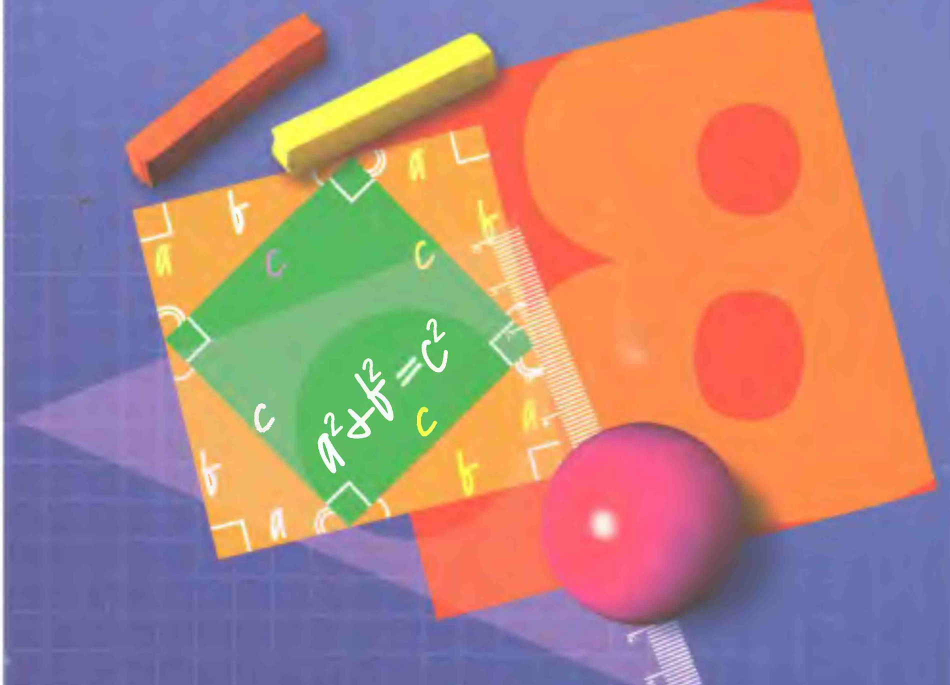
Школьникам, абитуриентам, учащимся

А. А. Мещерякова

Геометрия

Опорные конспекты

8 класс



Аверсэв

Школьникам, абитуриентам, учащимся

А. А. Мещерякова

Геометрия

Опорные конспекты

8 класс

Пособие для учащихся
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования
Республики Беларусь

2-е издание

Минск
«Аверсэв»
2015

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721
М56

Серия основана в 1999 году

Рецензенты:
каф. геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорус. гос. ун-та (канд. физ.-мат. наук, доц. ***Ю. Д. Чурбанов***); преподаватель математики высшей категории учреждения образования «Минское суворовское военное училище» ***И. Г. Арефьева***

Мещерякова, А. А.
М56 Геометрия. 8 класс : опорные конспекты : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / А. А. Мещерякова. — 2-е изд. — Минск: Аверсэв, 2015. — 89 с.: ил. — (Школьникам, абитуриентам, учащимся).
ISBN 978-985-19-1412-4.

В данном пособии в форме опорных конспектов, наглядно представляющих учебный материал, отражены основные разделы курса геометрии, изучаемые в 8 классе.

Использование опорных конспектов позволит учащимся сконцентрировать внимание на наиболее трудных для запоминания местах, многократно повторить изученное, а учителям — провести оперативный контроль усвоения материала, привлечь к проверке знаний родителей.

Пособие предназначено учащимся учреждений общего среднего образования.

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-19-1412-4

Предисловие

Дорогие ребята! В 8 классе продолжится ваше путешествие в мир геометрии с помощью уже известных вам опорных схем, которые помогут быстрее усвоить теоретический материал учебного пособия.

Вы продолжите свое знакомство с геометрией на плоскости, изучите свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника, квадрата, ромба, трапеции, познакомитесь с признаками подобия треугольников, соотношением между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике, свойством высоты прямоугольного треугольника.

В данном пособии, как и в предыдущем, в форме опорных конспектов представлены все основные разделы курса геометрии, которые вы изучите в 8 классе. Эти опорные схемы и сигналы опорных схем помогут вам подготовиться к урокам, а при необходимости станут подсказкой во время выполнения практических заданий.

Для удобства пользования весь учебный материал заключен в рамки различного вида:

— важная информация;

— информация для ознакомления;

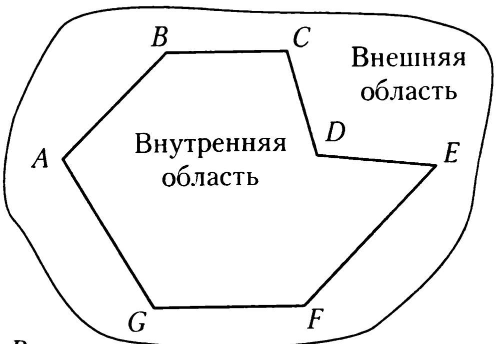
— задачи с решениями;

— теорема, следствие и т. д.;

— пример.

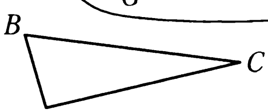
Успехов и удачи вам!

Многоугольник и его элементы. Сумма градусных мер углов выпуклого многоугольника

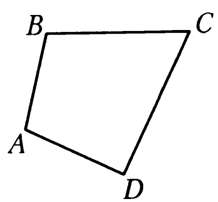


Часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной, называется **многоугольником**.

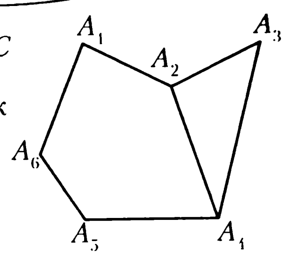
A, B, C, D, E, F, G — вершины.
$AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA$ — стороны.
Периметр $P = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GA$.



Треугольник



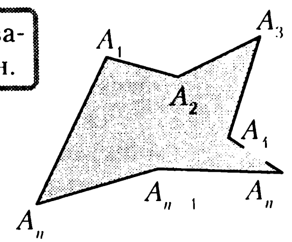
Четырехугольник



Шестиугольник

A_2A_4 — диагональ шестиугольника

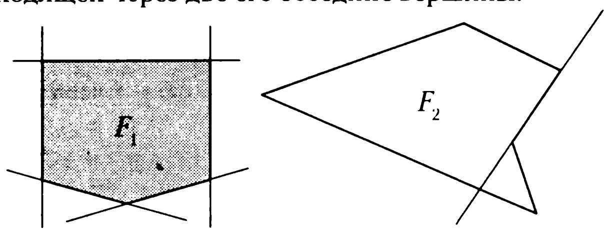
Многоугольник с n вершинами называется ***n*-угольником**; он имеет n сторон.



Две вершины многоугольника, принадлежащие одной стороне, называются **соседними**.

Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины, называется **диагональю многоугольника**.

Многоугольник называется **выпуклым**, если он **лежит** по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.



Выпуклый Невыпуклый

Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна 1260°. Найти количество сторон n-угольника.

Решение.

Сумма внутренних углов n-угольника равна

$$180° \cdot (n-2).$$

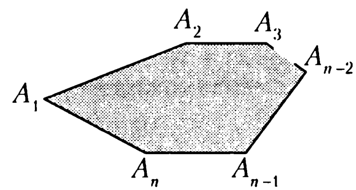
Тогда $180° \cdot (n-2) = 1260°$;

$$(n-2) = 7;$$

$$n = 9.$$

Ответ: 9 сторон.

Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $(n-2) \cdot 180°$.



$\angle A_nA_1A_2$, $\angle A_1A_2A_3$, ..., $\angle A_{n-1}A_nA_1$ — Углы многоугольника

Найти сумму внутренних углов выпуклого пятиугольника.

Решение.

По формуле о сумме углов многоугольника

$$(n-2) \cdot 180° = (5-2) \cdot 180° = 540°.$$

Ответ: 540°.

Найти градусную меру внутреннего угла правильного девятиугольника.

Решение.

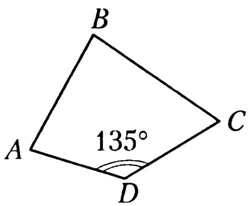
Внутренний угол правильного n-угольника равен $\dfrac{180° \cdot (n-2)}{n}$.

Поэтому получим $\dfrac{180° \cdot (9-2)}{9} = 140°$.

Ответ: 140°.

Задачи по теме «Многоугольники. Сумма градусных мер углов выпуклого многоугольника»

Задача 1



Дано: $ABCD$ — четырехугольник;
$\angle A = \angle B = \angle C$;
$\angle D = 135°$.

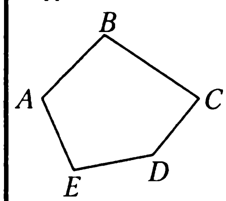
Найти: $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$.

Решение.

1. По формуле о сумме углов выпуклого многоугольника имеем:
   $(n-2) \cdot 180° = (4-2) \cdot 180° = 360°$.
2. $\left.\begin{array}{l} \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°, \\ \angle D = 135°, \\ \text{пусть } \angle A = x = \angle B = \angle C, \end{array}\right\}$ тогда
   $3x + 135° = 360°$;
   $3x = 225°$;
   $x = 75°$.
   Следовательно, $\angle A = \angle B = \angle C = 75°$.

Ответ: 75°.

Задача 2



Дано: $ABCDE$ — пятиугольник;
$\angle A : \angle B : \angle C : \angle D : \angle E =$
$= 1 : 2 : 3 : 4 : 8$.

Найти: $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$; $\angle D$; $\angle E$.

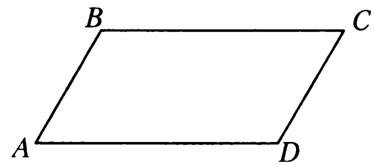
Решение.

1. По формуле о сумме углов выпуклого многоугольника имеем:
   $(n-2) \cdot 180° = (5-2) \cdot 180° = 540°$.
2. $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 540°$.
   Пусть $\angle A = x$, тогда $\angle B = 2x$, $\angle C = 3x$, $\angle D = 4x$, $\angle E = 8x$.
   Следовательно,
   $x + 2x + 3x + 4x + 8x = 540°$;
   $18x = 540°$; $x = 30°$;
   $\angle A = 30°$, $\angle B = 2 \cdot 30° = 60°$, $\angle C = 3 \cdot 30° = 90°$,
   $\angle D = 4 \cdot 30° = 120°$, $\angle E = 8 \cdot 30° = 240°$.

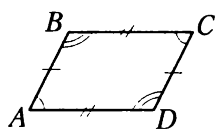
Ответ: 30°; 60°; 90°; 120°; 240°.

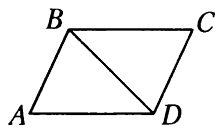
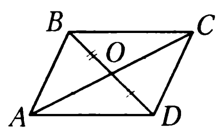
Параллелограмм

Четырехугольник, в котором противолежащие стороны попарно параллельны, называется параллелограммом.



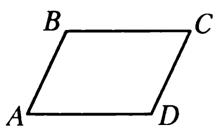
$ABCD$ — параллелограмм $\Leftrightarrow$ $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$

Свойства		Признаки
1. Если $ABCD$ — параллелограмм, то $\boxed{\mathbf{AB = DC;\ AD = BC;\ \angle A = \angle C;\ \angle B = \angle D.}}$ **В параллелограмме противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.**		1. Если $ABCD$ — четырехугольник и $BC \parallel AD$; $BC = AD$, **то $ABCD$ — параллелограмм.** **Если две противолежащие стороны четырехугольника равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.**

Свойства		Признаки
2. Если $ABCD$ — параллелограмм и BD — диагональ, **то** $\boldsymbol{\triangle ABD = \triangle CDB}$. **Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.**	 	2. Если $ABCD$ — четырехугольник и $AB = DC$, $AD = BC$, **то $\boldsymbol{ABCD}$ — параллелограмм**. **Если противолежащие стороны четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.**
3. Если $ABCD$ — параллелограмм, AC и BD — диагонали, **то** $\boldsymbol{AO = OC;\ BO = OD}$. **Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.**	 	3. Если $ABCD$ — четырехугольник, $AC \cap BD = O$ и $AO = OC$; $BO = OD$, **то $\boldsymbol{ABCD}$ — параллелограмм**. **Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.**

Задачи по теме «Свойства и признаки параллелограмма»

Задача 1



Дано: $ABCD$ — параллелограмм;
$BC - AB = 5$ см;
$P_{ABCD} = 40$ см.

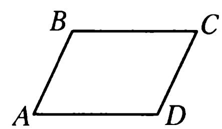
Найти: AB; BC.

Решение.

1. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то по свойству параллелограмма $AB = CD$ и $AD = BC$.
2. $P_{ABCD} = (AB + BC) \cdot 2$;
   $P_{ABCD} = 40$ см (по условию);
   $BC - AB = 5$ (см), значит, $BC = 5 + AB$.
   Составим уравнение:
   $$(AB + 5 + AB) \cdot 2 = 40;$$
   $$2AB + 5 = 20;$$
   $$2AB = 15;$$
   $$AB = 7{,}5 \text{ см}.$$
3. $BC = 5 + AB$;
   $BC = 12{,}5$ см.

Ответ: 7,5 см; 12,5 см.

Задача 2



Дано: $ABCD$ — параллелограмм;
$AB : BC = 4 : 5$;
$P_{ABCD} = 10{,}8$ см.

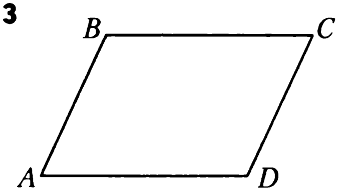
Найти: AB; BC; CD; AD.

Решение.

1. Пусть x — одна часть,
   $AB : BC = 4 : 5$ (по условию),
   тогда $AB = 4x$, $BC = 5x$.
2. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то по свойству параллелограмма $AB = CD$ и $AD = BC$.
3. $P_{ABCD} = (AB + BC) \cdot 2$;
   $P_{ABCD} = 10{,}8$ см (по условию).
   Составим уравнение:
   $$(4x + 5x) \cdot 2 = 10{,}8;$$
   $$9x = 5{,}4;\ x = 0{,}6.$$
4. $AB = 4x = 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}4$ (см);
   $BC = 5x = 5 \cdot 0{,}6 = 3$ (см).
5. $AB = CD = 2{,}4$ см (по свойству параллелограмма);
   $BC = AD = 3$ см (по свойству параллелограмма).

Ответ: 2,4 см; 3 см; 2,4 см; 3 см.

Задача 3



Дано: $ABCD$ — параллелограмм;
$\angle B$ больше $\angle A$ на 40°.

Найти: $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$; $\angle D$.

Решение.

1. $\angle B$ больше $\angle A$ на 40° (по условию), следовательно, $\angle B = \angle A + 40°$.
2. $\angle A + \angle B = 180°$ (так как $\angle A$ и $\angle B$ — внутренние односторонние углы при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AB).
3. $\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle A + 40° \text{ (из пункта 1)},\\ \angle A + \angle B = 180° \text{ (из пункта 2)},\end{array}\right\}$ значит, $\angle A + \angle A + 40° = 180°$;

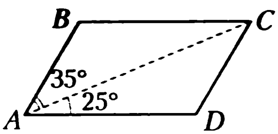
$$2\angle A = 140°;$$
$$\angle A = 70°.$$

4. $\angle A = \angle C = 70°$ (по свойству параллелограмма);
$\angle B = \angle A + 40° = 70° + 40° = 110°$;
$\angle B = \angle D = 110°$ (по свойству параллелограмма).

Ответ: 70°; 110°; 70°; 110°.

Если **две параллельные** прямые пересечены **секущей, то сумма** внутренних **односторонних углов** равна 180°.

Задача 4



Дано: $ABCD$ — параллелограмм;
AC — диагональ;
$\angle BAC = 35°$;
$\angle CAD = 25°$.

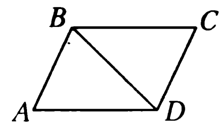
Найти: $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$; $\angle D$.

Решение.

1. $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 35° + 25° = 60°$.
   $\angle BAD = \angle BCD = 60°$ (по свойству параллелограмма).
2. $\angle A + \angle B = 180°$ (так как $\angle A$ и $\angle B$ — внутренние односторонние углы при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AB).
   $60° + \angle B = 180°$;
   $\angle B = 180° - 60°$;
   $\angle B = 120°$;
   $\angle B = \angle D = 120°$ (по свойству параллелограмма).

Ответ: 60°; 120°; 60°; 120°.

Задача 5



Дано: $ABCD$ — параллелограмм;
$P_{ABCD} = 10$ см;
$P_{ABD} = 8$ см.

Найти: BD.

Решение.

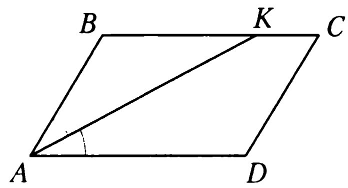
1. $\left.\begin{array}{l} P_{ABCD} = (AB + AD) \cdot 2, \\ P_{ABCD} = 10 \text{ см (по условию)}, \end{array}\right\} \begin{array}{l} (AB + AD) \cdot 2 = 10 \text{ см}; \\ AB + AD = 5 \text{ см}. \end{array}$

2. $\left.\begin{array}{l} P_{ABD} = AB + AD + BD, \\ P_{ABD} = 8 \text{ см (по условию)}, \\ AB + AD = 5 \text{ см (из пункта 1)}, \end{array}\right\} \begin{array}{l} 5 + BD = 8; \\ BD = 3 \text{ см}. \end{array}$

Ответ: 3 см.

Периметр фигуры — это сумма длин всех его сторон.

Задача 6



Дано: $ABCD$ — параллелограмм;
AK — биссектриса $\angle A$;
$BK : KC = 2 : 1$;
$P_{ABCD} = 50$ см.

Найти: AB; BC; CD; AD.

Решение.

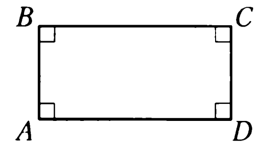
1. Пусть x — одна часть, тогда $BK = 2x$, $KC = x$.
2. Так как AK — биссектриса $\angle A$, следовательно, $\angle BAK = \angle KAD$.
3. $\angle BKA = \angle KAD$ (как внутренние накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AK).
4. Получили:
$$\left.\begin{array}{l}\angle BAK = \angle KAD,\\ \angle BKA = \angle KAD,\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{следовательно, } \angle BAK = \angle BKA, \text{ значит, } \triangle ABK \text{ — равнобедренный,}\\ \text{следовательно, } AB = BK = 2x.\end{array}$$
5. $$\left.\begin{array}{l}P_{ABCD} = (AB + BC) \cdot 2,\\ P_{ABCD} = 50 \text{ см (по условию)},\\ BC = BK + KC = 3x.\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Составим уравнение:}\\ (2x + 3x) \cdot 2 = 50;\\ 5x = 25;\\ x = 5.\end{array}$$
6. $BC = 3x = 3 \cdot 5$;
$BC = AD = 15$ см (по свойству параллелограмма).
$AB = 2x = 2 \cdot 5$;
$AB = CD = 10$ см (по свойству параллелограмма).

Ответ: 10 см; 15 см; 10 см; 15 см.

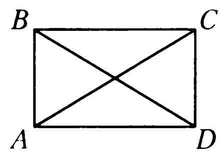
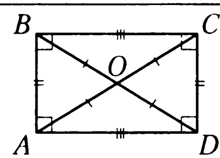
Биссектрисой угла называется луч с началом **в вершине** этого угла и делящий его на **два равных** угла.

Прямоугольник

Параллелограмм, в котором все углы прямые, называется прямоугольником.

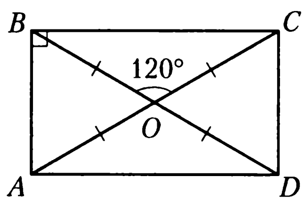


$ABCD$ — прямоугольник $\Leftrightarrow$ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

Свойства		Признаки
1. Если $ABCD$ — прямоугольник, то $\boldsymbol{AC = BD}$. **Диагонали прямоугольника равны.**		1. Если $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$, **то $ABCD$ — прямоугольник.** **Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм является прямоугольником.**
2. Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. 2.1. Если $ABCD$ — прямоугольник, то $\boldsymbol{AB = DC; AD = BC; \angle A = \angle C = \angle B = \angle D}$. 2.2. Если $ABCD$ — прямоугольник, AC и BD — диагонали, то $\boldsymbol{AO = OC = BO = OD}$. 2.3. Если $ABCD$ — прямоугольник, то $\boldsymbol{AB \parallel DC; AD \parallel BC}$.		2. Если $ABCD$ — параллелограмм и $\angle A = 90°$, **то $ABCD$ — прямоугольник.** **Если в параллелограмме один из его углов прямой, то такой параллелограмм является прямоугольником.**

Задачи по теме «Свойства и признаки прямоугольника»

Задача 1



Дано: $ABCD$ — прямоугольник;
$AC \cap BD = O;$
$\angle BOC = 120°;$
$AB = 9$ см.

Найти: AC.

Решение.

1. $\left.\begin{array}{l} AC = BD, \\ BO = DO, \\ AO = CO, \end{array}\right\}$ по свойству диагоналей в прямоугольнике, значит, $BO = OC$, следовательно,

   $\triangle BOC$ — равнобедренный. Тогда

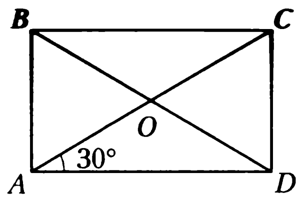
   $$\angle CBO = \angle BCO = \frac{180° - \angle BOC}{2} = \frac{180° - 120°}{2} = 30°.$$

2. $\triangle ABC$ — прямоугольный ($\angle B = 90°$, так как $ABCD$ — прямоугольник),

   $\left.\begin{array}{l} \angle BCA = 30°, \\ AB = 9 \text{ см (по условию)}, \end{array}\right\}$ следовательно, $AB = \frac{1}{2}AC$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°), значит, $AC = 2AB = 2 \cdot 9$; $AC = 18$ см.

Ответ: 18 см.

Задача 2



Дано: $ABCD$ — прямоугольник;
$AC \cap BD = O$;
$\angle CAD = 30°$;
$AC = 12$ см.

Найти: P_{AOB}.

Решение.

1. $\triangle ACD$ — прямоугольный ($\angle D = 90°$), так как $ABCD$ — прямоугольник,

   $DC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (см) (по свойству катета, лежащего против угла в 30°).

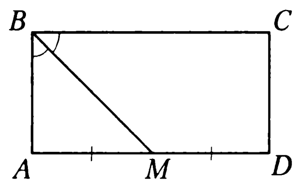
2. $\left.\begin{array}{l} AO = CO, \\ BO = DO, \\ AC = BD, \end{array}\right\}$ по свойству диагоналей в прямоугольнике, значит, $AO = BO = 6$ см.

3. $\left.\begin{array}{l} P_{AOB} = AB + BO + AO, \\ AB = DC = 6 \text{ см}, \end{array}\right\}$ $P_{AOB} = 6 + 6 + 6 = 18$ (см).

Ответ: 18 см.

Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Задача 3



Дано: $ABCD$ — прямоугольник;
BM — биссектриса $\angle B$;
$AM = MD$;
$BC = 12$ см.

Найти: P_{ABCD}.

Решение.

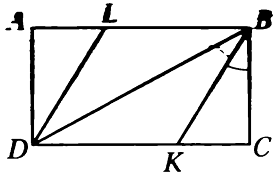
1. $BC = AD = 12$ см (по свойству прямоугольника), $AM = MD$ (по условию), значит, $AM = \dfrac{AD}{2} = 6$ см.

2. $\angle ABM = \angle MBC$ (так как BM — биссектриса $\angle B$), $\angle BMA = \angle MBC$ (как внутренние накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей BM), значит, $\angle ABM = \angle BMA$, следовательно, $\triangle ABM$ — равнобедренный, тогда $AB = AM = 6$ см.

3. $P_{ABCD} = (AB + BC) \cdot 2 = (6 + 12) \cdot 2$; $P_{ABCD} = 36$ см.

Ответ: 36 см.

Задача 4



Дано: $ABCD$ — прямоугольник;
BK — биссектриса $\angle DBC$;
BD — биссектриса $\angle ABK$;
$DL \parallel BK$;
$KC = 3$ см.

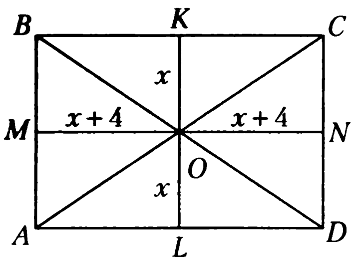
Найти: P_{DLBK}.

Решение.

1. $\angle DBK = \angle KBC$ (так как BK — биссектриса $\angle DBC$),
$\angle ABD = \angle DBK$ (так как BD — биссектриса $\angle ABK$),
$\angle ABC = 90°$ (так как $ABCD$ — прямоугольник),
следовательно, $\angle ABD = \angle DBK = \angle KBC = \dfrac{\angle ABC}{3} = \dfrac{90°}{3} = 30°$.
2. Рассмотрим $\triangle KBC$:
$\triangle KBC$ — прямоугольный ($\angle C = 90°$, так как $ABCD$ — прямоугольник),
$\angle KBC = 30°$ (из пункта 1),
$KC = 3$ см (по условию),
следовательно, $KC = \dfrac{1}{2}KB$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°), значит, $KB = 2KC = 2 \cdot 3$; $KB = 6$ см.
3. $DL \parallel BK$ (по условию),
$LB \parallel DK$ (так как $ABCD$ — прямоугольник),
значит, $DLBK$ — параллелограмм (по определению).
4. $DL = KB = 6$ см (по свойству параллелограмма),
$LB = DK$ (по свойству параллелограмма).
5. $\angle LDB = \angle KBD$ (как внутренние накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых DL и BK секущей DB),
$\angle LBD = \angle KBD$ (так как DB — биссектриса $\angle LBK$),
следовательно, $\angle LDB = \angle LBD$, значит, $\triangle DLB$ — равнобедренный, следовательно, $DL = LB = 6$ см.
6. $P_{DLBK} = (DL + LB) \cdot 2 = (6 + 6) \cdot 2$; $P_{DLBK} = 24$ см.

Ответ: 24 см.

Задача 5



Дано: $ABCD$ – прямоугольник;
$BD \cap AC = O$;
расстояние от точки O до AB на 4 см больше расстояния от точки O до AD;
$P_{ABCD} = 56$ см.

Найти: AB; BC; DC; AD.

Решение.

1. Дополнительное построение: $OM \perp AB$ и $OL \perp AD$, тогда OM – расстояние от точки O до AB и OL – расстояние от точки O до AD.

2. Пусть $OL = x$, тогда $OM = x + 4$, так как OM больше OL на 4 см (по условию).

3. $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 56$ см;
$AB + AD = 56 : 2$;
$AB + AD = 28$ см.

4. Рассмотрим $\triangle ABD$:
$\left.\begin{array}{l} OM \perp AB \text{ (по построению);} \\ AD \perp AB \text{ (так как } ABCD \text{– прямоугольник),} \end{array}\right\}$ значит, $OM \parallel AD$.

5. $OL \perp AD$, $OM \perp AB$ (по построению);
$OM \parallel AD$ (по доказанному в пункте 4);
$\angle A = 90°$ (так как $ABCD$ — прямоугольник);

значит, $AMOL$ — прямоугольник.

Следовательно, $MO = AL = \frac{1}{2}AD$,

$AD = 2OM = 2 \cdot (x + 4)$;
$AB = 2OL = 2x$ (доказывается аналогично);
$AB + AD = 28$ см (из пункта 3),

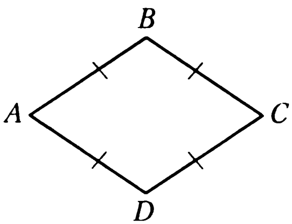
следовательно, $2x + 2 \cdot (x + 4) = 28$;
$4x = 20$;
$x = 5$.

6. $AB = DC = 10$ см (по свойству прямоугольника); $BC = 2 \cdot (5 + 4)$;
$BC = AD = 18$ см (по свойству прямоугольника).

Ответ: 10 см; 18 см; 10 см; 18 см.

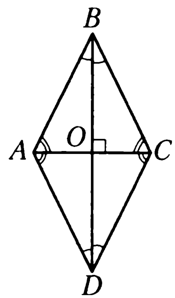
Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую.

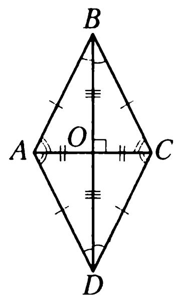
Ромб



Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется ромбом.

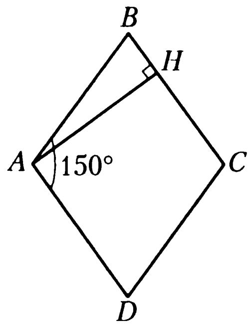
$ABCD$ — ромб $\Leftrightarrow$ $AB = BC = CD = DA$

Свойства		Признаки
1. Если $ABCD$ — ромб, AC и BD — диагонали, **то** **а)** $\boldsymbol{AC \perp BD}$; **б)** $\boldsymbol{BD}$ **— биссектриса** $\boldsymbol{\angle B}$ **и** $\boldsymbol{\angle D}$; $\boldsymbol{AC}$ **— биссектриса** $\boldsymbol{\angle A}$ **и** $\boldsymbol{\angle C}$. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам.		1. Если $ABCD$ — параллелограмм и $AC \perp BD$, **то** $\boldsymbol{ABCD}$ **— ромб**. Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом.

Свойства		Признаки
2. Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма. 2.1. Если $ABCD$ — ромб, **то** $\boldsymbol{AB \parallel DC; AD \parallel BC}$. 2.2. Если $ABCD$ — ромб, AC и BD — диагонали, **то** $\boldsymbol{AO = OC; BO = OD}$. 2.3. Если $ABCD$ — ромб, **то** $\boldsymbol{\angle A = \angle C; \angle B = \angle D}$.	 	2. Если $ABCD$ — параллелограмм и диагонали AC и BD являются биссектрисами его углов, **то $\boldsymbol{ABCD}$ — ромб.** Если диагонали параллелограмма являются биссектрисами его углов, то этот параллелограмм является ромбом.
		3. Если $ABCD$ — четырехугольник и $AB = AD = BC = CD$, **то $\boldsymbol{ABCD}$ — ромб.** Если в четырехугольнике все стороны равны, то этот четырехугольник является ромбом.

Задачи по теме «Свойства и признаки ромба»

Задача 1



Дано: $ABCD$ — ромб;
$\angle DAB = 150°$;
AH — высота;
$AH = 3{,}5$ см.

Найти: P_{ABCD}.

Решение.

1. $\angle ABC = 180° - \angle DAB = 180° - 150° = 30°$ (так как $\angle ABC$ и $\angle DAB$ — внутренние односторонние углы при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AB).

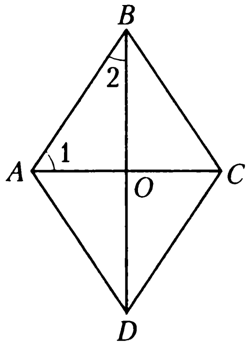
2. $\triangle ABH$ — прямоугольный (так как AH — высота),
$AH = \frac{1}{2}AB$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°),
значит, $AB = 2AH = 2 \cdot 3{,}5 = 7$ (см).

3. $P_{ABCD} = 4AB = 4 \cdot 7 = 28$ (см).

Ответ: 28 см.

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

Задача 2



Дано: $ABCD$ — ромб;
$\angle B = 45°$.

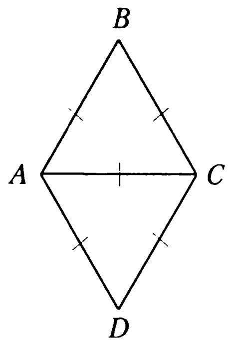
Найти: $\angle 1$; $\angle 2$.

Решение.

1. $ABCD$ — ромб, значит, BD — биссектриса $\angle ABC$ (по свойству диагоналей ромба), следовательно, $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}\cdot 45° = 22°30'$.
2. $\triangle AOB$ — прямоугольный, так как $AC \perp BD$ (по свойству диагоналей ромба), значит, $\angle 1 + \angle 2 = 90°$; $\angle 1 = 90° - 22°30' = 67°30'$.

Ответ: $22°30'$; $67°30'$.

Задача 3



Дано: $ABCD$ — ромб;
AC — диагональ;
$AC = AB$.

Найти: $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$; $\angle D$.

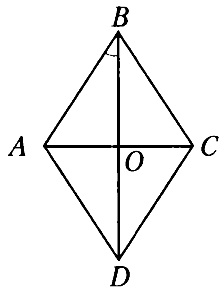
Решение.

1. $\left.\begin{array}{l} AB = BC \text{ (так как } ABCD \text{ — ромб),} \\ AB = AC \text{ (по условию),} \end{array}\right\}$ следовательно, $\triangle ABC$ — равносторонний,

   значит, $\angle CAB = \angle ABC = \angle BCA = 60°$.
2. По свойству ромба AC является биссектрисой $\angle A$ и $\angle C$, значит, $\angle A = 2\angle CAB = 2 \cdot 60° = 120°$.
3. $\angle A = \angle C = 120°$ (по свойству ромба);
   $\angle B = \angle D = 60°$ (по свойству ромба).

Ответ: 120°; 60°; 120°; 60°.

Задача 4



Дано: $ABCD$ – ромб;
AC, BD – диагонали;
$\angle ABD : \angle BAC = 4 : 5$.

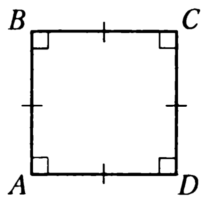
Найти: $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$; $\angle D$.

Решение.

1. $AC \perp BD$ (так как $ABCD$ – ромб).
2. Пусть x – одна часть, $\angle ABD : \angle BAC = 4 : 5$, тогда $\angle ABD = 4x$, $\angle BAC = 5x$.
3. $\triangle ABO$ – прямоугольный ($\angle AOB = 90°$), так как $AC \perp BD$,
   значит, $\left.\begin{array}{l}\angle BAO + \angle ABO = 90°,\\ \angle ABO = 4x,\\ \angle BAO = 5x.\end{array}\right\}$ Составим уравнение:
   $4x + 5x = 90°;$
   $9x = 90°;$
   $x = 10°.$
   $\angle ABD = 4x = 4 \cdot 10°$; $\angle ABD = 40°$.
   $\angle BAC = 5x = 5 \cdot 10°$; $\angle BAC = 50°$.
4. AC и BD являются биссектрисами углов ромба $ABCD$ (по свойству ромба),
   $\angle A = \angle C = 2\angle BAC = 2 \cdot 50°$; $\angle A = \angle C = 100°$;
   $\angle B = \angle D = 2\angle ABD = 2 \cdot 40°$; $\angle B = \angle D = 80°$.

Ответ: $100°$; $80°$; $100°$; $80°$.

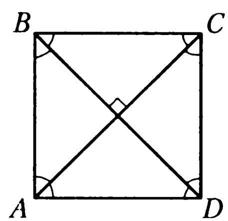
Квадрат



Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется **квадратом**.

или

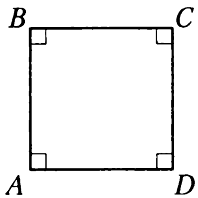
Ромб, у которого все углы прямые, называется **квадратом**.

Свойства		Признак
1. Если $ABCD$ — квадрат, AC и BD — диагонали, то $\boldsymbol{AC \perp BD}$; $\boldsymbol{AC}$ **— биссектриса** $\boldsymbol{\angle A}$ **и** $\boldsymbol{\angle C}$; $\boldsymbol{BD}$ **— биссектриса** $\boldsymbol{\angle B}$ **и** $\boldsymbol{\angle D}$. Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны и делят углы квадрата пополам.		Если $ABCD$ — прямоугольник и $AC \perp BD$, **то** $\boldsymbol{ABCD}$ **— квадрат**. Если в прямоугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то этот прямоугольник есть квадрат.

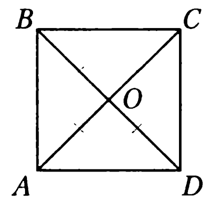
Свойства

2. Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

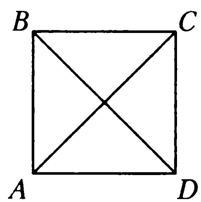
2.1. Если $ABCD$ — квадрат,
то $\boldsymbol{AB \parallel DC}$ **и** $\boldsymbol{AD \parallel BC}$.



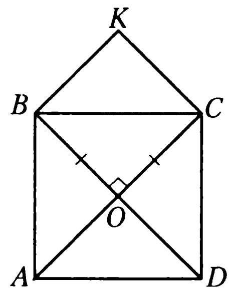
2.2. Если $ABCD$ — квадрат, AC и BD — диагонали,
то $\boldsymbol{AO = CO = BO = DO}$.



2.3. Если $ABCD$ — квадрат,
то $\boldsymbol{AC = BD}$.



Задача 1



Дано: $ABCD$ — квадрат;
AC и BD — диагонали;
$AC = 4$ см;
BC — диагональ квадрата $OBKC$.

Найти: BK.

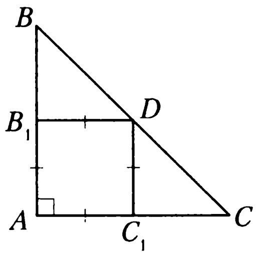
Решение.

1. Так как $AO = CO$ (по свойству диагоналей квадрата), то $AC = 2CO$, $CO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ (см).

2. $BK = CO = 2$ см (так как $OBKC$ — квадрат).

Ответ: 2 см.

Задача 2



Дано: $\triangle ABC$ — равнобедренный, прямоугольный;
AB_1DC_1 — квадрат;
$\angle A$ — общий;
$AB = 2$ см.

Найти: $P_{AB_1DC_1}$.

Решение.

1. $AB = AC = 2$ см, так как $\triangle ABC$ — равнобедренный,

   $\angle B = \angle C = \frac{1}{2} \cdot (180° - 90°) = 45°$, так как $\triangle ABC$ — равнобедренный и прямоугольный.

2. $\left.\begin{array}{l} \angle B = 45° \text{ (по доказанному в пункте 1)}, \\ \angle BB_1D = 90° \text{ (так как } AB_1DC_1 \text{ — квадрат)}, \\ \angle BDB_1 = 180° - (\angle B + \angle BB_1D) = 45°, \end{array}\right\}$ значит,

   $\triangle BB_1D$ — равнобедренный, следовательно,

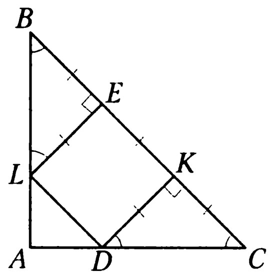
   $\left.\begin{array}{l} BB_1 = DB_1, \\ DB_1 = AB_1 \text{ (так как } AB_1DC_1 \text{ — квадрат)}, \end{array}\right\}$ тогда $AB_1 = B_1B = B_1D$.

3. $AB = 2AB_1 = 2$ см; $AB_1 = 1$ см;

   $P_{AB_1DC_1} = 4AB_1 = 4 \cdot 1$; $P_{AB_1DC_1} = 4$ см.

Ответ: 4 см.

Задача 3



Дано: $\triangle ABC$ — равнобедренный, прямоугольный;
$LEKD$ — квадрат;
$L \in AB$;
$D \in AC$;
$E \in BC$, $K \in BC$;
$BC = 3$ см.

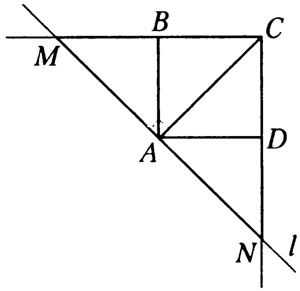
Найти: LD.

Решение.

1. Так как $\triangle ABC$ — равнобедренный, прямоугольный, то $\angle B = \angle C = \frac{1}{2} \cdot (180° - 90°) = 45°$.
2. Рассмотрим $\triangle DKC$:
$$\left.\begin{array}{l}\angle DKC = 90° \text{ (так как } LEKD \text{ — квадрат),} \\ \angle DCK = 45° \text{ (по доказанному в пункте 1),}\end{array}\right\} \text{ следовательно, } \angle CDK = 45°,$$
$$\left.\begin{array}{l}\text{значит, } \triangle DKC \text{ — равнобедренный, тогда } DK = CK. \\ \text{Аналогично } \triangle BLE \text{ — равнобедренный и } BE = LE, \\ LE = KD = EK \text{ (как стороны квадрата),}\end{array}\right\} \text{ значит, } BE = EK = KC.$$
3. Пусть $BE = x$. Тогда $EK = KC = x$.
$BC = BE + EK + KC = 3x = 3$; $x = 1$ см. Откуда $LD = 1$ см.

Ответ: 1 см.

Задача 4



Дано: $ABCD$ — квадрат;
$AC = 18{,}4$ см;
$A \in l$, $l \perp AC$;
$l \cap BC = M$; $l \cap CD = N$.

Найти: MN.

Решение.

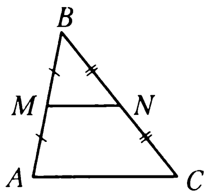
1. AC — диагональ квадрата, следовательно, AC — биссектриса $\angle C$ (по свойству квадрата), значит, $\angle BCA = \angle DCA = 45°$.

2. $\triangle MAC$ — прямоугольный (так как $l \perp AC$), $\angle MAC = 90°$, $\angle ACM = 45°$, значит, $\angle CMA = 45°$, следовательно, $\triangle MAC$ — равнобедренный и $AM = AC = 18{,}4$ см.
   Аналогично $\triangle NAC$ — прямоугольный, равнобедренный, $AN = AC = 18{,}4$ см.

3. $MN = MA + NA = 18{,}4 + 18{,}4$; $MN = 36{,}8$ см.

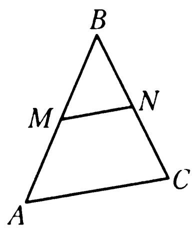
Ответ: 36,8 см.

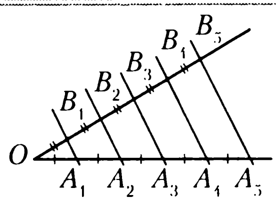
Средняя линия треугольника



Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

MN — средняя линия $\triangle ABC$ $\Leftrightarrow$ M — середина AB, N — середина BC

Свойство		Признак
Если MN — средняя линия $\triangle ABC$, то $\boldsymbol{MN \parallel AC}$ **и** $\boldsymbol{MN = \frac{1}{2}AC}$. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.		Если M — середина AB и $MN \parallel AC$, **то** $\boldsymbol{MN}$ **— средняя линия** $\boldsymbol{\triangle ABC}$. Если отрезок параллелен стороне треугольника, а его концы лежат на сторонах треугольника так, что один из них есть середина стороны, то отрезок является средней линией треугольника.



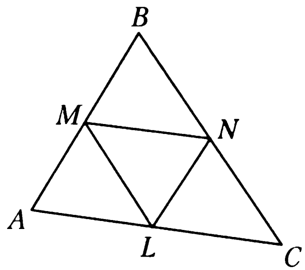
Теорема Фалеса

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне.

Если $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4 \parallel A_5B_5$ и $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$, то $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$.

Задачи по теме «Средняя линия треугольника»

Задача 1



Дано: $\triangle ABC$;
$AB = 8$ см;
$BC = 10$ см;
$AC = 12$ см;
M — середина AB;
N — середина BC;
L — середина AC.

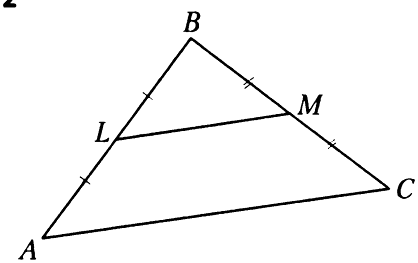
Найти: MN; NL; ML.

Решение.

1. MN — средняя линия $\triangle ABC$ (так как M — середина AB и N — середина BC), следовательно, $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 12$; $MN = 6$ см.
2. NL — средняя линия $\triangle ABC$ (так как N — середина BC и L — середина AC), следовательно, $NL = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 8$; $NL = 4$ см.
3. ML — средняя линия $\triangle ABC$ (так как M — середина AB и L — середина AC), следовательно, $ML = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 10$; $ML = 5$ см.

Ответ: 6 см; 4 см; 5 см.

Задача 2



Дано: $\triangle ABC$;
LM — средняя линия $\triangle ABC$;
LM меньше AC на 3,6 см.

Найти: $LM + AC$.

Решение.

1. Пусть $LM = x$, тогда $AC = 3{,}6 + x$ (так как по условию LM меньше AC на 3,6 см).

2. $LM = \frac{1}{2}AC$ (так как LM — средняя линия $\triangle ABC$).

   Составим уравнение: $x = \frac{1}{2}(3{,}6 + x)$;

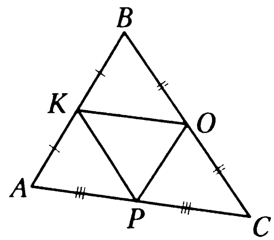
   $$2x = 3{,}6 + x;$$
   $$x = 3{,}6.$$

   $LM = 3{,}6$ см, значит, $AC = 2LM = 2 \cdot 3{,}6$; $AC = 7{,}2$ см.

3. $LM + AC = 3{,}6 + 7{,}2$; $LM + AC = 10{,}8$ см.

Ответ: 10,8 см.

Задача 3



Дано: $\triangle ABC$;
K – середина AB;
O – середина BC;
P – середина AC;
$P_{ABC} = 52$ см.

Найти: P_{KOP}.

Решение.

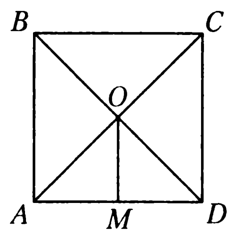
1. $\left.\begin{array}{l} KO \text{ – средняя линия } \triangle ABC, \\ OP \text{ – средняя линия } \triangle ABC, \\ PK \text{ – средняя линия } \triangle ABC, \end{array}\right\}$ так как $\begin{array}{l} K \text{ – середина } AB, \\ O \text{ – середина } BC, \\ P \text{ – середина } AC, \end{array}$

   следовательно, $KO = \frac{1}{2}AC$; $OP = \frac{1}{2}AB$; $PK = \frac{1}{2}BC$.

2. $P_{KOP} = KO + OP + PK = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AC + AB + BC) = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 52 = 26$ (см).

Ответ: 26 см.

Задача 4



Дано: $ABCD$ — квадрат;
$AC \cap BD = O$;
$OM \parallel AB$;
$S_{ABCD} = 25$ см^2.

Найти: OM.

Решение.

1. $AC \cap BD = O$ (по условию);
   $BO = OD$ (по свойству квадрата), O — середина BD.

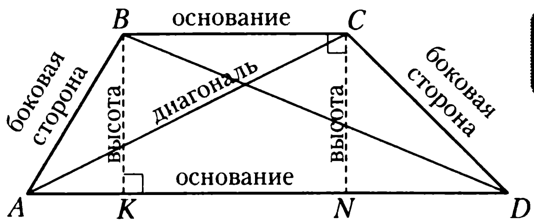
2. $S_{ABCD} = AB^2$ (так как $ABCD$ — квадрат), следовательно,
   $AB^2 = 25$;
   $AB = 5$.

3. Так как O — середина BD и $OM \parallel AB$ (по условию), следовательно, OM — средняя линия $\triangle ABD$ (по признаку средней линии треугольника).

   $OM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 5$ (по свойству средней линии треугольника); $OM = 2{,}5$ см.

Ответ: 2,5 см.

Трапеция

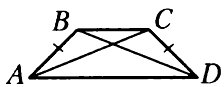


Четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны, называется **трапецией**.

$ABCD$ — трапеция $\Leftrightarrow$ $BC \parallel AD, AB \nparallel CD$

Свойства:

Равнобокая (равнобедренная) трапеция



$AB = CD$

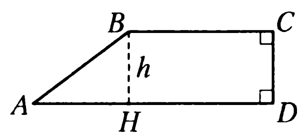
$\angle A = \angle D$ и $\angle B = \angle C$.

У равнобокой трапеции углы при основании равны.

$AC = BD$.

У равнобокой трапеции диагонали равны.

Прямоугольная трапеция

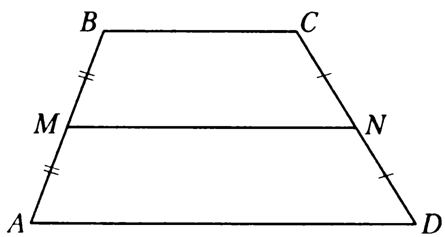


$CD \perp AD$

$h = CD$.

Высота прямоугольной трапеции равна меньшей боковой стороне.

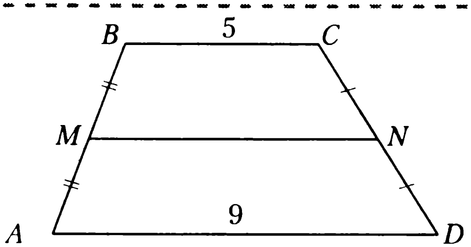
Средняя линия трапеции



Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется **средней линией трапеции**.

MN — средняя линия.

<u>Свойство:</u>



$$MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{5+9}{2} = 7$$

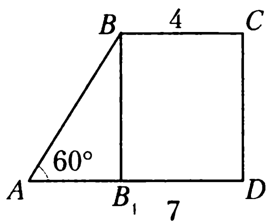
Если $ABCD$ — трапеция и MN — средняя линия,

то $MN \parallel AD$ и $MN \parallel BC$, $\boxed{MN = \dfrac{AD + BC}{2}}$.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Задачи по теме «Трапеция. Средняя линия трапеции»

Задача 1



Дано: $ABCD$ — прямоугольная трапеция;
$\angle D = 90°$, $AD = 7$ см;
$BC = 4$ см, $\angle BAD = 60°$.

Найти: AB.

Решение.

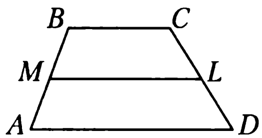
1. Дополнительное построение: проведем $BB_1 \perp AD$.
2. Рассмотрим $BCDB_1$:
   $\left.\begin{array}{l} BB_1 \perp AD \text{ (по построению)}, \\ CD \perp AD \text{ (}ABCD\text{ — прямоугольная трапеция)}, \end{array}\right\}$ значит, $BB_1 \parallel CD$, $BC \parallel B_1D$ (как прямые, содержащие основания трапеции).

   Следовательно, $BCDB_1$ — параллелограмм (по определению).
3. $AB_1 = AD - DB_1$;
   $AB_1 = 7 - 4 = 3$ (см).
4. $\triangle ABB_1$ — прямоугольный ($\angle BB_1A = 90°$),
   $\angle A = 60°$ (по условию), следовательно, $\angle ABB_1 = 30°$;
   $AB_1 = \frac{1}{2} AB$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°);
   $AB = 2AB_1 = 2 \cdot 3$, $AB = 6$ см.

Ответ: 6 см.

Четырехугольник, в котором противолежащие стороны попарно параллельны, называется **параллелограммом**.

Задача 2



Дано: $ABCD$ — трапеция;
ML — средняя линия;
$ML = 5$ см;
$BC : AD = 2 : 3$.

Найти: BC; AD.

Решение.

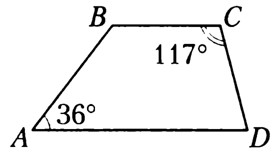
1. Пусть x — одна часть, следовательно, так как $BC : AD = 2 : 3$, то $BC = 2x$, $AD = 3x$.

2. По свойству средней линии трапеции:
$ML = \frac{BC + AD}{2}$, $ML = 5$ см (по условию).
Составим уравнение:
$$5 = \frac{2x + 3x}{2};$$
$$10 = 5x;$$
$$x = 2.$$

3. $BC = 2x = 2 \cdot 2$; $BC = 4$ см;
$AD = 3x = 3 \cdot 2$; $AD = 6$ см.

Ответ: 4 см; 6 см.

Задача 3



Дано: $ABCD$ — трапеция;
$\angle A = 36°$, $\angle C = 117°$.

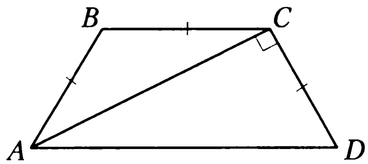
Найти: $\angle B$; $\angle D$.

Решение.

$AD \parallel BC$ (так как $ABCD$ — трапеция), значит,
$\angle A + \angle B = 180°$ (как сумма внутренних односторонних углов при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AB),
$36° + \angle B = 180°$, $\angle B = 144°$.
$\angle C + \angle D = 180°$ (как сумма внутренних односторонних углов при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей CD);
$117° + \angle D = 180°$; $\angle D = 63°$.

Ответ: 144°; 63°.

Задача 4



Дано: $ABCD$ — равнобокая трапеция;
$BC = AB = CD$;
$AC \perp CD$.

Найти: $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$; $\angle D$.

Решение.

1. $AB = BC$ (по условию), значит, $\triangle ABC$ — равнобедренный, следовательно,
   $\angle BAC = \angle BCA$,
   $\angle CAD = \angle ACB$ (как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AC),
   значит, $\angle BAC = \angle BCA = \angle CAD$ и AC — биссектриса $\angle BAD$.

2. Пусть $\angle CAD = x$, тогда $\angle BAD = \angle D = 2x$ (по свойству углов в равнобокой трапеции).

3. В $\triangle ACD$:
   $\angle ACD = 90°$ (по условию),
   $\angle CAD = x$,
   $\angle D = 2x$,
   $\angle ACD + \angle CAD + \angle D = 180°$.

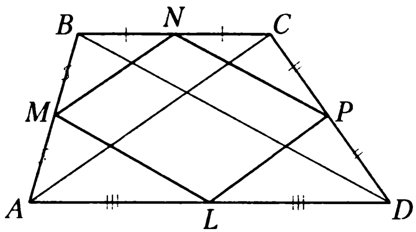
   Составим уравнение:
   $90° + x + 2x = 180°$;
   $3x = 90°$;
   $x = 30°$.

4. $\angle A = \angle D = 2x = 2 \cdot 30° = 60°$,
   $\angle BCA = x = 30°$, $\angle C = \angle B = \angle ACD + \angle BCA = 90° + 30° = 120°$.

Ответ: 60°; 120°; 60°; 120°.

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то внутренние накрест лежащие углы равны.

Задача 5



Дано: $ABCD$ — трапеция;
$AC + BD = 10$ см;
N — середина BC;
P — середина CD;
L — середина AD;
M — середина AB.

Найти: P_{MNPL}.

Решение.

1. $P_{MNPL} = MN + NP + PL + LM$.
2. В $\triangle ABC$: $AM = MB$, $BN = NC$, значит, MN — средняя линия $\triangle ABC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$;
3. В $\triangle ADC$: $AL = LD$, $CP = PD$, значит, LP — средняя линия $\triangle ADC$ и $LP = \frac{1}{2}AC$;
4. В $\triangle ABD$: $AM = MB$, $AL = LD$, значит, ML — средняя линия $\triangle ABD$ и $ML = \frac{1}{2}BD$;
5. В $\triangle BCD$: $BN = NC$, $CP = PD$, значит, NP — средняя линия $\triangle BCD$ и $NP = \frac{1}{2}BD$,

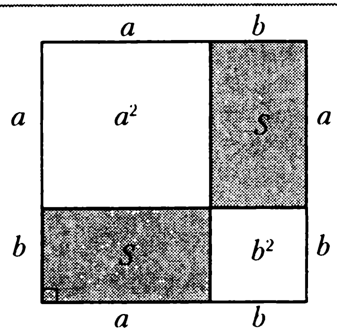
следовательно,

$P_{MNPL} = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}BD = AC + BD$; $P_{MNPL} = 10$ см.

Ответ: 10 см.

Четырехугольник, вершины которого являются серединами сторон произвольного выпуклого четырехугольника, является **параллелограммом**.

Понятие площади. Площадь прямоугольника

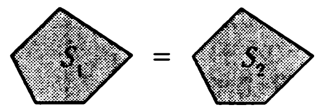


$$S = (a+b)^2 = S + S + a^2 + b^2;$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2S + a^2 + b^2;$$
$$2ab = 2S$$

$$\boxed{S = ab}$$

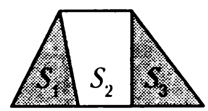
Геометрические фигуры называются **равновеликими**, если они имеют равные площади.

Свойства площадей

1. 

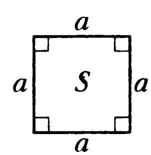
$$\boxed{S_1 = S_2}$$

Равные многоугольники имеют равные площади.

2. 

$$\boxed{S = S_1 + S_2 + S_3}$$

Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

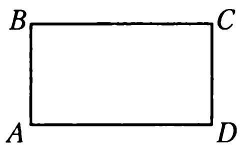
3. 

$$\boxed{S = a^2}$$

Площадь квадрата равна квадрату его сторон.

Задачи по теме «Площадь прямоугольника»

Задача 1



Дано: $ABCD$ — прямоугольник;
$P_{ABCD} = 40$ м;
$AB : BC = 2 : 3$.

Найти: S_{ABCD}.

Решение.

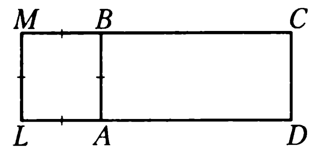
1. Пусть x — одна часть, тогда $AB = 2x$, $BC = 3x$.

2. $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + BC)$;
$40 = 2 \cdot (2x + 3x)$;
$5x = 20$;
$x = 4$;
$AB = 2x = 2 \cdot 4$; $AB = 8$ м;
$BC = 3x = 3 \cdot 4$; $BC = 12$ м.

3. $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 8 \cdot 12$; $S_{ABCD} = 96$ м^2.

Ответ: 96 м^2.

Задача 2



Дано: $ABCD$ — прямоугольник;
$LMBA$ — квадрат;
$P_{ABCD} = 32$ см;
$P_{LMBA} = 24$ см.

Найти: S_{ABCD}.

Решение.

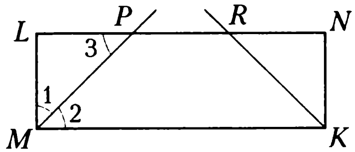
1. $P_{LMBA} = 4 \cdot AB$ (так как $LMBA$ — квадрат),
значит, $AB = \frac{P_{LMBA}}{4} = \frac{24}{4}$; $AB = 6$ см.

2. $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + BC)$;
$32 = 2 \cdot (6 + BC)$;
$16 = 6 + BC$;
$BC = 10$ см.

3. $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 6 \cdot 10$; $S_{ABCD} = 60$ см^2.

Ответ: 60 см^2.

Задача 3



Дано: $MLNK$ — прямоугольник;
MP, KR — биссектрисы;
$LN = 12$ см;
$LP = PR = RN$.

Найти: S_{MLNK}.

Решение.

1. $LP = PR = RN$ (по условию);
$LP = LN : 3 = 12 : 3$; $LP = 4$ см.

2. $\angle 1 = \angle 2$ (так как MP — биссектриса),
$\angle 2 = \angle 3$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых MK и LN и секущей MP),
следовательно, $\angle 1 = \angle 3$, значит,
$\triangle MLP$ — равнобедренный, $LP = LM = 4$ см.

3. $S_{MLNK} = ML \cdot LN = 4 \cdot 12$; $S_{MLNK} = 48$ см^2.

Ответ: 48 см^2.

Задача 4

Сколько необходимо кафельных плиток квадратной формы со стороной 15 см для облицовки пола, имеющего форму прямоугольника со сторонами 3 м и 2,7 м?

Решение.

1-й вариант

1. Найдем площадь одной плитки: $15 \cdot 15 = 225$ (см^2).
2. Найдем площадь пола: $3 \cdot 2{,}7 = 8{,}1$ (м^2); 8,1 м^2 = 81 000 см^2.
3. 81 000 : 225 = 360, т. е. 360 плиток потребуется на облицовку.

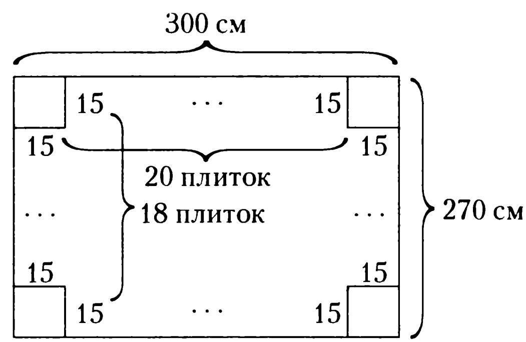
2-й вариант

3 м = 300 см;

2,7 м = 270 см.

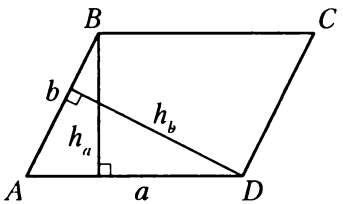
Найдем, сколько плиток целое количество раз укладывается на каждую из сторон пола:

1. 300 : 15 = 20 (пл.);
2. 270 : 15 = 18 (пл.);
3. $20 \cdot 18 = 360$ (пл.) — потребуется на облицовку.



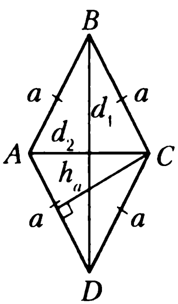
Ответ: 360 плиток.

Площадь параллелограмма и треугольника



$$S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

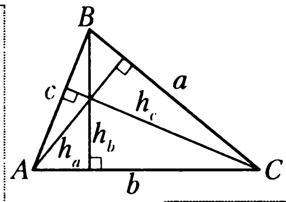
Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

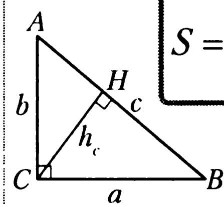


$$S = a \cdot h_a$$

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2},$$

где d_1 и d_2 — диагонали ромба.





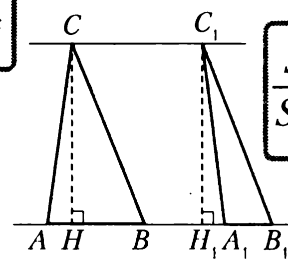
$$S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b$$

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

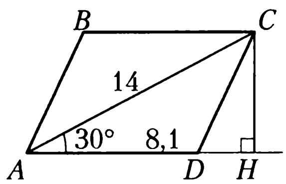
$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$



$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1}$$

Если высота одного треугольника равна высоте другого треугольника, то их площади относятся как длины сторон, к которым проведены высоты.

Задача 1



Дано: $ABCD$ — параллелограмм;
$AD = 8{,}1$ см;
$AC = 14$ см;
$\angle CAD = 30°$.

Найти: S_{ABCD}.

Решение.

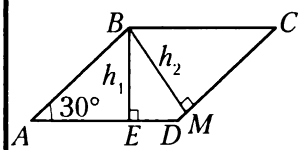
1. Дополнительное построение:
   CH — высота, $CH \perp AD$.

2. В $\triangle ACH$: $\angle CHA = 90°$, следовательно,
   $CH = \frac{1}{2} AC$
   (по свойству катета, лежащего против угла в 30°);
   $CH = 7$ см.

3. $S_{ABCD} = CH \cdot AD = 7 \cdot 8{,}1$; $S_{ABCD} = 56{,}7$ см^2.

Ответ: 56,7 см^2.

Задача 2



Дано: $ABCD$ — параллелограмм;
$\angle A = 30°$;
$h_1 = 2$ см;
$h_2 = 3$ см.

Найти: S_{ABCD}.

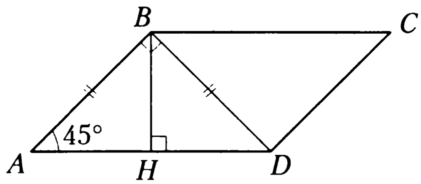
Решение.

1. В $\triangle ABE$: $\angle BEA = 90°$, $\angle A = 30°$, следовательно,
   $BE = \frac{1}{2} AB$
   (по свойству катета, лежащего против угла в 30°);
   $AB = 2BE = 2 \cdot 2 = 4$ (см).

2. $AB = DC = 4$ см
   (по свойству параллелограмма).
   $S_{ABCD} = CD \cdot BM = 4 \cdot 3$; $S_{ABCD} = 12$ см^2.

Ответ: 12 см^2.

Задача 3



Дано: $ABCD$ — параллелограмм;
$\angle A = 45°$;
$AD = 15{,}2$ см;
$AB = DB$.

Найти: S_{ABCD}.

Решение.

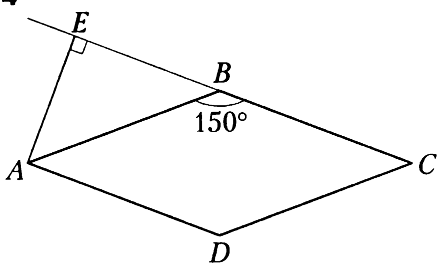
1. $AB = DB$ (по условию), следовательно, $\triangle ABD$ — равнобедренный. Так как $\angle A = 45°$, то $\angle D = 45°$, значит, $\angle B = 90°$.
   BH — высота, медиана, биссектриса, следовательно,
   $$\left.\begin{array}{l} AH = HD = \frac{1}{2}AD = 7{,}6 \text{ см}, \\ \angle ABH = 45°, \\ \angle A = 45°, \end{array}\right\}$$ значит, $\triangle ABH$ — равнобедренный, $AH = BH = 7{,}6$ см.

2. $S_{ABCD} = BH \cdot AD = 7{,}6 \cdot 15{,}2$; $S_{ABCD} = 115{,}52$ см^2.

Ответ: $115{,}52$ см^2.

В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является **биссектрисой** и **высотой.**

Задача 4



Дано: $ABCD$ — ромб;
$\angle B = 150°$;
$AB = 6$ см.

Найти: S_{ABCD}.

Решение.

1. Дополнительное построение: AE — высота, $AE \perp BC$.

2. В $\triangle AEB$: $\angle AEB = 90°$,
$\angle EBA = 180° - \angle ABC = 180° - 150° = 30°$ (так как $\angle EBA$ и $\angle CBA$ — смежные углы), следовательно,
$AE = \frac{1}{2}AB = 3$ см (как катет, лежащий против угла в 30°).

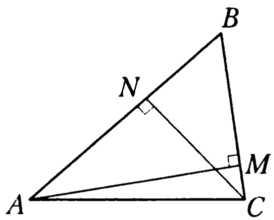
3. $S_{ABCD} = AE \cdot BC = 3 \cdot 6$; $S_{ABCD} = 18$ см^2.

Ответ: 18 см^2.

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие являются противоположными лучами.

Сумма смежных углов равна 180°.

Задача 5



Дано: $\triangle ABC$;
$AB = 7{,}5$ см;
$BC = 3{,}2$ см;
$CN \perp AB$;
$CN = 2{,}4$ см;
$AM \perp BC$.

Найти: AM.

Решение.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CN$, также $S_{ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC$;

тогда $\frac{1}{2} AB \cdot CN = \frac{1}{2} AM \cdot BC$;

$$AB \cdot CN = AM \cdot BC;$$

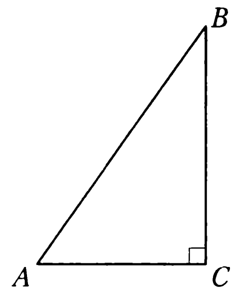
$$AM = \frac{AB \cdot CN}{BC};$$

$$AM = \frac{7{,}5 \cdot 2{,}4}{3{,}2};$$

$$AM = 5{,}625 \text{ см}.$$

Ответ: 5,625 см.

Задача 6



Дано: $\triangle ABC$ — прямоугольный;
$\angle C = 90°$;
$AC : BC = 7 : 12$;
$S_{ABC} = 168$ см^2.

Найти: AC; BC.

Решение.

1. Пусть x — одна часть, тогда $AC = 7x$, $BC = 12x$.

2. $\left.\begin{array}{l} S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC, \\ S_{ABC} = 168 \text{ см}^2, \end{array}\right\}$ следовательно,

$$168 = \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot 12x;$$

$$168 = 42x^2;$$

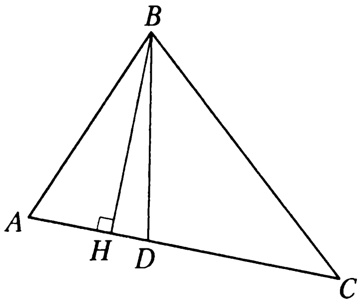
$$x^2 = 4;$$

$$x = 2.$$

$AC = 7x = 7 \cdot 2$; $AC = 14$ см;
$BC = 12x = 12 \cdot 2$; $BC = 24$ см.

Ответ: 14 см; 24 см.

Задача 7



Дано: $\triangle ABC$;
$D \in AC$;
$AD = 5$ м;
$DC = 10$ м;
$S_{ABC} = 15$ м^2.

Найти: S_{BDC}.

Решение.

1. Дополнительное построение: $BH \perp AC$, BH — высота.

2. $AC = AD + DC = 5 + 10$; $AC = 15$ м.

3. $\left.\begin{array}{l} BH \text{ — высота } \triangle ABC, \\ BH \text{ — высота } \triangle BDC, \end{array}\right\}$ следовательно,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BDC}} = \frac{AC}{DC};$$

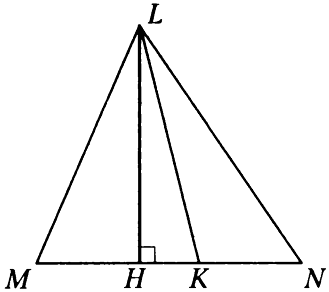
$$\frac{15}{S_{BDC}} = \frac{15}{10};$$

$$S_{BDC} = \frac{15 \cdot 10}{15}; \; S_{BDC} = 10 \text{ м}^2.$$

Ответ: 10 м^2.

Высота треугольника — перпендикуляр, проведенный из вершины к прямой, которая содержит в себе противоположную сторону треугольника.

Задача 8



Дано: $\triangle MLN$;

$\frac{MK}{KN} = \frac{3}{2}$;

$S_{MLN} = 30$ см^2.

Найти: S_{MLK}; S_{LNK}.

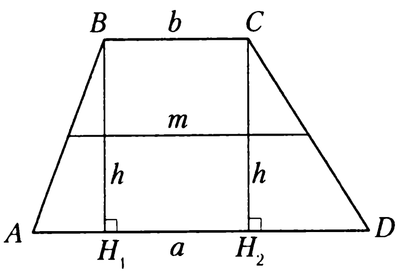
Решение.

1. Дополнительное построение: LH — высота.
2. Так как $\frac{MK}{KN} = \frac{3}{2}$ (по условию), то $\frac{MK}{MN} = \frac{3}{5}$.
3. $$\left.\begin{aligned} &S_{MLN} = \frac{1}{2} MN \cdot LH,\ LH = \frac{2S_{MLN}}{MN}, \\ &S_{MLK} = \frac{1}{2} MK \cdot LH. \end{aligned}\right\} S_{MLK} = \frac{1}{2} MK \cdot \frac{2S_{MLN}}{MN} = \frac{S_{MLN} \cdot MK}{MN} = \frac{30 \cdot 3}{5} = 18\ (\text{см}^2).$$
4. $S_{LKN} = S_{MLN} - S_{MLK} = 30 - 18 = 12$ (см^2).

Ответ: 18 см^2; 12 см^2.

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Площадь трапеции



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

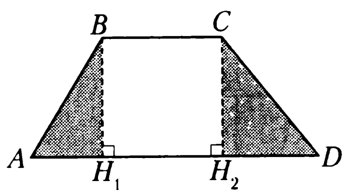
$$S = m \cdot h$$

Средняя линия трапеции

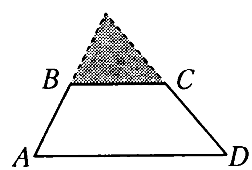
$$m = \frac{a+b}{2}$$

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

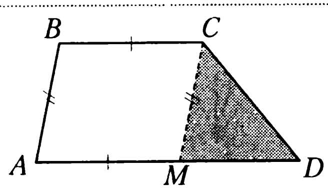
Типичные дополнительные построения для трапеции (изображены штриховыми линиями)



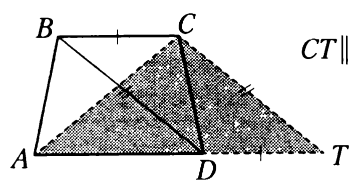
$BH_1 \perp AD$
$CH_2 \perp AD$



AB и CD продлить до пересечения

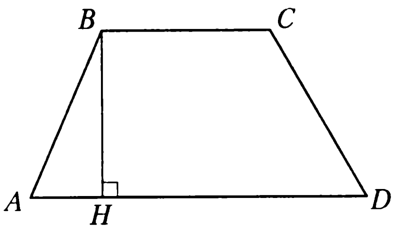


$CM \parallel BA$



$CT \parallel BD$

Задача 1



Дано: $ABCD$ — трапеция;
$S_{ABCD} = 45$ см²;
$\frac{BC}{AD} = \frac{2}{3}$;
$BC = 3$ см.

Найти: BH.

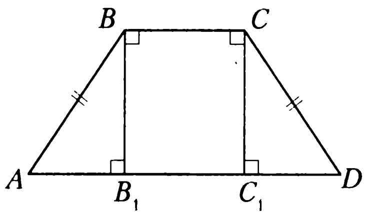
Решение.

1. $\left.\begin{array}{l}\frac{BC}{AD} = \frac{2}{3} \text{ (по условию)},\\ BC = 3 \text{ см (по условию)},\end{array}\right\}$ следовательно, $AD = \frac{3BC}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2}$; $AD = 4{,}5$ см.

2. $\left.\begin{array}{l}S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH,\\ S_{ABCD} = 45 \text{ см}^2 \text{ (по условию)},\end{array}\right\}$ следовательно, $45 = \frac{3 + 4{,}5}{2} \cdot BH$; $BH = 12$ см.

Ответ: 12 см.

Задача 2



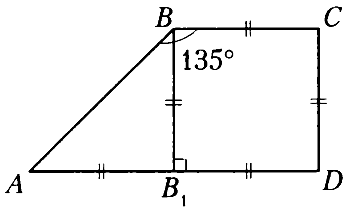
Дано: $ABCD$ — равнобедренная трапеция;
$AB = CD$;
$\angle ABC = 135°$;
BB_1, CC_1 — высоты;
$BB_1 = 1{,}4$ см;
$B_1D = 3{,}4$ см.
Найти: S_{ABCD}.

Решение.

1. В $\triangle ABB_1$: $\angle BB_1A = 90°$ (так как BB_1 — высота), $\angle ABB_1 = 135° - 90° = 45°$ (так как BB_1 — высота), $\angle A = 90° - 45° = 45°$ (по свойству суммы острых углов в прямоугольном треугольнике), значит, $\triangle ABB_1$ — прямоугольный, равнобедренный, $AB_1 = BB_1 = 1{,}4$ см.
2. $\triangle ABB_1 = \triangle DCC_1$ (по гипотенузе и острому углу), так как $AB = CD$ (по условию), $\angle BAB_1 = \angle CDC_1$ (так как $ABCD$ — равнобедренная трапеция), значит, $AB_1 = DC_1 = 1{,}4$ см.
3. $B_1C_1 = B_1D - C_1D = 3{,}4 - 1{,}4 = 2$ (см); $AD = AB_1 + B_1D = 1{,}4 + 3{,}4 = 4{,}8$ (см).
4. $BB_1 \perp AD$ (так как BB_1 — высота), $CC_1 \perp AD$ (так как CC_1 — высота), следовательно, $BB_1 \parallel CC_1$, $BC \parallel B_1C_1$ (как прямые, содержащие основания трапеции), значит, BCC_1B_1 — параллелограмм, следовательно, $BC = B_1C_1 = 2$ см.
5. $S_{ABCD} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot BB_1 = \dfrac{2 + 4{,}8}{2} \cdot 1{,}4$; $S_{ABCD} = 4{,}76\ \text{см}^2$.

Ответ: $4{,}76\ \text{см}^2$.

Задача 3



Дано: $ABCD$ — прямоугольная трапеция;
$\angle D = 90°$;
$BC = CD = 6$ см;
$\angle ABC = 135°$.

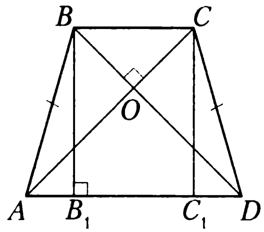
Найти: S_{ABCD}.

Решение.

1. Дополнительное построение: BB_1 — высота.
2. $BB_1 \perp AD$ (так как BB_1 — высота), $CD \perp AD$ (так как $ABCD$ — прямоугольная трапеция), следовательно, $BB_1 \parallel CD$, $BC \parallel B_1D$ (как прямые, содержащие основания трапеции), значит, $BCDB_1$ — прямоугольник, $BC = CD = BB_1 = 6$ см, значит, B_1BCD — квадрат.
3. В $\triangle ABB_1$: $\angle BB_1A = 90°$ (по построению), $\angle ABB_1 = \angle ABC - \angle B_1BC = 135° - 90° = 45°$, значит, $\angle A = 45°$ (по свойству суммы острых углов в прямоугольном треугольнике),
   тогда $\triangle ABB_1$ — равнобедренный, прямоугольный, $AB_1 = BB_1$, $BB_1 = BC = 6$ см, $AB_1 = 6$ см.
4. $AD = AB_1 + B_1D = 6 + 6$; $AD = 12$ см.
5. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot (12 + 6) \cdot 6$; $S_{ABCD} = 54$ см^2.

Ответ: 54 см^2.

Задача 4



Дано: $ABCD$ — равнобокая трапеция;
$AB = DC$;
$BC = 16$ см;
$AD = 30$ см;
$AC \perp BD$.

Найти: S_{ABCD}.

Решение.

1. Дополнительное построение: BB_1, CC_1 — высоты, $BB_1 \perp AD$, $CC_1 \perp AD$.

2. Рассмотрим $\triangle ABB_1$ и $\triangle DCC_1$:
$\triangle ABB_1$ и $\triangle DCC_1$ — прямоугольные, так как $BB_1 \perp AD$, $CC_1 \perp AD$.
$AB = DC$, (так как $ABCD$ — равнобокая трапеция), $\angle BAB_1 = \angle CDC_1$ } значит, $\triangle ABB_1 = \triangle DCC_1$ (по гипотенузе и острому углу), следовательно, $AB_1 = DC_1$.

3. Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle DCA$:
$AB = DC$, $\angle BAD = \angle CDA$ (так как $ABCD$ — равнобокая трапеция), AD — общая сторона, } значит, $\triangle ABD = \triangle DCA$ (по двум сторонам и углу между ними), следовательно, $\angle BDA = \angle CAD$.

4. Рассмотрим $\triangle AOD$:
$\angle OAD = \angle ODA$ (по доказанному в пункте 3), $\angle AOD = 90°$ (так как $AC \perp BD$ по условию), } следовательно, $\triangle AOD$ — прямоугольный, равнобедренный, значит, $\angle OAD = \angle ODA = 45°$ и $AO = OD$.

5. Рассмотрим $\triangle BB_1D$:

$\angle BB_1D = 90°$ (так как $BB_1 \perp AD$),

$$\left.\begin{aligned} &\angle BDB_1 = 45°, \\ &\angle DBB_1 = 90° - \angle BDB_1 = 45°, \end{aligned}\right\} \text{ следовательно, } \triangle BB_1D \text{ — равнобедренный, значит, } BB_1 = B_1D.$$

$$\left.\begin{aligned} &B_1D = AD - AB_1, \\ &AB_1 = \frac{AD - BC}{2}, \end{aligned}\right\} B_1D = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{2AD - AD + BC}{2} = \frac{AD + BC}{2} = BB_1.$$

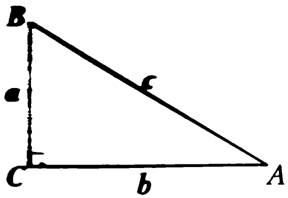
6. Рассмотрим $\triangle BB_1D$:

$$\left.\begin{aligned} &S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BB_1, \\ &BB_1 = \frac{AD + BC}{2} \text{ (по доказанному в пункте 5)}, \end{aligned}\right\} S_{ABCD} = \left(\frac{AD + BC}{2}\right)^2 = \left(\frac{16 + 30}{2}\right)^2; \quad S_{ABCD} = 529 \text{ см}^2.$$

Ответ: 529 см^2.

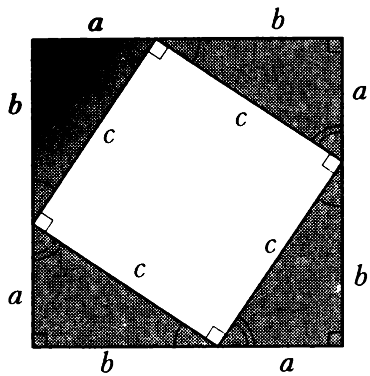
Площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты или квадрату средней линии

$$S = h^2 = m^2.$$

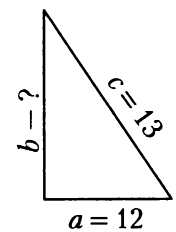


$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2.}$$

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов.



$$S_б = (a+b)^2 = 4S_\Delta + S_м =$$
$$= 4\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot b + c^2 = 2ab + c^2.$$
$$(a+b)^2 = 2ab + c^2;$$
$$a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2;$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

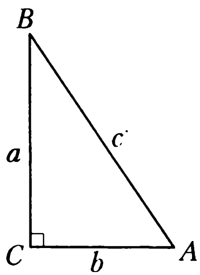


$a = 12;$
$\underline{c = 13;}$

$b - ?$

$c^2 = a^2 + b^2;$
$13^2 = 12^2 + b^2;$
$b^2 = 13^2 - 12^2;\ b^2 = (13-12)(13+12);$
$b^2 = 25;$
$b = 5.$

Теорема, обратная теореме Пифагора



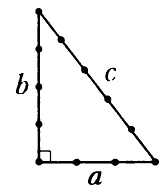
Если $c^2 = a^2 + b^2$,

то $\angle C = 90°$.

Если квадрат длины одной стороны треугольника равен сумме квадратов длин двух других сторон, то такой треугольник является прямоугольным.

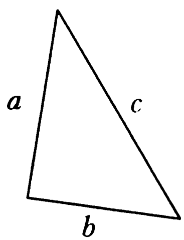
Египетский треугольник

$a : b : c = 3 : 4 : 5.$



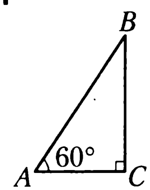
Стороны пропорциональны числам 3; 4; 5.

Является ли треугольник прямоугольным?



1) $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$. $6^2 + 8^2 = 10^2$; $100 = 10^2$, следовательно, треугольник со сторонами $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$ — прямоугольный.
2) $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$. $5^2 + 6^2 = 7^2$; $61 \neq 7^2$, следовательно, треугольник со сторонами $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$ — не прямоугольный.
3) $a = 1{,}0$, $b = 2{,}4$, $c = 2{,}6$. $1{,}0^2 + 2{,}4^2 = 2{,}6^2$; $6{,}76 = 2{,}6^2$, следовательно, треугольник со сторонами $a = 1{,}0$, $b = 2{,}4$, $c = 2{,}6$ — прямоугольный.

Задача 1



Дано: $\triangle ABC$ — прямоугольный;
$\angle C = 90°$;
$\angle A = 60°$;
$AB = c$.

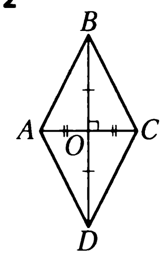
Найти: BC.

Решение.

1. В $\triangle ABC$: $\angle C = 90°$; $\angle A = 60°$, следовательно, $\angle B = 30°$, значит, $AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}c$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°).
2. По теореме Пифагора в $\triangle ABC$:
$AB^2 = BC^2 + CA^2$, откуда $BC^2 = AB^2 - CA^2$;
$BC^2 = c - \left(\frac{1}{2}c\right)^2 = c^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{3}{4}c^2$;
$BC = \sqrt{\frac{3c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Задача 2



Дано: $ABCD$ — ромб;
$AC = 10$ см;
$BD = 24$ см.

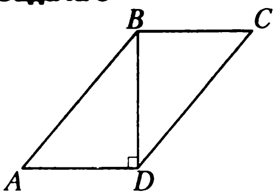
Найти: AB.

Решение.

1. $\triangle ABO$ — прямоугольный (так как диагонали ромба перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам),
$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5$ (см);
$BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\cdot 24 = 12$ (см).
2. По теореме Пифагора в $\triangle ABO$:
$AB^2 = AO^2 + BO^2$; $AB^2 = 5^2 + 12^2$;
$AB^2 = 169$; $AB = 13$ см.

Ответ: 13 см.

Задача 3



Дано: $ABCD$ — параллелограмм;
$BD \perp AD$;
$P_{ABCD} = 50$ см;
$AB - AD = 1$ см;
$\angle A = 45°$.

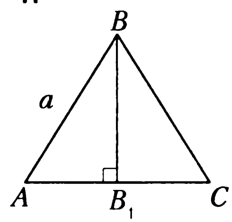
Найти: BD.

Решение.

1. Пусть $AD = x$, тогда $AB = x + 1$.
   Поскольку $P_{ABCD} = 2(AB + AD)$,
   то $50 = 2 \cdot (x + x + 1)$;
   $50 = 2 \cdot (2x + 1)$;
   $25 = 2x + 1$;
   $2x = 24$;
   $x = 12$.
   $AD = x = 12$ см; $AB = x + 1 = 13$ (см).
2. В $\triangle ABD$ ($\angle BDA = 90°$) по теореме Пифагора:
   $AB^2 = BD^2 + AD^2$, откуда $BD^2 = AB^2 - AD^2$;
   $BD^2 = 13^2 - 12^2 = (13 - 12)(13 + 12) = 25$;
   $BD = 5$ см.

Ответ: 5 см.

Задача 4



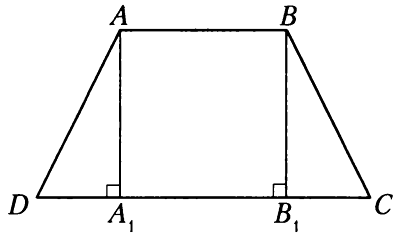
Дано: $\triangle ABC$ — равносторонний;
$AB = a$.

Доказать: $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Доказательство.

1. Так как $\triangle ABC$ — равносторонний, то BB_1 — медиана, биссектриса, высота,
   $BB_1 = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2}$; $\triangle ABB_1$ — прямоугольный.
2. В $\triangle ABB_1$ по теореме Пифагора:
   $AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$, откуда $BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2$;
   $BB_1^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$;
   $BB_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
3. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BB_1 = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Что и требовалось доказать.

Задача 5



Дано: $ABCD$ — равнобокая трапеция;
$AB \parallel DC$;
$AB = 10$ см;
$BC = AD = 13$ см;
$CD = 20$ см.

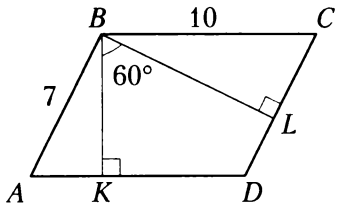
Найти: S_{ABCD}.

Решение.

1. Дополнительное построение: $AA_1 \perp DC$, $BB_1 \perp DC$; AA_1, BB_1 — высоты.
2. $\left.\begin{array}{l} BB_1 \perp DC \text{ (так как } BB_1 \text{ — высота),} \\ AA_1 \perp DC \text{ (так как } AA_1 \text{ — высота),} \end{array}\right\}$ следовательно, $BB_1 \parallel AA_1$; $AB \parallel A_1B_1$ (как прямые, содержащие основания трапеции); значит, A_1ABB_1 — прямоугольник.
3. Рассмотрим $\triangle DAA_1$ и $\triangle CBB_1$:
   $\left.\begin{array}{l} AD = BC \text{ (по условию),} \\ AA_1 = BB_1 \text{ (как высоты),} \end{array}\right\}$ следовательно, $\triangle DAA_1 = \triangle CBB_1$ (по катету и гипотенузе), значит, $DA_1 = CB_1$, $DA_1 = \dfrac{CD - A_1B_1}{2} = \dfrac{20-10}{2} = 5$ (см).
4. В $\triangle DAA_1$ по теореме Пифагора:
   $DA^2 = AA_1^2 + DA_1^2$, откуда $AA_1^2 = DA^2 - DA_1^2$;
   $AA_1^2 = 13^2 - 5^2 = 144$;
   $AA_1 = 12$ см.
5. $S_{ABCD} = \dfrac{AB + CD}{2} \cdot AA_1 = \dfrac{10+20}{2} \cdot 12$; $S_{ABCD} = 180$ см^2.

Ответ: 180 см^2.

Задача 6



Дано: $ABCD$ — параллелограмм;
$AB = 7$ см;
$BC = 10$ см;
BK, BL — высоты;
$\angle KBL = 60°$.

Найти: BK.

Решение.

1. Рассмотрим четырехугольник $KBLD$:
$\angle KDL = 360° - (\angle DKB + \angle KBL + \angle BLD) = 360° - (90° + 60° + 90°) = 120°$.

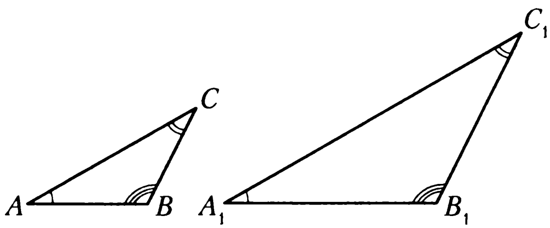
2. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$:
$\angle D = \angle B = 120°$, $\angle A = \angle C = 180° - \angle D = 60°$ (по свойству углов параллелограмма).

3. Рассмотрим $\triangle ABK$:
$\angle ABK = 90° - \angle KAB = 90° - 60° = 30°$ (по свойству острых углов прямоугольного треугольника).
$AK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3{,}5$ (см) (по свойству катета, лежащего против угла в 30°).

4. По теореме Пифагора в $\triangle ABK$:
$BK^2 = AB^2 - AK^2$,
$BK^2 = 7^2 - 3{,}5^2 = (7 - 3{,}5)(7 + 3{,}5) = 3{,}5 \cdot 10{,}5 = 3{,}5 \cdot 3{,}5 \cdot 3 = 3{,}5^2 \cdot 3$;
$BK = 3{,}5\sqrt{3}$ см.

Ответ: $3{,}5\sqrt{3}$ см.

Подобные треугольники

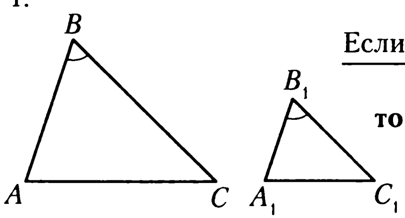


Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k.$$

1.

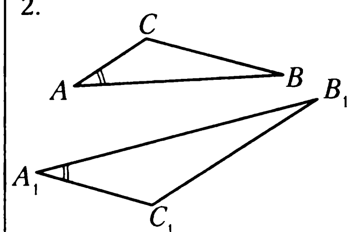


Если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$,

то $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$.

Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

2.

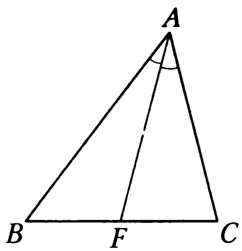


Если $\angle A = \angle A_1$,

то $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$.

Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения длин сторон, заключающих равные углы.

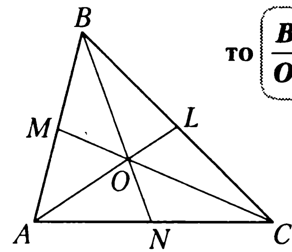
3. **Если AF — биссектриса $\triangle ABC$,**



то $\boxed{\dfrac{BF}{CF} = \dfrac{AB}{AC}}$.

Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

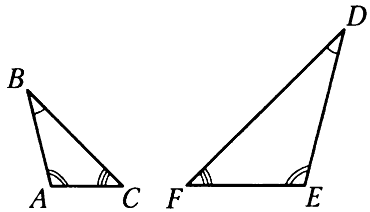
4. Если BN, AL, CM — медианы $\triangle ABC$,



то $\boxed{\dfrac{BO}{ON} = \dfrac{CO}{OM} = \dfrac{AO}{OL} = \dfrac{2}{1}}$.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Задача 1



Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$;
$\angle A = 106°$; $\angle E = 106°$;
$\angle B = 34°$; $\angle F = 40°$;
$AC = 44$ мм; $DE = 15{,}6$ см; $AB = 0{,}52$ дм;
$EF = 13{,}2$ см; $BC = 0{,}076$ м; $FD = 22{,}8$ см.

Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Доказательство.

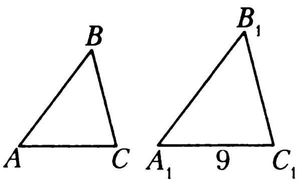
1. $\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle E = 106°, \\ \angle B = \angle D = 180° - (\angle E + \angle F) = 180° - 146° = 34°, \\ \angle C = \angle F = 180° - (106° + 34°) = 40°, \end{array}\right\}$ следовательно, все углы соответственно равны.

   $AC = 44$ мм $= 4{,}4$ см; $AB = 0{,}52$ дм $= 5{,}2$ см; $BC = 0{,}076$ м $= 7{,}6$ см.

2. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{AC}{FE} = \dfrac{4{,}4}{13{,}2} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{5{,}2}{15{,}6} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{BC}{DF} = \dfrac{7{,}6}{22{,}8} = \dfrac{1}{3}, \end{array}\right\}$ следовательно, $\dfrac{AC}{FE} = \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{DF}$.

3. Так как стороны соответственно пропорциональны с $k = \dfrac{1}{3}$, углы соответственно равны, следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Что и требовалось доказать.

Задача 2



Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$;
$S_{ABC} = 75$ см^2;
$S_{A_1B_1C_1} = 300$ см^2;
$A_1C_1 = 9$ см.

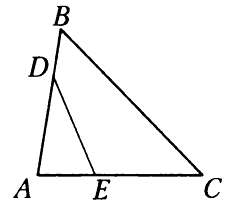
Найти: AC.

Решение.

1. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по условию),
 следовательно, $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$;
 $\dfrac{75}{300} = k^2$; $k^2 = \dfrac{1}{4}$;
 $k = \dfrac{1}{2}$.
2. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по условию),
 следовательно, $\dfrac{AC}{A_1C_1} = k$;
 $\dfrac{AC}{9} = \dfrac{1}{2}$; $AC = \dfrac{9}{2}$;
 $AC = 4{,}5$ см.

Ответ: 4,5 см.

Задача 3



Дано: $\triangle ABC$;
$D \in AB$;
$E \in AC$;
$AB = 5$ см;
$AC = 6$ см;
$AD = 3$ см;
$AE = 2$ см;
$S_{ABC} = 10$ см^2.

Найти: S_{ADE}.

Решение.

$\angle A$ — общий $\triangle ABC$ и $\triangle ADE$, значит,

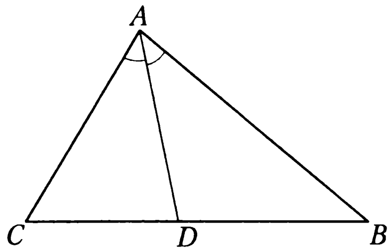
$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE};$$

$$\frac{10}{S_{ADE}} = \frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 2};$$

$$S_{ADE} = \frac{10}{5};\ S_{ADE} = 2\text{ см}^2.$$

Ответ: 2 см^2.

Задача 4



Дано: $\triangle ABC$;
AD — биссектриса;
$CD = 4{,}5$ см;
$BD = 13{,}5$ см;
$P_{ABC} = 42$ см.

Найти: AB; AC.

Решение.

1. Так как AD — биссектриса, следовательно, $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{AB}{DB}$;

   $\dfrac{AC}{4{,}5} = \dfrac{AB}{13{,}5}$, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4{,}5}{13{,}5} = \dfrac{1}{3}$;

   то есть $AC = x$, $AB = 3x$.

2. $CB = CD + DB = 4{,}5 + 13{,}5 = 18$ (см);
   $P_{ABC} = AB + BC + CA = AC + AB + 18 = 42$;
   $AC + AB = 24$.

Составим уравнение:

$x + 3x = 24$;

$4x = 24$;

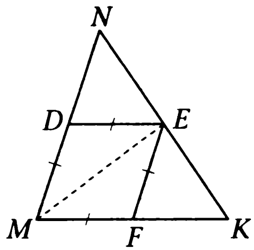
$x = 6$.

3. $AC = x$; $AC = 6$ см; $AB = 3x$; $AB = 18$ см.

Ответ: 18 см; 6 см.

Биссектрисой угла называется луч с началом в вершине этого угла и делящий его на два равных угла.

Задача 5



Дано: $\triangle MNK$;
$MDEF$ — ромб;
$D \in MN$, $E \in NK$, $F \in MK$;
$MN = 7$ см, $NK = 6$ см, $MK = 5$ см.

Найти: NE; EK.

Решение.

1. ME — диагональ ромба $MDEF$, следовательно, ME — биссектриса $\angle NMK$ (по свойству диагоналей ромба). Значит,

$$\frac{MN}{NE} = \frac{MK}{EK}.$$

Пусть $NE = x$, тогда $EK = NK - NE = 6 - x$.

Составим уравнение:

$$\frac{7}{x} = \frac{5}{6-x};$$

$$7 \cdot (6 - x) = 5x;$$

$$12x = 42;$$

$$x = 3{,}5.$$

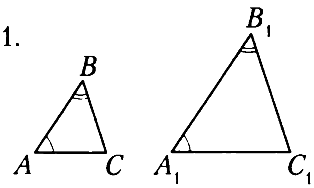
2. $NE = 3{,}5$ см; $EK = 2{,}5$ см.

Ответ: 3,5 см; 2,5 см.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам.

Признаки подобия треугольников

1.

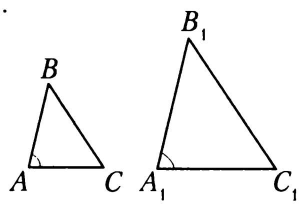


Если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,

то $\boxed{\triangle \boldsymbol{ABC} \sim \triangle \boldsymbol{A_1B_1C_1}.}$

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

2.

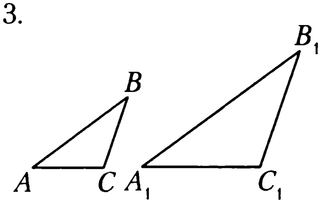


Если $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$ и $\angle A_1 = \angle A$,

то $\boxed{\triangle \boldsymbol{ABC} \sim \triangle \boldsymbol{A_1B_1C_1}.}$

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

3.

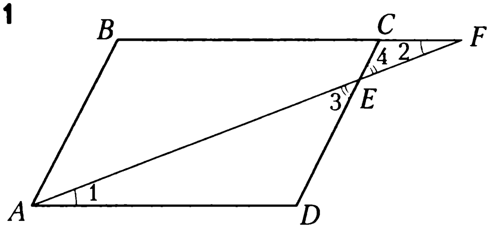


Если $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1A_1}{CA}$,

то $\boxed{\triangle \boldsymbol{ABC} \sim \triangle \boldsymbol{A_1B_1C_1}.}$

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Задача 1



Дано: $ABCD$ – параллелограмм;
$E \in CD$; $AE \cap BC = F$;
$DE = 8$ см; $EC = 4$ см;
$BC = 7$ см; $AE = 10$ см.

Найти: FE; FC.

Решение.

Рассмотрим $\triangle AED$ и $\triangle FEC$:
$\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AF),
$\angle 3 = \angle 4$ (как вертикальные углы),
значит, $\triangle AED \sim \triangle FEC$ (по равенству двух соответственных углов).

Следовательно, $\dfrac{AE}{FE} = \dfrac{AD}{FC} = \dfrac{DE}{CE}$; $AD = BC$ (по свойству параллелограмма);

$\dfrac{10}{FE} = \dfrac{7}{FC} = \dfrac{8}{4}$;

$FE = \dfrac{10 \cdot 4}{8}$; $FE = 5$ см;

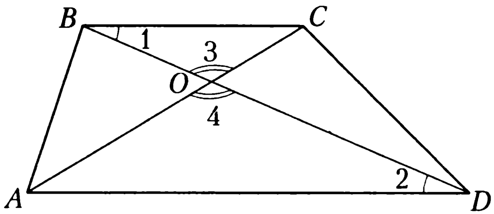
$FC = \dfrac{7 \cdot 4}{8}$; $FC = 3{,}5$ см.

Ответ: 5 см; 3,5 см.

Два угла называются **вертикальными**, если они имеют одну общую вершину и стороны одного угла являются лучами, противоположными сторонам другого.

Вертикальные углы равны.

Задача 2



Дано: $ABCD$ — трапеция;
$AC \cap BD = O$;
$OB = 4$ см;
$OD = 10$ см;
$BC = 25$ см.

Найти: AD.

Решение.

Рассмотрим $\triangle BOC$ и $\triangle DOA$:

$\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей BD),
$\angle 3 = \angle 4$ (как вертикальные углы),

значит, $\triangle BOC \sim \triangle DOA$ (по равенству двух соответственных углов).

Следовательно, $\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{BC}{AD}$;

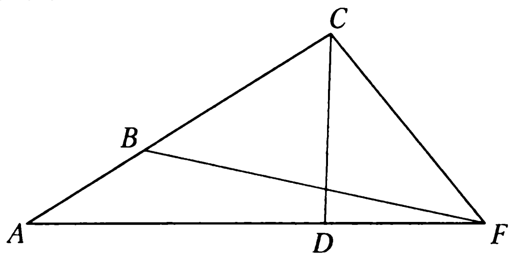
$$\frac{4}{10} = \frac{25}{AD};$$

$$AD = \frac{10 \cdot 25}{4};\ AD = 62{,}5\text{ см}.$$

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то внутренние накрест лежащие углы равны.

Ответ: 62,5 см.

Задача 3



Дано: $\triangle ACF$;
$B \in AC$;
$D \in AF$;
$AB = 5$ см;
$AC = 16$ см;
$AD = 8$ см;
$AF = 10$ см.

Доказать: $\triangle ACD \sim \triangle AFB$.

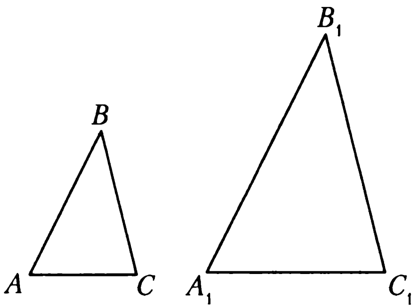
Доказательство.

Рассмотрим $\triangle ACD$ и $\triangle AFB$:

$$\left.\begin{array}{l} \angle A - \text{общий}, \\ \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{5}{8}, \\ \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8}, \end{array}\right\}$$

следовательно, $\triangle ACD \sim \triangle AFB$ (по двум пропорциональным сторонам). Что и требовалось доказать.

Задача 4



Дано: $\triangle ABC$; $\triangle A_1B_1C_1$;
$AB = 3$ см;
$BC = 0{,}05$ м;
$AC = 7$ см;
$A_1B_1 = 45$ мм;
$B_1C_1 = 0{,}75$ дм;
$A_1C_1 = 10{,}5$ см.

Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

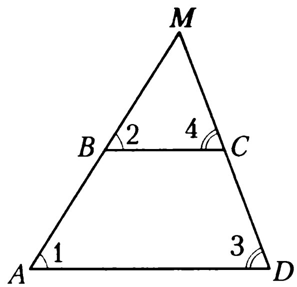
Доказательство.

Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$:
$BC = 0{,}05$ м $= 5$ см; $A_1B_1 = 45$ мм $= 4{,}5$ см; $B_1C_1 = 0{,}75$ дм $= 7{,}5$ см.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{4{,}5}{3} = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{7{,}5}{5} = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{A_1C_1}{AC} = \dfrac{10{,}5}{7} = \dfrac{3}{2}, \end{array}\right\}$$

следовательно, $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ (по трем пропорциональным сторонам). Что и требовалось доказать.

Задача 5



Дано: $ABCD$ — трапеция;
$BC = 5$ см;
$AD = 8$ см;
$CD = 3{,}6$ см;
$AB = 3{,}9$ см;
$AB \cap CD = M$.

Найти: MC; MB.

Решение.

1. Рассмотрим $\triangle AMD$ и $\triangle BMC$:

$$\left.\begin{array}{l}\angle 1 = \angle 2 \text{ (как соответственные углы при параллельных прямых } AD \text{ и } BC \text{ и секущей } AB),\\ \angle 3 = \angle 4 \text{ (как соответственные углы при параллельных прямых } AD \text{ и } BC \text{ и секущей } DC),\end{array}\right\} \text{следовательно,}$$

$\triangle AMD \sim \triangle BMC$ (по равенству двух соответственных углов), значит,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MD}{MC} = \frac{AD}{BC};\ \frac{AD}{BC} = \frac{8}{5}.$$

2. Пусть $MB = x$, $MC = y$, тогда $MA = 3{,}9 + x$, $MD = 3{,}6 + y$,

получим: $\dfrac{3{,}9 + x}{x} = \dfrac{3{,}6 + y}{y} = \dfrac{8}{5}$;

$$\frac{3{,}9 + x}{x} = \frac{8}{5} \text{ и } \frac{3{,}6 + y}{y} = \frac{8}{5};$$

$$8x = 5 \cdot (3{,}9 + x) \text{ и } 8y = 5 \cdot (3{,}6 + y);$$

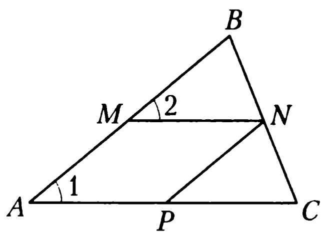
$$3x = 19{,}5 \text{ и } 3y = 18;$$

$$x = 6{,}5 \text{ и } y = 6.$$

$MC = 6$ см; $MB = 6{,}5$ см.

Ответ: 6 см; 6.5 см.

Задача 6



Дано: $\triangle ABC$;
$M \in AB, N \in BC, P \in CA$;
$MN \parallel AC$; $NP \parallel AB$;
$AB = 10$ см; $AC = 15$ см;
$PN : MN = 2 : 3$.

Найти: AM; MN; NP; AP.

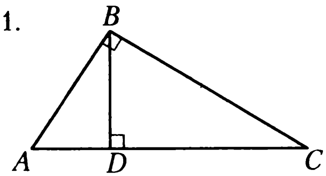
Решение.

1. $\triangle ABC \sim \triangle MBN$ (по равенству двух соответственных углов), так как $\angle 1 = \angle 2$ (как соответственные углы при параллельных прямых AC и MN и секущей AB), $\angle B$ — общий, значит, $\dfrac{BA}{BM} = \dfrac{BC}{BN} = \dfrac{AC}{MN}$ (1).
2. Пусть x — одна часть, значит, $NP = 2x$, $MN = 3x$;
$\left.\begin{array}{l} MN \parallel AC, \\ NP \parallel AB, \end{array}\right\}$ следовательно, $AMNP$ — параллелограмм; $\Bigg\}$ значит, $NP = AM = 2x$, $MN = AP = 3x$ (по свойству параллелограмма).
3. Подставляем в (1):
$\dfrac{10}{10-2x} = \dfrac{15}{3x}$; $\dfrac{10}{10-2x} = \dfrac{5}{x}$; $10x = 50 - 10x$; $20x = 50$; $x = 2{,}5$.
$AM = PN = 2 \cdot 2{,}5 = 5$ (см);
$AP = MN = 3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$ (см).

Ответ: 5 см; 7,5 см; 5 см; 7,5 см.

> Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.

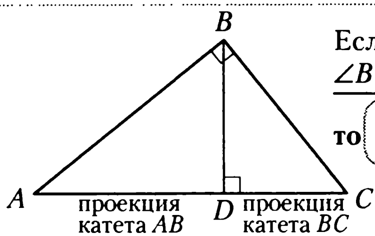
Свойства высоты прямоугольного треугольника

1. 

Если $\triangle ABC$ — прямоугольный,
$\angle B = 90°$ и BD — высота,

то $\boxed{\begin{array}{l} \triangle ABD \sim \triangle ABC\ (\angle A \text{ — общий}), \\ \triangle CBD \sim \triangle CBA\ (\angle C \text{ — общий}), \\ \triangle ABD \sim \triangle BCD\ (\angle BAD = \angle CBD). \end{array}}$

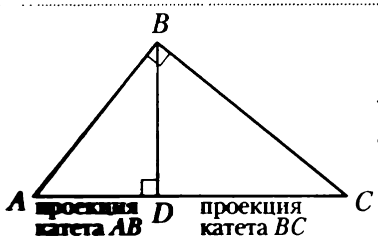
Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, делит треугольник на два подобных треугольника, каждый из которых подобен данному.

2. 

Если $\triangle ABC$ — прямоугольный,
$\angle B = 90°$ и BD — высота,

то $\boxed{AB = \sqrt{AD \cdot AC};\ BC = \sqrt{CD \cdot CA}.}$

Катет прямоугольного треугольника является средним геометрическим гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

3. 

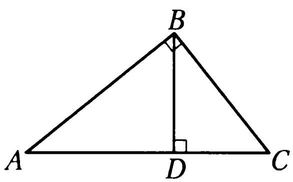
Если $\triangle ABC$ — прямоугольный,
$\angle B = 90°$ и BD — высота,

то $\boxed{BD = \sqrt{AD \cdot CD}.}$

Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, является средним геометрическим длин отрезков, на которые она (делит) разделяет гипотенузу.

Задачи по теме «Свойства высоты прямоугольного треугольника»

Задача 1



Дано: $\triangle ABC$ — прямоугольный;
$\angle B = 90°$;
BD — высота;
$AD = 25$ см;
$CD = 16$ см.

Найти: BD; AB; BC.

Решение.

По свойству высоты прямоугольного треугольника, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу:

$BD^2 = AD \cdot CD = 25 \cdot 16$;

$BD = \sqrt{25 \cdot 16} = 5 \cdot 4 = 20$ (см).

$AB^2 = AD \cdot AC = AD \cdot (AD + DC) = 25 \cdot 41$;

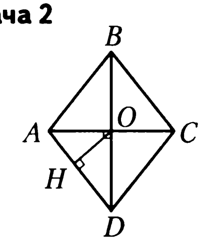
$AB = \sqrt{25 \cdot 41} = 5\sqrt{41}$ (см).

$BC^2 = CD \cdot CA = CD \cdot (CD + DA) = 16 \cdot 41$;

$BC = \sqrt{16 \cdot 41} = 4\sqrt{41}$ (см).

Ответ: 20 см; $5\sqrt{41}$ см; $4\sqrt{41}$ см.

Задача 2



Дано: $ABCD$ — ромб;
OH — высота $\triangle AOD$;
$AH = 4$ см;
$HD = 9$ см.

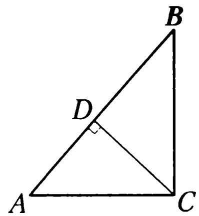
Найти: S_{ABCD}.

Решение.

1. $BD \perp AC$ (по свойству диагоналей ромба), значит, $\triangle ABC$ — прямоугольный, $\angle AOD = 90°$.
2. По свойству высоты, опущенной из вершины прямого угла в $\triangle AOD$:
   $OH^2 = AH \cdot HD$;
   $OH^2 = 4 \cdot 9 = 36$;
   $OH = 6$ см.
3. $\left.\begin{array}{l} S_{AOD} = \frac{1}{2} OH \cdot AD, \\ AD = AH + HD = 13 \text{ см}, \end{array}\right\} S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 13 = 39$ (см²).
4. $S_{ABCD} = 4S_{AOD} = 4 \cdot 39 = 156$ (см²).

Ответ: 156 см².

Задача 3



Дано: $\triangle ABC$ — прямоугольный;
$\angle C = 90°$;
$CD \perp AB$;
$AC : BC = 3 : 4$;
$AB = 50$ мм.

Найти: AD; BD.

Решение.

1. Пусть x — одна часть, тогда $AC = 3x$, $BC = 4x$.
   В $\triangle ABC$ по теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$;
   $50^2 = (3x)^2 + (4x)^2$;
   $2500 = 9x^2 + 16x^2$;
   $25x^2 = 2500$;
   $x^2 = 100$;
   $x = 10$.
   $AC = 3x = 3 \cdot 10 = 30$ (мм); $BC = 4x = 4 \cdot 10 = 40$ (мм).
2. $\triangle ABC$ — прямоугольный, CD — высота. Значит, по свойству высоты:
   $AC^2 = AD \cdot AB$;
   $AD = \dfrac{AC^2}{AB} = \dfrac{900}{50}$; $AD = 18$ мм;
   $BC^2 = BD \cdot BA$;
   $BD = \dfrac{BC^2}{BA} = \dfrac{1600}{50}$; $BD = 32$ мм.

Ответ: 18 мм; 32 мм.

Высота треугольника — перпендикуляр, проведенный из вершины к прямой, которая содержит противоположную сторону треугольника.

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

синус острого угла $= \dfrac{\textbf{противолежащий катет}}{\textbf{гипотенуза}}$

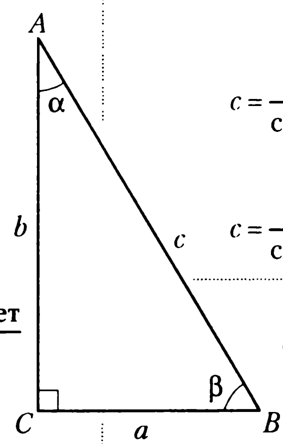
$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$ $\quad c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, $\quad a = c\sin\alpha$

$\boxed{\sin\beta = \frac{b}{c}}$ $\quad c = \dfrac{b}{\sin\beta}$, $\quad b = c\sin\beta$

тангенс острого угла $= \dfrac{\textbf{противолежащий катет}}{\textbf{прилежащий катет}}$

$\boxed{\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}}$ $\quad b = \dfrac{a}{\mathrm{tg}\alpha}$, $\quad a = b\,\mathrm{tg}\alpha$

$\boxed{\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a}}$ $\quad a = \dfrac{b}{\mathrm{tg}\beta}$, $\quad b = a\,\mathrm{tg}\beta$



косинус острого угла $= \dfrac{\textbf{прилежащий катет}}{\textbf{гипотенуза}}$

$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c}}$ $\quad c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$, $\quad b = c\cos\alpha$

$\boxed{\cos\beta = \frac{a}{c}}$ $\quad c = \dfrac{a}{\cos\beta}$, $\quad a = c\cos\beta$

котангенс острого угла $= \dfrac{\textbf{прилежащий катет}}{\textbf{противолежащий катет}}$

$\boxed{\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}}$ $\quad a = \dfrac{b}{\mathrm{ctg}\alpha}$, $\quad b = a\,\mathrm{ctg}\alpha$

$\boxed{\mathrm{ctg}\beta = \frac{a}{b}}$ $\quad b = \dfrac{a}{\mathrm{ctg}\beta}$, $\quad a = b\,\mathrm{ctg}\beta$

$$\boxed{\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

основное тригонометрическое тождество

$$\boxed{\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$: \sin^2\alpha$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} (\sin\alpha \neq 0)$$

$$\boxed{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} (\sin\alpha \neq 0)}$$

$: \cos^2\alpha$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} (\cos\alpha \neq 0)$$

$$\boxed{\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} (\cos\alpha \neq 0)}$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1}$$

Значения некоторых тригонометрических функций

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ — **$\sin 30° = \cos 60°$**

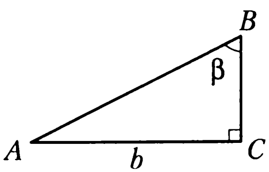
$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ — **$\cos 30° = \sin 60°$**

$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{ctg}(90° - \alpha)$ — **$\mathrm{tg}\, 30° = \mathrm{ctg}\, 60°$**

$\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{tg}(90° - \alpha)$ — **$\mathrm{ctg}\, 30° = \mathrm{tg}\, 60°$**

Задачи по теме «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника»

Задача 1



Дано: $\triangle ABC$ — прямоугольный;
$\angle C = 90°$;
$\angle B = \beta$;
$AC = b$.

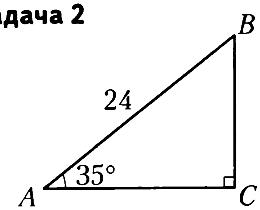
Выразить: BC; AB; $\angle A$.

Решение.

1. По определению котангенса острого угла:
$\mathrm{ctg}\angle B = \dfrac{BC}{AC}$; $BC = AC \cdot \mathrm{ctg}\,\angle B = b\,\mathrm{ctg}\,\beta$.
2. По определению синуса острого угла:
$\sin\angle B = \dfrac{AC}{AB}$; $AB = \dfrac{AC}{\sin\angle B} = \dfrac{b}{\sin\beta}$.
3. Так как $\angle A + \angle B = 90°$,
то $\angle A = 90° - \angle B = 90° - \beta$.

Ответ: $b\,\mathrm{ctg}\,\beta$; $\dfrac{b}{\sin\beta}$; $90° - \beta$.

Задача 2



Дано: $\triangle ABC$ — прямоугольный;
$\angle C = 90°$;
$\angle A = 35°$;
$AB = 24$ см.

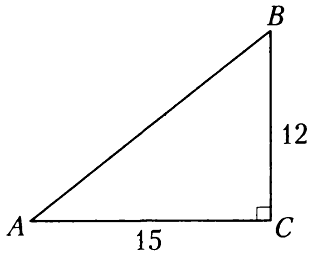
Выразить: BC; AC; $\angle B$.

Решение.

1. По определению синуса острого угла:
$\sin\angle A = \dfrac{BC}{AB}$;
$BC = AB \cdot \sin\angle A = 24 \cdot \sin 35° \approx 24 \cdot 0{,}5736$;
$BC \approx 14$ см.
2. По определению косинуса острого угла:
$\cos\angle A = \dfrac{AC}{AB}$;
$AC = AB \cdot \cos\angle A = 24 \cdot \cos 35° \approx 24 \cdot 0{,}8192$;
$AC \approx 20$ см.
3. $\angle A + \angle B = 90°$, $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 35° = 55°$.

Ответ: 14 см; 20 см; 55°.

Задача 3



Дано: $\triangle ABC$ — прямоугольный;
$\angle C = 90°$;
$BC = 12$ см;
$AC = 15$ см.

Найти: AB; $\angle A$; $\angle B$.

Решение.

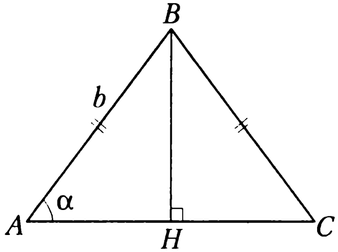
1. По теореме Пифагора в $\triangle ABC$:
   $AB^2 = AC^2 + BC^2$;
   $AB^2 = 12^2 + 15^2 = 369$;
   $AB = \sqrt{369} \approx 19$ см.

2. По определению тангенса острого угла:
   $\operatorname{tg}\angle A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$, следовательно, $\angle A \approx 38°39'$.
   $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 38°39' = 89°60' - 38°39' = 51°21'$.

Ответ: ≈ 19 см; $\approx 38°39'$; $\approx 51°21'$.

Теорема Пифагора
В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов.

Задача 4



Дано: $\triangle ABC$ — равнобедренный;
$AB = BC = b$;
$\angle A = \alpha$.

Найти: S_{ABC}.

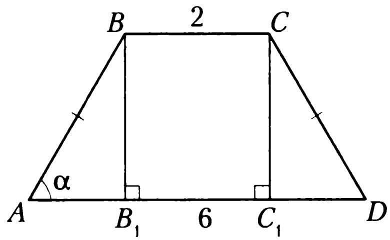
Решение.

1. Дополнительное построение: $BH \perp AC$, BH — высота.
2. По определению синуса острого угла в $\triangle ABH$:
   $\sin\angle A = \dfrac{BH}{AB}$;
   $BH = AB \cdot \sin\angle A = b\sin\alpha$
3. По определению косинуса острого угла в $\triangle ABH$:
   $\cos\angle A = \dfrac{AH}{AB}$;
   $AH = AB \cdot \cos\angle A = b\cos\alpha$.
4. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} BH \cdot AC$;
   $AC = 2AH = 2b\cos\alpha$ (так как $\triangle ABC$ — равнобедренный);
   $BH = b\sin\alpha$.

$$\left.\begin{aligned}&S_{ABC} = \frac{1}{2}BH\cdot AC;\\ &AC = 2AH = 2b\cos\alpha;\\ &BH = b\sin\alpha\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&S_{ABC} = \frac{1}{2}b\sin\alpha\cdot 2b\cos\alpha;\\ &S_{ABC} = b^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha.\end{aligned}$$

Ответ: $b^2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Задача 5



Дано: $ABCD$ — равнобедренная трапеция;
$AB = DC$;
$BC = 2$ см,
$AD = 6$ см;
$\angle A = \alpha$.

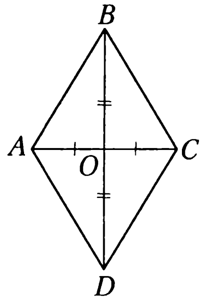
Найти: S_{ABCD}.

Решение.

1. Дополнительное построение: $BB_1 \perp AD$, $CC_1 \perp AD$; BB_1 и CC_1 — высоты.
2. $\left.\begin{array}{l} BB_1 \perp AD \text{ (по построению),} \\ CC_1 \perp AD \text{ (по построению),} \end{array}\right\}$ следовательно, $BB_1 \parallel CC_1$; $BC \parallel B_1C_1$ (как прямые, содержащие основания трапеции); значит, BCC_1B_1 — параллелограмм и $BC = B_1C_1$.
3. Рассмотрим $\triangle ABB_1$ и $\triangle DCC_1$:
   $\triangle ABB_1$ и $\triangle DCC_1$ — прямоугольные по построению;
   $\left.\begin{array}{ll} AB = DC & \text{(так как } ABCD \text{ — равно-} \\ \angle A = \angle D & \text{бедренная трапеция),} \end{array}\right\}$ следовательно, $\triangle ABB_1 = \triangle DCC_1$, значит, $AB_1 = DC_1$, тогда
   $AB_1 = DC_1 = \dfrac{AD - B_1C_1}{2} = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{6-2}{2}$; $AB_1 = DC_1 = 2$ см.
4. По определению тангенса острого угла в $\triangle ABB_1$:
   $\operatorname{tg}\angle A = \dfrac{BB_1}{AB_1}$; $BB_1 = AB_1 \cdot \operatorname{tg}\angle A = 2\operatorname{tg}\alpha$.
5. $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BB_1 = \dfrac{6+2}{2} \cdot 2\operatorname{tg}\alpha$; $S_{ABCD} = 8\operatorname{tg}\alpha$ см^2.

Ответ: $8\operatorname{tg}\alpha$ см^2.

Задача 6



Дано: $ABCD$ — ромб;
$AC = 2$ см;
$BD = 2\sqrt{3}$ см.

Найти: $\angle A$; $\angle B$.

Решение.

1. По свойству диагоналей ромба $AC \perp BD$ и $AO = CO$, $BO = DO$, значит, $\triangle AOB$ — прямоугольный.
2. По определению тангенса острого угла в $\triangle AOB$:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}\angle BAO = \frac{BO}{AO}, \\ &BO = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3}, \\ &AO = \frac{1}{2}AC = 1, \end{aligned}\right\}$$

$\operatorname{tg}\angle BAO = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$,
значит, $\angle BAO = 60°$,
$\angle ABO = 90° - \angle BAO = 90° - 60° = 30°$ (по свойству суммы острых углов в прямоугольном треугольнике).

3. По свойству диагоналей ромба AC и BD — биссектрисы углов A и B, значит,
$\angle A = 2\angle BAO = 120°$;
$\angle B = 2\angle ABO = 60°$.

Ответ: 120°; 60°.

Содержание

Предисловие ... 3
Многоугольник и его элементы. Сумма градусных мер углов выпуклого многоугольника ... 4
Задачи по теме «Многоугольники. Сумма градусных мер углов выпуклого многоугольника» ... 6
Параллелограмм ... 7
Задачи по теме «Свойства и признаки параллелограмма» ... 9
Прямоугольник ... 13
Задачи по теме «Свойства и признаки прямоугольника» ... 14
Ромб ... 20
Задачи по теме «Свойства и признаки ромба» ... 22
Квадрат ... 26
Задачи по теме «Свойства и признаки квадрата» ... 28
Средняя линия треугольника ... 32
Задачи по теме «Средняя линия треугольника» ... 33
Трапеция ... 37
Средняя линия трапеции ... 38
Задачи по теме «Трапеция. Средняя линия трапеции» ... 39
Понятие площади. Площадь прямоугольника ... 43
Задачи по теме «Площадь прямоугольника» ... 44
Площадь параллелограмма и треугольника ... 47
Задачи по теме «Площадь параллелограмма и треугольника» ... 48
Площадь трапеции ... 54
Задачи по теме «Площадь трапеции» ... 55
Теорема Пифагора ... 60
Теорема, обратная теореме Пифагора ... 61
Задачи по теме «Теорема Пифагора» ... 62
Подобные треугольники ... 66
Задачи по теме «Подобные треугольники» ... 68
Признаки подобия треугольников ... 72
Задачи по теме «Признаки подобия треугольников» ... 73
Свойства высоты прямоугольного треугольника ... 79
Задачи по теме «Свойства высоты прямоугольного треугольника» ... 80
Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника ... 82
Задачи по теме «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника» ... 84