+2) \leq 0$ .

$-3x + 7 \geq 0$   
Rezolvăm ecuația:  
 $-3x + 7 = 0$   
 $3x = 7$   
 $x = \frac{7}{3}$



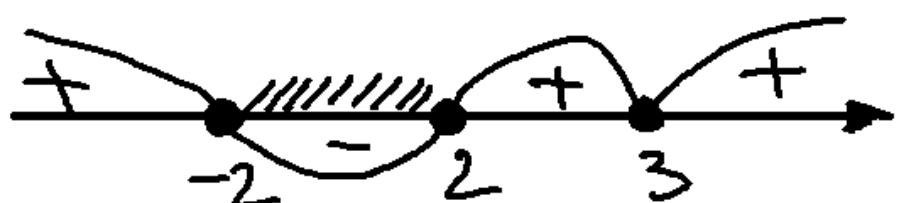
$S = (-\infty; \frac{7}{3}]$

$\frac{x-1}{4} - \frac{5-2x}{12} \leq 1 \quad | \cdot 12$   
 $3x - 3 - (5 - 2x) \leq 12$   
 $5x - 20 \leq 0$   
 $5x - 20 = 0$   
 $x = 4$



$S = (-\infty; 4]$

$(x-3)^2(x-2)(x+2) \leq 0$   
Rezolvăm ecuația  
 $(x-3)^2(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \\ x=-2 \end{cases}$   
Construim curba semnelor



$S = [-2; 2] \cup \{3\}$

$$4. \frac{1-x}{x} \leq 2;$$

$$5. \frac{2}{x+3} > 5 + \frac{17}{x-2};$$

$$\frac{1-x}{x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-3x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x \leq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup [\frac{1}{3}; +\infty)$$

$$\mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup [\frac{1}{3}; +\infty)$$

$$\frac{2}{x+3} > 5 + \frac{17}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x+3} - 5 - \frac{17}{x-2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-4-5x^2-5x+30-17x-51}{(x+3)(x-2)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5x^2-20x-25}{(x+3)(x-2)} > 0 \quad \left| \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+4x+5}{(x+3)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-2) \underbrace{(x^2+4x+5)}_{\substack{< 0 > 0, \forall x \in \mathbb{R}}} < 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-3; 2) \Rightarrow \mathcal{D} = (-3; 2)$$

$$6. |1 - 3x| < 2;$$

$$|1 - 3x| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3x > -2 \\ 1 - 3x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 3 \\ 3x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$$

$$S = \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$$

$$7. |x^2 - 5x| \geq 6.$$

$$|x^2 - 5x| \geq 6 \Leftrightarrow |x^2 - 5x| - 6 \geq 0$$

Resolvăm ecuația

$$|x^2 - 5x| - 6 = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 5x| = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x = 6 \\ x^2 - 5x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 6 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$$



$$S = (-\infty; -1] \cup [2; 3] \cup [6; +\infty)$$

$$8. \sqrt{2x+5} < x+1.$$

Resolvare:

$$\sqrt{2x+5} < x+1 \iff \begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x+5 \geq 0 \\ 2x+5 < x^2+2x+1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x > -1 \\ x \geq -\frac{5}{2} \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -1 \\ (x-2)(x+2) > 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x > -1 \\ x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \end{cases} \iff x \in (2; +\infty)$$

Răspuns:  $S = (2; +\infty)$

$$9. (3 - x)\sqrt{x^2 + x - 2} \leq 0;$$

1. Fie  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (3-x) \cdot \sqrt{x^2 + x - 2}$

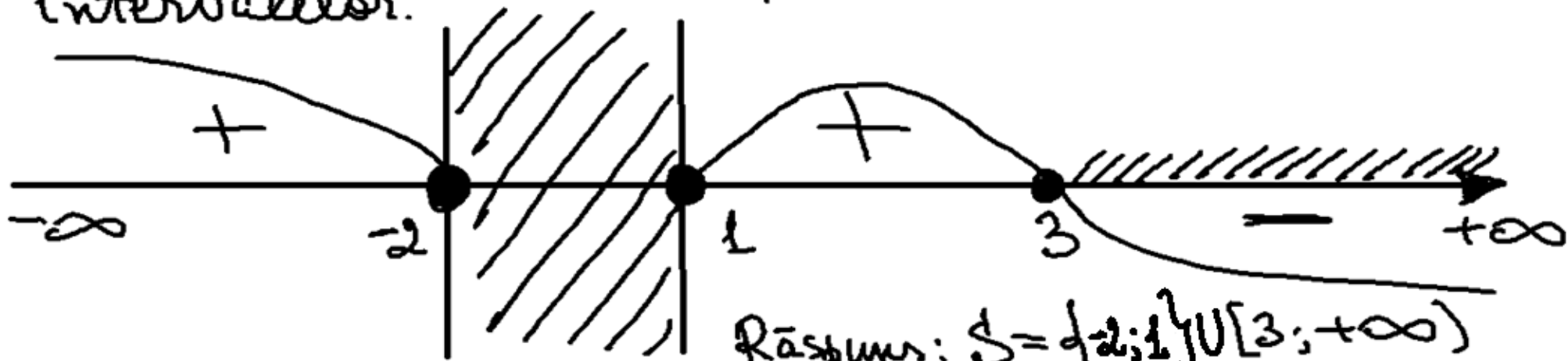
2.  $\mathcal{D}: x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \Rightarrow \mathcal{D} = (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$

3. Rezolvăm ecuația

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x=0 \\ x^2+x-2=0 \\ x \in \mathcal{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \\ x=1 \\ x \in \mathcal{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \\ x=1 \end{cases} \begin{matrix} \text{- zerourile} \\ \text{funcției } f. \end{matrix}$$

4.  $f$ -continuă pe  $\mathcal{D}$ , deci putem aplica metoda intervalelor.

5.



Răspuns:  $S = [2; 1] \cup [3; +\infty)$

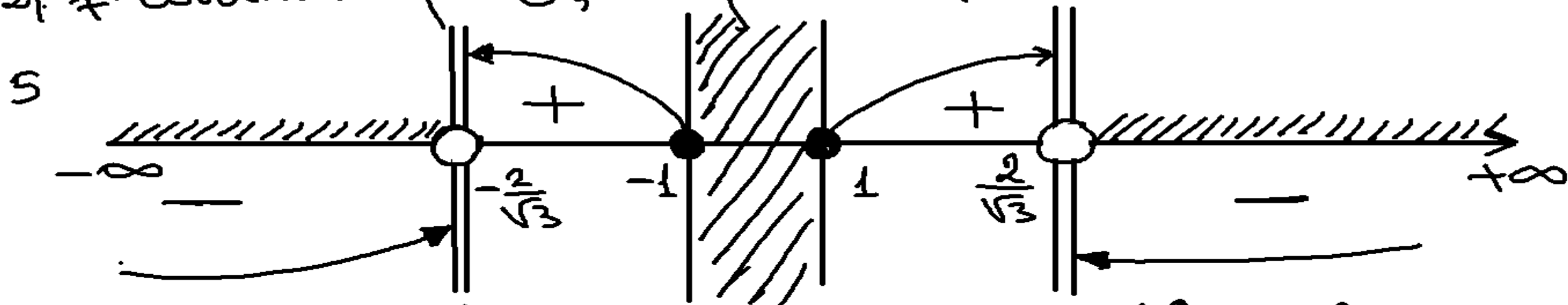
10.  $\frac{\sqrt{3x^2-3}}{4-3x^2} \leq 0.$

Rezolvare: 1. Fie  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\sqrt{3(x-1)(x+1)}}{(2-\sqrt{3}x)(2+\sqrt{3}x)}$

2.  $\mathcal{D}: \begin{cases} 3(x-1)(x+1) \geq 0 \\ x \neq \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \setminus \left\{ \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \right\}$

3.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$  - zerourile funcției  $f$ .

4.  $f$  continuă pe  $\mathcal{D}$ , deci putem aplica metoda intervalelor.



Răspuns:  $\mathcal{D} = (-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}) \cup \{-1; 1\} \cup (\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty)$



$$12. \log_{\frac{1}{3}}(2x^2 + x) \leq -1.$$

Rezolvare:  $\log_{\frac{1}{3}}(2x^2+x) \leq -1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(2x^2+x) \leq \log_{\frac{1}{3}} 3^{0 < \frac{1}{3} < 1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x \geq 3 \\ 2x^2+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2+x-3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [1; +\infty)$$

Răspuns:  $S = (-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [1; +\infty)$

$$13. \lg(3x) \leq \lg(4 - x^2).$$

Resolvare  $\lg(3x) \leq \lg(4 - x^2) \stackrel{10 > 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x > 0 \\ 4 - x^2 > 0 \\ 3x \leq 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 0 \\ x^2 + 3x - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \in [-4; 1] \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1]$$

Răspuns:  $S = (0; 1]$

$$14. \frac{5x^2 + x - 6}{\log_{0,2}(x^2 + 3)} \geq 0.$$

Rezolvare. Observăm că  $x^2 + 3 \geq 3, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log_{0,2}(x^2 + 3) \leq \log_{0,2} 3, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \log_{0,2}(x^2 + 3) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Înecuația dată este echivalentă cu:

$$5x^2 + x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{6}{5}; 1\right]$$

$$\text{Răspuns: } S = \left[-\frac{6}{5}; 1\right]$$

$$15. \frac{\sqrt{2x+1}}{\log_{\frac{1}{2}} x^2 + 2} \leq 0.$$

Resolva:  $\frac{\sqrt{2x+1}}{\log_{\frac{1}{2}} x^2 + 2} \leq 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2x+1}}{\log_{\frac{1}{2}} x^2 + 2} = 0 \\ \frac{\sqrt{2x+1}}{\log_{\frac{1}{2}} x^2 + 2} < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} + 2 \neq 0 \text{ (A)} \\ 2x+1 > 0 \Leftrightarrow \\ \log_{\frac{1}{2}} x^2 + 2 < 0 \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \\ \log_{\frac{1}{2}} x^2 < \log_{\frac{1}{2}} 4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 < \frac{1}{2} < 1 \\ \Leftrightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \\ x^2 > 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \\ x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x \in (2; +\infty) \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \cup (2; +\infty)$$

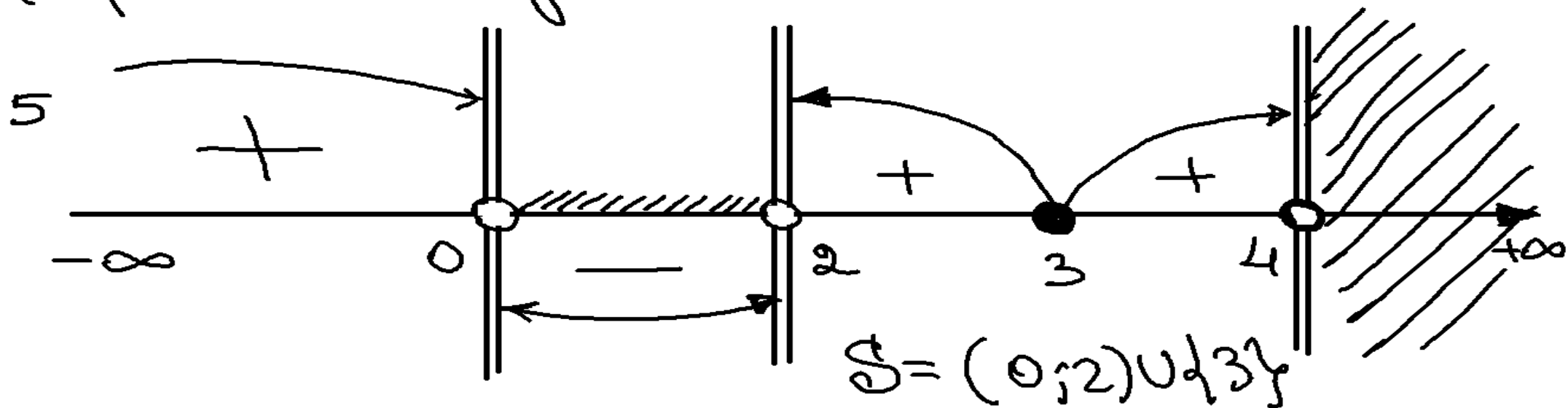
$$16. \frac{\log_1^2(4-x)}{x^2-2x} \leq 0.$$

Rezolvare: 1. Fie  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\log_{\frac{1}{2}}^2(4-x)}{x^2-2x} = \frac{\log_{\frac{1}{2}}^2(4-x)}{x(x-2)}$

2.  $D: \begin{cases} 4-x > 0 \\ x^2-2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 4) \setminus \{0; 2\}$

3.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(4-x) = 0 \\ x \in D \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$  - zero al lui  $f$ .

4.  $f$  - continuă pe  $D$ , aplicăm metoda intervalelor.





2. Determinați valorile reale ale lui  $x$  pentru care  $\sqrt{3}\cos x - \sin(2x) = 0$  și  $|x| < 2$ .

Rezolvare:  $\sqrt{3}\cos x - \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos x (\sqrt{3} - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ x = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Selectăm soluțiile analitice / sintetice.

$$k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in (-2, 2)$$

$$k \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} \approx 4,5$$

$$k \leq -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \in (-2, 2)$$

$$k \leq -2 \Rightarrow x \leq \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2} \approx -4,5$$

$$\text{Deci } x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$-2 < \frac{\pi}{3} + 2\pi n < 2 \quad | -\frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{6-\pi}{3} < 2\pi n < \frac{6-\pi}{3} \quad | \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$-\frac{6-\pi}{6\pi} < n < \frac{6-\pi}{6\pi}, n \in \mathbb{Z}$$

$$n=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Pentru } m \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{2\pi}{3} > 2$$

$$\text{Pentru } m \leq -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \leq -\frac{4\pi}{3} < -2$$

$$\text{Răspuns! } x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right\}$$

3. Determinați soluțiile reale ale ecuației  $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}$  care verifică condiția  $x \in (-\pi; \pi]$ .

Rezolvare  $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow (\sin^2 \frac{x}{3} + \cos^2 \frac{x}{3})^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \sin^2 \frac{x}{3} \cdot \cos^2 \frac{x}{3} =$   
 $= \frac{5}{8} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{2x}{3} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos \frac{4x}{3}}{2} = \frac{5}{8} \mid \cdot 8 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 8 - 2(1 - \cos \frac{4x}{3}) = 5 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{4x}{3} = -1 \Leftrightarrow \cos \frac{4x}{3} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x}{3} = \pi - \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{4x}{3} = -(\pi - \arccos \frac{1}{2}) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$-\pi < \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi \cdot n}{2} \leq \pi \mid -\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{3\pi}{2} < \frac{3\pi n}{2} \leq \frac{\pi}{2} \mid \cdot \frac{2}{3\pi}$$

$$-1 < n \leq \frac{1}{3}; n \in \mathbb{Z}.$$

$$n=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi < -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi k}{2} \leq \pi \mid +\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi k}{2} \leq \frac{3\pi}{2} \mid \times \frac{2}{3\pi}$$

$$-\frac{1}{3} < k \leq 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k=0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \\ k=1 \Rightarrow x = \pi \end{cases}$$

$$\end{cases}$$

Răspuns!

$$x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi \right\}$$

4. Determinați soluțiile reale ale ecuației  $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$  care aparțin intervalului  $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ .

Rezolvare  $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow (\sin x + \cos x) = \frac{(\sin x + \cos x)}{\sin x \cdot \cos x}$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) \cdot \left[1 - \frac{2}{2\sin x \cdot \cos x}\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 & | : \cos x \neq 0 \\ \sin 2x = 2 & \Leftrightarrow \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

$\frac{3\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} + \pi k < \frac{5\pi}{2} \quad | + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{7\pi}{4} < \pi k < \frac{11\pi}{4} \quad | \times \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7}{4} < k < \frac{11}{4} \Leftrightarrow k = 2 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$

Răspuns:  $x = \frac{7\pi}{4}$

## ECUAȚII TRIGONOMETRICE. SELECȚII DE SOLUȚII ȘI METODE DE SELECȚIE

### ➤ CONDIȚII „ASCUNSE”:

5. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $2 \sin^2 x - 2 \sin x + \operatorname{tg} x \cdot \cos x - 1 = 0$ .

Rezoluare  $2 \sin^2 x - 2 \sin x + \operatorname{tg} x \cdot \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2 \sin^2 x - 2 \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq \pm 1 \\ 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = t \\ -1 < t < 1 \\ 2t^2 - t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = t \\ -1 < t < 1 \\ \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \cdot \arcsin(-\frac{1}{2}) + n\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$   
Răspuns:  $S = \left\{ (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

6. Fie expresia  $E(x) = 2\sin(2x) \cdot \operatorname{tg}x$ . Determinați valorile reale ale lui  $x$  pentru care  $E(x) \neq 1$ .

Rezolvare 1.  $E(x) = 2\sin(2x) \cdot \operatorname{tg}x = 4\sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$ .

2. Calculăm DVA:  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\Rightarrow \text{DVA} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

3. Fie  $E(x) = 1 \Leftrightarrow 4\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow 2(1 - \cos 2x) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + n\pi; n \in \mathbb{Z}$ .

4.  $E(x) \neq 1 \Leftrightarrow x \in \text{DVA} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left( \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \right)$

# ECUAȚII TRIGONOMETRICE. SELECȚII DE SOLUȚII ȘI METODE DE SELECȚIE

7. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $(\sin 2x - \operatorname{tg} x) \cdot \sqrt{2-x-x^2} = 0$ .

Rezolvare:  $(\sin 2x - \operatorname{tg} x) \cdot \sqrt{2-x-x^2} = 0 \Leftrightarrow (2\sin x \cdot \cos x - \frac{\sin x}{\cos x}) \cdot \sqrt{2-x-x^2} = 0 \Leftrightarrow \sin x \cdot (2\cos x - \frac{1}{\cos x}) \cdot \sqrt{2-x-x^2} = 0$ .

Calculăm DVA:  $\begin{cases} 2-x-x^2 \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2 \leq 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [-2; -\frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2}; 1] \Rightarrow \text{DVA} = [-2; 1] \setminus \{-\frac{\pi}{2}\}$ .

Pe DVA obținem totalitatea:

Rezolvăm ecuațiile  $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$



$x = \frac{\pi}{4} + m \cdot \frac{\pi}{2}, m \in \mathbb{Z}$   
 $\neq -\frac{\pi}{2}, \forall m \in \mathbb{Z}$

$-2 \leq \frac{\pi}{4} + \frac{m \cdot \pi}{2} \leq 1 \xrightarrow{m=0, m=-1}$

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} \\ 2-x-x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$   
 $\begin{cases} x = 1 \in \text{DVA} \\ x = -2 \in \text{DVA} \end{cases}$

$-2 \leq n\pi \leq 1 \mid \cdot \frac{1}{\pi}$   
 $\frac{-2}{\pi} \leq n \leq \frac{1}{\pi} \rightarrow n = 0$

$\Rightarrow x = 0$

Răspuns:  $x \in [-2; -\frac{\pi}{4}; 0; \frac{\pi}{4}; 1]$

8. Calculați suma soluțiilor reale ale ecuației  $(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}) \cdot \sqrt{9 - 4x^2} = 0$ .

Rezolvare  $1. (1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}) \cdot \sqrt{9 - 4x^2} = 0 \Leftrightarrow \cos x \cdot \sqrt{9 - 4x^2} = 0$

2. Considerăm funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x \cdot \sqrt{9 - 4x^2}$

3.  $D: 9 - 4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}] \Rightarrow D = [-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$ .

4.  $D$ -simetric în raport cu 0 și  $f(-x) = \cos x \cdot \sqrt{9 - 4x^2} = f(x)$ ,  
 $\forall x \in D \Rightarrow f$  pară.

Dacă un careva număr  $x_0$  va fi zero al funcției  $f$  / soluție a ecuației date, atunci și  $(-x_0)$  este zero / soluție.

5. Observăm că funcția noastră are cel puțin un zero, de exemplu  $\frac{3}{2}$  sau  $-\frac{3}{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  suma soluțiilor ecuației date este 0.

Răspuns: 0

9. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $(\sin^4 x - \cos^4 x) \cdot \ln(1 - x^2) = 0$ .

Rezolvare  $(\sin^4 x - \cos^4 x) \cdot \ln(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot \ln(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\cos 2x \cdot \ln(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \ln(1 - x^2) = 0 \\ 1 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1, 1) \\ 2x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ 1 - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1, 1) \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}; n \in \mathbb{Z} \\ x = 0 \in (-1, 1) \end{cases}$

$-1 < \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} < 1 \mid \cdot \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow \frac{-4-\pi}{4} < \frac{n\pi}{2} < \frac{4-\pi}{4} \mid \cdot \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-4-\pi}{2\pi} < n < \frac{4-\pi}{2\pi}, n \in \mathbb{Z} \rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Răspuns:  $S = \left\{ -\frac{\pi}{4}; 0; \frac{\pi}{4} \right\}$

10. Fie  $\alpha$  măsura în grade a unui unghi al unui triunghi dreptunghic (**sau arbitrar cu încă o condiție**), care verifică egalitatea  $3 - 2\cos^2\alpha - 2\sqrt{2} \cdot \sin\alpha = 0$ . Aflați măsurile în grade ale unghiurilor ascuțite ale triunghiului.

Rezolvare

$$3 - 2\cos^2\alpha - 2\sqrt{2}\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2(1 - \sin^2\alpha) - 2\sqrt{2}\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\alpha - 2\sqrt{2}\sin\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}\sin\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} & 0^\circ < \alpha \leq 90^\circ \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} & 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \Rightarrow 90^\circ - \alpha = 45^\circ$$

Răspuns:  $45^\circ$ ;  $45^\circ$ .

11. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1$ .

$$\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5 - 2\sin x} = t, t \geq 0 \\ t = 6 \cdot \frac{5 - t^2}{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5 - 2\sin x} = t, t \geq 0 \\ 3t^2 + t - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 + 168 = 169 \\ t = \frac{-1 - 13}{6} < 0 \\ t = \frac{-1 + 13}{6} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5 - 2\sin x} = 2 \Leftrightarrow 5 - 2\sin x = 4 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Răspuns: } S = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

12. Determinați valorile reale ale lui  $x$ , pentru care matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2\sin x & 1 \\ 2 & \operatorname{ctgx} \end{pmatrix} \text{ este inversabilă.}$$

Rezolvare: 1.  $\mathcal{DVA}: \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \} \rightarrow$   
 $\rightarrow \mathcal{DVA} = \mathbb{R} \setminus \{ \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \}$

2. Calculăm  $\det A = 2 \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - 2 = 2 \cos x - 2, \forall x \in \mathcal{DVA}$

3.  $A$ -inversabilă  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

4. Fie  $\det A = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

$$2n\pi \notin \mathcal{DVA}.$$

5.  $\Rightarrow x \in \mathcal{DVA} = \mathbb{R} \setminus \{ \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Răspuns:  $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \}$