GH. TH. GHEORGHIU

PROBLEME DE ALGEBRĂ ȘI ANALIZĂ MATEMATICĂ

EDITURA TEHNICĂ
1953

PREFAȚA

Consider necesar a arăta mai întâi cititorilor care au fost obiectivele urmărite în timpul elaborării acestei lucrări, obiective care oglindesc preocupările mele în calitate de profesor de Algebră și Analiză Matematică la Facultatea de Construcții din Timișoara.

Prin conținutul lor, cărțile de matematică pot fi de două feluri, după cum ele înfățișează latura teoretică sau latura practică a obiectului. Primele au neajunsul că apelează în special la raționament, iar celelalte sunt mai puțin atrăgătoare deoarece în ele se caută să se mecanizeze, prin diferite șabloane, rezolvarea problemelor. Dacă analizăm dialectic aceste două puncte de vedere, constatăm că ele nu trebue considerate separat, ci trebuesc îmbinate. In adevăr, o carte de matematici care conține numai teorie, fără aplicații, nu își ajunge scopul, în timp ce o carte care conține numai probleme numerice, fără raționamente, este o carte cu soluții tipice, care nu aduce mai mult folos decât un formular. Pentru a obține o îmbinare a acestor două puncte de vedere, am căutat să realizez o carte care să conțină atât teoria, expusă în rezumate la începutul fiecărui paragraf, cât și aplicarea acesteia pe probleme. Aceasta în ce privește forma lucrării. In ce privește fondul, problemele sunt astfel tratate, încât în rezolvarea lor este discutat și analizat însuși rezumatul introductiv.

Conținutul lucrării îl constitue însuși materialul seminarului cursului de matematici superioare la Facultatea de Construcții puțin amplificat. Aceasta înseamnă că în alegerea materiei tratate am luat drept criteriu cunoștințele pe care trebue să le aibă un inginer constructor, electrotehnician sau mecanic, pentru a lucra ușor în specialitatea sa. Amplificarea a fost făcută în două direcții. Pe de o parte, am făcut abstracție de cunoștințele pe care le are un student la intrarea în Institut, pentru ca să aibă toată materia expusă dela primele noțiuni de algebră până la noțiunile de analiză necesare în stadiul actual de desvoltare a tehnicei moderne; pe de altă parte, am mărit numărul problemelor în cadrul capitolelor tratate. Prima parte, care are ca scop înțelegerea și deci pătrunderea problemelor, a fost urmărită în întreaga lucrare numai la începutul ei. Astfel, nu s'a lăsat nimic deoparte, nici măcar un calcul, chiar dacă uneori era destul de elementar. In unele cazuri am repetat chiar în cursul rezolvării problemelor teoria, pentru ca în felul acesta să poate fi mai ușor înțeleasă. La calculul integral, deși am dat un formular care poate fi folosit la probleme, totuși, în unele cazuri, am preferat să arăt direct cum se stabilește formula corespunzătoare. Când facem lucruri mari, nu trebue să uităm pe cele mici. In felul acesta, cel care nu și-a însușit calculul algebric poate să-l învețe chiar

în cursul integrării unei ecuații diferențiale. Cel care învață o limbă nouă nu poate s'o înțeleagă și nici să-i cunoască frumusețile dacă nu și-a însușit bine gramatica acelei limbi. La fel și în Matematică, calculul trebue urmărit cu mare atenție.

Printre problemele pe care le conține cartea, puține sunt noi, dar consider că acest lucru este just într'o carte didactică. Elementul de noutate al cărții îl formează felul în care sunt tratate problemele. O atenție deosebită s'a dat pătrunderii și reținerii definițiilor, fapt care, în general, nu este îndeajuns de serios luat în considerare, ceeace dă loc la confuzii și lasă pe cel ce învață cu anumite lipsuri care îi crează o nesiguranță în efectuarea calculelor. Din acest punct de vedere, cartea atinge câteva puncte delicate, pe care le enumărăm mai jos.

1°. Chestiunea radicalilor aritmetici este foarte puțin înțeleasă la noi. In general, se spune că un radical de ordinul 2 are în față semnul plus sau minus. Această neînțelegere este izvorul a nenumărate confuzii. S'a gândit oare cel care face o asemenea afirmație dacă regulile de înmulțire, împărțire... ale radicalilor mai sunt valabile? Ce se înțelege prin egalitatea: $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}$ *dacă fiecare radical are un dublu înțeles? Nu, radicalul așa cum a fost introdus în Algebra elementară, trebue să fie radicalul aritmetic, adică trebue să aibă o valoare pozitivă. Acestui simbol i se aplică regulile învățate. Neînțelegerea provine dela rezolvarea ecuațiilor de gradul 2, unde, pentru prima dată, începătorul folosește mai mult radicalul. Ecuația:* $x^2 = 3$ *are ca rădăcini* $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$. *Aceasta nu înseamnă că radicalul are dublu semn, ci reprezintă numai o scriere prescurtată a numerelor:* $x_1 = \sqrt{3}$ *și* $x_2 = -\sqrt{3}$. *Neținându-se seama de acest fapt se dau de multe ori soluții greșite. Este adevărat că ulterior noțiunea de radical este generalizată, dar acei rădicali nu se mai supun regulilor radicalilor aritmetici. De aceea, pentru a nu se face confuzii, am preferat să scriem* $i^{\frac{1}{2}}$ *în loc de* $\sqrt{i}$ ($i^2 = -1$).

2°. O altă chestiune dificilă este aceea a numerelor complexe. In general, după ce se introduc anumite operații în analiza numerelor reale, ne grăbim, fără o pregătire prealabilă, să le folosim și cu numere complexe. De exemplu, după ce se definește funcțiunea e^x *(în domeniul real) deseori ne grăbim să scriem formulele lui Euler, în care se folosesc exponențiale de tipul* e^{ix}, *fără a explica ce se înțelege prin acest lucru! Cel care învață ia acest rezultat drept bun, ceeace corespunde realității, dar din punct de vedere pedagogic nu este just, deoarece un student conștiincios sesizează lipsa și în viitor poate să-și piardă încrederea deci plăcerea de a învăța. In acest scop, pentru a evita orice confuzii, am elaborat o parte specială a culegerii, care se ocupă cu aceste chestiuni.*

3°. Funcțiile trigonometrice inverse sunt definite pe jumătate de cerc trigonometric, definiție care, în general, se neglijează în aplicații.

Am dat deasemenea o atenție specială inegalităților, cărora li se aplică, în general, aceleași reguli ca și egalităților, deaceea suntem înclinați să le aplicăm același tratament, deși ele trebue studiate cu mai multă atenție.

Toate aceste chestiuni le-am urmărit în cursul acestei lucrări. In această privință, am consultat cu un real folos manualele sovietice, care

sunt amănunțit lucrate și înfățișează cititorilor, probleme bine studiate și frumos tratate. In felul acesta am căutat să pun la îndemâna studenților noștri un manual de tip nou.

Ca încheiere, rog pe cititori să urmărească cu atenție soluțiile problemelor cuprinse în carte și să nu treacă cu ușurință peste unele dificultăți pe care eventual le întâlnesc în cale. Trébue să se țină seama de faptul că ceeace este important se învață prin muncă perseverentă, deci trebue să se depună o sforțare. Ceeace se învață ușor este banal, fără importanță, nu este esențialul care trebue să rămână. Autorul roagă să i se comunice eventualele observații desprinse din citirea cărții. In felul acesta, cartea va putea fi îmbunătățită în edițiile următoare. O critică constructivă ar constitui un indiciu că munca depusă a fost apreciată, deci n'a fost inutilă.

Nu pot încheia aceste rânduri fără a mulțumi Colectivului meu de Catedră, format din tov. Bica Maria, Popescu Ion, Gräf Maria, Milovan Melania, Huschitt Erich și Hedbawny Brigitta, care au depus o muncă susținută pentruca această carte să apară în condițiile cele mai bune.

AUTORUL

PARTEA ÎNTÂIA

ALGEBRA ELEMENTARĂ

CAPITOLUL I

CALCULUL ALGEBRIC

§ 1. Notaţii. Valori numerice

1. In Algebră folosim litere pentru a simboliza numerele aritmetice, însoţite de semnul + sau —. In operaţiile la care avem nevoie de puţine litere, vom folosi literele alfabetului latin a, b, c, ...; pentru a arăta că unele litere au un rol mai important decât celelalte, putem folosi litere mai disparate a, l, x, ..., sau chiar alfabetul grec. Deseori avem nevoie de multe litere; în acest caz, vom folosi o aceeaşi literă căreia îi sunt afectaţi *indici*, de exemplu $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Indicele unei litere îl vom pune totdeauna jos şi numai în cazuri speciale, îl vom pune sus, când vom specifica acest lucru. Indicele arată *rangul* numărului în şir.

2. Se numeşte *expresie algebrică* sau, pe scurt, *expresie*, un ansamblu de litere şi cifre, legate între ele prin semne care arată operaţii algebrice. *Egalităţile* în Algebră sunt de două feluri: *identităţi* şi *ecuaţii*. Se spune că o egalitate este o identitate, când ea are loc pentru orice valori date literelor; dimpotrivă, o ecuaţie este o egalitate care nu are loc decât pentru anumite valori date unor anumite litere care intră în expresia ei. Se numeşte *formulă* o egalitate care leagă între ele mai multe litere depinzând unele de altele în aşa fel, încât dacă le cunoaştem pe toate afară de una, putem să o calculăm pe aceasta în funcţie de celelalte. Fizica are ca scop să stabilească legi care, în general, se traduc prin formule.

1. 1. *Formula care dă durata oscilaţiei unui pendul simplu este*

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

unde l este lungimea lui, iar π şi g sunt cele două constante universale cunoscute. Să se calculeze t luându-se $\pi = 3{,}14$; $g = 9{,}81$ şi $l = 1{,}34$.

Mărginindu-ne în toate calculele la patru zecimale, avem

$$t = 3{,}14 \sqrt{\frac{1{,}34}{9{,}81}} = 3{,}14 \sqrt{0{,}134 \frac{1000}{981}} = 3{,}14 \sqrt{0{,}134 \cdot 1{,}0193} = 3{,}14 \sqrt{0{,}1366} =$$
$$= 3{,}14 \cdot 0{,}3696 = 1{,}1505 \ldots$$

adică 1 şi 15 sutimi de secundă.

1. 2. *Să se găsească valoarea expresiei*

$$a - \{3a - 2b - [(a+b)^2 - (2a + 3b - 6c)]\},$$

pentru $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{3}$.

Avem succesiv

$$2a+3b-6c=\frac{3}{2},\ (a+b)^2-(2a+3b-6c)=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{5}{4},$$

$$3a-2b-[(a+b)^2-(2a+3b-6c)]=-4+\frac{5}{4}=-\frac{11}{4},$$

$$a-\{3a-2b-[(a+b)^2-(2a+3b-6c)]\}=-1+\frac{11}{4}=\frac{7}{4}.$$

Observaţie. Acelaşi calcul se poate face desfăcând toate parantezele, făcând reducerile care se ivesc şi apoi înlocuirea.

1. 3. *Să se găsească valoarea expresiei*:

$$E=\frac{x+y}{1-2xy}-7\frac{x-y}{1+2xy},$$

în care

$$x=\sqrt{a^2-b^2},\ y=\sqrt{a(a+1)+b(b-1)},$$

iar

$$a=\frac{l-m+p}{l+m-p},\ b=\frac{-l+m+p}{l-m-2p},$$

pentru valorile: $l=\frac{11}{10}$, $m=-\frac{1}{15}$, $p=\frac{2}{3}$.

Avem succesiv,

$$a=\frac{\frac{11}{10}+\frac{1}{15}+\frac{2}{3}}{\frac{11}{10}-\frac{1}{15}-\frac{2}{3}}=5,\ b=\frac{-\frac{11}{10}-\frac{1}{15}+\frac{2}{3}}{\frac{11}{10}+\frac{1}{15}-\frac{4}{3}}=3;$$

$$x=\sqrt{25-9}=4\quad,\ y=\sqrt{30+6}=6;$$

$$E=\frac{10}{-47}-7\frac{-2}{49}=\frac{24}{329}.$$

1. 4. *Un corp are volumul V_0 la temperatura 0°. Acest volum, supus la o temperatură de 1°, creşte pe unitatea de volum cu α. Să se găsească formula care dă volumul V_t al corpului la temperatura de t°.*

Dacă creşterea pe unitatea de volum este α, corpul va căpăta la temperatura de 1° creşterea $\alpha \cdot V_0$, adică va avea volumul $V_1=V_0+\alpha V_0=V_0(1+\alpha)$. La temperatura de t° creşterea corpului va fi de t ori mai mare, adică $\alpha V_0 t$ şi deci $V_t=V_0(1+\alpha t)$.

§ 2. Adunarea şi scăderea polinoamelor

1. Expresia algebrică cea mai simplă este *monomul*, adică o expresie de forma $abc\ldots l$ literele fiind legate între ele prin semnul înmulţirii. Una dintre litere poate fi dată numeric; în acest caz, ea este aşezată prima şi se numeşte *coeficient*. Dacă o literă este repetată, se scrie în dreapta ei, sus, un număr, numit *putere* care are rolul de a arăta de câte ori este repetată litera în monom: $abaabc=a^3b^2c$. Două monoame care au aceeaşi parte literară se numesc

asemenea. Suma mai multor monoame se numește *polinom*; monoamele unui polinom se numesc *termenii* polinomului. Monomul însuși este un polinom particular cu un singur termen; un polinom care conține numai doi termeni se mai numește *binom*; un polinom care conține trei termeni se mai numește *trinom.*

Suma ori diferența, sau cum se mai spune *suma algebrică*, a mai multor polinoame este tot un polinom. Suma algebrică a mai multor polinoame se efectuează scriind termenii polinoamelor unii după alții, având grijă ca la polinoamele care se scad să se schimbe semnul, și reducând *termenii asemenea* (adică adunând la un loc monoamele asemenea).

În general, un polinom se ordonează după o literă, sau după două, sau chiar după mai multe. Dacă polinomul se ordonează după litera x, se notează prescurtat cu $P(x)$ și are expresia cea mai generală:

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_px^{n-p}+\cdots+a_n.$$

Numărul n întreg se numește *gradul* polinomului; a_0, $a_1 \ldots a_n$, sau mai pe scurt a_i se numesc *coeficienții* polinomului. Termenul a_n se mai numește și *termenul constant* sau *termenul liber* al polinomului. Valoarea $P(a)$ va reprezenta rezultatul înlocuirii lui x prin a în polinom. Analog, un polinom în două litere se va nota cu $P(x,y)$, în trei litere, cu $P(x,y,z)$, etc. Gradul unui polinom în mai multe litere este cel mai mare număr care se obține adunând puterile literelor din fiecare termen separat. În particular vom spune, prin convenție, că un polinom de gradul zero, într'una sau mai multe litere, este o constantă $a_n=a_0$ (adică nu depinde de literele în raport cu care se ordonează).

2. Un polinom, în una sau mai multe litere, este *identic nul* dacă are toți coeficienții termenilor nuli. Două polinoame în același număr de litere sunt *identice* când sunt de același grad și când coeficienții termenilor asemenea din cele două polinoame sunt egali (în aceste teoreme s'a presupus că termenii asemenea din fiecare polinom în parte au fost în prealabil reduși între ei; cu alte cuvinte, polinoamele sunt scrise sub forma lor definitivă).

3. Un polinom în două litere $P(x,y)$ se spune că este *simetric* în raport cu literele x și y când, schimbându-le între ele, valoarea lui rămâne aceeași, adică atunci când avem identitatea

$$P(x,y)=P(y,x). \qquad (I)$$

Dimpotrivă, polinomul se spune că este *antisimetric*, dacă

$$P(x,y)=-P(y,x), \qquad (II)$$

2. 1. *Să se adune polinoamele*

$$\frac{1}{2}a^2b-\frac{3}{4}ab^2+a^3,\ \frac{1}{3}ab^2+b^3+2a^2b-\frac{1}{2}a^3,\ -\frac{1}{2}a^3-b^3-\frac{5}{2}a^2b+\frac{5}{12}ab^2.$$

Apropiind termenii asemeni, avem:

$$\frac{1}{2}a^2b-\frac{3}{4}ab^2+a^3+\frac{1}{3}ab^2+b^3+2a^2b-\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}a^3-b^3-\frac{5}{2}a^2b+$$
$$+\frac{5}{12}ab^2=0.$$

2. 2. *Se dau polinoamele:*

$$6a^2-3ab+2b^2-5ac+6bc-2c^2, \qquad a^2-ab+b^2+ac-bc-c^2,$$

$$2a^2+3ab-2b^2-3ac-4bc-5c^2, \qquad 3a^2-6ab+3b^2-4ac+10bc+4c^2;$$

din primul să se scadă celelalte trei.

Rezultatul este:

$$ab+bc+ac.$$

2. 3. *Să se adune polinoamele, ordonându-se rezultatul după x, y și z.*

$$ax^2+by^2-cz^2, \quad -bx^2+cy^2+az^2, \quad cx^2-ay^2+bz^2.$$

Avem

$$ax^2+by^2-cz^2-bx^2+cy^2+az^2+cx^2-ay^2+bz^2$$
$$=(a-b+c)x^2+(-a+b+c)y^2+(a+b-c)z^2$$

ordonându-se rezultatul.

2. 4. *Se consideră polinoamele*

$$P_i(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x^{i+1}-(n-2)x^i+x^{i-1}+\cdots+x+1, (i=1,2\cdots n); \quad (1)$$

se cere să se calculeze suma

$$S(x)=P_1(x)+P_2(x)+\cdots+P_n(x).$$

In suma cerută se vor înlocui polinoamele prin valorile lor, obținute din forma (1), făcând succesiv pe $i=1, 2, \ldots, n$. Așezându-le unele sub altele, avem

$$\begin{aligned}
P_1(x)&=x^n+x^{n-1} &&+\cdots+x^{r+1}+x^r &&+x^{r-1}+\cdots+x^2-(n-2)x+1,\\
P_2(x)&=x^n+x^{n-1} &&+\cdots+x^{r+1}+x^r &&+x^{r-1}+\cdots+(n-2)x^2+x+1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
P_{r+1}(x)&=x^n+x^{n-1} &&+\cdots+x^{r+1}+x^r-(n-2)x^{r-1}+\cdots+x^2+x+1,\\
P_r(x)&=x^n+x^{n-1} &&+\cdots+x^{r+1}-(n-2)x^r+x^{r-1}+\cdots+x^2+x+1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
P_{n-1}(x)&=x^n-(n-2)x^{n-1} &&+\cdots+x^{r+1}+x^r+x^{r-1} &&+\cdots+x^2+x+1,\\
P_n(x)&=-(n-2)x^n+x^{n-1}+\cdots+x^{r+1}+x^r+x^{r-1} &&+\cdots+x^2+x+1,
\end{aligned}$$

adunăm termenii asemenea și cum în sumă avem n linii, deci n termeni de același fel, avem

$$S(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1.$$

2. 5. *Să se determine polinomul*

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d,$$

care satisface identitatea

$$P(x)+P(-2x)+x^3P\left(\frac{1}{x}\right)=15.$$

Deoarece

$$P(-2x) = a(-2x)^3 + b(-2x)^2 + c(-2x) + d = -8ax^3 + 4bx^2 - 2cx + d,$$

$$x^3 P\left(\frac{1}{x}\right) = x^3\left[a\left(\frac{1}{x}\right)^3 + b\left(\frac{1}{x}\right)^2 + c\left(\frac{1}{x}\right) + d\right] = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

identitatea din enunț, după ce se fac toate reducerile în prima parte, se scrie

$$(d - 7a)x^3 + (5b + c)x^2 + (b - c)x + (a + 2d) = 15.$$

Cum această egalitate trebue să fie o identitate, rezultă

$$d - 7a = 0, \quad 5b + c = 0, \quad b - c = 0, \quad a + 2d = 15. \qquad (1)$$

Dacă adunăm între ele egalitățile dela mijloc, rezultă $6b = 0$, adică $b = 0$; aceleași egalități cer imediat $c = 0$. Prima egalitate spune că $d = 7a$, valoare care, introdusă în ultima, dă $15a = 15$, adică $a = 1$, deci $d = 7$. Polinomul căutat este

$$P(x) = x^3 + 7.$$

Observație. În realitate, egalitățile (1) formează un sistem simplu de patru ecuații cu patru necunoscute a cărui rezolvare ne-a dat soluția problemei. Cu asemenea sisteme ne vom ocupa mai îndeaproape la § 27.

2. 6. *Să se determine polinoamele simetrice în două litere de gradul 1, 2 și 3.*

Polinomul cel mai general de gradul 1 în x și y este

$$P_1(x, y) = ax + by + c.$$

Pentru ca acest polinom să fie simetric, este necesar să avem $P_1(x, y) = P_1(y, x)$, adică desvoltat:

$$ax + by + c = ay + bx + c.$$

Această egalitate trebuind să fie identitate, conform teoremei generale, este necesar ca $a = b$; cu alte cuvinte, polinomul simetric în două litere de gradul 1 are forma

$$P_1(x, y) = a(x + y) + c.$$

Polinomul simetric cel mai general de gradul 2 în x și y este

$$P_2(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

Pentru ca acest polinom să fie simetric, este necesar ca el să nu se schimbe când schimbăm pe x cu y. Scriind că facem această schimbare polinomul obținut este identic cu cel dela care am plecat, rezultă $a = c$, $d = e$. Deci, cel mai general polinom simetric de gradul 2 în două litere, va avea forma

$$P_2(x, y) = a(x^2 + y^2) + bxy + d(x + y) + f.$$

Analog, cel mai general polinom simetric de gradul 3 în două litere va fi

$$P_3(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + j,$$

care dacă va fi și simetric, va avea forma

$$P_3(x, y) = a(x^3 + y^3) + b(x^2y + xy^2) + e(x^2 + y^2) + fxy + h(x + y) + j.$$

Procedeul este general şi din aproape în aproape se poate scrie cel mai general polinom simetric de gradul n în două litere, simetric sau nu.

2. 7. *Să se demonstreze că un polinom de orice grad în trei litere x, y, z care este simetric în raport cu literele x, y şi x, z, este simetric şi în raport cu literele y, z.*

Fie $P(x, y, z)$ acel polinom. A spune că este simetric în raport cu x şi y înseamnă că

$$P(x, y, z) = P(y, x, z). \tag{1}$$

Analog, fiind simetric în raport cu literele x şi z, înseamnă că

$$P(x, y, z) = P(z, y, x). \tag{2}$$

Pentru a arăta că este simetric şi în raport cu y şi z, va trebui să demonstrăm că egalităţile precedente trag după ele şi egalitatea

$$P(x, y, z) = P(x, z, y). \tag{3}$$

In adevăr, în baza egalităţii (1), putem scrie

$$P(x, z, y) = P(z, x, y),$$

iar în baza lui (2), mai departe,

$$P(x, z, y) = P(z, x, y) = P(y, x, z)$$

şi din nou în baza lui (1),

$$P(x, z, y) = P(y, x, z) = P(x, y, z).$$

Observaţie. Cel mai general polinom de gradul 2 în trei litere x, y, z, simetric în raport cu o pereche oarecare din ele, este

$$P(x, y, z) = a(x^2+y^2+z^2) + b(xy+yz+zx).$$

2. 8. *Să se arate că un polinom de gradul 2 în trei litere x, y, z, care este simetric în raport cu literele x, y şi antisimetric în raport cu literele x şi z, este identic nul.*

In adevăr, procedând ca la prob. 2. 6, se constată imediat că cel mai general polinom de gradul 2 în trei litere este

$$P(x, y, z) = ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fzx+gx+hy+kz+l. \tag{1}$$

Polinomul trebuind să fie simetric în raport cu x şi y, este necesar ca $a=b$, $e=f$, $g=h$, adică va fi de forma

$$P(x, y, z) = a(x^2+y^2)+cz^2+dxy+e(yz+zx)+g(x+y)+kz+l. \tag{2}$$

Trebuind să fie antisimetric în raport cu x şi z, polinomul va satisface identitatea $P(x, y, z) = -P(z, y, x)$, adică

$$a(x^2+y^2)+cz^2+dxy+e(yz+zx)+g(x+y)+kz+l$$
$$= -[a(z^2+y^2)+cx^2+dzy+e(yx+xz)+g(z+y)+kx+l].$$

Conform teoremei generale, diferiţii coeficienţi ai lui x, y, z, cum şi ai puterilor lor, trebue să fie egali. Scriind acest lucru, se ajunge la egalităţile: $a=-c$, $a=-a$; $e=-d$, $e=-e$; $g=-k$, $g=-g$; $l=-l$; din aceasta rezultă că $a=c=d=e=g=k=l=0$, valori care introduse în (2) arată că $P(x, y, z)=0$.

§ 3. Inmulţirea polinoamelor. Progresii geometrice

1. Părţile constitutive ale unui produs se numesc *factori* (spre deosebire de adunare şi scădere unde am văzut că se numesc termeni).

Două monoame se înmulţesc între ele înmulţindu-le coeficienţii, ţinând seama de regula semnelor (semnele de acelaşi fel dau semnul plus, iar cele contrare dau minus), iar părţile literare, asociind factorii asemenea între ei, după regula

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Pentru a înmulţi un monom cu un polinom, înmulţim fiecare termen al polinomului cu monomul înmulţitor. Pentru a înmulţi două polinoame între ele, vom înmulţi pe rând fiecare monom al unuia cu toate monoamele celuilalt şi vom face apoi suma rezultatelor. Inmulţirea mai multor polinoame se face din aproape în aproape, înmulţind două polinoame între ele, rezultatul cu al treilea, etc. Facem aci remarca importantă că pentru a înmulţi un produs de polinoame cu un polinom, *este suficient să înmulţim numai unul din factori* (ca şi în aritmetică, a înmulţi cu 2 produsul $3 \cdot 5$ este suficient să scriem $6 \cdot 5$ sau $3 \cdot 10$ iar nu $6 \cdot 10$).

Inmulţirea polinoamelor duce la identităţi. In calcule vom ţine seamă totdeauna de identitatea remarcabilă

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}) = a^n - b^n, \qquad (I)$$

şi cazuri particulare foarte des folosite.

$$(a-b)(a+b) = a^2-b^2, \qquad (II)$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3. \qquad (III)$$

In ultima din aceste identităţi, schimbând pe b în $-b$ obţinem aceeaşi identitate scrisă sub forma

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3, \qquad (IV)$$

pe care iarăşi o vom folosi.

Aceste trei identităţi particulare sunt atât de importante în calculele algebrice, încât ele sunt considerate ca *reguli practice* de înmulţire rapidă. Dar, ca la orice regulă, trebue învăţată aplicarea ei direct şi invers. De exemplu, prima regulă privită direct dă valoarea produsului $(a-b)(a+b)$, iar privită invers, dă *descompunerea în factori* a polinomului a^2-b^2. Şi într'o formă şi în alta, regulile (II), (III), (IV) ca şi identitatea generală (I) sunt, foarte imporante în calcule, după cum vom vedea la problemele ce urmează.

Alte identităţi importante se obţin din înmulţirea unui binom prin el însuşi de două sau de trei ori

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \qquad (V)$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \qquad (VI)$$

Aceste două identităţi formează deasemenea două reguli importante de calcul care pot fi aplicate direct şi invers. Schimbând pe b în $-b$, cele două identităţi iau forma

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2, \qquad (V')$$

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \qquad (VI')$$

Regula (V) se aplică uşor şi la cazul unui trinom prin formula

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca, \qquad \text{(VII)}$$

care se extinde uşor mai departe la un polinom oarecare

$$(a+b+\cdots+k+l)^2=a^2+b^2+\cdots+k^2+l^2+2(ab+ac+\cdots+ak+al+ +bc+\cdots+bk+bl+\cdots+kl). \qquad \text{(VII')}$$

In paragraful următor ne vom ocupa, în special, cu generalizarea acestor identităţi.

2. Se numeşte *progresie geometrică* un şir de numere în care *termenii* şirului se deduc fiecare din precedentul înmulţit cu un număr fix numit *raţie*. Astfel, dacă primul termen este a, iar raţia r, progresia se scrie

$$\div\, a,\ ar,\ ar^2,\ldots,\ ar^{n-1}\ldots$$

Suma primilor n termeni ai acestei progresii este egală cu

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=a\frac{1-r^n}{1-r}. \qquad \text{(VIII)}$$

In general, elementele importante la o progresie geometrică sunt: 1° primul termen, 2° raţia, 3° numărul termenilor, 4° suma lor. Aceste patru numere sunt legate prin relaţia (VIII) care ne foloseşte atunci când cunoscând trei dintre ele vrem să-l calculăm pe cel al patrulea.

3. 1. *Să se înmulţească între ele polinoamele*

$$4a^2+12ax+9x^2,\quad 4a^2-12ax+9x^2.$$

Vom face acest calcul în trei feluri, pentru a arăta cum trebue aplicate regulile date mai sus. In primul rând, să facem înmulţirea direct

$$(4a^2+12ax+9x^2)(4a^2-12ax+9x^2)=4a^2(4a^2-12ax+9x^2)+ +12ax(4a^2-12ax+9x^2)+9x^2(4a^2-12ax+9x^2)=(16a^4-48a^3x+36a^2x^2)+ +(48a^3x-144a^2x^2+108ax^3)+(36a^2x^2-108ax^3+81x^4)=16a^4-72a^2x^2+81x^4.$$

In al doilea fel, observăm că cele două expresii de înmulţit se pot scrie ca suma şi diferenţa a două polinoame, deci putem aplica identitatea (II):

$$(4a^2+12ax+9x^2)(4a^2-12ax+9x^2)=[(4a^2+9x^2)+12ax][(4a^2+9x^2)-12ax]= =(4a^2+9x^2)^2-144a^2x^2=16a^4-72a^2x^2+81x^4;$$

pentru a obţine ultima egalitate, am aplicat regula (V). In sfârşit, într'un al treilea fel, produsul se poate calcula observând că fiecare dintre polinoamele înmulţitoare este un pătrat perfect,

$$(4a^4+12ax+9x^2)(4a^2-12ax+9x^2)=(2a+3x)^2(2a-3x)^2= =[(2a+3x)(2a-3x)]^2=(4a^2-9x^2)^2=16a^4-72a^2x^2+81x^4.$$

Observaţie. In regulile date în introducerea acestui paragraf a, b pot fi nişte expresii oarecare, nu numai simple monoame, cum s'ar părea la prima vedere.

3. 2. *Să se calculeze produsul*

$$P=(x^2-3xy+3y^2)(x^2+3xy+3y^2)(x^2+3y^2).$$

Produsul primelor două paranteze se poate scrie succesiv

$$(x^2-3xy+3y^2)(x^2+3xy+3y^2)=[(x^2+3y^2)-3xy][(x^2+3y^2)+3xy]=$$
$$=(x^2+3y^2)^2-9x^2y^2=x^4-3x^2y^2+9y^4,$$

și mai departe, pe baza identității (IV),

$$P=(x^2+3y^2)(x^4-3x^2y^2+9y^4)=(x^2+3y^2)[(x^2)^2-3y^2x^2+(3y^2)^2]=x^6+27y^6.$$

3. 3. *Să se calculeze produsul*

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

unde $2p=a+b+c$.

Observând că

$$2p-2a=(a+b+c)-2a=-a+b+c,\ldots$$

avem succesiv,

$$16S^2=2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)$$
$$=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$
$$=[(b+c)+a][(b+c)-a][a-(b-c)][a+(b-c)]$$
$$=[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]=(b^2+2bc+c^2-a^2)(a^2-b^2+2bc-c^2)$$
$$=[2bc-(a^2-b^2-c^2)][2bc+(a^2-b^2-c^2)]=4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2$$
$$=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4.$$

Observație. Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi, atunci S, definit prin formula din enunț, reprezintă aria triunghiului.

3, 4. *Să se demonsteze că produsul a patru numere consecutive mărit cu unitatea este totdeauna un pătrat perfect.*

Fie n un număr oarecare, întreg; următoarele trei numere întregi consecutive vor avea drept expresii $n+1$, $n+2$, $n+3$. Avem

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+n)(n^2+5n+6)+1=$$
$$=n^4+6n^3+11n^2+6n+1=(n^2)^2+9n^2+1+2n^2(3n)+2n^2+2\cdot 3n=(n^2+3n+1)^2.$$

3. 5. *Să se demonstreze identitatea*

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2].$$

Cum

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),$$

plecând dela partea dreaptă și făcând înmulțirile, se obține prima parte.

3. 6. *Să se arate că condiția necesară și suficientă pentru ca trei numere a, b, c să fie în progresie geometrică este:* $b^2=ac$.

Aceasta înseamnează că trebue să arătăm că dacă numerele sunt în progresie geometrică, egalitatea este verificată, și invers, dacă egalitatea este verificată, numerele sunt în progresie geometrică. În adevăr, dacă rația este r, atunci $b=ar$ și $c=br=ar^2$, egalități din care reiese că $b^2=a^2r^2=ac$. Invers, dacă $b^2=ac$, putem scrie

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b},$$

şi dacă notăm cu r valoarea comună a acestor rapoarte egale, atunci $b=ar$ $c=br$, adică b se deduce din a prin inmulţirea cu r şi la fel c se deduce din b: conform definiţiei, a, b, c sunt în progresie geometrică.

3. 7. *Pistonul unei maşini pneumatice se mişcă într'un cilindru a cărui capacitate este $\frac{2}{5}$ din cea a recipientului. Se cere presiunea aerului rămas în recipient după n curse ale pistonului.*

Fie V volumul recipientului; volumul corpului de pompă este $\frac{2}{5}V$. Fie încă H presiunea aerului înainte de a funcţiona maşina. Când ridicăm pistonul pentru prima dată, aerul recipientului, care ocupă volumul V la presiunea H, va ocupa volumul $V+\frac{2}{5}V$ la o presiune necunoscută h_1. Dar legea lui *Mariotte* spune că trebue să avem $\frac{h_1}{H}=\frac{V}{V+\frac{2}{5}V}$, de unde $h_1=H\frac{1}{1+\frac{2}{5}}=$ $=\frac{5}{7}H$. Aceasta însemnează că după prima cursă a pistonului, presiunea aerului din recipient va fi $h_1=\frac{5}{7}H$. După a doua cursă a pistonului, presiunea va fi $h_2=\frac{5}{7}h_1=\left(\frac{5}{7}\right)^2H$ şi după n curse va fi $\left(\frac{5}{7}\right)^nH$.

3. 8. *Pe un joc de şah se pune pe primul pătrat un bob de grâu, pe al doilea pătrat se pun doua boabe, pe al treilea, patru boabe şi se continuă în felul acesta, înmulţind mereu cu 2 boabele până ajungem la cel de-al 64-lea pătrat al şahului. Se intreabă: 1° câte boabe de grâu vom avea pe toată tabla de şah? 2° ce suprafaţă trebue însămânţată pentru a obţine acest grâu, ştiind că se produc 25 hectolitri pe hectar şi că un hectolitru conţine aproximativ 2000000 boabe de grâu.*

1° Numărul de boabe de grâu este egal cu suma progresiei geometrice în care primul termen este 1, raţia 2 şi numărul termenilor 64. Folosind formula (VIII), avem

$$S_{64}=\frac{1-2^{64}}{1-2}=2^{64}-1=18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \text{ boabe.}$$

2°. Deoarece un hectar va da $25\times2\,000\,000=50\,000\,000$ boabe, împărţind numărul precedent cu acesta se obţine suprafaţa care trebue însămânţată şi care este aproximativ 368 934 881 474 ha. Pentru a ne da seama de mărimea acestui număr, este interesant să-l comparăm cu suprafaţa globului pământesc care este, aproximativ, de 13 000 000 000 hectare; ar trebui cam de 28 ori această suprafaţă!

3. 9. *Să se calculeze suma*

$$S=1+2x+3x^2\cdots+nx^{n-1}.$$

Descompunem suma dată în sume parţiale de forma

$$S=(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})+(x+x^2+\cdots+x^{n-1})+(x^2+\cdots+x^{n-1})+\cdots+x^{n-1}.$$

In felul acesta fiecare paranteză este o progresie geometrică; făcând suma lor, avem

$$S=\frac{1-x^n}{1-x}+x\frac{1-x^{n-1}}{1-x}+x^2\frac{1-x^{n-2}}{1-x}+\cdots+x^{n-1}\frac{1-x}{1-x},$$

(ultimul termen x^{n-1} a fost scris sub forma precedentă pentru uniformizare). Cum suma are n termeni, efectuând adunarea obţinem

$$S=\frac{(1-x^n)+x(1-x^{n-1})+x^2(1-x^{n-2})+\cdots+x^{n-1}(1-x)}{1-x}=$$

$$=\frac{(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})-nx^n}{1-x}=\frac{\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n}{1-x}=\frac{1-x^n-nx^n(1-x)}{(1-x)^2}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

§ 4. Formula binomului. Puterea unui polinom

1. Pentru a ridica un monom la o putere (întreagă şi pozitivă) ridicăm fiecare factor al monomului la acea putere, începând cu coeficientul, după regula

$$(a^m)^n=a^{mn} \qquad (m,\ n \text{ întregi, pozitivi}). \tag{I}$$

2. Se numeşte *formula binomului*, sau *binomul lui Newton*, formula care dă expresia puterii (întregi şi pozitive) a unui binom. Această formulă am considerat-o la paragraful precedent pentru cazurile particulare ale puterii a 2^a şi a 3^a. In general, formula are expresia

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^pa^{n-p}b^p+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n, \tag{II}$$

unde, C_n^p se numeşte *coeficient binominal* şi are expresia

$$C_n^p=\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)^*)}{1\cdot2\cdot3\ldots p}. \tag{III}$$

Dacă se foloseşte notaţia: $1\cdot2\cdot3\ldots p=p!$ (se citeşte *p factorial*), atunci formula precedentă se mai poate scrie

$$C_n^p=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}. \tag{III'}$$

Dacă facem convenţia să punem $0!=1$, atunci $C_n^0=C_n^n=1$ ceeace justifică coeficienţii lui a^n şi b^n din formula (II). Din formula (III') reiese că în desvoltarea (II), coeficienţii binominali egal depărtaţi de extremi sunt egali.

Formula binomului are $n+1$ termeni; în fiecare, suma puterilor lui a şi b face n, implicit primul şi ultimul termen, deoarece $a^0=1$, oricare ar fi numărul a, diferit de zero. Pentru a calcula numeric coeficienţii, se procedează din aproape în aproape, astfel: primul coeficient este totdeauna 1, iar al doilea, puterea la care ridicăm binomul $C_n^1=n$; în general, coeficientul termenului de rang p se deduce din cel al termenului de rang $p-1$, înmulţindu-l

*) La C_n^p, p nu este putere, ci un indice sus.

cu puterea lui a din termenul de rang p—1 şi împărţindu-l cu p. Evident că, în baza faptului că termenii egal depărtaţi de extremi sunt egali, vom calcula coeficienţii desvoltării numai până la mijloc.

3. Puterea unui polinom se calculează cu ajutorul formulei

$$(a+b+\cdots+l)^n=\sum\frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}a^\alpha b^\beta\ldots l^\lambda. \qquad (IV)$$

In partea dreaptă este scrierea prescurtată a unei sume de termeni, pe care în general o vom simboliza prin semnul $\sum$ pus în faţa unui termen tip, care poartă numele de *termen general* al desvoltării. Termenii desvoltării se deduc din termenul general, dând numerelor $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ toate valorile întregi şi pozitive posibile, astfel încât $\alpha+\beta+\cdots+\lambda=n$.

4. 1. *Un polinom în mai multe litere $P(x, y, \ldots, u)$ se numeşte omogen când toţi termenii lui sunt de acelaşi grad, numit grad de omogeneitate; să se demonstreze că un asemenea polinom satisface relaţia*

$$P(tx, ty, \ldots, tu)=t^nP(x, y, \ldots, u); \qquad (1)$$

şi reciproc, dacă un polinom satisface acestei relaţii este omogen.

Conform definiţiei un polinom omogen de gradul n va fi o sumă de termeni de gradul n, adică va avea forma

$$P(x, y, \ldots, u)=\sum A_{\alpha\beta\ldots\lambda}x^\alpha y^\beta\ldots u^\lambda,$$

unde prin ipoteză numerele întregi pozitive $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ satisfac condiţia

$$\alpha+\beta+\cdots+\lambda=n. \qquad (2)$$

Nu orice polinom este omogen. De exemplu, cu ocazia problemei 2. 6 am scris expresia generală a unui polinom de gradul 3 în două litere. Acel polinom nu este omogen; expresia generală a unui polinom omogen în două litere şi de gradul 3 este

$$P(x, y)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3,$$

iar de gradul n:

$$P(x, y)=A_0x^n+A_1x^{n-1}y+A_2x^{n-2}y^2+\cdots+A_{n-1}xy^{n-1}+A_ny^n.$$

Conform condiţiei (2) vom avea

$$P(tx, ty, \ldots, tu)=\sum A_{\alpha\beta\ldots\lambda}(tx)^\alpha(ty)^\beta\ldots(tu)^\lambda=\sum A_{\alpha\beta\ldots\lambda}t^{\alpha+\beta+\cdots+\lambda}x^\alpha y^\beta\ldots u^\lambda=$$
$$=t^n\sum A_{\alpha\beta\ldots\lambda}x^\alpha y^\beta\ldots u^\lambda=t^nP(x, y, \ldots, u).$$

Reciproca se deduce din însăşi această demonstraţie: din relaţia (1) reiese că înlocuind în polinom pe $x, y, \ldots, u$ cu $tx, ty, \ldots, tu$, t este factor comun şi nu mai este conţinut în polinom: aceasta înseamnează că toţi termenii trebue să aibă aceleaşi puteri, adică polinomul să fie omogen.

4. 2. *Să se verifice identităţile lui Lagrange*

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=(ay-bx)^2,$$

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2,$$

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2\cdots+x_n^2)-(a_1x_1+a_2x_2+\cdots a_nx_n)^2=\sum(a_px_q-a_qx_p)^2,$$

ultima sumă însemnând însumarea termenilor asemenea ce se capătă dând lui p şi q două valori diferite dela 1 până la n, în toate modurile posibile

Primele două identităţi se demonstrează prin calcule directe. Ne vom ocupa de demonstrarea ultimei. Facem observarea că aceasta este formată în ambele părţi de două polinoame omogene şi simetrice în raport cu literele $x_1, x_2 \dots x_n$. Deci, pentru demonstrare, este suficient să arătăm că în ambele părţi, coeficienţii lui x_1^2 şi $x_1 x_2$ sunt egali. In prima parte, coeficientul lui x_1^2 este

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)-a_1^2=a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2;$$

în partea a doua, x_1^2 nu provine decât din desvoltarea termenilor

$$(a_2x_1-a_1x_2)^2+(a_3x_1-a_1x_3)^2+\cdots+(a_nx_1-a_1x_n)^2,$$

şi care dau pentru x_1^2 acelaşi coeficient ca în prima parte. Coeficientul lui x_1x_2 din prima parte este $-2a_1a_2$, iar în partea a doua nu provine decât din pătratul $(a_2x_1-a_1x_2)^2$, adică acelaşi.

4. 3. *Se consideră o progresie geometrică în care primul termen este 1, raţia r şi care are pn termeni. Să se calculeze sumele termenilor din p în p începând cu primul, cu al doilea, etc. Să se verifice rezultatul.*

Notând cu $S_1, S_2, \dots, S_{p-1}$ aceste sume, avem

$$S_1=1+r^p+r^{2p}+\cdots+r^{p(n-1)}.$$

Această sumă este suma unei progresii geometrice ale cărui prim termen este 1, raţia r^p şi care are n termeni; aplicând formula care dă suma, găsim

$$S_1=\frac{1-(r^p)^n}{1-r^p}=\frac{1-r^{pn}}{1-r^p}.$$

Analog, pentru sumele următoare avem

$$S_2=r+r^{p+1}+r^{2p+1}+\cdots+r^{p(n-1)+1}=r[1+r^p+r^{2p}+\cdots+r^{p(n-1)}]=$$

$$=rS_1=r\frac{1-r^{pn}}{1-r^p},$$

$$S_3=r^2+r^{p+2}+r^{2p+2}+\cdots+r^{p(n-1)+2}=r^2S_1=r^2\frac{1-r^{pn}}{1-r^p},$$

. . . . . .

$$S_{p-1}=r^{p-1}+r^{2p-1}+r^{3p-1}+\cdots+r^{pn-1}=r^{p-1}S_1=r^{p-1}\frac{1-r^{pn}}{1-r^p}.$$

Ca verificare, dacă notăm cu S suma progresiei date, trebue să avem

$$S_1+S_2+\cdots+S_{p-1}=S.$$

In adevăr, pe baza identităţii (I) dela § 3, avem

$$S_1+S_2+\cdots+S_{p-1}=(1+r+r^2+\cdots+r^{p-1})\frac{1-r^{pn}}{1-r^p}=\frac{1-r^{pn}}{1-r}=S.$$

4. 4. *Să se calculeze coeficientul lui x^5 din produsul*

$$(1+x+x^2)\ (1-x)^{15}.$$

Scriem produsul dat sub forma

$$(1+x+x^2)\ (1-x)\ (1-x)^{14} = (1-x^3)\ (1-x)^{14} = (1-x)^{14} - x^3\,(1-x)^{14},$$

adică coeficientul căutat va fi diferența coeficienților lui x^5 și x^2 din desvoltarea lui $(1-x)^{14}$.

$$-C_{14}^5 - C_{14}^2 = -\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{14\cdot 13}{2} = -2002 - 91 = -2093.$$

4. 5. *Se consideră expresia*

$$\left(1+\frac{1}{x^m}\right)^n;$$

se cere să se găsească în ce caz desvoltarea ei are un termen liber și în caz afirmativ să se calculeze.

Termenul general al desvoltării este

$$C_n^p\, x^{n-p}\left(\frac{1}{x^m}\right)^p = C_n^p \frac{x^{n-p}}{x^{mp}}.$$

Acest termen nu-l va conține pe x când fracția are numărătorul egal cu numitorul, adică $n-p=mp$; $n=p\,(m+1)$. Deci, condiția cerută de problemă este ca n să se împartă exact cu $m+1$. Dacă notăm câtul cu p, termenul liber va fi C_n^p. De exemplu, în desvoltarea

$$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{3n},$$

există un termen liber egal cu C_{3n}^n.

4. 6. *Să se facă desvoltările*

$$(a+b+\cdots+l)^3,\ (a+b+\cdots+l)^4,\ (a+b+\cdots+l)^5.$$

Incepem cu prima desvoltare. Remarcăm că pentru calculul coeficienților nu interesează decât tipul termenilor, deoarece toți termenii de același tip au aceiași coeficienți, $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ întrând în mod simetric. In privința valorilor pe care le iau aceste numere, putem face o ordonare considerându-le de exemplu în ordine descrescândă.

Trebuind să avem: $\alpha+\beta+\cdots+\lambda=3$, putem lua

$\alpha=3,\ \beta=\gamma=\cdots=\lambda=0$ termenii sunt de tipul a^3 și au coeficientul $\frac{3!}{3!}=1$,

$\alpha=2,\ \beta=1,\ \gamma=\cdots=\lambda=0$ „ „ „ „ a^2b „ „ „ $\frac{3!}{2!1!}=3$,

$\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=1,\ \delta=\cdots=\lambda=0$ „ „ „ abc „ „ „ $\frac{3!}{1!1!1!}=6$,

Desvoltarea este

$$(a+b+\cdots+1)^3 = \Sigma_1 a^3 + 3\Sigma_2 a^2b + 6\Sigma_3 abc; \qquad (1)$$

în prima sumă vom scrie toţi termenii care se obţin înlocuind pe a succesiv cu una din literele $a, b, c, \ldots, l$; în a doua sumă vom lăsa pe a fix şi-l vom înlocui pe b cu toate celelalte litere, apoi îl vom înlocui pe a cu b şi în loc de b vom pune toate celelalte litere, etc; în cea de a treia sumă, toate literele au acelaşi rol, încât pentru a scrie toţi termenii sumei vom fixa două din litere, a şi b, iar în locul lui c vom pune pe toate cele rămase, apoi vom pune în locul lui a şi b alte două litere şi în locul lui c toate cele rămase, dar astfel încât produsul abc să fie scris în ordine alfabetică, etc.

Procedând în mod analog, găsim

$$(a+b+\cdots+1)^4=4\sum\nolimits_1 a^4+\sum\nolimits_2 a^3b+6\sum\nolimits_3 a^2b^2+12\sum\nolimits_4 a^2bc+24\sum\nolimits_5 abcd, \quad (2)$$

$$(a+b+\cdots+1)^5=\sum\nolimits_1 a^5+5\sum\nolimits_2 a^4b+10\sum\nolimits_3 a^3b^2+20\sum\nolimits_4 a^3bc+30\sum\nolimits_5 a^2b^2c+$$
$$+60\sum\nolimits_6 a^2bcd+120\sum\nolimits_7 abcde. \quad (3)$$

Pentru o înţelegere mai bună a acestei probleme şi pentru o scriere cât mai corectă a sumelor care intră în formulele (1), (2), (3), se va citi împreună cu prob. 24·3.

4. 7. *Se dau expresiile*

$$A_i=a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}-a_i+a_{i+1}+\cdots+a_n \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

şi se cere să se calculeze suma

$$S=A_1^2+A_2^2+\cdots+A_n^2.$$

Punem pentru prescurtare $A=a_1+a_2+\ldots+a_n$ încât

$$A_1=A-2a_1,\ A_2=A-2a_2,\ldots,\ A_n=A-2a_n,$$

formule care se scriu la un loc

$$A_i=A-2a_i \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Atunci

$$S=(A-2a_1)^2+(A-2a_2)^2+\cdots+(A-2a_n)^2=nA^2+4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)-$$
$$-4A(a_1+a_2+\cdots+a_n)=(n-4)A^2+4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2),$$

şi desvoltând pe A^2 după regula (VII') dela § 3, avem în sfârşit

$$S=n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+2(n-4)(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n).$$

Folosind simbolul de însumare $\sum$ tot acest calcul se poate scrie mai simplu astfel

$$S=\sum(A-2a_i)^2=\sum(A^2-4Aa_i+4a_i^2)=nA^2-4A\sum a_i+4\sum a_i^2=$$
$$=(n-4)A^2+4\sum a_i^2=(n-4)(\sum a_i^2+2\sum a_1a_2)+4\sum a_i^2=n\sum a_i^2+2(n-4)\sum a_1a_2,$$

cel de-al doilea simbol $\sum$ referindu-se la toate produsele ce se pot face cu numerele a_i luate câte două şi astfel încât indicele al doilea să fie mai mare decât primul.

4. 8. *Fie*

$$A=a_1+a_2+a_3,\ A_1=-a_1+a_2+a_3,\ A_2=a_1-a_2+a_3,\ A_3=a_1+a_2-a_3;$$

se cere să se calculeze suma

$$S=A^4+A_1^4+A_2^4+A_3^4.$$

Aplicând formula binomului, avem

$$S=A^4+(A-2a_1)^4+(A-2a_2)^4+(A-2a_3)^4=4A^4-8A^3(a_1+a_2+a_3)+$$
$$+24A^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)-32A(a_1^3+a_2^3+a_3^3)+16(a_1^4+a_2^4+a_3^4).$$

Insă,

$$A^3(a_1+a_2+a_3)=A^4,$$
$$A^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)=[(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+2(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)](a_1^2+a_2^2+a_3^2)$$
$$=(a_1^4+a_2^4+a_3^4)+2(a_1^2a_2^2+a_1^2a_3^2+a_2^2a_3^2)+$$
$$2(a_1^3a_2+a_1^3a_3+a_1a_2^3+a_2^3a_3+a_1a_3^3+a_2a_3^3)+2a_1a_2a_3A,$$
$$A(a_1^3+a_2^3+a_3^3)=(a_1^4+a_2^4+a_3^4)+(a_1^3a_2+a_1^3a_3+a_1a_2^3+a_2^3a_3+a_1a_3^3+a_2a_3^3),$$

încât,

$$S=-4A^4+8\sum a_1^4+48\sum a_1^2a_2^2+16\sum a_1^3a_2+48a_1a_2a_3A.$$

Dar, în baza lui (2) dela prob. 4. 6.

$$A^4=\sum a_1^4+4\sum a_1^3a_2+6\sum a_1^2a_2^2+12a_1a_2a_3A,$$

(ultima $\sum$ dispare deoarece în cazul nostru $d=0$). Incât

$$S=4\sum a_1^4+24\sum a_1^2a_2^2.$$

§ 5. Aplicaţii ale formulei binomului. Progresii aritmetice

1. Cea mai importantă aplicaţie a formulei binomului este calculul sumelor

$$S_k=1^k+2^k+\cdots+n^k,$$

în care k este un număr întreg şi pozitiv. Aceste sume se calculează, din aproape in aproape, cu ajutorul formulei

$$C_p^1S_{p-1}+C_p^2S_{p-2}+\cdots+C_p^{p-1}S_1+n=(n+1)^p-1. \qquad (I)$$

Primele sume au valorile

$$S_1=\frac{1}{2}n(n+1),\ S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\ S_3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2. \qquad (II)$$

2. Se numeşte *progresie aritmetică*, un şir de numere care se deduc fiecare din precedentul adunându-i un număr fix, numit *raţie*. Aceasta însemnează că dacă notăm cu a primul termen şi cu r raţia, progresia este

$$a, a+r, a+2r, a+3r, \ldots, a+nr, \ldots \qquad (III)$$

Suma primilor n termeni ai progresiei are drept expresie

$$S_n=a+(a+r)+(a+2r)+\cdots+[a+(n-1)r]=n\left[a+\frac{1}{2}r(n-1)\right]. \qquad (IV)$$

Deci, între a, r, n, și S_n avem relația (IV), încât dacă cunoaștem trei din ei, al patrulea este determinat.

3. *Raționamentul prin inducție sau din aproape în aproape.* Acest raționament se aplică la demonstrarea formulelor care depind de un număr n care poate lua orice valoare întreagă și pozitivă. Raționamentul constă în a arăta că, dacă formula considerată este adevărată pentru valoarea n, ea este adevărată și când înlocuim pe n cu $n+1$. Dacă verificăm că formula este adevărată pentru $n=1$, ea va fi adevărată și pentru $n=2$, etc. Formula este adevărată pentru orice valoare a lui n, adică este generală.

5. 1. *Să se arate că între coeficienții binominali, avem relația*

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1} \qquad (p+1 \leqq n).$$

Să se folosească apoi această relație pentru a dovedi formula

$$C_n^p + C_{n-1}^p + \cdots + C_{p+1}^p + C_p^p = C_{n+1}^{p+1}.$$

Înlocuind în prima parte coeficienții binominali prin valorile lor date de formula (III), § 4, avem succesiv

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\ldots p} + \frac{n(n-1)\ldots[n-(p+1)+2][n-(p+1)+1]}{1\cdot 2\ldots p(p+1)} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\ldots p} + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)(n-p)}{1\cdot 2\ldots p(p+1)} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\ldots p}\left(1+\frac{n-p}{p+1}\right) =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)(n+1)}{1\cdot 2\ldots p(p+1)} = \frac{(n+1)n\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\ldots(p+1)} =$$

$$= \frac{n+1)[(n+1)-1]\ldots[(n+1)-(p+1)+1]}{1\cdot 2\ldots(p+1)} = C_{n+1}^{p+1}.$$

Scriem relația demonstrată sub forma

$$C_n^p = C_{n+1}^{p+1} - C_n^{p+1},$$

în care, făcând pe n egal respectiv cu $n-1$, $n-2,\ldots,p+1$, obținem un șir de egalități care, adunate parte cu parte, dau

$$C_n^p + C_{n+1}^p + \cdots + C_{p+1}^p = C_{n+1}^{p+1} - C_{p+1}^{p+1},$$

care nu este altceva decât a doua relație din enunț, deoarece $C_{p+1}^{p+1} = 1 = C_p^p$.

5. 2. *Să se demonstreze identitatea*

$$C_{m+n}^p = C_m^p + C_m^{p-1} C_n^1 + C_m^{p-2} C_n^2 + \cdots + C_n^p.$$

Plecăm dela identitatea

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n,$$

și scriem că coeficienții lui x^p din ambele părți sunt egali. În prima parte este C_{m+n}^p. Pentru a găsi coeficientul în partea a doua înmulțim întâi coeficientul lui x^p din $(1+x)^m$ cu termenul liber din $(x+1)^n$ și obținem C_m^p;

apoi înmulţim coeficientul lui x^{p-1} din $(1+x)^m$ cu coeficientul lui x din $(1+x)^n$ şi obţinem $C_m^{p-1} C_n^1$; în general, înmulţind coeficientul lui x^{p-i} din $(1+x)^m$ cu coeficientul lui x^i din $(1+x)^n$ obţinem $C_m^{p-i} C_n^i$; adunând toate aceste rezultate parţiale şi scriind că rezultatul face C_{m+n}^p obţinem identitatea din enunţ.

5. 3. *Să se calculeze S_4 şi S_5 şi apoi să se demonstreze egalităţile*

$$5S_4 = S_2(6S_1 - 1), \qquad S_5 = \frac{4}{3} S_1^2 (S_1 - 1) + S_3.$$

Făcând în (I) $p=5$ avem

$$5S_4 + 10S_3 + 10S_2 + 5S_1 + n = (n+1)^5 - 1.$$

Inlocuind aici valorile date de (II), obţinem

$$S_4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

Analog, făcând în (I) $p=6$, avem

$$6S_5 + 15S_4 + 20S_3 + 15S_2 + 6S_1 + n = (n+1)^6 - 1,$$

de unde deducem

$$S_5 = \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2+2n-1).$$

Odată stabilite formulele care dau S_4 şi S_5, lăsăm cititorului stabilirea celor două egalităţi din enunţ.

5. 4. *Să se calculeze suma*

$$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2).$$

Pentru a calcula suma S, o scriem cu ajutorul simbolului $\sum$, şi anume

$$S = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2),$$

cei doi indici puşi deasupra şi dedesubtul lui $\sum$ ne arată dela ce valoare pleacă i şi la ce valoare ajunge pentru a avea toţi termenii sumei. Acum,

$$S = \sum_{i=1}^{n} i(i^2+3i+2) = \sum_{i=1}^{n} (i^3+3i^2+2i) = \sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= S_3 + 3S_2 + 2S_1 = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Metoda este generală şi se aplică totdeauna la calculul sumelor de tipul celei din enunţ.

5. 5. *Să se calculeze coeficientul lui x^{n-2} din desvoltarea produsului*

$$(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+n).$$

Notând cu A_2 acest coeficient, se observă imediat că el nu este altceva decât suma produselor câte două, luate în toate modurile posibile, a numerelor $1, 2, \ldots, n$. Aceasta înseamnă că putem scrie

$$(1+2+\cdots+n)^2 = S_2 + 2A_2,$$

de unde scoatem

$$A_2 = \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6}n\ (n+1)(2n+1)\right] =$$

$$= \frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2).$$

5. 6. *Să se arate că dacă numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică, atunci* $2b = a+c$, *și reciproc.*

Să presupunem că numerele sunt în progresie aritmetică. Aceasta înseamnă, că dacă r este rația, $b = a+r$, $c = a+2r$ numere care înlocuite în relația din enunț o verifică. Invers, să presupunem că numerele verifică relația din enunț; atunci

$$b - a = c - b$$

și notând cu r valoarea comună a celor două părți egale ale egalității, avem

$$b - a = r;\quad b = a+r;\quad c - b = r;\quad c = b+r = a+2r,$$

adică cele trei numere sunt în progresie aritmetică.

5. 7. *Intr'o progresie aritmetică de* 11 *termeni, suma termenilor este* 176 *și diferența extremilor,* 30. *Să se găsească progresia.*

Când se dă progresia printr'un număr mic de termeni, se aleg acești termeni în felul următor: a) dacă se consideră trei termeni, progresia se scrie

$$a - b,\ a,\ a+b,$$

în care $a-b$ este primul termen, iar b rația; dacă se consideră cinci termeni, progresia se scrie

$$a - 2b,\ a - b,\ a,\ a+b,\ a+2b,$$

în care $a-2b$ este primul termen, iar b este rația, ș. a. m. d.; procedeul este general pentru progresiile care au un număr fără soț de termeni. b) Dacă se consideră o progresie cu patru termeni, ei se scrie sub forma

$$a - 3b,\ a - b,\ a+b,\ a+3b,$$

în care primul termen este $a-3b$, iar rația $2b$; dacă progresia are șase termeni, îi scriem sub forma

$$a - 5b,\ a - 3b,\ a - b,\ a+b,\ a+3b,\ a+5b,$$

etc.; procedeul este general pentru progresiile cu un număr cu soț de termeni.

In cazul problemei noastre, scriem progresia sub forma

$$a - 5b,\ a - 4b, \ldots, a, \ldots, a+4b,\ a+5b.$$

Suma termenilor fiind 176, va trebui să avem

$$(a-5b) + (a-4b) + \cdots + (a+5b) = 11a = 176;\quad a = 16.$$

Diferența termenilor extremi

$$(a+5b) - (a-5b) = 10b = 30;\quad b = 3.$$

Progresia este: $\div$ 1, 3, ..., 31.

5. 8. *Să se demonstreze că pătratele numerelor* x^2-2x-1, x^2+1 *şi* x^2+2x-1 *sunt în progresie aritmetică, oricare ar fi* x.

Conform prob. 5. 6, problema se reduce la a demonstra identitatea

$$2(x^2+1)^2=(x^2-2x-1)^2+(x^2+2x-1)^2$$

care se face printr'un calcul simplu.

5. 9. *Să se stabilească identitatea*

$$1\cdot2\cdot3\ldots p+2\cdot3\ 4\ldots(p+1)+\cdots+(m+1)(m+2)\ldots(m+p)=$$
$$=\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p+1)}{p+1}.$$

Vom proceda prin *inducţie*. Pentru $m=0$, identitatea se reduce la

$$1\cdot2\cdot3\ldots p=\frac{1\cdot2\ldots p(p+1)}{p+1}$$

egalitate evident adevărată. Presupunem adevărată identitatea din enunţ şi ne propunem să arătăm atunci că ea este adevărată şi în cazul când înlocuim pe m cu $m+1$, cu alte cuvinte ne propunem să arătăm că avem şi

$$1\cdot2\cdot3\ldots p+2\cdot3\cdot4\ldots(p+1)+\cdots+(m+1)(m+2)\ldots(m+p)+$$
$$+(m+2)(m+3)\ldots(m+1+p)=\frac{(m+2)(m+3)\ldots(m+p+2)}{p+1}.$$

In adevăr, în baza identităţii din enunţ, presupusă adevărată, prima parte a acestei egalităţi este egală cu

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p+1)}{p+1}+(m+2)(m+3)\ldots(m+p+1)=$$
$$=(m+2)\ldots(m+p+1)\left(\frac{m+1}{p+1}+1\right)=\frac{(m+2)(m+3)\ldots(m+p+1)(m+p+2)}{p+1}.$$

5. 10. *Să se stabilească formula*

$$a^n+b^n=(a+b)^n-nab(a+b)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{2!}a^2b^2(a+b)^{n-4}-\ldots+$$
$$+(-1)^p\frac{n(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+1)}{p!}a^pb^p(a+b)^{n-2p}+\cdots$$

Pentru $n=2$ şi $n=3$, formula se reduce la identităţile imediate

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,\qquad a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b).$$

Ne propunem să demonstrăm că dacă identitatea din enunţ are loc cum şi cea ce se deduce din ea prin înlocuirea lui n cu $n-1$, atunci ea are loc şi în cazul când înlocuim pe n cu $n+1$. Pentru aceasta scriem, în baza ipotezelor făcute,

$$a^{n+1}+b^{n+1}=(a+b)(a^n+b^n)-ab(a^{n-1}+b^{n-1})$$
$$=(a+b)\left[(a+b)^n-nab(a+b)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{2!}a^2b^2(a+b)^{n-4}-\ldots\right]$$

$$-ab\left[(a+b)^{n-1}-(n-1)\,ab(a+b)^{n-3}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-1)(n-4)}{2!}a^2b^2(a+b)^{n-5}+\cdots\right]$$
$$=(a+b)^{n+1}-(n+1)\,ab\,(a+b)^{(n+1)-2}+$$
$$+\frac{(n+1)(n+1-3)}{2!}a^2b^2(a+b)^{(n+1)-4}-\cdots$$

şi în general, coeficientul lui $a^pb^p(a+b)^{(n+1)-2p}$ va fi

$$(-1)^p\frac{n(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+1)}{p!}+$$
$$+(-1)^p\frac{(n-1)[(n-1)-(p-1)-1][(n-1)-(p-1)-2]\ldots[(n-1)-2(p-1)+1]}{(p-1)!}=$$
$$=(-1)^p\frac{n(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+1)}{p!}+$$
$$+(-1)^p\frac{(n-1)(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+2)}{(p-1)!}=$$
$$=(-1)^p\frac{(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+2)}{p!}[n(n-2p+1)+p(n-1)]=$$
$$=(-1)^p\frac{(n+1)(n-p)(n-p-1)\ldots(n-2p+2)}{p!}=$$
$$=(-1)^p\frac{(n+1)[(n+1)-p-1][(n+1)-p-2]\ldots[(n+1)-2p+1]}{p!}$$

şi care nu este altceva decât coeficientul termenului general al identităţii din enunţ, în care înlocuim pe n cu $n+1$.

§ 6. Impărţirea polinoamelor. Descompunerea în factori

1. Impărţirea monoamelor se face împărţind coeficienţii între ei şi părţile literale între ele, după regula

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\qquad(m>n).$$

Dacă $m=n$, fracţia din prima parte este egală cu unitatea, având numărătorul egal cu numitorul, deci $a^0=1$.

Impărţirea unui polinom cu un monom se face împărţind toţi termenii *polinomului deîmpărţit* cu *monomul împărţitor:* rezultatul obţinut se numeşte *câtul* împărţirii. Un polinom se împarte totdeauna printr'un număr algebric.

Fiind dat un polinom A, dacă toate monoamele lui se împart cu un acelaşi monom M, atunci monomul M se numeşte *factor comun* al polinomului şi se poate scrie $A=M\cdot B$, unde B este câtul care se obţine împărţind pe A cu M.

2. Dacă între patru polinoame $A(x)$, $B(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ avem o relaţie de forma.

$$A(x)=B(x)\,Q(x)+R(x),\qquad(1)$$

şi dacă $R(x)$ este de grad mai mic decât al lui $B(x)$, atunci se spune că împărţind pe $A(x)$ *(deîmpărţitor)* cu $B(x)$ *(împărţitor)* obţinem *câtul* $Q(x)$ şi ne rămâne *restul* $R(x)$. Dacă $R(x)=0$, oricare ar fi x, se spune că împărţirea se face exact. Impărţirea algebrică este *unică,* cu alte cuvinte fiind date polinoamele $A(x)$ şi $B(x)$ există numai un polinom $Q(x)$ şi un polinom $R(x)$ care să satisfacă identităţei precedente (să nu se uite că prin ipoteză $R(x)$ are grad mai mic decât al lui $B(x)$.

Practic, operaţia împărţirii a două polinoame se face în modul următor. Ne fixăm atenţia asupra termenilor de gradul cel mai înalt din $A(x)$ şi $B(x)$ şi căutăm de câte ori intră termenul de gradul cel mai inalt din $B(x)$ în termenul de gradul cel mai înalt din $A(x)$. Rezultatul găsit îl înmulţim cu $B(x)$ şi îl scădem din $A(x)$. Găsim un nou polinom, care, dacă este de grad mai mare decât $B(x)$ continuăm operaţia în acelaş mod. Când ajungem prin această operaţie la un polinom de grad mai mic decât $B(x)$, operaţia împărţirii este terminată şi ultimul polinom obţinut este restul împărţirii.

3. Dacă $B(x)=x-a$, atunci restul $R(x)$ trebue să fie de gradul zero, adică o constantă; această constantă este: $R=P(a)$. Deci, dacă $P(a)=0$, polinomul $P(x)$ se împarte cu $x-a$.

Dacă $B(x)$ este de format $\alpha x+\beta$, atunci: $R=P\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)$.

4. Dacă un polinom $P(x)$ de gradul m se divide cu binoamele $x-a_1$, $x-a_2,\ldots,$ $x-a_n$ (numerele a_1, $a_2,\ldots,$ a_n sunt diferite între ele), atunci polinomul se divide cu produsul lor, adică putem scrie

$$P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)\,Q(x)$$

unde $Q(x)$ este un polnom de gradul $m-n$.

5. Dacă polinomul

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

are coeficienţi întregi şi dacă polinomul se divide cu binomul $ax+b$, a şi b fiind numere întregi, atunci a divide pe a_0 şi b divide pe a_n. In general, dacă coeficienţii polinomului $P(x)$ sunt polinoame în literele $\alpha, \beta,\ldots,\lambda$, şi dacă polinomul se divide cu $ax+b$, unde a şi b sunt deasemenea polinoame, în aceleaşi litere, atunci a divide pe a_0 şi b pe a_n.

6. 1. *Să se aetermine m şi n astfel, încât polinoamele*

$$x^4-3x^3+mx+n \quad \text{şi} \quad x^2-5x+4$$

să se dividă unul printr'altul.

Soluţia I. Făcându-se direct împărţirea, avem

$$\begin{array}{l|l} x^4-3x^3+mx+n & x^2-5x+4 \\ \underline{-x^4+5x^3-4x^2} & \overline{x^2+2x+6} \\ 2x^3-4x^2+mx+n & \\ \underline{-2x^3+10x^2-8x} & \\ 6x^2+(m-8)x+n & \\ \underline{-6x^2+30x-24} & \\ (m+22)x+(n-24) & \end{array}$$

operaţie care ne spune că făcând împărţirea ne rămâne restul

$$(m+22)x+(n-24).$$

Ori, pentru ca împărţirea să se facă exact, este necesar şi suficient ca acest rest să fie nul oricare ar fi x, adică să fie identic nul. Acest lucru are loc atunci când $m=-22$ şi $n=24$.

Soluţia II. Deoarece: $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$, pentru ca împărţirea să se facă exact este necesar ca primul polinom să se dividă separat prin $x-1$ şi $x-4$. Acest lucru are loc atunci când

$$P(1)=m+n-2=0, \quad P(4)=m+n+64=0.$$

Scăzând aceste două relaţii una din alta, rezultă $3m+66=0$, adică $m=-22$. Introducând această valoare în prima ecuaţie, rezultă imediat $n=24$.

6. 2. *Să se determine m astfel, încât polinomul*

$$P(x)=mx^4+3x^3-2x^2+x+1$$

să se dividă cu $2x+1$ şi apoi să i se găsească câtul.

Cum

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}m-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{16}m-\frac{3}{8}=0,$$

rezultă că $m=6$. Făcând inlocuirea lui m prin această valoare, se găseşte

$$P(x)=(2x+1)(3x^3-x+1).$$

6. 3. *Să se împartă polinomul*

$$P(x)=(x^3-12x+16)(x^3-12x-16)$$

prin x^2-16.

Polinomul dat este produsul a două polinoame $Q(x)$ şi $R(x)$. Observăm că: $Q(-4)=0$ şi $R(4)=0$, încât prima paranteza se divide cu $x+4$, iar a doua cu $x-4$. In adevăr, avem

$$Q(x)=(x+4)(x^2-4x+4) \quad \text{şi} \quad R(x)=(x-4)(x^2+4x+4).$$

Deci câtul împărţirii va fi

$$(x^2-4x+4)(x^2+4x+4)=(x-2)^2(x+2)^2=(x^2-4)^2=x^4-8x^2+16.$$

6. 4. *Să se arate că polinomul: $P(x)=x^{2n+1}+1$ se divide cu $x+1$ şi să se găsească câtul (n este presupus întreg şi pozitiv).*

Deoarece $2n+1$ este un număr fără soţ, $P(-1)=(-1)^{2n+1}+1=0$. Pentru a găsi câtul, putem proceda direct, sau precum urmează. Ştim că

$$x^{2n+1}-1=(x-1)(x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x+1);$$

schimbând pe x în $-x$ şi apoi semnul la întreaga identitate, găsim

$$x^{2n+1}+1=(x+1)(x^{2n}-x^{2n-1}-\cdots-x+1).$$

6. 5. *Să se arate că dacă un polinom simetric se divide cu $x-y$, atunci se divide şi cu $(x-y)^2$.*

Fie $P(x, y)$ un polinom simetric (§ 2, pct. 3)*); aceasta înseamnează că

$$P(x, y)=P(y, x).$$

Pe de altă parte însă, polinomul $P(x, y)$ se divide cu $x-y$, adică este de forma

$$P(x, y)=(x-y)\,Q(x, y).$$

Inlocuind această valoare în relaţia precedentă, ea devine

$$(x-y)\,Q(x, y)=(y-x)\,Q(y, x);\ Q(x, y)=-Q(y, x).$$

Făcând aici $x=y$, rezultă $Q(y, y)=0$. Inseamnă că înlocuind în polinomul $Q(x, y)$ pe x cu y, obţinem zero, adică

$$Q(x, y)=(x-y)\,R(x, y),$$

deci:

$$P(x, y)=(x-y)^2\,R(x, y).$$

6. 6. *Să se arate că polinomul*

$$P(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}.$$

se divide cu x^2+x+1, oricare ar fi numerele m, n, p întregi şi pozitive.

Scriem polinomul dat sub forma

$$P(x)=(x^{3m}-1)+x\,(x^{3n}-1)+x^2\,(x^{3p}-1)+(x^2+x+1).$$

Dar, oricare ar fi α întreg şi pozitiv, conform identităţii (§ 3, 1)

$$x^{3\alpha}-1=(x^3-1)\,(x^{3(\alpha-1)}+x^{3(\alpha-2)}+\cdots+x^3+1)$$
$$=(x-1)\,(x^2+x+1)\,(x^{3(\alpha-1)}+x^{3(\alpha-2)}+\cdots+x^3+1),$$

adică se divide cu x^2+x+1. In baza acestei proprietăţi, din modul cum este scris $P(x)$ rezultă că el se divide cu x^2+x+1.

Problema se poate generaliza.

6. 7. *Să se arate că polinomul*

$$P(x)=(x-1)^{n+2}+x^{2n+1},$$

se divide cu x^2-x+1, n fiind un număr întreg şi pozitiv.

Notăm, pentru prescurtare, cu $A=x^2-x+1$, de unde scoatem

$$x-1=x^2-A.$$

Deci, în desvoltarea lui

$$(x-1)^{n+2}=(x^2-A)^{n+2},$$

toţi termenii îl vor conţine pe A, afară de primul. Notându-i pe toţi ce-l conţin pe A prin $A\cdot Q$, avem

$$(x-1)^{n+2}=A\cdot Q+x^{2(n+2)},$$

şi deci

$$P(x)=A\cdot Q+x^{2n+1}(x^3+1)=A\,[Q+x^{2n+1}(x+1)].$$

*) Adică aliniatul 3 dela indicaţiile date la § 2.

6. 8. *Să se arate că polinomul*

$$(x+y+z)^{2n+1}-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}$$

(n întreg şi pozitiv), se divide cu polinomul:

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3.$$

Scriem pe împărţitor sub o formă mai convenabilă. In baza identităţilor cunoscute, avem

$$[(x+y+z)^3-x^3]-(y^3+z^3)=[(x+y+z)-x]\,[(x+y+z)^2+x\,(x+y+z)+x^2].$$
$$-(y+z)\,(y^2-yz+z^2)=3\,(y+z)\,(x^2+xy+yz+zx).$$
$$=3\,(x+y)\,(y+z)\,(z+x).$$

Lăsând de o parte factorul 3 care împarte totdeauna orice polinom, trebue să arătăm că polinomul dat se împarte cu $x+y$, $y+z$, $z+x$.

Inlocuind pe x cu $-y$, avem

$$z^{2n+1}-(-y)^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}=0,$$

adică se divide cu $x+y$. Polinomul dat fiind simetric, se va divide şi cu ceilalţi factori ai împărţitorului.

6. 9. *Să se arate că polinomul*

$$P(x)=x^{n+1}-(n+1)\,x+n,$$

se divide cu $(x-1)^2$ *şi să i se găsească câtul (n întreg şi pozitiv).*

Vom căuta să punem pe $(x-1)^2$ în factor. Se constată imediat că polinomul este divizibil cu $x-1$; pentru cât avem succesiv:

$$P(x)=x\,(x^n-1)-n\,(x-1)=(x-1)\,(x^n+x^{n-1}+\cdots+x-n).$$

Dacă înlocuim în cât pe x cu 1, obţinem zero, adică şi el se divide cu $x-1$. Mai departe, descompunându-l pe n în unităţi, avem

$$P(x)=(x-1)\,[(x^n-1)+(x^{n-1}-1)+\cdots+(x-1)].$$
$$=(x-1)^2\,[(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)+(x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)+$$
$$+\cdots+(x+1)+1].$$
$$=(x-1)^2\,(x^{n-1}+2x^{n-2}+3x^{n-3}+\cdots+n).$$

9. 10. *Să se descompună în factori expresia:*

$$a\,(b-c)^2+b\,(c-a)^2+c\,(a-b)^2+4abc.$$

Se găseşte că expresia din enunţ are drept valoare:

$$(a+b)\,(b+c)\,(c+a).$$

6. 11. *Să se descompună în factori polinomul*

$$P(x,y,z)=(x+y+z)^5-(x+y-z)^5-(x-y+z)^5-(-x+y+z)^5. \qquad (1)$$

Făcând $x=0$ avem

$$P(0,y,z)=(y+z)^5-(y-z)^5-(-y+z)^5-(y+z)^5=0,$$

ceeace înseamnează că $P(x, y, z)$ se divide cu $x-0=x$; prin simetrie, însemnează că polinomul se va divide cu y şi cu z. Cum polinomul este omogen şi de gradul 5, va trebui să avem

$$P(x, y, z)=xyz(ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fzx),$$

unde $a, b, \ldots, f$ sunt nişte coeficienţi pe care urmează să-i determinăm. Privind polinomul dat numai în raport cu x şi y vedem că nu se schimbă când schimbăm aceste litere între ele, ceeace înseamnă că este simetric în raport cu aceste două litere. La fel este simetric în raport cu y, z şi z, x. In baza observării dela prob. 2. 7, trebue deci

$$P(x, y, z)=xyz[a(x^2+y^2+z^2)+d(xy+yz+zx)]. \qquad (2)$$

Pentru a determina pe a şi d, ţinem seamă că această relaţie este o identitate, deci trebue să aibă loc pentru orice valori ale lui x, y, z. Facem $x=y=z=1$ şi apoi $x=y=1$, $z=-1$. Comparând valorile lui (1) şi (2) între ele, deducem relaţiile

$$a+d=80, \quad 3a-d=240,$$

care dau imediat $d=0$ şi deci $a=80$. Rezultă

$$P(x, y, z)=80xyz(x^2+y^2+z^2).$$

6. 12. *Să se descompună în factori polinomul*

$$P(x)=x^6+3ax^5-9a^3x^3-15a^4x^2-12a^5x-4a^6.$$

Deoarece polinomul este omogen în raport cu a şi x, este natural să căutăm factori de forma $x+ka$, unde k este un factor numeric. Incercăm mai întâi cu valorile cele mai simple $x-a$ sau $x+a$. Se găseşte că $P(-a)=0$, adică $P(x)$ se împarte numai cu $x+a$. Făcând împărţirea, găsim

$$P(x)=(x+a)(x^5+2ax^4-2a^2x^3-7a^3x^2-8a^4x-4a^5).$$

Pentru noul polinom începem în acelaşi fel, dar nu mai încercăm cu $x-a$ căci dacă ar fi factor, el ar fi şi pentru $P(x)$ şi am văzut că nu este. Constatăm că $x+a$ este din nou factor

$$P(x)=(x+a)^2(x^4+ax^3-3a^2x^2-4a^3x-4a^4).$$

Noul polinom nu mai are factor pe $x+a$, dar se anulează când înlocuim pe x cu $-2a$ şi cu $+2a$, încât

$$P(x)=(x+a)^2(x-2a)(x+2a)(x^2+ax+a^2).$$

§ 7. Cel mai mare comun divizor şi cel mai mic comun multiplu al mai multor polinoame

1. Cel mai mare comun divizor, sau prescurtat c. m. m. c. d., a două polinoame este polinomul de gradul cel mai mare (abstracţie făcând de un factor constant) care împarte ambele polinoame. Pentru a-l obţine se procedează prin împărţire, în felul următor. Dacă $A(x)$ şi $B(x)$ sunt cele două polinoame, primul fiind de grad mai mare sau cel puţin de acelaşi grad cu al doilea, se împarte

$A(x)$ prin $B(x)$ şi fie $R(x)$ restul obţinut; se împarte $B(x)$ prin $R(x)$ şi fie $R_1(x)$ restul; se împarte $R(x)$ prin $R_1(x)$ etc. Două cazuri se pot întâmpla: a) La un moment dat, împărţirea se face exact; atunci c. m. m. c. d. este ultimul împărţitor. b) Ultimul rest este o constantă; se zice că cele două polinoame sunt *prime* între ele, adică nu au divizori comuni.

Dacă ni se cere c. m. m. c. d. al mai multor polinoame $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, ... se caută c. m. m. c. d. al primelor două, fie $D_1(x)$, apoi c. m. m. c. d. al lui $D_1(x)$ cu $C(x)$, etc. Ultimul c. m. m. c. d. este c. m. m. c. d. al tuturor polinoamelor. Dacă la un moment dat un c. m. m. c. d. intermediar este o constantă, însemnează că polinoamele date sunt prime între ele.

2. Cel mai mic comun multiplu, sau prescurtat c. m. m. c. m., a două polinoame $A(x)$ şi $B(x)$ este polinomul de gradul cel mai mic (abtsracţie făcând de o constantă) care se divide în acelaşi timp cu ambele polinoame. Dacă $D(x)$ este c. m. m. c. d. al polinoamelor date, atunci c. m. m. c. m. al lor este $\frac{A(x)\,B(x)}{D(x)}$.

Dacă avem mai multe polinoame $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, ..., atunci c. m. m. c. m. al lor se găseşte din aproape în aproape, aşa cum am procedat şi la c. m. m. c. d.

Observaţie. In împărţirile succesive pe care le avem de făcut pentru a găsi pe c. m. m. c. d. se pot înmulţi sau împărţi resturile succesive cu un factor comun, în vederea evitării coeficienţilor fracţionari sau a simplificării lor, fără a se schimba rezultatul.

7. 1. *Să se afle c. m. m. c. d. al polinoamelor*

$$A(x)=x^6-x^5-3x^4+x^3-4x-3,$$
$$B(x)=x^4-3x^2-4x-3.$$

Prima împărţire este

$$\begin{array}{l|l} x^6-x^5-3x^4+x^3-4x-3 & x^4-3x^2-4x-3 \\ \hline -x^5+5x^3+3x^2-4x & x^2-x \\ \hline 2x^3-x^2-7x-3=R(x). & \end{array}$$

Pentru a evita coeficienţii fracţionari, se înmulţesc $B(x)$ cu 2:

$$\begin{array}{l|l} 2x^4-6x^2-8x-6 & 2x^3-x^2-7x-3 \\ \hline -2x^4+x^3+7x^2+3x & x/1 \\ \hline x^3+x^2-5x-6 & \text{(se înmulţeşte cu 2)} \\ \hline 2x^3+2x^2-10x-12 & \\ -2x^3+x^2+7x+3 & \\ \hline 3x^2-3x-9=R_1(x). & \end{array}$$

La $R_1(x)$ se lasă deoparte factorul 3 şi se împarte $R(x)$ cu $\frac{1}{3}R_1(x)$:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-x^2-7x-3 & x^2-x-3 \\ \hline -2x^3+2x^2+6x & 2x+1 \\ \hline x^2-x-3 & \\ -x^2+x+3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Cele două polinoame au ca c. m. m. c. d. pe : x^2-x-3.

7. 2. *Să se găsească c. m. m. c. d. al polinoamelor*

$$A(x)=x^4-2x^3-2x^2+5x-2,$$
$$B(x)=x^4+2x^3-2x^2-3x+2,$$
$$C(x)=x^4+2x^3+x^2-1.$$

Împărţind primul cu al doilea polinom,

$$\begin{array}{r|l} x^4-2x^3-2x^2+5x-2 & x^4+2x^3-2x^2-3x+2 \\ \hline -x^4-2x^3+2x^2+3x-2 & 1 \\ \hline -4x^3 \quad +8x-4=R(x). & \end{array}$$

Lăsând deoparte factorul -4 şi împărţind pe $B(x)$ prin $-\frac{1}{4}R(x)$,

$$\begin{array}{r|l} x^4+2x^3-2x^2-3x+2 & x^3-2x+1=D(x) \\ \hline -x^4 \quad +2x^2-x & x+2 \\ \hline 2x^3 \quad -4x+2 & \\ -2x^3 \quad +4x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Deci c. m. m. c. d. al lui $A(x)$ şi $B(x)$ este $D(x)=x^3-2x+1$. Împărţind pe $C(x)$ cu $D(x)$, avem

$$\begin{array}{r|l} x^4+2x^3+x^2-1 & x^3-2x+1 \\ \hline -x^4+2x^2-x & x+2 \\ \hline 2x^3+3x^2-x & \\ -2x^3+4x-2 & \\ \hline 3x^2+3x-3=R_1(x). & \end{array}$$

Lăsăm deoparte factorul 3 la $R_1(x)$ şi împărţim pe $D(x)$ cu $\frac{1}{3}R_1(x)$:

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x+1 & x^2+x-1 \\ \hline -x^3-x^2+x & x-1 \\ \hline -x^2-x+1 & \\ x^2+x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

adică c. m. m. c. d. al celor trei polinoame este: x^2+x-1.

7. 3. *Să se găsească c. m. m. c. m. al polinoamelor*

$$A(x)=2x^4+3x^3+4x^2+2x+1, \quad B(x)=x^4+x^2+1.$$

Începem prin a căuta c. m. m. c. d. făcând împărţirile în lanţ; avem succesiv (câturile parţiale sunt scrise deasupra împărţitorilor)

$2x^4+3x^3+4x^2+2x+1$	2	$x/-2$	$3x-1$
$-2x^4 \quad -2x^2 \quad -2$	x^4+x^2+1	$3x^3+2x^2+2x-1$	x^2+x+1
$3x^3+2x^2+2x-1$	$3x^4+3x^2+3$	$-3x^3-3x^2-3x$	c.m.m.c.d.=
	$-3x^4-2x^3-2x^2+x$	$-x^2-x-1$	$=D(x)=$
	$-2x^3+x^2+x+3$	x^2+x+1	$x^2+x+1.$
	$-6x^3+3x^2+3x+9$	0	
	$6x^3+4x^2+4x-2$		
	$7x^2+7x+7$		
	x^2+x+1		

Cum $D(x)$ împarte pe $A(x)$ şi $B(x)$, avem pentru c. m. m. c. m.

$$M(x)=\frac{A(x)}{D(x)}B(x)=(2x^2+x+1)(x^4+x^2+1)=2x^6+x^5+3x^4+x^3+3x^2+x+1.$$

7. 4. *Să se găsească c. m. m. c. d. al polinoamelor*

$$A(x,\ y)=x^8-2x^4y^4+y^4,\quad B(x,y)=x^3+x^2y-xy^2-y^3,$$
$$C(x,\ y)=x^3-x^2y-xy^2+y^3.$$

Avem

$$A(x,\ y)=(x^4-y^4)^2=(x^2-y^2)^2(x^2+y^2)^2=(x-y)^2(x+y)^2(x^2+y^2)^2,$$
$$B(x,\ y)=x^2(x+y)-y^2(x+y)=(x^2-y^2)(x+y)=(x-y)(x+y)^2,$$
$$C(x,\ y)=x^2(x-y)-y^2(x-y)=(x^2-y^2)(x-y)=(x-y)^2(x+y).$$

Aceste descompuneri exprimă că c. m. m. c. d. al celor două polinoame este

$$D(x,\ y)=(x-y)(x+y)=x^2-y^2.$$

7. 5. *Să se găsească c. m. m. c. d. al polinoamelor* x^m-1 *şi* x^n-1. Presupunem $m>n$ şi fie $m=nq+r\ (r<n)$. Atunci

$$\begin{array}{l|l} x^m-1=x^{nq+r}-1 & x^n-1 \\ \quad +x^{n(q-1)+r} & \overline{x^{n(q-1)+r}+x^{n(q-2)+r}+\cdots+x^r} \\ \quad +x^{n(q-2)+r} & \\ \quad \cdots\cdots & \\ \quad +x^{n+r} & \\ \quad +x^r-1 & \end{array}$$

şi împărţirea nu se mai poate continua, deoarece $r<n$. Fie acum $n=rq_1+r_1$; împărţirea a doua, adică împărţirea lui x^n-1 cu x^r-1, se va face în mod analog şi ne va da restul $x^{r_1}-1$; continuăm în felul acesta, până când restul va fi nul. Două cazuri se pot întâmpla: 1°. In împărţirile succesive pe care le facem asupra exponenţilor ajungem la un rest nul; penultimul rest este c. m. m. c. d. al numerelor m şi n, fie d. Atunci, ultima împărţire între polinoame se va face exact, c. m. m. c. d. al lor fiind x^d-1. 2°. m şi n sunt primi între ei, adică ultimul rest $r_p=1$. Ultima împărţire între polinoame se va face exact şi c. m. m. c. d. al lor va fi $x-1$.

§ 8. Fracţii

1. Se numeşte *fracţie raţională* o fracţie care este câtul a două polinoame. Prima problemă care se pune în cazul fracţiilor este *simplificarea.* Pentru ca o fracţie să se simplifice cu un polinom, trebue ca acest polinom să fie factor atât la *numărător,* cât şi la *numitor,* adică să dividă exact ambii *termeni* ai fracţiei.

Operaţiile cu fracţiile se fac ca şi în aritmetică:

a) Pentru a face suma algebrică a mai multe fracţii, le aducem mai întâi la acelaşi numitor, care nu este altceva decât c. m. m. c. m al numitorilor tuturor fracţiilor. Odată numitorul comun găsit, îl împărţim cu numitorii fiecărei fracţii, câturile le înmulţim cu numărătorii respectivi şi apoi facem suma algebrică a acestor produse, ceeace va reprezenta numărătorul rezultatului, numitorul fiind numitorul comun.

b) Două sau mai multe fracţii se înmulţesc înmulţind numărătorii între ei şi numitorii între ei. Dacă avem de înmulţit o fracţie cu un polinom, înmultim numărătorul cu polinomul şi lăsăm numitorul neschimbat.

c) Două fracţii se împart înmulţind prima cu a doua răsturnată. Pentru a împărţi o fracţie cu un polinom, înmulţim numitorul cu polinomul şi lăsăm numărătorul neschimbat. Dacă avem de împărţit un polinom cu o fracţie, înmulţim polinomul cu fracţia răsturnată.

Observaţii: a) A împărţi expresia A cu expresia B, este tot una cu a înmulţi pe A cu $\frac{1}{B}$.

b) Când avem de împărţit o expresie algebrică scrisă sub formă de produs cu o altă expresie algebrică, este suficient să împărţim numai unul din factori.

c) Egalitatea

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \text{ trage după sine } AD=BC.$$

în particular

$$\frac{A}{B}=C \text{ se mai scrie } A=BC.$$

d) Linia de fracţie ţine loc de paranteză.

e) O fracţie poate fi simplificată cu oricare număr, afară de zero şi infinit.

8. 1. *Să se simplifice fracţia*

$$\frac{(a^2+b^2-c^2)^2-(a^2-b^2+c^2)^2}{4ab^2+4abc}.$$

Deoarece

$$(a^2+b^2-c^2)^2-(a^2-b^2+c^2)^2=[(a^2+b^2-c^2)+(a^2-b^2+c^2)]$$
$$[(a^2+b^2-c^2)-(a^2+b^2+c^2)]=4a^2(b^2-c^2),$$

fracţia dată este egală cu

$$\frac{4a^2(b^2-c^2)}{4ab(b+c)}=\frac{a(b-c)}{b}.$$

8. 2. *Să se simplifice fracția*

$$\frac{x^{2^n}-1}{x-1}.$$

Cum

$$x^{2^n}-1=(x^{2^{n-1}})^2-1=(x^{2^{n-1}}-1)(x^{2^{n-1}}+1)=(x^{2^{n-2}}-1)(x^{2^{n-2}}+1)(x^{2^{n-1}}+1)$$
$$=(x^{2^{n-3}}-1)(x^{2^{n-3}}+1)(x^{2^{n-2}}+1)(x^{2^{n-1}}+1)=\cdots$$
$$=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\cdots(x^{2^{n-1}}+1),$$

fracția va fi egală cu

$$\frac{x^{2^n}-1}{x-1}=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\cdots(x^{2^{n-1}}+1).$$

8. 3. *Să se adune fracțiile*

$$\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}-\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}+\frac{2b^3-b^2+a^2}{a^2-b^2}.$$

Numitorul comun este a^2-b^2 și rezultatul este 1.

8. 4. *Să se adune fracțiile*

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}.$$

Numitorul comun este $abc(a-b)(b-c)(c-a)$ iar numărătorul

$$-bc(b-c)-ac(c-a)-ab(a-b)=-bc(b-c)-a[a(b-c)-(b^2-c^2)]$$
$$=(b-c)[a(c-a)-b(c-a)]=(a-b)(b-c)(c-a),$$

încât expresia din enunț este egală cu $\frac{1}{abc}$.

8. 5. *Să se calculeze expresia*

$$\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}+1\right)\frac{ab}{a^2+b^2}.$$

Deoarece

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}=\frac{(a-b)^2+(a+b)^2}{a^2-b^2}=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2},$$
$$\frac{a^2+b^2}{2ab}+1=\frac{a^2+b^2+2ab}{2ab}=\frac{(a+b)^2}{2ab},$$

vom avea drept valoare a expresiei date

$$\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\cdot\frac{(a+b)^2}{2ab}\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{a+b}{a-b}.$$

8. 6. *Să se calculeze*

$$\left(a+\frac{b-a}{1+ab}\right):\left[1-\frac{1+ab}{a(b-a)}\right].$$

Avem

$$\frac{a(1+ab)+b-a}{1+ab} : \frac{a(b-a)-1-ab}{a(b-a)} = \frac{b(a^2+1)}{1+ab} \cdot \frac{a(b-a)}{-(a^2+1)} = \frac{ab(a-b)}{1+ab}.$$

8. 7. *Să se calculeze*

$$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}} : \frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a+c}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a+c}}.$$

Avem

$$\frac{\frac{b+c-a}{a(b+c)}}{\frac{b+c+a}{a(b+c)}} \cdot \frac{\frac{a+c+b}{b(a+c)}}{\frac{a+c-b}{b(a+c)}} = \frac{b+c-a}{b+c+a} \cdot \frac{a+c+b}{a+c-b} = \frac{b+c-a}{a+c-b}.$$

8. 8. *Să se calculeze*

$$E = \frac{3abc}{-ab+ac+bc} - \frac{\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}+\frac{c-1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}.$$

Inmulţind numărătorul şi numitorul fracţiei a doua cu abc, avem

$$E = \frac{3abc}{-ab+ac+bc} - \frac{bc(a-1)+ac(b-1)+ab(c-1)}{bc+ac-ab}$$

$$= \frac{3abc-bc(a-1)-ac(b-1)-ab(c-1)}{bc+ac-ab} = \frac{bc+ca+ab}{bc+ca-ab}.$$

8. 9. *Fie:* $2p=a+b+c$; *să se arate că avem*

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}-\frac{1}{p} = \frac{abc}{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Aducându-se la acelaşi numitor în prima parte, numărătorul are succesiv valoarea, înlocuind pe $a+b+c=2p$,

$$p[(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)+(p-a)(p-b)]-(p-a)(p-b)(p-c)$$
$$= p[3p^2-2(a+b+c)p+ab+bc+ca]-[p^2-(a+b)p+ab](p-c)$$
$$= p(-p^2+ab+bc+ca)-[p^3-(a+b+c)p^2+p(ab+bc+ca)-abc] = abc,$$

adică ceeace trebue arătat.

Observaţie. Considerând pe a, b, c ca laturile unui triunghiu, această relaţie se scrie sub forma

$$r_a+r_b+r_c-r=4R,$$

unde r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor exînscrise, r raza cercului înscris şi R raza cercului circumscris. In adevăr, într'un triunghiu oarecare avem

$$r_a = \frac{S}{p-a}, \cdots, r = \frac{S}{p}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}.$$

8. 10. *Să se găsească condiţia ca fracţia raţională*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m},$$

să fie independentă de x şi să i se găsească în acest caz valoarea.

Fie k valoarea fracţiei independentă de x; atunci

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = k(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m).$$

Cum această egalitate trebue să aibă loc *oricare ar fi* x, ea este o identitate Aplicând teorema referitoare la polinoamele identice (§ 2, pct. 2), rezultă, în primul rând că cele două polinoame care formează părţile acestei egalităţi trebuie să aibă acelaşi grad, adică $m=n$. In al doilea rând, trebue ca

$$a_0 = kb_0,\ a_1 = kb_1,\ \ldots,\ a_{n-1} = kb_{n-1},\ a_n = kb_n;$$

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = k, \qquad (1)$$

adică coeficienţii aceloraşi puteri să fie proporţionali.

Reciproc, dacă $P(x)$ şi $Q(x)$ au acelaşi grad şi coeficienţii aceloraşi puteri proporţionali, fracţia dată este independentă de x. In adevăr, scoţând din (1) valorile coeficienţilor a şi înlocuindu-le în $P(x)$ rezultă $P(x) = kQ(x)$, adică

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = k \text{ (independent de } x).$$

Deci: *condiţia necesară şi suficientă pentru ca o fracţie să fie independentă de x este ca cele două polinoame care formează termenii fracţiei să fie de acelaşi grad şi coeficienţii aceloraşi puteri ale lui x fie proporţionali.*

Valoarea fracţiei este egală cu câtul oricărora din coeficienţii asemenea, de exemplu $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0}{b_0}$.

Teorema poate fi aplicată imediat la cazul fracţiilor raţionale în mai multe litere având acelaşi enunţ.

8. 11. *Să se determine m astfel ca fracţia*

$$E = \frac{(mx+y+z)^2 + (x+my+z)^2 + (x+y+mz)^2}{(y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2},$$

să fie independentă de x, y, z.

O valoare a lui m este imediată, şi anume $m=0$, pentru care $E=1$. Să vedem dacă este singura. Făcând desvoltările şi ordonând după

$$x^2+y^2+z^2 = X,\ xy+yz+zx = Y,$$

expresia dată se scrie

$$E = \frac{(m^2+2)X + 2(2m+1)Y}{2X+2Y}.$$

Ori, pentru ca fracţia să fie independentă de x, y, z este necesar să fie independentă şi de X, Y, adică, conform teoremei stabilite la problema precedentă, trebue să avem

$$\frac{m^2+2}{2} = \frac{4m+2}{2}; \; m(m-4) = 0,$$

adică putem avea $m=0$, după cum am văzut mai sus, sau $m=4$, pentru care $E = \frac{1}{2}(m^2+2) = 2m+1 = 9$.

§ 9. Puteri şi radicali

1. Dacă $a>0$, se numeşte $\sqrt[n]{a}$ un număr care ridicat la puterea n dă pe a. Numărul $\sqrt[n]{a}$ este considerat esenţial *pozitiv*, (cum se mai spune, radical aritmetic). De exemplu, $\sqrt{a^2}$ face a dacă $a>0$ şi $-a$ dacă $a<0$. Am putea spune cu $\sqrt{a^2} = |a|$, unde prin cele două bare verticale, înţelegem, ca deobicei valoarea absolută (valoarea aritmetică) a numărului a. Numărul n întreg şi pozitiv se numeşte *indicele* radicalului. Radicalii astfel definiţi, se bucură de următoarele proprietăţi

$$\sqrt[n]{A}\sqrt[n]{B}\sqrt[n]{C}\ldots = \sqrt[n]{A\cdot B\cdot C\ldots}, \tag{I}$$

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}, \tag{II}$$

$$(\sqrt[n]{A})^m = \sqrt[n]{A^m}, \tag{III}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[mn]{A}. \tag{IV}$$

Aceste reguli se pot aplica direct şi invers.

Observaţie. Condiţia ca $a>0$ este strict necesară în ipoteza că indicele radicalului este cu soţ. In cazul când indicele este fără soţ, se poate vorbi de $\sqrt[n]{a}$ şi când $a<0$, dar atunci $\sqrt[n]{a}$ este şi el negativ. In adevăr, există un număr negativ $\sqrt[n]{a}$ care, ridicat la o putere fără soţ, să dea numărul negativ a. Aceşti radicali verifică deasemenea regulile de mai sus.

2. Simbolul a^m $(a>0)$ are următoarele definiţii: 1° dacă m este întreg şi pozitiv, a^m reprezintă pe a înmulţit prin el însuşi de m ori; 2° dacă m este fracţionar şi pozitiv, fie $m=\frac{p}{q}$, atunci $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$; 3° dacă m este negativ, fie $m=-n$ $(n>0)$ atunci $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, numitorul fiind definit ca la primele două puncte*).

Oricare ar fi m, simbolul a^m astfel definit este supus următoarelor trei reguli

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \tag{V}$$

*) Dacă m este iraţional se va vedea § 31, pct. 13.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad \text{(VI)}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \qquad \text{(VII)}$$

complectate cu

$$(ab)^m = a^m b^m. \qquad \text{(VIII)}$$

9. 1. *Să se calculeze*

$$\sqrt{12}+2\sqrt{27}+3\sqrt{75}-9\sqrt{48}.$$

Scoţând de sub radicali factorii care sunt pătrate perfecte, expresia dată se scrie

$$\sqrt{2^2\cdot 3}+2\sqrt{3^2\cdot 3}+3\sqrt{5^2\cdot 3}-9\sqrt{4^2\cdot 3}=2\sqrt{3}+6\sqrt{3}+15\sqrt{3}-36\sqrt{3}=-13\sqrt{3}.$$

9. 2. *Să se calculeze*

$$E=\sqrt{\frac{9a^2}{b^2}-\frac{12a^3c^2}{bd^2}+\frac{4a^4c^4}{d^4}}.$$

Expresia dată se restrânge imediat sub forma unui pătrat perfect:

$$E=\sqrt{\left(\frac{3a}{b}-\frac{2a^2c^2}{d^2}\right)^2}.$$

Conform convenţiei făcute de noi, radicalul este un număr întotdeauna pozitiv, ceeace înseamnează că

$$E=\begin{cases}\dfrac{3a}{b}-\dfrac{2a^2c^2}{d^2} & \text{dacă } \dfrac{3a}{b}>\dfrac{2a^2c^2}{d^2}\\ 0 \qquad\quad \text{„} & \dfrac{3a}{b}=\dfrac{2a^2c^2}{d^2},\\ \dfrac{2a^2c^2}{d^2}-\dfrac{3a}{b} \quad \text{„} & \dfrac{2a^2c^2}{d^2}>\dfrac{3a}{b}.\end{cases}$$

9. 3. *Să se calculeze*

$$E=\sqrt{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}.$$

Se poate presupune că expresia de sub radical este un pătrat perfect. Pentru a verifica dacă este aşa, trebue să căutăm un trinom de forma ax^2+bx+c care, ridicat la pătrat, să ne dea expresia de sub radical. Va trebui să avem identitatea

$$x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(ax^2+bx+c)^2=a^2x^4+2abx^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2,$$

deci rezultă

$$a^2=1, \quad 2ab=2, \quad b^2+2ac=3, \quad 2bc=2, \quad c^2=1.$$

Prima egalitate*) spune că $a=1$ sau $a=-1$; găsim astfel mai departe soluţiile

$$\begin{array}{lll} a=1, & b=1, & c=1,\\ a=-1, & b=-1, & c=-1; \end{array}$$

*) Este o ecuaţie de gradul 2 (v. § 12) care are două rădăcini.

adică putem lua pentru E valoarea x^2+x+1 sau $-x^2-x-1$. Pe care o luăm? Evident că pe prima, deoarece x^2+x+1 este totdeauna pozitiv*); deci $E=x^2+x+1$.

9. 4. *Să se calculeze*

$$P(x)=(x+\sqrt{x^2+1})^6+(x-\sqrt{x^2+1})^6.$$

Conform formulei binomului, avem

$$(x\pm\sqrt{x^2+1})^6=x^6\pm 6x^5\sqrt{x^2+1}+15x^4(x^2+1)\pm 20x^3(\sqrt{x^2+1})^3+15x^2(x^2+1)^2+$$
$$\pm 6x(\sqrt{x^2+1})^5+(x^2+1)^3,$$

încât

$$P(x)=2(32x^6+48x^4+3x^2+1).$$

9. 5. *Să se facă calculul*

$$\sqrt[2m]{\sqrt[3n]{a^5}}\cdot\sqrt[6m]{\sqrt[n]{a^3}}\cdot\sqrt[m]{\sqrt[6n]{a^9}}\cdot\sqrt[6n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Avem

$$\sqrt[6mn]{a^5}\cdot\sqrt[6mn]{a^3}\cdot\sqrt[6mn]{a^9}\cdot\sqrt[6mn]{a}=\sqrt[6mn]{a^{5+3+9+1}}=\sqrt[6mn]{a^{18}}=\sqrt[mn]{a^3}.$$

9. 6. *Să se calculeze*

$$\left(\sqrt[m]{a^{-\frac{2}{n}}}+\sqrt[p]{a^{\frac{1}{n}}b}+2\sqrt[p]{\sqrt{b}}\sqrt{\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{m-2p}}}}}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (a,\ b>0)$$

Transformând totul în exponenţi fracţionari,

$$\left[\left(a^{-\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}+\left(a^{+\frac{1}{n}}b\right)^{\frac{1}{p}}+2\left(b^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(a^{\frac{m-2p}{p}}\right)^{\frac{1}{2mn}}\right]^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(a^{-\frac{2}{mn}}+a^{\frac{1}{np}}b^{\frac{1}{p}}+2a^{\frac{m-2p}{2mnp}}b^{\frac{1}{2p}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{-\frac{2}{mn}}+a^{\frac{1}{np}}b^{\frac{1}{p}}+2a^{-\frac{1}{mn}}a^{\frac{1}{2np}}b^{\frac{1}{2p}}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left[\left(a^{-\frac{1}{mn}}+a^{\frac{1}{np}}b^{\frac{1}{2p}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=a^{-\frac{1}{mn}}+(a^2b^n)^{\frac{1}{2np}}=\frac{1}{\sqrt[mn]{a}}+\sqrt[2np]{a^2b^n},$$

şi este de observat că expresia obţinută este pozitivă, deoarece ambii termeni sunt pozitivi, fiind vorba de doi radicali aritmetici.

9. 7. *Să se simplifice expresia*

$$\frac{\left[(a^m)^{\frac{1}{r}}(a^q)^{\frac{1}{n}}\right]^{nr}}{\left(\sqrt[q]{b^n}\cdot\sqrt[m]{b^r}\right)^{mq}}:\left[\left(\frac{a}{b}\right)^q\right]^r.$$

Avem

$$\frac{\left(a^{\frac{m}{r}}\cdot a^{\frac{q}{n}}\right)^{nr}}{\left(b^{\frac{n}{q}}\cdot b^{\frac{r}{m}}\right)^{mq}}:\left(\frac{a}{b}\right)^{qr}=\frac{a^{mn+qr}}{b^{mn+qr}}\cdot\frac{b^{qr}}{a^{qr}}=\frac{a^{mn}}{b^{mn}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{mn}.$$

*) V. § 15 pct. 3; expresia x^2+x+1 este un trinom având rădăcinile imaginare.

9. 8. *Să se calculeze expresia*

$$\frac{x-\sqrt[3]{y^2}-\sqrt{z}+2\sqrt[12]{y^4z^3}}{x+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt{z}-2\sqrt[6]{x^3y^2}+2\sqrt[4]{x^2z}-2\sqrt[12]{y^4z^3}} : \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[4]{z}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}+\sqrt[4]{z}}.$$

Pentru a se efectua mai uşor calculul, este bine să se facă substituţia $\sqrt{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=v$, $\sqrt[4]{z}=w$; expresia dată devine

$$\frac{u^2-v^2-w^2+2vw}{u^2+v^2+w^2-2uv+2uw-2vw} : \frac{u+v+w}{u-v+w} = \frac{u^2-(v-w)^2}{(u-v+w)^2} \cdot \frac{u-v+w}{u+v+w} =$$

$$= \frac{(u-v+w)(u+v-w)}{(u-v+w)^2} \cdot \frac{u-v+w}{u+v+w} = \frac{u+v-w}{u+v+w} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}-\sqrt[4]{z}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[4]{z}}.$$

9. 9. *Să se verifice că dacă*

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d},$$

atunci

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{(A+B+C+D)(a+b+c+d)}.$$

Rapoartele date se mai pot scrie

$$\frac{Aa}{a^2} = \frac{Bb}{b^2} = \frac{Cc}{c^2} = \frac{Dd}{d^2}; \quad (1) \quad \frac{\sqrt{Aa}}{a} = \frac{\sqrt{Bb}}{b} = \frac{\sqrt{Cc}}{c} = \frac{\sqrt{Dd}}{d}.$$

Pedealtă parte, plecând dela o proprietate cunoscută a rapoartelor, avem

$$\frac{A}{a} = \frac{Aa}{a^2} = \frac{A+B+C+D}{a+b+c+d}; \quad (2) \quad \frac{\sqrt{Aa}}{a} = \frac{\sqrt{A+B+C+D}}{\sqrt{a+b+c+d}}.$$

Aplicând aceiaşi proprietate lui (1) şi comparând cu (2)

$$\frac{\sqrt{Aa}}{a} = \frac{\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}}{a+b+c+d} = \frac{\sqrt{A+B+C+D}}{\sqrt{a+b+c+d}},$$

sau, simplificând numitorii între ei, şi păstrând numai ultima egalitate,

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd} = \sqrt{(A+B+C+D)(a+b+c+d)},$$

adică ceeace trebuia arătat.

9. 10. *Să se calculeze expresia*

$$E=\frac{\sqrt[n]{1+x^2}-\sqrt[n]{1-x^2}}{\sqrt[n]{1+x^2}+\sqrt[n]{1-x^2}},$$

pentru valoarea

$$x=\sqrt{\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{(a+b)^n+(a-b)^n}}.$$

Deşi în enunţul problemei nu se spune explicit, evident că vom presupune pe a şi b astfel aleşi, încât toate expresiile care apar sub radicali să fie pozitive. Deoarece

$$1+x^2=1+\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{(a+b)^n+(a-b)^n}=\frac{2(a+b)^n}{(a+b)^n+(a-b)^n}, \quad 1-x^2=\frac{2(a-b)^n}{(a+b)^n+(a-b)^n},$$

după ce simplificăm cu rădăcina de ordinul n din numitor ne rămâne

$$E=\frac{\sqrt[n]{2(a+b)^n}-\sqrt[n]{2(a-b)^n}}{\sqrt[n]{2(a+b)^n}+\sqrt[n]{2(a-b)^n}}=\frac{\sqrt[n]{2}(a+b-a+b)}{\sqrt[n]{2}(a+b+a-b)}=\frac{b}{a}.$$

9. 11. *Să se calculeze expresia*

$$E=\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} \quad \text{pentru } x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}.$$

Să calculăm separat fiecare fracţie. Avem succesiv

$$\frac{1-ax}{1+ax}=\frac{1-\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{1+\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}=\frac{\left(1-\sqrt{\frac{2a-b}{b}}\right)^2}{1-\frac{2a-b}{b}}=\frac{1+\frac{2a-b}{b}-2\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{\frac{2(b-a)}{b}}=\frac{a-b\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{b-a},$$

$$\frac{1+bx}{1-bx}=\frac{1+\frac{b}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{1-\frac{b}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}=\frac{\left(1+\frac{b}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}\right)^2}{1-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{2a-b}{b}}=\frac{\left(a+b\sqrt{\frac{2a-b}{b}}\right)^2}{(b-a)^2},$$

$$\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=\frac{a+b\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{b-a};\quad E=\frac{a^2-b^2\frac{2a-b}{b}}{(b-a)^2}=1.$$

Discuţia acestei probleme face obiectul prob. 15. 8.

§ 10. Expresia $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$. Numitori raţionali

1. In ipoteza $A^2-B=C^2$, avem

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}}.$$

Menţionăm că dublul semn provine din faptul că în această relaţie avem condensate două formule, şi nu din faptul că în faţa unui radical am lua dublu semn. Conform definiţiei date în paragraful precedent, orice radical este un număr pozitiv. Deasemenea C, fiind prin ipoteză un radical, este considerat pozitiv.

2. Dacă o fracţie are la numitor radicali este bine ca printr'o amplificare convenabilă a fracţiei, aşa cum vom vedea în exemplele de mai jos, să facem ca la numitori să nu mai avem radicali. Această operaţie se numeşte *raţionalizarea numitorilor.*

10. 1. *Să se calculeze expresia*

$$E=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{c}{2}\sqrt{a^2-c^2}}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{c}{2}\sqrt{a^2-c^2}}.$$

Deși în enunț nu se precizează, a și c sunt aleși în așa fel, încât expresiile de sub radicalii care intră în E să fie pozitive, adică radicalii să aibă un sens. In cazul acesta

$$A^2-B=\left(\frac{a^2}{4}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2(a^2-c^2)=\frac{a^4}{16}-\frac{a^2c^2}{4}+\frac{c^4}{4}=\left(\frac{a^2}{4}-\frac{c^2}{2}\right)^2=C^2.$$

Deci

$$E=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{c^2}{2}\right)}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+\frac{c^2}{2}\right)}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{c^2}{2}\right)}-$$
$$-\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+\frac{c^2}{2}\right)}=2\sqrt{a^2-c^2}.$$

10. 2. *Să se calculeze ce devine expresia*

$$E=\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}\text{ pentru }x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Făcând înlocuirea dată, se întâlnesc în calcule expresiile $\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$. Cum $A^2-B=4-3=C^2=1$, putem scrie

$$\sqrt{2\pm\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}\pm1}{\sqrt{2}}.$$

Pentru expresia dată avem

$$E=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}+\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{9-3}=1.$$

10. 3. *Se consideră polinomul*

$$P(x)=x^3+3px+2q,$$

și se cere să i se găsească valoarea pentru

$$x=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}.$$

Fie

$$\alpha=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}},\ \beta=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}};$$

deci: $x=\alpha+\beta$ și deci

$$x^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta);$$

ori

$$\alpha^3+\beta^3=-2q,\ \alpha\beta=\sqrt[3]{(-q)^2-(q^2+p^3)}=\sqrt[3]{(-p)^3}=-p,$$

de unde reiese că

$$x^3=-2q-3px;\ P(x)=0.$$

Observaţie Deoarece $P(x)=0$, valoarea lui x dată în enunţ este o rădăcină a ecuaţiei

$$x^3+3px+2q=0.$$

10. 4. *Să se calculeze expresia*

$$X=\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}.$$

Soluţia I. Această soluţie este mai generală şi se aplică totdeauna când avem de calculat o expresie de tipul celei din enunţ. Ea se bazează pe calculul făcut la problema precedentă. In adevăr, punând acolo $-q=54$, p va fi dat de relaţia

$$(-54)^2+p^3=30^2\cdot 3;\ p^3=-216,\ p=-6.$$

Aceasta însemnează că X va verifica relaţia

$$X^3-18X-108=0.$$

Polinomul din prima parte se divide cu $X-6$ şi se scrie sub forma

$$(X-6)(X^2+6X+18)=0,$$

de unde reese că $X=6$, sau este o rădăcină a ecuaţiei care se capătă anulând paranteza a doua. După cum vom vedea însă mai jos*) această ecuaţie nu are rădăcini reale. Rămâne deci $X=6$.

Soluţia II. Observăm că

$$54+30\sqrt{3}=3^3+3\cdot 3^2\sqrt{3}+3\cdot 3(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^3=(3+\sqrt{3})^3,$$
$$54-30\sqrt{3}=3^3-3\cdot 3^2\sqrt{3}+3\cdot 3(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^3=(3-\sqrt{3})^3,$$

încât,

$$X=(3+\sqrt{3})+(3-\sqrt{3})=6.$$

10. 5. *Să se facă raţional numitorul fracţiei*

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}.$$

Trebue să observăm că procedeul este general oricare ar fi semnele din faţa radicalilor. Grupând termenii convenabil şi procedând ca şi în cazul când avem numai doi radicali, găsim succesiv

$$\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{a+b-c+2\sqrt{ab}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab}}{(a+b-c)^2-4ab}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca}.$$

10. 6. *Să se facă raţional numitorul fracţiei*

$$\frac{A}{\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{b}}.$$

*) Realizantul ecuaţiei este $9-18<0$.

Facem mai întâi ca radicalii dela numitor să aibă acelaşi indice

$$\frac{A}{\sqrt[mn]{a^n}-\sqrt[mn]{b^m}};$$

Punem pentru prescurtare $\sqrt[mn]{a^n}=\alpha$, $\sqrt[mn]{b^m}=\beta$, încât fracţia, în baza unei identităţi cunoscute, se scrie succesiv

$$\frac{A}{\alpha-\beta}=\frac{A(\alpha^{mn-1}+\alpha^{mn-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{mn-2}+\beta^{mn-1})}{\alpha^{mn}-\beta^{mn}}=\frac{A(\alpha^{mn-1}+\cdots+\beta^{mn-1})}{a^n-b^m}.$$

10. 7. *Să se arate că:*

$$\operatorname{tg}\frac{19\pi}{24}=2+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}.$$

Deoarece

$$\operatorname{tg}\frac{19\pi}{24}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{5\pi}{24}\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{24}\right)=-\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}}. \qquad (1)$$

este necesar să cunoaştem pe $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$. Avem succesiv

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{1+\cos\frac{\pi}{12}}}=\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{(4-\sqrt{6}-\sqrt{2})(4+\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(4+\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{16-(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}},$$

şi în baza calculului din prob. 10. 2 avem mai departe

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}.$$

Inlocuind în (1) valoarea de mai sus şi pe $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, găsim

$$\operatorname{tg}\frac{19\pi}{24}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}}{\frac{\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{3(4+\sqrt{2}+\sqrt{6})}-1}=-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}=-\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}{3}=$$

$$=2+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}.$$

CAPITOLUL II

ECUAŢII ALGEBRICE. INEGALITĂŢI

§ 11. Ecuaţii de gradul 1

1. Se numeşte *ecuaţie algebrică* cu o necunoscută, o ecuaţie care se obţine anulând un polinom într'o literă, adică o ecuaţie de forma

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sunt cunoscuţi, iar x necunoscuta. A rezolva ecuaţia, înseamnă a găsi toate valorile lui x, numite *rădăcinile* sau *soluţiile ecuaţiei*, numere care introduse în ecuaţie o verifică. Se numeşte *gradul* unei ecuaţii, gradul polinomului care anulat îi dă naştere. *O ecuaţie de gradul n are n rădăcini.*

2. Cea mai generală ecuaţie de gradul 1 cu o necunoscută, după ce s'au făcut toate calculele şi după ce am izolat în prima parte, termenul cu necunoscuta, iar termenul cunoscut în partea a doua, este de forma

$$ax = b$$

unde a şi b sunt cunoscute, iar x necunoscuta. Dacă $a \neq 0$, o asemenea ecuaţie *are totdeauna o soluţie* a cărei valoare este $x = \frac{b}{a}$.

11. 1. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\frac{7}{24} - \frac{\frac{13}{15}}{\frac{2x}{3} + \frac{4}{5}} = \frac{1}{4}.$$

Deoarece

$$\frac{2x}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10x+12}{15} = \frac{2(5x+6)}{15},$$

ecuaţia se scrie

$$\frac{7}{24} - \frac{13}{2(5x+6)} = \frac{1}{4}.$$

Inmulţind ecuaţia cu numitorul comun $24(5x+6)$ avem mai departe

$$7(5x+6) - 156 = 6(5x+6);\ 5x - 150 = 0;\ 5x = 150;\ x = 30.$$

11. 2. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\frac{3x-7}{4x+2} = \frac{3x-14}{4x-13}.$$

Aplicând o proprietate a proporţiilor, această egalitate se mai scrie

$$\frac{3x-7}{4x+2} = \frac{(3x-14)-(3x-7)}{(4x-13)-(4x+2)};\quad \frac{3x-7}{4x+2} = \frac{7}{15};$$

sau, scriind-o sub forma întreagă,

$$15(3x-7) = 7(4x+2);\ 17x = 119;\ x = 7.$$

11. 3. *Să se rezolve ecuația*

$$\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{2}.$$

Făcând calculele ecuația se reduce la

$$\frac{4x(x-1)}{2x(x^2-1)}=\frac{1}{2}.$$

Simplificând fracția din prima parte cu $x(x-1)$ ecuația devine

$$\frac{2}{x+1}=\frac{1}{2};\ x=3.$$

Observație. Simplificarea s'a putut face deoarece $x(x-1)\neq 0$. In adevăr, $x\neq 1$ din cauza formei enunțului, iar pentru $x=0$ ecuația se transformă într'o absurditate.

11. 4. *Să se rezolve ecuația*

$$\frac{1+ax}{1-ax}=\frac{3+a^2x^2}{1-a^2x^2}.$$

Numitorul comun este $1-a^2x^2=(1-ax)$, $(1+ax)$ încât ecuația se reduce la

$$(1+ax)^2=3+a^2x^2;\ 2ax=2;\ x=\frac{1}{a}.$$

Discuție. Calculul presupune $a\neq 0$; dacă $a=0$, ultima formă a ecuației nu se poate rezolva; de altfel, în acest caz, ecuația devine o imposibilitate.

11. 5. *Să se rezolve ecuația*

$$\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{x^2-ab}.$$

Scăzând fracțiile din prima parte și simplificând cu $a-b$, ecuația se reduce la

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{x^2-ab};\ x^2-ab=(x-a)(x-b);\ x=\frac{2ab}{a+b}.$$

Discuție. In calcule am făcut două ipoteze; 1°. Când am simplificat ecuația cu $a-b$ am presupus că acest factor nu este nul, deoarece altfel nu aveam dreptul să facem simplificarea. Aceasta înseamnează că $a\neq b$; de altfel, în cazul $a=b$, ecuația se reduce la o identitate, 2°. Am presupus deasemenea că $a+b\neq 0$ pentru a putea rezolva ecuația finală.

11. 6. *Să se găsească numărul care adăugit lui* -1, 2, 14 *(luate în această ordine) să ne dea o progresie geometrică. Care este rația?*

Fie x acel număr; pentru ca numerele $-1+x$, $2+x$, $14+x$ să fie în progresie geometrică, este necesar ca (prob. 3. 6).

$$(2+x)^2=(x-1)(x+14).$$

Această ecuație desvoltată și rezolvată dă $x=2$. Progresia este 1, 4, 16 și rația este 4.

11. 7. *Două trenuri pleacă în același timp din A și B și se îndreaptă unul către celălalt. Să se calculeze distanța AB și vitezele trenurilor, știind că: 1° trenurile se întâlnesc două ore după plecarea lor, și că punctul de întâlnire este la* 15 km *de mijlocul lui AB; 2° dacă trenul care merge mai repede ar merge de două ori mai încet, întâlnirea ar avea loc* $2^h\ 48^m$ *dela plecare.*

Fie $x=AB$ socotită în kilometri. Vitezele celor două trenuri sunt atunci pentru trenul care merge mai repede $\frac{\frac{1}{2}x+15}{2}=\frac{x+30}{4}$, iar pentru celălalt $\frac{\frac{1}{2}x-15}{2}=\frac{x-30}{4}$. In ipoteza a doua, viteza primului tren ar fi $\frac{x+30}{8}$. Transformând $2^h\ 48^m$ în fracțiuni de ore, adică $2+\frac{48}{60}=\frac{14}{5}$ și scriind că suma drumurilor celor două trenuri în $2^h\ 48^m$ este egală cu $AB=x$, obținem

$$\frac{14}{5}\,\frac{x+30}{8}+\frac{14}{5}\,\frac{x-30}{4}=x.\ 1$$

Această ecuație ne dă $x=210$ km.

Viteza primului tren va fi de 60 km/h, iar al celui de-al doilea 45 km/h.

11. 8. *Glontele unei arme cântărește* 16 g *și viteza sa inițială, la ieșirea din armă, este de* 900 m/s. *Care este presiunea mijlocie a gazului provenit din explozia pulberii? Presupunem calibru* 8 mm *și lungimea armei* 75 cm.

In cele ce urmează vom presupune că lucrul mecanic produs de forța de presiune desvoltată de explozia prafului este în întregime transformat în energie cinetică a proiectilului.

Fie m^{kg} masa glontelui, v^m viteza în momentul ieșirii din armă, p^{kg} presiunea mijlocie a gazului, s^{cm^2} secțiunea în țeava armei, l^m lungimea sa. Teorema forțelor vii, aplicată glontelui în timpul necesar ca să parcurgă lungimea l, dă

$$\frac{1}{2}mv^2=psl.$$

Această relație este o ecuație de gradul 1 și dă

$$p=\frac{mv^2}{2sl}.$$

Pentru datele problemei avem

$$p=\frac{0{,}016\cdot 900^2}{2\cdot 9{,}81\cdot\pi\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}75}=1752\ \text{kg/cm}^2.$$

11. 9. *Se așează între bornele A, B ale unei pile P un voltmetru V de mare rezistență. Voltmetrul arată o citire E. Se pune apoi între A și B o rezistență R. Indicația voltmetrului devine U. Se cere: 1°. Să se calculeze valoarea rezistenței interioare a pilei 2°. Să se calculeze în funcție de E și U care va fi indicația U' a voltmetrului dacă mai punem între A și B o nouă rezistență, egală cu precedenta.* (fig. 1).

1°. Prima citire, E, măsoară forța electromotoare a pilei. Dacă I este intensitatea curentului în circuitul $APBRA$ și r rezistența pilei, avem

$$I=\frac{E}{R+r}.$$

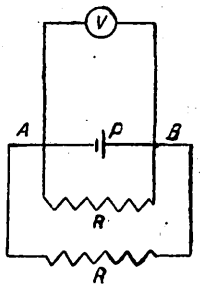


Fig. 1

Pe de altă parte, legea lui *Ohm*, aplicată porțiunii de circuit ARB dă

$$U=\frac{ER}{R+r}.$$

Aceasta este ecuația problemei, în care U, E, R sunt cunoscute, iar r, necunoscuta. De aici scoatem

$$U(R+r)=ER;\ r=\frac{R(E-U)}{U}.$$

2°. Rezistența ansamblului celor două rezistențe R puse în derivație între A și B este $\frac{1}{2}R$. Intensitatea curentului principal este atunci

$$I'=\frac{E}{\frac{1}{2}R+r},$$

și diferența de potențial între A și B devine, observând că intensitatea într'unul din circuitele ARB este $i=\frac{1}{2}I'$,

$$U'=\frac{RE}{R+2r}.$$

Inlocuind pe r prin valoarea găsită mai sus, se găsește

$$U'=\frac{EU}{2E-U},$$

expresie independentă de R.

11. 10. *Se aruncă un corp de jos în sus, vertical, cu o viteză de* 40 m/s; 5 s. *după aceea, se aruncă un al doilea corp, în aceleași condiții, însă cu o viteză de* 20 m/s. *Să se afle:* 1°. *După cât timp se vor întâlni cele două corpuri?* 2°. *Care vor fi vitezele lor în acel moment și de ce sens?* 3°. *La ce distanță de punctul de plecare va avea loc întâlnirea?* (Se va neglija rezistența aerului, cu alte cuvinte vom considera ca și când experiența este făcută în vid).

Din Mecanică se știe că un corp aruncat în sus cu viteza inițială v_0 va ajunge după un timp t la o înălțime h, dată de formula

$$h=v_0 t-\frac{1}{2}gt^2,$$

viteza v a corpului după timpul t fiind:

$$v=v_0-gt,$$

$g=9{,}81$ fiind accelerația gravitației.

1°. Ecuația problemei este

$$40t-\frac{1}{2}gt^2=20(t-5)-\frac{1}{2}g(t-5)^2;\ t=\frac{100+12{,}5g}{5g-20}=7{,}66\text{ s.}$$

2°. Viteza primului mobil va fi $v_1=40-7{,}66g=-35{,}144$ m/s și fiind negativă, corpul coboară. Pentru al doilea corp $v_2=20-g(t-5)=20-2{,}66g=-6{,}094$ adică și al doilea corp coboară.

3°. Înălținea comună la care s'au întâlnit cele două corpuri este:

$$h=40\cdot 7{,}66-9{,}81\cdot 7{,}66^2=18{,}597\text{ m.}$$

§ 12. Ecuații de gradul 2

1. Cea mai generală ecuație de gradul 2 cu o necunoscută este de forma

$$ax^2+bx+c=0, \tag{I}$$

a, b, c fiind cunoscute, iar x necunsocuta. Prin ipoteză $a\neq 0$, deoarece în caz contrar, ecuația se reduce la o ecuație de gradul 1. O asemenea ecuație are două soluții, definite prin formula [1])

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{II}$$

Cazuri particulare. 1° Dacă $b=0$, ecuația se reduce la forma binomă

$$ax^2+c=0, \tag{I'}$$

și are rădăcinile

$$x=\pm\sqrt{-c/a}.$$

2°. Dacă $c=0$, ecuația ia forma

$$ax^2+bx=x(ax+b)=0, \tag{I''}$$

și va avea ca rădăcini

$$x_1=0,\ x_2=-b/a.$$

3°. Dacă b este cu soț, fie $b=2b'$, atunci

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}. \tag{III}$$

2. *Discuție.* Expresia: b^2-4ac se numește *realizantul* sau *discriminantul* ecuației. Dacă: $b^2-4ac>0$, rădăcinile sunt numere obișnuite și le vom numi *reale;* dacă: $b^2-4ac=0$, cele două rădăcini sunt confundate, se zice că ecuația are o *rădăcină dublă;* dacă: $b^2-4ac<0$ radicalul, așa cum l-am definit la § 9, nu mai are sens, adică nu există numere reale care să reprezinte rădăcinile ecuației, din care cauză vom zice că rădăcinile ecuației sunt *imaginare* sau *complexe.*

---

[1]) In această formula nu trebue să se înțeleagă că în fața radicalului avem dublu semn, ci numai că ea este o scriere condensată a două formule care reprezintă cele două rădăcini ce se obțin, una luând valoarea aritmetică a radicalului cu semnul +, cealaltă luând aceeași valoare aritmetică cu semnul −.

3. Dacă ecuația (I) are rădăcinile x_1, x_2, atunci putem scrie

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \qquad \text{(IV)}$$

Din această cauză, rădăcinile unui trinom, atunci când sunt reale, folosesc la descompunerea lui în factori.

In cazul $b^2-4ac=0$, $x_1=x_2$ și descompunerea precedentă se scrie

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2. \qquad \text{(IV')}$$

12. 1. *Să se rezolve ecuația*

$$4a^2x=(a^2-b^2+x)^2.$$

Făcând calculele, ecuația devine

$$x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2=0,$$

care are ca rădăcini

$$x_1=(a+b)^2, \quad x_2=(a-b)^2.$$

12. 2. *Fiind dată ecuația*

$$m^2x^2-m(3x+10)-(x^2+3x+10)=0,$$

să se determine m astfel, încât una dintre rădăcini să fie egală cu —2. Să se găsească cealaltă.

Ordonând ecuația după x și simplificând-o cu $m+1$ (dacă $m=-1$ se reduce la o identitate), obținem

$$(m-1)x^2-3x-10=0.$$

Pentru ca această ecuație să-l admită pe —2 ca rădăcină, trebue ca

$$4(m-1)+6-10=0; \quad m=2.$$

Inlocuind și rezolvând ecuația obținută, rezultă:

$$x_1=-2, \quad x_2=5.$$

12. 3. *Să se demonstreze că ecuația*

$$\frac{A^2}{x-a}+\frac{B^2}{x-b}=1,$$

are rădăcinile reale oricare ar fi numerele reale a, b, A, B.

Aducând la același numitor și ordonând ecuația după x, avem

$$x^2-(a+b+A^2+B^2)x+ab+A^2b+B^2a=0;$$

realizantul acestei ecuații este

$$(a+b+A^2+B^2)^2-4(ab+A^2b+B^2a)=(a+b)^2-4ab+(A^2+B^2)^2+$$
$$+2A^2a+2B^2b-2A^2b-2B^2a$$
$$=(a-b)^2+(A^2+B^2)^2+2A^2(a-b)-2B^2(a-b)$$
$$=(a-b)^2+2(a-b)(A^2-B^2)+(A^2-B^2)^2+4A^2B^2=(a-b+A^2-B^2)^2+4A^2B^2.$$

Această expresie fiind suma a două pătrate, și cum un pătrat este totdeauna un număr pozitiv, ea va fi totdeauna pozitivă. Pentru a fi nulă, este necesar ca fiecare pătrat să fie nul, adică cel puțin unul din numerele A sau B trebue să fie nul, ceeace reduce ecuația la o ecuație de gradul întâi.

12. 4. *Să se găsească cinci numere în progresie aritmetică, cunoscând produsul p al celor extreme și suma s a celorlalte trei.*

După cum am spus la prob. 5. 7, vom lua numerele sub forma

$$a-2b,\ a-b,\ a,\ a+b,\ a+2b.$$

Pentru determinarea progresiei este necesar să calculăm pe a și b. Condițiile problemei se scriu

$$(a-b)+a+(a+b)=s,\quad (a-2b)(a+2b)=p,$$

sau încă

$$3a=s,\quad a=\frac{1}{3}s;\quad a^2-4b^2=p;\quad b=\pm\frac{\sqrt{s^2-9p}}{6}.$$

Pentru ca problema să fie posibilă, este necesar ca $s^2\geqslant 9p$. Avem în realitate o singură progresie corespunzătoare valorii lui b luată cu semnul + (deoarece pentru cealaltă valoare avem aceeași progresie scrisă invers).

12. 5. *Să se arate că dacă expresia*

$$a(b-c)x^2+b(c-a)xy+c(a-b)y^2,$$

este un pătrat perfect, a, b, c sunt trei numere armonice.

Scoțându-l pe y ca factor comun, pentru ca trinomul rămas, în x/y, să fie un pătrat perfect, este necesar ca realizantul lui să fie nul, adică

$$b^2(c-a)^2-4ac(b-c)(a-b)=0.$$

Ordonând după puterile lui b, această relație se mai scrie

$$b^2[(c-a)^2+4ac]-4bac(a+c)+4a^2c^2=0,$$

$$b^2(c+a)^2-4bac(a+c)+4a^2c^2=0;\quad [b(a+c)-2ac]^2=0.$$

adică

$$b(a+c)=2ac\quad \text{sau}\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b},$$

relație care spune că a, b, c cunt trei *numere armonice* (adică punctele care au drept abscise a, b, c împreună cu originea formează o diviziune armonică).

Trinomul sub formă de pătrat este:

$$a(b-c)\left[x+\frac{b(c-a)}{2a(b-c)}\right]^2.$$

12. 6. *Deasupra unui stâlp de înălțimea $OA=a$ se află un steag de înălțimea $AB=b$ (fig. 2). Un observator de înălțime h, având ochiul în M și fiind la distanța $OP=x$ de piciorul stâlpului vede stâlpul și steagul sub același unghi. Se cere să se calculeze x. In ipoteza că $b>a$ în ce caz problema este posibilă?*

In condiţiile problemei, MA este bisectoare; conform unei proprietăţi cunoscute a bisectoarei,

$$\frac{OM}{a} = \frac{MB}{b}.$$

Scoţând valorile lui OM şi MB din triunghiurile dreptunghice OMP şi MLB, această relaţie se scrie

$$\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{a} = \frac{\sqrt{(b+a-h)^2+x^2}}{b}.$$

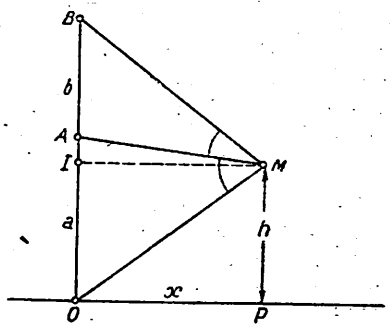


Fig. 2

Ridicând la pătrat şi gonind numitorii, obţinem ecuaţia

$$(b^2-a^2)x^2 = a^2(b+a-h)^2 - b^2h^2$$

care dă pentru x două valori egale şi de semne contrare

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2(b+a-h)^2-b^2h^2}{b^2-a^2}},$$

după cum observatorul este în faţa sau în spatele stâlpului. Pentru discuţie observăm că expresia de sub radical se scrie:

$$\frac{a^2(b+a-h)^2-b^2h^2}{b^2-a^2} = \frac{a-h}{b-a}[a(b+a)+h(b-a)].$$

Dacă $b>a$ paranteza mare precum şi numitorul sunt pozitivi. Este necesar deci ca $h<a$.

12. 7. *Un corp este aruncat vertical în vid cu o viteza iniţială a. După cât timp va ajunge el la înălţimea h?*

Corpul este antrenat de o mişcare ascendentă uniform întârziată, înălţimea h şi viteza v după un timp t sunt date de formulele dela prob. 11. 10.

$$h = at - \frac{1}{2}gt^2, \quad v = a - gt.$$

Prima ecuaţie privită în raport cu t este

$$gt^2 - 2at + 2h = 0 \quad \text{de unde} \quad t = \frac{a \pm \sqrt{a^2-2gh}}{g}.$$

Discuţie. Condiţia ca t să existe, este

$$a^2 \geqq 2gh \quad \text{sau} \quad h \leqq \frac{a^2}{2g},$$

egalitatea dând maximul lui h, adică până unde corpul se poate ridica. In acest moment, cea de a doua formulă ne spune că $v=0$ $(t=a/g)$ deci corpul stă pe loc, pentru ca apoi să înceapă să cadă. Dacă $h > \frac{a^2}{2g}$ avem două valori pentru t, amândouă fiind bune, deoarece corpul trece de două ori prin aceeaş înălţime: odată la ridicare şi odată la coborîre. La aceste două momente cea de a doua formulă ne spune că vitezele sunt egale şi de semne contrare

12. 8. *Se așează o baterie de acumulatori de 250 elemente, având fiecare o forță electromotoare de 2 V și o rezistență internă de 0,01 Ω. Cu acești acumulatori vrem să alimentăm în același timp 20 receptori identici, montați în derivație, absorbind fiecare un curent de 5 A sub un voltaj la borne de 90 V. Să se afle: 1°. Cum va trebui să cuplăm elementele bateriei pentru a avea acest rezultat? 2°. Știind că fiecare receptor are o rezistență interioară de 10 Ω, să se calculeze randamentul său.*

1°. Rezistența aparentă a fiecărui receptor este egală cu $\frac{90}{5} = 18\ \Omega$; cei 20 receptori identici montați în derivație nu au decât rezistența $\frac{18}{20} = 0{,}9\ \Omega$. Fiecare din acești receptori, absorbind un curent de 5 A, curentul dat de acumulatori va trebui să fie de $5 \cdot 20 = 100$ A. Acumulatorii dispuși în serie ar da un curent prea intens. Să-i presupunem dispuși în $\frac{250}{x}$ serii paralele de x elemente, forța electromotoare a unei serii fiind de $2x$ V și rezistența sa de $0{,}01x\ \Omega$; rezistența ansamblului acumulatorilor este atunci

$$\frac{0{,}01x \cdot x}{250} = \frac{x^2}{25\,000}\ \Omega.$$

Rezistența exterioară fiind $9/10\ \Omega$, rezistența totală a dispozitivului este

$$\frac{x^2}{25\,000} + \frac{9}{10}\ \Omega:$$

vom avea în consecință

$$100 = \frac{2x}{\frac{x^2}{25\,000} + \frac{9}{10}},$$

ecuație care se scrie sub formă întreagă,

$$x^2 - 500x + 90 \cdot 250 = 0$$

de unde

$$x = 250 \pm \sqrt{250^2 - 90 \cdot 250} = 250 \pm 200.$$

Numai rădăcina $x = 50$ este acceptabilă, deoarece trebue să avem $x < 250$. Deci, va trebui să aranjăm acumulatorii în 5 serii de 50 elemente: forța lor electromotoare va fi atunci de 100 V.

2°. Fiecare receptor absoarbe un curent de 5 A sub un voltaj la borne de 90 V, rezistența interioară fiind de 10 Ω; rezultă că vom avea o forță electromotoare de y V, astfel încât

$$5 = \frac{90 - y}{10};\quad y = 40\ \text{V}.$$

Puterea folosită este deci de $40 \cdot 5$ W; randamentul receptorului este în consecință $\frac{40 \cdot 5}{90 \cdot 5} = \frac{4}{9}$.

12. 9. *Un tub manometric AB conține azot în A și mercur în ZO, ZI. Se lasă ramura B deschisă la aer; mercurul atinge nivelul ZOZI. Se*

exercită apoi o presiune de 6 *atmosfere în B. Cu ce înălțime se ridică în tubul A mercurul? Presiunea atmosferică este de* 76 cm *de mercur; lungimea liberă a ramurii A este la originea timpului de* 40 cm *și se presupune că temperatura rămâne constantă* (fig. 3).

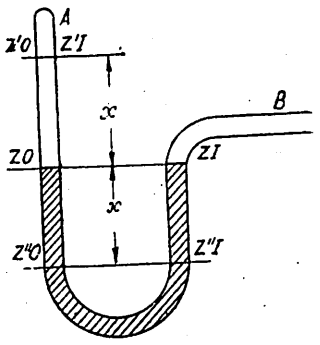


Fig. 3

Când ramura B este deschisă, nivelurile mercurului în cele două ramuri $ZOZI$ sunt în același plan orizontal, când presiunea azotului în A este egală cu presiunea atmosferică 76 cm de mercur. Când nivelul mercurului se ridică în ramura A cu lungimea x, el scade în ramura B cu o lungime egală și vine în $Z''I$. Presiunea asupra mercurului în ramura B, în $Z''I$ este de 6 atmosfere, adică este egală cu $6 \cdot 76$ cm mercur. Aceeași presiune va fi asupra secțiunii $Z''O$ în ramura A prin planul orizontal care trece brin $Z''I$. Notăm cu y presiunea azotului; vom avea atunci, scriind că presiunile în $Z''O$ și $Z''I$ sunt egale,

$$y = 6 \cdot 76 - 2x.$$

Deoarece temperatura nu variază, produsul volumului de azot prin presiunea sa rămâne constant (legea lui *Mariotte*). Fie s secțiunea tubului. Avem

$$s \cdot 40 \cdot 76 = s(40-x)y.$$

Simplificând cu s și înlocuind pe y, avem ecuația

$$40 \cdot 76 = (40-x)(6 \cdot 76 - 2x) \quad \text{sau} \quad x^2 - 268x + 76 \cdot 20 \cdot 5 = 0,$$

ecuație care are rădăcinile $x = 134 \pm \sqrt{134^2 - 7600} = 134 \pm 101{,}7$. Soluția cu $+$ este lăsată deoparte, deoarece este mai mare decât 40 cm și rămâne $134 - 101{,}7 = 32{,}3$ cm.

§ 13. Ecuații de grad superior rezolvabile prin diferite artificii de calcul

1. **Ecuații bipătrate.** Se numește *ecuație bipătrată*, o ecuație de forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0; \tag{I}$$

rezolvarea ei se reduce la o ecuație de gradul 2 prin substituția $x^2 = y$:

$$ay^2 + by + c = 0. \tag{I'}$$

Dacă y_1 și y_2 sunt rădăcinile acestei ecuații, atunci ecuațiile

$$x^2 = y_1 \quad \text{și} \quad x^2 = y_2, \tag{II}$$

ne vor da patru valori care sunt rădăcinile ecuației date.

2. **Ecuaţii reciproce.** Se numeşte *ecuaţie reciprocă* o ecuaţie în care coeficienţii egal depărtaţi de extremi sunt egali. O ecuaţie reciprocă de grad cu soţ este de forma

$$a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_{n-1}x^{n+1}+a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0. \quad \text{(III)}$$

O asemenea ecuaţie se rezolvă împărţind-o în prealabil cu x^n şi grupând termeni egal depărtaţi de extremi împreună

$$a_0\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+a_1\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+\cdots+a_{n-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_n=0; \quad \text{(III')}$$

aici se face substituţia

$$x+\frac{1}{x}=y; \quad \text{(IV)}$$

cu ajutorul lui y se exprimă toate parantezele; în adevăr, ridicând relaţia la pătrat, la cub, etc., obţinem din aproape în aproape,

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2, \quad x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y, \quad x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4y^2+2,\ldots \quad \text{(V)}$$

Ecuaţia (III') se transformă astfel într'o ecuaţie în y de gradul n, care rezolvată ne dă n valori, care, la rândul lor, introduse în (IV), ne dau cele $2n$ rădăcini ale ecuaţiei considerate.

O ecuaţie reciprocă de grad fără soţ admite totdeauna rădăcina -1; o asemenea ecuaţie împărţită cu $x+1$ se reduce la o ecuaţie reciprocă de grad cu soţ şi care se rezolvă ca mai sus.

13. 1. *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^4-10x^2+1=0.$$

Ecuaţia este bibătrată. Rezolvând-o în raport cu x^2, găsim

$$x^2=5+2\sqrt{6}, \quad x^2=5-2\sqrt{6}$$

adică rădăcinile ecuaţiei sunt

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{5+2\sqrt{6}}, \quad x_{3,4}=\pm\sqrt{5-2\sqrt{6}}.$$

Folosind cele, arătate în § 10, aceste rădăcini se scriu mai simplu, deoarece în aceste caz: $A^2-B=25-24=1=C^2$. Aceasta însemnează că rădăcinile sunt

$$x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3},$$

luând semnele în faţa radicalilor în toate modurile posibile.

13. 2. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\frac{1+x^4}{(1+x)^4}=\frac{1}{2}.$$

Aducând la acelaşi numitor şi desvoltând găsim

$$x^4-4x^3-6x^2-4x+1=0,$$

care este o ecuație reciprocă. Ea se rezolvă după cum s'a explicat în introducerea paragrafului. Avem succesiv

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0;\quad y^2-4y-8=0,$$

de unde

$$y_{1,2}=2(1\pm\sqrt{3}),$$

încât x este dat de ecuațiile

$$x^2-2(1\pm\sqrt{3})x+1=0,$$

care rezolvate dau în definitiv

$$x_{1,2,3,4}=1\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{3\pm2\sqrt{3}},$$

semnele din fața lui $\sqrt{3}$ fiind aceleași. In cazul când luăm în fața acestui radical semnul —, rădăcinile corespunzătoare sunt imaginare.

13. 3. *Să se rezolve ecuația*

$$x^8-7x^7+18x^6-28x^5+35x^4-28x^3+18x^2-7x+1=0.$$

Fiind o ecuație reciprocă împărțim cu x^4 și ținem seama de valorile (V). Obținem noua ecuație

$$y^4-7y^3+14y^2-7y+1=0,$$

care este deasemeni reciprocă. Făcând aceeași substituție, întrebuințând o nouă literă, reducem rezolvarea ecuației (2) la

$$z^2-7z+12=0.$$

Această ultimă ecuație are rădăcinile $z_1=4$ și $z_2=3$; valorile lui y vor fi date de ecuațiile

$$y^2-4y+1=0 \quad \text{și} \quad y^2-3y+1=0,$$

care au drept rădăcini

$$y_{1,2}=2\pm\sqrt{3},\quad y_{3,4}=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5}).$$

Insfârșit valorile lui x vor fi date de ecuațiile

$$x^2-(2\pm\sqrt{3})x+1=0 \quad \text{și} \quad 2x^2-(3\pm\sqrt{5})x+2=0,$$

care rezolvate dau

$$x_{1,2,3,4}=2\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{3\pm4\sqrt{3}},\quad x_{5,6,7,8}=3\pm\sqrt{5}\pm\sqrt{-2\pm6\sqrt{5}}.$$

La primele patru rădăcini, semnele din fața lui $\sqrt{3}$ se corespund și tot așa semnele lui $\sqrt{5}$ din ultimele patru rădăcini.

Ecuația are numai *patru* rădăcini reale.

13. 4. *Să se rezolve ecuația*

$$(x^2+a^2)^2+ax(x-a)^2=0.$$

Desvoltând obținem

$$x^4+ax^3+a^3x+a^4=0,$$

care este o ecuație reciprocă. Ea poate fi însă rezolvată direct grupând primii și ultimii termeni între ei

$$x^3(x+a)+a^3(x+a)=(x+a)(x^3+a^3)=0.$$

O rădăcină este $x_1=-a$; celelalte trei sunt date de ecuația

$$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)=0,$$

care ne dă din nou rădăcina $x_2=-a$ (dublă) precum și rădăcinile imaginare

$$x_{3,4}=\frac{1}{2}(a\pm\sqrt{a^2-4a^2})=\frac{1}{2}a(1\pm\sqrt{-3}).$$

13. 5. *Să se rezolve ecuația*

$$x^4-5x^3+10x^2-10x+4=0,$$

știind că are rădăcinile întregi.

Incercăm cu divizorii lui 4, care sunt ±1, ±2, ±4. Incepem cu cei mai simpli și constatăm ușor că rezultatul înlocuirii lui x cu 1 și 2 în prima parte ne dă zero. Aceasta înseamnează că polinomul din ecuație se divide cu

$$(x-1)(x-2)=x^2-3x+2.$$

In adevăr, avem

$$x^4-5x^3+10x^2-10x+4=(x^2-3x+2)(x^2-2x+2)=0.$$

Rădăcinile sunt $x_1=1$, $x_2=2$, iar ulima paranteză anulată dă rădăcinile imaginare $x_{3,4}=1\pm\sqrt{-1}$.

13. 6. *Să se rezolve ecuația*

$$x(x+a)(3x+a)(3x-2a)=b^4,$$

reducând-o la oecuație de gradul 2 luând drept nouă necunoscută un polinom de gradul 2.

Cum

$$x(3x+a)=3x^2+ax,\quad (x+a)(3x-2a)=3x^2+ax-2a^2,$$

vom pune

$$z=3x^2+ax-a^2,$$

ecuația dată devine

$$(z+a^2)(z-a^2)=b^4;\quad z^2=a^4+b^4;\quad z=\pm\sqrt{a^4+b^4}.$$

Ecuația se reduce astfel la

$$3x^2+ax-a^2\pm\sqrt{a^4+b^4}=0.$$

Rădăcinile sunt

$$x=\frac{1}{6}\left(-a\pm\sqrt{13a^2+12\sqrt{a^4+b^4}}\right).$$

13. 7. *Să se rezolve ecuația*

$$x^4+2x^3-6x^2-7x+12=0,$$

știind că se poate lua drept necunoscută auxiliară un trinom de gradul 2.

Fie noua necunoscută: $y=x^2+px+q$. Va trebui să determinăm p și q, cum și a, b astfel, încât să avem

$$x^4+2x^3-6x^2-7x+12=(x^2+px+q)^2+a(x^2+px+q)+b.$$

Scriind că egalitatea este o identitate, obținem relațiile

$$2=2p,\ -6=p^2+2q+a,\ -7=2pq+ap,\ 12=q^2+aq+b.$$

Prima relație dă $p=1$. Următoarele două se reduc la $2q+a=-7$; scoțând de aici valoarea lui $a=-7-2q$ și introducând-o în ultima, găsim $b=12+7q+q^2$, q rămânând arbitrar. Ecuația dată se poate deci scrie sub forma

$$(x^2+x+q)^2-(7+2q)(x^2+x+q)+12+7q+q^2=0,$$

unde q este arbitrar. q poate fi ales ca să dispară termenul de gradul 1 sau termenul liber. Punând

$$12+7q+q^2=0;\quad q=-3 \text{ sau } q=-4.$$

Luând $q=-3$, ecuația dată se reduce la

$$y^2-y=0 \text{ de unde } y_1=0,\ y_2=1.$$

Rădăcinile ecuației vor fi date de

$$x^2+x-3=0;\quad x_{1,2}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{13}),$$

$$x^2+x-4=0;\quad x_{3,4}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{17}).$$

13. 8. *Se cufundă în apă un con de lemn de* 90 mm *înălțime, astfel ca axa lui să fie verticală. Se cere înălțimea părții conului care intră în apă făcând să plutească conul cu vârful în sus și apoi cu vârful în jos,* (densitatea lemnului este 0,6) (fig. 4).

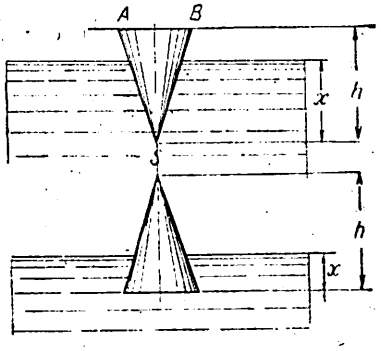


Fig. 4

Pentru ca să stea conul în echilibru, trebue ca volumul apei înlocuite de con să fie către volumul conului ca 1 la 0,6.

a) In primul caz, volumul apei deplasate este acela al unui con de înălțime x asemenea cu conul de înălțime $h=90$ cm; volumele acestor două conuri asemenea sunt între ele ca și cuburile înălțimilor, adică

$$\frac{x^3}{h^3}=\frac{0,6}{1},\quad x^3=0,6\cdot 90^3,$$

ecuație care are o singură rădăcină reală [1])

$$x=\sqrt[3]{0,6\cdot 90^3}=90\cdot\sqrt[3]{0,6}=9\times 8,4343=75,9087 \text{ cm}.$$

[1]) Ecuația este de forma $x^n=a$; vom arăta la § 22 că o asemenea ecuație numită *ecuație binomă,* în cazul că n este întreg fără soț, are o singură rădăcină reală.

b) In cazul al doilea, ecuația problemei va fi

$$\frac{V\left[1-\left(\frac{h-x}{h}\right)^3\right]}{V}=\frac{0{,}6}{1}.$$

De aici obținem

$$\left(\frac{h-x}{h}\right)^3=0{,}4,$$

ecuație care, pentru aceleași motive ca mai sus, are o singură rădăcină reală

$$\frac{h-x}{h}=\sqrt[3]{0{,}4};\quad x=h\,\frac{1-\sqrt[3]{400}}{10}=90-9\sqrt[3]{400}=23{,}6875 \text{ cm}.$$

Observație. Raza bazei nu intră în calcule, deoarece conurile considerate sunt asemenea.

§ 14. Ecuații conținând radicali[1]).

In general, o ecuație care conține radicali se rezolvă prin ridicări succesive la diferite puteri (impuse de ordinele radicalilor), după ce în prealabil am aranjat termenii convenabil. Grija pe care trebue s'o avem la asemenea ecuații este de a controla dacă soluțiile găsite verifică ecuația dată, aceasta din cauză că prin ridicări la puteri se introduc soluții străine.

O ecuație conținând radicali se mai numește și *irațională*.

14. 1. *Să se rezolve ecuația*

$$x+\sqrt{1-x^2}=0.$$

Izolând radicalul și ridicând la pătrat, obținem ecuația rațională $x^2=1-x^2$ sau $2x^2=1$, care are rădăcinile $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Rădăcina $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ nu poate fi soluție, deoarece în prima parte a ecuației am avea suma a două numere pozitive, care nu poate fi nulă; rădăcina $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ verifica ecuația, deci este o soluție.

Observație. Faptul că s'a introdus o soluție străină se explică astfel. A ridica ecuația dată la pătrat (după ce am izolat radicalii), revine la a o înmulți cu ecuația $x-\sqrt{1-x^2}=0$, în adevăr,

$$(x+\sqrt{1-x^2})(x-\sqrt{1-x^2})=0;\quad x^2-(1-x^2)=0;\quad 2x^2=1.$$

Or, rădăcina străină introdusă anulează tocmai factorul străin introdus.

14. 2. *Să se rezolve ecuația*

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x-14}=1.$$

Trecând al doilea radical în partea dreaptă și ridicând la pătrat, obținem ecuația

$$x-2=1+2\sqrt{x-14}+x-14;\quad 2\sqrt{x-14}=11,$$

[1]) In problemele din acest paragraf se consideră toți radicalii ca fiind aritmetici așa cum au fost definiți la § 9. Aceasta înseamnă, în particular, că rădăcinile imaginare nu ne vor interesa.

ca re ridicată din nou la pătrat ne dă

$$4(x-14)=121;\quad x=\frac{177}{4},$$

valoare care verifică ecuația dată.

14. 3. *Să se rezolve ecuația*

$$\sqrt{7x-13}-\sqrt{3x-19}=\sqrt{5x-27}.$$

Prima ridicare la pătrat ne dă noua ecuație, în care am izolat radicalul,

$$5x-5=2\sqrt{(7x-13)(3x-19)}.$$

Ridicând din nou la pătrat obținem ecuația algebrică

$$59x^2-638x+963=0,$$

ecuație care are ca rădăcini $x_1=\frac{107}{59}$, $x_2=\frac{531}{59}=9$. Prima rădăcină nu poate fi luată în seamă, deoarece pentru ea $7x-13<0$. A doua verifică ecuația dată.

14. 4. *Să se rezolve ecuația*

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1.$$

Inainte de a ridica la pătrat, scriem ecuația sub forma

$$\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1-\sqrt{x},$$

care prin ridicare la pătrat duce la

$$-\sqrt{1-x}=1-2\sqrt{x}.$$

Ridicând din nou la pătrat obținem

$$4\sqrt{x}=5x;\quad x(25x-16)=0,$$

ecuație care ne dă $x=0$ și $x=\frac{16}{25}$. Prima soluție nu poate conveni deoarece prima parte este imaginară. A doua verifică însă ecuația dată.

14. 5. *Să se rezolve ecuația*

$$\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[6]{a^2-x^2}.$$

Ridicând ambele părți la cub

$$(a+x)-3\sqrt[3]{(a+x)^2(a-x)}+3\sqrt[3]{(a+x)(a-x)^2}-(a-x)=\sqrt{a^2-x^2},$$

$$2x-3\sqrt[3]{a^2-x^2}(\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x})=\sqrt{a^2-x^2}.$$

Inlocuind paranteza cu partea dreaptă a ecuației, și cum

$$\sqrt[3]{a^2-x^2}\cdot\sqrt[6]{a^2-x^2}=\sqrt[6]{(a^2-x^2)^3}=\sqrt{a^2-x^2},$$

ecuația se scrie

$$x=2\sqrt{a^2-x^2},$$

care printr'o nouă ridicare la pătrat se reduce la

$$5x^2-4a^2=0;\quad x=\pm\frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Să verificăm soluțiile. Prima introdusă în ecuația dată duce la a arăta egalitatea

$$\sqrt[3]{\frac{a\sqrt{5}+2a}{\sqrt{5}}}-\sqrt[3]{\frac{a\sqrt{5}-2a}{\sqrt{5}}}=\sqrt[6]{a^2-\frac{4a^2}{5}}$$

sau simplificând cu $\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{5}}}$, ne rămâne

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1.$$

Notăm prima parte cu z și ridicăm la cub. Procedând ca mai sus, se obține că z este rădăcina ecuației

$$z^3+3z-4=(z-1)(z^2+z+4)=0$$

și cum paranteza a doua are rădăcini imaginare, singura soluție acceptabilă este $z=1$, adică ceeace trebuia arătat.

Dacă înlocuim a doua valoare a lui x suntem conduși la egalitatea $\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}=1$, absurdă, deoarece membrul stâng este negativ în timp ce membrul drept este pozitiv.

14. 6. *Să se rezolve ecuația*

$$5(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}=6(1-x^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Punem; $X=(1+x)^{\frac{1}{3}}$ și $Y=(1-x)^{\frac{1}{3}}$; atunci

$$XY=(1-x^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Ecuația dată devine

$$5X^2+Y^2=6XY.$$

Punând $Y/X=u$, această ecuație se reduce la

$$u^2-6u+5=0,$$

care are rădăcinile $u=1$ și $u=5$. Avem deci două cazuri: 1° $u=1$, adică $Y=X$, sau

$$(1-x)^{\frac{1}{3}}=(1+x)^{\frac{1}{3}};\quad 1-x=1+x,\quad x=0,$$

soluție care verifică ecuația dată, 2° $u=5$, adică $Y=5X$,

$$(1-x)^{\frac{1}{3}}=5(1+x)^{\frac{1}{3}};\quad 1-x=125(1+x),\quad x=-\frac{62}{63},$$

care verifică deasemenea ecuația. Problema are două soluții.

14. 7. *Să se rezolve ecuația*

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x+343}=7.$$

Punem $\sqrt[4]{x}=y$ și ecuația devine

$$y+\sqrt[3]{y^4+343}=7;\quad \sqrt[3]{y^4+343}=7-y,$$

care ridicată la cub, dă ecuația

$$y(y^3+y^2-21y+147)=y(y+7)(y^2-6y+21)=0.$$

Ultima paranteză având rădăcini imaginare, singurele soluții posibile sunt $y=0$ și $y=-7$. A doua nu poate fi luată în seamă, deoarece y trebue să fie pozitiv. Prima dă $x=0$, care verifică ecuația dată.

14. 8. *Să se rezolve ecuația*

$$\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b}.$$

Aducând la același numitor în prima parte

$$\frac{(a+x)\sqrt[n]{a+x}}{ax}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b};\qquad \left(\frac{a+x}{x}\right)^{\frac{n+1}{n}}=\frac{a}{b},\tag{1}$$

de unde

$$\frac{a+x}{x}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

Din această ecuație scoatem

$$x=\frac{a}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1}.$$

Ecuația dată este tot una cu (1) care este verificată de această soluție. Dacă n este număr fără soț, pentru ca x să fie real trebue ca numerele a și b să fie de același semn.

14. 9. *Să se facă rațională ecuația*

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}.$$

Se ridică ambele părți la cub; grupând termenii convenabil, avem succesiv

$$a^2x^2+3(abxy)^{\frac{2}{3}}[(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}]+b^2y^2=c^4;$$

$$a^2x^2+b^2y^2+3(abc^2xy)^{\frac{2}{3}}=c^4;$$

$$(a^2x^2+b^2y^2-c^4)^3=-27a^2b^2c^4x^2y^2.$$

Observație. Asemenea probleme intervin în *Geometria Analitică* unde, de multe ori, scrierea unui loc geometric introduce radicali care fac ca ecuația curbei rezultate să aibă o formă greu de mânuit; în aceste cazuri se pune problema raționalizării ecuației. Asemenea probleme se întâlnesc și în tehnică.

Dacă în problema de mai sus se face $a=b=c=R$ se obține [ecuația *astroidei* (prob. 58. 11) care sub formă rațională va fi

$$(x^2+y^2-R^2)^3+27R^2x^2y^2=0.$$

14. 10. *Să se facă rațională ecuația*

$$(xy)^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=a^2.$$

Ridicând la pătrat, ecuația se mai poate scrie

$$(xy)^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})=a^2-2xy; \qquad (1)$$

această ecuație ridicată la cub dă

$$xy\,[x^4+3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})+y^4]=(a^2-2xy)^3,$$

sau în baza lui (1)

$$xy\,(x^4+y^4)+3x^2y^2(a^2-2xy)=(a^2-2xy)^3,$$

sau încă

$$xy\,(x^4+y^4)=(a^2-2xy)\,(a^4-4a^2xy+x^2y^2).$$

§ 15. Inegalități

1. Cu inegalitățile lucrăm ca și cu egalitățile, cu singura deosebire că atunci când înmulțim (sau împărțim) o inegalitate cu un număr negativ, inegalitatea își schimbă sensul. Deasemenea când înmulțim sau împărțim două inegalități între numere pozitive și de același sens, parte cu parte, obținem o nouă inegalitate adevărată. De exemplu, când ridicăm la o putere pozitivă o asemenea inegalitate, obținem o nouă inegalitate adevărată.

Câteodată, pentru a demonstra o inegalitate, pornim dela o egalitate căreia îi mărim (sau micșorăm) una din părți. Partea mărită va fi mai mare decât cea lăsată neschimbată (respectiv mai mică). Alteori vom mări partea mai mare a unei inegalități, care știm că este adevărată, sau vom micșora pe cea mai mică.

2. O inecuație este o inegalitate care are loc numai pentru anumite valori ale uneia sau mai multor litere. Când lucrăm cu inecuațiile vom ține seamă de normele date mai sus pentru inegalități.

3. **Semnul trinomului.** A studia semnul unei expresii revine la a rezolva două inecuații: una care se capătă scriind că expresia este pozitivă, alta scriind că expresia este negativă. Una din asemenea expresii, foarte des întâlnită, este trinomul

$$T=ax^2+bx+c.$$

Discuția semnului trinomului este următoarea: I. Dacă rădăcinile ecuației $T=0$ sunt egale sau imaginare, T are semnul lui a oricare ar fi x; II. Dacă rădăcinile sunt reale și dacă $a>0$, trinomul este pozitiv când x este în afara rădăcinilor și negativ când x este între rădăcini; rezultatele se inversează dacă $a<0$.

Când avem de studiat semnul unui polinom, se caută să se descompună polinomul în factori reali, compuși din binoame de forma $x-\alpha$, unde α este o rădăcină reală, și din trinoame de forma ax^2+bx+c care au rădăcini imaginare și având pe a pozitiv (v. și § 23). Din descompunere se lasă deoparte factorii $x-\alpha$ la puteri cu soț, cum și toate trinoamele. Fie P produsul rămas. Semnul polinomului dat este același cu semnul produsului P. Se așează în ordinea mărimii valorile pentru care $P=0$ și se caută semnul lui P într'unul din intervalele astfel alese. Semnul lui P merge apoi alternat în toate celelalte intervale.

Dacă expresia al cărui semn trebue studiat este o fracție, se studiază semnul produsului termenilor ei.

Observație. Nu se pot scrie inegalități decât între numere reale. Deaceea, toate numerele care vor întra în problemele ce urmează sunt considerate reale.

15. 1. *a și b fiind două numere pozitive*

$$\frac{a+b}{2b} \geqq \frac{2a}{a+b}.$$

Deoarece a și b sunt pozitive, putem înmulți inegalitatea cu numărul pozitiv $2b\,(a+b)$ și o transformăm în inegalitatea

$$(a+b)^2 \geqq 4ab; \qquad (a-b)^2 \geqq 0,$$

inegalitate evidentă, deoarece un pătrat perfect este totdeauna pozitiv. Egalitatea are loc când $a=b$.

15. 2. *Avem totdeauna*

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca.$$

In adevăr, înmulțind egalitatea cu 2 și trecând totul în prima parte, avem

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqq 0,$$

expresia din prima parte fiind o sumă de pătrate, este totdeauna un număr pozitiv. Egalitatea are loc atunci când $a=b=c$.

15. 3. *Pentru ce valori ale lui m, inegalitatea*

$$(m+1)x^2-2(m-1)x+3(m-1)<0,$$

are loc oricare ar fi x?

Un trinom are același semn, și anume semnul coeficientului lui x^2, atunci când el are rădăcini imaginare. In cazul de față, va trebui să avem în același timp

$$m+1<0, \quad 2(m-1)(m+2) \geqq 0.$$

Prima parte a ultimei inegalități este un trinom. El cere ca $m \leqq -2$ sau $m \geqq 1$. Prima inegalitate se scrie $m<-1$. Inegalitățile vor fi satisfăcute în același timp dacă luăm $m \leqq -2$.

15. 4. *a și b fiind două numere pozitive și $a>b$, să se găsească cum trebue ales x pentru ca să avem*

$$\frac{(x+a)^2}{(x+b)^2} < \frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}.$$

Deoarece numitorii sunt pozitivi, putem înmulți inegalitatea cu produsul lor, adică o transformăm în

$$(b^2+x^2)(x+a)^2<(a^2+x^2)(x+b)^2,$$

sau scăzând din ambele părți produsul $(x^2+a^2)(x^2+b^2)$,

$$2ax(x^2+b^2)<2bx(x^2+a^2),$$

sau încă

$$2(a-b)x(ab-x^2)>0.$$

Cum $a>b$ primul factor este pozitiv, deci semnul va fi dat de expresia $x(ab-x^2)$. Cum această expresiel se anulează pentru $x=0$ și $x=\pm\sqrt{ab}$, așezând aceste valori pe o dreaptă se constată ușor că inegalitatea din enunț va avea loc pentru $x<-\sqrt{ab}$ sau $0<x<\sqrt{ab}$. (fig. 5).

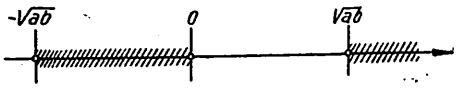


Fig. 5

15. 5. *Să se rezolve inegalitatea*

$$\sqrt[3]{2x^2+1}<\sqrt[3]{3x^2-1}.$$

Considerăm egalitatea cunoscută

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2). \qquad (1)$$

Cum trinomul din a doua paranteză este totdeuna pozitiv, deoarece scriindu-sub forma

$$b^2(u^2+u+1) \qquad (u=a/b),$$

trinomul din paranteză are rădicinile imaginare, relația (1) ne spune că $a-b$ are același semn cu a^3-b^3. Aceasta înseamnează că scriind inegalitatea dată sub forma

$$\sqrt[3]{2x^2+1}-\sqrt[3]{3x^2-1}<0,$$

ea va fi tot una cu

$$(2x^2+1)-(3x^2-1)<0;\ x^2-2>0$$

adică x trebue să fie mai mic decât $-\sqrt{2}$ sau mai mare decât $\sqrt{2}$.

15. 6. *Pentru ce valori ale lui x vom avea în același timp*

$$\frac{3x+5}{7-3x}<4,\ \frac{12x^2+13x-14}{x-2}<0?$$

Prima inegalitate o scriem

$$\frac{3x+5}{7-3x}-4<0,\ \frac{15x-23}{3x-7}>0,$$

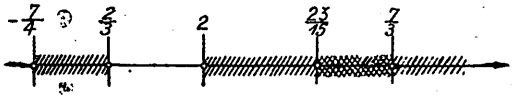
care este tot una cu

$$(15x-23)(3x-7)>0.$$

A doua inegalitate fiind o fracție, se poate spune și despre ea același lucru, adică putem scrie

$$(x-2)(12x^2+13x-14)<0 \quad \text{sau} \quad (x-2)(4x+7)(3x-2)<0.$$

In continuare este bine să se aşeze pe o dreaptă valorile lui x care anulează ambele prime părţi ale celor două inegalităţi (interesează numai ordinea, nu şi mărimea segmentelor ce le separă pe dreaptă) şi apoi să se şteargă segmentele care nu convin (fig. 6). Pentru prima este uşor; pentru a doua, înlocuim de exemplu, pe $x=0$ şi constatăm că segmentul pnde se află acest punct trebue uters, etc. Se vede de pe figură că valorile care convin problemei sunt



Fig, 6

$$x<-\frac{7}{4},\quad \frac{2}{3}<x<2.$$

Acelaşi rezultat se poate citi în tabela următoare în care sunt trecute, după diferitele valori ale lui x, semnele binoamelor componente ale fracţiilor din enunţ, şi apoi semnele fracţiilor însăşi.

x	$15x-23$	$3x-7$	$x-2$	$4x+7$	$3x-2$	$\frac{15x-23}{3x-7}$	$\frac{12x^2+13x-14}{x-2}$
$-\infty$	−	−	−	−	−		−
$-\frac{7}{4}$	−	−	−	0	−		...
$-$	−	−	−	+	−		+
$\frac{2}{3}$	−	−	−	+	0	+	...
$-$	−	−	−	+	+		−
2	−	−	0	+	+		...
$-$	−	−	+	+	+		
$\frac{23}{15}$	0	−	+	+	+	...	+
$\frac{7}{3}$	+	−	+	+	+	−	
$+\infty$	+	0	+	+	+	...	
	+	+	+	+	+	+	

15. 7. *Ce valori poate lua x pentru ca numărul*

$$N=\sqrt{x(x^4-7x^2+12)},$$

să existe?

Trebue să-l alegem pe x astfel ca

$$x(x^4-7x^2+12)\geqq 0.$$

Trebue să găsim *zerourile* polinomului din prima parte, pentru a putea să-l descompunem în factori de gradul I. Expresia din paranteză este bipatrată. Inegalitatea se scrie

$$x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-2)(x+2)\geqq 0.$$

Insemnând valorile care anulează prima parte pe o dreaptă, discuţia se face uşor. x trebue să se găsească pe segmentele neşterse, incluziv capetele lor (fig. 7).

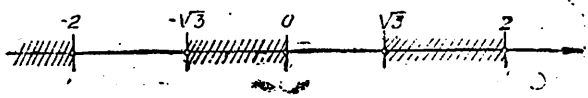


Fig. 7

15. 8. *Discuţia prob.* **9. 10.**

In această problemă s'au făcut două *ipoteze tacite* care vrem să arătăm că nu sunt totdeauna adevărate, ci numai in anumite

condiții impuse lui a și b. In adevăr, valoarea lui x cere ipoteza

$$\frac{2a-b}{b} \geqq 0, \tag{1}$$

iar când s'a calculat valoarea radicalului din a doua fracție din enunț am presupus că

$$\frac{a+b\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{b-a} > 0, \tag{2}$$

deoarece în caz contrar radicalul avea aceași valoare cu semnul — deci valoarea rezultatului se schimba. Să vedem în ce ipoteze sunt satisfăcute aceste condiții.

In primul rând, egalitatea din (1) spune că $x=0$ și se vede din enunț că în acest caz $E=1$, adică rezultatul este bun.

Inegalitatea (1) cere să avem

$$b(2a-b) > 0,$$

adică b să fie cuprins între zero și $2a$.

1°. $a>0$, atunci b este și el pozitiv și $0<b<2a$. Ce se întâmplă cu inegalitatea (2)? Cum a, b și radicalul sunt numere pozitive, însemnează că numărătorul este pozitiv, deci este necesar ca și numitorul $b-a>0$, adică $b>a$. Deci: $a<b<2a$.

2°. $a<0$, atunci și b este negativ și anume $2a<b<0$. Numărătorul lui (2) este negativ, deci trebue ca și $b-a<0$ adică $b<a$, cu alte cuvinte: $2a<b<a$.

In ambele cazuri trebue deci ca b să fie cuprins între a și $2a$. Dacă b este cuprins între 0 si a, valoarea expresiei este —1.

15. 9. *Să se arate că dacă* $0<a<1$, *atunci*

$$1-a^n < n(1-a).$$

Pornim dela egalitatea cunoscută

$$1-a^n = (1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}),$$

înlocuind în paranteza a doua pe a și puterile lui prin 1 obținem n. Partea a doua s'a mărit, deoarece un număr subunitar ridicat la puteri întregi și pozitive devine din ce în ce mai mic. Inegalitatea este demonstrată.

15. 10. *Dându-se* $2n$ *numere pozitive* a_i, b_i, *se consideră rapoartele*

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n},$$

dintre care să presupunem că cel mai mare este $\frac{a_k}{b_k}$, *iar cel mai mic este* $\frac{a_h}{b_h}$. *Să se demonstreze inegalitatea*

$$\frac{a_h}{b_h} \leqq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n} \leqq \frac{a_k}{b_k}.$$

Să demonstrăm inegalitatea din dreapta, cea din stânga demonstrându-se la fel. Inmulţind cu numerele pozitive b_k şi $b_1+b_2+\ldots,+b_n$ inegalitatea se reduce la

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\,b_k-(b_1+b_2+\cdots+b_n)\,a_k\leqslant 0, \quad \text{sau}$$
$$(a_1b_k-a_kb_1)+(a_2b_k-a_kb_2)+\cdots+(a_{k-1}b_k-a_kb_{k-1})+(a_{k+1}b_k-a_kb_{k+1})$$
$$+\cdots+(a_nb_k-a_kb_n)\leqslant 0.$$

Dar prin ipoteză, oricare ar fi i.

$$\frac{a_i}{b_i}\leqslant\frac{a_k}{b_k};\ a_ib_k-b_ia_k\leqslant 0,$$

adică toate parantezele din stânga ale inegalităţii sunt negative, deci toată partea stângă este negativă.

15. 11. *Să se găsească regiunile din plan pentru care coodonatele punctelor satisfac inegalităţile.*

$$xy>0,\quad x+y-2<0,$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2-4>0.$$

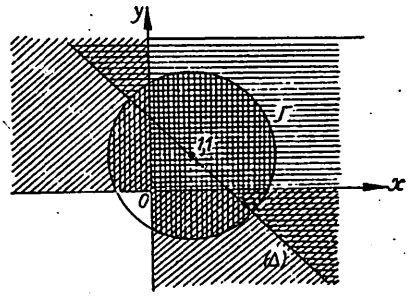


Fig. 8

Dacă x şi y reprezintă coordonatele unui punct din plan, produsul xy este pozitiv în primul şi al treila cadran. Polinomul $x+y-2$ este nul pe dreapta (Δ) care trece prin punctele (0,2) şi (2,0), negativ sub această dreaptă şi pozitiv deasupra ei. Insfârşit, expresia $(x-1)^2+(y-1)^2-4$ este nulă pe cercul (Γ) de centru (1,1) şi de rază 2, este negetivă pentru punctele interioare cercului şi pozitivă pentru cele exterioare.

Reprezentând pe figură (fig. 8) axele de coordonate, dreapta (Δ) şi cercul (Γ) şi haşurând părţile care nu corespund inegalităţilor din enunţ, ne rămâne partea din plan ale cărei puncte răspund problemei. Este interesant de observat că deoarece dreapta (Δ) nu aparţine frontierei regiunii bune, însemnează că negalitatea a doua este o consecinţă a celorlalte două.

15. 12. *Să se determine regiunile din plan pentru care coordonatele punctelor verifică inegalitatea.*

$$(5x-2y)\,(x-y+1)\,(y-x^2+x)>0.$$

Construim dreptele şi parabola

$$2y-5x=0, \quad (1) \qquad y-x-1=0, \quad (2) \qquad y=x^2-x, \quad (3)$$

Unul oarecare dintre cei trei factori ai inegalităţii va fi pozitiv pentru toate punctele planului situate deasupra curbei corespunzătoare şi negativ pentru restul punctelor (fig. 9).

Considerăm punctele interioare lui (3), ele fac $y-x^2+x>0$; deci, pentru ca inegalitatea să fie satisfăcută, este necesar ca ceilalţi doi factori să fie de acelaşi semn, ceeace are loc pentru toate punctele planului în acelaşi timp

deasupra sau dedesubtul dreptelor (*1*), (*2*), adică pentru regiunea haşurată în interiorul lui (*3*). In afara lui (*3*), factorul corespunzător este negativ, deci este necesar ca ceilalţi factori să fie de semne diferite, adică punctele să fie între dreptele respective, adică locul care este haşurat pe figură. In concluzie, punctele care răspund problemei sunt cele situate în regiunile haşurate pe figură.

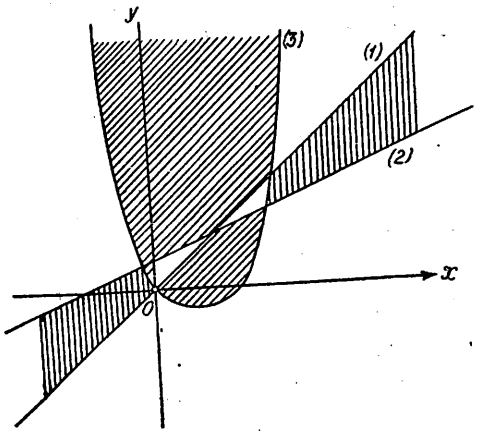


Fig. 9

15. 13. *In electrotehnică apar probleme în care, rezistenţele unei scheme trebue să fie astfel determinate, încât schema să îndeplinească anumite condiţii, de exemplu ca rezistenţa măsurată între bornele de intrare a schemei să depindă de una din rezistenţe. In rezolvarea unei astfel de probleme, obţinem pentru valoarea unei rezistenţe următoarea expresie*

$$R_1 = \frac{\left(-R_3 + \sqrt{\frac{2n}{n+1}R_3^2 + N^2}\right)(N - R_3) + N^2}{N + \sqrt{\frac{2n}{n+1}R_3^2 + N^2}},$$

unde R_3 şi N sunt rezistenţe pozitive, iar n o constantă deasemenea pozitivă. Se întreabă pentru ce valori ale lui R_3, R_1 există, ştiind că trebue să fie pozitiv.

Problema se reduce la a-l găsi pe R_3 ca să avem

$$\left(-R_3 + \sqrt{\frac{2n}{n+1}R_2^2 + N^2}\right)(N - R_3) + N^2 > 0.$$

Pentru simplificarea scrisului, punem

$$\frac{R^3}{N} = x, \quad \frac{2n}{n+1} = a, \tag{1}$$

şi inegalitatea se transformă în

$$(-x + \sqrt{ax^2 + 1})(1 - x) + 1 > 0.$$

Cum a este pozitiv, expresia de sub radical este mereu pozitivă încât radicalul este totdeauna real. Inegalitatea se mai scrie

$$(x - 1)\sqrt{ax^2 + 1} < x^2 - x + 1.$$

Pentru a studia această inegalitate vom fi nevoiţi s'o ridicăm la pătrat; dar pentru a avea dreptul să facem acest lucru, va trebui, în prealabil, să studiem semnul celor două părţi ale inegalităţii. Partea dreaptă este totdeauna pozitivă, deoarece trinomul care o formează are rădăcini imaginare. Impărţim problema iniţial în două cazuri.

I. $x<1$. Prima parte a inegalităţii este negativă, deci este adevărată.

II. $x>1$. Ambele părţi fiind pozitive, putem ridica la pătrat. Găsim, după ce se fac toate reducerile şi după ce simplificăm cu x^2,

$$(a-1)(x-1)^2-1<0. \tag{2}$$

Putem face două ipoteze asupra lui a:

1° $a \leqq 1$, inegalitatea este adevărată.

2° $a>1$ inegalitatea este adevărată când luăm

$$-\frac{1}{\sqrt{a-1}}<x-1<\frac{1}{\sqrt{a-1}},$$

şi cum nu ne interesează decât x supraunitar, partea stânga se înlocueşte cu zero. Această dublă inegalitate se scrie deci

$$1<x<1+\frac{1}{\sqrt{a-1}},$$

care conţine şi condiţia iniţială.

Revenind la vechile notaţii, putem spune că R_1 dat în enunţ există, atunci când:

I. $R_3<N$ oricare ar fi n,

II. $R_3>N$ atunci când $n \leqq 1$,

III. $N<R_3<N\left(1+\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right)$ atunci când $n>1$.

§ 16. Relaţii între rădăcini şi coeficienţi. Funcţii simetrice

1. Fiind dată o ecuaţie de gradul n

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_px^{n-p}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0, \tag{I}$$

ale cărei rădăcini sunt $x_1, x_2, \ldots x_n$ (se demonstrează că totdeauna o ecuaţie de gradul n are n rădăcini şi numai atâtea), avem următoarele n relaţii între rădăcinile şi coeficienţii ei

$$\left\{\begin{array}{l} \sum x_1=-\frac{a_1}{a_0},\quad \sum x_1x_2=\frac{a_2}{a_0},\ldots,\sum x_1x_2\ldots x_p=(-1)^p\frac{a_p}{a_0},\ldots, \\ \qquad\qquad \sum x_1x_2\cdots x_{n-1}=(-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}}{a_0},\quad x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}, \end{array}\right. \tag{II}$$

unde în prima sumă rădăcinile sunt luate fiecare câte o singură dată, în a doua produsele câte două în toate modurile posibile, etc.

Pentru ecuaţia de gradul 2

$$ax^2+bx+c=0, \tag{III}$$

relaţiile între rădăcini şi coeficienţi sunt

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}. \tag{III'}$$

Pentru ecuația de gradul 3

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \tag{IV}$$

relațiile între rădăcini și coeficienți se scriu

$$\left\{ x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a},\quad x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}\cdot \right. \tag{IV'}$$

Pentru ecuația de gradul 4

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, \tag{V}$$

avem relațiile, scrise sub forma care este folosită în aplicații,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a},\quad (x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4=\frac{c}{a}, \\ x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4(x_1+x_2)=-\frac{d}{a},\quad x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a}\cdot \end{array} \right. \tag{V'}$$

2. Se numește *funcție simetrică* de rădăcinile unei ecuații, o expresie care nu-și schimbă valoarea când schimbăm între ele două rădăcini oarecare. Se demonstrează că orice polinom simetric de rădăcinile unei ecuații se exprimă rațional cu ajutorul coefecienților ecuației, ceeace se face prin intermediul relațiilor dintre rădăcini și coeficienți.

3. O categorie importantă de funcții simetrice o formează puterile asemenea ale rădăcinilor

$$S_\alpha=x_1^\alpha+x_2^\alpha+\cdots+x_n^\alpha,$$

unde α este un număr presupus întreg și pozitiv. Aceste sume se calculează din aproape în aproape prin formulele

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0S_1+a_1=0, \\ a_0S_2+a_1S_1+2a_2=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0S_n+a_1S_{n-1}+\cdots+a_{n-1}S_1+na_n=0, \\ a_0S_{n+1}+a_1S_n+\cdots+a_{n-1}S_2+a_nS_1=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0S_{n+p}+a_1S_{n+p-1}+\cdots+a_{n-1}S_{p-1}+a_nS_p=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right. \tag{VI}$$

16. 1. *Să se calculeze adâncimea unui puț, știind că s'au scurs t secunde între momentul când s'a lăsat o piatră să cadă și până când sunetul lovirii apei a fost auzit* (se neglijează rezistența aerului).

Să notăm cu x adâncimea puțului și cu v viteza sunetului în aer. Timpul t se va compune din două părți: 1° din timpul t' necesar pietrei pentru a cădea și 2° timpul t'' necesar sunetului pentru a se ridica; avem $t=t'+t''$. Dar, se cunosc formulele

$$x=\frac{1}{2}gt'^2 \quad \text{și} \quad x=vt'', \tag{1}$$

de unde scoţând pe t' şi t'', vom avea

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v} = t; \quad \frac{2x}{g} = \left(t - \frac{x}{v}\right)^2,$$

sau însfârşit,

$$gx^2 - 2v(gt+v)x + gv^2t^2 = 0. \qquad (2)$$

Discuţie. Pentru ca o rădăcină a acestei ecuaţii să fie acceptabilă este necesar să fie reală, pozitivă şi mai mică decât vt, deoarece $x = vt''$ şi $t'' < t$. Rădăcinile sunt totdeauna reale, deoarece realizantul are drept expresie

$$v^2(gt+v)^2 - g^2v^2t^2 = v^3(v+2gt).$$

Ele sunt pozitive, deoarece suma şi produsul lor sunt două numere pozitive. Să vedem dacă vt este cuprins între rădăcini sau se află în afara lor. Cum $f(vt) = -2v^3t < 0$ însemnează că vt este între rădăcini, deci numai cea mai mică va corespunde problemei, adică

$$x = \frac{v}{g}\left[gt + v - \sqrt{v(v+2gt)}\right].$$

16. 2. *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^4 - 15x^2 - 10x + p = 0$$

ştiind că suma a două rădăcini este egală cu 1, *şi să se determine apoi parametrul p.*

Punând $x_1 + x_2 = 1$, relaţiile (V') dintre rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei, sunt

$$\begin{aligned} &x_3 + x_4 = -1, \\ &x_3 + x_4 + x_1x_2 + x_3x_4 = -15, \quad x_1x_2 + x_3x_4 = -14, \\ &x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4 = 10, \quad -x_1x_2 + x_3x_4 = 10 \\ &x_1x_2x_3x_4 = p. \end{aligned}$$

Relaţiile deduse din a doua şi a treia relaţie adunate şi scăzute dau $x_3x_4 = -2$, $x_1x_2 = -12$ ultima relaţie dă imediat valoarea lui $p = (x_1x_2)(x_3x_4) = 24$. Formulele obţinute se pot grupa astfel

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1x_2 = -12 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 + x_4 = -1, \\ x_3x_4 = -2 \end{cases}$$

care, comparate cu (III') ne arată că (x_1, x_2) şi (x_3, x_4) sunt rădăcinile ecuaţiilor de gradul 2,

$$x^2 - x - 12 = 0, \quad x^2 + x - 2 = 0,$$

de unde rădăcinile $x_1 = -3$, $x_2 = 4$, $x_3 = -2$, $x_4 = 1$.

16. 3. *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 + px + q = 0$$

ştiind că are rădăcinile în progresie aritmetică şi să se determine parametrii p şi q.

Notăm rădăcinile cu

$$x_1 = a - 3b, \; x_3 = a - b, \; x_4 = a + b, \; x_2 = a + 3b.$$

Din primele două relații între rădăcini și coeficienți reiese că

$$\sum x_1 = 4a = 10; \quad a = \frac{5}{2},$$

$$\sum x_1 x_2 = 4a^2 + (a-3b)(a+3b) + (a-b)(a+b) = 35; \quad 6a^2 - 10b^2 = 35,$$

și ținând seama de valoarea lui a,

$$b^2 = \frac{1}{4}; \quad b = \pm\frac{1}{2}.$$

Oricare din aceste valori dau rădăcinile 1, 2, 3, 4. Problema are o singură soluție. Pentru a găsi pe p și q putem folosi celelalte două relații între rădăcini și coeficienți, pe care încă nu le-am folosit, sau putem scrie că ecuația este verificată de două din rădăcinile găsite. De exemplu, scriind că este verificată de primele două, rezultă condițiile

$$p+q=-26, \quad 2p+q=-76.$$

Aceste două condiții, considerate ca două ecuații în p și q, ne permit să găsim valorile lor: $p=-50$, $q=24$.

16. 4. *Fiind dată ecuația*

$$(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = 0, \tag{1}$$

în care c este un număr fix pozitiv, să se discute ecuația considerând întâi pe x ca parametru, apoi pe y.

Desvoltând ecuația și ordonând după y, obținem

$$y^4 + 2(x^2+c^2)y^2 + x^2(x^2-2c^2) = 0, \tag{2}$$

care este o ecuație bipătrată. Pentru rezolvarea ei punem $y^2=u$, și ecuația în u va fi de gradul 2. Această ecuație are rădăcinile reale oricare ar fi x, deoarece realizantul este

$$(x^2+c^2)^2 - x^2(x^2-2c^2) = 4x^2c^2 + c^4 = c^2(4x^2+c^2) > 0.$$

Nu este însă suficient să afirmăm că ecuația (2) are rădăcinile reale. Va fi necesar ca cel puțin una din rădăcinile ecuației în u să fie pozitivă. Or, suma și produsul acestor rădăcini este

$$u_1+u_2 = -2(x^2+c^2), \quad u_1u_2 = x^2(x^2-2c^2).$$

Cum suma este totdeauna negativă, însemnează că în valoare absolută cea mai mare rădăcină va fi negativă; este necesar ca cealată să fie pozitivă, adică produsul să fie negativ, ceeace cere

$$x^2 - 2c^2 \leqslant 0 \quad -c\sqrt{2} \leqslant x \leqslant c\sqrt{2}. \tag{3}$$

In aceste ipoteze, ecuația are deci două rădăcini reale (egale și de semne contrare); în toate celelalte cazuri, toate rădăcinile sunt imaginare.

Ordonând ecuația după x, obținem

$$x^4 + 2(y^2-c^2)x^2 + y^2(y^2+2c^2) = 0. \tag{4}$$

Ecuația în u are rădăcinile reale când

$$(y^2-c^2)^2-y^2(y^2+2c^2)=c^2(c^2-4y^2)\geqq 0, \tag{5}$$

adică atunci când

$$-\frac{1}{2}c\leqq y\leqq\frac{1}{2}c. \tag{6}$$

Pentru ecuația în u avem

$$u_1+u_2=c^2-y^2,\quad u_1u_2=y^2(y^2+2c^2)>0;$$

dar, în baza lui (5), avem și

$$u_1+u_2=c^2-y^2=(c^2-4y^2)+3y^2>0.$$

Ecuația în u are ambele rădăcini pozitive. Deci, când y satisface condițiile (6), ecuația (4) are patru rădăcini reale. În caz contrar, ecuația are patru rădăcini imaginare.

16. 5. *Fiind dată ecuația*

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$

care are rădăcinile x_1, x_2, x_3, *să se determine ecuația care are drept rădăcini numerele*

$$y_1=x_2+x_3,\quad y_2=x_3+x_1,\quad y_3=x_1+x_2.$$

Soluția I. Este necesar să găsim pentru noua ecuație pe $\sum y_1, \sum y_1y_2$, $y_1y_2y_3$ în funcție de relațiile existente

$$\sum x_1=-p,\quad \sum x_1x_2=q,\quad x_1x_2x_3=-r.$$

Avem succesiv

$$\sum y_1=\sum(x_1+x_2)=2\sum x_1,$$
$$\sum y_1y_2=\sum(x_1+x_2)(x_2+x_3)=\sum(x_1x_2+x_2^2+x_1x_3+x_2x_3)=3\sum x_1x_2+\sum x_1^2,$$
$$y_1y_2y_3=(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=2x_1x_2x_3+\sum x_1^2x_2.$$

Pentru a obține aceste sume trebue să calculăm sumele $\sum x_1^2$ și $\sum x_1^2x_2$.

În acest scop scriem

$$\sum x_1^2=(\sum x_1)^2-2\sum x_1x_2=p^2-2q,$$
$$\sum x_1^2x_2=(\sum x_1)(\sum x_1x_2)-3x_1x_2x_3=-pq+3r,$$

deci

$$\sum y_1=-2p,\quad \sum y_1y_2=3q+(p^2-2q)=p^2+q,\quad y_1y_2y_3=-2r+(-pq+3r)=r-pq$$

adică ecuația căutată va fi

$$y^3+2py^2+(p^2+q)y+(pq-r)=0.$$

Soluția II. Prima metodă este generală, iar cea pe care o expunem acum este particulară, legată de natura problemei. Scriem

$$y_1=x_2+x_3=(x_1+x_2+x_3)-x_1=-p-x_1,\ldots$$

de unde reese că noua ecuație se va obține din prima prin transformarea

$$x=-p-y,$$

Făcând acest lucru ajungem la același rezultat ca și mai sus.

16. 6. *Fiind dată ecuația*

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0,$$

să se găsească ecuația care are ca rădăcini pătratele rădăcinilor ecuației date.

Soluția I. Vom ține seama de relațiile dintre rădăcinile și coeficienții ecuației date

$$\sum x_1=-p,\quad \sum x_1x_2=q,\quad \sum x_1x_2x_3=-r,\quad x_1x_2x_3x_4=s.$$

Notând cu $y_i=x_i^2$ rădăcinile noii ecuații, vom avea succesiv

$$\sum y_1=\sum x_1^2=(\sum x_1)^2-2\sum x_1x_2=p^2-2q,$$

$$\sum y_1y_2=\sum x_1^2x_2^2=(\sum x_1x_2)^2-2(\sum x_1^2x_2x_3+3x_1x_2x_3x_4)=q^2-6s-2\sum x_1^2x_2x_3,$$

$$\sum y_1y_2y_3=\sum x_1^2x_2^2x_3^2=(\sum x_1x_2x_3)^2-2x_1x_2x_3x_4\sum x_1x_2=r^2-2qs,$$

$$y_1y_2y_3y_4=x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2=s^2.$$

Avem nevoie de calculul sumei $\sum x_1^2x_2x_3$. Ca și la problema precedentă, unde am calculat o sumă asemănătoare, vom avea și aici

$$\sum x_1^2x_2x_3=(\sum x_1x_2x_3)(\sum x_1)-4x_1x_2x_3x_4=pr-4s,$$

făcând înlocuirea, rezultă că ecuația căutată este

$$y^4-(p^2-2q)y^3+(q^2-2pr+2s)y^2-(r^2-2qs)y+s^2=0.$$

Soluția II. Se poate ajunge la același rezultat astfel: a găsi ecuația formată cu pătratele rădăcinilor ecuației date revine la a înlocui în ecuația dată pe x^2 cu y (adică a *elimina* pe x între ecuația dată și $x^2=y$). Acest lucru se face scriind ecuația dată sub forma

$$x^4+qx^2+s=-x(px^2+r),$$

ridicând-o la patrat și înlocuind peste tot pe x^2 cu y, rezultă ecuația de mai sus.

16. 7. *Să se calculeze sumele S_α pentru rădăcinile ecuației*

$$x^n-1=0.$$

In cazul prezent, $a_0=1$, $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=0$, $a_n=-1$. Din primele $(n-1)$ formule din (VI) reiese că $S_1=S_2=\cdots=S_{n-1}=0$, iar $a\,n^a$ ne dă $S_n=-na_n=n$. Următoarele $(n-1)$ ne spun deasemenea că $S_{n+1}=S_{n+2}=\cdots=S_{2n-1}=0$ iar următoarea, $S_{2n}=-a_nS_n=n$, etc. Din aproape în aproape se constată că sumele S_m sunt nule, dacă m nu este un multiplu al lui n și sunt egale cu n când m este un asemenea multiplu.

16. 8. *Să se formeze ecuația de gradul 6 care are drept rădăcini cele șase valori ale raportului anarmonic a patru numere date.*

Se știe că dacă cele patru numere sunt a,b,c,d, raportul lor anarmonic este

$$\rho=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}, \tag{1}$$

unde am luat numerele într'o ordine determinată. Dacă schimbăm această ordine, se mai pot forma încă cinci rapoarte anarmonice distincte, toate exprimându-se cu ρ prin formulele

$$\rho,\ \frac{1}{\rho},\ 1-\rho,\ \frac{1}{1-\rho},\ 1-\frac{1}{\rho},\ \frac{1}{1-\frac{1}{\rho}}, \tag{2}$$

și problema cere să se găsească ecuația de gradul 6 care are aceste numeri, ca rădăcini. Din șirul (2) rezultă, că dacă se alege unul dintre numere șirulue atunci și inversul lui se găsește în șir ceeace înseamnează că ecuația pe care o vom găsi va fi reciprocă. Mai mult, dacă α este un număr al șirului, atunci și $1-\alpha$ este în șir. Cum α și $1-\alpha$ sunt rădăcini ale unui trinom de forma $x^2-x+\lambda$ (deoarece $\alpha+1-\alpha=1$), ecuația căutată va trebui să fie de forma

$$(x^2-x+\lambda)\,(x^2-x+\mu)\,(x^2-x+\nu)=0,$$

sau încă

$$(x^2-x)^3+A(x^2-x)^2+B(x^2-x)+C=0,$$

A, B, C, fiind constante pe care urmează să le determinăm. Pentru ca această ecuație să fie reciprocă este necesar ca, desvoltând-o, să aibă coeficienții egal depărtați de extremi, egali între ei. Egalând coeficientul termenului de gradul cel mai înalt cu termenul liber, rezultă $C=1$; apoi coeficienții termenilor x^5 și x cer ca $-3=-B$; coeficienții termenilor x^4 și x^2 dau identitatea $3+A=A+3$. Ecuația se prezintă deci sub forma

$$(x^2-x)^3+A(x^2-x)^2+3(x^2-x)+1=0,$$

sau încă, punând $A-3=\lambda$,

$$(x^2-x+1)^3+\lambda(x^2-x)^2=0. \tag{3}$$

Pentru determinarea lui λ scriem că o valoare a raportului anarmonic verifică această ecuație; dacă cunoaștem pe ρ dat de (1), atunci

$$\lambda=-\frac{(\rho^2-\rho+1)^3}{(\rho^2-\rho)^2}. \tag{4}$$

§ 17. Sisteme de ecuații algebrice

1. Printr'un sistem de ecuații algebrice înțelegem mai multe ecuații cu mai multe necunoscute; în general, numărul ecuațiilor este același cu al necunoscutelor. A rezolva un sistem de ecuații, însemnează a găsi toate grupele de valori care, puse în locul necunoscutelor, să verifice ecuațiile sistemului. Metoda generală de rezolvare este *eliminarea* treptată a necunoscutelor, până ce se ajunge la o singură ecuație cu o singură necunoscută. Această ultimă ecuație rezolvată ne va da valorile unei necunoscute, care, introduse apoi în ecuațiile care dau pe celelalte în funcție de ea, ne dau soluțiile sistemului.

2. Cele mai simple sisteme sunt cele ale căror ecuații sunt de gradul 1, care se mai numesc și *sisteme liniare*. Sistemele liniare de două ecuații cu două necunoscute x, y se rezolvă în general prin *metoda eliminării*. In general, un asemenea sistem admite o singură grupă de soluții.

O altă metodă este *metoda reducerii* care constă în aceea că se înmulțesc ecuațiile sistemului cu câte un număr, bine ales, astfel că prin adunare să dispară una din necunoscute, de exemplu y; ecuația astfel formată ne va da pe x, care introdus apoi în una din ecuații ne dă pe y.

La capitolul 4 vom da o metodă mai generală, care ne va permite ca, pe lângă rezolvare, să facem și discuția sistemelor de ecuații liniare cu oricâte necunoscute.

3. Se întâlnesc deseori, sisteme de două ecuații cu două necunoscute, dintre care o ecuație este de gradul 1, iar cealaltă de gradul 2. Se procedează deobicei prin metoda eliminării, scoțând una din necunoscute din ecuația de gradul 1, etc. Se găsesc în general două perechi de soluții.

4. Uneori avem de rezolvat sisteme de ecuații simetrice în raport cu necunoscutele, oricum am alege necunoscutele două câte două. Asemenea sisteme se rezolvă reducându-le, prin relații între rădăcini și coeficienți, la rezolvarea unei ecuații auxiliare cu o singură necunoscută, ale cărei rădăcini să fie, într'o ordine oarecare, valorile necunoscutelor.

A se vedea și § 30.

17. 1. *Să se rezolve sistemul*

$$-x+y+z=0, \quad x-y+z=-6, \quad x+y-z=4.$$

Prin adunare, sistemul dă ecuația

$$x+y+z=-2.$$

Scăzând pe rând această ecuație din ecuațiile sistemului, se obține soluția

$$x=-1, \quad y=2, \quad z=-3.$$

Atât forma sistemului, cât și metoda întrebuințată se pot generaliza ușor la cazul mai multor necunoscute (a se vedea prob. 27. 4).

17. 2. *Să se rezolve sistemul*

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{1}{4},$$

$$x+y=\frac{113}{16}.$$

Pentru a nu lucra cu radicali, facem substituția $\sqrt{x}=u$ și $\sqrt{y}=v$ și sistemul considerat devine

$$u-v=\frac{1}{4} \quad u^2+v^2=\frac{113}{16}. \tag{1}$$

Ridicând prima ecuație la pătrat și ținând seamă de a doua, găsim

$$\frac{113}{16}-2uv=\frac{1}{16}; \quad uv=\frac{7}{2} \quad \text{sau} \quad u(-v)=-\frac{7}{2}. \tag{2}$$

Ecuațiile (1) și (2), considerate ca relațiile dintre rădăcinile și coeficienții unei ecuații auxiliare de gradul 2 în t, duc la rezolvarea ecuației

$$t^2-\frac{1}{4}t-\frac{7}{2}=0;\quad 4t^2-t-14=0,$$

care dă valorile $t_1=2$ și $t_2=-\frac{7}{4}$. Una din aceste valori este u, alta $-v$; le alegem în așa fel, încât prima ecuație din (1) să fie verificată, adică trebue să luăm $u=2$, $v=\frac{7}{4}$. Aceasta înseamnează că

$$x=u^2=4,\quad y=v^2=\frac{49}{16}.$$

17. 3. *Să se rezolve sistemul*

$$x^2+xy+y^2=19,$$
$$x^4+x^2y^2+y^4=133.$$

Prima parte a ecuației a doua se scrie

$$(x^2+y^2)^2-x^2y^2=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2),$$

încât pe baza primei ecuații cea de a doua devine

$$x^2-xy+y^2=7.$$

Sistemul se reduce la două ecuații de gradul 2 care adunate și scăzute dau:

$$x^2+y^2=13,\quad xy=6.$$

Or, prima ecuație, pe baza celei de a doua, se scrie

$$(x+y)^2-2xy=(x+y)^2-12=13;\quad x+y=\pm 5.$$

Avem două cazuri de examinat: 1° $x+y=5$, $xy=6$; aceasta înseamnează că x și y sunt rădăcinile ecuației

$$t^2-5t+6=0 \text{ de unde } x=3,\ y=2 \text{ (sau invers).}$$

2° $x+y=-5$, $xy=6$, adică x și y sunt rădăcinile ecuației

$$t^2+5t+6=0 \text{ de unde } x=-3,\ y=-2 \text{ (sau invers).}$$

Dacă nu ținem seama de simetrie se poate spune că sistemul are *patru* soluții.

17. 4. *Să se rezolve ecuația*

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=b.$$

Punem

$$u=\sqrt[3]{a+\sqrt{x}},\ v=\sqrt[3]{a-\sqrt{x}};$$

ecuația dată se transformă în

$$u+v=b.$$

Dar, din substituția făcută rezultă

$$u^3+v^3=2a,$$

încât rezolvarea ecuației date s'a redus la rezolvarea sistemului

$$u+v=b, \quad u^3+v^3=2a.$$

A doua ecuație scrisă sub forma

$$(u+v)^3-3uv(u+v)=2a \quad \text{ne dă} \quad uv=\frac{b^3-2a}{3b}.$$

Având suma și produsul, numerele u și v vor fi date de ecuația

$$t^2-bt+\frac{b^3-2a}{3b}=0.$$

Odată u și v găsiți, avem pe x dat de ecuația

$$\sqrt{x}=u^3-a \quad \text{sau} \quad \sqrt{x}=a-v^3.$$

Pentru ca u și v să existe, este necesară condiția

$$b^2-4\frac{b^3-2a}{3b}\geqq 0 \quad \text{sau} \quad b(8a-b^3)\geqq 0.$$

17. 5. *Să se rezolve sistemul*

$$\frac{x^3}{a}=\frac{y^3}{b}=\frac{z^3}{c}, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{k}.$$

Notând cu $\frac{1}{t^3}$ valoarea comună a primelor trei rapoarte, vom avea

$$x=\frac{\sqrt[3]{a}}{t}, \quad y=\frac{\sqrt[3]{b}}{t}, \quad z=\frac{\sqrt[3]{c}}{t}, \tag{1}$$

valori care introduse în a treia ecuație dau

$$t\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c}}\right)=\frac{1}{k},$$

ecuație care dă pentru $\frac{1}{t}$ valoarea

$$\frac{1}{t}=k\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c}}\right).$$

Această valoare înlocuită în (1) dă soluția sistemului

$$x=k\left(1+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{a}{c}}\right), \quad y=k\left(1+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\right), \quad z=k\left(\sqrt[3]{\frac{c}{a}}+\sqrt[3]{\frac{c}{b}}\right).$$

17. 6. *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} (z+y)^2-x^2=a^2, \\ (x+z)^2-y^2=b^2, \\ (y+x)^2-z^2=c^2. \end{cases}$$

Sistemul se mai poate scrie sub forma

$$\begin{aligned} (x+y+z)(-x+y+z)&=a^2, \\ (y+z+x)(x-y+z)&=b^2, \\ (z+x+y)(x+y-z)&=c^2, \end{aligned}$$

de unde se vede că este indicat să punem

$$x+y+z=2p;$$

sistemul devine

$$4p(p-x)=a^2,\quad 4p(p-y)=b^2,\quad 4p(p-z)=c^2,$$

ecuaţii care se mai pot scrie la un loc

$$\frac{1}{4p}=\frac{p-x}{a^2}=\frac{p-y}{b^2}=\frac{p-z}{c^2}.$$

Aplicând o proprietate a proporţiilor, din aceste ecuaţii deducem

$$\frac{1}{4p}=\frac{3p-(x+y+z)}{a^2+b^2+c^2}=\frac{p}{a^2+b^2+c^2};\quad p=\epsilon\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

unde $\epsilon=\pm 1$. Apoi,

$$\frac{1}{4p}=\frac{p-x}{a^2};\quad x=p-\frac{a^2}{4p}=\epsilon\frac{b^2+c^2}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

şi prin permutări circulare,

$$y=\epsilon\frac{c^2+a^2}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad z=\epsilon\frac{a^2+b^2}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad (\epsilon=\pm 1).$$

Sistemul admite totdeauna *două* soluţii.

17. 7. *Să se rezolve sistemul*

$$x^2(y-z)=a^3,\quad y^2(z-x)=b^3,\quad z^2(x-y)=c^3.$$

Suma celor trei ecuaţii ne dă

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x)=a^3+b^3+c^3,$$

iar făcând produsul lor,

$$(x-y)(y-z)(z-x)\,x^2y^2z^2=a^3b^3c^3.$$

Impărţind aceste ecuaţii între ele, obţinem

$$x^2y^2z^2=-\frac{a^3b^3c^3}{a^3+b^3+c^3}.$$

Această egalitate nu poate avea loc decât în ipoteza

$$a^3b^3c^3(a^3+b^3+c^3)<0,$$

ceeace presupunem că este îndeplinit. Fie

$$\frac{a^3b^3c^3}{a^3+b^3+c^3}=-h^2; \tag{1}$$

atunci

$$xyz=\epsilon h \qquad (\epsilon=\pm 1). \tag{2}$$

Înmulțind prima ecuație cu y, pe a doua cu x și adunând avem

$$xyz(y-x) = a^3y + b^3x; \quad \frac{y}{x} = \frac{b^3+h}{h-a^3}. \tag{3}$$

Analog avem

$$\frac{z}{y} = \frac{c^3+h}{h-b^3}; \quad \frac{y}{z} = \frac{h-b^3}{c^3+h}. \tag{4}$$

Înmulțind pe (3) cu (4),

$$\frac{y^2}{xz} = \frac{y^3}{xyz} = \frac{y^3}{h} = \frac{(h-b^3)(h+b^3)}{(h-a^3)(h+c^3)}; \quad y = \sqrt[3]{\frac{h(h^2-b^6)}{(h-a^3)(h+c^3)}}.$$

Prin permutări circulare găsim

$$z = \sqrt[3]{\frac{h(h^2-c^6)}{(h-b^3)(h+a^3)}}, \quad x = \sqrt[3]{\frac{h(h^2-a^6)}{(h-c^3)(h+b^3)}},$$

unde h are două valori date de (1).

17. 8. *Cunoscând grosimea d a unei lentile biconvexe, având greutatea p și lungimea c a cercului comun celor două fețe, să se găsească razele sferelor cărora aparțin cele două fețe ale lentilei* (se dă greutatea specifică 3, 5,), *Aplicație numerică:* $d=3{,}5$ cm; $p=713{,}8$ g; $c=12\pi$.

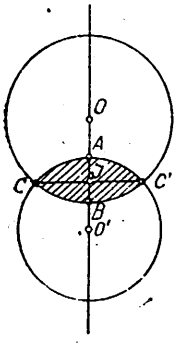


Fig. 10

Presupunem că axa lentilei întâlnește cele două sfere cărora aparțin fețele lentilei în A și B și planul cercului comun în I (fig. 10). Luăm drept necunoscute: $\overline{IA}=y$, $\overline{IB}=x$, R și r cele două raze ale sferelor. Dacă notăm cu $l=\overline{IC}=\overline{IC'}$, atunci $c=2\pi l$, de unde îl scoatem pe l.

Puterea lui I față de cele două sfere dă relațiile

$$l^2 = x(2R-x), \quad l^2 = y(2r-y), \tag{1}$$

și

$$x+y=d. \tag{2}$$

Însfârșit volumul lentilei este deasemenea cunoscut, și anume $p/3{,}5$;

$$\frac{p}{3{,}5} = V = \frac{\pi}{3}x^2(3R-x) + \frac{\pi}{3}y^2(3r-y),$$

deoarece este format din două calote sferice. Obținem astfel noua ecuație

$$3Rx^2 + 3ry^2 - (x^3+y^3) = \frac{3V}{\pi}. \tag{3}$$

Problema s'a redus astfel la a rezolva sistemul format de ecuațiile (1), (2) și (3). Din primele două ecuații scoatem

$$2Rx = l^2 + x^2, \quad 2ry = l^2 + y^2, \tag{4}$$

care ne vor da pe R și r când vom cunoaște pe x și y. Inlocuind valorile acestor necunoscute în (3), obținem

$$\frac{3}{2}x(x^2+l^2)+\frac{3}{2}y(y^2+l^2)-(x^3+y^3)=\frac{3V}{\pi},$$

$$\frac{1}{2}(x^3+y^3)+\frac{3}{2}l^2d=\frac{3V}{\pi}. \tag{5}$$

Astfel se pune problema de a găsi pe x și y definiți de ecuațiile (2) și (5). Deoarece

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=d^3-3dxy,$$

ultima ecuație dă

$$xy=\frac{d^3-e}{3d}, \tag{6}$$

unde am pus, pentru prescurtare, $e=\frac{6V}{\pi}-3l^2d$. Ecuațiile (5) și (6) spun că x și y sunt rădăcinile ecuației

$$z^2-dz+\frac{d^3-e}{3d}=0.$$

Aplicația numerică: $p=713{,}8$, $V=713{,}8:3{,}5=203{,}943$, apoi

$$\frac{6V}{\pi}=6\cdot 203{,}943\cdot 0{,}31831=389{,}5026;\quad l=\frac{c}{2\pi}=6;$$

$$3l^2d=108\cdot 3{,}5=378,\quad e=\frac{6V}{\pi}-3l^2d=389{,}5026-378=11{,}5026,$$

$$\frac{d^3-e}{3d}=\frac{42{,}875-11{,}5026}{10{,}5}=2{,}9878.$$

Ecuația care dă pe x și y este

$$z^2-3{,}5z+2{,}9878=0, \tag{7}$$

care are drept rădăcini

$$x=\frac{1}{2}(3{,}5+\sqrt{3{,}5^2-11{,}9512})=2{,}0235;$$

$$y=\frac{1}{2}(3{,}5-\sqrt{3{,}5^2-11{,}9512})=1{,}4765.$$

Din ecuația (7) scoatem

$$x^2=3{,}5x-2{,}9878=4{,}09445;\quad y^2=3{,}5y-2{,}9878=2{,}27995.$$

deci

$$R=\frac{l^2+x^2}{2x}=\frac{36+4{,}09445}{2\cdot 2{,}0235}=9{,}905\text{ cm};$$

$$r=\frac{l^2+y^2}{2y}=\frac{36+2{,}27995}{2\cdot 1{,}4765}=12{,}963\text{ cm}.$$

CAPITOLUL III

NUMERE COMPLEXE

§ 18. Scrierea numerelor complexe; adunarea şi scăderea lor

1. Inainte de a merge mai departe este cazul să precizăm unele numiri, pe care le-am folosit treptat, începând dela § 12. In Algebră şi Analiză matematică, numerele se împart în două clase: *numere reale* şi *numere complexe* (*imaginare*). Numerele reale (pozitive sau negative), adică numerele pe care se clădeşte Algebra şi Geometria elementară, se împart, la rândul lor, în *numere întregi, numere fracţionare* şi *numere iraţionale* (*incomensurabile*). Prin opoziţie cu ultimele, numerele întregi şi fracţionare se mai numesc şi *numere raţionale* (*comensurabile*). Despre definiţia şi folosirea numerelor iraţionale vom trata la § 31. Totalitatea acestor numere, complectată cu zero, formează *mulţimea numerelor reale.*

Numerele mai sunt uneori clasificate în *numere algebrice* şi *numere transcendente.* Se zise că un număr este algebric, când el poate fi considerat ca rădăcina unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi întregi. Un număr care nu este algebric, se numeşte *transcendent* (de exemplu numărul π).

2. Prin *număr complex* înţelegem un număr de forma $a+bi$, unde a, b sunt numere reale, iar i un simbol care este definit prin relaţia $i^2=-1$. Prin definiţie, un număr complex este zero, atunci când $a=b=0$. Dacă $b=0$, atunci numărul complex se reduce la numărul real a, iar dacă $a=0$, numărul complex ia forma bi care se numeşte *pur imaginar.* Se zice că $a-bi$ este *conjugatul* numărului $a+bi$.

Un număr complex are ca imagine geometrică punctul de coordonate a, b (fig. 11). Numerile reale sunt toate situate pe Ox, iar cele pur imaginare pe Oy, deaceea axa Ox se numeşte *axa reală,* iar Oy, *axa imaginară.* Lungimea $OM=\rho$, *considerată totdeauna ca pozitivă,* se numeşte *modulul* numărului complex şi se notează cu $\rho=|a+bi|$; unghiul φ se numeşte *argumentul* numărului complex şi se notează cu $\varphi=\arg(a+bi)$. Spre deosebire de modul, argumentul este definit făcându-se abstracţie de un multiplu de 2π. Avem: $a=\rho\cos\varphi$, $b=\rho\sin\varphi$, formule care dau $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$, iar argumentul prin ambele ecuaţii:

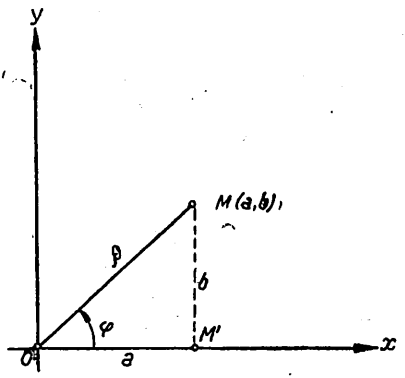


Fig. 11

$$\cos\varphi=\frac{a}{\rho},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\rho}.$$

Cu ajutorul modulului şi argumentului, un număr complex se poate scrie

$$a+bi=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

expresie numită *forma trigonometrică,* spre deosebire de prima, care se numeşte *forma algebrică* a numărului complex.

Un număr complex este nul când are modulul nul. Două numere scrise sub formă trigonometrică sunt egale când au modulele egale şi argumentele diferă printr'un multiplu de 2π.

Observaţie. In particular, dacă numărul complex se reduce la un număr real, atunci modulul lui este valoarea sa absolută (valoarea aritmetică). Deaceea orice regulă stabilită între modulele mai multor numere complexe rămâne valabilă şi pentru numerele reale înlocuind cuvântul *modul* cu *valoarea absolută.*

3. Două numere complexe $a+bi$ şi $c+di$ sunt egale când $a=b$, $c=d$.

Adunarea şi scăderea numerelor complexe este definită prin formula

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)\pm\cdots\pm(a_n+b_ni)=$$
$$=(a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n)+i(b_1\pm b_2\pm\cdots\pm b_n). \qquad \text{(II)}$$

Presupunem că numerele pe care le adunăm sunt $z_1=a+bi$ şi $z_2=c+di$; dacă pe modulele acestor două numere, ca laturi (fig. 12) construim un paralelogram, cel de al patrulea vârf reprezintă suma z_1+z_2. Din această cauză se spune că suma a două numere complexe se face după *regula paralelogramului.*

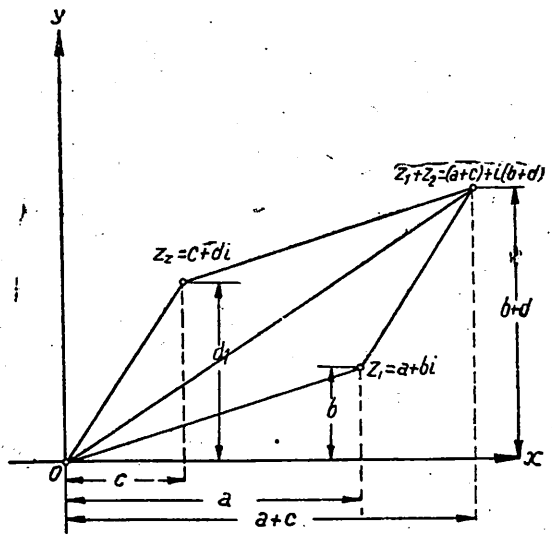


Fig. 12

A scădea unul din altul numerele complexe $z_1=a+bi$ şi $z_2=c+di$ este tot una cu a aduna la numărul z_1, numărul $-z_2=-c-di$ (fig. 13). Cu alte cuvinte, aceasta înseamnează că la extremitatea modulului lui z_1 să punem un segment egal şi de sens contrar cu modulul lui z_2. De pe figură se vede că $|z_1-z_2|$ reprezintă distanţa dintre punctele care reprezintă pe z_1 şi z_2.

Conform proprietăţilor geometrice ale figurilor precedente

$$\begin{cases} |z_1+z_2|\leq|z_2|+|z_1|, \\ |z_1-z_2|\geq|z_1|-|z_2|. \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

Prima inegalitate se generalizează imediat la suma mai multor numere complexe. Aceste proprietăţi sunt valabile şi pentru numerele reale.

18. 1. *Să se determine două numere reale x şi y astfel încât*

$$(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i.$$

Scriem egalitatea din enunţ sub forma

$$(x+3y)+(2x-5y)i=1-3i.$$

Această egalitate cere

$$x+3y=1, \quad 2x-5y=-3,$$

sistem care se rezolvă imediat şi dă $x=-\frac{4}{11}$, $y=-\frac{5}{11}$.

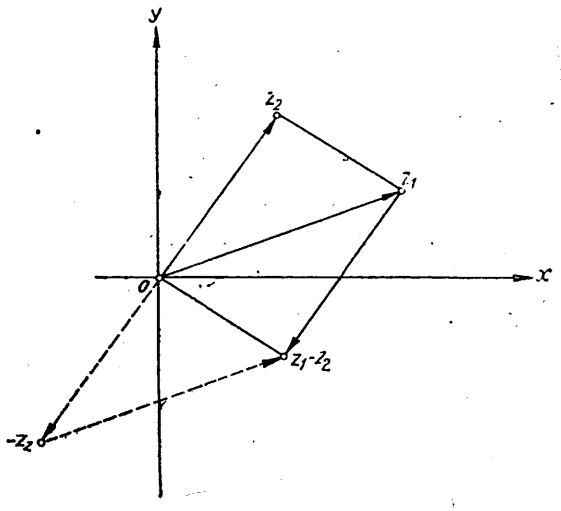


Fig. 13

18. 2. *Să se demonstreze geometric că suma a două numere complexe conjugate este un număr real.* Fie $z=a+bi$ un număr complex oarecare şi $\bar{z}=a-bi$ conjugatul lui. Punctul z va fi reprezentat în plan de către un punct M, iar $\bar{z}$ de simetricul lui, M', faţă de axa Ox (fig. 14). A aduna pe z cu $\bar{z}$ înseamnă a construi pe OM şi OM', ca laturi, un paralelogram. Acest lucru se poate face ducând prin M şi M' paralele respectiv la OM' şi OM; se mai poate însă face şi bazându-ne pe proprietatea că diagonalele unui paralelogram se taie în părţi egale. Adică putem proceda astfel: unim pe M cu M' şi fie I mijlocul diagonalei MM'; cum ordonatele punctelor M şi M' sunt egale şi de semne contrare, însemnează că I este pe Ox, adică cealaltă diagonală este axa Ox. Deci, cel de al patrulea vârf N al paralelogramului aflându-se pe Ox la o distanţă $2\,OI=2a$ de O, va reprezenta un număr real.

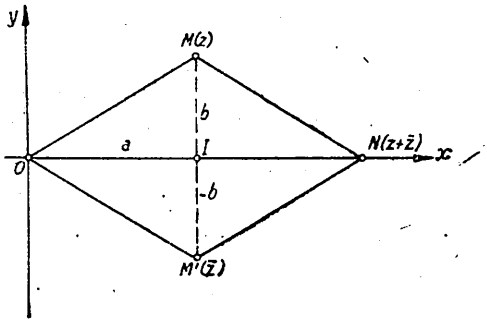


Fig. 14

18. 3. *Să se calculeze grafic suma numerelor*

$$z_k=\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}, \quad (k=0,1,2,3,4,5).$$

Avem succesiv

$$z_0=\cos 0+i\sin 0=1,$$

$$z_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},$$

$$z_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},$$

$$z_3=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$$

$$z_4=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2},$$

$$z_5=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}.$$

Din valorile găsite pentru numerele z_k, rezultă că punctele M_k care le vor reprezenta sunt vârfurile unui exagon regulat cu centrul în O, fiind înscris în cercul de rază egală cu unitatea şi având primul vârf situat pe direcţia pozitivă a axei Ox. (fig. 15). Adunăm numerele date aşezând cap la cap segmentele orientate (vectorii) $\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$, $\overline{OM_3}$, $\overline{OM_4}$, $\overline{OM_5}$, $\overline{OM_6}$. Ultima extremitate fiind în O, suma este nulă. (fig .15).

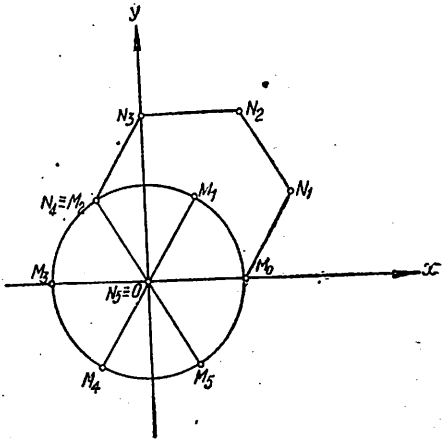


Fig. 15

Observaţie. Rezultatul este valabil pentru suma a n puncte care reprezintă în plan vârfurile unui poligon regulat cu n laturi, cu centrul în origine.

18. 4. *In ce caz avem*

$$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|,$$
$$|z_1-z_2|=|z_1|-|z_2|?$$

După cum am spus la pct. 3, avem în general

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|.$$

Problema este: în ce caz vom avea egalitate. In fig. 12 vedem imediat rezolvarea problemei: este condiţia ca latura triunghiului care uneşte punctele O şi (z_1+z_2) să fie egală cu suma celelalte două laturi. Acest lucru nu poate avea loc decât dacă triunghiul este turtit, adică $Oz_1, z_1\ (z_1+z_2)$ sau Oz_1 şi Oz_2 sunt pe aceeaşi dreaptă, adică numerele complexe z_1 şi z_2 au acelaşi argument. Acelaşi răspuns pentru a doua egalitate, cu condiţia ca $|z_1|>|z_2|$.

18. 5. *Să se scrie numărul complex*

$$z=-\sin\theta+i\cos\theta,$$

sub formă trigonometric.

Va trebui să calculăm pe ρ şi φ. Avem $\rho=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=1$, iar pentru φ avem ecuaţiile $\cos\varphi=-\sin\theta$ şi $\sin\varphi=\cos\theta$. Scriind pe prima sub forma: $\cos\varphi=\cos\left(\frac{1}{2}\pi+\theta\right)$, rezultă că $\varphi=2k\pi\pm\left(\frac{1}{2}\pi+\theta\right)$; iar din a doua scrisă $\sin\varphi=\sin\left(\frac{1}{2}\pi-\theta\right)$ reiese că $\varphi=2k\pi+(-1)^k\left(\frac{1}{2}\pi-\theta\right)$. Comparând aceste două grupe de valori, rezultă că $\varphi=2k\pi+\frac{1}{2}\pi+\theta$. Deci z sub formă trigonometrică este: $z=\cos\left(\frac{1}{2}\pi+\theta\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\pi+\theta\right)$.

18. 6. *Să se scrie forma trigonometrică a numărului complex*

$$z=1+\sin\alpha-i\cos\alpha.$$

Se poate proceda ca la problema precedentă, sau direct, după cum urmează. Scriem

$$1+\sin\alpha=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=1+\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-1\right]=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$

încât

$$z=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$z=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

egalitate care, în ipoteza că $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)>0$, are modulul $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ şi argumentul $\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}$. Dacă $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)<0$, atunci

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[-\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=2\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\left\{\cos\left[\pi+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+i\sin\left[\pi+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}$$

$$=2\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right];$$

modulul va fi $2\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$, iar argumentul $\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}$.

18. 7. *Să se găsească modulul şi argumentul sumei a două numere complexe având acelaşi modul.*

Fie: $z=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ şi $z'=\rho(\cos\beta+i\sin\beta)$.

Avem succesiv

$$z+z'=\rho[(\cos\alpha+\cos\beta)+i(\sin\alpha+\sin\beta)]$$

$$=\rho\left[2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)+2i\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]$$

$$=2\rho\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\left[\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+i\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right].$$

Din această formulă reiese că dacă $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)>0$, atunci modulul este $2\rho\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, iar argumentul $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Dacă însă $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)<0$, atunci scriem

$$z+z'=-2\rho\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\left[-\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)-i\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]$$

$$=-2\rho\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\left[\cos\tfrac{1}{2}(2\pi+\alpha+\beta)+i\sin\tfrac{1}{2}(2\pi+\alpha+\beta)\right],$$

de unde reiese că modul este $-2\rho\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ iar argumentul $\pi+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

18. 8. *Un triunghi echilateral are două din vârfuri în punctele* $z_0=1$ *şi* $z_1=2+i$. *Să se afle al treilea vârf.*

Fie: $z=x+iy$ cel de al treilea vârf. Trebue să scriem că laturile sunt egale adică

$$|z-z_0|=|z-z_1|=|z_1-z_0|,$$

egalităţi care se scriu

$$|x-1+iy|=|(x-2)+i(y-1)|=$$
$$=|1+i|,$$

sau, ridicând la pătrat,

$$(x-1)^2+y^2=(x-2)^2+$$
$$+(y-1)^2=2. \qquad (1)$$

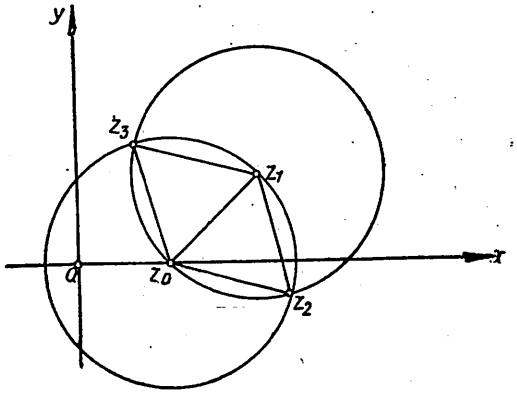


Fig. 16

Luând prima egalitate, rezultă

$$x+y-2=0; \quad y=2-x. \qquad (2)$$

Pe baza lui (2), din (1) rezultă

$$(x-1)^2+(2-x)^2=2; \quad 2x^2-6x+3=0,$$

care are drept rădăcini $x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$ şi din (2) rezultă $y_{2,3}=\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}$.

Problema are două soluţii şi anume punctele

$$z_2=\frac{3+\sqrt{3}}{2}+i\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \quad z_3=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Din punct de vedere geometric, rezultatul este explicabil, deoarece vârful este la intersecţia a două cercuri egale cu centrele în z_0 şi z_1 şi având raza egală cu z_0z_1. Or, două cercuri când se taie, se taie în două puncte (nu pot fi tangente, deoarece raza lor este mai mare decât $\frac{1}{2}z_0z_1$) (fig. 16).

§ 19. Inmulţirea şi împărţirea

1. Inmulţirea şi împărţirea a două numere complexe, scrise sub formă algebrică, $a+bi$ şi $c+di$, se definesc prin formulele

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+i(ad+bc),$$
$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}, \qquad (I)$$

adică la înmulţire se procedează ca şi când am avea de a face cu numere reale şi în rezultat se înlocueşte $i^2=-1$; la împărţire se amplifică fracţia cu conjugatul numitorului. Inmulţirea mai multor numere complexe se defineşte din aproape în aproape.

2. Dacă numerele pe care le avem de înmulţit sau de împărţit sunt scrise sub formă trigonometrică, atunci

$$\left.\begin{aligned}&\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\ldots\rho_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)\\&=\rho_1\rho_2\ldots\rho_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)],\\&\frac{\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],\end{aligned}\right\}\quad\text{(II)}$$

Din aceste două reguli reiese că dacă notăm cu $z_1, z_2, \ldots, z_n$ numerele complexe, atunci

$$|z_1z_2\ldots z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\ldots|z_n|,\ \arg(z_1z_2\ldots z_n)=\sum_{i=1}^{n}\arg z_i.\qquad\text{(III)}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2.$$

Regulile pentru module sunt valabile şi pentru valorile absolute ale numerelor reale.

19. 1. *Să se calculeze expresia*

$$E=\frac{2i}{(i-1)(i-2)(i-3)}.$$

Cum

$$(i-1)(i-2)(i-3)=(i^2-3i+2)(i-3)=(-3i+1)(i-3)=-3i^2+10i-3=10i,$$

încât: $E=1/5=0{,}2$.

19. 2. *Să se rezolve ecuaţie*

$$x^2-2(1+i)x+(a^2+2i)=0.$$

Deoarece toate calculele care se fac când se stabileşte formula care dă rădăcinile unei ecuaţii de gradul 2, rămân valabile şi pentru numere complexe, putem scrie

$$x_{1,2}=1+i\pm\sqrt{(1+i)^2-(a^2+2i)}=1+i\pm ai;\ x_1=1+(1+a)i,\ x_2=1+(1-a)i$$

19. 3. *Numărul.*

$$\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i},$$

unde λ este un număr real, are modulul 1 şi, reciproc, orice număr complex de modul 1 se poate scrie sub această formă.

In adevăr, numărul dat

$$\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}=\frac{(1+\lambda i)^2}{1+\lambda^2}=\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}+\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}i,\qquad(1)$$

are modulul egal cu

$$\sqrt{\left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2+\frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}}=\sqrt{\frac{(1-\lambda^2)^2+4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}}=1.$$

Invers, să presupunem că numărul $a+bi$ are modulul 1, adică prin ipoteză: (2) $a^2+b^2=1$. A arăta că se poate scrie sub forma din enunţ înseamnă să arătăm că putem determina pe λ astfel încât

$$a+bi=\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}.$$

In adevăr, pe baza lui (1), această egalitate atrage după sine egalităţile

$$\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}=a,\quad \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}=b,$$

care nu sunt independente între ele, pe baza ipotezei (2). In adevăr, ridicându-le la pătrat şi adunând ne dă o identitate.

λ va fi deci definit de una din ele, de exemplu de prima.

Găsim

$$1-\lambda^2=a(1+\lambda^2);\ \lambda=\pm\sqrt{\frac{1-a}{1+a}},$$

adică se obţin pentru λ două valori: ele dau două expresii de felul celei din enunţ, inverse una alteia.

Discuţie. Din calculul făcut rezultă că fiecărei valori a lui a corespund două valori pentru λ. Analog, plecând de la a 2-a relaţie se găseşte $\lambda=\frac{1\pm\sqrt{1-b^2}}{b}$ adică lui λ îi corespund tot două valori în funcţie de b. Este de observat că valorile lui λ, atât în funcţie de a cât şi în funcţie de b sunt totdeauna reale, căci atât a cât şi b sunt subunitari în baza relaţiei (2).

19. 4. *Dacă notăm cu $\bar{z}$ conjugatul lui z, se cere să se demonstreze relaţia*

$$\left(\overline{\frac{z_1}{z_2 z_3}}\right)=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2\bar{z}_3}.$$

Fie

$$z_1=\alpha+\beta i,\quad z_2=a+bi,\quad z_3=c+di$$

atunci

$$\bar{z}_1=\alpha-\beta i,\quad \bar{z}_2=a-bi,\quad \bar{z}_3=c-di.$$

Calculăm mai întâi

$$\frac{z_1}{z_2 z_3}=\frac{\alpha+\beta i}{(a+bi)(c+di)}=\frac{(\alpha+\beta i)(a-bi)(c-di)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=$$
$$=\frac{\alpha(ac-bd)+\beta(ad+bc)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+\frac{\beta(ac-bd)-\alpha(ad+bc)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}i,$$

deci

$$\left(\overline{\frac{z_1}{z_2 z_3}}\right)=\frac{\alpha(ac-bd)+\beta(ad+bc)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}-\frac{\beta(ac-bd)-\alpha(ad+bc)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}i.$$

Pe de altă parte, partea a doua se scrie

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2\bar{z}_3}=\frac{\alpha-\beta i}{(a-bi)(c-di)}=\frac{(\alpha-\beta i)(a+bi)(c+di)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=$$
$$=\frac{\alpha(ac-bd)+\beta(ad+bc)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}-\frac{\beta(ac-bd)-\alpha(ad+bc)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}i,$$

ceeace demonstrează relaţia din enunţ.

19. 5. *Dacă:* $z^2=(\bar{z})^2$, *unde* $\bar{z}$ *este conjugatul lui* z, *atunci* z *este real sau pur imaginar.*

In adevăr, dacă punem ca deobicei $z=a+bi$, atunci condiţia din enunţ, se scrie

$$(a+bi)^2=(a-bi)^2;\ 4ab=0,$$

de unde reiese că $b=0$ şi atunci $z=a$ (real); sau $a=0$ şi $z=bi$ (pur imaginar).

19. 6. *Să se găsească expresia generală a arcului* x *care satisface ecuaţia*

$$(\cos x+i\sin x)(\cos 2x+i\sin 2x)\ldots(\cos nx+i\sin nx)=1.$$

Cum fiecare paranteză este expresia unui număr complex scris sub formă trigonometrică, prima parte se mai scrie

$$\cos(x+2x+\cdots+nx)+i\sin(x+2x+\cdots+nx)=$$
$$=\cos\frac{1}{2}n(n+1)x+i\sin\frac{1}{2}n(n+1)x,$$

de unde reiese că pentru ca ecuaţia să fie verificată trebue să luăm

$\cos\frac{1}{2}n(n+1)x=1$, $\sin\frac{1}{2}n(n+1)x=0$, adică $\frac{1}{2}n(n+1)x=2k\pi$; $x=\frac{4k\pi}{n(n+1)}$, k fiind un întreg oarecare.

§ 20. Puterile unui număr complex

In acest paragraf nu este vorba decât de puteri întregi pozitive sau negative.

La ridicarea la putere a unui număr complex avem nevoie de puterile lui i care sunt date de formulele

$$i^{4m}=1,\ i^{4m+1}=i,\ i^{4m+2}=-1,\ i^{4m+3}=-i, \qquad (I)$$

unde m este un număr întreg şi pozitiv.

Dacă vrem să calculăm o putere întreagă şi pozitivă a unui număr complex scris sub formă algebrică, aplicăm formula binomului:

$$(a+bi)^n=(a^n-C_n^2a^{n-2}b^2+C_n^4a^{n-4}b^4-\cdots)+$$
$$+i(C_n^1a^{n-1}b-C_n^3a^{n-3}b^3+C_n^5a^{n-5}b^5-\cdots). \qquad (II)$$

Dacă numărul complex este însă scris sub formă trigonometrică, ridicarea la putere se face mai simplu prin formula

$$z^n=[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (III)$$

Din această formulă reiese că

$$|z^n|=|z|^n,\quad \arg z^n=n\arg z, \qquad (III')$$

prima relaţie fiind adevărată şi pentru numerele reale.

In particular, dacă $\rho=1$, această formulă se scrie

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi, \tag{IV}$$

şi se numeşte *formula lui Moivre*. Desvoltând prima parte după formula (II), rezultă

$$\begin{cases}\cos n\varphi=\cos^n\varphi-C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi-\cdots,\\ \sin n\varphi=C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi-C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi+C_n^5\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi-\cdots,\end{cases} \tag{V}$$

$$\operatorname{tg} n\varphi=\frac{C_n^1\operatorname{tg}\varphi-C_n^3\operatorname{tg}^3\varphi+C_n^5\operatorname{tg}^5\varphi-\cdots}{1-C_n^2\operatorname{tg}^2\varphi+C_n^4\operatorname{tg}^4\varphi-\cdots}. \tag{V'}$$

20. 1. *Să se calculeze expresia*

$$E=\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}.$$

Calculând după regulile cunoscute în algebra elementară (proprietăţile demonstrate la adunare, scădere, înmulţire şi împărţire se menţin şi la numere complexe), avem

$$(1+2i)^2=1+4i+4i^2=-3+4i,\quad (2+i)^2=4+4i+i^2=3+4i,$$
$$(1-i)^3=1-3i+3i^2-i^3=-2-2i,\quad (3+2i)^3=27+54i+36i^2+8i^3=-9+46i,$$

$$E=\frac{(-3+4i)-(-2-2i)}{(-9+46i)-(3+4i)}=\frac{-1+6i}{-12+42i}=\frac{44-5i}{318}.$$

20. 2. *Să se arate că numărul*

$$\frac{(a+bi)^2}{a-bi}+\frac{(a-bi)^2}{a+bi},$$

este real.

Avem

$$\frac{(a+bi)^3+(a-bi)^3}{(a-b)(a+bi)}=\frac{2a(a^2-3b^2)}{a^2+b^2}.$$

20. 3. *Să se calculeze expresia*

$$E=(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega),$$

în care

$$\omega=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Scriind pe ω sub formă trigonometrică, avem succesiv,

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\ \omega^2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3},$$

$$\omega+\omega^2=2\cos\frac{2\pi}{3}=-1;$$

$$\omega^3=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1,\ \omega^4=\omega^3\cdot\omega=\omega.$$

Deci

$$E=(a+b+c)[a^2+b^2+c^2+(\omega+\omega^2)(ab+bc+ca)]=$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

20. 4. *Se dă numărul complex:*

$$z=\frac{(2i+3)^2(1-i)^3}{(1+i)^2}-\frac{(2-i)^3(1+i)^2}{(i-1)^3}.$$

Să se calculeze modulul lui z cu două zecimale exacte, iar argumentul lui cu aproximație de un minut de arc.

Avem

$$z=\frac{(5+12i)(-2-2i)}{2i}-\frac{(2-11i)\,2i}{2(1+i)}$$

$$=(-7+17i)\,i-\frac{1}{2}(2i+11)(1-i)=\frac{1}{2}(-47-5i),$$

încât

$$|z|=\frac{1}{2}\sqrt{47^2+5^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2209+25}=\frac{1}{2}\sqrt{2234}=23{,}63\ldots$$

iar argumentul θ:

$$\cos\theta=\frac{-47}{\sqrt{2234}},\ \sin\theta=\frac{-5}{\sqrt{2234}},\ \operatorname{tg}\theta=\frac{5}{47}=0{,}10638,$$

şi cu ajutorul tabelelor de linii naturale, din ultima formulă, se găseşte $\theta=6°4'$ sau $-173°56'$. Deoarece sinusul şi cosinusul sunt ambii negativi, cea de a doua valoare este bună.

20. 5. *Să se verifice că formula lui Moivre este adevărată şi în cazul când exponentul este un număr întreg şi negativ.*

Presupunând că n este întreg şi pozitiv, avem succesiv

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-n}=\frac{1}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^n}=\frac{1}{\cos n\varphi+i\sin n\varphi}$$

$$=\frac{\cos 0°+i\sin 0°}{\cos n\varphi+i\sin n\varphi}=\cos(-n)\varphi+i\sin(-n)\varphi.$$

20. 6. *Să se rezolve ecuația*

$$\sin 7x+14\sin 3x=8\sin 5x+9\sin x.$$

Cu ajutor ultimei formule (V), obținem

$$\sin 7x=7\cos^6 x\sin x-35\cos^4 x\sin^3 x+21\cos^2 x\sin^5 x-\sin^7 x$$

$$=7(1-\sin^2 x)^3\sin x-35(1-\sin^2 x)^2\sin^3 x+21(1-\sin^2 x)\sin^5 x-\sin^7 x$$

$$=-64\sin^7 x+112\sin^5 x-56\sin^3 x+7\sin x,$$

$$\sin 5x=5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x=5(1-\sin^2 x)^2\sin x$$

$$-10(1-\sin^2 x)\sin^3 x+\sin^5 x$$

$$=16\sin^5 x-20\sin^3 x+5\sin x,$$

$$\sin 3x=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x=3(1-\sin^2 x)\sin x-\sin^3 x=-4\sin^3 x+3\sin x,$$

valori care introduse în ecuația dată, duc la ecuația

$$4\sin^7 x+\sin^5 x-3\sin^3 x=\sin^3 x(4\sin^4 x+\sin^2 x-3)=0,$$

care se descompune în ecuațiile

1° $\sin^3 x=0$ sau $\sin x=0$ care dă valorile $x_1=k\pi$ (k întreg),

2° $4\sin^4 x+\sin^2 x-3=0$ care este o ecuație bipătrată. Rezolvând-o pe calea cunoscută (§ 13, pct. 1) avem

$\sin^2 x=-1$ care dă pentru x valori imaginare.

$\sin^2 x=\frac{3}{4}$, $\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ de unde $x_2=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

20. 7. *Să se calculeze sumele*

$S_1=\cos a+\cos(a+h)\cos(a+2h)+\cdots\cos[a+(n-1)h]$,

$S_2=\sin a+\sin(a+h)+\sin(a+2h)+\cdots\sin[a+(n-1)h]$.

Avem succesiv

$$\begin{aligned}S_1+iS_2&=(\cos a+i\sin a)+[\cos(a+h)+i\sin(a+h)]\\&+[\cos(a+2h)+i\sin(a+2h)]+\cdots\\&+[\cos a+(n-1)h\}+i\sin\{a+(n-1)h\}]\\&=(\cos a+i\sin a)+(\cos a+i\sin a)(\cos h+i\sin h)\\&+(\cos a+i\sin a)(\cos 2h+i\sin 2h)+\cdots\\&+(\cos a+i\sin a)[\cos(n-1)h+i\sin(n-1)h].\\&=(\cos a+i\sin a)[1+(\cos h+i\sin h)+(\cos h+i\sin h)^2\\&+\cdots+(\cos h+i\sin h)^{n-1},\end{aligned}$$

încât punând $\cos a+i\sin a=A$ și $\cos h+i\sin h=B$, deoarece calculul sumei progresiei geometrice comportă numai operații care sunt valabile și pentru numere complexe, putem scrie

$$S_1+iS_2=A(1+B+B^2+\cdots+B^{n-1})=A\frac{1-B^n}{1-B}$$

$$\begin{aligned}&=(\cos a+i\sin a)\frac{1-(\cos h+\sin h)^n}{1-(\cos h+i\sin h)}\\&=(\cos a+i\sin a)\frac{(1-\cos nh)-i\sin nh}{(1-\cos h)-i\sin h}\\&=(\cos a+i\sin a)\frac{2\sin^2\frac{1}{2}nh-2i\sin\frac{1}{2}nh\cos\frac{1}{2}nh}{2\sin^2\frac{1}{2}h-2i\sin\frac{1}{2}h\cos\frac{1}{2}h}\\&=\frac{\sin\frac{1}{2}nh}{\sin\frac{1}{2}h}(\cos a+i\sin a)\frac{\sin\frac{1}{2}nh-i\cos\frac{1}{2}nh}{\sin\frac{1}{2}h-i\cos\frac{1}{2}h},\\&=\frac{\sin\frac{1}{2}nh}{\sin\frac{1}{2}h}(\cos a+i\sin a)\left[\cos\frac{1}{2}(n-1)h+i\sin\frac{1}{2}(n-1)h\right]\\&=\frac{\sin\frac{1}{2}nh}{\sin\frac{1}{2}h}\left\{\cos\left[a+\frac{1}{2}(n-1)h\right]+i\sin\left[a+\frac{1}{2}(n-1)h\right]\right\}\end{aligned}$$

încât, egalând părţile reale şi cele imaginare, obţinem

$$S_1=\frac{\sin\frac{1}{2}nh\cos\left[a+\frac{1}{2}(n-1)h\right]}{\sin\frac{1}{2}h},\quad S_2=\frac{\sin\frac{1}{2}nh\sin\left[a+\frac{1}{2}(n-1)h\right]}{\sin\frac{1}{2}h}.$$

20. 8. *Să se determine numărul de valori pe care le poate lua expresia*

$$E=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^p:\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^q,$$

după valorile întregi şi pozitive pe care le iau numerele p şi q.

Avem

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4},\quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right),$$

adică expresia are drept valoare,

$$E=\frac{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^p}{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^q}=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^p}{\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^p}=\frac{\cos\frac{p\pi}{4}+i\sin\frac{p\pi}{4}}{\cos\left(-\frac{q\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{q\pi}{4}\right)}=$$

$$=\cos\frac{(p+q)\pi}{4}+i\sin\frac{(p+q)\pi}{4}.$$

Din această formă rezultă că expresia E nu poate lua decât 8 valori distincte, valorile corespunzătoare lui: $p+q=0, 1, 2, \ldots, 7$. In adevăr, să presupunem $p+q>7$; aceasta înseamnează că $p+q$ va fi de forma $8m+r$, unde m şi r sunt numere întregi, astfel ca $0\leqq r\leqq 7$, Or, dacă înlocuim această valoare în E, avem

$$E=\cos\frac{(8m+r)\pi}{4}+i\sin\frac{(8m+r)\pi}{4}=\cos\left(2m\pi+\frac{r\pi}{4}\right)+i\sin\left(2m\pi+\frac{r\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\frac{r\pi}{4}+i\sin\frac{r\pi}{4},$$

unde, deoarece $0\leqq r\leqq 7$, această valoare este una din cele opt valori iniţiale pe care le ia E.

20. 9. *Să se demontreze, că dacă punem,*

$$x+\frac{1}{x}=2\cos\theta, \tag{1}$$

atunci când n este întreg

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta \quad \text{şi} \quad x^n-\frac{1}{x^n}=\pm 2i\sin n\theta.$$

In adevăr, din (1) x este dat prin ecuaţia de gradul 2

$$x^2-2\cos\theta\cdot x+1=0,$$

ale cărei soluţii sunt

$$x = \cos\theta \pm i\sin\theta = \cos(\pm\theta) + i\sin(\pm\theta),$$

încât, dacă notăm: $\pm\theta = \varphi$, atunci

$$x = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Aplicând formula lui *Moivre* (puterea întreagă putând fi pozitivă sau negativă, prob. 20. 5) avem

$$x^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \quad \frac{1}{x^n} = x^{-n} = \cos(-n)\varphi + i\sin(-n)\varphi = \cos n\varphi - i\sin n\varphi,$$

şi deci

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\varphi = 2\cos n(\pm\theta) = 2\cos n\theta,$$

$$x^n - \frac{1}{x^n} = 2\sin n\varphi = 2\sin n(\pm\theta) = \pm 2\sin n\theta.$$

20. 10. *Să se demonstreze formulele*

$$2^{2m}\cos^{2m} a = 2\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m-k)a + C_{2m}^m,$$

$$2^{2m}\cos^{2m+1} a = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos(2m-2k+1)a,$$

$$2^{2m}\sin^{2m} a = 2\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} C_{2m}^k \cos 2(m-k)a + C_{2m}^m,$$

$$2^{2m}\sin^{2m+1} a = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} C_{2m+1}^k \sin(2m-2k+1)a.$$

Vom demonstra numai prima formulă, celelalte putându-se demonstra în acelaşi fel. Punem

$$\alpha = \cos a + i\sin a, \text{ atunci } \frac{1}{\alpha} = \alpha^{-1} = \cos(-a) + i\sin(-a) = \cos a - i\sin a, \quad (1)$$

şi calculăm după formula binomului,

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^{2m} = \alpha^{2m} + C_{2m}^1\alpha^{2m-2} + C_{2m}^2\alpha^{2m-4} + \cdots + C_{2m}^{m-1}\alpha^2 + C_{2m}^m + C_{2m}^{m+1}\frac{1}{\alpha^2} + \cdots + C_{2m}^{2m-1}\frac{1}{\alpha^{2m-2}} + \frac{1}{\alpha^{2m}};$$

grupând termenii egal depărtaţi de extremi (care au coeficienţi egali, § 4, pct. 2) formula precedentă se scrie

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^{2m} = \left(\alpha^{2m} + \frac{1}{\alpha^{2m}}\right) + C_{2m}^1\left(\alpha^{2m-2} + \frac{1}{\alpha^{2m-2}}\right) + \cdots + C_{2m}^{m-1}\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) + C_{2m}^m.$$

In baza formulei (1) şi a problemei precedente,

$$2^{2m}\cos^{2m} a = 2[\cos 2ma + C_{2m}^1\cos 2(m-1)a + \cdots + C_{2m}^{m-1}\cos 2a] + C_{2m}^m,$$

care nu este altceva decât prima formulă din enunţ.

§ 21. Extragerea de rădăcină

1. Dacă ni se dă un număr complex

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

atunci rădăcina de ordinul n (întreg şi pozitiv) a lui are n valori definite prin egalitatea

$$z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots\ -n1). \qquad \text{(I)}$$

Prin $\sqrt[n]{\rho}$ înţelegem rădăcina aritmetică, aşa cum a fost definită în § 9. Această formulă arată că

$$|z^{\frac{1}{n}}|=\sqrt[n]{|z|}, \quad \arg z^{\frac{1}{n}}=\frac{\varphi+2k\pi}{n} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1). \qquad \text{(II)}$$

Prima formulă este adevărată şi pentru numerele reale.

Cele n rădăcini ale numărului complex z, formează în plan o configuraţia geometrică interesantă. Anume, ele sunt vârfurile poligonului regulat cu n laturi înscris în cercul cu centrul în originea axelor de rază $\sqrt[n]{\rho}$ şi având primul vârf în punctul care are drept argument φ/n.

2. Dacă numărul complex este scris sub forma algebrică $z=a+bi$, atunci rădăcina lui pătrată are două valori definite prin formula

$$z_{1,2}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)}+i\epsilon\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}\right], \qquad \text{(III)}$$

unde ϵ este semnul lui b.

21. 1. *Să se calculeze* $(-1)^{\frac{1}{3}}$ *şi* $(-1)^{\frac{1}{4}}$.

Expresia lui -1 sub forma trigonometrică este

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi.$$

Conform formulelor, $(-1)^{\frac{1}{3}}$ va avea trei valori date de

$$z_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}, \qquad (k=0,\ 1,\ 2).$$

Aceste valori scrise desvoltat sunt

$$z_0=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad z_1=-1, \quad z_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Analog $(-1)^{\frac{1}{4}}$ are patru valori date de

$$t_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}, \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

sau

$$t_{0,1,2,3}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm1\pm i).$$

21. 2. *Să se calculeze* $\sqrt[3]{i}$.

Se poate urma aceeaşi cale sau calea geometrică (fig. 17). Reprezentăm mai întâiu punctul i care este aşezat pe axa Oy, în direcţia pozitivă, la o distanţă egală cu unitatea de origină. Deoarece modulul lui este 1, iar argumentul $\frac{1}{2}\pi$, rădăcinile căutate vor fi numerele complexe care sunt reprezentate în plan prin punctele A, B, C, adică $z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$, $z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$, $z_2=-i$.

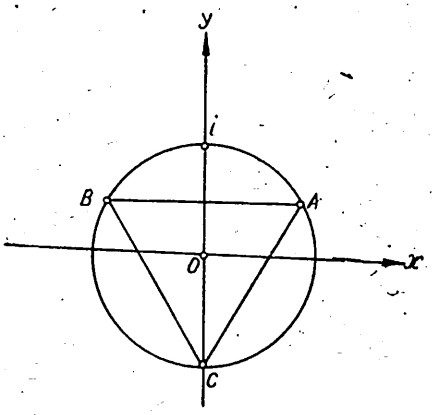


Fig. 17

21. 3. *Să se calculeze valorile expresiei*

$$E=\sqrt[6]{i}+\sqrt[6]{(-i)}.$$

Avem

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2},\quad -i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

deci

$$E=\left(\cos\frac{\pi+4k\pi}{12}+i\sin\frac{\pi+4k\pi}{12}\right)+\left(\cos\frac{-\pi+4k'\pi}{12}+i\sin\frac{-\pi+4k'\pi}{12}\right)=$$

$$=\left(\cos\frac{\pi+4k\pi}{12}+\cos\frac{-\pi+4k'\pi}{12}\right)+i\left(\sin\frac{\pi+4k\pi}{12}+\sin\frac{-\pi+4k'\pi}{12}\right)=$$

$$=2\cos\frac{(k+k')\pi}{6}\cos\frac{\pi+2(k-k')\pi}{12}+2i\sin\frac{(k+k')\pi}{6}\cos\frac{\pi+2(k-k')\pi}{12}=$$

$$=2\cos\frac{\pi+2(k-k')\pi}{12}\left[\frac{\cos(k+k')\pi}{6}+i\sin\frac{(k+k')\pi}{6}\right],$$

unde k, $k'=0$, 1, 2, 3, 4, 5. Combinând aceste valori între ele două câte două (în număr de 36), se constată că expresia dată nu are decât următoarele *şapte* valori distincte

$$z_0=0,\ z_{1,2}=\pm\sqrt{3},\ z_{3,4,5,6}=\sqrt{3}\left(\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

21. 4. *Să se rezolve ecuaţia*

$$z^2-(3-2i)z+5(1-i)=0.$$

Aplicând formula cunoscută care dă rădăcinile unei ecuaţii de gradul 2, valabilă şi în domeniul complex, avem

$$z=\frac{3-2i\pm[(3-2i)^2-20(1-i)]^{\frac{1}{2}}}{2}=\frac{3-2i\pm(-15+8i)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

Radicalul conform formulei (III), are două valori care coincid cu dublul semn din formula precedentă. In acest caz $\varepsilon=+1$, deci

$$(-15+8i)^{\frac{1}{2}}=\pm(1+4i)$$

încât rădăcinile căutate sunt

$$z_1=\frac{3-2i+(1+4i)}{2}=2+i,\quad z_2=\frac{3-2i-(1+4i)}{2}=1-3i.$$

21. 5. *Să se determine numărul $a+bi$ în așa fel încât $b+ia$ să fie una din rădăcinile lui pătrate.*

Va trebui să avem ecuația

$$(b+ia)^2=a+bi.$$

Desvoltând, această ecuație atrage după sine ecuațiile

$$b^2-a^2=a,\quad 2ab=b.$$

Ultima ecuație se descompune în două, și anume; 1° $b=0$, prima dă $a=0$ sau $a=-1$; 2° $a=\frac{1}{2}$, prima dă $b^2=a^2+a=\frac{3}{4}$, $b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluțiile problemei sunt numerele

$$z_1=0,\quad z_2=-1,\quad z_{3,4}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

§ 22. **Aplicații la ecuațiile algebrice**

1. Se numește *ecuație binomă*, o ecuație de forma

$$x^n-A=0, \tag{I}$$

unde A este un număr real sau complex (imaginar). Rădăcinile acestei ecuații sunt rădăcinile de ordinul n ale numărului A, calculate după cum am spus la paragraful precedent; conform rezultatelor de acolo, aceste rădăcini sunt

$$x_k=\sqrt[n]{|A|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1) \tag{II}$$

unde φ este argumentul numărului A.

O ecuație binomă în care A este un număr real are o singură rădăcină reală dacă n este fără soț și două rădăcini reale dacă n este cu soț și A negativ (în cazul n cu soț și A pozitiv nu avem nicio rădăcină reală).

2. Dacă o ecuație algebrică cu coeficienți reali admite rădăcina $a+bi$, admite și conjugata ei $a-bi$. Mai mult, dacă $a+bi$ este o rădăcină multiplă de ordinul p (adică este întâlnită printre rădăcini de p ori), atunci rădăcina $a-bi$ este și ea multiplă de ordinul p.

Se știe că o ecuație algebrică de gradul n are n rădăcini, care pot fi reale sau imaginare. Conform celor spuse mai înainte, rădăcinile imaginare sunt perechi $(a+bi,\ a-bi)$. Aceasta însemnează că o ecuație de grad fără soț are totdeauna cel puțin o rădăcină reală.

3. Există o teoremă asemănătoare precedentei și care este bine s'o menționăm aci. Fiind dată o ecuație algebrică cu coeficienți reali și *raționali*, dacă ea admite rădăcina multiplă de ordinul p, $a+\sqrt{b}$ (unde b nu este un pătrat perfect), atunci admite și rădăcina $a-\sqrt{b}$ multiplă tot de ordinul p (p este un număr întreg și pozitiv cel puțin egal cu unitatea),

22. 1. *Să se rezolve ecuația:* $x^3+i=0$.

Scriem ecuația sub forma $x^3=-i$. Reprezentând punctul $-i$, se vede de pe figură $-i=\cos\left(-\frac{1}{2}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right)$ de unde reiese că rădăcinile ecuației date sunt

$$x_k=\cos\frac{2k\pi-\frac{1}{2}\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi-\frac{1}{2}\pi}{3}$$

unde $k=0,1,2$. Ele au drept valori

$$x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\quad x_1=i,\quad x_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

22. 2. *Să se rezolve ecuația*

$$x^8-15x^4-16=0.$$

Ecuația propusă este de tipul

$$x^{2n}+px^n+q=0, \tag{1}$$

care se rezolvă prin substituția $x^n=y$; ecuația în y este de gradul 2 și va avea ca rădăcini două numere y_1 și y_2, reale sau complexe. Rădăcinile ecuației vor fi date de ecuațiile binome

$$x^n=y_1,\quad x^n=y_2.$$

In cazul nostru, punem $x^4=y$, y fiind dat de ecuația

$$y^2-15y-16=0;\quad y_1=16,\quad y_2=-1,$$

deci ecuația se reduce la ecuațiile binome

$$x^4=16,\quad x^4=-1.$$

Prima se rezolvă prin mijloace elementare

$$x^4-16=0;\quad (x^2-4)(x^2+4)=0;\quad x_1=2,\quad x_2=-2,\quad x_3=2i,\quad x_4=-2i.$$

A doua se reduce la a găsi rădăcinile de ordinul 4 ale lui -1 ceeace s'a făcut în problema 21. 1:

$$x_5=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\quad x_6=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i).\quad x_7=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\quad x_8=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Ultima ecuație se mai putea rezolva considerând-o ca o ecuație reciprocă.

Observație. Ecuațiile de tipul (1) conțin ca un caz particular ecuațiile bipătrate (§ 13, pct. 1).

22. 3. *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^6-4x^5+4x^4+8x^3-28x^2+32x-16=0,$$

ştiind că are rădăcina $1+i$ *dublă.*

Ecuaţia va avea şi rădăcina $1-i$ dublă, adică polinomul din prima parte a ecuaţiei, se va divide cu

$$[x-(1+i)]^2[x-(1-i)]^2=[(x-1)^2-i^2]^2=(x^2-2x+2)^2=x^4-4x^3+8x^2+8x+4.$$

Impărţind găsim câtul x^2-4 adică ecuaţia mai are şi rădăcinile ± 2.

22. 4. *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^6-x^5-8x^4+2x^3+21x^2-9x-54=0,$$

Ştiind că admite rădăcina $\sqrt{2}+i$.

In teorema dela *nr* 2 nu se precizează altceva decât că numerele a şi b sunt reale, ceeace ne face să spunem că dacă o ecuaţie admite rădăcina $\sqrt{2}+i$, va admite şi rădăcina $\sqrt{2}-i$. Deasemenea, în teorema dela *nr* 3, numărul a poate fi şi imaginar, încât dacă ecuaţia admite rădăcinile $i+\sqrt{2}$, şi $-i+\sqrt{2}$, va trebui să admită şi rădăcinile $i-\sqrt{2}$ şi $-i-\sqrt{2}$. Rezultă că polinomul din prima parte a ecuaţiei se va împărţi cu;

$$(x-\sqrt{2}-i)(x+\sqrt{2}-i)(x-\sqrt{2}+i)(x+\sqrt{2}+i)=[(x-\sqrt{2})^2+1][(x+\sqrt{2})^2+1)=$$
$$=(x^2+3-2\sqrt{2}x)(x^2+3+2\sqrt{2}x)=x^4-2x^2+9,$$

iar câtul este x^2-x-6 care ne mai dă rădăcinile: -2 şi 3.

22. 5. *Să se rezolve ecuaţia*

$$(x+i)^m-(x-i)^m=0.$$

Scriem ecuaţia sub forma unei ecuaţii binoame

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^m=1=\cos 0°+i\sin 0°,$$

ale cărei rădăcini sunt

$$\frac{x_k+i}{x_k-i}=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}. \qquad (k=0,1,2\ \ldots\ m-1)$$

Din aceastăecuaţie, de gradul 1 în raport cu x_k, scoatem

$$x_k=\frac{\sin\frac{2k\pi}{m}-i\left(1+\cos\frac{2k\pi}{m}\right)}{1-\cos\frac{2k\pi}{m}-i\sin\frac{2k\pi}{m}}=\frac{2\sin\frac{k\pi}{m}\cos\frac{k\pi}{m}-2i\cos^2\frac{k\pi}{m}}{2\sin^2\frac{k\pi}{m}-2i\sin\frac{k\pi}{m}\cos\frac{k\pi}{m}}=\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m},$$

unde $k=0,1,2\ldots n-1$.

22. 6. 1° *Ecuaţia*

$$x^n-a=0, \qquad (1)$$

are toate rădăcinile distincte, și are cel mult două rădăcini reale.

2°. *Rădăcinile comune ecuațiilor*

$$x^n-1=0, \quad x^m-1=0, \tag{2}$$

sunt rădăcinile ecuației (3) $x^d-1=0$, *unde d este c.m.m.c.d. al lui m și n.*

3°. *Dacă* α *este o rădăcină a ecuației*

$$x^m-1=0, \tag{3}$$

și α^p *este o rădăcină, oricare ar fi numărul p.*

4°. *Dacă m este un număr prim și* $\alpha\,(\alpha\neq 1)$ *o rădăcină a ecuației* (4) *atunci toate rădăcinile ei pot fi reprezentate prin șirul*

$$1, \alpha, \alpha^2 \ldots \alpha^{m-1}. \tag{5}$$

1°. Dacă o ecuație are o rădăcină multiplă, ea este socotită ca rezultând din confundarea atâtor rădăcini cât este ordinul ei de multiplicitate. Dar pentru ca două numere complexe să se confunde este necesar ca și punctele lor reprezentative să se confunde; or, acest lucru nu este posibil în cazul unei ecuații binoame, deoarece rădăcinile unei asemenea ecuații sunt vârfurile unui poligon regulat. În ce privește realitatea rădăcinilor, o ecuație binomă nu poate avea decât maximum două rădăcini reale, deoarece poligonul ale cărui vârfuri sunt rădăcinile, nu poate avea decât maximum două vârfuri pe axa reală. Dacă a este real, ecuația (1) va avea rădăcinile două câte două conjugate, deci dacă n va fi fără soț, una singură poate fi reală, și anume $\sqrt[n]{a}$, iar dacă n este cu soț atunci are maximum două și anume $\sqrt[n]{a}$ și $-\sqrt[n]{a}$, dacă a este pozitiv (aici este vorba de radicali aritmetici, așa cum au fost definiți în § 9).

2°. După cum vom vedea în curând (§ 29) rădăcinile comune a două ecuații algebrice $P(x)=0$, $Q(x)=0$ se obțin anulând c.m.m.c.d. al polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$. În cazul nostru (prob. 7. 5), c.m.m.c.d. al polinoamelor x^m-1, x^n-1 este x^d-1 unde d este c.m.m.c.d. al numerelor m și n.

3°. În adevăr prin ipoteză $\alpha^m=1$; atunci

$$(\alpha^p)^m-1=\alpha^{pm}-1=(\alpha^m)^p-1=1-1=0.$$

4°. În baza proprietății precedente, toți termenii șirului sunt rădăcini și cum o ecuație de grad n are n și numai n rădăcini, este suficient să arătăm că toate numerele șirului sunt diferite între ele. În adevăr, dacă am avea $\alpha^q=\alpha^r\,(q>r)$, atunci am avem și

$$\alpha^r(\alpha^{q-r}-1)=0.$$

Cum α nu poate fi zero, este necesar ca α să fie o rădăcină a ecuației

$$x^{q-r}-1=0.$$

Dar α este o rădăcină și a ecuației (4): aceasta ar însemna că ecuațiile (4) și (6) au o rădăcină comună. Or, acest lucru nu se poate deoarece ar însemna ca m și $q-r\,(<m)$ să aibă un divizor comun și noi am presupus pe m prim.

Dacă m nu este prim, o parte din numerele șirului (6) sunt confundate, deci șirul nu poate reprezenta toate rădăcinile ecuației (4).

§ 23. Descompunerea unui polinom în factori reali

Să presupunem că ni se dă un polinom $P(x)$ de grad n, cu coeficienţii reali şi ni se cere să-l descompunem în factori cu coeficienţi reali. In acest scop, vom rezolva mai întâi ecuaţia $P(x)=0$ ale cărei rădăcini sunt $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Acesta înseamnă că vom putea scrie

$$P(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n), \qquad (I)$$

unde a_0 este coeficientul termenului de gradul cel mai înalt din polinom. Dacă o parte din rădăcini sunt multiple, (de ex., dublă, triplă,...) atunci le strângem la un loc, încât forma cea mai generală a descompunerii unui polinom algebric, este

$$P(x)=a_0(x-x_2)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_p)^{m_p}, \qquad (II)$$

unde: $m_1+m_2+\cdots+m_p=n$ relaţia care asigură că gradele polinoamelor din prima şi a doua parte sunt aceleaşi. Printre numele m_i, evident toate întregi şi pozitive, pot fi unele egale cu unitatea; în cazul acesta se zice că rădăcina corespunzătoare este *simplă*. (dacă $m=2$ se zice că rădăcina este *dublă*, dacă $m=3$ se zice că rădăcina este *triplă* şi în general va fi multiplă de ordinul m).

Dacă toate numerele x_i sunt reale, expresia (II) se zice că reprezintă descompunerea polinomului $P(x)$ în factori reali. Dacă însă două din rădăcini sunt imaginare, fie $x_k=a+bi$ şi $x_h=a-bi$ cum ele trebue să fie de acelaşi odin de multiplicitate, trebue ca exponenţii corespunzători să fie egali, adică $m_k=m_h$. Grupând factorii corespunzători, polinomul va avea o descompunere de forma

$$P(x)=a_0(x-x_1)^{m_1}\ldots(x-x_i)^{m_i}(x^2+p_1x+q_1)^{m_{i+1}}\ldots(x^2+p_jx+q_j)^{m_{i+j}}, \qquad (III)$$

unde toţi factorii sunt reali şi unde

$$m_1+m_2+\cdots+m_i+2m_{i+1}+2m_{i+2}+\cdots+2m_{i+j}=n,$$

n fiind gradul polinomului din prima parte.

23. 1. *Să se descompună în factori trinomul*

$$x^4+x^2+1.$$

Dacă anulăm trinomul dat căpătăm o ecuaţie bipatrată şi cu ajutorul rădăcinilor ei, putem descompune trinomul în produs. Se poate face acest lucru şi direct, astfel

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1);$$

cum trinoamele din paranteze au rădăcini imaginare, aceasta este descompunerea căutată.

23. 2. *Să se descompună polinomul*

$$P(x)=x^7+8x^4-x^3-8,$$

într'un produs de factori.

După forma polinomului observăm că trebue să scriem succesiv,

$$P(x)=x^3(x^4-1)+8(x^4-1)=(x^3+8)(x^4-1)=(x+2)(x^2-2x+4)(x^2-1)$$
$$(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x+2)(x^2+1)(x^2-2x+4).$$

23. 3. *Să se descompună în factori polinomul*

$$P(x)=x^6+x^5+x^4+2x^3+x^2+x+1.$$

Scriem succesiv

$$P(x)=x^3(x^3+x^2+x+1)+(x^3+x^2+x+1)=(x^3+1)(x^3+x^2+x+1)=$$
$$=(x+1)^2(x^2+1)(x^2-x+1).$$

23. 4. *Să se descompună în factori polinomul*

$$P(x)=4(x^2+ax+a^2)^3-27a^2x^2(x+a)^2.$$

Se constată că: $P(a)=0$ ceeace însemnează că $P(x)$ se divide cu $x-a$. Punând în evidenţă acest factor, avem

$$P(x)=4[(x-a)^2+3ax]^3-27a^2x^2[(x-a)+2a]^2$$
$$=(x-a)^2[4(x-a)^4+36ax(x-a)^2+81a^2x^2]$$
$$=(x-a)^2[2(x-a)^2+9ax]^2=(x-a)^2(2x^2+5ax+2a^2)^2=$$
$$=(x-a)^2(2x+a)^2(x+2a)^2.$$

23 .5. *Să se descompună în factori polinomul*

$$P(x)=12x^4+4x^3-11x^2-x+2.$$

Incercăm mai întâi dacă ecuaţia $P(x)=0$ nu are rădăcini întregi. Aceste rădăcini nu pot fi decât (§ 6, pct. 5) 1 sau 2. Se constată că $P(-1)=0$, adică $P(x)$ se divide cu $x+1$.

$$P(x)=(x+1)(12x^3-8x^2-3x+2).$$

Paranteza a doua nu mai are rădăcini întregi. Cum divizorii primului coeficien sunt $\pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$, ecuaţia

$$12x^2-8x^2-3x+2=0,$$

nu poate avea ca rădăcini fracţionare decât unul din numerele

$$\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{12}.$$

Este suficient să găsim una din rădăcini. La prima încercare se constată că $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Avem mai departe

$$P(x)=(x+1)(2x-1)(6x^2-x-2)=(x+1)(2x-1)(2x+1)(3x-2).$$

23. 6. *Să se descompună în factori polinomul*

$$P(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1,$$

şi din expresia obţinută să se deducă valoarea produsului

$$A=\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Cum $P(x)$ se scrie sub forma

$$P(x)=\frac{x^n-1}{x-1},$$

ecuaţia $P(x)=0$ va avea drept rădăcini

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad (k=1,2,\ldots,n-1).$$

Cu ajutorul acestor rădăcini putem scrie

$$P(x)=\left(x-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\left(x-\cos\frac{4\pi}{n}-i\sin\frac{4\pi}{n}\right)\cdots \cdot\left(x-\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right). \tag{1}$$

Avem două cazuri de considerat: $1^0\ n=2m$ (cu soţ) însemnează că avem un număr fără soţ de factori; observăm că

$$\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{m}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{m}\right)= =\cos\frac{\pi}{m}-i\sin\frac{\pi}{m},$$

$$\cos\frac{2(n-2)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-2)\pi}{m}=\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{m}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{m}\right)=\cos\frac{2\pi}{m}-i\sin\frac{2\pi}{m},$$

ş. a. m. d., încât grupând termenii echidistanţi

$$P(x)=\left[\left(x-\cos\frac{\pi}{m}\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{m}\right]\left[\left(x-\cos\frac{2\pi}{m}\right)^2+\sin^2\frac{2\pi}{m}\right]\cdots \left[\left(x-\cos\frac{(m-1)\pi}{m}\right)^2+\sin^2\frac{(m-1)\pi}{m}\right](x+1)$$

$$=(x+1)\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{m}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{m}+1\right)\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{(m-1)\pi}{m}+1\right)$$

$2^0\ n=2m+1$ (fără soţ). Grupând termenii în mod analog, găsim

$$P(x)=\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{2m+1}+1\right) \left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{2m+1}+1\right)\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{2m\pi}{2m+1}+1\right).$$

Făcând în (1) $x=1$, avem

$$n=\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{n}-i\sin\frac{4\pi}{n}\right)\cdots \cdots\left(1-\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

şi cum

$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha,\quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\left.\begin{aligned} n=&\left(2\sin^2\frac{\pi}{n}-2i\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(2\sin^2\frac{2\pi}{n}-2i\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}\right)\cdots \\ &\left(2\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n}-2i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right) \\ =2^{n-1}A&\left(\sin\frac{\pi}{n}-i\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\sin\frac{2\pi}{n}-i\cos\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{n}-i\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Pentru a calcula ultimul produs, scoatem la fiecare paranteză un i ca factor şi ţinem seama de formula lui *Moivre;* găsim că valoarea acestui produs este succesiv,

$$(-1)^{n-1}i^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$=(-1)^{n-1}i^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)^{2}\cdots\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)^{n-1}$$

$$=(-1)^{n-1}i^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)^{1+2+\cdots+(n-1)}=(-1)^{n-1}i^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

(la exponent am avut suma primelor $n-1$ numere întregi, § 5, II). Cum $\frac{1}{2}(n-1)$ este un număr întreg, deoarece $n(n-1)$ este produsul a două numere consecutive, avem mai departe

$$(-1)^{n-1}i^{n-1}\left(\cos\frac{n-1}{2}\pi+i\sin\frac{n-1}{2}\pi\right)=(-1)^{n-1}i^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{1}\right)^{n-1}=1.$$

Formula (2) dă

$$A=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

CAPITOLUL IV

DETERMINANŢI. ECUAŢII LINEARE

§ 24. Analiza combinatorie

1. Fiind dat un număr oarecare de obiecte $a,b,c,\ldots,$ l, diferite între ele, cu ajutorul lor se pot face mai multe grupe, în care putem lua numai o parte din ele sau chiar pe toate. După regula de formare a acestor grupe zicem că ele formează *aranjamente, permutări* sau *combinări.*

a) Numim *aranjamente* de n obiecte luate câte p, totalitatea grupelor care se pot forma în aşa fel, încât două grupe să fie diferite între ele prin *ordinea* elementelor sau prin *natura* lor. Pentru a scrie tabloul aranjamentelor de n obiecte luate câte p, procedăm din aproape în aproape. Tabla T_1 al aranjamentelor de n obiecte luate câte una, sunt înseşi obiectele. Tabela T_2 al aranjamentelor de n obiecte luate câte două îl vom deduce din precedentul, scriind după fiecare aranjament din T_1 literele rămase de o parte, etc. Pentru a scrie tabela T_p, vom adăugi fiecărui aranjament din T_{p-1} literele nefolosite în acel aranjament. Numărul aranjamentelor de n obiecte luate câte p este egal cu

$$A_n^p=n(n-1)\ldots(n-p+1) \qquad (i)$$

(m şi p sunt pentru A, indici astfel încât $n\geq p$).

b) Se numesc *permutări* de n obiecte, toate grupele care se pot forma cu aceste obiecte, luate câte n, două grupe diferind între ele prin *ordinea* elementelor. Scrierea permutărilor se face din aproape în aproape. Permutările

cu două obiecte sunt *ab*, *ba*; pentru a scrie permutările cu trei obiecte, luăm litera *c* și o plasăm la fiecare din permutările de două obiecte, la început, la mijloc și la urmă, adică: *cab, abc, cba, bca, bac*. La fel se trece dela aceste permutări la permutările de patru obiecte, etc. Numărul permutărilor de n obiecte este

$$P_n = n! = 1.2.3 \ldots n. \qquad (II)$$

Permutările sunt aranjamente speciale în care se iau toate obiectele deodată.

c) Se numesc *combinări* de n obiecte luate câte p, totalitatea grupelor care se pot forma în așa fel încât două dintre ele să difere cel puțin prin *natura* a două obiecte. Tabela combinărilor de n obiecte luate câte p se formează ca și tabela aranjamentelor, cu singura deosebire că literile în fiecare grupă să fie așezate în ordine alfabetică. Numărul combinărilor de n obiecte luate câte p este dat de formula

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} = \frac{A_n^p}{P_p}, \qquad (III)$$

adică coeficienții binominali (§ 4).

2. In afara grupărilor de care am vorbit mai sus, se pot concepe grupări asemănătoare, în care obiectele pe care le avem, să poată fi luate și de mai multe ori, adică repetate. Folosind aceleași definiții ca mai sus, cu mențiunea că obiectele să fie repetate, numărul *aranjamentelor cu repetiție* este

$$\alpha_n^p = n^p; \qquad (IV)$$

în particular dacă $n=p$,

$$\alpha_n^p = r_n = n^n, \qquad (V)$$

aranjamente pe care am putea să le numim *permutări cu repetiție*. In sfârșit numărul combinărilor cu repetiție este

$$\gamma_n^p = \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{p!} = C_{n+p-1}^p. \qquad (VI)$$

Pentru aceste grupări se poate ca p să fie mai mare decât n.

24. 1. *Se dau n litere cu ajutorul cărora se formează aranjamentele luate câte m (n>m). Din aceste aranjamente câte conțin o literă anumită? Câte încep cu această literă?*

Toate aranjările celor n litere luate câte m sunt în număr de A_n^m. Aceste aranjamente se pot împărți în două grupe: în prima grupă punem aranjamentele care conțin litera care ne interesează, să-i zicem a, și în cealaltă, restul. In această a doua grupă sunt tot atâtea aranjamente câte am putea face cu cele n litere din care ștergem litera a, adică sunt A_{n-1}^m. Aceasta înseamnă că în prima grupă, aranjamentele care ne interesează, sunt în număr de

$$A_n^m - A_{n-1}^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) - (n-1)(n-2)\cdots[(n-1)-m+1]$$
$$= (n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)[n-(n-m)] = mA_{n-1}^{m-1}.$$

In toate aceste aranjamente, litera a va ocupa diferite locuri; dacă o ștergem ne rămâne un aranjament de $n-1$ obiecte luate câte $m-1$ și acest aranjament îl obținem în m moduri deoarece litera a poate să ocupe m locuri față de el. Deci, fiecăruia din aceste aranjamente punându-i litera a în față, obținem un aranjament din cele care ne interesează: ele vor fi în număr de A_{n-1}^{m-1}.

24. 2. *Se consideră toate permutările care se pot face cu primele n cifre. Intr'o permutare oarecare se zice că avem o inversiune, între două cifre, de câte ori o cifră mai mare este așezată înaintea unei cifre mai mici. Să se găsească numărul total al inversiunilor din toate permutările scrise.*

Să începem printr'un exemplu, pentru a fi înțeles mai ușor. In permutarea 53124, cifrele (53), (51), (52), (54), (31), (32) prezintă câte o inversiune, adică permutarea are 6 inversiuni. Permutarea scrisă invers 42135 are (42), (41), (43), (21), adică 4 inversiuni. Trecem la cazul general. Să considerăm o permutare și să-i asociem permutarea scrisă invers, care, fiind deasemenea o permutare cu tot atâtea cifre, se află sigur printre permutările scrise. Făcând această operație vom avea $\frac{1}{2}P_n$ grupe. Să numărăm inversiunile din fiecare grupă. Din modul cum le-am asociat, rezultă că atunci când în prima permutare două cifre prezintă o inversiune în a doua n'o vom mai avea, și invers. Această însemnează că vom avea atâtea inversiuni câte combinări vom forma luând cele n cifre câte două așezându-le în sens invers $n, n-1, n-2, \ldots, 2,1$ (v. la pct. 1 *c*) cum am spus că se formează aceste combinări). In fiecare grupă vom avea C_n^2 inversiuni, deci în toate grupele

$$\frac{1}{2}P_n C_n^2 = \frac{1}{2}n!\,\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2(n-1)^2(n-2)!}{2}.$$

24. 3. *In desvoltarea unui polinom la puterea a treia, a patra și a cincia, să se examineze care este numărul termenilor asemenea.*

Am văzut cu ocazia rezolvării din prob. 4.6 că pentru puterea treia avem desvoltarea

$$(a+b+\cdots+l)^3 = \sum a^3 + 3\sum_2 a^2b + 6\sum_3 abc.$$

In prima sumă avem evident n termeni (numărul literelor $a, b, c, \ldots, 1$); în a doua sumă avem tabloul aranjamentelor luate câte două punând la primul factor puterea 2 (ordinea are importanță), deci sunt în număr de $A_n^2 = n(n-1)$; în a treia sumă (ordinea nu are importanță pentrucă factorii au aceeași putere) avem $C_n^3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ termeni. In total avem

$$n + n(n-1) + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \text{ termeni.}$$

Pentru puterea a patra

$$(a+b+\cdots+1)^4 = \sum_1 a^4 + 4\sum_2 a^3 b + 6\sum_3 a^2b^2 + 12\sum_4 a^2bc + 24\sum_5 abcd.$$

In primele două sume avem, ca mai sus, respectiv n și $n(n-1)$ termeni; în a treia sumă, puterile fiind aceleași vom avea $C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$ termeni; în suma a patra a^2 se va înmulți cu toate combinările care se poate face cu celelalte luate câte două, adică cu

$$C_{n-1}^2 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

și schimbând pe a^2 cu fiecare literă vom avea în total $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ termeni; în ultima sumă vom avea

$$C_n^4 = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

In total vom avea

$$n+n(n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)+\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)=$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

termeni. Dacă ținem seamă de câte ori este repetat fiecare, avem

$$n+4n(n-1)+3n(n-1)+6n(n-1)(n-2)+n(n-1)(n-2)(n-3)=n^4$$

termeni, cum era de așteptat.

Pentru puterea a 5-a s'a găsit

$$(a+b+\cdots+l)^5=\Sigma_1 a^5+5\Sigma_2 a^4b+10\Sigma_3 a^3b^2+20\Sigma_4 a^3bc+30\Sigma_5 a^2b^2c+$$
$$+60\Sigma_6 a^2bcd+120\Sigma_7 abcde.$$

Aceleași raționamente ne spun următoarele: în Σ_1 avem n termeni, în Σ_2 avem $n(n-1)$termeni, în Σ_3 tot $n(n-1)$ termeni, în Σ_4 și Σ_5 avem $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ termeni, în Σ_6 avem $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)(n-3)$ termeni iar în Σ_7 avem $\frac{1}{120}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ termeni; în total vom avea $\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ termeni.

24. 4. *Să se găsească numărul termenilor dintr'un polinom omogen de grad n în m litere.*

Un asemenea polinom va fi o sumă de termeni de forma $Ax_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_m^\lambda$ unde toți termenii trebuind să fie de același grad (4.2) însemnează cu $\alpha+\beta+\cdots+\lambda=n$. Aceasta însemnează să facem cu literele $x_1, x_2, \ldots, x_m$ toate combinările cu repetiție luate câte n și înlocuind în fiecare combinare literele scrise repetat prin aceeași literă la putere. Deci numărul termenilor este

$$\Upsilon_m^n = \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}.$$

24. 5. *Să se găsească numărul termenilor dintr'un polinom oarecare de grad n în m litere.*

Pentru a face acest calcul, presupunem că polinomul dat este omogen în $m+1$ litere dintre care una este egală cu 1. Aceasta însemnează că un polinom oarecare de grad n cu m litere va avea

$$\Upsilon_{m+1}^n = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{n!},$$

termeni.

Observație. Se poate proceda așa cum am făcut la prob. 2.6. grupând termenii în polinoamele omogene de forma

$$P_0+P_1+\cdots+P_n,$$

fiecare din P_k conținând toți termenii de gradul k. Folosind rezultatul dela problema precedentă și dela cea actuală, rezultă egalitatea

$$\gamma_m^0+\gamma_m^1+\cdots+\gamma_m^n=\gamma_{m+1}^n$$

§ 25. Calculul determinanților

1. Prin determinant înțelegem un tabel pătratic având n^2 elemente așezate pe *n linii* și *n coloane.* Numărul n se numește *ordinul* determinantului. Un determinant are un sens operator după cum urmează. Pentru $n=2$, avem

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-cb. \tag{I}$$

Pentru $n=3$, avem

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = \tag{II}$$

$$=ab'c''+a'b''c+a''bc'-cb'a''-c'b''a-c''ba',$$

desvoltare care se poate învăța pe de rost, făcându-se o schemă pe determinantul inițial și care se numește deobicei *regula lui Sarrus.* Pentru $n=4$, avem

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{III}$$

determinanții de ordinul 3 calculându-se după regula precedentă, etc. Determinanții din partea dreaptă se numesc *determinanți minori.* Se zice că am calculat determinanții desvoltând după linia întâi. La același rezultat se ajunge dacă se desvoltă în general după linia p—a (sau coloana p—a) după aceeași regulă ca mai sus, având grijă ca rezultatul să-l înmulțim cu $(-1)^{p-1}$

In general un determinant de ordinul n este de forma

$$D=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \dots a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \dots a_2^n \\ \cdots & \cdots \\ a_n^1 & a_n^2 \dots a_n^n \end{vmatrix},$$

și se notează prescurtat prin $D=|a_i^k|$. Valoarea unui asemenea determinant se calculează din aproape în aproape cu ajutorul determinanților minori. Valoarea lui este o sumă de forma

$$D=\sum(-1)^l a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_n^\lambda$$

unde $\alpha\beta\ldots\lambda$ este o permutare oarecare a numerelor $1, 2, \ldots, n$ iar I reprezintă numărul variațiilor acestei permutări (se zice ca două numere oarecare ale permutării prezintă o variație, când cel mare este așezat înaintea celui mic). Suma se referă la toate permutările $\alpha\beta\ldots\lambda$ care se pot forma cu cifrele $1, 2, \ldots, n$. Aceasta însemnează că un determinant de ordinul n are $n!$ termeni, dintre care jumătate sunt pozitivi, iar jumătate negativi.

Literele cu care este format determinantul se numesc *elemente,* iar termenii sumei (IV) se numesc *termenii* determinantului. Elementele $a_1^1, a_2^2, \ldots, a_n^n$ se zic că formează *diagonala principală* a determinantului, spre deosebire de cealaltă *diagonală*, care se numește *secundară.*

2. Proprietățile determinanților sunt:

a) dacă într'un determinant schimbăm liniile în coloane și coloanele în linii (păstrând ordinea lor), valoarea determinantului rămâne aceeași;

b) dacă într'un determinant schimbăm două linii (sau două coloane) între ele, determinantul schimbă de semn;

c) dacă un determinant are două linii (sau două coloane) egale, determinantul are valoarea zero;

d) dacă elementele unei linii (sau coloane) au un factor comun, acest factor se poate pune în fața determinantului, suprimându-l din linia (coloana) respectivă;

e) dacă un determinant are două linii (sau coloane) proporționale, determinantul are valoarea zero;

f) dacă într'un determinant elementele unei linii (sau coloane) sunt sume de p termeni, determinantul se poate descompune într'o sumă de p determinanți după regula

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2+a_3 & a' & a'' \\ b_1+b_2+b_3 & b' & b'' \\ c_1+c_2+c_3 & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a' & a'' \\ b_1 & b' & b'' \\ c_1 & c' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a' & a'' \\ b_2 & b' & b'' \\ c_2 & c' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a' & a'' \\ b_3 & b' & b'' \\ c_3 & c' & c'' \end{vmatrix}; \qquad (V)$$

g) adunând unei linii sau (coloane) elementele celorlalte linii (coloane) înmulțite prin factori arbitrari, determinantul nu-și schimbă valoarea.

3) Se numește determinant Vandermonde, și are drept valoare expresia ce urmează, determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\ldots(a_n-a_1)\cdot (a_3-a_2)(a_4-a_2)\ldots(a_n-a_2)\cdot (a_4-a_3)\ldots(a_n-a_3)\cdot \ldots\ldots(a_n-a_{n-1}). \qquad (VI)$$

25. 1. *Să se calculeze determinantul*

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 11 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Vom desvolta după linia a treia. Cum această linie are un singur element diferit de zero, calculul lui D se va reduce la calculul minorului (determinant de ordinul 3) corespunzător elementului 2. Pentru a-i găsi semnul, mergem pe prima coloană până ajungem la linia a treia și apoi pe linie până ajungem la 2. Vom avea $3(+), 1(-), 0(+)\, 0(-), 0(+), 2(-)$, încât

$$D = -2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 11 & 10 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix},$$

care desvoltat după ultima linie,

$$D = -10\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = -10 \cdot 26 = -260$$

25. 2. *Să se calculeze valoarea unui determinant având toate elementele de deasupra (sau dedesubtul) diagonalei principale nule.*

Avem de calculat determinantul

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} & 0 \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Desvoltându-l după prima linie obținem

$$D = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3^2 & a_3^3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix},$$

și procedând la fel cu noul determinant, ajungem din aproape în aproape la valoarea

$$D = a_1^1 a_2^2 \dots a_{n-2}^{n-2} \begin{vmatrix} a_{n-1}^{n-1} & 0 \\ a_n^{n-1} & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 \dots a_n^n,$$

adică D este egal cu produsul elementelor depe diagonala principală.

25. 3. *Să se demonstreze că un determinant antisimetric (adică pentru care $a_p^q = -a_q^p$) de ordin fără soț este totdeauna nul.*

Vom face demonstrația pe determinantul antisimetric de ordinul 3. Conform definiției $a_i^i = -a_i^i$, adică $a_i^i = 0$, ceeace înseamnează că diagonala principală are toate elementele nule. Cel mai general determinant antisimetric de ordinul 3 este

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}.$$

Scoțând la fiecare linie -1 ca factor, găsim

$$D=(-1)^3\begin{vmatrix} o & -a & -b \\ a & o & -c \\ b & c & o \end{vmatrix},$$

noul determinant nu este decât tot D, în care sunt schimbate liniile în coloane și coloanele în linii; din egalitatea obținută $D=-D$ rezultă, $2D=0$, adică $D=0$. Se vede din această demonstrație că proprietatea este valabilă în general atunci când ordinul determinantului este fără soț.

25. 4. *Să se calculeze determinantul*

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}.$$

Scăzând elementele primei linii din toate celelalte (operație pe care o vom face totdeauna când în determinantul pe care vrem să-l calculăm elementele unei coloane sunt egale). Obținem

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^4-a^4 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^4-a^4 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^4-a^4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 & b^4-a^4 \\ c-a & c^2-a^2 & c^4-a^4 \\ d-a & d^2-a^2 & d^4-a^4 \end{vmatrix}.$$

Scoțând la prima linie factorul $(b-a)$, la a doua $(c-a)$ și la a treia $(d-a)$, avem mai departe

$$D=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^3+ab^2+a^2b+a^3 \\ 1 & c+a & c^3+ac^2+a^2c+a^3 \\ 1 & d+a & d^3+ad^2+a^2d+a^3 \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^3+ab^2+a^2b+a^3 \\ 0 & c-b & (c^3-b^3)+a(c^2-b^2)+a^2(c-b) \\ 0 & d-b & (d^3-b^3)+a(d^2-b^2)+a^2(d-b) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & (c^3-b^3)+a(c^2-b^2)+a^2(c-b) \\ d-b & (d^3-b^3)+a(d^2-b^2)+a^2(d-b) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & c^2+bc+b^2+a(c+b)+a^2 \\ 1 & d^2+db+b^2+a(d+b)+a^2 \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & c^2+bc+b^2+a(c+b)+a^2 \\ 0 & d^2-c^2+b(d-c)+a(d-c) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d).$$

25. 5. *Să se calculeze determinantul*

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

Adunând toate coloanele, la prima avem

$$D=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & d & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix}=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a-b & d-c & c-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix};$$

$$D=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & 0 & c-d \\ d-b & a+b-c-d & b-d \\ c-b & a+b-c-d & a-d \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)\begin{vmatrix} a-b & 0 & c-d \\ d-b & 1 & b-d \\ c-d & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)\begin{vmatrix} a-b & c-d \\ c-d & a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)[(a-b)^2-(c-d)^2]$$

$$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d).$$

25. 6. *Să se calculeze determinantul*

$$D=\begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos^2 a & \sin a\cos a \\ \sin^2 b & \cos^2 b & \sin b\cos b \\ \sin^2 c & \cos^2 c & \sin c\cos c \end{vmatrix}.$$

Dând la prima linie pe $\cos^2 a$ ca factor, la a doua pe $\cos^2 b$, iar la a treia pe $\cos^2 c$, determinantul devine un determinant Vandermonde, şi anume

$$D=\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c\begin{vmatrix} \operatorname{tg}^2 a & 1 & \operatorname{tg} a \\ \operatorname{tg}^2 b & 1 & \operatorname{tg} b \\ \operatorname{tg}^2 c & 1 & \operatorname{tg} c \end{vmatrix}$$

$$=\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c(\operatorname{tg} b-\operatorname{tg} a)(\operatorname{tg} c-\operatorname{tg} a)(\operatorname{tg} c-\operatorname{tg} b).$$

Dar

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

încât

$$D=\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a).$$

25. 7. *Să se calculeze determinantul*

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & c+a \\ ab & bc & ca \end{vmatrix},$$

și ca aplicația să se deducă valoarea determinantului

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix}.$$

In primul determinant, scăzând prima coloană din ultimele două, avem

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-a & c-b \\ ab & b(c-a) & a(c-b) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c-a & c-b \\ b(c-a) & a(c-b) \end{vmatrix}=-(a-b)(b-c)(c-a).$$

Pentru al doilea determinant desvoltăm liniile trigonometrice și împărțim în coloana întâi cu $\cos a \cos b$, etc. Găsim

$$\Delta=\cos^2 a\ \cos^2 b\ \cos^2 c \begin{vmatrix} 1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b & 1-\operatorname{tg} b \operatorname{tg} c & 1-\operatorname{tg} c \operatorname{tg} a \\ 1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b & 1+\operatorname{tg} b \operatorname{tg} c & 1+\operatorname{tg} c \operatorname{tg} a \\ \operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b & \operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c & \operatorname{tg} c+\operatorname{tg} a \end{vmatrix};$$

adunând prima linie la a doua și rezultatul împărțit cu 2 este adunat la prima

$$\Delta=-2\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c \begin{vmatrix} \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b & \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c & \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a \\ 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b & \operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c & \operatorname{tg} c+\operatorname{tg} a \end{vmatrix}$$

$$=-2\cos^2 a\ \cos^2 b\ \cos^2 c \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b & \operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c & \operatorname{tg} c+\operatorname{tg} a \\ \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b & \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c & \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a \end{vmatrix}$$

și în baza valorii găsite pentru D,

$$=2\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c\,(\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b)(\operatorname{tg} b-\operatorname{tg} c)(\operatorname{tg} c-\operatorname{tg} a)=$$
$$=2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a).$$

25. 8. *Să se calculeze determinantul*

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 \ldots a_n \\ a_1 & x & a_2 \ldots a_n \\ a_1 & a_2 & x \ldots a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots x \end{vmatrix}.$$

Pentru a urmări raționamentul mai ușor îl vom face pe D_4. Determinantul

$$D_4=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & x & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & x & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x \end{vmatrix}.$$

este un polinom în x care se anulează dacă facem $x=a_1, a_2, a_3$, (făcând înlocuirile se obţin determinanţi cu câte două linii egale), ceeace însemnează că D_4 se divide cu produsul $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$. Cum D_4 este un polinom de gradul 4 cel mult, deoarece elementele coloanei principale înmulţite dau x^4, (din (IV) se vede că o permutare a indicilor $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ poate fi $1, 2, \dots, n$, adică elementele diagonalei principale înmulţite dau întotdeauna un termen al determinantului), însemnează că

$$D_4=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ P(x),$$

unde $P(x)$ este un polinom de gradul I. Adunând toate coloanele la prima.

$$D_4=\begin{vmatrix} x+a_1+a_2+a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ x+a_1+a_2+a_3 & x & a_2 & a_3 \\ x+a_1+a_2+a_3 & a_2 & x & a_3 \\ x+a_1+a_2+a_3 & a_2 & a_3 & x \end{vmatrix},$$

adică D_4 are ca factor pe $x+a_1+a_2+a_3$. Deci,

$$D_4=C(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x+a_1+a_2+a_3),$$

în care C este o constantă. Pentru determinarea ei, observăm că singurul termen în x^4 este cel care provine din diagonala principală şi are coeficientul 1, iar din valoarea precedentă are coeficientul C; deci $C=1$.

In general, acelaşi raţionament arată că vom avea

$$D_{n+1}=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)(x+a_1+a_2+\dots+a_n).$$

§ 26. Inmulţirea determinanţilor

1. Dacă determinanţii D şi Δ, de ordinul n, au elementele a_i^k şi b_j^l, atunci produsul lor este tot un determinant de ordinul n având drept elemente

$$c_p^q=a_p^1b_q^1+a_p^2b_q^2+\dots+a_p^nb_q^n. \qquad \text{(I)}$$

Astfel avem

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a\alpha+b\beta, & a\gamma+b\delta \\ c\alpha+d\beta, & c\gamma+d\delta \end{vmatrix}, \qquad \text{(II)}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3, & a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3, & a_1\gamma_1+a_2\gamma_2+a_3\gamma_3 \\ b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3, & b_1\beta_1+b_2\beta_2+b_3\beta_3, & b_1\gamma_1+b_2\gamma_2+b_3\gamma_3 \\ c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3, & c_1\beta_1+c_2\beta_2+c_3\beta_3, & c_1\gamma_1+c_2\gamma_2+c_3\gamma_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(III)}$$

etc.

Dacă avem de înmulţit doi determinanţi care nu sunt de acelaşi ordin, se face ca cel de ordin mai mic să aibă acelaşi ordin cu cel de ordin mai mare după regula

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}=\dots$$

2. Să presupunem, mai general, că avem două tablouri (*matrici*) fiecare de mn elemente (m linii și n coloane)

$$P=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \dots a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \dots a_2^n \\ \dots & \dots \\ a_m^1 & a_m^2 \dots a_m^n \end{vmatrix},\quad Q=\begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 \dots b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 \dots b_2^n \\ \dots & \dots \\ b_m^1 & b_m^2 \dots b_m^n \end{vmatrix},$$

cu ajutorul cărora formăm determinantul $R=|c_p^q|$ cu m^2 elemente definite prin relația (l). Avem următoarele cazuri: 1° $m=n$ regăsim cazul precedent 2° $m>n$, $R=0$; 3° $m<n$, $R=\sum P_i Q_i$, înțelegând prin P_i și Q_i determinanții care se pot forma din tablourile P și Q luând câte m coloane. Suma din partea dreaptă are C_n^m termeni.

26. 1. *Se consideră un sistem de trei axe perpendiculare în spațiu, în raport cu care se definește un nou triedru ale cărui axe au cosini directori* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$. *Să se calculeze determinantul*

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Deoarece $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ $(i=1,2,3)$ sunt cosini directori, va trebui să avem

$$\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2=1 \quad (i=1,2,3), \tag{1}$$

și deoarece noile axe sunt și ele perpendiculare,

$$\alpha_i\alpha_j+\beta_i\beta_j+\gamma_i\gamma_j=0 \quad (i\neq j=1,2,3). \tag{2}$$

Atât relația (1), cât și (2) reprezintă fiecare câte trei formule. Ridicând pe Δ la pătrat, avem

$$\Delta^2=\begin{vmatrix} \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2, & \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2, & \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3 \\ \alpha_2\alpha_1+\beta_2\beta_1+\gamma_2\gamma_1, & \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2, & \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3 \\ \alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1 & , \alpha_3\alpha_2+\beta_3\beta_2+\gamma_3\gamma_2, & \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2 \end{vmatrix},$$

determinant care în baza relațiilor (1) și (2) are valoarea

$$\Delta^2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1; \quad \Delta=\pm 1.$$

Observație. Dacă noul sistem de axe este la fel orientat cu cel vechi, acest determinant are valoarea $+1$; dacă are orientare inversă, determinantul are valoarea -1.

26. 2. *Știind că*

$$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=x_3^2+y_3^2=R^2,$$

$$x_1x_2+y_1y_2=R^2-\frac{1}{2}c^2, \quad x_2x_3+y_2y_3=R^2-\frac{1}{2}a^2, \quad x_3x_1+y_3y_1=R^2-\frac{1}{2}b^2,$$

se cere să se calculeze valoarea produsului

$$P=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & R \\ x_2 & y_2 & R \\ x_3 & y_3 & R \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & -R \\ x_2 & y_2 & -R \\ x_3 & y_3 & -R \end{vmatrix}.$$

Avem în baza relaţiilor din enunţ

$$P=\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2-R^2, & x_1x_2+y_1y_2-R^2, & x_1x_3+y_1y_3-R^2 \\ x_2x_1+y_2y_1-R^2, & x_2^2+y_2^2-R^2 & x_2x_3+y_2y_3-R^2 \\ x_3x_1+y_3y_1-R^2, & x_3x_2+y_3y_2-R^2, & x_3^2+y_3^2-R^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2}c^2 & -\frac{1}{2}b^2 \\ -\frac{1}{2}c^2 & 0 & -\frac{1}{2}a^2 \\ -\frac{1}{2}b^2 & -\frac{1}{2}a^2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}a^2b^2c^2.$$

26. 3. *Să se descompună în factori determinantul*

$$\Delta=\begin{vmatrix} (a+a')^2 & (a+b')^2 & (a+c')^2 \\ (b+a')^2 & (b+b')^2 & (b+c')^2 \\ (c+a')^2 & (c+b')^2 & (c+c')^2 \end{vmatrix}.$$

Avem

$$\Delta=\begin{vmatrix} a^2+2aa'+a'^2, & a^2+2ab'+b'^2, & a^2+2ac'+c'^2 \\ b^2+2ba'+a'^2, & b^2+2bb'+b'^2, & b^2+2bc'+c'^2 \\ c^2+2ca'+a'^2, & c^2+2cb'+b'^2, & c^2+2cc'+c'^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2a' & a'^2 \\ 1 & 2b' & b'^2 \\ 1 & 2c' & c'^2 \end{vmatrix}$$

şi cum ultimii doi determinanţi sunt determinanţi *Vandermonde*

$$\Delta=-2(a-b)(b-c)(c-a)(a'-b')(b'-c')(c'-a').$$

26. 4. *Să se calculeze determinantul circular*

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

In accst scop, considerăm determinantul

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sunt cele n rădăcini ale ecuaţiei binome

$$x^n-1=0.$$

Acest determinant este un determinent *Vandermonde* a cărui valoare o cunoaștem și care nu poate fi nulă decât dacă două din rădăcini ar fi egale, ceeace știm că nu se poate (prob. 22. 6). Deci $\Delta \neq 0$.

Punând

$$P(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1},$$

și ținând seama că $\alpha_i^n = 1$, avem

$$\begin{aligned}
P(\alpha_i) &= a_1 + a_2\alpha_i + a_3\alpha_i^2 + \cdots + a_{n-1}\alpha_i^{n-2} + a_n\alpha_i^{n-1},\\
\alpha_i P(\alpha_i) &= a_n + a_1\alpha_i + a_2\alpha_i^2 + \cdots + a_{n-2}\alpha_i^{n-2} + a_{n-1}\alpha_i^{n-1},\\
\alpha_i^2 P(\alpha_i) &= \beta_{n-1} + a_n\alpha_i + a_1\alpha_i^2 + \cdots + a_{n-3}\alpha_i^{n-2} + a_{n-2}\alpha_i^{n-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_i^{n-1} P(\alpha_i) &= a_2 + a_3\alpha_i + a_4\alpha_i^2 + \cdots + a_n\alpha_i^{n-2} + a_1\alpha_i^{n-1},
\end{aligned}$$

în baza cărora putem scrie

$$D\cdot\Delta = \begin{vmatrix}
P(\alpha_1) & P(\alpha_2) & P(\alpha_3) & \cdots & P(\alpha_n)\\
\alpha_1^{n-1}P(\alpha_1) & \alpha_2^{n-1}P(\alpha_2) & \alpha_3^{n-1}P(\alpha_3) & \cdots & \alpha_n^{n-1}P(\alpha_n)\\
\alpha_1^{n-2}P(\alpha_1) & \alpha_2^{n-2}P(\alpha_2) & \alpha_3^{n-2}P(\alpha_3) & \cdots & \alpha_n^{n-2}P(\alpha_n)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\alpha_1 P(\alpha_1) & \alpha_2 P(\alpha_2) & \alpha_3 P(\alpha_3) & \cdots & \alpha_n P(\alpha_n)
\end{vmatrix}$$

$$= P(\alpha_1)P(\alpha_2)\ldots P(\alpha_n)\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1\\
\alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1}\\
\alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \cdots & \alpha_n^{n-2}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n
\end{vmatrix}.$$

Ultimul determinant este tot Δ, numai că liniile sunt schimbate în coloane și apoi schimbate între ele. Pentru a-l aduce la aceeași formă, luăm linia a 2^a și o ducem ultima, adică facem $n-2$ schimbări; linia a 3^a (care după prima schimbare a devenit a 2^a) o ducem penultima, adică facem $n-3$ schimbări, etc. Vom face în total

$$(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1 = 1+2+\cdots+(n-2) = \frac{1}{2}(n-2)(n-1) \text{ schimbări.}$$

Simplificând ultima egalitate cu Δ care am văzut că este diferit de zero, ne rămâne

$$D = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} P(\alpha_1)P(\alpha_2)\cdots P(\alpha_n).$$

26. 5. *Să se calculeze determinantul*

$$D = \begin{vmatrix}
1 & 2 & 3 & \ldots & n\\
2 & 3 & 4 & \ldots & 1\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
n & 1 & 2 & \ldots & n-1
\end{vmatrix}.$$

Determinantul este un determinant circular. Conform prob. 3. 9 şi relaţiei $\alpha_i^n = 1$, avem

$$P(\alpha_i) = 1 + 2\alpha_i + \cdots + n\alpha_i^{n-1} = \frac{1-(n+1)\alpha_i^n + n\alpha_i^{n+1}}{(1-\alpha_i)^2} =$$

$$= \frac{1-(n+1)+n\alpha_i}{(1-\alpha_i)^2} = \frac{-n}{1-\alpha_i},$$

aceasta numai în cazul că $\alpha_i \neq 1$; în cazul rădăcinii $\alpha_n = 1$ (deoarece şi ca întră în calculele noastre)

$$P(1) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Inlocuind în rezultatul dela problema precedentă, avem

$$D = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \frac{1}{2} n(n+1) \frac{(-1)^{n-1} n^{n-1}}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_{n-1})},$$

dela numitor lipseşte rădăcina $\alpha_n = 1$. Dar, conform regulei de descompunere a unui polinom în factori,

$$x^n - 1 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1})(x-1);$$

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1}) = \frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1,$$

de unde reiese că dacă-l facem pe $x = 1$, partea stânga este egală că n nsfârşit deoarece: $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + n - 1 = \frac{1}{2} n(n-1)$.

$$D = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{1}{2} n(n-1)} (n+1) n^{n-1}.$$

26. 6. *Să se demonstreze egalitatea*

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1, & 1+x_1y_2, & \ldots, & 1+x_1y_m \\ 1+x_2y_1, & 1+x_2y_2, & \ldots, & 1+x_2y_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1+x_my_1, & 1+x_my_2, & \ldots, & 1+x_my_m \end{vmatrix} = 0. \quad (m>2).$$

Acest rezultat este imediat pe baza celor spuse la pct. 2, deoarece în cazul acesta $m > n = 2$.

§ 27. Sisteme normale

Un *sistem* de n ecuaţii cu n necunoscute

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n = b_1, \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n = b_2, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \cdots + a_n^n x_n = b_n, \end{cases} \tag{I}$$

se zice că este normal când *determinantul sistemului, D*, format cu coeficienții necunoscutelor este diferit de zero.

In acest caz, sistemul are *o singură soluție* definită prin formulele

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}\cdots x_n=\frac{D_n}{D}, \tag{II}$$

înțelegând prin D_k determinantul care se obține din D înlocuind coloana k (corespunzătoare necunoscutei x_k a cărei valoare o calculăm) cu termenii liberi b_1, b_2, ... b_n ai ecuațiilor sistemului.

27. 1. *Să se rezolve sistemul*

$$x+y+2z+3u=1,\quad 3x-y-z-2u=-4,\quad 2x+3y-z-u=$$
$$=-6,\quad x+2y+3z-u=-4.$$

Determinantul sistemului este

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & -1 & -2\\ 2 & 3 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-153\neq 0.$$

$$D_1=153,\quad D_2=153,\quad D_3=0,\quad D_4=-153$$

aplicând formulele II avem:

$$x=y=-1,\quad z=0,\quad u=1.$$

27. 2. *Să se rezolve sistemul*

$$x-ay+a^2z=a^3,\quad x-by+b^2z=b^3,\quad x-cy+c^2z=c^3,$$

a, b, c fiind trei numere diferite între ele.

Determinantul sistemului este

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -a & a^2\\ 1 & -b & b^2\\ 1 & -c & c^2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=-(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0,$$

în ipoteza făcută de problemă. Avem succesiv:

$$D_1=\begin{vmatrix} a^3 & -a & a^2\\ b^3 & -b & b^2\\ c^3 & -c & c^2 \end{vmatrix}=-abc\begin{vmatrix} a^2 & 1 & a\\ b^2 & 1 & b\\ c^2 & 1 & c \end{vmatrix}=abcD,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2\\ 1 & b^3 & b^2\\ 1 & c^3 & c^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2\\ 0 & b^3-a^3 & b^2-a^2\\ 0 & c^3-a^3 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} b^2+ab+a^2 & b+a\\ a+b+c & 1 \end{vmatrix}$$
$$=D(ab+bc+ca),$$

şi analog se găseşte

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -a & a^3 \\ 1 & -b & b^3 \\ 1 & -c & c^3 \end{vmatrix}=D(a+b+c),$$

încât

$$x=\frac{D_1}{D}=abc,\ y=\frac{D_2}{D}=ab+bc+ca,\ z=\frac{D_3}{D}=a+b+c.$$

27. 3. *Să se rezolve sistemul*

$$x+y+z=1,\quad ax+by+cz=\alpha,\quad a^2x+b^2y+c^2z=\alpha^2,$$

a, b, c fiind diferite între ele.

Determinantul sistemului este

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)\,(b-c)\,(c-a)\neq 0,$$

în ipotezele problemei: sistemul este normal. Toţi determinanţii care intră în calcule sunt de tip Vandermonde aşa încât se calculează imediat şi avem

$$x=\frac{(\alpha-b)\,(\alpha-c)}{(a-b)\,(a-c)},\quad y=\frac{(\alpha-c)\,(\alpha-a)}{(b-c)\,(b-a)},\quad z=\frac{(\alpha-a)\,(\alpha-b)}{(c-a)\,(c-b)}.$$

27. 4. *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{aligned} &x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n=1,\\ &x_1+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n=2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &x_1+x_2+\cdots+x_{n-2}+x_{n-1}=n. \end{aligned}$$

Pentru a ne da mai bine seamă de natura sistemului, este bine să punem $S=\sum_{k=1}^{n}x_k$. Cu ajutorul acestei notaţii, sistemul se scrie

$$S-x_1=1,\quad S-x_2=2,\ldots,S-x_n=n.$$

Adunând toate ecuaţiile sistemului, rezultă

$$(n-1)\,S=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n-1);\quad S=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}.$$

Inlocuind această valoare în sistem, avem

$$x_1=S-1=\frac{n^2-n+2}{2(n-1)},\quad x_2=S-2=\frac{n^2-3n+4}{2(n-1)},\ldots$$

$$x_k=S-k=\frac{n^2-(2k-1)n+2k}{2(n-1)},\ldots,\ x_n=S-n=\frac{n(3-n)}{2(n-1)}.$$

27. 5. *Să se rezolve sistemul*

$$x_1+C_n^1x_2+C_n^2x_3+\cdots+C_n^nx_{n+1}=C_n^1x_1+C_n^2x_2+C_n^3x_3+\cdots+C_n^nx_n+x_{n+1}=$$
$$=\cdots=C_n^nx+x_2+C_n^1x_3+\cdots+C_n^{n-1}x_{n+1}=2^n.$$

În problemă se ține să se pună în evidență importanța faptului că *un sistem normal are o soluție unică.*

Se vede din forma ecuațiilor, că dacă înlocuim

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=x_{n+1}=1, \tag{1}$$

atunci, abstracție făcând de ordinea termenilor, ecuațiile se reduc toate la identitatea

$$1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n.$$

Să demonstrăm că sistemul este normal, adică

$$D=\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^n \\ C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^n & 1 & C_n^1 & \dots & C_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

În adevăr, determinantul D este un determinant circular (prob. 26. 4). Pentru a-i găsi valoarea, calculăm mai întâi

$$P(\alpha_i)=1+C_n^1\alpha_i+C_n^2\alpha_i^2+\cdots+C_n^n\alpha_i^n=(1+\alpha_i)^n,$$

unde α_i este o rădăcină a ecuației (2) $x^{n+1}-1=0$. Aceasta înseamnă că

$$P(\alpha_1)P(\alpha_2)\dots P(\alpha_{n+1})=(1+\alpha_1)^n(1+\alpha_2)^n\dots(1+\alpha_{n+1})^n.$$

Dar, cum $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sunt rădăcini ale ecuației (2),

$$x^{n+1}-1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n+1}),$$

și făcând aci $x=-1$,

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_{n+1})=(-1)^{n+1}[(-1)^{n+1}-1]=1+(-1)^n.$$

Deci

$$D=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}[1+(-1)^n].$$

Această valoare a lui D ne spune că sistemul este normal numai dacă *n este cu soț*. În acest caz se poate afirma că sistemul are o singură soluție care este (1).

§ 28. Sisteme liniare oarecare

1. Să considerăm un sistem de m ecuații cu n necunoscute ($m \neq n$) de tipul celui considerat la paragraful precedent și pe care-l putem scrie condensat sub forma

$$a_i^1x_1+a_i^2x_2+\cdots+a_i^nx_n=b_i, \quad (i=1,2,\dots,m). \tag{I}$$

Se formează cu coeficienţii necunoscutelor o tabelă care, în general este dreptunghiulară (numai în cazul $m=n$ este pătratică). Începem prin a forma din această tabelă determinanţii de ordinul cel mai înalt posibil şi presupunem în general că toţi determinanţii formaţi cu liniile şi coloanele lui până la ordinul $p+1$ incluziv sunt nuli. Fie D unul din determinaţii (oarecare) de ordinul p diferit de zero, pe care-l numim *determinant principal*, şi presupunem că am aranjat necunoscutele şi ecuaţiile în aşa fel încât el să fie format cu coeficienţii primelor p necunoscute din primele p ecuaţii. Cu ajutorul lui facem toţi *determinanţii caracteristici*. Un determinant caracteristic se obţine în felul următor: mărginim determinantul principal cu încă o linie, luând una oarecare din ecuaţiile care nu intră în compunerea lui, şi luând din ea numai coeficienţii primelor p necunoscute, iar la dreapta mărginim determinantul principal cu o coloană formată din termenii liberi ai primelor p ecuaţii, complectată cu termenul liber al ecuaţiei alese pentru ultima linie. Din această regulă rezultă că determinanţii caracteristici sunt de ordinul $p+1$ şi în număr de $n-p$. Dacă unul din determinanţii cracteristici este diferit de zero, sistemul este *incompatibil*: dacă toţi determinanţii caracteristici sunt nuli, atunci sistemul este compatibil şi se mai numeşte *nedeterminat* având ∞^{n-p} soluţii *). Aceste soluţii se găsesc dând ultimelor $n-p$ necunoscute valori arbitrare şi rezolvând apoi sistemul format din primele p ecuaţii (celelalte sunt lăsate deoparte) după regula sistemelor normale.

Menţionăm că p trebue să fie mai mic sau cel mult egal cu cel mai mic dintre numerele n şi m.

In cazul compatibilităţii, ecuaţiile ai căror coeficienţi nu intră în formarea determinantului principal trebue să fie combinaţii liniare ale acestora. Se zice că sistemul este de *rang p*.

2. Se numeşte *sistem omogen* un *sistem* ai cărui termeni liberi sunt nuli. Un asemenea sistem se tratează după normele dela sistemele generale. In general un sistem omogen admite *soluţia banală* $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ şi problema se pune când sistemul mai admite şi altele. După forma acestor sisteme se vede că dacă avem o soluţie $x_1=a_1,\ldots,x_n=a_n$, atunci admite şi soluţia $x_1=ka_1,\ldots,x_n=ka_n$, unde k este un număr oarecare.

Cazul cel mai important este când sistemul are n ecuaţii, determinantul coeficienţilor este nul şi sistemul este de rangul $n-1$. In acest caz, una dintre ecuaţii poate fi lăsată deoparte, iar din tabela rămasă formăm determinanţii care se pot forma lăsând câte o coloană deoparte. Determinantul format lăsând coloana k deoparte îl notăm cu D_k; atunci

$$\frac{x_1}{D_1}=\frac{x_2}{-D_2}=\cdots=\frac{x_k}{(-1)^{k-1}D_k}=\cdots=\frac{x_n}{(-1)^{n-1}D_n}.$$

3. In general, un sistem de $n+1$ ecuaţii cu n necunoscute nu admite soluţii. Pentru a admite soluţii, o condiţie necesară este ca determinantul format cu toţi coeficienţii sistemului, implicit termenii liberi, să fie nul. Acest determinant se numeşte *eliminantul* sistemului.

*) Simbolul ∞^{n-p} reprezintă faptul că infinitudinea soluţiilor depinde de $n-p$ parametri.

28. 1. *Să se discute sistemul*

$$\begin{aligned} x+\ y-3z&=-1,\\ 2x+\ y-2z&=\ 1,\\ x+\ y+\ z&=\ 3,\\ x+2y-3z&=\ 1. \end{aligned}$$

Tabloul coeficienților necunoscutelor este

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{matrix} \right\|,$$

din care se extrage determinantul

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4\neq 0,$$

și care poate fi ales determinant principal. Singurul determinant caracteristic este

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-4\neq 0,$$

adică *sistemul este incompatibil.*

28. 2. *Să se discute sistemul*

$$\begin{aligned} 2x+\ y+\ z&=\ 2,\\ x+3y+\ z&=\ 5,\\ x+\ y+5z&=-7,\\ 2x+3y-3z&=\ 14. \end{aligned}$$

Privind sistemul, observăm ușor că, adunând primele două și scăzând pe a treia, obținem a patra ecuație, care din această cauză poate fi lăsată deoparte fiind o consecință a celorlalte. Sistemul format de ecuațiile rămase este normal, deoarece

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=22\neq 0.$$

Rezolvând sistemul mai departe, se găsește soluția unică

$$x=1,\quad y=2,\quad z=-2$$

28. 3. *Să se discute sistemul*

$$\begin{aligned} x+\ y+\ z+\ t&=\ 10,\\ x+\ y-\ z-2t&=-8,\\ 5x+5y-\ z-4t&=-4,\\ x+\ y+3z+4t&=\ 28. \end{aligned}$$

Determinantul coeficienţilor este

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

deoarece linia a treia este prima înmulţită cu doi şi adunată cu a doua înmulţită cu trei, iar ultima este la fel o combinaţie a primelor două. Rezultă de aici că toţi determinanţii de ordinul 3 care se pot forma sunt nuli. Luăm drept determinant principal determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Determinanţii caracteristici sunt

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & -8 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & -8 \\ 1 & 3 & 28 \end{vmatrix} = 0$$

deci sistemul este nedeterminat şi admite ∞^2 soluţii. Scriind primele două ecuaţii în aşa fel, încât determinantul principal să rămână determinantul coeficienţilor, avem

$$\begin{aligned} y+z &= 10-x-t,\\ y-z &= -8-x+2t, \end{aligned}$$

care ne dau $y=1-x+\frac{1}{2}t$, $z=9-\frac{3}{2}t$.

Observaţie. Se putea vedea dela început că ultimele două ecuaţii sunt combinaţii liniare ale primelor două.

28. 4. *Să se rezolve sistemul*

$$x+y+z=1, \quad x-y+3z=-1.$$

Cum determinantul coeficienţilor primelor două necunoscute este diferit de zero, scriem sistemul sub forma

$$x+y=1-z, \quad x-y=-1-3z,$$

care rezolvat dă: $x=-2z$, $y=1+z$, unde dând lui z valori particulare obţinem pentru x, y, ∞^1 soluţii.

28. 5. *Să se determine m astfel încât sistemul*

$$2x-3y-7=0, \quad 3x+2my-4=0, \quad mx-y-3=0,$$

să fie compatibil.

Deoarece determinanții de ordinul 2 care se pot face din tabela coeficienților nu sunt toți nuli în același timp, pentru ca sistemul să fie compatibil va trebui ca

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 2m & 4 \\ m & -1 & 3 \end{vmatrix} = -14(m^2-1)=0 \text{ adică } m=\pm 1.$$

Dacă $m=+1$ rezolvând sistemul format din primele două ecuații, găsim soluția $x=2$, $y=-1$; iar dacă $m=-1$ găsim : $x=-\frac{2}{5}$, $y=-\frac{13}{5}$.

28. 6. *Să se discute sistemul*

$$x+y=3, \quad x+2y=5, \quad 2x+y=4, \quad 2x+3y=1.$$

Alegem drept determinant principal pe cel format de coeficienții primelor două ecuații, adică

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0;$$

determinanții caracteristici sunt

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0,$$

deci *sistemul este incompatibil.*

28. 7. *Să se determine m în așa fel încât sistemul omogen*

$$x+y+mz-t=0, \quad 2x+y-z+t=0, \quad 3x-y-z-t=0, \quad mx-2y-2t=0,$$

să admită soluții nu toate nule.

Va trebui ca

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ m & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4(1-m)=0,$$

adică trebue să luăm $m=1$. Considerând primele trei ecuații ca trei ecuații cu necunoscutele x, y, z sistemul fiind normal, rezolvându-l se găsește

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{5} = \frac{t}{4},$$

adică : $x=2k$, $y=-3k$, $z=5k$, $t=4k$, k fiind un număr arbitrar.

28. 8. *Să se arate că dacă avem*

$$\left.\begin{aligned} a_1^2+a_2^2+a_3^2&=1, \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2&=1, \\ c_1^2+c_2^2+c_3^2&=1, \end{aligned}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{aligned} a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3&=0, \\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3&=0, \\ c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3&=0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

vom avea și

$$\left.\begin{aligned} a_1&=\epsilon(b_2c_3-b_3c_2), & a_2&=\epsilon(c_1b_3-c_3b_1), & a_3&=\epsilon(b_1c_2-b_2c_1), \\ b_1&=\epsilon(c_2a_3-c_3a_2), & b_2&=\epsilon(a_1c_3-a_3c_1), & b_3&=\epsilon(c_1a_2-c_2a_1), \\ c_1&=\epsilon(a_2b_3-a_3b_2), & c_2&=\epsilon(b_1a_3-b_3a_1), & c_3&=\epsilon(a_1b_2-a_2b_1), \end{aligned}\right\} \quad (\epsilon=\pm 1) \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} a_1^2+b_1^2+c_1^2&=1,\\ a_2^2+b_2^2+c_2^2&=1,\\ a_3^2+b_3^2+c_3^2&=1,\end{aligned}\right\} \quad (4) \qquad \left.\begin{aligned} a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2&=0,\\ a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3&=0,\\ a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1&=0.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Soluţia algebrică. Prima şi ultima relaţie din (2), privite ca două ecuaţii omogene în a_1, a_2, a_3, dau

$$\frac{a_1}{\begin{vmatrix} b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}} = \frac{a_2}{\begin{vmatrix} b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}} = \frac{a_3}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}} \quad \text{sau} \quad \frac{a_1}{b_2c_3-b_3c_2} = \frac{a_2}{c_1b_3-c_3b_1} = \frac{a_3}{b_1c_2-b_2c_1} = \epsilon.$$

Scoţând de aici valorile lui a_1, a_2, a_3 şi înlocuindu-le în prima din (1), avem

$$\epsilon^2\left[(b_2c_3-b_3c_2)^2+(c_1b_3-c_3b_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2\right]=1.$$

Dar, în baza identităţii lui Lagrange (prob. 4.2), paranteza mare este egală cu

$$(b_1^2+b_2^2+b_3^2)(c_1^2+c_2^2+c_3^2)-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)^2=1,$$

ţinând seama de (1) şi (2), încât $\epsilon^2=1$, şi deci, $\epsilon=\pm 1$. La fel se stabilesc celelalte relaţii (3). Rămâne însă o chestiune care trebue lămurită, şi anume că ϵ din toate formulele (3) este acelaşi. In adevăr, cu ajutorul lor avem

$$\begin{aligned} a_1^2+a_2^2+a_3^2=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3=1&=\epsilon\left[a_1(b_2c_3-b_3c_2)+\right.\\ &\left.+a_2(c_1b_3-c_3b_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\right]=\\ &=\epsilon\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_5\end{vmatrix}\epsilon\delta\,; \quad \epsilon=\frac{1}{\delta} \quad \text{(prob. 26.1)}\end{aligned}$$

Efectuând calculul pentru celelalte numere, găsim aceeaşi valoare; deci ϵ este acelaşi.

Pentru verificarea relaţiilor (4) şi (5) avem în mod analog

$$\begin{aligned} a_1^2+b_1^2+c_1^2&=\epsilon\left[a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-a_2c_3)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)\right]=\\ &=\epsilon\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\epsilon\delta=1, \text{ etc.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3&=\epsilon\left[a_1(c_2a_3-c_3a_2)+a_2(a_1c_3-a_3c_1)+a_3(c_1a_2-a_1c_2)\right]\\ &=-\epsilon\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=0,\end{aligned}$$

deoarece ultimul determinant are două linii identice.

Soluţia geometrică. Problema îşi are originea într'o problemă de Geometrie Analitică cu trei dimensiuni, şi anume în problema schimbării axelor de coordonate. Să presupunem că avem un sistem de axe tridreptunghice $Oxyz$ (fig. 18) în raport cu care ne dăm un nou triedru tridreptunghic $O'x'y'z'$ definit prin coordonatele noii origine O' precum şi prin

cosinii directori ai celor trei axe, fie $O'x'(a_1, a_2, a_3)$, $O'y'(b_1, b_2, b_3)$, $O'z'(c_1, c_2, c_3)$ (cu alte cuvinte prin coordonatele punctelor unitate ale acestor axe). Din definiția cosinilor directori rezultă că între cele două numere date $a_1, \ldots, c_3$ avem relațiile (1); deasemenea, cele trei axe fiind perpendiculare, două câte două, va trebui să avem relațiile (2).

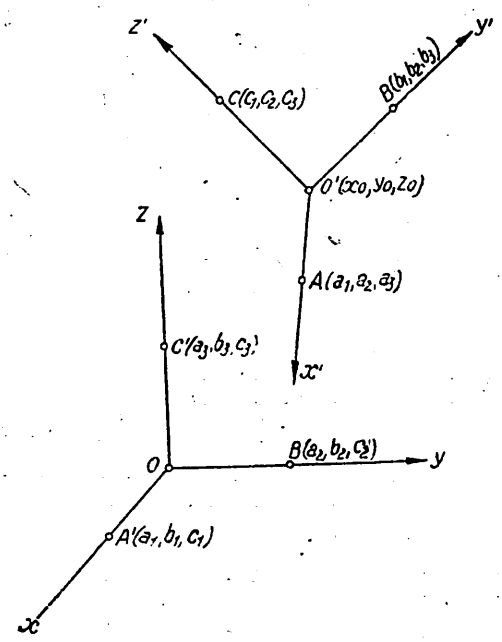


Fig. 18

Să privim problema altfel, și anume să presupunem că ni se dă triedrul $O'x'y'z'$ ca triedru fundamental, și în raport cu el ne definim triedrul $Oxyz$. Pentru aceasta, remarcăm că a_1 este cosinusul unghiului pe care-l face $O'x'$ cu Ox, b_1 cosinusul unghiului pe care-l face $O'y'$ cu Ox, și c_1 cosinusul unghiului pe care-l face $Q'z'$ cu Ox adică a_1, b_1, c_1, sunt cosini directori ai lui Ox față de triedrul $O'x'y'z'$. Analog Oy (a_2, b_2, c_2), Oz (a_3, b_3, c_3). Ținând seama de relația pe care o verifică cosinii directori avem relațiile (4); iar din relațiile (5) rezultă că axele triedrului $Oxyz$ sunt perpendiculare.

Stabilirea geometrică a relațiilor (3) este în fond aceeași ca cea dela soluția algebrică, deci numai insistăm asupra ei.

Numărul $\epsilon = \frac{1}{\delta}$ are o interpretare geometrică interesantă, și anume valoarea lui va fi $+1$ când triedrele sunt la fel orientate, și -1 în caz contrar. In adevăr, să presupunem că deplasăm triedrul $O'x'y'z'$ în mod continuu până când se confundă cu $Oxyz$. Valoarea lui ϵ va rămâne aceași, deoarece nu depinde de $a_1, \ldots, c_3$ fiind mereu egală cu $+1$ sau -1; în momentul când se confundă cu triedrul inițial, valorile cosinilor directori vor fi (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), dacă cele două triedre sunt la fel orientate, sau (1,0,0), (0,1,0), (0,0, -1) în caz contrar.

Deci, în primul caz

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad \epsilon = 1,$$

iar în al doilea $\delta = -1$ și deci $\epsilon = -1$.

§ 29. Eliminări. Rădăcini comune a două ecuații

1. In general un sistem de $n+1$ ecuații cu n necunoscute (necunoscutele întră la orice puteri), nu este compatibil. Sistemul va fi compatibil atunci când,

eliminând cele n necunoscute între cele $n+1$ ecuații ale sistemului, obținem o ecuație, numită *eliminantul* sistemului și care este îndeplinită identic. Noi vom considera în cele ce urmează, cazul care se ivește cel mai des, și anume cazul a două ecuații cu o necunoscută; metodele sunt însă generale.

2. **Metoda prin funcții simetrice.** Fiind date două ecuații

$$P(x)=0. \text{ și } Q(x)=0,$$

și dacă notăm cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile primei ecuații, eliminantul lor este

$$P=Q(x_1)\,Q(x_2)\ldots Q(x_n)=0, \tag{1}$$

sau, dacă notăm cu $x_1', x_2', \ldots, x_m'$ rădăcinile celei de a doua ecuației, atunci

$$P=(-1)^{mn}P(x_1')\,P(x_2')\ldots P(x_m')=0. \tag{1'}$$

Ne dăm seama imediat că eliminantul P este o funcție simetrică atât în rădăcinile primei ecuații, cât și în raport cu rădăcinile celei de a două ecuații. Calculul lui se face cu ajutorul relațiilor dintre rădăcini și coeficienți (§ 16).

3. **Metoda celui mai mare divizor comun.** Se caută c. m. m. c. d. între $P(x)$ și $Q(x)$ și fie R_n restul final. Eliminantul ecuațiilor este

$$R_n=0. \tag{III}$$

4. **Metoda lui Sylvester.** Această metodă constă în a scrie că sistemul liniar format de ecuațiile

$$\begin{aligned} &x^{m-1}P(x)=0,\ x^{m-2}P(x)=0,\ldots,xP(x)=0,\ P(x)=0,\\ &x^{n-1}Q(x)=0,\ x^{n-2}Q(x)=0,\ldots,xQ(x)=0,\ Q(x)=0, \end{aligned} \tag{III}$$

în număr de $m+n$ ecuații cu necunoscutele $x^{m+n-1}, x^{m+n-2}, \ldots, x^2, x, 1$, este compatibil; se obține un determinant care trebue să fie nul și care reprezintă eliminantul ecuațiilor date.

29. 1. *Să se elimine x între ecuațiile*

$$ax^2+bx+c=0,\ a'x^2+b'x+c'=0.$$

Punem $x^2=y$; cele două ecuații se transformă în sistemul

$$bx+ay+c=0,\ b'x+a'y+c'=0,$$

care rezolvat în raport cu x și y dă

$$x=\frac{a'c-ac'}{ab'-ba'},\ y=\frac{bc'-b'c}{ab'-ba'},$$

și ținând seama de relația dintre x și y se obține eliminantul

$$(a'c-ac')^2=(ab'-ba')(bc'-b'c). \tag{1}$$

Observație. Dacă: $ab'-a'b=0$, calculul de mai sus nu mai este valabil; atunci este necesar (tratând sistemul după normele dela paragraful precedent) ca și: $a'c-ac'=0$ (în ipoteza că a sau $a'\neq 0$). Aceste două condiții trebuind să aibă loc simultan, sunt cuprinse în condiția precedentă. Dacă $a=0$ și $a'=0$ eliminarea se face direct și rezultatul este

$$bc'-cb'=0. \tag{2}$$

29. 2. *Să se determine m astfel încât ecuațiile*

$$x^2+mx+2=0,\ x^2+2x+m=0,$$

să aibă o rădăcină comună, și apoi să se rezolve.

Conform problemei precedente, va trebui ca

$$(2-m)^2=(2-m)(m^2-4);\ m=2 \text{ sau } m=-3.$$

Dacă $m=2$, cele două ecuații se reduc la una singură, deci au ambele rădăcini comune egale cu $x_{1,2}=-1\pm i$. Dacă $m=-3$, ecuațiile au drept rădăcini (1,2) și (1,−3) deci au rădăcina comună $x=1$.

29. 3. *Să se găsească condiția ca ecuațiile*

$$x^3+px+q=0,\ x^3+p'x+q'=0,$$

să aibă rădăcini comune.

Vom proceda prin metoda funcțiilor simetrice. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile primei ecuații. Dacă notăm cu $Q(x)$ al doilea polinom, și dacă ținem seamă că x_i verifică prima ecuație,

$$Q(x_i)=x_i^3+p'x_i+q'=-px_i-q+p'x_i+q'=(p'-p)x_i+(q'-q),$$

adică eliminantul este

$$[(p'-p)x_1+(q'-q)][(p'-p)x_2+(q'-q)][(p'-p)x_3+(q'-q)]=0,$$

sau

$$\left(x_1+\frac{q'-q}{p'-p}\right)\left(x_2+\frac{q'-q}{p'-p}\right)\left(x_3+\frac{q'-q}{p'-p}\right)=0.$$

Dar

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3+px+q,$$

încât eliminantul va fi

$$-\left(\frac{q'-q}{p'-p}\right)^3-p\,\frac{q'-q}{p'-p}+q=0;\ (q'-q)^3=(p'-p)^2(qp'-pq').$$

29. 4. *Una din rădăcinile ecuației*

$$x^3-3x^2-6x+8=0, \tag{1}$$

este egală cu pătratul altei rădăcini. Să se rezolve această ecuație.

Cu ocazia rezolvării prob. 16.6 am arătat cum se găsește ecuația care are ca rădăcini pătratele rădăcinilor unei ecuații. In cazul nostru, scriem ecuația sub forma

$$x(x^2-6)=3x^2-8,$$

care ridicată la pătrat și înlocuind pe x^2 cu x se găsește că ecuația care are ca rădăcini pătratele rădăcinilor ecuației date este

$$x(x-6)^2=(3x-8)^2;\ x^3-21x^2+84x-64=0. \tag{2}$$

In baza afirmațiilor din enunț, ecuațiile (1) și (2) trebue să aibă o rădăcină comună. Dacă există o asemenea rădăcină, atunci ea trebue să verifice și ecuația care se obține scăzând cele două ecuații, adică ecuația

$$x^2-5x+4=0,$$

care are drept rădăcini pe 1 și 4. Numai ultima verifică ambele ecuații. Deci o rădăcină este $x_1=4$. Cealaltă trebue să fie $\pm.2$; numai $x_2=-2$ verifică ecuația (1). Pentru a găsi a treia rădăcină, observăm că suma tuturor trebue să fie 3, încât $x_3=1$.

Observație. Metoda aceasta poate fi totdeauna folosită cu succes când avem o relație între două rădăcini ale unei ecuații care se cere rezolvată.

29. 5. *Să se elimine x între ecuațiile*

$$x^3+mx^2-4=0,\ x^3+mx+2=0.$$

Vom proceda prin metoda c.m.m.c.d. Impărțind primul polinom prin al doilea, obținem resturile succesive

$$R_1(x)=mx^2-mx-6,\ R_2(x)=(m^2+m+6)x+2(m+3),$$

$$R_3=3(m^2+m+6)^2-m(m+3)(m^2+3m+12)=2(m^4+9m^2+54),=0.$$

Dacă am căuta să vedem pentru ce valori ale lui m ecuațiile au o rădăcină comună, condiția ar fi $R_3=0$, ecuația care ne dă valori reale pentru m. Avem însă patru valori imaginare, conjugate două câte două.

29. 6. *Să se elimine t între ecuațiile*

$$x=\frac{t(1+t^2)}{1+t^4},\ y=\frac{t(1-t^2)}{1+t^4}.$$

Calculăm

$$x^2+y^2=\frac{2t^2}{1+t^4},\ x^2-y^2=\frac{4t^4}{(1+t^4)^2},$$

de unde se vede că rezultatul eliminării este

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2. \qquad (1)$$

Dacă x și y reprezintă coordonatele unui punct din plan, ecuațiile date reprezintă parametric o curbă a cărei ecuație carteziană este (1).

29. 7. *Se dă:* $\operatorname{tg}3\alpha=a$; *să se formeze ecuațiile care dau pe* $\operatorname{tg}2\alpha$ *și* $\operatorname{cotg}2\alpha$; *să se determine a astfel ca cele două ecuații să aibă o rădăcină comună.*

Punem pentru prescurtare; $\operatorname{tg}\alpha=x$, $\operatorname{tg}2\alpha=u$. Folosind formula care dă pe $\operatorname{tg}3\alpha$ în funcție de $\operatorname{tg}\alpha$ (§ 20, *V'*) se găsește că x este dat de ecuația

$$a=\frac{3x-x^3}{1-3x^2};\ x^3-3ax^2-3x+a=0. \qquad (1)$$

Valoarea găsită pentru x de aici va trebui să fie întrodusă apoi în ecuația

$$u=\frac{2x}{1-x^2};\ ux^2+2x-u=0. \qquad (2)$$

In fond, problema revine la a elimina pe x între ecuațiile (1) și (2). Rezultatul eliminării este determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & -3a & -3 & a & 0 \\ 0 & 1 & -3a & -3 & a \\ u & 2 & -u & 0 & 0 \\ 0 & u & 2 & -u & 0 \\ 0 & 0 & u & 2 & -u \end{vmatrix}=0,$$

care desvoltat dă

$$(1-a^2)u^3-6au^2-3(1-a^2)u+2a=0. \quad (3)$$

Ecuația care dă pe $\operatorname{cotg} 2\alpha=\frac{1}{u}$ va fi

$$2au^3-3(1-a^2)u^2-6au+(1-a^2)=0. \quad (4)$$

Pentru a elimina pe u între ecuațiile (3) și (4) observăm că ele se pot scrie sub forma

$$(1-a^2)(u^3-3u)-2a(3u^2-1)=0,$$
$$2a(u^3-3u)-(1-a^2)(3u^2-1)=0.$$

Aceste două ecuații sunt omogene în expresiile: $u^3-3u=A$, $3u^2-1=B$, deoarece se scriu

$$(1-a^2)A-2aB=0, \quad 2aA-(1-a^2)B=0. \quad (5)$$

Or, un asemenea sistem poate admite soluția banală

$$A=u^3-3u=0, \quad B=3u^2-1=0. \quad (6)$$

sau, pentru a admite și alte soluții, este necesar ca

$$\begin{vmatrix} 1-a^2 & -2a \\ 2a & -(1-a^2) \end{vmatrix}=0. \quad (7)$$

Sistemul (5) nu are soluții comune, cum ușor se vede rezolvând una din ecuații și înlocuind în cealaltă. Condiția (7) spune că

$$(1-a^2)^2-4a^2=0; \quad a^2\pm 2a-1=0,$$

care dă pentru a valorile; $a=\pm 1\pm\sqrt{2}$. In cazul acesta, ecuațiile (5) se reduc una la alta, adică ecuațiile (3) și (4) se reduc la una singură; deci au toate rădăcinile comune. Aceste rădăcini sunt date de ecuațiile

$$\frac{u^3-3u}{3u^2-1}=\frac{2a}{1-a^2}=\pm 1.$$

§ 30. Rezolvarea sistemelor de ecuații de un grad oarecare

Fiind date două ecuații cu două necunoscute

$$P(x,y)=0, \quad Q(x,y)=0,$$

respectiv de gradul m și n; a rezolva sistemul format de ele revine la a găsi perechi de numere (x,y) care să le verifice în același timp. Pentru a le rezolva efectiv se elimină una din necunoscute (cu care se pot efectua calcule mai simple); eliminantul obținut este o ecuație într'o singură necunoscută. Valorile acestei necunoscute introduse într'una din ecuațiile date dă valorile celeilalte. Sistemul admite în general mn soluții, acest produs reprezentând maximul numărului lor.

30. 1. *Să se rezolve sistemul de ecuații*

$$5(x^2-y^2)-3x+9y=0, \quad 5(x^3+y^3)-15x^2-13xy-y^2=0.$$

Ordonând ecuațiile după puterile lui x, ele se scriu

$$\begin{cases} 5x^2-3x+(-5y^2+9y)=0, \\ 5x^3-15x^2-13yx+(5y^3-y^2)=0. \end{cases}$$

Inmulțind prima ecuație cu x și scăzând-o din a doua, sistemul poate fi înlocuit cu

$$\begin{cases} 5x^2-3x-y(5y-9)=0, \\ 12x^2-y(5y-22)x-y^2(5y-1)=0. \end{cases}$$

Eliminând între aceste două ecuații pe x vom găsi o ecuație numai în y. Acest lucru îl vom face folosind eliminantul (1) dela prob. 29. 1; găsim,

$$150y^2(25y^3-88y^2+13y+126)=0.$$

Paranteza are o rădăcină $y=-1$; toate rădăcinile ecuației precedente sunt

$$y_1=0,\ y_2=-1,\ y_3=2,\ y_4=\frac{63}{25}.$$

Inlocuind aceste valori în sistemul dat, găsim că x trebue să fie o rădăcină comună a ecuațiilor

1°	$5x^2-3x=0,$	$5x^3-15x^2=0$	$(x_1=y_1=0)$
2°	$5x^2-3x-14=0,$	$5x^3-15x^2+13x-6=0$	$(x_2=2, y_2=-1)$
3°	$5x^2-3x-2=0,$	$5x^3-15x^2-26x+36=0$	$(x_3=1, y_3=2)$
4°	$625x^2-375x-1134=0,$	$15625x^3-46875x^2-61425x+230202=0$	

$$\left(x_4=\frac{42}{25},\ y_4=\frac{63}{25}\right)$$

30. 2. *Să se rezolve sistemul*

$$2x^2+3y^2=6a^2+b^2,\quad 3y^2+2xy=b^2+2ab.$$

Scoatem pe x din a doua ecuație și-l introducem în prima. Obținem ecuația în y

$$15y^4-4(3a^2+2b^2+3ab)y^2+(b^2+2ab)^2=0.$$

Această ecuație bipătrată rezolvată dă

$$y^2=\frac{2(3a^2+2b^2+3ab)\pm\sqrt{4(3a^2+2b^2+3ab)^2-15(b^2+2ab)^2}}{15}$$

sau

$$y^2=\frac{2(3a^2+2b^2+3ab)\pm(6a^2+6ab-b)^2}{15},$$

de unde rezultă

$$y_{1,2}=\pm\frac{(2a+b)\sqrt{5}}{5},\quad y_{3,4}=\pm\frac{b\sqrt{3}}{3}.$$

Inlocuind aceste valori în a doua ecuație rezultă

$$x_{1,2}=\pm\frac{(b-3a)\sqrt{5}}{5},\quad x_{3,4}=\pm a\sqrt{3},$$

semnele corespunzându-se. Problema are *patru* soluții.

30. 3. *Să se găsească soluțiile reale ale sistemului:*

$$x^4+y^3=0, \quad 8xy+15y-7=0.$$

Punem: $y=tx$. Sistemul devine

$$x+t^3=0, \quad 8tx+15t-7x=0,$$

lăsând deoparte soluția evidentă ($x_1=0$, $y_1=0$). Eliminând pe x,

$$8t^4-15t+7=0.$$

O rădăcină este $t=1$ și ecuația se scrie

$$(t-1)(8t^3+8t^2+8t-7)=0.$$

Paranteza are deasemenea rădăcina $t=\frac{1}{2}$ deci

$$(t-1)(2t-1)(4t^2+6t+7)=0.$$

Cum paranteza are rădăcini imaginare, vom lua, pe lângă soluția de mai sus,

$$t=1 \cdots x_2=-1, \quad y_2=-1$$

$$t=\frac{1}{2} \cdots x_3=-\frac{1}{8}, y_3=-\frac{1}{16}.$$

Problema admite *trei* soluții reale.

30. 4. *Să se găsească rădăcinile imaginare ale ecuației*

$$x^4-6x^3+23x^2-34x+26=0. \tag{1}$$

Punem: $x=\alpha+i\beta$, α și β fiind presupuși reali. Ecuația devine $(\alpha^4-6\alpha^2\beta^2+$ $+\beta^4-6\alpha^3+18\alpha\beta^2+23\alpha^2-23\beta^2-34\alpha+26)+$

$$+i(4\alpha^3\beta-4\alpha\beta^3-18\alpha^2\beta+6\beta^3+46\alpha\beta-34\beta)=0,$$

încât va trebui să avem separat

$$\begin{cases} \alpha^4-6\alpha^2\beta^2+\beta^4-6\alpha^3+18\alpha\beta^2+23\alpha^2-23\beta^2-34\alpha+26=0, \\ 2\alpha^3-2\alpha\beta^2-9\alpha^2+3\beta^2+23\alpha-17=0. \end{cases} \tag{2}$$

La ecuația a doua am lăsat deoparte factorul β care anulat duce la eventuale rădăcini reale care nu ne interesează. Aceste ecuații nu conțin decât puteri cu soț ale lui β, ceeace era de așteptat, deoarece ecuația trebuind să aibă rădăcini imaginare conjugate, dacă β este o soluție, și $-\beta$ trebue să fie soluție. Punem $\beta^2=\gamma$ și ordonând după γ, se obține

$$\begin{cases} \gamma^2-(6\alpha^2-18\alpha+23)\gamma+(\alpha^4-6\alpha^3+23\alpha^2-34\alpha+26)=0, \\ -(2\alpha-3)\gamma+(2\alpha^3-9\alpha^2+23\alpha-17)=0. \end{cases} \tag{3}$$

Între aceste ecuații este ușor de eliminat γ, scoțându-i valoarea din ultima ecuație și înlocuind-o în prima. Găsim

$$(2\alpha^3-9\alpha^2+23\alpha-17)^2-(2\alpha-3)(6\alpha^2-18\alpha+23)(2\alpha^3-9\alpha^2+23\alpha-17)+$$
$$+(2\alpha-3)^2(\alpha^4-6\alpha^3+23\alpha^2-34\alpha+26)=0,$$

care desvoltată este

$$16\alpha^6-144\alpha^5+616\alpha^4-1536\alpha^3+2285\alpha^2-1887\alpha+650=0.$$

Nu ne vor interesa decât rădăcinile reale ale acestei ecuații. Inainte de a trece la rezolvare, să facem o observație. Unei rădăcini reale a acestei ecuații, îi corespund două rădăcini conjugate ale ecuației date. Aceasta însemnează că (4) nu poate avea decât cel mult două rădăcini reale, în consecință are sigur patru imaginare. Cum ecuația (4) este de grad cu soț, ea va avea două rădăcini reale, adică ecuația dată are toate rădăcinile imaginare. Observăm că ecuația (4) are rădăcinile $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$. Pentru aceste valori, a doua ecuație din (3) dă

$$\gamma_1=\beta_1^2=1, \quad \gamma_2=\beta_2^2=9.$$

Ecuația (1) are rădăcinile imaginare

$$x_{1,2}=1\pm i, \quad x_{3,4}=2\pm 3i.$$

30. 5. *Să se determine m astfel ca sistemul*

$$x+y+z=2, \quad x-y+z=0,$$
$$2x+3y-2z=m, \quad x^2+y^2+z^2+2m=0,$$

să fie compatibil.

Primele trei ecuații formează un sistem normal. Rezolvându-l, se găsește soluția

$$x=\frac{1}{4}(m-1), \quad y=1, \quad z=\frac{1}{4}(5-m).$$

Pentru ca sistemul să fie compatibil, este necesar ca

$$\frac{1}{16}(m-1)^2+1+\frac{1}{16}(5-m)^2+2m=0; \quad m^2+10m+21=0,$$

ecuație care dă $m_1=-3$, $m_2=-7$.

PARTEA A DOUA

CALCULUL DIFERENȚIAL

CAPITOLUL V

LIMITE. SERII

§ 31. Exemple de limite

Fiind dat un şir de numere

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

se zice că a_n este *termenul general* al şirului deoarece dacă în expresia lui se înlocueşte n prin $1, 2, \ldots$ obţinem toţi *termeni* şirului. Când vom vorbi de şirul dat, ne vom exprima pe scurt prin *şirul cu termenul general* a_n sau *şirul* a_n.

Un şir se numeşte *monoton descrescător* când între termenii lui avem inegalităţile

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq \ldots,$$

şi *monoton crescător* când

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots$$

In particular avem *şirurile descrescătoare* şi *crescătoare* care se obţin din acestea lăsând deoparte semnele egale.

Se zice că şirul a_n are o limită A când n tinde către infinit, atunci când unui număr ϵ arbitrar de mic, putem face să-i corespundă un rang N, astfel ca pentru toate valorile lui $n > N$ să avem

$$|a_n - A| < \epsilon. \qquad (I)$$

Se mai zice că un asemenea şir este *convergent*. Acest lucru se va scrie prescurtat: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, şi se citeşte: *$a_n$ tinde către A, când n tinde către infinit.*

Dacă fiind dat un număr M, oricât de mare voim, putem determina un rang N astfel ca pentru toate valorile lui $n > N$ să avem

$$a_n > M, \qquad (II)$$

zicem că a_n *tinde către infinit*, sau că a_n *are drept limită pe infinit*. Dacă a_n este negativ, se zice că tinde către $-\infty$.

Inegalitatea (I) se poate scrie sub forma de dublă inegalitate

$$A - \epsilon < a_n < A + \epsilon \qquad (n > N) \qquad (III)$$

care ne spune că dacă reprezentăm pe o axă termenii şirului (fig. 19) condiţia (I) arată că începând dela rangul N toţi termenii şirului se găsesc cuprinşi pe segmentul $(A-\epsilon, A+\epsilon)$.

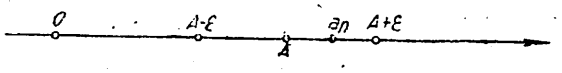


Fig. 19

Plecând dela reprezentarea geometrică, se obişnueşte să se spună că A este *punctul limită* al şirului.

Dăm mai jos câteva **teoreme** care folosesc la găsirea limitelor şirurilor.

1. Un şir monoton descrescător şi mărginit inferior are o limită. La fel, un şir monoton crescător mărginit superior are o limită.

2. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n, \tag{IV}$$

teorema fiind adevărată mai general pentru un număr finit de şiruri.

3. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n, \tag{V}$$

teorema fiind iarăşi adevărată dacă în prima parte avem produsul unui număr finit de şiruri.

4. Dacă: $\lim_{n\to\infty} b_n\neq 0$, avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}. \tag{VI}$$

5. Teoremele 2—4 au nevoie de următoarele complectări:

a) limita unei sume este infinit, când unul din termeni tinde către infinit ceilalţi termeni fiind finiţi;

b) limita unui produs este infinit când unul din factori tinde către infinit (ceilalţi factori fiind finiţi şi diferiţi de zero);

c) limita unui cât, al cărui numărător tinde către infinit, şi al cărui numitor are o limită finită, este infinit;

d) limita unui cât, al cărui numitor tinde către infinit şi al cărui numărător are o limită finită, este zero;

e) limita unui cât este infinit când numărătorul are o limită finită (sau tinde către infinit), iar numitorul tinde către zero.

6. Dacă p şi q sunt numere fixe, avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_0n^p+A_1n^{p-1}+\cdots+A_p}{B_0n^q+B_1n^{q-1}+\cdots+B_q}=\begin{cases}0 & \text{dacă } p<q,\\ A_0:B_0 & \text{„ } p=q,\\ \pm\infty & \text{„ } p>q,\end{cases} \tag{VII}$$

în ultimul caz semnul fiind dat de $\frac{A_0}{B_0}$.

7. Când n tinde către infinit, şirul cu termenul general *) $a_n=a^n$, sau mai pe scurt a^n (a pozitiv) tinde către zero dacă $a<1$ şi către infinit când $a>1$.

*) In stânga n este indice, iar în dreapta, putere.

8. Când n tinde către infinit $a^n (a>1)$ tinde mai repede către infinit decât n^p, p fiind un număr pozitiv.

9. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \tag{VIII}$$

x, fiind un număr oarecare real.

10. Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sin a_n} = 1. \tag{IX}$$

11. **Teorema lui Cesaro.** Dacă: $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty\ (b_{n+1} \neq b_n)$ şi dacă raportul

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}, \tag{X}$$

are o limită, atunci şi raportul $\frac{a_n}{b_n}$ are aceeaşi limită când n tinde către infinit (asupra şirului a_n nu se face nicio ipoteză).

12. **Definiţia numerelor iraţionale.** Pentru a defini un număr iraţional (incomensurabil) pornim dela aproximarea lui prin numere raţionale. Fie a_1 şi b_1 două numere întregi între care se cuprinde numărul iraţional α; a_2 şi b_2 valoarea cu o zecimală exactă prin lipsă şi prin exces; a_3 şi b_3 valoarea cu două zecimale exacte prin lipsă şi exces, etc. In felul acesta, se construesc două şiruri

$$\left.\begin{aligned} &a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots, \leq a_n \leq \cdots, \\ &b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots, \geq b_n \geq \ldots, \end{aligned}\right\} \quad (a_n - b_n) = \frac{1}{10^n}, \tag{XI}$$

care, conform proprietăţii pct. 1 au o limită comună şi care, prin definiţie, este numărul iraţional α.

Operaţiile cu numerele iraţionale se definesc cu ajutorul operaţiilor asupra şirurilor.

13. Am definit la § 9 ce se înţelege prin $a^x (a>0)$ când x este un număr raţional pozitiv sau negativ. Suntem acum în măsură să definim ce se înţelege prin acest număr când x este iraţional. Formăm şirurile (XI) care definesc pe x; prin definiţie vom înţelege prin a^x limita comună a şirurilor.

$$\left.\begin{aligned} &a^{a_1} \leq a^{a_2} \leq a^{a_3} \leq \ldots \leq a^{a_n} \leq \ldots, \\ &a^{b_1} \geq a^{b_2} \geq a^{b_3} \geq \ldots \geq a^{b_n} \geq \ldots. \end{aligned}\right\} \tag{XII}$$

14. Se pot concepe şiruri mai generale, după cum vom vedea, ai căror termeni să aibă mai multe *limite*, sau, cum se mai spune avându-se în vedere imagina geometrică, mai multe *puncte limită*. Asemenea şiruri nu se întâlnesc în tehnică, deaceea nu le vom da o importanţă prea mare.

31. 1. *a fiind un număr pozitiv, să se arate că şirul*

$$a_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}},$$

numărul radicalilor suprapuşi fiind n, are o limită. Se cere să se determine această limită.

1^0 a_n creşte, deoarece a_{n+1} se găseşte din el adăugindu-i la ultimul radical pe $\sqrt{a}$. 2^0 Să arătăm că este mărginit superior. Avem

$$a_n^2 = a + \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}} = a + a_{n-1};$$

cum am arătat că $a_{n-1} < a_n$, rezultă că

$$a_n^2 < a + a_n; \quad a_n^2 - a_n - a < 0.$$

Pentru ca această inegalitate să fie satisfăcută, trebue ca a_n să rămână cuprins între rădăcini; în particular este mai mic decât cea mai mare rădăcină: deci, mărginit. 3^0 Şirul are o limită; fie: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = \alpha$. Dar, am arătat mai sus că: $a_n^2 = a + a_{n-1}$, şi luând limita în ambele părţi rezultă

$$\alpha^2 - \alpha - a = 0; \quad \alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4a}).$$

Semnul — din faţa radicalului a fost lăsat deoparte, dând pentru α o valoare negativă, ceeace este absurd, căci toţi termenii şirului sunt pozitivi.

31. 2. *Să se demonstreze că şirul*

$$a_n = \cos^n \frac{x}{n},$$

are drept limită pe 1, *x fiind un arc pozitiv şi mai mic decât* $\frac{1}{2}\pi$.

Cum sinusul este intotdeauna mai mic (afară de cazul când arcul este nul) decât arcul subînţeles, avem inegalitatea

$$\sin \frac{x}{2n} \leqq \frac{x}{2n},$$

care ridicată la pătrat (lucru posibil căci în primul cadran ambele părţi sunt pozitive) ne dă

$$\sin^2 \frac{x}{2n} \leqq \frac{x}{4n^2} \text{ de unde } 1 - \cos^2 \frac{x}{2n} \leqq \frac{x^2}{2n^2} \text{ căci } \frac{x^2}{4n^2} < \frac{x^2}{2n^2},$$

Dar

$$1 - \cos^2 \frac{x}{2n} = 1 - \cos^2 \frac{x}{n} + \sin^2 \frac{x}{n} = \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right)\left(1 + \cos \frac{x}{n}\right) + \sin^2 \frac{x}{n} \leqq \frac{x^2}{2n^2}$$

sau suprimând factorul pozitiv

$$\left(1 + \cos \frac{x}{n}\right) > 1 \text{ şi pe } \sin^2 \frac{x}{n} \text{ rămâne } 1 - \cos \frac{x}{n} < \frac{x^2}{2n^2}.$$

care înmulţită în membrul I cu $\cos \frac{x}{n} \leqq 1$, dă

$$\cos \frac{x}{n} - \cos^2 \frac{x}{n} \leqq \frac{x^2}{2n^2},$$

care înmulţită din nou cu precedenta etc., obţinem şirul de inegalităţi:

$$1-\cos\frac{x}{n}\leq\frac{x^2}{2n^2},\ \cos\frac{x}{n}-\cos^2\frac{x}{n}\leq\frac{x^2}{2n^2},\ldots,\cos^{n-1}\frac{x}{n}-\cos^n\frac{x}{n}\leq\frac{x^2}{2n^2},$$

care adunate parte cu parte ne dau

$$1-\cos^n\frac{x}{n}\leq n\frac{x^2}{2n^2};$$

adică

$$a_n\geq 1-\frac{x}{2n^2}.$$

Dar evident că $a_n\leq 1$. Incât

$$1\geq a_n\geq 1-\frac{x^2}{2n^2}.$$

Când n creşte către infinit $\frac{x^2}{2n^2}$ tinde către zero, deci: $\lim_{n\to\infty} a_n=1$.

31. 3. *Să se găsească punctele limită ale şirului de numere*

$$a_n=a^{(-1)^{n+1}}+\frac{1}{n}.$$

Şirul explicit este

$$a+1,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{2},\ a+\frac{1}{3},\ \frac{1}{a}+\frac{1}{4},\ldots,\ a+\frac{1}{2p-1},\ \frac{1}{a}+\frac{1}{2p},\ldots$$

Termenii şirului se despart în două grupe, după paritatea rangului lor şi anume

$$a+1,\ a+\frac{1}{3},\ a+\frac{1}{5},\ldots,\ a+\frac{1}{2p-1},\ldots,$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{2},\ \frac{1}{a}+\frac{1}{4},\ \frac{1}{a}+\frac{1}{6},\ldots,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{2p},\ldots;$$

primii termeni au drept punct limită pe a, iar cei din grupa a doua au drept punct limită pe $\frac{1}{a}$. Dacă $a=1$, şirul are un singur punct limită, pe 1.

31. 4. *Se consideră şirul a_n definit prin relaţia de recurenţă $a_n=aa_{n-1}+b$. Să se găsească expresia lui a_n în funcţie de a; b şi a_0 (primul termen). In ce caz a_n are o limită când n tinde către infinit?*

Facem în relaţia dată pe n egal cu $1,2,\ldots,n$. Găsim

$$a_1=aa_0+b,\ \ a_2=aa_1+b,\ldots,a_n=aa_{n-1}+b;$$

înmulţim prima cu a^{n-1}, a doua cu $a^{n-2},\ldots$, penultima cu a şi adunăm; făcând reducerile ne rămâne

$$a_n=a^na_0+b(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1);\ \ a_n=a^na_0+b\frac{a^n-1}{a-1}.$$

Pentru a vedea dacă a_n are o limită, trebue să facem diferite ipoteze asupra lui a.

1° $|a|>1$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=\pm\infty$ şi a_n nu are limită. Există un caz particular banal, când: $a_0=-\frac{b}{a-1}$. In acest caz, $a_n=-\frac{b}{a-1}$, şi toţi termenii sunt egali.

2° $|a|<1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=0$, deci

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{b}{1-a}.$$

3° $a=1$. Atunci

$$a_n=a+nb,$$

şi a_n tinde către $\pm\infty$ după semnul lui b.

4° $a=-1$. Atunci

$$a_n=(-1)^n a_0-\frac{1}{2}b[(-1)^n-1],$$

deci $a_{2p}=a_0$, $a_{2p+1}=-a_0+b$, adică toţi termenii de rang par sunt egali cu a_0 şi toţi termenii de rang impar sunt egali cu $b-a_0$. Şirul se reduce la două puncte fixe, deci se poate interpreta că are două puncte limită.

In rezumat, pentru ca şirul să fie convergent şi să aibă o limită, trebue ca $|a|<1$.

31. 5. *Fie a şi b două numere pozitive, $a>b$ şi*

$$a_1=\frac{1}{2}(a+b),\quad b_1=\sqrt{ab}$$

$$a_2=\frac{1}{2}(a_1+b_1),\quad b_2=\sqrt{a_1b_1}$$

$$\cdots\cdots,\quad \cdots\cdots$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n),\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$$

$$\cdots\cdots,\quad \cdots\cdots$$

să se arate că şirurile a_n şi b_n au aceeaşi limită când n tinde către infinit.

Să facem mai întâi observarea că: $a_p>b_p$. In adevăr

$$a_p-b_p=\frac{1}{2}(a_{p-1}+b_{p-1})-\sqrt{a_{p-1}b_{p-1}}=\frac{1}{2}(a_{p-1}+b_{p-1}-2\sqrt{a_{p-1}b_{p-1}})=$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{a_{p-1}}-\sqrt{b_{p-1}})^2>0.$$

Primul şir este descrescător şi mărginit inferior. In adevăr

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)-a_n=\frac{1}{2}(b_n-a_n)<0;\quad a_{n+1}<a_n.$$

Pentru a arăta că este mărginit inferior observăm că

$$a_1=\frac{1}{2}(a+b)>\frac{1}{2}(b+b)=b,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1+b_1) > \frac{1}{2}(b_1+b_1) = b_1 > b,$$

. . . . . ,

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1}) > \frac{1}{2}(b_{n-1}+b_{n-1}) = b_{n-1} > b;$$

deci

$$a > a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots > b.$$

Al doilea şir este crescător şi mărginit superior. In adevăr,

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) > 0; \quad b_{n+1} > b_n.$$

Pentru a arăta că este mărginit superior, observăm că

$$b_1 = \sqrt{ab} < \sqrt{a^2} = a,$$

$$b_2 = \sqrt{a_1 b_1} < \sqrt{a_1^2} = a_1 < a,$$

. . . . . ,

$$b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} < \sqrt{a_{n-1}^2} = a_{n-1} < a,$$

. . . . . ,

deci

$$b < b_1 < b_2 < < \cdots b_n < \cdots < a.$$

Ambele şiruri au câte o limită. Să arătăm că au aceeaşi limită. In adevăr,

$$a_1 - b_1 = \frac{1}{2}(a+b) - b_1 < \frac{1}{2}(a+b) - b = \frac{1}{2}(a-b),$$

$$a_2 - b_2 = \frac{1}{2}(a_1+b_1) - b_2 < \frac{1}{2}(a_1+b_1) - b_1 = \frac{1}{2}(a_1 - b_1) < \frac{1}{2^2}(a-b),$$

. . . . . .

şi în general: $a_n - b_n < \frac{1}{2^n}(a-b)$. Cum partea dreaptă tinde către zero când n creşte nesfârşit, rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0; \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

31. 6. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$$

Cum: $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, şi cum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right) - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{(n+1)-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

în baza teoremei lui Cesàro, avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} = 0.$$

31. 7. *Să se găsească*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}},$$

p fiind un număr întreg şi pozitiv.

Condiţia teoremei lui Cesàro este indeplinită, şi cum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{\frac{p+1}{1!}n^p+\ldots} = \frac{1}{p+1},$$

rezultă că limita expresiei din enunţ este $\frac{1}{p+1}$.

31. 8. *Fiind dat un şir convergent u_n cu termenii pozitivi, să se arate că avem*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_1u_2\ldots u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} = \lim_{n\to\infty} u_n.$$

Prin ipoteză: $\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha$. Cum limita numitorului este infinită şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(u_1+u_2+\cdots+u_{n+1})-(u_1+u_2+\cdots+u_n)}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty} u_n = \alpha,$$

însemnează că totul se reduce la a demonstra că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{u_1\,u_2\cdots u_n} = \alpha.$$

Pentru aceasta, considerăm şirul auxiliar*)

$$\ln u_1,\ \ln u_2,,\ldots,\ln u_n,\ldots,$$

care are drept limită pe $\ln\alpha$. In adevăr,

$$\lim_{n\to\infty}(\ln u_n - \ln\alpha) = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{u_n}{\alpha} = \ln\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\alpha} = \ln 1 = 0;\ \lim_{n\to\infty}\ln u_n = \ln\alpha.$$

Mai departe, în baza criteriului lui *Cesàro*, avem succesiv

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln u_1+\ln u_2+\cdots+\ln u_n}{n} = \ln\alpha,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(u_1u_2\cdots u_n)}{n} - \ln\alpha\right] = 0,$$

*) Prin ln înţelegem logaritmul natural. A se vedea § 37.

$$\lim_{n\to\infty} \text{in} \frac{\sqrt[n]{u_1 u_2 \dots u_n}}{\alpha} = 0; \quad \ln 1 = 0; \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_1 u_2 \dots u_n} = \alpha,$$

31. 9. *Să se demonstreze că:* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Vom aplica proprietatea dela problema precedentă. Considerăm şirul

$$u_1 = 1, \; u_2 = 1 + \frac{1}{1}, \; u_3 = 1 + \frac{1}{2}, \dots, \; u_n = 1 + \frac{1}{n-1}, \dots$$

convergent şi având ca limită pe 1. Deci

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n}{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

31. 10. *Fiind dat un şir de numere* u_n *asupra căruia nu se face decât ipoteza că are toţi termenii pozitivi, se consideră şirurile*

$$u_1, \frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_2}, \dots, \frac{u_{n+1}}{u_n}, \dots$$

$$\sqrt{u_2}, \sqrt[3]{u_3}, \sqrt[4]{u_4}, \dots, \sqrt[n]{u_n}, \dots$$

Se cere să se demonstreze că dacă primul şir are o limită, al doilea are aceeaşi limită. Reciproca nu este adevărată.

Folosim rezultatul stabilit la problema 31. 8. In adevăr, cum prin ipoteză

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

vom avea şi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_1 \frac{u_2}{u_1} \frac{u_3}{u_2} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}}} = 1; \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1,$$

ceeace se cerea să demonstrăm.

Observaţie. Folosind teoremele dela serii (§ 32), proprietatea de mai sus se mai poate enunţa şi astfel: *dacă criteriul raportului are o limită şi criteriul rădăcinii are aceeaşi limită.*

31. 11. *Să se găsească limita şirului*

$$a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots (2n)}.$$

Să considerăm şirul auxiliar

$$b_n = \frac{(n+1)(n+2) \dots (2n)}{n^n}.$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)(n+3)\dots(2n)(2n+1)\cdot(2n+2)}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{n^n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=4\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{4}{e}.$$

Adică, vom avea în baza problemei precedente

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}=\frac{4}{e};\quad\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{e}.$$

§ 32. Serii cu termeni pozitivi

1. Inainte de a vorbi de serii cu termeni pozitivi, vom da câteva noţiuni care sunt valabile pentru serii cu termeni reali oarecare.

Se numeşte *serie* o expresie de forma

$$u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$$

care se scrie prescurtat $\sum u_n$ sau se spune: *seria cu termenul general* u_n. Se spune că seria este *convergentă* când şirul cu termenul general

$$S_n=u_1+u_2+\dots+u_n, \tag{I}$$

este convergent, adică are o limită S. Prin definiţie S se numeşte suma seriei. In caz contrar se spune că seria este *divergentă*. A stabili *natura* unei serii însemnează a vedea dacă este convergentă sau divergentă.

Asupra seriilor în general avem următoarele teoreme:

a) Dacă înmulţim toţi termenii unei serii cu o constantă a, natura seriei nu se schimbă. In cazul convergenţei, suma seriei se înmulţeşte cu a, adică

$$au_1+au_2+\dots+au_n+\dots=a(u_1+u_2+\dots+u_n+\dots). \tag{II}$$

b) Dacă într'o serie înlocuim un număr *finit* de termeni cu numere finite oarecare (chiar cu zero) alese după voie, natura seriei nu se schimbă.

c) Dacă într'o serie termenul general nu tinde către zero, seria este divergentă.

2. Asupra *seriilor cu termenii pozitivi* avem anumite reguli, numite *criterii*, cu ajutorul cărora putem stabili natura seriei.

a) Criteriul comparaţiei. Fiind date două serii $\sum u_n$ şi $\sum v_n$, dacă dela un rang anumit avem: $u_n\leq v_n$ atunci: a) dacă seria $\sum v_n$ este convergentă şi seria $\sum u_n$ este converventă; b) dacă seria $\sum u_n$ este divergentă şi seria $\sum v_n$ este divergentă. Acest criteriu se aplică deobicei la limită. Anume, se calculează: $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$ şi dacă limita este un număr finit şi diferit de zero,

seriile sunt de aceeaşi natură. Mai mult, dacă limita este zero şi seria $\sum v_n$ este convergentă, şi seria $\sum u_n$ este convergentă: iar dacă limita este infinită şi dacă seria $\sum v_n$ este divergentă şi seria $\sum u_n$ este divergentă.

Dificultatea aplicării criteriului, stă în determinarea seriei cu care comparăm. Acest lucru trebue făcut, în general, astfel ca limita raportului termenilor generali ai seriei date şi ai seriei alese de noi (şi a cărei natura presupunem că o cunoaştem) să fie un număr finit şi diferit de zero. Această alegere va fi mai bine înţeleasă la problemele pe care le vom trata în interiorul paragrafului.

b) Criteriul raportului (d'Alembert). Fiind dată o serie $\sum u_n$ şi dacă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \begin{cases} l<1 \text{ seria este convergentă.} \\ l>1 \quad \text{„} \quad \text{„ divergentă,} \\ l=1 \text{ avem îndoială} \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

c) Criteriul rădăcinii (Cauchy). Fiind data o serie $\sum u_n$, natura ei poate fi hotărîtă după cum

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \begin{cases} l<1 \text{ seria este convergentă,} \\ l>1 \quad \text{„} \quad \text{„ divergentă,} \\ l=1 \text{ avem îndoială.} \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

d) Criteriul lui Raabe-Duhamel se aplică numai în cazul când criteriul raportului dă îndoială, şi anume, spune că fiind dată o serie $\sum u_n$, natura ei poate fi hotărîtă de

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = l \begin{cases} l>1 \text{ seria este convergentă,} \\ l<1 \quad \text{„} \quad \text{„ divergentă,} \\ l=1 \text{ avem îndoială.} \end{cases} \qquad \text{(V)}$$

e) Criteriul lui Cauchy. Dacă termenii unei serii $\sum u_n$ sunt monoton descrescători, seria dată este de aceeaşi natură cu seria

$$pu_p + p^2u_{p2} + p^3u_{p3} + \cdots + p^nu_{p^n} + \cdots, \qquad \text{(VI)}$$

p fiind un număr întreg şi pozitiv dat.

f) Fiind date două serii cu termenii generali u_n şi v_n, dacă începând dela un rang oarecare

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}, \qquad \text{(VII)}$$

şi dacă seria $\sum u_n$ este convergentă, şi seria $\sum v_n$ este convergentă; iar dacă seria $\sum v_n$ este divergentă, şi seria $\sum u_n$ este divergentă.

g) Criteriul lui Gauss. Dacă într'o serie $\sum u$, avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + An^{p-1} + Bn^{p-2} + \cdots}{n^p + an^{p-1} + bn^{p-2} + \cdots}, \qquad \text{(VIII)}$$

seria este convergentă dacă $a-A>1$ şi divergentă dacă $a-A\leq 1$.

3. Avem următoarele serii importante:

a) Seria armonică generalizată, adică seria

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots, \tag{IX}$$

care este convergentă când $\alpha>1$ şi divergentă dacă $\alpha\leq 1$ (α un număr oarecare).

b) Seria geometrică

$$1+a+a^2+\cdots+a^n+\cdots, \tag{X}$$

care este convergentă dacă $a<1$ şi divergentă în caz contrar. In cazul convergenţei, suma seriei este $\frac{1}{1-a}$.

c) Seria

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots \tag{XI}$$

este convergentă şi are drept sumă numărul e.

4. **Teoremă.** Intr'o serie având termenii *monoton descrescători,*

$$\lim_{n\to\infty} nu_n=0. \tag{XII}$$

32. 1. *Pornind dela definiţia seriei, să se arate că seria cu termenul general*

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)},$$

este convergentă.

Va trebui să arătăm că şirul cu termenul general

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)},$$

este convergent. In adevăr, pornind dela identitatea

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)},$$

avem

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right);\quad S_n=1-\frac{1}{n+1},$$

deci: $\lim_{n\to\infty} S_n=1$, adică seria este convergentă şi are drept sumă pe 1.

32. 2. *Tot în baza definiţiei, să se arate că seria cu termenul general*

$$u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

este divergentă.

In adevăr,

$$S_n=\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\ln\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)$$

deci: $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$, seria este divergentă.

32. 3. *Să se studieze natura seriei*

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\cdots$$

Observăm că

$$u_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n=\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n},$$

şi cum seria cu termenul general $v_n=2^{-n}$ este convergentă, fiind seria geometrică cu raţia $\frac{1}{2}$, seria dată va fi convergentă în baza criteriului comparaţiei.

32. 4. *Să se studieze seria*

$$1+\frac{3}{5}+\frac{4}{10}+\frac{5}{17}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$$

Adunând $2n$ la numitorul termenului general, se obţine

$$u_n=\frac{1+n}{1+n^2}>\frac{1+n}{1+2n+n^2}=\frac{1+n}{(1+n)^2}=\frac{1}{1+n},$$

care este termenul general al seriei armonice: seria dată este deci divergentă.

Observaţie. Într'o serie se numeşte *termen general*, termenul al n^{lea}; dar şi termenul al $(n+1)^{lea}$ poate fi considerat tot ca termen general (cum am făcut în cazul precedent) deoarece acesta este al n^{lea} din seria ce se obţine din seria dată ştergând primul termen şi am spus (pct. 1, b) că prin acest procedeu natura seriei nu se schimbă. Totaşa putem lua drept termen general al seriei al $(n+2)^{lea}$, ..., al $(n+p)^{lea}$ termen.

32. 5. *Să se găsească natura seriei*

$$u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}+1}.$$

Seria este divergentă, deoarece este comparabilă cu seria care are termenul general: $v_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\left(\alpha=\frac{2}{3}<1\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}=1.$$

32. 6. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca seria cu termenul general*

$$u_n=\frac{n^p+an^{p-1}+\cdots}{n^q+bn^{q-1}+\cdots},$$

să fie convergentă, este ca: $q\geqq p+2$.

Deoarece semnul unui polinom, atunci când necunoscuta este mare, este dat de primul termen, dela un rang oarecare atât numărătorul cât şi numitorul vor fi pozitivi, deci seria are termenii pozitivi. Seria dată este de aceea-

natură cu seria având termenul general: $v_n = \frac{n^p}{n^q} = \frac{1}{n^{q-p}}$ deoarece: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Dar această serie este convergentă (seria armonică generalizată) atunci când: $q-p>1$, şi cum p şi q sunt numere întregi, trebue să avem: $q-p \geqq 2$.

32. 7. *Să se găsească natura seriei cu termenul general*

$$u_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}.$$

O comparăm cu seria având termenul general: $v_n = \frac{1}{n^2}$. Avem

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \pi \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \pi,$$

adică seriile sunt aceeaşi natură, şi anume, convergente, deoarece seria $\sum v_n$ este convergentă.

32. 8. *Să se găsească natura seriei cu termenul general*

$$u_n = \operatorname{tg}^2 \frac{a}{n}.$$

Seria are toţi termenii pozitivi, oricare ar fi a. Comparăm cu seria convergentă având termenul general $v_n = \frac{1}{n^2}$; obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = a^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{a}{n}}{\frac{a^2}{n^2}} = a^2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}}\right)^2 \frac{1}{\cos^2\frac{a}{n}} = a^2,$$

adică seria dată este convergentă.

32. 9. *Să se găsească natura seriei cu termenul general*

$$u_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1,$$

adică seria este convergentă.

32. 10. *Să se studieze seria cu termenul general*

$$u_n = (2n+1)\left[\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n+1)}\right]^2.$$

Aplicând criteriul raportului, obținem pentru

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+3}{2n+1}\left[\frac{k(k-1)\ldots)\,k-n)}{(k+1)\,(k+2)\ldots(k+n+2)}\right]^2\cdot\left[\frac{(k+1)\,(k+2)\ldots(k+n+1)}{k(k-1)\ldots(k-n+1)}\right]^2$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+3}{2n+1}\left(\frac{k-n}{k+n+2}\right)^2\text{: deci }\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1.$$

Criteriul lui Raabe-Duhamel dă mai departe

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\,\frac{2\,(4k+3)\,n^2+\cdots}{2n^3}=4k+3$$

deci, dacă $4k+3>1$; $k>-\frac{1}{2}$ seria este convergentă; dacă $4k+3<1$, $k<-\frac{1}{2}$ seria este divergentă; iar dacă $k=-\frac{1}{2}$, seria este tot divergentă, deoarece termenul ei general devine : $u_n=\frac{2}{2n+1}$, comparabil cu termenul general al seriei armonice.

32. 11. *Se cere natura seriei cu termenul general*

$$u_n=\left(\frac{n}{n+1}\,a\right)^n(a>0).$$

Criteriul rădăcinii dă

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{n+1}=a.$$

Deci, dacă $a<1$, seria este convergentă; dacă $a>1$, seria este divergentă; dacă $a=1$, avem

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e},$$

adică termenul general nu tinde către zero; deci seria este divergentă.

32. 12. *Să se studieze seria cu termenul general*

$$u_n=\frac{1}{n^p\,(\ln n)^q},$$

după diversele valori pe care le pot lua parametrii p și q.

1° $p<0$. Termenul general se poate scrie sub forma: $u_n=\frac{n^{-p}}{(\ln n)^q}$ și cum $-p$ este pozitiv, u_n tinde către infinit odată cu n (prob. 47.11 obs.) seria este divergentă oricare ar fi q.

2° $p=1$. Termenul general este $u_n=\frac{1}{n\,(\ln n)^q}$; să arătăm că termenii seriei descresc. Pentru aceasta, facem raportul dintre un termen și precedentul. Avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n\,(\ln n)^q}{(n+1)\,[\ln(n+1)]^q}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left[\frac{\ln(n+1)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{\ln(n+1)}\right]^q=$$

$$=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left[1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{\ln(n+1)}\right]^q.$$

Despărțim acest caz în două: a) $q > 0$. Atunci, cum n este mare, $1 - \frac{1}{n+1}$ este subunitar și $\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < 0$. Partea a doua este produsul a două numere subunitare, deci: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, $u_{n+1} < u_n$. Termenii seriei descresc. Aplicăm teorema lui *Cauchy:* seria dată va fi de aceeași natură cu seria: $v_n = p^n u_{p^n} = p^n \left[\frac{1}{p^n} (\ln p^n)^q\right] = \frac{1}{n^q (\ln p)^q}$, adică de aceeași natură cu seria având termenul general $\frac{1}{n^q}$ (deoarece p este un număr dat. Deci, dacă $0 \leq q \leq 1$ seria este divergentă, iar dacă $q > 1$ seria este convergentă.

b) $q < 0$, atunci avem evident

$$u_n = \frac{(\ln n)^{-q}}{n} > \frac{1}{n}, \quad (n \geq 3),$$

adică termenii seriei sunt mai mari decât termenii seriei armonice, deci seria este divergentă.

3° $0 \leq p \leq 1$. Fie k un număr cuprins între p și 1, atunci

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n^k}} = \frac{n^{k-p}}{(\ln n)^q} = \left(\frac{\frac{k-p}{n^q}}{\ln n}\right)^q$$

raport care tinde către infinit oricare ar fi q. Cum seria cu termenul general $\frac{1}{n^k}$ $(0 < k < 1)$ este divergentă și seria dată este divergentă.

4° $p > 1$. Fie k un număr cuprins între 1 și p. Atunci

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n^k}} = \frac{1}{n^{p-k} (\ln n)^q}$$

și cum $p > k$ acest raport tinde către zero odată cu n. Deoarece seria cu termenul general $\frac{1}{n^k}$ este convergentă și seria cu termenul general u_n va fi convergentă. In rezumat, seria dată este convergentă în următoarele două cazuri: $(p = 1, q > 1)$ și $p > 1$.

32. 13. *Se cere natura seriei cu termenul general*

$$u_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\ln n}.$$

Seria este de aceeași natură cu seria având termenul general: $v_n = \frac{1}{n \ln n}$, deoarece

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \pi \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi.$$

Cum seria Σv_n este divergentă, și seria Σu_n va fi divergentă.

32. 14. *Să se găsească suma seriei având termenul general*

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Seria este convergentă, deoarece este comparabilă cu seria al cărui termen general este $\frac{1}{n^4}$. Pentru a-i găsi suma, folosim identitatea (vezi § 45)

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right)$$

în care făcând succesiv $x=1, 2 \ldots n$ şi adunând egalităţile obţinute, rezultă pentru suma primilor n termeni ai seriei

$$S_n = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+3}\right)$$

deci

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{18}.$$

32. 15. *Să se studieze seria cu termenul general*

$$u_n = \frac{n!}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)},$$

şi în caz de convergenţă să i se găsească suma. Numărul k este presupus pozitiv.

Avem

$$\frac{u_{n+1}}{u} = \frac{n+1}{k+n+1}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1. \tag{1}$$

Criteriul lui *Raabe-Duhamel* ne dă

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{kn}{n+1} = k;$$

deci seria este convergentă când $k > 1$ şi divergentă când $k < 1$. Când $k=1$ seria se reduce la seria armonică, adică,

$$u_n = -\frac{1}{n+1}.$$

Să presupunem deci $k>1$ şi să găsim suma seriei. Din (1) scoatem

$$ku_{n+1} + (n+1)u_{n+1} = nu_n + u_n.$$

Inlocuind aici pe n cu 1, 2, ... n obţinem egalităţile următoare:

$$ku_2 + 2u_2 = u_1 + u_1,$$

$$ku_3 + 3u_3 = 2u_2 + u_2,$$

. . . . . .

$$ku_{n+1} + (n+1)u_{n+1} = nu_n + u_n,$$

făcând adunarea acestor egalităţi parte cu parte, reducând termenii asemenea şi notând ca deobicei prin S_n suma primilor n termeni obţinem

$$(k-1)\,S_{n+1}=(k+1)\,u_1-(n+2)\,u_{n+1},$$

deci, cum: $\lim_{n\to\infty} S_n=S$ (suma seriei), avem

$$(k-1)\lim_{n\to\infty} S_{n+1}=(k+1)\,u_1-\lim_{n\to\infty}(n+2)\,u_{n+1}, \qquad (2)$$

ultima limită este nulă în baza teoremei dela nr. 4 (32, 12). Această teoremă se aplică, deoarece în baza ipotezei $k>0$, din (1) reiese

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1\,;\quad u_{n+1}<u_n,$$

adică termenii seriei merg descrescător. Deci:

$$\lim_{n\to\infty}(n+2)\,u_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}(n+1)\,u_{n+1}=0.$$

Relaţia (2) ne dă

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1}=S=\frac{(k+1)\,u_1}{k-1}=\frac{1}{k-1}\,.$$

§ 33. Serii cu termeni oarecare

1. Seriile cu termeni oarecare se împart, ca şi seriile cu termeni pozitivi în serii convergente şi serii divergente. Noţiunea de convergenţă la serii se prezintă sub două aspecte: *convergenţă absolută şi semiconvergenţă.* Se zice că o serie $\sum u_n$ este absolut convergentă, atunci când seria $\sum U_n$ formată cu valorile absolute, $U_n=|u_n|$ ale termenilor seriei date, este convergentă. Se zice că o serie este semiconvergentă atunci când seria $\sum u_n$ este convergentă fără ca seria $\sum U_n$ să fie convergentă. Deosebirea fundamentală dintre aceste două categorii de serii este că pe când la seriile absolut convergente putem schimba ordinea termenilor cum vrem, fără ca suma seriei să se schimbe (ca şi la sume finite), la seriile semiconvergente nu avem voie să facem acest lucru.

2. Printre seriile cu termeni oarecare cele mai importante sunt *seriile alternate,* la care avem următorul criteriu: *dacă într'o serie alternată termenii seriei descresc tinzând către zero (în valoarea absolută), seria este convergentă.*

3. Se va ţine seama de cele spuse la nr. 1 al paragrafului precedent, consideraţii valabile pentru toate seriile.

4. Seria geometrică

$$1+a+a^2+\cdots+a^n+\cdots,$$

este absolut convergentă în ipoteza $|a|<1$ şi divergentă în caz contrar.

Deasemenea avem

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

Seria din dreapta este absolut convergentă oricare ar fi x, deci egalitatea există pentru orice valoare reală a acestui parametru.

5. Criteriile date la seriile cu termenii pozitivi nu se aplică la seriile cu termeni oarecare. Ele pot fi însă aplicate la serile formate cu valorile absolute ale termenilor, adică atunci când căutăm dacă o serie este absolut convergentă sau nu.

33. 1. *Dacă seria cu termenii pozitivi* $\sum u_n$ *este convergentă, şi seria*

$$u_1 \sin a + u_2 \sin 2a + \cdots + u_n \sin na + \cdots$$

este convergentă, oricare ar fi arcul a.

In adevăr, cum: $|\sin pa| < 1$, vom avea în general

$$|u_n \sin na| < u_n,$$

şi criteriul comparaţiei ne spune că prima serie este absolut convergentă.

33. 2. *Să se studieze seria cu termenul general*

$$u_n = \frac{n^3 x^n}{n^4+1}.$$

Criteriul raportului ne dă

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^3}{(n+1)^4+1} \cdot \frac{n^4+1}{n^3} |x| ; \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|,$$

deci dacă $|x| < 1$, seria este absolut convergentă, iar dacă $|x| > 1$ însemnează că

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1, \quad |u_{n+1}| > |u_n|,$$

adică termenii cresc, deci termenul general nu poate tinde către zero: seria este divergentă.

Dacă $x = 1$, termenul general este

$$u_n = \frac{n^3}{n^4+1},$$

şi cum gradul numărătorului este mai mic numai cu o unitate decât al numitorului, seria este divergentă. Dacă $x = -1$, termenul general tinde către zero (deoarece gradul numitorului este mai mare decât al numărătorului), şi termenii descresc, deoarece sunt comparabili cu $\frac{1}{n}$: seria este convergentă.

In rezumat, seria este convergentă când: $-1 \leqq x < 1$, şi divergentă în caz contrar.

33. 3. *Pentru ce valori ale lui* a, *seria cu termenul general*

$$u_n = \left(\frac{a-1}{a^2+1}\right)^n,$$

este convergentă?

Seria este o progresie geometrică cu raţia $\frac{a-2}{a^2+1}$. Va trebui deci ca

$$-1<\frac{a-1}{a^2+1}<1,$$

care se descompune în două inegalităţi, din care, dacă sunt studiate după cum s'a spus la § 15, rezultă că trebue să avem $a>0$ sau $a<-1$.

33. 4. *Să se studieze seria cu termenul general*

$$u_n=\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right]a^n.$$

Criteriul raportului aplicat seriei formată cu valorile absolute ale termenilor ne dă

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}}{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}}|a|=|a|$$

deoarece numărătorul şi numitorul tind ambii către e. Rezultă că dacă $|a|<1$ seria este convergentă, iar dacă $|a|>1$ seria este divergentă. In sfârşit dacă $|a|=1$, seria este divergentă, deoarece termenul general nu tinde către zero, ci către e.

33. 5. *Se cere natura seriei cu termenul general*

$$u_n=\frac{a^n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}.$$

1° $a>0$. Notând cu: $s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, expresie care tinde către infinit odată cu n, deoarece seria armonică este divergentă, criteriul raportului dă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{s_n+\frac{1}{n+1}}a=a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{(n+1)s_n}}=a;$$

deci dacă $a<1$, seria este convergentă, dacă $a>1$, seria este divergentă; dacă $a=1$, criteriul lui *Raabe-Duhamel* ne dă

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)s_n}=0<1,$$

şi seria este divergentă. 2° $a<0$. Dacă $|a|<1$, seria este absolut convergentă în baza celor arătate mai sus. Dacă $|a|>1$ în baza lui $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ găsit mai sus, termenii seriei cresc în valoare absolută, deci termenul general nu tinde către zero; deci, divergentă. Dacă $a=-1$, seria este alternată, termenul general tinde către zero şi termenii descresc: seria este semiconvergentă. In rezumat, seria este convergentă dacă: $-1\leqq a<1$.

33. 6. *Se cere natura seriei*

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$$

avem

$$S_{2n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)=$$

$$=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

de unde reiese că S_{2n} tinde către infinit odată cu n, căci în paranteză sun primii n termeni ai seriei armonice. Seria dată este divergentă.

§ 34. Operaţii cu seriile

1. Fiind date două serii, $\sum u_n$ şi $\sum v_n$ convergente, prin *seria sumă* a or se înţelege seria cu termenul general: $w_n=u_n+v_n$. Seria $\sum w_n$ este convergentă şi are drept sumă, suma sumelor seriilor date. Mai general, fiind date p serii (p finit) convergente $\sum u_n^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,p)$, având drept sume numerele S_i $(i=1,2,\ldots,p)$, avem

$$\sum(A_1 u_n^{(1)}-A_2 u_n^{(2)}+\cdots+A_p u_n^{(p)})=A_1 S_1+A_2 S_2+\cdots+A_p S_p,$$

numerele A_i fiind constante.

2. Fiind date două serii convergente

$$u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots,\quad v_0+v_1+\cdots+v_n+\cdots,$$

dintre care una este cel puţin *absolut convergentă*, *seria produs* $\sum w_n$, a cărui termen general este,

$$w_n=u_0 v_n+u_1 v_{n-1}+\cdots+u_{n-1} v_1+u_n v_0,$$

este convergentă şi are drept sumă, produsul sumelor seriilor date.

34. 1. *Să se studieze seria cu termenul general*

$$u_n=a^n-\frac{1}{b^n},$$

şi în caz de convergenţă să i se găsească suma.

Considerăm separat seriile cu termenii generali $u_n'=a^n$, $u_n''=b^{-n}$. Aceste două serii sunt progresii geometrice respectiv cu raţiile a şi $1/b$. Pentru ca aceste două serii să fie convergente este necesar să avem $|a|<1$ şi $|b|>1$. In aceste ipoteze, seria diferenţă va fi convergentă şi va avea drept sumă

$$\sum u_n=\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-\frac{1}{b}}=\frac{1}{1-a}-\frac{b}{b-1}=\frac{ab-1}{(1-a)(b-1)}.$$

34. 2. *Să se găsească suma seriei*

$$S=4+\frac{5}{6}+\frac{25}{144}+\cdots+\frac{2^n+3^{n+1}-6^{n-1}}{12^n}+\cdots$$

Termenul general al seriei se poate scrie sub forma

$$u_n=\left(\frac{2}{12}\right)^n+3\left(\frac{3}{12}\right)^n-\frac{1}{12}\left(\frac{6}{12}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^n+3\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

şi cum seriile în care se descompune seria dată sunt progresii geometrice cu raţii subunitare, seria $\sum u_n$ va fi convergentă şi va avea drept sumă

$$S=\sum u_n=\frac{1}{1-\frac{1}{6}}+3\frac{1}{1-\frac{1}{4}}-\frac{1}{12}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{151}{30}.$$

34. 3. *Să se ridice la pătrat seria geometrică*

Punem: $u_0=v_0=1$, $u_1=v_1=x,\ldots,u_n=v_n=x,\ldots$, şi vom avea conform regulii de înmulţire,

$$\underbrace{w_n=1\cdot x^n+x\cdot x^{n-1}+\cdots+x^n\cdot 1}_{n+1}=(n+1)x^n.$$

Cum seria dată este absolut convergenţă pentru $|x|<1$ şi are drept sumă pe $\frac{1}{1-x}$, în această ipoteză, putem scrie

$$1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

34. 4. *Să se găsească natura seriei cu termenul general*

$$w_n=(-1)^n\left[\frac{1}{\sqrt{1\,(n+1)}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot n}}+\frac{1}{\sqrt{3\,(n-1)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(n+1)\,1}}\right]. \qquad (1)$$

După forma termenului general, seria dată ar putea fi considerată ca pătratul seriei

$$\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}+\cdots \qquad (2)$$

In adevăr, dacă punem

$$u_0=v_0=\frac{1}{\sqrt{1}},\quad u_1=v_1=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ldots,u_n=v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}},\ldots$$

Conform regulii de înmulţire seria produs are pe w_n ca termen general. Dar, seria (2) este semiconvergentă, deoarece seria formată cu valorile absolute ale termenilor este divergentă, este alternată şi termenii descresc. Condiţiile teoremei de înmulţire nu sunt satisfăcute, deci nu putem afirma nimic despre seria produs. Dar putem chiar arăta direct că seria (1) este divergentă. In adevăr, pornind dela inegalitatea evidentă

$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2\geq 0$ sau scrisă sub forma $\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\geq\frac{2}{\alpha+\beta}$, fiecare termen al lui w_n

va fi mai mare decât termenul corespunzător al sumei

$$|w_n| > \frac{2}{1+(n+1)} + \frac{2}{2+n} + \frac{2}{3+(n+1)} + \cdots + \frac{2}{(n+1)+1} = \frac{2(n+1)}{n+2},$$

şi cum partea dreaptă tinde către 2 odată cu n, însemnează că w_n nu poate tinde către zero, deci seria este divergentă.

34. 5. *Seria cu termenul general:* $u_n = \frac{P(n)}{n!} x^n$ *este convergentă oricare ar fi polinomul* $P(n)$. *Să se indice un procedeu pentru a găsi suma seriei. Să se găsească efectiv suma pentru*

$$P(n) = an^2 + bn + c,$$

a, b, c fiind trei numere date.

Criteriul raportului aplicat seriei formate cu valorile absolute ne dă

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{P(n+1)}{P(n)} \right| \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

deoarece limita a doua este zero, iar prima 1, fiindcă termenii fracţiei sunt polinoame în n de acelaşi grad şi având acelaşi coeficient pentru n la puterea cea mai mare. Seria este convergentă oricare ar fi x.

Pentru a găsi suma, se scrie polinomul $P(n)$ sub forma

$$P(n) = A_0 n(n-1)\cdots(n-p+1) + A_1 n(n-1)\cdots(n-p+2) + \cdots + A_{p-1} n + A_p,$$

presupunând că p este gradul lui $P(n)$. Se descompune suma seriei în $p+1$ sume, care sunt egale cu expresii de forma $Ax^q e^x$. Cele spuse vor fi urmărite mai uşor în cazul particular menţionat în enunţ. Aici avem

$$P(n) = an^2 + bn + c = an(n-1) + (a+b)n + c;$$

termenul general al seriei devine

$$u_n = \left[\frac{a}{(n-2)!} + \frac{a+b}{(n-1)!} + \frac{c}{n!} \right] x^n,$$

şi notând cu S suma seriei, obţinem

$$S = c + \left(a + b + \frac{c}{1!}\right)x + \left(a + \frac{a+b}{1!} + \frac{c}{2!}\right)x^2 + \left(\frac{a}{1!} + \frac{a+b}{2!} + \frac{c}{3!}\right)x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \left[\frac{a}{(n-2)!} + \frac{a+b}{(n-1)!} + \frac{c}{n!} \right] x^n + \cdots$$

$$= c\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) + (a+b)x\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \right] + ax^2\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots\right] =$$

$$= [ax^2 + (a+b)x + c]e^x,$$

deoarece fiecare paranteză reprezintă pe e^x.

CAPITOLUL VI

FUNCŢII DE O SINGURĂ VARIABILĂ. DERIVATE. APLICAŢII

§ 35. Funcţii. Continuitate. Puncte de discontinuitate

1. **Variabilă. Funcţie.** Se numeşte *variabilă* o cantitate x susceptibilă de a lua diferite valori oricare sau cuprinse într'un inteval a, b. Dacă $a<x<b$ se zice că intervalul este *deschis;* dacă $a \leq x \leq b$ intervalul se zice că este *închis*; se poate ca intervalul să fie deschis la unul din capete şi închis la celălalt. Afară de cazuri speciale, pe care le vom menţiona, în cuprinsul acestei cărţi, vom considera intervalele închise şi le vom nota prin $[a, b]$.

Se zice că y este *funcţie* de x atunci când la diferite valori ale variabilei x, corespund valori pentru y; vom desemna acest lucru prin simbolul $y=f(x)$. Se zice că o funcţie este *definită* într'un interval $[a, b]$, atunci când în toate punctele acestui interval, inclusiv capetele, funcţia y are valori bine determinate. Dacă intervalul este $-\infty, +\infty$ se zice că funcţia este definită peste tot. Intervalul în care funcţia este definită se numeşte *interval de existenţă* al funcţiei.

In acest capitol vom vorbi numai despre valori reale ale variabilei şi valori reale ale funcţiei.

2. Funcţiile sunt de mai multe feluri:

a) Polinoamele împreună cu fracţiile raţionale se numesc *funcţii raţionale.* O funcţie raţională este definită peste tot.

b) Se numesc *funcţii algebrice*, funcţiile care pot fi considerate ca rădăcini ale unei ecuaţii ai cărei coeficienţi sunt funcţii raţionale de x.

c) In particular, se spune că o funcţie este *iraţională* când se exprimă cu ajutorul radicalilor. O funcţie iraţională, este algebrică.

d) O funcţie care nu este algebrică se numeşte *transcedentă.* De exemplu, funcţiile trigonometrice directe sau inverse, funcţia exponenţială, funcţia logaritmică şi altele, sunt funcţii transcendente.

3. a) Se zice că o funcţie $f(x)$ este *crescătoare* într'un interval $[a, b]$, când oricum vom alege pe x_1 şi x_2 în interval, astfel ca

$$a \leq x_1 < x_2 \leq b \quad \text{să avem} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Dinpotrivă, vom zice că funcţia este *descrescătoare* în interval dacă pentru

$$a \leq x_1 < x_2 \leq b \quad \text{avem} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

b) Se zice că o funcţie $f(x)$ este *periodică* şi are perioada a atunci când: $f(x+a)=f(x)$. O funcţie periodică, definită într'un interval de mărime a, este definită peste tot.

c) Se zice că o funcţie $f(x)$ este *pară* când în interiorul intervalului de existenţă avem: $f(-x)=f(x)$. Analog, se zice că o funcţie $f(x)$ este *impară* în interiorul intervalului de existenţă, când: $f(-x)=-f(x)$.

4. Se obişnueşte să se ataşeze unei funcţii o imagine geometrică numită *reprezentarea grafică* a funcţiei. In acest scop, se reprezintă în raport cu două axe perpendiculare (fig. 20), punctul $M[x, y=f(x)]$. Locul geometric al acestui punct, când x variază în intervalul de existenţă $[a, b]$ al funcţiei, este o ramură de curbă, care se numeşte reprezentarea grafică a funcţiei.

5. Se zice că x tinde către a atunci când diferenţa $|x-a|$ poate fi făcută mai mică decât orice număr vrem. Analog, se zice că x tinde către infinit când poate fi făcut, în valoare absolută, mai mare decât orice număr, oricât de mare vrem. De exemplu, o fracţie al cărei numitor tinde către zero, numărătorul fiind diferit de zero, tinde către infinit. Dinpotrivă, o fracţie al cărui numărător este finit, iar numitorul tinde către infinit, tinde către zero. Deasemenea, o fracţie care are numitorul finit, iar numărătorul tinde către infinit, tinde ea însăşi către infinit.

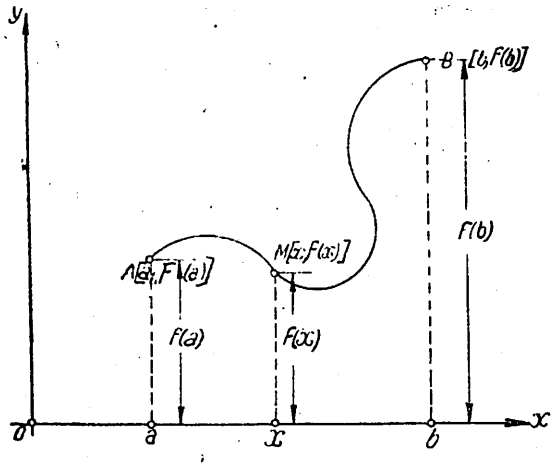


Fig. 20

Un exemplu important de limită este

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1. \quad \text{(I)}$$

Tot aşa, avem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A_0x^p+A_1x^{p-1}+\cdots+A_p}{B_0x^q+B_1x^{q-1}+\cdots+B^q}=\begin{cases}0 \text{ dacă } p<q\\ \frac{A_0}{B_0} \text{ „ } p=q\\ \pm\infty \text{ „ } p>q\end{cases} \quad \text{(II)}$$

în ultimul caz, semnul este dat de $\frac{A_0}{B_0}$. In particular, limita unui polinom pentru valori foarte mari ale variabilei este $\pm\infty$ după semnul primului termen. Recunoaştem în aceste două limite generalizarea celor enunţate la § 31, unde x tinde către infinit numai prin valori întregi.

Observaţie. Dacă vrem să căutăm pentru x tinzând către $-\infty$ facem schimbarea $x=-u$ şi noua variabilă va tinde către $+\infty$.

6. Se zice că funcţia este *continuă într'un punct* $x=c$ atunci când unui număr ϵ oricât de mic putem face să-i corespundă un număr η astfel ca pentru *toate* valorile lui x care satisfac inegalitatea $|x-c|<\eta$, să avem: $|f(x)-f(c)|<\epsilon$. Aceasta înseamnă că

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c).$$

O funcţie continuă în toate punctele unui interval se zice că este *continuă în interval*. Geometric a spune că o funcţie $f(x)$ este continuă într'un-interval înseamnă a spune că ea este reprezentată în acest interval printr'un singur arc de curbă.

De ex., funcţia $f(x)=x^n$ este continuă pentru orice valoare afară de $x=0$, când $n<0$.

Funcţiile continue se bucură de proprietăţi analoage cu limitele şirurilor (§ 31, pct. 2—4).

a) O sumă finită de funcţii continue este o funcţie continuă.

b) Produsul unui număr finit de funcţii continue este o funcţie continuă.

c) Câtul a două funcţii continue este o funcţie continuă, afară de punctele unde se anulează numitorul.

d) In general, dacă într'un interval $[a, b]$ funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ sunt continue, atunci şi funcţia $f[g(x)]$ este o funcţie continuă în acelaşi interval.

7. **Teorema I.** Fiind dat un număr pozitiv ϵ arbitrar de mic, putem face să-i corespundă un număr pozitiv η astfel ca oricum vom alege pe x' şi x'' în intervalul de continuitate $[a, b]$ al funcţiei $f(x)$ (adică $a<x'<x''<b$) să avem

$$|f(x')-f(x'')|<\epsilon$$

atunci când $|x'-x''|<\eta$. Din cauza acestei proprietăţi se zice că o funcţie continuă într'un interval închis este *uniform continuă*.

Teorema II. Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă într'un interval $[a, b]$, atunci există cel puţin o valoare x_1 a variabilei pentru care funcţia ia cea mai mare valoare $M=f(x_1)$ (fig. 21); deasemena există cel puţin o valoare x_2 a variabilei pentru care $f(x)$ ia cea mai mică valoare $m=f(x_2)$. Oricare valoare α cuprinsă între m şi M este luată de funcţie cel puţin odată în intevalul $[a, b]$. Acest fapt se traduce geometric prin a spune că o paralelă la Ox, de ordonată α, astfel ca $m<\alpha<M$, taie curba cel puţin odată în intervalul $[a, b]$. O altă concluzie a celor de mai sus este că o funcţie continuă într'un interval este finită în acest interval.

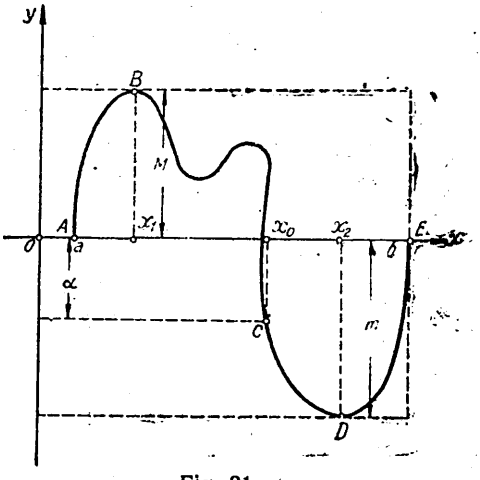


Fig. 21

Teorema III. Dacă $f(x)$ este continuă într'un interval $[a, b]$ şi dacă într'un punct c al intervalului $f(c)>0$, se poate totdeauna determina un interval $(c-h, c+h)$ în care funcţia să fie pozitivă.

Geometric (fig. 22), aceasta exprimă un fapt evident, şi anume: dacă punctul de abscisă c, punctul reprezentativ A al funcţiei este deasupra axei Ox, trebue ca în vecinătatea lui curba să fie situată deasupra axei Ox, adică nu poate sări imediat dedesubt în baza însăşi a continuităţii.

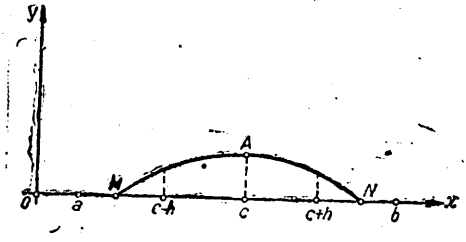


Fig. 22

Proprietate analoagă dacă $f(c)<0$.

8. Intr'un punct din intervalul de existenţă, unde o funcţie nu este continuă, se zice că este *discontinuă*, iar punctul corespunzător se numeşte *punct de discontinuitate*. Fie c un punct de discontinuitate; acesta înseamnează că limita către care tinde $f(x)$ când x se apropie de c prin valori crescătoare sau descrescătoare nu este aceeaşi. Notăm aceste limite astfel

$$\lim_{x\to-c} f(x)=f(c-0), \quad \lim_{x\to+c} f(x)=f(c+0).$$

Dacă aceste două limite *există*, se zice că punctul de discontinuitate este de *prima speţă*; dacă în plus, avem

$$f(c)=\frac{f(c+0)+f(c-0)}{2}$$

se zice că punctul de discontinuitate este de *prima speţă obişnuit*. Dacă unul din numerele $f(c+0)$ sau $f(c-0)$ nu există (în sensul că nu i se poate determina valoarea sau este infinit), se zice să punctul de discontinuitate este de *speţa a doua*. De exemplu, o fracţie al cărui numitor tinde către zero pentru $x=c$, tinde către infinit, adică funcţia reprezentată prin această fracţie are în punctul $x=c$ un punct de discontinuitate de speţa a doua.

9. Dacă o funcţie $f(x)$ este continuă într'un interval $[a,b]$ şi dacă şirul convergent a_n are termenii, începând dela un rang oarecare, cuprinşi între a şi b, atunci putem scrie

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(\lim_{n\to\infty} a_n).$$

35. 1. *Să se găsească intervalul de existenţă al funcţiei*

$$y=\sqrt{\frac{x^2(x^2-1)}{(x-2)(2-\sin x)}}.$$

Pentru ca funcţia să existe este necesar ca expresia de sub radical să fie pozitivă, cu alte cuvinte

$$\frac{x^2-1}{x-2}\geqq 0 \quad \text{sau} \quad (x^2-1)(x-2)\geqq 0,$$

deoarece x^2 este totdeauna pozitiv, iar $\sin x \leqq 1$. Această inegalitate (§ 15) are loc atunci când $-1\leqq x\leqq 1$ sau $x>2$.

35. 2. *Se dau funcţiile*

$$f(x)=\frac{x+\sin x}{x^3+\operatorname{tg} x}, \quad g(x)=\frac{(x+x^5)^{2n+1}}{x^2+\cos x}, \qquad (n \text{ întreg});$$

şi se cere să se arate că prima este pară, iar a doua, impară.

In adevăr, se ştie din trigonometrie că $\sin x$ şi $\operatorname{tg} x$ sunt funcţii impare, iar $\cos x$ este o funcţie pară, încât

$$f(-x)=\frac{(-x)+\sin(-x)}{(-x)^3+\operatorname{tg}(-x)}=\frac{-x-\sin x}{-x^3-\operatorname{tg} x}=\frac{x+\sin x}{x^3+\operatorname{tg} x}=f(x),$$

$$g(-x)=\frac{[(-x)+(-x)^5]^{2n+1}}{(-x)^2+\cos(-x)}=\frac{[-(x+x^5)]^{2n+1}}{x^2+\cos x}=\frac{(-1)^{2n+1}(x+x^5)^{2n+1}}{x^2+\cos x}=-g(x),$$

deoarece $2n+1$ este un număr impar.

35. 3. *Să se găsească perioada funcţiei*

$$y=\operatorname{tg}\frac{3x}{5}+\sin 2x.$$

Despărţim funcţia în două

$$y_1=\operatorname{tg}\frac{3x}{5}, \quad y_2=\sin 2x;$$

Dacă a este perioada primei funcţii, atunci

$$\operatorname{tg}\frac{3(x+a)}{5} = \operatorname{tg}\left(\frac{3x}{5}+\frac{3a}{5}\right) = \operatorname{tg}\frac{3x}{5}$$

şi cum perioada funcţiei $\operatorname{tg} x$ este π, înseamnă că trebue să avem : $\frac{3a}{5}=\pi$, adică $a=\frac{5\pi}{3}$. Analog se găseşte că perioada lui y_2 este $a'=\pi$. Problema este de a găsi cel mai mic număr de π care să fie multiplu de a şi a'. Luăm o axă şi însemnăm pe ea cu puncte roşii punctele de abscise $\frac{5\pi}{3}$, $2\frac{5\pi}{3}$, $3\frac{5\pi}{3}$... şi cu puncte albastre punctele de abscise π, 2π, 3π, ... Primul punct roşu confundat cu unul albastru este $3\frac{5\pi}{3}=5\pi$. Aceasta este perioada funcţiei y.

35. 4. *Să se găsească intervalele în care funcţia*

$$y=\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x^4-16}\operatorname{tg} x,$$

este continuă.

In primul rând, intervalul de existenţă. Deoarece funcţiile x^4-16 şi $\operatorname{tg} x$ există oricare ar fi x, pentru ca funcţia să existe este necesar ca radicalul să existe, adică trebue să avem

$$x^2+2x-3 \geqq 0 \quad \text{de unde} \quad x \leqq -3 \text{ sau } x \geqq 1,$$

cu alte cuvinte funcţia există în intervalul $[-\infty,-3], [1,+\infty]$.

In privinţa continuităţii, deoarece polinomul $P(x)=x^2+2x-3$ este o funcţie continuă oricare ar fi x, şi cum $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ este deasemenea o funcţie continuă oricare ar fi x,

$$f[P(x)]=\sqrt{x^2+2x-3},$$

va fi o funcţie continuă oricare ar fi x. Deasemenea x^4-16 este o funcţie continuă oricare ar fi x; deci fracţia

$$\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x^4-16},$$

va fi o funcţie continuă, afară de valorile care anulează numitorul. Dar,

$$x^4-16=(x^2+4)(x+2)(x-2)=0,$$

şi cum în acest capitol nu ne interesează decât numerele reale, funcţia va fi discontinuă numai pentru $x=-2$ sau $x=2$. Dar nu ne interesează decât valorile lui x din intervalul de existenţă, adică fracţia este continuă în intervalele

$$[-\infty,-3],\ [1,2-\epsilon_1],\ [2+\epsilon_2,+\infty],$$

ϵ_1 şi ϵ_2 fiind numere mici la voia noastră.

Pe de altă parte, funcţia $\operatorname{tg} x$ este discontinuă în punctele

$$\ldots,-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\ldots,-\frac{3}{2}\pi,-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi,\ldots,\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\ldots,$$

unde k este un număr întreg. Ţinând seama de intervalele de continuitate ale fracţiei şi căutând să ocolim punctele şirului de mai sus, găsim că funcţia y este continuă în intervalele

$$\left[-\left(k+1+\frac{1}{2}\right)\pi+\epsilon_k, -\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-\epsilon_k'\right], \quad (k \text{ întreg} > 1)$$

$$\left[-\frac{3}{2}\pi+\epsilon_0, -3\right], \left[1, \frac{1}{2}\pi-\epsilon_0'\right], \left[\frac{1}{2}\pi+\epsilon_0'', 2-\epsilon_1\right], \left[2+\epsilon_2, \frac{3}{2}\pi-\epsilon_0'''\right]$$

$$\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi+\epsilon_k, \left(k+1+\frac{1}{2}\right)\pi-\epsilon_k'\right], \quad (k \text{ întreg} > 1).$$

35. 5. *Să se construiască graficul funcţiei*

$$y = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x\right).$$

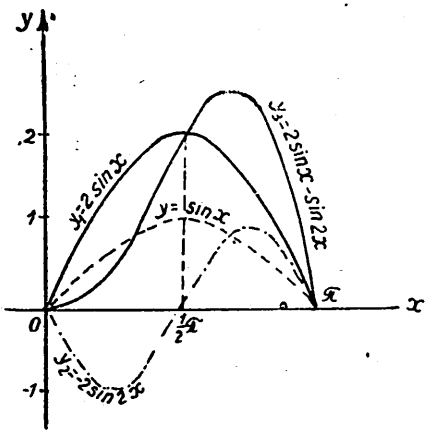


Fig. 23

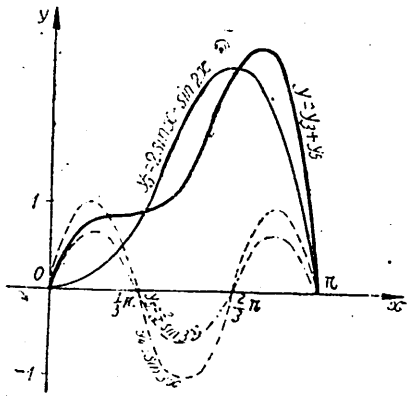


Fig. 24

Vom reprezenta grafic această funcţie folosind graficul cunoscut al funcţiei sinusoidale. Plecăm dela graficul funcţiei: $y = \sin x$, (reprezentat în fig. 23 prin linia întreruptă) din care deducem graficul: $y_1 = \sin x$, prin înmulţirea ordonatelor acestuia cu 2 (în figură $y_1 = 2\sin x$ este reprezentat prin linie plină subţire). Mai departe construim graficul: $y_2 = -\sin 2x$, care este o sinusoidă având perioada π (este reprezentată pe figură prin linie întreruptă de puncte). Compunerea acestora duce la curba

$$y_3 = 2\sin x - \sin 2x,$$

şi anume la ordonatele graficului curbei y_1 s'au adunat ordonatele graficului curbei y_2 (curba este reprezentată în fig. 23 prin linie groasă şi în fig. 24 prin linie plină subţire). Mai departe, am construit succesiv, în acelaşi mod, graficele

$$y_4 = \sin 3x, \quad y_5 = \frac{2}{3}\sin 3x, \quad y = y_3 + y_5,$$

(în fig. 24 graficul curbei y_4 este reprezentat cu linie intreruptă, graficul curbei y_5, cu linie întreruptă de puncte şi graficul funcţiei date, prin linie plină groasă).

35. 6. *O grindă continuă AM este alcătuită din trei bucăţi, a căror lungimi este de* 1 m, 2 m *şi* 1 m *şi a căror greutate este respectiv* 2 kg, 3 kg, *şi* 1 kg. *Să se găsească greutatea unei porţiuni AB din această grindă în funcţie de lungimea ei x, x fiind măsurat dela punctul A, începutul bucăţii, în greutate de* 2 kg.

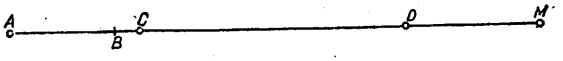


Fig. 25

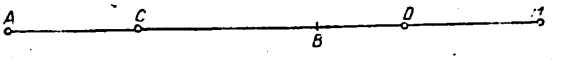


Fig. 26

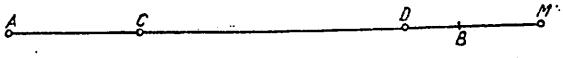


Fig. 27

Problema are trei cazuri după cum extremitatea B se găseşte pe prima, a doua sau a treia bucată. In cazul întâi (fig. 25), deoarece $AC=1$ m şi cântăreşte 2 kg, printr'o regulă de trei simplă rezultă că AB va cântări $2x$ kg. In cazul al doilea (fig. 26), când B se găseşte pe segmentul CD, greutatea porţiunii AB se va compune din $AC=2$ kg la care adăugim segmentul $CB=x-1$ care, deoarece CD are lungimea 2 m şi cântăreşte 3 kg, va cântări $\frac{3}{2}(x-1)$; adică în total $2+\frac{3}{2}(x-1)=\frac{1}{2}(3x-1)$. Analog, în cazul al treilea (fig. 27) se găseşte că greutatea lui AB este $5+(x-3)=x+2$. In concluzie, dacă notăm cu $f(x)$ greutatea lui AB funcţia $f(x)$ va fi definită prin

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (0\leq x\leq 1) \\ \frac{3x+1}{2} & (1<x\leq 3) \\ x+2 & (3<x\leq 4) \end{cases}$$

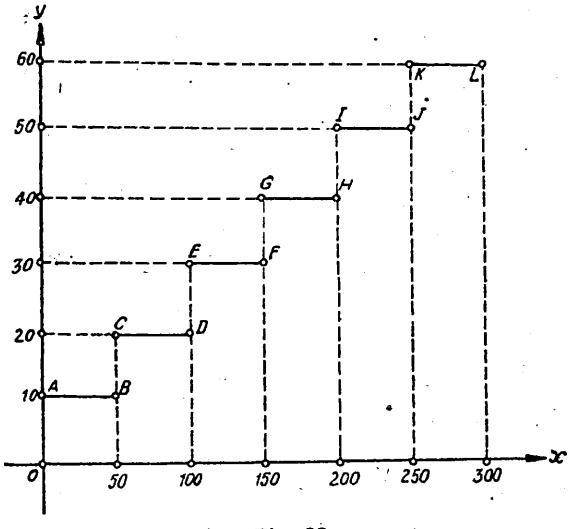


Fig. 28

35. 7. *Tariful poştal la imprimate este de 10 bani la fiecare* 50 g. *Să se facă graficul funcţiei care reprezintă costul unei scrisori-imprimate până la* 300 g.

Reprezentăm pe axa Ox greutatea scrisorii şi pe axa Oy preţul transportului ei (fig. 28). Graficul y este format din şase segmente paralele la axa Ox şi aşezate în scară. In adevăr un imprimat care are mai puţin decât 50 g va fi francat cu 10 bani, deci între 0 şi 50 g graficul ar fi segmentul AB; un imprimat care cântăreşte între 50 g şi 100 g va fi francat cu suma de 20 bani, etc. Este interesant de observat că segmentul AB reprezintă graficul funcţiei când $0<x\leq 50$ g, deci fără punctul A; când $x=50$ g, $y=10$

bani adică pentru $x=50$ g punctul reprezentativ este B; deci când $50 < x \leqq 100$ graficul este segmentul CD fără C; etc. Deci graficul este format din segmentele AB, CD, EF, GH, IJ, KL fără punctele A, C, E, G, I, K.

Graficul funcţiei nu este format dintr'o trăsătură continuă, adică funcţia care îl reprezintă nu este continuă. Ea are cinci puncte de discontinuitate, respectiv pentru valorile lui $s=50,100,\ldots,250$. In punctul $x=50$, avem

$$f(50-0)=10,\ f(50)=10,\ f(50+0)=20,$$

adică punctul este de prima speţă, fără a fi obişnuit. La fel sunt toate celelalte puncte de discontinuitate.

35. 8. *Să se facă graficul funcţiei* $y=$ *partea întreagă din* x.

Când $0 \leqq x < 1$ partea întreagă a lui x este 0, deoarece orice număr cuprins în acest interval este de forma $0,abc\ldots$ Graficul (fig. 29) este în acest interval segmentul AB fără punctul B, deoarece când $x=1$, $y=1$, deci punctul reprezentativ este C. Când $1 \leqq x < 2$, $y=1$, deoarece un număr din acest interval este de forma $1, abc\ldots$, adică graficul este segmentul CD fără punctul D, etc.

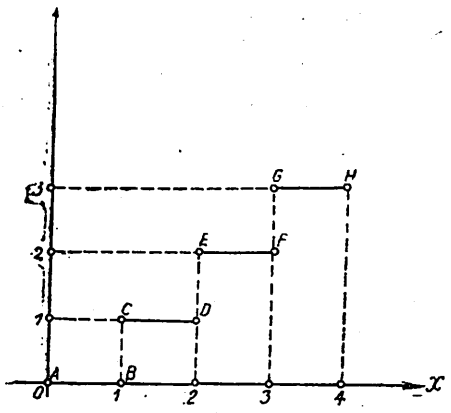


Fig. 29

Graficul din această problemă este asemănător cu cel din problema precedentă, diferind numai printr'o deplasare şi prin extermităţile segmentelor reprezentative.

Funcţia are o infinitate de puncte de discontinuitate care, ca şi cele dela problema precedentă, sunt de prima speţă, dar nu obişnuite. In adevăr, pentru primul punct de discontinuitate de exemplu, avem

$$f(1-0)=0,\quad f(1+0)=f(1)=1.$$

35. 9. *Să se construiască graficul funcţiei*

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}.$$

Distingem trei cazuri după valorile lui x (fig. 30) a) $x<1$, atunci $\lim_{n\to\infty} x^n=0$ şi $y=-1$. Deci în intervalul $(0,1)$ funcţia este reprezentată de segmentul AB, fără punctul B, deoarece când b) $x=1$, $y=0$, adică pentru $x=1$ funcţia este reprezentată prin punctul C.

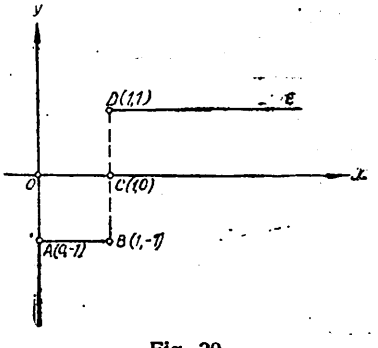


Fig. 30

c) $x>1$, atunci

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^n}=1 \text{ deoarece } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=0,$$

adică pentru toate valorile lui $x>1$ graficul funcției este format de semidreapta DE. Funcția prezintă deci pentru $x=1$ un punct de discontinuitate de prima speță și obișnuit. In adevăr,

$$f(1-0)=-1, \quad f(1)=0, \quad f(1+0)=+1$$

încât

$$f(1)=\frac{f(1-0)+(1+0)}{2}.$$

35. 10. *Să se construiască graficul funcției*

$$y=\sin\frac{1}{x},$$

în vecinătatea lui $x=0$.

Să presupunem pe x destul de mic, $\frac{1}{x}$ va fi mare, dar oricât ar fi de mare, redus la primul cadran ne va da pentru y o valoare. Oricare ar fi x, $\sin\frac{1}{x}$, adică y, va rămânea cuprins între -1 și $+1$. Când ne apropiem cu x de zero se întâmplă un fenomen curios: y ia o de infinitate de ori o valoare dată a cuprinsă între -1 și $+1$. In adevăr, punând $\frac{1}{x}=u$, ecuația $\sin u=a$ are o infinitate de soluții $u=k\pi+(-1)^k u_0$ unde u_0 este o soluție particulară. Această înseamnă că y va lua valoarea a în toate punctele de abscise

$$x=\frac{1}{k\pi+(-1)^k u_0},$$

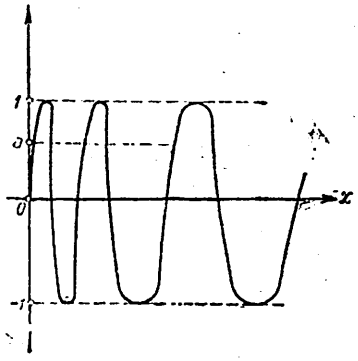


Fig. 31

puncte care când k crește, formează un șir infinit ce se apropie de origină. Aceasta înseamnă că origina pentru curbă, deci pentru funcție, este punct de discontinuitate în care nu putem ști care este valoarea funcției, adică este un punct de discontinuitate de speța a doua (fig. 31).

35. 11. *Să se reprezinte funcția periodică de perioadă* 2π *definită prin relațiile*

$$y=f(x)=\begin{cases} x & 0\leqq x<\pi \\ 0 & x=\pi \\ x-2\pi & \pi<x\leqq 2\pi. \end{cases}$$

Graficul funcției (fig. 32) în intervalul $(0,2\pi)$ este format din segmentul OA (fără punctul A) din punctul B și din segmentul CD (fără punctul C) In felul acesta, funcția are pentru $x=\pi$ un punct de discontinuitate de prima speță regulat, deoarece

$$f(\pi-0)=\pi, \quad f(\pi)=0, \quad f(\pi+0)=-\pi.$$

Deoarece funcția prin ipoteză este periodică, va trebui ca în intervalele $(2\pi, 4\pi), \ldots$ și $(0, -2\pi), (-2\pi, -4\pi), \ldots$ să construim același grafic. Cu

alte cuvinte, graficul funcţiei este compus dintr'o infinitate de segmente paralele cu prima bisectoare, fără capete şi dintr'o infinitate de puncte $B, F, \ldots B', F', \ldots$

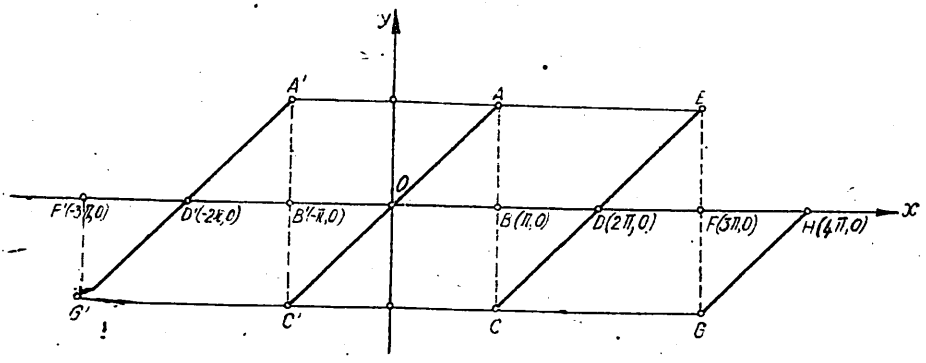


Fig. 32

35. 12. *Să se demonstreze că funcţia*

$$f(x)=\frac{1}{x},$$

continuă în intervalul deschis (0, 1), *nu este uniform continuă în acest interval.*

Inainte de a trata exemplul din enunţ, să facem câteva consideraţii generale. Definiţia continuităţii aşa cum se dă la început este *locală*, adică este legată de punctul unde studiem funcţia. In proprietatea continuităţii uniforme x' şi x'' sunt libere să varieze oricum în interval. In continuitatea într'un punct, numărul η este legat de valoarea lui ϵ şi de punctul însuşi; în continuitatea uniformă η depinde numai de ϵ (şi evident de funcţie). Sub această formă este importantă noţiunea de continuitate uniformă.

Să considerăm exemplul citat. Cum x' şi x'' pot fi aleşi oricum, alegem pe x' şi apoi pe $x''=\frac{x'}{1+x'}$. Avem

$$x''-x'=\frac{x'}{1+x'}-x'=-\frac{x'^2}{1+x'},$$

ceeace arată că dacă x' tinde către zero şi diferenţa $x''-x'$ tinde către zero. Dar

$$f(x'')-f(x')=\frac{1}{\frac{x'}{1+x'}}-\frac{1}{x'}=1,$$

ceeace spune că diferenţa valorilor funcţiei nu mai poate fi făcută mai mică decât un număr ϵ arbitrar de mic dat dinainte. Aceasta spune că x' şi x'' nu pot fi aleşi arbitrar, în special aşa cum i-am ales noi, deci funcţia nu este uniform continuă în intervalul ales.

§ 36. Funcţia exponenţială

Se numeşte funcţie exponenţială, funcţia $y=f(x)=a^x$ unde prin ipoteză $a>0$. Funcţia exponenţială este continuă peste tot. Tabloul de variaţie şi

graficul corespunzător după diferite valori ale lui a, este

$(a>1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

$(a<1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	a	$\searrow$	0

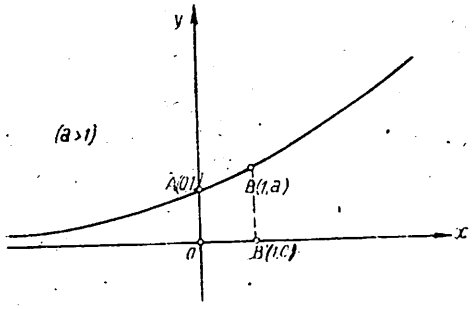


Fig 33

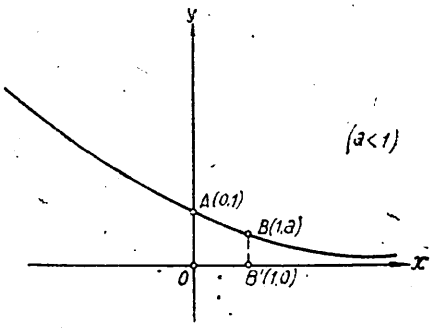


Fig. 34

Săgeţile din tablourile de variaţie arată creşterea sau descreşterea funcţiei. Pe grafice se citeşte că funcţia este mereu crescătoare dacă $a>1$ şi mereu descrescătoare dacă $a<1$. In ambele cazuri este totdeauna pozitivă fig. 33.

Dacă $a>1$ (cazul cel mai des întâlnit în aplicaţii) se vede pe grafic că cu cât x descreşte şi tinde către $-\infty$, y descreşte şi tinde către zero. Se zice că Ox este *asimptotă* pentru curbă. Aceeaşi dreaptă este asimptotă pentru curbă şi în ipoteza $a<1$.

Funcţia $y=e^x$ $(e=2{,}71\ldots>1)$ are graficul de forma celui din fig. 33 iar funcţia $y=e^{-x}=\left(\frac{1}{e}\right)^x\left(\frac{1}{e}=\frac{1}{2{,}71\ldots}<1\right)$ are graficul de forma celui din fig. 34.

Avem limita importantă

$$\lim_{\alpha\to 0,\ \beta\to\infty}(1+\alpha)^{\beta}=e^{\lim \alpha\beta}, \tag{I}$$

care este folosită totdeauna când funcţia pe care avem de calculat se prezintă sub forma nedeterminată 1^{∞}.

36. 1. *Folosind graficele lui e^x şi e^{-x} să se găsească graficele funcţiilor*

$$y_1=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\quad y_2=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}).$$

Vom reprezenta mai întâi pe aceeaşi figură, curbele (fig 35)

$$u=e^x \quad \text{şi} \quad v=e^{-x}.$$

Este suficient să construim pe prima, a doua deducându-se din ea prin simetrie în raport cu axa Oy. Curbele y_1 şi y_2 se construesc făcând semidiferenţa, respectiv semisuma, ordonatelor curbelor u şi v în punctele care au aceeaşi abscisă. Curba y_1 trece prin origine, deoarece pentru $x=0$, $u=v=1$, şi

este simetrică în raport cu acest punct, în timp ce curba y_2 trece prin punctul $A(0,1)$ şi este simetrică faţă de axa Oy. Cele două curbe nu se întâlnesc niciodată, deoarece din însăşi definiţia lor, în puncte de aceeaşi, abscisă, $y_1 < y_2$.

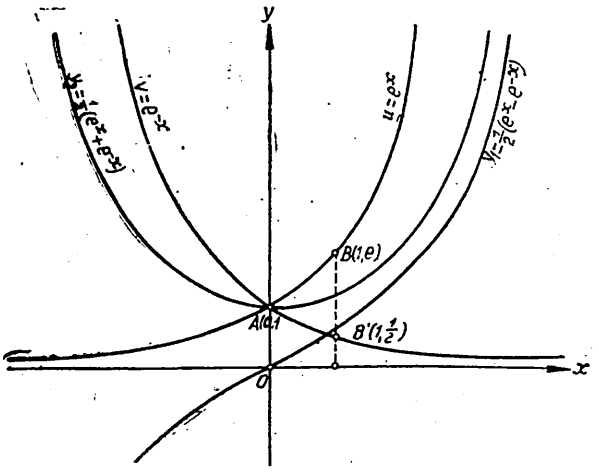


Fig. 35

Cele două funcţii considerate se numesc *sinusul* şi *cosinusul hiperbolic*, funcţii pe care le vom considera în special la § 40.

36. 2. *Să se demonstreze că dacă x' şi x'' sunt două numere iraţionale,*

$$a^{x'} \cdot a^{x''} = a^{x'+x''}, \quad a^{x'} : a^{x''} = a^{x'-x''}, \quad (a^{x'})^{x''} = a^{x'x''}.$$

Să demonstrăm prima lege, celelalte două stabilindu-se în mod analog x' şi x'' fiind numere iraţionale, se definesc cu ajutorul a câte două şiruri (§ 31, pct. 12) dintre care alegem pentru fiecare în parte, unul din ele; fie

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots \qquad \lim_{n\to\infty} x'_n = x',$$
$$x''_1, x''_2, \ldots, x''_n, \ldots \qquad \lim_{n\to\infty} x''_n = x''.$$

Prin definiţie

$$a^{x'_1}, a^{x'_2}, \ldots, a^{x'_n}, \ldots$$

are drept limită pe $a^{x'}$, adică

$$\lim_{n\to\infty} a^{x'_n} = a^{x'} \quad \text{şi tot aşa} \quad \lim_{n\to\infty} a^{x''_n} = a^{x''}. \tag{1}$$

Cum şirul $x'_n + x''_n$ are drept limită pe $x' + x''$ (§ 31, no. 2), înseamnă că

$$\lim_{n\to\infty} a^{x'_n + x''_n} = a^{x'+x''}. \tag{2}$$

Dar x'_n şi x''_n sunt raţionali încât putem scrie (§ 9, V)

$$a^{x'_n} \cdot a^{x''_n} = a^{x'_n + x''_n},$$

încât în baza lui (1) şi (2)

$$a^{x'} \cdot a^{x''} = \lim_{n\to\infty} a^{x'_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{x''_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{x'_n} \cdot a^{x''_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{x'_n + x''_n} = a^{x'+x''}.$$

36. 3. *Să se calculeze valoarea expresiei*

$$E = (\sin x + \cos x)^{\operatorname{tg} x},$$

când x tinde către $\frac{1}{2}\pi$.

Deoarece făcând pe $x = \frac{1}{2}\pi$, E ia forma 1^{∞}, vom scrie pe E sub forma (I). In acest scop scriem

$$E = [(\sin x + \cos x)^2]^{\frac{1}{2}\operatorname{tg} x} = (1 + 2\sin x \cos x)^{\frac{1}{2}\operatorname{tg} x},$$

de unde reiese că putem lua: $\alpha = 2\sin x \cos x$, $\beta = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, unde $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \alpha = 0$, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \beta \to \infty$. Cum

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \alpha\beta = \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} (\sin x \cos x) \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \sin^2 x = 1,$$

rezultă că valoarea expresiei E pentru $x = \frac{1}{2}\pi$ va fi $e^1 = e$.

36. 4. *Să se calculeze*

$$E = \lim_{x \to \infty} \left(\cos \frac{a}{x}\right)^{x^2},$$

a fiind un arc oarecare.

E se prezintă sub forma 1^{∞}. Cum

$$\left(\cos^2 \frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}x^2} = \left(1 - \sin^2 \frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}x^2},$$

putem lua: $\alpha = -\sin^2 \frac{a}{x}$, $\beta = \frac{1}{2}x^2$ şi condiţiile la limită vor fi satisfăcute. Deoarece

$$\lim_{x \to \infty} \alpha\beta = \lim_{x \to \infty} \left(-\frac{1}{2} x^2 \sin^2 \frac{a}{x}\right) = -\frac{1}{2} a^2 \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\sin \frac{a}{x}}{\frac{a}{x}}\right)^2 = -\frac{1}{2} a^2,$$

însemnează că: $E = e^{-\frac{1}{2}a^2}$.

36. 5. *Să se studieze seria cu termenul general*

$$u_n = \operatorname{tg}^n \left(a + \frac{\alpha}{n}\right),$$

a fiind un arc cuprins între 0 *şi* $\pi/4$.

Dela un rang destul de îndepărtat α/n va fi mai mic decât a şi seria va avea termenii pozitivi.

Criteriul rădăcinii dă

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \to \infty} \operatorname{tg} \left(a + \frac{\alpha}{n}\right) = \operatorname{tg} a.$$

Deci, dacă: $a < \frac{1}{4}\pi$, $\operatorname{tg} a < 1$ şi seria este convergentă. Dacă $a > \frac{1}{4}\pi$ seria este divergentă, iar dacă $a = \frac{1}{4}\pi$, avem

$$u_n = \left(\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{n}}\right)^n = \left(1+\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{n}}\right)^n,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} u_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n\operatorname{tg}\frac{\alpha}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{n}}} = e^{2\alpha \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{n}}{\frac{\alpha}{n}}} = e^{2\alpha} \neq 0.$$

adică seria este divergentă.

§ 37. Funcţia logaritmică.

1. **Funcţii inverse.** Fie $y=f(x)$ o funcţie oarecare; considerând această egalitate ca o ecuaţie în care necunoscuta este x, rezolvată dă o altă funcţie $x=g(y)$. Se zice că funcţiunile f şi g sunt *inverse* una alteia. Conform definiţiei avem identităţile

$$y=f[g(y)] \quad \text{şi} \quad x=g[f(x)]. \tag{I}$$

Dacă avem graficul unei funcţii, graficul inversei ei se obţine din acesta prin simetrie în raport cu prima bisectoare.

2. Funcţia logaritmică este inversa funcţiei exponenţiale. Dacă o notăm cu y, atunci prin definiţie $a^y = x$. Noua funcţie se notează cu $y = \log_a x$, numărul a considerat pozitiv se numeşte *baza* logaritmilor. Logaritmi care au baza 10 se numesc *zecimali* şi se notează pur şi simplu prin $\log x$, iar logaritmii care au baza e, şi care sunt cei mai folosiţi în Analiza Matematică, se notează cu $\ln x$ şi se numesc *logaritmi naturali*. In general avem identităţile

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{şi} \quad \log_a a^x = x. \tag{II}$$

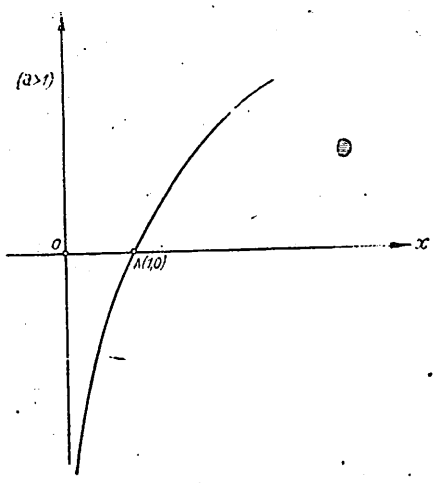


Fig. 36

Tabloul de variaţie şi graficul (fig. 36) sunt

x	0		1		a		$+\infty$
y	$-\infty$	$\to$	0	$\to$	1	$\to$	$+\infty$

făcute în ipoteza cea mai obişnuită ($a > 1$). De pe tablou şi figură se vede că funcţia logaritmică există numai pentru valori pozitive ale lui x, este discontinuă în origine şi continuă în restul intervalului. Funcţia este crescătoare (fig. 36).

3. Funcţia logaritmică are următoarele proprietăţi:

$$\begin{cases} \log_a x+\log_a y=\log_a xy, \\ \log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y}, \\ m\log_a x=\log_a x^m, \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

reguli care trebue ştiute şi într'un sens şi într'altul. In a treia formulă, m este un număr oarecare, din care cauză ea conţine şi logaritmii radicalilor.

4. Trecerea dela un logaritm în baza a la un logaritm în baza b se face cu ajutorul formulei

$$\log_b x=M\log_a x, \qquad \text{(IV)}$$

numărul M numindu-se *modul* şi este egal cu $M=\frac{1}{\log_a b}$. In particular, $\log e=0{,}43429$ şi $\ln 10=2{,}30259$.

37. 1. *Să se găsească logaritmul numărului* $\sqrt[5]{262144}$ *în baza 8.*

Dacă se face descompunerea în factori a numărului de sub radical, găsim că este egal cu 2^{18}. Problema este să-l găsim pe x astfel ca

$$8^x=2^{3x}=2^{\frac{18}{5}}, \quad \text{de unde} \quad x=\frac{18}{15}=\frac{6}{5}=1{,}2=\log_8 \sqrt[5]{262144}.$$

37. 2. *Ştiind că în baza* 10, $\log 2=0{,}30103$ *şi* $\log 3=0{,}47712$, *să se găsească* $\log 0{,}0432$.

Aplicând proprietăţile logaritmilor, avem succesiv

$$\log 0{,}0432=\log\frac{432}{10\,000}=\log\frac{2^4 3^3}{10^4}=4\log 2+3\log 3-4\log 10=$$

$$=4\cdot 0{,}30103+3\cdot 0{,}47712-4=2{,}63548-4=\bar{2}{,}63548.$$

37. 3. *Să se arate că dacă avem*

$$y=10^{\frac{1}{1-\log x}}, \quad z=10^{\frac{1}{1-\log y}} \quad \textit{atunci avem şi} \quad x=10^{\frac{1}{1-\log z}}.$$

In adevăr, aplicând logaritmii la primele două,

$$\log y=\frac{1}{1-\log x}, \quad \log z=\frac{1}{1-\log y};$$

ultima, pe baza celei dintâi, se scrie

$$\log z=\frac{1}{1-\frac{1}{1-\log x}}=-\frac{1-\log x}{\log x}; \quad 1-\log z=1+\frac{1-\log x}{\log x}=\frac{1}{\log x},$$

sau, inversând,

$$\log x=\frac{1}{1-\log z} \quad \text{adică} \quad x=10^{\frac{1}{1-\log z}}.$$

37. 4. *Să se calculeze numărul*

$$A=\frac{(a\pi+b)^2}{\sqrt{2\sqrt{3}+c}},$$

unde: $a=0{,}11702$; $b=1{,}43115$; $c=5{,}01264$.

Avem

$$\log A=2\log(a\pi+b)-\frac{1}{2}\log(2\sqrt{3}+c).$$

Calculăm această expresie în următoarele etape: calculăm mai întâi $a\pi$, apoi $a\pi+b$ și $\log(a\pi+b)$: tot așa $2\sqrt{3}$, apoi $2\sqrt{3}+c$ și în sfârșit $\log(2\sqrt{3}+c)$. Aşezăm calculele astfel

Calculul lui $\log a$

1170 . . . . 06819 $\Delta=37$

2 7,4

$\log a = \bar{1}{,}06826$

Calculul lui $a\pi+b$

$\log a = \bar{1}{,}06826$

$\log \pi = 0{,}49715$ $\Delta=11$

$\log a\pi = \bar{1}{,}56541$

$\frac{38}{3}$ ... 3676 3

$a\pi = 0{,}36763$

$b = 1{,}43115$

$a\pi+b = 1{,}79878$

Calculul lui $2\log(a\pi+b)$

1798 . . . . 25479 $\Delta=24$

7 16,8

8 1,92

$\log(a\pi+b)=0{,}25498$

$2\log(a\pi+b)=0{,}50996$

Calculul lui $2\sqrt{3}+c$

$\log 2 = 0{,}30103$

$\log\sqrt{3} = 0{,}23856$

$\log(2\sqrt{3}) = 0{,}53959$ $\Delta=12$

$\frac{8}{1}$ ...3464 1

$2\sqrt{3} = 3{,}46410$

$c = 5{,}01264$

$2\sqrt{3}+c = 8{,}47674$

Calculul lui $\frac{1}{2}\log(2\sqrt{3}+c)$

8476 . . . . 92819 $\Delta=5$

7 3,5

4 0,2

$\log(2\sqrt{3}+c)=0{,}92823$

$\frac{1}{2}\log(2\sqrt{3}+c)=0{,}46411$

Calculul lui A

$2\log(a\pi+b) = 0{,}50996$

$-\frac{1}{2}\log(2\sqrt{3}+c) = 1{,}53589$

$\log A = 0{,}04585$ $\Delta=39$

$\frac{71}{14}$ ... 1111

11,7 3

2,3 6

$A=1{,}11136.$

37. 5. *Să se calculeze expresia*

$$A=\frac{\sqrt[4]{a\sqrt[3]{b}}}{\sqrt{c}\cdot d^3},$$

unde: $a=2{,}345$; $b=0{,}526$; $c=3{,}428$; $d=1{,}729$.

Avem

$$\log A=\frac{1}{4}\log a+\frac{1}{12}\log b-\frac{1}{2}\log c-3\log d.$$

Calculele sunt:

Calculul lui $\frac{1}{4}\log a$

$\log a=0{,}37015$

$\frac{1}{4}\log a=0{,}09253$

Calculul lui $\frac{1}{12}\log b$

$\log b=\bar{1}{,}72099$

$\frac{1}{12}\log b=\bar{1}{,}97675$

Calculul lui $-\frac{1}{2}\log c$

$\log c=0{,}53504$

$\frac{1}{2}\log c=0{,}26752$

$-\frac{1}{2}\log c=\bar{1}{,}73248$

Calculul lui $-3\log d$

$\log d=0{,}23779$

$3\log d=0{,}71337$

$-3\log d=\bar{1}{,}28663$

$\log A=0{,}09253$

$\bar{1}{,}97675$

$\bar{1}{,}73248$

$\bar{1}{,}28663$

$\bar{1}{,}08839$ $\qquad \Delta=38$

$14\ldots1225$

$\frac{25}{22{,}8}\qquad 6$

$2{,}2\qquad 6$

$$A=0{,}122566$$

§ 38. Ecuații exponențiale și logaritmice

Se zice că o ecuație este *exponențială* sau *logaritmică* când necunoscuta se află la putere sau sub un logaritm. Asemenea ecuații se rezolvă reducându-le, prin proprietățiile funcțiilor exponențiale și logaritmice, la ecuații algebrice.

38. 1. *Să se rezolve ecuația* $(a^x)^x=(a^3)^{27}$.

Ecuația se scrie $a^{x^2}=a^{81}$, de unde $x^2=81$, $x=\pm 9$.

38. 2. *Să se rezolve ecuația* $2^{\log x}=8$.

Scriem: $2^{\log x}=2^3$, de unde $\log x=3$, adică $x=10^3=1000$.

38. 3. *Să se rezolve ecuația*

$$a^{x^2-4x+3}=1. \qquad (a>0)$$

Cum partea a doua este a^0, ecuația precedentă este echivalentă cu

$$x^2-4x+3=0,$$

care dă $x_1=1$, $x_2=3$.

38. 4. *Să se rezolve ecuația*

$$7^{2+3x}-5^{4x+1}=5^{4x+1}-7^{3x}.$$

Scriem ecuația sub forma

$$7^{2+3x}+7^{3x}=2\cdot 5^{4x+1};\quad 7^{3x}(7^2+1)=2\cdot 5^{4x+1}.$$

Simplificând cu $50=2\cdot 5^2$, ecuaţia se mai scrie

$$7^{3x}=5^{4x-1}.$$

Aplicând logaritmi în baza 10 avem

$$3x\log 7=(4x-1)\log 5;\quad x=\frac{\log 5}{4\log 5-3\log 7}.$$

38. 5. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\frac{\log a+\log x}{\log(b+x)}=2.$$

Ecuaţia se mai scrie

$$\log ax-\log(b+x)^2=0;\quad \log\frac{ax}{(b+x)^2}=0,$$

de unde rezultă

$$\frac{ax}{(b+x)^2}=1;\quad x^2+(2b-a)x+b^2=0.$$

Pentru ca ecuaţia să admită rădăcini reale, este necesar să avem

$$(2b-a)^2-4b^2\geqq 0;\quad a(a-4b)\geqq 0.$$

Cum enunţul problemei cere $a>0$ (altfel nu i-am putea aplica logaritmi) înseamnă că trebue să avem $a\geqq 4b$.

38. 6. *Să se rezolve sistemul*

$$2^{\log x}3^{\log y}=\sqrt{54},\ \log x+\log y=2.$$

Punem, pentru simplificarea scrierii, $\log x=u$, $\log y=v$. Sistemul devine

$$2^u 3^v=\sqrt{2\cdot 3^3},\ u+v=2,$$

şi scoţând pe v din a doua, prima se scrie succesiv

$$2^u\cdot 3^{2-u}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}};\quad \left(\frac{2}{3}\right)^u=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

de unde rezultă $u=\frac{1}{2}$, deci $v=\frac{3}{2}$. Revenind la vechile necunoscute,

$$\log x=\frac{1}{2},\ \log y=\frac{3}{2};\quad x=\sqrt{10},\ y=\sqrt{1000}.$$

38. 7. *Să se rezolve sistemul*

$$x^y=y^x,\ x^p=y^q,$$

în care p şi q sunt două numere date.

Luând logaritmii, avem

$$y\log x=x\log y \text{ şi } p\log x=q\log y,$$

ecuaţii care, împărţite parte cu parte, dau

$$\frac{y}{p}=\frac{x}{q};\quad y=\frac{p}{q}x.$$

Cu ajutorul acestei valori avem din a doua ecuaţie

$$x^p = y^q = \left(\frac{p}{q}\right)^q x^q; \quad x^{p-q} = \left(\frac{p}{q}\right)^q.$$

Rezultă

$$x = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}}, \; y = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}+1} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{p-q}}.$$

§ 39. Funcţii trigonometrice inverse

1. Funcţia $y = \arcsin x$ este inversa funcţiei sinusoidale, adică relaţia $y = \arcsin x$ cere: $\sin y = x$. Aceasta înseamnă că intervalul de existenţă este $[-1, +1]$ şi că, în acest interval, funcţia are o infinitate de determinări, toate diferind între ele printr'un multiplu de 2π. Pentru noi, *notaţia $\arcsin x$ va însemna valoarea acestei funcţii cuprinsă între*

$$-\frac{1}{2}\pi \text{ şi } \frac{1}{2}\pi,$$

reprezentată pe fig. 37 prin arcul AB simetricul arcului de sinusoidă $A'B'$ (§ 37, pct. 1) faţă de bisectoarea (D). Conform definiţiei avem:

$$\sin(\arcsin x) = x,$$
$$\arcsin(\sin x) = x \qquad \text{(I)}$$

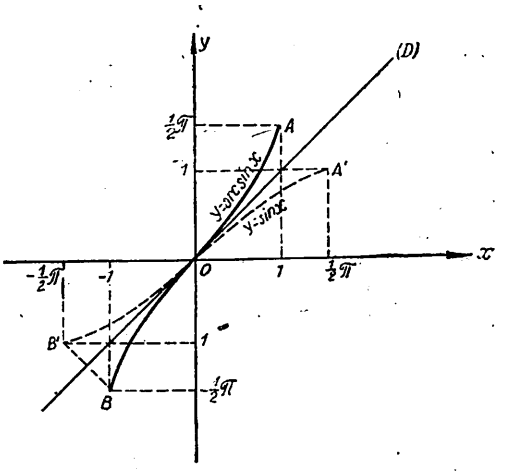


Fig. 37

Funcţia este continuă şi crescătoare în tot intervalul.

2. Funcţia $y = \operatorname{arctg} x$ este inversă funcţiei $\operatorname{tg} x$, adică relaţia $y = \operatorname{arctg} x$ se mai scrie $\operatorname{tg} y = x$. Funcţia există peste tot şi are o infinitate de determinări. *Prin $\operatorname{arctg} x$ vom înţelege determinarea cuprinsă între* $-\frac{1}{2}\pi$ şi $\frac{1}{2}\pi$ toate celelalte diferind de aceasta printr'un multiplu de π. Funcţia $y = \operatorname{arctg} x$ astfel definită, este reprezentată în fig. 38 prin curba (C), simetrică curbei (C'), faţă de bisectoarea (D), curbă ce reprezintă în intervalul $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$ tangentoida.

Conform definiţiei, avem

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x. \qquad \text{(II)}$$

Funcţia este continuă şi crescătoare peste tot.

3. Funcţiile $y = \arccos x$ şi $y = \operatorname{arccot} x$. Aceste două funcţii se pot defini direct ca funcţii trigonometrice inverse, sau prin relaţiile:

$$\arccos x = \frac{1}{2}\pi - \arcsin x, \quad \operatorname{arccot} x = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} x; \qquad \text{(III)}$$

prima este definită în intervalele $[-1,+1]$, iar a doua peste tot. Valorile celor două funcţii noi sunt cuprinse între 0 şi π.

39. 1. *Pentru care valori ale lui x, funcţia*

$$y=\arccos\frac{\sqrt{x^2-1}}{x},$$

există ?

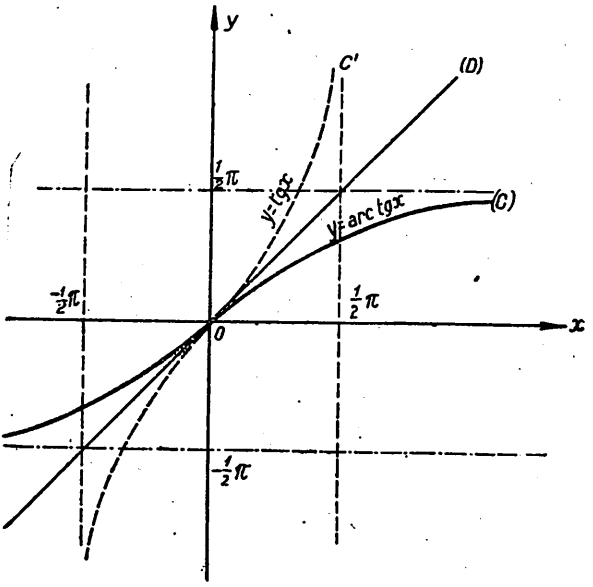


Fig. 38

Pentru ca funcţia să existe, este necesar ca

$$-1\leqq\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\leqq 1.$$

Numărătorul fracţiei este, în valoare absolută, întotdeauna mai mic decât numitorul, deoarece dacă l-am mări, luând în loc de x^2-1 pe x^2, abia atunci în valoare absolută ar fi egal cu numitorul. Deci fracţia este subunitară. Cu alte cuvinte, dacă $x>0$, fracţia este mai mică decât 1, iar dacă $x<0$ fracţia este mai mare decât -1. Rămâne o singură condiţie, ca fracţia să existe, adică expresia de sub radical să fie pozitivă; rezultă $|x|\geqq 1$, sau ceeace este totuna cu $-1\leqq x\leqq+1$.

29. 2. *Să se demonstreze egalitatea*

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}=\arcsin\frac{63}{65},$$

Punem

$$u=\arcsin\frac{4}{5},\ v=\arcsin\frac{5}{13}\ \ w=\arcsin\frac{63}{65},$$

de unde deducem

$$\sin u=\frac{4}{5},\ \sin v=\frac{5}{13},\ \sin w=\frac{63}{65}, \tag{1}$$

iar relaţia de demonstrat se scrie: $u+v=w$. A demonstra această relaţie este tot una cu a demonstra relaţiile

$$\sin(u+v)=\sin w,\ \cos(u+v)=\cos w. \tag{2}$$

In adevăr, arcele $u+v$ şi w având acelaşi sinus şi acelaşi cosinus, trebue să aibă aceaşi extremitate pe cercul trigonometric, adică $u+v=2k\pi+w$. Cum arcele u, v, w sunt, în baza definiţiilor date, mai mici decât $\frac{1}{2}$, relaţia precedentă nu poate avea loc decât dacă luăm $k=0$; deci $u+v=w$. Dar, din relaţiile (1) scoatem

$$\cos u=\sqrt{1-\sin^2 u}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5},\ \cos v=\frac{12}{13},\ \cos w=\frac{16}{65},$$

valori care verifică relaţiile (2)

29. 3. *Să se calculeze suma*

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y$$

după diferite valori ale lui x *și* y.

Punem

$$u=\operatorname{arctg} x,\ v=\operatorname{arctg} y;\ \text{de unde}\ \operatorname{tg} u=x,\ \operatorname{tg} v=y,$$

și notăm cu A expresia din enunț. Avem: $A=u+v$ și aplicând tangenta

$$\operatorname{tg} A=\operatorname{tg}(u+v)=\frac{\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v}{1-\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v}=\frac{x+y}{1-xy}\ .$$

Mai multe cazuri se pot prezenta: a) $x>0$, $y>0$ și $\frac{x+y}{1-xy}>0$ adică $xy<1$, atunci $\operatorname{tg} A>0$ adică A are extremitatea în primul cadran, deci putem scrie: $A=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$; avem egalitatea

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\ . \tag{1}$$

Dacă $\frac{x+y}{1-xy}<0$, adică $xy>1$, însemnează că suma $u+v=A$ este mai mare decât $\frac{1}{2}\pi$, și pe de altă parte, arctg, $\frac{x+y}{1-xy}$ va fi un arc negativ cuprins între 0 și $-\frac{1}{2}\pi$. In acest caz vom avea: $A=\pi+\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$, adică

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\pi+\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}, \tag{2}$$

b) $x<0$, $y<0$ și $\frac{x+y}{1-xy}<0$, adică $xy<1$, avem relația (1). Dacă însă: $\frac{x+y}{1-xy}>0$, adică $xy>1$, atunci $u+v<-\frac{1}{2}\pi$ și $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$ este cuprins între 0 și $+\frac{1}{2}\pi$. Vom avea relația

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}, \tag{3}$$

relația care, în realitate, este tot una cu (2); acest lucru rezultă imediat dacă facem $x=-x'$, $y=-y'$ $(x',\ y'>0)$. c) $xy<0$; o discuție simplă ne spune că avem totdeauna relația (1).

In rezumat, rezultatele obținute sunt cuprinse în formula

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}+C, \tag{4}$$

unde C este o constantă independentă de x și y egală cu zero, π sau $-\pi$ după diverse valori pe care le pot lua arcele x și y.

39. 4. *Să se rezolve ecuația*

$$\arcsin x+\arcsin\frac{(\sqrt{3}-1)\,x}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}\ .$$

Punem

$$u=\arcsin x,\ v=\arcsin\frac{(\sqrt{3}-1)\,x}{\sqrt{2}}\ .$$

de unde

$$\sin u=x,\ \sin v=\frac{(\sqrt{3}-1)x}{\sqrt{2}}\ .$$

Prima egalitate cere:

$$-1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

iar a doua

$$-1 \leqslant \frac{(\sqrt{3}-1)x}{\sqrt{2}} \leqslant 1$$

de unde

$$-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}; \tag{2}$$

inegalităţile (1) şi (2) trebue să aibă loc simultan, deci rămâne (1). Avem mai departe

$$\cos u = \sqrt{1-x^2},\ \cos v = \sqrt{1-(2-\sqrt{3})x^2}.$$

Cum ecuaţia dată se scrie

$$u+v = \frac{1}{4}\pi,$$

aplicând sinusul vom avea ecuaţia

$$x\sqrt{1-(2-\sqrt{3})x^2} + \frac{(\sqrt{3}-1)x}{\sqrt{2}}\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{3}$$

Pentru a o rezolva o scriem sub forma

$$x\sqrt{2}\sqrt{1-(2-\sqrt{3})x^2} = 1-(\sqrt{3}-1)x\sqrt{1-x^2},$$

care prin ridicare la pătrat se reduce la

$$2(-1+\sqrt{3})x^2 - 1 = -2(\sqrt{3}-1)x\sqrt{1-x^2},$$

şi care, din nou ridicată la pătrat, se transformă in ecuaţia bipătrată

$$16(2-\sqrt{3})x^4 - 4(3-\sqrt{3})x^2 + 1 = 0.$$

Folosind expresia: $2(2\pm\sqrt{3}) = (\sqrt{3}\pm 1)^2$, rădăcinile acestei ecuaţii sunt

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{2},\ x_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Rămâne să verificăm dacă aceste rădăcini verifică pe (3) sau mai bine, ecuaţia dată însăşi. Singura soluţie este $x = \frac{1}{2}$.

§ 40. Funcţii hiperbolice

1. Se numesc *funcţii hiperbolice directe* funcţiile $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ definite prin formulele

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),\ \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \tag{1}$$

Proprietăţile acestor funcţii se deduc din proprietăţile funcţiilor exponenţiale. Vom vedea din problemele care urmează că aceste proprietăţi sunt asemănătoare proprietăţilor funcţiilor trigonometrice. Funcţiile hiperbolice directe sunt continue peste tot.

Graficele primelor două funcţii se găsesc în fig. 35.

2. Se numesc *funcţii hiperbolice inverse,* funcţiile inverse funcţiilor hiperbolice directe. Ele se notează cu $\operatorname{argsh} x$, $\operatorname{argch} x$, $\operatorname{argth} x$. Aceste noi funcţii se exprimă cu ajutorul funcţiei logaritmice astfel

$$\begin{cases} \operatorname{argsh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1}), \quad \operatorname{argch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}), \\ \operatorname{argth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}. \end{cases} \tag{II}$$

40. 1. *Să se demonstreze că între funcţiile hiperbolice avem relaţiile*

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \tag{1}$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \tag{2}$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x, \tag{3}$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}. \tag{4}$$

Prima formulă se stabileşte astfel

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}[(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2] = \frac{4e^x \cdot e^{-x}}{4} = e^0 = 1.$$

Prima formulă (2) se stabileşte plecând dela partea dreaptă,

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{4}[(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y}) + (e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})].$$

$$= \frac{1}{4}(2e^{x+y} + 2e^{-x-y}) = \operatorname{ch}(x+y).$$

Analog se stabilesc toate celelalte formule.

Observaţie. Dacă punem: $X = \operatorname{ch} x$ şi $Y = \operatorname{sh} x$, relaţia (1) arată că punctul $M(X, Y)$ descrie hiperbola echilaterală

$$X^2 - Y^2 = 1;$$

de aci vine numirea de *funcţii hiperbolice.*

40. 2. *Să se stabilească formula (analoagă formulei lui Moivre).*

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx.$$

Folosind formulele de definiţie,

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x, \tag{1}$$

obţinem

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = e^{nx} = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx.$$

oricare ar fi n.

40. 3. *Să se demonstreze formulele* (II).

a) Prin definiţie, se numeşte $y = \operatorname{argsh} x$ funcţia inversă funcţiei $\operatorname{sh} x$ adică: $\operatorname{sh} y = x$, sau încă

$$e^y - e^{-y} = 2x, \quad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0,$$

care rezolvată în raport cu e^y dă

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

Cum radicalul este mai mare decât x nu putem lua valoarea cu semnul —, deoarece ar însemna ca exponenţiala din prima parte să fie negativă, ceeace nu se poate. Deci

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1}; \quad x = \ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

b) Pentru: $y = \operatorname{argch} x$, vom scrie

$$e^y + e^{-y} = 2x; \quad e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0;$$
$$e^y = x \pm \sqrt{x^2-1}; \quad y = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}).$$

In acest caz amândouă valorile sunt admisibile, deoarece $\sqrt{x^2-1}$ este totdeauna mai mic decât x.

c) Pentru: $y = \operatorname{argth} x$, punem: $\operatorname{th} y = x$, adică

$$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x \quad \text{de unde} \quad y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

40. 4. *Să se facă studiul funcţiilor*

$$y_1 = \operatorname{sh} x, \quad y_2 = \operatorname{ch} x, \quad y_3 = \operatorname{th} x.$$

Din forma formulelor (I) reiese că cele trei funcţii există pentru orice valoare a lui x şi sunt continue peste tot. In adevăr, pentru y_3, ca funcţia să fie discontinuă, ar trebui ca numitorul să se anuleze, adică

$$e^x + e^{-x} = 0,$$

ceeace nu se poate, deoarece oricare ar fi exponentul, funcţia exponenţială este totdeauna pozitivă.

Graficul primelor două funcţii a fost făcut în fig. 35. Prima funcţie când x variază dela $-\infty$ la $+\infty$, creşte dela $-\infty$ la $+\infty$, fiind negativă pentru $x<0$ şi pozitivă pentru $x>0$; funcţia este impară.

A doua funcţie descreşte dela $+\infty$ la 1 când x variază dela $-\infty$ la 0 şi creşte dela 1 la $+\infty$ când x variază dela 0 la $+\infty$. Oricare ar fi x, $y_2 > 1$. Funcţia este pară.

Pentru a treia funcţie se vede din graficele funcţiilor y_1 şi y_2, că y_3 va fi mereu subunitar. Luând în câteva puncte şi calculând y_1/y_2 obţinem fig. 39. Când x creşte dela $-\infty$ la $+\infty$ funcţia creşte dela -1 la $+1$, adică $-1 \leqslant y_3 \leqslant 1$. Funcţia este impară.

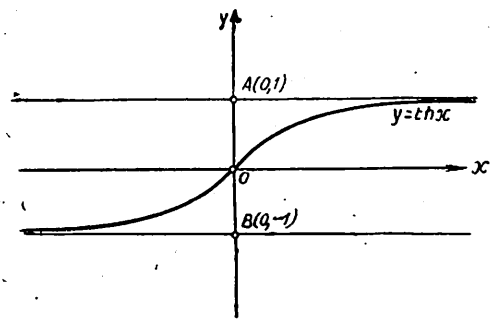


Fig. 39

40. 5. *Să se facă studiul funcţiilor.*

$$y_1 = \operatorname{argsh} x, \quad y_2 = \operatorname{argch} x,$$
$$y_3 = \operatorname{argth} x.$$

Conform celor spuse la § 37, pct 1, graficele funcţiilor din enunţ se obţin din graficele funcţiilor y_1, y_2, y_3 dela problema precedentă, construind simetricele lor faţă de prima bisectoare (fig. 40 şi 41). Din aceste grafice rezultă următoarele:

a) Funcţia y_1 există oricare ar fi x şi creşte dela $-\infty$ la $+\infty$; este funcţie impară.

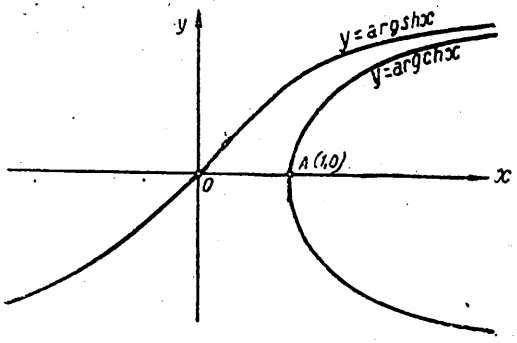


Fig. 40.

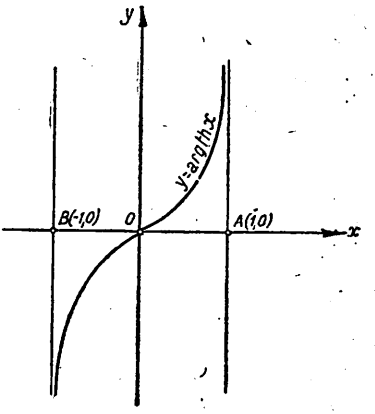


Fig. 41

b) Funcţia y_2 există numai pentru $x>1$ şi are pentru fiecare valoare a lui x, două valori egale şi de semne contrare lucru ce rezultă şi din formula (II). In adevăr, pentru aceeaşi valoare a lui x avem

$$y_2'=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\quad y_2''=\ln(x-\sqrt{x^2-1});$$

dar,

$$y_2'+y_2''=\ln(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})=\ln 1=0;$$

c) Funcţia y_3 are intervalul de existenţă $[-1, +1]$ şi creşte dela $-\infty$ la $+\infty$. Funcţia este impară. In adevăr,

$$y_3(-x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=-y_3(x).$$

§ 41. Derivatele funcţiilor elementare

1. Fiind dată o funcţie $y=f(x)$, continuă pentru valoarea $x=x_0$, se numeşte *derivată* limita raportului dintre creşterea funcţiei şi creşterea variabilei, adică

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (I)$$

Atunci când vorbim de această limită, prin ipoteză presupunem că există, adică este unică, finită şi bine determinată. Dacă x_0 ia toate valorile în intervalul de continuitate şi dacă în toate aceste puncte limita precedentă există, derivata este ea însăşi o funcţie în intervalul în care există, funcţie care se notează cu y' sau $f'(x)$ sau $\frac{dy}{dx}$. Dacă în interiorul unui interval, funcţia are o derivată în fiecare punct, în sensul că raportul (I) are o limită unică, finită şi bine determinată, se zice că funcţia este *derivabilă* în acest interval. O funcţie derivabilă într'un interval este continuă în acest interval; reciproca nu este adevărată, adică o funcţie continuă într'un interval nu este neapărat derivabilă în acest interval.

Dacă raportul (1) are o limită când Δx tinde către zero prin valori negative şi altă limită când Δx tinde către zero prin valori pozitive se zice că în punctul x_0 funcţia admite două derivate, *una la stânga şi alta la dreapta* (nu se mai poate spune că funcţia este derivabilă în sensul dat mai sus). Se poate chiar ca funcţia să aibă o derivată într'o parte şi să nu aibă în cealaltă.

Derivata funcţiei $y=f(x)$ reprezintă coeficientul unghiular al tangentei la curba reprezentativă în punctul unde o calculăm, $x=x_0$.

2. Derivatele funcţiilor elementare sunt:

a) $y=a$ (constantă), $y'=0$;

b) $y=x^n$ $y'=nx^{n-1}$
(caz particular: $\sqrt{x}, y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$);

c) $y=a^x$ $y'=a^x \ln a$;
(caz particular: $y=e^x, y'=e^x$);

d) $y=\ln x$, $y'=\frac{1}{x}$;

e) $y=\sin x$, $y'=\cos x$;

f) $y=\cos x$, $y'=-\sin x$;

g) $y=\operatorname{tg} x$, $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$

h) $y=\arcsin x$, $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

i) $y=\arccos x$, $y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;

j) $y=\operatorname{arc\,tg} y$, $y'=\frac{1}{1+x^2}$;

k) $y=\operatorname{sh} x$, $y'=\operatorname{ch} x$;

l) $y=\operatorname{ch} x$, $y'=\operatorname{sh} x$;

m) $y=\operatorname{th} y$, $y'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

n) $y=\operatorname{argsh} x$, $y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

o) $y=\operatorname{argch} x$, $y'=\frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}$;

p) $y=\operatorname{arg\,th} x'$, $y'=\frac{1}{1-x^2}$;

3. O funcţie de funcţie, adică o funcţie de forma:

$y=f(u)$, unde $u=g(x)$, se derivă după regula

$$y'_x=f'_u(u)\cdot u'_x.$$

4. Derivatele funcţiilor compuse sunt

a) $y=u+v$, $y'=u'+v'$; b) $y=uv$, $y'=u'v+uv'$;

(caz particular: $y=Au$, A fiind constant, $y'=Au'$)

c) $y=\frac{u}{v}$, $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Primele două reguli se aplică în general pentru un număr finit de termeni sau factori.

Prin derivata logaritmică a unui produs

$$y=u_1\ u_2 \ldots u_n$$

se înţelege expresia

$$\frac{y'}{y}=\frac{u'_1}{u_1}+\frac{u'_2}{u_2}+\ldots+\frac{u'_n}{u_n}.$$

41. 1. *Să se calculeze derivata funcţiei*

$$y=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}+\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

Avem

$$y=\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)^2+(\sqrt{x^2+1}-x)^2}{(x^2+1)-x^2}=2(2x^2+1).$$

încât $y'=8x$.

41. 2. *Să se calculeze derivata funcției*

$$y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

a fiind o constantă

Avem succesiv

$$y'=\frac{\sqrt{a^2-x^2}-\frac{-2x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}=\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}.$$

41. 3. *Să se calculeze derivata funcțiilor*

$$y=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2},\quad z=\frac{e^{ax}(-b\cos bx+a\sin bx)}{a^2+b^2}$$

unde a și b sunt două constante arbitrare.

Avem succesiv

$$y'=\frac{1}{a^2+b^2}[ae^{ax}(a\cos ax+b\sin bx)+$$
$$+e^{ax}(-ab\sin bx+b^2\cos bx)]=e^{ax}\cos bx;$$

$$z'=\frac{1}{a^2+b^2}[ae^{ax}(-b\cos bx+a\sin bx)+$$
$$+e^{ax}(b^2\sin bx+ab\cos bx)]=e^{ax}\sin bx.$$

Este interesant de observat că pentru a deriva, funcțiile n'au fost considerate ca niște fracții; au fost scrise sub forma $\frac{1}{a^2+b^2}f(x)$ repetându-se constanta multiplicativă la derivată (pct. 4, *b*).

41. 4. *Să se calculeze derivata funcției*

$$y=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x.$$

Avem

$$y'=2x\sin x+x^2\cos x+2\cos x-2x\sin x-2\cos x=x^2\cos x.$$

41. 5. *Să se calculeze derivata funcției*

$$y=\frac{8x}{x^2+4}-4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+x.$$

Avem

$$y'=8\frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2}-4\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}+1=\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right)^2.$$

41. 6. *Să se calculeze derivata funcției*

$$y=\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}-\sqrt{x^2+1}.$$

Scriem mai întâi funcţia sub forma

$$y=(\ln 1+\sqrt{x^2+1})-\ln x-\sqrt{x^2+1};$$

apoi avem

$$y'=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1+\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{x}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

41. 7. *Să se calculeze derivata funcţiei*

$$y=\ln\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}.$$

Făcând numitorul raţional şi aplicând proprietăţile logaritmilor, funcţia capătă forma simplă

$$y=\ln\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{2X}=\ln(1+\sqrt{1-x^2})-\ln x-\ln 2.$$

Pentru derivată obţinem

$$y'=\frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1+\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

41. 8. *Să se calculeze derivata funcţiei*

$$y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x\right).$$

Avem

$$y'=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x\right)}\cdot\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x\right)}=\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\pi+x\right)}=\frac{1}{\cos x}.$$

41. 9. *Să se calculeze derivata funcţiei*

$$y=\frac{\sqrt{1-x^4}+\sin x}{x^2+\cos x},$$

şi să se arate că această derivată se poate pune sub forma

$$y'=\frac{\sqrt{1-x^4}-2x}{\sqrt{1-x^4}(1-\sqrt{1-x^4}\sin x+x^2\cos x)}.$$

Avem

$$y'=\frac{\left(-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}+\cos x\right)(x^2+\cos x)-(2x-\sin x)(\sqrt{1-x^4}+\sin x)}{(x^2+\cos x)^2}.$$

Numărătorul se poate scrie succesiv

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}[(-2x^3+\sqrt{1-x^4}\cos x)(x^2+\cos x)-(2x-\sin x)(1-x^4+\sqrt{1-x^4}\sin x)]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}[(\sqrt{1-x^4}-2x)+x^2(\sqrt{1-x^4}-2x)\cos x+(1-x^4-2x\sqrt{1-x^4})\sin x]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}(\sqrt{1-x^4}-2x)(1+x^2\cos x+\sqrt{1-x^4}\sin x);$$

iar numitorul

$$(x^2+\cos x)^2=x^4(\cos^2 x+\sin^2 x)+2x^2\cos x+1-\sin^2 x=$$
$$=(1+2x^2\cos x+x^4\cos^2 x)-(1-x^4)\sin^2 x=$$
$$(1+x^2\cos x\sqrt{1-x^4}\sin x)(1+x^2\cos x-\sqrt{1-x^4}\sin x).$$

Rezultă forma derivatei din enunțul problemei.

41. 10. *Să se calculeze derivata funcției*

$$y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},$$

și să se explice rezultatul (x este presupus pozitiv).

Avem

$$y=\frac{1}{1+\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot\frac{\frac{\sin x(1+\cos x)+\sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{(1+\cos x)\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\frac{1}{2}.$$

Rezultatul se justifică prin faptul că funcția dată se poate scrie mai simplu astfel

$$y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}}=\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\sin x}=$$
$$=\operatorname{arctg}\frac{2\sin^2\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}x.$$

41. 11. *Să se găsească derivata funcției*

$$y=\operatorname{arctg}\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1},$$

și să se explice rezultatul.

Avem

$$y'=\frac{\frac{(2x-2)(x^2+2x-1)-(2x+2)(x^2-2x-1)}{(x^2+2x-1)^2}}{1+\left(\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)^2}=\frac{2}{1+x^2}.$$

Funcția dată are deci aceeași derivată ca și funcția $z=2\operatorname{arctg}x$.

Să arătăm că y diferă de z printr'o constantă. In adevăr, cele două funcții inversate ne dau

$$\operatorname{tg}y=\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1},\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}z=x.$$

Pe baza celei de a doua avem

$$\operatorname{tg} z = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}z}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}z} = \frac{2x}{1-x^2},$$

deci

$$\operatorname{tg}(y-z) = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} z}{1+\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z} = \frac{(x^2-2x-1)(1-x^2)-2x(x^2+2x-1)}{(1-x^2)(x^2+2x-1)+2x(x^2-2x-1)} = 1,$$

adică: $y-z=\pi/4$.

41. 12. *Să se calculeze derivata funcţiei*

$$y = \operatorname{argth}\frac{x+a}{1+ax},$$

şi să se explice rezultatul.

Avem

$$y' = \frac{\frac{1+ax-a(x+a)}{(1+ax)^2}}{1-\frac{(x+a)^2}{(1+ax)^2}} = \frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(x+a)^2} = \frac{1}{1-x^2},$$

adică aceeaşi derivată cu derivata funcţiei: $z=\operatorname{argth} x$. Trebue deci să demonstrăm că

$$y=z=\text{const.}, \quad \text{sau} \quad \operatorname{th}(y-z)=\text{const.},$$

unde

$$\operatorname{th} y = \frac{x+a}{1+ax}, \quad \operatorname{th} z = x.$$

Pentru aceasta vom ţine seama de formula (4) dela 40. 1.

41. 13. *Fiind dată funcţia:* $u=\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)$, *1° să se calculeze* x *în funcţie de* u. *2° să se calculeze* u'.

1° Avem $\operatorname{tg} u = \operatorname{sh} x$, de unde raportându-se la definiţia lui $\operatorname{sh} x$

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \operatorname{tg} u; \quad e^{2x}-2\operatorname{tg} u \cdot e^x - 1 = 0,$$

ecuaţie care rezolvată în raport cu e^x ne dă

$$e^x = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}u\right).$$

Deci

$$x = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}u\right). \tag{1}$$

2° Avem

$$u' = \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x},$$

în baza relaţiei cunoscute: $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$ (prob. 40, 1).

41. 14. *Se consideră funcţia*

$$y = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x \sin x},$$

și se cere: 1°. Să se arate că se poate scrie sub forma: $y=\operatorname{tg}(x-\operatorname{arctg} x)$. 2°. Să se calculeze derivata în două moduri, deducându-se o identitate.

1°. Putem scrie

$$y=\frac{\operatorname{tg} x-x}{1+x\operatorname{tg} x}=\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}=\operatorname{tg}(x-\operatorname{arctg} x).$$

2°. Avem, plecând dela prima formă

$$y'=\frac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2},$$

și plecând dela a doua formă

$$y'=\frac{1}{\cos^2(x-\operatorname{arcg} x)}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)=\frac{x^2}{(1+x^2)\cos^2(x-\operatorname{arctg} x)}.$$

Comparând aceste două rezultate găsim identitatea

$$(\cos x+x\sin x)^2=(1+x^2)\cos^2(x-\operatorname{arctg} x).$$

41. 15. *Să se calculeze suma*

$$S=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}.$$

Considerăm identitatea

$$x+x^2+\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-x}{x-1},$$

care nu reprezintă altceva decât suma unei progresii geometrice, și o derivăm parte cu parte. Obținem

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\frac{[(n+1)x^n-1](x-1)-(x^{n+1}-x)}{(x-1)^2};$$

$$S=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

41. 16. *Să se determine coeficienții A_k în așa fel, încât derivata funcției*

$$y=(x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_m)e^x,$$

să fie egală cu x^me^x.

Derivata lui y este

$$y'=[mx^{m-1}+(m-1)A_1x^{m-2}+\cdots+A_{m-1}]e^x+(x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_m)e^x=$$
$$=\{x^m+(A_1+m)x^{m-1}+[A_2+(m-1)A_1]x^{m-2}+\cdots+(A_m+A_{m-1})\}e^x,$$

care, pentru ca să fie egală cu x^me^x, trebue ca

$$A_1+m=0,\ A_2+(m-1)A_1=0,\ \ldots,\ A_m+A_{m-1}=0,\text{ adică}$$
$$A_1=-m,\ A_2=-(m-1)A_1=m(m-1),$$
$$A_3=-(m-2)A_2=-m(m-1)(m-2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_p=-(m-p+1)A_{p-1}=(-1)^pm(m-1)\ldots(m-p+1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_m=(-1)^mm(m-1)\ldots2\cdot1,$$

încât funcţia dată capătă forma

$$y=[x^m-mx^{m-1}+m(m-1)x^{m-2}-m(m-1)(m-2)x^{m-3}+\cdots+(-1)^m m!]e^x.$$

41. 17. *Să se arate că funcţia*

$$y=f(x)=|x|,$$

are în origine (adică pentru $x=0$) o derivată la stânga şi una la dreapta.

In origine, avem

$$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=|\Delta x|,$$

de unde reiese că Δy are două valori, după cum Δx este pozitiv sau negativ.

1°. Dacă: $\Delta x>0$, adică tinde către zero prin valori pozitive, atunci

$$\Delta y=\Delta x \quad \text{şi} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1.$$

2°. Dacă: $\Delta x<0$, adică tinde către zero prin valori negative, atunci

$$\Delta y=-\Delta x \quad \text{şi} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1.$$

Din cele două valori găsite mai sus reiese că pentru $x=0$ funcţia are derivata la stânga -1 şi derivata la dreapta $+1$. Acelaşi rezultat îl obţinem şi pe cale geometrică (fig. 42). In adevăr, pentru a face graficul funcţiei observăm că dacă $x>0$, ecuaţia curbei este: $y=x$, adică la dreapta lui Oy este reprezentată prin semidreapta (D_1); dacă $x<0$, atunci ecuaţia curbei este $y=-x$, adică la stânga lui Oy graficul este reprezentat de semidreapta (D_2). Se vede în figură că în orice interval $[x_1, x_2]$ graficul M_1OM_2 este continuu, adică funcţia este continuă. In ce priveşte derivata, oriunde s'ar găsi M_1 la stânga lui Oy, tangenta la curba reprezentativă este însăşi (D_2) al cărei coeficient unghiular este -1, deci la stânga lui O peste tot derivata are valoarea -1. Analog, oriunde ar fi M_2 la dreapta lui Oy, tangenta la curba reprezentativă este însăşi (D_1) al cărei coeficient unghiular este 1, deci la dreapta derivata funcţiei va fi 1.

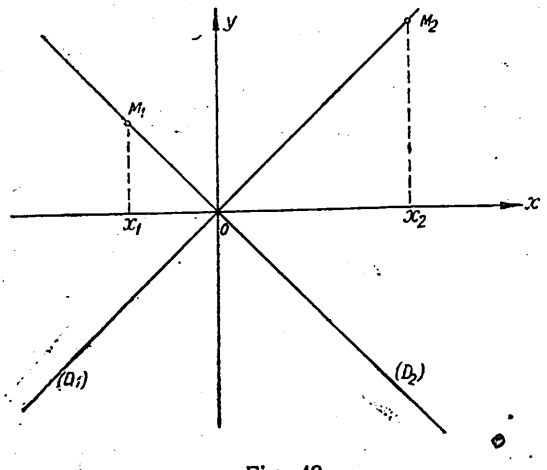


Fig. 42

41. 18. *Să se arate că funcţia*

$$y=f(x)=x\sin\frac{1}{x},$$

nu are derivată în origine (pentru $x=0$).

In origine valoarea funcţiei $\sin\frac{1}{x}$ este nedeterminată dar finită, deoarece sinusul trebue să fie cuprins totdeauna între -1 şi $+1$. Aceasta însemnează

că în origine funcţia se va anula, în baza faptului că este un produs în care primul factor este nul iar al doilea finit. Deci putem scrie în origine

$$\Delta y = f(0+\Delta x) - f(0) = \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x},$$

adică în acest punct,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{1}{\Delta x},$$

expresie care nu are o valoare determinată (prob. 35. 10). De aici rezultă că în origine funcţia nu are derivată.

Dacă am face graficul am constata că el are forma din (fig. 43), compus din două ramuri simetrice faţă de axa Oy, amândouă tinzând către punctul O. In vecinătatea acestui punct, curba are o infinitate de oscilaţii ceeace face ca tangenta ei să nu fie determinată.

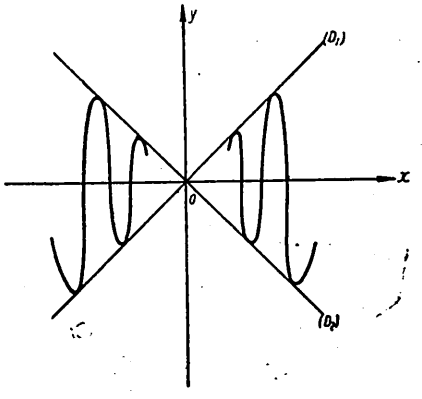


Fig. 43

Faptul că curba este cuprinsă între cele două bisectoare rezultă din

$$|y| = |x| \left|\sin\frac{1}{x}\right| < |x|,$$

deoarece sinusul este subunitar.

Observaţie. In problema precedentă am dat un exemplu de funcţie care are două derivate într'un punct, iar în problema actuală un exemplu de funcţie care nu are derivată într'un punct al ei. Prin compunere se pot forma exemple care să aibă derivată într'o parte şi să nu aibă în cealaltă. De exemplu, funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0, \\ x \sin\dfrac{1}{x} & x \geq 0, \end{cases}$$

are derivata egală cu 1 la stânga şi nu are derivată la dreapta.

§ 42. Derivate de ordin superior

1. Prin derivata a doua a unei funcţii se înţelege derivata primei derivate, ... , şi în general prin derivata de ordinul n se înţelege derivata derivatei de ordinul $n-1$.

2. Pentru a găsi direct derivata de ordinul n a unei funcţii, nu există în general, regulă, afară de cazul când funcţia se prezintă sub formă de produs. Fie: $y = u \cdot v$; atunci

$$y^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \ldots + C_n^p u^{(n-p)} v^{(p)} + \ldots + C_n^{(n-1)} u' v^{(n-1)} + uv^{(n)}. \quad (I)$$

Această formulă se numeşte *formula lui Leibnitz*. In celelalte cazuri se întrebuinţează diferite artificii de calcul.

42. 1. *Fiind date funcţiile*

$$y=e^{-x}\cos x,\quad z=(x+\sqrt{x^2-1})^n,\quad u=\frac{x^3}{1-x},\quad v=\frac{1}{\sqrt{\cos 2x}},$$

să se arate că avem

$$\frac{d^4y}{dx^4}+4y=0,\quad (x^2-1)\frac{d^2z}{dx^2}+x\frac{dz}{dx}-n^2z=0,$$

$$\frac{d^4u}{dx^4}=\frac{24}{(1-x)^5},\quad \frac{d^2v}{dx^2}+v=3v^5.$$

Problema se reduce la calculul derivatelor succesive şi înlocuirea lor în expresiile corespunzătoare.

42. 2. *Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei:* $y=(ax+b)^m$ *m fiind un număr oarecare.*

Avem

$$y^{(n)}=m(m-1)\dots(m-n+1)\,a^n(ax+b)^{m-n}.$$

In particular, dacă $m=p$, p fiind un număr întreg, $y^{(p)}=p!\,a^p$ şi $y^{(n)}=0$ dacă $n>p$.

42. 3. *Să se găsească derivata de ordinul n a funcţiei:* $y=\ln x$.

Pentru prima derivată avem: $y'=\frac{1}{x}=x^{-1}$; aplicând regula găsită la problema precedentă:

$$y^{(n)}=(-1)(-2)\dots[-1-(n-1)+1]\,x^{-1-(n-1)};\quad y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

42. 4. *Să se găsească derivatele de ordinul n ale funcţiilor* $y_1=\sin x$, $y_2=\cos x$*).

Pentru prima funcţie

$$y_1'=\cos x,\ y_1''=-\sin x,\ y_1'''=-\cos x,\ y_1^{(IV)}=\sin x,\dots$$

şi valorile încep să se repete. Aşa dar vom avea în general

$$y_1^{(4p)}=\sin x,\ y_1^{(4p+1)}=\cos x,\ y_1^{(4p+2)}=-\sin x,\ y_1^{(4p+3)}=-\cos x.$$

$$y_1^{(n)}=\sin\left(x+\frac{1}{2}n\pi\right),$$

ceeace se arată făcându-se desvoltarea în partea dreaptă.

Pentru funcţia y_2 se găseşte $y_2^{(n)}=\cos\left(x+\frac{1}{2}n\pi\right)$.

42. 5. *Să se găsească derivata de ordinul n a funcţiei:* $y=\cos^p x$.

*) Se va vedea şi observaţia dela prob. 116. 2.

Ţinem seamă de formulele date la prob. 20·10 care se pot scrie la un loc

$$\cos^p x=\frac{1}{2^{p-1}}\left[\cos px+\frac{p}{1!}\cos(p-2)x+\frac{p(p-1)}{2!}\cos(p-4)x+\dots\right],$$

şi de problema precedentă. Rezultatul este

$$y^{(n)}=\frac{1}{2^{p-1}}\left[p^n\cos\left(px+\frac{1}{2}n\pi\right)+\frac{p}{1}(p-2)^n\cos\{(p-2)x+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}n\pi\}+\frac{p(p-1)}{2!}(p-4)^n\cos\{(p-4)x+\frac{1}{2}n\pi\}+\cdots\right]$$

42. 6. *Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei*

$$y=\ln\sqrt{6x^2-5x+1}.$$

Observăm că funcţia se mai poate scrie sub forma

$$y=\frac{1}{2}\left[\ln(2x-1)+\ln(3x-1)\right].$$

Deci

$$y'=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{2x-1}+\frac{3}{3x-1}\right]=\frac{1}{2}[2(2x-1)^{-1}+3(3x-1)^{-1}],$$

aşa încât

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}[2^n(-1)^{n-1}(n-1)!(2x-1)^{-n}+3^n(-1)^{n-1}(n-1)!(3x-1)^{-n}];$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{2^n}{(2x-1)^n}+\frac{3^n}{(3x-1)^n}\right].$$

42. 7. *Să se găsească derivata de ordinul n a funcţiei* $y=x^3e^x$.

Cum y se prezintă sub forma unui produs vom aplica formula lui *Leibnitz*. In acest scop, notăm prin: $u=e^x$, $v=x^3$. Avem

$$u^{(n)}=e^x, v'=3x^2,\ v''=6x,\ v'''=6,\ v^{(n)}=0\ (n>3),$$

de unde rezultă

$$y^{(n)}=x^3e^x+C_n^1 3x^2e^x+C_n^2 6xe^x+C_n^3 6e^x$$

$$=[x^3+3nx^2+3n(n-1)x+n(n-1)(n-2)]e^x.$$

42. 8. *Să se găsească derivatele de ordinul n ale funcţiilor**).

$$y_1=e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha),\ y_2=e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha).$$

Avem

$$y_1'=\cos\alpha\, e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)-\sin\alpha\, e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)=e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha+\alpha),$$

$$y_1''=\cos\alpha\, e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha+\alpha)-\sin\alpha\, e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha+$$

$$+\alpha)=e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha+2\alpha).$$

---

*) Vezi şi prob. 116,2.

Să demonstrăm că, în general,

$$y_1^{(n)} = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha + n\alpha).$$

In adevăr, să presupunem că afirmaţia este adevărată pentru derivata de ordinul n şi să arătăm că este adevărată şi pentru ordinul $n+1$. Avem

$$y_1^{(n+1)} = [y_1^{(n)}]' = \cos\alpha\, e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha + n\alpha)$$

$$-\sin\alpha\, e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha + n\alpha) = e^{x\cos\alpha}\cos[x\sin\alpha + (n+1)\alpha].$$

Analog se găseşte că

$$y_2^{(n)} = e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha + n\alpha).$$

42. 9. *Se consideră funcţia*

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Se cere: 1° să se arate că y satisface relaţia:

$$(1-x^2)y' - xy = 1,$$

2° să se deducă de aici o relaţie între 3 derivate consecutive ale funcţiei y.
3° să se găsească valorile acestor derivate pentru $x=0$.

1° Avem

$$y' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}{1-x^2} = \frac{1+xy}{1-x^2},$$

adică relaţia cerută

2° Luăm derivata de ordinul n a relaţiei precedente. Avem

$$[(1-x^2)y']^{(n)} - (xy)^{(n)} = 0.$$

Să calculăm separat. Pentru prima, notăm cu: $u=y'$, $v=1-x^2$ şi aplicăm formula lui Leibnitz. Găsim

$$[(1-x^2)y']^{(n)} = (1-x^2)y^{(n+1)} - 2nxy^{(n)} - n(n-1)y^{(n-1)}.$$

Procedând la fel

$$(xy)^{(n)} = xy^{(n)} + ny^{(n-1)}.$$

Inlocuind în relaţia de mai sus, rezultă

$$(1-x^2)y^{(n+1)} - (2n+1)xy^{(n)} - n^2y^{(n-1)} = 0,$$

care este relaţia cerută

3° Să notăm cu $y_0^{(n)}$ valoarea derivatei de ordinul n a lui y pentru $x=0$. Făcând în relaţia precedentă $x=0$, obţinem:

$$y_0^{(n+1)} = n^2 y_0^{(n-1)}. \qquad (1)$$

Punem aici $n=1$

$$y_0'' = y_0^{(0)};$$

cum derivata de ordinul zero este însăşi funcţia, rezultă că $y_0^{(0)}=0$, şi deci $y_0''=0$. Din aproape în aproape, făcând $n=3,5,7,\ldots$ deducem că $y_0^{(2p)}=0$. Pentru a găsi valorile derivatelor de ordin fără soţ, facem în (1) pe $n=2$: $y_0'''=2^2 y_0'$, şi cum $y_0'=1$, după cum se vede din valoarea lui y' calculată la 1°, rezultă că: $y_0'''=2^2$. Făcând în (1), $n=4$

$$y_0^{(5)}=4^2 y_0'''=2^2 \cdot 4^2,$$

şi în general vom avea

$$y_0^{(2p+1)}=2^2 \cdot 4^2 \ldots (2p)^2=2^{2p}(p!)^2.$$

42. 10. *Să se stabilească formula*

$$\left[x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)}=(-1)^{(n)} \frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{n+1}}.$$

Vom demonstra formula prin inducţie. Pentru a uşura calculul derivatei lui $f\left(\frac{1}{x}\right)$ vom pune $\frac{1}{x}=u$. Pentru $n=1$ prima parte ne dă

$$[f(u)]'=f'(u)\cdot u'=-\frac{1}{x^2} f'\left[\frac{1}{x}\right].$$

Să presupunem că formula este adevărată pentru n, adică aşa cum este scrisă în enunţ, şi să arătăm că este adevărată şi dacă înlocuim pe n prin $n+1$. Va trebui deci să calculăm valoarea expresiei $[x^n f(u)]^{(n+1)}$. Pentru a o calcula o scriem sub forma $\{x[x^{n-1} f(u)]\}^{(n+1)}$ şi îi aplicăm formula lui Leinbitz. Avem

$$[x^n f(u)]^{(n+1)}=x[x^{n-1} f(u)]^{n+1}+(n+1)[x^{n-1} f(u)]^{(n)},$$

şi ţinând seama de ipoteza făcută, avem mai departe

$$[x^n f(u)]^{(n+1)}=(-1)^n x\left[\frac{f^{(n)}(u)}{x^{n+1}}\right]'+(-1)^n (n+1)\frac{f^{(n)}(u)}{x^{n+1}}=(-1)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(u)}{x^{n+2}}.$$

42. 11. *Să se calculeze derivata de ordinul n a unei funcţii de forma* $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

Vom soluţiona această problemă folosind formula dată la problema precedentă. Pentru o cât mai bună înţelegere, este bine să facem observarea dela început că, pe când în prima parte a acestei formule avem derivata în raport cu x, în partea a doua derivata este luată în *raport cu locul* pe care-l ocupă $\frac{1}{x}$, sau, cu notaţiile noastre, în raport cu u. Dacă acest lucru este înţeles, restul este uşor. Facem în formulă schimbarea

$$x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)=g\left(\frac{1}{x}\right),$$

de unde

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^{n-1}} g\left(\frac{1}{x}\right)=u^{n-1} g(u),$$

deci

$$\left[g\left(\frac{1}{x}\right)\right]_x^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\left[u^{n-1}\,g(u)\right]_u^{(n)};$$

aplicând formula lui Leinbitz.

$$\left[g\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\left[g^{(n)}(u)\,u^{n-1} + (n-1)\,C_n^1\,u^{n-2}\,g^{(n-1)}(u) + \right.$$

$$\left. + (n-1)(n-2)\,C_n^2\,u^{n-3}g^{(n-2)}(u) + \cdots + (n-1)!\,C_n^{n-1}\,g'(u)\right],$$

și înlocuind pe u prin $\frac{1}{x}$ găsim formula căutată

$$\left[g\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{2n}}\left[g^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + (n-1)\,C_n^1\,x\,g^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right) + \right.$$

$$\left. + (n-1)(n-2)\,C_n^2\,x^2\,g^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots + (n-1)!\,C_n^{n-1}x^{n-1}\,g'\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

42. 12. *Să se găsească derivata de ordinul n a lui* $e^{\frac{1}{x}}$.

Se face în formula precedentă $g(u)=e^u$. Avem

$$\frac{d^n e^{\frac{1}{x}}}{dx^n} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{2n}}\left[1 + (n-1)C_n^1\,x + (n-1)(n-2)\,C_n^2\,x^2 + \cdots + (n-1)!\,C_n^{n-1}\,x^{n-1}\right].$$

42. 13. *Să se găsească derivata de ordinul n a funcției:* $y=f(x^2)$.

Pentru ușurința calculului punem: $x^2=u$. Găsim

$$y' = 2xf'(u);\quad y'' = 4x^2 f''(u) + 2f'(u);$$

$$y''' = 8x^3 f'''(u) + 12xf''(u);\ \ldots$$

și se vede că în general vom avea

$$y^{(n)} = (2x)^{(n)} f^{(n)}(u) + \alpha_1 (2x)^{(n-2)} f^{(n-1)}(u) + \alpha_2 (2x)^{(n-4)} f^{(n-2)}(u) + \cdots,$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sunt niște coeficienți numerici care nu depind de forma funcției $f(u)$. Atunci, putem particulariza funcția $f(u)$ fără ca acești coeficienți să se schimbe. Să luăm: $f(u)=e^{-x^2}$. Vom avea

$$(e^{-x^2})^{(n)} = (-1)^n e^{-x^2}\left[(2x)^n - \alpha_1 (2x)^{n-2} + \alpha_2 (2x)^{n-4} - \cdots\right].$$

Dar, după cum se va vedea mai târziu, prima parte are drept expresie

$$(e^{-x^2})^{(n)} = (-1)^n e^{-x^2}\left[(2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)n-3)}{2!}(2x)^{n-4} + \cdots\right].$$

Prin comparație rezultă imediat valoarea coeficienților $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Se găsește în definitiv formula

$$y^{(n)} = (2x)^n f^{(n)}(u) + \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} f^{(n-1)}(u) +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} f^{(n-2)}(u) + \cdots$$

42. 14. *Să se stabilească formula*

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{n}\sin na,$$

unde am spus: $x=\cos a$.

Facem în problema precedentă $f(u)=(1-u)^{n-\frac{1}{2}}$ şi ţinem seama de (§ 30 V)

42. 15. *Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiilor:*

$$y_1=\operatorname{arctg} x \text{ şi } y_2=\arcsin x.$$

Se foloseşte faptul că derivatele ambelor funcţii sunt funcţii de x^2 şi se aplică formula generală găsită mai sus. Obţinem

$$\frac{d^n y_1}{dx^n}=(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{(2x)^{n-1}}{(1+x^2)^n}-\frac{n-2}{1!}\frac{(2x)^{n-3}}{(1+x^2)^{n-1}}+\frac{(n-3)(n-4)}{2!}\frac{(2x)^{n-5}}{(1+x^2)^{n-2}}-\cdots\right]$$

$$\frac{d^n y_2}{dx^n}=1\cdot 2\cdot 5\ldots(2n-3)\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^n\left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{(n-1)(n-2)}{2(2n-3)}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^3+\right.$$

$$\left.+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot 4(2n-3)(2n-5)}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5+\cdots\right].$$

§ 43. Desvoltări limitate

1. **Formula lui Taylor.** Dacă $f(x)$ admite n derivate succesive finite şi continue şi a $(n+1)-a$ derivată este finită şi bine determinată pentru toate valorile lui x cuprinse într'un interval $[a,b]$, atunci avem

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n, \qquad (I)$$

unde R_n se numeşte *restul* sau *termenul complimentar*, şi are una din formele

$$\left.\begin{aligned} R_n&=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h),\\ R_n&=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta h)\end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

θ fiind un număr cuprins între 0 şi 1.

Formula (I) se mai poate scrie sub forma

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n \qquad (I')$$

în care expresia lui R_n se deduce din (II), înlocuind pe h cu $x-a$.

2. **Formula lui Maclaurin.** Din formulele precedente se deduce uşor formula

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x), \qquad (III)$$

unde am luat primul rest ca fiind mai obişnuit.

Menţionăm că în ambele formule n este un număr întreg şi pozitiv la voia noastră, pe care este bine să-l precizăm în aplicaţii.

Se zice că formula (I) dă *desvoltarea limitată a lui* $f(a+h)$ *în jurul punctului* $x=a$; formula (III) dă desvoltarea lui $f(x)$ în jurul punctului $x=0$, adică în jurul originei.

In particular formulele (I) şi (III) se aplică funcţiilor elementare care au derivate de orice ordin.

3. Dacă $f(x)$ este un polinom $=P(x)$ de gradul n, atunci derivata de ordinul $(n+1)$ este nulă, şi formula (I) se reduce la

$$P(x+h)=P(x)+\frac{h}{1!}P'(x)+\frac{h^2}{2!}P''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}P^{(n)}(x), \qquad \text{(IV)}$$

sau

$$P(x)=P(a)+\frac{x-a}{1!}P'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}P''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}P^{(n)}(a). \qquad \text{(IV')}$$

Tot aşa, dacă $f(x)$ este o funcţie derivabilă, derivata fiind finită şi bine determinată în intervalul $[a,b]$, formula (I), în care facem $n=1$, ne spune că:

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h), \qquad (0<\theta<1) \qquad \text{(V)}$$

care se numeşte formula *creşterilor finite*, (sau *formula mediei*). Această formulă se mai poate scrie sub forma

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c) \qquad (a<c<b) \qquad \text{(V')}$$

4. Dăm mai jos câteva desvoltări limitate întrebuinţate în calcule

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\lambda x^{n+1}, \qquad \text{(VI)}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\lambda x^{2n+2}, \qquad \text{(VII)}$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\lambda x^{2n+3}, \qquad \text{(VIII)}$$

$$\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\lambda x^{2n+2}, \qquad \text{(IX)}$$

$$\operatorname{sh} x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\lambda x^{2n+3}, \qquad \text{(X)}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\lambda x^{n+1}, \qquad \text{(XI)}$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\lambda x^{n+1}, \qquad \text{(XII)}$$

unde λ este o funcţie de x şi de n care rămâne finită când x tinde către zero

Observaţie. In majoritatea cazurilor, pentru a găsi desvoltarea limitată a unei funcţi se caută, pe cât posibil, să se combine între ele desvoltările precedente.

43. 1. *Să se calculeze primii termeni ai desvoltării lui* $\operatorname{tg} x$ *după formula lui Maclaurin.*

Soluţia I. Se consideră desvoltările lui $\sin x$ şi $\cos x$, mărginindu-se la primii 3 termeni

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\lambda x^7,$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\mu x^6,$$

şi se face împărţirea în mod obişnuit, ca şi când am avea de a face cu două polinoame, neglijându-se termenii cu puteri mai mari decât 5. Obţinem

$$\begin{array}{r|l} x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\lambda x^7 & 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\mu x^6 \\ \hline -x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{24}x^5-\cdots & x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots \\ \hline \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+\cdots & \text{deci} \\ -\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^5-\cdots & \\ \hline \frac{2}{15}x^5+\cdots & \end{array}$$

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\nu x^7,$$

unde ν este un număr care rămâne finit când x tinde către zero.

Soluţia II. Observăm mai întâi că funcţia $\operatorname{tg} x$ este o funcţie impară: deci va avea o desvoltare de forma

$$\operatorname{tg} x=ax+bx^3+cx^5+\nu x^7.$$

Cum: $\sin x=\cos x \operatorname{tg} x$, rezultă că va trebui să avem

$$x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\lambda x^7=\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\mu x^6\right)(ax+bx^3+cx^5+\nu x^7).$$

Desvoltând partea dreaptă şi identificând diferitele puteri ale lui x, obţinem relaţiile

$$1=a,\ -\frac{1}{6}=b-\frac{1}{2}a,\qquad \frac{1}{120}=c-\frac{1}{2}b+\frac{1}{24}a;$$

$$a=1,\ b=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3},\qquad c=\frac{1}{120}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{2}{15}.$$

Cu această metodă se vede mai uşor că ν rămâne finit când x tinde către zero. In adevăr, identificând şi termenii rămaşi găsim

$$\nu-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}\nu x^2+\frac{1}{24}b-\frac{1}{2}cx^2+\nu x^4+a\mu+b\mu x^2+c\mu x^4+\mu\nu x^6=\lambda;$$

$$\nu=\frac{\lambda+\frac{1}{2}c-\frac{1}{24}b-a\mu+(\cdots)x^2+(\cdots)x^4}{1-\frac{1}{2}x^2+x^4+\mu x^6},$$

de unde rezultă că deoarece λ şi μ păstrează valori finite pentru $x=0$, ν va păstra deasemenea.

Soluţia III. Aplicăm direct formula lui Maclaurin, notând: $f(x)=\operatorname{tg} x$. Se găseşte:

$$f(0)=0,\ \frac{1}{1!}f'(0)=1,\ \frac{1}{2!}f''(0)=0,\ \frac{1}{3!}f'''(0)=\frac{2}{3!}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{4}f^{(IV)}(0)=0,\ \frac{1}{5!}f^{(V)}(0)=\frac{24-8}{5!}=\frac{16}{120}=\frac{2}{15},$$

adică desvoltarea găsită mai sus.

43. 2. *Să se găsească primii termeni ai desvoltării funcției*

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

Procedăm prin prima metodă dela problema precedentă, fiind mai elementară, găsim

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \mu x^6.$$

43. 3. *Să se găsească 3 termeni din desvoltarea funcției.*

$$\frac{x^2}{\sin^2 x}.$$

Calculăm întâi desvoltarea limitată a lui $\sin^2 x$. Avem, păstrând numai puterile lui x până la x^6,

$$\sin^2 x = \left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \lambda x^7\right]^2 = x^2 + \frac{1}{36}x^6 - \frac{1}{3}x^4 +$$

$$+ \frac{1}{60}x^6 + \cdots = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \mu x^8,$$

și apoi prin împărțire

$$\frac{x^2}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{15}x^4 + \nu x^6.$$

43. 4. *Să se găsească primii 3 termeni ai desvoltării funcției*

$$y = \sqrt[3]{1+x}\,\operatorname{th} x.$$

Este destul a lua câte trei termeni în fiecare desvoltare.

Avem

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \cdots,$$

iar pentru desvoltarea lui $\operatorname{th} x$, procedăm analog ca la prob. 43. 1; obținem *)

$$\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

Deci

$$y = \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \cdots\right)\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots\right) =$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^3 + \cdots;$$

$$y = x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x^3 + \lambda x^4.$$

*) Vom vedea mai târziu (pr. 15. 12) că desvoltarea lui $\operatorname{th} x$ se deduce din cea a lui $\operatorname{tg} x$ înlocuind pe x (pr. 115. 9) cu ix și împărțind apoi cu i.

43. 5. *Să se desvolte funcția*

$$y=\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}},$$

în jurul punctului $x=\frac{1}{6}\pi$.

Problema revine la a aplica formula (I'). Pentru a se evita derivatele care intră în această formulă, folosindu-se în schimb desvoltările cunoscute, se poate proceda precum urmează. Se înlocueşte în funcţie x cu $h+a$, $x=a$ fiind punctul în jurul căruia facem desvoltarea, apoi desvoltăm funcţia după puterile lui h, adică

$$f(x)=f(h+a)=a_0+a_1h+a_2h^2+\cdots+a_nh^n+\cdots$$

Inlocuind aici pe h prin $x-a$ avem

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$$

care este desvoltarea căutată.

In cazul problemei, avem

$$\sin x-\frac{1}{2}=\sin\left(\frac{1}{6}\pi+h\right)-\frac{1}{2}=\sin\frac{1}{6}\pi\cos h+\sin h\cos\frac{1}{6}\pi-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cos h+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sin h-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}h^2+\cdots\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(h-\frac{1}{6}h^3+\cdots\right)-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{3}h-\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{12}\sqrt{3}h^3+\cdots=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{3}h\left[1-\frac{1}{2\sqrt{3}}h-\frac{1}{6}h^2+\cdots\right];$$

$$y=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot h\left[1-\frac{1}{2\sqrt{3}}h-\frac{1}{6}h^2+\cdots\right]}.$$

Punând aci

$$z=-\frac{1}{2\sqrt{3}}h-\frac{1}{6}h^2+\cdots,$$

avem mai departe

$$y=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3}}h^{\frac{1}{2}}(1+z)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3}}h^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}z^2+\cdots\right)$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3}}h^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}h+\frac{1}{6}h^2+\cdots\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}h+\frac{1}{6}h^2+\cdots\right)^2+\cdots\right]$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3}}h^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{1}{4\sqrt{3}}h-\frac{1}{12}h^2-\frac{1}{96}h^2+\cdots\right]$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\left[h^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4\sqrt{3}}h^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{32}h^{\frac{5}{2}}+\lambda h^{\frac{7}{2}}\right],$$

și înlocuind pe h prin valoarea lui

$$y=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\left[\left(x-\frac{1}{6}\pi\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{6}\pi\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{32}\left(x-\frac{1}{6}\pi\right)^{\frac{5}{2}}+\lambda\left(x-\frac{1}{6}\pi\right)^{\frac{7}{2}}\right].$$

43. 6. *Să se găsească primii termeni ai desvoltării funcției:*

$$y=\frac{\sqrt{x^4-x^3+2x^2+x-1}-\sqrt{x^2-3x-4}}{x^2+x+1}$$

în vecinătatea punctului $x=\infty$ *(pentru valori foarte mari ale lui* x*).*

Facem substituția $x=\frac{1}{h}$ și desvoltăm după puterile lui h. Avem

$$y=\frac{\left(\frac{1}{h^4}-\frac{1}{h^3}+\frac{2}{h^2}+\frac{1}{h}-1\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{h^2}-\frac{3}{h}-4\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h}+1}$$

$$y=\frac{(1-h+2h^2+h^3-h^4)^{\frac{1}{2}}-h\,(1-3h-4h^2)^{\frac{1}{2}}}{1+h+h^2}$$

și aplicând desvoltarea binomului găsim

$$(1-h+2h^2+h^3-h^4)^{\frac{1}{2}}-h\,(1-3h-4h^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{3}{2}h+\frac{19}{8}h^2+\dots$$

Mai departe

$$\begin{array}{r|l}
1-\frac{3}{2}h+\frac{19}{8}h^2+\dots & \\
-1-\quad h-\quad h^2 & \hline \\
-\frac{5}{2}h+\frac{11}{8}h^2+\dots & 1+h+h^2 \\
\frac{5}{2}h-\frac{5}{2}h^2+\dots & \hline \\
-\frac{9}{8}h^2+\dots & 1-\frac{5}{2}h-\frac{9}{8}h^2+\dots
\end{array}$$

în definitiv,

$$y=1-\frac{5}{2x}-\frac{9}{8x^2}+\frac{\lambda}{x^3}.$$

47. 3. *Să se verifice formula creșterilor finite pentru funcția*

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

mai întâi pentru intervalul (0, 1), *apoi pentru intervalul* (1, 2)

A verifica una din formulele (V) sau (V'), de exemplu pe prima, înseamnă a arăta existenţa lui θ. Cum

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

pentru intervalul (0,1) va trebui să arătăm că există un θ, cuprins între 0 şi 1, astfel încât să avem

$$\frac{1}{2}=\frac{1-\theta^2}{(1+\theta^2)^2},$$

ceeace este tot una cu a arăta că ecuaţia

$$\theta^4+4\theta^2-1=0,$$

admite cel puţin o rădăcină cuprinsă între 0 şi 1. In adevăr, de aici scoatem: $\theta^2=-2\pm\sqrt{5}$, şi părăsind semnul — din faţa radicalului, care ne dă valori imaginare pentru θ, găsim: $\theta=\pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}$, dintre care valoarea luată cu semnul + este cuprinsă între (0,1).

Pentru al doilea interval, va trebui ca

$$\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1-(1+\theta)^2}{[1+(1+\theta)^2]^2},\ (1+\theta)^2=4\pm\sqrt{5},\ \theta=-1\pm\sqrt{4\pm\sqrt{5}},$$

dintre care soluţia $-1+\sqrt{4-\sqrt{5}}$ face aproximativ 0,32 număr cuprins între 0 şi 1. Este interesant de observat că θ găsit pentru primul interval nu este acelaş cu θ găsit pentru al doilea interval.

43. 8. *Să se arate că dacă h din formula creşterilor finite tinde către zero, θ tinde către $\frac{1}{2}$.*

Avem

$$f(a+h)=f(a)+h\,f'(a+\theta h),\quad (0<\theta<1). \tag{1}$$

Aplicând această formulă functiei: $f'(a+\theta h)$, obţinem

$$f'(a+\theta h)=f'(a)+\theta h\,f''(a+\theta_1 h),$$

θ_1 fiind un număr cuprins tot între 0 şi 1. Inlocuind în (1), avem

$$f(a+h)=f(a)+h\,f'(a)+\theta h^2 f''(a+\theta_1 h)$$
$$(0<\theta<1,\quad 0<\theta_1<1).$$

Pe de altă parte, aplicând formula lui *Taylor* pentru $n=2$,

$$f(a+h)=f(a)+h\,f'(a)+\frac{1}{2}h^2 f''(a+\theta_2 h)\quad (0<\theta_2<1).$$

Comparând aceste rezultate între ele, găsim

$$\theta=\frac{f''(a+\theta_2 h)}{2f''(a+\theta_1 h)},$$

de unde

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}\lim_{h=0}\frac{f''(a+\theta_2 h)}{f''(a+\theta_1 h)}=\frac{1}{2}$$

în ipoteza că funcţia $f''(x)$ este continuă.

§ 44. Aplicații la teoria ecuațiilor. Discuții

1. Condițiile necesare și suficiente pentru ca o ecuație algebrică $P(x)=0$ de gradul n să admită o rădăcină a multiplă de ordinul p, sunt

$$P(a)=P'(a)=\ldots=P^{(p-1)}(a)=0; \quad P^{(p)}(a)\neq 0.$$

2. Dacă $f(x)$ este o funcție continuă în intervalul $[a,b]$ și dacă

$$f(a)\,f(b)<0, \tag{II}$$

$f(x)$ se anulează cel puțin odată în interval; iar dacă se anulează de mai multe ori, atunci se anulează de un număr fără soț de ori. In particular dacă ecuația este algebrică și de grad fără soț, atunci: $f(-\infty)\,f(+\infty)<0$, adică ecuația are cel puțin o rădăcină reală.

3. **Teorema lui Rolle.** Fiind dată o funcție $f(x)$ derivabilă într'un interval $[a,b]$ pentru care $f(a)=f(b)=0$ și nu se mai anulează între a și b (se zice că a și b sunt două *zerouri consecutive* ale ecuației $f(x)=0$), derivata se anulează cel puțin odată în interval: dacă se anulează de mai multe ori, se anulează de un număr fără soț de ori.

Această teoremă se aplică la găsirea numărului rădăcinilor reale ale unei ecuații $f(x)=0$, în felul următor. Mai întâi precizăm că în intervalul unde căutăm rădăcinile este necesar ca funcția $f(x)$ să fie derivabilă (deci implicit continuă). Se rezolvă ecuația derivată $f'(x)=0$ și se așează zerourile ei în ordine crescândă $x_1, x_2, \ldots, x_p$ complectând acest șir cu $-\infty$ și $+\infty$. Apoi se calculează șirul

$$f(-\infty)\ f(x_1)\ f(x_2)\ldots f(x_p)\ f(+\infty), \tag{III}$$

(numit *șirul lui Rolle*). Dacă doi termeni consecutivi ai acestui șir, de exemplu $f(x_q)$, $f(x_{q+1})$, sunt de semne contrare (se zice că șirul are o variație), între x_q și x_{q+1} ecuația $f(x)=0$ are o rădăcină reală. Deci, va avea atâtea rădăcini reale câte schimbări de semn (variații) va prezenta șirul.

44. 1. *Să se arate că polinomul*

$$P(x)=(x+1)^6-6x(x+1)^4+32x^3,$$

se divide cu $(x-1)^4$ *și să i se afle câtul.*

Făcând calculele se găsește că: $P(1)=P'(1)=P''(1)=P'''(1)=0$, $P^{(IV)}(1)=144\neq 0$, de unde rezultă: polinomul se divide cu $(x-1)^4$. Cum $P(x)$ este de gradul 6 va trebui să avem

$$P(x)=(x-1)^4(\alpha x^2+\beta x+\gamma).$$

Această egalitate trebue să fie o identitate, ea trebue să aibă loc pentru orice valori ale lui x. In primul rând, identificând coeficienții lui x^6 rezultă $\alpha=1$: apoi

$$P(0)=1=\gamma; \quad P(-1)=-32=16(1-\beta+\gamma); \quad \gamma=1, \quad \beta=4,$$

deci

$$P(x)=(x-1)^4(x^2+4x+1).$$

Observație. Pentru găsirea câtului se putea proceda și direct prin împărțiri succesive. Astfel, împărțind polinomul dat, în care în prealabil s'au făcut toate calculele, cu $x-1$ se obține

$$P(x)=(x-1)(x^5+x^4-8x^3+8x^2-x-1).$$

Paranteza se anulează pentru $x=1$, se face împărțirea, etc. La a patra împărțire se găsește câtul final: x^2+4x+1. Această metodă este greoaie și prezintă riscul greșelilor de calcul.

44.2. *Să se determine m în așa fel, încât ecuația*

$$3x^4-16x^3+30x^2-24x+m=0,$$

să aibă rădăcini multiple.

O rădăcini multiplă trebue să verifice ecuația și în orice caz ecuația ce se capătă anulând derivata, care în cazul nostru este

$$12(x^3-4x^2+5x-2)=12(x-1)^2(x-2)=0.$$

Dacă luăm $x=1$, pentru a fi rădăcină a ecuației, trebue să luăm $m=7$; în acest caz $x=1$ este *rădăcină triplă* a ecuației date, deoarece este rădăcină dublă a ecuației derivate. Luând $x=2$, rezultă $m=8$ și ecuația dată va admite pe $x=2$ ca *rădăcină dublă*.

44. 3. *Să se găsească condițiile ca ecuația*

$$x^4+4ax^3+6bx+c=0,$$

să aibă o rădăcină triplă și în acest caz să se rezolve.

Rădăcina triplă trebue să verifice ecuația dată, cum și ecuațiile

$$f'(x)=4x^3+12ax^2+6b=0, \quad f''(x)=12x^2+24ax=0.$$

Ultima ecuație are drept rădăcini: $x_1=0$ și $x_2=-2a$ și care sunt singurele numere ce pot fi rădăcini triple ale ecuației date. Dacă $x_1=0$ este rădăcina triplă, ea trebue să verifice și ecuațiile $f'(x)=0$, $f(x)=0$, de unde reiese că trebue să avem $b=c=0$. Ecuația se reduce la

$$x^4+4ax^3=0 \quad \text{sau} \quad x^3(x+4a)=0$$

de unde reiese că cealaltă rădăcină a ecuației este $x=-4a$.

Dacă $x_2=-2a$ este rădăcină triplă, trebue să avem: $b=-\frac{8}{3}a^3$, $c=-16a^4$. Pentru a găsi cea de a patra rădăcină, ținem seama că din relațiile între rădăcinile și coeficienții ecuației rezultă că

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-4a,$$

și făcând $x_1=x_2=x_3=-2a$, rezultă $x_4=2a$,

44. 4. *Să se găsească condiția ca ecuația*

$$x^n-px^m+q=0,$$

să aibă o rădăcină multiplă (m și n sunt presupuși întregi și pozitivi, astfel ca $n>m$). Ecuația derivată este

$$x^{m-1}(nx^{n-m}-mp)=0.$$

In ipoteza $m>1$, ecuaţia derivată are două rădăcini:

$$x_1=0 \quad \text{şi} \quad x_2=\sqrt[n-m]{\frac{mp}{n}}.$$

Pentru ca prima să fie rădăcină dublă este necesar ca ea să verifice şi ecuaţia adică $q=0$. In acest caz, $x_1=0$ este rădăcină multiplă de ordinul m. Pentru ca a doua să fie rădăcină a ecuaţiei date este necesar ca

$$x_2^m(x_2^{n-m}-p)+q=0; \quad m^n p^n (n-m)^{n-m}=q^{n-m}n^n.$$

44. 5. *Să se arate că ecuaţia*

$$\frac{A^2}{x-a}+\frac{B^2}{x-b}+\frac{C^2}{x-c}-1=0,$$

are toate rădăcinile reale (numerele a, b, c sunt presupuse diferite).

Aducem ecuaţia la formă întreagă

$$f(x)=A^2(x-b)(x-c)+B^2(x-a)(x-c)+$$
$$+C^2(x-a)(x-b)-(x-a)(x-b)(x-c)=0.$$

Deoarece numerele a, b, c joacă un rol simetric, putem presupune că ordinea mărimei lor este: $a<b<c$. Ţinând seamă de această ipoteză, avem

$$f(a)=A^2(a-b)(a-c)>0, \quad f(b)=B^2(b-a)(b-c)<0,$$

$$f(c)=C^2(c-a)(c-b)>0,$$

încât avem următorul tablou de semne

$f(-\infty)$	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$f(+\infty)$
+	+	−	+	−

adică ecuaţia admite cel puţin câte o rădăcină reală în intervalele (a, b), (b, c), $(c, +\infty)$ şi cum ecuaţia este de gradul 3 însemnează că ecuaţia are toate rădăcinile reale.

44. 6. *Să se separe rădăcinile ecuaţiei*

$$f(x)=3x^4+8x^3-6x^2-24x+\alpha=0.$$

Ecuaţia derivată este

$$f'(x)=12(x^3+2x^2-x-2)=12[x^2(x+2)-(x+2)]=12(x^2-1)(x+2)=0,$$

care are rădăcinile: $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=1$. Deoarece

$$f(x_1)=8+\alpha, \quad f(x_2)=13+\alpha, \quad f(x_3)=-19+\alpha,$$

tabloul rezumativ al discuţiei, după diferite valori ale lui α este

α	$f(-\infty)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(+\infty)$	Rezultate
$-\infty$						
	+	−	−	−	+	2 rădăcini reale + 2 rădăcini imag.
-13	+	−	0	−	+	x_2 dublă + 2 rădăcini reale
	+	−	+	−	+	4 rădăcini reale
-8	+	0	+	−	+	x_1 dublă + 2 rădăcini reale
	+	+	+	−	+	2 rădăcini reale + 2 rădăcini imag.
19	+	+	+	0	+	x_3 rădăcină dublă +2 rădăcini imag.
	+	+	+	+	+	nici o rădăcină reală
$+\infty$						

44. 7. *Să se discute ecuația*

$$x^4-6x^2+\alpha x+24=0.$$

Dacă s'ar aplica teorema lui Rolle direct, ecuația derivată ar prezenta neajunsul de a-l conține pe α, deci, în general, de a nu putea fi rezolvată prin mijloace elementare. In locul ecuației date putem considera ecuația

$$f(x)=x^3-6x+\frac{24}{x}+\alpha=0,$$

ale cărei rădăcini sunt aceleași cu ale ecuației date; are însă neajunsul că $f(x)$ este discontinuă pentru $x=0$. Deci, în discuția pe care o vom face trebue să evităm această valoare, adică vom studia ecuația în intervalele $(-\infty, -\epsilon)$, $(+\epsilon, +\infty)$. Avem

$$f'(x)=3x^2-6-\frac{24}{x^2}=3\,\frac{x^4-2x^2-8}{x^2},$$

ale cărei rădăcini (nu luăm decât rădăcinile reale) sunt:

$$x_1=-2,\ x_2=2.$$

Avem

$f(-\epsilon)=(-\epsilon^3+6\epsilon+\alpha)-\frac{24}{\epsilon}<0$ oricare ar fi α, deoarece ultimul termen este foarte mare în valoare absolută.

$f(+\epsilon)=(\epsilon^3-6\epsilon+\alpha)+\frac{24}{\epsilon}>0$ oricare ar fi α pentru aceleași motive

$f(x_1)=\alpha-8,\quad f(x_2)=\alpha+8.$

Tabloul cu discuția ecuației este:

α	$f(-\infty)$	$f(x_1)$	$f(-\epsilon)$	$f(+\epsilon)$	$f(x_2)$	$f(+\infty)$	Rezultate
$-\infty$							
	−	−	−	+	−	+	2 rădăcini reale + 2 rădăcini imag.
-8	−	−	−	+	0	+	x_2 rădăcină dublă +2 rădăcini imag.
	−	−	−	+	+	+	nici o rădăcină reală
$+8$	−	0	−	+	+	+	x_1 rădăcină dublă + 2 rădăcini imag.
	−	+	−	+	+	+	2 rădăcini reale + 2 rădăcini imag.
$+\infty$							

44. 8. *Să se discute ecuația*

$$f(x) = \ln(1+x) + \frac{x+4}{3x} - 3 = 0.$$

Vom căuta rădăcinile în intervalul $(-1+\epsilon, +\infty)$, deoarece în acest interval funcția există. Cum funcția este discontinuă pentru $x=0$, împărțim intervalul în intervalele $(-1+\epsilon, -\epsilon)$, $(+\epsilon, +\infty)$, unde $f(x)$ este continuă. Derivata este

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{3x^2} = \frac{3x^2-4x-4}{3x^2(1+x)},$$

care se anulează pentru $x_1=2$, $x_2=-\frac{2}{3}$. Avem

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\left(\ln 3 + \frac{14}{3}\right) < 0, \quad f(2) = \ln 3 - 2 < 0;$$

șirul lui Rolle este

$f(-1+\varepsilon)$	$f\left(-\frac{2}{3}\right)$	$f(-\varepsilon)$	$f(+\varepsilon)$	$f(2)$	$f(+\infty)$
−	−	−	+	−	+

Ecuația are două rădăcini reale: una cuprinsă între $+\epsilon$ și 2, iar alta mai mare decât 2.

44. 9. *Să se arate că ecuația*

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = 0,$$

are toate rădăcinile reale cuprinse între -1 *și* $+1$.

Pornim dela ecuația

$$f(x) = (x^2-1)^n = 0,$$

care este de gradul $2n$ și are n rădăcini egale cu -1 și n rădăcini egale cu $+1$. Ecuația derivată va fi de forma

$$f'(x) = (x^2-1)^{n-1}\varphi_1(x) = 0;$$

care este de gradul $2n-1$ are $n-1$ rădăcini egale cu -1, $n-1$ egale cu $+1$ și încă una α_1, care, conform teoremei lui Rolle, trebue să fie cuprinsă între -1 și $+1$. Ecuația derivată a precedentei are forma

$$f''(x) = (x^2-1)^{n-2}\varphi_2(x) = 0,$$

care este de gradul $2n-2$, are $n-2$ rădăcini egale cu -1, $n-2$ egale cu $+1$ și încă două β_1, β_2, care, conform teoremei lui Rolle, trebue să fie cuprinse în intervalele $(-1, \alpha_1)$, $(\alpha_1, +1)$. Tot așa, ecuația de gradul $2n-3$

$$f'''(x) = (x^2-1)^{n-3}\varphi_3(x) = 0,$$

va avea, afară de rădăcinile -1 și $+1$, trei rădăcini γ_1, γ_2, γ_3, astfel ca

$$-1 < \gamma_1 < \beta_1 < \gamma_2 < \beta_2 < \gamma_3 < 1,$$

etc. Ecuația

$$f^{(n-1)}(x) = \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} = (x^2-1)\varphi_{n-1}(x) = 0,$$

de gradul $n+1$ are rădăcinile

$$-1,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{n-1},\ +1,$$

iar ecuaţia derivată a ei, adică

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}=0,$$

va fi de gradul n şi va avea rădăcinile cuprinse între termenii şirului precedent, adică va avea toate rădăcinile cuprinse între -1 şi $+1$ (-1 şi $+1$ nu mai sunt rădăcini).

§ 45. Descompunerea fracţiilor raţionale în fracţii simple

1. Fie: $\frac{P(x)}{Q(x)}$ o fracţie raţională, adică o fracţie în care numărătorul şi numitorul sunt polinoame în litera x. Presupunem că fracţia este ireductibilă, adică polinoamele $P(x)$ şi $Q(x)$ nu au factori comuni (dacă au fost, i-am eliminat prin simplificare). Mai presupunem, pentru generalitate, că gradul polinomului $P(x)$ este mai mare decât gradul polinomului $Q(x)$. In acest caz se poate face împărţirea şi fie $P_1(x)$ câtul şi $R(x)$ restul; aceasta înseamnă că vom putea scrie (§ 6),

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=P_1(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}, \tag{I}$$

în care de data aceasta, fracţia $\frac{R(x)}{Q(x)}$ are gradul numărătorului mai mic decât gradul numitorului.

Să presupunem că polinomul $Q(x)$ are descompunerea în factori (§ 23),

$$Q(x)=a_0(x-x_1)^{m_1}\ldots(x-x_i)^{m_i}(x^2+p_1x+q_1)^{m_{i+1}}\ldots(x^2+p_jx+q_j)^{m_{i+j}} \tag{II}$$
$$(m_1+\cdots+m_i+2m_{i+1}+\cdots+2m_{i+j}=n);$$

se poate demonstra că fracţia $\frac{R(x)}{Q(x)}$ *admite descompunerea unică în fracţii simple.*

$$\left.\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q(x)}=&\frac{A_1}{(x-x_1)^{m_1}}+\frac{B_1}{(x-x_1)^{m_1-1}}+\cdots+\frac{E_1}{x-x_1}+\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\frac{A_i}{(x-x_i)^{m_i}}+\frac{B_i}{(x-x_i)^{m_i-1}}+\cdots+\frac{E_i}{x-x_i}+\\&+\frac{H_1x+K_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_{i+1}}}+\frac{L_1x+M_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_{i+1}-1}}+\cdots+\frac{S_1x+T_1}{x^2+p_1x+q_1}+\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\frac{H_jx+K_j}{(x^2+p_jx+q_j)^{m_{i+j}}}+\frac{L_jx+M_j}{(x^2+p_jx+q_j)^{m_{i+j}-1}}+\cdots+\frac{S_jx+T_j}{x^2+p_jx+q_j}.\end{aligned}\right\} \tag{III}$$

la care, adunând polinomul $P_1(x)$ obţinem dezvoltarea fracţiei $\frac{P(x)}{Q(x)}$ în fracţii simple. Fracţiile care au la numitor trinoame corespund rădăcinilor imaginare ale ecuaţiei: $Q(x)=0$; în caz când asemenea rădăcini nu există, evident că şi fracţiile corespunzătoare nu vor exista.

2. După ce am scris forma descompunerii, se pune problema determinării coeficienţilor nedeterminaţi $A, B, \ldots, E, H, K, \ldots, S, T$. In acest scop, vom ţine seamă că egalitatea (III) este o identitate în care, gonind numitorii şi idenitficând polinoamele pe care le obţinem în ambele părţi, vom găsi o serie de ecuaţii în care necunoscutele vor fi coeficienţii pe care îi căutăm şi care rezolvate ne vor da valorile lor.

Acest calcul se poate evita ţinând seamă că egalitatea fiind o identitate ea va avea loc pentru orice valori date literelor.

Deci, înlocuind pe x cu atâtea valori câte ne trebue, vom obţine atâtea ecuaţii câţi coeficienţi nedeterminaţi avem. De exemplu, se poate totdeauna înmulţi identitatea (III) cu o putere convenabilă a lui x, astfel ca apoi, făcând pe x să tindă către infinit să obţinem o ecuaţie între coeficienţi.

Valorile coeficienţilor $A_1 \ldots A_l$ sunt date prin formulele

$$A_1 = \left[\frac{(x-x_1)^m R(x)}{Q(x)}\right]_{x=x_1}, \ldots, A_l = \left[\frac{(x-x_1)^{m_l} R(x)}{Q(x)}\right]_{x=x_l}.$$

45. 1. *Să se descompună în fracţii simple fracţia*

$$f(x) = \frac{x^6+2x+1}{(x-1)^{3-}}.$$

Metoda pe care o vom folosi este generală pentru fracţiile al căror numitor este o putere a unui binom de gradul 1. Se ordonează numărătorul $P(x)$ după puterile lui $x-1$ folosind formula lui Taylor:

$$P(x)=P(1)+\frac{x-1}{1!}P'(1)+\cdots+\frac{(x-1)^6}{6!}P^{(6)}(1),$$

adică în cazul nostru

$$x^6+2x+1=4+8(x-1)+15(x-1)^2+20(x-1)^3+15(x-1)^4+ \\ +6(x-1)^5+(x-1)^6,$$

deci

$$f(x)=\frac{4}{(x-1)^3}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{15}{x-1}+20+15(x-1)+6(x-1)^2+(x-1)^3$$

$$=\frac{4}{(x-1)^3}+\frac{8}{(x-1)^2}+\frac{15}{x-1}+x^3+3x^2+6x+10.$$

45. 2. *Să se descompună în fracţii simple, fracţia*

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}.$$

Forma descompunerii este

$$f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

unde pentru ABC avem valorile

$$A=[xf(x)]_{x=0}=\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]_{x=0}=-1,\quad B=[(x-1)f(x)]_{x=1}=1,$$
$$C=[(x+1)f(x)]_{x=-1}=1,$$

și deci

$$\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}.$$

45. 3. *Să se descompună în fracții simple*

$$f(x)=\frac{x^4}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

Deoarece gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului, primul lucru pe care trebue să-l facem este împărțirea.

Se găsește

$$x^4=(x-a)(x-b)(x-c)(x+a+b+c)+R(x),$$

unde am pus

$$R(x)=[(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)]x^2+[abc-(a+b+c)(ab+bc+ca)]x+$$
$$+abc(a+b+c).$$

Deci

$$f(x)=x+(a+b+c)+\frac{R(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

Ultima fracție are descompunerea

$$\frac{R(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c},$$

unde

$$A=\left[\frac{R(x)}{(x-b)(x-c)}\right]_{x=a}=\frac{R(a)}{(a-b)(a-c)}=\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}.$$

In mod analog procedăm pentru B și C.

Avem deci

$$f(x)=x+(a+b+c)+\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b^4}{(b-a)(c-a)(x-b)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)(x-c)}.$$

45. 4. *Să se descompună în fracții simple fracția*

$$f(x)=\frac{5x^4-13x^3+14x^2-5x+3}{x(x-1)^2(x^2-1)}.$$

Deoarece descompunerea în factori a numitorului este

$$x(x+1)(x-1)^3$$

și cum gradul numărătorului este mai mic decât al numitorului descompunerea în fracții simple ale lui $f(x)$ va fi

$$f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{x-1}.$$

Pentru primii trei coeficienţi avem imediat $A=-3$, $B=5$, $C=2$. Inmulţind egalitatea (1) cu x şi făcându-l apoi să tindă către infinit, obţinem;

$$E=3. \quad \text{Făcând} \quad x=2, \quad \text{găsim} \quad D=-1.$$

Descompunerea cerută este

$$\frac{5x^4-13x^3+14x^2-5x+3}{x(x-1)^2(x^2-1)}=-\frac{3}{x}+\frac{5}{x+1}+\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}.$$

45. 5. *Să se descompună fracţia*

$$f(x)=\frac{x^2-x+2}{x(x^2-x+1)}.$$

Deoarece: x^2-x+1 are rădăcini imaginare, descompunerea este

$$f(x)=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Avem $A=2$; mai departe, scriem

$$\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=f(x)-\frac{2}{x}=\frac{x^2-x+2}{x(x^2-x+1)}-\frac{2}{x}=\frac{x(-x+1)}{x(x^2-x+1)}=\frac{-x+1}{x^2-x+1},$$

de unde reiese că: $B=-1$, $C=1$. Deci

$$\frac{x^2-x+2}{x(x^2-x+1)}=\frac{2}{x}+\frac{-x+1}{x^2-x+1}.$$

45. 6. *Să se descompună fracţia*

$$f(x)=\frac{1}{x^3(x^2+1)^2}.$$

Descompunerea are forma

$$f(x)=\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}+\frac{Fx+G}{x^2+1}.$$

Deoarece $f(x)$ este o funcţie impară, este necesar ca şi desvoltarea din dreapta să fie o funcţie impară. Or, schimbând în dreapta pe x în $-x$, desvoltarea se repetă cu semn schimbat numai dacă $B=E=G=0$. Deci

$$f(x)=\frac{A}{x^3}+\frac{C}{x}+\frac{Dx}{(x^2+1)}+\frac{Fx}{x^2+1}.$$

Avem: $A=1$. Scăpând de numitor se ajunge la egalitatea

$$1=(1+Cx^2)(x^2+1)^2+x^4[D+F(x^2+1)],$$

care trebue să fie o identitate. Egalând coeficienţii diferitelor puteri ale lui x se găsesc relaţiile

$$C+F=0, \quad 2C+D+F=-1, \quad 2A+C=0,$$

de unde rezultă: $C=-2$, $D=1$, $F=2$. Descompunerea este

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x}+\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{2x}{x^2+1}.$$

45. 7. *Să se descompună în fracții simple,*

$$f(x)=\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}.$$

Forma descompunerii este

$$f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Cx+E}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Fx+G}{x^2+x+1}.$$

Avem: $A=-1$, $B=3$. Pentru ceilalți coeficienți putem da cinci valori particulare ale lui x; dar putem proceda și după cum urmează. Scriem

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}+\frac{1}{x}-\frac{3}{(x+1)^2}=\frac{C}{x+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Fx+G}{x^2+x+1}.$$

Din partea dreaptă reiese că în prima parte, după ce vom face toate calculele, trebue să dispară dela numitor x și să rămână un singur factor $x+1$. In adevăr, găsim

$$\frac{x^4+2x^2-x+3}{(x+1)(x^2+x+1)^2}=\frac{C}{x+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Fx+G}{x^2+x+1}.$$

De aici rezultă $C=7$. Trecând primul termen în prima parte avem

$$-\frac{6x^3+8x^2+11x+4}{(x^2+x+1)^2}=\frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Fx+G}{x^2+x+1}.$$

Aici vom face pe $x=0$, 1, -1, apoi vom înmulți cu x și îl vom face să tindă către infinit. Obținem relațiile

$$-4=E+G;\quad -\frac{29}{9}=\frac{D+E}{9}+\frac{F+G}{3},\quad 5=-D+E-F+G,\quad -6=F,$$

care rezolvate dau: $D=-3$, $E=-2$, $F=-6$, $G=-2$. Avem în definitiv descompunerea

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{7}{x+1}-\frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}-\frac{6x+2}{x^2+x+1}.$$

§ 46. Infiniți mici și infiniți mari. Diferențiale

1. O cantitate variabilă care tinde către zero se numește *infinit mic*. Fiind dați mai mulți infiniți mici, alegem pe unul din ei ca *infinit mic principal*, fie x, apoi îi comparăm pe ceilalți cu el. Dacă

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{x^p}=k,\qquad (k \text{ finit} \neq 0) \qquad (I)$$

se zice că p este ordinul infinitului mic principal α și kx^p *partea principală*. Asupra infiniților mici avem următoarele teoreme:

a) Limita a doi infiniți mici de același ordin este egală cu câtul părților lor principale.

b) Limita raportului a doi infiniți mici de același ordin nu se schimbă dacă adunăm (sau scădem) fiecăruia infiniți mici de ordin superior. Bazați pe această teoremă, la limită, un infinit mic poate fi înlocuit prin partea sa principală.

c) Suma a doi infiniţi mici (sau a mai multor în număr finit), de acelaşi ordin, este tot un infinit mic de acelaşi ordin, având drept parte principală, suma părţilor principale ale infiniţilor mici componenţi.

d) Produsul a doi (sau mai mulţi, în număr finit) infiniţi mici este un infinit mic având drept ordin suma ordinelor infiniţilor mici factori ai produsului şi drept parte principală produsul părţilor lor principale.

Pentru a găsi partea principală a unui infinit mic se desvoltă deobicei limitat şi termenul de gradul cel mai mic formează partea principală.

2. Se zice că o cantitate variabilă, care poate lua valori din ce în ce mai mari, este un *infinit mare*. Dacă se dau mai mulţi infiniţi mari, se alege unul din ei, fie x, cu care îi comparăm pe toţi ceilalţi şi pe care îl vom numi *infinit mare principal*. Dacă

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{x^p} = k, \tag{II}$$

se zice că ordinul infinitului mare α este p şi *partea principală este* kx^p. Într'o sumă de infiniţi mari, cel care are ordinul cel mai înalt dă ordinul sumei. Pentru infiniţi mari avem teoreme asemănătoare teoremelor pentru infiniţii mici, numai că schimbăm atributul de „infinit mic“ cu „infinit mare“ şi la teorema b) în loc de „ordin superior“ se va pune „ordin inferior“.

3. Când x tinde către infinit, funcţiile $\ln x$, x^p $(p>0)$, e^x tind către infinit, adică sunt infiniţi mari. Când x este mare, avem inegalităţile

$$\ln x < x^p < e^x \tag{III}$$

oricare ar fi numărul pozitiv p. Aceste inegalităţi spun ordinul de infinitudine al acestor trei infiniţi mari, care joacă un rol esenţial în Analiză.

4. Deoarece termenul general al unei serii u_n este un infinit mic în raport cu $\frac{1}{n}$, căutând partea principală (atunci când aceasta există) a lui u_n putem decide prin comparare cu seria armonică generalizată, natura seriei.

5. Fie $y=f(x)$ o funcţie derivabilă; aceasta înseamnează că

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0, \tag{IV}$$

(excludem valorile lui x care anulează derivata), egalitate care spune că Δy este un infinit mic de acelaşi ordin cu Δx şi că partea sa principală este: $dy=f'(x)\,\Delta x$. Cum $\Delta x=dx$ această egalitate se scrie: $dy=f'(x)\,dx$ şi se numeşte *diferenţiala lui* y. Diferenţiala unei funcţii este aceeaşi chiar dacă luăm o nouă variabilă $u=g(x)$; adică

$$dy=f'_x(x)\,dx=f'_u(u)\,du. \tag{V}$$

Diferenţialele funcţiilor se supun acelorași reguli ca şi derivatele (§ 41, pct. 4).

46. 1. *Să se calculeze partea principală a infinitului mic*

$$y=1+n\cos(n+1)x-(n+1)\cos nx,$$

n fiind un număr pozitiv dat.

Folosind seria lui $\cos x$ avem

$$y=1+n\left[1-\frac{1}{2}(n+1)^2x^2+\lambda x^4\right]-(n+1)\left[1-\frac{1}{2}n^2x^2+\mu x^4\right]=$$
$$=-\frac{1}{2}n(n+1)x^2+\alpha x^4,$$

ceeace ne spune că partea principală a lui y este: $-\frac{1}{2}n(n+1)x^2$.

46. 2. *Să se arate că dacă x este mic, putem lua*

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x.$$

Presupunând pe x infinit mic principal să căutăm partea principală a infinitului mic: $\sqrt{1+x}-1$. Cu ajutorul desvoltării limitate, avem

$$\sqrt{1+x}-1=(1+x)^{\frac{1}{2}}-1=\left(1+\frac{1}{2}x+\lambda x^2\right)-1=\frac{1}{2}x+\lambda x^2,$$

adică partea principală este $\frac{1}{2}x$. Deci, dacă x este mic, putem lua

$$\sqrt{1+x}-1\approx\frac{1}{2}x;\quad \sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x,$$

și aproximația va fi cu atât mai bună, cu cât x va fi mai mic.

De exemplu

$$\sqrt{627}=\sqrt{25^2+2}=25\sqrt{1+\frac{2}{625}}\approx 25\left(1+\frac{2}{2\cdot 625}\right)=25{,}040,$$

valoare care corespunde celei date în „Manualul inginerului". Evident că putem scrie și

$$\sqrt{627}=\sqrt{24^2+51}=24\sqrt{1+\frac{51}{576}}\approx 24\left(1+\frac{51}{2\cdot 576}\right)=25{,}062,$$

valoare mai puțin bună decât cea precedentă, deoarece în prima x era mai mic.

46. 3. *Să se găsească raportul săgeții $f=DB$ a arcului ABC față de săgeată $f_1=D_1B_1$ a jumătății AB_1B a arcului ABC când arcul este mic* (fig. 44).

Dacă notăm cu r raza cercului și cu $\sphericalangle AOB=\varphi$, atunci $\sphericalangle AOB_1=\frac{1}{2}\varphi$ și

$$f=r(1-\cos\varphi),\quad f_1=r\left(1-\cos\frac{1}{2}\varphi\right).$$

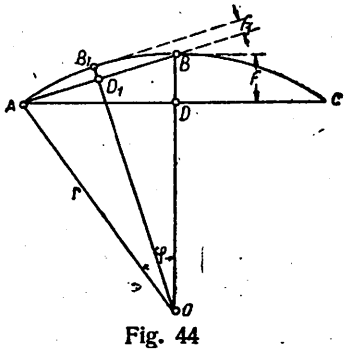


Fig. 44

Astfel raportul căutat este

$$\frac{f}{f_1}=\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos\frac{1}{2}\varphi}.$$

Această expresie este prea complicată pentru a fi comod întrebuințată în practică. Presupunând că arcul este mic și

înlocuind infiniţii mici: $1-\cos\varphi$ şi $1-\cos\frac{1}{2}\varphi$ prin părţile lor principale,

$$\frac{f}{f_1}\approx\frac{\frac{1}{2}\varphi^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varphi\right)^2}\approx 4.$$

Astfel, pentru un arc corespunzător unui unghi la centru nu prea mare, se poate spune că săgeata semiarcului este aproximativ un sfert din săgeata arcului. Aceasta permite să se construiască succesiv punctele intermediare ale unui arc căruia îi cunoaştem capetele şi mijlocul.

46. 4. *Să se determine a şi b în aşa fel, încât infinitul mic*

$$y=a\,\mathrm{sh}\,x+b\,\mathrm{tg}\,x+\ln(1+x)+\frac{1}{2}x^2,$$

să fie de ordinul cel mai ridicat posibil. Să i se determine apoi partea principală.

Ţinând seamă de desvoltările funcţiilor $\mathrm{sh}\,x$, $\ln(1+x)$ şi a primilor termeni din desvoltarea lui $\mathrm{tg}\,x$ (v. prob. 43. 1) avem

$$y=a\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\lambda x^5\right)+b\left(x+\frac{1}{3}x^3+\mu x^5\right)+\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\right.$$
$$\left.+\nu x^5\right)+\frac{1}{2}x^2=(a+b+1)x+\left(\frac{a+2b+2}{6}\right)x^3-\frac{1}{4}x^4+\epsilon x^5.$$

Vom determina pe a, b, c în aşa fel încât

$$a+b+1=0 \quad \text{şi} \quad a+2b+2=0,$$

adică: $a=0$, $b=-1$. In acest caz, y este un infinit mic de ordinul 4 şi are ca parte principală pe: $-\frac{1}{4}x^4$.

46. 5. *Să se determine a şi b în aşa fel, încât* $y=(1+x)^m-\frac{1+ax}{1+bx}$, *să fie un infinit mic de ordinul maxim.*

Desvoltând în serie avem

$$y=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\lambda x^4-$$
$$-(1+ax)(1-bx+b^2x^2-b^3x^3+\mu x^4);$$

scriind că coeficienţii lui x şi x^2 sunt nuli, obţinem:

$m=a-b$, $\frac{1}{2}m(m-1)=-b(a-b)$, de unde $a=\frac{1}{2}(m+1)$, $b=-\frac{1}{2}(m-1)$

y este infinit mic de ordinul 3 şi are drept parte principală:

$$\left[\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)-b^2(a-b)\right]x^3=-\frac{1}{12}m(m^2-1)x^3.$$

46. 6. *Să se arate că funcţia*

$$y=x-\frac{3\sin 2x}{2(2+\cos 2x)}$$

este un infinit mic de ordinul 5. Să i se găsească partea principală.

Cum

$$3\sin 2x = 6x - 4x^3 + \frac{4}{5}x^5 + \lambda x^7;$$

$$2(2+\cos 2x) = 6 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4 + \mu x^6$$

vom avea făcând împărțirea

$$\frac{3\sin 2x}{2(2+\cos 2x)} = x - \frac{4}{45}x^7 + \nu x^5; \qquad y = \frac{4}{45}x^5 + \nu x^7$$

adică partea principală a infinitului mic y este $\frac{4}{45}x^5$.

47. 7. *Dacă x este un arc mai mic decât* 15°, *să se arate că expresia*

$$\frac{28\sin 2x + \sin 4x}{12(3+2\cos x)}$$

diferă de x printr'un număr mai mic decât numărul care reprezintă în radiani pe 1'.

Inlocuind liniile trigonometrice prin desvoltările lor limitate până la termenul care conține pe x^7 și făcând împărțirea, avem

$$\frac{28\sin 2x + \sin 4x}{12(3+\cos 2x)} = \frac{60x - 48x^3 + 16x^5 - \frac{1248}{315}x^7 + \alpha x^9}{60 - 48x^2 + 16x^4 - \frac{32}{15}x^6 + \beta x^8} = x - \frac{16}{525}x^7 + \gamma x^9,$$

unde se vede că luând drept valoare a expresiei date pe x se face o eroare mai mică decât termenul neglijat $\frac{16}{525}x^7$ (prin exces, deoarece acest termen are semnul $-$). Deci, dacă x este mai mic decât $\frac{1}{12}\pi = 0{,}2617994\ldots$, se găsește că partea dreaptă este mai mică decât $0{,}000\,000\,256\ldots$, adică cu mult mai mică decât valoarea unui minut de grad sexagesimale în radiani (a cărui valoare este $\frac{\pi}{180 \cdot 60} = 0{,}0002909\ldots$).

46. 8. *Să se studieze natura seriei cu termenul general*

$$u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Luând în formula lui Maclaurin, numai doi termeni, putem scrie

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\theta x)^2},$$

x fiind în modul mai mic decât unitatea iar θ un număr pozitiv și subunitar. Dacă facem aici $x = \frac{1}{n}$, vedem că

$$u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2[1+(\theta/n)]^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2}{2(n+\theta)^2},$$

relaţie care ne spune că seria cu termenul general u_n este comparabilă cu seria cu termenul general $\frac{1}{n^2}$, deci este convergentă.

Observaţie. Deoarece seria este convergentă, înseamnă că şirul S_n definit prin relaţia

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left[\ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1),$$

este convergent şi are o limită (suma seriei cu termenul general u_n). Această limită poartă numele de *constanta lui Euler* şi are drept valoare 0,5772...

46. 9. *Să se studieze seria cu termenul general*

$$u_n = a \sin \frac{1}{n} + \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1},$$

a fiind un parametru oarecare.

Folosind desvoltările în serii, obţinem succesiv

$$u_n = a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{\lambda}{n^5}\right) + n\left[\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{\lambda}{n^5}\right) +$$

$$+ n\left[1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} + \frac{\mu}{n^6} - \left(1 + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{8n^4} + \frac{\nu}{n^6}\right)\right] = \left(a + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{n} - \frac{4a+9}{24n^3} + \frac{\sigma}{n^5},$$

unde λ, μ, ν, σ sunt funcţii care rămân finite când $\frac{1}{n}$ tinde către zero. Deci, dacă $a \neq -\frac{1}{2}$ seria este comparabilă cu seria armonică, deci este divergentă. Dacă $a = -\frac{1}{2}$ seria este comparabilă cu seria având termenul general $\frac{1}{n^3}$, deci este convergentă.

§ 47. Forme nedeterminate

1. Se zice că o funcţie are o formă nedeterminată când pentru o valoare particulară a variabilei, fie $x = a$, funcţia are una din formele

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Prin definiţie, valoarea funcţiei în asemenea cazuri speciale se zice că este limita funcţiei când x tinde către a. Pentru a găsi aceste limite, sau, cum se mai spune, pentru ridicarea nedeterminării, se aplică în general, *regula lui Hospital.* Această regulă constă în următoarele. Fie fracţia $\frac{f(x)}{g(x)}$, care pentru $x = a$ se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$ şi care satisface următoarele condiţii: a) funcţiile f şi g au

derivate bine determinate în vecinătatea punctului a; b) $g'(x)$ nu se anulează de o infinitate de ori în vecinătatea lui a; c) $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ există; atunci

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dacă fracţia $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ se prezintă din nou sub formă de nedeterminare, repetăm regula până când ajungem la valoarea determinată. Numărul a poate fi oricât de mare vrem, adică regula se aplică şi când x tinde către infinit.

Regula lui Hospital se aplică şi celorlalte nedeterminări, în felul următor:

Nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$ se tratează la fel ca $\frac{0}{0}$;

Nedeterminarea $0\cdot\infty$ provine dintr'o funcţie de forma $f(x)\,g(x)$, care se reduce la una din formele precedente, scriind-o sub forma $f(x)\Big/\frac{1}{g(x)}$ sau $g(x)\Big/\frac{1}{f(x)}$.

Nedeterminarea $\infty-\infty$ provine dintr'o funcţie de forma $f(x)-g(x)$, pentru o valoare $x=a$. Scriem funcţia sub forma:

$$f(x)\left[1-\frac{g(x)}{f(x)}\right],$$

şi căutăm care este valoarea funcţiei $\frac{g(x)}{f(x)}$, care, pentru $x=a$, are forma nedeterminată $\frac{\infty}{\infty}$. Dacă valoarea nu este 1, limita expresiei considerate este $\pm\infty$, iar dacă este 1, ajungem la forma $\infty\cdot 0$ pe care am văzut mai sus cum o tratăm.

Nedeterminările: 0^0, ∞^0, 1^∞ provin din funcţii de forma $[f(x)]^{g(x)}$. Se ridică mai întâi nedeterminarea $g(x)\cdot\ln f(x)$ care se prezintă sub forma $0\cdot\infty$. Dacă limita este A, limita expresiei date este e^A.

Nedeterminările de tipul 1^∞ se pot ridica şi direct, aplicând regula (I) dela § 36.

2. In general, nedeterminările provin din combinaţii de funcţii care tind către zero sau către infinit pentru o anumită valoare a variabilei. Aceasta înseamnă că avem de a face cu infiniţi mici sau cu infiniţi mari. Inlocuindu-i cu părţile lor principale, nedeterminarea se ridică imediat, fără a mai fi nevoie de regula lui Hospital. Alteori, invers, dacă avem doi infiniţi mici $f(x)$ şi $g(x)$ şi dacă cu ajutorul regulii lui Hospital stabilim că

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A,$$

A fiind finit şi diferit de zero, înseamnă că $f(x)$ sunt infiniţi mici de acelaşi ordin. Dacă $a=0$ şi $g(x)=x^m$, înseamnă că partea principală a infinitului mic $f(x)$ este Ax^m.

3. Pentru ridicarea nedeterminărilor este bine, în general să se ţină seamă de proprietăţile limitelor, care sunt aceleaşi ca la şiruri (vezi § 31), cu deosebirea că variabila tinde către o valoare a oricare (care poate fi chiar infinită), pe când la şiruri n tinde către infinit prin valori întregi şi pozitive.

47. 1. *Să se găsească*

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^4+2x^3-2x-1}{x^4+3x^3+3x^2+x}.$$

Inlocuind pe x cu -1 se anulează şi numărătorul şi numitorul; aceasta însemnează că ambele se împart cu $x+1$. Avem

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^4+2x^3-2x-1}{x^4+3x^3+3x^2+x}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^3+x^2-x-1)}{x(x+1)^3}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x(x+1)^2}.$$

Fracţia se prezintă din nou sub forma nedeterminată, deoarece numărătorul şi numitorul se anulează din nou pentru $x=-1$; acesta însemnează că numărătorul se divide din nou cu $x+1$, şi în adevăr,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x(x+1)^2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-1)}{x(x+1)^2}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x(x+1)},$$

care iarăşi este nedeterminată; mai simplificând odată, se găseşte în definitiv

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^4+2x^3-2x-1}{x^4+3x^3+3x^2+x}=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x}=2.$$

47. 2. *Să se găsească*

$$E=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)+\sin(a-b)+\sin(b-x)}{\sin(x-a)+\sin(a-c)+\sin(c-x)}.$$

Soluţia I. Când înlocuim pe x cu a se anulează atât numărătorul, cât şi numitorul. Aplicând regula lui Hospital, avem

$$E=\lim_{x\to a}\frac{\cos(x-a)-\cos(b-x)}{\cos(x-a)-\cos(c-x)}=\frac{1-\cos(b-a)}{1-\cos(c-a)}=\frac{\sin^2\frac{1}{2}(b-a)}{\sin^2\frac{1}{2}(c-a)}.$$

Soluţia II. Soluţia care urmează este mai lungă, dar avantajoasă deoarece nu se foloseşte noţiunea de derivată. Observăm că numărătorul se poate scrie succesiv,

$$\sin(x-a)+\sin(b-x)+\sin(a-b)=2\sin\frac{b-a}{2}\cos\frac{2x-a-b}{2}+2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$=2\sin\frac{b-a}{2}\left(\cos\frac{2x-a-b}{2}-\cos\frac{a-b}{2}\right)=4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{x-b}{2}\sin\frac{a-x}{2},$$

şi schimbând pe b în c

$$\sin(x-a)+\sin(a-c)+\sin(c-x)=4\sin\frac{c-a}{2}\sin\frac{x-c}{2}\sin\frac{a-x}{2}.$$

După ce facem simplificările rezultă

$$E=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(c-a)\sin\frac{1}{2}(a-c)}=\frac{\sin^2\frac{1}{2}(b-a)}{\sin^2\frac{1}{2}(c-a)}.$$

47. 3. *Să se găsească*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos mx}.$$

Soluţia I. Făcând $x=0$, expresia dată ia forma nedeterminată 0/0. Aplicând regula lui Hospital avem

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos mx}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{m\sin mx}=\frac{2}{m}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin mx}$$

care din nou se prezintă sub forma nedeterminată. Aplicând din nou regula

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos mx}=\frac{2}{m}\lim_{x\to 0}\frac{1}{m\cos mx}=\frac{2}{m^2}.$$

Soluţia II. Se poate găsi limita căutată fără a folosi noţiunea de derivată, în felul următor. Scriem

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos mx}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{1}{2}mx}=\frac{2}{m^2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2}mx}{\sin\frac{1}{2}mx}\right)^2=\frac{2}{m^2}$$

în baza limitei cunoscute

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

47. 4. *Să se demonstreze că*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}x}{x}=1.$$

Soluţia I. Ţinem seama că: $\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\lambda x^5$, λ fiind o funcţie de x care rămâne finită când x tinde către zero. Deci

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2}{3!}+\lambda x^4\right)=1$$

Soluţia II. Se găseşte acelaş rezultat aplicând regula lui Hospital.

47. 5. *Să se calculeze*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{x+a^m}-a}{\sqrt[n]{x+b^n}-b}.$$

Soluţia I. Aplicând regula lui Hospital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{x+a^m}-a}{\sqrt[n]{x+b^n}-b}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{m\sqrt[m]{(x+a^m)^{m-1}}}}{\frac{1}{n\sqrt[n]{(x+b^n)^{n-1}}}}=\frac{\frac{1}{ma^{m-1}}}{\frac{1}{nb^{n-1}}}=\frac{nb^{n-1}}{ma^{m-1}}.$$

Soluţia II. Folosind identitatea

$$x^p - y^p = (x-y)(x^{p-1} + yx^{p-2} + \cdots + y^{p-2}x + y^{p-1}),$$

unde facem: $p=m$, $x=\sqrt[m]{x+a^m}$, $y=a$ avem

$$\sqrt[m]{x+a^m} - a = \frac{(x+a^m)-a^m}{\sqrt[m]{(x+a^m)^{m-1}} + a\sqrt[m]{(x+a^m)^{m-2}} + \cdots + a^{m-2}\sqrt[m]{x+a^m} + a^{m-1}},$$

şi la fel pentru diferenţa: $\sqrt[n]{x+b^n}-b$. Inlocuind, făcând simplificările şi apoi pe $x=0$ se găseşte acelaş rezultat.

Soluţia III. Avem

$$\sqrt[m]{x+a^m} = a\left(1+\frac{x}{a^m}\right)^{\frac{1}{m}} = a\left(1+\frac{x}{ma^m}+\lambda x^2\right),$$

$$\sqrt[n]{x+b^n} = b\left(1+\frac{x}{b^n}\right)^{\frac{1}{n}} = b\left(1+\frac{x}{nb^n}+\mu x^2\right),$$

unde λ şi μ au valori finite când x tinde către zero. Mai departe

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{x+a^m}-a}{\sqrt[n]{x+b^n}-b} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{ma^{m-1}}+a\lambda x}{\frac{1}{nb^{n-1}}+b\mu x} = \frac{nb^{n-1}}{ma^{m-1}}.$$

47. 6. *Să se găsească*

$$y = \lim_{x\to 0}\frac{a^x - b^x}{x}.$$

Soluţia I. Expresia dată se prezintă sub forma nedeterminată 0/0. Aplicând regula lui Hospital, avem

$$y = \lim_{x\to 0}\frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}.$$

Soluţia II. Avem

$$a^x = e^{x\ln a} = 1 + x\ln a + \lambda x^2; \quad b^x = 1 + x\ln b + \mu x^2,$$

λ şi μ fiind două funcţii ce iau valori finite pentru $x=0$. Deci

$$y = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln a - \ln b)x + (\lambda-\mu)x^2}{x} = \ln\frac{a}{b}.$$

47. 7. *Să se găsească*

$$y = \lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-1}{1-\cos x}. \qquad (a>0).$$

Expresia se prezintă sub forma nedeterminată 0/0.

Cum

$$a^{x^2}=e^{x^2\ln a}=1+x^2\ln a+\lambda x^4,\ \cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\mu x^4,$$

rezultă că: $y=2\ln a=\ln a^2$.

47. 8. *Să se calculeze*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right).$$

Expresia se prezintă sub forma nedeterminată $\infty-\infty$. Pentru a ridica nedeterminarea o scriem sub forma

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{(1+x)(1-x^3)}$$

transformându-se astfel în forma 0/0. Indepărtând dela numărător şi dela numitor factorul $1-x$, avem mai departe

$$-\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{(1+x)(1+x+x^2)}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}.$$

47. 9. *Să se calculeze a, b, c în aşa fel, încât limita expresiei*

$$E=\frac{\sqrt{1+2x+2x^2}-a-bx-cx^2}{x^3}$$

să fie finită pentru $x=0$.

Pentru aceasta va trebui ca numărătorul să fie infinit mic de ordinul 3. Pentru valori mici ale lui x putem scrie, după desvoltarea binomului

$$\sqrt{1+2x+2x^2}=[1+(2x+2x^2)]^{\frac{1}{2}}=1+x+x^2-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+$$

$$+\frac{1}{2}(x+x^2)^3+\cdots=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+\lambda x^4,$$

deci

$$E=\frac{(1-a)+(1-b)x+\left(\frac{1}{2}-c\right)x^2-\frac{1}{2}x^3+\lambda x^4}{x^3}.$$

Va trebui ca: $a=1$, $b=1$, $c=\frac{1}{2}$. Atunci: $\lim_{x\to 0}E=-\frac{1}{2}$.

47. 10. *Să se găsească*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(m\arcsin x)}{\ln(1+x^2)}.$$

Expresia se prezintă sub forma ∞/∞. Aplicăm regula lui Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(m\arcsin x)}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{m\sin(m\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{2x}{1+x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{m(1+x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{\sin(m\arcsin x)}{x}=\frac{m}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(m\arcsin x)}{x}.$$

Partea dreaptă pentru $x=0$ se prezintă sub forma 0/0. Aplicând din nou regula lui Hospital, găsim:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(m\arcsin x)}{\ln(1+x^2)}=\frac{1}{2}m\cdot\lim_{x\to 0}\frac{m\cos(m\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}m^2.$$

47. 11. *Se cere limita expresiei*

$$y=\frac{(\ln x)^x}{x^m}$$

m fiind un număr oarecare, pentru $x=+\infty$.

Dacă $m\leq 0$, funcţia dată se scrie sub forma: $y=x^{-m}(\ln x)^x$, $(-m\geq 0)$ şi tinde evident către $+\infty$. Să arătăm că are aceeaşi limită pentru $m>0$. In adevăr, punând: $\ln x=u$, când x va tinde către infinit şi u va tinde tot către infinit; dar

$$y=\frac{u^{e^u}}{e^{mu}};\quad \ln y=e^u\ln u-mu=u\left(\frac{e^u}{u}\ln u-m\right).$$

Cum e^u tinde mai repede către infinit decât u, paranteza tinde către infinit, deci toată expresia. Rezultă că: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$.

Observaţie. Pe aceeaşi cale se poate vedea că

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)^m}{x^n}=0,$$

unde n este un număr pozitiv, iar m oarecare; aceasta înseamnează că atunci când x tinde către infinit, x^n $(n>0)$ tinde mai repede către infinit decât $(\ln x)^m$, oricare ar fi m.

47. 12. *Să se calculeze*

$$y=\lim_{x\to\frac{1}{4}\pi}(1-\operatorname{tg}x)\sec 2x,$$

Expresia se prezintă sub forma nedeterminată: $0\cdot\infty$. Aplicând regula lui Hospital avem

$$y=\lim_{x\to\frac{1}{4}\pi}\frac{1-\operatorname{tg}x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{1}{4}\pi}\frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{-2\sin 2x}=1.$$

47. 13. *Să se găsească limita expresiei*

$$y=\sqrt[m]{x^m+ax^{m-1}+\cdots}-\sqrt[n]{x^n+bx^{n-1}+\cdots},$$

pentru $x=+\infty$, *m şi n fiind două numere întregi şi pozitive (expresiile de sub radicali sunt polinoame).*

Facem desvoltarea funcţiei în jurul punctului $x=\infty$, punând $x=\frac{1}{h}$, obţinem

$$y=\frac{1}{h}\left[(1+ah+\lambda h^2)^{\frac{1}{m}}-(1+bh+\mu h^2)^{\frac{1}{n}}\right]=\frac{1}{h}\left[\left(1+\frac{a}{m}h+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\lambda_1 h^2\right)-\left(1+\frac{b}{n}h+\mu_1 h^2\right)\right]=\frac{a}{m}-\frac{b}{n}+(\lambda_1-\mu_1)h.$$

Când $x=+\infty$, h tinde către zero prin valori pozitive şi

$$\lim_{x\to+\infty} y=\frac{a}{m}-\frac{b}{n}.$$

47. 14. *Să se calculeze valoarea funcţiei*

$$y=x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

pentru $x=\infty$.

Facem substituţia $1/x=u$. Funcţia se prezintă atunci sub forma

$$y=\frac{u-\ln(1+u)}{u^2}.$$

Când x tinde către infinit, u tinde către zero, deci y se prezintă sub forma nedeterminată 0/0. Regula lui Hospital ne dă

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{u\to0} y=\lim_{u\to0}\frac{1}{2(1+u)}=\frac{1}{2}.$$

47. 15. *Să se găsească limita către care tinde funcţia*

$$y=(1-\cos x)^x,$$

când x tinde către zero.

Cum: $1-\cos x>0$ putem aplica logaritmii:

$$\ln y=x\ln(1-\cos x)=\frac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{x}}.$$

Noua formă nedeterminată este ∞/∞. Aplicând regula lui Hospital avem

$$\lim_{x\to0}(\ln y)=-\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin x}{1-\cos x},$$

care se prezintă sub forma 0/0. Aplicând din nou regula lui Hospital, sau observând că $x^2\sin x$ este un infinit mic de ordinul 3 pe când numitorul un infinit mic de ordinul 2, se găseşte că

$$\lim_{x\to0}(\ln y)=0;\quad \lim_{x\to0} y=1.$$

47. 16. *Să se găsească limita funcţiei*

$$y=\left(x\cos\frac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x^2+1}},$$

pentru $x=0$ şi $x=\infty$.

1° Pentru $x=0$, y este de forma 0°.

Aplicând logaritmii avem

$$\ln y=\frac{x}{x^2+1}\ln x+\frac{x}{x^2+1}\ln\cos\frac{x}{x^2+1}. \qquad (1)$$

Când x tinde către zero $x \ln x$ tinde către zero. Acest lucru putem să-l vedem mai uşor înlocuind pe x prin $\frac{1}{u}$. Funcţia devine $-(\ln u/u)$, care când u tinde către infinit tinde către zero, deoarece u tinde mult mai repede către infinit decât $\ln u$. In ce priveşte termenul al doilea, este mai simplu, căci $\frac{x}{x^2+1}$ tinde către zero, iar $\ln \cos \frac{x}{x^2+1}$ tinde către $\ln \cos 0 = \ln 1 = 0$. In rezumat

$$\lim_{x \to 0} (\ln y) = 0; \quad \lim_{x \to 0} y = 1.$$

2° Pentru $x = +\infty$. Nu-putem presupune că x tinde către $-\infty$, deoarece expresia din paranteză este negativă şi y nu are sens (funcţia exponenţială a^x este definită numai pentru cazul $a > 0$). Ţinând seamă de (1) şi de faptul că pentru x foarte mare primul termen este echivalent cu

$$\frac{x \ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x}$$

care tinde către zero când x tinde către infinit, iar al doilea termen tinde tot către zero, rezultă că şi în acest caz: $\lim_{x \to +\infty} y = 1$.

47. 17. *Să se găsească valorea limitei*

$$y = \lim_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}.$$

Funcţia are forma nedeterminată ∞°. Presupunem că x tinde către zero prin valori pozitive, căci altfel $\operatorname{ctg} x$ este negativ şi funcţia nu mai este definită. Avem

$$\ln y = \lim_{x \to 0} (\sin x \ln \operatorname{ctg} x) = -\lim_{x \to 0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} = 0, \quad y = 1.$$

§ 48. Extreme

1. O funcţie derivabilă într'un interval $[a, b]$ este *crescătoare* în acest interval dacă derivata este pozitivă şi este *descrescătoare* dacă derivata este negativă.

2. Fie: $y = f(x)$ o funcţie derivabilă într'un interval $[a, b]$. Se zice că într'un punct $x = c$, interior acestui interval, funcţia are un *extrem*, atunci când în acest punct derivata se anulează, schimbând de semn. Mai precis: dacă înainte de $x = c$ derivata este negativă şi după este pozitivă, extremul se numeşte un *minim*, iar dacă înainte de $x = c$ derivata este pozitivă şi după este negativă, extremul se numeşte un *maxim*. In vecinătatea unui minim, valoarea minimă este cea mai mică, iar în vecinătatea unui maxim, valoarea maximă este cea mai mare.

3. Pentru a vedea dacă într'un punct $x = c$, pentru care $f'(c) = 0$, funcţia are un extrem, se va studia semnul derivatei în vecinătatea acestui punct. Dacă acest lucru este greu de făcut, se calculează derivata a doua şi dacă $f''(c) > 0$ avem un minim, iar dacă $f''(c) < 0$ avem un maxim.

4. Mai general, fie: $y=f(x)$ o funcţie care admite în punctul $x=c$, $p+1$ derivate, astfel încât

$$f'(c)=f''(c)=\cdots=f^{(p)}(c)=0, \quad f^{(p+1)}(c)\neq 0; \tag{I}$$

atunci, pentru $x=c$ avem un extrem când p este fără soţ, şi anume: maxim dacă $f^{(p+1)}(c)<0$ şi minim dacă $f^{(p+1)}(c)>0$.

5. Intr'un punct în care $f'(c)$ se anulează fără a schimba de semn când x ia valori înainte şi după c, se zice că curba reprezentativă a funcţiei $y=f(x)$ are un punct de *inflexiune*. Intr'un asemenea punct, $f''(c)=0$.

Mai general se zice că curba: $y=f(x)$ prezintă în punctul $x=c$ un punct de inflexiune, când într'un asemenea punct avem condiţiile (I) îndeplinite în ipoteza p cu soţ.

6. Se poate întâmpla ca $f'(x)$ să schimbe de semn când x trece printr'o valoare $x=c$ fără ca $f'(x)$ să se anuleze pentru $x=c$, în care caz funcţia $f(x)$ *nu mai este derivabilă* pentru valoarea $x=c$. Se poate spune şi în acest caz, ca o extindere a celor de mai sus, că în punctul $x=c$ funcţia admite un extrem, în sensul că pentru $x=c$ funcţia ia cea mai mare valoare faţă de valorile învecinate (când curba are o tangentă în acest punct, ea nu mai este paralelă cu axa Ox, ci cu Oy).

48. 1. *Dintr'o foaie de tablă pătrată având latura a se taie din colţuri patrate şi apoi se îndoaie marginile, obţinându-se o cutie deschisă cu unghiurile drepte* (fig. 45). *Cum se obţine cutia cu volumul maxim?*

Dacă latura pătratului tăiat o notăm cu x, atunci volumul cutiei se exprimă astfel

$$y=x(a-2x)^2$$

unde x variază între 0 şi $\frac{1}{2}a$. Problema revine la a găsi cea mai mare valoare a funcţiei y în acest interval. Derivata este

$$y'=(a-2x)(a-6x);$$

între 0 şi $\frac{1}{2}a$ are o singură rădăcină $x=\frac{1}{6}a$.

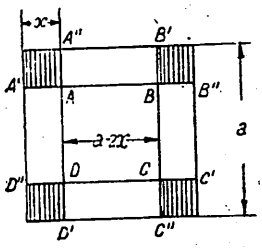


Fig. 45

Semnul trinomului ne spune că înainte de această valoare derivata este pozitivă şi după ea, este negativă. Astfel, pentru: $x=\frac{1}{6}a$, $y=\frac{2}{27}a^3$ care reprezintă maximul funcţiei.

48. 2. *O sarcină G aşezată pe planul orizontal trebue să fie deplasată prin aplicarea unei forţe în centrul ei de greutate. Sub ce unghi cu orizontala, ţinând seama de frecare, trebue să aplicăm această forţă, pentru ca mărimea sa F să fie cea mai mică? Coeficientul de frecare μ este dat* (fig. 46).

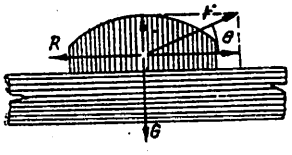


Fig. 46

Frecarea se consideră proporţională cu forţa care apasă corpul pe plan (legea lui Coulomb) şi este îndreptată împotriva mişcării corpului. Notăm forţa cu F, iar unghiul pe care-l face cu orizontala cu θ. Descompunând forţa F după orizontală şi verticală obţinem componentele $F\cos\theta$ şi $F\sin\theta$. Forţa care apasă corpul asupra planului va fi:

$G—F\sin\theta$, astfel încât, după legea lui Coulomb, frecarea va fi

$$R=\mu(G—F\sin\theta).$$

Componenta orizontală $F\cos\theta$ trebue să echilibreze aceasta frecare

$$F\cos\theta=\mu(G—F\sin\theta),$$

de unde

$$F=\frac{\mu G}{\cos\theta+\mu\sin\theta}.$$

Va trebui să determinăm minimul acestei funcţii sau maximul funcţiei

$$y=\cos\theta+\mu\sin\theta,$$

pentru valorile lui θ din intervalul $\left(0,\frac{1}{2}\pi\right)$. Derivata

$$y'=\mu\cos\theta—\sin\theta,$$

devine nulă dacă: $\operatorname{tg}\theta=\mu$ sau: $\theta=\operatorname{arctg}\mu$; acest unghi θ se numeşte *unghi de frecare*. Deoarece

$$y''=—\mu\sin\theta—\cos\theta<0,$$

rezultă că aplicând forţa sub unghiul de frecare, se obţine mărimea cea mai avantajoasă.

48. 3. *Fiind dat un trunchi de arbore, de formă cilindrică, se cere să se transforme într'o grindă dreptunghiulară prezentând maximum de rezistenţă la încovoiere* (fig. 47).

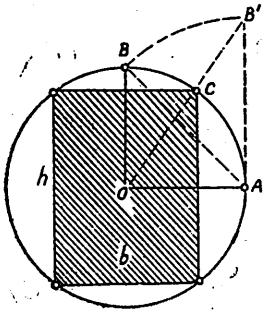


Fig. 47

Presupunem că notăm cu b grosimea grinzii, cu h înălţimea ei şi cu R raza cercului de secţiune în triunghiul dat. Se ştie că rezistenţa grinzii este proporţională cu produsul bh^2. Va trebui deci să găsim maximul funcţiei: $y=bh^2$. Dar, din fig. 47 se vede că: $b^2+h^2=4R^2$, $h^2=4R^2—b^2$, deci $y=b(4R^2—b^2)$. Derivăm în raport cu b:

$$y'=(4R^2—b^2)—2b^2=4R^2—3b^2=0,$$

de unde scoatem $b=\frac{2R}{\sqrt{3}}$ şi se vede că derivata trece dela + la — când b trece prin această valoare (derivata este un trinom de gradul 2 în care coeficientul primului termen este negativ). Deci, y este maxim pentru această valoare. Pentru h avem $\frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$. Construcţia dreptunghiului înscris în cerc, care răspunde problemei, se face astfel: pe tangenta în A se ia $AB'=AB=$ latura pătratului înscris; unind pe O cu B' căpătăm, la intersecţia cercului, punctul C, din care coborîm perpendiculare pe OA şi OB, etc.

48. 4. *Se cere să se găsească cât de înaltă trebue să fie uşa unui turn, de lăţime a pentru ca să putem întroduce înăuntru o scară de lungime l* (fig. 48).

Pentru ca problema să aibă sens, trebue ca $l > a$ şi evident mai mic decât înălţimea turnului. Problema cere maximul lui BE (fig. 48). Notând cu x unghiul, pe care-l face scara cu planul de bază al turnului avem

$$AD = l\sin x,\quad AC = l\cos x,\quad BC = AC - AB = l\cos x - a,$$
$$BE = BC\,\mathrm{tg}\,x = l\sin x - a\,\mathrm{tg}\,x = f(x).$$

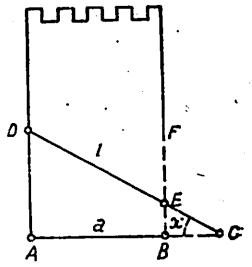


Fig. 48

Derivata este

$$f'(x) = \frac{l\cos^3 x - a}{\cos^2 x} = \frac{P(x)}{Q(x)};$$

extremele sunt date de ecuaţia

$$\cos^3 x = \frac{a}{l},\ \text{adică}\ \cos x = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}.$$

Dacă notăm cu x_0 valoarea dată de această ecuaţie, $P(x_0) = 0$, iar pentru derivata a doua avem

$$f''(x_0) = \frac{P'(x_0)}{Q(x_0)} = -3l\sin x_0 < 0,$$

adică x_0 dă un maximum. Valoarea lui este

$$M = \left(1 - \frac{a}{\cos x}\right)\sin x$$
$$= (1 - \sqrt[3]{a^2 l})\sqrt{1 - \left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{2}{3}}} = (\sqrt[3]{l^2} - \sqrt[3]{a^2})^{\frac{3}{2}}.$$

48. 5. *Din punctul A, situat pe o arteră de cale ferată AB, se dirijează un transport de mărfuri înspre punctul C situat la o distanţă CB = l de linie ferată* (fig. 49). *Costul transportului pentru unitatea de greutate pe distanţă unitară este α, pentru calea ferată, şi β pentru transportul cu căruţa. În care punct M trebue să racordăm şoseaua MC, pentruca transportul mărfurilor din A în C (pe linia AMC) să fie cel mai ieftin?*

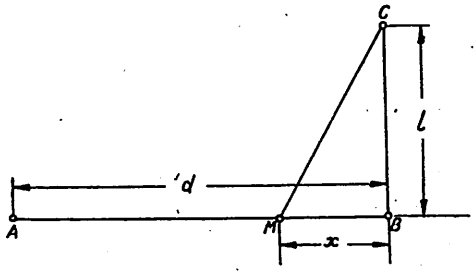


Fig. 49

Din figură reiese că valoarea transportului greutăţii unitare de marfă, luând o poziţie arbitrară pentru punctul M, se poate scrie

$$y = \alpha(d - x) + \beta\sqrt{x^2 + l^2} \qquad (0 \leq x \leq d).$$

Derivata este

$$y' = \frac{\beta x}{\sqrt{x^2 + l^2}} - \alpha = \beta\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}} - k\right),\ \text{unde}\ k = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Dacă: $k \geqq 1$ ($\alpha \geqq \beta$), atunci această expresie este toată vremea negativă, neputându-se anula. Funcţia y descreşte cu mărimea x (dela 0 la d) şi, evident, ajunge la valoarea sa minimă pentru $x=d$. In acest caz, soluţia cea mai favorabilă ar fi să înceapă şoseaua chiar în punctul B.

Să presupunem $k<1$ ($\alpha \leqq \beta$); derivata se anulează când

$$x^2=k^2(x^2+l^2);\quad x_0=\frac{kl}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Avem două ipoteze: a) dacă: $x_0>d$, adică M se află la dreapta lui B, drumul cel mai avantajos este tot cel din cazul precedent, adică şoseaua trebue să înceapă în punctul B; b) dacă: $x_0<d$, derivata se anulează pentru valoarea $x=x_0$. Derivata a doua este

$$y''=\frac{\beta l^2}{(x^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}>0,$$

adică pentru $x=x_0$, y are un minim. In acest caz, şoseaua trebue să înceapă din punctul M, a cărui distanţă de A este x_0.

48. 6. *Să se construiască un rezervor având baza un pătrat iar pereţii verticali, deschis la partea superioară, având o capacitate de* 32000 mc *şi în aşa fel ca costul căptuşirei interioare cu tablă să fie minim.*

Dacă notăm cu x latura bazei iar cu y înălţimea, trebue să găsim minimul sumei

$$S=x^2+4xy,$$

atunci când $x^2y=32000$.

Eliminând pe y, avem de găsit minimul funcţiunei

$$S=x^2+\frac{128000}{x}.$$

Primele două derivate sunt

$$S'=2\left(x-\frac{64000}{x^2}\right);\quad S''=2\left(1+\frac{128000}{x^3}\right).$$

Prima derivată se anulează pentru $x=40$ m iar a doua este pozitivă pentru această valoare, adică avem un minim. Rezultă $y=20$ m.

48. 7. *Un fir de fier de lungime a este tăiat în două părţi cu ajutorul cărora se construiesc un cerc şi un pătrat. Să se arate că suma suprafeţelor acestor figuri va fi minimă atunci când cele două bucăţi de fier vor fi în raportul* $\frac{1}{4}\pi$.

Fie x şi y cele două părţi, adică $x+y=a$. Deoarece x va trebui să fie lungimea cercului, raza va fi $\frac{x}{2\pi}$, iar suprafaţa $\frac{x^2}{4\pi}$; la fel, y trebuind să fie perimetrul pătratului, latura va fi de $\frac{1}{4}y$, iar suprafaţa de $\frac{1}{16}y^2$. Expresia al cărei minim îl căutăm este

$$E=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(a-x)^2}{16}.$$

Derivatele sunt

$$E' = \frac{x}{2\pi} - \frac{a-x}{8}, \quad E'' = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8} > 0,$$

deci, avem un minim pentru

$$x = \frac{a\pi}{\pi+4}, \quad y = \frac{4a}{\pi+4},$$

al căror raport este $\frac{1}{4}\pi$.

48. 8. *O uzină electrică se află pe marginea unui râu a cărui lărgime este b* km, *şi pe marginea opusă se află o fabrică la distanţă de a* km *de proiecţia locului unde se află uzina electrică. Să se găsească cum este mai economicos să se construiască un cablu ce leagă uzina cu fabrica ţinând seamă că pe mal costul cablului e de m lei iar în apă de n lei* (fig. 50).

Dacă notăm cu x lungimea cablului pe pământ, atunci va trebui să căutăm minimul expresiei

$$E = mx + n\sqrt{b^2 + (a-x)^2},$$

a cărei derivată se anulează pentru valoarea

$$x = a - \frac{mb}{\sqrt{n^2-m^2}};$$

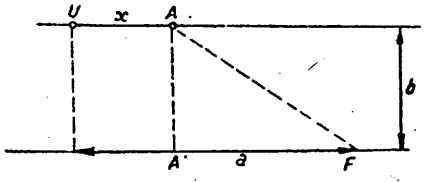


Fig. 50

se constată cu ajutorul derivatei a doua, că această valoare dă un minim. Aceasta este lungimea cablului pe mal. Se găseşte pentru lungimea cablului sub apă

$$AF = \frac{bn}{\sqrt{n^2-m^2}}.$$

48. 9. *O lampă este suspendată deasupra centrului unei mese rotunde. Se cere să se găsească raza mesei, în funcţie de înălţimea mesei, pentru ca marginea mesei să fie luminată cel mai bine posibil. Se va ţine seamă că luminarea variază direct proporţional cu cosinusul unghiului de incidenţă şi invers proporţional cu pătratul distanţei* (fig. 51).

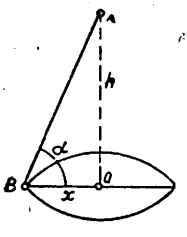


Fig. 51

Insemnând cu L luminozitatea, cu notaţiile din fig. 51, avem

$$L = k\frac{\cos\alpha}{AB^2} = k\frac{x}{AB^3} = k\frac{x}{\sqrt{(x^2+h^2)^3}}.$$

Mai departe,

$$L' = k\frac{h^2-2x^2}{\sqrt{(x^2+h^2)^5}}, \quad L'' = k\left[\frac{-4x}{\sqrt{(x^2+h^2)^5}} + (h^2-2x^2)(\ldots)\right];$$

prima derivată se anulează pentru $x = h/\sqrt{2}$, pentru care a doua derivată este negativă. Deci pentru această valoare avem un *maxim*.

48. 10. *Să se găsească lungimea unui dreptunghi de suprafaţă maximă care se poate înscrie într'un segment de parabolă AOA'* (fig. 52).

Facem o serie de notaţii care au fost însemnate pe figură. Trebue să găsim maximul funcţiei

$$S=PP'\cdot PD=2y\,(h-x),$$

şi ţinând seamă că: $y^2=2px$. Avem

$$S=2\sqrt{2p}\,(h-x)\sqrt{x},$$

a cărei derivată

$$S'=2\sqrt{2p}\left(-\sqrt{x}+\frac{h-x}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{\sqrt{2p}\,(h-3x)}{\sqrt{x}},$$

se anulează pentru $x=\frac{1}{3}h$ şi evident că pentru această valoare avem un maxim, deoarece înainte şi după $x=\frac{1}{3}h$, avem respectiv semnul + şi —. Lungimea dreptunghiului va fi $\frac{2}{3}h$.

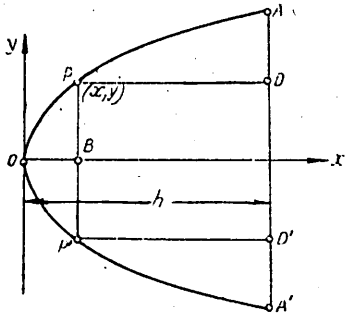


Fig. 52

48. 11. *Să presupunem că ni se dau două medii omogene şi transparente, separate printr'o suprafaţă plană, reprezentată în* fig. 53 *prin planul orizontal xOy. Presupunând că o rază de lumină pleacă dintr'un punct A al primului mediu şi ajunge într'un punct B al celui de-al doilea mediu; cunoscând vitezele uniforme v şi v' ale luminii în cele două medii, se cere să se afle drumul minim pe care trebue să-l parcurgă lumina pentru a ajunge din A în B în cel mai scurt timp posibil* fig. 53.

Putem totdeauna presupune că A şi B sunt în planul xOz, căci n'avem decât să alegem acest plan trecând prin AB şi să fie perpendicular pe planul xOy. Mai mult, alegem axa Oz că să fie perpendiculară coborîtă din A pe Ox. Fie $A(0,0,a)$ şi $B(b,0,c)$. Deoarece vitezele sunt presupuse uniforme, problema revine la a găsi minimul drumului parcurs. Cum mediile sunt omogene şi cum ne interesează drumul minim, raza va parcurge în primul mediu segmentul AM, iar în al doilea mediu segmentul MB. Să arătăm că M trebue să fie undeva pe Ox. Fie R proiecţia lui M pe această axă. Cum MR este situată în planul xOy perpendicular pe xOz, MR va fi perpendiculară pe toate dreptele din acest plan, în particular pe dreptele AR şi BR. In triunghiurile ARM şi MRB, dreptele AM şi MB sunt ipotenuze iar AR şi BR, catete. Drumul

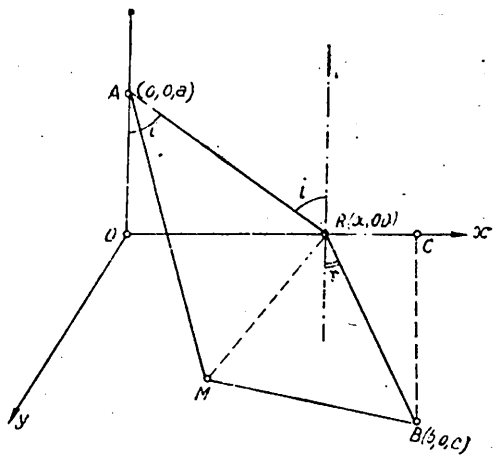


Fig. 53

parcurs pe ARB este deci mai mic decât AMB. Fie deci R punctul în care raza trece dintr'un mediu într'altul. Cum se ştie din Geometria Analitică

$$AR=\sqrt{x^2+a^2},\quad RB=\sqrt{(x-b)^2+c^2}, \tag{1}$$

încât funcţia al cărui minim îl căutăm este

$$t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v}+\frac{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}{v'},$$

t reprezentând timpul. Primele două derivate sunt

$$t'=\frac{x}{v\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{x-b}{v'\sqrt{(x-b)^2+c^2}},$$

$$t''=\frac{a^2}{v\sqrt{(a^2+x^2)^3}}+\frac{c^2}{v'\sqrt{[(x-b)^2+c^2]^3}}.$$

Prima derivată este greu de rezolvat. Vom demonstra că ea se anulează cu ajutorul derivatei a doua. In adevăr, se vede imediat că t'' este mereu pozitivă, ceeace însemnează că t' este o funcţie crescătoare. Cum pentru $x=0$, $t'<0$, iar pentru $x=b$, $t'>0$ însemnează că t' se anulează o singură dată între aceste valori. Deoarece semnul înainte este $-$, iar după $+$, pentru valoarea lui x care anulează derivata, t va fi minim.

Din aceste consideraţii putem deduce şi *legea de refracţie* a luminei care nu este altceva decât o propietate a razelor AR (incidentă) şi RB (refractată) faţă de normala în R pe suprafaţa de separare a celor două medii. Abscisa lui R este dată de ecuaţia

$$\frac{x}{v\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{x-b}{v'\sqrt{(x-b)^2+c^2}}=0,$$

(R este cuprins între O şi C, deoarece am arătat că rădăcina acestei ecuaţii este cuprinsă între o şi b). Cu ajutorul valorilor (1) această ecuaţie se mai scrie:

$$\frac{\overline{OR}}{\overline{AR}}=\frac{v}{v'}\cdot\frac{\overline{RC}}{\overline{RB}},$$

cu ajutorul triunghiurilor dreptunghice ORA, RCB şi punând $\frac{v}{v'}=n$ (indicele de refracţie), avem legea de refracţie

$$\sin i = n \sin r.$$

48. 12. *Să se calculeze extremele funcţiei*

$$y=\frac{\ln x}{x^n},$$

n fiind un număr pozitiv.

Derivata este

$$y'=\frac{x^n\frac{1}{x}-nx^{n-1}\ln x}{x^{2n}}=\frac{x^{n-1}(1-n\ln x)}{x^{2n}}=\frac{1-n\ln x}{x^{n+1}},$$

care se anulează pentru valoarea dată de ecuaţia: $1-n\ln x=0$, $\ln x=\frac{1}{n}$, $x=e^{\frac{1}{n}}$. Pentru a vedea natura extremului facem derivata a doua

$$y''=\frac{-\frac{n}{x}x^{n+1}-(n+1)x^n(1-n\ln x)}{x^{2n+2}}=\frac{-n-(n+1)(1-n\ln x)}{x^{n+2}},$$

în care, înlocuind pe x prin valoarea care ne interesează, găsim $y''<0$, adică avem un *maxim*. Valoarea acestui maxim este

$$M=\frac{\ln e^{\frac{1}{n}}}{e}=\frac{1}{ne}.$$

48. 13. *Să se găsească extremele funcţiei*

$$y=\cos x+\operatorname{ch} x.$$

Avem succesiv

$$y'=-\sin x+\operatorname{sh} x,\quad y''=-\cos x+\operatorname{ch} x,$$
$$y'''=\sin x+\operatorname{sh} x,\quad y^{(IV)}=\cos x+\operatorname{ch} x,$$

şi se vede că primele trei derivate se anulează pentru $x=0$, pe când a patra este diferită de zero. Funcţia admite un extrem în acest punct, şi cum valoarea lui $y^{(IV)}$ este pozitivă, avem un minim. Valoarea acestui minim este: $\cos 0+\operatorname{ch} 0=2$. Putem deci scrie inegalitatea:

$$\cos x+\operatorname{ch} x\geqq 2.$$

Să arătăm că funcţia nu mai are alt extrem, cu alte cuvinte y' nu se anulează pentru alte valori. Inlocuind prin serii, avem

$$y'=-\left[\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right]$$
$$+\left[\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right]$$
$$=2x^3\left[\frac{1}{3!}+\frac{x^4}{7!}+\cdots+\frac{x^{4n}}{(4n+3)!}+\cdots\right],$$

ceeace este evident, deoarece paranteza este pozitivă oricare ar fi x.

§ 49. Reprezentarea grafică a funcţiilor

Pentru studiul şi reprezentarea graficului unei funcţii ne conducem după următoarele norme:

1° stabilirea intervalului, sau intervalelor, de existenţă;
2° calculul valorilor funcţiei la capetele intervalului de existenţă;
3° calculul derivatei;
4° găsirea valorilor care anulează derivata;
5° studiul semnului derivatei; concluzii asupra variaţiei funcţiei;

6° găsirea valorilor maxime, minime și de inflexiune;

7° puncte de discontinuitate;

și uneori, când se poate, punctele de abscisă sau ordonată nulă. Când calculul nu este prea greu, este bine să se calculeze și derivata a doua, care ne dă concavitatea curbei (anume, dacă $y''>0$, curba are concavitatea îndreptată către y^{cii} pozitivi, iar dacă $y''<0$, curba are concavitatea îndreptată către y^{cii} negativi; dacă $y''=0$, în punctul corespunzător, curba are un punct de inflexiune. Mai mult, având pe y'' cunoaștem natura extremelor, deci putem evita studiul semnului primei derivate, care este uneori greu de găsit.

Se va ține seamă de teorema care spune că o funcție derivabilă a cărei derivată este pozitivă într'un interval, este crescătoare în acest interval, iar dacă derivata este negativă, funcția este descrescătoare în interval.

49. 1. *Să se studieze variația funcției*

$$y=\frac{x^4}{x^2-5x+6}.$$

Urmând regulile date la începutul acestui paragraf, avem succesiv; 1° Funcția există peste tot, adică dela $-\infty$ la $+\infty$, deoarece este o fracție rațională. 2° Cum gradul numărătorului este mai mare, $y=+\infty$ pentru $x=\pm\infty$. 3° Derivata are valoarea

$$y'=\frac{x^3(2x^2-15x+24)}{(x^2-5x+6)^2},$$

4° și se anulează pentru valorile $x_1=\frac{1}{4}(15-\sqrt{33})\infty 2{,}31$, $x_2=\frac{1}{4}(15+\sqrt{33})\infty 5{,}18$. Semnul derivatei este dat de polinomul de gradul 3: $x(x-x_1)(x-x_2)$, care pentru $x=-\infty$ este negativ. Deoarece rădăcini'e sunt simple, trinomul va schimba de semn de câte ori x va trece printr'o rădăcină, așa cum se vede din tabela de variație. Săgețile indică mersul funcției. 6° $x=0$ dă un minim egal cu zero; $x=x_1$ dă un maxim a cărui valoare este

$$M=-\frac{1}{8}(117+165\sqrt{33})\infty -133{,}10;$$

$x=x_2$ dă un minim a cărui valoare este

$$m=\frac{1}{8}(-117+165\sqrt{33})\infty 103{,}85.$$

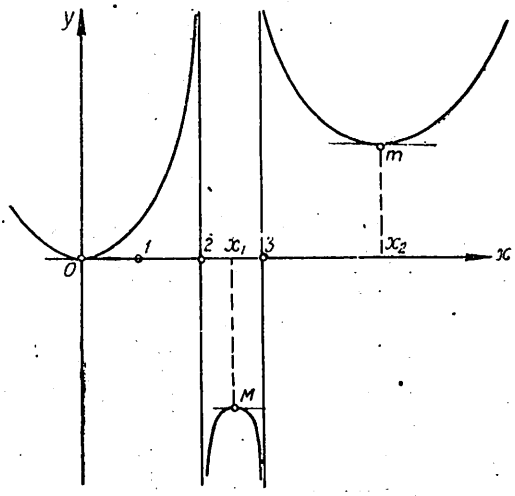


Fig. 54

Punctele de inflexiune sunt greu de găsit deoarece derivata a doua anulată duce la rezolvarea unei ecuații de gradul 4. 7° Funcția este discontinuă pentru valorile care anulează numitorul funcției, adică $x=2$ și 3. Curba are forma din fig. 54.

x	$-\infty$	0	2	x_1	3	x_2	$+\infty$
y'	$-$	$0+$		0	$-$	$0+$	
y	$+\infty$	$\searrow 0 \nearrow$	$+\infty$	$-\infty \nearrow M \searrow$	$-\infty$	$+\infty \searrow m \nearrow$	$+\infty$

49. 2. *Să se studieze variația funcției*

$$y = x\, e^{x+\frac{2}{x}},$$

și să i se facă graficul.

Procedăm după aceleași norme: 1° Funcția există pentru orice valoare a lui x, deci intervalul de existență este $(-\infty, +\infty)$. 2° Pentru a găsi valoarea lui y când $x=-\infty$, facem schimbarea $x=-u$. Avem

$$\lim_{x\to-\infty} y = -\lim_{u\to+\infty} u e^{-u}\cdot e^{-\frac{2}{u}} = -\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{e^u}\lim_{u\to+\infty} e^{-\frac{2}{u}} = 0,$$

și tot așa

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x e^x \cdot e^{\frac{2}{x}} = +\infty.$$

3° Derivata este

$$y' = e^{x+\frac{2}{x}} + x\left(1-\frac{2}{x^2}\right)e^{x+\frac{2}{x}} = \frac{(x+2)(x-1)}{x}\, e^{x+\frac{2}{x}}.$$

4. Derivata se anulează pentru $x=-2$ și $x=1$. 5° Cum exponențiala este pozitivă oricare ar fi x, semnul derivatei este dat de fracție și se găsește în tablou

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'		$+0+$		$-0+$	

Pentru $x=-2$ și $x=1$ funcția are câte un minim. Pentru $x=0$ vom vedea că nu avem extrem. 6° Avem pentru cele două minime

$$m_1 = -2e^{-3} = -\frac{2}{e^3},\quad m_2 = e^3,$$

și aproximativ:

$$m_2 \sim (2{,}7)^3 \sim 19{,}6\ldots;\ m_1 \sim -\frac{2}{19{,}6} \sim -0{,}102\ldots$$

(în figură ambele valori sunt puțin micșorate. 7° Funcția este discontinuă pentru $x=0$. In adevăr, să presupunem că x tinde către zero prin valori negative. Atunci, făcând $x=-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, avem

$$y = -\varepsilon e^{-\varepsilon}\cdot e^{-\frac{2}{\varepsilon}} = -e^{-\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon}{e^{\frac{2}{\varepsilon}}}.$$

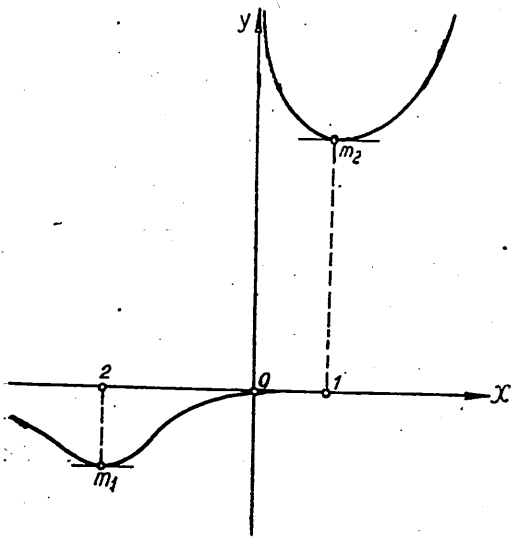


Fig. 55

Primul factor tinde către 1, iar al doilea factor 0. Dacă x tinde către zero prin valori pozitive, punem $x=\epsilon$,

$$y=\epsilon e^{\epsilon+\frac{2}{\epsilon}}=e^{\epsilon}\cdot\frac{e^{\frac{2}{\epsilon}}}{\frac{1}{\epsilon}};$$

primul făctor tinde către 1 iar al doilea către $+\infty$. Tabela de variație este

x	$-\infty$		-2		$-\varepsilon$	$+\varepsilon$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$			$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{2}{e^3}$ min	$\nearrow$	0	$+\infty$	$\searrow$ e	e^3 min	$\nearrow$	$+\infty$

Pentru a găsi tangenta în origine la curbă, când x tinde prin valori negative, îl facem pe $x=-\epsilon$ în derivată. Avem

$$y'=\frac{(2-\varepsilon)(1+\varepsilon)}{\varepsilon}e^{-\varepsilon-\frac{2}{\varepsilon}}=(2-\epsilon)(1+\epsilon)e^{-\varepsilon}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{e^{\frac{2}{\varepsilon}}},$$

care tinde către zero; curba este deci tangentă în origine la axa Ox (fig. 55).

49. 3. *Să se studieze variația funcției*

$$y=x^{\frac{1}{x}},$$

și să i se facă graficul.

1° Funcția nu există decât pentru valori pozitive ale lui x. 2° Pentru $x=0$, avem $y=0$, iar pentru $x=+\infty$ avem nedeterminare. Luând logaritmii obținem imediat

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln y)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0;\quad\lim_{x\to+\infty}y=1.$$

3°. Derivăm ca pe o funcție compusă notând prin: $u=x$, $v=\frac{1}{x}$

$$y'=vu^{v-1}u'+u^v\ln u\cdot v'=\frac{1}{x}x^{\frac{1}{x}-1}+x^{\frac{1}{x}}\ln x\left(-\frac{1}{x^2}\right)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

4° Derivata se anulează pentru valoarea $x=e$. 5° Cum primul factor este totdeauna pozitiv, derivata va fi pozitivă când $x<e$ și negativă când $x>e$.

6° Funcția este maximă în punctul $x=e$, valoarea maximă fiind $M=e^{\frac{1}{e}}$. Să găsim valoarea aproximativă a acestui număr. Luând logaritmii, în baza e, avem: $\ln M=\frac{1}{e}=0{,}367\ldots$ și cu ajutorul unei tabele de logaritmi naturali se găsește

$M=1{,}44\ldots$ 7° Puncte de discontinuitate nu avem. Tabela de variație este următoarea:

x	0		e		$+\infty$
y'		$+$		$-$	
y	0	$\nearrow$	$e^{1/e}$ max	$\searrow$	1

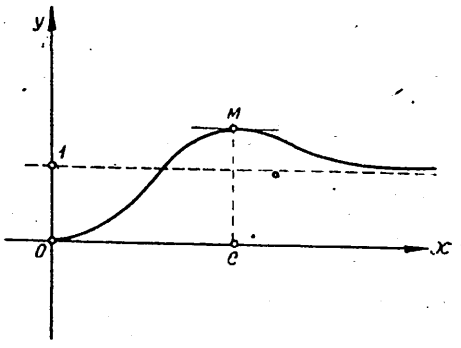


Fig. 56

In punctul de abscisă 0, tangenta este chiar axa Ox, deoarece se vede ușor că în acest punct $y'=0$ (fig. 56).

49. 4. *Să se studieze funcția*

$$y=(1+\sin 2x)\,e^{-x},$$

și să i se facă graficul.

1°. Funcția există oricare ar fi x. Nu vom face studiul, deci și graficul, decât în intervalul $\left(-\frac{1}{2}\pi,\ +\frac{1}{2}\pi\right)$ deoarece valorile funcției pentru orice x se deduc din valorile funcției din acest interval prin înmulțirea cu o constantă. In adevăr, pentru intervalul $\left(\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right)$ vom înmulți valorile funcției din intervalul inițial cu $e^{-\pi}$, pentru intevalul $\left(\frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi\right)$ cu $e^{-2\pi},\ldots$ și în general pentru intervalul $\left(k\pi-\frac{1}{2}\pi,\ k\pi+\frac{1}{2}\pi\right)$ cu $e^{-k\pi}$, 2° Pentru $x=-\frac{1}{2}\pi$, $y=e^{\frac{1}{2}\pi}\sim 4{,}80\ldots$; iar pentru $x=\frac{1}{2}\pi$, avem $y=e^{-\frac{1}{2}\pi}\sim 0{,}20\ldots$ 3°. Derivata funcției este

$$y'=2\cos 2x\cdot e^{-x}-(1+\sin 2x)e^{-x}=(2\cos 2x-\sin 2x-1)\,e^{-x},$$

și în funcția de $\operatorname{tg} x$

$$y'=-\frac{(3\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-1)}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,e^{-x}$$

4° Derivata se anulează pentru valorile lui x date de ecuațiile: $\operatorname{tg} x=-1$, $\operatorname{tg} x=\frac{1}{3}$. Prima dă $x=-\frac{1}{4}\pi=-0{,}78\ldots$; a doua dă în grade $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=18°26'$ care în radiani are drept valoare $0{,}32\ldots$ 5° Deoarece numitorul este totdeauna pozitiv ca și e^{-x}, semnul derivatei va fi dat de trinomul

$$-3(\operatorname{tg} x+1)\left(\operatorname{tg} x-\frac{1}{3}\right)$$

şi cum $\operatorname{tg} x$ creşte odată cu x, derivata va fi negativă în itervalele $\left(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{4}\pi\right)$; $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\pi\right)$ şi pozitivă în intervalul: $\left(-\frac{1}{4}\pi, \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$.

Funcţia este deci minimă pentru $x=-\frac{1}{4}\pi$ şi maximă pentru $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

6° Valoarea minimă este $m=\left(1-\sin\frac{1}{2}\pi\right)e^{-\frac{1}{4}\pi}=0$ iar valoarea maximă:

$$M=\left(1+\frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{9}}\right)e^{-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}}=$$

$$=\frac{8}{5}\,e^{-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}}\sim 1{,}178.$$

7° Funcţia nu are puncte de discontinuitate. Tabela de variaţie este

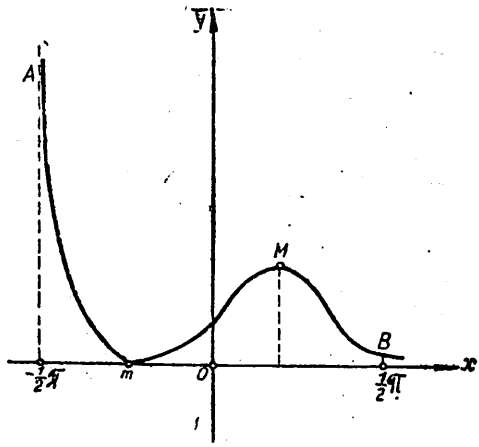


Fig. 57

x	$-\frac{1}{2}\pi$		$-\frac{1}{4}\pi$		$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}\pi$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$e^{\frac{1}{2}\pi}$	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$\frac{8}{5}e^{-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}}$ max	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{2}\pi}$

Curba are forma din fig. 57.

49. 5. *Să se construiască curba erorilor* (sau curba lui *Gauss*) *definită prin ecuaţia*

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2} \qquad (h>0)$$

Graficul se va face corespunzător lui $h=1$.

Funcţia există oricare ar fi x şi tinde către zero când x creşte către infinit (se poate preciza chiar că tinde foarte repede către zero, deoarece exponentul are pe x la pătrat).

Primele două derivate sunt

$$y'=-\frac{2h^3x}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2},\quad y''=\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}(2h^2x^2-1)\,e^{-h^2x^2}.$$

Din prima reiese că pentru $x=0$ avem un maxim, ea fiind pozitivă înainte şi negativă după $\left(\text{de altfel se vede că pentru această valoare } y''=-\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}<0\right)$.

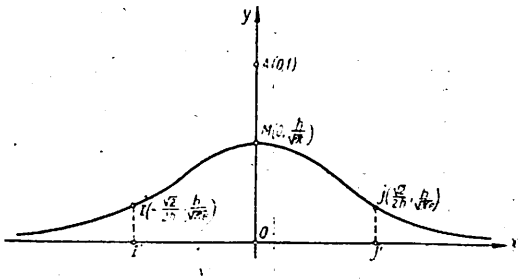


Fig. 58

Valoarea maximului este $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$.

Curba va avea două puncte de inflexiune corespunzătoare valorilor

$$2h^2x^2-1=0;\ x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2h}.$$

Semnul derivatei a doua, trecut în tablou, ne va da concavitatea curbei.

Curba (fig. 58) este simetrică faţă de axa Oy.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2h}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2h}$		$+\infty$
y'			$+$		0		$-$		
y''		$+$	0		$-$		0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{h}{\sqrt{\pi e}}$	$\nearrow$	$\frac{h}{\sqrt{\pi}}$	$\searrow$	$\frac{h}{\sqrt{\pi e}}$	$\searrow$	0

49. 6. *Curbele lui Van der Waals. Să se studieze p definit prin formula*

$$p=-\frac{a}{v^2}+\frac{RT}{v-b},$$

când v variază. Această formulă dă presiunea unui gaz în funcţie de volumul v şi de temperatura absolută T; a, b şi R sunt presupuse constante pozitive.

Curbele care se obţin dând lui T diferite valori se numesc *isoterme*. Pentru a le construi, vom considera pe v ca variabilă, iar pe T ca un parametru. Prima observare pe care trebue s'o facem este că p este pozitiv numai dacă $v>b$, încât intervalul în care ne interesează funcţia este $(b,+\infty)$. Primele două derivate sunt

$$p'=\frac{2a}{v^3}-\frac{RT}{(v-b)^2},\quad p''=-\frac{6a}{v^4}+\frac{2RT}{(v-b)^3}.$$

Pentru uşurarea studiului punem

$$y=\frac{v-b}{v^2},\quad z=\frac{2(v-b)^2}{v^3},\quad w=\frac{3(v-b)^3}{v^4},\quad \frac{RT}{a}=m,$$

cu ajutorul cărora putem scrie

$$p=-\frac{a(y-m)}{v-b},\quad p'=\frac{a(z-m)}{(v-b)^2},\quad p''=-\frac{2a(w-m)}{(v-b)^3}.$$

Din construcția geometrică a funcțiilor y, z, w se poate deduce ușor construcția isotermelor. Să începem deci cu construcția acestora. Avem

$$y' = \frac{2b-v}{v^3}, \quad z' = \frac{2(v-b)(3b-v)}{v^4}, \quad w' = \frac{3(v-b)^2(4b-v)}{v^5}.$$

Aceste derivate ne spun că y are un maxim pentru $v=2b$, a cărui valoare este $M=\frac{1}{4b}$, z are un maxim pentru $v=3b$ și are valoarea $N=\frac{8}{27b}$ și deasemenea w are un maxim pentru $v=4b$, a cărui valoare este $P=\frac{81}{256b}$. Tablourile de variație se fac ușor și curbele sunt reprezentate pe același grafic în fig. 59. Toate pornesc din punctul de pe Ov de abscisă b, cresc până la maximele respective și apoi tind asimptotic către zero. In punctul de plecare, ultimele două curbe sunt tangente la Ov. Este interesant de observat că curba care reprezintă pe z trece prin maximul lui y (dacă în z facem $v=2b$, obținem $z=M$), iar curba care reprezintă pe w trece prin maximul lui z. Curbele nu se mai taie în alte puncte. In adevăr pentru ca să se mai taie în alt punct curbele y și z, va trebui ca $y=z$ pentru alte valori decât $v=b$ și $2b$. Insă

$$z-y = \frac{(v-b)(v-2b)}{v^3},$$

expresie care nu se anulează decât pentru valorile menționate. La fel se constată dacă se face diferența $w-z$.

Construcția isotermelor este dată în fig. 60 și se deduce ușor din curbele de mai sus, precum urmează. 1° Dacă $m<M$ (deci $m<N, <P$ fiindcă $M<N<P$), când v variază, diferențele $y-m$, $z-m$, $w-m$ se vor anula de două ori, adică p are două zerouri, un maxim și un minim și două puncte de inflexiune. Pentru construcție, ducem o paralelă Ov cu axa la care au fost reprezentate curbele precedente și menținem Op aceeași cu Oy, Oz și Ow. Apoi, fixăm valoarea m printr'o paralelă AB, care taie curba y în două puncte ale căror abscise sunt zerourile lui p, curba z în două puncte care dau maximul și minimul, iar curba w în două puncte care dau inflexiunile. Mai facem observația că pentru $v=b$, $p=+\infty$ și pentru $v=+\infty$, $p=0$, încât curba I corespunzătoare descrește asimptotic către zero.

Mai departe construcțiile isotermelor se fac la fel, deaceea dăm numai rezultatele: 2° $m=M$, isoterma (nu este reprezentată în figură) este tangentă la Ov. 3° $M<m<N$, p nu se mai anulează, dar are două extreme și două inflexiuni: este curba II pe figură. 4° $m=N$, nu mai avem extreme și într'unul din punctele de inflexiune tangenta este paralelă la Ov: se zice că în acest punct avem presiunea, temperatura și volumul critic (curba III). 5° $N<m<P$ mai avem numai două puncte de inflexiune (curba IV). 6° $m>P$ curba V care are forma unei ramuri de iperbolă echilaterală.

49.7. *Să se găsească numărul de rădăcini reale ale ecuației*

$$e^x = 2x^2. \tag{1}$$

Una din metodele folosite în calculele inginerești, pentru a găsi numărul de rădăcini reale ale unei ecuații, este *metoda grafică*. In acest scop, se consideră curbele

$$y=e^x \quad \text{și} \quad y=2x^2. \tag{2}$$

Valorile lui x care vor verifica ecuaţia (1) vor fi acelea care pentru acelaşi x ne dau în (2) acelaşi y; cu alte cuvinte, ecuaţia (1) va avea atâtea rădăcini reale câte puncte comune au curbele reprezentate prin ecuaţiile (2).

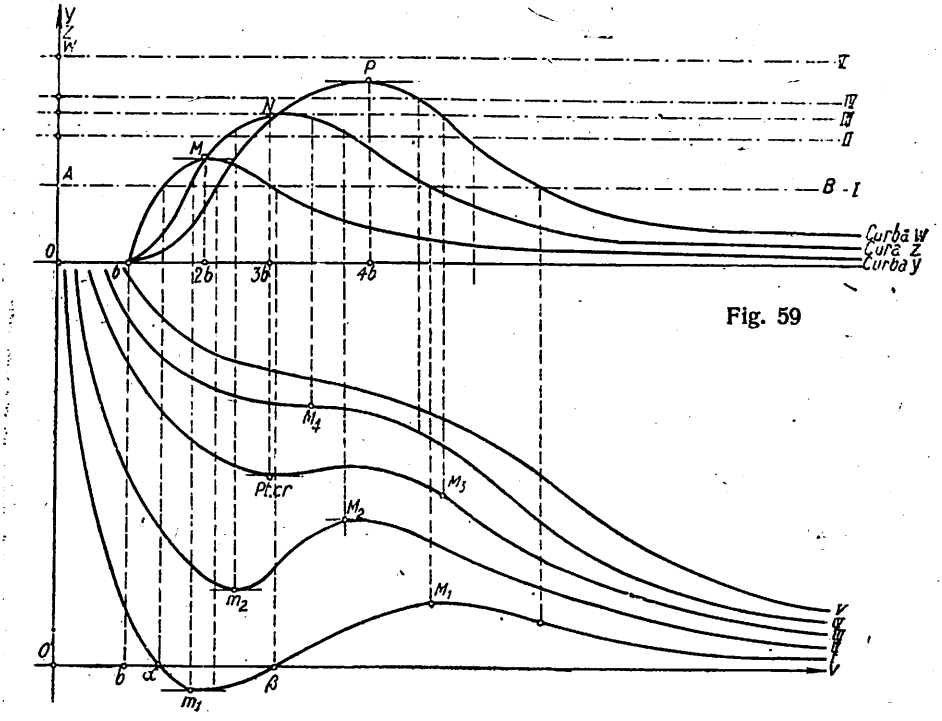


Fig. 59

Fig. 60

Prima ecuaţie reprezintă funcţia exponenţială al cărei grafic este dat în fig. 36,1 iar a doua o parabolă a cărei construcţie se cunoaşte. Construind aceste două curbe pe aceeaşi figură (fig. 61) se constată că cele două curbe se taie într'un singur punct, a cărui abscisă va fi soluţia problemei. Ecuaţia dată are o singură rădăcină reală.

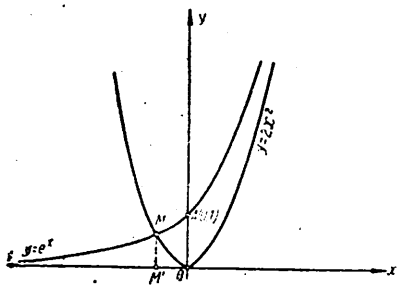


Fig. 61

Observaţie. S'ar putea obiecta că mergând destul de departe, la un moment dat, cele două curbe se pot tăia odată şi în dreapta. Acest lucru nu se poate, datorită faptului (§ 46, pct. 3) că atunci când x este mare e^x tinde mai repede către infinit decât orice putere pozitivă a lui x; aceasta înseamnă că pentru acelaşi x, y^{III} primei curbe va fi mai mare decât al curbei a doua. Cu alte cuvinte, prima curbă rămâne interioară (în dreapta) celeilalte.

49. 8. *Să se găsească numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei*

$$(x^3-3x+1)^2+x^2-4=0. \qquad (1)$$

Intrebuințăm, ca la problema precedentă, metoda grafică. Scriem ecuația sub forma

$$(x^3-3x+1)^2=4-x^2,$$

și punem

$$y=x^3-3x+1 \qquad (2)$$

Făcând înlocuirea, rezultă că rădăcinile reale ale ecuației (1) vor fi abscisele punctelor de intersecție dintre curba (1) și cercul

$$y^2=4-x^2;\ x^2+y^2=4. \qquad (3)$$

Pentru construcția curbei (2) formăm derivata

$$y'=3(x^2-1),$$

și apoi tabloul următor de variație.

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3 M	↘		↘	-1 m	↗	$+\infty$

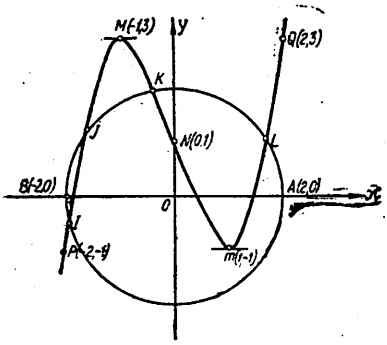


Fig. 62

Pentru o construcție cât mai corectă s'au construit și punctele P și Q respectiv de abscise -2 și $+2$ (fig. 62). Construind și cercul (3), având centrul în origine și raza 2, pe aceeași figură, se constată că cele două curbe se taie în patru puncte I, J, K, L: abscisele lor vor fi rădăcinile ecuației date. Ecuația are deci *patru* rădăcini reale.

49. 9. I. *Să se studieze variația funcției*

$$y=\frac{\ln(1+x)}{x},$$

și să i se facă graficul. II. *Fie* u_0 *un număr pozitiv; se formează șirul*

$$u_1=\ln(1+u_0),\ u_2=\ln(1+u_1),\ldots,u_n=\ln(1+u_{n-1}),\ldots$$

Se cere a) *Să se demonstreze că* u_n *tinde către zero când* n *crește nesfârșit.* b) *Să se determine raza de convergență a seriei întregi* $\sum u_n x^n$. c) *Să se demonstreze că seria* $\sum u_n^2$ *este convergentă.*

I. Funcția y este definită și continuă pentru toate valorile lui x mai mari decât -1. Pentru $x=-1$, $y=+\infty$, adică curba are drept asimptotă dreapta $x=-1$; pentru $x=+\infty$, funcția se prezintă sub formă de nedeterminare. Dar

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0,$$

adică curba este asimptotică şi la axa Ox. Pentru $x=0$

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

Derivata funcţiei este

$$y'=\frac{1}{x^2}\left[\frac{x}{x+1}-\ln(1+x)\right].$$

Pentru a vedea care este semnul lui y' va trebui să studiem mai întâi semnul funcţiei

$$u=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x),$$

a cărei derivată este: $u'=-\frac{x}{(1+x)^2}$, pozitivă pentru x cuprins între $(-1,0)$ şi negativă pentru x pozitiv. Funcţia u are deci un maxim pentru $x=0$, a cărui valoare se vede imediat că este zero. Rezultă că u este negativ pentru orice x. Deci, $y'<0$, adică funcţia y este în permanenţă descrescătoare. Tabela de variaţie este dată alăturat; curba are forma din fig. 63.

x	-1		0		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↘	0

Este interesant să vedem de pe figură că $y<1$ pentru orice valoare pozitivă a lui x.

II. a) u_0 fiind pozitiv, $1+u_0>1$ şi deci: $\ln(1+u_0)=u_1>0$, şi din aproape în aproape rezultă că u_n este pozitiv. Şirul este descrescător deoarece

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\ln(1+u_n)}{u_n}<1,$$

în baza observaţiei făcute la sfârşitul lui I. Deci şirul este descrescător şi mărginit inferior de zero: are o limită. Fie α această limită. Va trebui să avem

$$\alpha=\ln(1+\alpha) \quad \text{sau} \quad \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1,$$

şi se vede de pe curba reprezentativă că α nu poate avea decât valoarea 0, căci numai pentru această valoare $y=1$. b) Dacă notăm cu $\sum u_n r^n$ seria formată cu modulele termenilor seriei date, cum raportul dintre un termen şi precedentul are, pentru această serie, valoarea

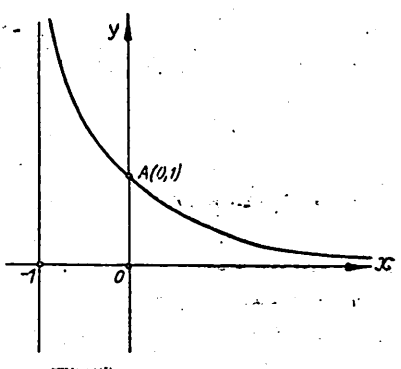


Fig. 63

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\ln(1+u_n)}{u_n}r,$$

şi cum când n tinde către infinit, u_n tinde către zero, deci raportul precedent către 1, rezultă că seria dată are raza de convergenţă egală cu 1. c) Avem

$$u_{n+1}=\ln(1+u_u)=u_n-\frac{1}{2}u_n^2+\lambda u_n^3,$$

unde λ păstrează o valoare finită când u_n tinde către zero (adică atunci când n tinde către infinit); de aci deducem

$$\frac{u_n-u_{n+1}}{u_n^2}=\frac{1}{2}-\lambda u_n;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_n-u_{n+1}}{u_n^2}=\frac{1}{2},$$

adică seria cu termenul general u_n^2 este de aceeaşi natură ca seria care are drept termen general: $v_\nu=u_n-u_{n+1}$. Dar

$$S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n=u_0-u_{n+1},$$

şi cum u_{n+1} tinde către zero când n tinde către infinit, S_n are drept limită pe u_0. Seria $\sum v_n$ este convergentă, deci şi seria dată este convergentă.

§ 50. Serii de funcţii. Serii întregi

1. Se zice că o serie este serie de funcţii, atunci când termenii ei sunt funcţii de x, adică atunci când ea este de forma

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \qquad (I)$$

Noţiunea cea mai importantă la seriile de funcţii este noţiunea de *convergenţă uniformă*. Fiind dată seria (I), natura ei se stabileşte în mod obişnuit (§ 32, pct. 1), adică se formează şirul

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x), \qquad (II)$$

şi se caută dacă acest şir este convergent sau nu. Aceasta înseamnează (§ 31) că unui număr ϵ arbitrar de mic dat (constant), putem face să-i corespundă un număr N astfel încât

$$|S_n(x)-S(x)|<\epsilon \qquad (III)$$

pentru *toate* valorile lui $n>N$: $S(x)$ se numeşte *suma* seriei. In general numărul N, astfel definit, este funcţie de x. Dacă într'un interval $[a,b]$ putem determina numărul N independent de x, atunci se spune că seria este *uniform convergentă* în acest interval. Un criteriu după care se constată dacă o serie este uniform convergentă este următorul: dacă pentru orice valoare a variabilei x, din intervalul $[a,b]$, avem, oricare ar fi n: $|u_n(x)|\leq v_n$, v_n fiind termenul general al unei serii *cu termenii constanţi* şi pozitivi, seria este uniform convergentă în intervalul $[a,b]$.

Avem următoarele proprietăţi: a) Dacă termenii seriei (I), uniform convergentă in intervalul $[a,b]$, sunt funcţii continue în acest interval, *suma seriei este o funcţie continuă* în acest interval. b) Dacă seria (I), în care termenii săi sunt funcţii continue, este convergentă şi seria formată cu derivatele termenilor seriei date este uniform convergentă, atunci *suma celei de a doua este derivata sumei celei dintâi*. O altă proprietate se va vedea la § 78, pct. 1.

2. Cele mai importante serii de funcţii sunt *seriile întregi*, adică seriile de forma

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad (IV)$$

O noţiune caracteristică acestor serii este *intervalul de convergenţă*, respectiv *raza de convergenţă*. Acest număr, pe care îl vom nota cu R, este inversa celei mai mari dintre limitele şirului

$$|a_1|, \sqrt{|a_2|}, \sqrt[3]{|a_3|}, \ldots, \sqrt[n]{|a_n|}, \ldots \qquad (V)$$

Dacă şirul

$$\left|\frac{a_2}{a_1}\right|, \left|\frac{a_3}{a_2}\right|, \ldots, \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \ldots \qquad (Vi)$$

are o limită unică ω, atunci, pe baza unei teoreme cunoscute (prob. 31,10), $R=\frac{1}{\omega}$. In această ipoteză, intervalul de convergenţă este intervalul $(-R, +R)$. Aceasta înseamnă că, în mod obişnuit, vom aplica criteriul raportului seriei formate cu valorile absolute ale termenilor seriei (IV) şi vom scrie că limita obţinută este inferioară lui 1. Valorile lui x care vor satisface aceste negalităţi formează intervalul de convergenţă al seriei.

In interiorul intervalului de convergenţă, adică pentru o valoare a lui x cuprinsă în acest interval, seria: a) este absolut convergentă; b) este uniform convergentă: c) poate fi derivată termen cu termen; d) reprezintă o funcţie continuă; e) o altă proprietate se va vedea la § 78, pct. 1.

Relativ la serii întregi există următoarea teoremă a lui *Abel:* dacă o serie întreagă $\sum a_n x^n$, având raza de convergenţă R, are suma $f(x)$ şi dacă seria $\sum a_n R^n$ este convergentă, atunci suma acestei serii este $f(R)$, ceeace se poate scrie

$$\lim_{x \to R} f(x) = f(R). \qquad (VII)$$

3. Seriile întregi mai obişnuite sunt următoarele

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad (R=\infty); \qquad (VIII)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad (R=1); \qquad (IX)$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad (R=1); \qquad (X)$$

Acest tablou de serii cunoscute va fi complectat în paragraful următor cu ocazia desvoltării funcţiilor în serie.

4. Seriile întregi se bucură de proprietăţi asemănătoare polinoamelor. De exemplu, pentru ca două serii întregi $\sum a_n x^n$ şi $\sum b_n x^n$ să reprezinte aceeaşi funcţie (adică să fie identice) este necesar ca coeficienţii diferitelor puteri să fie egali, adică, în general, să avem $a_n = b_n$.

50. 1. *Să se demonstreze că seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ *este uniform convergentă oricare ar fi* x.

In adevăr, oricare ar fi x, avem inegalitatea

$$\frac{1}{x^2+n^2} \leqq \frac{1}{n^2},$$

(egalitatea având loc pentru $x=0$). Cum seria cu termenul general $\frac{1}{n^2}$ este o serie cu termeni constanți și este convergentă, seria cu termenul general $\frac{1}{x^2+n^2}$, adică seria dată, va fi uniform convergentă oricare ar fi x.

50. 2. *Să se studieze natura seriei cu termenul general:* $u_n=n^2x^n$, *și în caz de convergență să i se găsească suma.*

Criteriul raportului ne dă

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\,|x| = |x| < 1,$$

adică intervalul de convergență este $(-1, +1)$, deci raza de convergență este 1. Dacă x este interior acestui interval, fie

$$S=1^2x+2^2x^2+\cdots+n^2x^n+\cdots$$

Pentru a găsi pe S, plecăm dela suma progresiei geometrice

$$x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{x}{1-x},$$

pe care o derivăm termen cu termen

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^n+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Înmulțind cu x și derivând din nou

$$1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^n+\cdots=\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

deci

$$S=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

50. 3. *Seria cu termenul general:* $u_n=\frac{P(n)}{n!}x^n$ *are raza de convergență infinită oricare ar fi polinomul* $P(n)$. *Să se indice un procedeu pentru a găsi suma seriei. Să se găsească efectiv pentru*

$$P(n)=an^2+bn+c,$$

a, b, c fiind trei numere date.

Criteriul raportului aplicat seriei formate cu valorile absolute dă

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{P(n+1)}{P(n)}\right|\frac{|x|}{n+1}=0,$$

deoarece limita a doua este zero, iar prima 1 fiindcă termenii fracției sunt polinoame în n de același grad și având același coeficient pentru n la cea mai înaltă putere.

Raza de convergenţă este infinită, adică seria este convergentă oricare ar fi x. Pentru a găsi suma, se scrie polinomul $P(n)$, al cărui grad fie p, sub forma

$$P(n)=A_0\,n(n-1)\dots(n-p+1)+A_1\,n(n-1)\dots(n-p+2)+\cdots$$
$$\cdots+A_{p-1}\,n+A_p.$$

Se descompune suma seriei în $p+1$ sume, care sunt egale cu expresii de forma Ax^qe^x. Cele spuse vor fi urmărite mai uşor în cazul particular menţionat în enunţ. Aici avem

$$P(n)=an^2+bn+c=An(n-1)+Bn+C,$$

unde A, B, C sunt nişte coeficienţi numerici ce urmează să-i determinăm. Această egalitate fiind o identitate, trebue să aibă loc pentru orice valori date lui n. Făcând pe $n=0$, rezultă $C=c$; făcând apoi $n=1$ obţinem

$$a+b+c=B+C;\quad B=a+b,$$

iar A se deduce identificând coeficienţii lui n^2: $A=a$. Deci

$$P(n)=an(n-1)+(a+b)n+c;$$

termenul general al seriei devine

$$u_n=\left[\frac{a}{(n-2)!}+\frac{a+b}{(n-1)!}+\frac{c}{n!}\right]x^n,$$

şi notând cu S suma seriei obţinem

$$S=c+\left(a+b+\frac{c}{1!}\right)x+\left(a+\frac{a+b}{1!}+\frac{c}{2!}\right)x^2+\left(\frac{a}{1!}+\frac{a+b}{2!}+\frac{c}{3!}\right)x^3+\cdots$$
$$\cdots+\left[\frac{a}{(n-2)!}+\frac{a+b}{(n-1)!}+\frac{c}{n!}\right]x^n+\cdots$$
$$=c\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)+(a+b)\,x\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\right.$$
$$\left.+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots\right]$$
$$+ax^2\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots\right]=[ax^2+(a+b)x+c]\,e^x,$$

deoarece fiecare paranteză reprezintă pe e^x.

50. 4. *Să se găsească suma seriei cu termenul general*

$$u_n=\frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Raza de convergenţă a seriei este 1, cum se constată uşor cu ajutorul criteriului raportului. Presupunând deci $|x|<1$, să găsim suma seriei. Pentru aceasta, observăm că termenul general se poate scrie

$$u_n=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^n,$$

suma va fi

$$S=\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\right)-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n+1}+\cdots\right).$$

Dar, în baza seriei lui $\ln(1+x)$, avem

$$S=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}[-\ln(1-x)-x]=\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1.$$

In particular, dacă $x=1$, cum $1-x$ tinde mult mai repede către zero decât $\ln(1-x)$ către infinit, rezultă suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1,$$

rezultat găsit cu ocazia prob. 32,1.

Dacă $x=-1$, avem suma seriei alternate

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}=-2\ln 2+1.$$

Observație. Metoda indicată mai sus se aplică și la găsirea sumei serilor cu termenii generali

$$\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)},\quad \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)(n+3)},\ldots$$

50. 5. *Să se găsească suma seriei cu termenul general:* $u_n=x^n\operatorname{ch} na$, *a fiind un număr dat.*

Cum;

$$\operatorname{ch} a=\frac{1}{2}(e^a+e^{-a}),$$

avem

$$u_n=\frac{1}{2}(x^ne^{na}+x^ne^{-na}).$$

Raza de convergență a seriei este cel mai mic dintre numerele e^a și e^{-a}, deoarece pentru $|x|<e^a$ sau e^{-a} (cel mai mic) ambele serii

$$\sum x^ne^{-na},\quad \sum x^ne^{na},$$

sunt convergente. Vom avea succesiv pentru sumă

$$S=\frac{1}{2}(1+xe^a+x^2e^{2a}+\cdots+x^ne^{na}+\cdots)$$
$$+\frac{1}{2}(1+xe^{-a}+x^2e^{-2a}+\cdots+x^ne^{-na}+\cdots)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-xe^a}+\frac{1}{1-xe^{-a}}\right)=\frac{2-x(e^a+e^{-a})}{2(1-xe^a)(1-xe^{-a})}$$
$$=\frac{1-x\cdot\frac{1}{2}(e^a+e^{-a})}{1-x(e^a+e^{-a})+x^2}=\frac{1-x\operatorname{ch} a}{1-2x\operatorname{ch} a+x^2}.$$

50. 6. *Să se demonstreze egalitatea*

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n + \cdots,$$

în ipoteza $|x|<1$.

Considerăm seriile

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots,$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots,$$

amândouă absolut convergente când $|x|<1$. Facem produsul lor după regula dată la § 34. Seria obţinută va fi, la rândul ei absolut convergentă în ipoteza $|x|<1$. Termenul general al seriei produs este

$$\frac{x}{1}(-1)^{n-1}x^{n-1} - \frac{x^2}{2}(-1)^{n-2}x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} =$$

$$= (-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n,$$

ceeace demonstrează egalitatea din enunţ.

50. 7. *Se consideră un şir de numere*

$$u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots,\ u_n, \ldots,$$

astfel ca între trei termeni consecutivi să avem relaţia de recurenţă

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}. \tag{1}$$

Să se găsească expresia lui u_n.

Să considerăm desvoltarea

$$\frac{A+Bx}{1-x-x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots, \tag{2}$$

valabilă în anumite ipoteze impuse lui x. Egalitatea precedentă este totuna cu

$$A+Bx = (1-x-x^2)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots),$$

şi cum, după cele spuse la pct. 4, cu seriile întregi lucrăm în acelaşi fel ca la polinoame, desvoltând în partea dreaptă şi ordonând după puterile lui x,

$$A+Bx = a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1 - a_0)x^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1} - a_{n-2})x^n + \cdots,$$

şi cum această egalitate trebue să fie o identitate, va trebui ca

$$A = a_0,\quad B = a_1 - a_0,\quad a_2 = a_1 + a_0, \ldots,\quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ldots \tag{3}$$

Şirul dat trebuind să verifice relaţia (1), îşi determină termenii dela u_2 înainte, acesta fiind definit în funcţie de u_0 şi u_1. Să presupunem că ni se dau aceste două numere; şirul va fi perfect determinat. Luând

$$A = u_0,\quad B = u_1 - u_0,$$

şirul de relaţii (2) ne spune, din aproape în aproape, că vom avea $a_n = u_n$. Fie: $u_0 = u_1 = 1$; atunci $A = 1$, $B = 0$, şi desvoltarea (2) se scrie

$$\frac{1}{1-x-x^2} = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n + \cdots \tag{4}$$

Această desvoltare ne permite să calculăm termenii şirului prin următorul procedeu. Ecuaţia

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

are două rădăcini reale x_1 şi x_2, definite prin formula

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}); \tag{5}$$

Cu ajutorul lor putem scrie

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{\alpha}{x_1 - x} + \frac{\beta}{x_2 - x} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1 - x} - \frac{1}{x_2 - x}\right).$$

Dar, în baza sumei unei progresii geometrice,

$$\frac{1}{x_1 - x} = \frac{1}{x_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} = \frac{1}{x_1}\left[1 + \frac{x}{x_1} + \left(\frac{x}{x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \cdots\right],$$

$$\frac{1}{x_2 - x} = \frac{1}{x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}} = \frac{1}{x_2}\left[1 + \frac{x}{x_2} + \left(\frac{x}{x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{x_2}\right)^n + \cdots\right].$$

Prima egalitate este valabilă în ipoteza $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, $|x| < |x_1|$, iar a doua în ipoteza $|x| < |x_2|$. Cum: $|x_1| < |x_2|$, amândouă desvoltările vor fi valabile în ipoteza: $|x| < |x_1|$. In această ipoteză putem scrie

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n - \frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right],$$

valoare pe care, introducând-o în (4), avem

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x_1^{n+1}} - \frac{1}{x_2^{n+1}}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n,$$

egalitate care trebuind să fie o identitate, dă

$$u_n = \frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{\sqrt{5}\,(x_1 x_2)^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\left[(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})\right]^{n+1}.$$

Observaţie. Metoda întrebuinţată poate fi folosită, în general, la determinarea unui şir definit printr'o relaţie de recurenţă

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_p u_{n-p},$$

coeficienţii a_p fiind constanţi în raport cu n, şi pentru care cunoaştem primii p termeni.

§ 51. Desvoltări în serie

Dacă presupunem că o funcţie $f(x)$ admite derivate de orice ordin finite şi continue în intervalul $[a, x]$ şi dacă restul R_n din formula Taylor tinde către zero când n tinde către infinit, atunci funcţia se poate scrie sub forma sde serie

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\cdots \quad (I)$$

erie care poartă numele de seria lui Taylor.

Dacă presupunem $a=0$ avem desvoltarea funcţiei $f(x)$ în serie Maclaurin

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots \quad (II)$$

In general însă, pentru a găsi desvoltarea în serie a unei funcţii în jurul originii (după puterile crescătoare ale lui x) se folosesc serii tip cunoscute şi operaţiile dintre serii pe care le-am reamintit în § 34. Desvoltărilor (VIII), (IX) şi (X) dela paragraful precedent le adăugim desvoltările

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad (III)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \quad (IV)$$

$$\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad (V)$$

$$\operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots, \quad (VI)$$

valabile oricare ar fi x ($R=\infty$), şi seria binomului

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots, \quad (VII)$$

desvoltare valabilă pentru valorile lui x ce satisfac inegalitatea $|x|<1$ ($R=1$) (formula este valabilă şi pentru $x=1$, dacă $m>-1$; şi pentru $x=-1$, dacă $m>0$).

Observaţie. Am afirmat cu ocazia desvoltărilor limitate ale funcţiilor mai cunoscute (§ 43, pct. 4) că λ este o funcţie care rămâne finită când x tinde către zero. Acest lucru se vede mai uşor, cu ajutorul desvoltărilor date mai sus, deoarece această funcţie este reprezentată printr'o serie convergentă în jurul originii (restul seriei începând dela un rang oarecare).

51. 1. *Să se desvolte în serie o fracţie raţională care se bucură de proprietatea că numitorul anulat are toate rădăcinile reale.*

Fie $\frac{P(x)}{Q(x)}$ fracţia raţională dată. Presupunem, în general, că numărătorul are gradul mai mare decât numitorul. Făcând împărţirea, putem scrie fracţia dată sub forma.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=R(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

unde $P_1(x)$ este restul împărțirii lui $P(x)$ prin $Q(x)$ și are gradul cel puțin cu o unitate mai mic decât gradul lui $Q(x)$.

Făcând descompunerea în fracții simple, după oricare din metodele cunoscute (§ 45, pct. 2), fracția din partea dreaptă se descompune într'o sumă de fracții de forma $\frac{A}{(x-a)^m}$, unde A este o constantă, a o rădăcină a ecuației $Q(x)=0$, iar m un număr întreg cuprins între 1 și gradul de multiplicitate (inclusiv) al rădăcinii a. Descompunerea în serie a acestui element este ușoară. Folosind desvoltarea binomului, avem

$$\frac{A}{(x-a)^m}=\frac{A}{(-a)^m}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-m}=\frac{A}{(-a)^m}\left[1+\frac{m}{1!}\frac{x}{a}+\frac{m(m+1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{p!}\left(\frac{x}{a}\right)^p+\cdots\right],$$

valabilă pentru: $|x|<|a|$.

Vom avea astfel fracția $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ descompusă într'o sumă finită de serii a căror adunare se face după regulile expuse la (§ 34). Suma lor va fi o serie convergentă pentru valorile lui x mai mici, în valoare absolută, decât rădăcina cea mai mică, în valoare absolută, a ecuației: $Q(x)=0$.

51. 2. *Să se desvolte în serie funcția*

$$y=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3.$$

Scriem pe y sub forma

$$y=\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^3=1+\frac{6x}{1-x}+\frac{12x^2}{(1-x)^2}+\frac{8x^3}{(1-x)^3};$$

și folosind cele spuse la problema precedentă, găsim

$$y=1+6x+18x^2+38x^3+\cdots+2(2n^2+1)x^n+\cdots$$

desvoltare valabilă pentru $|x|<1$.

51. 3. *Să se desvolte în seria funcția*

$$y=\frac{1+x^3}{\sqrt{1-x^3}}.$$

Desvoltăm întâi funcția

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}=(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^3+\frac{1\cdot3}{2!\,2^2}x^6+\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{3n}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}x^3+\frac{1\cdot3}{2!\,2^2}x^6+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{n!\,2^n}x^{3n}+\cdots,$$

serie valabilă pentru $|x^3|<1$, adică $|x|^3<1$, adică în fine $|x|<1$ (deoarece $|x|$ este real şi pozitiv). Inmulţim cu $1+x^3$, obţinem

$$y=1+\frac{3}{2}x^3+\frac{7}{8}x^6+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)(4n-1)}{n!\,2^n}x^{3n}+\cdots.$$

51. 4 *Să se desvolte în serie funcţia*

$$y=\ln\sqrt{1-4x+3x^2}.$$

Observăm că putem scrie pe y sub forma

$$y=\frac{1}{2}\ln(1-x)(1-3x)=\frac{1}{2}[\ln(1-x)+\ln(1-3x)]$$

de unde

$$y=\frac{1}{2}\left[\left(-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots\right)+\left(-3x-\frac{9x^2}{2}-\cdots-\frac{3^nx^n}{n}-\cdots-\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(4x+5x^2+\cdots+\frac{3^n+1}{n}x^n+\cdots\right).$$

Deoarece desvoltarea lui $\ln(1-x)$ este valabilă pentru $|x|<1$, desvoltările noastre, deci şi cea finală, vor fi valabile atunci când $|-x|=|x|<1$ şi $|-3x|=3|x|<1$. Aceste inegalităţi au loc atunci când $|x|<\frac{1}{3}$.

51. 5. *Să se desvolte în serie funcţia* $\cos^3 x$.

Vom folosi formula:

$$\cos^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x.$$

Dar, din seria lui $\cos x$, deducem

$$\cos 3x=1-\frac{3^2}{2!}x^2+\frac{3^4}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{3^{2n}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots,$$

astfel încât avem:

$$\cos^3 x=1-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{8}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{3(3^{2n-1}+1)}{4(2n)!}x^{2n}+\ldots,$$

desvoltarea valabilă oricare ar fi x.

51. 6. *Să se desvolte în serie funcţiile*

$$y=e^{x\,\mathrm{ch}\,a}\,\mathrm{ch}(x\,\mathrm{sh}\,a),\quad z=e^{x\,\mathrm{ch}\,a}\,\mathrm{sh}(x\,\mathrm{sh}\,a).$$

Pe baza rezultatelor dela prob. 40,2.

$$\mathrm{ch}\,\alpha+\mathrm{sh}\,\alpha=e^{\alpha}, \tag{1}$$

avem succesiv:

$$y+z=e^{x\,\mathrm{ch}\,a}[\mathrm{ch}(x\,\mathrm{sh}\,a)+\mathrm{sh}(x\,\mathrm{sh}\,a)]=e^{x\,\mathrm{ch}\,a}e^{x\,\mathrm{sh}\,a}$$

$$=e^{x(\mathrm{ch}\,a+\mathrm{sh}\,a)}=1+\frac{\mathrm{ch}\,a+\mathrm{sh}\,a}{1!}x+\frac{(\mathrm{ch}\,a+\mathrm{sh}\,a)^2}{2!}x^2+\ldots$$

$$+\frac{(\mathrm{ch}\,a+\mathrm{sh}\,a)^n}{n!}x^n+\cdots$$

Dar în baza aceleaşi formule avem:

$$(\operatorname{ch} a+\operatorname{sh} a)^n=(e^a)^n=e^{an}=\operatorname{ch} na+\operatorname{sh} na,$$

aşa încât.

$$y+z=1+\frac{\operatorname{ch} a+\operatorname{sh} a}{1!}x+\frac{\operatorname{ch} 2a+\operatorname{sh} 2a}{2!}x^2+\cdots+\frac{\operatorname{ch} na+\operatorname{sh} na}{n!}x^n+\cdots,$$

desvoltare valabilă oricare ar fi x şi a.

Procedând la fel pentru $y-z$, se găseşte desvoltarea

$$y-z=1+\frac{\operatorname{ch} a-\operatorname{sh} a}{1!}x+\frac{\operatorname{ch} 2a-\operatorname{sh} 2a}{2!}x^2+\cdots+\frac{\operatorname{ch} na-\operatorname{sh} na}{n!}x^n+\cdots$$

Aceste două desvoltări adunate şi scăzute parte cu parte, ne dau

$$y=1+\frac{\operatorname{ch} a}{1!}x+\frac{\operatorname{ch} 2a}{2!}x^2+\cdots+\frac{\operatorname{ch} na}{n!}x^n+\cdots,$$

$$z=\frac{\operatorname{sh} a}{1!}x+\frac{\operatorname{sh} 2a}{2!}x^2+\cdots+\frac{\operatorname{sh} na}{n!}x^n+\cdots,$$

desvoltări valabile oricare ar fi x şi a.

51. 7. *Să se desvolte după puterile lui* $\sin x$, *funcţia:* $y=\frac{x}{\cos x}$, *presupunând că* x *este un arc având extremitatea în primul cadran.*

Dacă punem: $\sin x=u$, funcţia capătă forma

$$y=\frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}};$$

această funcţie se poate desvolta în serie întreagă după puterile lui u, şi este valabilă pentru toate valorile lui $|u|<1$ (lucru totdeauna posibil deoarece u este un sinus), ceeace se poate vedea din faptul că y reiese din produsul seriilor lui arcsin u (prob. 78,2), şi $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, ambele absolut convergente în ipoteza de mai sus.

Totuşi, pentru găsirea coeficienţilor desvoltării vom proceda direct, folosind seria lui Maclaurin

$$y=y_0+\frac{y_0'}{1!}u+\frac{y_0''}{2!}u^2+\cdots+\frac{y_0^{(n)}}{n!}u^n+\cdots,$$

unde am notat, în general prin $y_0^{(n)}$ derivata de ordinul n pentru $x=0$. Am arătat însă (prob. 42,9), că

$$y_0^{(2p)}=0,\ y_0^{(2p+1)}=2^{2p}(p!)^2,$$

astfel încât desvoltarea nu va conţine decât puteri fără soţ ale lui x ai căror coeficienţi vor fi

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{[2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)]^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(2n+1)}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}.$$

Avem deci

$$y=u+\frac{2}{3}u^3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}u^5+\cdots+\frac{2\cdot 4\ldots(2n)}{3\cdot 5\ldots(2n+1)}u^{2n+1}+\cdots$$

desvoltare valabilă pentru toate valorile lui x, deoarece avem totdeauna: $|u|=|\sin x|<1$.

51. 8. *Se consideră funcția*

$$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{arctg}x-x\ln\sqrt{1+x^2},$$

și se cere să se desvolte în serie. Să se arate că desvoltarea obținută este valabilă pentru $|x|\leqq 1$.

Pentru a găsi desvoltarea, folosim seriile cunoscute. Avem succesiv

$$f(x)=\frac{1}{2}[x+(x^2-1)\operatorname{arctg}x-x\ln(1+x^2)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[x+(x^2-1)\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots\right)-\right.$$

$$\left.-x\left(x^2-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^6-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n}+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-1\right)x^3-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)x^5+\cdots+\right.$$

$$\left.+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}\right)x^{2n+1}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{1\cdot 1\cdot 3}-\frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 5}+\frac{x^7}{3\cdot 5\cdot 7}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{n(4n^2-1)}+\cdots\right],$$

care este desvoltarea cerută. Seriile folosite sunt convergente dacă $|x|<1$ pentru $x=\pm 1$, seria este absolut convergentă, deoarece termenii în valoare absolută sunt comparabili cu termenii seriei, având termenul general $\frac{1}{n^3}$.

51. 9. *Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției:* $f(x)=e^{ax^2}$, *unde a este o constantă.*

Vom folosi seria lui Taylor

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\cdots$$

In cazul nostru: $f(x+h)=e^{a(x+h)^2}=e^{ax^2}\cdot e^{2ahx}\cdot e^{ah^2}$ și $f^{(n)}(x)$ va fi coeficientul lui h^n din seria care se capătă făcând produsul

$$e^{ax^2}\left[1+\frac{2ahx}{1!}+\frac{(2ahx)^2}{2!}+\cdots+\frac{(2ahx)^n}{n!}+\cdots\right]\cdot$$

$$\left[1+\frac{ah^2}{1!}+\frac{a^2h^4}{2!}+\cdots+\frac{a^nh^{2n}}{n!}+\cdots\right],$$

și înmulțind rezultatul cu $n!$. Făcând produsul celor două serii după regula cunoscută, obținem

$$f^{(n)}(x)=n!\left[\frac{(2ax)^n}{n!}+\frac{a}{1!}\frac{(2ax)^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{a^2}{2!}\frac{(2ax)^{n-4}}{(n-4)!}+\cdots\right]e^{ax^2}=$$

$$=\left[a^n(2x)^n+\frac{n(n-1)}{1!}a^{n-1}(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}a^{n-2}(2x)^{n-4}+\cdots\right]e^{ax^2}.$$

In particular dacă $f(x)=e^{-x^2}$, avem

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[(2x)^n-\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}-\cdots\right]e^{-x^2}.$$

CAPITOLUL VII

FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

§ 52. Derivate parțiale. Determinanți funcționali

1. Se numește *domeniu* în plan sau în spațiu totalitatea punctelor din plan sau din spațiu interioare unui contur (mărginit de una sau mai multe curbe), respectiv unei suprafețe (care poate fi compusă dintr'o pânză sau mai multe).

Se zice că o funcție de două sau trei variabile este *definită* într'un domeniu, când înlocuind pe (x, y), respectiv (x, y, z), prin coordonatele unui punct interior domeniului, funcția capătă o valoare bine determinată. O funcție este *continuă* într'un domeniu când la creșteri mici date variabilelor corespund creșteri mici pentru funcție. O funcție continuă într'un domeniu capătă aceeași valoare într'un punct al domeniului, oricum ne-am apropia de el. Fie $\omega=f(x, y, z)$ o funcție continuă într'un domeniu (D). In interiorul acestui domeniu se pot defini (ca și la funcțiile de o singură variabilă), trei *derivate*, numite *parțiale*, respectiv în raport cu x, y, z (la prima presupunem pe y și z constanți, ...), derivate care se notează prin simbolurile f'_x, f'_y, f'_z sau $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}$, $\frac{\partial\omega}{\partial z}$. Derivatele acestora sunt derivatele de ordinul al doilea ale funcției și sunt, în general, în număr de șase; le notăm prin f''_{x^2}, f''_{xy}, ..., $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}$, ... Pentru a avea $f''_{xy}=f''_{yx}$ este necesar ca aceste două derivate să fie continue (din moment ce aceste două derivate există se presupune implicit că funcția și primele ei derivate f'_x, f'_y sunt continue).

Se numește *diferențiala totală* a funcției ω expresia

$$d\omega=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz. \qquad (I)$$

In general, dacă avem o egalitate de forma

$$d\omega=Adx+Bdy+Cdz=A'dx+B'dy+C'dz \qquad (II)$$

rezultă imediat relaţiile

$$A=A'=\frac{\partial f}{\partial x},\quad B=B'=\frac{\partial f}{\partial y},\quad C=C'=\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{III}$$

Analog pentru funcţiile de două sau mai multe variabile.

Fiind dată o direcţie r, definită prin cosinii ei directori α, β, γ, se numeşte *derivată după direcţia r*, expresia

$$\frac{d\omega}{dr}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\alpha+\frac{\partial\omega}{\partial y}\beta+\frac{\partial\omega}{\partial z}\gamma. \tag{IV}$$

Analog pentru două sau mai multe variabile.

2. Fiind date n funcţii y_i, de n variabile x_i, definite prin formulele

$$y_1=f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$y_2=f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n=f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

se numeşte *determinantul* lor *funcţional* determinantul

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \ldots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

care se notează prescurtat prin $\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$.

52. 1. *Să se găsească diferenţiala totală a funcţiei*

$$u=3x^4-15x^3+7x^2y+2y^5,$$

şi să se verifice că $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

Avem

$$\frac{\partial u}{\partial x}=12x^3-45x^2+14xy;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=7x^2+10y^4,$$

deci:

$$du=(12x^3-45x^2+14xy)\,dx+(7x^2+10y^4)\,dy.$$

Mai departe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=14x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=14x.$$

52. 2. *Să se găsească diferențiala totală a funcției*

$$u=\ln\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}.$$

La soluția problemei precedente am calculat mai întâi derivatele parțiale ale funcției și am dedus apoi diferențiala totală. Se poate proceda și invers, formând diferențiala totală direct a funcției și apoi să se deducă derivatele parțiale. Pentru funcția u vom proceda pe această cale.

Scriem mai întâiu funcția sub forma

$$u=\ln(x+\sqrt{x^2-y^2})-\ln(x-\sqrt{x^2-y^2}),$$

și apoi avem

$$du=\frac{dx+\frac{xdx-ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{dx-\frac{xdx-ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-y^2}dx+xdx-ydy}{\sqrt{x^2-y^2}(x+\sqrt{x^2-y^2})}-\frac{\sqrt{x^2-y^2}dx-xdx+ydy}{\sqrt{x^2-y^2}(x-\sqrt{x^2-y^2})}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x^2-y^2}}dx-\frac{2x}{y\sqrt{x^2-y^2}}dy.$$

Rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2}{\sqrt{x^2-y^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2x}{y\sqrt{x^2-y^2}}.$$

52. 3. *Să se găsească diferențiala totală a funcției*

$$u=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x}.$$

Observăm că: $u=\operatorname{tg}(x+y+z)$, așa încât

$$du=\frac{dx+dy+dz}{\cos^2(x+y+z)}.$$

Din această relație rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{\cos^2(x+y+z)}.$$

52. 4. *Fiind dată funcția:* $u=e^{xyz}$ *să se calculeze* $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$.

Se găsește

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2).$$

52. 5. *Să se arate că pentru funcția*

$$f(x,y)=x^2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-y^2\operatorname{arctg}\frac{x}{y},$$

valorile derivatelor $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ și $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$ nu sunt egale în origine.

Avem succesiv

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x - 2y \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Când derivăm a doua oară pe prima în raport cu y, x este presupus constant, deci putem să-l luăm chiar zero. La fel putem lua $y=0$ în a doua derivată. Avem

$$\frac{\partial f(0,y)}{\partial x} = -y, \quad \frac{\partial f(x,0)}{\partial y} = x.$$

Deci

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\,\partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\,\partial x} = 1,$$

Cauza este că $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}$ şi $\frac{\partial^2 f(z,y)}{\partial y\,\partial x}$ nu sunt funcţii continue în interiorul unui domeniu ce conţine originea. În adevăr, plecând dela valorile primelor derivate calculate mai sus, găsim

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Aceste două valori sunt aceleaşi când nu avem în acelaşi timp $x=y=0$. Pentru aceste valori, cele două derivate devin nedeterminate. Valorile lor găsite mai sus au fost determinate, pentru prima tinzând spre origine pe axa Oy, iar pentru a doua tinzând pe axa Ox.

52. 6. *Dacă potenţialul electric V într'un punct oarecare al unui plan este dat de formula*

$$V = \ln \frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}},$$

să se găsească derivate în punctul A $(0, a)$ după direcţia axei Oy şi apoi în punctul B (a, a) după direcţia care merge la punctul C $(-a, 0)$.

Scriem pe V sub forma

$$V = \frac{1}{2}\left\{\ln\left[(x-a)^2+y^2\right] - \ln\left[(x+a)^2+y^2\right]\right\},$$

şi îi calculăm diferenţiala totală

$$dV = \frac{1}{2}\left[\frac{2(x-a)\,dx+2y\,dy}{(x-a)^2+y^2} - \frac{2(x+a)\,dx+2y\,dy}{(x+a)^2+y^2}\right]$$

ceeace exprimă

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2a(x^2-y^2-a^2)}{\left[(x-a)^2+y^2\right]\left[(x+a)^2+y^2\right]}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{4axy}{\left[(x-a)^2+y^2\right]\left[(x+a)^2+x^2\right]}.$$

1°. Deoarece cosinusurile unghiurilor pe care le face Oy cu axele de coordonate sunt 0 și 1, prima derivată cerută este: $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_A = 0$.

2°. Pentru a doua; scriem mai întâi coeficientul unghiular al dreptei BC, care este

$$m = \frac{a}{a+a} = \frac{1}{2} = \operatorname{tg}\theta; \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

(se vede de pe figură că θ este ascuțit, deaceea s'a luat în fața radicalului semnul plus). Cum unghiul pe care-l face direcția pozitivă a axei Ox cu $\overline{BC}$ este $180°-\theta$, avem $\cos\theta_1 = \cos(180°-\theta) =$
$= -\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Cosinusul unghiului pe care-l face direcția pozitivă a axei Oy cu $\overline{BC}$ este
$\cos\theta_2 = \cos(90°+\theta) = -\sin\theta = -$
$-\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

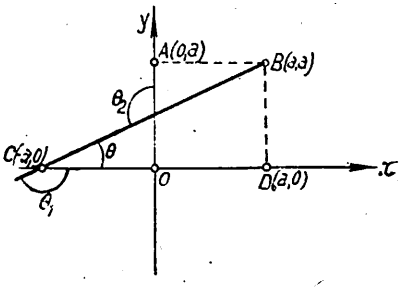


Fig. 64

Deci, derivata după direcția $\overline{BC} = r$ va fi

$$\frac{dV}{dr} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_B \frac{2}{\sqrt{5}} - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_B \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.$$

52. 7. *Să se găsească expresia generală a derivatei după o direcție oarecare în punctul* $A\left(\frac{1}{3}\pi, 0\right)$ *pentru funcția*

$$u = e^{-y}\sin x + \frac{1}{3}e^{-3y}\sin 3x,$$

Să se afle direcția care face minimă această derivată.

Avem

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A = -\frac{1}{2}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_A = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

și deci derivata după direcția r care face unghiul θ cu direcția pozitivă a axei Ox este

$$\frac{du}{dr} = -\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = f(\theta).$$

Pentru ca funcția $f(\theta)$ să fie minimă este necesar ca

$$f'(\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = 0, \quad \operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}; \quad \theta = 60°.$$

Pentru această valoare, derivata a doua este

$$f''(\theta) = \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 > 0,$$

adică pentru $\theta = 60°$ avem în adevăr un minim a cărui valoare este -1.

Observație. $f(\theta)$ are și un maxim egal cu 1 corespunzător valorii $\theta = 120°$.

52. 8. *Se transformă funcțiile* (x, y, z) *în funcțiile* (r, θ, z), *după formulele*

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z.$$

Să se găsească determinantul funcțional al transformării.

Avem

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2 n\theta) = r.$$

52. 9. *Se transformă funcțiile* (x,y,z) *în funcțiile* $(r,\theta,\varphi,)$ *prin formulele*

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta.$$

Să se găsească determinantul funcțional al transformării.

Avem:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\sin\theta\,[-\sin\varphi\,(-\sin^2\theta\sin\varphi - \cos^2\theta\sin\varphi) - \cos\varphi\,(-\sin^2\theta\cos\varphi - \cos^2\theta\cos\varphi)]$$
$$= r^2\sin\theta\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2\sin\theta.$$

§ 53. Funcții compuse. Funcții omogene

1. Se zice că o funcție

$$\omega = f(u_1, u_2 \dots u_n),$$

este *funcție compusă* când variabilele u_i, la rândul lor sunt funcții de alte variabile x_k:

$$u_i = g_i(x_1, x_2 \dots x_m), \qquad (i = 1,2 \dots n).$$

Derivatele parțiale ale funcției ω în raport cu variabilele x_k sunt date de formulele

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_k} = \frac{\partial\omega}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \frac{\partial\omega}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial\omega}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_k} \quad (k = 1,2 \dots m). \tag{I}$$

2. Se zice că o funcție $f(x, y, z \dots)$ este *omogenă*, atunci când ea verifică relația

$$f(tx, ty, tz \dots) = t^n f(x, y, z \dots), \tag{II}$$

n se numește *gradul de omogenitate* al funcției. Teorema lui Eúler spune că o funcție omogenă satisface relația

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z + \cdots = nf(x, y, z \dots)$$

53. 1. *Presupunând $x>0$ să se găsească derivata funcţiei $y=x^x$.*

Funcţia este de forma: $y=u^v$, unde $u=v=x$; avem

$$y'=vu^{v-1}u'+u^v \ln u \cdot v'=x^x(1+\ln x).$$

53. 2. *Presupunând $x>0$, să se găsească derivata funcţiei $y=(\sin x)^x$.*

Procedând ca la problema precedentă găsim:

$$y'=(\sin x)^{x-1}(x\cos x+\sin x \ln \sin x).$$

53. 3. *Presupunând $x>0$, să se găsească derivata funcţiei $y=\log_x \sin x$.* (logaritmii fiind luaţi în baza x).

Funcţia din enunţ se mai poate scrie

$$x^y=\sin x.$$

Aplicând logaritmii în ambele părţi şi derivând găsim:

$$y'=\frac{x\cos x \ln x-\sin x \ln \sin x}{x \sin x (\ln x)^2}.$$

53. 4. *Să se determine un polinom $P(x,y)$ omogen de gradul n în două variabile, în aşa fel încât: $P''_{x^2}=P''_{y^2}$.*

Fie

$$P(x,y)=A_0x^n+A_1x^{n-1}y+A_2x^{n-2}y^2+\cdots+A_{n-1}xy^{n-1}+A_ny^n,$$

cel mai general polinom omogen de gradul n cu două variabile (4,1).

Avem

$$P''_{x^2}(x,y)=n(n-1)A_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)A_1x^{n-3}y+\cdots+$$
$$+(n-2)(n-3)A_2x^{n-4}y^2+\cdots+2\cdot 1\, A_{n-2}y^{n-2},$$

$$P''_{y^2}(x,y)=1\cdot 2\, A_2x^{n-2}+2\cdot 3\, A_3x^{n-3}y+3\cdot 4\, A_4x^{n-4}y^2+\cdots+$$
$$+(n-1)(n-2)\, A_{n-1}xy^{n-3}+n(n-1)A_ny^{n-2}.$$

Identificând coeficienţii aceloraşi puteri ale lui x, din aproape în aproape, se determină toţi coeficienţii A_k în funcţie de A_0 şi A, care rămân arbitrari. Se găseşte

$$n(n-1)A_0=1\cdot 2A_2 \qquad (n-1)(n-2)A_1=2\cdot 3A_3$$
$$(n-2)(n-3)A_2=3\cdot 4A_4 \qquad (n-3)(n-4)A_3=4\cdot 5A_5$$
$$(n-4)(n-5)A_4=5\cdot 6A_6 \qquad (n-5)(n-6)A_5=6\cdot 7A_7$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

aşa încât din aproape în aproape, scoatem $\left(C_n^p \text{ simbolul combinărilor}\right)$:

$$A_2=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}A_0 \qquad A_3=\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}A_1$$
$$A_4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A_0 \qquad A_5=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}A_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{2p}=C_n^{2p}A_0 \qquad A_{2p+1}=C_n^{2p+1}\cdot A_1.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

deoarece A_1 fiind arbitrar, poate fi înlocuit prin nA_1. Polinomul căutat este deci

$$P(x,y)=A_0(x^n+C_n^2x^{n-2}y^2+C_n^4x^{n-4}y^4+\cdots)+A_1(C_n^1x^{n-1}y+C_n^3x^{n-3}y^3+ \\ +C_n^5x^{n-5}y^5+\cdots).$$

In particular, dacă $A_0=A_1$, obținem

$$P(x,y)=A_0(x+y)^n.$$

53. 5. *Să se verifice teorema lui Euler pentru funcția*

$$f(x,y,z)=\frac{(-x+y+z)^n+(x-y+z)^n+(x+y-z)^n}{(x+y+z)^n}.$$

In cazul nostru folosind formula

$$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z),$$

gradul de omogenitate este zero. Revine deci, la a demonstra că

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=0,$$

ceeace se verifică ușor printr'un calcul direct.

53. 6. *Să se arate că funcția*

$$V=\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

satisface ecuația lui Laplace

$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}=0.$$

Să notăm, pentru prescurtare, prin r numitorul lui V. Avem

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x-a}{r},\ \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y-b}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z-c}{r},$$

așa încât, cum $V=\frac{1}{r}$, găsim

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{x-a}{r^3},\ \frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{y-b}{r^3},\ \frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{z-c}{r^3},$$

și mai departe

$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}=\frac{3(x-a)^2-r^2}{r^5},\ \frac{\partial^2V}{\partial y^2}=\frac{3(y-b)^2-r^2}{r^5},\ \frac{\partial^2V}{\partial z^2}=\frac{3(z-c)^2-r^2}{r^5}.$$

Deci

$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}=\frac{3[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]-3r^2}{r^5}=0.$$

53. 7. *Se consideră funcția:* $V=f(r)$, *unde* $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. *Să se calculeze expresia*

$$\Delta_2V=\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}.$$

Avem succesiv

$$\frac{\partial V}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}f'(r),\quad \frac{\partial V}{\partial y}=\frac{y}{r}f'(r),\quad \frac{\partial V}{\partial z}=\frac{z}{r}f'(r);$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{r-\frac{x^2}{r}}{r^2}f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f''(r)=\frac{r^2-x^2}{r^3}f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f''(r),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3}f'(r)+\frac{y^2}{r^2}f''(r),\quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3}f'(r)+\frac{z^2}{r^2}f''(r);$$

deci

$$\Delta_2 V=\frac{2}{r^2}f'(r)+f''(r).$$

53. 8. *Să se demonstreze că funcţia* $V=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, *satisface relaţia*

$$\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 V}{\partial y^4}+\frac{\partial^4 V}{\partial z^4}+2\frac{\partial^4 V}{\partial x^2\partial y^2}+2\frac{\partial^4 V}{\partial y^2\partial z^2}+2\frac{\partial^4 V}{\partial z^2\partial x^2}=0.$$

Dacă ne raportăm la problema precedentă, observăm că ecuaţia din enunţ se mai poate scrie: $\Delta_2(\Delta_2 V)=0$.

In cazul nostru: $f(r)=r$, aşa încât: $\Delta_2 V=\frac{2}{r}$ şi în baza calculului făcut la probl. 53 6, afirmaţia din enunţ este justificată.

53. 9. *Fiind dată funcţia*

$$u=x\sqrt{(a^2-y^2)(a^2-z^2)}+y\sqrt{(a^2-z^2)(a^2-x^2)}+z\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-y^2)}-xyz,$$

să se arate că avem

$$\sqrt{a^2-x^2}\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{a^2-y^2}\frac{\partial u}{\partial y}=\sqrt{a^2-z^2}\frac{\partial u}{\partial z}=-\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-y^2)(a^2-z^2)}\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}.$$

Avem

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{(a^2-y^2)(a^2-z^2)}-\frac{xy\sqrt{a^2-z^2}}{\sqrt{a^2-y^2}}-\frac{xz\sqrt{a^2-y^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}-yz;$$

$$\sqrt{a^2-x^2}\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-y^2)(a^2-z^2)}-$$

$$-(yz\sqrt{a^2-x^2}+zx\sqrt{a^2-y^2}+xy\sqrt{a^2-z^2}).$$

Simetria în raport cu x, y, z a acestui rezultat ne îndreptăţeşte să afirmăm că

$$\sqrt{a^2-x^2}\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{a^2-y^2}\frac{\partial u}{\partial y}=\sqrt{a^2-z^2}\frac{\partial u}{\partial z};$$

mai departe avem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{y\sqrt{a^2-z^2}}{\sqrt{a^2-y^2}}-\frac{x\sqrt{a^2-z^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{xyz}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-y^2)}}-z,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=\frac{yz}{\sqrt{(a^2-y^2)(a^2-z^2)}}+\frac{xz}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-z^2)}}+\frac{xy}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-y^2)}}-1,$$

şi deci

$$-\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-y^2)(a^2-z^2)}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=-(yz\sqrt{a^2-x^2}+xz\sqrt{a^2-y^2}+$$

$$xy\sqrt{a^2-z^2})+\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-y^2)(a^2-z^2)}=\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{\partial u}{\partial x}.$$

53. 10. *Funcţia:* $z=xf(x+y)+y\varphi(x+y)$, *satisface, oricare ar fi funcţiile* f *şi* φ, *relaţia*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Pentru uşurinţa calculului notăm prin: $x+y=u$ şi avem

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f(u)+xf'(u)u'_x+y\varphi'(u)u'_x=f(u)+xf'(u)+y\varphi'(u),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf'(u)u'_y+\varphi(u)+y\varphi'(u)u'_y=xf'(u)+\varphi(u)+y\varphi'(u),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'(u)+xf''(u)+y\varphi''(u).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(u)+xf''(u)+\varphi'(u),+y\varphi''(u)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xf''(u)+2\varphi'(u)+y\varphi''(u).$$

valori care verifică ecuaţia din enunţ

53. 11. *Să se arate că funcţia*

$$z=x^n f\left(\frac{y}{x}\right)+x^{-n}\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

satisface oricare ar fi funcţiile f *şi* φ, *relaţia*

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial x}-n^2 z=0,$$

Demonstraţie analoagă ca la problema precedentă punând: $\frac{y}{x}=u$

53. 12. *Funcţia:* $z=f[x+\varphi(y)]$, *satisface, oricare ar fi funcţiile* f *şi* φ, *relaţia*

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Punem: $u=x+\varphi(y)$. Avem succesiv

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u),\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=f'(u)\varphi'(y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''(u)\varphi'(y),$$

şi verificarea este imediată.

§ 54. Funcţii dependnte şi independente

Fiind date n funcţii $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de m variabile $x_1, x_2, \ldots, x_m$,

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

se zice că sunt *dependente* când între ele avem cel puţin o relaţie de forma

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0. \qquad \text{(II)}$$

coeficienţii funcţiei F fiind independenţi de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_m$. In caz contrar, funcţiile y_i se numesc *independente.*

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca n funcţii de n variabile să fie ndependente este ca determinantul lor funcţional

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \qquad \text{(III)}$$

să nu fie identic nul (el poate fi nul pentru anumite valori date variabilelor).

54. 1. *Să se demonstreze că între funcţiile*

$$u = x+y+z, \; v = xy+yz+zx, \; w = x^2+y^2+z^2$$

există o relaţie.

In adevăr, avem

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & y+z & 2x \\ 1 & z+x & 2y \\ 1 & x+y & 2z \end{vmatrix} = 0.$$

Cele trei funcţii date sunt legate prin relaţia cunoscută.

$$u^2 = w+2v.$$

54. 2. *Să se determine funcţia derivabilă $f(x)$ astfel ca funcţiile*

$$u = f(x+y), \; v = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)},$$

să fie dependente. Să se determine apoi relaţia care există între u şi v.

Pentru ca funcţiile u şi v să fie dependente, trebuie ca

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \frac{f'(x+y)}{[1-f(x)f(y)]^2} \begin{vmatrix} 1 & f'(x)[1+f^2(y)] \\ 1 & f'(y)[1+f^2(x)] \end{vmatrix} = 0.$$

Lăsând de o parte cazul: $f'(x+y) = 0$, când $f(x)$ se reduce la o constantă, va trebui să avem

$$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)} = \frac{f'(y)}{1+f^2(y)},$$

oricare ar fi x și y. Rezultă că trebue să avem:

$$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)} = a,$$

adică

$$\operatorname{arctg} f(x) = ax+b, \quad f(x) = \operatorname{tg}(ax+b),$$

a și b fiind două constante. Pentru a găsi relația care leagă pe u și v între ei, scriem

$$v = \frac{\operatorname{tg}(ax+b)+\operatorname{tg}(ay+b)}{1-\operatorname{tg}(ax+b)\operatorname{tg}(ay+b)} = \operatorname{tg}(ax+ay+2b) =$$

$$= \operatorname{tg}[a(x+y)+b+b] = \frac{\operatorname{tg}[a(x+y)+b]+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} b \operatorname{tg}[a(x+y)+b]} = \frac{u+\operatorname{tg} b}{1-u\operatorname{tg} b}.$$

Adică:

$$v = \frac{u+\operatorname{tg} b}{1-u\operatorname{tg} b}.$$

54. 3. *Să se determine o funcție $f(u)$ care nu se reduce la o constantă și în așa fel încât expresiile*

$$u = f(x+y), \quad v = f(x)f(y)$$

să fie dependente.

Va trebui ca

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} f'(x+y), & f'(x)f(y) \\ f'(x+y), & f(x)f'(y) \end{vmatrix} = f'(x+y)[f(x)f'(y) - f'(x)f(y)] = 0,$$

oricare ar fi x și y. Dacă luăm: $f'(x+y)=0$, rezultă că $f(x+y)$ se reduce la o constantă, ceeace a fost exclus prin enunț. Va trebui să avem

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(y)}{f(y)},$$

adică

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = a, \qquad (a = \text{const}).$$

Cum prima parte este derivata lui $\ln f(x)$, iar a doua, a lui ax, în baza unei teoreme cunoscute, conform căreia două funcții care au aceeași derivată diferă printr'o constantă,

$$\ln f(x) = ax+b, \qquad (b = \text{const})$$

sau,

$$f(x) = e^{ax+b} = Ae^{ax}, \qquad (A = e^b)$$

A și a fiind constante arbitrare. Ca o verificare, se vede că în acest caz: $u = Ae^{a(x+y)}$, $v = Ae^{ax}\cdot Ae^{ay}$ și deci: $Au = v$.

54. 4. *Să se arate că funcțiile*

$$u = \arcsin\frac{y^z}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}}, \quad v = \arcsin\frac{z^x}{\sqrt{(y^2+z^2)(y^2+x^2)}},$$

$$w = \arcsin\frac{x^y}{\sqrt{(z^2+x^2)(z^2+y^2)}},$$

sunt dependente. Să se găsească relația dintre ele.

Găsim

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\frac{1}{(x^2+y^2)^2(y^2+z^2)^2(z^2+x^2)^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix} -yz(2x^2+y^2+z^2), & yz(y^2+x^2), & yz(z^2+y^2) \\ xz(x^2+z^2), & -xz(x^2+2y^2+z^2), & xz(z^2+x^2) \\ xy(x^2+y^2), & xy(y^2+z^2), & -xy(x^2+y^2+2z^2) \end{vmatrix}.$$

Scoţând în prima linie pe yz, în a doua pe xz şi în a treia pe xy ca factori comuni şi adunând apoi toate liniile, la prima obţinem o linie cu toate elementele nule, adică determinantul este nul.

Din calculele de mai sus rezultă că derivatele parţiale ale sumei: $u+v+w$ în raport cu x, y, z sunt nule. Aceasta înseamnă (§ 52, I) că

$$d(u+v+w)=0;\quad u+v+w=\text{const.}$$

Să determinăm valoarea acestei constante. In acest scop, scriem

$$\sin u=\frac{yz}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}},\ \text{rezultă}\ \operatorname{tg}u=\frac{\sin u}{\cos u}=\frac{yz}{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

şi analog pentru $\operatorname{tg}v$, $\operatorname{tg}w$. Aceasta înseamnă că avem relaţia

$$\sum\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v=\sum\frac{yz\cdot zx}{xy(x^2+y^2+z^2)}=\frac{\sum z^2}{x^2+y^2+z^2}=1.$$

Dar,

$$\operatorname{tg}(u+v+w)=\frac{\operatorname{tg}u+\operatorname{tg}v+\operatorname{tg}w-\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v\operatorname{tg}w}{1-\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v-\operatorname{tg}v\operatorname{tg}w-\operatorname{tg}w\operatorname{tg}u},$$

egalitate care, comparată cu rezultatul precedent, exprimă că

$$u+v+w=\frac{1}{2}\pi.$$

§ 55. Funcţii implicite

1. Până în prezent am obişnuit să definim o funcţie y de variabila x printr'o relaţie de forma: $y=f(x)$; se zice că y este funcţie *explicită* de x. Putem să definim funcţia y printr'o relaţie de forma: $f(x,y)=0$ când zicem că funcţia y este *implicită*. Tot aşa: $f(x,y,z)=0$ defineşte funcţia implicită z ca funcţie de două variabile x şi y.

Teorema care precizează existenţa unei funcţii implicite de o variabilă, este următoarea: fiind dată ecuaţia: $f(x,y)=0$, funcţia f fiind definită într'un domeniu (D), dacă în acest domeniu alegem un punct $M_0(x_0,y_0)$ şi dacă 1° funcţia $f(x,y)$ este continuă în vecinătatea lui M_0 şi se anulează în el, 2° are derivate parţiale de primul ordin, continue în vecinătatea lui M_0, şi $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$, atunci există o funcţie $y=g(x)$ continuă şi derivabilă în vecinătatea valorii $x=x_0$ şi care pentru $x=x_0$, este $g(x_0)=y_0$.

2. Derivata y' a unei funcţii implicite y de x definită prin relaţia: $f(x,y)=0$ este dată de formula

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}. \tag{I}$$

Dacă avem n funcţii implicite: $u_1, u_2, \ldots u_n$ cu p variabile: $x_1, x_2, \ldots, x_p$, definite prin sistemul

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_p;\ u_1, u_2, \ldots, u_n)=0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_p;\ u_1, u_2, \ldots, u_n)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_p;\ u_1, u_2, \ldots, u_n)=0, \end{cases} \tag{II}$$

derivatele $\frac{\partial u_k}{\partial x_1}$ sunt date de

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}+\frac{\partial f_n}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1}=0, \end{cases} \tag{III}$$

ecuaţii care se obţin derivând în raport cu x_1 sistemul dat şi din care, prin rezolvare obţinem derivatele căutate. Pentru ca acest sistem de ecuaţii să poată fi rezolvat, este necesar (§ 27) ca determinantul necunoscutelor să fie diferit de zero. Acest determinant nu este altul decât

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}, \tag{IV}$$

şi care este presupus diferit de zero, deoarece în caz contrar, sistemul (II) nu mai defineşte funcţiile $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ca funcţii de $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

La fel se obţin

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_k}{\partial x_p}.$$

55. 1. *Fiind dată funcţia y, definită implicit prin relaţia*

$$y=1+xe^y,$$

se cere să se calculeze y'.

Avem în acest caz

$$f(x,y)=y-1-xe^y,$$

şi deci

$$y'=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}=\frac{e^y}{1-xe^y}=\frac{1}{e^{-y}-x}.$$

Observație. Folosind relația dată, y' se mai poate scrie și sub forma

$$y' = \frac{e^y}{2-y}.$$

55. 2. *Să se găsească derivata funcției y definită prin relația:* $f\left(\frac{y}{x}\right) = a$, *f fiind o funcție oarecare, iar a o constantă.*

Notăm, pentru simplificare pe: $\frac{y}{x} = u$ și $\varphi(x, y) = f(u) - a$. Avem

$$\varphi'_x(x, y) = f'(u)\, u'_x = -\frac{y}{x^2} f'(u),$$

$$\varphi'_y(x, y) = f'(u)\, u'_y = \frac{1}{x} f(u),$$

$$y' = -\frac{\varphi'_x(x, y)}{\varphi'_y(x, y)} = \frac{y}{x}.$$

Observația I. Rezultatul acesta se poate găsi și pe altă cale. Din relația dată putem deduce că $y = xg(a)$, g fiind funcția inversă a lui f; deci

$$y' = g(a) = \frac{y}{x}.$$

55. 3. *Fiind dată funcția y definită prin relația*

$$x = a \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2},$$

unde a este o constantă pozitivă, să se arate că avem relația

$$y^2 y'' + a = 0.$$

Punem

$$F(x, y) = a \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} - x.$$

Domeniul de existență al funcției $F(x, y)$ este determinat de inegalitățile

$$-1 \leq \frac{a-y}{a} \leq 1,\ 2ay - y^2 \geq 0.$$

Studiindu-le pe rând, rezultă $0 \leq y \leq 2a$. Derivatele parțiale sunt

$$F'_x = -1,\ F'_y = \frac{y}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

care sunt continue și $F'_y \neq 0$ dacă $y \neq 0$ sau $2a$. Domeniul de existență a lui F, deci acolo unde putem vorbi de funcția y, este porțiunea din plan cuprinsă

între axa Ox și dreapta (D) de ecuație $y=2a$, fără punctele acestor două drepte. (fig. 63). Pentru orice punct din acest domeniu avem

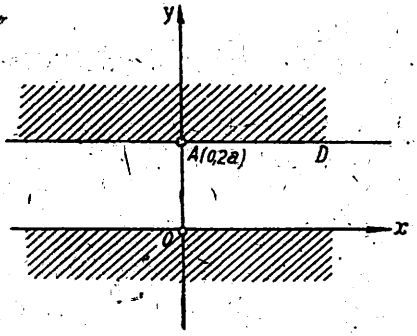


Fig. 65

$$y'=\sqrt{\frac{2a}{y}-1}.$$

Derivând, încă odată, această egalitate, găsim

$$y''=-\frac{a}{y^2};\quad y^2y''=-a.$$

55. 4. *Funcția:* $z=f(x, y)$, *definită prin ecuațiile*

$$zg'(u)=[y-g(u)]^2,$$
$$(x+u)g'(u)=y-g(u),$$

în care u *este o variabilă auxiliară, satisface relația*

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=z,$$

oricare ar fi g.

Considerăm funcția z definită de prima ecuație, pe care o scriem sub forma

$$z=\frac{[y-g(u)]^2}{g'(u)},$$

iar pe u ca o funcție de x, y definită implicit prin ecuația a doua. Avem

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{[y-g(u)]\{2g'^2(u)+g''(u)[y-g(u)]\}}{g'^2(u)}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{[y-g(u)]\left\{2g'(u)-[2g'^2(u)+g''(u)(y-g(u)]\frac{\partial u}{\partial y}\right\}}{g'^2(u)}.$$

Pentru a găsi pe $\frac{\partial u}{\partial x}$ și $\frac{\partial u}{\partial y}$, derivăm a doua ecuație din enunț respectiv în raport cu x și y. Găsim

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)g'(u)+(x+u)g''(u)\frac{\partial u}{\partial x}=-g'(u)\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}g'(u)+(x+u)g''(u)\frac{\partial u}{\partial y}=1-g'(u)\frac{\partial u}{\partial y},$$

de unde

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{g'(u)}{2g'(u)+(x+u)g''(u)},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2g'(u)+(x+u)g''(u)},$$

numitorul se poate transforma, ținând seama că din ecuația a doua scoatem

$$x+u=\frac{y-g(u)}{g'(u)},$$

deci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{g'^2(u)}{2g'^2(u) + [y-g(u)]\,g''(u)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g'(u)}{2g'^2(u) + [y-g(u)]\,g''(u)}.$$

In baza acestor formule, derivatele parţiale ale lui z devin

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y-g(u), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y-g(u)}{g'(u)}.$$

Aşadar

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{[y-g(u)]^2}{g'(u)} = z,$$

folosind prima ecuaţie.

55. 5. *Fiind date ecuaţiile*

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=0, \quad x+y+z=a,$$

se cere să se calculeze $\frac{dy}{dx}$ şi $\frac{dz}{dx}$.

Facem mai întâi observaţia că (prob. 3.5):

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),$$

deci sistemul se poate scrie sub forma mai simplă

$$x+y+z=a, \quad x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0;$$

mai mult, identitatea considerată ne spune că pentru ca să se determine efectiv pe y şi z în funcţie de x, este necesar ca a să fie diferit de zero, în caz contrar, sistemul reducându-se la o singură ecuaţie. Derivând cele două ecuaţii, în raport cu x, avem

$$1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0,$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}-y-x\frac{dy}{dx}-z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}-x\frac{dz}{dx}-z=0,$$

sau încă

$$\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=-1, \quad (2y-x-z)\frac{dy}{dx}+(2z-x-y)\frac{dz}{dx}=-(2x-y-z),$$

sistem care, rezolvat în raport cu $\frac{dy}{dx}$ şi $\frac{dz}{dx}$, ne dă

$$\frac{dz}{dx}=\frac{x-z}{z-y}, \quad \frac{dz}{dx}=\frac{y-x}{z-y}.$$

55. 6. *Sistemul*

$$u^2+x^2+y^2+z^2=a^2,$$

$$\ln(xy)+\frac{y}{x}=b, \quad \ln\frac{z}{x}+zx=c,$$

defineşte pe u ca funcţie de x prin intermediul lui y şi z. Să se găsească $\frac{du}{dx}$.

Derivăm sistemul în raport cu x; obţinem trei ecuaţii, între care, eliminând pe $\frac{dy}{dx}$ şi $\frac{dz}{dx}$, găsim

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\left(\frac{y^2}{x}\frac{x-y}{x+y}+\frac{z^2}{x}\frac{xz-1}{xz+1}-x\right).$$

55. 7. *Relaţia: $z=f(x, y)$ poate fi privită ca definind funcţia z explicit de x şi y. Dar ea poate fi privită ca definind pe x (sau y) implicit de variabilele independente z şi y (respectiv z şi x). Se cere să se găsească derivatele de primele două ordine ale funcţiei x.*

Soluţia I. Derivând relaţia

$$z-f(x, y)=0,$$

în raport cu z şi apoi în raport cu y, găsim

$$1-f'_x\frac{\partial x}{\partial z}=0, \quad -f'_x\frac{\partial x}{\partial y}-f'_y=0,$$

de unde scoatem

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{f'_x}, \quad \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_x}.$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}=-\frac{f''_{x^2}}{f'^2_x}\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{f''_{x^2}}{f'^3_x},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial y}=-\frac{f''_{x^2}\frac{\partial x}{\partial y}+f''_{xy}}{f'^2_x}=\frac{f''_{x^2}f'_y-f''_{xy}f'_x}{f'^3_x},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=-\frac{-\left(f''_{xy}\frac{\partial x}{\partial y}+f''_{y^2}\right)f'_x+\left(f''_{x^2}\frac{\partial x}{\partial y}+f''_{xy}\right)f'_y}{f'^2_x}=\frac{2f'_xf'_yf''_{xy}-f''_{x^2}f'^2_y-f''_{y^2}f'^2_x}{f'^3_x}.$$

Soluţia II. Pentru a simplifica scrierea folosim notaţiile

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t.$$

Diferenţiala totală a funcţiei ne dă

$$dz=pdx+qdy, \tag{1}$$

de unde scoatem

$$dx=\frac{dz-qdy}{p}. \tag{2}$$

Pentru a obţine pe d^2z, diferenţiem din nou pe (1) şi ţinem seamă că z, y sunt variabile independente, deci $d^2z=d^2y=0$. Avem

$$0=(rdx+sdy)\,dx+pd^2x+(sdx+tdy)\,dy,$$

$$0=rdx^2+2sdxdy+tdy^2+pd^2x.$$

Ţinând seama de (2) avem

$$pd^2x=-r\left(\frac{dz-qdy}{p}\right)^2-2sdy\,\frac{dz-qdy}{p}-tdy^2,$$

$$d^2x=-\frac{rdz^2+2(ps-qr)\,dzdy+(q^2r-2pqs+p^2t)\,dy^2}{p^3}.$$

Pe de altă parte, cum

$$dx=\frac{\partial x}{\partial z}dz+\frac{\partial x}{\partial y}dy,$$

$$d^2x=\frac{\partial^2x}{\partial z^2}dz+2\frac{\partial^2x}{\partial z\,\partial y}dzdy+\frac{\partial^2x}{\partial y^2}dy^2,$$

prin identificări găsim

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{p},\quad \frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{p}{q},\quad \frac{\partial^2x}{\partial z^2}=-\frac{r}{p^3},\quad \frac{\partial^2x}{\partial z\,\partial y}=\frac{qr-ps}{p^3},\quad \frac{\partial^2x}{\partial y^2}=\frac{2pqs-p^2t-q^2r}{p^3}.$$

§ 56. Extreme

1. **Extremele funcţiilor implicite.** Dacă y este o funcţie implicită de x, definită prin ecuaţia $f(x, y)=0$, atunci eventualele extreme sunt date de sistemul

$$f(x, y)=0,\ f'_x(x, y)=0. \tag{I}$$

Dacă (a, b) este o soluţie a sistemului şi dacă $f'_y(a, b)\neq 0$ atunci avem un extrem, maxim sau minim, după cum expresia $(-f''_{x^2}f'_y)$ (pentru $x=a$, $y=b$), este negativă sau pozitivă. In cazul când această expresie este nulă, trebue să facem o discuţie specială, (care diferă dela caz la caz) pentru a hotărî dacă avem sau nu extrem.

2. **Extremele funcţiilor de două variabile.** Fiind dată o funcţie: $u=f(x, y)$, valorile care dau extremele funcţiei sunt definite de sistemul

$$f'_x=0,\quad f'_y=0. \tag{II}$$

Anume, dacă (a, b) este o pereche de valori ale lui x, y dată de acest sistem şi dacă pentru aceste valori

$$\begin{cases} (f''_{xy})^2-f''_{x^2}f''_{y^2}<0 & \text{avem } \begin{cases}\text{maxim când } f''_{x^2}<0,\\ \text{minim când } f''_{x^2}>0;\end{cases}\\ (f''_{xy})^2-f''_{x^2}f''_{y^2}>0 & \text{nu avem extrem;}\\ (f'_{xy})^2-f''_{x^2}f''_{y^2}=0 & \text{nu putem hotărî decât făcând discuţie specială.}\end{cases} \tag{III}$$

3. **Extremele funcţiilor de mai multe variabile.** Expunem numai cazul funcţiilor de trei variabile, dar rezultatele sunt generale. Considerăm funcţia: $\omega=f(x, y, z)$; extremele sunt date de soluţiile sistemului

$$f'_x=0,\quad f'_y=0,\quad f'_z=0.$$

Dacă (x_0, y_0, z_0) este o soluţie şi dacă expresia

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(2)} f(x_0, y_0, z_0), \tag{IV}$$

păstrează un semn constant oricare ar fi h, k, l, funcţia ω are un extrem în punctul (x_0, y_0, z_0). Anume, acest extrem va fi un maxim dacă semnul este negativ şi un minim dacă semnul este pozitiv.

4. **Extreme legate.** Fie ω o funcţie de n variabile

$$\omega = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fiind *legate* între ele prin p relaţii

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)&=0,\\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)&=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ g_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)&=0. \end{aligned} \tag{V}$$

Extremele funcţiei ω se obţin în felul următor. Se consideră funcţia auxiliară

$$F=f+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\cdots+\lambda_p g_p, \tag{VI}$$

de n variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cantităţile $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, fiind considerate constante; se scrie apoi condiţiile

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}=0, \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n}=0. \tag{VII}$$

Aceste n ecuaţii, împreună cu (IV), formează un sistem de $n+p$ ecuaţii cu $n+p$ necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ şi care rezolvat ne dă valori pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pentru care eventual funcţia ω are un extrem. Existenţa şi natura extremului se stabileşte dela caz la caz.

56. 1. *Să se găsească extremele funcţiei y definită prin ecuaţia*

$$f(x, y) = x^4+y^4-4xy=0.$$

Sistemul (I) se rezolvă uşor şi dă soluţiile

$$(x_0=0,\ y_0=0),\ \left(x_1=\sqrt[8]{3},\ y_1=\sqrt[8]{27}\right),\ \left(x_2=-\sqrt[8]{3},\ y_2=-\sqrt[8]{27}\right).$$

Pentru ultimele două avem

$$f''_{x_1^2} f'_{y_1} = 4\left(\sqrt[8]{3^9}-\sqrt[8]{3}\right)12\sqrt[4]{3} = 96\sqrt[8]{27} > 0 \text{ avem maxim},$$

$$f''_{x_2^2} f'_{y_2} = -96\sqrt[8]{27} < 0 \text{ avem minim}.$$

Pentru prima grupă de valori: $f'_{y_0}=f''_{x_0^2}=0$, deci, conform celor de mai sus, nu mai putem afirma nimic. Este necesară o discuţie specială. Considerăm expresia

$$E=f(0+h,\ 0+k)-f(0,0) = h^4+k^4-4hk,$$

h şi k pot tinde oricum către zero. Să-i obligăm să tindă către zero fiind legaţi prin relaţia: $k=mh$; atunci

$$E=h^2[(1+m^4)h^2-4m].$$

Or, dacă $m>0$, această expresie schimbă de semn când h trece prin rădăcinile parantezei mari. Aceasta înseamnă că E nu păstrează un semn constant, deci funcţia dată nu are extrem.

56. 2. *Să se găsească extremele funcţiei y definită prin ecuaţia:* $y^2+2x^2y+4x-3=0$.

Valorile care pot da extreme sunt definite prin sistemul

$$y^2+2x^2y+4x-3=0, \quad xy+1=0.$$

Scoţându-l pe y din a doua şi introducându-l în prima, găsim ecuaţia: $2x^3-3x^2+1=0$, care admite soluţia dublă $x=1$ şi $x=-\frac{1}{2}$. Avem pentru $x=1$, $y=-1$ şi pentru $x=-\frac{1}{2}$, $y=2$. Pentru prima soluţie: $f'_y=2(y+x^2)$ se anulează, deci nu putem afirma nimic. Din ecuaţia dată scoatem însă

$$y=-x^2\pm(x-1)\sqrt{x^2+2x+3},$$

deci

$$y'=-2x\pm\sqrt{x^2+2x+3}\pm(x-1)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}},$$

care nu se anulează pentru $x=1$, (ne dă valorile $-2\pm\sqrt{6}$), deci pentru $x=1$ funcţia y nu are extreme. Pentru a doua soluţie, f'_y şi f''_{x^2} nu se anulează, deci pentru $x=-\frac{1}{2}$, avem un extrem. Cum

$$-f''_{x^2}\cdot f'_y=(-8y)(y+x^2),$$

şi este egală, pentru $x=-\frac{1}{2}$, $y=2$, cu $-16\left(2+\frac{1}{4}\right)<0$, avem un maxim egal cu 2.

56. 3. *Să se găsească extremele funcţiei*

$$f(x,y)=\frac{a(x+y)-1}{x^2+y^2}.$$

Valorile lui x şi y pentru care avem extreme sunt date de ecuaţiile

$$a(x^2+y^2)-2x[a(x+y)-1]=0, \quad a(x^2+y^2)-2y[a(x+y)-1]=0. \qquad (1)$$

Prin scădere deducem

$$(x-y)[a(x+y)-1]=0,$$

care se descompune în două condiţii. Dacă este nulă paranteza mare, ecuaţiile (1) se reduc la: $x^2+y^2=0$, ceeace nu se poate, căci u este infinit. Dacă $y=x$, x este dat de ecuaţia

$$2ax^2-2x(2ax-1)=0, \quad x=y=\frac{1}{a},$$

lăsând deoparte soluţia: $x=y=0$, pentru acelaşi motiv ca mai sus. Calculăm derivatele secunde, având grijă să lăsăm deoparte termenii care conţin în factor numărătorii primelor derivate şi care evident sunt nuli pentru valorile ce ne interesează. Avem

$$f''_{x^2}=f''_{y^2}=\frac{-2(ax+ay-1)}{(x^2+y^2)^2}+\cdots,\quad f''_{xy}=\frac{2a(y-x)}{(x^2+y^2)^2}+\cdots,$$

deci pentru $x=y=\frac{1}{a}$,

$$(f''_{xy})^2-f''_{x^2}f''_{y^2}=-\frac{1}{4}a^8<0,$$

adică avem un extrem. Cum: $f''_{x^2}=-\frac{1}{2}a^4<0$, extremul este un maxim.

56. 4. *Să se găsească extremele funcţiei*

$$f(x,y)=ax^2+2xy+ay^2+1,$$

a fiind un parametru.

Avem

$$f'_x=2(ax+y),\quad f'_y=2(ay+x),\quad f''_{x^2}=2a,\quad f''_{xy}=2,\quad f''_{y^2}=2a.$$

Va trebui să avem: $ax+y=0$, $ay+x=0$, de unde scoatem $x=y=0$. Cum

$$(f''_{xy})^2-f''_{x^2}f''_{y^2}=-4(a^2-1)$$

rezultă următoarea discuţie:

$1°\ -1<a<1$ atunci: $a^2-1<0$ şi nu avem extrem; $2°\ a>1$, $a^2-1>0$ avem minim în origine; $3°\ a<-1$, $a^2-1>0$, avem maxim în origine; $4°\ a=1$, funcţia se poate scrie

$$f(x,y)=(x+y)^2+1,$$

şi are cea mai mică valoare pentru $x=y=0$, dar aceeaşi valoare o are pentru orice x şi y care satisface relaţia $x+y=0$; deci, originea nu este minim. $5°\ a=-1$, funcţia se poate scrie

$$f(x,y)=1-(x-y)^2,$$

şi ia în origine $(x=y=0)$ cea mai mare valoare pe 1; dar aceeaşi valoare ia atunci când $x=y$: nu avem extrem.

56. 5. *Se dă o tablă zincată de suprafaţa a. Se cere să se construiască o cisternă având forma unui paralelipiped dreptunghi, deschisă la suprafaţă. Să se găsească dimensiunile cisternei pentru a avea capacitatea maximă, presupunând că nu avem pierderi de material* (fig. 66).

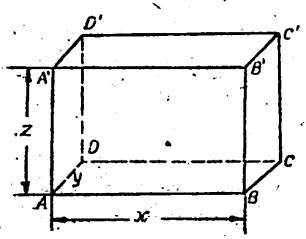


Fig. 66

Dacă însemnăm cu x, y, z dimensiunile cisternei, volumul ei va fi egal cu $V=xyz$ unde x, y, z sunt legaţi prin condiţia că suma feţelor laterale, exceptând cea superioară, trebue să facă a, adică va trebui să avem

$$xy+2yz+2zx=a. \qquad (1)$$

Va trebui să căutăm deci maximul funcţiei

$$V=\frac{xy(a-xy)}{2(x+y)}.$$

Avem

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{(a-2xy-x^2)y^2}{2(x+y)^2}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial y}=\frac{(a-2xy-y^2)x^2}{2(x+y)^2}=0.$$

Cum x şi y nu pot fi nuli, deoarece sunt nişte dimensiuni, va trebui ca x şi y să fie soluţii ale sistemului

$$x^2+2xy-a=0,\quad y^2+2xy-a=0.$$

Scăzând aceste două ecuaţii, rezultă $x^2=y^2$, adică $x=y$ (deoarece x şi y trebue să fie pozitivi). Prima ecuaţie dă

$$3x^2-a=0;\quad x_0=\sqrt{\frac{a}{3}}=y_0,$$

introducând în (1) rezultă: $z_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}$. Să examinăm dacă pentru aceste valori V este maxim (deşi deformând cisterna se vede uşor că volumul ei admite un maxim). Când calculăm derivatele de ordinul 2 avem grijă să izolăm termenii care se anulează pentru valorile (x_0, y_0). Avem

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{(-2y-2x)y^2}{2(x+y)^2}+(a-2xy-x^2)(\ldots);\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}<0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=\frac{-2xy^2}{2(x+y)^2}+(a-2xy-x^2)(\ldots);\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right)_0=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{3}},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{(-2x-2y)x^2}{2(x+y)^2}+(a-2xy-x^2)(\ldots);\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}},$$

de unde

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right)_0^2-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0=-\frac{a}{16}<0,$$

adică avem extrem şi anume maxim.

56. 6. *Se consideră un canal de scurgere sub formă de trapez isoscel având baza mică l, înălţimea h şi unghiul pe care îl fac laturile neparalele cu solul, egal cu α. Se cere, pentru o secţiune dată S (debitul apei este constant), să se determine α şi h astfel încât rezistenţa de frecare, care este proporţională cu perimetrul udat, să fie minimă* (fig. 67).

Prin ipoteză deci, vom avea

$$S=\frac{AB+CD}{2}h=(AB+EC)h=(l+h\operatorname{ctg}\alpha)h=\text{const},$$

şi va trebui să găsim minimul funcţiei

$$R=2BC+AB=\frac{2h}{\sin\alpha}+l.$$

Scoțând pe l din prima expresie,

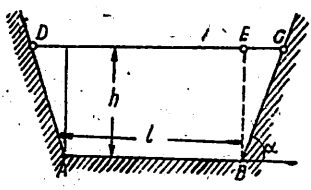


Fig. 67

$$R=\frac{2h}{\sin\alpha}+\frac{S}{h}-h\operatorname{ctg}\alpha=\frac{h(2-\cos\alpha)}{\sin\alpha}+\frac{S}{h}.$$

Avem

$$\frac{\partial R}{\partial h}=\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{S}{h^2}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial\alpha}=h\frac{1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=0;$$

rezultă din a doua: $\cos\alpha_0=\frac{1}{2}$; $\alpha_0=60°$, iar din prima: $h_0=\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}$.

Derivatele de ordinul al doilea sunt

$$\frac{\partial^2R}{\partial h^2}=\frac{2S}{h^3};\quad \left(\frac{\partial^2R}{\partial h^2}\right)_0=\frac{2\sqrt{3}}{h}>0.$$

$$\frac{\partial^2R}{\partial h\,\partial\alpha}=\frac{1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha};\quad \left(\frac{\partial^2R}{\partial h\,\partial\alpha}\right)_0=0,$$

$$\frac{\partial^2R}{\partial\alpha^2}=h\frac{2\sin\alpha}{\sin^2\alpha}+(1-2\cos\alpha)(\ldots);\quad \left(\frac{\partial^2R}{\partial\alpha^2}\right)_0=\frac{4h}{\sqrt{3}},$$

și deci

$$\left(\frac{\partial^2R}{\partial h\,\partial\alpha}\right)_0^2-\left(\frac{\partial^2R}{\partial h^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2R}{\partial\alpha^2}\right)_0=-8<0.$$

Pentru valorile $(h_0,\ \alpha_0)$ avem deci un minim.

56. 7. *Să se găsească extremele funcției*

$$u=\frac{xy}{(a+x)(x+y)(y+b)}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y(ay-x^2)}{(a+x)^2(x+y)^2(y+b)}=0,$$

și prin analogie

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x(bx-y^2)}{(a+x)(x+y)^2(y+b)^2}=0.$$

Va trebui deci ca

$$y(ay-x^2)=0,\quad x(bx-y^2)=0.$$

Dacă luăm din prima $y=0$, din a doua rezultă $x=0$, valori care fac infinită funcția dată. Ne rămâne deci

$$ay-x^2=0,\quad bx-y^2=0.$$

Scoțând din prima pe y și înlocuindu-l în a doua, cum nu ne interesează decât valorile reale, găsim: $x_0=\sqrt[3]{a^2b}$, $y_0=\sqrt[3]{ab^2}$. Să cercetăm dacă aceste valori ne dau extreme. Pentru aceasta trebue să calculăm derivatele secunde.

Scriem mai întâi

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u}{x(a+x)(x+y)}(ay-x^2),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y(y+b)(x+y)}(bx-y^2),$$

şi apoi derivăm.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (ay-x^2)(\ldots)+\frac{-2xu}{x(a+x)(x+y)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (bx-y^2)(\ldots)+\frac{-2yu}{y(y+b)(x+y)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = (ay-x)^2(\ldots)+\frac{au}{x(a+x)(x+y)},$$

unde înlocuind pe x şi y prin valorile găsite, observând că, pentru aceste valori avem: $ay-x^2=0$, $bx-y^2=0$, şi că (am notat prin: $\sqrt[3]{a}=A$, $\sqrt[3]{b}=B$):

$$u=\frac{A^2B\cdot AB^2}{(A^3+A^2B)(A^2B+AB^2)(AB^2+B^3)}=\frac{1}{(A+B)^3},$$

găsim

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0=\frac{-2}{A^3B(A+B)^5},\quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)_0=\frac{1}{A^2B^2(A+B)^5},\quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0=\frac{-2}{AB^3(A+B)^5}.$$

Deci

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)_0^2-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0=\frac{-3}{A^4B^4(A+B)^{10}}<0,$$

adică avem extreme. Semnul lui u''_{x^2} este dat de produsul $AB(A+B)=$ $=\sqrt[3]{ab}\,(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$. Anume

1° dacă: $\sqrt[3]{ab}\,(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})>0$ atunci u are un maxim,

2° dacă: $\sqrt[3]{ab}\,(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})<0$ atunci u are un minim.

56. 8. *Notând cu S_a, S_b, S_c, S_1, S_2 respectiv suprafeţele cercurilor exînscrise, suprafaţa cercului înscris şi suprafaţa cercului circumscris unui triunghi, să se găsească extremele expresiei*

$$E=\frac{S_a+S_b+S_c+S_1}{S_2}.$$

Vom ţine seamă de formulele cunoscute, care ne dau razele cercurilor exînscrise şi înscrise în funcţie de raza cercului circumscris R şi de unghiurile triunghiului. Anume, avem

$$r_a=4R\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C,\ldots,\ r=4R\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C;$$

deci

$$S_a=\pi r_a^2=16R^2\pi\sin^2\frac{1}{2}A\cos^2\frac{1}{2}B\cos^2\frac{1}{2}C,$$

$$\ldots,\ S_1=\pi r^2=16R^2\pi\sin^2\frac{1}{2}A\sin^2\frac{1}{2}B\sin^2\frac{1}{2}C,\ S_2=\pi R^2;$$

$$E=16\left(\sum\sin^2\frac{1}{2}A\cos^2\frac{1}{2}B\cos^2\frac{1}{2}C+\sin^2\frac{1}{2}A\sin^2\frac{1}{2}B\sin^2\frac{1}{2}C\right)=$$

$$=2\left[\sum(1-\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)+(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)\right]$$

şi făcând calculele se găseşte

$$E=8(1-\cos A\cos B\cos C);$$

cum

$$\cos C=\cos[180°-(A+B)]=-\cos(A+B),$$

avem mai departe

$$E=8[1+\cos A\cos B\cos(A+B)].$$

Valorile lui A şi B care fac maximă sau minimă expresia E, sunt date de ecuaţiile:

$$E'_A=8[-\sin A\cos B\cos(A+B)-\cos A\cos B\sin(A+B)]=$$
$$=-8\cos B\sin(2A+B)=0,$$

$$E'_B=8[-\cos A\sin B\cos(A+B)-\cos A\cos B\sin(A+B)]=$$
$$=-8\cos A\sin(A+2B)=0.$$

Putem face diferite ipoteze

$\cos A=0$, $\cos B=0$, $A=B=90°$ absurd căci $C=0$;

$\cos A=0$, $\sin(2A+B)=0$, $A=90°$, $B=0$, absurd;

$\cos B=0$, $\sin(A+2B)=0$, $A=0$, $B=90°$, absurd;

$\sin(2A+B)=0$, $\sin(A+2B)=0$, care ne dă: 1° $2A+B=180°$, $A+2B=180°$; 2° $2A+B=0$, $A+2B=180°$; 3° $2A+B=180°$, $A+2B=0$ şi dintre care numai condiţiile 1° sunt admisibile şi dau $A=B=C=60°$, adică *triunghiul echilateral.* Să vedem dacă pentru aceste valori celelalte condiţii sunt satisfăcute. Avem

$$E''_{A^2}=-16\cos B\cos(2A+B),\quad E''_{B^2}=-16\cos A\cos(A+2B),$$
$$E''_{AB}=[8\sin B\sin(2A+B)-[8\cos B\cos(2A+B)=-8\cos(2A+2B),$$

deci pentru valorile noastre

$$E''_{A^2}=E''_{B^2}=8,\quad E''_{AB}=4,$$

adică

$$(E''_{AB})^2-E''_{A^2}E''_{B^2}=-48<0,$$

avem extrem şi cum $E''_{A^2}>0$ este un *minim.* Deci, triunghiul echilateral face minimă expresia dată.

56. 9. *Se dau în spaţiu n puncte $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Se cere să se determine un punct $M(x, y, z)$ astfel încât suma pătratelor distanţelor lui la punctele date să fie minimă.*

Presupunând axele perpendiculare, va trebui să căutăm minimul funcţiei

$$f(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2].$$

Vom determina pe x, y, z ca să verifice sistemul

$$\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)=0, \quad \sum_{i=1}^{n}(y-y_i)=0, \quad \sum_{i=1}^{n}(z-z_i)=0,$$

$$nx-\sum_{i=1}^{n}x_i=0, \quad ny-\sum_{i=1}^{n}y_i=0, \quad nz-\sum_{i=1}^{n}z_i=0,$$

de unde scoatem

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}, \quad y=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}, \quad z=\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i}{n}.$$

Expresia (IV), scrisă desvoltat este

$$h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+l^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+2kl\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}+2lh\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x},$$

şi care în cazul nostru are ca valoare

$$h^2+k^2+l^2>0,$$

oricare ar fi h, k şi l. Pentru punctul determinat funcţia considerată are un minim.

56. 10. *Să luăm o reţea electrică de alimentare legată în paralel. Figura reprezintă schema acestei reţele, A şi B fiind bornele sursei de curent, iar $P_1, P_2, \ldots, P_n$, receptoarele de curent, care consumă respectiv curentul $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Considerând iniţial o cădere de potenţial pe circuit de 2e, se cere să determinăm secţiunea cablurilor astfel, încât pentru toată reţeaua să întrebuinţăm cea mai mică cantitate de cupru* (fig. 68).

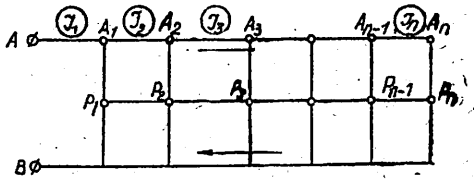


Fig. 68

Evident este suficient să ne limităm cercetarea pentru unul din fire, să zicem AA_n, deoarece celălalt fir se găseşte în condiţii complect analoage.

Insemnăm cu $l_1, l_2, \ldots, l_n$ lungimile porţiunilor AA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ (în metri); cu $q_1, q_2, \ldots, q_n$ suprafaţa secţiunilor lor transversale (în mm²). Atunci expresia

$$u=l_1q_1+l_2q_2+\cdots+l_nq_n,$$

ne dă volumul cuprului consumat (în cm³); aceasta este funcţia al cărei minim trebue să-l calculăm, ţinând seamă că orice cădere de potenţial pe firul AA_n să fie egală cu e.

Este uşor de calculat ce curent $J_1, J_2, \ldots, J_n$ va trece prin segmentele AA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$, ale circuitului; se găseşte

$$J_1=i_1+i_2+\cdots+i_n, \quad J_2=i_2+\cdots+i_n, \ldots, J_n=i_n.$$

Dacă însemnăm cu ρ rezistenţa firului de cupru lung de 1 m şi având secţiunea de 1 mm^2, atunci rezistenţa acestor segmente va fi

$$r_1=\frac{\rho l_1}{q_1},\ r_2=\frac{\rho l_2}{q_2},\ldots,r_n=\frac{\rho l_n}{q_n},$$

iar căderea de potenţial corespunzătoare, în aceste segmente, conform *legii lui Ohm*, se exprimă astfel

$$e_1=r_1J_1=\frac{\rho l_1J_1}{q_1},\ e_2=r_2J_2=\frac{\rho l_2J_2}{q_2},\ldots,e_n=r_nJ_n=\frac{\rho l_nJ_n}{q_n}.$$

Pentru a evita o expunere complicată, în locul variabilelor $q_1, q_2,\ldots,q_n$, introducem mărimile $e_1,e_2,\ldots,e_n$, legate prin relaţiile simple

$$e_1+e_2+\cdots+e_{n-1}+e_n=e \quad \text{de unde} \quad e_n=e-e_1-e_2-\cdots-e_{n-1}.$$

Atunci, în ordinea lor

$$q_1=\frac{\rho l_1J_1}{e_1},\quad q_2=\frac{\rho l_2J_2}{e_2},\ldots,\quad q_n=\frac{\rho l_nJ_n}{e_n}=\frac{\rho l_nJ_n}{e-e_1-e_2-\cdots-e_{n-1}},$$

şi

$$u=\rho\left[\frac{l_1^2J_1}{e_1}+\cdots+\frac{l_{n-1}^2J_{n-1}}{e_{n-1}}+\frac{l_n^2J_n}{e-e_1-\cdots-e_{n-1}}\right].$$

Domeniul de existenţă al variabilelor independente $e_1, e_2,\ldots,e_{n-1}$, este definit prin inegalităţile:

$$e_1>0,\quad e_2>0,\ldots,\quad e_{n-1}>0,\quad e_1+e_2+\cdots+e_{n-1}<e.$$

Egalând cu zero derivatele lui u pentru toate variabilele, obţinem sistemul de ecuaţii

$$-\frac{l_1^2J_1}{e_1^2}+\frac{l_n^2J_n}{(e-e_1-\cdots-e_{n-1})^2}=0,$$

$$-\frac{l_2^2J_2}{e_2^2}+\frac{l_n^2J_n}{(e-e_1-\cdots-e_{n-1})^2}=0,\ldots,-\frac{l_{n-1}^2J_{n-1}}{e_{n-1}^2}=\frac{l_n^2J_n}{(e-e_1-\cdots-e_{n-1})^2}=0.$$

De unde (din nou introducând pe e_n)

$$\frac{l_1^2J_n}{e_1^2}=\frac{l_2^2J_2}{e_2^2}=\cdots=\frac{l_n^2J_n}{e_n^2}.$$

Se obişnueşte, în general, să se noteze toate aceste rapoarte cu $\frac{1}{\lambda^2}$ $(\lambda>0)$. Atunci

$$e_1=\lambda l_1\sqrt{J_1},\quad e_2=\lambda l_2\sqrt{J_2},\ldots,\quad e_n=\lambda l_n\sqrt{J_n},$$

iar λ se determină din relaţia: $e_1+e_2+\cdots+e_n=e$; avem

$$\lambda=\frac{e}{l_1\sqrt{J_1}+l_2\sqrt{J_2}+\cdots+l_n\sqrt{J_n}}.$$

Deoarece prin apropierea punctelor $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ spre marginea intervalului, u creşte la infinit, valorile căutate ale lui $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n$ vor procura funcţiei u valoarea minimă. In sfârşit, revenind la variabilele de baza $q_1, q_2, \ldots, q_n$, găsim

$$q_1 = \frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_1}, \quad q_2 = \frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_2}, \ldots, q_n = \frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_n},$$

astfel încât cea mai favorabilă secţiune a conductorului este cea proporţională cu rădăcina pătrată din puterea corespunzătoare curentului.

56. 11. *Să se găsească extremele funcţiei:* $u = \operatorname{tg}^2(x-y)$, *ştiind că avem relaţia:* $\operatorname{tg} x = m \operatorname{tg} y$.

Funcţia F dela pct. 4 este

$$F = \operatorname{tg}^2(x-y) + \lambda(\operatorname{tg} x - m \operatorname{tg} y),$$

şi formulele (VII) devin

$$\frac{2\operatorname{tg}(x-y)}{\cos^2(x-y)} + \frac{\lambda}{\cos^2 x} = 0, \quad -\frac{2\operatorname{tg}(x-y)}{\cos^2(x-y)} - \frac{m\lambda}{\cos^2 y} = 0,$$

între care, eliminând pe λ, se găseşte că trebue să avem

$$\frac{m}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 x}, \tag{1}$$

condiţie exprimată cu ajutorul tangentelor

$$m(1+\operatorname{tg}^2 y) = 1+\operatorname{tg}^2 x; \quad m(1+\operatorname{tg}^2 y) = 1+m^2\operatorname{tg}^2 y,$$

de unde

$$\operatorname{tg} y = \pm\frac{1}{\sqrt{m}} \text{ şi deci } \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{m}. \tag{1'}$$

Să arătăm că pentru aceste valori, funcţia u are un maxim. In adevăr, considerând pe y ca funcţie de x, avem

$$u'_x = \frac{2\operatorname{tg}(x-y)}{\cos^2(x-y)}(1-y'),$$

ultima paranteză este nulă, deoarece derivând relaţia de condiţie căpătăm

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{m}{\cos^2 y}y'; \quad y' = \frac{\cos^2 y}{m\cos^2 x} = 1, \tag{2}$$

pe baza lui (1). Valorile găsite dau deci un extrem. Să-i găsim natura; avem

$$u''_{x^2} = \frac{2\operatorname{tg}(x-y)}{\cos^2(x-y)}(-y'') + (1-y')(\ldots); \tag{3}$$

dar pentru y'' obţinem, prin derivarea lui (2),

$$y'' = \frac{2\cos y \sin(x-y)}{m\cos^3 x},$$

valoare care, introdusă în (3), ne dă

$$u''_{x^2} = -\frac{4\cos y \sin^2(x-y)}{m\cos^3 x\cos^3(x-y)},$$

al cărui semn ne dă expresia

$$-\frac{\cos(x-y)}{\cos x\cos y} = 1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y = 2>0,$$

deoarece semnele din 1') se corespund. Rezultă că avem maxim.

56. 12. *Să se înscrie într'un elipsoid un paralelipiped dreptunghic de volum maxim.*

Deoarece paralelipipedul trebue să aibă muchiile perpendiculare două câte două, feţele lui trebue să fie paralele cu planele de simetrie ale elipsoidului, pe care le luăm drept plane ale triedrului de referinţă. Aceasta însemnează că dacă unul din vârfuri $M(x,y,z)$ este pe elipsoid, adică dacă el verifică ecuaţia suprafeţei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \tag{1}$$

atunci toate celelalte şapte, în baza simetriei, vor fi pe suprafaţă. Cum muchiile paralelipipedului vor fi $2x, 2y, 2z$, volumul şi deci expresia al cărei maxim îl căutăm, este

$$V=8xyz.$$

Are acest volum un maxim? Geometric ne putem da seama că da. In adevăr, x fiind abscisa unui punct de pe elipsoid, variază dela 0 la a. Dar când $x=0$, volumul este zero, apoi creşte odată cu x şi când $x=a$, se vede de pe ecuaţia (1) că trebue să avem $y=z=0$, adică volumul este din nou nul. Aceasta însemnează că atunci când x creşte V creşte până la un maxim, când trebue din nou să descrească pentru ca să devină din nou nul. Să găsim coordonatele lui M corespunzător maximului. Vom avea de găsit maximul lui V când x,y,z sunt legaţi prin relaţia (1). Aplicând metoda de mai sus, x,y,z vor fi daţi de sistemul format de ecuaţia (1) complectată cu

$$8yz+\lambda\frac{2x}{a^2}=0,\quad 8zx+\lambda\frac{2y}{b^2}=0,\quad 8xy+\lambda\frac{2z}{c^2}=0, \tag{2}$$

unde λ este un parametru. Inmulţind aceste ecuaţii respectiv cu x,y,z şi adunându-le în baza lui (1) avem

$$12xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=0;\quad \lambda=-12xyz,$$

valoare care, introdusă în (2), ne dă, având în vedere că x,y,z sunt consideraţi ca jumătăţile dimensiunilor paralelipipedului,

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},\quad y=\frac{b}{\sqrt{3}},\quad z=\frac{c}{\sqrt{3}};$$

maximul volumului va fi $V_{max}=\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

56. 13. *Cu ajutorul a patru segmente, supuse la condiția ca fiecare să fie mai mic decât suma celorlalte trei, se poate construi un patrulater. Se cere să se găsească extremele suprafeței acestui patrulater.*

Notăm cu θ și φ unghiurile opuse B și D, iar cu a, b, c, d segmentele date (fig. 69). Suprafața patrulaterului este egală cu suma suprafețelor triunghiurilor ABC și ACD, adică:

$$S=\frac{1}{2}(a\,b\sin\theta+c\,d\sin\varphi). \qquad (1)$$

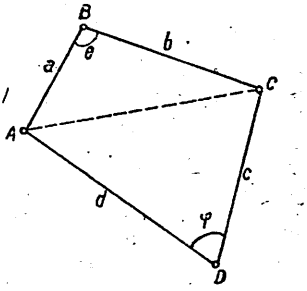


Fig. 69

Unghiurile θ și φ variabile sunt legate print'o relație ce se obține egalând între ele valoarea diagonalei AC scoasă respectiv din cele două triunghiuri, adică

$$a^2+b^2-2\,ab\,\cos\theta=c^2+d^2-2\,c\,d\,\cos\varphi;$$

$$2\,(cd\cos\varphi-a\,b\cos\theta)=c^2+d^2-(a^2+b^2). \qquad (2)$$

Valorile unghiurilor θ și φ care dau extremele funcției (1) sunt date de ecuațiile

$$\frac{c\,d\cos\varphi}{2}+\lambda\,(-2\,c\,d\sin\varphi)=0,$$

$$\frac{a\,b\cos\theta}{2}+\lambda\,(2\,a\,b\sin\theta)=0.$$

Scoțând valoarea lui λ din prima și introducând-o în a doua se găsește că trebue să avem

$$\cos\varphi\sin\theta+\cos\theta\sin\varphi=0,\quad \sin(\theta+\varphi)=0,$$

adică:

$$\theta+\varphi=0,\quad \theta+\varphi=180^\circ,\quad \theta+\varphi=360^\circ.$$

Prima nu poate fi satisfăcută, căci ne dă unghiuri negative; a treia nu poate exista, deoarece suma tuturor unghiurilor unui patrulater face 360°, deci ar însemna că unghiurile A și C sunt nule; ne rămâne deci numai ipoteza $\theta+\varphi=180^0$, adică atunci când *patrulaterul este inscriptibil.* Să arătăm că în acest caz, suprafața patrulaterului este maximă. Pentru aceasta, considerăm pe φ ca funcțiune de θ definită prin relația (2). Va trebui să arătăm că $S'_\theta=0$ și $S''_{\theta^2}<0$. Intr'adevăr

$$S'_\theta=\frac{1}{2}(a\,b\cos\theta+c\,d\cos\varphi\cdot\varphi'_\theta),$$

$$S''_{\theta^2}=\frac{1}{2}\left[-a\,b\sin\theta-c\,d\sin\varphi\,(\varphi'_\theta)^2+c\,d\cos\varphi\cdot\varphi''_{\theta^2}\right]; \qquad (3)$$

dar din (2) scoatem

$$a\,b\sin\theta-c\,d\sin\varphi\cdot\varphi'_\theta=0;\quad \varphi'_\theta=\frac{a\,b\sin\theta}{c\,d\sin\varphi},$$

care, în cazul $\varphi+\theta=180°$, ne dă: $\varphi'_\theta=\frac{ab}{cd}$. Mai derivând odată pe

$$a\,b\cos\theta-c\,d\cos\varphi\,(\varphi'_\theta)^2-c\,d\sin\varphi\cdot\varphi''_{\theta^2}=0, \tag{4}$$

în care făcând pe: $\varphi=180°-\theta$ şi ţinând seamă de valoarea găsită pentru φ'_θ, obţinem

$$\varphi''_{\theta^2}=\frac{ab\,(ab+cd)\cos\theta}{c^2d^2\sin\theta}.$$

Aceste valori, împreună cu $\varphi=180°-\theta$, introduse în (3) ne dau respectiv

$$S'_\theta=\frac{1}{2}(a\,b\,\cos\theta-a\,b\cos\theta)=0,$$

$$S''_{\theta^2}=-\frac{1}{2}\left[ab\sin\theta+cd\sin\theta\left(\frac{ab}{cd}\right)^2+c\,d\cos\theta\,\frac{ab\,(ab+cd)\cos\theta}{\sin\theta}\right]<0$$

deoarece toţi termenii din paranteză sunt pozitivi, ultimul având factorul $\cos^2\theta$, care chiar când $\theta>90°$, este pozitiv. Patrulaterul inscriptibil are deci suprafaţa maximă.

§ 57. Schimbarea variabilelor

1. **Funcţii de o singură variabilă.** Dacă $y=f(x)$ şi facem schimbarea $x=g(t)$, derivatele, sunt date de regulile

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{x'}=\frac{x'y''-y'x''}{x'^3}, \tag{I}$$

accentele însemnând derivatele, în raport cu noua variabilă t. Derivata a treia se deduce din derivata a doua, după cum am dedus pe a doua din prima.

2. **Funcţii de două variabile.** Dacă într'o funcţie $z=f(x,y)$ facem schimbările: $x=g(u,v)$, $y=h(u,v,)$ pentru a găsi derivatele lui z în raport cu u, y în funcţie de derivatele lui z în raport cu u şi v procedăm astfel: calculăm derivatele lui z în raport cu u şi v ca funcţie compusă

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\\ \frac{\partial z}{\partial v}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},\end{aligned} \tag{II}$$

şi rezolvăm aceste relaţii în raport cu $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=A\frac{\partial z}{\partial u}+B\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=C\frac{\partial z}{\partial u}+D\frac{\partial z}{\partial v}. \tag{III}$$

Pentru derivatele de ordin superior se procedează după aceleaşi reguli, adică

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=A\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+B\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ \text{etc.}$$

57. 1. *Ce devine relația*

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0,$$

când facem $x=\cos t$?

Cum $x'=-\sin t$, $x''=-\cos t$, avem

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y'}{\sin t},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''\sin t-y'\cos t}{\sin^3 t},$$

încât relația dată devine: $y''=0$.

57. 2. *Ce devine relația*

$$\frac{d^2y}{dx^2}=1+\frac{2(1+y)}{1+y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

când înlocuim pe y *prin* z *dat de formula* $y=\operatorname{tg} z$?

Avem

$$y'=z'\cos^{-2}z,\quad y''=z''\cos^{-2}z+2z'^2\sin z\cos^{-3}z,$$

încât relația dată se transformă în

$$z''-2z'^2=\cos^2 z.$$

57. 3. *Se știe că curbura unei curbe plane este dată de expresia* (§ 59, pct. 2)

$$C=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Se cere să se găsească ce devine această expresie când facem o schimbare de variabilă definită de formula: $x=g(t)$.

Folosind formulele (l) avem

$$C=\frac{\frac{x'y''-y'x''}{x'^3}}{\left[1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

57. 4. *Ce devine* $\frac{dy}{dx}$ *și* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *când se ia ca nouă variabilă* θ *definit în funcție de* x *prin formula*

$$e^x=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\theta\right).$$

Avem: $x=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\theta\right)$, de unde scoatem prob. 41.8

$$x'=\sec\theta,\quad x''=\sin\theta\sec^2\theta,$$

$$\frac{dy}{dx}=\cos\theta\cdot y',\ \frac{d^2y}{dx^2}=\cos^2\theta\cdot y''-\sin\theta\cos\theta\cdot y'.$$

57. 5. *Fie* $x=7+t^2, y=3+t^2-3t^4$; *să se arate că* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *este constant.*

Avem, în baza formulelor (I),

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-6.$$

57. 6. *Ce devine relaţia*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+4e^{-2y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0,$$

când luăm pe y ca variabilă independentă şi pe x ca funcţie necunoscută?

Rolul lui t din formulele generale îl joacă y; deci $y'=1$ şi $y''=0$, încât

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x'},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{x''}{x'^3},$$

accentele însemnând derivatele lui x în raport cu y. Relaţia dată devine

$$x''-4xx'=4e^{-2y}.$$

57. 7. *Să se facă în ecuaţia diferenţială*

$$(a+x)^3\frac{d^3y}{dx^3}+3(a+x)^2\frac{d^2y}{dx^2}+(a+x)\frac{dy}{dx}+by=0,$$

schimbarea de variabilă: $t=\ln(x+a)$.

Să calculăm pe $\frac{d^3y}{dx^3}$. Urmând regula generală, avem

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{1}{x'}\frac{d}{dt}\left(\frac{x'y''-y'x''}{x'^3}\right)$$
$$=\frac{x'^2y'''-3x'x''y''+3x''^2y'-x'x'''y'}{x'^5}.$$

Din enunţ scoatem: $x=e^t-a$, $x'=x''=x'''=e^t$, încât

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}y',\quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}(y''-y'),\quad \frac{d^3y}{dx^3}=e^{-3t}(y'''-3y''+2y'),$$

iar ecuaţia diferenţială devine: $y'''+by=0$.

57. 8. *Ce devine expresia curburii plane când facem schimbarea:* $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, *unde r este noua funcţie, iar* θ *noua variabilă.*

Am spus mai sus (prob. 57. 3) că curbura este dată de formula

$$C=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Avem

$$x'=r'\cos\theta-r\sin\theta,\qquad y'=r'\sin\theta+r\cos\theta$$

$$x''=r''\cos\theta-2r'\sin\theta-r\cos\theta,\quad y''=r''\sin\theta+2r'\cos\theta-r\sin\theta,$$

deci

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{r'\sin\theta+r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\sin\theta},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''x'-y'x''}{x'^3}=\frac{-rr''+2r'^2+r^2}{(r'\cos\theta-r\sin\theta)^3}$$

încât avem

$$C=\frac{-rr''+2r'^2+r^2}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

accentele însemnând derivatele lui r în raport cu θ.

57. 9. *Să se transforme expresia*

$$E=\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

presupunând că $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, θ *fiind noua variabilă.*

Folosind formulele de la problema precedentă, se găseşte:

$$E=\frac{r^2}{\sqrt{r^2+r'^2}}$$

57. 10. *Se consideră o funcţie* x *de variabila* t. *In locul ei se introduce o nouă funcţie* y *cu ajutorul transformării liniare*

$$y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \tag{1}$$

unde α, β, γ, δ *sunt constante, astfel încât* $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. *Să se demonstreze egalitatea*

$$\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2=\frac{x'''}{x'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2. \tag{2}$$

Transformarea liniară se poate scrie sub forma

$$y=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2x+\gamma\delta}, \tag{1'}$$

şi se poate descompune în următoarele transformări succesive

$$x_1=x+\frac{\delta}{\gamma},\quad x_2=\gamma^2x_1,\quad x_3=\frac{1}{x_2},\quad x_4=(\beta\gamma-\alpha\delta)x_3,\quad y=x_4+\frac{\alpha}{\gamma}; \tag{3}$$

în adevăr avem din aproape în aproape,

$$y=x_4+\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}+(\beta\gamma-\alpha\delta)x_3=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{x_2}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2x_1}=\frac{\alpha}{\gamma}+$$

$$+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2x+\gamma\delta}=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}.$$

Aceasta înseamnă că se trece dela funcţia x la funcţia y compunând între ele transformări de forma

$$y=x+\lambda,\quad y=\mu x,\quad y=\frac{1}{x}, \tag{4}$$

unde λ şi μ sunt constante. Problema revine deci la a arăta că egalitatea (2) este valabilă pentru transformări de forma (4). Pentru prima transformare, faptul este evident, deoarece prin derivare constanta aditivă λ dispare. Pentru a doua, deasemenea, deoarece constanta multiplicativă μ rămâne multiplicativă şi la derivate şi cum în (2) nu avem decât rapoarte de asemenea derivate, va dispărea.

Pentru a treia transformare, scriem: $xy=1$, relaţie care derivată parte cu parte dă

$$x'y+xy'=0,\quad x''y+2x'y'+xy''=0,\quad x'''y+3x''y'+3x'y''+xy'''=0.$$

Din prima relaţie scoatem

$$\frac{y}{y'}=-\frac{x}{x'},$$

în baza căreia, ultimele două dau

$$\frac{y''}{y'}=\frac{x''}{x'}-2\frac{x'}{x},$$

$$\frac{y'''}{y'}=\frac{x'''}{x'}-6\frac{x''}{x}+6\left(\frac{x'}{x}\right)^2,$$

deci

$$\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2=\frac{x'''}{x'}-6\frac{x''}{x}+6\left(\frac{x'}{x}\right)^2-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}-2\frac{x'}{x}\right)^2=\frac{x'''}{x'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2,$$

adică ceeace trebuia arătat.

Conform celor arătate, vom avea succesiv

$$\frac{x'''}{x'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2=\frac{x_1'''}{x_1'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x_1''}{x_1'}\right)^2=\cdots=\frac{x_4'''}{x_4'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x_4''}{x_4'}\right)^2=\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2,$$

adică (2).

Observări. 1° Condiţia pusă în enunţ era necesară, deoarece în cazul $\alpha\delta-\beta\gamma=0$, y se reduce la o constantă, după cum se vede din (1').

2° O expresie ca cea întâlnită în problemă, şi anume

$$\frac{x'''}{x'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2,$$

care printr'o transformare nu se schimbă, se numeşte *invariant* al acelei transformări.

57. 11. *Să se găsească ce devine expresia*

$$\Delta_2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

când luăm ca noi variabile pe u şi v definite prin ecuaţiile: $x=u\cos v$, $y=u\sin v$.

Urmând metoda generală, avem

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\cos v\frac{\partial z}{\partial x}+\sin v\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial v}=-u\sin v\frac{\partial z}{\partial x}+u\cos v\frac{\partial z}{\partial y};$$

rezolvând acest sistem în raport cu $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial v}$ scoatem

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos v\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\sin v}{u}\frac{\partial z}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\sin v\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\cos v}{u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

adică

$$A=\cos v,\ B=-\frac{\sin v}{u},\ C=\sin v,\ D=\frac{\cos v}{u};$$

deci

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos v\frac{\partial}{\partial u}\left(\cos v\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\sin v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)-\frac{\sin v}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\cos v\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\sin v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=$$

$$=\cos v\left(\cos v\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\sin v}{u^2}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\sin v}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\right)-\frac{\sin v}{u}\left(-\sin v\frac{\partial z}{\partial u}+\right.$$

$$\left.+\cos v\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}-\frac{\cos v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\sin v}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=\cos^2 v\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\sin^2 v}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{\sin 2v}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+$$

$$+\frac{\sin^2 v}{u}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\sin 2v}{u^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sin v\frac{\partial}{\partial u}\left(\sin v\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\cos v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{\cos v}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\sin v\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\cos v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=$$

$$=\sin v\left(\sin v\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\cos v}{u^2}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\cos v}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\right)+\frac{\cos v}{u}\left(\cos v\frac{\partial z}{\partial u}+\right.$$

$$\left.+\sin v\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}-\frac{\sin v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\cos v}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=\sin^2 v\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\cos^2 v}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+$$

$$+\frac{\sin 2v}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{\cos^2 v}{u}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\sin 2v}{u^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

încât

$$\Delta_2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

57. 12. *Ce devine expresia*

$$E=x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x},$$

când luăm noile variabile u și v definite prin formulele: $x=u\cos v$, $y=u\sin v$.

Pe baza calculului făcut la problema precedentă, rezultă

$$E=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

57. 13. *Ce devine expresia*

$$E=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

prin schimbarea de variabile: $x=u, y=uv$.

Cum: $u=x, v=\frac{y}{x}$ avem

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{v}{u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial v};$$

încât

$$A=1, B=-\frac{v}{u}, C=0, D=\frac{1}{u}.$$

Făcând toate calculele rezultă

$$E=u^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.$$

57. 14. *Să presupunem că* z *satisface relaţia*

$$z\left(x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x}x+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+x^2+y^2=0;$$

se cere: 1° *ce devine această relaţie prin transformarea:* $x=u\cos v, y=u\sin v$; 2° *în noua relaţie să se facă schimbarea de funcţie:* $z^2=U$.

1° Derivatele parţiale de ordinul I şi II au fost calculate la prob. 57.11, afară de $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$; să facem şi acest calcul. Avem succesiv,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\cos v\frac{\partial}{\partial u}\left(\sin v\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\cos v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)-\frac{\sin v}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\sin v\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\cos v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=$$

$$=\sin v\cos v\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+$$

$$\frac{\cos^2 v-\sin^2 v}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}-\frac{\sin v\cos v}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{\sin v\cos v}{u}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\cos^2 v-\sin^2 v}{u^2}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+1=0.$$

2° Dacă punem $z^2=U$, atunci

$$2z\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial U}{\partial u};\quad 2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right]=\frac{\partial^2 U}{\partial u^2},$$

încât relaţia dată se poate scrie

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+2=0.$$

57. 15. *Să se transforme expresia (parametru diferențial de ord. 1).*

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

în coordonate sferice, adică prin formulele

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

In mod analog cu formulele (II) avem

$$(1)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi + \dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi + \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\theta, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = \dfrac{\partial u}{\partial x}r\cos\theta\cos\varphi + \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta\sin\varphi - \dfrac{\partial u}{\partial z}r\sin\theta, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta\sin\varphi + \dfrac{\partial u}{\partial y}r\sin\theta\cos\varphi. \end{cases}$$

ecuații care rezolvate în raport cu $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ conduc la expresiile:

$$(2)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} - \dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} + \dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \cos\theta\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}; \end{cases}$$

In baza acestor formule avem

$$\Delta_1 u = (\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 +$$
$$+ \frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2$$
$$+ \frac{2}{r}(\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + \sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi - \sin\theta\cos\theta)\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial \theta} +$$
$$+ \frac{2}{r\sin\theta}(-\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi + \sin\theta\sin\varphi\cos\varphi)\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$
$$+ \frac{2}{r^2\sin\theta}(-\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi + \cos\theta\sin\varphi\cos\varphi)\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2.$$

57. 16. *Aceeași problemă pentru expresia (parametru diferențial de ord. 2)*

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Aplicând metoda dată la (pct. 2) și folosind rezultatele obținute la problema precedentă, avem succesiv,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \sin\theta\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\cos\varphi\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) +$$
$$+ \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cos\varphi\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) -$$
$$- \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\theta\cos\varphi\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) =$$
$$= \sin^2\theta\cos^2\varphi\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\sin 2\theta\cos^2\varphi}{r}\,\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} -$$
$$- \frac{\cos\theta\sin 2\varphi}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\varphi} - \frac{\sin 2\varphi}{r}\,\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi} + \left(\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{r} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial r} +$$
$$+ \left(\frac{\cos\theta\sin^2\varphi}{r^2\sin\theta} - \frac{\sin 2\theta\cos^2\varphi}{r^2}\right)\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\sin 2\varphi}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \sin\theta\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$
$$= \sin^2\theta\sin^2\varphi\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\sin 2\theta\sin^2\varphi}{r}\,\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} +$$
$$+ \frac{\cos\theta\sin 2\varphi}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\varphi} + \frac{\sin 2\varphi}{r}\,\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi} + \frac{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} +$$
$$+ \left(\frac{\cos\theta\cos^2\varphi}{r^2\sin\theta} - \frac{\sin 2\theta\sin^2\varphi}{r^2}\right)\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{\sin 2\varphi}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$
$$= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} - \frac{\sin 2\theta}{r}\,\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sin 2\theta}{r^2}\,\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

Rezultă

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\,\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

CAPITOLUL VIII

APLICAȚIILE GEOMETRICE ALE CALCULULUI DIFERENȚIAL

§ 58. Reprezentarea analitică a curbelor plane. Tangente și normale. Concavitate

1. O curbă plană poate fi reprezentată analitic într'unul din următoarele trei feluri:

a) Cartezian atunci când curba este dată printr'o ecuație de forma: $f(x, y)=0$ care leagă între ele coordonatele carteziene ale punctului curent. În particular, avem reprezentarea explicită $y=g(x)$, sub care formă a fost făcut studiul reprezentării grafice la § 49.

b) Parametric atunci când coordonatele punctului curent sunt date în funcție de un parametru, adică reprezentarea curbei este de forma

$$x=f(t), \quad y=g(t).$$

c) Polar atunci când curba este dată printr'o legătură între raza vectoare ρ și unghiul polar θ ale punctului curent, de tipul: $f(\rho, \theta)=0$ sau în particular, $\rho=g(\theta)$. Reamintim în treacăt că raza vectoare este segmentul orientat $\overline{OM}$ [1]) iar θ este unghiul pe care-l face direcția pozitivă a acestui segment cu direcția pozitivă a axei Ox (fig. 70).

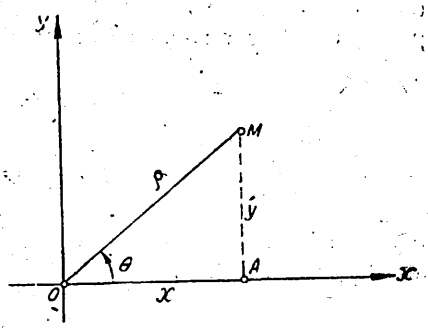


Fig. 70

Numerele ρ și θ se mai numesc și coordonatele polare ale punctului M și sunt legate de coordonatele carteziene prin relațiile

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta. \tag{I}$$

Dacă în aceste formule se înlocuiește ρ prin valoarea sa dată de ecuația curbei obținem o reprezentare parametrică particulară a curbei în care parametrul este θ.

2. **Ecuația tangentei**, precum și *ecuația normalei* într'un punct al unei curbe depinde de modul cum această curbă este definită.

a) Dacă curba este dată prin ecuația sa explicită: $y=f(x)$, pentru a determina un punct M_0 al ei, este necesar să ne dăm abscisa lui, fie $x=x_0$; rezultă din ecuație, ordonata punctului $y_0=f(x_0)$; tangenta și normala în M_0 la curbă au ecuațiile

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0), \qquad \text{(tangenta), (II)}$$

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0), \qquad \text{(normala), (III)}$$

unde prin $f'(x_0)$ înțelegem rezultatul înlocuirii în derivata $f'(x)$ a lui x prin x_0.

b) Dacă curba este dată prin ecuația ei implicită: $f(x, y)=0$, un punct $M_0(x_0, y_0)$ este pe curbă, atunci când $f(x_0, y_0)=0$; avem pentru ecuațiile tangentei și normalei în M,

$$y-y_0=-\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}(x-x_0) \qquad \text{(tangenta), (IV)}$$

$$y-y_0=\frac{f'_{y_0}}{f'_{x_0}}(x-x_0) \qquad \text{(normala), (V)}$$

unde prin f'_{x_0} și f'_{y_0} înțelegem rezultatul înlocuirii în derivatele parțiale f'_x, f'_y pe $x=x_0$, $y=y_0$.

[1]) Spre deosebire de reprezentarea făcută la § 18 unde *modulul* unui număr complex era considerat întotdeauna ca pozitiv.

c) Dacă curba este dată prin ecuațiile ei parametrice: $x=f(t)$, $y=g(t)$, un punct oarecare M_0 se determină prin valoarea parametrului $t=t_0$. În acest punct, ecuațiile tangentei și normalei sunt

$$y-y_0=\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}(x-x_0) \qquad \text{(tangenta), (VI)}$$

$$y-y_0=-\frac{f'(t_0)}{g'(t_0)}(x-x_0) \qquad \text{(normala), (VII)}$$

unde am pus: $x_0=f(t_0)$, $y_0=g(t_0)$ coordonatele lui M_0. Celelalte notații sunt analoage ca mai sus.

d) Dacă ni se dă o curbă prin ecuația în coordonate polare, fie: $\rho=f(\theta)$, pentru a determina un punct al ei M_0 ne dăm unghiul polar $\theta=\theta_0$; rezultă $\rho_0=f(\theta_0)$. Tangenta în acest punct la curbă este determinată, dacă pe lângă M_0 am cunoaște și unghiul V pe care-l face cu direcția pozitivă a razei polare OR; acest unghi este definit prin formula

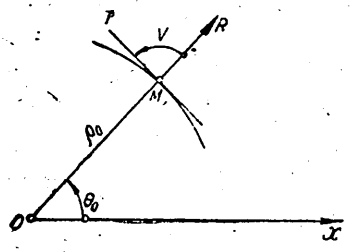


Fig. 71

$$\operatorname{tg} V=\frac{\rho_0}{\rho_0'}, \qquad \text{(VIII)}$$

ρ_0 și ρ_0' fiind valorile lui ρ și ρ' în punctul M_0 (unghiul V este ales în așa fel, încât dacă OR joacă rolul lui Ox, $\operatorname{tg} V$ este coeficientul unghiular al tangentei) (fig. 71).

3. Fiind dată o curbă (C) în coordonate carteziene (fig. 72), se numește *subtangentă* în M_0 segmentul $\overline{M_0'T_0}$, iar *subnormală* în același punct, segmentul $\overline{M_0'N_0}$. Dacă curba este dată explicit prin ecuația $y=f(x)$, avem

$$\overline{M_0'T_0}=-\frac{y_0}{y_0'}, \quad \overline{M_0'N_0}=y_0y_0'. \qquad \text{(IX)}$$

Fiind dată o curbă (C) în coordonate polare (fig. 73), se numește *subtangentă polară* segmentul $\overline{OT_0}$ și *subnormală polară* segmentul $\overline{ON_0}$, amândouă fiind calculate în punctul M_0. Dacă: $\rho=f(\theta)$ este ecuația polară atunci

$$\overline{OT_0}=\frac{\rho_0^2}{\rho_0'}, \quad \overline{ON_0}=\rho_0', \qquad \text{(X)}$$

ρ_0 și ρ_0' fiind valorile lui ρ și ρ' în M_0.

4. Când curba este raportată la două axe perpendiculare (reprezentarea carteziană sau parametrică), semnul lui y'' dă sensul concavității curbei. Anume: dacă într'un interval $[a, b]$, $y''>0$, curba are concavitatea îndreptată spre y^{cii} pozitivi, iar dacă $y''<0$, curba are concavitatea îndreptată spre y^{cii} negativi. Dacă $y''=0$ pentru o valoare $x=c$, y'' schimbând de semn în vecinătatea acestui punct, curba prezintă un punct de inflexiune (§ 48, pct. 5). Această definiție este dată în ipoteza că funcția y este derivabilă, cum și derivata ei y' este derivabilă pentru $x=c$. Această definiție se poate extinde și la funcțiile

care, pentru $x=c$, y sau y' nu mai este derivabilă (în sensul celor spuse la § 48, pct. 6) spunând că funcţia (sau curba) are o inflexiune în punctul $x=c$, dacă în vecinătatea acestui punct y'' schimbă de semn.

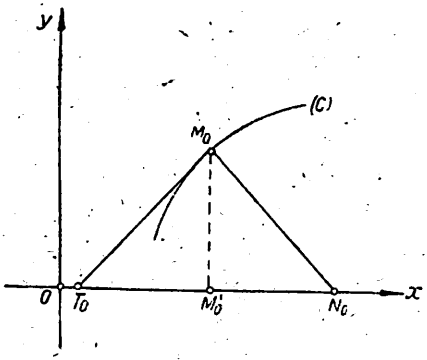


Fig. 72

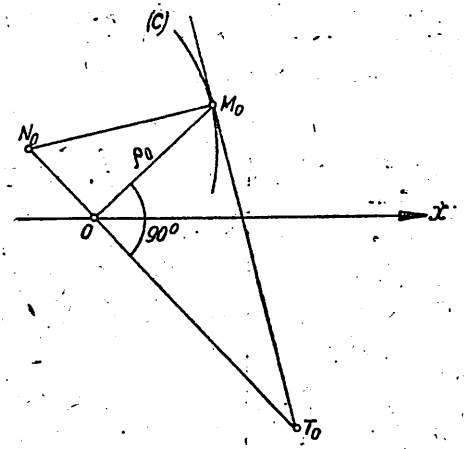


Fig. 73

58. 1. *Să se reprezinte curbele*

$$a^2y=x^3 \qquad \text{(parabola cubică)},$$

$$ay^2=x^3 \qquad \text{(parabola semi-cubică)},$$

unde a este o lungime dată pozitivă.

1° Scriem

$$y=\frac{x^3}{a^2},$$

şi studiem funcţia după normele date în § 49. Variaţia este trecută în tabela alăturată. Funcţia este mereu crescătoare şi are forma din fig. 74. Deoarece derivata a doua este

$$y''=\frac{6x}{a^2}$$

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
y'		+	0	+		+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	a	↗	$+\infty$

şi se anulează pentru $x=0$, curba are în origine un punct de inflexiune, tangenta fiind axa Ox. Deoarece pentru $x>0$, $y''>0$, la dreapta axei Oy, curba are concavitatea îndreptată spre y^{cii} pozitivi, iar la stânga (pentru $x<0$) va avea concavitatea îndreptată spre y^{cii} negativi.

2° Explicitând, avem

$$y=\pm\sqrt{\frac{x^3}{a}},$$

ceeace înseamnă că curba se compune din două ramuri simetrice faţă de Ox. Vom considera numai ramura

$$y=\sqrt{\frac{x^3}{a}}.$$

Cum

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{a}}, \quad y'' = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{ax}},$$

curba este mereu crescătoare și are concavitatea îndreptată spre y^{cii} pozitivi. Tabela de variație se face ușor. Curba este tangentă în origine la axa Ox și are forma din fig. 75.

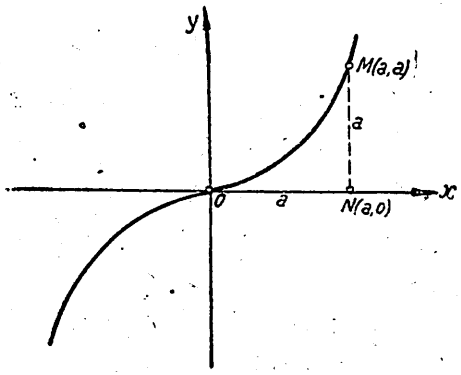


Fig. 74

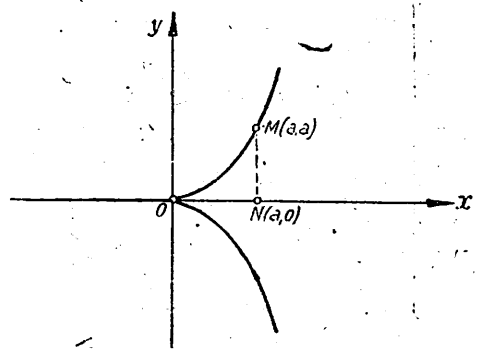


Fig. 75

Pentru $x > 0$, forma ambelor curbe este cea din fig. 74 pentru $m > 1$.

Observație. Ca exemplu de parabolă semicubică putem da *legea sarcinilor spațiale*

$$I_e = kv_a^{\frac{3}{2}}$$

care reprezintă curentul de emisiune (I_e), în funcție de tensiunea anodică (v_a) într'o lampă electrică cu doi electrozi, k fiind o constantă.

58. 2. *Să se arate că subnormala parabolei este constantă oricare ar fi punctul ales pe curbă.*

Ecuația parabolei este: $y^2 = 2px$, de unde $y = \pm\sqrt{2px}$. Alegem un punct pentru care $x = x_0$; cum pentru această valoare corespund pe curbă două puncte simetrice față de axa Ox, alegem unul din ele, de exemplu cel pentru care $y_0 = \sqrt{2px_0}$. Deoarece: $y_0' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p}{x_0}}$, în baza formulei a doua (IX), subnormala este egală cu

$$\overline{M_0'N_0} = y_0 y_0' = p = \text{const},$$

Observație. In acest calcul am simplificat cu x_0, ceeace înseamnează că este valabil atâta vreme cât $x_0 \neq 0$. Or, se vede pe figură, că pentru $x_0 = 0$, ne aflăm în vârful parabolei, unde normala la curbă este confundată cu axa Ox, deci subnormala este nedeterminată.

58. 3. *Să se construiască curba reprezentată prin ecuația*

$$y = \sqrt[3]{x-1}.$$

Funcţia există peste tot. Primele două derivate sunt

$$y' = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}},$$

$$y'' = -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}.$$

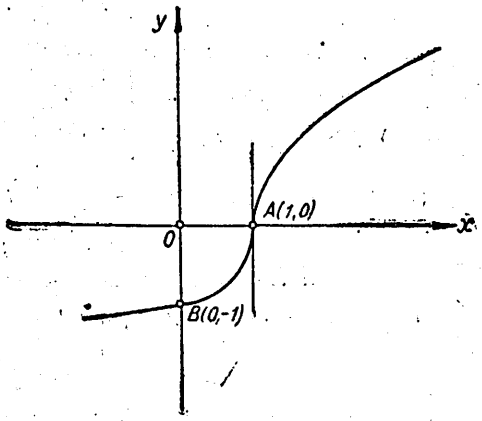


Fig. 76

Prima derivată este mereu pozitivă, ceeace înseamnă că funcţia este mereu crescătoare. Derivata a doua este pozitivă când $x<1$, adică în intervalul $(-\infty, 1)$ curba are concavitatea îndreptată spre y^{cii} pozitivi, şi negativă când $x>1$, adică în intervalul $(1, +\infty)$ curba are concavitatea îndreptată spre y^{cii} negativi. Cum în vecinătatea punctului A $(1, 0)$ y'' schimbă de semn, înseamnă că în acest punct curba are o inflexiune, tangenta fiind paralelă cu axa Oy (fig. 76)

58. 4. *Să se construiască curba numită cisoidă definită prin ecuaţia*

$$y^2(a-x) = x^3.$$

Să se găsească apoi tangenta la curbă în punctul de abscisă $x = \frac{1}{2}a$.

Deoarece ecuaţia curbei nu se schimbă când înlocuim pe y prin $-y$, înseamnă că această curbă este simetrică faţă de axa Ox. Pentru construcţie vom considera deci numai ramura pentru care ordonata este pozitivă adică

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{a-x}}.$$

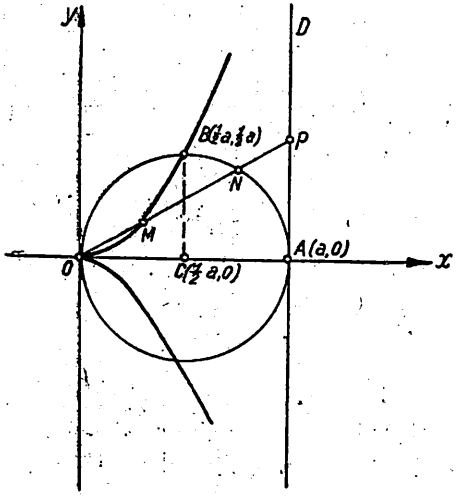


Fig. 77

Intervalul de existenţă este definit de inegalitatea: $x(x-a) \leq 0$, adică x trebue să fie cuprins în intervalul $[0, a]$. Derivata este

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}} \cdot \frac{x^2(3a-2x)}{(a-x)^2},$$

care nu se anulează în intervalul de existenţă. In tot intervalul, funcţia creşte dela zero la $+\infty$. Curba pleacă din origine (fig. 77) şi se depărtează spre infinit având dreapta $x=a$ ca asimptotă. In origine curba este tangentă la Ox, deoarece $y'=0$. Ramura simetrică faţă de Ox aparţine deasemenea curbei.

Pentru $x=\frac{1}{2}a$, $y=\frac{1}{2}a$ și $y'=2$, încât ecuația tangentei este

$$4x-2y-a=0.$$

Observație. Cisoida are următoarea definiție geometrică: se consideră cercul de rază $\frac{1}{2}a$ și de centru punctul $C\left(\frac{1}{2}a, 0\right)$; prin origine se duce o secantă arbitrară, care taie din nou cercul în punctul N și tangenta în A la cerc, în punctul P. Punctul M pentru care $OM=NP$, descrie cisoida.

58. 5. *Să se construiască curba numită strofoidă, a cărei ecuație este*

$$(a-x)y^2=(a+x)x^2.$$

Să se găsească tangentele în origine.

Curba se compune din ramura

$$y=x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}},$$

și din simetrica ei față de Ox. Tabela de variație se formează ușor.

x	$-a$		$x_1=\frac{1}{2}a(1-\sqrt{5})$		0		$+a$
y'	∞	$-$	0	$+$		$+$	
y	0	$\searrow$	min	$\nearrow$	0	$\rightarrow$	$+\infty$

În punctul A, (fig. 78) tangenta este paralelă cu Oy, deoarece derivata este infinită. Prin origine trec două ramuri ale curbei, adică originea este socotită pentru curbă ca punct dublu. Cum pentru prima ramură în origine $y'=1$, pentru a doua vom avea $y'=-1$. Curba este tangentă în origine la cele două bisectoare.

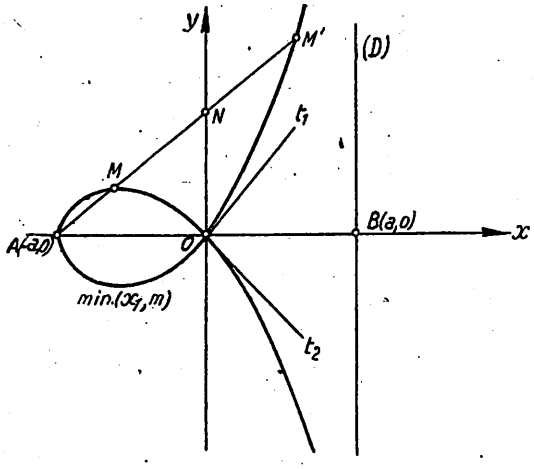


Fig. 78

Observație. Strofoida are următoarea definiție geometrică: se ia pe Ox un punct fix A, prin care se duce o dreaptă oarecare ce taie pe Oy în N; strofoida este locul geometric al punctelor M și M' astfel ca $NM=NM'=NO$.

58. 6. *Să se studieze funcțiunea*

$$y=\sqrt[3]{x^3-3x^2},$$

și să i se facă graficul.

Deoarece indicele radicalului este fără soț, intervalul de existență este $(-\infty, +\infty)$. Pentru $x=-\infty$, $y=-\infty$, iar pentru $x=+\infty$, $y=+\infty$. Derivata este

$$y'=\frac{x^2-2x}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2}}=\frac{x-2}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}.$$

Derivata se anulează pentru $x=2$, şi devine infinită pentru $x=0$ si $x=3$ (în aceste puncte tangentele la curbă sunt paralele cu Oy). Folosind prima formă a derivatei se vede că semnul ei este dat de produsul $x(x-2)$ adică este pozitivă în intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(2, +\infty)$ şi negativă în intervalul $(0, 2)$. Derivata nu se anulează decât pentru $x=2$, unde avem un minim. Minimul are drept valoare: $m=-\sqrt[3]{4}=\sim 1{,}587$. Funcţia nu este discontinuă pentru

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		$+$	$+\infty$ | $-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\sqrt[3]{4}$	↗	0	↗	$+\infty$

nicio valoare a lui x. Tabela de variaţie este alăturată. Curba are o asimptotă (fig. 79). Iată cum procedăm pentru a o găsi. Scriem funcţia sub forma: $y=x\left(1-\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ şi desvoltăm în serie presupunând pe x destul de mare pentru ca $\frac{3}{x}$ să fie subunitar. Avem

$$y=x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\cdots\right)=x-1-\frac{1}{x}+\cdots$$

de unde rezultă că dacă x tinde către $\pm\infty$, diferenţa: $y-(x-1)$ tinde către zero. Curba este deci asimptotă la dreapta: $y=x-1$. Tot din desvoltarea în serie mai rezultă că dacă x este mare, dar negativ $-\frac{2}{x}>0$, deci y-ul curbei este mai mare decât y-ul asimptotei: curba vine dinspre stânga deasupra asimptotei. La fel se vede că curba se depărtează în dreapta sub asimptotă.

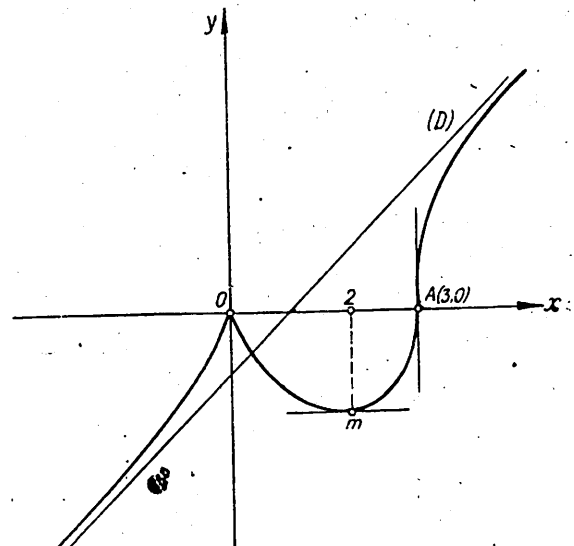


Fig. 79

Observaţie. 1° Pentru a găsi asimptota oblică se poate proceda şi astfel. Dacă notăm ecuaţia ei cu: $y=mx+n$, atunci $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}$ şi $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-mx)$. In cazul nostru:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}=1,\quad n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}-1\right)$$

şi punând $\frac{1}{x}=u$,

$$n=\lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-3u}-1}{u}=\lim_{u\to 0}x\frac{-3}{3\sqrt[3]{(1-3u)^2}}=-1,$$

adică asimptota este: $y=x-1$.

2° In vecinătatea originii, derivata schimbă de semn, trecând prin valori infinite funcția nu mai este derivabilă în acest punct. Totuși, de acord cu cele spuse la § 48, pct. 6, putem spune că funcția admite în origine un extrem, în sensul că ia cea mai mare valoare pentru vecinătatea acestui punct. Tot așa

$$y' = -\frac{2}{\sqrt[3]{x^4(x-3)^5}},$$

și cum y'' schimbă de semn pentru $x=3$, curba va avea în punctul $A(3,0)$ o inflexiune cu tangenta paralelă la Oy.

In origine se zice că curba are un *punct de întoarcere.*

58. 7. *Să se construiască lemniscata a cărei ecuație este*

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=0.$$

Obervăm mai întâi că deoarece ecuația nu conține decât puteri pare ale lui x și y, curba este simetrică în raport cu axele de coordonate și deci în raport cu origina. Ne vom mărgini deci să construim curba în cadranul I.

Desvoltând ecuația și ordonând-o după puterile lui y, obținem ecuația bipatrată

$$y^4+2(x^2+c^2)y^2+x^4-2c^2x^2=0. \qquad (1)$$

și ordonată după puterile lui x obținem altă ecuație bipătrată

$$x^4+2(y^2-c^2)x^2+y^4+2c^2y^2=0. \qquad (2)$$

Cele două ecuații vor avea rădăcinile reale în ipotezele

$$-c\sqrt{2} \leq x \leq c\sqrt{2}, \quad -\frac{1}{2}c \leq y \leq \frac{1}{2}c,$$

(a se vedea prob. 16. 1). Aceasta însemnează că curba va avea toate punctele interioare unui dreptunghi având laturile paralele cu axele de coordonate și egale cu AA', BB' (fig. 80). Pentru $y=0$, avem

$$x^2(x^2-2c^2)=0,$$

adică în cadranul I curba taie axa Ox în punctele O și A; iar pentru $x=0$,

$$y^2(y^2+2c^2)=0,$$

adică curba taie axa Oy numai în origine. Punctul

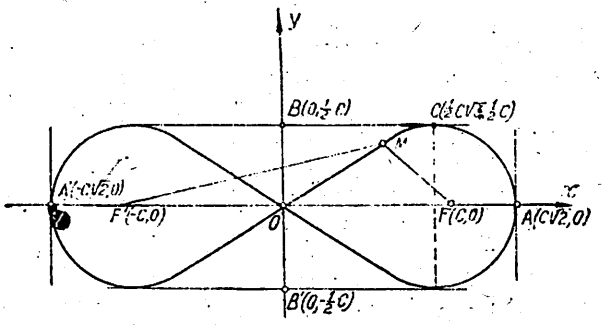


Fig. 80

de ordonată maximă $y=\frac{1}{2}c$ corespunde la abscisa pozitivă dată de ecuația (2), în care înlocuim această valoare

$$x^4-\frac{3c^2}{2}x^2+\frac{9c^4}{16}=0; \quad \left(x^2-\frac{3c^2}{4}\right)^2=0; \quad x=\frac{1}{2}c\sqrt{3},$$

adică este punctul $C\left(\frac{1}{2}c\sqrt{3}, \frac{1}{2}c\right)$. Cum ecuația (1) are o singură rădăcină pozitivă, curba (în cadranul I) are o singură ramură care pleacă din O, trece prin C și ajunge în A. Prin simetrie se construește curba în întregime. Curba are în origine un punct dublu. Să-i găsim tangentele. Acest lucru se poate face ușor, folosind teoria prin care se dă metoda generală de găsire a tangentelor într'un punct multiplu; în cazul nostru putem însă proceda și direct. Din (1) scoatem pentru ordonatele curbei în cadranul I,

$$y=\sqrt{-(x^2+c^2)+\sqrt{4c^2x^2+c^4}}=\sqrt{\frac{2c^2x^2-x^4}{(x^2+c^2)+\sqrt{4c^2x^2+c^4}}},$$

de unde

$$\frac{y}{x}=\sqrt{\frac{2c^2-x^2}{(x^2+c^2)+\sqrt{4c^2x^2+c^4}}},$$

ceeace spune că*)

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=1,$$

adică tangenta în origine este prima bisectoare. Prin simetrie a doua tangentă va fi cea de a doua bisectoare.

Observație. 1° *Lemniscata* poate fi definită geometric astfel: este locul geometric al punctelor M astfel ca

$$MF\cdot MF'=\text{const.},$$

F și F' fiind două puncte astfel ca $\overline{FF'}=2c$.

2° Ecuația lemniscatei în coordonate polare este

$$\rho=c\sqrt{2\cos 2\theta}. \tag{3}$$

58. 8. *Să se construiască cicloida ale cărei ecuații parametrice sunt*

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t).$$

Cicloida este curba descrisă de un punct fix O (fig. 81) al unui cerc care se rostogolește, fără alunecare, pe o dreaptă Ox. Să se arate că normala la curbă într'un punct oarecare O_1 trece prin punctul de tangență al cercului generator cu axa Ox.

In general, pentru a studia o curbă reprezentată parametric, se studiază ambele funcții care reprezintă pe x și y după regulile date la studiul funcțiilor explicite.

Evident că în cazul particular ales, forma curbei este ușor dedusă din definiția geometrică. Totuși, lăsând deoparte orice considerație particulară caracteristică problemei, să descriem pe acest exemplu interesant, metoda generală.

Mai întâi observăm că înlocuind pe t cu valorile t_0 și $t_1=t_0+2\pi$, avem

$$x_1=x_0+2a\pi,\quad y_1=y_0.$$

*) Dacă avem o funcție: $y=f(x)$ pentru care, $f(0)=0$, derivata în origine va fi

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}.$$

Ce însemnează acest lucru? Să presupunem că am face eliminarea lui t; aceasta înseamnează că scoatem din prima $t=h(x)$, care introdusă în a doua dă: $y=g(t)=g[h(x)]=F(x)$. Cu notațiile de mai sus vom avea

$$y_1=g(t_1)=F(x_1)=y_0=g(t_0)=F(x_0);\quad F(x_1)=F(x_0),$$

sau

$$F(x_0+2a\pi)=F(x_0),$$

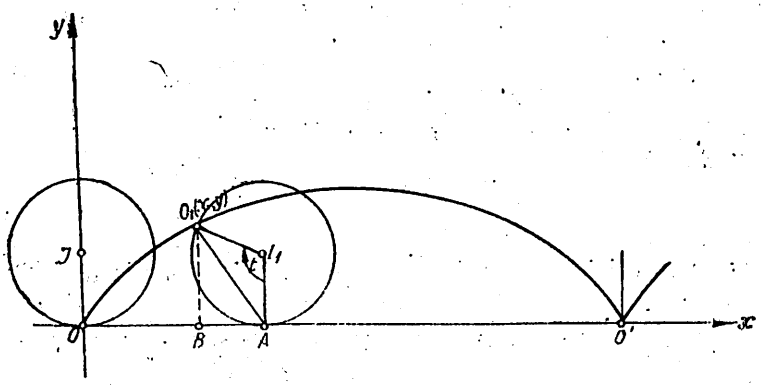


Fig. 81

formulă care ne spune că $F(x)$ este o funcție periodică (§ 35,3b), având perioada $2a\pi$: curba va avea o infinitate de bucle de forma celei reprezentate în figură. Este suficient deci să facem studiul pentru t cuprins între 0 și 2π. Deoarece

$$x'=a(1-\cos t),\quad y'=a\sin t,$$

putem face următoarea tabelă dublă de variație a lui x și a lui y. Din această tabelă citită numai în linia 3ª și ultima, reise că atunci când x crește dela 0 la $a\pi$, y crește dela 0 la $2a$ și apoi când x crește dela $a\pi$ la $2a\pi$, y descrește dela $2a$ la 0. In general, pentru un t oarecare (nu este nevoie să-l mai notăm cu t_0), coeficientul unghiular al tangentei la curbă va fi

t	0		π		2π
x'		+		+	
x	0	↗	$a\pi$	↗	$2a\pi$
y'		+	0	−	
y	0	↗	max$=2a$	↘	0

$$m=\frac{y'}{x'}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{2\sin\frac{1}{2}t\cos\frac{1}{2}t}{2\sin^2\frac{1}{2}t}=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}t.$$

In origine $t=0$ și $m\to\infty$, adică curba este tangentă la Oy; deasemenea în O' tangenta va fi paralelă cu Oy. Intr'un punct oarecare, tangenta va avea ecuația

$$y-a(1-\cos t)=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}t\,[x-a(t-\sin t)].$$

Deoarece cercul se rostogoleşte pe Ox fără alunecare, abscisa lui A va fi egală cu arc $AO_1 = at$ (se constată uşor că $t = \widehat{AI_1O_1}$). Partea a doua a problemei se reduce la a demonstra egalitatea

$$-a(1-\cos t) = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}t\,[at - a(t-\sin t)],$$

ceeace se face cu uşurinţă.

58. 9. *Se numeşte epicicloidă curba născută de un punct fix al unui cerc mobil care se rostogoleşte (fără alunecare) pe un cerc fix pe dinafara lui. Analog se numeşte hipocicloidă curba născută în aceleaşi condiţii dacă cercul mobil se rostogoleşte în interiorul cercului fix. Să se găsească ecuaţiile epicicloidelor şi ipocicloidelor.*

Fără a stărui prea mult asupra studiului acestor curbe, vom căuta să arătăm mai mult intuitiv forma lor, pentru ca să le putem folosi mai târziu în aplicaţii.

Mai întâi, să găsim în general ecuaţia epicicloidei născută de un cerc de rază r care se rostogoleşte pe un cerc de rază R. Să presupunem că punctul M care descrie epicicloida, pleacă din poziţia A de pe cercul fix, adică cu notaţiile de pe figură (fig. 82), va trebui să avem

$$AN = NM, \text{ adică } Rt = r\theta;$$

$$\theta = \frac{R}{r}t,$$

Pentru a găsi coordonatele punctului curent, proiectăm conturul OCM pe axe. Avem:

$$pr\cdot\overline{OM} = pr\cdot\overline{OC} + pr\cdot\overline{CM}.$$

Proiectând pe axa Ox, avem

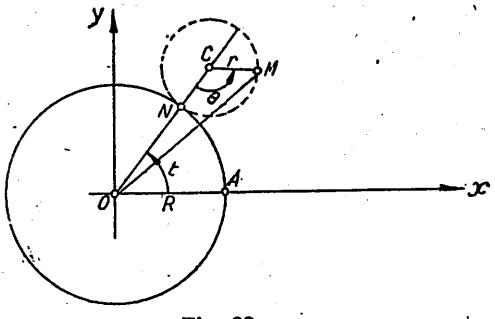


Fig. 82

$$pr\cdot\overline{OM} = x, \quad pr\cdot\overline{OC} = (R+r)\cos t, \quad pr\cdot\overline{CM} = r\cos(\overline{CM}, Ox).$$

Prelungind $\overline{CM}$ până taie pe Ox, din triunghiul care se formează, rezultă că: $(\overline{CM}, Ox) = \pi + (\theta + t)$, deci: $pr\cdot\overline{CM} = r\cos(\pi+\theta+t) = -r\cos(\theta+t)$. Deci

$$\left.\begin{aligned} x &= (R+r)\cos t - r\cos\frac{R+r}{r}t; \text{ şi analog} \\ y &= (R+r)\sin t - r\sin\frac{R+r}{r}t. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

La fel se găseşte că ecuaţiile parametrice ale unei ipocicloide sunt

$$\left.\begin{aligned} x &= (R-r)\cos t + r\cos\frac{R-r}{r}t, \\ y &= (R-r)\sin t - r\sin\frac{R-r}{r}t. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

58. 10. *Epicicloida pentru care $R=r$ se numeşte cardioidă.*

Dacă în formulele (1) facem $R=r$, ecuaţiile parametrice ale cardioidei vor fi

$$\left.\begin{aligned} x&=2R\cos t-R\cos 2t=R+2R\cos t(1-\cos t),\\ y&=2R\sin t-R\sin 2t=2R\sin t(1-\cos t),\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

sau, punând

$$x_1=x-R,\quad y_1=y$$

adică mutând originea în $A(R, 0)$ ecuaţiile se vor transforma în

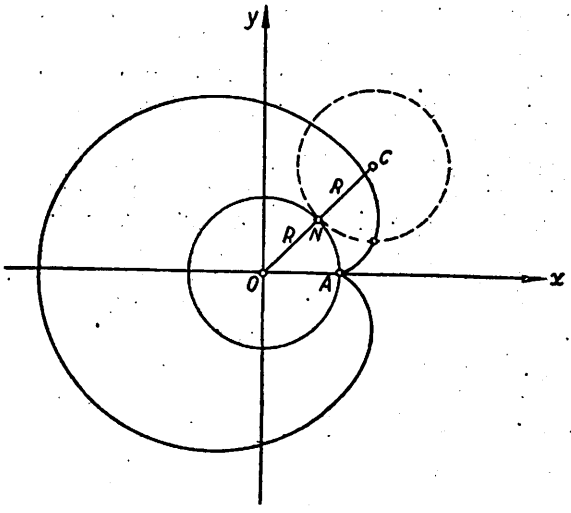


Fig. 83

$$\left.\begin{aligned} x_1&=2R\cos t(1-\cos t)\\ y_1&=2R\sin t(1-\cos t)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Din aceste ecuaţii scoatem

$$x_1^2+y_1^2=4R^2(1-\cos t)^2,$$

ceeace înseamnează că dacă notăm cu ρ_1 şi $t=\omega_1$ coordonatele polare ale lui M faţă de polul A, axa polară fiind Ox, ecuaţia curbei va fi

$$\rho_1=2R(1-\cos\omega_1), \quad (3)$$

(s'ar fi putut lua în partea a doua şi semnul „—“ în faţa lui $2R$ dar se obţine aceeaşi curbă). Sub această formă vom regăsi curba uşor.

Ea are forma din fig. 83 uşor de construit plecând dela definiţie. In A curba are un punct de întoarcere în care tangenta este Ox. In adevăr, din (1) scoatem

$$x'=2R(\sin 2t-\sin t).\quad y'=2R(\cos t-\cos 2t).$$

din care făcând $t=0$, rezultă

$$\frac{y'}{x'}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\cos 2t}{\sin 2t-\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t+2\sin 2t}{2\cos 2t-\cos t}=0.$$

58. 11. *Hipocicloida pentru care $R=4r$ se numeşte astroidă.*

Deoarece lungimea cercului care se rostogoleşte este un sfert din lungimea cercului mare, curba va avea forma din fig. 84, şi are patru puncte de întoarcere. Ecuaţiile parametrice ale curbei sunt

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{3}{4}R\cos t+\frac{1}{4}R\cos 3t\\ y&=\frac{3}{4}R\sin t-\frac{1}{4}R\sin 3t\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

sau, înlocuind pe $\sin 3t$ şi $\cos 3t$ în funcţie de $\sin t$ şi $\cos t$.

$$x=R\cos^3 t, \quad y=R\sin^3 t. \tag{2}$$

Eliminând între aceste ecuaţii pe t se găseşte ecuaţia carteziană a *astroidei*

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=R^{\frac{2}{3}}, \tag{3}$$

Ecuaţia raţională a curbei a fost găsită la probl. 14. 9.

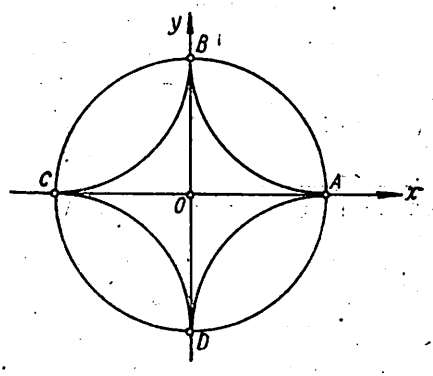


Fig. 84

58. 12. *Să se construiască curba definită prin ecuaţiile parametrice*

$$x=a(1+\cos^2 t)\sin t,$$
$$y=a\sin^2 t\cos t.$$

Deoarece funcţiile $\sin t$ şi $\cos t$ au perioada 2π, vom obţine toate punctele curbei făcând pe t să varieze între 0 şi 2π. Înlocuind pe t prin t_0 şi apoi pe t prin $t_1=2\pi-t_0$, avem

$$x_1=a(1+\cos^2 t_1)\sin t_1=-x_0, \quad y_1=a\sin^2 t_1\cos t_1=y_0,$$

cu alte cuvinte, curba este simetrică faţă de axa Oy: este suficient să considerăm pe t cuprins numai între 0 şi π. Analog înlocuind pe t cu t_0 şi apoi cu $t_1=\pi-t_0$,

$$x_1=x_0, \quad y_1=-y_0,$$

adică curba este simetrică şi faţă de Ox. In rezumat, este suficient să facem să varieze t în intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi ramurii de curbă pe care o obţinem să-i luăm simetrica faţă de Ox, apoi în întregime faţă de Oy. Derivatele sunt

$$x'=a\cos t\ (3\cos^2 t-1),$$
$$y'=a\sin t\ (3\cos^2 t-1);$$

amândouă se anulează în acelaşi timp pentru valoarea α dată de ecuaţia

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Fără a-l calcula efectiv pe α, ţinând seama că arcul are a doua extremitate în primul cadran,

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ încât}$$

$$x_\alpha=\frac{4\sqrt{6}}{9}a, \quad y_\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{9}a.$$

Cu ajutorul tabelei se desenează ramura de curbă OBA (fig. 85) și apoi, prin simetrie, toată curba.

t	0		α		$\frac{1}{2}\pi$
x'		+	0	−	
x	0	↗	$\frac{4\sqrt{6}}{9}a$	↘	a
y'		+	0	−	
y	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}a$	↘	0

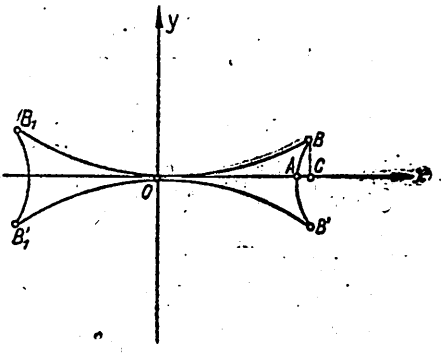


Fig. 85

58. 13. *Să se construiască melcul lui Pascal*

Se dă un cerc cu diametrul a și de centrul I (fig. 86). Pe cerc se ia un punct fix O și prin O se duc raze vectoare până taie cercul în M și pe care luăm segmentele $\overline{MP}, \overline{MP'}$ de semne contrare și de lungimi egale în valoare absolută cu o lungime constantă b. Locul punctului P este o curbă care se numește *melcul lui Pascal.*

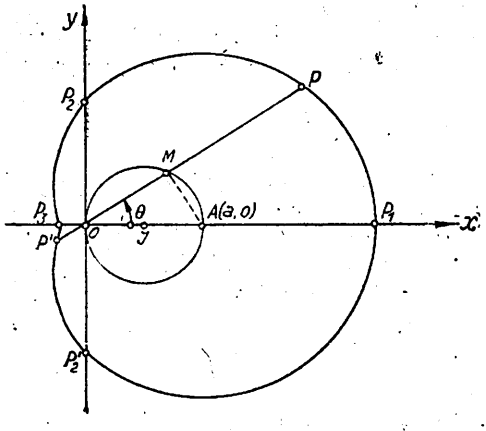


Fig. 86

Luând pe O ca pol și pe OI ca axă polară, avem

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OA}\cos\theta + MP;$$
$$\rho = a\cos\theta + b$$

care reprezintă ecuația în coordonate polare a melcului lui Pascal. Să construim curba după diferite ipoteze care se pot face asupra lungimilor a și b. Evident că este suficient să-l facem pe θ să varieze între 0 și 2π. Cum ρ ia aceleași valori pentru θ și $2\pi-\theta$, însemnează că curba este simetrică față de axa Ox; deci pentru construcție este suficient să-l facem pe θ să varieze între 0 și π.

Presupunem $b>0$. Dacă θ variază dela 0 la $\frac{1}{2}\pi$, $\cos\theta$ este pozitiv deci ρ descreşte dela valoarea maximă $OP_1 = a\cos 0 + b = a + b$ până la valoarea $OP_2 = a\cos\frac{1}{2}\pi + b = b$. Când θ ia valori între $\frac{1}{2}\pi$ și π, $\cos\theta$ este negativ și ρ descreşte mai departe până la valoarea $OP_3 = a\cos\pi + b = b - a$. Facem observarea că pe aceeași rază vectoare OM avem două puncte P și P' ale curbei corespunzând la unghiurile polare θ și $\theta+\pi$. Cele două puncte sunt

simetrice față de M deoarece $\overline{MP}=\overline{MP'}=b$. Aceasta ne spune că dacă schimbăm semnul lui b obținem aceeași curbă. Putem deci presupune totdeauna $b>0$.

Dacă $b>a$ curba are forma din fig. 86. Dacă $b<a$, ρ se anulează pentru două valori ale lui θ una cuprinsă între $\frac{1}{2}\pi$ și π, iar alta cuprinsă înte π și $\frac{3}{2}\pi$. Între aceste două valori ρ este negativ. Curba are forma din fig. 87 și are un punct dublu în O. Insfârșit dacă $b=a$, ρ este pozitiv și se anulează pentru $\theta=\pi$. Ecuația polară a curbei este

$$\rho=a(1+\cos\theta),$$

care nu este alta decât *cardioida* reprezentată în fig. 83, cu singura deosebire că este invers așezată față de axa Oy.

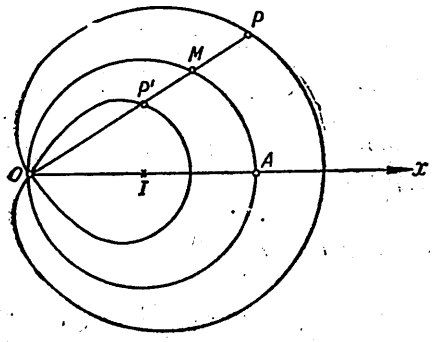


Fig. 87

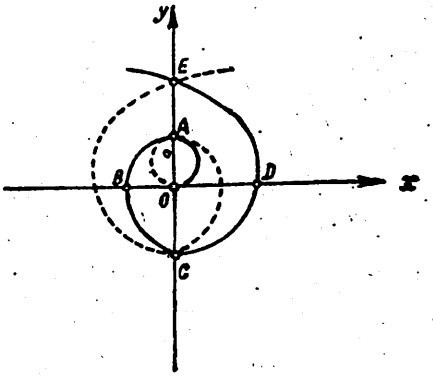


Fig. 88

58. 14. *Să se construiască spirala lui Arhimede a cărei ecuație în coordonate polare este:* $\rho=a\theta$ (a fiind o constantă pozitivă).

Spunem dela început că în ecuația de mai sus unghiul θ este măsurat în radiani. Curba se construește prin puncte și are forma din fig. 88. In origine curba este tangentă la axa polară. In adevăr, dacă V este unghiul pe care-l face tangenta cu raza vectoare, atunci formula (VIII) ne dă

$$\operatorname{tg} V=\left(\frac{a\theta}{\alpha}\right)_{\theta=0}=0.$$

Când θ crește, ρ crește, încât curba se demonstrează din ce în ce mai mult de O. In figură, arcul curbei desemnat plin corespunde valorilor pozitive ale lui θ, iar arcul desemnat punctat (simetricul celuilalt față de Oy) corespunde valorilor lui θ nagative.

Observare. Ținând seamă de a doua formulă ($\overline{X}$), rezultă că *subnormala polară într'un punct oarecare al spiralei lui Arhimede este constantă.*

58. 15. *Să se construiască spirala logaritmică a cărei ecuație în coordonate polare este:* $\rho = ae^{m\theta}$ *(a și m două constante pozitive). Să se demonstreze că într'un punct oarecare al curbei, tangenta face cu raza vectoare un unghi* constant.

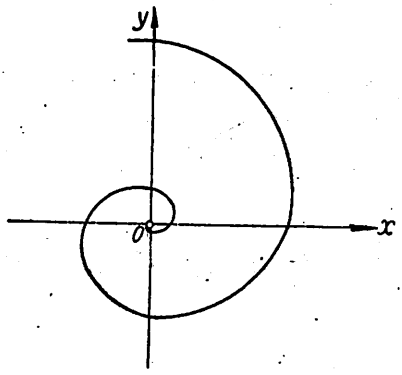


Fig. 89

Curba are aceeași formă ca și spirala lui Arhimede (fig. 89) cu singura deosebire că curba se compune dintr'un singur arc de curbă, cel desemnat plin, și că atunci când θ tinde către $-\infty$, ρ tinde către zero: curba se apropie din ce în ce mai mult de origine, fără a o atinge niciodată; se zice că originea este un *punct asimptotic* pentru curbă. Avem, conform lui (VIII)

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho_0}{\rho_0'} = \frac{ae^{m\theta_0}}{ame^{m\theta_0}} = \frac{1}{m} = \text{const.}$$

§ 59. Curbura curbelor plane. Centrul și raza de curbură

1. Dacă M și M' sunt două puncte infinit vecine pe o curbă, *lungimea arcului elementar* $MM' = ds$ este dată de formula

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt \qquad \text{(I)}$$

după cum curba este reprezentată cartezian explicit sau parametric. Diferențiala arcului ds se mai numește și *element de arc*. Egalitatea (I) definește o funcție $s(x)$ sau $s(t)$, după cum variabila care arată poziția punctului curent pe curbă este x sau t. Determinarea acestei funcții o vom face mai târziu (§ 89), deocamdată putem spune că ea are următoarea interpretare geometrică: dacă alegem un punct fix pe curbă M_0 definit respectiv prin valoarea x_0 sau t_0, atunci lungimea arcului M_0M pe curbă este $s(x) - s(x_0)$, respectiv $s(t) - s(t_0)$.

Așa fiind, alegând un punct fix M_0 pe curbă și un sens pozitiv, un punct oarecare M al ei poate fi definit prin lungimea arcului M_0M. Aceasta înseamnă că *am ales drept parametru pe curbă arcul curbei.* Dacă am făcut această alegere și dacă notăm cu α unghiul pe care-l face tangenta în punctul M cu direcția pozitivă a axei Ox, atunci

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right), \qquad \text{(II)}$$

și cum unghiul $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ este unghiul pe care-l face tangenta cu direcția pozitivă a axei Oy, se zice că $\frac{dx}{ds}$ și $\frac{dy}{ds}$ sunt *cosinii directori* ai tangentei la curbă în punctul M

2. Fiind dată o curbă prin ecuaţia ei: $y=f(x)$, *se numeşte curbura* curbei într'un punct al ei M_0, valoarea pe care o ia expresia

$$C=\frac{1}{R}=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|, \qquad \text{(III)}$$

când înlocuim pe x cu abscisa x_0 a lui M.

Numărul R, inversul curburii, introdus în această formulă, se numeşte *raza de curbură* a curbei în M_0.

Dacă curba este dată prin ecuaţiile ei parametrice, atunci

$$C=\frac{1}{R}=\left|\frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}\right|, \qquad \text{(IV)}$$

accentele însemnând derivarea în raport cu parametrul, al cărui valoare se înlocueşte apoi prin t_0 corespunzător lui M_0. În sfârşit, dacă curba este dată prin ecuaţia ei polară,

$$C=\frac{1}{R}=\left|\frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}\right|. \qquad \text{(V)}$$

Din punct de vedere geometric, curbura unei curbe plane, are următoarea interpretare. Fie M_0 punctul curbei unde calculăm pe C dat de (III) (fig. 90) şi M' un punct infinit apropiat de el; se poate demonstra că

$$C=\lim_{M'\to M_0}\frac{\varepsilon}{M\,M'}. \qquad \text{(VI)}$$

3. Se numeşte *centru de curbură* al unei curbe, într'un punct $M_0(x_0, y_0)$ al său, un punct situat pe normala în acel punct la curbă şi având coordonatele

$$\xi=x_0-\frac{y'_0(1+y'^2_0)}{y''_0}, \quad \eta=y_0+\frac{1+y'^2_0}{y''_0}, \qquad \text{(VII)}$$

dacă curba este dată prin ecuaţia $y=f(x)$, şi

$$\xi=x_0-\frac{y'_0(x'^2_0+y'^2_0)}{x'_0y''_0-y'_0x''_0}, \quad \eta=y_0+\frac{x'_0(x'^2_0+y'^2_0)}{x'_0y''_0-x''_0y'_0}, \qquad \text{(VIII)}$$

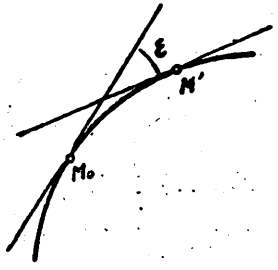


Fig. 90

dacă curba este dată parametric. Indicile zero arată că derivatele sunt calculate în punctul M_0.

4. Distanţa dela centrul de curbură la punctul de pe curbă, este egală cu raza de curbură în acel punct. Se numeşte *cerc de curbură* sau *cerc osculator*, cercul cu centrul în centrul de curbură şi cu raza egală cu raza de curbură. Cercul osculator trece prin punctul de pe curbă, are cu curba în acest punct *trei* puncte confundate, din care cauză o traversează (în punctul unde este considerat cercul osculator).

Observare. În formulele (III), (IV), (V) nu s'a mai introdus indicele zero, deoarece nu era necesar, în timp ce în formulele (VII) şi (VIII) s'a introdus acest indice, pentru a nu se produce confuzii. Chiar în aceste formule, atunci când nu va fi nevoie în mod special vom evita punerea acestui indice, pentru a nu complica scrierea.

59. 1. *Să se găsească curbura cercului.*
Din ecuația cercului

$$x^2+y^2=a^2;$$

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$$

Putem lua în fața radicalului semnul $+$, aceasta însemnând că alegem puncte numai pe semicercul situat deasupra axei Ox (și această nu însemnează că am particularizat problema, deoarece cercul este simetric față de un diametru al său). Pentru aceste puncte avem

$$C=\frac{1}{R}=\left|\frac{\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}}{\left(1+\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)^{3/2}}\right|=\frac{1}{a},$$

adică curbura cercului este constantă în orice punct al său. Raza de curbură este însăși raza cercului.

59. 2. *Să se găsească cercul de curbură la curba:* $y=x^3$ în punctul de coordonate M_0 (1,1).

Notând cu indicele zero valorile în punctul (1,1), avem

$$y_0'=3,\ y_0''=6,$$

ceeace înseamnă că: $R=\frac{5\sqrt{10}}{3}$, iar centrul cercului de curbură este $\left(\xi=-4,\ \eta=\frac{8}{3}\right)$. Ecuația cercului de curbură în punctul M_0 (1,1) va fi

$$(x+4)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{250}{9};\quad 3(x^2+y^2)+24x-16y-14=0.$$

59. 3. *Să se calculeze raza de curbură a cisoidei în punctul* $B\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{2}a\right)$ (Fig. 77).

Folosind calculele dela prob. 58. 4., găsim

$$y''=\frac{3a^2}{4\sqrt{x(a-x)^5}},$$

și apoi:

$$R=\frac{5}{6}\sqrt{5}\ a.$$

59. 4. *Să se găsească razele de curbură ale elipsei în vârfurile ei.*
Elipsa are reprezentarea parametrică

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t.$$

Presupunem că alegem pe curbă punctul corespunzător parametrului t (nu este nevoie să folosim indici). In acest punct avem

$$x'=-a\sin t,\ y'=b\cos t;$$

$$x''=-a\cos t,\ y''=-b\sin t,$$

încât

$$R=\frac{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}$$

Vârful $A(a, 0)$ corespunde lui $t=0$, deci: $R_A=\frac{b^3}{ab}=\frac{b^2}{a}$; iar vârful $B(0, b)$ corespunde lui $t=\frac{1}{2}\pi$, şi deci $R_B=\frac{a^3}{ab}=\frac{a^2}{b}$.

Cum curba este simetrică faţă de axe, în celelalte două vârfuri vom avea respectiv aceleaşi raze de curbură.

59. 5. *Să se calculeze raza de curbură a epicicloidelor şi hipocicloidelor.*

Am văzut că ecuaţiile parametrice ale epicicloidelor sunt (prob. 58. 9)

$$x=(R+r)\cos t-r\cos kt,\quad y=(R+r)\sin t-r\sin kt,$$

unde am pus, pentru simplificarea scrierii: $k=1+\frac{R}{r}$. Dacă alegem un punct oarecare pe curbă, corespunzător parametrului t, avem pentru raza de curbură ρ, expresia

$$\rho=\left|\frac{2\sqrt{2}\,(R+r)^3\left(1-\cos\frac{R}{r}t\right)^{3/2}}{(R+r)^2(1+k)\left(1-\cos\frac{R}{r}t\right)}\right|=4\frac{r(R+r)}{R+2r}\left|\sin\frac{R}{2r}t\right|.$$

Pentru hipocicloide se găseşte

$$\rho=4\frac{r(R-r)}{|R-2r|}\left|\sin\frac{R}{2r}t\right|.$$

59. 6. *Să se demonstreze că la curba a cărei ecuaţie în coordonate polare este*

$$\rho^n=a^n\cos n\theta,$$

normala polară este de $n+1$ ori mai mare decât raza de curbură.

Scriem ecuaţia curbei sub forma

$$\rho=a(\cos n\theta)^{1/n},$$

şi făcând calculele se găseşte pentru raza de curbură expresia

$$(n+1)R=a(\cos n\theta)^{\frac{1}{n}-1}$$

Dar din fig. 73 scoatem pentru *normala polară* valoarea

$$\overline{M_0N_0}=\sqrt{OM_0^2+ON_0^2}=\sqrt{\rho_0^2+\rho_0'^2}=a(\cos n\theta)^{\frac{1}{n}-1}$$

adică

$$(n+1)R=\overline{M_0N_0}.$$

59. 7. *Să se găsească punctul în care raza de curbură la parabola:* $y^2=2px$, *este cea mai mică*

$$y=(2p)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}},\ y'=\frac{1}{2}(2p)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}},\ y''=-\frac{1}{4}(2p)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}},$$

Raza de curbură a parabolei în punctul de abscisă x, este

$$R=\frac{4}{\sqrt{2p}}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Această formulă ne spune că R crește odata cu x, deci cea mai mică valoare va corespunde lui $x=0$, dăcă în vârful parabolei, și va fi $R_0=p$.

59. 8. *Să se găsească parabola*

$$y=ax^2+bx+c,$$

care are în punctul $M_0\left(\frac{1}{2}\pi,1\right)$ *o tangentă comună cu sinusoida:* $y=\sin x$ *și aceeași curbură ca și aceasta.*

Vom căuta pe rând în punctul M_0 coeficientul unghiular al tangentei și curbura la cele două curbe.

1° In primul rând, curba trebue să treacă prin M_0, adică trebue să avem

$$4=a\pi^2+2b\pi+4c. \qquad (1)$$

Coeficientul unghiular m_0 al tangentei în M_0 este

$$m_0=a\pi+b,$$

iar curbura

$$C=\frac{2|a|}{[1+(a\pi+b)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

2° Sinusoida trece prin M_0; în acest punct avem $m_0=0$ și $C_0=-1$. Condițiile problemei vor fi

$$a\pi+b=0,\quad \frac{2|a|}{[1+(a\pi+b)^2]^{\frac{3}{2}}}=1,$$

complectate cu (1). Avem valorile

$$a=\pm\frac{1}{2},\ b=-a\pi=\mp\frac{1}{2}\pi,\ c=1\pm\frac{1}{8}\pi^2,$$

adică problema admite două soluții ale căror ecuații sunt

$$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\pi x+\left(1+\frac{1}{8}\pi^2\right),\ y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\pi x+\left(1-\frac{1}{8}\pi^2\right).$$

Observație. Dacă problema cerea ca în punctul M_0 cele două curbe să aibă și aceeași concavitate, atunci trebuia ca y'' pentru cele două curbe să fie același, adică cea de a doua curbă forma soluția problemei.

59. 9. *Să se demonstreze că dacă un punct tinde către infinit dealungul spiralei lui Arhimede, raza de curbură tinde către raza vectoare.*

Am văzut (prob. 58. 14) că spirala lui Arhimede are ecuația: $\rho = a\theta$. Raza de curbură într'un punct oarecare al curbei va fi

$$R = \frac{(a^2\theta^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2\theta^2 + 2a^2} = \frac{a(\theta^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\theta^2+2}.$$

Problema cere să se găsească

$$\lim_{\theta\to\infty}(R-\rho) = a\lim_{\theta\to\infty}\frac{\sqrt{(\theta^2+1)^3}-\theta(\theta^2+2)}{\theta^2+2} = 0;$$

Amplificând fracția cu conjugata numărătorului, avem

$$\lim_{\theta\to\infty}(R-\rho) = a\lim_{\theta\to\infty}\frac{\theta^3+\theta^2+1-\theta^3-2\theta}{(\theta^2+2)[\sqrt{(\theta^2+1)^3}+\theta(\theta^2+2)]} = 0,$$

adică ceeace trebuia demonstrat.

§ 60. Infășurători

1. Fiind dată o *familie de curbe* care depinde de un parametru

$$f(x, y; \alpha) = 0, \tag{I}$$

se numește *înfășurătoarea* acestei familii, o curbă (Γ), la care rămân tangente toate curbele familiei (care se deduc din ecuația (I) prin particularizarea parametrului α). Ecuația înfășurătorii se găsește eliminând pe α între ecuațiile

$$f = 0,\ f'_\alpha = 0. \tag{II}$$

Dacă această eliminare este greu de făcut și dacă sistemul (II) se poate rezolva în raport cu x și y, obținem o reprezentare parametrică a curbei înfășurătoare. Acest lucru se întâmplă de obicei când curbele familiei sunt drepte.

Se poate întâmpla ca ecuațiile (II) să admită soluții străine, formate dintr'una sau mai multe ramuri de curbe, care în acest caz, formează locul punctelor singulare ale curbelor familiei.

2. Dacă familia de curbe conține doi parametri

$$f(x, y; \alpha, \beta) = 0, \tag{III}$$

legați printr'o relație de condiție

$$g(\alpha, \beta) = 0 \tag{IV}$$

atunci înfășurătoarea familiei se găsește eliminând pe α și β între ecuațiile (III), (IV) și ecuația

$$\frac{f'_\alpha}{g'_\alpha} = \frac{f'_\beta}{g'_\beta} \tag{V}$$

60. 1. *Să se găsească înfășurătoarea dreptelor*

$$\frac{x\cos t}{a}+\frac{y\sin t}{b}-1=0 \qquad (1)$$

a și b fiind două numere fixe iar t un parametru variabil.

Ecuația derivată în raport cu t este

$$\frac{-x\sin t}{a}+\frac{y\cos t}{b}=0,$$

aceste două ecuații rezolvate în raport cu x și y dau ecuațiile curbei înfășurătoare: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, adică o elipsă. Rezultatul era de prevăzut, deoarece ecuația (1) reprezintă tangenta la această curbă într'un punct oarecare.

60. 2. *Să se determine înfășurătoarea familiei de parabole*

$$y=\alpha x-(1+\alpha^2)\frac{x^2}{4c}, \qquad (1)$$

unde α este un parametru iar c o constantă.

Ecuația înfășurătoarei este

$$x^2=4c(c-y),$$

care este tot o parabolă.

Această problemă are următoarea origine: ecuația (1) reprezintă traiectoriile unui proiectil aruncat în vid cu o viteză constantă, dar sub o înclinare variabilă.

Observație. Este interesant de observat că atunci când am făcut eliminarea, ecuația derivată putea să dea și soluția $x=0$ în baza căreia prima spune că $y=0$. Cu alte cuvinte s'ar putea spune că pe lângă curba găsită, înfășurătoarea mai conține și originea. Acest lucru provine din faptul că toate curbele trec prin acest punct.

60. 3. *Să se găsească înfășurătoarea unui segment de lungime constantă, care se mișcă sprijinindu-se pe două drepte fixe perpendiculare.*

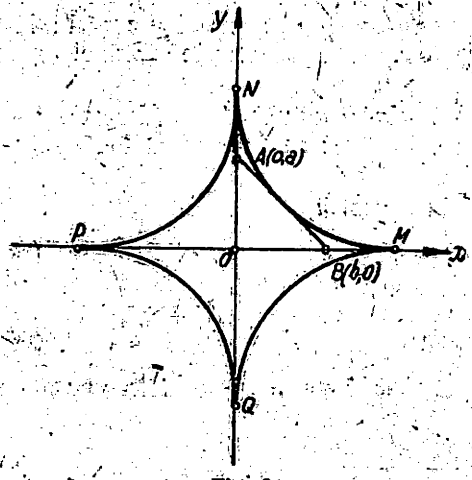


Fig. 91

Luând cele două drepte fixe ca axe de coordonate (fig. 91) și notând coordonatele extremităților segmentului $AB=k$ cu $A(0,a)$, $B(b,0)$ ecuația dreptei este

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0 \qquad (1)$$

unde a și b sunt doi parametri legați prin relația

$$a^2+b^2=k^2 \qquad (2)$$

Ecuația înfășurătoarei se găsește eliminând pe a și b între (1), (2) și

$$\frac{x}{\frac{a^2}{2a}}=\frac{y}{\frac{b^2}{2b}} \qquad (3)$$

Notând cu λ valoarea comună a acestor două rapoarte, vom avea

$$\frac{x}{a} = -2\lambda a^2, \quad \frac{y}{b} = -2\lambda b^2. \tag{4}$$

valori care introduse în (1) ne dau: $-2\lambda k^2 = 1$, și deci din (4)

$$x = \frac{a^3}{k^2}, \; y = \frac{b^3}{k^2},$$

de unde

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}},$$

adică înfășurătoarea este o *astroidă* (prob. 58. 11).

60. 4. *Să se găsească înfășurătoarea familiei de cercuri care au centrele pe o elipsă dată și care trec prin centrul elipsei.*

Să presupunem că elipsa are ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{1}$$

Dacă $M(\alpha, \beta)$ este un punct curent al ei, ecuația cercului va fi

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0, \tag{2}$$

cu condiția

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{3}$$

Ecuația înfășurătoarei se va găsi eliminând pe α și β între ecuațiile (2), (3) și

$$\frac{-2x}{\frac{2\alpha}{a^2}} = \frac{-2y}{\frac{2\beta}{b^2}}; \quad a^2 x\beta = b^2 y\alpha. \tag{4}$$

Din ecuațiile (2) și (4) scoatem valorile α și β

$$\alpha = \frac{a^2 x (x^2+y^2)}{2(a^2x^2+b^2y^2)}, \; \beta = \frac{b^2 y (x^2+y^2)}{2(a^2x^2+b^2y^2)},$$

valori care introduse în (3) dau ecuația înfășurătoarei

$$(x^2+y^2)^2 = 4(a^2x^2+b^2y^2).$$

60. 5. *Un fășicol de raze luminoase plecând dintr'o sursă luminoasă, sau paralele între ele, (când sursa este la infinit) întâlnesc o oglindă având o formă oarecare. Aceste raze sunt reflectate; înfășurătoarea razelor reflectate se numește caustică prin reflecție. Să se găsească această caustică când oglinda este sferică concavă și razele paralele.*

Facem o secțiune în oglindă ca să treacă prin centrul sferei din care face parte (fig. 92), și alegem axa Ox paralelă cu direcția razelor luminoase. Fie MN o rază luminoasă care întâlnește oglinda în N. Cum normala în acest punct este raza ON, raza reflectată va fi în așa fel ca

$$\widehat{MNO} = i = \widehat{ONP},$$

i fiind unghiul de incidență. Dreapta NP, a cărei înfășurătoare o căutăm, are coeficientul unghiular $2i$ și trece prin punctul N $(a\cos i, a\sin i)$; ecuația ei va fi

$$y - a\sin i = \operatorname{tg} 2i\,(x - a\cos i),$$

$$x\sin 2i - y\cos 2i - a\sin i = 0.$$

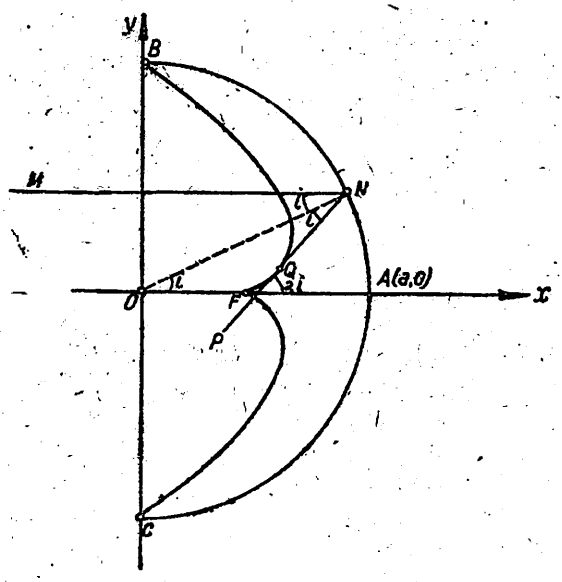


Fig. 92

Derivata acesteia în raport cu i este

$$2x\cos 2i + 2y\sin 2i - a\cos i = 0,$$

ecuație care împreună cu precedenta definește înfășurătoarea. Rezolvându-le în raport cu x și y, găsim

$$x = \frac{3a}{8}\cos i - \frac{a}{8}\cos 3i,$$

$$y = \frac{3a}{8}\sin i - \frac{a}{8}\sin 3i,$$

Aceste ecuații comparate cu ecuațiile (1) dela prob. 58.9 spun că înfășurătoarea este epicicloida născută de un cerc de rază $\frac{1}{4}a$ ce se rostogolește pe un cerc de rază $\frac{1}{2}a$ și de centru O.

§ 61. Desfășurate și desfășurante

1. Fiind dată o curbă (C) se numește *desfășurata* ei (Γ) înfășurătoarea normalelor ei. Dacă curba este dată prin ecuația ei explicită, alegem drept parametru de care va depinde familia de normale a cărei înfășurătoare o căutăm, variabila x; iar dacă curba este reprezentată parametric, alegem drept parametru chiar parametrul curbei.

Se demonstrează că înfășurata unei curbe este locul geometric al centrelor ei de curbură.

2. Fiind dată o curbă (Γ), se numește *desfășuranta* ei o curbă (C) care admite curba (Γ) ca desfășurată.

Poziția desfășuratei față de desfășurantă este cea din fig. 93. O curbă (C) are o singură desfășurată (Γ) în timp ce o curbă (Γ) are o infinitate de desfășurante, astfel că dacă notăm cu M și M' punctele curente depe două desfășurante, segmentul MM' este o constantă.

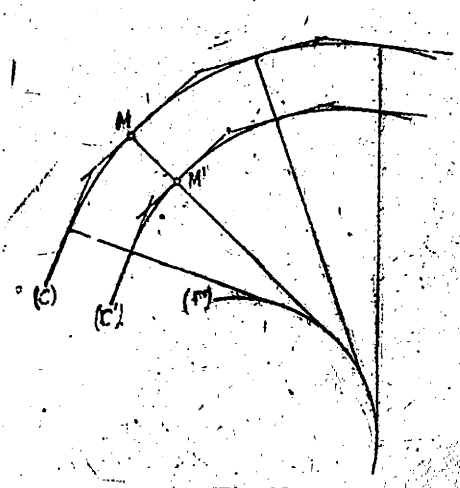


Fig. 93

61. 1. *Să se găsească desfășurata elipsei.*

Folosim reprezentarea parametrică a curbei,

$$x=a\cos t, \qquad y=b\sin t.$$

De unde

$$x'=-a\sin t, \quad y'=b\cos t.$$

În punctul corespunzător parametrului t, ecuația normalei la curbă este (§ 58, VII)

$$y-b\sin t=-\frac{-a\sin t}{b\cos t}(x-a\cos t),$$

sau, punând ca deobiceiu $a^2-b^2=c^2$,

$$a\,x\sin t-b\,y\cos t-c^2\sin t\cos t=0.$$

Derivata în raport cu t este

$$a\,x\cos t+b\,y\sin t-c^2(\cos^2 t-\sin^2 t)=0.$$

Rezolvând aceste două ecuații în raport cu x și y găsim că desfășurata elipsei are ecuațiile parametrice

$$x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t, \quad y=-\frac{c^2}{b}\sin^3 t.$$

Ecuația carteziană a curbei se găsește analog ca la astroidă (prob. 58. 11).

$$\left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

și care are forma curbei din fig. 94.

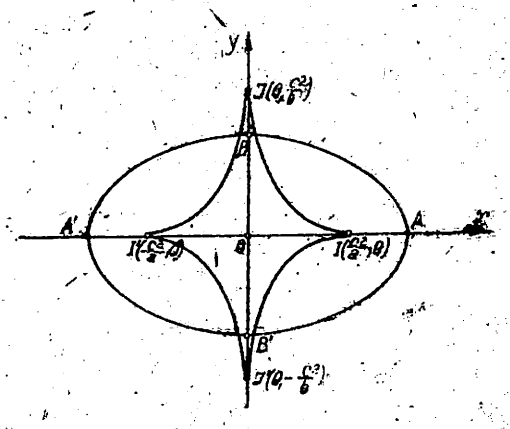


Fig. 94

61. 2. *Să se găsească desfășurata astroidei.*

Reprezentarea parametrică a astroidei este

$$x=R\cos^3 t, \quad y=R\sin^3 t,$$

și deci ecuația normalei într'un punct oarecare,

$$y-R\sin^3 t=-\frac{-3R\cos^2 t\sin t}{3R\sin^2 t\cos t}(x-R\cos^3 t),$$

sau, sub formă întreagă

$$x\cos t-y\sin t-R\cos 2t=0.$$

Derivata ei este

$$x\sin t+y\cos t-2R\sin 2t=0.$$

rezolvându-le în raport cu x și y, dau

$$x=R\cos t(1+2\sin^2 t),\quad y=R\sin t(1+2\cos^2 t).$$

Să arătăm că aceasta desfășurată este tot o astroidă. In adevăr, avem

$$x+y=R(\cos t+\sin t)^3,\qquad x-y=R(\cos t-\sin t)^3,$$

de unde rezultă

$$(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=(\sqrt{8}R)^{\frac{2}{3}},$$

rezultat care ne spune că desfășurata astroidei este tot o astroidă având axele situate pe bisectoarele axelor astroidei inițiale.

61. 3. *Desfășurata cicloidei.*

Folosim ecuațiile cicloidei date la prob. (58. 8). Ecuația normalei este

$$x\sin\frac{1}{2}t+y\cos\frac{1}{2}t-at\sin\frac{1}{2}t=0.$$

Derivata acestei ecuații este

$$x\cos\frac{1}{2}t-y\sin\frac{1}{2}t-a\left(2\sin\frac{1}{2}t+t\cos\frac{1}{2}t\right)=0,$$

care împreună cu precedenta rezolvate dau

$$x=a(t+\sin t),\quad y=-2a\sin^2\frac{1}{2}t.$$

Dacă în aceste ecuații facem substituția $t=\pi+\tau$, ele se scriu sub forma

$$x-a\pi=a(\tau-\sin\tau),\quad y+2a=a(1-\cos\tau),$$

cari arată că desfășurata cicloidei este tot o cicloidă deplasată ca poziție față de precedenta.

61. 4. *Să se găsească desfășurata cardioidei.*

Ecuația în coordonate polare a cardioidei este (prob. 58. 13)

$$\rho=a(1+\cos\theta),$$

ceeace înseamnează că în coordonate parametrice va fi

$$x=a(1+\cos\theta)\cos\theta,\quad y=a(1+\cos\theta)\sin\theta.$$

Rezultă desfășurata sub formă parametrică

$$x=\frac{1}{3}a(1+\cos\theta)(2-\cos\theta),\quad y=\frac{1}{3}a\sin\theta(1-\cos\theta),$$

care se poate demonstra că este tot o cardioidă.

61. 5. *Se consideră o curbă* (Γ) *și una din desfășurantele ei* (C). *Dacă* N *este punctul curent al curbei* (Γ) *și* M *punctul corespunzător depe*

curba (C) (fig. 95) *și dacă N_0 este un punct fix pe curba dată (Γ), să se arate că*

$$\text{arc } N_0N + \overline{NM} = \text{const.} \quad (1)$$

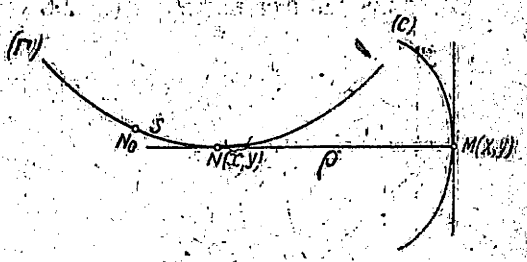


Fig. 95

Fie (x, y) coordonatele punctului curent N ce descrie curba (Γ). Notăm ca deobiceiu cu s arcul N_0N și cu ρ segmentul $\overline{NM}$; mai notăm cu (X, Y) coordonatele punctului curent M al curbei (C). Dacă α este unghiul pe care-l face tangenta cu direcția pozitivă a axei Ox, atunci

$$X = x + \rho\cos\alpha, \quad Y = y + \rho\sin\alpha. \quad (2)$$

Pentru a traduce prin formule proprietatea figurii, este necesar să scriem că tangenta în N la curba (Γ) este perpendiculară pe tangenta în M la curba (C).

Presupunem că reprezentăm curba (Γ) parametric luând drept parametru pe curbă arcul s; aceasta înseamnă că prin formulele (2), X, Y, care sunt coordonatele punctului curent depe curba (C), dau reprezentarea parametrică a curbei (C) parametrul fiind s (bineînțeles că acest parametru nu mai are pe curba (C) aceiași interpretare ca pe curba (Γ)). Avem

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{ds} = \dfrac{dx}{ds} + \dfrac{d\rho}{ds}\cos\alpha - \rho\sin\alpha\dfrac{d\alpha}{ds}, \\ \dfrac{dY}{ds} = \dfrac{dy}{ds} + \dfrac{d\rho}{ds}\sin\alpha + \rho\cos\alpha\dfrac{d\alpha}{ds}. \end{cases}$$

Dar, în baza formulelor (II) dela § 59, aceste formule se mai pot scrie

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{ds} = \left(1 + \dfrac{d\rho}{ds}\right)\cos\alpha - \rho\sin\alpha\dfrac{d\alpha}{ds}, \\ \dfrac{dY}{ds} = \left(1 + \dfrac{d\rho}{ds}\right)\sin\alpha + \rho\cos\alpha\dfrac{d\alpha}{ds}. \end{cases} \quad (3)$$

Proprietatea geometrică a figurii se traduce prin relația

$$\frac{dX}{ds}\cos\alpha + \frac{dY}{ds}\sin\alpha = 0,$$

care în baza formulelor (3) se scrie: $\dfrac{d\rho}{ds} = -1$. Această relație spune că

$$\rho + s = C, \quad (4)$$

unde C este o constantă oarecare. Relația (4) nu este alta decât (1).

Observație. Relația (4) ne permite să scriem ecuațiile parametrice ale desfășurătoarei sub forma

$$X = x + (C - s)\cos\alpha, \quad Y = y + (C - s)\sin\alpha. \quad (5)$$

La fiecare valoare a constantei C avem o desfășurantă. In felul acesta se explică faptul că unei curbe îi corespund o infinitate de desfășurante.

61. 6. *Să se găsească desfăşurantele unui cerc.*

Luând unghiul θ ca parametru (fig. 96), ecuaţiile parametrice ale cercului vor fi

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta,$$

iar α fiind unghiul exterior în triunghiul OMN, vom avea $\alpha = \frac{1}{2}\pi + \theta$. Luând originea arcelor pe cerc în M_0, măsura arcului M_0M în radiani este $R\theta$. Ecuaţiile tuturor desfăşurantelor vor fi

$$X = R\cos\theta - (C - R\theta)\sin\theta,$$
$$Y = R\sin\theta + (C - R\theta)\cos\theta.$$

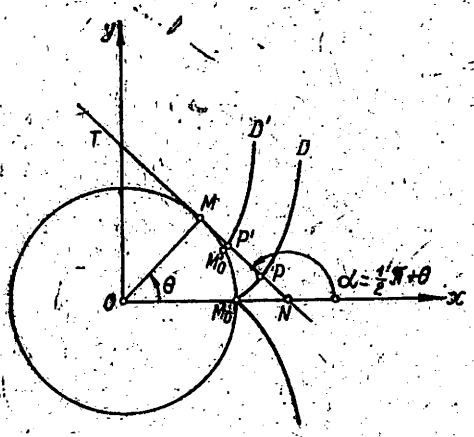


Fig. 96

Dintre aceste desfăşurante să determinăm pe cea care trece prin M_0. Făcând $\theta = 0$, obţinem punctul de coordonate (R, C) care va fi M_0 când luăm $C = 0$. Ecuaţiile ei sunt deci

$$X = R(\cos\theta + \theta\sin\theta), \quad Y = R(\sin\theta - \theta\cos\theta).$$

61. 7. *Se consideră lănţişorul a cărei ecuaţie este*

$$y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}. \tag{1}$$

1° *Să se găsească desfăşuranta lănţişorului care trece prin punctul cel mai de jos al acesteia. Această curbă se numeşte tractoare.*

2° *Să se demonstreze că lungimea tangentei într'un punct al tractoarei mărginită la axa Ox este constantă.*

Reprezentarea lănţişorului se deduce din graficul făcut la prob. 36. 1 pentru curba

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \mathrm{ch}\,x,$$

împărţind abscisele cu a şi multiplicând ordonatele deasemeni cu a. Pe fig. 97, este curba (C).

1° Ecuaţia desfăşurantei este de forma (5) (prob. 61. 5). Luăm ca parametru pe curbă chiar abscisă $x = t$. Reprezentarea va fi

$$x = t, \quad y = a\,\mathrm{ch}\frac{t}{a}.$$

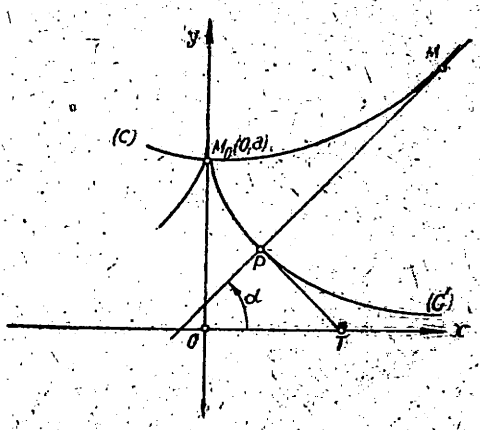


Fig. 97

Pentru calculul lui $\sin\alpha$ şi $\cos\alpha$, ţinem seama că

$$\mathrm{tg}\,\alpha = y' = \mathrm{sh}\frac{t}{a}.$$

încât

$$\sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \operatorname{th}\frac{t}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{t}{a}}$$

(nu s'a mai luat în fața radicalului dublu semn așa cum spun formulele ce dau pe $\sin\alpha$ și $\cos\alpha$ în funcție de $\operatorname{tg}\alpha$, ci s'a luat semnul $+$ așa cum cere figura). Pentru arcul s avem, folosind formula (I), § 59.

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2+y'^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{t}{a}} = \operatorname{ch}\frac{t}{a},$$

și cum funcția care derivată dă $\operatorname{ch}\frac{t}{a}$ este $a\operatorname{sh}\frac{t}{a}$, rezultă că putem lua

$$s = a\operatorname{sh}\frac{t}{a} + C$$

unde C este o constantă. Rezultă că, în general ecuațiile desfășurantelor vor fi

$$X = t + \left(C - a\operatorname{sh}\frac{t}{a}\right)\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{t}{a}}, \quad Y = a\operatorname{ch}\frac{t}{a} + \left(C - a\operatorname{sh}\frac{t}{a}\right)\operatorname{th}\frac{t}{a}.$$

Trebuind ca pentru $t = x = 0$, să avem $X = 0$, este necesar să luăm $C = 0$ încât ecuațiile parametrice ale tractoarei sunt:

$$x = t - a\operatorname{th}\frac{t}{a}, \quad y = \frac{a}{\operatorname{ch}\frac{t}{a}}.$$

Cum t este un parametru oarecare, putem să-l înlocuim cu $t = a\theta$ și avem indefinitiv forma cunoscută a ecuațiilor parametrice ale tractoarei

$$x = a(\theta - \operatorname{th}\theta), \quad y = \frac{a}{\operatorname{ch}\theta}. \tag{2}$$

2. Luăm un punct oarecare pe curba (2) corespunzător parametrului θ; Ecuația tangentei într'un punct oarecare al curbei va fi

$$y - \frac{a}{\operatorname{ch}\theta} = -\frac{1}{\operatorname{sh}\theta}[x - a(\theta - \operatorname{th}\theta)],$$

Abscisa punctului de pe această curbă, care are ordonata nulă, este $a\theta$, adică cu notațiile depe figură, $T(a\theta, 0)$. Deci notând cu (x, y) coordonatele lui P, găsim $\overline{PT} = a$.

$$\overline{PT}^2 = (x - a\theta)^2 + y^2 = a^2\left(\operatorname{th}^2\theta + \frac{1}{\operatorname{ch}^2\theta}\right) = a^2\frac{\operatorname{sh}^2\theta + 1}{\operatorname{ch}^2\theta} = a^2; \quad \overline{PT} = a,$$

adică $\overline{PT}$ este constantă oricare ar fi punctul P pe curbă.

Observație. Cele două curbe întâlnite în această problemă sunt importante în tehnică pentru următoarele motive.

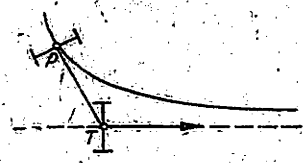


Fig. 98

1° *Lănțișorul* este linia de echilibru a unui fir greu, omogen, flexibil și inextensibil suspendat în două puncte ale lui.

2° *Tractoarea* este curba descrisă de mijlocul P (fig. 98) dintre cele două roți de dinapoi ale unui vehicul, dacă mijlocul T dintre roțile dinainte se mișcă pe o dreaptă.

§ 62. Reprezentarea analitică a curbelor strâmbe. Triedrul lui Frenet

1. **O curbă strâmbă** (C), adică o curbă care nu este plană, poate fi reprezentată într'unul din următoarele două moduri:

a) prin *ecuațiile* ei *parametrice*

$$x=f(t), \quad y=g(t), \quad z=h(t), \tag{I}$$

care definesc coordonatele punctului curent ca funcțiuni de un parametru t;

b) prin *ecuațiile* ei *carteziene*

$$F(x,y,z)=0, \quad G(x,y,z)=0. \tag{II}$$

Fiecare din ecuațiile precedente, luată în parte, reprezintă o suprafață (§ 64); cele două suprafețe se intersectează după curba (C). Evident că una, sau amândouă din ecuațiile (II), pot fi înlocuite printr'o combinare a lor de forma

$$F+\lambda G=0,$$

unde λ este o constantă.

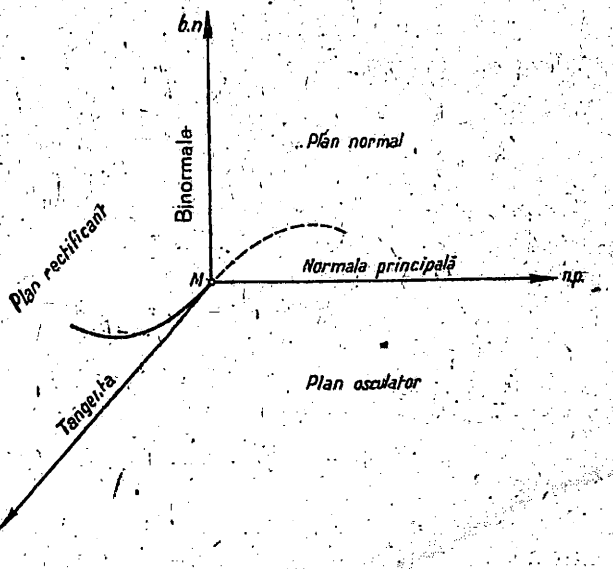


Fig. 99

2. Fie (C) o curbă strâmbă (fig. 99), definită prin ecuațiile ei parametrice (I), și $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct al ei corespunzător lui $t=t_0$. *Tangenta* în M_0 la curbă are ecuațiile

$$\frac{x-x_0}{x'_0}=\frac{y-y_0}{y'_0}=\frac{z-z_0}{z'_0}, \tag{III}$$

înțelegând prin x'_0, y'_0, z'_0 rezultatul înlocuirii lui t prin t_0 în derivatele lui x, y, z.

în raport cu t*). În punctul M, se pot duce perpendicular pe tangenta Mt, o infinitate de *normale* cari formează un plan, numit *plan normal*, și a cărei ecuație este

$$x'_0(x-x_0)+y'_0(y-y_0)+z'_0(z-z_0)=0. \qquad (IV)$$

Pedealtă parte prin tangenta Mt se pot duce o infinitate de plane numite *plane tangente* la curbă. Toate aceste plane conținând tangenta, care are două puncte confundate cu curba, vor avea ele însile două puncte comune cu curba. Dintre toate planele tangente există unul numit *plan osculator* care are trei puncte confundate cu curba. Ecuația lui este

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix}=0. \qquad (V)$$

Dintre toate normalele unei curbe strâmbe două sunt mai importante: 1° *Normala principală* este normala care se găsește în planul osculator; și 2° *binormala*, normala perpendiculară pe planul osculator. Planul determinat de tangentă și binormală se numește *plan rectificant*.

Configurația astfel formată se numește *triedrul lui Frênet*. Muchiile acestui triedru sunt: tangenta, normala principală și binormala; iar fețele lui sunt: planul osculator, planul normal și planul rectificant.

3. Dacă curba este dată prin ecuațiile ei carteziene, tangenta într'un punct al ei $M_0(x_0, y_0, z_0)$ are ecuațiile

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F'_{y_0} & F'_{z_0} \\ G'_{y_0} & G'_{z_0} \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F'_{z_0} & F'_{x_0} \\ G'_{z_0} & G'_{x_0} \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F'_{x_0} & F'_{y_0} \\ G'_{x_0} & G'_{y_0} \end{vmatrix}}, \qquad (VI)$$

unde $F'_{x_0}, \ldots, G'_{z_0}$ sunt derivatele parțiale ale funcțiunilor F și G în cari s'au înlocuit coordonatele curente cu coordonatele punctului M_0.

62. 1. *Se numește elice circulară, sau mai pe scurt elice, curba născută de un punct ce se mișcă pe un cilindru circular drept animat de o mișcare compusă din două mișcări una de translație paralelă cu axa cilindrului și alta de rotație în jurul axei cilindrului, cele două mișcării fiind proporționale între ele. Să se stabilească ecuațiile elicei, și să se arate că tangenta la elice face cu generatoarele cilindrului un unghiu constant* (fig. 100).

Dacă (x, y, z) sunt coordonatele punctului curent M atunci $M'(x, y, 0)$ se găsește pe cercul cu centrul în O și de rază r adică

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta.$$

Apoi, cum translația este măsurată prin $\overline{M'M}=z$, iar rotația prin unghiul θ, conform definiției va trebui ca $z=k\theta$. Ecuațiile parametrice ale elicei sunt deci

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta, \quad z=k\theta. \qquad (k=\text{const.})$$

θ fiind parametru pe curbă.

*) Dacă într'un punct curba nu are tangentă bine determinată, sau are mai multe, acel punct se numește *punct singular*, puncte pe care nu le considerăm în studiul nostru.

Tangenta la elice va avea în punctul curent parametrii directori

$$x'=-r\sin\theta,\quad y'=r\cos\theta,\quad z'=k,$$

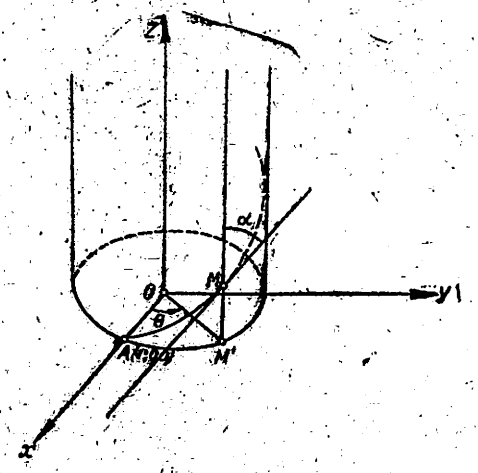


Fig. 100

iar generatoarea MM' va avea aceiași parametri directori cu Oz, adică $(0,0,1)$. Conform formulei ce dă unghiul a două direcții în spațiu,

$$\cos\alpha=\frac{0\cdot x'+0\cdot y'+1\cdot z'}{\sqrt{(0^2+0^2+1^2)(x'^2+y'^2+z'^2)}}=$$

$$=\frac{k}{\sqrt{r^2+k^2}},$$

formulă care fiind independentă de θ, ne spune proprietatea din enunț.

62. 2. *Cubica strâmbă*

$$x=t,\quad y=t^2,\quad z=t^3,$$

trece prin origine. Să i se găsească în acest punct elementele triedrului lui Frenet.

Avem, într'un punct oarecare al curbei:

$$x'=1,\quad y'=2t,\quad z'=3t^2;$$
$$x''=0,\quad y''=2,\quad z''=6t.$$

Tangenta în origine are parametrii directori $(1,0,0)$ adică este axa Ox. Aceasta înseamnă că *planul normal* este planul yOz. *Planul osculator* va avea ecuația:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0;\quad z=0,$$

adică planul osculator va fi planul xOy. *Binormala* curbei trebuind să fie perpendiculară pe planul osculator este axa Oz. *Normala principală* este intersecția planului osculator cu planul normal, adică va fi axa Oy. Rezultă că *planul rectificant* este planul xOz. În concluzie, în origine, *triedrul lui Frenet* se confundă cu triedrul de referință.

62. 3. *Fie M un punct al cubicei strâmbe*

$$x=t,\quad y=t^2,\quad z=t^3;$$

să se arate că dreaptă (D) ce trece prin M, este paralelă cu plaxul xOy și întâlnește axa Oz, se găsește în planul osculator la curbă.

Punctul curent are coordonatele $M(t, t^2, t^3)$. Dreapta (D) fiind paralelă cu planul xOy se va găsi în planul de ecuație $z=t^3$. Pe de altă parte trebuind să întâlnească axa Oz, se va găsi într'un plan ce întâlnește această axă, adică într'un plan a cărei ecuație trebue să fie de forma: $y=kx$; parametrul k îl vom determina scriind că acest plan trece prin M, adică

$$t^2=kt;\quad k=t.$$

Dreapta (D) are deci ecuațiile

$$y=tx,\quad z=t^3.$$

Planul osculător la curbă în M are ecuația

$$\begin{vmatrix} x-t & y-t^2 & z-t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 1 & 3t \end{vmatrix}=0,$$

sau dezvoltat,

$$3t^2x-3ty+z-t^3=0.$$

Această ecuație scrisă sub forma

$$-3t(y-tx)+(z-t^3)=0,$$

spune că este verificată de orice punct al dreptei (D) fiind o combinație liniară a ecuațiilor ei.

62. 4. *Să se găsească punctele depe curba*

$$x=\frac{1}{4}t^4,\quad y=\frac{1}{3}t^3,\quad z=\frac{1}{2}t^2,$$

în care tangenta este paralelă cu planul: $x+3y+2z=0$.

Tangenta într'un punct oarecare al curbei precedente, are parametrii directori

$$x'=t^3,\quad y'=t^2,\quad z'=t,$$

iar planul are parametrii directori (1, 3, 2). Pentruca dreapta să fie paralelă cu planul, este necesar să avem

$$t^3+3t^2+2t=0 \quad \text{sau} \quad t(t+1)(t+2)=0.$$

Deci proprietatea cerută de enunț va avea loc în punctele pentru cari t este 0, -1 sau -2, adică în punctele

$$M_1(0,\ 0,\ 0),\ M_2\left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right) \text{ și } M_3\left(4,\ -\frac{8}{3},\ 2\right).$$

62. 5. *Să se scrie ecuațiile tangentei la curba*

$$x^2+y^2=10,\quad y^2+z^2=25,$$

în punctul $M_0(1,\ 3,\ 4)$.

Folosind ecuațiile (VI), găsim

$$\frac{x-1}{12}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-4}{3}. \qquad (1)$$

Observație. Se poate proceda și folosind noțiunea de plan tangent la o suprafață (§ 64, III). În adevăr, curba fiind pe cele două suprafețe din enunț, tangenta va fi în planele tangente la aceste suprafețe în punctul M_0, adică în planele

$$x+3y=10,\quad 3y+4z=25. \qquad (2)$$

E bine să se verifice că ecuațiile (1) și (2) reprezintă același dreaptă.

62. 6. *Se consideră curba definită prin intersecția suprafețelor*

$$2x^2+3y^2+z^2=47, \quad x^2+2y^2=z.$$

Să i se găsească planul osculator în punctul $M_0(-2, 1, 6)$.

Alegem pe curbă drept parametru pe x. Aceasta înseamnă că $x'=1$ și $x''=0$. Derivând ecuațiile din enunț, considerate ca definind funcțiunile implicite y și z de variabila x, avem

$$2x+3yy'+zz'=0, \quad 2x+4yy'-z'=0; \tag{1}$$

înlocuind aci coordonatele curente cu coordonatele lui M_0, avem

$$-4+3y_0'+6z_0'=0, \quad -4+4y_0'-z_0'=0,$$

de unde scoatem:

$$y_0'=\frac{28}{27}, \quad z_0'=\frac{4}{27}. \tag{2}$$

Derivând încă odată ecuațiile (1), găsim

$$2+3y'^2+3yy''+z'^2+zz''=0, \quad 2+4y'^2+4yy''-z''=0.$$

Ținând seamă de valorile (2), în M_0 aceste relații se scriu,

$$3y_0''+6z_0''+\frac{3826}{729}=0, \quad 4y_0''-z_0''+\frac{4594}{729}=0,$$

care rezolvate dau: $y_0''=-\frac{31390}{19683}$, $z_0''=-\frac{1522}{19683}$.

Înlocuind în ecuația (V) se găsește că ecuația planului osculator în M_0 este:

$$13804x+6849y-141120z+867479=0.$$

§ 63. Curburile curbelor strâmbe. Formulele lui Frenet

1. Ca și în plan (§ 59, pct. 1), dacă M și M' sunt două puncte infinit vecine pe o curbă strâmbă, *lungimea arcului* $MM'=ds$ este dată de formula

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt, \tag{1}$$

în ultima formă curba este presupusă reprezentată parametric. Diferențiala ds se mai numește și *element de arc*.

Formula (1) definește o funcțiune $s(t)$ care are următoarea interpretare geometrică (la fel ca în plan): dacă M_0 este un punct fix pe curbă corespunzător la $t=t_0$ și dacă M este punctul curent, atunci

$$\text{arc } M_0M=s(t)-s(t_0).$$

Alegând pe curbă drept parametru arcul s, atunci $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ reprezintă *cosinușii directori* ai tangentei în M la curbă.

2. Fiind dată o curbă strâmbă prin ecuaţiile ei parametrice, se numeşte *curbură* expresia

$$C=\frac{1}{R}=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)^3}}, \tag{II}$$

unde prin A, B, C înţelegem minorii matricei

$$\left\| \begin{matrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{matrix} \right\|,$$

adică mai precis,

$$A=y'z''-z'y'', \quad B=z'x''-x'z'', \quad C=x'y''-y'x''. \tag{III}$$

În expresia (I) se înlocuieşte t cu valoarea corespunzătoare punctului M ales pe curbă. Numărul R introdus prin (I), se numeşte *raza de curbură*.

Deasemeni, se numeşte *torsiune* expresia

$$\tau=\frac{1}{T}=\frac{-\Delta}{A^2+B^2+C^2}, \tag{IV}$$

unde

$$\Delta=\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}. \tag{V}$$

Numărul T se numeşte *rază de torsiune*.

3. Ca şi în plan (§ 59, V) curbura şi torsiunea curbelor strâmbe au următoarele interpretări geometrice: a) curbura este limita către care tinde raportul dintre unghiul a două tangente infinit vecine şi arcul curbei cuprins între punctele de contact; b) torsiunea este limita către care tinde raportul dintre unghiul a două plane osculatoare infinit vecine şi arcul curbei cuprins între punctele de contact.

Torsiunea este deci o a doua curbură, de aceia curbele strâmbe se mai numesc şi *curbe cu dublă curbură*.

4. Fie M un punct al unei curbe strâmbe şi fie în acest punct

α_1, β_1, γ_1 cosinii directori ai tangentei,
α_2, β_2, γ_2 „ „ „ normalei principale,
α_3, β_3, γ_3 „ „ „ binormalei,

adică cosinii directori ai muchiilor triedrului lui Frenet). Între aceşti cosinii directori, razele de curbură şi cele de torsiune calculate în M avem relaţiile

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\alpha_1}{ds}=\frac{\alpha_2}{R}, \quad \frac{d\beta_1}{ds}=\frac{\beta_2}{R}, \quad \frac{d\gamma_1}{ds}=\frac{\gamma_2}{R}; \\ &\frac{d\alpha_2}{ds}=-\frac{\alpha_1}{R}-\frac{\alpha_3}{T}, \quad \frac{d\beta_2}{ds}=-\frac{\beta_1}{R}-\frac{\beta_3}{T}, \quad \frac{d\gamma_2}{ds}=-\frac{\gamma_1}{R}-\frac{\gamma_2}{T}; \\ &\frac{d\alpha_3}{ds}=\frac{\alpha_2}{T}, \quad \frac{d\beta_3}{ds}=\frac{\beta_2}{T}, \quad \frac{d\gamma_3}{ds}=\frac{\gamma_2}{T}. \end{aligned}\right\} \tag{VI}$$

unde s este arcul curbei. Aceste formule sunt formulele lui Frenet necesare în cinematică şi electricitate.

63. 1. *Să se calculeze raza de curbură și raza de torsiune a elicei* (prob. 62. 1).

Avem

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=k\theta,$$

de unde rezultă tabloul

$$\begin{aligned} x' &= -r\sin\theta, & y' &= r\cos\theta, & z' &= k,\\ x'' &= -r\cos\theta, & y'' &= -r\sin\theta, & z'' &= 0,\\ x''' &= r\sin\theta, & y''' &= -r\cos\theta, & z''' &= 0,\\ A &= rk\sin\theta, & B &= -rk\cos\theta, & C &= r^2, \end{aligned}$$

$$x'^2+y'^2+z'^2=r^2+k^2,\quad A^2+B^2+C^2=r^2(r^2+k^2),\quad \Delta=kr^2$$

și deci

$$R=\frac{(r^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}{r(r^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{r^2+k^2}{r},\quad T=-\frac{r^2(r^2+k^2)}{kr^2}=\frac{r^2+k^2}{k}$$

adică elicea are razele de curbură și torsiune constante.

63. 2. *Să se arate că dealungul curbei*

$$x=t,\quad y=\frac{1}{2}t^2,\quad z=\frac{1}{6}t^3,$$

avem: $R+T=0$.

Folosind formulele stabilite, avem:

$$R=\frac{\left(1+t^2+\frac{1}{4}t^4\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{4}t^4+t^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}=1+t^2+\frac{1}{4}t^4;\quad T=-\frac{\frac{1}{4}t^4+t^2+1}{1}=-\left(\frac{1}{4}t^4+t^2+1\right),$$

de unde rezultă relația din enunț.

63. 3. *Se consideră spirala conică*

$$x=t\cos(a\ln t),\quad y=t\sin(a\ln t),\quad z=bt,$$

și se arată că: 1° drcul, raza de curbură și raza de torsiune sunt funcțiuni liniare de t; 2° normala principală este paralelă cu planul xOy; 3° binormala face un unghi constant cu axa Oz.

1°. Avem

$$ds^2=(1+a^2+b^2)\,dt;\quad \frac{ds}{dt}=\sqrt{1+a^2+b^2};\quad s=t\sqrt{1+a^2+b^2}+\text{const}$$

$$R=\frac{(1+a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{a(1+a^2)^{\frac{1}{2}}(1+a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}t=\frac{1+a^2+b^2}{a\sqrt{1+a^2}}t$$

$$T=-\frac{a^2(1+a^2)(1+a^2+b^2)}{t^2}\cdot\frac{t^3}{a^3b(1+a^2)}=-\frac{1+a^2+b^2}{ab}t.$$

2°. Normala principală este intersecția planelor: normal și oculator; aceasta înseamnă că parametrii ei directori sunt minorii matricei

$$\begin{Vmatrix} x' & y' & z' \\ A & B & C \end{Vmatrix}$$

Notăm acești parametrii cu l, m, n. A arăta că normala principală este paralelă cu planul xOy este tot una cu a arăta că este perpendiculară pe axa Oz ai cărei parametrii directori sunt (0, 0, 1). Condiția de perpendicularitate este $n=0$ ceeace se verifică în cazul problemei.

3°. Binormala fiind perpendiculară pe planul osculator, are parametrii directori A, B, C. Cosinusul unghiului pe care-l face această dreaptă cu Oz este

$$\cos V=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{a(1+a^2)}{t}\cdot\frac{t}{\sqrt{a^2(1+a^2)(1+a^2+b^2)}}=\sqrt{\frac{1+a^2}{1+a^2+b^2}},$$

adică V este un unghiu constant.

63. 4. *Să se demonstreze că la curba*

$$x=a\operatorname{ch}t\cos t,\quad y=a\operatorname{ch}t\sin t,\quad z=at,$$

segmentul de normală cuprins între punctul depe curbă și axa Oz, este egal și de semn contrar cu raza de torsiune.

Avem:

$$A=-2a^2\operatorname{sh}t\cos t,\quad B=-2a^2\operatorname{sh}t\sin t, C=2a^2\operatorname{sh}^2t;$$

$$A^2+B^2+C^2=4a^4\operatorname{sh}^2t\operatorname{ch}^2t;\quad \Delta=4a^3\operatorname{sh}^2t;$$

$$T=-\frac{4a^4\operatorname{sh}^2t\operatorname{ch}^2t}{4a^3\operatorname{sh}^2t}=-a\operatorname{ch}^2t.$$

Pe de altă parte planul normal la curbă, în punctul curent M, are ecuația

$$(\operatorname{sh}t\cos t-\operatorname{ch}t\sin t)(x-a\operatorname{ch}t\cos t)+(\operatorname{sh}t\sin t+\operatorname{ch}t\cos t)$$
$$(y-a\operatorname{ch}t\sin t)+z-at=0.$$

Orice dreaptă din acest plan este o normală; una din ele se sprijină pe Oz și anume va fi aceia care unește punctul M depe curbă, cu punctul unde planul precedent înțeapă axa Oz. Acest din urmă punct M' se găsește făcând în ecuația precedentă $x=y=0$. Rezultă coordonatele $M'[0, 0, a(\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t+t)]$ Dar,

$$MM'^2=a^2\operatorname{ch}^2t\cos^2t+a^2\operatorname{ch}^2t\sin^2t+a^2\operatorname{sh}^2t\operatorname{ch}^2t=a^2\operatorname{ch}^2t(1+\operatorname{sh}^2t)=a^2\operatorname{ch}^4t,$$

de unde rezultă proprietatea din enunț

63. 5. *Se dă curba*

$$x=\frac{z^5}{10},\quad y=\frac{z^3}{3}.$$

Se cere să se calculeze cosinii directori ai muchiilor triedrului lui Frênet apoi curbura și torsiunea.

Luând pe z ca parametru pe curbă, avem

$$ds=\frac{1}{2}(z^4+2)\,dz.$$

Alegând pe dz pozitiv cosinii directori ai tangentei vor fi

$$\alpha_1=\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{dz}\frac{dz}{ds}=\frac{1}{2}z^4\frac{2}{z^4+2}=\frac{z^4}{z^4+2},\quad \beta_1=\frac{2z^2}{z^4+2},\quad \gamma_1=\frac{2}{z^4+2}.$$

Derivând aceste valori în raport cu arcul, găsim

$$\frac{d\alpha_1}{ds}=\frac{d\alpha_1}{dz}\cdot\frac{dz}{ds}=\frac{16z^3}{(z^4+2)^3},\quad \frac{d\beta_1}{ds}=\frac{8z(-z^4+2)}{(z^4+2)^3},\quad \frac{d\gamma_1}{dz}=-\frac{16z^3}{(z^4+2)^3}.$$

Primele formule ale lui Frênet ridicate la pătrat și adunate dau (ținem seamă că α_2, β_2, γ_2 sunt cosini directori)

$$R=\epsilon\frac{(z^4+2)^2}{8z}.$$

unde ϵ este semnul lui z.

În baza formulelor lui Frênet. avem mai departe

$$\alpha_2=R\frac{d\alpha_1}{ds}=\frac{2\epsilon z^2}{z^4+2},\quad \beta_2=\epsilon\frac{2-z^4}{z^4+2},\quad \gamma_2=\frac{-2\epsilon z^2}{z^4+2}.$$

Pentruca triedrul lui Frênet să fie la fel orientat ca și triedrul fundamental trebue să luăm (prob. 28. 8).

$$\alpha_3=\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1=\frac{-2\epsilon}{z^4+2},\quad \beta_3=\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2=\frac{2\epsilon z^2}{z^4+2},\quad \gamma_3=\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2=\frac{-\epsilon z^4}{z^4+2}.$$

Folosind una, de exemplu prima, din a treia grupă de formule Frênet, avem

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{\alpha_2}\frac{d\alpha_3}{ds}=\frac{1}{\alpha_2}\frac{d\alpha_3}{dz}\frac{dz}{ds}=\frac{8z}{(z^4+2)^2},\quad T=\frac{(z^4+2)^2}{8z}.$$

63. 6. *Să se arate că dealungul curbei*

$$x=e^u\cos(u\sqrt{3}),\quad y=e^u\sin(u\sqrt{3}),\quad z=e^{-2u},$$

avem relația

$$Td^2=\text{const},$$

unde d este distanța originei până la planul osculator la curbă.

Se găsește

$$A=8\sqrt{3}e^{-u}\cos(u\sqrt{3}),\quad B=8\sqrt{3}e^{-u}\sin(u\sqrt{3}),\quad C=4\sqrt{3}\,e^{2u};$$

$$A^2+B^2+C^2=48(4e^{-2u}+e^{4u});\quad \Delta=-96\sqrt{3}$$

și deci

$$T=\frac{1}{2\sqrt{3}}(4e^{-2u}+e^{4u}).\qquad (1)$$

Pedealtă parte, ecuația planului osculator este

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

unde (X, Y, Z) reprezintă coordonatele unui punct curent. Conform unei formule cunoscute, avem

$$d^2=\frac{(Ax+By+Cz)^2}{A^2+B^2+C^2}=\frac{9}{4e^{-2u}+e^{4u}}. \qquad (2)$$

Cu ajutorul lui (1) și (2) găsim

$$Td^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

§ 64. Reprezentarea analitică a suprafețelor. Plan tangent și normală la suprafețe. Suprafețe riglate

1. O suprafață oarecare din spațiu (suprafață strâmbă) poate fi reprezentată în patru feluri.

a) Cartezian sub forma: $f(x, y, z)=0$, sau explicit: $z=g(x, y)$, fiecare din aceste relații reprezentând o legătură între coordonatele carteziene ale punctului curent ce descrie suprafața.

b) Parametric atunci când coordonatele punctului curent sunt funcțiuni de doi parametri

$$x=f(u,v),\quad y=g(u,v),\quad z=h(u,v), \qquad (I)$$

parametrii u și v fiind independenți între ei, Ecuațiile: $u=$const și $v=$const. determină pe suprafață două familii de curbe numite *curbe parametrice* sau *curbe de coordonate.*

Observație. Dacă o suprafață este dată prin ecuația *carteziană*: $z=g(x, y)$, rezultă reprezentarea parametrică

$$x=u,\quad y=v,\quad z=g(u,v).$$

c) Polar (sau sferic), atunci când suprafața este definită printr'o relație de forma: $f(\rho, \theta, \varphi)=0$, sau explicit $\rho=g(\theta, \varphi)$, ce leagă între ele coordonatele polare (sferice) ale punctului curent. Reamintim că prin *coordonatele polare (sferice)* ale unui punct din spațiu se înțeleg (fig. 101) segmentul orientat $\overline{OM}=\rho$, unghiul θ ce face direcția pozitivă a acestui segment cu direcția pozitivă a axei Oz, unghiul φ ce face proiecția direcției pozitive a segmentului $\overline{OM}$ cu direcția pozitivă a axei Ox. Legătura dintre aceste coordonate și coordonatele carteziene este definită prin formulele

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta. \qquad (II)$$

Înlocuind în aceste formule pe ρ prin valoarea sa dată de ecuația suprafeței, $\rho=g(\theta, \varphi)$, formulele (II) definesc parametric suprafața, parametrii fiind θ și φ.

d) Cilindric (semipolar) atunci când suprafața este definită printr'o ecuație de forma: $f(\rho, \theta, z)=0$, sau explicit $z=g(\rho, \theta)$, unde z este cota

punctului (fig. 102), iar ρ și θ coordonatele polare ale proiecției punctului M pe planul xOy.

2. Fiind dat un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pe o suprafață, se numește *plan tangent* în acest punct la suprafață, locul geometric al tangentelor la toate curbele depe suprafață ce trec prin M_0;

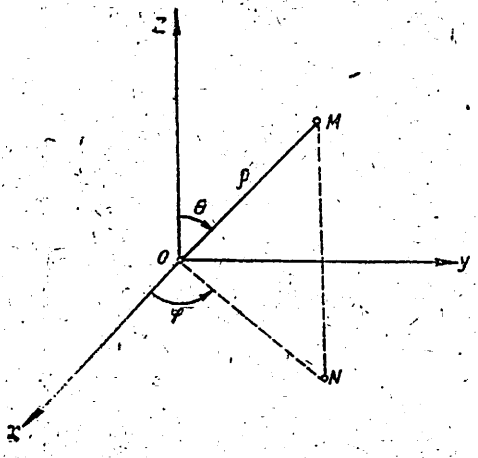


Fig. 101

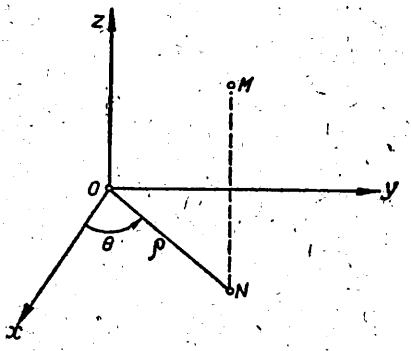


Fig. 102

se numește deasemeni *normală* în punctul M la suprafață, perpendiculara ridicată în M_0 pe planul tangent. Dacă într'un punct al unei suprafețe planul tangent nu este determinat, punctul se numește *punct singular* pentru suprafață.

La o suprafață, reprezentată cartezian prin ecuația: $f(x,y,z)=0$, într'un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$, ecuația planului tangent este

$$f'_{x_0}(x-x_0)+f'_{y_0}(y-y_0)+f'_{z_0}(z-z_0)=0, \qquad \text{(III)}$$

iar ecuațiile normalei

$$\frac{x-x_0}{f'_{x_0}}=\frac{y-y_0}{f'_{y_0}}=\frac{z-z_0}{f'_{z_0}}. \qquad \text{(IV)}$$

Dacă suprafața este reprezentată parametric prin ecuațiile (I), atunci un punct M_0 al ei este determinat printr'o grupă de valori (u_0, v_0) date parametrilor. In acest punct planul tangent va avea ecuația

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ f'_{u_0} & g'_{u_0} & h'_{u_0} \\ f'_{v_0} & g'_{v_0} & h'_{v_0} \end{vmatrix}=0 \qquad \text{(V)}$$

iar, normala ecuațiile

$$\frac{x-x_0}{\frac{D(y,z)}{D(u_0,v_0)}}=\frac{y-y_0}{\frac{D(z,x)}{D(u_0,v_0)}}=\frac{z-z_0}{\frac{D(x,y)}{D(u_0,v_0)}}. \qquad \text{(VI)}$$

3. Se numește *suprafață riglată* o suprafață născută din mișcarea unei drepte în spațiu după o lege anumită. Printre suprafețele riglate există o clasă

numită *suprafețe desfășurabile* cari se bucură de proprietatea că pot fi așternute pe un plan fără rupturi și fără îndoituri. O suprafață desfășurabilă poate fi întotdeauna născută de tangentele la o curbă strâmbă situată pe ea și numită *linie de strictiune.*

64. 1. *Ce reprezintă în coordonate polare ecuațiile*

a) $\rho = \text{const}$, b) $\theta = \text{const}$, c) $\varphi = \text{const}$?

a) Ecuația: $\rho = \text{const}$, reprezintă toate punctele din spațiu a căror distanță la origine este constantă: aceasta însemnează că ecuația reprezintă o sferă cu centrul în origine și de rază ρ.

b) Ecuația: $\theta = \text{const}$, caracterizează toate dreptele care trec prin origine și fac un unghiu constant cu axa Oz. Aceasta însemnează că ecuația considerată reprezintă un con de rotație în jurul axei Oz.

c) Ecuația: $\varphi = \text{const}$, caracterizează toate punctele din spațiu a căror proiecție este pe dreapta ON (fig. 101); ecuația considerată reprezintă deci un plan ce trece prin Oz.

64. 2. *Ce reprezintă în coordonate cilindrice, ecuațiile*

a) $\rho = \text{const}$, b) $\theta = \text{const}$, c) $z = \text{const}$?

a) Ecuația: $\rho = \text{const}$, va caracteriza punctele din spațiu a căror proiecție N (fig. 102) pe planul xOy este egal depărtată de origine. Ecuația considerată va reprezenta în spațiu un cilindru de rotație în jurul axei Oz.

b) dă plan conținând pa Oz iar c) plan paralel cu xOy.

64. 3. *Planul osculator al elicei conține normala la cilindru; să se deducă de aci că normala la cilindru este normala principală a curbei.*

Folosind ecuațiile parametrice ale elicei (prob. 62.1) se găsește ecuația planului osculator:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & k \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

adică: $k[\sin\theta\,(X-x) - \cos\theta\,(Y-y)] + r(Z-z) = 0,$

sau ținând seama de valorile lui x și y,

$$k(X\sin\theta - Y\cos\theta) + r(Z-z) = 0. \qquad (2)$$

Pe de altă parte cilindrul va fi caracterizat în coordonate cilindrice prin ecuația $\rho = r$, iar în coordonate carteziene:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

unde parametrii sunt θ și z. Eliminând între primele două parametrul θ, se găsește că ecuația carteziană a cilindrului este

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \qquad (3)$$

Ca și în (2), întrebuințând litere mari pentru coordonatele punctului curent de pe normală, folosind pe (3), ecuațiile ei se pot scrie

$$\frac{X-x}{2x}=\frac{Y-y}{2y}=\frac{Z-z}{0},$$

sau încă,

$$\frac{X-r\cos\theta}{\cos\theta}=\frac{Y-r\sin\theta}{\sin\theta}=\frac{Z-z}{0}.$$

Înmulțind numitorii cu r și adunându-i la numărători, aceste ecuații se scriu mai simplu

$$\frac{X}{\cos\theta}=\frac{Y}{\sin\theta}=\frac{Z-z}{0},$$

de unde:

$$X\sin\theta-Y\cos\theta=0,\quad Z-z=0.$$

Orice plan ce trece prin această dreaptă va avea ecuația de forma

$$X\sin\theta-Y\cos\theta+\lambda(Z-z)=0.$$

Luând aci: $\lambda=r/k$ obținem ecuația planului osculator, ceiace demonstrează prima parte a problemei.

Orice dreaptă care este perpendiculară pe tangenta la elice este normală la curbă. Cum normala la cilindru este perpendiculară pe planul tangent al lui și cum acest plan conține toate tangentele la curbele depe suprafață ce trec prin punct, ea va fi perpendiculară și pe tangenta la elice, adică va fi o normală a ei. Cum această normală se găsește în planul osculator, este normala principală a elicei.

64. 4. *Se numește suprafață elicoidală sau elicoid suprafața definită prin ecuațiile parametrice*

$$x=\varphi(u)\cos\theta,\quad y=\varphi(u)\sin\theta,\quad z=f(u)+k\theta. \tag{1}$$

Să se studieze aceste suprafețe.

Se știe că în general, *o suprafață de rotație*, a cărei meridiană situată în planul xOz, este definită prin,

$$x=\varphi(u),\quad z=f(u); \tag{2}$$

are ecuațiile parametrice

$$x=\varphi(u)\cos\theta,\quad y=\varphi(u)\sin\theta,\quad z=f(u). \tag{3}$$

Comparând aceste ecuații cu ecuațiile (1), rezultă că suprafețele elicoidale sunt suprafețe născute de curba (2) supusă în același timp la două mișcări: o mișcare de rotație în jurul axei Oz și una de translație dealungul aceleași axe proporțională cu mișcarea de rotație. Această a doua mișcare se traduce prin adăogarea la cea de-a treia coordonată, termenului $k\theta$.

În particular, dacă dăm o *mișcare elicoidală* axei Oy ($x=z=0$), obținem suprafața

$$x=u\cos\theta,\quad y=u\sin\theta,\quad z=k\theta, \tag{4}$$

numită *suprafață șurub*. Curbele parametrice ale suprafeței șurub, sunt drepte orizontale ($\theta=$ const) și elice circulare situate pe cilindri de raze: $u=$ const, având toți drept axă pe Oz, adică fiind *coaxiali*.

In general, elicoizii au drept curbe parametrice, curbele meridiane situate într'un plan oarecare $\theta=\text{const}$ și elice circulare situate pe cilindri coaxiali. Curbele meridiane sunt egale cu (2) diferind numai ca poziție.

64. 5. *Se consideră suprafața a cărei ecuație este de forma*

$$f(P, Q)=0. \tag{1}$$

unde P și Q sunt două polinoame de gr. 1 în x, y, z,

$$P=ax+by+cz+d. \quad Q=a'x+b'y+c'z+d'. \tag{2}$$

Să se demonstreze că planul tangent într'un punct M_0 al suprafeței, conține dreapta ce trece prin el și este paralelă cu dreapta de ecuații

$$P=0, \quad Q=0, \tag{3}$$

(se presupune implicit că planele $P=0$, $Q=0$ nu sunt paralele).

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct al suprafeței, adică prin ipoteză

$$f(P_0, Q_0)=0,$$

unde am pus

$$P_0=ax_0+by_0+cz_0+d, \quad Q_0=a'x_0+b'y_0+c'z_0+d', \tag{4}$$

Se știe din Geometria Analitică, că o dreaptă paralelă cu (3) are ecuațiile de forma

$$P+\lambda=0, \quad Q+\mu=0,$$

unde λ și μ sunt doi parametri. Pentru ca această dreaptă să treacă prin M_0 este necesar ca coordonatele acestui punct să-i verifice ecuațiile adică

$$P_0+\lambda=0, \quad Q_0+\mu=0,$$

de unde scoatem valorile parametrilor: $\lambda=-P_0$, $\mu=-Q_0$. Așa dar, dreapta ce trece prin M și este paralelă cu (3) are ecuațiile

$$P-P_0=0, \quad Q-Q_0=0, \tag{5}$$

unde P_0 și Q_0 au valorile (4). Aceste două ecuații scrise dezvoltat sunt

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0, \quad a'(x-x_0)+b'(y-y_0)+c'(z-z_0)=0.$$

Ecuația planului tangent în M_0 la suprafață este

$$f'_{x_0}(x-x_0)+f'_{y_0}(y-y_0)+f'_{z_0}(z-z_0)=0, \tag{6}$$

unde, derivând după formula funcțiunilor compuse,

$$f'_{x_0}=f'_{P_0}P'_{x_0}+f'_{Q_0}Q'_{x_0}=af'_{P_0}+a'f'_{Q_0}, \ldots$$

încât ordonând altfel, ecuația (6) se scrie

$$f'_{P_0}[a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)]+f'_{Q_0}[a'(x-x_0)+b'(y-y_0)+c'(z-z_0)]=0;$$

$$f'_{P_0}(P-P_0)+f'_{Q_0}(Q-Q_0)=0, \tag{7}$$

f'_{P_0} și f'_{Q_0} fiind două constante. Forma acestei ecuații ne spune că orice punct ce verifică ecuațiile (5), va verifica deasemenea ecuația (7); cu alte cuvinte, planul (7) conține dreapta (5).

Rezultatul se explică prin faptul, că ecuația (1) reprezintă un cilindru având generatoarele paralele cu dreapta (2).

64. 6. *Se consideră dreapta de ecuații*

$$x=az+p, \quad y=bz+q, \tag{1}$$

în care a, b, p, q sunt funcțiuni de un parametru, de ex., t. Când acest parametru variază, dreapta ocupă diferite poziții în spațiu și descrie o suprafață, care se numește suprafață riglată. Să se scrie planul tangent într'un punct al suprafeței și apoi să se arate că acest plan conține în întregime generatoarele suprafeței ce trece prin acel punct.

Dreapta (1) dând naștere suprafeței se numește *generatoarea* ei. Prin fiecare punct al suprafeței trece câte o generatoare. O reprezentare parametrică a suprafeței se obține luând drept parametrii pe t și z. La fiecare grupă de valori ale acestor parametrii vom avea un punct pe suprafață. Alegem un punct M_0 corespunzător valorilor $t=t_0$, $z=z_0$ și fie x_0, y_0, z_0 coordonatele lui; atunci, în baza lui (1)

$$x_0=a_0 z_0+p_0, \quad y_0=b_0 z_0+q_0, \tag{2}$$

însemnând prin a_0, b_0, p_0, q_0 valorile lui a, b, p, q când înlocuim pe t prin t_0. Dacă notăm cu (x, y, z) coordonatele punctului curent al planului tangent, ecuația lui se va scrie

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_0'z_0+p_0' & b_0'z_0+q_0' & 0 \\ a_0 & b_0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

accentele marcând operația derivării în raport cu t. Această ecuație dezvoltată după linia a doua, se scrie

$$(b_0'z_0+q_0')[x-x_0-a_0(z-z_0)]-(a_0'z_0+p_0')[y-y_0-b_0(z-z_0)]=0.$$

Dar, în baza formulelor (2),

$$(b_0'z_0+q_0')[x-a_0z-p_0)-(a_0'z_0+p_0')(y-b_0z-q_0)=0. \tag{3}$$

Această formă a ecuației planului tangent, spune că el conține dreapta de ecuații

$$x-a_0z-p_0=0, \quad y-b_0z-q_0=0;$$

dar această dreaptă nu este alta decât dreapta (1) corespunzătoare valorii $t=t_0$, adică este generatoarea suprafeței care trece prin M_0.

64. 7. *Se zice că o suprafață riglată este desfășurabilă atunci când planul tangent la suprafață nu variază dealungul generatoarei. Dacă ecuațiile generatoarei (D) sunt scrise sub forma*

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}, \tag{1}$$

să se găsească condiția ca suprafața să fie desfășurabilă.

Am văzut la problema precedentă că dacă pe suprafața riglată descrisă de o dreaptă (D) alegem un punct M_0, planul tangent în acest punct conține

dreapta (D); aceasta nu înseamnă că planul tangent rămâne același oricare ar fi punctul M_0 pe generatoare. Din contră, în general el se schimbă odată cu punctul ales formând un fascicol a cărui muchie este însăși generatoarea.

Să ne situăm mai întâiu în ipoteza că suprafața este născută, ca și la problema precedentă, de dreapta

$$x=az+p, \quad y=bz+q, \tag{2}$$

unde a, b, p, q sunt funcții de t. Un punct oarecare M_0 este determinat prin valorile parametrilor (t_0, z_0). Când facem să varieze t singur dreapta ia diferite poziții, iar când facem să varieze numai z, dreapta stă pe loc și se mișcă punctul M_0 dealungul ei. Să ne situăm în această ultimă ipoteză. Planul tangent este dat de ecuația (3) dela problema precedentă. Această ecuație scrisă sub forma

$$x-a_0z-p_0-\frac{a_0'z_0+p_0'}{b_0'z_0+q_0'}(y-b_0z-q_0)=0,$$

spune că planul tangent nu depinde de z_0 decât prin intermediul fracției. Aceasta înseamnă că planul tangent nu va depinde de poziția lui M_0 pe generatoare, atunci când această fracție nu va depinde de z_0, adică atunci când (prob. 8. 14),

$$\frac{a_0'}{b_0'}=\frac{p_0'}{q_0'}; \quad a_0'q_0'-b_0'p_0'=0.$$

Dacă această egalitate are loc oricare ar fi t, adică dacă avem

$$a'q'-b'p'=0; \tag{3}$$

suprafața este desfășurabilă.

Să presupunem că suprafața este născută de o dreaptă scrisă sub forma (1); scriind

$$x-x_1=\frac{l}{n}(z-z_1), \quad y-y_1=\frac{m}{n}(z-z_1),$$

și comparând cu (2) avem valorile

$$a=\frac{l}{n}, \quad b=\frac{m}{n}, \quad p=x_1-\frac{l}{n}z_1, \quad q=y_1-\frac{m}{n}z_1,$$

Condiția (3) se scrie după efectuarea calculelor:

$$(l'n-ln')(ny_1'-mz_1')-(m'n-mn')(nx_1'-lz_1')=0,$$

expresie care se poate scrie sub formă de determinant

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

§ 65. Curbe pe suprafață. Curbura suprafețelor

1. Dacă suprafața este dată sub formă carteziană

$$F(x, y, z)=0, \tag{1}$$

o curbă pe suprafață este definită prin intersecția ei cu o a doua suprafață

$$G(x, y, z)=0. \tag{I'}$$

Ecuațiile curbei vor fi formate din ecuațiile (I), (I'); sau, dacă o curbă

$$x=f(t), \quad y=g(t), \quad z=h(t), \tag{II}$$

se află pe suprafața (I), trebue ca egalitatea

$$F[f(t), g(t), h(t)]=0,$$

să fie o identitate.

Dacă suprafața este dată sub forma parametrică

$$x=f(u, v), \quad y=g(u, v), \quad z=h(u, v), \tag{III}$$

o curbă pe suprafață va fi definită printr'o relație între u și v, sau va fi definită prin două ecuații de forma

$$u=u(t), \quad v=v(t). \tag{IV}$$

2. Fiind dată o suprafață reprezentată parametric prin (III), se numește *element de arc al suprafeței*, elementul ds definit prin formula

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2, \tag{V}$$

unde

$$E=\sum x_u^2, \quad F=\sum x_u x_v, \quad G=\sum x_v^2.$$

notând $x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}, \ldots$ derivatele parțiale ale lui x în raport cu u și v*).

Dacă se dă o curbă pe suprafață, definită prin ecuațiile (IV), formula (V) dă elementul ei de arc.

3. **Linii de curbură.** In general fiind dată o curbă pe o suprafață dealungul ei normalele la suprafață dau naștere unei suprafețe riglate; dacă această suprafață riglată este desfășurabilă se zice că curba depe suprafață este o linie de curbură. Prin fiecare punct al unei suprafețe trec două linii de curbură ale căror tangente sunt perpendiculare.

a) Dacă suprafața este dată prin ecuația ei carteziană

$$z=f(x, y), \tag{VI}$$

și dacă notăm cu p, q, r, s, t derivatele parțiale ale lui z în raport cu x și y liniile de curbură sunt definite prin ecuația

$$[pqr-(1+p^2)s]dx^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]dxdy+ \\ +[(1+q^2)s-pqt]dy^2=0 \tag{VII}$$

Acest lucru trebue înțeles în felul următor: ecuația (VII) se rezolvă în raport cu $\frac{dy}{dx}$ și fie

$$\frac{dy}{dx}=g_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx}=g_2(x, y)$$

*) Aceste notații se folosesc în special în *Geometria diferențială*.

cele două soluții ce se obțin. După cum vom vedea în curând, aceste două ecuații se numesc *ecuații diferențiale* (Cap. 13) și în general au soluții de forma

$$G_1(x, y, C_1)=0, \quad G_2(x, y, C_2)=0,$$

unde C_1 și C_2 sunt două constante arbitrare. Fiecare din aceste ecuații, luată împreună cu (VI), definește o familie de curbe. Aceasta înseamnă că pe suprafață sunt *două familii* de linii de curbură, prin fiecare punct al suprafeței trecând câte o curbă a familiei. Dacă am vrea ca să determinăm curbele familiilor ce trec prin punctul M_0, determinăm constantele C_1 și C_2 prin condițiile

$$G_1(x_0, y_0, C_1)=0, \quad G_2(x_0, y_0, C_2)=0.$$

b) Dacă suprafață este dată parametric prin ecuațiile (III), liniile de curbură sunt definite prin ecuația

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix}=0, \tag{VIII}$$

unde D, D', D'' au valorile

$$D=\begin{vmatrix} x_{uu} & x_u & x_v \\ y_{uu} & y_u & y_v \\ z_{uu} & z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad D'=\begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix},$$

$$D''=\begin{vmatrix} x_{vv} & x_u & x_v \\ y_{vv} & y_u & y_v \\ z_{vv} & z_u & z_v \end{vmatrix}. \tag{IX}$$

Ecuația (VIII) se descompune în două ecuații diferențiale care definesc cele două familii ale liniilor de curbură depe suprafață.

4. Linii asimptotice. Se zice că o curbă de pe o suprafață este linie asimptotică, dacă dealungul ei planul ei osculator este confundat cu planul tangent la suprafață. Pe suprafață sunt două familii de linii asimptotice, prin fiecare punct trecând câte două linii asimptotice, câte una din fiecare familie.

a) Dacă suprafața este dată cartezian prin ecuația (VI), liniile asimptotice sunt definite prin ecuația

$$rdx^2+2sdxdy+tdy^2=0 \tag{X}$$

în sensul celor spuse la a), nr. precedent.

b) Dacă suprafața este dată parametric prin ecuațiile (III), atunci liniile asimptotice sunt definite prin ecuația

$$Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2=0. \tag{XI}$$

5. Linii geodezice. Între două puncte pe o suprafață, se numește curbă geodezică, curba care dă pe suprafață distanța cea mai scurtă între ele. Se arată că dealungul unei curbe geodezice, planul ei osculator conține normala

suprafeței. Plecând dela această definiție, ecuațiile ce definesc liniile geodezice ale unei suprafețe se găsesc scriind că parametrii directori ai normalei principale dealungul curbei, sunt proporționali cu parametrii directori ai normalei la suprafață, sau că planul osculator la curbă conține normala la suprafață. Spre deosebire de liniile de curbură și liniile asimptotice, prin fiecare punct al unei suprafețe trec o infinitate de geodezice. Cu alte cuvinte pentru a determina o geodezică a unei suprafețe, este necesar ca pe lângă punctul de pe suprafață să ni se dea și tangenta ei în acest punct.

6. Fiind dată o suprafață, reprezentată parametric prin ecuațiile (III), se numesc *raze de curbură principale*, valorile pe care le ia expresia

$$R=\rho\sqrt{A^2+B^2+C^2}, \tag{XII}$$

când înlocuim pe ρ cu una din rădăcinile ecuației

$$\begin{vmatrix} x_u+\rho A_u & x_v+\rho A_v & A \\ y_u+\rho B_u & y_v+\rho B_v & B \\ z_u+\rho C_u & z_v+\rho C_v & C \end{vmatrix}=0, \tag{XIII}$$

A, B, C fiind parametrii directori ai normalei la suprafață, adică

$$A=\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}. \tag{XIV}$$

Se numește *curbură totală* a unei suprafețe într'un punct, expresia

$$K=\frac{1}{R_1R_2}, \tag{XV}$$

iar *curbura mijlocie*, expresia

$$C=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}, \tag{XVI}$$

R_1 și R_2 fiind razele de curbură principale calculate în punctul ales pe suprafață.

65. 1. *Se consideră elicoidul* (prob. 64. 4)

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=kv,$$

și se cere să se arate că dealungul liniilor de curbură, una din expresiile

$$\ln(u+\sqrt{u^2+k^2})\pm v,$$

rămâne constantă.

Avem

$$E=1,\ F=0,\ G=u^2+k^2;\quad D=0,\ D'=-k,\ D''=0.$$

Înlocuind aceste valori în (VIII), se găsește că liniile de curbură ale suprafeței sunt determinate de ecuația

$$\frac{dv}{du}=\frac{1}{\pm\sqrt{u^2+k^2}}.$$

Pedealtă parte, notând expresia dată cu M, considerând pe v ca funcție de u și ținând seamă că dealungul liniilor de curbură avem relația (1), avem

$$\frac{dM}{du}=\frac{1+\frac{u}{\sqrt{u^2+k^2}}}{u+\sqrt{u^2+k^2}}\pm\frac{dv}{du}=\frac{1}{\sqrt{u^2+k^2}}\pm\frac{dv}{du}=0,$$

adică $M=\text{const}$.

65. 2. *Să se găsească liniile asimptotice ale suprafețelor desfășurabile.*

Am văzut cu ocazia rezolvării problemei 64. 6 că o suprafață riglată în general poate fi considerată ca născută din mișcarea dreptei

$$x=az+p,\quad y=bz+q \tag{1}$$

unde a, b, p, q, sunt funcții de un parametru. Condiția ca această suprafață să fie desfășurabilă este ca (prob. 64. 7)

$$a'q'-b'p'=0. \tag{2}$$

Să presupunem că parametrul de care depinde dreapta (1) este u și al doilea parametru îl luăm pe $z=v$. Reprezentarea parametrică a suprafeței este

$$x=av+p,\quad y=bv+q,\quad z=v.$$

Avem

$$D=\begin{vmatrix} a''v+p'' & a'v+p' \\ b''v+q'' & b'v+q' \end{vmatrix},\quad D'=\begin{vmatrix} a' & p' \\ b' & q' \end{vmatrix},\quad D''=0.$$

În baza ecuației (XI), ecuația care definește liniile asimptotice pe o suprafață riglată va fi

$$Ddu^2+2D'dudv=du(Ddu+2D'dv)=0 \tag{3}$$

ceeace înseamnează că dealungul unei familii de asimptotice vom avea: $du=0$, adică: $u=\text{const}$. Ori, după cum am spus la prob. 64. 7, această condiție caracterizează dreapta (1), cu alte cuvinte *o familie de asimptotice o formează însăși generatoarele rectilinii.* Dacă suprafața este desfășurabilă, condiția (2) ne spune că ecuația (3) se reduce la: $du^2=0$, adică *cele două familii de asimptotice sunt confundate și confundate cu generatoarele rectilinii ale suprafeței.*

65. 3. *Se consideră suprafața*

$$x=a\cos u\cos v,\quad y=a\sin u\cos v,\quad z=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}v+\frac{1}{4}\pi\right)-a\sin v. \tag{1}$$

Să se arate că dacă dealungul unei linii avem

$$\frac{du}{dv}=\frac{\sqrt{c\sin v}}{\cos^2 v\sqrt{a^2\cos^2 v-c}}, \tag{2}$$

unde c este o constantă [arbitrară, linia respectivă este o curbă geodezică.

Presupunând pe u ca funcție de v, ecuațiile (1) definesc o curbă situată pe suprafață. Însemnând cu accente derivatele în raport cu v, avem dealungul curbei,

$$x' = -a(\sin u \cos v \cdot u' + \cos u \sin v), \quad y' = a(\cos u \cos v \cdot u' - \sin u \sin v),$$

$$z' = \frac{1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{4}\pi\right)\cos^2\left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{4}\pi\right)} - a\cos v = \frac{1}{\cos v} - a\cos v = \frac{1 - a\cos^2 v}{\cos v};$$

$$x'' = a[2\sin u \sin v \cdot u' - \cos u \cos v(1 + u'^2) - \sin u \cos v \cdot u''],$$

$$y'' = a[-2\cos u \sin v \cdot u' - \sin u \cos v(1 + u'^2) + \cos u \cos v \cdot u''],$$

$$z'' = \frac{\sin v}{\cos^2 v} + a\sin v = \frac{\sin v\,(1 + a\cos^2 v)}{\cos^2 v}.$$

Pedealtă parte, pe suprafață (u și v fiind independenți), avem

$$x_u = -a\sin u \cos v, \; y_u = a\cos u \cos v, \; z_u = 0;$$

$$x_v = -a\cos u \sin v, \; y_v = -a\sin u \sin v, \; z_v = \frac{1 - a\cos^2 v}{\cos v},$$

încât parametrii directori ai normalei sunt

$$A = a\cos u\,(1 - a\cos^2 v), \quad B = a\sin u(1 - a\cos^2 v), \quad C = a^2 \sin v \cos v.$$

Scriind că normala la suprafață se găsește în planul osculator, obținem ecuația ce definește liniile geodezice

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

ecuație care dezvoltată se scrie

$$(a^2\cos^2 v - 2a\cos^2 v + 1)\,u'' - a^2 u'(1 + u'^2)\sin v \cos^3 v -$$

$$- u'\left[a^2 \sin v \cos v\,(1 + \sin^2 v) + \frac{\sin v\,(3 - 4a\cos^2 v)}{\cos v}\right] = 0. \qquad (3)$$

Relația (2) scrisă sub forma

$$\cos^4 v(a^2\cos^2 v - c)\,u'^2 = c\sin v, \qquad (4)$$

și derivată dă

$$2\cos^3 v(a^2\cos^2 v - c)u'u'' - 2\cos^2 v \sin v\,(3a^2\cos^2 v - 2c)u'^2 = c. \qquad (5)$$

Problema cere să verificăm că relațiile (4) și (5) verifică relația (3). În acest scop se va scoate din (5) valoarea lui $u'u''$ care se va înlocui în (3) înmulțită în prealabil cu u'; în rezultat se înlocuiește u'^2 prin valoarea sa scoasă din (4). Rezultatul acestor înlocuiri conduce la o identitate.

65. 4. *În fiecare punct, dealungul unei linii geodezice depe o suprafață de rotație, produsul dintre raza paralelului corespunzător punctului și cosinusul unghiului sub care geodezica taie acest paralel, este constant.*

Considerăm suprafața ca având drept axă pe Oz; se știe că o asemenea suprafață are ecuația de forma

$$z = f(x^2 + y^2).$$

Scriind ecuația suprafeței sub forma

$$F=f(x^2+y^2)-z=0,$$

parametrii directori ai normalei la suprafață într'un punct oarecare de coordonate (x, y, z) sunt

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2),\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2yf'(x^2+y^2),\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-1.$$

încât dacă notăm cu $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ cosinusele directoare ale normalei principale la geodezică, va trebui să avem

$$\frac{\alpha_2}{2xf'(x^2+y^2)}=\frac{\beta_2}{2yf'(x^2+y^2)}=\frac{\gamma_2}{-1}.$$

Primele două ecuații spun că trebue să avem

$$y\alpha_2-x\beta_2=0;$$

dar, conform formulelor lui Frenet (§ 63, no. 4), această relație se mai scrie

$$y\frac{d\alpha_1}{ds}-x\frac{d\beta_1}{ds}=0,$$

unde s este arcul iar $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ cosinusele directoare ale tangentei la geodezică. Deoarece

$$\alpha_1=\frac{dx}{ds},\quad \beta_1=\frac{dy}{ds},\quad \gamma_1=\frac{dz}{ds},$$

relația se mai scrie

$$y\frac{d^2x}{ds^2}-x\frac{d^2y}{ds^2}=0 \quad \text{sau} \quad \frac{d}{ds}\left(y\frac{dx}{ds}-x\frac{dy}{ds}\right)=0,$$

ceiace spune că expresia din paranteză este constantă, adică

$$y\frac{dx}{ds}-x\frac{dy}{ds}=C. \quad (C=\text{const.}) \tag{1}$$

Paralelul pe care se găsește punctul (x, y, z) are centrul pe Oz și este situat într'un plan paralel cu xOy, adică coordonatele centrului sunt $(0, 0, z)$ și deci parametrii directori ai razei sunt $(x, y, 0)$; aceasta înseamnează că parametrii directori ai tangentei la paralel vor fi $(-y, x, 0)$, și deci cosinusele directoare

$$\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 0\right),$$

sau, notând cu $r=\sqrt{x^2+y^2}$ raza paralelului,

$$\left(-\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ 0\right).$$

Cum ecuația (1) se mai scrie

$$r\left(\frac{y}{r}\frac{dx}{ds}-\frac{x}{r}\frac{dy}{ds}+0\cdot\frac{dz}{ds}\right)=-C,$$

adică: $r\cos V=\text{const}$, V fiind unghiul din enunțul problemei.

65. 5. *Să se găsească expresia curburilor unei suprafețe în cazul reprezentării:* $z=f(x,y)$.

Folosim reprezentarea parametrică

$$x=u,\quad y=v,\quad z=f(u,v).$$

Avem pentru derivate

$$A=-p,\quad B=-q,\quad C=1,$$

de unde urmează

$$A_u=-r,\quad B_u=-s,\quad C_u=0,\quad A_v=-s,\quad B_v=-t,\quad C_v=0,$$

încât ecuația (XIII) devine

$$\begin{vmatrix} 1-r\rho & -s\rho & -p \\ -s\rho & 1-t\rho & -q \\ p & q & 1 \end{vmatrix}=0$$

care desvoltat se scrie (notațiile sunt cele din prob. 55.7, sol. II)

$$(rt-s^2)\rho^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]\rho+(p^2+q^2+1)=0.$$

Cum: $A^2+B^2+C^2=p^2+q^2+1$, vom avea următoarele expresii pentru curburi

$$K=\frac{1}{(A^2+B^2+C^2)\rho_1\rho_2}=\frac{rt-s^2}{(p^2+q^2+1)^2},\quad C=\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\frac{[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]}{\sqrt{(p^2+q^2+1)^3}}.$$

În aceste formule, q,p,r,s,t au valorile calculate în punctul unde calculăm curburile.

65. 6. *Să se găsească curburile paraboloidului*

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,$$

în vârf (adică în origine).

Găsim

$$K=\frac{1}{pq};\quad C=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

65. 7. *Într'un punct al unei cuadrice propriu zise cu centru, expresia* K/d^4, *unde* K *este curbura suprafeței iar* d *distanța dela origine la planul tangent, este constantă.*

Considerăm centrul cuadricei luat drept origine și axele ei de simetrie drept axe de coordonate; ecuația cuadricei propriuzisă, scrisă sub formă redusă, este de forma

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-1=0,$$

A,B,C, putând fi pozitivi sau negativi. Rezolvând această ecuație în raport cu z obținem

$$z^2=C\left(1-\frac{x^2}{A}-\frac{y^2}{B}\right).\qquad(1)$$

Derivând această ecuație în raport cu x și y, folosind notațiile obișnuite avem

$$p=-\frac{C}{A}\frac{x}{z},\quad q=-\frac{C}{B}\frac{y}{z}. \tag{2}$$

Prima derivată în raport cu x dă mai departe

$$r=-\frac{C}{A}\left(\frac{1}{z}-\frac{xp}{z^2}\right)=-\frac{C}{Az^3}\left[C\left(1-\frac{x^2}{A}-\frac{y^2}{B}\right)+\frac{C}{A}x^2\right]=-\frac{C^2}{Az^3}\left(1-\frac{y^2}{B}\right), \tag{3}$$

și analog

$$s=-\frac{C^2xy}{ABz^3},\quad t=-\frac{C^2}{Bz^3}\left(1-\frac{x^2}{A}\right). \tag{4}$$

Formulele (3), (4) dau

$$rt-s^2=\frac{C^4}{ABz^6}\left[\left(1-\frac{x^2}{A}\right)\left(1-\frac{y^2}{B}\right)-\frac{x^2y^2}{AB}\right]=\frac{C^4}{ABz^6}\left(1-\frac{x^2}{A}-\frac{y^2}{B}\right)=\frac{C^3}{Abz^4},$$

iar (2),

$$p^2+q^2+1=\frac{C^2}{z^2}\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}\right).$$

Folosind formula stabilită la prob. 65,5, avem

$$K=\frac{1}{ABC\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}\right)^2}. \tag{5}$$

Pe dealtă parte se știe din Geometrie Analitică, că ecuația planului tangent la suprafață în punctul de coordonate (x, y, z), este

$$\frac{xX}{A}+\frac{yY}{B}+\frac{zZ}{C}-1=0,$$

unde (X, Y, Z) sunt coordonatele unui punct curent. Cu ajutorul acestei ecuații, găsim

$$d=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{C^2}}}.$$

Formulele (5) și (6) dau

$$\frac{K}{d^4}=\frac{1}{ABC},$$

expresie ce nu depinde de punctul ales pe cuadrică.

PARTEA A TREIA

CALCULUL INTEGRAL

CAPITOLUL IX.

INTEGRALE NEDEFINITE

§ 66. Formular de integrale uzuale

In interiorul acestui paragraf vom strânge un număr de integrale cari sunt întâlnite adesea şi cari pot fi folosite în probleme ce necesită calculul integral. O parte din formulele ce vor urma vor fi demonstrate în paragrafele următoare. Folosirea formularului se va face în interiorul cărţii printr'o notaţie de forma (f, x), înţelegând prin aceasta că este vorba de formula x din tabloul de mai jos.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (n un număr arbitrar diferit de -1).

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C = \ln C_1 x.$

3. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$ (n un număr arbitrar diferit de -1)

4. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln (ax+b) + C = \frac{1}{a} \ln C_1 (ax+b).$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

7. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C.$

8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

10. $\int \sin mx\, dx = -\frac{\cos mx}{m} + C.$

11. $\int \cos mx dx = \frac{\sin mx}{m} + C.$

12. $\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + C.$

13. $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + C.$

14. $\int \sin mx \cos nx\, dx = -\frac{\cos (m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n)x}{2(m-n)} + C, \qquad (m \neq n).$

15. $\int \sin mx \sin nx\, dx = \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + C. \qquad (m \neq n).$

16. $\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + C. \qquad (m \neq n).$

17. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

18. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

19.[1] $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\cos x + C.$ 20[1] $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\sin x + C.$

21. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$ 22. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$

23. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$ 24. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

25. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$ 26. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{th} x} + C.$

27.[2] $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + C = \frac{1}{2a}\ln\frac{a-x}{a+x} + C.$

28. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C.$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{argsh}\frac{x}{a} + C = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C.$

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{argsh}\frac{x}{a} + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$

32.[3] $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C.$

33.[3] $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C.$

În integralele ce urmează, punem: $ax^2+bx+c=T$ şi $b^2-4ac=R$;

34. $\int \frac{dx}{T} = \frac{1}{\sqrt{R}}\ln\frac{2ax+b-\sqrt{R}}{2ax+b+\sqrt{R}} + C.$ dacă $R>0$.

35. $\int \frac{dx}{T} = \frac{2}{\sqrt{-R}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{-R}} + C.$ dacă $R<0$.

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{T}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(2ax+b+2\sqrt{aT}\right) + C.$ dacă $a>0$.

37.[4] $\int \frac{dx}{\sqrt{T}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{R}} + C.$ dacă $a<0$.

38. $\int \sqrt{T}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{T} - \frac{R}{8a\sqrt{a}}\ln\left(2ax+b+2\sqrt{aT}\right) + C.$ dacă $a>0$.

39. $\int \sqrt{T}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{T} + \frac{R}{8a\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{R}} + C.$ dacă $a<0$.

Formule de reducere (în cele ce urmează n este întreg şi pozitiv).

40. $\int \frac{\alpha x+\beta}{T^n}dx = -\frac{\alpha}{2a(n-1)}\frac{1}{T^{n-1}} + \frac{2\beta a-\alpha b}{2a}\int \frac{dx}{T^n}.$

41.[5] $\int \frac{dx}{T^n} = -\frac{1}{(n-1)R}\frac{2ax+b}{T^{n-1}} - \frac{2(2n-3)a}{(n-1)R}\int \frac{dx}{T^{n-1}}.$

---

[1]) Demonstraţia la prob. 67,12.
[2]) Demonstraţia la pr. 67.7.
[3]) „ „ „ 68.5.
[4]) Demonstraţia la pr. 67.14.
[5]) „ „ „ 69.10.

42.[1] $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$.

Pentrucă această integrală o vom întâlni des în cele ce urmează, dau mai jos primele ei 5 valori

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^3} = \frac{x(3x^2+5a^2)}{8a^4(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^4} = \frac{x(15x^4+40a^2x^2+33a^4)}{48a^6(x^2+a^2)^3} + \frac{5}{16a^7}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^5} = \frac{x(105x^6+385a^2x^4+511a^4x^2+279a^6)}{384a^8(x^2+a^2)^4} + \frac{35}{128a^9}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

43.[2] $\int \frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{T}}dx = \frac{\alpha}{a}\sqrt{T} + \frac{2\beta a-\alpha b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{T}}$.

44. $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{T}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{T}}{ma} - \frac{(m-1)c}{ma}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{T}} - \frac{(2m-1)b}{2ma}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{T}}$.

45.[3] $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x dx$.

46. $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x dx$.

47.[4] $\int \operatorname{tg}^n x dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1}x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2}x dx$.

48. $\int \operatorname{ctg}^n x dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1}x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2}x dx$.

49. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2}x}$.

50. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2}x}$.

51. $\int \sin^n x \cos^m x dx = \frac{\sin^{n+1}x\cos^{m-1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^n x \cos^{m-2}x dx$

$$= -\frac{\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2}x \cos^m x dx.$$

§ 67. Integrale imediate. Integrarea prin substituţie

Fiind dată o funcţie $f(x)$, se numeşte *primitiva* sau *integrala* ei funcţia $F(x)$ a cărei derivată este $f(x)$, adică

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

---

[1]) Demonstraţia la pr. **69.9.**
[2]) „ „ „ **67.15.**
[3]) Demonstraţia la pr. **69.3.**
[4]) „ „ „ **69.4**

Dacă o funcţie admite o primitivă, admite o infinitate, toate diferind de prima printr'o constantă aditivă. Primitiva funcţiei $f(x)$ se notează prin: $\int f(x)\,dx$, încât putem scrie

$$F(x)=\int f(x)\,dx+C.$$

In acest capitol, fără a ne interesa de condiţiile de existenţă ale unei primitive în general, vom arăta, folosind cele cunoscute dela funcţiile derivate, cum se găsesc primitivele unor anume funcţii, cari prin însăşi determinare, se demonstrează existenţa lor.

Astfel, cu ajutorul integralelor din tabloul dela § 66, se pot calcula o mulţime de integrale înlocuind pe x printr'o funcţie oarecare: $u=f(x)$; avem ceeace se numeşte integrarea prin substituţie.

In tot cuprinsul calculului integral vom folosi următoarele două reguli fundamentale

$$\int(u+v)\,dx=\int u dx+\int v dx,\quad \int a u dx=a\int u dx.$$

u şi v fiind funcţii de x iar a o constantă arbitrară. Prima regulă este mai generală pentru cazul când avem o sumă cu un număr finit de termeni.

. . . . . .

67. 1. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int \frac{1}{x-a}\,dx$$

Observăm că: $dx=d(x-a)$ şi deci putem scrie în baza formulei (f. 2)

$$I=\int\frac{dx}{x-a}=\int\frac{d(x-a)}{x-a}=\ln(x-a)+\ln C=\ln C(x-a),$$

unde am pus constanta aditivă sub forma de logaritm pentru scrierea rezultatului sub o formă mai simplă.

Observaţie. Integrala considerată are un sens în cazul când $x<a$ dar rezultatul nu. Insă putem scrie

$$I=-\int\frac{dx}{a-x}=\int\frac{d(a-x)}{a-x}=\ln C(a-x),$$

rezultatul valabil când $x<a$.

Am putea deci scrie, oricare ar fi x,

$$I=\int\frac{dx}{x-a}=\ln C|x-a|.$$

Pentru uşurinţa scrisului vom lăsa barele deoparte, ţinând seamă peste tot că expresiile de sub semnul ln sunt luate în valoare absolută.

67. 2. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int(ax+b)^n dx,$$

n fiind un număr oarecare diferit de —1, (demonstrarea lui f. 3).

Cum: $dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$, avem (f. 1)

$$I=\frac{1}{a}\int(ax+b)^n d(ax+b)=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C.$$

67. 3. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Avem (f. 1)

$$I=\int\frac{2xdx}{2\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{d(x^2-a^2)}{2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{2}\int(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}d(x^2-a^2)=\frac{1}{2}\frac{(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=\sqrt{x^2-a^2}+C.$$

67. 4. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int x\sqrt{x^2-a^2}dx.$$

Avem

$$I=\frac{1}{2}\int(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}d(x^2-a^2)=\frac{1}{2}\frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3}+C.$$

67. 5. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int x^{p-1}(ax^p+b)^q dx$$

unde p, q, a, b sunt 4 numere arbitrare diferite de zero.

Avem două cazuri: a) $q\neq-1$. Atunci cum $x^{p-1}dx=\frac{1}{ap}d(ax^p+b)$,

$$I=\frac{1}{ap}\int(ax^p+b)^q d(ax^p+b)=\frac{1}{ap}\frac{(ax^p+b)^{q+1}}{q+1}+C.$$

b) $q=-1$. Atunci (f. 2)

$$I=\int\frac{x^{p-1}dx}{ax^p+b}=\frac{1}{ap}\int\frac{d(ax^p+b)}{ax^p+b}=\frac{1}{ap}\ln(ax^p+b)+C.$$

67. 6. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int(x+1)(x+2)(x+3)dx.$$

Dezvoltând produsul, avem

$$I=\int x^3dx+6\int x^2dx+11\int xdx+6\int dx=\frac{1}{4}x^4+2x^3+\frac{11}{2}x^2+6x+C.$$

67. 7. *Să se stabilească formula*

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}+C.$$

(demonstrarea lui f. 27).

Ținem seamă de identitatea

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right).$$

Avem, în baza lui (prob. 67.1)

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right)=\frac{1}{2a}[\ln(x-a)-\ln(x+a)]+C=$$
$$=\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}+C.$$

67. 8. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{e^x dx}{1+e^x}.$$

Avem (f. 2)

$$I=\int\frac{d(1+e^x)}{1+e^x}=\ln(1+e^x)+C.$$

67. 9. *Să se stabilească formulele*

$$\int\operatorname{sh}x\,dx=\operatorname{ch}x+C,\quad\int\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x+C,$$

folosind definiția funcțiunilor hiperbolice (demonstrarea formulelor f. 23 și f. 24).

Vom ține seamă că: $\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$, $\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, și de (f.7.)

Avem succesiv

$$\int\operatorname{ch}x\,dx=\frac{1}{2}\int(e^x+e^{-x})dx=\frac{1}{2}\int e^x dx-\frac{1}{2}\int e^{-x}d(-x)=$$
$$=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})+C=\operatorname{sh}x+C.$$
$$\int\operatorname{sh}x\,dx=\frac{1}{2}\int(e^x-e^{-x})dx=\frac{1}{2}\int e^x dx+\frac{1}{2}\int e^{-x}d(-x)=$$
$$=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})+C=\operatorname{ch}x+C.$$

67. 10. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{dx}{x\ln x}.$$

Avem succesiv

$$I=\int\frac{\frac{dx}{x}}{\ln x}=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln(\ln x)+\ln C=\ln C(\ln x).$$

67. 11. *Să se calculeze integralele*

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}},\quad J=\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx.$$

Aceste două integrale arată că, pentru a calcula o integrală ce are radicali, la numitor nu totdeauna este bine să se facă numitorul raţional. În cazul nostru metoda reuşeşte la prima integrală şi dă greş la a doua. Pentru prima avem (f. 1)

$$I=\int\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b})dx}{(x+a)-(x+b)}=\frac{1}{a-b}\left[\int(x+a)^{\frac{1}{2}}d(x+a)-\int(x+b)^{\frac{1}{2}}d(x+b)\right]=$$

$$=\frac{2}{3(a-b)}\left[\sqrt{(a+x)^3}-\sqrt{(x+b)^3}\right]+C.$$

Pentru a doua integrală procedăm invers: facem numărătorul raţional şi avem

$$J=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{-2xdx}{2\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C.$$

(prob. 67.3)

67. 12. *Să se calculeze integralele*

$$I=\int\operatorname{tg}x\,dx,\quad J=\int\operatorname{ctg}x\,dx.$$

(demonstrarea formulelor f. 19 şi f. 20).

Avem (f. 2)

$$I=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln\cos x+\ln C=\ln\frac{C}{\cos x},$$

şi la fel

$$J=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln\sin x+\ln C=\ln C\sin x.$$

67. 13. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\sin\left(2x-\frac{1}{5}\pi\right)\cos\left(4x-\frac{1}{4}\pi\right)dx.$$

Folosim identitatea

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)],$$

şi avem:

$$I=\frac{1}{2}\int\sin\left(6x-\frac{9}{20}\pi\right)dx-\frac{1}{2}\int\sin\left(2x-\frac{1}{20}\pi\right)dx$$

$$=-\frac{1}{12}\cos\left(6x-\frac{9}{20}\pi\right)+\frac{1}{4}\cos\left(2x-\frac{1}{20}\pi\right)+C.$$

Observaţie. In mod analog se demonstrează formulele (f. 14), (f. 15), (f. 16).

67. 14. *Să se demonstreze formula*

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{R}}+C\qquad(a<0)$$

unde: $R=b^2-4ac$ (demonstrarea formulei f. 37).

Avem

$$ax^2+bx+c=-a\left[\frac{R}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right],$$

cum în baza ipotezei făcute: $-a>0$, pentruca radicalul numitorului să aibă un sens trebue ca paranteza mare de mai sus să fie deasemenea pozitivă adică este necesar să avem $R>0$. Pentru uşurinţă notăm cu

$$\frac{\sqrt{R}}{-2a}=A, \quad x+\frac{b}{2a}=u;$$

atunci: $dx=du$ şi în baza lui (f. 29),

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{du}{\sqrt{A^2-u^2}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{u}{A}+C=$$

$$\frac{-1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{R}}+C.$$

67. 15. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{(\alpha x+\beta)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

presupunând că $a<0$ (demonstrarea formulei f. 43).

Descompunem integrala în două făcând ca la numărătorul primei integrale să fie diferenţiala trinomului dela numitor. Avem

$$I=\frac{\alpha}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx+\left(\beta-\frac{\alpha b}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$

$$=\frac{\alpha}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{b\alpha-2a\beta}{2a\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C,$$

în baza lui (f. 37).

67. 16. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)dx.$$

Avem

$$I=\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx+\int\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx=2\sqrt{x}+\int\frac{1-x}{\sqrt{x-x^2}}\,dx=$$

$$=2\sqrt{x}+\int\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=2\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin(2x-1)+C.$$

67. 17. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{dx}{1-\cos x}.$$

Avem succesiv, în baza lui (f. 18),

$$\int\frac{dx}{1-\cos^2\frac{1}{2}x+\sin^2\frac{1}{2}x}=\int\frac{d\frac{1}{2}x}{\sin^2\frac{1}{2}x}=-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}x+C.$$

67. 18. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{\cos 2x\,dx}{\sin x+\sin 3x}.$$

Numitorul se mai poate scrie

$$\sin x+\sin 3x=2\sin 2x\cos x=4\sin x\cos^2 x,$$

încât

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos^2 x}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sin x}-\frac{1}{4}\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}x-\frac{1}{4\cos x}+C.$$

67. 19. *Să ce calculeze integrala*

$$I=\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

Avem succesiv

$$I=\int\frac{dx}{1+\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}}=\int\frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx}{1+2\operatorname{tg}^2 x}=\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{1+2\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C.$$

67. 20. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{dx}{a+b\cos x},$$

a și b fiind două numere pozitive.

$$I=\int\frac{dx}{a\left(\cos^2\frac{1}{2}x+\sin^2\frac{1}{2}x\right)+b\left(\cos^2\frac{1}{2}x-\sin^2\frac{1}{2}x\right)}=$$

$$=\int\frac{dx}{(a+b)\cos^2\frac{1}{2}x+(a-b)\sin^2\frac{1}{2}x}=\frac{2}{a-b}\int\frac{d\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{\frac{a+b}{a-b}+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x}.$$

Distingem două cazuri: 1° $a>b$, atunci avem (f. 28),

$$I=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right]+C.$$

2° $a<b$; integrala se scrie

$$I=\frac{2}{b-a}\int\frac{d\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{\frac{a+b}{b-a}-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x},$$

și în baza lui (f. 27), avem

$$I=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln C\,\frac{\sqrt{b-a}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x+\sqrt{a+b}}{\sqrt{b-a}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x-\sqrt{a+b}}.$$

§ 68. Integrarea prin părți

Formula integrării prin părți este

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Toată dificultatea metodei este alegerea notațiilor, adică pe cine alegem u și pe cine dv. În special, când sub semnul de integrare avem una din funcțiile: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\,x$, $\ln x$ (și câte odată e^x) acestea sunt alese mai întotdeauna drept funcție u.

68. 1. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int \mathrm{arctg}\,x\,dx.$$

Punem

$$u=\mathrm{arctg}\,x.\quad du=\frac{dx}{1+x^2}$$

$$dv=dx,\quad v=x,$$

încât

$$I=x\,\mathrm{arctg}\,x-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}=x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

68. 2. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int \mathrm{argsh}\,x\,dx.$$

Punem

$$u=\mathrm{argsh}\,x,\quad du=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$dv=dx,\quad v=x$$

încât formula integrării prin părți dă

$$I=x\,\mathrm{argsh}\,x-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=x\,\mathrm{argsh}\,x-\sqrt{x^2+1}+C.$$

68. 3. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int \ln x\,dx.$$

Avem

$$u=\ln x,\quad du=\frac{dx}{x}$$

$$dv=dx,\quad v=x$$

şi deci

$$I=x(\ln x-1)+C.$$

68. 4. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int \sqrt[m]{x}\ln x\,dx.$$

Punem

$$u=\ln x,\quad du=\frac{dx}{x}$$

$$dv=\sqrt[m]{x}\,dx=x^{\frac{1}{m}}dx,\quad v=\frac{m}{m+1}x^{\frac{m+1}{m}}=\frac{m}{m+1}\sqrt[m]{x^{m+1}}$$

aşa că

$$I=\frac{m}{m+1}\sqrt[m]{x^{m+1}}\ln x-\frac{m}{m+1}\int x^{\frac{m+1}{m}}\frac{dx}{x}=\frac{m}{m+1}\sqrt[m]{x^{m+1}}\left(\ln x-\frac{m}{m+1}\right)+C.$$

68. 5. *Să se calculeze integralele*

$$I=\int e^{ax}\sin bx\,dx,\qquad J=\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

(demonstrarea formulelor f. 32 şi f. 33.

Punând în prima

$$u=\sin bx,\quad du=b\cos bx\,dx$$

$$dv=e^{ax}dx\quad v=\frac{1}{a}e^{ax},$$

obţinem

$$I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx,$$

adică

$$I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}J. \tag{1}$$

La fel pentru a doua, punând

$$u=\cos bx,\quad du=-b\sin bx\,dx$$

$$dv=e^{ax}dx\quad v=\frac{1}{a}e^{ax},$$

obţinem

$$J=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

sau încă

$$J=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}I. \tag{2}$$

Ecuaţiile (1) şi (2), scrise sub forma

$$aI+bJ=e^{ax}\sin bx,$$

$$bI-aJ=-e^{ax}\cos bx,$$

formează un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute I şi J, care rezolvat ne dă

$$I=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C,\quad J=\frac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

Am adunat la I şi J câte o constantă oarecare pentru a avea soluţia generală*).

68. 6. *Să se calculeze integralele*

$$I=\int e^{-x}\cos^2 x\,dx,\quad J=\int e^{-x}\sin^2 x\,dx.$$

Avem

$$I+J=\int e^{-x}(\cos^2 x+\sin^2 x)\,dx=\int e^{-x}\,dx=-e^{-x},$$

$$I-J=\int e^{-x}(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx=\int e^{-x}\cos 2x\,dx=$$

$$=\frac{1}{5}e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x),$$

în baza rezultatelor dela (pr. 68. 5). Prin adunare şi scădere găsim

$$I=\frac{1}{10}e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x-5)+C,\quad J=-\frac{1}{10}e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x+5)+C.$$

§ 69. Formule de reducere

Fiind dată o integrala de forma

$$I_n=\int f_n(x)\,dx,$$

partea dreaptă depinzând de un număr întreg n, se zice că avem o formulă de reducere când avem o relaţie de forma

$$I_n=a_1I_{n-1}+a_2I_{n-2}+\cdots+a_mI_{n-m},$$

unde a_i sunt funcţii de x. Cu ajutorul acestei relaţii şi cu ajutorul primelor valori $I_0, I_1, \ldots, I_{m-1}$, se poate calcula din aproape, în aproape valoarea integralei I_n pentru orice valoare a lui n întreg.

69. 1. *Să se calculeze integrala*

$$I_n=\int x^n e^{ax}\,dx,$$

presupunând că n este un număr întreg şi pozitiv.

Punem

$$u=x^n,\quad du=nx^{n-1}\,dx$$

$$dv=e^{ax}\,dx,\quad v=\frac{1}{a}e^{ax}$$

*) A se vedea şi prob. 119.1.

încât

$$I_n = \frac{1}{a} e^{ax} x^n - \frac{n}{a} \int e^{ax} x^{n-1} dx; \quad I_n = \frac{1}{a} e^{ax} x^n - \frac{n}{a} I_{n-1}.$$

Făcând aci pe n egal cu n, $n-1, \ldots, 2, 1$, obţinem relaţiile

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{a} e^{ax} x^n - \frac{n}{a} I_{n-1}, \\ I_{n-1} &= \frac{1}{a} e^{ax} x^{n-1} - \frac{n-1}{a} I_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_2 &= \frac{1}{a} e^{ax} x^2 - \frac{2}{a} I_1, \\ I_1 &= \frac{1}{a} e^{ax} x - \frac{1}{a} I_0; \end{aligned}$$

înmulţind a doua cu $-\frac{n}{a}$, a treia cu $\frac{n(n-1)}{a^2}, \ldots$, penultima cu $(-1)^{n-2} \frac{n(n-1)\ldots 3}{a^{n-2}}$ iar pe ultima cu $(-1)^{n-1} \frac{n(n-1)\ldots 2}{a^{n-1}}$ şi adunând obţinem, după ce facem toate reducerile,

$$I_n = \frac{e^{ax}}{a}\left[x^n - \frac{n}{a} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^2} x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{n(n-1)\ldots 2}{a^{n-1}} x\right] + \\ + (-1)^n \frac{n!}{a^n} I_0;$$

cum

$$I_0 = \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad (f \cdot 7)$$

avem în definitiv

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\left[x^n - \frac{n}{a} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^2} x^{n-2} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{a^n}\right] + C.$$

Observare. Să se deducă acest rezultat din pr. 41. 16.

69. 2. *Să se calculeze integrala*

$$I = \int e^{-x} (x^2 + px + q)\, dx.$$

Avem

$$I = \int e^{-x} x^2 dx + p \int e^{-x} x dx + q \int e^{-x} dx.$$

Folosind rezultatele dela problema precedentă (în care facem $a = -1$ şi pe rând $n = 0, 1, 2$),

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x}, \quad \int e^{-x} x dx = -e^{-x} x - e^{-x}, \quad \int e^{-x} x^2 dx = -e^{-x} x^2 - 2e^{-x} x - 2e^{-x}$$

încât avem:

$$I = -e^{-x}\left[x^2 + (p+2)\, x + (p+q+2)\right] + C.$$

69. 3. *Să se stabilească o formulă de recurență pentru integralele*

$$I_n = \int \sin^n x dx,$$

(*demonstrarea formulei* f. 45).

Punem

$$u = \sin^{n-1} x, \quad du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\, dx$$

$$dv = \sin x\, dx, \quad v = -\cos x$$

încât, în baza integrării prin părți urmează formula:

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

69. 4. *Să se calculeze integrala*

$$I_n = \int \operatorname{tg}^n x dx.$$

Mai întâiu stabilim o formulă de recurență (demonstrarea lui f. 47). Avem succesiv,

$$I_n = \int \operatorname{tg}^{n-2} x(1+\operatorname{tg}^2 x - 1)dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= \int \frac{\operatorname{tg}^{n-2} x}{\cos^2 x} dx - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}.$$

Deoarece formula de recurență leagă pe I_n de I_{n-2} este nevoie să deosebim două cazuri după paritatea lui n.

1° $n = 2k$. Avem succesiv

$$I_{2k} = \frac{\operatorname{tg}^{2k-1} x}{2k-1} - I_{2k-2},$$

$$I_{2k-2} = \frac{\operatorname{tg}^{2k-3} x}{2k-3} - I_{2k-4},$$

. . . . . .

$$I_2 = \frac{\operatorname{tg} x}{1} - I_0 \qquad (I_0 = \int dx = x)$$

formule care înmulțite respectiv cu $-1, (-1)^2, \ldots, (-1)^{k-1}$, dau

$$I_{2k} = \frac{\operatorname{tg}^{2k-1} x}{2k-1} - \frac{\operatorname{tg}^{2k-3} x}{2k-3} + \frac{\operatorname{tg}^{2k-5} x}{2k-5} - \ldots + (-1)^{k-1}(\operatorname{tg} x - x) + C.$$

2° $n = 2k-1$ obținem un șir de egalități asemănător cu cel dela cazul precedent, în care ultima egalitate este

$$I_3 = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - I_1, \quad I_1 = \int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln\cos x + C. \qquad \text{(f. 19)}$$

şi deci

$$I_{2k+1}=\frac{\operatorname{tg}^{2k}x}{2k}-\frac{\operatorname{tg}^{2k-2}x}{2k-2}+\frac{\operatorname{tg}^{2k-4}x}{2k-4}-\cdots+(-1)^{k-1}\left(\frac{\operatorname{tg}^{2}x}{2}+\ln\cos x\right)+C.$$

69. 5, *Fiind dată integrala*

$$I_n=\int x^m(\ln x)^n dx,$$

se cere să se găsească o relaţie de recurenţă între I_n *şi* I_{n-1}. *Să se calculeze în particular* I_1 *şi* I_2.

Punem

$$u=(\ln x)^n,\quad dv=x^m dx,$$

încât

$$I=\frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n-\frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}dx,$$

adică

$$I_n=\frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n-\frac{n}{m+1}I_{n-1}. \tag{1}$$

Numărul m este arbitrar. In particular, dacă $m=-1$, atunci avem

$$I_n=\int\frac{(\ln x)^n}{x}dx=\int(\ln x)^n d(\ln x)=\frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}+C.$$

Pentru I_1 avem din (1):

$$I_1=\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln x-\frac{I_0}{m+1}=\frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\ln x-\frac{1}{m+1}\right)+C. \tag{2}$$

Tot aşa

$$I_2=\frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^2-\frac{2x^{m+1}}{(m+1)^2}\left(\ln x-\frac{1}{m+1}\right)+C.$$

69. 6. *Să se stabilească o formulă de reducere pentru integralele*

$$I_n=\int e^{ax}\cos^n x dx,\quad J_n=\int e^{ax}\sin^n x dx.$$

Incepem cu prima notând prin

$$u=\cos^n x,\quad du=-n\cos^{n-1}x\sin x\,dx$$

$$dv=e^{ax}dx,\qquad v=\frac{1}{a}e^{ax}$$

încât

$$I_n=\frac{1}{a}\cos^n x\cdot e^{ax}+\frac{n}{a}\int e^{ax}\cos^{n-1}x\sin x dx.$$

Integrăm din nou prin părţi notând de data aceasta

$$u=\cos^{n-1}x\sin x,\quad du=[-(n-1)\cos^{n-2}x+n\cos^n x]dx$$

$$dv=e^{ax}dx\qquad v=\frac{1}{a}e^{ax}.$$

Efectuând toate calculele, obţinem:

$$I_n=\frac{1}{a^2}e^{ax}\cos^{n-1}x(a\cos x+n\sin x)+\frac{n(n-1)}{a^2}I_{n-2}-\frac{n^2}{a^2}I_n.$$

Trecând pe I_n în prima parte şi făcând toate calculele se găseşte în definitiv formula

$$I_n=\frac{e^{ax}\cos^{n-1}x\,(a\cos x+n\sin x)}{a^2+n^2}+\frac{n\,(n-1)}{a^2+n^2}\,I_{n-2}.$$

Pentru a doua integrală procedăm la fel. Punem pentru inceput

$$u=\sin^n x,\quad dv=e^{ax}dx,$$

şi obţinem

$$J_n=\frac{1}{a}\,e^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a}\int e^{ax}\sin^{n-1}a\cos x\,dx.$$

Integrăm din nou prin părţi

$$u=\sin^{n-1}x\cos x,\quad dv=e^{ax}dx,$$

de unde

$$J_n=\frac{1}{a}\,e^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a^2}\,e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n\,(n-1)}{a^2}J_{n-2}-\frac{n^2}{a^2}J_n;$$

$$J_n=\frac{e^{ax}\sin^{n-1}x\,(a\sin x-n\cos x)}{a^2+n^2}+\frac{n\,(n-1)}{a^2+n^2}\,J_{n-2}.$$

69. 7. *Să se calculeze integralele*

$$I_n=\int x^n\cos mx\,dx,\quad J_n=\int x^n\sin mx\,dx.$$

Pentru calculul acestor două integrale vom stabili formule de recurenţă. La prima notăm cu

$$u=x^n,\quad dv=\cos mx\,dx,$$

şi deci

$$I_n=\frac{x^n\sin mx}{m}-\frac{n}{m}\int x^{n-1}\sin mx\,dx;$$

$$I_n=\frac{x^n\sin mx}{m}-\frac{n}{m}J_{n-1}. \qquad (1)$$

Pentru a doua punem

$$u=x^n,\quad du=nx^{n-1}dx,$$

$$dv=\sin mx\,dx,\quad v=-\frac{\cos mx}{m},$$

adică

$$J_n=-\frac{x^n\cos mx}{m}+\frac{n}{m}I_{n-1}. \qquad (2)$$

Făcând în (2) pe n egal cu $n-1$ şi înlocuind în (1) obţinem formula căutată

$$I_n=\frac{x^{n-1}(mx\sin mx+n\cos mx)}{m^2}-\frac{n\,(n-1)}{m^2}I_{n-2}.$$

Analog, găsim

$$J_n=\frac{x^{n-1}(-mx\cos mx+n\sin mx)}{m^2}-\frac{n\,(n-1)}{m^2}J_{n-2}.$$

69. 8. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int x^2\cos 7x\sin 3x\,dx.$$

Avem

$$\frac{1}{2}\int x^2[\sin(3x+7x)+\sin(3x-7x)]dx=\frac{1}{2}\int x^2\sin 10x\,dx-\frac{1}{2}\int x^2\sin 4x\,dx.$$

Pentru a calcula aceste două integrale folosim formulele de recurență stabilite la problema precedentă. Avem

$$\int x^2\sin 10x\,dx=\left(-\frac{x^2}{10}+\frac{1}{500}\right)\cos 10x+\frac{x}{50}\sin 10x.$$

$$\int x^2\sin 4x\,dx=\left(-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{32}\right)\cos 4x+\frac{x}{8}\sin 4x.$$

Aşa dar

$$I=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\cos 4x}{4}-\frac{\cos 10x}{10}\right)x^2+\left(\frac{\sin 10x}{50}-\frac{\sin 4x}{8}\right)x+\left(\frac{\cos 10x}{500}-\frac{\cos 4x}{32}\right)\right]+C.$$

69. 9 *Fiind dată integrala*

$$I_n=\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n},$$

să se găsească o legătură între I_n şi I_{n-1} (demonstrarea lui f. 42).

Scriem pe I_n sub forma

$$I_n=\frac{1}{a^2}\int\frac{(a^2+x^2-x^2)\,dx}{(a^2+x^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2\,dx}{(a^2+x^2)^n}=\frac{I_{n-1}}{a^2}-\frac{J}{a^2},$$

unde am notat prin J ultima integrală. Pentru a o calcula punem

$$u=x,\ dv=\frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^n}=\frac{1}{2}(a^2+x^2)^{-n}\,d(a^2+x^2)$$

încât

$$du=dx,\ v=\frac{1}{2}\,\frac{(a^2+x^2)^{-n+1}}{-n+1}=-\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}.$$

Deci

$$J=-\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}.$$

ultima integrală nefiind altceva decât I_{n-1}. Introducând această valoare mai sus, avem in definitiv

$$I_n=\frac{1}{2(n-1)a^2}\,\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1}.$$

69. 10. *Să se stabilească o formulă de reducere pentru integrala*

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

(demonstrarea lui (f. 41) *scrisă sub altă formă*).

Considerăm funcţiunea

$$\frac{x+\frac{1}{2}p}{(x^2+px+q)^{n-1}} = \left(x+\frac{1}{2}p\right)(x^2+px+q)^{-n+1}$$

pe care o derivăm ca un produs. Obţinem

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x+\frac{1}{2}p}{(x^2+px+q)^{n-1}}\right] = \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} - \frac{2(n-1)\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2}{(x^2+px+q)^n},$$

sau, scriind: $\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2 = (x^2+px+q) - \left(q-\frac{1}{4}p^2\right)$,

$$d\left[\frac{x+\frac{1}{2}p}{(x^2+px+q)^{n-1}}\right] = \left[\frac{-(2n-3)}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{2(n-1)\left(q-\frac{1}{4}p^2\right)}{(x^2+px+q)^n}\right]dx$$

relaţia care integrată parte cu parte ne dă

$$\frac{x+\frac{1}{2}p}{(x^2+px+q)^{n-1}} = -(2n-3)I_{n-1} + 2(n-1)\left(q-\frac{1}{42}p^2\right)I_n,$$

sau în fine

$$I_n = \frac{2x+p}{(n-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{2(2n-3)}{(n-1)(4q-p^2)}I_{n-1}.$$

§ 70. Integrarea fracţiilor raţionale

In acest paragraf ne vom ocupa cu calculul integralelor de forma

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx,$$

unde $P(x)$ şi $Q(x)$ sunt două polinoame în x. Procedând asupra fracţiei de integrat aşa cum s'a explicat la § 45, integrala I se reduce la integrarea unui polinom, cum şi la integrale de tipul

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m}, \quad \int \frac{(\alpha x+\beta)dx}{(x^2+px+q)^n},$$

integrale ce se calculează cu ajutorul tabloului dela § 66. In adevăr, dacă $m=1$ aplicăm formula (f. 4) iar dacă $m\neq 1$ aplicăm formula (f. 3). Tot aşa, cu ajutorul lui (f. 40), integralele de tipul al doilea, se reduc la integrale de tipul (f. 41) (dacă $n=1$, f. 35), care din aproape în aproape se reduc la (f. 35).

70. 1. *Să se calculeze integrala*

$$I = \int \frac{x^2+11x+14}{(x+3)(x^2-4)}dx.$$

Avem descompunerea în fracţii simple

$$\frac{x^2+11x+14}{(x+3)(x^2-4)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}\cdot$$

de unde

$$A=\left[\frac{x^2+11x+14}{x^2-4}\right]_{x=-3}=-2,\ B=\left[\frac{x^2+11x+14}{(x+3)(x-2)}\right]_{x=-2}=1,$$

$$C=\left[\frac{x^2+11x+14}{(x+3)(x+2)}\right]_{x=2}=2,$$

$$I=-2\int\frac{dx}{x+3}+\int\frac{dx}{x+2}+2\int\frac{dx}{x-2}=-2\ln(x+3)+\ln(x+2)+2\ln(x-2)+C=$$

$$=\ln C'\frac{(x+2)(x-2)^2}{(x+3)^2}$$

70. 2. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{x^3-2x^2+3x-5}{x^4-8x^3+24x^2-32x+16}dx.$$

Observăm că numitorul este egal cu $(x-2)^4$, prin substituţia $x-2=t$ obţinem

$$I=\int\frac{(t+2)^3-2(t+2)^2+3(t+2)-5}{t^4}dt=\int\frac{t^3+4t^2+7t+1}{t^4}dt=$$

$$=\ln t-\frac{4}{t}-\frac{7}{2}\frac{1}{t^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{t^3}$$

şi revenind la vechea variabilă

$$I=\ln C(x-2)-\frac{24x^2-75x+56}{6(x-2)^3}\cdot$$

70. 3. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{dx}{x^2(x^2+a^2)},$$

Cum funcţia de integrat este pară, va trebui să avem

$$\frac{1}{x^2(x^2+a^2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x^2+a^2}=\frac{A(x^2+a^2)+Bx^2}{x^2(x^2+a^2)},$$

şi deci

$$A+B=0,\ Aa^2=1;\ A=-B=\frac{1}{a^2}\cdot$$

Avem

$$I=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}=-\frac{1}{a^2x}-\frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$$

70. 4. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{x^2+15x+14}{6x^4+13x^3+30x^2+52x+24}dx.$$

Numitorul se poate scrie: $(x^2+4)(2x+3)(3x+2)$. Descompunerea în fracții simple este:

$$\frac{x^2+15x+14}{(x^2+4)(2x+3)(3x+2)} = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{2x+3}+\frac{3}{3x+2}+\frac{-2x+3}{x^2+4}\right)$$

și rezultatul este

$$I=\frac{1}{5}\left[\ln C\frac{6x^2+13x+6}{x^2+4}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right].$$

70. 5. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^2+1}dx,$$

și să se găsească condiția pentru ca I să fie o funcție rațională de x.

Făcând împărțirea obținem

$$\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^2+1}=Ax+B+\frac{(C-A)x+(D-B)}{x^2+1},$$

și deci

$$I=\frac{A}{2}x^2+Bx+\frac{C-A}{2}\ln(x^2+1)+(D-B)\operatorname{arctg}x+C'C.$$

Pentru ca I să fie funcție rațională de x trebue ca în compunerea ei să nu avem termen logaritmic și nici termen în $\operatorname{arctg}x$. Condiția căutată este: $C=A$ și $D=B$, adică împărțirea de mai sus să se facă exact.

70. 6. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{xdx}{x^3-3x+2}.$$

Cum: $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$, găsim descompunerea

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{2}{9(x-1)}+\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{9}\frac{1}{x+2}$$

de unde

$$I=\frac{2}{9}\ln C\frac{x-1}{x+2}-\frac{1}{3(x-1)}.$$

70. 7. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{dx}{x^3(1-x)^2(1+x)}.$$

Avem descompunerea

$$\frac{1}{x^3(1-x)^2(1+x)}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{7}{4}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{1+x}.$$

Integrala are drept valoare

$$I=2\ln x-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{7}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1}{4}\ln(1+x)+C=$$

$$=2\ln x-\frac{7}{4}\ln(1-x)-\frac{1}{4}\ln(1+x)+\frac{3x^2-x-1}{2x^2(1-x)}+C.$$

70. 8. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{dx}{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1}\,.$$

Cum numitorul este egal cu $(x+1)(x^2+1)^2$, avem descompunerea

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\frac{1-x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\frac{1-x}{(x^2+1)^2}\,.$$

Cum

$$\int\frac{1-x}{x^2+1}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x,$$

$$\int\frac{1-x}{(x^2+1)^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int(x^2+1)^{-2}d(x^2+1)+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$$

în baza lui (f. 42), avem în definitiv

$$I=\frac{1}{4}\ln(x+1)-\frac{1}{8}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{4}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x$$

$$I=\frac{1}{4}\left[\frac{x+1}{x^2+1}+\ln C\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+2\operatorname{arctg}x\right].$$

70. 9. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{x^2+ax+b}{(x^2+px+q)^2}\,dx.$$

Să se găsească condiția ca I să fie rațională.

Scriem fracția de integrat sub forma

$$\frac{x^2+ax+b}{(x^2+px+q)^2}=\frac{1}{x^2+px+q}+\frac{(a-p)\,x+(b-q)}{(x^2+px+q)^2}\,.$$

În ipoteza că: $R=p^2-4q\neq 0$, în baza formulei (f. 40), și cu notațiile din această formulă avem

$$I=\int\frac{dx}{T}-\frac{a-p}{2T}+\frac{2(b-q)-p(a-p)}{2}\int\frac{dx}{T^2},$$

și mai departe, în baza lui (f. 41),

$$I=\int\frac{dx}{T}-\frac{a-p}{2T}+\frac{2(b-q)-p(a-p)}{2}\left(-\frac{2x+p}{RT}-\frac{2}{R}\int\frac{dx}{T}\right)$$

$$=-\frac{[2(b-q)-p(a-p)]x+(bp-2aq+pq)}{RT}+\frac{ap-2(b+q)}{R}\int\frac{dx}{T}\,.$$

Pentru a merge mai departe, este necesar să facem ipoteze asupra semnului lui R. Folosind formulele (f. 34) și (f. 35) obținem rezultatele: dacă $R=p^2-4q>0$, atunci

$$I=-\frac{[2(b-q)-p(a-p)]\,x+(bp-2aq+pq)}{(p^2-4q)(x^2+px+q)}+\frac{ap-2(b+q)}{(p^2-4q)^{3/2}}\ln\frac{2x+p-\sqrt{p^2-4q}}{2x+p+\sqrt{p^2-4q}}+C, \quad (A)$$

iar dacă: $R=p^2-4q<0$,

$$I=-\frac{[2(b-q)-p(a-p)]\,x+(bp-2aq+pq)}{(p^2-4q)(x^2+px+q)}-\frac{ap-2(b+q)}{(4q-p^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C. \quad (B)$$

Ne rămâne ipoteza: $R=p^2-4q=0$. In acest caz numitorul se scrie

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2.$$

și fracția

$$\frac{x^2+ax+b}{\left(x+\frac{1}{2}p\right)^4}=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2}+\frac{a-p}{\left(x+\frac{1}{2}p\right)^3}+\frac{b-\frac{1}{2}ap+\frac{1}{4}p^2}{\left(x+\frac{1}{2}p\right)^4},$$

iar valoarea lui I este

$$I=-\frac{24x^2+12(a+p)x+2p^2+2ap+8b}{3(2x+p)^3}. \quad (C)$$

In ultimul caz I este întotdeauna rațională. Pentru a fi și în primele două cazuri, se citește depe formula (A) și (B) că trebue să avem: $2(q+b)=ap$.

70. 10. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{2x^2-2x-16}{(x^2-2x+9)^2}\,dx,$$

și să se deducă apoi, cu ajutorul lui I, valoarea integralei

$$J=\int\frac{(x^2+3)(2x^2-2x-16)}{(x+1)^3(x^2-2x+9)^2}\,dx.$$

Integrala I scrisă sub forma

$$I=2\int\frac{x^2-x-8}{(x^2-2x+9)^2}\,dx,$$

este de forma integralei calculată la problema precedentă. Aplicând formula (B) găsim

$$I=2\,\frac{-32x+16}{32(x^2-2x+9)}=\frac{-2x+1}{x^2-2x+9}+C.$$

Pentru a calcula pe J vom integra prin părți, punând

$$u=\frac{x^2+3}{(x+1)^3},\quad dv=\frac{2x^2-2x-16}{(x^2-2x+9)^2}\,dx.$$

Diferențiind, avem

$$du=-\frac{x^2-2x+9}{(x+1)^4}\,dx,$$

iar, în baza calculului făcut mai sus

$$v=\int\frac{2x^2-2x-16}{(x^2-2x+9)^2}\,dx=\frac{-2x+1}{x^2-2x+9},$$

luând pentru constantă valoarea zero. Deci

$$J=\frac{(x^2+3)(-2x+1)}{(x+1)^3(x^2-2x+9)}+\int\frac{-2x+1}{x^2-2x+9}\cdot\frac{x^2-2x+9}{(x+1)^4}\,dx.$$

integrala a doua este egală cu

$$\int\frac{-2x+1}{(x+1)^4}\,dx=\int\frac{-2(x+1)+3}{(x+1)^4}\,dx=-2\int\frac{dx}{(x+1)^3}+3\int\frac{dx}{(x+1)^4}$$

$$=-2\int(x+1)^{-3}dx+3\int(x+1)^{-4}dx=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3},$$

şi deci

$$J=\frac{(x^2+3)(-2x+1)}{(x+1)^3(x^2-2x+9)}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}=\frac{-x^3-x^2+3x+3}{(x+1)^3(x^2-2x+9)},$$

$$J=\frac{3-x^2}{(x+1)^2(x^2-2x+9)}+C.$$

§ 71. Integrale de funcţii trigonometrice

Aceste integrale le împărţim în trei categorii:

1. Integrale ce se pot scrie sub forma

$$I=\int f(\sin x)\cos x\,dx, \qquad (I)$$

unde f este o fracţie raţională; facem substituţia: $\sin x=u$. Integrala devine

$$I=\int f(u)\,du,$$

adică integrala unei fracţii raţionale

La fel se calculează integralele

$$I=\int f(\cos x)\sin x\,dx, \qquad (II)$$

unde facem: $\cos x=u$,

2. Integrale de forma

$$I=\int P(\sin x,\cos x)\,dx, \qquad (III)$$

unde P este un polinom în $\sin x$ şi $\cos x$. O astfel de integrală se reduce la calculul de integrale de forma

$$I=\int\sin^p x\cos^q x\,dx. \quad (p,q=\text{întregi}>0) \qquad (IV)$$

Aceste integrale se calculează din aproape în aproape cu ajutorul lui (f. 51) care se reduce la (f. 45) sau (f. 46). Dacă nu avem aceste formule la îndemână, integralele (IV) se calculează prin metoda dela nr. precedent în caz când

unul din numerele întregi p, q este fără soţ. Dacă p şi q sunt ambii cu soţ se caută a se exprima produsul de integrat cu ajutorul liniilor trigonometrice ale multiplilor de arc, prin aplicarea repetată a formulelor

$$\begin{cases} \sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)], \\ \cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)], \\ \sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)], \end{cases} \tag{V}$$

Cazul p, q cu soţ se încadrează şi în tipul 3a) ce urmează.

3. Integrale de forma

$$I = \int f(\sin x, \cos x)\, dx, \tag{VI}$$

unde f este o fracţie raţională. Presupunem că nu suntem în niciunul din cazurile 1 sau 2. Şi aci avem două cazuri:

a) Dacă funcţia de integrat conţine diferite puteri ale lui $\operatorname{tg} x$ şi puteri numai cu soţ ale lui $\sin x$ şi $\cos x$, facem substituţia: $\operatorname{tg} x = u$, $x = \operatorname{arctg} u$, şi ţinem seama că

$$\sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+u^2},\ dx = \frac{du}{1+u^2}. \tag{VII}$$

b) In caz contrar, punem: $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = u$, $x = 2\operatorname{arctg} u$, şi

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2},\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},\ dx = \frac{2du}{1+u^2}. \tag{VIII}$$

Observaţie. In general, folosind metodele de mai sus se pot calcula integrale în care intră funcţii mai generale decât cele raţionale în $\sin x$ şi $\cos x$

71. 1. *Să se calculeze integrala*

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\, dx.$$

Facem substituţia: $\cos x = u$. Avem

$$I = -\int \frac{1-u^2}{u}\, du = \frac{1}{2}\cos^2 x - \ln C \cos x.$$

71. 2. *Să se demonstreze formulele*

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C,\ \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

(demonstrarea formulelor f. 21 şi f. 22)

Avem

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\, dx}{1-\cos^2 x};$$

punem: $\cos x = u$ şi folosim pe (f. 27):

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-u}{1+u} = \frac{1}{2}\ln C\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \ln c\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Pentru formula (f. 22) facem în precedenta schimbarea: $x=\frac{1}{2}\pi+u$.

71. 3. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{dx}{\cos x-\cos 5x}.$$

Ţinem seamă că numitorul se poate scrie succesiv

$$\cos x-\cos 5x=2\sin 3x\sin 2x=4\sin^2 x\cos x(3-4\sin^2 x),$$

încât făcând substituţia: $\sin x=u$; găsim

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2(1-u^2)(3-4u^2)}.$$

Pentru a calcula pe I va trebui să descompunem în fracţii simple. Din faptul că nu avem decât termeni în $u^2=v$ putem scrie

$$\frac{1}{v(1-v)(3-4v)}=\frac{A}{v}+\frac{B}{1-v}+\frac{C}{3-4v}.$$

de unde

$$I=\frac{1}{12}\int\frac{du}{u^2}-\frac{1}{4}\int\frac{du}{1-u^2}+\frac{4}{3}\int\frac{du}{3-4u^2},$$

şi în baza lui (f. 27) şi (f. 34),

$$I=-\frac{1}{12u}+\frac{1}{8}\ln\frac{1-u}{1+u}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}-2u}{\sqrt{3}+2u},$$

sau, revenind la vechea variabilă

$$I=-\frac{1}{12\sin x}+\frac{1}{8}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}-2\sin x}{\sqrt{3}+2\sin x}+C.$$

Observaţie. Făcând calculabile prin logaritmi expresiile de sub semnul ln, I se mai poate scrie

$$I=-\frac{1}{12\sin x}+\frac{1}{4}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{3\sqrt{3}}\ln\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)}+C.$$

71. 4. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\sin^5 x\,dx.$$

Cum

$$I=\int(1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx.$$

facem substituţia: $\cos x=u$. Avem

$$I=-\int(1-u^2)^2\,du=-u+\frac{2}{3}u^3-\frac{1}{5}u^5+C=-\cos x+$$

$$+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$$

71. 5. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int \cos^7 x\,dx.$$

Soluţia I. Punem $\sin x=u$. Avem succesiv

$$I=\int (1-u^2)^3\,du=\int (1-3u^2+3u^4-u^6)\,du=u-u^3+\frac{3}{5}u^5-\frac{1}{7}u^7+C=$$

$$=\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C.$$

Soluţia II. Problema prezentă, caşi precedenta, se poate rezolva şi cu ajutorul relaţiilor de recurenţă din formular. In adevăr, cu ajutorul lui (f. 46). avem

$$I=\int \cos^7 x\,dx=\frac{1}{7}\sin x\cos^6 x+\frac{6}{7}\int \cos^5 x\,dx=\frac{1}{7}\sin x\cos^6 x+$$

$$+\frac{6}{7}\left(\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x+\frac{4}{5}\int \cos^3 x\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{7}\sin x\cos^6 x+\frac{6}{35}\sin x\cos^4 x+\frac{24}{35}\left(\frac{1}{3}\sin x\cos^2 x+\frac{2}{3}\int \cos x\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{7}\sin x\left(\cos^6 x+\frac{6}{5}\cos^4 x+\frac{8}{5}\cos^2 x+\frac{16}{5}\right)+C.$$

Se poate arăta că cele două rezultate diferă cel mult printr'o constantă

71. 6. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx.$$

Facem substituţia: $\cos x=u$. Avem

$$I=-\int (1-u^2)\,u^2\,du=-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+C=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$$

71. 7. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx.$$

Soluţia I. folosind formulele elementare din Trigonometrie, precum şi formulele (V), avem succesiv

$$32\sin^4 x\cos^2 x=8\sin^2 x.\ 4\sin^2 x\cos^2 x=4(1-\cos 2x)\sin^2 2x$$
$$=2(1-\cos 2x)(1-\cos 4x)=2(1-\cos 2x-\cos 4x+\cos 2x\cos 4x) \quad (1)$$
$$=2-2\cos 2x-2\cos 4x+(\cos 2x+\cos 6x)$$
$$=2-\cos 2x-2\cos 4x+\cos 6x$$

şi deci

$$I=\frac{1}{16}\int dx-\frac{1}{32}\int \cos 2x\,dx-\frac{1}{16}\int \cos 4x\,dx+\frac{1}{32}\int \cos 6x\,dx$$

$$I=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 2x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{192}\sin 6x+C.$$

Soluţia II. Folosind formula (f. 51), avem

$$I=\int \sin^4 x\cos^2 x dx=\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x+\frac{1}{6}\int \sin^4 x dx,$$

şi mai departe cu ajutorul lui (f. 45)

$$I=\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{4}\cos x\sin^3 x+\frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x-\frac{1}{24}\cos x\sin^3 x+\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x\right)+C.$$

în baza lui (f. 12).

Observaţie. Se poate demonstra, analog ca la descompunerea în fracţii simple, că descompunerea (1) este unică. Ea se poate face în multe feluri; de exemplu, folosind a treia formulă dela prob. 20. 10 putem scrie succesiv

$$32\sin^4 x\cos^2 x=(2\cos 4x-8\cos 2x+6)(\cos 2x+1)$$
$$=2\cos 4x\cos 2x-4(\cos 4x+1)+6\cos 2x+2\cos 4x-8\cos 2x+6$$
$$=(\cos 2x+\cos 6x)-2\cos 4x-2\cos 2x+2=\cos 6x-2\cos 4x-\cos 2x+2$$

71. 8. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int \operatorname{tg}^3 x d x.$$

Facem substituţia: $\operatorname{tg} x=u$. Avem

$$I=\int\frac{u^3}{1+u^2}du=\int\frac{u(1+u^2)-u}{1+u^2}du=\int udu-\int\frac{udu}{1+u^2}$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{2}\ln C(1+\operatorname{tg}^2 x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln C\cos x.$$

Observare. Folosind pe (f. 47), obţinem acelaşi rezultat.

71. 9. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^6 x}.$$

Având numai puteri cu soţ facem substituţia: $\operatorname{tg} x=u$. Folosind formulele (VII) avem

$$I=\int\frac{(1+u^2)^4}{u^4}du=\int\left(\frac{1}{u^4}+4\frac{1}{u^2}+6+4u^2+u^4\right)du=-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}-\frac{4}{\operatorname{tg} x}+$$

$$+6\operatorname{tg} x+\frac{4}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C.$$

71. 10. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x}.$$

Facem substituţia; $\operatorname{tg} x = u$. Avem

$$I = \int \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx = \int \frac{u\,du}{(1+u)(1+u^2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{4}\int \frac{2u\,du}{1+u^2} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1+u) + \frac{1}{4}\ln(1+u^2) + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} u + C$$

şi revenind la vechea variabilă,

$$I = -\frac{1}{2}\ln\sin\left(\frac{1}{4}\pi + x\right) + \frac{1}{2}x + C' C.$$

71. 11. *Să se calculeze integrala*

$$I = \int \frac{dx}{\cos^5 x}.$$

Soluţia I. Folosind formulele (f. 50) şi (f. 22), avem succesiv

$$I = \int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x}\right) = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{\sin x\,(2+3\cos^2 x)}{8\cos^4 x} + \frac{3}{8}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

Soluţia II. Deoarece putem scrie

$$I = \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{(1-\sin^2 x)^3},$$

facem substituţia: $\sin x = u$; atunci

$$I = \int \frac{du}{(1-u^2)^3}.$$

Pentru a calcula această integrală, va trebui să facem descompunerea în fracţii simple a elementului de integrat, sau folosind pe (f. 41). In cazul nostru această formulă se scrie

$$I = \int \frac{du}{(1-u^2)^3} = \frac{u}{4(1-u^2)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{du}{(1-u^2)^2} = \frac{u}{4(1-u^2)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{u}{2(1-u^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u^2}\right] = \frac{u}{4(1-u^2)^2} + \frac{3u}{8(1-u^2)} - \frac{3}{16}\ln\frac{1-u}{1+u} + C = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} +$$

$$+ \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} - \frac{3}{16}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x} + C.$$

şi care se arată uşor că este totuna cu valoarea precedentă.

71. 12. *Să se calculeze integrala*

$$I = \int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x - 3}.$$

Facem substituţia: $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x=u$. Folosind formulele (VIII), avem

$$I=-\int\frac{2du}{5u^2-2u+1}=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}(5u-1)+C \qquad \text{(f. 35)}$$

încât

$$I=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\left(5\operatorname{tg}\frac{1}{2}x-1\right)+C.$$

71. 13. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{dx}{2\sin x-1}.$$

Facem substituţia: $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x=u$. Obţinem

$$I=-2\int\frac{du}{u^2-4u+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln C\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x-2+\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x-2-\sqrt{3}}.$$

71. 14. *Să se calculéze integrala*

$$I=\int\frac{dx}{\cos x-\cos a}.$$

Facem schimbarea: $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x=u$. Pentru uşurinţa calculului punem şi $\operatorname{tg}\frac{1}{2}a=\alpha$. Avem

$$I=\int\frac{1}{\frac{1-u^2}{1+u^2}-\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}}\frac{2du}{1+u^2}=(1+\alpha^2)\int\frac{du}{\alpha^2-u^2}$$

şi în baza lui (f. 27):

$$I=-(1+\alpha^2)\frac{1}{2\alpha}\ln C\frac{u-\alpha}{u+\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}\ln C\frac{\sin\frac{1}{2}(x+a)}{\sin\frac{1}{2}(x-a)}.$$

§ 72. Integrale de funcţii hiperbolice

Se înlocuiesc $\operatorname{sh}x$ şi $\operatorname{ch}x$ în funcţie de e^x cu ajutorul formulelor cunoscute

$$\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\quad \operatorname{ch}x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),$$

şi uneori când este nevoie se face substituţia: $e^x=u$.

Câte odată este bine să se procedeze direct folosind relaţiile cunoscute dintre $\operatorname{sh}x$ şi $\operatorname{ch}x$ (§ 40).

72. 1. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\operatorname{ch}x\operatorname{ch}2x\operatorname{ch}3x\,dx.$$

Inlocuind în funcţie de exponenţiale, avem succesiv

$$I=\frac{1}{8}\int(e^x+e^{-x})(e^{2x}+e^{-2x})(e^{3x}+e^{-3x})\,dx$$

$$=\frac{1}{48}(e^{6x}-e^{-6x})+\frac{1}{32}(e^{4x}-e^{-4x})+\frac{1}{16}(e^{2x}-e^{-2x})+\frac{1}{4}x+C.$$

sau

$$I=\frac{1}{24}\operatorname{sh}6x+\frac{1}{16}\operatorname{sh}4x+\frac{1}{8}\operatorname{sh}2x+\frac{1}{4}x+C.$$

72. 2. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int e^{ax}\operatorname{sh}^3 x\,dx.$$

Procedând la fel ca la problema precedentă, obţinem

$$I=\frac{1}{8}\left[\frac{e^{(a+3)x}}{a+3}-\frac{3e^{(a+1)x}}{a+1}+\frac{3e^{(a-1)x}}{a-1}-\frac{e^{(a-3)x}}{a-3}\right]+C.$$

Dacă vrem să exprimăm acest rezultat în funcţie de liniile trigonometrice iperbolice folosim formula: $e^u=\operatorname{ch}u+\operatorname{sh}u$. Găsim

$$I=\frac{e^{ax}}{8}\left(\frac{\operatorname{ch}3x+\operatorname{sh}3x}{a+3}-3\frac{\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x}{a+1}+3\frac{\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}{a-1}-\frac{\operatorname{ch}3x-\operatorname{sh}3x}{a-3}\right)+C.$$

$$=\frac{e^{ax}}{4}\left(\frac{a}{a^2-9}\operatorname{sh}3x-\frac{3a}{a^2-1}\operatorname{sh}x-\frac{3}{a^2-9}\operatorname{ch}3x+\frac{3}{a^2-1}\operatorname{ch}x\right)+C,$$

72. 3. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{dx}{\operatorname{sh}x}.$$

Punem: $e^x=u$, şi avem $\left(dx=\frac{du}{u}\right)$

$$I=2\int\frac{du}{u^2-1}=\ln C\frac{u-1}{u+1}=\ln C\frac{e^x-1}{e^x+1}=\ln C\frac{e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}}=$$

$$=\ln C\frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}x}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}x}=\ln C\operatorname{th}\frac{1}{2}x.$$

72. 4. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x}.$$

Ca şi la problema precedentă, punem: $e^x=u$; obţinem

$$I=8\int\frac{u^2\,du}{(u^2+1)^3}=8\int\frac{(u^2+1-1)\,du}{(u^2+1)^3}=8\int\frac{du}{(u^2+1)^2}-8\int\frac{du}{(u^2+1)^3}$$

şi folosind formulele dela (f. 42)

$$I=\frac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}+\operatorname{arctg} e^x+C=\frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x}+\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x)+C.$$

§ 73. Integrale de funcţii iraţionale

Prin asemenea integrale, înţelegem integrale de forma

$$I=\int f(x,u)\,dx \quad \text{unde} \quad u=\sqrt{ax^2+bx+c},$$

$f(x, u)$ fiind o funcţie raţională în literele x şi u. Calculul lor se face printr'o substituţie ce depinde de a şi de natura rădăcinilor trinomului de sub radical. Avem urmatoarele cazuri.

1. $a=0$. Se face substituţia: $\sqrt{bx+c}=t$. Elementul de integrat devine o fracţie raţională. Mai general dacă funcţia ce integrăm este o funcţie raţională de: $\sqrt[m]{x^n}$, $\sqrt[p]{x^q}$, $\sqrt[r]{x^s}$,.. şi dacă d este c. m. m. c. m. al numerelor: $m, p, r, \ldots$ atunci făcând substituţia $\sqrt[d]{x}=t$ se ajunge la o fracţie raţională în t.

2. $a>0$. Facem substituţia: $\sqrt{ax^2+bx+c}=t+x\sqrt{a}$ sau $=t-x\sqrt{a}$.

3. $a<0$. Trinomul: ax^2+bx+c trebue să aibă rădăcini reale, căci altfel radicalul este imaginar pentru orice valoare a lui x. Fie: $x_1<x_2$ aceste rădăcini. Vom face substituţia: $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$ sau $=t(x_2-x)$.

Observatii. 1°. Dacă $a>0$ şi trinomul: ax^2+bx+c are rădăcini reale (în acest caz se poate întâmpla ca rădăcinile să fie şi imaginare), atunci se poate face şi substituţia: $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_0)$, x_0 fiind una din cele două rădăcini.

2°. Dacă radicalul ce întră în funcţia de integrat este:

$\sqrt{a^2-x^2}$, se poate face substituţia: $x=a\sin t$. Totaşa pentru radicalul:

$\sqrt{x^2+a^2}$, se poate face substituţia: $x=a\operatorname{tg} t$, iar pentru radicalul:

$\sqrt{x^2-a^2}$ substituţia: $x=\frac{a}{\cos t}$. Se transformă integralele de calculat în integrale trigonometrice.

73. 1. *Să se calculeze*

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}.$$

Să notăm prin: $\sqrt[6]{x-1}=t$ de unde: $x-1=t^6$ şi: $dx=6t^5\,dt$. Avem

$$I=\int\frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}=6\int(t^2-t+1)\,dt-6\int\frac{dt}{t+1}=2t^3-3t^2+6t-6\ln C(t+1)=$$

$$=2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x-1}+6\sqrt[6]{x-1}-6\ln C(\sqrt[6]{x-1}+1).$$

73. 2. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx.$$

Facem substituţia: $\sqrt[6]{x}=t$; de unde: $x=t^6$, $dx=6t^5\,dt$. Avem

$$I=6\int\frac{1+t^3}{1+t^2}\,t^5\,dt.$$

Făcând împărţirea, integrând şi revenind la x avem:

$$\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-\frac{1}{6}\sqrt[6]{x}+$$
$$+\frac{1}{2}\ln C(1+\sqrt[3]{x})+\operatorname{arctg}(\sqrt[6]{x}).$$

73. 3. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Valoarea integralei o avem imediat cu (f. 39). Preferăm s'o calculăm direct. Facem substituţia: $x=a\sin t$. Avem succesiv

$$I=a^2\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}a^2\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{1}{2}a^2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C.$$

Dar,

$$t=\arcsin\frac{x}{a}\quad\text{şi}\quad\sin 2t=2\sin t\cos t=2\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$$

încât

$$I=\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C.$$

73. 4. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Facem substituţia: $x=a\sin t$; obţinem

$$I=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t\,dt}{\cos^3 t}=\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}t+C=\frac{1}{a^2}\frac{\sin t}{\cos t}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$$

73. 5. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{x\,dx}{1-\sqrt{1-x^4}}.$$

Facem substituţia: $x^2=\sin t$. Găsim

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{\cos t\,dt}{1-\cos t}=\frac{1}{2}\int\frac{\cos t(1+\cos t)}{\sin^2 t}\,dt=\frac{1}{2}\int\frac{\cos t+1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sin^2 t}-\frac{1}{2}\int dt=-\frac{1}{2\sin t}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}t-\frac{1}{2}t+C$$

$$I=-\frac{1+\sqrt{1-x^4}}{2x^2}-\frac{1}{2}\arcsin(x^2)+C.$$

73. 6. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx.$$

Soluţia I. Facem substituţia:

$$\sqrt{x^2+a^2}=t+x,$$

de unde rezultă

$$x^2+a^2=(t+x)^2;\quad x=\frac{a^2-t^2}{2t},\quad dx=-\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt,\quad \sqrt{x^2+a^2}=\frac{a^2+t^2}{2t},$$

$$t=\sqrt{x^2+a^2}-x,$$

încât integrala devine

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+a^2)^2}{t^2(t^2-a^2)}\,dt$$

şi cum

$$\frac{(t^2+a^2)^2}{t^2(t^2-a^2)}=1+a^2\frac{3t^2+a^2}{t^2(t^2-a^2)}=1+a^2\left(-\frac{1}{t^2}+\frac{4}{t^2-a^2}\right)$$

$$I=\frac{1}{2}\left(t+\frac{a^2}{t}\right)+a\left[\ln(t-a)-\ln(t+a)\right]$$

sau revenind la x avem:

$$I=\sqrt{x^2+a^2}+a\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-x-a}{\sqrt{x^2+a^2}-x+a}+C.$$

Soluţia II. Deoarece integrala se scrie sub forma

$$I=\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,x\,dx,$$

însemnează că funcţia de integrat este funcţie de x^2, adică se poate face substituţia: $x^2=z$; dar cum făcând această substituţie încă mai rămâne radicalul şi deci este nevoie de o nouă substituţie, mai bine să facem dintr'o dată substituţia

$$x^2+a^2=t^2;\quad x^2=t^2-a^2,\ x\,dx=t\,dt,\ \sqrt{x^2+a^2}=t;$$

integrala se reduce la

$$I=\int\frac{t^2\,dt}{t^2-a^2}=t+\frac{a}{2}\ln\frac{t-a}{t+a}+C=\sqrt{x^2+a^2}+$$

$$+\frac{a}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+a^2}+a}+C.$$

Soluţia III. Facem substituţia:

$$x=a\operatorname{tg}t,\quad \sqrt{x^2+a^2}=a\sqrt{\operatorname{tg}^2t+1}=\frac{a}{\cos t},\quad dx=\frac{a\,dt}{\cos^2t}.$$

integrala devine

$$I=a\int\frac{dt}{\sin t\cos^2t}=a\int\frac{\sin t\,dt}{(1-\cos^2t)\cos^2t}.$$

Facem noua substituție: $\cos t = u$; avem

$$I = -a\int \frac{du}{u^2(1-u^2)} = \frac{a}{u} + \frac{a}{2}\ln\frac{1-u}{1+u} + C,$$

și revenind la vechea variabilă,

$$I = \frac{a}{\cos t} + \frac{a}{2}\ln\frac{1-\cos t}{1+\cos t} + C = \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+a^2}+a} + C,$$

în baza relației între $\cos t$ și $\operatorname{tg} t$.

Observație. Din cele trei soluții de mai sus, cea de-a doua este cea mai indicată.

Rezultatele găsite la prima și a doua soluție diferă ca formă. În realitate ele sunt aceleași deoarece

$$\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-x-a}{\sqrt{x^2+a^2}-x+a} = \ln\frac{(\sqrt{x^2+a^2}-x-a)(\sqrt{x^2+a^2}+x-a)}{x^2+a^2-(x-a)^2} = \ln\frac{(\sqrt{x^2+a^2}-a)^2-x^2}{2ax} =$$

$$= \ln\frac{a-\sqrt{x^2+a^2}}{x}; \quad -\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+a^2}+a} = \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{x^2+a^2}-a)^2}{x^2} = \ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{x},$$

rezultate egale, deoarece am spus (prob. 67, 1) că expresiile cărora se aplică logaritmi în calculul integral, sunt luate în valoare absolută.

73. 7. *Să se calculeze integrala*

$$I = \int x^3\sqrt{x^2-a^2}\,dx.$$

Fie: $x = \frac{a}{\cos t}$. Atunci: $dx = \frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$ și $\sqrt{x^2-a^2} = a\operatorname{tg} t$. Deci

$$I = a^5\int \operatorname{tg}^2 t\,(1+\operatorname{tg}^2 t)\frac{dt}{\cos^2 t} = a^5\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 t + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 t\right) + C.$$

Dar,

$$\cos t = \frac{a}{x} \text{ și deci } \operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

încât

$$I = \frac{1}{15}\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,(3x^2+2a^2) + C.$$

Observație. Se poate da o a doua soluție, scriind integrala sub forma

$$I = \int x^2\sqrt{x^2-a^2}\cdot x\,dx,$$

și făcând substituția: $x^2-a^2 = t^2$.

73. 8. *Să se calculeze integrala*

$$I = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Soluția I. Punem: $x = a\operatorname{tg} t$; atunci $\sqrt{x^2+a^2} = \frac{a}{\cos t}$, $dx = \frac{a\,dt}{\cos^2 t}$, încât

$$I = a^2\int \frac{\operatorname{tg}^2 t}{\cos t}dt = a^2\int \frac{\sin^2 t}{(1-\sin^2 t)^2}\cos t\,dt$$

ceiace spune că trebue să facem: $\sin t = u$. Avem mai departe,

$$I = a^2 \int \frac{u^2 du}{(1-u^2)^2} = a^2 \int \left[\frac{1}{(1-u^2)^2} - \frac{1}{1-u^2} \right] du = a^2 \int \frac{du}{(1-u^2)^2} - a^2 \int \frac{du}{1-u^2},$$

iar cu ajutorul lui (f. 41) avem:

$$\int \frac{du}{(1-u^2)^2} = \frac{u}{2(1-u^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{1-u^2};$$

încât

$$I = a^2 \left[\frac{u}{2(1-u^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{1-u}{1+u} \right] + C.$$

Dar, folosind relaţia dintre $\sin t$ şi $\operatorname{tg} t$ şi revenind la t şi apoi la x avem:

$$I = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{4} a^2 \ln \frac{\sqrt{x^2+a^2}-x}{\sqrt{x^2+a^2}+x} + C.$$

Soluţia II. Observăm că integrala se mai scrie sub forma

$$I = \int \frac{(x^2+a^2-a^2)}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \int \sqrt{x^2+a^2}\, dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

şi în baza lui (f. 30) şi (f. 38), avem:

$$I = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+a^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln (x + \sqrt{x^2+a^2}) + C',$$

după ce am introdus în constantă aditivă, termenul: $\frac{1}{2} a^2 \ln 2$. Se arată cu uşurinţă că acest rezultat este acelaşi cu cel găsit la prima soluţie.

73. 9. *Să se calculeze integrala*

$$I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2-3x+2}}.$$

Facem substituţia: $\sqrt{x^2-3x+2} = t - x$ de unde scoatem,

$$x = \frac{t^2-2}{2t-3}, \quad dx = 2 \frac{t^2-3t+2}{(2t-3)^2} dt,$$

aşa că

$$I = 2 \int \frac{t^2-3t+2}{t(2t-3)^2} dt.$$

Se găseşte

$$I = \frac{4}{9} \ln t + \frac{1}{18} \ln (2t-3) + \frac{1}{6(2t-3)} + C,$$

şi revenind la vechea variabilă

$$I = \frac{4}{9} \ln (x + \sqrt{x^2-3x+2}) + \frac{1}{18} \ln (2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}) +$$

$$+ \frac{1}{6} (2x-3-2\sqrt{x^2-3x+2}) + C.$$

73. 10. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}.$$

Facem substituția: $\sqrt{1+x+x^2}=t+x$; rezultă valoarea

$$I=\ln C\frac{1-x-2\sqrt{1+x+x^2}}{1+x}.$$

73. 11. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int \frac{dx}{x\sqrt{(x-2)(3-x)}}.$$

Facem: $\sqrt{(x-2)(3-x)}=t(x-2)$; deducem succesiv

$$x=\frac{2t^2+3}{t^2+1},\quad dx=\frac{-2tdt}{(t^2+1)^2},\quad \sqrt{(x-2)(3-x)}=t\left(\frac{2t^2+3}{t^2+1}-2\right)=\frac{t}{t^2+1},$$

și deci

$$I=-2\int\frac{dt}{2t^2+3}=-\frac{\sqrt{6}}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{6}t}{3}\right)+C;\quad I=-\frac{\sqrt{6}}{3}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2(3-x)}{3(x-2)}}+C,$$

73. 12. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{\sqrt{x(2-x)}}{x(x-1)}dx.$$

Facem substituția: $\sqrt{x(2-x)}=tx$ și obținem:

$$x=\frac{2}{t^2+1},\quad dx=-\frac{4tdt}{(t^2+1)^2},\quad \sqrt{x(2-x)}=\frac{2t}{t^2+1},\quad x-1=\frac{1-t^2}{t^2+1},$$

de unde

$$I=-4\int\frac{t^2dt}{(1-t^2)(1+t^2)}=2\int\frac{dt}{1+t^2}-2\int\frac{dt}{1-t^2}=2\operatorname{arc\,tg}t+\ln C\frac{t-1}{t+1}.$$

Revenind la x avem:

$$I=2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2-x}{x}}+\ln C\frac{1-\sqrt{x(2-x)}}{1-x}.$$

73. 13. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+x)(2+x)}dx.$$

Scriem integrala sub forma

$$I=\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{2+x}.$$

și facem substituția

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t;\quad x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

de unde

$$dx=\frac{-4tdt}{(1+t^2)^2},\quad 2+x=\frac{3+t^2}{1+t^2}.$$

Integrala se transformă în

$$I=-4\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)(3+t^2)}.$$

Găsim:

$$I=-2\left(\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{3}}-\operatorname{arc\,tg}t\right)+C$$

şi revenind la x:

$$I=2\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{3(1+x)}}\right]+C.$$

§ 74. Integrale binome

Se numesc *integrale binome*, integralele de forma

$$I=\int x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx,$$

unde a, b sunt constante, m, n pot fi numere fracţionare iar r, s numere întregi. Aceste integrale se reduc la integrale de polinoame sau de fracţii raţionale în următoarele două cazuri:

1° Dacă $\frac{m+1}{n}$ este un număr întreg sau zero. Pentru a se calcula integrala se face substituţia: $a+bx^n=u^s$.

2° Dacă $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}$ este un număr întreg sau zero. In acest caz se face substituţia: $a+bx^n=x^nu^s$.

Observaţie. In afară de cazurile menţionate, mai avem şi cazul când $s=1$. Dacă: $r>0$ dezvoltăm pe $(a+bx^n)^r$ după binomul lui *Newton* şi integrăm apoi termen cu termen (vezi de ex. prob. 678). Dacă: $r<0$ şi $m=\frac{\alpha}{\beta}$, $n=\frac{\gamma}{\delta}$ făcând $x=u^d$. d fiind C. m. m. c. m. al numerelor β şi δ se ajunge la o integrală de fracţie raţională (vezi de ex. prob. 73. 1).

74. 1. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\sqrt{\frac{x}{1+\sqrt[4]{x^3}}}\,dx.$$

Scriem integrala sub forma

$$I=\int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{3}{4}})^{-\frac{1}{2}}dx,$$

Folosind notaţiile din indicaţiile date mai sus, avem: $\frac{m+1}{n}=2$. Substituţia este

$$\text{deci: } 1+x^{\frac{3}{4}}=u^2, \text{ de unde}$$

$$x=(u^2-1)^{\frac{4}{3}}, \quad dx=\frac{8}{3}u(u^2-1)^{\frac{1}{3}}du,$$

de unde:

$$I=\frac{8}{3}\int(u^2-1)\,du=\frac{8}{3}\left(\frac{u^3}{3}-u\right)+C=\frac{8}{9}\sqrt{(1+\sqrt[4]{x^3})^3}-\frac{8}{3}\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}+C$$

74. 2. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\sqrt[3]{\frac{2-\sqrt[3]{x}}{x}}\,dx.$$

Scriem integrala sub forma

$$I=\int x^{-\frac{1}{3}}(2-x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}dx,$$

de unde se vede că: $\frac{m+1}{n}=2$ şi deci facem substituţia: $2-x^{\frac{1}{3}}=u^3$, de unde

$$x=(2-u^3)^3, \quad dx=-9u^2(2-u^3)^2du,$$

$$I=-9\int u^3(2-u^3)\,du=-\frac{9}{2}u^4+\frac{9}{7}u^7+C.$$

$$=-9\sqrt[3]{(2-\sqrt[3]{x})^4}\cdot\frac{3+2\sqrt[3]{x}}{14}+C.$$

74. 3. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{\sqrt[6]{x}dx}{\sqrt{1+x^2\sqrt[3]{x}}}.$$

Elementul de integrat se mai poate scrie: $x^{\frac{1}{6}}(1+x^{\frac{7}{3}})^{-\frac{1}{2}}dx$ de unde se vede că: $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}=0$. Facem deci substituţia: $1+x^{\frac{7}{3}}=x^{\frac{7}{3}}u^2$ şi avem

$$x=(u^2-1)^{-\frac{3}{7}}, \quad dx=-\frac{6}{7}u(u^2-1)^{-\frac{10}{7}}du$$

şi deci

$$I=-\frac{6}{7}\int(u^2-1)^{-\frac{1}{14}}\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}u(u^2-1)^{-\frac{10}{7}}du$$

$$I=-\frac{6}{7}\int\frac{du}{u^2-1}=-\frac{3}{7}\ln C\frac{u-1}{u+1}=-\frac{3}{7}\ln C\,\frac{(1+x^{-\frac{7}{3}})^{\frac{1}{2}}-1}{(1+x^{-\frac{7}{3}})^{\frac{1}{2}}+1}.$$

74. 4. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\sqrt[3]{x^2(1+x^2\sqrt{x})}\,dx.$$

Scriem integrala sub forma

$$I=\int x^{\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{3}}dx,$$

de unde se vede că: $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}=1$. Vom face substituţia: $1+x^{\frac{5}{2}}=x^{\frac{5}{2}}u^3$; de aci scoatem

$$x=(u^3-1)^{-\frac{2}{5}},\quad dx=-\frac{6}{5}u^2(u^3-1)^{-\frac{7}{5}}du,$$

$$x^{\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{3}}dx=-\frac{6}{5}(u^3-1)^{-\frac{4}{15}}\left(1+\frac{1}{u^3-1}\right)^{\frac{1}{3}}u^2(u^3-1)^{-\frac{7}{5}}du=$$

$$=-\frac{6}{5}\frac{u^3du}{(u^3-1)^2};$$

şi deci

$$I=-\frac{6}{5}\int\frac{u^3du}{(u^3-1)^2}.$$

Integrând prin părţi avem

$$I=\frac{2}{5}\int u\frac{-3u^2du}{(u^3-1)^2}=\frac{2u}{5(u^3-1)}-\frac{2}{5}\int\frac{du}{u^3-1};$$

dar

$$\int\frac{du}{u^3-1}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u-1}-\frac{1}{3}\int\frac{u+2}{u^2+u+1}du=\frac{1}{6}\ln\frac{C(u-1)^2}{u^2+u+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}.$$

Deci

$$I=\frac{2u}{5(u^3-1)}-\frac{1}{15}\ln\frac{C(u-1)^2}{u^2+u+1}+\frac{2}{5\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}},$$

unde: $u=(1+x^{-\frac{5}{2}})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{1+\frac{1}{\sqrt{x^5}}}$.

§ 75. Integrale diverse

75. 1. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\arcsin x\,dx.$$

Integrăm prin părţi, punând

$$u=\arcsin x,\quad dv=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx.$$

Din a doua scoatem

$$dv=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\,d\left(\frac{1}{x^2}\right);\quad v=-\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3x^3},$$

aşa că

$$I=-\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3x^3}\arcsin x+\frac{1}{3}\int\frac{1-x^2}{x^3}\,dx$$

$$I=-\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3x^3}\arcsin x-\frac{1}{6x^2}-\frac{1}{3}\ln Cx.$$

75. 2. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int x^5\sqrt{1+2x^3}\,dx\cdot$$

Deoarece integrala se scrie sub forma

$$I=\int x^3\sqrt{1+2x^3}\cdot x^2\,dx$$

va reuşi substituţia

$$1+2x^3=t^2,\quad x^2\,dx=\frac{1}{3}\,tdt,$$

şi deci integrala în t va fi

$$I=\frac{1}{6}\int(t^2-1)\,t^2\,dt=\frac{1}{90}\,t^3(3t^2-5)+C.$$

Revenind la vechea variabilă

$$I=\frac{1}{45}\sqrt{(1+2x^3)^3}\,(3x^3-1)+C.$$

75. 3. *Să se stabilească o formulă de reducere pentru integrala*

$$I_n=\int\frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

Integrăm prin părţi, punând

$$u=x^{n-1},\quad du=(n-1)\,x^{n-2}\,dx,$$

$$dv=\frac{2xdx}{2\sqrt{x^2+1}},\quad v=\sqrt{x^2+1};$$

şi deci

$$I_n=x^{n-1}\sqrt{x^2+1}-(n-1)\int x^{n-2}\sqrt{x^2+1}\,dx=$$

$$=x^{n-1}\sqrt{x^2+1}-(n-1)\int\frac{x^{n-2}(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

$$I_n=\frac{1}{n}\,x^{n-1}\sqrt{x^2+1}-\frac{n-1}{n}\,I_{n-2}.$$

Ca aplicaţie se poate găsi rezultatul dela prob. 73. 8.

75. 4. *Să se arate că dacă n este număr raţional, integrala*

$$I=\int x^n\operatorname{arctg} x\,dx,$$

se poate calcula prin mijloace elementare. Să se facă efectiv calculul pentru $n=-\frac{1}{2}$.

Integrăm prin părţi

$$u=\operatorname{arctg} x,\quad du=\frac{dx}{1+x^2}\cdot$$

$$dv=x^n dx,\quad v=\frac{x^{n+1}}{n+1};$$

încât

$$I=\frac{x^{n+1}\operatorname{arctg} x}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{1+x^2}\cdot$$

Am spus că n este presupus raţional, adică $n=\frac{p}{q}$, unde p şi q sunt numere întregi. Făcând în ultima integrală $x=u^q$, devine

$$\int\frac{x^{n+1}dx}{1+x^2}=q\int\frac{u^{p+2q-1}}{1+u^{2q}}du,$$

şi care este o integrală de fracţie raţională adică o integrală ce ştim s'o calculăm.

Fie acum J valoarea lui I când facem $n=-\frac{1}{2}$. Avem

$$J=2\sqrt{x}\operatorname{arctg} x-4\int\frac{u^2}{1+u^4}du,\qquad (u=\sqrt{x})$$

Făcând descompunerea în fracţii simple se găseşte

$$\frac{u^2}{1+u^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right);$$

$$4\int\frac{u^2du}{1+u^4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{(2u-\sqrt{2})du}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{(2u+\sqrt{2})du}{u^2+\sqrt{2}u+1}+\int\frac{du}{u^2-\sqrt{2}u+1}+$$

$$+\int\frac{du}{u^2+\sqrt{2}u+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln C\,\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}$$

$$+\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}u-1)+\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}u+1),$$

sau revenind la x avem:

$$I=2\sqrt{x}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln C\,\frac{x-\sqrt{2x}+1}{x+\sqrt{2x}+1}-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x}}{1-x}\cdot$$

75. 5. *Să se arate cum se poate calcula integrala*

$$I=\int\frac{P(e^x)dx}{\sqrt{e^x+1}},$$

unde $P(u)$ *este un polinom oarecare. Să se calculeze apoi integrala*

$$J=\int\frac{3e^{3x}+2e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx.$$

Facem substituția: $\sqrt{e^x+1}=t$, de unde

$$e^x=t^2-1, \quad e^x dx=2t\,dt$$

așa că

$$I=2\int \frac{P(t^2-1)\,dt}{t^2-1},$$

care este o integrală de fracție rațională, se deduce imediat și

$$J=\frac{2}{15}\sqrt{e^x+1}\,(9e^{2x}-2e^x+4)+C.$$

75. 6. *Să se arate că integrala*

$$I=\int \frac{x-\sqrt{ab}}{x+\sqrt{ab}}\,\frac{dx}{\sqrt{x(x+a)(x+b)}}, \qquad (a, b>0)$$

se poate calcula prin mijloace elementare. Să se facă efectiv calculul pentru $a=1$, $b=4$.

Facem schimbarea de variabilă

$$\frac{x-\sqrt{ab}}{x+\sqrt{ab}}=u,$$

de unde scoatem

$$x=\sqrt{ab}\,\frac{1+u}{1-u}, \quad dx=\frac{2\sqrt{ab}\,du}{(1-u)^2}, \quad x+a=\sqrt{a}\,\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}+u(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{1-u},$$

$$x+b=\sqrt{b}\,\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+u(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{1-u},$$

și deci

$$I=\int \frac{2u\,du}{\sqrt{(1-u^2)\left[(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2u^2\right]}}.$$

Făcând aici: $u^2=v$, obținem integrala

$$I=\int \frac{dv}{\sqrt{(1-v)\left[(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2v\right]}},$$

care se reduce la o integrală de forma (f. 36).

Fie

$$J=\int \frac{x-2}{x+2}\,\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+4)}}.$$

În baza rezultatelor de mai sus,

$$\frac{x-2}{x+2}=u \quad \text{și apoi} \quad u^2=v,$$

ajungem la

$$J=\int\frac{dv}{\sqrt{(1-v)(9-v)}}=\ln C(v-5+\sqrt{v^2-10v+9})=\ln C\left[\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2-5+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^4-10\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2+9}\right];$$

$$J=\ln C\frac{2\sqrt{x(x+1)(x+4)}-(x^2+6x+4)}{(x+2)^2}.$$

75. 7. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{dx}{x^m(x-1)^n},$$

m și n fiind două numere intregi.

Fie

$$\frac{1}{x^m(x-1)^n}=\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{x^i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i}{(x-1)^i},$$

descompunerea în fracții simple a funcțiunei de integrat. Atunci

$$I=A_1\ln x-\sum_{i=2}^{m}\frac{A_i}{(i-1)x^{i-1}}+B_1\ln(x-1)-\sum_{i=2}^{n}\frac{B_i}{(i-1)(x-1)^{i-1}}.$$

Ne rămâne de calculat coeficienții A_i și B_i.

Pentru acest lucru se folosește o formulă cunoscută care spune că dacă avem dezvoltarea

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n g(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{h(x)}{g(x)},$$

în general, coeficientul A_p este dat de

$$A_p=\frac{1}{(n-p)!}\left[\frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}\frac{f(x)}{g(x)}\right]_{x=a}.$$

În cazul problemei, avem

$$A_i=\frac{1}{(m-i)!}\left[\frac{1}{(x-1)^n}\right]^{(m-i)}_{x=0}=\frac{(-1)^n n(n+1)\ldots(n+m-i-1)}{(m-i)!},$$

$$B_i=\frac{1}{(n-i)!}\left[\frac{1}{x^m}\right]^{(n-i)}_{x=1}=\frac{(-1)^{n-i}m(m+1)\ldots(m+n-i-1)}{(n-i)!},$$

folosind formula de derivare a lui: $(ax+b)^\alpha$ (vezi prob. 42. 2).

În concluzie avem deci

$$I=(-1)^n\left[\frac{n(n+1)\dots(n+m-2)}{(m-1)!}\ln x-\frac{m(m+1)\dots(m+n-2)}{(n-1)!}\ln(x-1)\right.$$

$$\left.-\sum_{i=2}^{m}\frac{n(n+1)\dots(n+m-i-1)}{(i-1)(m-i)!\,x^{i-1}}-\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i m(m+1)\dots(m+n-i-1)}{(i-1)(n-i)!\,(x-1)^{i-1}}\right]+C.$$

CAPITOLUL X

INTEGRALE DEFINITE

§ 76. Calcul de integrale definite. Schimbări de variabilă

1. Fie: $f(x)$ o funcție definită într'un interval $[a, b]$; împărțim intervalu într'un număr oarecare de părți, fie ele $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ și în fiecare din aceste intervale parțiale luăm câte o valoare a variabilei $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Se formează suma

$$S=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\dots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum f(\xi)\Delta x, \qquad (I)$$

și se caută dacă această sumă are o limită când numărul intervalelor crește la infinit, fiecare tinzând către zero; în ipoteza că această limită nu depinde de modul de împărțire al intervalului în intervalele parțiale Δx_k și nici de alegerea valorilor ξ_k în interiorul lor, se zice că funcția $f(x)$ este *integrabilă* în intervalul considerat și se notează

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (II)$$

În particular, funcțiile continui sunt integrabile.

2. În general când se vorbește de o integrală definită, este bine să se țină seamă de interpretarea ei geometrică și anume că o asemenea integrală reprezintă suprafața limitată de curba: $y=f(x)$, ordonatele AA', BB' respectiv de abscise a și b și axa Ox, adică suprafața mixtilinie $AA'B'B$ (fig. 103). De exemplu, funcția $\varphi(x)$ care este reprezentată în fig. 104 prin arcele de curbă AB și CD este integrabilă în intervalul $[a, b]$, deși în punctul de abscisă c funcția este discontinuă, deoarece se vede depe figură că suprafața despre care am vorbit mai sus are o valoare bine determinată. Mai general, o funcție care într'un interval $[a, b]$ nu are decât puncte de discontinuitate de prima speță (§ 35, no. 8), în număr finit, este integrabilă.

3. Pentru a calcula valoarea integralei definite

$$I=\int_a^b f(x)\,dx,$$

se caută, când putem găsi, valoarea integralei nedefinite $F(x)=\int f(x)dx$; atunci: $I=F(b)-F(a)$, lucrul pe care-l vom însemna prin

$I = \left| F(x) \right|_a^b$. Constanta de integrat, ce intră în $F(x)$ nu joacă nici un rol.

In general, calculul unei integrale definite se simplifică ţinând seama de regulele pe care le dăm mai jos.

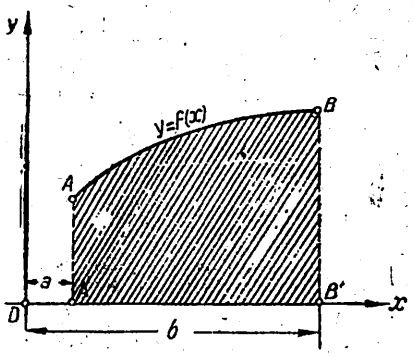


Fig. 103

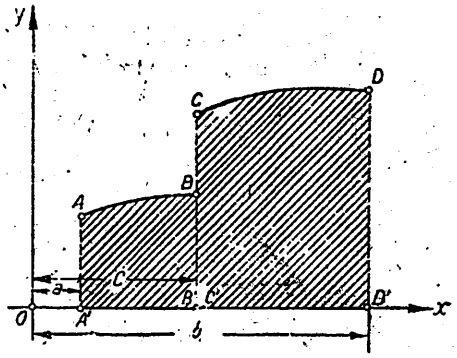


Fig. 104

a) Dacă într'o integrală definită (II) se înlocuieşte: $x=\varphi(t)$ obţinem o nouă integrală definită. Presupunând că funcţia $\varphi(t)$ satisface condiţiilor:

— dacă punem $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, funcţia $\varphi(t)$ este continuă în intervalul $[\alpha, \beta]$;

— admite o derivată continuă în acest interval $[\alpha, \beta]$;

— $\varphi(t)$ variază în acelaşi sens dela a spre b când t variază dela α la β;

atunci avem, *formula schimbării de variabile în integrale definite,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad \text{(III)}$$

In fond, această formulă provine din înlocuirea lui x prin $\varphi(t)$ şi a lui dx prin $\varphi'(t)\,dt$.

Alegând convenabil funcţia $x=\varphi(t)$, a doua integrală poate fi mai simplă ca prima.

b) Oricare ar fi c, avem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad \text{(IV)}$$

c) Când inversăm limitele se schimbă semnul integralei, adică

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \qquad \text{(V)}$$

d) Litera în raport cu care integrăm nu joacă rol, adică

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt. \qquad \text{(VI)}$$

e) Dacă $f(x)$ este o funcţie impară, adică: $f(-x)=-f(x)$, atunci

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0. \qquad \text{(VII)}$$

76. 1. *Să se calculeze*

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+5x+6}.$$

Folosind formula (f. 34), avem

$$I=\left|\ln\frac{x+2}{x+3}\right|_0^1=\ln\frac{3}{4}-\ln\frac{2}{3}=\ln\frac{9}{8}.$$

76. 2. *Să se calculeze*

$$I=\int_1^2 \frac{(x+1)\,dx}{x(x^2+1)}.$$

Avem

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x-1}{x^2+1},$$

încât

$$I=\left|\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg} x\right|_1^2=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

76. 3. *Să calculeze integrala*

$$I=\int_2^3 \frac{2(x+1)}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx.$$

Obţinem

$$I=\int_2^3\left[\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right]dx=\left|\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg} x+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{x^2+1}\right|_2^3=\ln 2-\frac{1}{2}(\ln 10-\ln 5)-(\operatorname{arctg} 3-\operatorname{arctg} 2)+\frac{1}{10}-\frac{1}{5}.$$

Mai departe, scriind

$$\operatorname{arctg} 3-\operatorname{arctg} 2=\operatorname{arctg} 3+\operatorname{arctg}(-2),$$

suntem în cazul c) al prob. 39. 3; vom putea scrie

$$\operatorname{arctg} 3-\operatorname{arctg} 2=\operatorname{arctg}\frac{1}{7},$$

şi deci

$$I=\frac{1}{2}\ln 2-\operatorname{arctg}\frac{1}{7}-\frac{1}{10}.$$

76. 4. *Să se calculeze*

$$I=\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}$$

Cum realizantul numitorului este: $\cos^2\alpha-1<0$, oricare ar fi α, aplicăm pe (f. 35) şi avem

$$I=\left|\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right|_{-1}^{+1}=\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}-\operatorname{arctg}\frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Această sumă se poate transforma într'o singură funcţie arctg precum urmează. Avem

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha,\quad\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\pi-\alpha).$$

Ar fi pripit să scriem

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\right)=\frac{1}{2}\alpha,$$

deoarece în bază definiţiilor (§ 39, no. 1) prima parte trebue să fie o valoare cuprinsă în intervalul $\left[-\frac{1}{2}\pi,+\frac{1}{2}\pi\right]$, în timp ce partea dreaptă, cum asupra lui α nu se face nici o ipoteză, poate avea o valoare care să nu fie cuprinsă în acest interval. Pentru a fi corecţi, trebue să procedăm precum urmează. Arcul α orice valoare ar avea se poate scrie întotdeauna sub forma: $\alpha=2k\pi+\alpha_0$, unde k este un număr întreg, iar α_0 este un arc cuprins în intervalul $(-\pi,+\pi]$*). Atunci

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\operatorname{tg}\left(k\pi+\frac{1}{2}\alpha_0\right)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_0,$$

unde arcul $\frac{1}{2}\alpha_0$ este cuprins în intervalul $\left[-\frac{1}{2}\pi,+\frac{1}{2}\pi\right]$, încât putem scrie

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_0\right)=\frac{1}{2}\alpha_0.$$

Pentru cea de-a doua funcţiune, avem

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha_0\right)=\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\pi-\alpha_0)\right].$$

*) Adică fără limita inferioară $-\pi$.

Aci, trebue să despărțim problema în două: a) $\frac{1}{2}\alpha_0$ este cuprins în intervalul $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$; atunci: $\frac{1}{2}(\pi-\alpha_0)$ este cuprins și el în același interval, încât

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha\right)=\frac{1}{2}(\pi-\alpha_0) \text{ și deci: } I=\frac{1}{2}\pi.$$

b) $\frac{1}{2}\alpha_0$ este cuprins în intervalul $\left(-\frac{1}{2}\pi, 0\right)$ atunci: $\frac{1}{2}(\pi-\alpha_0)$ nu mai este cuprins în intervalul $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$ și numai putem trage concluzia de mai sus. In acest caz, scriem

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\pi-\alpha_0)=\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\pi-\alpha_0)-\pi\right]=\operatorname{tg}\left[-\frac{1}{2}(\pi+\alpha_0)\right]$$

și de data aceasta $-\frac{1}{2}(\pi+\alpha_0)$ va fi cuprins în intervalul $\left[-\frac{1}{2}\pi, 0\right]$. Putem scrie

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha\right)=-\frac{1}{2}(\pi+\alpha_0) \text{ și deci: } I=-\frac{1}{2}\pi.$$

76. 5. *Să se calculeze*

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}.$$

Avem

$$I=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi}\frac{d(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)}{2\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}=\left|\frac{1}{\alpha}\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\right|_0^{\pi}=\frac{\sqrt{(1+\alpha)^2}-\sqrt{(1-\alpha)^2}}{\alpha}.$$

Această expresie depinde de valorile pe care le ia α. Vom ține seamă că valorile radicalilor trebue să fie întotdeauna pozitive, încât este nevoie să facem următoarele ipoteze:

1° $\alpha<-1$, atunci $\sqrt{(1+\alpha)^2}=-1-\alpha$, $\sqrt{(1-\alpha)^2}=1-\alpha$, $I=-\frac{2}{\alpha}$.

2° $\alpha=-1$, „ $\sqrt{(1+\alpha)^2}=0$, $\sqrt{(1-\alpha)^2}=2$, $I=2$.

3° $-1<\alpha<1$, „ $\sqrt{(1+\alpha)^2}=1+\alpha$, $\sqrt{(1-\alpha)^2}=1-\alpha$, $I=2$.

4° $\alpha=1$, „ $\sqrt{(1+\alpha)^2}=2$, $\sqrt{(1-\alpha)^2}=0$. $I=2$.

5° $\alpha>1$, „ $\sqrt{(1+\alpha)^2}=1+\alpha$, $\sqrt{(1-\alpha)^2}=\alpha-1$, $I=\frac{2}{\alpha}$.

76. 6. *Să se calculeze*

$$I=\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}.$$

Scriem

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=I_1+I_2.$$

Făcând în prima: $x=-u$, avem

$$I_1=\int_{1}^{0}\frac{-du}{\sqrt{1-u}-\sqrt{1+u}}=-\int_{0}^{1}\frac{du}{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}=-I_2,$$

deci; $I=0$.

76. 7. *Să se calculeze*

$$I=\int_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}}.$$

Avem, în baza lui (f. 37),

$$I=-\int_{0}^{1}\frac{(1-2x)\,dx}{2\sqrt{1+x-x^2}}+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

76. 8. *Să se calculeze*

$$I=\int_{0}^{1}\frac{\arcsin x}{(1+x)^3}\,dx.$$

Integrăm prin parţi

$$u=\arcsin x,\ du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$dv=\frac{dx}{(1+x)^3},\ v=-\frac{1}{2(1+x)^2},$$

de unde

$$I=\left|-\frac{\arcsin x}{2(1+x)^2}\right|_0^1+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{dx}{(1+x)^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{16}\pi+\frac{1}{2}I_1.$$

Pentru a calcula pe I_1 facem substituţia: $x=\cos\theta$, şi găsim

$$I_1=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2}=\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\cos^4\frac{1}{2}\theta}.$$

Făcând din nou substituţia: $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta=u$, avem

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1+u^2)\,du=\frac{2}{3}.$$

In rezumat: $I=\frac{1}{3}-\frac{1}{16}\pi$.

76. 9. *Să se calculeze*

$$I=\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Facem substituția: $x=a\sin\theta$. Atunci

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos\theta\,d\theta}{a\sin\theta+a\cos\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{1}{4}\pi\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left[\left(\theta+\frac{1}{4}\pi\right)-\frac{1}{4}\pi\right]d\theta}{\sin\left(\theta+\frac{1}{4}\pi\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\theta+\frac{1}{4}\pi\right)+\sin\left(\theta+\frac{1}{4}\pi\right)}{\sin\left(\theta+\frac{1}{4}\pi\right)}d\theta=\left|\frac{1}{2}\ln\sin\left(\theta+\frac{1}{4}\pi\right)+\frac{1}{2}\theta\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}\pi.$$

76. 10. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\sin^4 x\,dx.$$

Se poate folosi una din metodele date la problema 71. 7, sau la problema 20. 10. S'o folosim pe ultima. Punem

$$\alpha=\cos x+i\sin x,\quad \beta=\cos x-i\sin x; \tag{1}$$

Aceste numere complexe nu sunt independente între ele, doarece

$$\alpha\beta=(\cos x+i\sin x)(\cos x-i\sin x)=\cos^2 x+\sin^2 x=1. \tag{2}$$

Din (1) scoatem

$$\cos x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta),\quad i\sin x=\frac{1}{2}(\alpha-\beta). \tag{3}$$

Pedealtă parte, în baza formulei lui Moivre (§ 20, IV)

$$\alpha^p=\cos px+i\sin px,\quad \beta^p=[\cos(-x)+i\sin(-x)]^p=\cos px-i\sin px,$$

de unde rezultă ca mai sus.

$$\cos px=\frac{1}{2}(\alpha^p+\beta^p),\quad i\sin px=\frac{1}{2}(\alpha^p-\beta^p). \tag{4}$$

Folosind formulele (2), (3), (4) avem succesiv,

$$2^{10}\cos^6 x\sin^4 x=(\alpha+\beta)^6(\alpha-\beta)^4$$

$$=(\alpha^{10}+\beta^{10})+2(\alpha^8+\beta^8)-3(\alpha^6+\beta^6)-8(\alpha^4+\beta^4)+2(\alpha^2+\beta^2)+12=$$

$$=2\cos 10x+4\cos 8x-6\cos 6x-16\cos 4x+4\cos 2x+12,$$

adică

$$\cos^6 x\sin^4 x=\frac{\cos 10x}{512}+\frac{\cos 8x}{256}-\frac{3\cos 6x}{512}-\frac{\cos 4x}{64}+\frac{\cos 2x}{256}+\frac{3}{256}.$$

Primitivele termenilor acestei sume, afară de ultimul, conţin sinusurile multiplilor cu soţ ai arcului x şi deci când vom înlocui cu zero sau cu $\frac{1}{2}\pi$, obţinem zero. In rezumat, $I = \frac{3}{512}\pi$.

76. 11. *Să se calculeze*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\, dx.$$

Vom avea la fel

$$\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} = \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 = (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1})^2 =$$

$$= (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-3} + \cdots + \beta^{n-3} + \beta^{n-1})^2 .$$

Din desvoltarea acestui pătrat vom obţine două categorii de termeni: termeni de forma: $\alpha^p + \beta^p$ care se scriu şi: $2\cos px$ şi cari integraţi ne dau termeni în: $\sin px$ ce se anulează pentru limitele integralei; precum şi termenii constanţi. Aceştia din urmă ne dau valoarea integralei. Numărul lor variază după paritatea lui n.

a) $n = 2p$. Atunci

$$\frac{\sin^2 2px}{\sin^2 x} = (\alpha^{2p-1} + \alpha^{2p-3} + \cdots + \alpha + \beta + \cdots + \beta^{2p-3} + \beta^{2p-1})^2;$$

termenii constanţi vor rezulta din produsul termenilor extremi şi sunt în număr de $2p$. Deci

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2px}{\sin^2 x}\, dx = 4p\pi.$$

b) $n = 2p + 1$. Atunci

$$\frac{\sin^2 x(2p+1)x}{\sin^2 x} = (\alpha^{2p} + \alpha^{2p-2} + \cdots + \alpha^2 + 1 + \beta^2 + \cdots + \beta^{2p-2} + \beta^{2p})^2,$$

termenii constanţi vor rezulta din produsul extremelor în număr de $2p$ plus patratul termenului dela mijloc. In total

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 (2p+1)x}{\sin^2 x}\, dx = 2(2p+1)\pi.$$

Deci, în ambele cazuri putem scrie: $I = 2n\pi$.

76. 12. *Să se calculeze*

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx.$$

Folosim pe (f. 45). Avem

$$I_n = \left| -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} I_{n-2};\quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Despărţim problema în două cazuri după paritatea lui n.

a) $n=2p$. Avem: $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2}$. Inlocuind aci pe p prin $p-1, \ldots, 2, 1$, obţinem relaţiile

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2},\quad I_{2p-2} = \frac{2p-3}{2(p-1)} I_{2p-4}, \ldots, I_2 = \frac{I_0}{2},$$

relaţii cari înmulţite parte cu parte ne dau

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 3 \cdot 1}{2^p\, p(p-1)\cdots 2 \cdot 1} I_0;$$

$$\text{dar: } I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}\pi. \text{ Deci}$$

$$I_{2p} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2p-1)}{2^{p+1}\, p!}\pi.$$

b) $n=2p+1$. Avem: $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1}$. Procedând la fel obţinem

$$I_{2p+1} = \frac{2p \cdot 2(p-1)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3} I_1,$$

şi cum:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \left| -\cos x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

deci

$$I_{2p+1} = \frac{2^p \cdot p!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p+1)}.$$

§ 77. Integrale generalizate

Prin integrale generalizate înţelegem integralele pentru care una din limite (sau amândouă) este infinită precum şi integralele pentru care elementul de integrat devine infinit la una din limite (sau într'un punct din interiorul intervalului de integrat). Pentru aceste categorii de integrale avem următoarele două criterii:

I. Fie: $I = \int_a^b f(x)\, dx$. Dacă $b=\infty$, şi dacă se poate determina un număr m

astfel ca produsul $x^m f(x)$ să aibă o limită finită şi diferită de zero când x tinde către infinit, atunci integrala are un sens când $m > 1$, şi nu are în caz contrar.

2. Să presupunem că: $f(c) = \infty$, c fiind cuprins între a şi b, sau chiar egal cu una din aceste limite. Dacă se poate determina un număr m astfel ca produsul: $(x-c)^m f(x)$ să aibă o limită finită şi diferită de zero, când x tinde către c, atunci integrala are un sens (valoarea ei este bine determinată) dacă $m<1$ şi nu are în caz contrar[1]).

77. 1. *Să se calculeze*

$$I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}$$

Integrala are sens deoarece

$$\lim_{x\to\infty} x^4 f(x)=1 \qquad (m=4>1)$$

Pentru calcul observăm că

$$\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x-1}{x^2-x+1}\right).$$

Se găseşte

$$I=\frac{1}{4}\left|\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right|_0^{\infty}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

77. 2. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\,dx.$$

Integrala are un sens deoarece

$$\lim_{x\to a}(x-a)^{\frac{1}{2}}f(x)=\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{b-a} \qquad \left(m=\frac{1}{2}<1\right).$$

Pentru găsirea valorii facem schimbarea: $\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}=u$,

de unde

$$I=-(b-a)^2\int_0^{\infty}\frac{u^2(u^2-1)}{(u^2+1)^3}du=-(b-a)^2\left[\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2+1}-3\int_0^{\infty}\frac{du}{(u^2+1)^2}+2\int_0^{\infty}\frac{du}{(u^2+1)^3}\right].$$

Dar, în baza formulelor dela (f. 42), avem

$$I=-\frac{1}{8}(b-a)^2\pi.$$

[1]) Se va vedea şi paragraful următor.

77. 3. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}.$$

Integrala are sens, deoarece gradul de infinititudine, al funcției de integrat, atât pentru limita superioară cât și pentru cea inferioară este $\frac{1}{2}$. Aceasta înseamnează că avem

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^{\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{2-x}}=1;$$

$$\lim_{x\to 2}(2-x)^{\frac{1}{2}} f(x)=2 \qquad \left(m=\frac{1}{2}<1\right).$$

Pentru calcul folosim pe (f. 37), avem succesiv

$$I=-\int_1^2 \frac{(-2x+3)\,dx}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}+\frac{3}{2}\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}=\frac{3}{2}\pi.$$

77. 4. *Să se calculeze*

$$I=\int_0^1\left(\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}\right)dx.$$

Pentru limita superioară descompunem integrala în două și observăm imediat că integrala există. Pentru limita inferioară scriem funcția de integrat sub forma

$$\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})}.$$

Facem mai departe schimbarea: $x=\sin u$. Avem

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{du}{\sin u}-\frac{\cos u\,du}{\sin u}\right)=\left|\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}u}{\sin u}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\left|\ln\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}u}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\ln 2.$$

77. 5. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}{p^2\cos^2x+q^2\sin^2x}\,dx.$$

Facem schimbarea: $\operatorname{tg}x=u$.

$$I=\int_0^{\infty}\frac{a^2+b^2u^2}{p^2+q^2u^2}\frac{du}{1+u^2}=\frac{a^2-b^2}{p^2-q^2}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2}+\frac{a^2q^2-b^2p^2}{q^2-p^2}\int_0^{\infty}\frac{du}{p^2+q^2u^2}=$$

$$=\left[\frac{a^2-b^2}{p^2-q^2}+\frac{a^2q^2-b^2p^2}{pq\,(q^2-p^2)}\right]\frac{\pi}{2}.$$

77. 6. *Să se calculeze*

$$I=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{dx}{1-\cos\alpha\sin x}\,.$$

Impărţim integrala în două şi făcând în prima: $x=-u$, avem

$$I=\int_{-\pi}^{0}\frac{dx}{1-\cos\alpha\sin x}+\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1-\cos\alpha\sin x}=\int_{0}^{\pi}\frac{du}{1+\cos\alpha\sin u}+\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1-\cos\alpha\sin x}=$$

$$=\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+\cos\alpha\sin x}+\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1-\cos\alpha\sin x}=2\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1-\cos^2\alpha\sin^2 x}\,,$$

deoarece litera în raport cu care integrăm nu joacă rol. Impărţind din nou în două intervalul de integrat şi făcând în a doua schimbarea: $x=\pi-u$, găsim

$$I=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-\cos^2\alpha\sin^2 x}+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1-\cos^2\alpha\sin^2 x}=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-\cos^2\alpha\sin^2 x}\,.$$

Aci facem: $\operatorname{tg}x=u$

$$I=4\int_{0}^{\infty}\frac{du}{1+u^2-u^2\cos^2\alpha}=4\int_{0}^{\infty}\frac{du}{1+\sin^2\alpha\cdot u^2}=\left|\frac{4}{\sin\alpha}\operatorname{arctg}(u\sin\alpha)\right|_0^{\infty}=\frac{2\pi}{\sin\alpha}\,.$$

77. 7. *Să se calculeze*

$$I_n=\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^n}\,.$$

n fiind un număr întreg şi pozitiv

Integrala are evident un sens. Pentru calcul folosim pe (f. 41) care în cazul nostru se scrie succesiv

$$I_n=-\frac{1}{(n-1)3^{n-1}}+\frac{2(2n-3)}{3(n-1)}I_{n-1}=-\frac{1}{(n-1)3^{n-1}}-\frac{2(2n-3)}{(n-1)(n-2)3^{n-1}}+$$

$$+\frac{4(2n-3)(2n-5)}{9(n-1)(n-2)}I_{n-2}=-\frac{1}{(n-1)3^{n-1}}-\frac{2(2n-3)}{(n-1)(n-2)3^{n-1}}-$$

$$-\frac{4(2n-3)(2n-5)}{(n-1)(n-2)(n-3)3^{n-1}}+\frac{8(2n-3)(2n-5)(2n-7)}{27(n-1)(n-2)(n-3)}I_{n-3}$$

$$=\ldots=-\frac{1}{(n-1)3^{n-1}}\left[1+2\frac{2n-3}{n-2}+4\frac{(2n-3)(2n-5)}{(n-2)(n-3)}+\ldots\right.$$

$$\left.+2^{n-2}\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots5\cdot3}{(n-2)(n-3)\ldots2\cdot1}-2^{n-1}\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots3\cdot1}{(n-2)(n-3)\ldots2\cdot1}I_1\right],$$

unde înlocuim pe I_1 prin valoarea sa

$$I=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}=\left|\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right|_1^{\infty}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

77. 8. *Să se calculeze*

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}. \qquad (R=4q-p^2>0).$$

Folosind aceiaşi formulă (f. 41), se găseşte

$$I=\frac{2^{n-1}(2n-3)(2n-5)\ldots3\cdot1}{(n-1)(n-2)\ldots2\cdot1\cdot R^{n-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{2^n(2n-3)(2n-5)\ldots3\cdot1}{(n-1)!R^{n-\frac{1}{2}}}\pi.$$

§ 78. Folosirea seriilor pentru calculul sau demonstrarea existenţei integralelor

1. Fiind dată o serie de funcţii continui

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots, \qquad (I)$$

în general nu putem scrie

$$\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\cdots+\int_a^b u_n(x)\,dx+\cdots; \qquad (II)$$

O condiţie suficientă pentru a avea egalitatea (II) este ca seria (I) să fie *uniform convergentă* (§ 50, pct. 1) Limita superioară b poate fi variabila x. In particular, dacă seria (I) este întreagă, adică (I) este de forma

$$S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots. \qquad (III)$$

în interiorul intervalului de convergenţă (§ 50, no. 2), avem egalitatea

$$\int_a^x S(x)\,dx=a_0(x-a)+\frac{a_1}{2}(x^2-a^2)+\cdots+\frac{a_n}{n+1}(x^{n+1}-a^{n+1})+\cdots \qquad (IV)$$

unde x şi a sunt două valori din interiorul intervalului de convergenţă. Formula precedentă poate fi scrisă cu ajutorul integralelor nedefinite sub forma

$$\int S(x)\,dx=C+\frac{a_0}{1}x+\frac{a_2}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\cdots. \qquad (V)$$

C fiind o constantă ce urmează să fie determinată. Seria din dreaptă are acelaşi interval de convergenţă ca şi seria (III).

Aplicarea celor de mai sus în rezolvarea problemelor, o vom vedea în cele ce urmează.

2. Când avem o integrală de forma

$$I=\int_a^{\infty} f(x)\,dx, \tag{VI}$$

a cărei existenţa ni se cere să demonstrăm, dacă metoda dată la paragraful precedent nu reuşeşte, se poate proceda şi precum urmează. Se consideră un şir de numere cu termenii pozitivi crescători şi mai mari decât a:

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n,\ldots$$

şi apoi se scrie I sub forma

$$I=\int_a^{a_1} f(x)\,dx+\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx+\cdots+\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx+\cdots.$$

Dacă seria din partea dreaptă este convergentă, integrala I are un sens. Din această cauză când I are un sens, se zice că integrala ce-l reprezintă este *convergentă.*

78. 1. *Să se desvolte în serie funcţia*

$$f(x)=\operatorname{arctg} x.$$

Să se deducă din această desvoltare, egalitatea

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots$$

Avem

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots, \tag{1}$$

în baza sumei progresiei geometrice de raţie $-x^2$. Această desvoltare va fi valabilă în ipoteza: $|x^2|<1$, care este totuna cu $|x|^2<1$ (§ 20, III') şi cum $|x|$ este pozitiv această inegalitate se scrie mai simplu: $|x|<1$. Intervalul de convergenţă al desvoltărei (1) este deci: $(-1,\ +1)$. In interiorul acestui interval integrând termen cu termen, putem scrie

$$\operatorname{arctg} x=C+\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots.$$

Pentru a determina pe C dăm lui x valoarea particulară $x=0$ (interioară intervalului de convergenţă) găsim: $C=\operatorname{arctg} 0=0$. In definitiv,

$$\operatorname{arctg} x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \tag{2}$$

Pentru $x=1$, seria este convergentă deoarece este alternată, termenii în valoarea absolută descresc şi termenul general tinde către zero (§ 33, pct. 2). In virtutea teoremei lui Abel (§ 50, pct. 2), cum $\operatorname{arctg} 1=\frac{1}{4}\pi$, făcând în (2), $x=1$ obţinem ca o consecinţă seria din enunţ.

78. 2. *Să se desvolte în serie funcţia*

$$f(x)=\arcsin x.$$

Procedăm analog ca la problema precedentă. In baza formulei binomului (§ 51, VII), avem

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{-\frac{1}{2}}{1!}x^2+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4-\cdots+$$

$$+(-1)^n\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{2n}+\cdots$$

serie convergentă în intervalul $(-1, +1)$, (acelaşi raţionament ca la problema precedentă). Termenul general se scrie

$$(-1)^n\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}{n!}=$$

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)},$$

încât prin integrare avem

$$\arcsin x=C+\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

Inlocuind pe x cu zero, rezultă $C=0$ şi avem în definitiv:

$$\arcsin x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

78. 3, *Să se desvolte în serie funcţia*

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\arcsin x+\frac{3}{4}x\sqrt{1-x^2}.$$

Avem succesiv

$$f'(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2},\qquad f''(x)=\arcsin x, \tag{1}$$

ceiace însemnează ca în baza problemei precedente,

$$f''(x)=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

serie convergenta în intervalul $(-1, +1)$. Integrând termen cu termen avem

$$f'(x)=C+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{1}{2}\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^6}{5\cdot 6}+\cdots$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}+\cdots$$

Cum din (1) se vede că pentru $x=0$, avem $f'(0)=1$, înseamnă că aci trebue să luăm: $C=1$. Integrând din nou egalitatea obţinută, şi folosind pentru prescurtare simbolul Σ, avem

$$f(x)=x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{x^{2n+3}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}.$$

Constanta de integrare am luat-o egală cu zero, deoarece $f(0) = 0$.

Observație. Desvoltarea se putea face și direct folosind seriile care dau pe arcsin x și $\sqrt{1-x^2}$, înlocuind în $f(x)$ și însumând apoi termen cu termen.

78. 4. *Să se demonstreze formula*

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} + \cdots$$

Folosind desvoltarea (2) dela prob. 78. 1, avem

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \frac{1}{1} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + \cdots$$

Dacă x este în intervalul $(-1, +1)$, formula (IV) se scrie

$$\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{x}{1^2} - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} + \cdots$$

Cum seria din partea dreaptă este convergentă pentru $x=1$, fiind comparabilă cu seria convergentă având termenul general $\frac{1}{n^2}$, conform teoremei lui Abel (§ 50, pct. 2), vom putea scrie egalitatea din enunț.

78. 5. *După cum vom vedea* (prob. 79. 4) *avem formula*

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}; \tag{1}$$

folosind această formulă, să se demonstreze că

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\alpha x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\alpha^2} \tag{2}$$

Pornim dela desvoltarea cunoscută (§ 51, III)

$$\cos 2\alpha x = 1 - \frac{(2\alpha x)^2}{2!} + \frac{(2\alpha x)^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{(2\alpha x)^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

valabilă oricare ar fi x. Inmulțind cu e^{-x^2} și integrând termen cu termen, avem

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\alpha x\,dx = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

unde am notat prin

$$u_n = (-1)^n \frac{(2\alpha)^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n}\,dx,$$

şi în baza formulei (1),

$$u_n = (-1)^n \frac{(2\alpha)^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{n!}$$

care justifică formula (2).

78. 6. *Durata oscilaţiei unui pendul de lungime l, care face o oscilaţie de un unghi α se exprimă cu ajutorul formulei*

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}} \cdot \tag{1}$$

Să se demonstreze că T se poate scrie sub formă de serie astfel

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6\frac{\alpha}{2} + \cdots\right]. \tag{2}$$

Deoarece

$$\cos\varphi - \cos\alpha = 2\left(\sin^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\varphi\right),$$

formula (1) se scrie

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\varphi}} \cdot$$

Facem substituţia: $\sin\frac{1}{2}\varphi = \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\psi$, de unde: $\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\varphi\, d\varphi = \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\psi d\psi$. Pentru $\varphi = 0$, rezultă: $\psi = 0$, iar pentru $\varphi = \alpha$, $\psi = \frac{1}{2}\pi$. Elementul de integrat este

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\varphi}} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha \cos\psi\, d\psi}{\cos\frac{1}{2}\varphi \sqrt{\sin^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\alpha \sin^2\psi}} =$$

$$= \frac{2d\psi}{\cos\frac{1}{2}\varphi} = \frac{2d\psi}{\sqrt{1 - \sigma^2\sin^2\psi}},$$

unde am pus pentru prescurtare: $\sigma = \sin\frac{1}{2}\alpha$. Deci

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sigma^2\sin^2\psi}} \cdot$$

Cum σ este un sinus, $\sigma^2 \sin^2\psi < 1$, putem aplica desvoltarea în serie a binomului pentru a scrie

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2\sin^2\psi}} = (1-\sigma^2\sin^2\psi)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{-\frac{1}{2}}{1!}\sigma^2\sin^2\psi + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\sigma^4\sin^4\psi$$

$$- \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\sigma^6\sin^6\psi + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\sigma^2\sin^2\psi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sigma^4\sin^4\psi + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\sigma^6\sin^6\psi + \cdots$$

şi integrând termen cu termen, avem

$$I = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\left(I_0 + \frac{1}{2}I_2\sigma^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}I_4\sigma^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}I_6\sigma^6 + \cdots\right)$$

unde am pus în general,

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\psi\, d\psi = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}\,n!}\pi = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{\pi}{2},$$

în baza prob. 76.12. Făcând înlocuirile rezultă formula din enunţ

78. 7. *Integrala*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx,$$

are un sens?

Scriem integrala I sub forma

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx + \cdots + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx + \cdots,$$

unde dacă notăm prin: $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = u_n$, atunci

$$I = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

In felul acesta am redus problema la o problemă asupra seriilor: dacă seria din partea dreaptă este convergentă, integrala are sens, în caz contrar nu. Să arătăm că seria este convergentă. Mai întâiu facem observaţia că seria este alternată deoarece dacă n este cu soţ în intervalul de integrat: $\sin x > 0$, adică elementul de integrat este pozitiv şi deci u_n este pozitiv; dacă n este fără soţ în intervalul $[n\pi, (n+1)\pi]$, $\sin x < 0$, elementul de integrat este negativ şi integrala, adică u_n, e negativă. Dacă am arăta că termenii seriei descresc în valoarea absolută şi tind către zero, atunci seria este convergentă (§ 33 pct. 2). In adevăr, în integralele ce definesc pe u_n intervalul de integrat are aceeaşi lungime, dar elementul de integrat este mai mare în prima decât în a doua deoarece $\sin x$ ia aceleaşi valori, dar $\sqrt{x}$ este mai mare în

intervalul $[(n+1)\pi,\ (n+2)\pi]$ decât în intervalul $[n\pi,\ (n+1)\pi]$. Deci: $|u_{n+1}|<|u_n|$. Să arătăm cu u_n tinde către zero. În adevăr, cum: $|\sin x|<1$, avem ţinând seamă că o integrală nu e altceva decât o sumă,

$$|u_n|=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx\right|=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\,dx<\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\left|2\sqrt{x}\right|_{n\pi}^{(n+1)\pi},$$

$$|u_n|<2\sqrt{\pi}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Dar fracţia din partea dreaptă tinde către zero, când n tinde către infinit, deci cu atât mai mult va tinde $|u_n|$. Seria este deci convergentă şi deci integrala are un sens.

78. 8. *Fie $f(x)$ o funcţie pozitivă, descrescătoare şi tinzând către zero când x tinde către infinit. Să se demonstreze că seria*

$$f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\cdots+f(a+n)+\cdots$$

şi cu integrala

$$I=\int_a^b f(x)\,dx,$$

sunt convergente în acelaşi timp.

Construim curba $y=f(x)$, care în baza ipotezelor problemei, va avea forma din fig. 105. Considerăm pe axa Ox punctele P_0, P_1, $P_2,\ldots$, de abscise a, $a+1$, $a+2,\ldots$ şi construim pe P_0P_1, $P_1P_2,\ldots$ ca baze, dreptunghiuri înscrise şi respectiv circumscrise curbei. Ordonatele punctelor P_n vor fi egale cu $f(a+n)$, încât scriind că suprafaţa mărginită de curbă, axa Ox şi ordonata A_0P_0 este cuprinsă între suma dreptunghiurilor înscrise şi cea a dreptunghiurilor circumscrise, avem dubla inegalitate

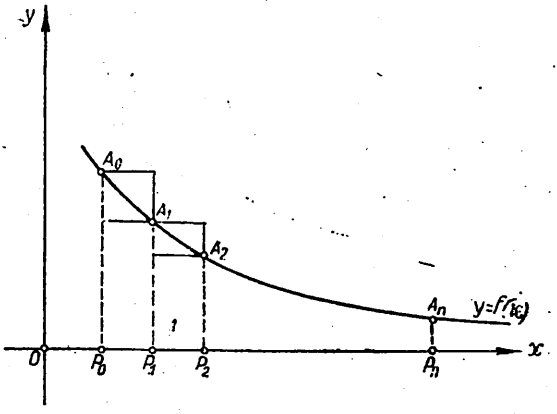


Fig. 105

$$f(a+1)+f(a+2)+\cdots+f(a+n)<\int_a^n f(x)\,dx<f(a)+f(a+1)+\cdots+f(a+n-1).$$

Notând cu S_n suma primilor $n+1$ termeni ai seriei, această dublă inegalitate se mai scrie

$$S_n-f(a)<\int_a^n f(x)\,dx<S_{n-1}.$$

Deci: 1° dacă seria dată este convergentă, S_{n-1} are o limită şi inegalitatea din dreapta spune că şi integrala va avea o limită; 2° dacă integrala va avea o limită, S_n va avea şi el şi deci seria dată va fi covergentă. In acest raţionament s'a ţinut seama că seria are termenii pozitivi şi deci şirul S_n este crescător.

§ 79. Integrale euleriene

1. Se numeşte *integrală euleriană de prima speţă*, integrala

$$B(p,q)=\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du, \tag{I}$$

care are un sens în ipotezele: $p>0$, $q>0$.

2. Se numeşte *integrală euleriană de a doua speţă*, integrala

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt. \tag{II}$$

care are un sens în ipoteza: $a>0$.

3. Intre cele două integrale avem relaţia

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,. \tag{III}$$

79. 1. *Să se demonstreze că în ipoteza n întreg şi pozitiv, avem*

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

Folosim expresia lui $\Gamma(n)$ sub formă de integrală şi integrăm prin părţi punând: $u=t^{n-1}\,1^{n-1}$, $dv=e^{-t}\,dt$; rezultă

$$\Gamma(n)=\left|-t^{n-1}e^{-t}\right|_0^\infty+(n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}\,dt. \tag{1}$$

Dar,

$$\lim_{t\to\infty}t^{n-1}e^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^{n-1}}{e^t}, \tag{2}$$

şi aplicând regula lui Hospital de $(n-1)$ ori ajungem la

$$\lim_{t\to\infty}t^{n-1}e^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{(n-1)!}{e^t}=0,$$

încât relaţia (1) se scrie

$$\Gamma(n)=(n-1)\,\Gamma(n-1). \tag{3}$$

Inlocuind aci pe n cu $n-1$, $n-2,\ldots,2$ şi înmulţind între ele relaţiile astfel obţinute, avem

$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\,\Gamma(1)=(n-1)!\,\Gamma(1),$$

şi acum

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}\,dt=\Big|-e^{-t}\Big|_0^{\infty}=1, \tag{4}$$

relaţia din enunţ este justificată.

Observaţie. Relaţia (3) este adevărată oricare ar fi n pozitiv nu neapărat întreg. În adevăr, mai general, oricare ar fi puterea n a lui t în (2), fracţia tinde către zero, deoarece e^t tinde mai repede către infinit decât orice putere a lui t (§ 46, III).

79. 2. *Avem:* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Să calculăm pe $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, adică integrala

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\,du.$$

Facem schimbarea de variabilă: $u=\sin^2\theta$; atunci $du=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$, încât

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}}{\sin\theta}\,2\sin\theta\cos\theta\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\pi.$$

Dar în baza lui (III) şi (3) dela problema precedentă, avem

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\pi;\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

79. 3. *Să se calculeze:* $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ *unde* n *este un număr întreg şi pozitiv.*

În baza lui (3) dela prob. 79.1, avem din aproape în aproape,

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)=\cdots=$$

$$=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

şi folosind rezultatul dela problema precedentă,

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

79. 4. *Să se demonstreze formula*

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}x^{2n}\,dx=\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.$$

Facem în integrala din prima parte substituţia: $x^2=t$. Avem atunci

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}x^{2n}\,dx=\int_0^{\infty} e^{-t}t^n\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{n-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

şi în baza rezultatului dela problema precedentă, formula din enunţ este justificată.

79. 5. *Să se reducă calculul integralelor de forma*

$$I=\int_0^1 x^m(1-x^n)^p\,dx,$$

la calcul de funcţii euleriene, de speţa a doua. Când I are un sens?

Facem substituţia: $x^n=u$; $x=\sqrt[n]{u}=u^{\frac{1}{n}}$ (luăm valoarea aritmetică a radicalului). Limitele rămân aceleaşi. Avem

$$I=\frac{1}{n}\int_0^1 u^{\frac{m}{n}}(1-u)^p u^{\frac{1}{n}-1}\,du=\frac{1}{n}\int_0^1 u^{\frac{m+1}{n}-1}(1-u)^p\,du,$$

care este o integrala euleriană de prima speţă. Pentruca I să existe este necesar ca numerele: $\frac{m+1}{n}$, $p+1$ să fie pozitive (pct. 1). În aceste condiţii, avem

$$I=\frac{1}{n}B\left(\frac{m+1}{n},\,p+1\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)\Gamma(p+1)}{n\Gamma\left(\frac{m+1}{n}+p+1\right)}.$$

79. 6. *Să se reducă calculul integralelor de forma*

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x\,dx,$$

la funcţii Γ *(a).*

Facem substituţia: $\sin^2 x=u$. Integrala devine

$$I=\int_0^1 u^{\frac{m-1}{2}}(1-u)^{\frac{n-1}{2}}\frac{du}{2\sqrt{u(1-u)}}=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{m}{2}-1}(1-u)^{\frac{n}{2}-1}du=$$

$$=\frac{1}{2}B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}.$$

79. 7. *Să se arate că integralele de forma*

$$I=\int_0^\infty\frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p},$$

unde: $a>0$, $b>0$, $np>m+1$, *se reduc la calculul de funcţii gama.*

Facem substituţia: $bx^n=a\operatorname{tg}^2\theta$. Limitele noui vor fi 0 şi $\frac{1}{2}\pi$, iar în ceeace priveşte calculul elementului de integrat, avem:

$$x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\operatorname{tg}^{\frac{2}{n}}\theta,\quad x^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}\operatorname{tg}^{\frac{2m}{n}}\theta,\quad (a+bx^n)^p=a^p(1+\operatorname{tg}^2\theta)^p=\frac{a^p}{\cos^{2p}\theta},$$

$$dx = \frac{2}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \operatorname{tg}^{\frac{2}{n}-1}\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

$$I = \frac{2}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} a^{-p}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2(m+1)}{n}-1}\theta \cos^{2p-\frac{2(m+1)}{n}-1}\theta\, d\theta,$$

și folosind rezultatul dela problema precedentă,

$$I = \frac{1}{na^p}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)\Gamma\left(p-\frac{m+1}{n}\right)}{\Gamma(p)}.$$

79. 8. *Folosind formula cunoscută*

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

să se calculeze integrala

$$I = \int_0^1 \frac{x^{2s}\,dx}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}},$$

unde s este un număr întreg și pozitiv.

Integrala se mai poate scrie

$$I = \int_0^1 x^{2s-\frac{1}{3}}(1-x^2)^{-\frac{1}{3}}\,dx,$$

care este de forma integralei ce face obiectul prob. 79. 5. Condițiile obținute cu ocazia acestei probleme, se reduc la a spune că numerele

$$\frac{m+1}{n} = \frac{2s-\frac{1}{3}+1}{2} = s+\frac{1}{3} \quad \text{și} \quad p+1 = -\frac{1}{3}+1 = \frac{2}{3},$$

sunt pozitive, ceeace este cazul. Vom avea

$$I = \frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2\Gamma(s+1)} = \frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2s!}.$$

Dar, în baza formulei (3) dela prob. 79. 1, găsim din aproape în aproape,

$$\Gamma\left(s+\frac{1}{3}\right) = \left(s-\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(s-\frac{2}{3}\right) = \left(s-\frac{2}{3}\right)\left(s-\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(s-\frac{5}{3}\right) =$$

$$= \cdots = \left(s-\frac{2}{3}\right)\left(s-\frac{5}{3}\right)\cdots\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{(3s-2)(3s-5)\ldots 1}{3^s}\Gamma\frac{1}{3},$$

Cum, în baza formulei citate în enunț,

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

avem în definitiv,

$$I=\frac{1\cdot 4\ldots(3s-2)}{3\cdot 6\ldots(3s)}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

§ 80. Serii trigonometrice (serii Fourier)

1. Să presupunem că ni se dă o funcţie periodică de perioadă ω (§ 35, pct. 3. b), adică

$$f(x+\omega)=f(x).$$

Făcând transformarea $(I)\ x=\frac{\omega}{2\pi}t$, noua funcţie $g(t)$ va avea perioada 2π. Aplicăm consideraţiunile ce vom face pentru funcţiile de perioadă 2π. funcţiei $g(t)$ şi la urmă făcând transformarea inversă $t=\frac{2\pi}{\omega}x$, vom reveni la funcţia iniţială.

2. Să considerăm o funcţie de perioadă 2π. A o dezvolta în serie trigonometrică într'un interval de mărime 2π, de ex., $[0,2\pi]$*), însemnează a o scrie sub forma

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots$$
$$\cdots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\cdots \qquad \text{(II)}$$

Coeficienţii a_n şi b_n au, drept expresii

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx, \qquad \text{(III)}$$

(în particular pentru $n=0$, prima formulă ne dă pe a_0).

Dacă $f(x)$ este o funcţie *pară* (§ 35, pct. 3, c) toţi coeficienţii b_n sunt nuli, iar dacă este *funcţie impară*, toţi coeficienţii a_n sunt nuli.

3. Asupra dezvoltărilor în serie trigonometrică a funcţiilor, avem următoarele teoreme:

a) Dacă $f(x)$ este continuă şi dacă toţi coeficienţii a_n şi b_n sunt nuli, funcţia $f(x)$ este identic nulă.

b) Dacă două funcţii continui $f(x)$ şi $g(x)$, dezvoltate în serie trigonometrică, au aceiaşi coeficienţi a_n şi b_n, cele două funcţii sunt identice.

c) **Teoremă generală.** Dacă funcţia $f(x)$ poate fi reprezentată în intervalul $[0, 2\pi)$ printr'un număr finit de arce continui cari în fiecare punct admit o tangentă bine determinată (fig. 106) (adică funcţia admite în interval numai puncte de discontinuitate de prima speţă (§ 35, pct. 8)), atunci seria (II) este convergentă în fiecare punct al intervalului. În ceiace priveşte suma seriei avem două cazuri: α) dacă în punctul x, funcţia $f(x)$ este continuă, suma seriei (II) este $f(x)$; β) dacă x este un punct de discontinuitate, atunci suma seriei (II) este

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \qquad \text{(IV)}$$

*) Acest interval se poate înlocui cu orice interval de aceiaşi mărime, de ex., $[-\pi, +\pi]$.

Aceasta însemnează că o funcţie periodică, care în intervalul $[0, 2\pi]$ este continuă şi derivabilă, afară de un număr finit de puncte ale intervalului unde are puncte de discontinuitate de prima speţă obişnuite, este reprezentată în interval (şi deci peste tot) de seria corespunzătoare (II).

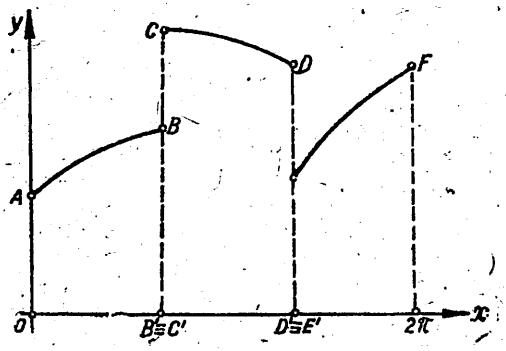


Fig. 106

4. In general, fiind dată o funcţie $f(x)$ având perioada ω, se poate dezvolta în serie trigonometrică de forma

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{\omega}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{\omega}x\right), \qquad (V)$$

coeficienţii a_n şi b_n fiind daţi de formulele

$$a_n=\frac{2}{\omega}\int_0^{\omega}f(x)\cos\frac{2n\pi}{\omega}x\,dx, \quad b_n=\frac{2}{\omega}\int_0^{\omega}f(x)\sin\frac{2n\pi}{\omega}x\,dx. \qquad (VI)$$

5. Fie $f(x)$ o funcţie ce satisface condiţiilor cerute de teorema generală dela no. precedent; se consideră polinomul

$$T_n(x)=\frac{1}{1}\alpha_0+(\alpha_1\cos x+\beta_1\sin x)+\ldots+(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx), \qquad (VII)$$

şi se pune problema determinării coeficienţilor α_n şi β_n astfel ca acest polinom să reprezinte cât mai bine funcţia $f(x)$ în intervalul $[0, 2\pi]$. Traducem această proprietate a polinomului $T_n(x)$ prin a spune că el face *minimă* integrala

$$E_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\,dx, \qquad (VIII)$$

care se numeşte *eroarea pătratică mijlocie*. Se arată că polinomul $T_n(x)$ care satisface această condiţie, este polinomul în care luăm: $\alpha_n=a_n$, $\beta_n=b_n$, a_n şi b_n fiind determinaţi prin formulele (III).

Cu alte cuvinte, luând din dezvoltarea unei funcţii în serie trigonometrică, polinoamele formate din neglijarea unor termeni începând dela un rang oarecare, se obţin polinoamele cari aproximează cel mai bine funcţia în intervalul $[0, 2\pi]$.

80. 1. *Să se dezvolte în serie trigonometrică funcţia periodică definită prin:* $f(x)=x$ *în intervalul* $0\leq x<2\pi$.

Funcţia reprezentată grafic are forma din fig. 107. Pentru calculul coeficienţilor integrăm prin părţi aşa cum am procedat la probl. 69. 7. Avem

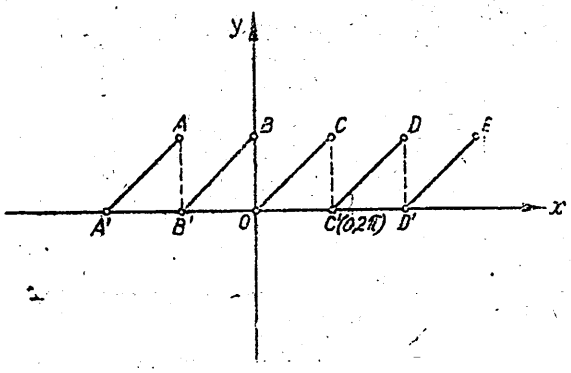


Fig. 107

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^{2\pi}=2\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\frac{x\sin nx}{n}\right|_0^{2\pi}-$$

$$-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left|-\frac{x\cos nx}{n}\right|_0^{2\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx=-\frac{2}{n}$$

încât dezvoltarea căutată este

$$x=\pi-2\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right).$$

Dezvoltarea din partea dreaptă în fiecare punct al intervalului $(0, 2\pi)$ reprezintă pe x; la capetele intervalului seria din partea dreaptă reprezintă pe π. In adevăr, într'un asemenea punct, avem

$$f(x)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}=\frac{2\pi+0}{2}=\pi.$$

80. 2. *Să se dezvolte în serie trigonometrică funcţia*

$$f(x)=\begin{cases}-c & \text{pentru } -\pi<x<0,\\ c & \text{„ } \quad 0<x<\pi,\\ 0 & \text{„ } \quad x=-\pi,\quad x=0,\quad x=+\pi.\end{cases}$$

Funcţia reprezentată grafic are forma din fig. 108; anume, ea se compune din segmentele BC, DE, ... fără extremităţi, şi din punctele A, O, F, ... Funcţia neavând decât puncte singulare de prima speţă obişnuite, va fi reprezentată peste tot de seria trigonometrică corespunzătoare. Cum

$$f(-x_0)=-c=-f(x_0),$$

funcţia este impară şi deci în general $a_n=0$. Pentru restul coeficienţilor, avem:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-c\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\pi}c\sin nx\,dx=\begin{cases}\frac{4c}{\pi n}\ (n=2p+1),\\ 0\ (n=2p),\end{cases}$$

şi deci putem scrie

$$f(x)=\frac{4c}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}+\cdots\right].$$

80. 3. *Să se arate că dacă o funcţie este pară sau impară, intervalul în care studiem funcţia se reduce la jumătate.*

După cum am spus la începutul acestui paragraf, dacă $f(x)$ este o funcţie periodică cu perioadă 2π, intervalul $[0, 2\pi]$ în care facem dezvoltarea funcţiei, poate fi schimbat cu oricare altul de aceiaşi mărime. Astfel, formulele (III) se mai pot scrie

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad \text{(III')}$$

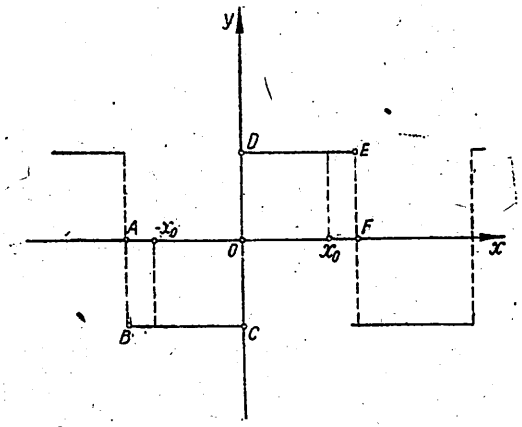


Fig. 108

sau încă

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\pi} f(x)\cos n\,xdx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx;$$

făcând schimbarea: $x=-u$, găsim

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x)+f(-x)]\cos nx\,dx,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x)-f(-x)]\sin nx\,dx. \qquad (1)$$

Aceste formule spun următoarele: a) dacă $f(-x)=f(x)$, adică funcţiunea este *pară*.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=0, \qquad (2)$$

b) dacă $f(-x)=-f(x)$, adică funcţiunea este *impară*,

$$a_n=0, \quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{3}$$

80. 4. *Să se reprezinte prin serie trigonometrică, funcţia al cărui grafic este reprezentat în* fig. 109.

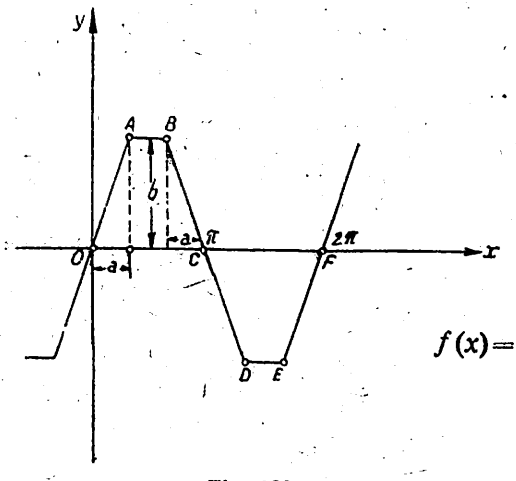


Fig. 109

Funcţia ce avem de reprezentat printr'o serie trigonometrică este reprezentată pe figură prin segmentele OA, AB, BD, DE, EF. Scriind ecuaţiile dreptelor pe cari se află aceste segmente, rezultă reprezentarea analitică

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{b}{a}x & 0\leqq x\leqq a \\ b & a\leqq x\leqq \pi-a \\ \dfrac{b}{a}(\pi-x) & \pi-a\leqq x\leqq \pi. \end{cases}$$

Cum se vede de pe figură că $f(x)$ este impară, rezultă că $a_n=0$ oricare ar fi n. Pentru coeficienţii b_n, în baza rezultatelor dela problema precedentă.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left[\frac{b}{a}\int_0^{a} x\sin nx\,dx+b\int_a^{\pi-a}\sin nx\,dx+\frac{b}{a}\int_{\pi-a}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx.\right]$$

Având în vedere formula (prob. 69. 7)

$$\int x\sin nx\,dx=-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{1}{n}\,\frac{\sin nx}{n}+C, \tag{1}$$

avem succesiv,

$$\int_0^{a} x\sin nx\,dx=-\left|\frac{x\cos nx}{n}\right|_0^{a}+\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|_0^{a}=-\frac{a\cos na}{n}+\frac{\sin na}{n^2},$$

$$\int_a^{\pi-a}\sin nx\,dx=-\left|\frac{\cos nx}{n}\right|_a^{\pi-a}=-\frac{\cos n(\pi-a)}{n}+\frac{\cos na}{n}$$

$$\int_{\pi-a}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx=\pi\int_{\pi-a}^{\pi}\sin nx\,dx-\int_{\pi-a}^{\pi}x\sin nx\,dx=-\pi\left|\frac{\cos nx}{n}\right|_{\pi-a}^{\pi}+$$

$$+\left|\frac{x\cos nx}{n}\right|_{\pi-a}^{\pi}-\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|_{\pi-a}^{\pi}=-\pi\,\frac{\cos n\pi-\cos n(\pi-a)}{n}+$$

$$+\frac{\pi\cos n\pi-(\pi-a)\cos n(\pi-a)}{n}-\frac{\sin n\pi-\sin n(\pi-a)}{n^2}=\frac{a\cos n(\pi-a)}{n}+\frac{\sin n(\pi-a)}{n^2},$$

încât

$$b_n=\frac{2b}{\pi a}\left[\frac{\sin na}{n^2}+\frac{\sin n(\pi-a)}{n^2}\right]=\frac{2b}{\pi an^2}[1+(-1)^{n-1}]\sin na.$$

Rezultă exprimarea,

$$f(x)=\frac{4b}{\pi a}\left[\frac{\sin a}{1^2}\sin x+\frac{\sin 3a}{3^2}\sin 3x+\cdots+\frac{\sin(2n+1)a}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x+\cdots\right].$$

80. 5. *Să se dezvolte în serie trigonometrică funcția reprezentată grafic prin fig. 110.*

Definiția analitică a funcței este

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2a}{T}x & 0\leqq x<\frac{1}{2}T,\\ 0 & x=\frac{1}{2}T,\\ \frac{2a}{T}x-2a, & \frac{1}{2}T<x\leqq T.\end{cases}\qquad(1)$$

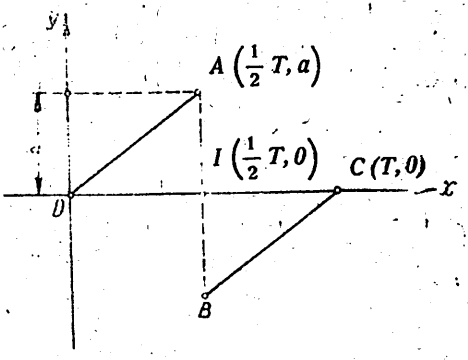


Fig. 110

Funcția va fi considerată ca având perioada T. Forma dezvoltării va fi (V) și coeficienții se calculează prin formulele (VI). Preferăm în soluția pe care o dăm, să facem schimbarea (l), adică

$$x=\frac{T}{2\pi}t,\qquad(2)$$

noua funcție: $f(x)=g(t)$ va fi definită astfel

$$g(t)=\begin{cases}\frac{a}{\pi}t & 0\leqq t<\pi,\\ 0 & t=\pi,\\ \frac{a}{\pi}t-2a & \pi<t\leqq 2\pi.\end{cases}\qquad(3)$$

Cum se vede de pe figură (complectând-o și în stânga) funcția este impară; deci $a_n=0$, iar pentru restul coeficienților, procedând analog ca la problemele precedente, se găsește

$$b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{2a}{\pi}.$$

Deci,

$$g(t)=\frac{2a}{\pi}\left[\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nt+\cdots\right].\qquad(4)$$

Conform teoremei generale, partea dreaptă reprezintă întotdeauna pe $g(t)$ definit prin (3). Prin inversa transformărei (2) se obține desvoltarea lui $f(x)$:

$$f(x)=\frac{2a}{\pi}\left[\sin\frac{2\pi}{T}x-\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{T}x+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{2n\pi}{T}x+\cdots\right] \tag{5}$$

Observație. Polinoamele $T_n(t)$ pentru funcția $g(t)$ sunt

$$T_1(t)=\frac{2a}{\pi}\sin t,\ T_2(t)=\frac{2a}{\pi}\left(\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t\right),$$

$$T_3(t)=\frac{2a}{\pi}\left(\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin 3t\right),\ldots$$

și cari aproximează funcția din ce în ce mai bine. Cu ocazia prob. 35. 5, am reprezentat succesiv aceste polinoame în cazul $a=\pi$ și se vede de pe fig. 5 și 6 cum curbele reprezentative se apropie din ce în ce de funcția reprezentată în fig 110 pentru cazul $a=\pi$, $T=2\pi$.

80. 6. *Să se demonstreze că dacă seria* (II) *este uniform convergentă în intervalul* $[0, 2\pi]$, *avem egalitatea lui Liapunov*

$$\frac{1}{2}a_0^2+a_1^2+b_1^2+\cdots+a_n^2+b_n^2+\cdots=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)\,dx.$$

Notăm ca deobiceiu cu $S_{2n+1}(x)$ suma primilor $2n+1$ termeni din seria (II) adică

$$S_{2n+1}=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

și cu R_{2n+1} restul termenilor

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-S_{2n+1}(x).$$

Cum prin ipoteză seria este uniform convergentă, va exista un număr N astfel ca pentru *toate* valorile lui $2n+1>N$ să avem (§ 50 pct. 1)

$$|R_{2n+1}(x)|<\epsilon \tag{1}$$

Considerăm integrala

$$\int_0^{2\pi}[f(x)-S_{2n+1}(x)]^2\,dx=\int_0^{2\pi}R_{2n+1}^2(x)\,dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[f(x)-\frac{1}{2}a_0-a_1\cos x-b_1\sin x-\cdots-a_n\cos nx-b_n\sin nx\right]^2\,dx.$$

După ce se ridică paranteza la pătrat, integrala se va descompune într'o sumă de integrale de următoarele forme:

a) integrale care provin din pătratele termenilor cari în baza formulelor (f. 12) şi (f. 13) dau integrale de forma

$$a_k^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 kx\,dx = \pi a_k^2, \quad b_k^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 kx\,dx = \pi b_k^2;$$

la un loc aceste integrale dau suma

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx + \pi\left(\frac{1}{2}a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 + \cdots + a_n^2 + b_n^2\right).$$

b) integrale care provin din dublul produs al lui $f(x)$ cu restul de termeni; aceste integrale, în baza formulelor (III), dau termenii

$$-2\pi\left(\frac{1}{2}a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 + \cdots + a_n^2 + b_n^2\right)$$

c) integralele ce provin din dublele produse ale celorlalţi termeni şi care sunt nule în baza formulelor (f. 14), (f. 15) şi (f. 16).

In rezumat, avem

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left(\frac{1}{2}a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 + \cdots + a_n^2 + b_n^2\right) = \int_0^{2\pi} R_{2n+1}^2(x)\,dx. \qquad (2)$$

Cum inegalitatea (1) are loc pentru orice x din intervalul $[0,2\pi]$, pentru toate valorile lui $2n+1>N$ avem

$$\int_0^{2\pi} R_{2n+1}^2(x)\,dx < \int_0^{2\pi} \epsilon^2\,dx = 2\pi\epsilon^2.$$

Deci, dacă notăm cu S'_{2n+1} suma primilor $2n+1$ termeni din seria

$$\frac{1}{2}a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 + \cdots + a_n^2 + b_n^2 + \cdots, \qquad (3)$$

atunci egalitatea (2) se scrie

$$\left|\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx - \pi S'_{2n+1}\right| < \epsilon \qquad (2n+1>N). \qquad (4)$$

Această egalitate spune (§ 31, I) că

$$\lim_{n\to\infty} S'_{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx,$$

adică suma seriei (3) este integrala din partea dreaptă, egalitate ce urmăream să demonstrăm.

Observație În raționamentul pe care l-am făcut mai sus am considerat în seria (II) cât și în seria (3), termenii grupați doi câte doi, adică și în seria (3), am scris

$$\frac{1}{2}a_0^2+(a_1^2+b_1^2)+\cdots+(a_n^2+b_n^2)+\cdots \tag{5}$$

termenul general fiind: $u_n=a_n^2+b_n^2$. Acest lucru se citește după inegalitatea (3). În general în seriile trigonometrice a_n și b_n separat tind către zero, fiecare în parte, așa că parantezele din seria (5) pot fi lăsate deoparte și deci considera seria sub forma (3).

§ 81. Derivarea sub semnul integrală. Probleme diverse.

Se consideră funcția

$$F(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\,dx.$$

În ipoteză că x_0 și x_1 sunt independenți de α, derivata funcției $F(\alpha)$ în raport cu α este

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx. \tag{I}$$

Dacă pe lângă f mai depind și limitele x_0 și x_1 de α, atunci

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx+f(x_1,\alpha)\frac{dx_1}{d\alpha}-f(x_0,\alpha)\frac{dx_0}{d\alpha}. \tag{II}$$

81.1 *Cu ocazia rezolvării problemei* 69.9 *am dat o metodă pentru calculul integralelor de forma*

$$I_n=\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n};$$

să se dea o nouă metodă folosind derivarea sub semnul integrală.

Pornim dela integrala cunoscută

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,$$

și s'o derivăm parte cu parte în raport cu parametrul a, x fiind presupus constant (constanta C poate conține pe a încât prin derivare vom avea o altă constantă C')

$$-\int\frac{2a\,dx}{(a^2+x^2)^2}=-\frac{1}{a^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{1}{a}\frac{-\frac{x}{a^2}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}+C', \text{ sau}$$

$$I_2=\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}=\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}+C'.$$

Derivând pe I_2 în raport cu a se obține I_3 etc.

Observație. În această problemă am aplicat formula (1) deși integrala considerată aci nu este integrală definită. Dar se știe că întotdeauna o integrală nedefinită se poate scrie sub formă de integrală definită. În adevăr, fie

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C;$$

punând $C = -F(a)$, putem scrie încă

$$\int f(x)\,dx = F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

În felul acesta, cele aplicate de noi mai sus, sunt justificate.

81.2 *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - 1}{\ln x}\,dx,$$

α fiind un parametru pozitiv.

Considerăm pe I ca o funcție de α. Derivând în raport cu această variabilă, avem

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_0^1 x^{\alpha-1}dx = \left|\frac{x^\alpha}{\alpha}\right|_0^1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Integrând în raport cu α, avem

$$I = \ln\alpha + C;$$

pentru a determina constanta C observăm că dacă facem $\alpha = 1$, I se anulează, deoarece elementul de integrat se anulează. Deci trebuie ca: $\ln 1 + C = 0$, $C = 0$ și $I = \ln\alpha$.

81.3 *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^4},$$

a și b fiind două constante.

Pornim dela integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{m\cos^2 x + n\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{m + n\operatorname{tg}^2 x}\,\frac{dx}{\cos^2 x} = \left|\frac{1}{\sqrt{mn}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{n}{m}}\operatorname{tg} x\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{m\cos^2 x + n\sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{mn}},$$

unde m şi n sunt două numere pozitive. Derivând această egalitate în raport cu m avem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\,dx}{(m\cos^2 x+n\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4m\sqrt{mn}},$$

şi în raport cu n:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\,dx}{(m\cos^2 x+n\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4n\sqrt{mn}},$$

Aceste două integrale adunate ne dau

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(m\cos^2 x+n\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{mn}}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right).$$

Procedând în acelaşi mod asupra acestei integrale se găseşte

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(m\cos^2 x+n\sin^2 x)^3} = \frac{\pi}{16\sqrt{mn}}\left(\frac{3}{m^2}+\frac{2}{mn}+\frac{3}{n^2}\right).$$

Operaţia repatată din nou ne dă

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(m\cos^2 x+n\sin^2 x)^4} = \frac{\pi}{32\sqrt{mn}}\left(\frac{5}{m^3}+\frac{3}{m^2n}+\frac{3}{mn^2}+\frac{5}{n^3}\right).$$

Făcând aci: $m=a^2$ şi $n=b^2$ se găseşte indefinitiv

$$I = \frac{\pi}{32\,ab}\left(\frac{5}{a^6}+\frac{3}{a^4b^2}+\frac{3}{a^2b^4}+\frac{5}{b^6}\right).$$

Continuând pe aceiaşi cale, se pot calcula din aproape în aproape integralele asemănătoare având puterea parantezei dela numitor din ce în ce mai mare.

81.4 *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$

Dacă am încerca să integrăm prin părţi constatăm imediat că metoda nu dă nici un rezultat. Să facem substituţia: $x=\operatorname{tg}\varphi$. Obţinem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx.$$

Dar

$$1+\operatorname{tg} x=\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{1}{4}\pi+x\right)}{\cos x},$$

şi deci

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(\frac{1}{4}\pi+x\right)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx.$$

Făcând în a doua substituţia: $x=\frac{1}{4}\pi-u$, găsim

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(\frac{1}{4}\pi+x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(\frac{1}{2}\pi-u\right)du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos u\,du,$$

adică are aceiaşi valoare ca şi cea de-a treia integrală. Ne rămâne deci

$$I=\ln\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{1}{8}\pi\ln 2.$$

81.5 *Să se calculeze integrala lui Euler.*

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx,$$

Scriem

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\sin 2x}{2\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx-\frac{1}{2}\pi\ln 2.$$

Primele două integrale sunt egale şi deci se distrug. In adevăr, făcând în prima schimbarea: $x=\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}u$ avem succesiv

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos u\,du=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\ln\cos u\,du+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos u\,du.$$

şi în prima facem schimbarea: $u=-v$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos v\,dv+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos u\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx.$$

Deci:

$$I=-\frac{1}{2}\pi \ln 2.$$

81. 6. *Cunoscând valoarea integralei*

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\pi,$$

să se calculeze integrala

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx.$$

Integrăm pe I prin părți, obținem

$$I=-\left|\frac{\sin^4 x}{x}\right|_0^{\infty}+4\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x\cos x}{x}dx=4\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x\cos x}{x}dx,$$

deoarece $\sin x$ rămâne cuprins între -1 și $+1$ oricare ar fi x. Mai departe vom calcula integrala exprimând produsul $\sin^3 x\cos x$ în funcție de sinusurile multiplilor de arc. Folosind formulele cunoscute avem succesiv

$$4\sin^3 x\cos x=\sin 2x-\frac{1}{2}\sin 4x,$$

și deci, în baza integralei date,

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin 4x}{x}dx=\frac{1}{4}\pi.$$

81. 7. *$f(x)$ și toate derivatele sale până la ordinul $(n+1)$ fiind continui se cere să se calculeze integrala*

$$I=\int_0^{x}\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\,dx.$$

Integrăm prin părți; punând

$$u=\frac{(x-a)^n}{n!},\quad du=\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}dx,$$

$$dv=f^{(n+1)}(x)\,dx,\quad v=f^{(n)}(x);$$

de unde deducem:

$$I=\left|\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(x)\right|_a^x-\int_a^x\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)\,dx=$$

$$=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(x)-\int_a^x\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)\,dx.$$

Repetând operaţia din aproape în aproape avem:

$$I=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(x)-\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x-a}{1!}f'(x)+$$

$$+(-1)^n[f(x)-f(a)].$$

81. 8. *Să se arate că integrala*

$$I=\int_1^\infty\frac{\ln x}{1+x^2}dx,$$

are un sens.

In adevăr, micşorând numitorul putem scrie

$$I<\int_1^\infty\frac{\ln x}{x^2}dx.$$

integrala din dreapta se poate calcula prin părţi

$$u=\ln x,\quad du=\frac{dx}{x},$$

$$dv=\frac{dx}{x^2},\quad v=-\frac{1}{x};$$

$$I<\left|-\frac{\ln x}{x}\right|_1^\infty+\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}=\left|-\frac{1}{x}\right|_1^\infty=1.$$

81. 9. *Să se calculeze limita expresiei*

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n^2}},$$

când n tinde către infinit.

Fie $f(x)$ o funcţie continuă într'un interval $[a, b]$. Impărţind acest interval în n părţi egale şi în fiecare din aceste intervale parţiale luând un punct ξ_k (care poate fi chiar una din limitele intervalului) atunci definiţia integralei definite (§ 76, no. 1) dă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots+f(\xi_n)}{n}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Prima parte se mai numeşte şi *valoarea medie* a funcţiunei. Considerăm funcţiunea

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

în intervalul [0, 1]. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\xi_1^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\xi_2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\xi_n^2}}\right)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

unde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sunt nişte valori arbitrare cuprinse în intervalele $\left(1, \frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \ldots, \left(\frac{n-1}{n}, 1\right)$. Luând pentru aceste valori chiar limitele superioare ale intervalelor, avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n^2}}\right)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(\sqrt{2}+1),$$

în baza lui (f. 30).

81. 10. *Să se calculeze integrala lui Poisson*

$$I=\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx,$$

a fiind un parametru oarecare pozitiv.

Vom folosi formula care dă media unei funcţiuni într'un interval dat, luând drept funcţiune

$$f(x)=\ln(1-2a\cos x+a^2),$$

şi drept interval $[0, \pi]$. Avem, luând drept puncte ξ_k extremităţile din dreaptă ale intervalelor parţiale,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1-2a\cos\frac{\pi}{n}+a^2\right)+\ln\left(1-2a\cos\frac{2\pi}{n}+a^2\right)+\right.$$
$$\left.+\cdots+\ln\left(1-2a\cos\frac{n-1}{n}\pi+a^2\right)+\ln(1+a)^2\right]=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx. \qquad (1)$$

Notăm prima parte cu P. Cum

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a)^2}{n}=0,$$

atunci

$$P=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1-2a\cos\frac{\pi}{n}+a^2\right)\left(1-2a\cos\frac{2\pi}{n}+a^2\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1-2a\cos\frac{n-1}{n}\pi+a^2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{a^{2n}-1}{a^2-1},$$

în baza calculului făcut la prob. 23.6 cazul 1°.

Sunt trei cazuri de considerat.

1° $a<1$, atunci: $\lim_{n\to\infty}a^{2n}=0$, şi deci

$$P=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1-a^2)}{n}=0.$$

2° $a>1$, atunci

$$P=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln(a^{2n}-1)-\ln(a^2-1)]=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a^{2n}\left(1-\frac{1}{a^{2n}}\right)}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(a^2-1)}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\ln a+\ln\left(1-\frac{1}{a^{2n}}\right)}{n}=2\ln a.$$

3° $a=1$, atunci nu mai avem nevói să calculăm pe P deoarece integrala se reduce la o integrală calculată prob. 81.5. In rezumat, cu ajutorul lui (1) putem scrie

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx=\begin{cases}0 & \text{dacă } a\leq 1,\\ 2\pi\ln a & \text{„ } a>1.\end{cases}$$

CAPITOLUL XI

INTEGRALE MULTIPLE, CURBILINII ŞI DE SUPRAFAŢĂ

§ 82. Integrarea diferențialelor totale

1. Pentruca o expresie de forma (§ 52, I)

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy, \tag{I}$$

să fie o diferențială totală exactă trebue ca

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{II}$$

Presupunând această condiție satisfăcută şi notând expresia dată cu du, avem

$$u=\int_a^x P(x,y)\,dx+\int_b^y Q(a,y)\,dy, \tag{III}$$

unde a şi b sunt două numere oarecari. Rezultatul este de forma: $u=f(x, y)-f(a, b)$ ceeace spune că u nu depinde decât de o singură constantă arbitrară: $C=f(a, b)$.

2. Pentruca o expresia de forma

$$P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz, \qquad \text{(IV)}$$

să fie o diferenţială totală exactă, trebue ca

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}, \qquad \text{(V)}$$

unde am întrebuinţat o scriere prescurtată. Notând cu du expresia dată, avem

$$u=\int_a^x P(x, y, z)\,dx+\int_b^y Q(a, y, z),\,dy+\int_c^z R(a, b, z)\,dz, \qquad \text{(VI)}$$

şi rezultatul trebue să fie de forma: $u=f(x, y, z)+C$.

82. 1. *Să se găsească funcţiunea primitivă a expresiei diferenţiale*

$$\left(\frac{y}{\cos^2 x}+\operatorname{tg} y-2xy^2\right)dx+\left(\frac{x}{\cos^2 y}+\operatorname{tg} x-2x^2y\right)dy,$$

în cazul când se va constata că este integrabilă.

Avem

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 y}-4xy=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Mai departe:

$$u=\int_a^x\left(\frac{y}{\cos^2 x}+\operatorname{tg} y-2xy^2\right)dx+\int_b^y\left(\frac{a}{\cos^2 y}+\operatorname{tg} a-2a^2y\right)dy=$$

$$=(y\operatorname{tg} x-y\operatorname{tg} a)+(x-a)\operatorname{tg} y-y^2(x^2-a^2)+a(\operatorname{tg} y-\operatorname{tg} b)+$$

$$+(y-b)\operatorname{tg} a-a^2(y^2-b^2);\quad u=x\operatorname{tg} y+y\operatorname{tg} x-x^2y^2+C.$$

82. 2. *Să se integreze diferenţiala totală*

$$du=(3x^2y-y^3)\,dx-(3xy^2-x^3)\,dy.$$

Se constată că este o diferenţială totală. Avem

$$u=\int_a^x(3x^2y-y^3)\,dx-\int_b^y(3ay^2-a^3)\,dy$$

$$u=x^3y-xy^3-(a^3b-ab^3).$$

82. 3. *Să se determine numerele a, b astfel ca expresia*

$$\left[\frac{ax}{x+y}+\ln(x+y)\right]dx+\frac{bx}{x+y}\,dy,$$

să fie diferenţială totală a unei funcţiuni, şi în acest caz să se determine această funcţiune.

Cum

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(1-a)x+y}{(x+y)^2},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{by}{(x+y)^2},$$

va trebui să avem identitatea

$$(1-a)x+y=by,$$

de unde rezultă $a=b=1$.

Fie u funcțiunea ce are drept diferențială expresia dată. Avem

$$u=\int_m^x\left[\frac{x}{x+y}+\ln(x+y)\right]dx+\int_n^y\frac{m}{m+y}dy.$$

Dar

$$\int_m^x\left[\frac{x}{x+y}+\ln(x+y)\right]dx=\Big|x\ln(x+y)\Big|_m^x=x\ln(x+y)-m\ln(m+y),$$

$$\int_n^y\frac{m}{m+y}dy=m\ln(m+y)-m\ln(m+n).$$

și deci

$$u=x\ln(x+y)+C.$$

82. 4. *Să se verifice că expresia*

$$(yz-\ln z)\,dx+(xz-\ln z)\,dy+\left(xy-\frac{x+y}{z}\right)dz,$$

este o diferențială totală și apoi să se integreze

Avem succesiv

$$\frac{\partial P}{\partial y}=z,\ \frac{\partial P}{\partial z}=y-\frac{1}{z},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=z,\ \frac{\partial Q}{\partial z}=x-\frac{1}{z},\ \frac{\partial R}{\partial x}=y-\frac{1}{z},\ \frac{\partial R}{\partial y}=x-\frac{1}{z},$$

încât condițiile de integrabilitate sunt verificate. Avem

$$u=\int_a^x(yz-\ln z)\,dx+\int_b^y(az-\ln z)\,dy+\int_c^z\left(ab-\frac{a+b}{z}\right)dz=$$

$$=(yz-\ln z)(x-a)+(az-\ln z)(y-b)+ab(z-c)-(a+b)\ln z+(a+b)\ln c=$$

$$=xyz-(x+y)\ln z-abc+(a+b)\ln c=xyz-(x+y)\ln z+C.$$

82. 5. *Să se calculeze u dat de expresia:*

$$du=(y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz.$$

Condițiile de integrabilitate sunt imediate. Avem

$$u=\int_a^x(y+z)\,dx+\int_b^y(z+a)\,dy+\int_c^z(a+b)\,dz=xy+yz+zx+C$$

§ 83. Integrale curbilinii

1. Se numeşte integrală curbilinie, o integrală de formă

$$I=\int_{(C)} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy, \tag{I}$$

unde (C) este o curbă oarecare continuă şi $P(x,y)$, $Q(x,y)$ două funcţii continui dealungul acestei curbe (adică atunci când x şi y reprezintă coordonatele unui punct de pe curbă). Calculul integralei se face ţinând seamă că punctul de coordonate (x,y) descrie curba C, adică x şi y verifică ecuaţia curbei. Dacă avem o reprezentare parametrică: $x=f(t)$, $y=g(t)$ a curbei, atunci

$$I=\int_{t'}^{t''} \{P[f(t),g(t)]f'(t)+Q[f(t),g(t)]g'(t)\}\,dt, \tag{II}$$

t' şi t'' fiind valorile ce trebuesc să dăm lui t pentru a găsi extremităţile curbei (C).

2. Proprietăţile mai importante ale integralelor curbilinii sunt: a) Avem

$$\int_{(AB)} = -\int_{(BA)} . \tag{III}$$

adică dacă schimbăm sensul de parcurgere pe curbă, se schimbă semnul integralei; b) avem

$$\int_{(AB)} = \int_{(AC)} + \int_{(CB)} . \tag{IV}$$

C fiind un punct pe arcul AB cuprins între A şi B. c) Când avem de calculat o integrală curbilinie dealungul unui contur închis, punctul de plecare nu joacă rol, bineînţeles parcurgând drumul în acelaşi sens. d) Dacă elementul de integrat este o diferenţială totală exactă, valoarea integralei nu depinde de drumul parcurs ci numai de extremităţi. e) O integrală curbilinie dealungul unui drum închis, dintr'o diferenţială totală exactă, este nulă.

3. Toate definiţiile şi proprietăţile de mai sus se extind dela sine pentru integrale curbilinii în spaţiu

$$I=\int_{(C)} P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz,$$

curba (C) fiind în general o curbă strâmbă (§ 62 pct. 1)

83. 1. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int_{(AB)} (x+y)\,dx+(x-y)\,dy,$$

dealungul arcului AB din parabola $y=x^2$ *cuprins între punctele* $A(-1,1)$, $B(1,1)$. (fig. 111).

Vom lua ca variabilă independentă pe x şi vom înlocui peste tot pe y cu x^2. Cum: $dy=2x\,dx$, şi cum atunci când punctul $M(x, y)$ descrie arcul AB, x variază dela -1 la $+1$, avem

$$I=\int_{-1}^{+1}(x+x^2)\,dx+(x-x^2)\,2x\,dx=\left|-\frac{1}{2}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2\right|_{-1}^{+1}=2.$$

83. 2. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int_{(AB)}x^2\,ds,$$

dealungul jumătăţii superioare a cercului: $x^2+y^2=a^2$, *între punctele* $A(a,0)$ şi $B(-a, 0)$. (Fig. 112).

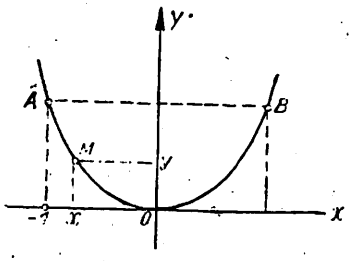


Fig. 111

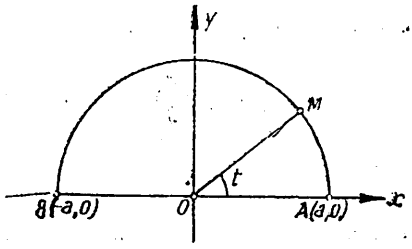


Fig. 112

Folosim reprezentarea parametrică a cercului

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,$$

t, dealungul arcului AB variind dela 0 la π. Cum (§ 59, pct. 1)

$$ds=\sqrt{a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=a\,dt,$$

(acest rezultat era de prevăzut, deoarece mărimea arcului de cerc ds se găseşte înmulţind mărimea unghiului la centru dt exprimat în radiani, cu raza a), avem

$$I=\int_0^{\pi}a^2\cos^2 t\cdot a\,dt=\frac{1}{2}a^3\pi.$$

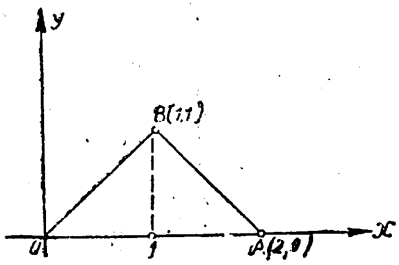


Fig. 113

83. 3. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int_{(OAB)}(x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy,$$

dealungul triunghiului din fig. 113.

Descompunem integrala astfel

$$I=\int_{OA}+\int_{AB}+\int_{BO}=I_{OA}+I_{AB}+I_{BO}.$$

Dealungul lui OA, $y=0$ și x variază dela 0 la 2; deci

$$I_{OA}=\int_0^2 x^2\,dx=\frac{8}{3}.$$

A doua integrală este luată dealungul lui AB a cărei ecuație este

$$y=\frac{1}{-1}(x-2);\quad y=2-x;\quad dy=-dx,$$

x variiind dela 2 la 1. Avem

$$I_{AB}=\int_2^1[x^2+(2-x)^2]\,dx+[x^2-(2-x)^2](-dx)=-\frac{2}{3}.$$

Pentru a treia integrală avem: $y=x$ iar x variază dela 1 la 0. Avem

$$I_{BO}=\int_1^0(x^2+x^2)\,dx+(x^2-x^2)\,dx=-\frac{2}{3}.$$

In rezumat $I=\frac{4}{3}$.

83. 4. *Se consideră semicercul ACA' având centrul în origine și raza $OA=1$, fiind situat în partea $y>0$ și triunghiul isoscel ABA', având ca bază diametrul AA' fiind situat în partea $y<0$. Se cere să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{(x^2+y^2-y)\,dx+x\,dy}{x^2+y^2},$$

în modurile următoare: 1° după semicercul ACA'; 2° după drumul ABA' format de laturile AB, BA' ale triunghiului (fig. 114).

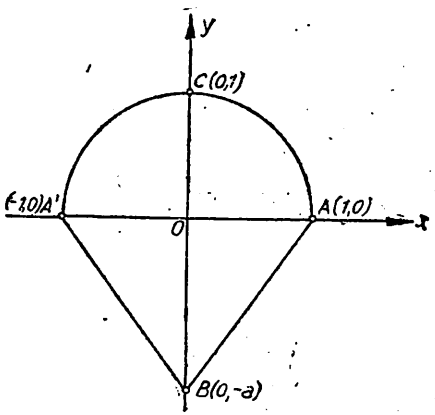


Fig. 114

1) Pentru a integra dealungul semicercului ACA', punem: $x=\cos t$, $y=\sin t$, și avem

$$I_{ACA'}=\int_0^{\pi}[-(1-\sin t)\sin t+\cos^2 t]\,dt=\pi-2.$$

2° Dealungul drumului ABA' scriem: $I_{ABA'}=I_{AB}+I_{BA'}$. Pentru I_{AB}, ținem seamă că trebue să avem în integrală

$$\frac{x}{1}-\frac{y}{a}-1=0;\quad y=a(x-1);\quad dy=a\,dx,$$

şi x va trebui să varieze dela 1 la 0 aşa că

$$I_{AB}=\int_1^0 \frac{x^2+a^2(x-1)^2-a(x-1)+ax}{x^2+a^2(x-1)^2}\,dx.$$

Pentru $I_{BA'}$, vom avea între x şi y legătura

$$-\frac{x}{1}-\frac{y}{a}-1=0;\quad y=-a(x+1);\quad dy=-a\,dx,$$

şi x va merge dela 0 la -1, încât

$$I_{BA'}=\int_0^{-1} \frac{x^2+a^2(x+1)^2+a(x+1)-ax}{x^2+a^2(x+1)^2}\,dx.$$

Am redus deci calculul integralei la suma a două integrale simple. Adunându-le după ce facem în a doua schimbarea: $x=-u$, avem

$$I_{ABA'}=-\int_0^1 \frac{x^2+a^2(x-1)^2+a}{x^2+a^2(x-1)^2}\,dx-\int_0^1 \frac{u^2+a^2(u-1)^2+a}{u^2+a^2(u-1)^2}\,du=-\pi-2$$

83. 5. *Se cere să se calculeze integrala*

$$\int (y^2+y)\,dx+2x(y+a)\,dy;$$

1° *dealungul cercului*: $x^2+y^2=1$ *dela punctul* $A(1,0)$ *la punctul* $B(0,1)$; 2° *dealungul dreptei* AB; 3° *să se determine a aşa fel ca cele două integrale să fie egale şi apoi să se explice rezultatul* (fig. 115)

1° Dealungul arcului AB punem: $x=\cos t$, $y=\sin t$, încât

$$I_1=\int_{ACB}[-(\sin^2 t+\sin t)\sin t+2\cos^2 t(\sin t+a)dt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}[3\cos^2 t\sin t-\sin t-\frac{1}{2}(1-\cos 2t)+$$

$$+a(1+\cos 2t)]\,dt=\frac{1}{4}(2a-1)\pi.$$

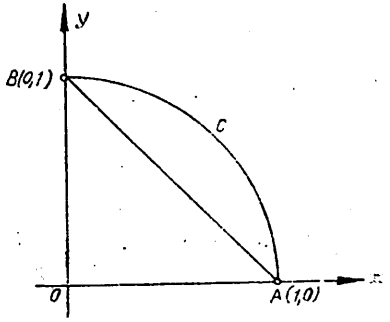


Fig. 115

2° Pe segmentul AB avem: $y=1-x$, încât

$$I_2=\int_1^0[(1-x)^2+1-x-2x(1-x+a)]\,dx=$$

$$=a-\frac{1}{2}.$$

3° Pentru a avea: $I_1=I_2$ trebue ca $a=\frac{1}{2}$ când: $I_1=I_2=0$. In acest caz expresia ce avem de integrat este o diferenţială totală exactă deoarece

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y+1,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2\left(y+\frac{1}{2}\right).$$

83. 6. *Să se folosească proprietatea* d) *dela no.* 2 *pentru a se justifica procedeul de integrare al diferenţialelor totale dela paragraful precedent.*

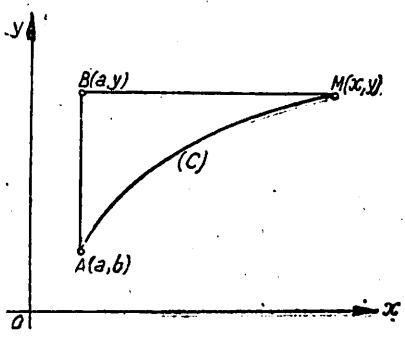


Fig. 116

Fie

$$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy, \qquad (1)$$

o diferenţială totală exactă. Valoarea integralei curbilinii

$$I=\int_{(c)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy, \qquad (2)$$

dealungul unei curbe oarecare (C) ce merge dela punctul $A(a,b)$ la un punct $M(x,y)$, se va găsi (deoarece nu depinde de drum în baza proprietăţei amintite) făcând diferenţa uneia dintre valorile funcţiunei: $u=f(x,y)$ definite prin (1), respectiv în punctul M şi în punctul A. Cu alte cuvinte,

$$I=f(x,y)-f(a,b).$$

Dar, această valoare se scrie sub forma

$$I=\int_a^x P(x,y)\,dx+\int_b^y Q(a,y)\,dy, \qquad (3)$$

valoare comparată cu (2) duce la egalitatea

$$\int_c P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_a^x P(x,y)\,dx=\int_b^y Q(a,y)\,dy. \qquad (4)$$

Cum integrala nu depinde de drum, să alegem în locul curbei (C), drumul ABM (fig, 116). Atunci

$$\int_c=\int_{ABM}=\int_{AB}+\int_{BM}. \qquad (5)$$

Dar, pe AB, $x=a=\text{const}$, încât: $dx=0$ şi y variază dela b până la y; iar pe BM, $y=\text{const}$, $dy=0$ şi x variază dela a la x. Rezultă

$$\int_{AB}=\int_b^y Q(a,y)dy,\quad \int_{BM}=\int_a^x P(x,y)\,dx,$$

valori cari înlocuite în (2) ne demonstrează pe (4).

83. 7. *Să se calculeze integrala curbilinie*

$$I=\int_{ABC}(2y+3z)\,dx+(z-x)\,dy+(x+y)\,dz$$

dealungul triunghiului ABC din fig. 117.

Descompunem integrala în

$$I=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}=I_{AB}+I_{BC}+I_{CA}\,.$$

Pentru calculul lui I_{AB} ţinem seamă că dealungul lui AB avem

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}-1=0,\quad z=0:$$

deci luând ca variabilă pe x vom avea

$$I_{AB}=\int_{1}^{0}2(1-x)\,dx+x\,dx=-\frac{3}{2}\,.$$

Pentru calculul lui I_{BC} vom ţine seamă că dealungul lui BC avem

$$\frac{y}{1}+\frac{z}{1}-1=0,\ x=0,$$

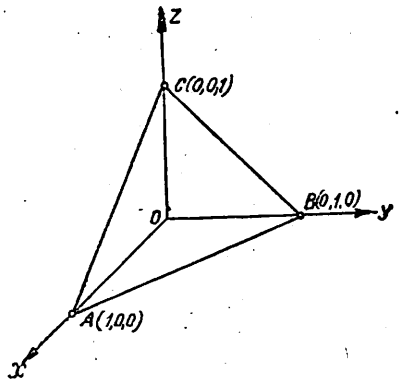


Fig. 117

şi luând ca variabilă pe y,

$$I_{BC}=\int_{1}^{0}(1-y)dy-ydy=\int_{1}^{0}(1-2y)dy=|y-y^2|_0^1=0.$$

Analog se găseşte: $I_{CA}=1$. Deci $I=-\frac{1}{2}$.

83. 8. *Să se calculeze integrala curbilinie*

$$I=\int_{AB}(2x+y+z)\,dx+(x+2y+z)\,dy+(x+y+2z)\,dz.$$

AB fiind arcul de o spiră a unei elice circulare (porţiunea din curbă mărginită între două puncte consecutive ale ei situate pe o aceiaşi generatoare). (fig. 118)

Se ştie că ecuaţiile parametrice ale elicei sunt (prob. 62. 1)

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=k\theta,$$

r fiind raza cilindrului şi k o constantă. Cum

$$dx=-r\sin\theta\,d\theta,\quad dy=r\cos\theta\,d\theta,\quad dz=kd\theta,$$

integrala devine

$$I=\int_{0}^{2\pi}[r^2\cos 2\theta+$$
$$+kr(\theta\cos\theta-\theta\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta)+2k^2\theta]\,d\theta.$$

Descompunând într'o sumă de integrale, găsim

$$I=\left|\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta+kr(\theta\sin\theta+\cos\theta)-kr(-\theta\cos\theta+\sin\theta)+kr(\sin\theta-\cos\theta)+\right.$$
$$\left.+k^2\theta^2\right|_0^{2\pi}=2k\pi(r+2k\pi)\cdot$$

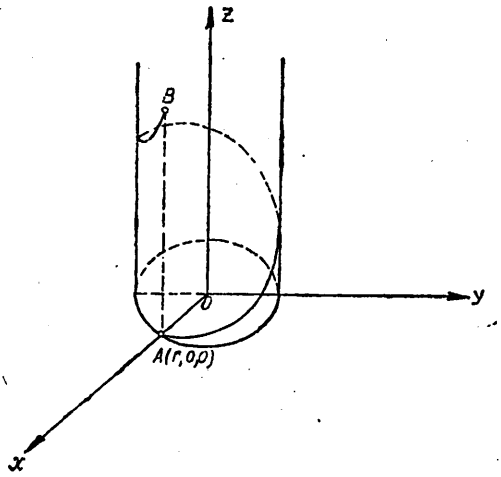


Fig. 118

Este interesant de observat că expresia de integrat este o diferenţială totală exactă, deoarece în acest caz,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial z}=$$
$$=\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial y}=1.$$

Aceasta însemnează că orice drum am alege între A şi B trebue să ajungem la acelaşi rezultat. Mergând pe generatoarea AB, dealungul căreia: $x=r$, $y=0$ şi z variază dela 0 la $2k\pi$, avem

$$I=\int_0^{2k\pi}(r+2z)dz=2k\pi(r+2k\pi),$$

adică acelaşi rezultat ca mai sus.

§ 84. Integrale duble

1. Se consideră o funcţie de două variabile $f(x,y)$ continuă într'un domeniu (D) (fig. 119). Domeniul (D) este presupus că este întâlnit de o paralelă la una din axe maximum în două puncte (în caz contrar se împarte în domenii parţiale cari să se bucure de această proprietate). Se împarte domeniul prin două familii de curbe în porţiuni infinitezimale $\Delta\sigma_k$. In fiecare din aceste porţiuni se alege un punct arbitrar $M_k(\xi_k,\eta_k)$ şi se formează suma dublă

$$\sum\sum f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k.$$

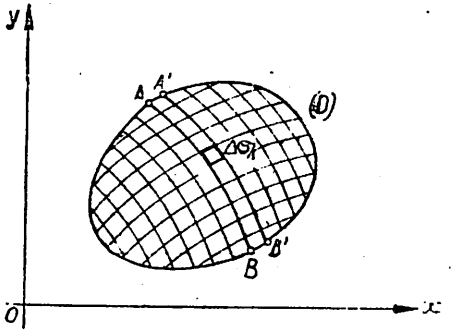


Fig. 119

Se demonstrează că această sumă are o limită când numărul elementelor $\Delta\sigma_k$ tinde către infinit toate tinzând către zero, limită care nu depinde de modul de împărţire al domeniului în elemente $\Delta\sigma_k$ şi nici de alegerea punctului M_k

în interiorul lor. Această limită se numeşte integrala dublă din $f(x,y)$ întinsă la domeniul (D), şi se notează prin

$$I=\lim \sum\sum f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k=\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma. \qquad (I)$$

Domeniul (D) se numeşte *domeniu de integrat*, iar $f(x,y)$, *funcţie de integrat*.

2. Calculul unei integrale duble se face prin intermediul a două integrale simple căutând a ordona însumarea termenilor din prima parte. In general se însumează termenii aparţinând unei fâşii ca $ABA'B'$ ceiace se face printr'o integrală, şi apoi rezultatul obţinut se însumează dealungul întregei suprafeţe (adică presupunând că fâşia considerată măturâ suprafaţa în întregime), ceiace se face printr'o nouă integrală. De obiceiu curbele ce determină împărţirea domeniului în elemente infinitezimale sunt alese din cele mai simple, adică drepte sau cercuri.

a) Se împarte domeniul prin drepte paralele la axele de coordonate Atunci: $\Delta\sigma_k=\Delta x_k\Delta y_k$ şi integrala se scrie

$$I=\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (II)$$

Pentru calcul se scrie

$$I=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy, \qquad (III)$$

prin care se înţeleg următoarele. Se duc tangentele la domeniu paralele cu Oy ale căror abscise fie a şi b (aceste tangente sunt îndefinitiv dreptele ce mărginesc domeniul la stânga şi la dreapta; facem această observare deoarece domeniul de integrat poate fi un poligon faţă de care noţiunea de tangentă nu mai are sens) (fig. 120). In interiorul acestor tangente se duce o ordonată oarecare de abscisă x, care taie domeniul în B şi C de ordonate y_1 şi y_2. Segmentul BC simbolizează o fâşie de elemente infinitezimale, şi deci integrala

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy,$$

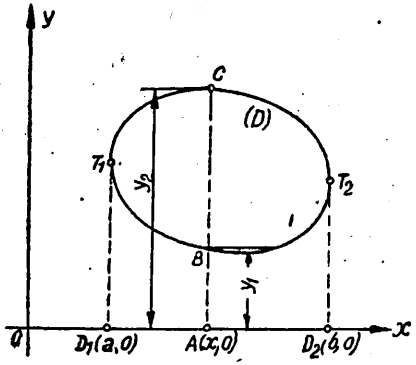


Fig. 120

suma termenilor din suma (I) dealungul ei. Presupunem pe x fix şi integrăm iar rezultatul se înlocuieşte în (III). O nouă integrare în raport cu x, adică plimbând segmentul BC dealungul domeniului ca să-l mâture în întregime, ne dă valoarea lui I.

Acelaşi rezultat vom căpăta dacă operaţia de mai sus se face schimbând rolul axelor, adică scriind

$$I=\int_c^d dy\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx, \qquad (IV)$$

c şi d fiind ordonatele tangentelor la domeniu paralele cu axa Ox, iar x_1 şi x_2 abscisele punctelor de intersecţie ale domeniului cu o paralelă la axa Ox, cuprinsă între cele două tangente, şi de ordonată y.

b) Se împarte domeniul prin cercuri cu centrul în O şi raze ce trec prin O. (fig. 121). Această împărţire corespunde coordonatelor polare. Fie:

$$f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)=g(\rho,\theta);$$

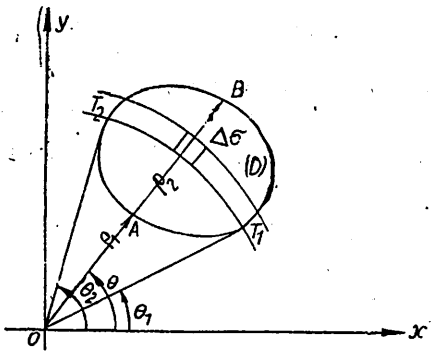


Fig. 121

elementul infinitezimal este diferenţa dintre două sectoare de cerc de raze $\rho+\Delta\rho$ şi ρ şi de unghiu $\Delta\theta$, încât se ia; $\Delta\sigma=\rho\Delta\rho\Delta\theta$. Integrala ia forma

$$I=\iint\limits_{(D)} g(\rho,\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta; \qquad (V)$$

calculul se face scriind-o

$$I=\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho_1}^{\rho_2} g(\rho,\theta)\,\rho\,d\rho, \qquad (VI)$$

şi prin care se înţeleg următoarele; se duc din origină tangentele OT_1, OT_2 definite prin unghiul lor polar θ_1 respectiv θ_2 şi între ele o rază vectoare oarecare al cărei unghiu polar este θ. Se face însumarea elementelor de-a-lungul unei fâşii simbolizată prin segmentul AB; adică, notând cu ρ_1 şi ρ_2 razele vectoare ale extremităţilor A şi B, se calculează integrala

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} g(\rho,\theta)\,\rho\,d\rho;$$

rezultatul acestei integrale se introduce în (VI) şi se integrează din nou în raport cu θ, adică se face ca segmentul AB să acopere, în mişcarea lui în jurul lui O, suprafaţa domeniului (D).

Se poate inversa, integrându-se întâiu în raport cu θ şi apoi în raport cu ρ.

3. In general, poate fi necesar pentru calculul integralei duble (I), să facem o schimbare de variabilă

$$x=\varphi(u,v),\qquad y=\Psi(u,v). \qquad (VII)$$

Prima problemă care trebue rezolvată este găsirea domeniului (Δ) în care trebue să varieze u şi v pentru a obţine toate punctele domeniului de integrare (D). Dacă acest lucru este făcut, atunci

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{(\Delta)} f\left[\varphi(u,v),\Psi(u,v)\right]\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv; \qquad (VIII)$$

determinantul funcţional ce întră în partea a doua este luat în valoare absolută şi este presupus diferit de zero (în care caz transformarea (VII) nu este proprie, § 54).

In particular pentru coordonatele polare, avem rezultatul dela b) no. precedent.

4. Dacă domeniul (D) se descompune în două domenii (D_1) şi $(D)_2$, atunci

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)\,dxdy \tag{IX}$$

şi proprietatea este adevărată pentru descompunerea domeniului (D) într'un număr finit de domenii parţiale.

5. Noţiunea de integrală dublă se poate extinde şi la cazul când domeniul de integrare cuprinde o porţiune nelimitată din plan, sau chiar tot planul. Deasemeni se poate extinde la cazul când funcţiunea de integrat este infinită într'un punct al domeniului sau chiar dealungul unei curbe situată în domeniul de integrat. In privinţa aceasta avem următoarele reguli

In cazul când domeniul este infinit,

a) dacă funcţia de integrat $f(x,y)$, în interiorul unui cerc cu centrul în origine şi de rază a este de forma

$$f(x,y) = \frac{\varphi(x,z)}{(x^2+y^2)^\alpha}, \tag{X}$$

$\varphi(x,y)$ fiind în valoare absolută mărginit, integrala dublă are sens dacă $\alpha > 1$.

b) dacă $f(x,y)$ devine infinită în punctul M_0 de coordonate (a,b) şi dacă este de forma

$$f(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^\alpha}, \tag{XI}$$

atunci integrala are un sens când $\alpha < 1$ (φ este deasemeni presupus mărginit în punctul M_0).

84. 1. *Să se calculeze valoarea integralei duble*

$$I = \iint xydxdy$$

în interiorul sfertului de cerc din fig. 122.

Soluţia I. Avem

$$I = \int_0^A xdx \int_0^{MM'} ydy = \int_0^a xdx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} ydy =$$

$$= \int_0^a xdx \left| \frac{1}{2}y^2 \right|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a x(a^2-x^2)\,dx = \frac{1}{8}a^4.$$

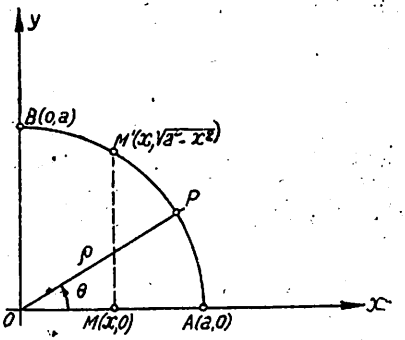


Fig. 122

Soluţia II. Folosind coordonate polare, vom avea

$$I = \iint \rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta\cdot\rho\,d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{1}{8}a^4.$$

84. 2. *Să se calculeze integrala dublă referitor la triunghiul din* fig. 123.

$$I=\iint\limits_{OAB}(x+y)\,dxdy.$$

Soluția I. Despărțim domeniul în două prin dreapta AC. In domeniul (D_1) ducem dreapta MM' de abscisă x; ordonata lui M este zero iar ordonata lui M' se găsește din ecuația dreptei OA care este $y=x$. Analog în domeniul (D_2) dacă notăm cu x abscisa lui N, ordonata lui N' se va găsi din ecuația dreptei AB care este: $y=2-x$. Avem

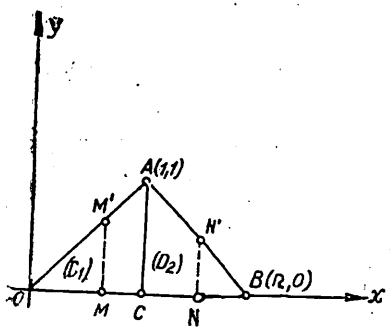


Fig. 123

$$I=\iint\limits_{(D_1)}(x+y)\,dxdy+\iint\limits_{(D_2)}(x+y)\,dxdy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x(x+y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x}(x+y)dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\left|xy+\frac{1}{2}y^2\right|_0^x+\int\limits_1^2 dx\left|xy+\frac{1}{2}y^2\right|^{2-x}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\limits_0^1 x^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_1^2(-x^2+4)dx=\frac{4}{3}.$$

Soluția II. Se poate calcula integrala fără a fi nevoie să împărțim domeniul în două, integrând mai întâiu în raport cu x și apoi în raport cu y, adică scriind (fig. 124)

$$I=\int\limits_0^C dy\int\limits_{MN}^{MP}(x+y)\,dx,$$

limitele celei de-a doua integrale calculându-se din ecuațiile dreptelor OA și AB scrise mai sus; de data aceasta din aceste ecuații vom scoate valorile lui x presupunând pe y dat.

$$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{2-y}(x+y)dx=\int\limits_0^1 dy\left|\frac{1}{2}x^2+xy\right|_y^{2-y}=\int\limits_0^1\left[\frac{1}{2}(2-y)^2+y(2-y)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}y^2-y^2\right]dy=\frac{4}{3}.$$

84. 3. *Să se calculeze*

$$I=\iint(x^2+y^2)\,dxdy,$$

relativă la toate punctele din interiorul elipsei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

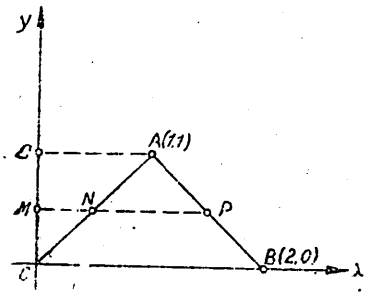


Fig. 124

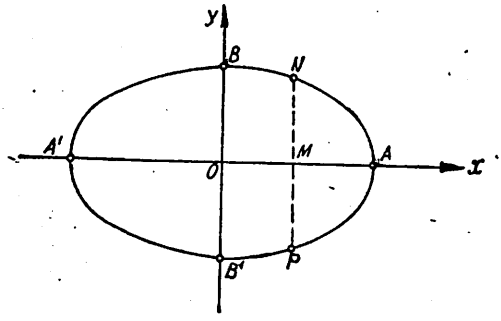


Fig. 125

Fixând (fig. 125) pe x, y va varia între

$\overline{MN}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ şi $\overline{MP}=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, şi apoi cu dreapta NP vom descrie toată suprafaţa elipsei, adică vom face pe x să varieze dela $-a$ la a. Avem.

$$I=\int_{-a}^{a}dx\int_{MP}^{MN}(x^2+y^2)\,dy=\int_{-a}^{a}dx\left|y\left(x^2+\frac{1}{3}y^2\right)\right|_{MP}^{MN}=$$

$$=\frac{2b}{3a^3}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,[a^2b^2+(3a^2-b^2)x^2]\,dx,$$

reducând intervalul la jumătate şi făcând apoi substituţia: $x=a\cos t$, ajungem la

$$I=\frac{4b}{3a^3}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,[a^2b^2+(3a^2-b^2)x^2]dx=\frac{b}{3a}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}[4a^2b^2\sin^2t+$$

$$+a^2(3a^2-b^2)\sin^2 2t]dt=\frac{b}{3a}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}[2a^2b^2(1-\cos 2t)+\frac{1}{2}a^2(3a^2-b^2)(1-\cos 4t)]\,dt=$$

$$=\frac{1}{4}ab(a^2+b^2)\pi.$$

84. 4. *Să se calculeze*

$$I=\iint x^3y^3\sqrt{1-x^4-y^4}\,dxdy,$$

pentru $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x^4+y^4\leq 1$.

Va trebui mai întâiu să construim curba de ecuaţie: $x^4+y^4=1$ în sfertul de plan xOy. Lucrul este uşor deoarece scriind

$$y=\sqrt[4]{1-x^4},$$

se vede că y descreşte când x creşte pornind dela valoarea 1 la 0. Curba seamănă cu un sfert de cerc (fig. 126). Avem

$$I=\int_0^1 x^3\,dx\int_0^{\sqrt[4]{1-x^4}} y^3\sqrt{1-x^4-y^4}\,dy,$$

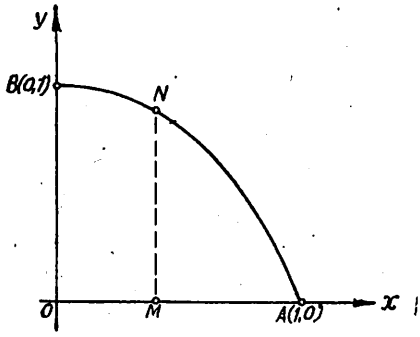


Fig. 126

şi cum

$$\int_0^{\sqrt[4]{1-x^4}} y^3\sqrt{1-x^4-y^4}\,dy=\left|-\frac{1}{6}(1-x^4-y^4)^{\frac{3}{2}}\right|_0^{\sqrt[4]{1-x^4}}=\frac{1}{6}(1-x^4)^{\frac{3}{2}},$$

rezultă că

$$I=\frac{1}{6}\int_0^1(1-x^4)^{\frac{3}{2}}x^3dx=\frac{1}{60}.$$

84. 5. *Să se calculeze integrala dublă*

$$I=\iint\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+x^2y^2+y^4}\,dxdy$$

întinsă asupra ariei cuprinsă între cercurile: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, (fig. 127).

Luând coordonate polare se vede că avem

$$I=\iint\frac{d\rho d\theta}{\rho^2(1-\sin^2\theta\cos^2\theta)}=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-\sin^2\theta\cos^2\theta}\int_1^2\frac{d\rho}{\rho^2}=2\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{4-\sin^2 2\theta},$$

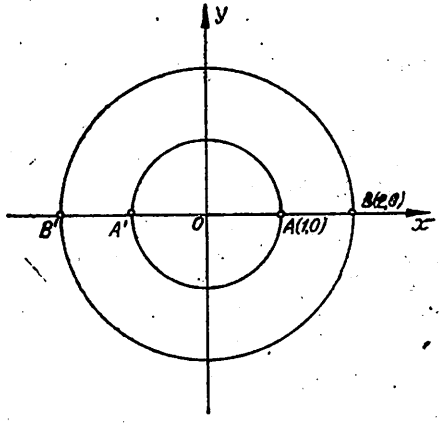


Fig. 127

$$I=2\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{4-\sin^2 2\theta}+2\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\theta}{4-\sin^2 2\theta}=4\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{4-\sin^2 2\theta}=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{4-\sin^2 2\theta}=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{4-\sin^2 2\theta}.$$

Aci punem: $\operatorname{tg} 2\theta=t$, găsim mai departe

$$I=8\int_0^{\infty}\frac{dt}{4+3t^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

84. 6. *Cu ajutorul coordonatelor polare să se arate că valoarea integralei duble*

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}(x^2+y^2+b^2)^{\frac{1}{2}}},$$

este $\frac{2\pi}{a(a+b)}$.

Vom pune: $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$. Cum domeniul de integrare este întreg planul, va trebui să facem pe θ să varieze dela 0 la 2π şi pe ρ dela 0 la $+\infty$. Înlocuind elementul de suprafaţă prin $\rho d\rho d\theta$, avem

$$I=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\rho d\rho d\theta}{\sqrt{(\rho^2+a^2)^3(\rho^2+b^2)}}=\int_0^{\infty}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2+a^2)^3(\rho^2+b^2)}}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\infty}\frac{\rho d\rho}{(\rho^2+a^2)\sqrt{(\rho^2+a^2)(\rho^2+b^2)}}.$$

Facem substituţia: $\rho^2+a^2=t^2(\rho^2+b^2)$, şi obţinem rezultatul din enunţ.

84. 7. *Să se calculeze valoarea integralei*

$$I=\iint\frac{dx\,dy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}},$$

pentru triunghiul: $x=1$, $y=0$ $y=x-a$ $(0<a<1)$. *Se cere valoarea limită pentru* $a=0$ fig. (128).

Dreapta: $y=x-a$ este paralelă cu prima bisectoare şi va tăia pe Ox într'un punct $B(a,0)$ cuprins între O şi A căci prin ipoteză $0<a<1$. Pentru calculul integralei fixăm întâiu pe x prin paralela MN: atunci y va varia dela O la $MN=x-a$, Avem

$$I=\int_a^1 dx\int_0^{x-a}\frac{dy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

Pentru a calcula prima integrală, punem: $y=u^2$ şi găsim

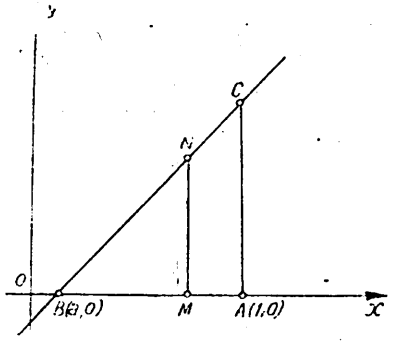


Fig. 128

$$\int_0^{x-a}\frac{dy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=2\int_0^{\sqrt{x-a}}\frac{udu}{\sqrt{x}+u}=$$

$$=2\int_0^{\sqrt{x-a}}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+u}\right)du=$$

$$=2\left|u-\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}+u)\right|_0^{\sqrt{x-a}}=$$

$$=2\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x}\ln\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}\right)$$

Mai departe avem

$$I=2\left|\frac{2}{3}\sqrt{(x-a)^3}\right|_a^1+2\int_a^1\sqrt{x}\ln\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}dx.$$

In partea dreaptă integrăm prin părţi punând

$$u=\ln\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x-a})\ \text{şi}\ dv=\sqrt{x}dx,$$

deci

$$v=\frac{2}{3}\sqrt{x^3},\quad du=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x(x-a)}}\right]dx;$$

vom avea

$$I=\frac{4}{3}\sqrt{(1-a)^3}+2\left|\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}\right|_a^1-\frac{2}{3}\int_a^1\left(\sqrt{x}-\frac{x}{\sqrt{x-a}}\right)dx=$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{(1-a)^3}-\frac{4}{3}\ln(1+\sqrt{1-a})-\frac{4}{9}\left|\sqrt{x^3}\right|_a^1+\frac{2}{3}\int_a^1\left(\sqrt{x-a}+\frac{a}{\sqrt{x-a}}\right)dx=$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{(1-a)^3}-\frac{4}{3}\ln(1+\sqrt{1-a})-\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\sqrt{a^3}+\frac{2}{3}\left|\frac{2}{3}\sqrt{(x-a)^3}+2a\sqrt{x-a}\right|_a^1,$$

$$I=\frac{4}{9}\left[\sqrt{1-a}\,(4-a)+\sqrt{a^3}-1\right]-\frac{4}{3}\ln(1+\sqrt{1-a}).$$

Pentru cazul: $a=0$, $I=\frac{4}{3}(1-\ln 2)$. Este de remarcat că în acest caz originea se află pe conturul dealungul căruia integrăm, pentru care elementul de integrat devine infinit. Totuşi deoarece I are o valoare finită înseamnă că integrala are un sens.

84. 8. *Să se calculeze*

$$I=\iint\sqrt{a^2-\frac{(x^2+y^2)^2}{4x^2}}\,dx\,dy,$$

în interiorul cercului: $x^2+y^2-2ax=0$, *cu ajutorul schimbării de variabile:* $x^2+y^2=2ux$, $y=vx$.

Să găsim pe x şi y în funcţie de u şi v, lucru ce se face eliminând pe y etc. Se găseşte

$$x=\frac{2u}{1+v^2},\quad y=\frac{2uv}{1+v^2}.$$

De aici scoatem

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{-4uv}{(1+v^2)^2},\qquad \frac{\partial x}{\partial u}=\frac{2}{1+v^2}$$
$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{2u(1-v^2)}{(1+v^2)^2},\qquad \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{2v}{1+v^2}$$

şi deci

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{2}{1+v^2} & \frac{-4uv}{(1+v^2)^2}\\ \frac{2v}{1+v^2} & \frac{2u(1-v^2)}{(1+v^2)^2}\end{vmatrix}=\frac{4u}{(1+v^2)^2},$$

deoarece u este pozitiv. Cu noile variabile vom avea deci

$$I=4\iint\frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{(1+v^2)^2}\,du\,dv.$$

Să găsim limitele. Pentru aceasta observăm că: $x^2+y^2=2ux$, reprezintă cercuri cu centrul în punctul $M(u,0)$ şi de rază u, iar: $y=vx$ reprezintă drepte ce trec prin O. Să presupunem că-l fixăm pe u, adică cercul M (fig. 129). Pentruca P să descrie toată periferia lui trebue ca dreapta ON să mătură tot spaţiul din dreapta axei Oy, adică va trebui să-l facem pe v să varieze dela $-\infty$ la $+\infty$. Apoi pentruca cercul M să acopere toată suprafaţa cercului A vom face pe u să varieze dela oO la a, deci

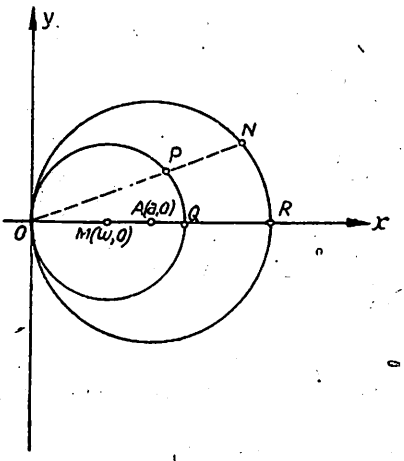


Fig. 129

$$I=4\int_0^a u\sqrt{a^2-u^2}\,du\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dv}{(1+v^2)^2}.$$

Însă în baza lui (f. 42)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dv}{(1+v^2)^2}=\frac{1}{2}\pi\ \text{şi}\ \int_0^a u\sqrt{a^2-u^2}\,du=\left|-\frac{1}{3}(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^a=\frac{a^3}{3},$$

aşa că: $I=\frac{2}{3}a^3\pi$.

84. 9. *z fiind o funcţie de x şi y definită prin ecuaţia*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \qquad (1)$$

să se transforme integrala

$$I=\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

cu ajutorul schimbării de variabile

$$x=a\sin\theta\cos\varphi,\quad y=b\sin\theta\sin\varphi. \tag{2}$$

Făcând această schimbare în (1), avem

$$z=\varepsilon c\cos\theta,\quad (\varepsilon=\pm 1). \tag{3}$$

Pentru a calcula derivatele lui z în raport cu x şi y, derivăm pe (1) în raport cu x şi y: avem

$$\frac{x}{a^2}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

de unde în baza lui (2) şi (3),

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c}{\varepsilon a}\frac{\sin\theta\cos\varphi}{\cos\theta},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c}{\varepsilon b}\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta},$$

ceeace însemnează că

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{a^2b^2\cos^2\theta+c^2\sin^2\theta\,(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)}{a^2b^2\cos^2\theta}.$$

In fine,

$$\frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)}=ab\sin\theta\cos\theta,$$

încât

$$I=\iint|\sin\theta|\sqrt{a^2b^2\cos^2\theta+c^2\sin^2\theta\,(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)}\,d\theta\,d\varphi.$$

§ 85. Integrale triple

1. Fie $f(x,y,z)$ o funcţie continuă în interiorul unui volum (V) închis de o suprafaţă curbă, astfel ca o paralelă la oricare din axe să-l taie în maximum două puncte (dacă volumul este întâlnit de o asemenea paralelă în mai mult de două puncte, va fi împărţit în volume parţiale care să se bucure de această proprietate şi vom face consideraţiile de mai jos în fiecare din aceste volume parţiale separat). Se împarte volumul (V) într'un mod oarecare în volume infinitezimale (elementare) Δv_k. In fiecare din volumele Δv_k se alege un punct oarecare $M_k\,(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$ şi se consideră suma

$$\Sigma\Sigma\Sigma\, f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\,\Delta v_k.$$

Se demonstrează că această sumă are o limită când numărul volumelor infinitezimale tinde către zero, numărul lor tinzând către infinit, limită care nu depinde de modul de împărţire al volumului (V) şi nici de alegerea punctelor M_k. Această limită se notează cu

$$I=\iiint_{(v)} f(x,y,z)\,dv, \tag{I}$$

şi se numeşte *integrală triplă.*

2. Calculul unei integrale triple se face deobicei printr'o succesiune de trei integrale simple, împărţind volumul (V) în volume infinitezimale prin plane paralele cu planele de coordonate. Atunci: $dv = dx\,dy dz$, şi integrala se scrie

$$I = \iiint f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz, \quad \text{(II)}$$

unde literele din formulă corespund cu cele construite în fig. 130, în felul următor. Se proiectează volumul (V) după domeniul (D) pe planul xOy; se duc tangentele AT_1 şi BT_2 la acest domeniu paralelele cu axa Oy a căror abscise le notăm cu a şi b. Între punctele A şi B se ia un punct P de abscisă x prin care o paralelă la Oy taie domeniul (D) în două puncte N_1 şi N_2 de ordonate y_1 şi y_2. Pe segmentul $N_1 N_2$ se ia un punct N de ordonată y prin care se ridică o perpendiculară pe planul xOy, dreaptă ce taie volumul (V) în două puncte M_1 şi M_2 de cotă z_1, respectiv z_2. Prima integrală din (II) însumează termenii din sumă corespunzători la o coloană de volume elementare simbolizată prin segmentul $M_1 M_2$; a doua integrală însumează termenii sumei corespunzători la o fâşie tăiată din volum de segmentul $M_1 M_2$, atunci când N descrie pe $N_1 N_2$; însfârşit ultima integrare corespunde parcurgerii volumului în întregime de către această fâşie când P se mişcă între A şi B.

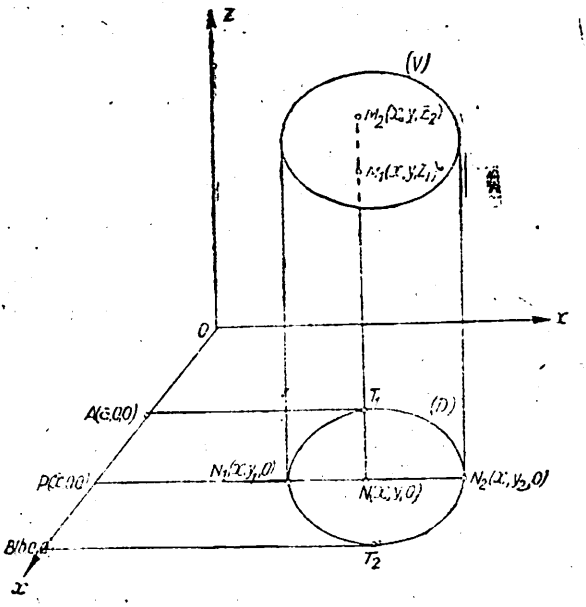


Fig. 130

Calculul de mai sus se poate face integrând în orice ordine în privinţa variabilelor x, y, z. Integrala se mai poate scrie şi sub forma

$$I = \iint_{(D)} dx\,dy \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz = \int_a^b dx \iint_{(D)} f(x, y, z)\,dydz, \quad \text{(III)}$$

reducând-o astfel la o integrală simplă şi una dublă.

3. Calculul unei integrale triple se poate simplifica printr'o schimbare de variabile bine aleasă. Dacă punem

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \Psi(u, v, w), \quad z = \varkappa(u, v, w),$$

atunci

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint_{(V_1)} f[\varphi(u, v, w), \Psi(u, v, w), \varkappa(u, v, w)] \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw \quad \text{(IV)}$$

(V_1) fiind volumul în care trebue să varieze u, v, w pentru a avea toate punctele volumului (V).

De obicei se trece în coordonate polare sau cilindrice (§ 64, pct. 1) când avem respectiv (prob. 52. 8 şi 52. 9).

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta\varphi)}\right| = \rho^2 |\sin\theta|, \qquad \text{(polar)}, \qquad \text{(V)}$$

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)}\right| = |\rho|, \qquad \text{(cilindric)}. \qquad \text{(VI)}$$

4. Dacă se împarte volumul (V) în volumele (V_1) şi (V_2), atunci

$$\iiint_{(V)} = \iiint_{(V_1)} + \iiint_{(V_2)}.$$

şi formula rămâne valabilă pentru un număr finit de volume parţiale.

85. 1. *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint_{(V)} (x^2+y^2)\,dxdydz,$$

în interiorul tetraedrului OABC (fig. 131).

Vom calcula integrala prin integrări succesive, în primul rând în raport cu z, apoi în raport cu y, şi la urmă în raport cu x. Privind invers, va trebui să luăm un punct N pe Ox între O şi A; prin N vom duce o paralelă la Oy care taie pe AB în P şi printr'un punct oarecare Q, situat pe NP, ridicăm o perpendiculară care taie planul ABC în M. Aceasta înseamnează că presupunând pe x şi y ficşi, limitele primei integrale vor fi cotele lui Q şi M; prima cotă este zero, iar a doua o scoatem din ecuaţia planului ABC, care este

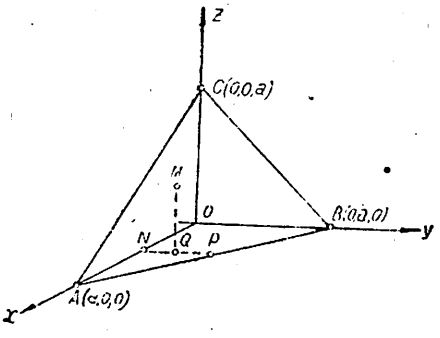


Fig. 131

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} - 1 = 0; \quad z = a - x - y.$$

A doua integrală va avea limitele ordonatele lui N şi P; prima este zero, iar a doua se găseşte din ecuaţia dreptei AB din planul xOy, care este

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} - 1 = 0; \quad y = a - x.$$

In sfârşit a treia integrală va avea drept limite abscisele punctelor O şi A, adică 0 şi a. Scriem deci

$$I=\int_0^a dx\int_0^{a-x}(x^2+y^2\,dy)\int_0^{a-x-y}dz;$$

avem succesiv

$$\int_0^{a-x-y}dz=a-x-y,$$

$$\int_0^{a-x}(a-x-y)(x^2+y^2)\,dy=\left|x^2(a-x)y-\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{3}(a-x)y^3-\frac{1}{4}y^4\right|_0^{a-x}=$$

$$=\frac{7}{12}x^4-\frac{4}{3}ax^3+a^2x^2-\frac{1}{3}a^3x+\frac{1}{12}a^4,$$

$$\int_0^a\left(\frac{7}{12}x^4-\frac{4}{3}ax^3+a^2x^2-\frac{1}{3}a^3x+\frac{1}{12}a^4\right)dx=\frac{1}{30}a^5.$$

85. 2. *Să se calculeze integrala triplă*

$$I=\iiint[(x-y)^2+z^2]\,dxdydz,$$

x,y,z, fiind coordonatele rectangulare ale unui punct oarecare din interiorul sferei: $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Scriem integrala sub forma

$$I=\int dx\int dy\int[(x-y)^2+z^2]\,dz.$$

Pentru a găsi limitele succesive, fixăm mai întâi pe x, adică luăm pe Ox (fig. 132) un punct P cuprins între A şi A' (interior sferei); apoi pe perpendiculara în P pe Ox luăm o lungime PN (adică îl fixăm pe y) fără a ieşi din interiorul sferei; în N ducem o perpendiculară pe planul xOy care taie sfera în M şi M'. Limitele primei integrale vor fi $\overline{NM}$ şi $\overline{MN'}$ care nu sunt altceva decât cotele punctelor unde MM' taie sfera. Aceste cote sunt

$$MN=\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$
$$M'N=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

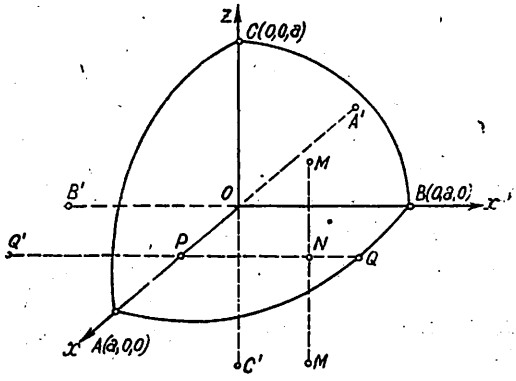


Fig. 132

Pentru a doua integrală, limitele vor fi PQ şi PQ', adică ordonatele punctelor unde paralela dusă prin P, de abscisă x, taie curba de secţiune a

sferei cu planul xOy. Ecuația acestei curbe se obține făcând în ecuația sferei $z=0$. Se obține cercul de ecuație: $x^2+y^2=a^2$; limitele celei de a doua integrale vor fi deci

$$PQ=\sqrt{a^2-x^2},\quad PQ'=-\sqrt{a^2-x^2}.$$

In sfârșit pentru a treia integrală limitele vor fi OA, OA' care nu sunt altceva decât abscisele punctelor unde Ox înțeapă sfera. Cum ecuațiile axei Ox sunt: $y=0$, $z=0$, punctele A și A' vor fi definite prin sistemul: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=0$, $z=0$. Se găsește că A $(a,0,0)$, A' $(-a,0,0)$. In rezumat

$$I=\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} [(x-y)^2+z^2]\,dz,$$

Pentru prima integrală, pe care o notăm cu I_1, avem (x și y sunt presupuși momentan constanți)

$$I_1=\left|(x-y)^2 z+\frac{1}{3}z^3\right|_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=2(x-y)^2\sqrt{a^2-x^2-y^2}+$$

$$+\frac{2}{3}\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}=\frac{2}{3}\sqrt{a^2-x^2-y^2}(2x^2+2y^2-6xy+a^2).$$

Pentru a doua integrală pe care o notăm cu I_2, facem substituția: $y=\sqrt{a^2-x^2}\sin t$. Avem succesiv

$$dy=\sqrt{a^2-x^2}\cos t\,dt,\quad \sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-x^2}\cos t,$$

$$2x^2+2y^2-6xy+a^2=2(a^2-x^2)\sin^2 t-6x\sqrt{a^2-x^2}\sin t+2x^2+a^2$$

$$\text{pentru: } y=\sqrt{a^2-x^2},\quad \sin t=1,\quad t=\frac{1}{2}\pi,$$

$$\text{pentru: } y=-\sqrt{a^2-x^2},\quad \sin t=-1,\quad t=-\frac{1}{2}\pi,$$

Efectuând toate calculele, găsim: $I=\frac{4}{5}\pi a^5$

85. 3. *Fie (V) spațiul limitat de planul $z=h$ și de partea din suprafață conică; $x^2+y^2=\frac{r^2z^2}{h^2}$, care se află deasupra planului xOy.* (fig. 133). *Să se calculeze*

$$I=\iiint_{(V)}(x^2+y^2)\,dxdydz$$

Suprafața conică dată are vârful în origine și taie planele de coordonate xOz și yOz după câte două drepte simetrice față de Oz. Să

presupunem că tăiem suprafaţa cu un plan (P) de cotă z. Vom obţine un cerc a cărui ecuaţie în planul (P) este: $x^2+y^2=\frac{r^2}{h^2}z^2$. Dacă notăm cu (D) domeniul mărginit de acest cerc, putem scrie

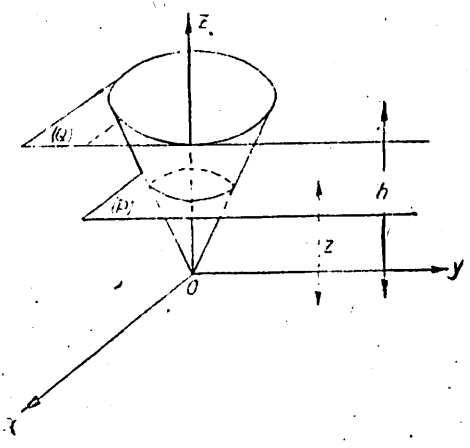


Fig. 133

$$I=\int_0^h dz\iint_{(D)}(x^2+y^2)\,dxdy,$$

cota planului (P) trebuind să varieze dela 0 la h. Pentru a calcula integrala dublă folosim coordonatele polare în planul (P) $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$. Vom avea

$$\iint_{(D)}\rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{rz}{h}}\rho^3d\rho=\frac{r^4z^4}{2h^4}\pi;$$

mai departe

$$I=\int_0^h\frac{r^4z^4}{2h^4}\pi\,dz=\left|\frac{r^4\pi}{2h^4}\,\frac{z^5}{5}\right|_0^h=\frac{r^4h\pi}{10}.$$

85. 4. *Să se calculeze integrala triplă*

$$I=\iiint[5(x-y)^2-4a^2]\,dxdydz,$$

în interiorul volumului limitat de suprafeţele:

$$x^2+y^2=az\ ,\ x^2+y^2+z^2=2a^2.$$

Prima ecuaţie reprezintă un paraboloid de rotaţie, iar a doua o sferă cu centrul în origine şi de rază $a\sqrt{2}$ (fig. 134). Aceste două suprafeţe se taie după un cerc situat într'un plan (P) de cotă a şi de rază tot a. Volumul în interiorul căruia vrem să calculăm pe I îl vom împărţi în două, şi anume: volumul V_1 din interiorul paraboloidului situat dedesubtul planului (P) şi volumul V_2 situat deasupra planului (P), mărginit de acest plan şi sferă. Pentru a calcula pe I în interiorul lui V_1, fie I_1 această valoare, tăiem cu un plan (P) de cotă z mai mică decât a şi care va tăia pe V_1 după un cerc situat pe paraboloid, de rază $\sqrt{az}$ (fig. 135). Notând cu (D_1) domeniul mărginit de acest cerc, avem

$$I_1=\int_0^a dz\iint_{(D_1)}[5(x-y)^2-4a^2]\,dxdy.$$

Luând pentru un punct M din interiorul cercului (D_1), coordonate polare vom avea

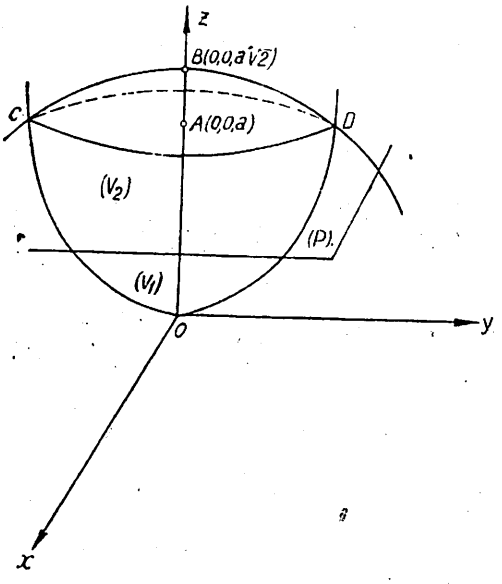


Fig. 134

$$\iint\limits_{(D_1)} [5\,(x-y)^2 - 4a^2]\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\sqrt{az}} (5\rho^2 - 5\rho^2 \sin 2\theta - 4a^2)\,\rho\,d\rho =$$

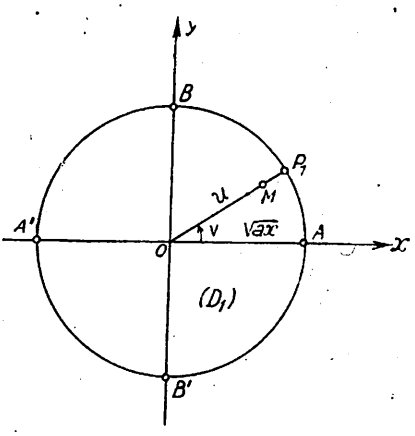


Fig. 135

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{5}{4}\rho^4 - \frac{5}{4}\rho^4 \sin 2\theta - 2a^2\rho^2 \right|_0^{\sqrt{az}} d\theta - a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{5}{4}z^2 - \frac{5}{4}z^2 \sin 2\theta - 2az \right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^2 (5z^2 - 8az).$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\pi a^2 \int\limits_0^a (5z^2 - 8az)\,dz = -\frac{7}{6}\pi a^5.$$

Pentru I_2, adică valoarea lui I în interiorul lui V_2, calculul este acelaşi, numai că raza cercului din planul de secţiune (P), care este pe sferă, va fi $\sqrt{2a^2 - z^2}$, iar limitele între care va varia z, sunt a şi $a\sqrt{2}$; avem

$$\iint\limits_{(D_2)} [5\,(x-y)^2 - 4a^2]\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\sqrt{2a^2 - z^2}} (5\rho^2 - 5\rho^2 \sin 2\theta - 4a^2)\,\rho\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\pi\,(5z^4 - 12a^2z^2 + 4a^4)$$

$$I_2=\frac{1}{2}\pi\left|z^5-4a^2z^3+4a^4z\right|_a^{a\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\pi a^5,$$

aşa că în definitiv: $I=I_1+I_2=-\frac{5}{3}\pi a^5$.

85. 5. *Să se calculeze*

$$I=\iiint\limits_{(V)} z\,(x^2+y^2)\,dxdydz,$$

volumul de integrare fiind jumătatea din sfera

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

situată deasupra planului xOy.

Soluţia I. In figura 136 se vede că avem

$$I=\int\limits_{OA'}^{OA} dx\int\limits_{PR}^{PQ}(x^2+y^2)\,dy\int\limits_0^{MN} zdz,$$

unde se găseşte

$$OA=R,\ OA'=-R,\ \overline{PQ}=\sqrt{R^2-x^2},$$
$$\overline{PR}=-\sqrt{R^2-x^2},$$
$$\overline{MN}=\sqrt{R^2-x^2-y^2};$$

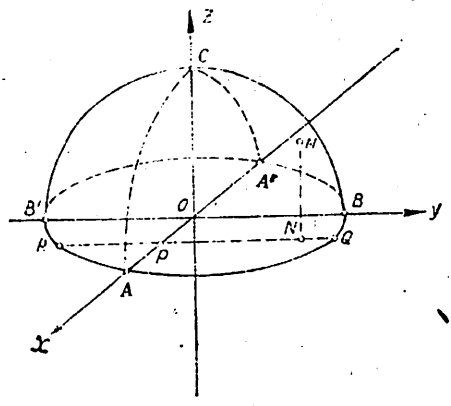


Fig. 136

avem succesiv

$$\int\limits_0^{MN} zdz=\left|\frac{1}{2}z^2\right|_0^{MN}=$$

$$=\frac{1}{2}(R^2-x^2-y^2),$$

$$\int\limits_{PR}^{PQ}(x^2+y^2)\frac{1}{2}(R^2-x^2-y^2)\,dy=\frac{1}{2}\left|R^2\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)-\left(x^4y+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{3}x^2y^3+\frac{1}{5}y^5\right)\right|_{PR}^{PQ}=\frac{2}{15}\sqrt{R^2-x^2}\,(R^4+3R^2x^2-4x^4);$$

In sfârşit, avem: $I=\frac{1}{12}\pi R^6$.

Soluţia II. Să presupunem că tăiem sfera cu un plán (P) de cotă z. Secţiunea va fi un cerc a cărui ecuaţie, în planul (P) este $x^2+y^2=R^2-z^2$. Insemnând cu (D) interiorul acestui cerc, putem scrie

$$I=\int\limits_0^R zdz\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)\,dxdy,$$

deoarece cota planului (P) trebue să varieze dela 0 la R. Punem $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ (folosim coordonate polare în planul (P), putem spune deasemenea că integrarea lui I pe această cale se face prin coordonate cilindrice în spaţiu). Presupunând pe ρ fix, θ va trebui să-i varieze dela 0 la 2π (fig. 137), şi apoi ρ dela 0 la $\sqrt{R^2-z^2}$ (raza cercului de secţiune). Deci

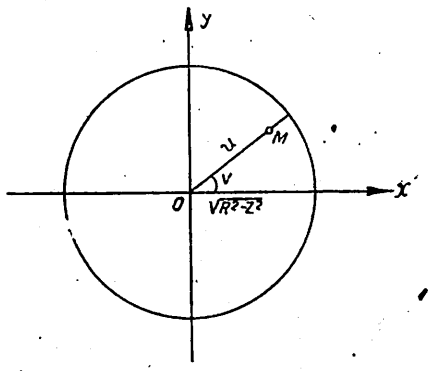


Fig. 137

$$\iint\limits_{(D)} (x^2+y^2)\,dxdy = \iint\limits_{(D} \rho^2\cdot\rho d\rho d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho^3 d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}(R^2-z^2)^2\pi.$$

Mai departe

$$I = \frac{1}{2}\pi \int\limits_0^R (R^2-z^2)^2\, zdz = \frac{1}{12}\pi R^6.$$

Soluţia III. Integrala se poate calcula deasemenea folosind coordonate polare (§ 64, pct. 1, c) (fig. 138)

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z=\rho\cos\theta.$$

Avem

$$I = \iiint\limits_{(V)} \rho\cos\theta\,(\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi +$$

$$+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)\,\rho^2\sin\theta\,d\rho d\theta d\varphi.$$

$$I = \iiint\limits_{(V)} \rho^5\sin^3\theta\cos\theta d\rho d\theta d\varphi.$$

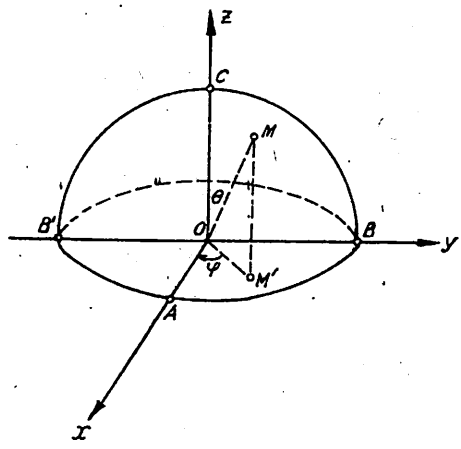


Fig. 138

După cum se vede în figură (fig. 138) pentru ca M să descrie sfera în întregime este necesar ca ρ să varieze între 0 şi R, θ dela 0 la $\frac{1}{2}\pi$ şi φ dela 0 la 2π; adică

$$I = \int\limits_0^R \rho^5 d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi, \quad \text{etc.}$$

§ 86. Integrale de suprafață

1. Fiind dată o suprafață (S) de ecuație

$$f(x, y, z)=0, \tag{I}$$

se numește integrală de suprafață, integrala

$$\iint\limits_{(S)} F(x, y, z)\, d\sigma = \iint\limits_{(S)} F(M)\, d\sigma, \tag{II}$$

unde prin $F(M)$ înțelegem o funcție continuă de punctul M, punctul curent al suprafeței (I), adică o funcție de coordonatele lui, x, y, z, iar $d\sigma$ elementul de suprafață al suprafeței (S). Pentru a calcula o integrală de suprafață, o reducem la o integrală dublă. Fie α, β, γ cosinii directori ai normalei în M la suprafață (suprafața este presupusă orientată având o față pozitivă și una negativă, iar normala orientată în sensul că merge dela fața negativă spre cea pozitivă). Atunci

$$\frac{dydz}{\alpha} = \frac{dzdx}{\beta} = \frac{dxdy}{\gamma} = d\sigma, \tag{III}$$

iar integrala se scrie

$$\iint\limits_{(S)} F(x, y, z)\, d\sigma = \iint\limits_{(S)} \frac{F(x, y, z)}{\gamma}\, dxdy. \tag{IV}$$

Dacă în această ultimă integrală se înlocuește z în funcție de x și y scoși din (I), integrala se reduce la o integrală dublă obișnuită, considerată în interiorul domeniului după care se proiectează suprafața (S) pe planul xOy.

2. In calcule, integralele de suprafață se prezintă sub forma

$$I = \iint\limits_{(S)} P(x, y, z)\, dydz + Q(x, y, z)\, dzdx + R(x, y, z)\, dxdy, \tag{V}$$

calculată dealungul unei suprafețe a cărei ecuație să presupunem că este (I) Pentru calculul ei, ținem seamă de relațiile (III) și o scriem sub forma

$$I = \iint\limits_{(S)} (P\alpha + Q\beta + R\gamma)\, d\sigma = \iint\limits_{(S)} F(x, y, z)\, d\sigma, \tag{VI}$$

adică am redus-o la forma (II), deci o calculăm prin metoda dela nr. precedent.

3. Dacă suprafața dealungul căreia se calculează integrala este reprezentată parametric,

$$x=f(u, v), \quad y=g(u, v) \quad z=h(u, v),$$

atunci, ținând seamă că expresia elementului de suprafață este

$$d\sigma = \sqrt{EG-F^2}\, dudv, \tag{VII}$$

unde E, F, G au expresiile date la § 65, pct. 2, integrala (II) se scrie

$$\iint\limits_{(D)} F[f(u, v), \ g(u, v), \ h(u, v)] \sqrt{EG-F^2}\, dudv, \tag{VIII}$$

(D) fiind domeniul în care trebue să varieze u şi v pentru ca M să descrie porţiunea de suprafaţă pe care calculăm integrala.

Analog, avem pentru integrala (V),

$$I=\iint\limits_{(D)}\left[P\frac{D(y,z)}{D(u,v)}+Q\frac{D(z,x)}{D(u,v)}+R\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]dudv. \qquad (IX)$$

4. Dacă suprafaţa este impărţită în mai multe porţiuni, integrala de suprafaţă relativă la suprafaţa totală este suma integralelor relative la fiecare porţiune în parte.

86. 1. *Să se calculeze integrala de suprafaţă*

$$I=\iint\limits_{(S)}(x+y+z)\,d\sigma,$$

(S) fiind suprafaţa laterală a paralelipipedului din fig. 139, *luându-se numai feţele care nu sunt în planele de coordonate.*

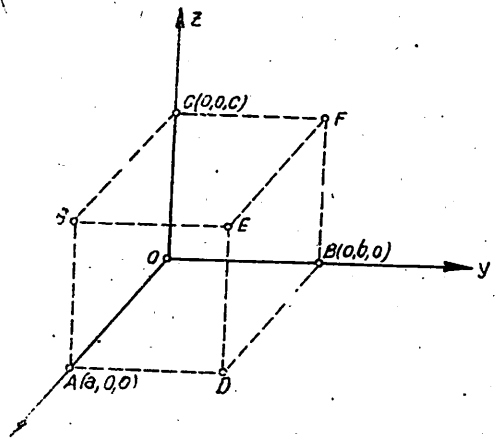


Fig. 139

Descompunem integrala în trei integrale dealungul fiecăreia din feţele paralelipipedului. Pe fiecare din aceste feţe $d\sigma$ va fi egal cu produsul a două din diferenţialele variabilelor dx, dy, dz, deoarece aceste feţe sunt paralele cu câte unul din planele de coordonate

$$I_{ADEG}=\iint(a+y+z)\,dydz=$$

$$=\int_0^b dy\int_0^c(a+y+z)\,dz=$$

$$=\int_0^b\left|az+yz+\frac{1}{2}z^2\right|_0^c dy=$$

$$=\int_0^b\left(ac+cy+\frac{1}{2}c^2\right)dy=\left|acy+\frac{1}{2}cy^2+\frac{1}{2}c^2y\right|_0^b=\frac{1}{2}bc\,(2a+b+c),$$

şi analog

$$I_{DEFB}=\frac{1}{2}ca\,(a+2b+c),\quad I_{GEFC}=\frac{1}{2}ab\,(a+b+2c).$$

Rezultatul este

$$I=2abc+\frac{1}{2}(a+b)\,(b+c)\,(c+a).$$

86. 2. *Să se calculeze integrala dublă*

$$I=\iint\limits_{(S)}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma,$$

pe jumătatea de cilindru reprezentată în fig. 140.

Soluția I. Ecuația suprafeței este

$$x^2+y^2=a^2.$$

Pentru a calcula integrala, scrierea (IV) nu este posibilă din cauza așezării particulare a suprafeței față de planul xOy. Putem proceda însă în mod analog cu scrierea acestei formule față de planul yOz. Parametri directori ai normalei într'un punct oarecare al suprafeței vor fi (§ 64. pct. 2): $2x$, $2y$, 0 deci cosinii directori

$$\alpha=\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}},\quad \beta=\frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}},\quad \gamma=0.$$

Alegând pe normală sensul pozitiv din interiorul spre exteriorul suprafeței, se vede în figură că pe jumătatea de cilindru aleasă trebue să alegem în fața radicalului semnul $+$.

Atunci, în baza formulelor (III), avem

$$I=\iint\limits_{(D)}\frac{x^2+y^2}{x}\,dy\,dz=\iint\limits_{(D)}\frac{a^2}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy\,dz,$$

(D) fiind dreptunghiul $ABCD$. Avem mai departe,

$$I=a^2\int_0^h dz\int_{-a}^{a}\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=a^2h\pi.$$

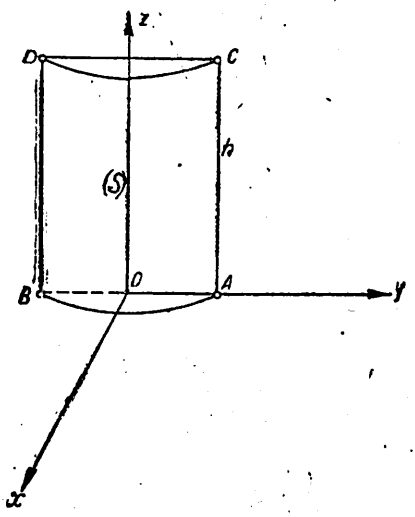


Fig. 140

Soluția II. Forma suprafeței dealungul căreia calculăm integrala ne spune că este indicat să alegem coordonate cilindrice

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z.$$

Ecuația suprafeței va fi: $\rho=a$ și vom obține integrala pe toată suprafața făcând pe θ să varieze dela 0 la π iar pe z dela 0 la h. Avem pentru elementul suprafeței,

$$x_\theta=-a\sin\theta,\quad y_\theta=a\cos\theta,\quad z_\theta=0;$$

$$x_z=0,\qquad y_z=0,\qquad z_z=1;$$

$$E=a^2,\qquad F=0,\qquad G=1;$$

$$d\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,d\theta\,dz=a\,d\theta\,dz.$$

Integrala se scrie

$$I=\iint\limits_{(S)}a\cdot a\,d\theta\,dz=a^2\int_0^h dz\int_0^\pi d\theta=a^2h\pi.$$

86. 3. *Să se calculeze integrala*

$$I=\iint\limits_{(S)}z\,d\sigma,$$

pe suprafaţa laterală a unui con cu vârful în origine de înălţime h şi având raza bazei a, (fig. 141).

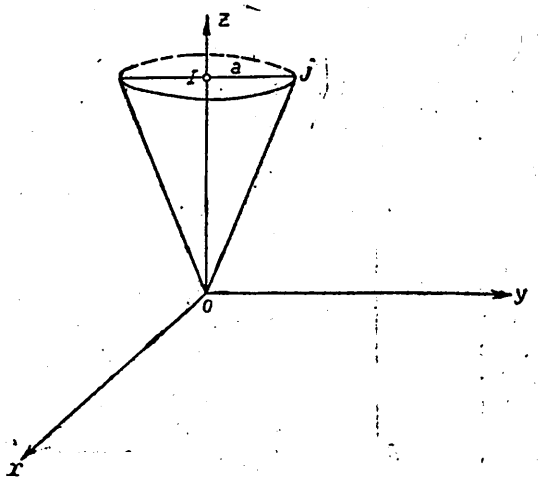


Fig. 141

Vom folosi coordonatele polare definite prin formulele

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta. \qquad (1)$$

Conul dealungul căruia trebue să integrăm este caracterizat prin relaţiile

$$\theta=\theta_0=\text{const},\quad 0\leq\rho\leq\rho_0,\quad 0\leq\varphi\leq 2\pi,$$

unde θ_0 şi ρ_0 se scot din triunghiul dreptunghi OIJ:

$$\operatorname{tg}\theta_0=\frac{a}{h},\quad \rho_0^2=a^2+h^2. \qquad (2)$$

Pentru elementul de suprafaţă avem

$$d\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,d\rho\,d\varphi=\rho\sin\theta_0\,d\rho\,d\varphi.$$

Integrala de calculat va fi

$$I=\iint_{(S)}\rho\cos\theta_0\cdot\rho\sin\theta_0\,d\rho\,d\delta=\sin\theta_0\cos\theta_0\int_0^{\rho_0}\rho^2 d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{3}\pi\rho_0^3\sin 2\theta_0,$$

şi în baza relaţiilor (2)

$$I=\frac{2}{3}\pi ah\sqrt{a^2+h^2}.$$

86. 4. *Să se calculeze integrala de suprafaţă*

$$I=\iint_{(S)}\frac{d\sigma}{r},$$

unde r este distanţa dela punctul curent la punctul C (0, 0, 1), *iar (S) este triunghiul sferic de centru origina, de rază* 1 *şi situat în primul diedru,* (fig. 142).

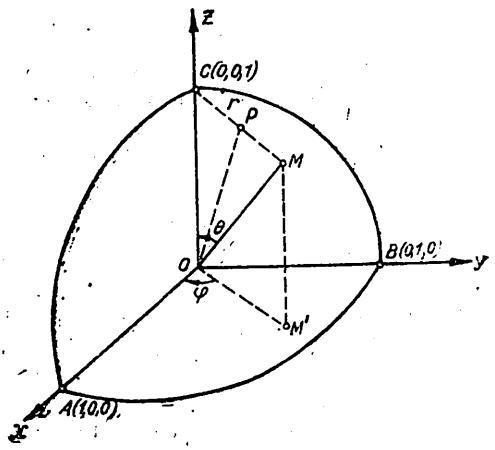


Fig. 142

Alegem coordonate polare. Pe suprafaţa (S), $\rho=1$, încât

$$x=\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\cos\theta.$$

Pentru $d\sigma$ avem

$$d\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,d\theta\,d\varphi=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

($\sin\theta$ este pozitiv, deoarece θ este cuprins între 0 şi $\frac{1}{2}\pi$); iar pentru r, din triunghiul isoscel OCM, în care OP este înălţimea, scoatem

$$\frac{1}{2}r=\sin\frac{1}{2}\theta\ ;\quad r=2\sin\frac{1}{2}\theta.$$

Deci

$$I=\iint\limits_{(S)}\frac{\sin\theta\,d\varphi\,d\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}=\iint\limits_{(S)}\cos\frac{1}{2}\theta\,d\varphi\,d\theta=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{1}{2}\theta\,d\theta=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ .$$

§ 87. Formule care leagă între ele diferite tipuri de integrală.

1. **Formula lui Cauchy.** Fiind date două funcţii $P(x,y)$, $Q(x,y)$ continue în interiorul unui domeniu (D) mărginit de curba (C), avem

$$\int\limits_C P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy, \tag{I}$$

conturul (C) fiind descris în sens direct (suprafaţa să rămână la stânga) (fig. 143).

In particular, decă expresia de sub prima integrală este o diferenţială totală, atunci a doua integrală este nulă. Regăsim rezultatul dela § 83, no. 2, e.

2. **Formula lui Stokes.** Dacă $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ sunt trei funcţii continue pe o suprafaţă

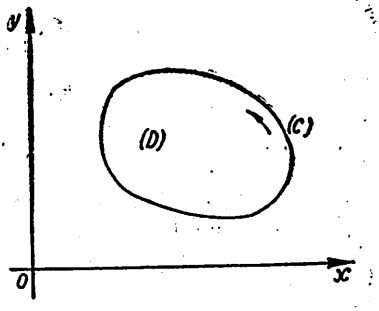


Fig. 143

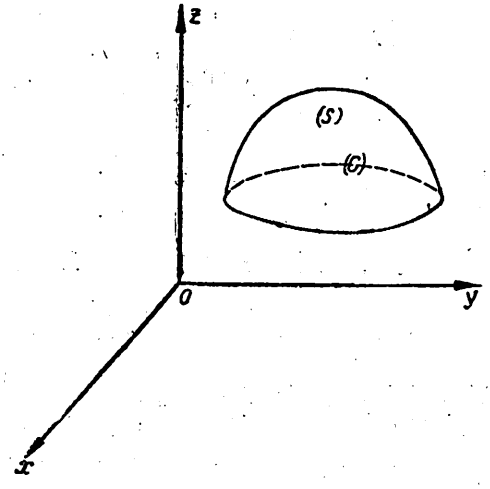


Fig. 144

(S) mărginită de o curbă (C) (fig. 144), atunci

$$\int\limits_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx+$$
$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy, \tag{II}$$

curba (C) fiind parcursă în sens pozitiv.

3. **Formula lui Ostrogradschi.** Dacă $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ sunt trei funcții continue, precum și primele lor derivate în interiorul unui volum (V) mărginit de o suprafață (S), avem

$$\iint\limits_{(S)} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz, \qquad \text{(III)}$$

integrala din prima parte fiind calculată pe fața exterioară a suprafeței (S). In particular, dacă

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \qquad \text{(IV)}$$

integrala din dreapta, deci cea din stânga, este nulă.

87. 1. *Fie (C) o curbă închisă a cărei suprafață este S. Să se calculeze integrala curbilinie*

$$I = \int_C (y + \cos x \sin y)\,dx + (1 + \sin x \cos y)\,dy.$$

Cum

$$P'_y = 1 + \cos x \cos y, \quad Q'_x = \cos x \cos y,$$

formula (I) ne dă

$$I = \iint\limits_{(c)} (Q'_x - P'_y)\,dxdy = -\iint\limits_{(c)} dxdy = -S,$$

deoarece ultima integrală dublă reprezintă suprafața închisă de curba (C) (§ 88, pct. 3).

87. 2. *Se cere:* 1° *Să se calculeze integrala dublă*

$$I = \iint (x+y)^2\,dx\,dy,$$

relativă la cercul: $x^2+y^2 \leq 1$. *Se vor întrebuința mai întâi coordonate polare, apoi coordonate carteziene și apoi metoda următoare: se va tăia suprafața cercului în porțiuni infinitezimale prin drepte paralele, de ecuație:* $x+y=u\sqrt{2}$; *se va evalua integrala dublă în una din aceste porțiuni, apoi se va face suma tuturor acestor rezultate făcând pe u să varieze între limite convenabil alese.* 2° *Să se calculeze integrala curbilinie*

$$J = \int xy\left[-\left(x + \frac{1}{2}y\right)dx + \left(\frac{1}{2}x + y\right)dy\right],$$

întinsă la cercul: $x^2+y^2=1$. *Să se explice dece se găsește același rezultat ca la* 1°.

1° *Prin coordonate polare.* Avem

$$I = \iint \rho^2(\cos\theta + \sin\theta)^2\,\rho\,d\rho\,d\theta,$$

ρ variind între 0 şi 1, iar θ între 0 şi 2π, (fig. 145),

$$I=\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} (\cos\theta+\sin\theta)^2 d\theta=\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} (1+\sin 2\theta)\, d\theta=$$

$$=\left|\frac{1}{4}\rho^4\right|_0^1 \left|\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right|_0^{2\pi}=\frac{1}{2}\pi.$$

Prin coordonate carteziene. Păstrând pe x fix se vede că limitele primei integrale sunt $\overline{PM}$ şi $\overline{PM'}$ respectiv egale cu $\pm\sqrt{1-x^2}$; iar limitele celei de a doua integrale sunt -1 şi $+1$ (respectiv $\overline{OA}$ şi $\overline{OA'}$). Deci

$$I=\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)^2\, dy=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \left|(x+y)^3\right|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1} (2x^2+1)\sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Făcând aci: $x=\cos t$ şi calculând integrala obţinută între limitele 0 şi π avem

$$I=\frac{1}{2}\pi.$$

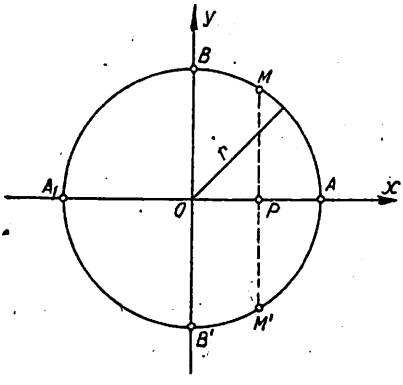


Fig. 145

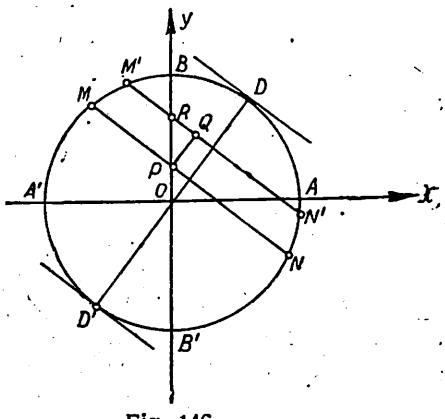


Fig. 146

Cu ajutorul dreptelor $x+y=u\sqrt{2}$. Să considerăm două drepte infinit apropiate (fig. 146), $(\overline{MN})\ x+y=u\sqrt{2}$, şi $(\overline{M'N'})\ x+y=(u+du)\sqrt{2}$. Cum $u\sqrt{2}$ şi $(u+du)\sqrt{2}$ sunt ordonatele la origine ale celor două drepte rezultă că: $PR=du\sqrt{2}$ şi din triunghiul dreptunghic isoscel PQR scoatem că: $PQ=du$. Deci mărimea porţiunii $MNN'M'$ este egală cu $MN\,du$. Coordonatele punctelor M şi N se găsesc rezolvând sistemul

$$x^2+y^2=1,\quad x+y=u\sqrt{2}.$$

Abscisele x', x'' sunt date de ecuaţia

$$2x^2-2u\sqrt{2}x+(2u^2-1)=0,$$

încât, cum $y'=u\sqrt{2}-x', \ldots$

$$MN^2=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2=(x'-x'')^2+(x''-x')^2=$$
$$=2[(x'+x'')^2-4x'x'']=2[(u\sqrt{2})^2-2(2u^2-1)]=4(1-u^2).$$

Suprafața mărginită de dreptele $\overline{MN}$ și $\overline{M'N'}$ este deci: $2\sqrt{1-u^2}\,du$. Limitele integralei vor fi date de dreptele D și D', pentru care $u=1$ și -1. Avem

$$I=4\int_{-1}^{1}u^2\sqrt{1-u^2}\,du,$$

și făcând schimbarea: $u=\cos t$,

$$I=4\int_{0}^{\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,dt=\frac{1}{2}\pi.$$

2°. Luând dealungul cercului; $x=\cos t$, $y=\sin t$, avem

$$J=\int_{0}^{2\pi}\cos t\sin t\left[\left(\cos t+\frac{1}{2}\sin t\right)\sin t+\left(\frac{1}{2}\cos t+\sin t\right)\cos t\right]dt=\frac{1}{2}\pi.$$

Rezultatul este același ca la 1° în baza formulei (I), deoarece dacă luăm

$$P=-xy\left(\frac{1}{2}y+x\right),\quad Q=xy\left(\frac{1}{2}x+y\right),$$

atunci

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(xy+y^2)+(xy+x^2)=(x+y)^2.$$

87. 3. *Să se calculeze integrala curbilinie*

$$I=\int_{ABC}(z-y)\,dx+(x-z)\,dy+(y-x)\,dz,$$

luată dealungul laturilor triunghiului $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ *direct, și transformând-o într'o integrală de suprafață* (fig. 147).

Calculul direct. Descompunem integrala în trei, fiecare fiind luată pe câte una din laturi, și anume

$$I=I_{AB}+I_{BC}+I_{CA}.$$

Cum dealungul lui $\overline{AB}$, $z=0$,

$$I_{AB}=\int_{AB}-ydx+xdy,$$

x și y verificând ecuația dreptei AB în planul xOy, adică

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0,\quad y=\frac{b}{a}(a-x);\quad dy=-\frac{b}{a}dx$$

și deci luând pe x ca variabilă,

$$I_{AB}=\int_{a}^{0}\left[-\frac{b}{a}(a-x)-\frac{b}{a}x\right]dx=-b\int_{a}^{0}dx=ab.$$

Analog, pe $\overline{BC}$ luând pe y variabilă, şi cum ecuaţia acestei drepte este,

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0;\quad z=\frac{c}{b}(b-y),\quad dz=-\frac{c}{b}dy,$$

avem

$$I_{BC}=\int_{BC}-zdy+ydz=\int_{b}^{0}\left[-\frac{c}{b}(b-y)-\frac{c}{b}y\right]dy=-c\int_{b}^{0}dy=bc.$$

Găsim deasemeni

$$I_{CA}=ca.$$

Deci

$$I=ab+bc+ca.$$

Calculul prin integrale de suprafaţă. Conform formulei (II), avem

$$I=2\iint_{(ABC)}dydz+dzdx+dxdy,$$

ABC fiind suprafaţa triunghiului ABC. Această integrală se reduce la trei integrale calculate succesiv în proiecţiile triunghiului pe cele trei plane de coordonate, adică

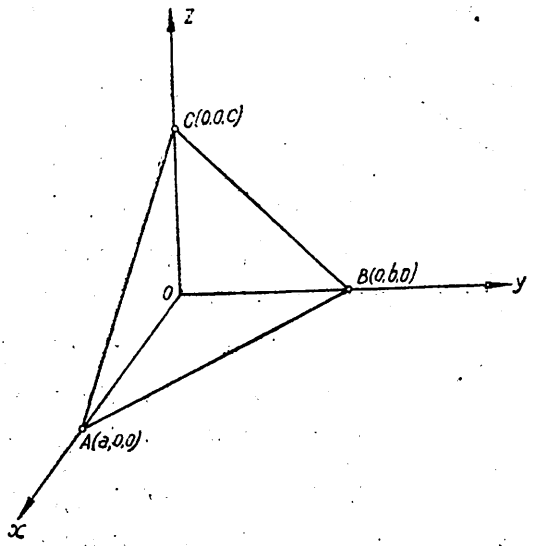


Fig. 147

$$I_1=2\iint_{AOB}dxdy=ab,\quad I_2=2\iint_{BOC}dydz=bc,\quad I=2\iint_{COA}dzdx=ca,$$

ceeace verifică rezultatul de mai sus.

87. 4. *Să se verifice formula lui Ostrogradschi în cazul când luăm*

$$P=x^2+yz,\quad Q=x+y^2+z,\quad R=1-z,$$

în înteriorul şi pe suprafaţa corpului din fig. 148.

Problema cere să verificăm formula

$$\iint_{(S)}(x^2+yz)\,dydz+(x+y^2+z)\,dzdx+(1-z)\,dxdy=\iiint_{(V)}(2x+2y-1)\,dxdydz, \tag{1}$$

integrala din prima parte fiind luată pe faţa exterioară a conului.

1°. Integrala de suprafaţă I se împarte în două: integrala I_1 pe suprafaţa exterioară a conului şi I_2 integrala pe suprafaţa bazei. În ultima integrală un mobil care descrie baza trebue să fie în afara corpului şi astfel, încât atunci când descrie cercul care o mărgineşte, sa aibă suprafaţa la stânga, adică să o descrie în sensul $AB'A'B$. Cum pe planul bazei $z=0$,

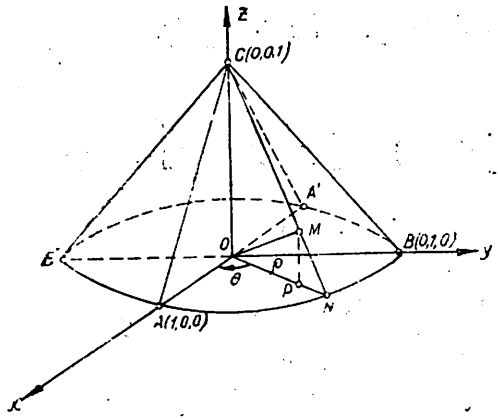


Fig. 148

$$I_2=\iint\limits_{AB'A'A} dxdy=-\pi. \qquad (2)$$

Pentru calculul lui I_1 vom folosi coordonate cilindrice. Fie M un punct oarecare al suprafeţei care se proiectează în P pe planul xOy. Cum triunghiul CON este isoscel deoarece $OC=ON$, triunghiul dreptunghic MPN este şi el isoscel, adică $MP=PN=1-\rho$. Reprezentarea cilindrică a suprafeţei va fi

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=1-\rho. \qquad (3)$$

Avem

$$x_\rho=\cos\theta\ ,\quad y_\rho=\sin\theta\ ,\quad z_\rho=-1,$$
$$x_\theta=-\rho\sin\theta\ ,\quad y_\theta=\rho\cos\theta\ ,\quad z_\theta=0,$$
$$\frac{D(y,z)}{D(\rho,\theta)}=\rho\cos\theta,\quad \frac{D(z,x)}{D(\rho,\theta)}=\rho\sin\theta\ ,\quad \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=\rho,$$

încât, aplicând formula (IX) dela § 86, avem

$$I_1=\iint\{[\rho^2\cos^2\theta+(1-\rho)\rho\sin\theta]\rho\cos\theta+(\rho\cos\theta+\rho^2\sin^2\theta+1-\rho)\rho\sin\theta+\rho^2\}d\rho d\theta,$$

ρ şi θ variind respectiv între $(0,1)$ şi $(0,2\pi)$. Integrând întâi în raport cu ρ se obţine: $I_1=\frac{2}{3}\pi$ şi deci $I=-\frac{1}{3}\pi$.

2°. Folosind coordonate cilindrice, integrala triplă, pe care o notăm cu I', se scrie succesiv în baza lui (3),

$$I'=\iiint\limits_{(V)}(2x+2y-1)\,dxdydz=\iiint\limits_{(V)}(2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-1)\,\rho d\rho d\theta dz=$$
$$=\int_0^1\rho d\rho\int_0^{2\pi}(2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-1)\,d\theta\int_0^{1-\rho}dz=\text{ etc.}$$

87. 5. *Să se calculeze integrala*

$$I=\iint\limits_{(S)}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy,$$

dealungul unei sfere cu centrul în origine şi de rază 1.

Conform formulei lui Ostrogradschi, integrala se mai poate scrie sub forma

$$I=2\iiint_{(V)}(x+y+z)\,dxdydz,$$

referitoare la punctele interioare sferei date. Trecând la coordonate polare (§ 85, pct 3), avem

$$I=2\iiint_{(V)}(\rho\sin\theta\cos\varphi+\rho\sin\theta\sin\varphi+\rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta\,d\rho d\theta d\varphi=$$

$$=2\int_0^1\rho^3 d\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\pi}(\sin\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta)\,d\varphi=2\pi.$$

CAPITOLUL XII

APLICAŢIILE GEOMETRICE, MECANICE ŞI FIZICE ALE CALCULULUI INTEGRAL

§ 88. Calculul ariei suprafeţelor plane

Formulele care ne dau posibilitatea să calculăm o suprafaţă plană sunt de mai multe feluri, după natura suprafeţei pe care vrem să o calculăm şi după modul de reprezentare al funcţiei care reprezintă curba ce limitează suprafaţa.

1. Definiţia integralei definite (§ 76, pct. 2) ne spune că dacă ni se dă o funcţie: $y=f(x)$ astfel ca o paralelă la axa Oy să întâlnească curba reprezentativă într'un singur punct, atunci (fig. 149) aria suprafeţei mixtilinie $ABB'A'$ este dată de integrala

$$A_{ABB'A'}=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{I}$$

Când se calculează aria unei asemenea suprafeţe, se va face totdeauna graficul curbei. Este bine să avem această precauţie, deoarece în intervalul (a, b) curba poate avea forma din fig. 150 când aria căutată se compune din trei părţi, una din ele, anume S_{CED}, apare în calcule negativă deoarece y^{ul} arcului CED este negativ. In acest caz, aria căutată va fi egală cu

$$A_{AEBB'A'}=\int_a^c y\,dx-\int_c^d y\,dx+\int_d^b y\,dx. \tag{I'}$$

Dacă arcul de curbă AB (fig. 149) este reprezentat parametric prin ecuaţiile

$$x=f(t),\quad y=g(t),$$

aria suprafeței mixtilinie $ABB'A'$ este dată tot de formula (I), care ia forma

$$A_{ABB'A'} = \int_{t_0}^{t_1} y\,dx = \int_{t_0}^{t_1} g(t)\,f'(t)\,dt, \qquad \text{(II)}$$

unde t_0 și t_1 sunt valorile parametrului corespunzătoare punctelor A și B.

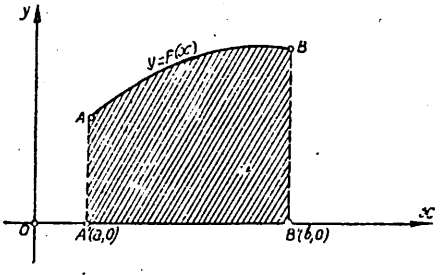


Fig. 149

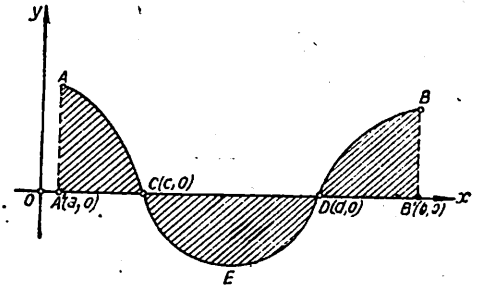


Fig. 150

Aceeași observare ca la reprezentarea carteziană.

2. Dacă un arc de curbă este reprezentat polar prin ecuația: $\rho = f(\theta)$, (fig. 151), atunci aria sectorului mixtiliniu OAB definit prin două valori ale unghiului polar este dată de formula

$$A_{OAB} = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} f^2(\theta)\,d\theta. \qquad \text{(III)}$$

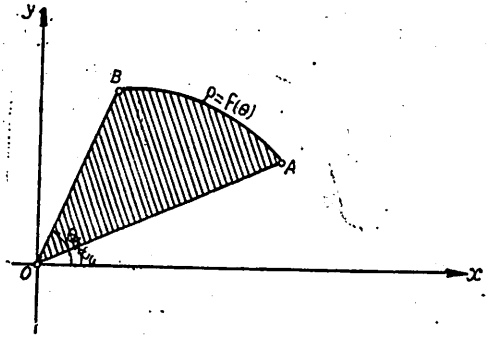


Fig. 151

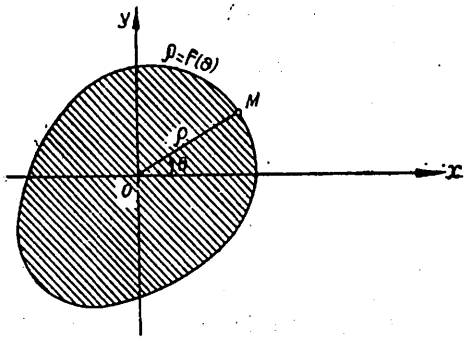


Fig. 152

În particular, dacă curba este închisă (fig. 152) și conține originea, atunci aria mărginită de curbă este

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta. \qquad \text{(IV)}$$

3. In general, dacă avem de calculat aria unei suprafeţe, închisă de o curbă dată (C), folosim formula

$$A=\frac{1}{2}\int_{c}(xdy-ydx), \tag{V}$$

integrala fiind curbilinie şi este luată dealungul curbei (C). Această formulă este identică cu

$$A=\iint_{(D)}dxdy=\iint_{(D)}\rho d\rho d\theta, \tag{VI}$$

(D) fiind domeniul mărginit de curba (C), în baza formulei (I), § 87.

88. 1. *Să se calculeze suprafaţa elipsei.*

Soluţia I. Plecăm dela ecuaţia curbei în coordonate carteziene

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

de unde scoatem

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

ceeace spune că aria unei sfert de curbă este dată de (f. 39)

$$\frac{b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\left|\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}\right|_{0}^{a}=\frac{1}{4}ab\pi.$$

şi aria elipsei în întregime va fi: πab. In particular, dacă $a=b$ găsim aria cercului.

Soluţia II. Se poate ajunge la acelaşi rezultat plecând dela reprezentarea parametrică a elipsei: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. Avem, în acest caz, pentru un sfert de elipsă

$$A=ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin^2 t)\,dt=\frac{1}{4}\pi ab.$$

Soluţia III. Prin integrale curbilinii, folosind pe (V) şi reprezentarea parametrică; avem pentru aria curbei în întregime

$$A=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t+b\sin t\cdot a\sin t)\,dt=\pi ab.$$

88. 2. *Să se găsească suprafaţa unui sector de elipsă.*

Pornim dela reprezentarea parametrică şi ne definim pe curbă două puncte M_1 şi M_2 corespunzătoare parametrilor t_1 şi t_2. Folosind calculul dela problema precedentă, de exemplu dela soluţia III, avem

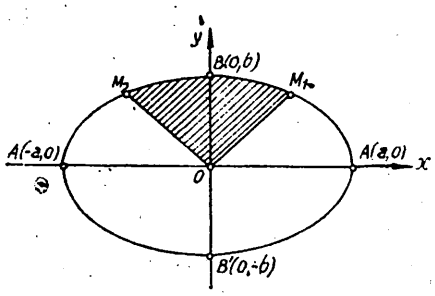


Fig. 153

$$A_{M_1OM_2} = \frac{1}{2} ab \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{1}{2} ab\,(t_2 - t_1).$$

88. 3. *Să se găsească aria cuprinsă între o buclă a cicloidei şi axa Ox.*

Se ştie că cicloida are ecuaţiile parametrice (prob. 58. 8)

$$x = a\,(t - \sin t), \quad y = a\,(1 - \cos t),$$

şi are forma din fig. 81. Punctul O corespunde la valoarea $t=0$, iar R la $t=2\pi$, încât suprafaţa căutată are drept valoare

$$A = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt = a^2 \left| t - 2\sin t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right|^{2\pi} = 3a^2\pi.$$

88. 4. *Să se găsească aria lemniscatei* (prob. 58. 7, fig. 80).

Ecuaţia lemniscatei în coordonate polare este:

$$\rho^2 = 2c^2 \cos 2\theta.$$

Deoarece tangentele în origine sunt cele două bisectoare, arcul ACO este descris când facem pe θ să varieze dela 0 la $\frac{1}{4}\pi$. Deci, aria unui sfert din lemniscată are valoare

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} c^2 \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} c^2,$$

iar toată lemniscata va avea aria $2c^2$.

88. 5. *Să se găsească suprafaţa mărginită între cisoidă şi asimptota sa* (pr. 58. 4, fig. 154).

Cisoida are ecuaţia

$$y^2(a - x) = x^3$$

care, rezolvată în raport cu y, ne dă pentru ramura superioară

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{a-x}}.$$

Aria mărginită la ordonata punctului M de abscisă x și de axa Ox este

$$A=\int_0^x \left(\frac{x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}} x\,dx,$$

care se integrează punând: $x=a\sin^2 t$. Avem în baza lui (f. 45) și (f. 12)

$$A=2a^2\left(-\frac{1}{4}\cos t\sin^3 t-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{16}\sin 2t+\frac{3}{8}t\right).$$

Cum ne interesează aria mărginită de curbă și asimptota sa, va trebui să luăm dublul acestei expresii când x tinde către a, adică t către $\frac{1}{2}\pi$. Obținem:

$$A=\frac{3}{4}\pi a^2.$$

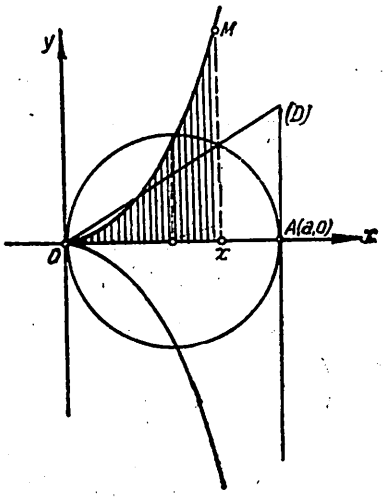


Fig. 154

88. 6. *Se cere să se calculeze suprafața buclei strofoidei și apoi suprafața mărginită de curbă și asimptota sa.*

Strofoida are drept ecuație

$$x(x^2+y^2)+a(x^2-y^2)=0.$$

care se poate explicita ușor. Ea are forma din fig. 78. Aria mărginită de curbă, axa Ox și ordonata punctului de abscisă x este

$$A=\int_0^x x\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}} dx,$$

care se calculează făcând: $x=a\cos 2t$. Avem:

$$A=-2a^2\int_{\frac{1}{4}\pi}^{t}\cos 2t\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}}\sin 2t\,dt=-a^2\left|\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t+t\right|_{\frac{1}{4}\pi}^{t}=$$

$$=a^2\left(1+\frac{1}{4}\pi-\sin 2t-\frac{1}{4}\sin 4t-t\right).$$

1° Aria buclei se găsește făcând $x=-a$, adică $t=\frac{1}{2}\pi$; și se găsește: $A_1=a^2\left(2+\frac{1}{2}\pi\right)$. 2° Aria mărginită de curbă și de asimptotă se găsește făcând $x=a$, adică $t=0$, și are drept valoare: $A_2=a^2\left(2+\frac{1}{2}\pi\right)$.

88. 7. *Se se calculeze aria mărginită între elipsa*

$$\frac{x^2}{28}+\frac{3y^2}{28}-1=0,$$

și dreapta de ecuație: $5x+3y-14=0$.

Fie P și Q punctele de intersecție dintre dreaptă și elipsă (fig. 155). Vom calcula aria sectorului POQ din care vom scădea aria triunghiului POQ. Pentru aceasta trebue mai întâi calculate coordonatele punctelor P și Q. Eliminăm de exemplu pe y între cele două ecuații și ecuația care ne dă abscisele va fi:

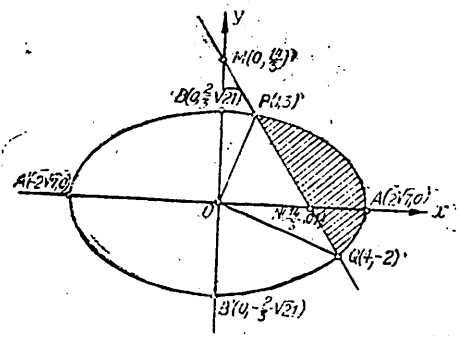


Fig. 155

$$3x^2+(14-5x)^2-84=0$$

cu soluțiile 1 și 4. Incât $P(1, 3)$; $Q(4, -2)$. Aria sectorului de elipsă este $S'=\frac{1}{2}ab(t''-t')$ (prob. 88,2), elipsa fiind reprezentată parametric. Reprezentarea este

$$x=\sqrt{28}\cos t,\quad y=\sqrt{\frac{28}{3}}\sin t.$$

Pentru a găsi pe t' va trebui să rezolvăm sistemul

$$1=\sqrt{28}\cos t,\quad 3=\sqrt{\frac{28}{3}}\sin t,$$

care are drept soluție în grade $t'=79°6'24''$, iar în radiani $t'=1{,}38068$. La fel se găsește $t''=-0{,}71374$, încât

$$A'=\frac{14}{\sqrt{3}}2{,}09442=16{,}929.$$

Triunghiul POQ îl despărțim în două tiunghiuri PON și NOQ prin axa Ox (fig. 155). Aceste două triunghiuri au aceeași bază pe $ON=\frac{14}{5}$, iar ca înălțimi ordonatele punctelor P și Q. Aria triunghiului POQ este deci: $A''=\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{5}(3+2)=7$. Aria căutată este: $A=A'-A''=9{,}929$.

88, 8. *Să se găsească aria mărginită de curbele*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0\quad\text{și}\quad y^2=2px.$$

Din (fig. 156) se constată că cele două curbe se taie în două puncte simetrice față de Ox și având această dreaptă ca axă de simetrie. Dacă notăm

cu $M(m, n)$ coordonatele punctului de deasupra axei Ox, care se capătă rezolvând sistemul format de ecuaţiile celor două curbe:

$$A = ab\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{m}{a}\right) + \frac{1}{3}mn,$$

ţinând seamă că: $n = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-m^2} = \sqrt{2pm}$.

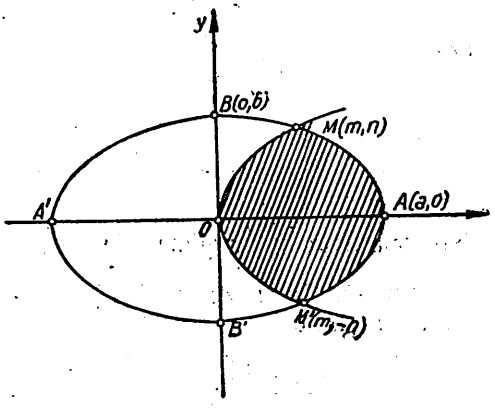


Fig. 156

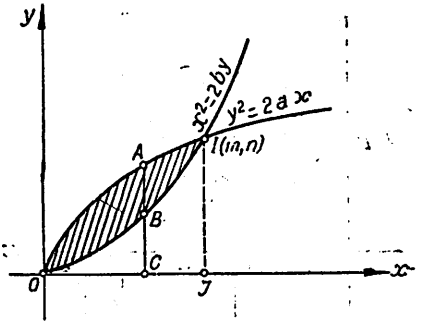


Fig. 157

88. 9. *Să se găsească aria suprafeţei cuprinsă între parabolele:* $y^2=2ax$ şi $x^2=2by$.

Aria căutată se va exprima ca diferenţa ariilor $OAIJ$ şi $OBIJ$ (fig. 157). Deoarece $\overline{AC} = \sqrt{2a}\,x^{\frac{1}{2}}$, rezultă

$$A_{OAIJ} = \int_0^m \sqrt{2a}\,x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{2a}m^{\frac{3}{2}},$$

şi cum: $BC = \frac{x^2}{2b}$ rezultă

$$A_{OBIJ} = \int_0^m \frac{x^2}{2b}\,dx = \frac{m^3}{6b}$$

încât aria căutată are drept valoare: $\frac{2}{3}\sqrt{2a}m^{3/2} - \frac{m^3}{6b}$ unde, după cum se vede în figură, m este abscisa lui I. Din ecuaţiile celer două curbe rezultă $m^3 = 8ab^2$. Aria cerută are valoarea $\frac{4}{3}ab$.

88. 10. *Să se găsească aria suprafeţei mărginite de curba din* fig. 85.

Vom calcula un sfert al ariei, adică porţiunea OBA. Din studiul făcut cu ocazia rezolvării problemei 58. 12 se vede că ramura OB corespunde valorilor

lui t cuprinse între 0 și α, iar ramura BA valorilor cuprinse între α și $\frac{1}{2}\pi$. Avem din figură,

$$A_{OBA}=A_{OBC}-A_{BAC}=\int_0^{\alpha} ydx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} ydx=\int_0^{\alpha} ydx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} ydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ydx.$$

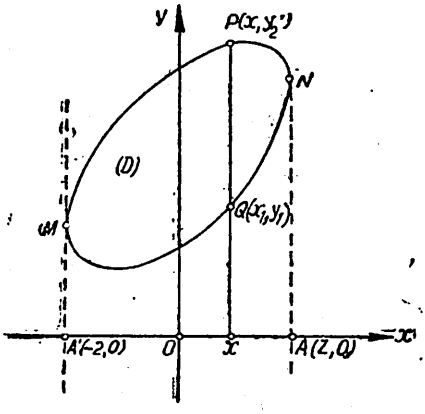


Fig. 158

Dar,

$x=a(1+\cos^2 t)\sin t$, $y=a\sin^2 t\cos t$;

rezultă

$$A_{OBA}=$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t(3\cos^2 t-1)\,dt=\frac{\pi a^2}{32},$$

adică suprafața în întregime este: $\frac{1}{8}\pi a^2$

88. 11. *Să se găsească aria mărginită de curba*

$$(y-x-3)^2=4-x^2$$

Curba este o elipsă care are forma din fig. 158. Aria va fi egală cu

$$A=\iint_{(D)}dx\,dy=\int_{-2}^{2}dx\int_{y_1}^{y_2}dy=\int_{-2}^{2}(y_2-y_1)dx=2\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=4\pi.$$

§ 89. Lungimi de arce

1. In plan, deoarece elementul de arc este (§ 59, pct,1)

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2},$$

lungimea unui arc de curbă între două puncte P, Q va fi

$$L=\int_P^Q\sqrt{dx^2+dy^2}, \qquad (I)$$

radicalul având sensul aritmetic (§ 9, pct. 1) și sensul de parcurgere dela P la Q este în sensul pozitiv al variabilei pe care o alegem pentru integrat. Această formulă ia diferite forme după modul de reprezentare al curbei.

a) Dacă curba este dată sub forma: $y=f(x)$, atunci

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y_x'^2}\,dx=\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{1+x_y'^2}\,dy, \qquad (II)$$

(x_1, y_1), (x_2, y_2) fiind coordonatele punctelor P, Q.

b) Dacă curba este reprezentată parametric, $x=f(t)$, $y=g(t)$,

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,dt, \tag{III}$$

t_1 şi t_2 fiind valorile parametrului t corespunzătoare punctelor P şi Q.

c) Dacă curba este reprezentată în coordonate polare: $\rho=f(\theta)$,

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta, \tag{IV}$$

θ_1 şi θ_2 fiind valorile unghiului polar θ corespunzătoare punctelor P şi Q.

2. In spaţiu, lungimea unui arc de curbă strâmbă PQ este dată de

$$L=\int_{P}^{Q}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}, \tag{V}$$

cu aceleaşi convenţii ca în plan. In general, în spaţiu o curbă strâmbă este dată sub forma parametrică: $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$; atunci

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)+h'^2(t)}\,dt, \tag{VI}$$

t_1 şi t_2 fiind valorile parametrului t corespunzătoare punctelor P şi Q.

3. Formulele (I) şi (V) se pot scrie sub formă de integrală curbilinie dealungul arcului a cărui lungime o căutăm

$$L=\int_{PQ} ds. \tag{VII}$$

89. 1. *Arcul de parabolă.*

Deoarece ecuaţia curbei este: $y^2=2px$, arcul de parabolă dela vârf la un punct oarecare al curbei, este

$$L=\int_0^y\sqrt{1+x'^2_y}\,dy=\frac{1}{p}\int_0^y\sqrt{y^2+p^2}\,dy=\frac{1}{p}\left|\frac{1}{2}y\sqrt{y^2+p^2}+\right.$$

$$+\left.\frac{1}{2}p^2\ln\left(y+\sqrt{y^2+p^2}\right)\right|_0^y=\frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2}+\frac{1}{2}p^2\ln\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}.$$

Pentru calculul integralei se întrebuinţează (f. 38).

89. 2. *Să se găsească arcul cicloidei.*

Avem (prob. 58.).

$$L=a\int_{t'}^{t''}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=4a\left(\cos\frac{1}{2}t'-\cos\frac{1}{2}t''\right),$$

Dacă $t'=0$ şi $t''=2\pi$, găsim: $L=8a$,

89. 3. *Să se găsească arcul unei epicicloide cuprins între punctele corespunzătoare valorilor parametrului dela 0 la* $\frac{2r\pi}{R}$.

Folosind ecuațiile unei epicicloide, date la prob. 58. 9, avem

$$dx=(R+r)\ (-\sin t+\sin\frac{R+r}{r}t)\,dt,\quad dy=(R+r)\ (\cos t-\cos\frac{R+r}{r}t)\,dt.$$

încât

$$ds^2=(R+r)^2\left[2-2\left(\sin t\,\sin\frac{R+r}{r}t+\cos t\,\cos\frac{R+r}{r}t\right)\right]dt^2=$$

$$=4(R+r)^2\sin^2\frac{Rt}{2r}dt^2,$$

și deci:

$$L=2(R+r)\int_0^{\frac{2r\pi}{R}}\sin\frac{Rt}{2r}dt=\frac{8r(R+r)}{R}.$$

89. 4. *Arcul astroidei.*

Ecuațiile parametrice ale astroidei sunt

$$x=R\cos^3 t,\quad y=R\sin^3 t,$$

și ea are forma din fig. 58. 15. Avem

$$L=\int_{t'}^{t''}\sqrt{(-3R\cos^2 t\sin t)^2+(3R\sin^2 t\cos t)^2}\,dt=$$

$$=-3R\int_{t'}^{t''}\cos t\,d(\cos t)=-\frac{3}{2}R\,|\cos^2 t\,|_{t'}^{t''}$$

Dacă vrem să calculăm lungimea totală, calculăm mai întâi arcul AB, ținând seamă că pentru A, $t'=0$, iar pentru B, $t''=\frac{1}{2}\pi$. Avem: arc $AB=-\frac{3}{2}R(0-1)=\frac{3}{2}R$, deci lungimea totală este $6R$.

89. 5. *Arcul cardioidei.*

Ecuația în coordonate polare a cardioidei este (prob. 58. 10):

$$\rho=4R\sin^2\frac{1}{2}\theta.$$

Deci

$$L=\int_{\theta'}^{\theta''}\sqrt{16R^2\sin^4\frac{1}{2}\theta+16R^2\sin^2\frac{1}{2}\theta\cos^2\frac{1}{2}\theta}\,d\theta=-8R\left|\cos\frac{1}{2}\theta\right|_{\theta'}^{\theta''}$$

Lungimea totală se găsește luând $\theta'=0$ și $\theta''=2\pi$; și anume $16R$.

89. 6. *Să se calculeze lungimea curbei.*

$$x=a(1+\cos^2 t)\sin t,\quad y=a\sin^2 t\cos t$$

Curba este studiată la prob. 58. 12 şi are forma din fig. 85. Pentru elementul de arc avem

$$ds^2=dx^2+dy^2=a^2(3\cos^2 t-1)^2dt^2.$$

Dacă punem, cum am făcut în problemă citată, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, atunci

$$ds=\begin{cases} a(3\cos^2 t-1)\,dt & \text{dacă } 0\leqslant t\leqslant\alpha,\\ a(1-3\cos^2 t)\,dt & \text{dacă } \alpha\leqslant\frac{1}{2}\pi.\end{cases}$$

Aceasta înseamnă că dacă notăm cu L lungimea curbei

$$\frac{1}{4}L=a\int_0^{\alpha}(3\cos^2 t-1)\,dt-a\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2 t-1)dt.$$

Ţinând seama [că $\sin 2\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{2}$ avem:

$$L=4a\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}-\frac{1}{4}\pi\right)=4a\left(\frac{1}{4}\pi+\sqrt{2}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

89. 7. *Să se calculeze arcul elicei circulare.*

Ecuaţiile parametrice ale acestei curbe strâmbe sunt: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. $z=k\theta$, r şi k fiind constante (prob. 62.1). Pentru arc avem

$$L=\int_{\theta'}^{\theta''}\sqrt{(-r\sin\theta)^2+(r\cos\theta)^2+k^2}\,d\theta=\sqrt{r^2+k^2}\int_{\theta'}^{\theta''}d\theta=\sqrt{r^2+k^2}(\theta''-\theta').$$

Lungimea pasului elicei, adică arcul când θ variază dela 0 la 2π, este $2\pi\sqrt{r^2+k^2}$.

89. 8. *Să se găsească lungimea arcului curbei strâmbe definit prin intersecţia suprafeţelor: $z=x^2$, $y^2=2xz$.*

Prima suprafaţă este un cilindru parabolic având generatoarele paralele cu Oy, iar a doua un con cu vârful în origine şi trecând prin axa Oz ($x=y=0$) şi axa Ox ($y=z=0$). Pentru arc, luăm parametru pe x şi avem: $\sqrt{2}L=\int_{x'}^{x''}\sqrt{8x^2+9x+2}\,dx$, care calculată după (f. 38) dă

$$256L=\left|4\sqrt{2}(16x+9)\sqrt{8x^2+9x+2}-17\ln(16x+9+4\sqrt{2}\sqrt{8x^2+9x+2})\right|_{x'}^{x''}.$$

89. 9. *Să se găsească lungimea curbei: $x=t\cos 2t$, $y=t\sin 2t$, $3z=4t^{\frac{3}{2}}$ cuprinsă între punctele definite de valorile $t=0$ şi $t=1$.*

Avem

$$L=\int_0^1(1+2t)\,dt)=\left|t+t^2\right|_0^1=2.$$

§ 90. Volumul și suprafața corpurilor de rotație

Fiind dată o curbă plană, reprezentată într'unul din modurile cunoscute (cartezian, parametric sau polar), avem următoarele formule:

1°. Dacă curba se rotește în jurul axei Ox, volumul corpului obținu, mărginit la planele $x=a$ și $x=b$, este

$$V=\pi\int_a^b y^2dx, \tag{I}$$

iar suprafața

$$A=2\pi\int_a^b yds. \tag{II}$$

2°. Dacă curba se rotește în jurul axei Oy, volumul corpului obținut mărginit la planele $y=c$, $y=d$, este

$$V=\pi\int_c^d x^2dy, \tag{III}$$

iar suprafața

$$A=2\pi\int_c^d xds. \tag{IV}$$

90. 1. *Volumul sferei.*

Vom roti cercul: $x^2+y^2-r^2=0$ în jurul unui diametru, de exemplu în jurul axei Ox. Avem

$$V=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

90. 2. *Să se găsească volumul și aria unui paraboloid de rotație.*

Paraboloidul de rotație este născut din rotația parabolei: $y^2=2px$ în jurul axei transverse. Corpul îl vom presupune mărginit la vârf și la planul, de abscisă $x=a$. Avem

$$V=\pi\int_0^a 2pxdx=p\pi a^2.$$

$$A=2\pi\int_0^a\sqrt{2px}\sqrt{1+\frac{p}{2x}}dx=\frac{4}{3}\pi\sqrt{2p}\left[\left(a+\frac{1}{2}p\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{2}p\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Observație. Dacă ecuația este scrisă sub forma

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0, \qquad \text{(II)}$$

pentru a fi omogenă este necesar ca $P(x, y)$, $Q(x, y)$ să fie omogene și de același grad.

2. Tot în cazul ecuațiilor diferențiale omogene intră și ecuațiile diferențiale de forma

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right). \qquad \text{(III)}$$

$a, b, \ldots, c'$ fiind constante. Pentru a integra o astfel de ecuație avem două ipoteze: a) $ab'-a'b\neq 0$ atunci prin schimbarea $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$, unde α și β sunt dați de sistemul

$$a\alpha+b\beta+c=0, \quad a'\alpha+b'\beta+c'=0, \qquad \text{(IV)}$$

se ajunge la o ecuație omogenă: b) $ab'-a'b=0$; punem: $ax+by=u$, de unde-l scoatem pe y; în noua ecuație diferențială variabilele se separă. În adevăr ecuația se scrie în acest caz

$$\frac{1}{b}\frac{du}{dx}-\frac{a}{b}=f\left(\frac{bu+bc}{b'u+bc'}\right)=g(u); \quad \frac{du}{bg(u)+a}=dx,$$

de unde scoatem pe x ca funcție de u și deci și pe y prin relația: $ax+by=u$.

3. Uneori ecuații neomogene devin omogene prin substituția: $x=u^{\lambda}$, $y=v^{\mu}$, unde λ și μ sunt constante care urmează să fie determinate.

97. 1. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$2xy\,dx+(y^2-x^2)\,dy=0.$$

Punând $y=tx$, avem

$$2tdx+(t^2-1)(tdx+xdt)=0: \frac{dx}{x}+\frac{2tdt}{t^2+1}-\frac{1}{t}dt=0,$$

$$\ln x+\ln(t^2+1)-\ln t=\ln C; \quad x(t^2+1)=Ct; \quad x^2+y^2=Cy.$$

97. 2. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$(x+y+1)\,dx+(2x+2y-1)\,dy=0.$$

Ecuația este de tipul (III). Facem substituția: $x+y=u$. Ecuația devine

$$(u+1)\,dx+(2u-1)(du-dx)=0;$$

$$x-\int\frac{2u-1}{u-2}\,du=C; \quad x-2u-3\ln(u-2)=C,$$

adică soluția generală este

$$3\ln C(x+y-2)=-x-2y+4.$$

97. 3. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$(x+1)\,dx+(y-1)\,dy=a[(x+1)\,dy-(y-1)\,dx],$$

Dacă punem: $x+1=u$, $y-1=v$ ecuația se transformă în

$$udu+vdv=a(udv-vdu),$$

96. 5. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y'=(-x+y+1)^2.$$

Punem: $-x+y+1=u$; derivând, obținem: $1+y'=u'$ și ecuația se transformă în

$$u'+1=u^2, \quad u'=u^2-1;$$

$$\frac{du}{u^2-1}=dx; \int\frac{du}{u^2-1}=x+C; \frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}=x+C,$$

și în definitiv, punând constanta sub formă de logaritm, și revenind la y avem

$$y=\frac{2Ce^{2x}}{1-Ce^{2x}}+x.$$

96. 6. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$yy''+2y'^2=\frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Scriem ecuația dată sub forma

$$(y^2y')'=\frac{y^2y'}{\sqrt{1+x^2}},$$

și punem pentru mai departe: $y^2y'=u$. Ecuația se transformă în

$$\frac{u'}{u}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad u=C(x+\sqrt{x^2+1}),$$

încât

$$y^2y'=C(x+\sqrt{x^2+1}); \quad y^3=C\int(x+\sqrt{x^2+1})\,dx+C'.$$

Integrând prin părți obținem

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\int\frac{x\cdot x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=x\sqrt{x^2+1}-\int\sqrt{x^2+1}\,dx+\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

deci integrala generală este

$$y^3=C[x^2+x\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})]+C'.$$

§ 97. Ecuații omogene și reductibile la ele

1. Prin ecuații omogene înțelegem ecuațiile diferențiale de forma*)

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right),} \qquad (1)$$

cari se reduc la ecuații cu variabile separabile prin schimbarea: $y=tx$, etc,

*) Vom întrebuința în mod indiferent simbolul $\frac{d^ny}{dx^n}$ sau $y^{(n)}$.

sau încă

$$y=\left(\frac{n-1}{n}x+C\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

96. 3. *Să se integreze ecuația diferențială.*

$$\sqrt{x(1-x)}\,dy=\sqrt{y(1-y)}\,dx.$$

Scriind sub forma

$$\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}=\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}},$$

vedem că variabilele se separă. Pentru a integra, scriem

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}=2\int\frac{d\sqrt{y}}{\sqrt{1-y}}=2\arcsin\sqrt{y},$$

încât vom avea

$$\arcsin\sqrt{y}=\arcsin\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{C}.$$

Să transformăm acest rezultat. Punem: $\arcsin\sqrt{y}=u$, $\arcsin\sqrt{x}=v$, $\arcsin\sqrt{C}=a$; și relația precedentă devine: $u=v+a$, unde, aplicând sinusul, rezultă

$$y=\sqrt{x(1-C)}+\sqrt{C(1-x)};\quad y=\left[\sqrt{x(1-C)}+\sqrt{C(1-x)}\right]^2$$

96. 4. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x), \tag{1}$$

găsindu-se în special soluția care pentru $t=0$, *se reduce la* $x=0$.

Scriem ecuația sub forma

$$kdt=\frac{dx}{a-x},$$

de unde

$$kt=-\ln(a-x)+C.$$

Soluția particulară cerută corespunde la: $C=\ln a$. Ea se scrie

$$kt=\ln\frac{a}{a-x},\quad x=a(1-e^{-kt}).$$

Observație. Această ecuație diferențială intervine în Chimie. când se studiază timpu necesar unei transformări sau unei reacții. Cazul considerat corespunde următoarei probleme. Se consideră o substanță pentru care unitatea de volum contine la momentul inițial a molecule; presupunem că x din aceste molecule sunt transformate după un timp t. Dacă Δx este creșterea lui x în timpul Δt, experientele arată că Δx este proporțional cu Δt și deasemenea cu $a-x$, adică numărul moleculelor rămase.

Aceasta însemnează că

$$\Delta x=k(a-x)\,\Delta t,$$

relație care la limită duce la ecuația (1).

Ultima formulă se poate scrie sub forma

$$y''^{-\frac{2}{3}} = \frac{Gx^2+2Hx+K}{(GK-H^2)^{\frac{2}{3}}},$$

formulă care, derivată de trei ori, arată că

$$(y''^{-\frac{2}{3}})''' = 0,$$

care este ecuația căutată. Calculând din aproape în aproape, găsim

$$9y''^2y^{V} - 45y''y'''y^{IV} + 40y'''^3 = 0$$

§ 96. Ecuații cu variabilele separabile

Se numesc ecuații diferențiale în care variabilele se separă, ecuații de forma

$$f(x)f_1(y)\,dx + g(x)g_1(y)\,dy = 0. \tag{I}$$

fiecare funcție care intră în compunerea ei depinzând numai de variabila indicată. Soluția generală a unei asemenea ecuații este dată de formula

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx + \frac{g_1(y)}{f_1(y)}\,dy = C, \tag{II}$$

unde C este o constantă arbitrară.

96. 1. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$\frac{x\,dx}{1+y} - \frac{y\,dy}{1+x} = 0,$$

și să se găsească integrala care, pentru $x=0$, *se reduce la* $y=1$.

Scriem ecuația sub forma

$$x(1+x)\,dx - y(1+y)\,dy = 0,$$

care dă soluția generală

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) - \left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3\right) = C.$$

Făcând aci $x=0$, $y=1$, soluția particulară cerută corespunde la $C = -\frac{5}{6}$, adică este

$$2(y^3-x^3) + 3(y^2-x^2) + 5 = 0.$$

96. 2. *Să se integreze ecuația diferențială* $y' = \sqrt[n]{y}$.

Scriem

$$y^{-\frac{1}{n}}\,dy = dx; \quad \frac{n}{n-1}y^{\frac{n-1}{n}} = x + C,$$

95. 2. *Să se găsească ecuația diferențială la care satisfac curbele*

$$y=e^x(Ax+B), \tag{1}$$

oricare ar fi constantele A și B.

Cum curbele reprezentate de ecuația (1) conțin doi parametri, va trebui să-i eliminăm între ecuația (1) și primele două derivate ale ei

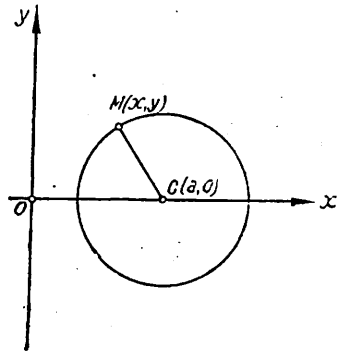


Fig. 176

$$y'=e^x[Ax+(A+B)],$$

$$y''=e^x[Ax+(2A+B)],$$

Scriind aceste ecuații sub forma unui sistem liniar de trei ecuații cu două necunoscute A, B, rezultatul eliminării lor este (§ 28, pct, 3)

$$\begin{vmatrix} x & 1 & e^{-x}y \\ x+1 & 1 & e^{-x}y' \\ x+2 & 1 & e^{-x}y'' \end{vmatrix} = 0,$$

sau, aplicând proprietățile determinanților,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & y' \\ 2 & 1 & y'' \end{vmatrix} = 0; \quad y''-2y'+y=0.$$

95. 3. *Să se găsească ecuația diferențială a conicelor*

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Deoarece ecuația depinde de cinci parametri esențiali, ecuația diferențială la care ajungem trebue să fie de ordinul 5. Putem proceda în două feluri: derivând ecuația de cinci ori și apoi între sistemul liniar format de cele șase ecuații să eliminăm parametrii ca la problema precedentă; sau, explicitând pe y. Alegem calea a doua. Avem două cazuri, după cum C este nul sau diferit de zero.

Impărțind ecuația cu C și notând noii parametrii cu aceleași litere, avem

$$y=-(Bx+E)\pm\sqrt{(Bx+E)^2-(Ax^2+2Dx+F)}.$$

Introducând notațiile: $G=B^2-A$, $H=BE-D$, $K=E^2-F$, problema revine la a elimina parametrii B, E, G, H, K. Avem pentru funcție și primele două derivate,

$$y=-(Bx+E)\pm\sqrt{Gx^2+2Hx+K},$$

$$y'=-B\pm\frac{Gx+H}{\sqrt{Gx^2+2Hx+K}}, \quad y''=\pm\frac{GK-H^2}{(Gx^2+2Hx+K)^{\frac{3}{2}}}.$$

PARTEA A PATRA

ECUAȚII DIFERENȚIALE ȘI CU DERIVATE PARȚIALE

CAPITOLUL XIII

ECUAȚII DIFERENȚIALE

§ 95. Formarea ecuațiilor diferențiale

1. O ecuație care conține derivatele funcției necunoscute se numește *ecuație diferențială*. Ordinul derivatei celei mai înalte care intră în compunerea ecuației se numește *ordinul* ecuației. A *integra* o ecuație diferențială, înseamnă a găsi funcțiile ce o verifică. Funcția cea mai generală care verifică o ecuație diferențială de ordinul n conține n constante arbitrare independente. Ea se numește *soluția generală;* orice funcție care se deduce din soluția generală prin particularizarea constantelor se numește *soluție particulară*. Dacă există alte soluții, ele se numesc *soluții singulare*. Din soluția generală se poate deduce prin particularizarea constantelor, o funcție care, împreună cu primele ei $n-1$ derivate, să ia valori date dinainte; se zice că această funcție este o soluție determinată prin *condiții inițiale*.

2. Fiind dată o funcție y de variabila x, definită printr'o formulă care conține n constante arbitrare, se poate deduce o ecuație diferențială de ordinul n la care să satisfacă y, prin eliminarea celor n constante între funcție și primele ei n derivate.

95. 1. *Se consideră familia de cercuri*

$$(x-a)^2+y^2=1,$$

unde a este un parametru. Să se găsească o ecuație diferențială care să caracterizeze aceste curbe. Ce exprimă geometric această ecuație?

Cum familia conține un singur parametru, va trebui să-l eliminăm între ecuația dată și ecuația care se obține din ea derivând-o, adică

$$x-a+yy'=0.$$

Se obține

$$y^2y'^2+y^2=1. \tag{1}$$

Familia de cercuri se bucură de proprietatea de a avea toate aceeași rază egală cu unitatea. In cazul nostru (fig. 176), raza reprezintă lungimea normalei într'un punct oarecare al curbei. In general (§ 58. IX), mărimea normalei mărginită la Ox este (fig. 58. 3):

$$M_0N_0^2=M'_0N_0^2+M_0M'^2_0=y_0^2y'^2_0+y^2,$$

și ecuația (1) nu spune altceva decât că această mărime este egală cu unitatea.

94. 7. *Să se găsească presiunea totală exercitată asupra unei jumătăți de elipse afundată într'un lichid în așa fel, încât una din axe să fie situată pe suprafața lichidului.*

Să presupunem că axa care este situată pe suprafața lichidului este $2a$. Alegând axele obișnuit, numai că pe axa Oy luăm sensul pozitiv în jos, $h=y$ iar: $d\sigma=2\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\,dy$ ($d\sigma$ reprezentând suprafața elementară mărginită între două paralele la Oy). Deci

$$P=w\int_a^b 2\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\cdot y\,dy=-w\frac{a}{b}\int_a^h (b^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\,d(b^2-y^2)=\frac{2}{3}ab^2w.$$

94. 8. *Să se găsească profunzimea centrului de presiune al elipsei din problema precedentă.*

Avem

$$\lambda P=w\int_a^b 2\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\cdot y^2dy.$$

Facem schimbarea: $y=b\sin\theta$, atunci

$$\lambda P=2\frac{a}{b}w\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\cos\theta\, b^2\sin^2\theta\, b\cos\theta d\theta=\frac{1}{2}ab^3w\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta d\theta=\frac{1}{8}ab^3w\pi,$$

și în baza lui P găsit la problema precedentă, rezultă, $\lambda=\frac{3}{16}\pi b$. Centrul de presiune, pe baza simetriei, se va găsi și pe Oy.

Deci, atracția este o forță dirijată pe Oz și are drept valoare: $Z=A$. Pentru a treia integrală triplă, limitele vor fi: r dela 0 la a, θ dela 0 la 2π și z dela b la $b+h$. Deci

$$A=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_b^{b+h}\frac{z}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dz=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\left|-(z^2+r^2)^{-\frac{1}{2}}\right|_b^{b+h}=$$

$$=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\left[\frac{rdr}{(r^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{rdr}{[r^2+(b+h)^2]^{\frac{1}{2}}}\right]=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\left[\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+(b+h)^2}+h\right]=$$

$$=2\pi\rho\left[\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+(b+h)^2}+h\right].$$

94. 5. *O placă în forma unui segment parabolic având baza $2b$ și înălțimea a este cufundată într'un lichid în așa fel încât baza sa să fie la suprafața lichidului și axa sa verticală. Se cere presiunea pe care o exercită lichidul asupra plăcii* (fig. 175).

Soluție directă. Conform enunțului, $\overline{AB}=2b$, $\overline{TV}=a$. Ducem două paralele cu AB, EF și E_1F_1, infinit apropiate, care ne dau elementul de suprafață: $d\sigma=\overline{EF}\cdot\overline{GG_1}=\overline{EF}\cdot dx$. Presupunând că parabola este raportată obișnuit la axe, deoarece ecuația va fi de forma: $y^2=2px$, rezultă că: $\overline{EG}^2=2p\overline{VG}$ și: $\overline{AT}^2=2p\overline{VT}$ care, prin împărțire dau: $\overline{EG}^2=\frac{b^2x}{a}$, deci

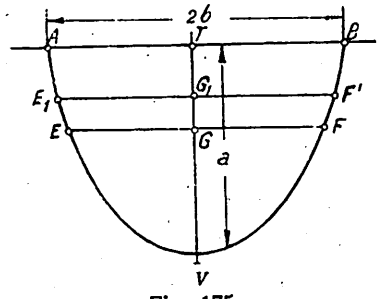


Fig. 175

$$d\sigma=\frac{2bx^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}dx.$$

Pe de altă parte $h=a-x$, încât

$$P=w\int_0^a\frac{2b}{a^{\frac{1}{2}}}(a-x)\,x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{8}{15}wba^2.$$

94. 6. *Să se găsească centrul de presiune al parabolei dela problema precedentă.*

Avem

$$\lambda P=w\int h^2d\sigma=w\int_0^a\frac{2b}{a^{\frac{1}{2}}}(a-x)^2x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{32wba^3}{105},$$

și pe baza valorii lui P găsită la problema precedentă, urmează că profunzimea centrului de presiune este $\lambda=\frac{4}{7}a$. Pe baza simetriei, acest centru se va găsi situat pe $\overline{VT}$.

iar unghiul la centru α, *asupra unei particule unitate situată în centrul cercului* (fig. 173).

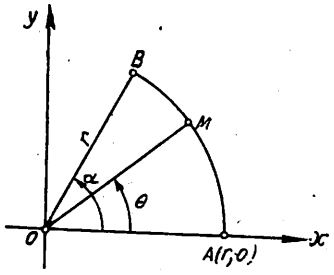


Fig. 173

Cum: $\Delta m=\rho\Delta s=\rho r\Delta\theta$, rezultă

$$X=\int_0^{\alpha}\frac{\rho r d\theta}{r^2}\cos\theta=\frac{\rho}{r}\sin\alpha,$$

$$Y=\int_0^{\alpha}\frac{\rho r d\theta}{r^2}\sin\theta=\frac{\rho}{r}(1-\cos\alpha).$$

Deoarece: $M=\int_0^{\alpha}dm=\rho r\alpha$, vom avea

$$R^2=\frac{\rho^2}{r^2}(2-2\cos\alpha)=4\frac{\rho^2}{r^2}\sin^2\frac{1}{2}\alpha;\quad R=\frac{2M}{r^2}\left|\sin\frac{1}{2}\alpha\right|,$$

iar dacă φ este unghiul pe care-l face R cu Ox, atunci

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{Y}{X}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha;\quad\varphi=\frac{1}{2}\alpha.$$

94. 4. *Să se găsească atracția unui cilindru omogen de densitate* ρ, *de înălțime* h *și având raza bazei* a, *asupra unui punct așezat pe axa unui cilindru la o distanță* b *de bază* (fig. 174).

Luăm punctul în originea axelor și axa cilindrului drept axă Oz. Folosim coordonate cilindrice; avem $dm=\rho r dr d\theta dz$, $\overline{OM}^2=x^2+y^2+z^2=r^2+z^2$, cosinusuri directoare

$$a=\frac{x}{\overline{OM}},\quad b=\frac{y}{\overline{OM}},\quad c=\frac{z}{\overline{OM}}.$$

Cele trei componente ale atracției vor fi

$$X=\iiint_{(V)}\frac{r\cos\theta}{OM^3}\rho r dr d\theta dz,$$

$$Y=\iiint_{(V)}\frac{r\sin\theta}{OM^3}\rho r dr d\theta dz,$$

$$Z=\iiint_{(V)}\frac{z}{OM^3}\rho r dr d\theta dz.$$

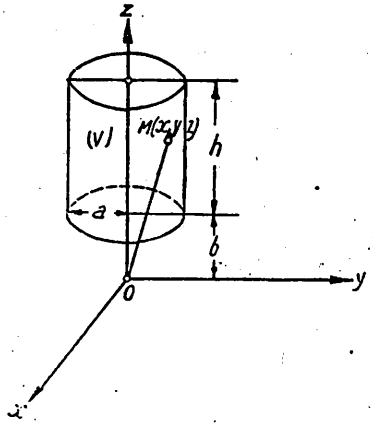


Fig. 174

Primele două integrale au în factori:

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=0,\ \int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta=0,\ \text{încât } X=Y=0.$$

distanță b pe perpendiculara ridicată pe mijlocul firului, știind că densitatea într'un punct oarecare al firului de fier este în raport direct cu distanța lui la mijlocul firului (fig. 172).

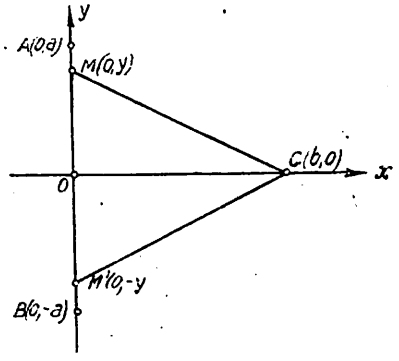


Fig. 172

Soluție directă. Elementul sumei pe care o avem de calculat este $\frac{\Delta m}{MC^2}$.

Conform enunțului problemei: $\Delta m = \rho \Delta y = kOM\Delta y = ky\Delta y$, dacă M este pe OA și $= -ky\Delta y$ dacă M este pe OB. Componenta dealungul axei Ox va fi

$$\frac{\Delta m}{MC^2} \cos MCO = b\frac{m}{MC^3},$$

încât componenta totală este

$$X = kb\int_0^a \frac{ydy}{(b^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - kb\int_{-a}^0 \frac{ydy}{(b^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 2kb\int_0^a \frac{ydy}{(b^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 2kb\left[b^{-1} - (a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}\right];$$

analog se găsește

$$Y = k\int_0^a \frac{y^2dy}{(b^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - k\int_{-a}^0 \frac{y^2dy}{(b^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Deci rezultanta este egală cu X și este calculată pe OX. Dacă ținem seamă că masa fierului este

$$M = \int_0^a dm + \int_{-a}^0 dm = k\int_0^a ydy - k\int_{-a}^0 ydy = 2k\left|\frac{1}{2}y^2\right|_0^a = ka^2$$

atunci atracția se mai poate scrie și sub forma

$$\frac{2bM}{a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{b}\right),$$

lăsând deoparte semnul lui X, care reprezintă direcția rezultantei dela C spre O.

94. 3. *Să se găsească atracția exercitată de un fir de fier uniform a cărui masă este M, în forma de arc de cerc a cărui rază este r*

94. 1. *Să se găsească atracţia unei bare metalice de lungime a şi de masă m exercitate asupra unei particule de masă unitate aşezată pe o perpendiculară ridicată la una din extremităţile barei şi la o distanţa b* (fig. 171).

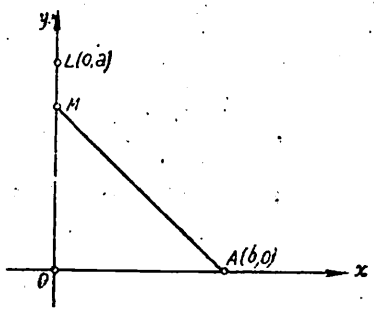


Fig. 171

Soluţie directă. Alegem bara OL ca axă Oy iar $OA=b$ ca axă Ox. Împărţim bara în n părţi, fiecare având lungimea $\frac{a}{n}\Delta y$. Atunci, $\Delta m=\rho\Delta y$ pe care o presupunem concentrată în punctul iniţial al fiecărui element. Partea principală a elementului de atracţie asupra lui A va fi

$$\frac{\rho\Delta y}{AM^2}=\frac{\rho\Delta y}{b^2+y^2},$$ (M este punctul iniţial al uneia din diviziuni)

iar componentele acestei atracţii vor fi

$$\text{pe axa } Ox \cdots \frac{\rho\Delta y}{b^2+y^2}\cos OAM=\frac{-\rho b\Delta y}{(b^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{pe axa } Oy \cdots \frac{\rho\Delta y}{b^2+y^2}\sin OAM=\frac{\rho y\Delta y}{(b^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

Componentele totale ale atracţiei vor fi (punând $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$, $y=b\operatorname{tg}\theta$),

$$X=-\rho b\int_0^a\frac{dy}{(b^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\rho}{b}\int_0^\alpha\cos\theta d\theta=-\frac{\rho}{b}\sin\alpha=-\frac{m}{ab}\sin\alpha,$$

$$Y=\rho\int_0^a\frac{ydy}{(b^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\rho}{b}\int_0^\alpha\sin\theta d\theta=\frac{\rho}{b}(1-\cos\alpha)=\frac{m}{ab}(1-\cos\alpha),$$

deoarece $a\rho=m$. Dacă notăm cu R mărimea atracţiei rezultante şi cu φ unghiul pe care-l face cu Ox, avem

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}=\frac{2m}{ab}\sin\frac{1}{2}\alpha,\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{Y}{X}=-\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=-\frac{1}{2}\alpha=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a}{b}.$$

94. 2. *Să se găsească atracţia exercitată de un fir de fier drept de lungime 2a asupra unei particule egală cu unitatea de masă situată la o*

atunci

$$I=\int_{-2\sqrt{ab}}^{2\sqrt{ab}} y^2dy \int_{x_1}^{x_2} dx=\int_{-2\sqrt{ab}}^{2\sqrt{ab}} y^2(x_2-x_1)dy=\frac{128}{15}(a+b)ab\sqrt{ab}.$$

93. 5. *Să se găsească momentul de inerție al unui tub omogen drept, având raza exterioară b, iar cea interioară a în raport cu axa sa.*

Fie h lungimea tubului. Dacă presupunem că axa tubului este Oz și folosim coordonate cilindrice, avem

$$I=\rho\iiint (x^2+y^2)\,dxdydz=\rho\int_0^{2\pi}\int_a^b\int_0^h r^3drdtdz=\frac{1}{2}\rho h\pi(b^4-a^4),$$

$$M=\rho\iiint dxdydz=\rho\int_0^{2\pi}\int_a^b\int_0^h rdrdtdz=\rho h\pi(b^2-a^2) \quad \text{deci: } I=\frac{1}{2}M(a^2+b^2).$$

§ 94. Aplicațiile calculului integral în Fizică

1. **Atracția** pe care o exercită un corp, al cărui element de masă este dm, asupra unei particule de masă unitate A, este o forță ale cărui componente au drept valori

$$X=\int\frac{adm}{r^2}, \quad Y=\int\frac{bdm}{r^2}, \quad Z=\int\frac{cdm}{r^2},$$

unde r este distanța dela punctul de concentrare al masei fiecărui element la A, iar a, b, c cosinusurile directoare ale dreptei care unește aceste două puncte. Dacă suntem în plan, $a=\cos\theta$, $b=\sin\theta$, $c=0$, θ fiind unghiul pe care-l face dreapta de mai sus cu direcția pozitivă a axei Ox.

2. **Presiunea.** Dacă considerăm o suprafață plană cufundată într'un lichid a cărui unitate de volum are greutatea w, și dacă notăm cu $d\sigma$ elementul de suprafață având profunzimea h, atunci presiunea totală a suprafeței plane considerate este dată de

$$P=w\int hd\sigma.$$

3. **Centrul de presiune.** Dacă P este dat de formula precedentă numărul λ definit prin ecuația

$$\lambda P=w\int h^2\,d\sigma.$$

dă profunzimea unui punct care se numește *centrul de presiune.*

Folosind coordonatele polare, avem

$$I=\iint r^2\cdot r\,dr\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}dt\int_0^{a(1+\cos t)}r^3dr=\frac{1}{4}a^4\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos t)^4dt=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\pi}(1+\cos t)^4dt,$$

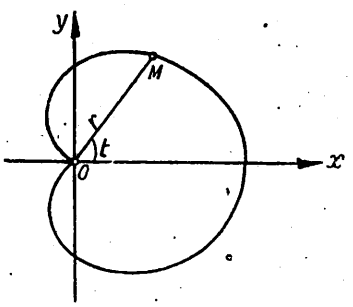


Fig. 169

despărțind integrala în două și în prima făcând $t=-u$.

Considerăm în general integrala

$$\int_0^{\pi}\cos^n t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^n t\,dt,$$

n fiind întreg. In a doua facem schimbarea: $t=\pi-u$ și avem

$$\int_0^{\pi}\cos^n t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt+(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n u\,du,$$

care ne spune că integrala este nulă de câte ori n este fără soț. Deci

$$I=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\pi}(1+6\cos^2 t+\cos^4 t)\,dt.$$

Dar: $2\cos^2 t=\cos 2t+1$ care ridicată la pătrat ne spune că: $8\cos^4 t=\cos 4t+4\cos 2t+3$, încât

$$I=\frac{1}{16}a^4\int_0^{\pi}(35+28\cos 2t+\cos 4t)\,dt=\frac{35}{16}a^4\pi.$$

Observație. Momentele calculate în această problemă, cum și în precedenta, sunt la fel cu momentele polare ale suprafețelor respective în raport cu originea.

93. 4. *Să se găsească momentul de inerție în raport cu Ox a suprafeței mărginite de parabolele:* $y^2=4ax+4a^2$, $y^2=-4bx+4b^2$ (fig. 170).

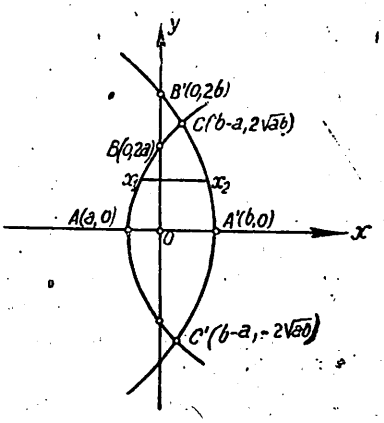


Fig. 170

In figură am presupus $b>a$, dar nu este necesar. Momentul căutat este dat de integrala dublă

$$I=\iint y^2\,dx\,dy,$$

calculată în interiorul suprafeței mărginite de cele două curbe. Rezolvând ecuațiile celor două curbe se găsește că ele se taie în punctul $C\,(b-a, 2\sqrt{ab})$ și simetricul său față de Ox. Fixând pe y și notând cu x_1 și x_2 abscisele de pe cele două curbe, adică

$$x_1=\frac{y^2-4a^2}{4a},\quad x_2=\frac{y^2-4b^2}{-4a},$$

şi deci

$$x_0=0,\quad y_0=\frac{4(h^3-k^3)}{3\pi[k^2\ln(a+h)+ah-k^2\ln k]},\quad z_0=\frac{l}{2}k\pi.$$

§ 93. Aplicaţiile calculului integral în Rezistenţa Materialelor

1. Folosind notaţiile date de paragraful precedent, fiind dată o suprafaţă plană, se numesc *momente statice* ale suprafeţei, faţă de Oy respectiv Ox, expresiile Mx_0, My_0. Analog, pentru un corp, expresiile Mx_0, My_0, Mz_0 se numesc momente statice ale corpului respectiv faţă de planele yOz, zOy, xOy. Problemele tratate la paragraful precedent sunt suficiente pentru a înţelege calculul momentelor statice.

2. Fiind dată o suprafaţă sau un corp, expresia

$$I=\int r^2dm, \tag{1}$$

unde r este distanţa punctului curent la o axă (Δ), se numeşte *momentul de inerţie* al suprafeţei, respectiv al corpului, faţă de axa (Δ). Dacă avem de a face cu o suprafaţă, integrala este dublă dealungul acestei suprafeţe şi: $dm=\rho d\sigma$ (ρ fiind densitatea în punctul curent); dacă avem de a face cu un volum, integrala este triplă şi: $dm=\rho dv$, dv fiind elementul de volum.

3. Tot expresia (I), în care r reprezintă distanţa punctului curent la un punct fix, se numeşte *moment polar* faţă de punctul fix.

93. 1. *Să se găsească momentul de inerţie în raport cu axa Oy a suprafeţei plane limitate de parabola: $y^2=2px$ şi dreapta: $y=p$.*

Deoarece distanţa dela un punct al suprafeţei la axa Oy este x, momentul de inerţie căutat va fi dat de formula

$$I=\iint\limits_{(S)}x^2dxdy=\frac{p^4}{168}.$$

93. 2. *Să se găsească momentul de inerţie în raport cu o axă perpendiculară pe planul xOy în O, a suprafeţei plane limitate de bucla curbei: $r=a\sin 2t$ situată în primul cadran.*

Folosind coordonatele polare, distanţa unui punct al suprafeţei la axă este r, iar elementul de suprafaţă: $r\,dr\,dt$. Deoarece bucla se obţine în întregime făcând pe t să varieze între 0 şi $\frac{1}{2}\pi$, vom avea

$$I=\iint r^2\cdot r\,dr\,dt=\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}dt\int\limits_0^{a\sin 2t}r^3dr=\frac{3}{64}\pi a^4.$$

93. 3. *Să se găsească momentul de inerţie al suprafeţei cardioidei: $r=a(1+\cos t)$ în raport cu o axă perpendiculară pe planul său în pol* (fig. 169).

vom avea

$$\iiint dx\,dy\,dz=\int_1^3 dz\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}d\theta=18\pi\rho,$$

$$\iiint z\,dx\,dy\,dz=\int_1^3 z\,dz\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}d\theta=36\pi\rho,\quad\text{deci:}\quad z_0=2,$$

iar în ce privește x_0 și y_0 sunt evident nuli.

92. 13. *Să se calculeze centrul de greutate al suprafeței șurub* (prob 64. 4), *ale cărei ecuații sunt*

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=kv,$$

când parametrii variază între limitele $0<u<a$, $0<v<\pi$. *Suprafața este presupusă omogenă.*

Centrul de greutate este dat prin formulele (VI) în care integralele sunt de suprafață. Vom folosi formulele dela § 86.

$$x_u=\cos v,\quad y_u=\sin v,\quad z_u=0;\quad x_v=-u\sin v,\quad y_v=u\cos v,\quad z_v=k;$$

$$E=1\quad,\quad F=0;\quad G=u^2+k^2\quad,\quad EG-F^2=u^2+k^2.$$

Avem succesiv

$$\iint_{(S)}dm=\iint_{(S)}d\sigma=\iint_{(S)}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\int_0^a\sqrt{u^2+k^2}\,du\int_0^{\pi}dv=\pi\left|\frac{1}{2}\,u\sqrt{u^2+k^2}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}k^2\ln\left(u+\sqrt{u^2+k^2}\right)\Big|_0^a=\frac{1}{2}\pi[k^2\ln(a+h)+ah-k^2\ln k],$$

unde am pus $u^2+k^2=h^2$,

$$\iint_{(S)}x\,dm=\int_0^a\int_0^{\pi}u\cos v\,d\sigma=\int_0^a\int_0^{\pi}u\cos v\cdot\sqrt{u^2+k^2}\,du\,dv=\int_0^a u\sqrt{u^2+k^2}\,du\int_0^{\pi}\cos v\,dv=0,$$

$$\iint_{(S)}y\,dm=\int_0^a\int_0^{\pi}u\sin v\,d\sigma=\int_0^a u\sqrt{u^2+k^2}\,du\int_0^{\pi}\sin v\,dv=\frac{2}{3}(h^3-k^3),$$

$$\iint_{(S)}z\,dm=\int_0^a\int_0^{\pi}kv\,d\sigma=k\int_0^a\sqrt{u^2+k^2}\,du\int_0^{\pi}v\,dv=\frac{1}{4}\pi^2k\,[k^2\ln(a+h)+ah-k^2\ln k],$$

$$\int_0^1 y\,dm = \frac{2}{3}\rho\int_0^1 t^4(t^2+2)\,dt = \frac{38}{105}\rho;\quad y_0 = \frac{152}{525}.$$

$$\int_0^1 z\,dm = \frac{1}{4}\rho\int_0^1 t^5(t^2+2)\,dt = \frac{11}{96}\rho;\quad z_0 = \frac{11}{120}.$$

92. 11. *Să se găsească centrul de greutate al unui fir în formă de elice, ale cărui ecuații sunt:* $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=kt$ *și ale cărui capete corespund punctelor* $t=0$ *și* $t=u$. *Când centrul de greutate va fi situat pe pe axa elicei?*

Avem

$$ds^2 = [a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)+k^2]\,dt^2 = (a^2+k^2)\,dt^2,$$

$$x_0 = \frac{\int_0^u x\,dm}{\int_0^u dm} = \frac{a\int_0^u \cos t\sqrt{a^2+k^2}\,dt}{\int_0^u \sqrt{a^2+k^2}\,dt} = a\frac{\sin u}{u},$$

$$y_0 = \frac{\int_0^u y\,dm}{\int_0^u dm} = \frac{a\int_0^u \sin t\,dt}{u} = \frac{a(1-\cos u)}{u},$$

$$z_0 = \frac{\int_0^u z\,dm}{\int_0^u dm} = \frac{k\int_0^u t\,dt}{u} = \frac{ku^2}{2u} = \frac{1}{2}ku.$$

Centrul de greutate va fi așezat pe Oz când: $\sin u = 1-\cos u = 0$, adică: $u = 2k\pi$ (k = întreg), adică pentru o spiră a elicei.

92. 12. *Un inel este tăiat dintr'o sferă metalică omogenă ale cărei raze interioare și exterioare sunt respectiv 4 și 5 metri, prin două plane paralele, situate în aceeași parte a centrului sferei și la distanță 1 și 3 metri de centru. Să se găsească centrul de greutate al inelului* (fig. 168).

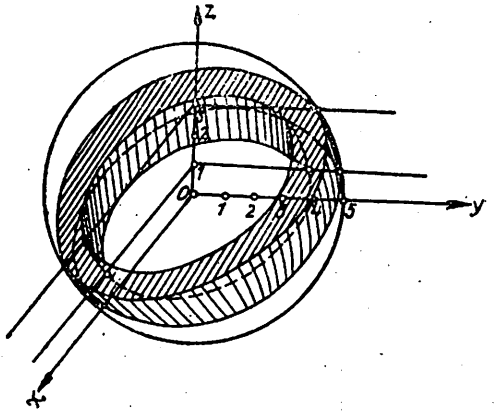


Fig. 168

Folosind coordonatele cilindrice, deoarece ecuațiile sferelor sunt:

$x^2+y^2+z^2=25$ sau: $(\rho_1^2+z^2=25)$ și $x^2+y^2+z^2=16$ sau $(\rho_2^2+z^2=16)$,

Rezultă

$$x_0=\frac{b^3-a^3}{b^2-a^2}=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b},\quad y_0=0 \text{ (în baza simetriei).}$$

92. 9. *Să se găsească centrul de greutate al unui corp omogen, limitat de pânza unui con circular drept, având unghiul la vârf 2α, și o sferă de rază R cu centrul în vârful conului.*

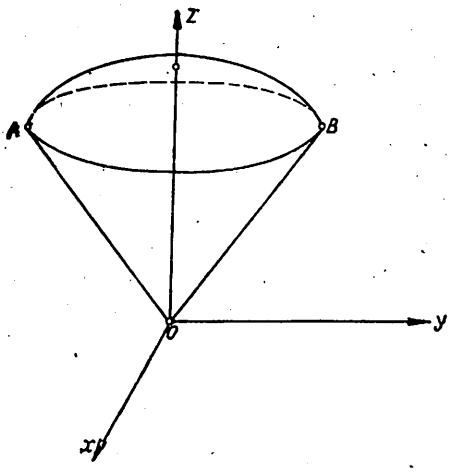


Fig. 167

Luăm centrul sferei în originea axelor de coordonate și axa conului drept axă Oz (fig. 167). Din cauza simetriei: $x_0=y_0=0$, iar pentru a găsi pe z_0 vom folosi coordonatele polare. Ecuația sferei va fi: $r=R$, iar a conului: $\theta=\alpha$. Fiind vorba pentru integrare de un punct interior volumului din fig. 167, r va varia între 0 și R, φ între 0 și 2π iar θ dela 0 la α. Lăsând deoparte factorul de densitate, avem

$$\int z\,dm=\iiint r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{R}r^3dr=$$

$$=\frac{1}{4}\pi R^4(1-\cos^2\alpha),$$

$$\int dm=\iiint r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}\sin\theta\,d\theta\int_0^{R}r^2dr=\frac{2}{3}\pi R^3(1-\cos\alpha).$$

Deci: $z_0=\frac{3}{8}R(1+\cos\alpha)$.

92. 10. *Să se găsească centrul de greutate al unui fir uniform având forma curbei: $x=t^2$, $y=\frac{2}{3}t^3$, $z=\frac{1}{4}t^4$, capetele firului corespunzând punctelor pentru care $t=0$ și $t=1$.*

Deoarece: $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=t^2(t^2+2)^2\,dt^2$, avem

$$\int_0^1 dm=\rho\int_0^1 ds=\rho\int_0^1 t\,(t^2+2)\,dt=\frac{5}{4}\rho,$$

$$\int_0^1 x\,dm=\rho\int_0^1 t^3\,(t^2+2)\,dt=\frac{2}{3}\rho;\quad x_0=\frac{8}{15}.$$

Nu mai este nevoie să calculăm pe y_0, deoarece arcul considerat are drept axă de simetrie bisectoarea primului cadran, deci: $x_0=y_0=\frac{2}{5}a$.

92. 7. *Să se găsească centrul de greutate al suprafeței cuprinse între curba* $y=\sin x$ *și axa* Ox *limitată la punctele de abscisă* 0 *și* π

Deoarece, după cum se știe dela construcția sinusoidei, bucla curbei despre care se vorbește în enunț este simetrică față de dreapta: $x=\frac{1}{2}\pi$, centrul de greutate se va găsi pe ea, deci $x_0=\frac{1}{2}\pi$. Pentru a calcula pe y_0 observăm că elementul de suprafață e: $d\sigma=ydx$, deci; $dm=\rho d\sigma=\rho ydx$ ($\rho=$const.). Cum centrul de greutate al acestei suprafețe, care este un dreptunghi, este la întâlnirea diagonalelor, punct care la limită se confundă cu $\left(x,\frac{1}{2}y\right)$ vom presupune că masa este concentrată în acest punct. Deci

$$\int ydm=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}y\rho ydx=\frac{1}{2}\rho\int_0^{\pi}\sin^2 xdx=\frac{1}{4}\rho\pi,$$

$$\int dm=\rho\int_0^{\pi}\sin xdx=2\rho \text{ și deci } y_0=\frac{1}{8}\pi.$$

92. 8. *Să se găsească centrul de greutate al suprafeței mărginite de două cercuri tangente interior de raze* a *și* b (fig. 166)

Luăm linia centrelor ca axă Ox, și perpendiculara pe ea în punctul de tangență (tangenta comună) drept axă Oy. In coordonate polare ecuațiile celor două cercuri vor fi $r=2a\cos\theta$, $r=2b\cos\theta$. Aria cuprinsă între cele două cercuri este egală cu: $\pi(b^2-a^2)$. Apoi

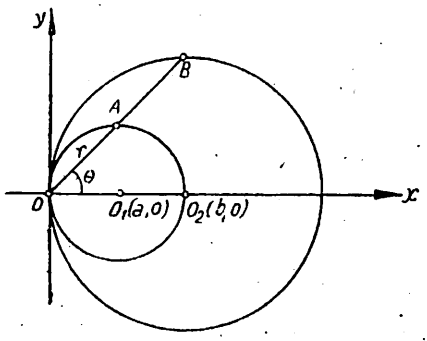


Fig. 166

$$\iint xdxdy=\iint r\cos\theta\, rdr\,d\theta=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_{2a\cos\theta}^{2b\cos\theta}r^2dr=$$

$$=\frac{8}{3}(b^3-a^3)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta,=(b^3-a^3)\pi$$

făcând schimbarea de variabilă $\theta=\frac{1}{2}\pi-u$ și apoi împărțind intervalul în două, etc. se ajunge la integrala calculată la problema 76. 12.

pe coardă, atunci elementul de suprafață este: $(y_2-y_1)\,dx$, deci: $dm=\rho\,(y_2-y_1)\,dx$ unde presupunând că suprafața este omogenă, $\rho=$const. Vom considera că această masă se află situată în punctul $[x, \frac{1}{2}(y_1+y_2)]$. Avem, lăsând deoparte actorul ρ care nu joacă nici un rol, deoarece dispare prin simplificare, $\int dm=$ $=\int (y_2-y_1)\,dx=$ cu suprafața unui sfert de elipsă mai puțin suprafața triunghiului dreptunghic $OAB=\frac{1}{4}\pi ab-\frac{1}{2}ab$,

$$\int x\,dm=\frac{b}{a}\int_0^a x[\sqrt{a^2-x^2}-(a-x)]\,dx=\frac{1}{6}a^2b,\ \int y\,dm=$$

$$=\frac{b^2}{2a^2}\int_0^a[(a^2-x^2)-(a-x)^2]\,dx=\frac{1}{6}ab^2,$$

încât

$$x_0=\frac{2a}{3(\pi-2)},\quad y_0=\frac{2b}{3(\pi-2)}.$$

Soluția II. Putem face calculul și cu ajutorul integralelor duble. Deoarece: $dm=\rho dxdy$ (unde ρ fiind constant se poate neglija) vom avea de calculat integralele duble

$$\iint x\,dxdy \quad \text{și} \quad \iint y\,dxdy,$$

în interiorul suprafeței mărginite de sfertul de elipsă și dreapta care unește extremitățile axelor.

92. 6. *Să se găsească centrul de greutate al unui sfert de astroidă.*

Curba are forma din fig, 84 și are ecuațiile parametrice; $x=a\cos^3\theta$, $y=a\sin^3\theta$. Sfertul al cărui centru de greutate îl căutăm, se obține făcând pe θ să varieze dela 0 la $\frac{1}{2}\pi$. Avem: $dm=\rho\,ds$, unde presupunem $\rho=$const. Considerăm concentrată această masă în punctul (x,y). Avem

$dx=-3a\cos^2\theta\sin\theta$, $dy=3a\sin^2\theta\cos\theta$, încât $ds=3a\sin\theta\cos\theta$ (este bine de observat că această valoare a lui ds nu este valabilă decât atunci când $\sin\theta$ și $\cos\theta$ sunt de același semn, de exemplu pentru θ cuprins în primul cadran, deoarece ds este presupus totdeauna pozitiv reprezentând o lungime; în caz că θ este în al doilea cadran, $ds=-3a\sin\theta\cos\theta$) deci

$$S\,dm=\frac{3}{2}a\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta=\frac{3}{2}a\rho.$$

$$\int x\,dm=3a^2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^4\theta\,d\theta=\frac{3}{5}a^2\rho;\ x_0=\frac{2}{5}a.$$

Lucrul mecanic este egal cu

$$T=\int_0^{\infty}\frac{2\pi Ca^2\,dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=2\pi Ca^2\int_0^{\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Făcând schimbarea: $x=a\operatorname{tg}\theta$, obținem

$$T=2\pi C\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta=2\pi C.$$

92. 3. *Să se determine masa totală a unei emisfere de rază R, având centrul în origine și fiind situată deasupra planului xOy, densitatea în fiecare punct fiind presupusă proporțională cu cota.*

Prin ipoteză: $\rho(x,y,z)=kz$, unde k este un coeficient constant. Folosind coordonate polare, $d\sigma=R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$, încât

$$M=\iint_{(S)}kR^3\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\varphi=kR^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\pi kR^3.$$

92. 4. *Să se găsească centrul de greutate al unui sfert de cerc considerat dintr'un material omogen.*

Împărțind sfertul de cerc în elemente de arc ds și însemnând cu ρ masa pe unitatea de lungime, vom avea: $dm=\rho\,ds$ (ρ este constant în ipoteza făcută de problemă). Dacă a este raza cercului, vom avea

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{a}{y}\,dx=-\frac{a}{x}\,dy,$$

încât

$$\int x\,dm=-\rho\int_a^0 a\,dy=\rho a^2,\quad \int y\,dm=\rho\int_0^a a\,dx=\rho a^2,\quad \int dm=\rho\int ds=\frac{1}{2}\rho\pi a$$

$\left(\frac{1}{4}\text{ cerc}\right)$ și deci $x_0=y_0=\frac{2a}{\pi}$. Rezultatul: $x_0=y_0$ era de prevăzut, deoarece sfertul de cerc considerat are bisectoarea primului cadran drept axă de simetrie.

92. 5. *Să se găsească centrul de greutate al unui segment de elipsă determinat de coarda care unește vârfurile curbei situate pe direcția pozitivă a axelor de coordonate.*

Soluția I. Fie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ (ecuația elipsei) și $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$ (ecuația coardei). Împărțim suprafața segmentului în elemente prin coarde paralele la axa Oy. Dacă notăm cu y_2 ordonata unui punct de pe elipsă și cu y_1 ordonata unui punct de

2. **Masa totală** a unei curbe, suprafețe sau volum este dată respectiv de formulele

$$M=\int_{(C)}\rho\,ds,\quad M=\iint_{(S)}\rho\,d\sigma,\quad M=\iiint_{(V)}\rho\,dx\,dy\,dz, \tag{IV}$$

prima integrală fiind o integrală curbilinie, a doua de suprafață, iar a treia de volum; peste tot ρ reprezintă densitatea corpului în fiecare punct. Toate aceste integrale le vom simboliza prescurtat prin

$$M=\int dm, \tag{V}$$

semnul sumă înlocuindu-se, după natura problemei, printr'o integrală simplă dublă sau triplă. Dacă: $\rho=\text{const}$, corpul considerat este omogen.

3. **Centrul de greutate.** Coordonatele centrului de greutate (x_0, y_0, z_0) al unei linii, suprafețe sau corp sunt date de formulele

$$x_0=\frac{\int x\,dm}{\int dm},\quad y_0=\frac{\int y\,dm}{\int dm},\quad z_0=\frac{\int z\,dm}{\int dm}, \tag{VI}$$

cu aceleași convenții ca la nr. precedent.

Dacă linia al cărui centru de greutate îl căutăm este un segment situat pe axa Ox atunci $y_0=z_0=0$. Dacă suprafața este plană, $z_0=0$ și integralele sunt integrale duble obișnuite, iar dacă suprafața este strâmbă în spațiu, integralele sunt de suprafață. Pentru volume integralele sunt triple.

92. 1. *Se consideră o masă gazoasă în cilindrul unui piston. Dacă se notează cu p presiunea executată de gaz pe unitatea de măsură, se cere să se găsească lucrul mecanic efectuat.*

Dacă notăm cu s suprafața pistonului și x distanța sa până la fundul cilindrului, atunci volumul gazului este sx; deci, presiunea exercitată asupra pistonului este sp. Dacă pistonul se deplasează cu Δx, lucrul mecanic elementar efectuat este $ps\Delta x$ (partea principală a infinitului mic care reprezintă lucrul mecanic elementar). Acum, dacă pistonul se deplasează între abscisele x_0 și x_1, lucrul mecanic va fi

$$T=\int_{x_0}^{x_1} ps\,dx.$$

În particular, dacă presupunem că p este legat de x prin legea $px=p_0x_0$ atunci

$$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{p_0x_0s\,dx}{x}=p_0x_0s\ln\frac{x_1}{x_0}.$$

92. 2. *Un fir de oțel traversat de un curent electric de intensitate C este îndoit în formă de cerc de rază a. Știind că forța exercitată de curentul electric după o linie dreaptă perpendicular pe planul cercului asupra unui pol magnetic egal cu unitatea situat la o distanță x de centrul cercului este:* $\frac{2\pi Ca^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, *să se găsească lucrul mecanic efectuat aducând un pol magnetic, egal cu unitatea, dela infinit până la centrul cercului, urmând dreapta definită mai sus.*

Pentru arie, din ecuația conului scoatem

$$4z\frac{\partial z}{\partial x}=x,\quad 4z\frac{\partial z}{\partial y}=y,\quad 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{5}{4},\ \text{şi deci}$$

$$A=2\sqrt{5}\iint\rho d\rho\,d\theta=2\sqrt{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{4\cos\theta}\rho d\rho=16\sqrt{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=4\sqrt{5}\,\pi.$$

91.11. *Să se găsească suprafața sferei tăiate de cilindrul din* fig. 161.

Vom folosi coordonate polare definite prin formulele

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta.$$

Cum punctul este pe sferă, rezultă: $\rho=a$; cum punctul trebue să fie şi pe cilindru, rezultă: $\sin\theta=\cos\varphi$, adică: $\theta=\frac{1}{2}\pi-\varphi$. Avem

$$E=\sum x_\theta^2=a^2,\ F=\sum x_\theta x_\varphi=0,\ G=\sum x_\varphi^2=a^2\sin^2\theta.$$

Aria căutată va fi deci

$$A=\iint_{(D)}\sqrt{EG-F^2}\,d\theta\,d\varphi=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}\sin\theta\,d\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)\,d\varphi=2a^2(\pi-2).$$

§ 92. Aplicațiile calculului integral în Mecanică.

1. **Lucrul mecanic** a) Dacă un mobil se deplasează dealungul lui Ox sub influența unui forțe $X(x)$ între punctele $A(x=a)$, $B(x=b)$, lucrul mecanic efectuat este dat de integrala

$$T=\int_a^b X(x)\,dx. \tag{I}$$

b) Dacă un mobil se mişcă pe o curbă (C), plecând dela o extremitate şi ajungând la cealaltă, acționat fiind de forță F, ale cărei componente sunt X, Y, lucrul mecanic efectuat este dat de integrala

$$T=\int_C Xdx+Ydy. \tag{II}$$

c) Dacă curba este în spațiu şi dacă notăm cu X, Y, Z componentele forței, atunci

$$T=\int_C Xdx+Ydy+Zdz. \tag{III}$$

Conform celor spuse la §83, pct. 2, d) dacă elementul de integrat în (II) şi (III) este o diferențială totală exactă, atunci lucrul mecanic nu va depinde decât de extremitățile curbei.

Din ecuația paraboloidului scoatem

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=y,$$

deci

$$A=4\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy\,.$$

Trecând la coordonate polare (prob. 58. 7 în care facem $c=1/\sqrt{2}$) avem

$$A=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}\sqrt{1+\rho^2}\rho\,d\rho=\frac{20}{9}-\frac{1}{3}\pi.$$

91. 10. *Să se găsească volumul și aria corpului mărginit la suprafețele:* $x^2+y^2-4z^2=0$, $x^2+y^2-4x=0$ (fig. 165).

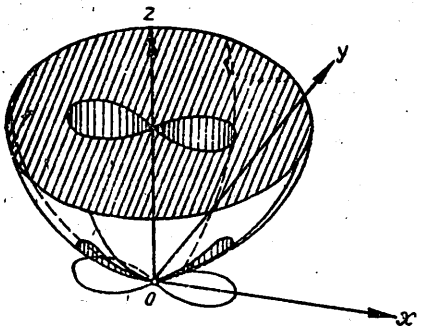


Fig. 164

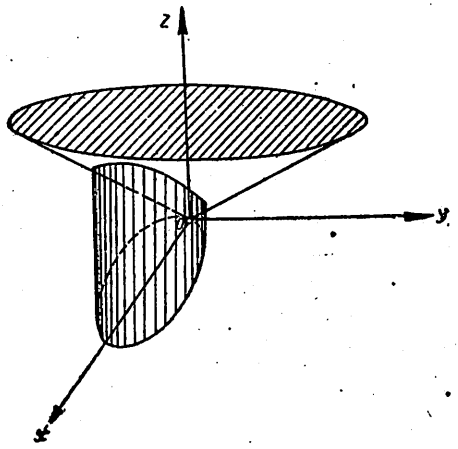


Fig. 165

Prima suprafață este un con de rotație cu vârful în origine și având pe Oz ca axă, iar a doua este un cilindru cu generatoarele paralele cu Oz, baza fiind un cerc în planul xOy cu centrul pe Ox de abscisă 2 și trecând prin origine. Deoarece corpul are planele xOy și xOz ca plane de simetrie, vom calcula volumul situat numai în primul diedru al axelor. Întrebuințăm coordonatele cilindrice. Ecuația cercului de bază al cilindrului este $\rho=4\cos\theta$, iar din ecuația conului scoatem $z=\frac{1}{2}\rho$. Pentru volum avem deci

$$V=4\iint z\,dxdy=4\iint\frac{1}{2}\rho\cdot\rho d\rho d\theta=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{4\cos\theta}\rho^2 d\rho=\frac{128}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta=\frac{256}{9}\,.$$

91. 7. *Să se găsească aria sferei.*

Ecuaţia sferei cu centrul în origine şi de rază R este

$$x^2+y^2+z^2=R^2, \text{ adică } z^2=R^2-x^2-y^2$$

deci

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z},$$

încât aria căutată este

$$S=8\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=8R\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=$$

$$=8R\int_0^R\left|\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right|_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx=4\pi R\int_0^R dx=4\pi R^2.$$

91. 8. *Să se găsească aria cilindrului:* $x^2+y^2=a^2$ *tăiată de cilindrul:* $y^2+z^2=a^2$.

Cele două suprafeţe sunt doi cilindri de rotaţie, primul având generatoarele paralele cu Oz şi baza un cerc cu centrul în origine de rază a şi situat în planul xOy, iar al doilea va fi identic cu primul, numai că va avea drept axă pe Ox. Corpul are planele de coordonate ca plane de simetrie, încât vom calcula numai o optime din suprafaţa sa, mărginindu-ne la primul diedru. Din ecuaţia celui de al doilea cilindru scoatem

$$z\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad z\frac{\partial z}{\partial y}=-y, \quad 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{a^2}{z^2}=\frac{a^2}{a^2-\rho^2\sin^2\theta},$$

în coordonate cilindrice. Deci

$$S=8a\iint\frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2\sin^2\theta}}=8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin^2\theta}\int_0^a\frac{\rho\sin^2\theta\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2\sin^2\theta}}=$$

$$=8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin^2\theta}\left|-\sqrt{a^2-\rho^2\sin^2\theta}\right|_0^a=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\,d\theta=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{2}\,d\theta}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}=$$

$$=8a^2\left|\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=8a^2.$$

91. 9. *Să se găsească aria tăiată din paraboloidul:* $x^2+y^2=2z$ *de un cilindru având generatoarele paralele cu axa* Oz *şi drept bază în planul* xOy *lemniscata* (fig. 164).

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2.$$

perpendiculară pe aceasta în planul bazei. Deoarece corpul al cărui volum îl căutăm este simetric faţă de planul yOz nu vom calcula decât jumătatea lui din dreapta. Ecuaţia cilindrului este: $x^2+y^2=a^2$, care reprezintă în acelaşi timp cercul de bază în planul xOy. Planul fiind paralel cu axa Oy, are aceeaşi ecuaţie cu dreapta AB din planul xOz, adică

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}-1=0,$$

deoarece planul este tangent cercului de bază în punctul A. Volumul căutat va avea drept valoare

$$V=2\iint\limits_{(C)}\frac{h}{a}(a-x)\,dx\,dy=$$

$$=2\frac{h}{a}\int_{-a}^{a}dy\int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}}(a-x)dx=\frac{1}{3}ha^2(3\pi-4).$$

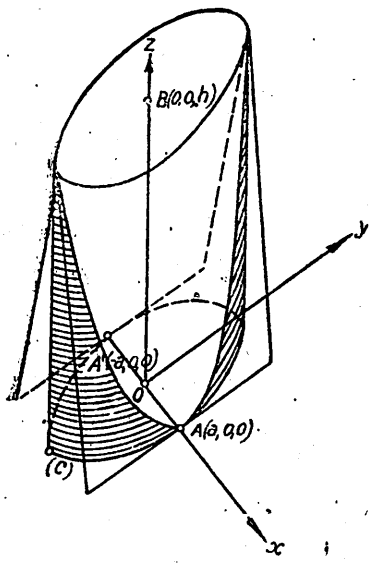


Fig. 162

91. 6. *Să se găsească volumul corpului mărginit de sferă:* $x^2+y^2+z^2=5$ *şi paraboloidul:* $x^2+y^2=4z$ (fig. 163)

Ambele suprafeţe sunt de rotaţie în jurul axei Oz şi au planele xOz, yOz ca plane de simetrie. Să căutăm intersecţia lor. Din cele două ecuaţii rezultă: $z^2+4z=5$, adică $z=1$ şi $z=-5$. Intersecţiile vor fi două cercuri situate în planele de ecuaţii $z=1$ şi $z=-5$; al doilea este imaginar, iar primul are drept ecuaţii: $z=1$, $x^2+y^2=4$. A doua ecuaţie reprezintă un cilindru cu generatoarele paralele cu Oz şi trecând prin cercul de intersecţie al celor două suprafeţe. Pentru a obţine volumul căutat, vom calcula separat volumul mărginit de acest cilindru şi sfera pe de o parte şi paraboloidul pe de altă parte. Diferenţa lor va reprezenta volumul cerut. Avem succesiv, întrebuinţând coordonate cilindrice,

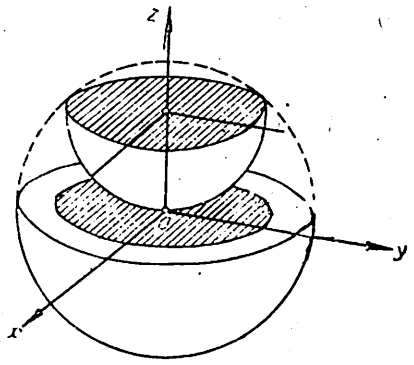


Fig. 163

$$V_1=4\iint\sqrt{5-x^2-y^2}\,dxdy=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2}\sqrt{5-\rho^2}\;\rho d\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left|-\frac{1}{3}(5-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^2=\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1)\pi,$$

$$V_2=\iint(x^2+y^2)\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2}\rho^3d\rho=2\pi;\quad V=\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-4)\pi.$$

ρ, adică presupunem θ fix. Limitele pentru ρ vor fi zero şi $\rho=a\cos\theta$ (scoasă din ecuaţia $x^2+y^2-ax=0$); iar pentru θ, zero şi $\frac{1}{2}\pi$. Avem

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho d\rho d\theta=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left|-\frac{1}{3}(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^{a\cos\theta}=$$

$$=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{2}{3}\right).$$

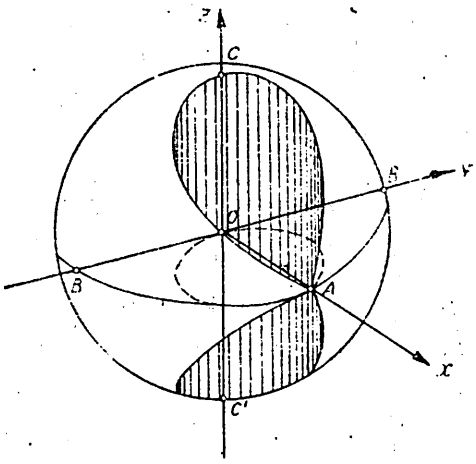


Fig. 161

91. 4. *Să se găsească volumul elipisodului.*

Ecuaţia elipsoidului este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Volumul căutat este de opt ori volumul corpului situat în primul diedru, adică

$$V=8\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dxdydz=8c\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}dy.$$

Punând: $b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=A^2$, avem în baza lui (f. 39),

$$\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy=\frac{1}{b}\int_0^A\sqrt{A^2-y^2}\,dy=\frac{1}{b}\left|\frac{1}{2}y\sqrt{A^2-y^2}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}A^2\arcsin\frac{y}{A}\right|_0^A=\frac{\pi A^2}{4b}$$

încât

$$V=\frac{8\pi c}{4b}\int_0^a A^2dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

In particular volumul sferei ($a=b=c=R$) este $\frac{4}{3}\pi R^3$.

91. 5. *Să se găsească volumul solidului pe care-l taie, dintr'un cilindru circular, două plane care trec printr'un diametru al bazei superioare şi sunt tangente bazei inferioare* (fig. 162).

Fie a raza cilindrului şi h înălţimea lui. Luăm axa cilindrului ca axă Oz, diametrul prin care trec cele două plane paralel cu axa Oy, iar axa Ox

3. Aria unei suprafețe (S) este dată de integrala de suprafață

$$A=\iint\limits_{(S)} d\sigma=\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\iint\limits_{(D')}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \qquad \text{(IV)}$$

forma a doua referindu-se la reprezentarea suprafeței prin ecuația (I) [domeniul (D) este proiecția suprafeței pe planul xOy], iar a treia se referă la reprezentarea parametrică (§ 86, VII) [(D') este domeniul în care trebue să varieze u și v pentru ca punctul curent să descrie suprafața].

91. 1. *Să se calculeze volumul mărginit de suprafața*

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},$$

planul xOy și planele $x=k$, $x=l$, $y=m$ și $y=n$.

Insemnând cu V volumul căutat și presepunând $l>k$, $n>m$, avem

$$V=\int_k^l\int_m^n\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=\frac{(n-m)(l-k)}{3}\left(\frac{k^2+lk+l^2}{a^2}+\frac{m^2+mn+n^2}{b^2}\right).$$

91. 2. *Se cere volumul mărginit de suprafața: $z=4x^2+2y^2+1$, planele de coordonate și planul: $x+y-3=0$.*

Ne mărginim să dăm numai indicații dar este bine ca să se facă figura. Suprafața este un paraboloid eliptic care are vârful în punctul $A(0,0,1)$ și care este cel mai de jos punct al suprafeței, iar planul dat este un plan paralel cu Oz și care taie planul xOy după dreapta de ecuații: $x+y-3=0$, $z=0$. Dacă notăm cu T triunghiul format de această dreaptă, Ox și Oy, volumul căutat este

$$V=\iint\limits_{(T)}(4x^2+2y^2+1)\,dx\,dy=\int_0^3 dx\int_0^{3-x}(4x^2+2y^2+1)\,dy=-\frac{7}{6}x^4+$$
$$+6x^3-\frac{19}{2}x^2+21x\Big|_0^3=45.$$

91. 3. *Să se calculeze volumul mărginit de suprafețele* (fig. 161)

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \text{ și } x^2+y^2-ax=0.$$

Prima suprafață este o sferă, iar a doua un cilindru având generatoarele paralele cu Oz și drept bază un cerc de rază $\frac{1}{2}a$ cu centrul într'un punct situat pe Ox și de abscisa $\frac{1}{2}a$. Pentru a calcula mai ușor un sfert de volum, trecem la coordonate polare în planul xOy, adică punem $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ *). Elementul $dx\,dy$ se va înlocui cu $\rho\,d\rho\,d\theta$. Să integrăm mai întâi în raport cu

*) Aceasta înseamnează coordonate cilindrice în spațiu

90. 8. *Să se găsească aria născută de lemniscată când se roteşte în jurul axei Oy.*

Am văzut că lemniscata are ecuaţia în coordonate polare

$$\rho^2=2c^2\cos 2\theta$$

(prob. 58,7), şi cum

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2d\theta^2=\left(\frac{2c^2}{\rho}\right)^2d\theta^2,$$

avem

$$A=8\pi c^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta=4\pi\sqrt{2}c^2,$$

deoarece: $x=\rho\cos\theta$.

§ 91. Volumul şi aria corpurilor oarecari

Volumul şi aria corpurilor sunt calculate prin formulele care urmează.

1. Volumul unui cilindru (fig. 160) cu generatoarele paralele cu axa Oz, având baza domeniul (D) din planul xOy şi fiind limitat superior de suprafaţa

$$z=f(x,y), \qquad (I)$$

este dat de integrala dublă

$$V=\iint\limits_{(D)}zdxdy=$$

$$=\iint\limits_{(D)}f(x,y)\,dxdy. \qquad (II)$$

Această formulă este valabilă şi dacă suprafaţa este dată parametric, când se înlocueşte z în funcţie de u şi v, iar elementul de suprafaţă $dxdy$ prin $\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv$ (§ 84, pct. 3).

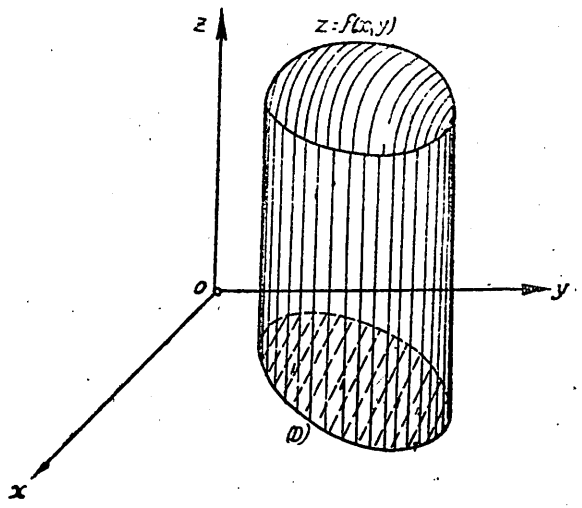


Fig. 160

2. Volumul unui corp oarecare este dat de formula

$$V=\iiint\limits_{(V)}dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(V')}\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw, \qquad (III)$$

a doua formulă referindu-se la cazul suprafeţelor reprezentate parametric (§ 85, pct. 3).

de rotație în cazul problemei actuale va fi $a-x$ și elementul diferențial dy, adică

$$V=\pi\int_0^{\sqrt{2pa}}(a-x)^2dy=\pi\int_0^{\sqrt{2pa}}\left(a-\frac{y^2}{2p}\right)^2dy=\frac{8a^2}{15}\sqrt{2pa}\,\pi.$$

90. 6. *Volumul torului.*

Se numește *tor* corpul născut din rotația unui cerc în jurul unei drepte. În cazul când dreapta trece prin centrul cercului, torul se reduce la o sferă. Să presupunem că luăm axa de rotație drept axă Oy și perpendiculara coborîtă pe ea din centrul cercului drept axă Ox. Dacă notăm coordonatele centrului cercului cu $(b,0)$ iar raza cu a ecuația cercului va fi

$$(x-b)^2+y^2=a^2.$$

O paralelă la Ox întâlnește cercul în două puncte ale căror abscise sunt

$$x_1=b-\sqrt{a^2-y^2},\quad x_2=b+\sqrt{a^2-y^2}.$$

Dacă notăm cu A și B punctele cel mai de sus și cel mai de jos ale cercului pe care-l rotim, volumul căutat va fi diferența volumelor obținute rotind semicercul AB din dreapta și semicercul AB din stânga. Așadar

$$V=\pi\int_{-a}^{a}(x_2^2-x_1^2)\,dy=4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}dy=2\pi^2a^2b.$$

90. 7. *Să se găsească volumul și aria corpului născut din rotația unei bucle a cicloidei în jurul axei Ox,* (fig. 81) (prob. 58,8).

Avem

$$V=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2a(1-\cos t)\,dt=8a^3\pi\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{1}{2}t\,dt,\text{ punând }u=\frac{t}{2},$$

avem

$$V=16a^3\pi\int_0^{\pi}\sin^6u\,du=16a^3\pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6udu+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^6udu\right]=5a^3\pi^2,$$

$$A=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2t}\,dt=$$

$$=8a^2\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{1}{2}t\,dt=16a^2\pi\int_0^{\pi}\sin^3udu=16a^2\pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3udu+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^3udu\right]=$$

$$=32a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3udu=\frac{64}{3}a^2\pi,$$

în baza rezultatului dela prob. 76,1).

90. 3. *Să se găsească aria născută din rotaţia unei elipse în jurul axei Ox.*

Presupunem că rotim elipsa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad (a>b).$$

Cum: $ds^2=1+y'^2$ unde y este scos din ecuaţia de mai sus, vom avea între două plane oarecare, notând cu $g^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$,

$$A=\frac{2\pi b}{a^2}\int_{x'}^{x''}\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx=\frac{\pi b}{a}\left|x\sqrt{a^2-g^2x^2}+\frac{a^2}{g}\arcsin\frac{gx}{a}\right|_{x'}^{x''},$$

şi luând $x'=-a$, $x''=+a$, avem: $A=2\pi b\left(b+\frac{a}{g}\arcsin g\right)$.

90. 4. *Să se găsească aria născută din rotaţia elipsei în jurul axei Oy.*

Corpul obţinut se numeşte *sferoid.* Rezolvând ecuaţia elipsei în raport cu x, se găseşte că aria mărginită între două plane de ordonate y' şi y'' este $(c^2=a^2-b^2)$.

$$A=2\pi\int_{y'}^{y''}x\sqrt{1+x_y'^2}\,dy=\frac{2a\pi}{b^2}\int_{y'}^{y''}\sqrt{b^4+c^2y^2}\,dy=$$

$$=\frac{a\pi}{b^2}\left|y\sqrt{b^4+c^2y^2}+\frac{b^4}{c}\ln\left(cy+\sqrt{b^4+c^2y^2}\right)\right|_{y'}^{y''}.$$

Dacă luăm $y'=-b$, $y''=b$, atunci

$$A=2\pi a\left(a+\frac{b^2}{2c}\ln\frac{a+c}{a-c}\right).$$

90. 5. *Să se găsească volumul născut din rotaţia porţiunei din parabolă: $y^2=2px$ situată deasupra axei Ox şi cuprinsă între Oy şi dreapta $x=a$, atunci când se roteşte în jurul dreptei care o mărgineşte la dreapta*

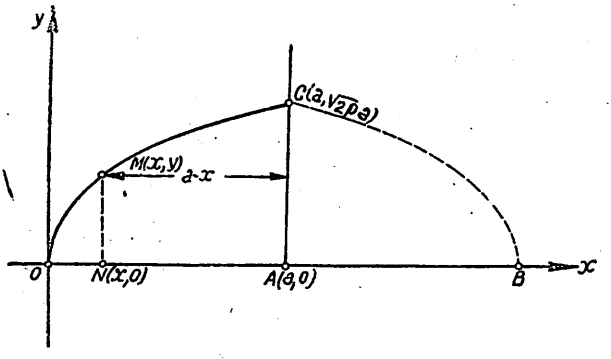


Fig. 159

Formula (III) (analog pentru I) trebue înţeleasă în sensul că integrala este purtată asupra lui x^2, unde x reprezintă raza de rotaţie a unui punct oarecare de pe curbă, iar dy elementul diferenţial dealungul axei de rotaţie.

Atunci, dacă $M(x,y)$ este un punct oarecare al curbei (fig. 159), raza

care este o ecuație omogenă. Mai departe punem: $v=tu$, de unde $dv=tdu+udt$, și ecuația devine

$$(1+t^2)\,du+u\,(t-a)\,dt=0,$$

care integrată ne dă

$$\ln u+\frac{1}{2}\ln(1+t^2)-a\operatorname{arctg} t=C,$$

adică

$$\frac{1}{2}\ln[(x+1)^2+(y-1)^2]=a\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x+1}+C.$$

97. 4. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y^2y'^2-2xyy'+2y^2-x^2=0.$$

Rezolvând ecuația în raport cu y' avem

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy\pm\sqrt{x^2y^2-y^2(2y^2-x^2)}}{y^2};\quad ydy=(x+a\sqrt{x^2-y^2})\,dx,$$

unde am pus pentru prescurtare $a=\pm\sqrt{2}$. Făcând schimbarea: $y=ux$, ajungem la ecuația

$$\frac{udu}{1-u^2+a\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x};\quad\int\frac{udu}{1-u^2+a\sqrt{1-u^2}}=\ln\frac{x}{C}.$$

Pentru a calcula integrala din prima parte facem substituția: $u=\sin t$. Avem

$$\int\frac{udu}{1-u^2+a\sqrt{1-u^2}}=\int\frac{\sin t\,dt}{a+\cos t}=-\ln(a+\cos t),$$

încât integrala generală este

$$\sqrt{x^2-y^2}\pm\sqrt{2}x=C.$$

97. 5. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$(x^2+y^2)(1+y'^2)=2(x+yy')^2.$$

Ecuația desvoltată și simplificată este

$$[(y+x)y'+(x-y)][(y-x)y'+(x+y)]=0,$$

și se descompune în următoarele două: 1° $(x+y)y'+(x-y)=0$. Facem substituția: $y=tx$ și cum: $dy=xdt+tdx$, simplificând cu x, ecuația devine

$$(t+1)xdt+(t^2+1)\,dx=0;\quad\frac{t+1}{t^2+1}dt+\frac{dx}{x}=0,$$

care integrată ne dă

$$\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+\operatorname{arctg} t+\ln x=C,$$

sau revenind la vechea variabilă

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C. \qquad (1)$$

2° $(y-x)\,y'+(x+y)=0$ pentru care procedând la fel ne dă

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C. \qquad (2)$$

Ansamblul soluțiilor (1) și (2) formează soluția generală a ecuației date.

97. 6. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$(y^4-3x^2)\,dy+xy\,dx=0.$$

Facem schimbarea: $x=u^2$, $y=v^\mu$. Ecuația se transformă în

$$\mu(v^{4\mu}-3u^{2\lambda})v^{\mu-1}\,dv+\lambda u^{2\lambda-1}v^\mu\,du=0.$$

Termenii acestei ecuații sunt respectiv de gradele $5\mu-1$ și $2\lambda+\mu-1$; ecuația va fi omogenă când: $5\mu-1=2\lambda+\mu-1$; $\lambda=2\mu$. Aceasta înseamnează că, lăsându-l pe y neschimbat, va trebui să punem $x=u^2$. Ecuația devine

$$(y^4-3u^4)\,dy+2u^3y\,du=0,$$

care este omogenă. Facem: $y=tu$, ecuația devine

$$\frac{du}{u}+\frac{(t^4-3)\,dt}{t(t^4-1)}=0,$$

care se integrează imediat scriind

$$\frac{t^4-3}{t(t^4-1)}=\frac{3}{t}-\frac{2t^3}{t^4-1}\cdot$$

$$\ln u+3\ln t-\frac{1}{2}\ln(t^4-1)=\ln C;\quad \frac{ut^3}{\sqrt{t^4-1}}=C,$$

și în urmă:

$$y^6=C^2(y^4-x^2).$$

§ 98. Ecuații liniare de ordinul 1

Prin ecuație diferențială liniară de ordinul 1, înțelegem o ecuație de forma

$$y'+Py+Q=0, \qquad (I)$$

P și Q fiind funcții numai de x. Soluția generală este dată de formula

$$y=e^{-\int P\,dx}\left(C-\int Qe^{\int P\,dx}\,dx\right). \qquad (II)$$

Observație. La integrarea ecuațiilor diferențiale liniare întră expresii de forma: $e^{m\ln x}$ care vor fi înlocuite prin: x^m (§ 37, III și IV).

98. 1. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$(1+x^2)\,y'+xy-2x=0.$$

Scriind ecuația sub forma

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y - \frac{2x}{1+x^2} = 0,$$

avem succesiv

$$\int P dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2), \quad e^{\int P dx} = \sqrt{1+x^2},$$

$$e^{-\int P dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int Q e^{\int P dx} dx = -\int 2x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = -2\sqrt{1+x^2}$$

încât

$$y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} + 2.$$

Ecuația diferențială se poate integra și direct, observând că variabilele se pot separa.

98. 2. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$x(x-1)y' - (2x-1)y + x^2 = 0.$$

Scriem

$$y' - \frac{2x-1}{x(x-1)}y + \frac{x}{x-1} = 0.$$

Avem succesiv

$$\int P dx = -\int \frac{2x-1}{x^2-x} dx = -\ln x(x-1), \quad e^{-\int P dx} = x(x-1),$$

$$e^{\int P dx} = \frac{1}{x(x-1)}, \quad \int Q e^{\int P dx} dx = \int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1},$$

și deci: $y = Cx(x-1) + x$.

98. 3. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y - xy' = x^2 - a^2.$$

Scriem

$$y' - \frac{1}{x}y + \frac{x^2-a^2}{x} = 0;$$

avem

$$\int P dx = -\ln x, \quad e^{-\int P dx} = x, \quad e^{\int P dx} = \frac{1}{x}, \quad \int Q e^{\int P dx} dx = \int \frac{x^2-a^2}{x^2} dx = x + \frac{a^2}{x},$$

$$y = Cx - x^2 - a^2.$$

98. 4. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y + e^x = 0.$$

Avem

$$\int P dx = \ln(x^2+1), \quad e^{-\int P dx} = \frac{1}{x^2+1}, \quad e^{\int P dx} = x^2+1,$$

$$\int Q e^{\int P dx} dx = \int (x^2+1)e^x dx = (x^2-2x+3)e^x,$$

pe baza calculului făcut la prob. 69,1, și integrala generală este

$$y=\frac{C-(x^2-2x+3)\,e^x}{x^2+1}.$$

93. 5. *Să se găsească integrala ecuației diferențiale*

$$y'+y\cos x=\sin x\cos x,$$

care pentru $x=0$ *se reduce la* $y=1$.

Avem

$$\int P\,dx=\int\cos x\,dx=\sin x,\quad e^{\int P\,dx}=e^{\sin x};$$

$$\int Qe^{\int P\,dx}\,dx=-\int e^{\sin x}\sin x\cos x\,dx;$$

în ultima integrală facem substituția: $\sin x=u$,

$$\int ue^u\,du=e^u(u-1)=e^{\sin x}(\sin x-1);$$

încât:

$$y=e^{-\sin x}[C+e^{\sin x}(\sin x-1)]=Ce^{-\sin x}+\sin x-1.$$

Făcând aci $x=0$, rezultă $C=2$, adică soluția cerută de problemă este

$$y=2e^{-\sin x}+\sin x-1.$$

98. 6. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$x\frac{dy}{dx}-y+x\sin x+\cos x=0,$$

Scriind ecuația sub forma

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}+\sin x+\frac{\cos x}{x}=0,$$

avem

$$\int P\,dx=-\ln x,\ e^{-\int P\,dx}=x,\ e^{\int P\,dx}=\frac{1}{x},\ \int Qe^{\int P\,dx}\,dx=\int\frac{\sin x}{x}\,dx+\int\frac{\cos x}{x^2}\,dx;$$

a doua integrală o calculăm prin părți punând $\frac{dx}{x^2}=dv$, $\cos x=u$; $v=-\frac{1}{x}$, $du=-\sin x\,dx$; găsim

$$\int\frac{\cos x}{x^2}\,dx=\frac{\cos x}{x}-\int\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

încât: $\int Qe^{\int P\,dx}\,dx=-\frac{\cos x}{x}$; în definitiv

$$y=x\left(C+\frac{\cos x}{x}\right)=Cx+\cos x.$$

98. 7. *Luându-se* x *ca funcție și* y *ca variabilă, să se integreze ecuația diferențială*

$$(y^2-6x)\,y'+2y=0.$$

Prin schimbarea din enunț

$$y' = \frac{1}{x'},$$

încât ecuația devine

$$2yx' - 6x + y^2 = 0;\ x' - \frac{3}{y}x + \frac{1}{2}y = 0.$$

Avem

$$\int P dy = -3 \ln y,\ e^{\int P dy} = \frac{1}{y^3},\ \int Q e^{\int P dy} dy = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{2y};$$

adică soluția este

$$x = y^3\left(C + \frac{1}{2y}\right) = Cy^3 + \frac{1}{2}y^2.$$

98. 8. *Dacă R este rezistența, L coeficientul de selfinducție și V tensiunea, atunci intensitatea curentului I satisface ecuația*

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V.$$

Să se găsească intensitatea curentului după t secunde dela închiderea circuitului, dacă $V = V_0 \sin 2\pi nt$ și dacă la momentul $t=0$, intensitatea curentului era

$$I_0 = \frac{-2\pi n V_0 L}{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}.$$

Aplicând formulele, găsim în baza (prob. 68. 5).

$$\int P dt = \int \frac{R}{L} dt = \frac{R}{L} t,\ \int Q e^{\int P dt} dt = -\int \frac{V_0}{L} \sin 2\pi nt \cdot e^{\frac{R}{L}t} dt$$

$$= -\frac{V_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t} \sin 2\pi nt dt = -\frac{V_0}{L} e^{\frac{R}{L}t} \frac{\frac{R}{L}\sin 2\pi nt - 2\pi n \cos 2\pi nt}{\frac{R^2}{L^2} + 4\pi^2 n^2}$$

încât

$$I = Ce^{-\frac{R}{L}t} + V_0 \frac{R \sin 2\pi nt - 2\pi n L \cos 2\pi nt}{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}$$

Pentru determinarea lui C facem $t=0$; găsim

$$\frac{-2\pi n V_0 L}{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2} = C + V_0 \frac{-2\pi nL}{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2};\ C = 0,$$

adică

$$I = \frac{V_0}{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}(R \sin 2\pi nt - 2\pi n L \cos 2\pi nt).$$

98. 9. *Să se rezolve ecuația funcțională*

$$\int_0^1 f(\alpha x)\, d\alpha = n f(x).$$

Facem în integrală schimbarea: $\alpha x = u$; ecuația devine

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,du = nf(x).$$

Scăpând de numitor și apoi derivând în raport cu x (§ 81, II)

$$f(x) = n[f(x) + xf'(x)],$$

care este o ecuație diferențială liniară în care $Q=0$ se poate integra prin formulele de mai sus, sau observând că variabilele se separă. Scriem

$$nx\frac{df(x)}{dx} = (1-n)f(x);\quad \frac{df(x)}{f(x)} = \frac{1-n}{n}\frac{dx}{x},$$

de unde rezultă

$$f(x) = Cx^{\frac{1-n}{n}},$$

unde C este o constantă arbitrară.

§ 99. Ecuații Bernoulli și Riccati

1. Se numește ecuație de tip Bernoulli, o ecuație de forma

$$y' + Py + Qy^n = 0,$$

unde P și Q sunt funcții numai de x, și care se reduce la o ecuație liniară de ordinul 1 prin schimbarea de funcții: $x = y^{1-n}$.

2. O ecuație de tip Riccati are forma

$$y' + Py^2 + Qy + R = 0,$$

unde P, Q, R sunt funcții de x. O astfel de ecuație diferențială se poate integra când cunoaștem o soluție particulară y_0. Făcând substituția: $y = y_0 + z$ se ajunge la o ecuație Bernoulli. Dacă facem substituția: $y = y_0 + \frac{1}{u}$ ajungem direct la o ecuație liniară de ordinul 1.

99. 1. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$2x^2y' - 4xy - y^2 = 0.$$

Ecuația este de tip Bernoulli. Facem substituția: $u = \frac{1}{y}$.

$$u' + \frac{2}{x}u + \frac{1}{2x^2} = 0,$$

de unde

$$u = \frac{C - \frac{1}{2}x}{x^2} \text{ deci } y = \frac{2x^2}{C-x}.$$

99. 2. *Să se integreze*

$$y'+2y=2x\sqrt{y}.$$

Ecuația este de tip Bernoulli unde $n=\frac{1}{2}$. Facem: $y^{\frac{1}{2}}=u$ și cum $\frac{1}{2}y'y^{-\frac{1}{2}}=u'$, avem

$$u'+u-x=0$$

pentru care

$$\int Pdx=x,\ e^{-\int Pdx}=e^{-x},\ e^{\int Pdx}=e^{x},\ \int Qe^{\int Pdx}dx=-\int xe^{x}dx=e^{x}(1-x);$$

încât

$$u=e^{-x}[C-e^{x}(1-x)]=Ce^{-x}+x-1;\ y=(Ce^{-x}+x-1)^{2}.$$

99. 3. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$2xy'+y+2x^{3}y^{3}=0.$$

Facem: $y^{-2}=u$ și găsim

$$u'-\frac{1}{x}u-2x^{2}=0.$$

pentru care avem

$$\int Pdx=-\ln x,\ e^{-\int Pdx}=x,\ e^{\int Pdx}=\frac{1}{x},\ \int Qe^{\int Pdx}dx=-x^{2},\quad u=x(C+x^{2})\ \text{deci}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{x(C+x^{2})}}.$$

99. 4. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$\frac{dy}{dx}-xy^{2}+2x^{2}y-x^{3}-1=0.$$

Ecuația este de tip Riccati. Incepem prin a căuta o soluție particulară care să fie un polinom în x, luând întâi cazul cel mai simplu al unui polinom de gradul 1. Fie: $y_0=Ax+B$. Avem

$$A-x(Ax+B)^{2}+2x^{2}(Ax+B)-x^{3}-1=0;$$

scriind că toți coeficienții lui x sunt nuli se găsește că: $y_0=x$. Facem: $y=z+x$. Găsim: $z'-xz^{2}=0$, unde făcând $z=u^{-1}$, avem

$$u'=-x,\ u=-\frac{1}{2}(x^{2}+C)\ \text{și deci}\ z=-\frac{2}{x^{2}+C};\ y=x-\frac{2}{x^{2}+C}$$

99. 5. *Să se arate că dacă*

$$uz+v'=\frac{u'}{u}v,$$

u, v și z fiind funcții de x, ecuația lui Riccati

$$y'=uy^{2}+vy+z$$

este integrabilă.

In adevăr, din relația dată scoatem: $z=-\left(\frac{v}{u}\right)'$, încât ecuația diferențială se mai poate scrie: $y'=uy^2+vy-\left(\frac{v}{u}\right)'$, de unde se citește că $-\frac{v}{u}$ este o integrală particulară, Dacă facem schimbarea: $y=-\frac{v}{u}+w$, ajungem la ecuația Bernoulli, $w'+vw-uw^2=0$, etc.

99. 6. *Se consideră ecuația Riccati*

$$y'\cos 2x=2+X'\sin 2x-2\left(X'+\frac{1}{\sin 2x}\right)y+X'\sin 2x\cdot y^2,$$

unde X reprezintă o funcție cunoscută de x. Se cere: a) *să se arate că ecuația are două integrale particulare al căror produs este* 1; b) *să se găsească integrala generală.*

a) Fie y_1 și y_2 cele două integrale particulare, astfel ca: $y_1\cdot y_2=1$. Aceasta înseamnă că y_1 și $y_2=1/y_1$ trebue să fie soluții, adică

$$y_1'\cos 2x=2+X'\sin 2x-2\left(X'+\frac{1}{\sin 2x}\right)y_1+X'\sin 2x.y_1^2,$$

$$-y_1'\cos 2x=(2+X'\sin 2x)y_1^2-2\left(X'+\frac{1}{\sin 2x}\right)y_1+X'\sin 2x.$$

Adunând aceste două ecuații ne rămâne ecuația algebrică în y

$$(1+X'\sin 2x)\left(y_1^2-\frac{2}{\sin 2x}y_1+1\right)=0.$$

Cum X este o funcție dată, în general prima paranteză nu este nulă: a doua are drept rădăcini pe $\operatorname{tg}x$ și $\operatorname{cot}x$.

Având o soluție, se face substituția: $y=\operatorname{tg}x+\frac{1}{u}$, noua ecuație în u este

$$\cos 2x\frac{du}{dx}-2\left(X'\cos 2x+\frac{1}{\sin 2x}\right)u+X'\sin 2x=0.$$

Soluția generală a ecuației date este

$$y=\operatorname{tg}x+\frac{2}{(1+Ce^{2X})\operatorname{tg}2x}.$$

99. 7. *Se dă ecuația diferențială*

$$y''+Ay'+By=0, \qquad (1)$$

A și B fiind funcții de x. Se cere: a) *să se verifice că transformata $z=\frac{y'}{y}$ este o ecuație Riccati*

$$z'+z^2+Az+B=0. \qquad (2)$$

b) *Fie y_1 și y_2 două soluții distincte ale ecuație* (1). *Dacă punem: $u=\frac{y_2}{y_1}$ și $v=\frac{u''}{u'}$, să se arate că și expresia: $v=-A-2\frac{y_1'}{y_1}$ este o soluție a unei ecuații Riccati.*

c) *Care este condiția ce leagă pe A cu B pentru a avea:* $\frac{y_2}{y_1}=ax+b$. *Să se arate că în acest caz integrarea ecuației* (1) *se reduce la o simplă cuadratură. Caz particular:* $A=$const.

a) Ținând seama de (1), avem succesiv

$$z'=\frac{y''y-y'^2}{y^2}=\frac{(-Ay'-By)y-y'^2}{y^2};\quad z'+z^2+Az+B=0.$$

b) Prin ipoteză

$$y_2''+Ay_2'+By_2=0,\quad y_1''+Ay_1'+By_1=0, \tag{3}$$

și pe de altă parte

$$u'=\frac{y_2'y_1-y_2y_1'}{y_1^2},\quad u''=\frac{(y_2''y_1-y_1''y_2)y_1-2y_1'(y_2'y_1-y_2y_1')}{y_1^3}$$

Dar, în baza lui (3),

$$u''=\frac{(y_2'y_1-y_1'y_2)(-Ay_1-2y_1')}{y_1^3},$$

încât avem în adevăr,

$$v=\frac{u''}{u'}=\frac{-Ay_1-2y_1'}{y_1}=-A-2\frac{y_1}{y_1};\quad \frac{y_1'}{y_1}=-\frac{1}{2}(v+A), \tag{4}$$

și folosind cele demonstrate la punctul a) va trebui ca

$$-\frac{1}{2}(v'+A')+\frac{1}{4}(v+A)^2-\frac{1}{2}A(v+A)+B=0;$$

$$v'-\frac{1}{2}v^2+\left(A'+\frac{1}{2}A^2-2B\right)=0, \tag{5}$$

care este o ecuație Riccati

c) In ipoteza din enunț: $u''=0$, deci ecuația (5) trebue să admită soluția $v=0$, adică trebue să avem

$$2A'+A^2-4B=0. \tag{6}$$

Din (4) scoatem că: $\frac{y_1'}{y_1}=-\frac{1}{2}A$, adică: $y_1=Ce^{-\frac{1}{2}\int Adx}$ și deci

$y_2=C(ax+b)e^{-\frac{1}{2}\int Adx}$ a și b fiind doi coeficienți arbitrari. Soluția ecuației este deci

$$y=(ax+b)e^{-\frac{1}{2}\int Adx}$$

In cazul A constant, fie $A=-2m$, soluția generală este

$$y=(ax+b)e^{mx}$$

Acest rezultat putea fi găsit și direct, deoarece din (6) scoatem $B=m^2$, și

$$y''-2my'+m^2y=0,$$

care se poate integra imediat, după cum vom vedea in paragraful următor.

§ 100. Factor integrant

Fiind dată ecuația diferențială

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0, \tag{I}$$

prima parte poate proveni dintr'o diferențială totală la care P și Q având un factor comun a fost lăsat deoparte. Aceasta înseamnează că dacă notăm cu $M(x,y)$ acest factor, expresia

$$MPdx+MQdy$$

este o diferențială totală, adică trebue să avem

$$\frac{\partial(MP)}{\partial y}=\frac{\partial(MQ)}{\partial x}, \tag{II}$$

sau desvoltat

$$P\frac{\partial M}{\partial y}-Q\frac{\partial M}{\partial x}+M\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0. \tag{III}$$

Factorul întegrant M este determinat prin această *ecuație cu derivate parțiale*, ecuație cu care ne vom ocupa la § 109. Se arată că atunci când avem un factor integrant, din el putem deduce o infinitate.

In cazul când se caută un factor integrant de forma: $M(u)$, unde: $u=\varphi(x,y)$, și în cazul când un asemenea factor integrant există, determinarea lui se face, în general, cu ajutorul unei ecuații diferențiale de primul ordin, după cum vom vedea în problemele următoare.

100. 1. *Să se caute un factor integrant al ecuației*

$$(1-x^2y)\,dx+x^2(y-x)\,dy=0$$

care să fie numai funcție de x.

Ecuația (III) se scrie

$$-x^2(y-x)\frac{dM}{dx}+M(-x^2-2xy+3x^2)=0;\quad x\frac{dM}{dx}+2M=0,$$

care integrată dă: $M=\frac{1}{x^2}$ (lăsând deoparte constanta multiplicativă). Din acest rezultat reiese că ecuația scrisă sub forma

$$\frac{1-x^2y}{x^2}\,dx+(y-x)\,dy=0$$

are în prima parte o diferențială totală. Integrând așa cum s'a arătat la § 82 vom avea

$$\int_a^x\frac{1-x^2y}{x^2}\,dx+\int_b^y(y-a)\,dy=C,$$

sau, strângând constantele la un loc,

$$y^2-2x^2y=C_1x+2.$$

100. 2. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$xy^2dx+(x^2y-x)\,dy=0$$

căutând un factor integrant de forma: $M=f(xy)$.

Pentru ca ecuația să admită un factor integrant de forma menționată, este necesar ca punând: $u=xy$, ecuația (II) sau (III), să se exprime numai în funcție de u. Ecuația citată este

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2M)=\frac{\partial}{\partial x}[(x^2y-x)M],$$

$$2xyM+x^2y^2\frac{dM}{du}=(2xy-1)M+(x^2y-x)\,y\frac{dM}{du},$$

(când se derivează M în raport cu x se derivează ca funcție de funcție, adică $\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{dM}{du}\frac{\partial u}{\partial x}=y\frac{\partial M}{du}$; analog pentru derivata în raport cu y).

$$u\frac{dM}{du}+M=0;\quad M=\frac{1}{u}=\frac{1}{xy},$$

unde am lăsat deoparte o constantă arbitrară multiplicativă. Ecuația dată, înmulțită cu M, duce la

$$ydx+\left(x-\frac{1}{y}\right)dy=0$$

de unde

$$\int_a^x ydx+\int_b^y\left(a-\frac{1}{y}\right)dy=C;\quad xy-\ln y=C_1.$$

100. 3. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$(x^2+y^2+1)\,dx-2xydy=0,$$

căutându-i un factor integrant de forma $M(u)$, *unde* $u=\varphi(x,y)$.

Va trebui să avem

$$\frac{\partial}{\partial y}[M(x^2+y^2+1)]=\frac{\partial}{\partial x}(-2xyM),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x^2+y^2+1)\frac{dM}{du}+2yM+2yM+2xy\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dM}{du}=0;$$

$$\left[(x^2+y^2+1)\frac{\partial u}{\partial y}+2xy\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{dM}{du}+4yM=0. \qquad (1)$$

Alegerea lui u trebue făcută în așa fel, încât după eventuale simplificări, coeficienții să nu conțină decât pe u. Lucrul acesta reușește dacă luăm; $u=x^2-y^2$; în adevăr, în acest caz ecuația se transformă în

$$(u-1)\frac{dM}{du}+2M=0;\quad M=\frac{1}{(u-1)^2}=\frac{1}{(x^2-y^2-1)^2}.$$

Scriem ecuația dată sub forma

$$\frac{x^2+y^2+1}{(x^2-y^2-1)^2}dx-\frac{2xy}{(x^2-y^2-1)^2}dy=0,$$

de unde

$$\int_a^x \frac{x^2+y^2+1}{(x^2-y^2-1)^2}\,dx-\int_b^y \frac{2ay}{(a^2-y^2-1)^2}\,dy=C; \qquad (2)$$

Pentru calculul primei integrale observăm că

$$\frac{x^2+y^2+1}{(x^2-y^2-1)^2}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2-y^2-1}\right),$$

încât relația (2) conduce la integrala generală

$$x=C_1(x^2-y^2-1).$$

Observație. Putem lua și un alt factor integrant, alegând: $u=x$; în adevăr, în acest caz ecuația (1) devine

$$x\frac{dM}{dx}+2M=0; \quad M=\frac{1}{x^2}.$$

Cu această alegere, ecuația diferențială se scrie

$$\left(1+\frac{y^2+1}{x^2}\right)dx-\frac{2y}{x}\,dy=0,$$

care integrată dă

$$x-\frac{y^2+1}{x}=C,$$

care nu se deosebește de (2) decât prin forma constantei.

§ 101. Alte ecuații de ordinul întâi integrabile

Se numește ecuație Lagrange o ecuație de forma

$$y=xP(y')+Q(y'),$$

P și Q fiind două funcții oarecare de y'. Dacă: $P(y')=y'$, ecuația se numește *Clairaut*. Pentru a integra o ecuație dintr'unul din aceste două tipuri, punem $y'=p$ și derivăm în raport cu x. Noua ecuație în care luăm pe x ca funcție și p ca variabilă, este o ecuație liniară din care scoatem: $x=f(p)$. Ecuația inițială ne dă: $y=g(p)$. Aceste două relații formează reprezentarea parametrică a soluției. În cazul ecuației Clairaut, soluția reprezintă o familie de drepte; înfășurătoarea acestei familii este soluția *singulară* a ecuației.

101. 1. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$x\frac{dy}{dx}+y=\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

Ecuația este tip Lagrange. Punem $y'=p$ și ecuația devine

$$xp+y=p^3, \qquad (1)$$

care, diferențiată, ne dă

$$pdx+xdp+dy=3p^2dp,$$

şi cum: $dy=pdx$, avem

$$\frac{dx}{dp}+\frac{1}{2p}x-\frac{3}{2}p=0,$$

care integrată ne dă

$$x=\frac{1}{\sqrt{p}}\left(C+\frac{3}{5}p^2\sqrt{p}\right)=\frac{C}{\sqrt{p}}+\frac{3}{5}p^2; \tag{2}$$

şi în baza lui (1)

$$y=\frac{2}{5}p^3-C\sqrt{p}. \tag{3}$$

(2) şi (3) formează reprezentarea parametrică a soluţiei ecuaţiei date.

101. 2. *Să se integreze ecuaţia diferenţială:* $y=y'+3y'^2+y'^3$.

Notăm: $y'=p$ şi obţinem:

$$y=p+3p^2+p^3 \tag{1}$$

care derivată în raport cu x ne dă

$$p=(1+6p+3p^2)\frac{dp}{dx};\quad dx=\left(\frac{1}{p}+6+3p\right)dp,$$

şi care integrată ne dă

$$x=\ln p+6p+\frac{3}{2}p^2+C. \tag{2}$$

(1) şi (2) definesc parametric soluţiile ecuaţiei diferenţiale date.

101. 3. *Să se găsească soluţiile ecuaţiei diferenţiale*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=(y-x)^2.$$

Ecuaţia dată se scrie

$$p^3-\frac{3}{2}p^2=(y-x)^2, \tag{1}$$

şi care derivată în raport cu x dă

$$3(p^2-p)\frac{dp}{dx}=2(y-x)(p-1).$$

Suprimând factorul $p-1$ şi înlocuind valoarea lui $y-x$ scoasă din (1), avem

$$\frac{dx}{dp}=\pm\frac{3}{2\sqrt{p-\frac{3}{2}}},$$

care integrată ne dă

$$x=C\pm3\sqrt{p-\frac{3}{2}}. \tag{2}$$

Soluţia generală a ecuaţiei date are reprezentarea parametrică

$$x=C\pm3\sqrt{p-\frac{3}{2}},\quad y=x\pm p\sqrt{p-\frac{3}{2}}.$$

Eliminarea lui p se face ușor și se găsește pentru soluție forma

$$y=x\pm\frac{x-C}{3}\left[\left(\frac{x-C}{3}\right)^2+\frac{3}{2}\right].$$

101. 4. *Să se găsească soluția singulară a ecuației*

$$y+(y-x)y'+(a-x)y'^2=0.$$

Ecuația este de tip *Clairaut*. În adevăr, rezolvând-o în raport cu y, avem

$$y=px-\frac{ap^2}{p+1}.$$

Derivând, obținem

$$\left[x-a\frac{p(p+2)}{(p+1)^2}\right]\frac{dp}{dx}=0.$$

Anulând factorul al doilea, avem: $p=C$, care duce la soluția generală

$$y=Cx-\frac{aC^2}{C+1}, \tag{1}$$

reprezentând o familie de drepte. Primul factor anulat duce la soluția singulară

$$x=a\frac{p(p+2)}{(p+1)^2}, \quad y=px-\frac{ap^2}{p+1}=\frac{ap^2}{(p+1)^2}. \tag{2}$$

Soluția singulară reprezintă înfășurătoarea familiei de drepte (1), deci se putea găsi pe calea obișnuită (§ 60).

Pentru a găsi forma carteziană a soluției (2), vom elimina pe p printr'una din metodele date la § 29. Direct, observăm că

$$x+y=\frac{2ap}{p+1},$$

valoare care comparată cu valoarea lui y, spune că

$$(x+y)^2-4ay=0.$$

101. 5. *Funcțiile definite prin ecuațiile*

$$y+4x=0, \quad \sqrt{y}=1-x,$$

satisfac ecuația diferențială

$$2y(y'+2)=xy'^2;$$

să se găsească natura acestor integrale.

Pentru prima avem

$$2y(y'+2)-xy'^2=-8x(-4+2)-16x=0,$$

Iar pentru a doua

$$y=(1-x)^2, \quad y'=-2(1-x); \quad 2y(y'+2)-xy'^2=4x(1-x)^2-4x(1-x)^2=0.$$

În vederea integrării, scriem

$$2y=\frac{xp^2}{p+2},$$

și derivând rezultă

$$2p=\frac{p(p+4)}{(p+2)^2}x\frac{dp}{dx}+\frac{p^2}{p+2};\quad \frac{dx}{x}=\frac{dp}{p+2},\quad x=C(p+2),$$

adică reprezentarea parametrică a soluției generale este

$$x=C(p+2),\quad 2y=Cp^2.$$

Reprezentarea carteziană a soluțiilor este (punând $\frac{1}{2}C$ în loc de C)

$$Cy=(C-x)^2. \tag{1}$$

Din această expresie rezultă că a doua funcție din enunț este soluție particulară, deoarece se deduce din soluția generală făcând $x=1$. Cealaltă soluție este soluția singulară, deoarece nu este forma soluției generale, fiind de gradul 1 (și se poate arăta, cu considerații de Geometrie Analitică că (1) nu se poate descompune într'un produs de doi factori decât pentru $C=0$, când se reduce la $x^2=0$). In adevăr, înfășurătoarea familiei de parabole (1) se găsește eliminând pe C, între ecuațiile

$$Cy=(C-x)^2,\quad y=2(C-x),$$

eliminarea care arată că înfășurătoarea este dreapta: $y+4x=0$.

§ 102. Ecuații de ordin superior integrabile

Metodele care urmează au de scop să reducă integrarea ecuației diferențiale date la o ecuație al cărui ordin este, în general, cu o unitate mai mic.

1. **Ecuații diferențiale de ordinul n care conțin numai pe $y^{(n)}$, $y^{(n-1)},\ldots,y^{(p)}$ și x.** Se pune: $\frac{d^py}{dx^p}=a$. Ecuația diferențială se transformă într'o ecuație diferențială de ordinul $n-p$. Dacă aceasta este integrată și U este soluția generală, atunci

$$\frac{d^{(p-1)}y}{dx^{p-1}}=\int U\,dx=U_1+C_1,\quad \frac{d^{p-2}y}{dx^{p-2}}=\int U_1\,dx+C_1x+C_2,\ldots \tag{I}$$

și soluția generală y a ecuației date se obține prin p integrări succesive. Cum U conține $n-p$ constante arbitrare (fiind soluția unei ecuații de ordinul $n-p$) și cum prin ultimele p integrări se introduc încă p constante, soluția generală y va conține $(n-p)+p=n$ constante.

2. **Ecuații diferențiale care nu conțin explicit variabila.** Se ia drept nouă variabilă pe y, iar drept funcție: $\frac{dy}{dx}=p$. Derivatele lui y în raport cu x se exprimă în funcție de derivatele lui p în raport cu y după cum urmează

$$\frac{dy}{dx}=p,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=p\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right),\ldots \tag{II}$$

Dacă ecuația dată este de ordinul n, ecuația transformată este de ordinul $n-1$. Dacă: $p=f(y)$ este soluția generală (conținând $n-1$ constante), atunci

$$\frac{dy}{dx}=f(y);\quad \int\frac{dy}{f(y)}=x+C, \tag{III}$$

soluție care conține: $(n-1)+1=n$ constante arbitrare.

3. **Ecuații diferențiale omogene în** $y, y', \ldots y^{(n)}$. Se ia drept nouă funcție, funcția u definită prin: $y=e^{\int u dx}$ (IV). Noua ecuație în u va avea ordinul cu o unitate mai mic. Soluția generală a acesteia introdusă în (IV) ne dă, printr'o integrare (și deci o nouă constantă), soluția generală pentru y.

4. Dacă unei ecuații lineare omogene, adică unei ecuații de forma

$$a_1(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=0, \tag{V}$$

i se cunoaște o soluție y_0, prin substituția: $y=y_0z$ (VI), se obține o nouă ecuație în z de același tip și de ord. $(n-1)$ în $\frac{dz}{dx}$; integrând această ecuație, îl vom avea pe z și deci pe y, printr'o nouă integrare.

In general, dacă cunoaștem n integrale particulare independente $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale ecuației (V), adică astfel ca

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots y_n \\ y_1' & y_2 & \cdots y_n' \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}\neq 0, \tag{VII}$$

atunci soluția generală a ecuației, este

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n,$$

unde: $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sunt n constante arbitrare.

102. 1. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y'''=x+\sin x.$$

Avem succesiv

$$y''=\int(x+\sin x)\,dx=\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1,$$

$$y'=\int\left(\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1\right)dx=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2,$$

$$y=\int\left(\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2\right)dx=\frac{1}{24}x^4+\cos x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3.$$

102. 2. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$5y''^2-3y''y^{(IV)}=0.$$

Punem: $y''=u$, ecuația devine

$$5u'^2-3uu''=0;\quad \frac{5}{3}\frac{u'}{u}-\frac{u''}{u'}=0,$$

care integrată dă

$$\frac{5}{3}\ln u-\ln u'+\ln C=0;\quad u'=Cu^{\frac{5}{3}};\quad u^{-\frac{2}{3}}=C_1x+C_2.$$

Revenind la y avem: $y''=(C_1x+C_2)^{-\frac{3}{2}}$, încât

$$y'=-\frac{2}{C_1}(C_1x+C_2)^{-\frac{1}{2}}+C_3,\quad y=\frac{4}{C_1^2}(C_1x+C_2)^{\frac{1}{2}}+C_3x+C_4.$$

102. 3. *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$3x^2y''=y'^2+2x^2.$$

Punem: $y'=z$. Ecuaţia devine

$$3x^2z'-z^2-2x^2=0,$$

care este o ecuaţie *Riccati*. O soluţie imediată ce se citeşte după forma ecuaţiei este: $z_0=x$. Facem mai departe: $z=u+x$. Obţinem ecuaţia în u,

$$3x^2u'-2xu-u^2=0.$$

Mai departe punem: $u=\frac{1}{v}$ şi găsim în definitiv

$$v'+\frac{2}{3x}v+\frac{1}{3x^2}=0,$$

pentru care:

$$\int P\,dx=\frac{2}{3}\ln x,\quad e^{-\int P dx}=x^{-\frac{2}{3}},\quad e^{\int P dx}=x^{\frac{2}{3}},\quad \int Qe^{\int P dx}=\frac{1}{3}\int x^{-\frac{4}{3}}dx=-x^{-\frac{1}{9}}$$

deci

$$v=\frac{C}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{x},\quad u=\frac{x}{C\sqrt[3]{x}+1}\quad y=\int\frac{x\,dx}{C\sqrt[3]{x}+1}+\frac{1}{2}x^2+C';$$

pentru calculul integralei punem $\sqrt[3]{x}=t$,

$$y=3\int\frac{t^5dt}{Ct+1}+\frac{1}{2}x^2+C'=3\left[\frac{t^5}{5C}-\frac{t^4}{4C^2}+\frac{t^3}{3C^3}-\frac{t^2}{2C^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{t}{C^5}-\frac{1}{C}\ln(Ct+1)\right]+\frac{1}{2}x^2+C'$$

$$y=3\left[\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{5C}-\frac{x\sqrt[3]{x}}{4C^2}+\frac{x}{3C^2}-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2C^4}+\frac{\sqrt[3]{x}}{C^5}-\frac{1}{C}\ln(C\sqrt[3]{x}+1)\right]+\frac{1}{2}x^2+C'.$$

102. 4. *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$y^3y''+y^4=a^4,$$

a fiind o constantă.

Cum ecuaţia nu conţine pe x, punem

$$\frac{dy}{dx}=p\quad \text{şi deci}\quad \frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy},$$

încât ecuația devine

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + y^4 = a^4; \quad \frac{dp^2}{dy} = 2\frac{a^4}{y^3} - 2y,$$

de unde

$$p^2 = -\frac{a^4}{y^2} - y^2 + 2C.$$

Mai departe

$$p = \pm\sqrt{2C - \frac{a^4}{y^2} - y^2}; \quad \frac{2ydy}{\pm\sqrt{-y^4 + 2Cy^2 - a^4}} = 2x, \quad \arcsin\frac{y^2 - C}{\sqrt{C^2 - a^4}} = x^2 + C'.$$

Soluția se mai poate scrie

$$y^2 = \pm\sqrt{C^2 - a^4}\sin(x^2 + C') + C.$$

102. 5. *Să se determine curba integrală a ecuației*

$$y'^2 + 2yy'' = 0,$$

tangentă dreptei: $y = x$ în punctul $M(1, 1)$.

Luând drept nouă variabilă pe y, în baza formulelor (II), ecuația se transformă în

$$p\left(p + 2y\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

O primă soluție este: $p = 0$, adică: $y = C$, soluție care nu poate satisface condițiilor problemei. Alte soluții se obțin anulând paranteza, adică

$$-\frac{1}{2}\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p}; \quad y^{\frac{1}{2}}dy = Cdx$$

sau schimbând constanta C,

$$y = (C_1 x + C_2)^{\frac{2}{3}}.$$

Curba trebue să treacă prin $M(1, 1)$, adică

$$C_1 + C_2 = 1, \tag{1}$$

și cum trebue să fie tangentă în acest punct la $y = x$,

$$y' = \frac{2}{3}C_1(C_1 x + C_2)^{-\frac{1}{3}}; \quad 1 = \frac{2}{3}C_1(C_1 + C_2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}C_1,$$

în baza lui (1). Curba căutată va fi

$$2y^{\frac{3}{2}} = 3x - 1.$$

102. 6. *Să se integreze ecuația*

$$y'^2 + y'^3 = y''.$$

Punem $y' = p$ și ecuația se transformă în

$$\frac{dp}{dy} = p + p^2,$$

în care variabilele se separă

$$\frac{dp}{p(p+1)}=dy \quad \text{de unde} \quad \ln\frac{p}{p+1}=y+C,$$

sau, schimbând constanta

$$p=\frac{-e^y}{C+e^y},$$

adică

$$(1+Ce^{-y})dy=-dx; \quad Ce^{-y}=x+y+C'.$$

102. 7. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y'f\left(\frac{y''}{y'}\right)+yy''=y'^2,$$

f fiind o funcție oarecare integrabilă.

Cum ecuația nu conține pe x în baza formulelor (II), avem

$$p=y\frac{dp}{dy}+f\left(\frac{dp}{dy}\right),$$

care este o ecuație Clairaut, (§ 101)

102. 8. *Să se întegreze ecuația diferențială*

$$2y'^3-yy'y''-y^2y'''=0.$$

Fiind omogenă în y, y', y'', y''', folosim cele spuse la no. 3. Avem

$$y=e^{\int udx}, \quad y'=ue^{\int udx}, \quad y''=(u'+u^2)e^{\int udx}, \quad y'''=(u''+3uu'+u^3)e^{\int udx}.$$

Substituind aceste valori în ecuația din enunț, găsim

$$u''+4uu'=0; \quad u'+2u^2=2C^2,$$

ultima fiind o ecuație Riccati, care admite soluția particulară $u_0=C$. Făcând mai departe substituția: $u=C-\frac{1}{v}$, avem: $v'-4Cv+2=0$, care are drept soluție

$$v=C'e^{4Cx}+\frac{1}{2C},$$

sau

$$u=C-\frac{2C}{2CC'e^{4Cx}+1}=-C+\frac{4C^2C'e^{4Cx}}{2CC'e^{4Cx}+1}$$

Integrând această valoare căpătăm

$$\int udx=-Cx+\frac{1}{2}\ln(CC'e^{4Cx}+1)+\ln C''; \quad y=C''e^{-Cx}\sqrt{CC'e^{4Cx}+1}.$$

102. 9. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$x^2yy''=(y-xy')^2.$$

Ecuația este omogenă în y, y', y''. Folosind formulele (1) dela problema precedentă, ecuația se transformă în

$$x^2(u'+u^2)=(1-xu)^2; \quad x^2u'+2ux-1=0.$$

Ultima ecuație este o ecuație liniară de ord. 1. care are drept soluție

$$u=\frac{C}{x^2}+\frac{1}{x}.$$

Cum

$$\int u dx=-\frac{C}{x}+\ln C'x, \text{ rezultă: } y=C'xe^{-\frac{C}{x}}.$$

102. 10. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$yy''-y'^2+\frac{y}{x}y'=0.$$

Scriem ecuația sub forma

$$\frac{yy''-y'^2}{y^2}+\frac{1}{x}\frac{y'}{y}=0,$$

și punând: $\frac{y'}{y}=u$, se transformă în

$$\frac{du}{dx}+\frac{u}{x}=0, \; u=\frac{C}{x};$$

și mai departe

$$\frac{y'}{y}=\frac{C}{x}; \quad y=C'x^C.$$

Observație. Ecuația se putea rezolva observându-se că este omogenă în y, y', y''.

102. 11. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$(2x-1)y''-(4x^2+1)y'+(4x^2-2x+2)y=0.$$

Dacă luăm: $y=e^x=y''=y'$ ecuația este verificată. Facem: $y=ue^x$. Noua funcție u satisface ecuației diferențiale

$$(2x-1)u''+(4x^2-4x+3)u'=0.$$

Punând: $u'=v$, v este dat de

$$\frac{v'}{v}=\frac{4x^2-4x+3}{2x-1}=2x-1+\frac{2}{2x-1}, \text{ adică}$$

$$\ln v=x^2-x+\ln C(2x-1); \quad v=C(2x-1)e^{x^2-x}.$$

Deci

$$u=C\int(2x-1)Ce^{x^2-x}dx+C'=Ce^{x^2-x}+C',$$

și în definitiv

$$y=Ce^{x^2}+C'e^x$$

102. 12. *Să se găsească integrala generală a ecuației diferențiale*

$$y''+(\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x)y'+2\operatorname{ctg}^2xy=0,$$

știind că admite soluția particulară: $y_1=\sin x$. *Să se arate că toate curbele integrale trec printr'un punct fix. Să se determine în particular curba integrală, care are tangenta în punctul* $A\left(\frac{1}{3}\pi, 0\right)$, *paralelă cu* $y=x$.

Facem substituția: $y=u\sin x$, de unde

$$u''+\operatorname{tg}x\cdot u'=0;\quad \frac{u''}{u'}=-\frac{\sin x}{\cos x};$$

rezultă că

$$\ln u'=\ln C\cos x,\quad u'=C\cos x,\quad u=C\sin x+C',$$

și integrala generală a ecuației diferențiale date este

$$y=\sin x(C\sin x+C').$$

Se vede că toate integralele trec prin origină. Pentru a determina integrala particulară ce se cere în enunț, scriem mai întâi că curba trece prin punctul A, adică: $\sqrt{3}C+2C'=0$; apoi cum coeficientul unghiular într'un punct oarecare al curbei e dat de

$$y'=\cos x(C\sin x+C')+C\sin x\cos x,$$

va trebui că acest coeficient unghiular să fie 1 în punctul A, adică: $\sqrt{3}C+$ $+C'=2$; deci $C=\frac{4}{\sqrt{3}}$, $C'=-2$. Integrala căutată este

$$y=\sin x\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\sin x-2\right).$$

102. 13. *Să se verifice că funcția:* $y=(x+\sqrt{x^2-1})^n$ *satisface ecuației diferențiale:* $(x^2-1)y''+xy'-n^2y=0$, *și apoi să se integreze.*

Prima parte am demonstrat-o cu ocazia prob. 421. Dacă schimbăm pe n în $-n$, ecuația diferențială nu se schimbă, însemnează că mai admite și soluția: $(x+\sqrt{x^2-1})^{-n}=(x-\sqrt{x^2-1})^n$. Cum, în baza calculului făcut la problema menționată, avem

$$\begin{vmatrix} (x+\sqrt{x^2-1})^n, & (x-\sqrt{x^2-1})^n \\ n\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{x^2-1}}, & -n\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{x^2-1}} \end{vmatrix}=-\frac{2n[(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})]^n}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=-\frac{2n}{\sqrt{x^2-1}}\neq 0,$$

soluția generală a ecuației diferențiale va fi

$$y=C(x+\sqrt{x^2-1})^n+C'(x-\sqrt{x^2-1})^n.$$

§ 103. Ecuații liniare cu coeficienți constanți. Ecuații Euler

1. Ecuațiile diferențiale liniare cu coeficienți constanți se împart în două categorii:

a) Ecuații fără parte dreaptă, adică ecuații de forma

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \qquad (I)$$

unde coeficienții a_i sunt constante oarecari. Pentru a integra o astfel de ecuație îi formăm *ecuația caracteristică*,

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0, \tag{II}$$

care are n rădăcini și care dau naștere la n integrale particulare $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Soluția generală este

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n. \tag{III}$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sunt n constante arbitrare. Forma integralelor particulare depinde de natura rădăcinilor precum urmează: unei rădăcini reale simple a îi corespunde integrala particulară $e^{\alpha x}$; unei rădăcini reale a multiplă de ord. p îi corespund p integrale particulare $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \ldots, x^{p-1}e^{\alpha x}$; la două rădăcini simple complexe conjugate $\alpha + i\beta$ și $\alpha - i\beta$ corespund integralele $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$; dacă rădăcinile $\alpha + i\beta$ și $\alpha - i\beta$ sunt multiple de ord. p atunci vom avea integralele particulare

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{p-1}e^{\alpha x}\cos\beta x;$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{p-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

b) Ecuații cu parte dreaptă, adică ecuații de forma

$$a_0 y + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{IV}$$

unde coeficienții a_i sunt constante iar $f(x)$ o funcție oarecare. Se caută mai întâi soluția ecuației fără parte dreaptă, care fie $\bar{y}$. Pentru a avea soluția generală a ecuației cu parte dreaptă ne trebuește o soluție particulară a acesteia, care fie y_0. Soluția generală este atunci: $y = \bar{y} + y_0$. Pentru găsirea lui y_0 în general ținem seamă de forma lui $f(x)$. Anume, să presupunem că $f(x)$ este o sumă de termeni formați din polinoame, exponențiale și linii trigonometrice: atunci și y_0 va avea aceeași formă, adică în general unui termen de forma: $P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ [sau $P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$] îi va corespunde în y_0 un termen de forma: $P_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_1(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, $P_1(x)$ și $Q_1(x)$ fiind polinoame de același grad cu $P(x)$ cu coeficienți nedeterminați pe cari îi determinăm scriind că y_0 verifică ecuația cu partea dreaptă. Dacă se întâmplă că α să fie o rădăcină reală a ecuației caracteristice, multiplă de ord. p, atunci se înlocuește în y_0, $e^{\alpha x}$ prin $x^p e^{\alpha x}$. Dacă $\alpha + i\beta$ este o rădăcină multiplă de ord. p a ecuației caracteristice, atunci $e^{\alpha x}\cos\beta x$ și $e^{\alpha x}\sin\beta x$ se înlocuiesc prin $x^p e^{\alpha x}\cos\beta x$ și $x^p e^{\alpha x}\sin\beta x$. Dacă însă $f(x)$ nu are forma menționată, atunci se întrebuințează *metoda variației de constante*. Iată în ce constă această metodă: se formează soluția ecuației diferențiale fără parte dreaptă

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

și se consideră $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ca niște funcții de x definite prin sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \cdots + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \cdots + C_n' y_n' = 0. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x); \end{array}\right. \tag{V}$$

acest sistem rezolvat ne dă pe C_1', C_2', ..., C_n' în funcție de x: $C_1'=g_1(x)$, $C_2'=g_2(x)$, ..., $C_n'=g_n(x)$, de unde

$$C_1=\int g_1(x)dx+\overline{C}_1, \ldots, C_n=\int g_n(x)\,dx+\overline{C}_n, \qquad (VI)$$

valori cari introduse în y ne dă integrala generală a ecuației diferențiale cu parte dreaptă.

2. O ecuație diferențială Euler este o ecuație diferențială de forma

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(ax+b)\,y'+a_n y=f(x),$$

care se reduce la o ecuație diferențială cu coeficienți constanți prin substituția $ax+b=e^t$.

103. 1. *Se consideră pe axa Ox un mobil de masă m atras de origine proporțional cu distanța lui la acest punct și întâmpinând din partea mediului o rezistență proporțională cu viteza. Să se găsească legea de mișcare în funcție de poziția inițială a mobilului și știind că viteza inițială este nulă.*

Dacă reprezentăm forța care atrage prin: $-mn^2x$ și rezistența mediului prin; $-2mb\frac{dx}{dt}$, ecuația mișcării mobilului este

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mn^2x-2mb\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+n^2x=0. \qquad (1)$$

unde b și n sunt două constante cunoscute.

Începem prin a considera un caz particular, anume cazul când rezistența este nulă ($b=0$), abscisa poziției inițiale este x_0 iar viteza inițială nulă. Ecuația caracteristică este

$$r^2+n^2=0, \quad r_{1,2}=in.$$

încât soluția generală va fi

$$x=C_1\cos nt+C_2\sin nt.$$

Când $t=0$, $x=x_0$ ceeace dă: $C_1=x_0$; apoi cum

$$\frac{dx}{dt}=-nC_1\sin nt+nC_2\cos nt,$$

și cum pentru $t=0$, $\frac{dx}{dt}=0$, însemnează $C_2=0$. Mișcarea are drept ecuație

$$x=x_0\cos nt.$$

Mobilul oscilează între punctele de abscisă x_0 și $-x_0$ astfel că amplitudinea mișcării este $2x_0$; durata unei oscilații simple este $T_0=\frac{\pi}{n}$. Mișcarea este periodică, perioada fiind $2T_0$.

Trecem la cazul general. Ecuația caracteristică este

$$r^2+2br+n^2=0, \quad r_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2-n^2}. \qquad (2)$$

a) $b<n$. Rădăcinile sunt imaginare; soluția generală este

$$x=e^{-bt}(C_1\cos\sqrt{n^2-b^2}\,t+C_2\sin\sqrt{n^2-b^2}\,t).$$

Pentru $t=0$, rezultă $C_1=x_0$. Calculând în general derivata

$$\frac{dx}{dt}=e^{-bt}[(-bC_1+C_2\sqrt{n^2-b^2})\cos\sqrt{n^2-b^2}\,t-$$

$$-(bC_2+C_1\sqrt{n^2-b^2})\sin\sqrt{n^2-b^2}t], \tag{3}$$

și scriind că este nulă pentru $t=0$, rezultă

$$-bC_1+C_2\sqrt{n^2-b^2}=0;\quad C_2=\frac{bx_0}{\sqrt{n^2-b^2}},$$

încât ecuația mișcării este

$$x=x_0e^{-bt}\left(\cos\sqrt{n^2-b^2}\,t+\frac{b}{\sqrt{n^2-b^2}}\sin\sqrt{n^2-b^2}\,t\right). \tag{4}$$

Înlocuind valorile constantelor în (3), rezultă

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{n^2x_0}{\sqrt{n^2-b^2}}e^{-bt}\sin\sqrt{n^2-b^2}\,t.$$

Maximele și minimele abscisei sunt atinse atunci când viteza este nulă adică atunci când: $t=\frac{k\pi}{\sqrt{n^2-b^2}}$, k fiind întreg și pozitiv. Oscilațiile sunt izocrone, durata fiecăreia fiind: $T=\frac{\pi}{\sqrt{n^2-b^2}}$ valoare superioară lui T_0 dela cazul particular studiat.

b) $b=n$. Rădăcinile ecuației caracteristice sunt egale cu $-n$ și soluția generală este de forma

$$x=(C_1+C_2t)e^{-nt}.$$

Cu condițiile inițiale date rezultă ecuația mișcărei

$$x=x_0(1+nt)e^{-nt}. \tag{5}$$

c) $b>n$. Rădăcinile $r_{1,2}$ sunt reale. Soluția generală este de forma

$$x=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}.$$

Cu aceleași condiții inițiale, ecuația mișcării va fi

$$x=\frac{1}{2}x_0e^{-bt}\left[(e^{\sqrt{b^2-n^2}\,t}+e^{-\sqrt{b^2-n^2}\,t})+\frac{b}{\sqrt{b^2-n^2}}(e^{\sqrt{b^2-n^2}\,t}-e^{-\sqrt{b^2-n^2}\,t})\right]=$$

$$=x_0e^{-bt}\left(ch\sqrt{b^2-n^2}\,t+\frac{b}{\sqrt{b^2-n^2}}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{b^2-n^2}\,t\right).$$

În ultimele două cazuri, abscisa mobilului descrește și tinde către zero cât t crește către infinit.

103. 2. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y^{(IV)}-4y'''+7y''-6y'+2y=0,$$

Ecuația caracteristică este

$$r^4-4r^3+7r^2-6r+2=(r-1)^2(r-1-i)(r-1+i),$$

și deci soluția generală este

$$y=(C_1x+C_2)e^x+(C_3\cos x+C_4\sin x)e^x=(C_1x+C_2+C_3\cos x+C_4\sin x)e^x.$$

103. 3. *Se întâlnește în electrotehnică ecuația*

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E\sin\omega t,$$

care dă în funcție de timp intensitatea i a unui curent produs într'un circuit de o forță electromotrice variind cu timpul de o manieră sinusoidală: $e=E\sin\omega t$, având drept maximum pe E pulsația ω și de perioada: $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Coeficienții L și R sunt constante egale cu coeficientul de selfinducție și cu rezistența circuitului. Să se găsească valoarea lui i.

Ecuația caracteristică a ecuației fără parte dreaptă este

$$Lr+R=0,\quad r=-\frac{R}{L},$$

încât: $i=C_1e^{-\frac{R}{L}t}$. Pentru soluția particulară a ecuației cu parte dreaptă, luăm

$$i_0=A\sin\omega t+B\cos\omega t,$$

unde A și B sunt două constante ce urmează să determinăm. Scriind că i_0 verifică ecuația dată, rezultă

$$L(A\omega\cos\omega t-B\omega\sin\omega t)+R(A\sin\omega t+B\cos\omega t)=E\sin\omega t,$$

de unde prin identificare rezultă

$$L\omega A+RB=0,\quad -L\omega B+RA=E.$$

Soluția generală va fi

$$i=C_1e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E}{R^2+L^2\omega^2}(R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t).$$

103. 4. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y''-2y'+y=(x^2+1)e^{3x},$$

Ecuația caracteristică este

$$r^2-2r+1=(r-1)^2=0\quad\text{și deci:}\quad\bar{y}=(C'x+C'')e^x.$$

Soluția particulară este de forma: $y_0=(Ax^2+Bx+C)e^{3x}$. Se găsește

$$y=(C'x+C'')e^x+\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{8}\right)e^{3x}.$$

103. 5. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y''-2my'+m^2y=e^{px},$$

m și p fiind două constante.

Ecuația caracteristică are rădăcina dublă m. Soluția ecuației fără parte dreaptă este deci; $\bar{y}=(C'x+C'')e^{mx}$. Pentru a găsi o soluție particulară a ecuației cu parte dreaptă facem două ipoteze: 1° $m\neq p$. Atunci o soluție particulară va fi de forma: $y_0=Ae^{px}$. Cum $y_0'=pAe^{px}$, $y_0''=p^2Ae^{px}$, $y_0''-2my_0'+m^2y_0=Ae^{px}(p^2-2pm+m^2)=e^{px}$, adică $A=\frac{1}{(p-m)^2}$. Deci soluția generală este

$$y=(C'x+C'')e^{mx}+\frac{e^{px}}{(p-m)^2}.$$

° $m=p$. Cum m este rădăcină dublă a ecuației caracteristice, soluția particulară va avea forma: $y_0=Ax^2e^{mx}$. Făcându-se calculele se găsește că soluția generală este

$$y=\left(\frac{1}{2}x^2+C'x+C''\right)e^{mx}.$$

103. 6. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y''+5y'+4y=x\operatorname{ch}x-1.$$

Ecuația caracteristică este

$$r^2+5r+4=0, \quad r'=-1, \quad r''=-4.$$

Cum partea dreaptă se mai poate scrie

$$x\operatorname{ch}x-1=\frac{1}{2}x\,(e^x-e^{-x})-1,$$

y_0 va fi de forma: $y_0=(Ax+B)e^x+(Cx+D)xe^{-x}+E$. Găsim soluția generală

$$y=C'e^{-4x}+\left(-\frac{x^2}{12}+\frac{x}{18}+C''\right)e^{-x}+\left(\frac{x}{20}-\frac{7}{200}\right)e^x-\frac{1}{4}.$$

103. 7. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y''+y=x\sin x.$$

Ecuația caracteristică este: $r^2+1=0$, care are drept rădăcini pe $\pm i$, deci: $\bar{y}=C'\cos x+C''\sin x$. Soluția particulară va fi de forma:

$$y_0=(Ax+B)x\sin x+(Cx+D)x\cos x.$$

Găsim

$$y=C'\cos x+C''\sin x+\frac{1}{4}x\sin x-\frac{1}{4}x^2\cos x=\left(C'-\frac{1}{4}x^2\right)\cos x+$$

$$+\left(C''+\frac{1}{4}x\right)\sin x.$$

103. 8. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y^{(IV)}+2y''+y=8\cos x.$$

Ecuația caracteristică este

$$r^4+2r^2+1=(r^2+1)^2=0,$$

care are rădăcinile $\pm i$ duble. Soluția ecuației fără parte dreaptă este

$$\overline{y}=(C_1x+C_2)\cos x+(C_3x+C_4)\sin x.$$

Cum i este rădăcină dublă, o soluție particulară va fi de forma:

$$y_0=x^2(A\cos x+B\sin x);$$

se găsește integrala generală

$$y=(-x^2+C_1x+C_2)\cos x+(C_3x+C_4)\sin x.$$

103. 9. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$12x^3y'''-25x^2y''+28xy'-6y=0.$$

Ecuația este de tip Euler. Făcând substituția: $x=e^t$ și în baza calculului făcut la prob 57. 7 în care luăm $a=0$,

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right),$$

ecuația diferențială se transformă în

$$12\frac{d^3y}{dt^3}-61\frac{d^2y}{dt^2}+77\frac{dy}{dt}-6y=0,\ \text{etc}$$

Ecuația caracteristică se scrie

$$12r^3-61r^2+77r-6=(r-2)(r-3)(12r-1)=0,$$

încât

$$y=Ce^{2t}+C'e^{3t}+C''e^{\frac{1}{12}t},$$

sau revenind la vechea variabilă

$$y=Cx^2+C'x^3+C''\sqrt[12]{x},$$

103. 10. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=4x.$$

Facem schimbarea de variabilă: $x=e^t$. Avem, în baza formulelor dela problema precedentă,

$$\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+y=4e^t. \qquad (1)$$

Ecuația caracteristică este

$$r^3-r^2-r+1=(r-1)^2(r+1)=0,$$

ceeace spune că soluția ecuației fără parte dreaptă este

$$\bar{y}=(C_1t+C_2)e^t+C_3e^{-t}.$$

Cum 1 este rădăcină dublă a ecuației caracteristice, soluția particulară va fi de forma: $y_0=At^2e^t$, etc.

Soluția generală a ecuației (1) este

$$y=(t^2+C_1t+C_2)e^t+C_2e^{-t},$$

iar a ecuației date

$$y=[(\ln x)^2+C_1\ln x+C_2]x+\frac{C_3}{x}.$$

103. 11. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$xy'''-y''-xy'+y=0.$$

Cum ecuația dată se mai poate scrie

$$x(y'''-y')-(y''-y)=0,$$

vom pune: $y''-y=u$; avem: $xu'-u=0$, $\frac{u'}{u}=\frac{1}{x}$, $\ln u=\ln Cx$, deci; $y''-y=Cx$, care este o ecuație diferențială cu coeficienți constanți și cu parte dreaptă. Cum ecuația caracteristică este: $r^2-1=0$, soluția generală a ecuației fără parte dreaptă este: $\bar{y}=C'e^x+C''e^{-x}$. O soluție particulară a ecuației se vede că este $-Cx$, încât soluția generală este

$$y=-Cx+C'e^x+C''e^{-x},$$

103. 12. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$x^2y''+2nxy'+[n(n-1)-h^2x^2]y=0,$$

n și h fiind două constante, punând: $y=uv$, și determinând pe v în așa fel ca coeficientul lui u' să fie nul.

Avem

$$y=uv,\quad y'=u'v+uv',\quad y''=u''v+2u'v'+uv'',$$

și când înlocuim aceste valori în ecuația dată se găsește că coeficientul lui u' este

$$xv'+nv=0,\quad \frac{v'}{v}+\frac{n}{x}=0,$$

încât: $v=\frac{1}{x^n}$. Rezultă ecuația în u: $u''-h^2u=0$, care fiind o ecuație diferențială cu coeficienți constanți se integrează imediat. Soluția generală este deci

$$y=\frac{C'e^{hx}+C''e^{-hx}}{x^n}.$$

103. 13. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y''+y=\operatorname{tg} x.$$

Soluția ecuației diferențiale fără parte dreaptă este

$$\bar{y}=Ay_1+By_2=A\cos x+B\sin x.$$

Folosind metoda variației de constante, rezultă ecuațiile (V) ce determină pe A și B,

$$A'\cos x+B'\sin x=0;\quad -A'\sin x+B'\cos x=\operatorname{tg} x,$$

de unde scoatem

$$A'=-\frac{\sin^2 x}{\cos x},\quad B'=\sin x$$

adică

$$A=-\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=-\int\frac{dx}{\cos x}+\int\cos x\,dx=-\ln\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x\right)+\sin x+C_1,$$

$$B=\int\sin x\,dx=-\cos x+C_2,$$

așa că soluția generală este

$$y=-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x\right)+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

103. 4. *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y''-6y'+9y=e^{3x}\frac{9x^2+6x+2}{x^3}.$$

Soluția ecuației diferențiale fără parte dreaptă este

$$\bar{y}=(Ax+B)e^{3x}.$$

Mai departe folosind metoda variației de constante

$$A'xe^{3x}+B'e^{3x}=0;\quad A'x+B'=0,$$

$$A'(1+3x)e^{3x}+B'3e^{3x}=e^{3x}\frac{9x^2+6x+2}{x^3};\quad A'(1+3x)+3B'=\frac{9x^2+6x+2}{x^3},$$

de unde scoatem

$$A'=\frac{9x^2+6x+2}{x^3};\quad A=9\ln x-\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}+C,$$

$$B'=-\frac{9x^2+6x+2}{x^2};\quad B=-9x-6\ln x+\frac{2}{x}+C',$$

încât integrala generală este:

$$y=[3(3x-2)\ln x+\frac{1}{x}-9x-6+Cx+C']e^{3x}.$$

§ 104. Aplicații geometrice. Curbe pe suprafață

1. In general, când ni se cere determinarea unei curbe printr'o proprietate exprimată cu ajutorul tangentei, normalei, cercului de curbură (§ 59, no. 4) etc., avem de aface cu integrarea unei ecuații diferențiale. Aceasta înseamnă că, în general, curbele cari se bucură de proprietatea dată formează o familie cu un parametru, doi parametrii, etc.

2. Fiind dată o familie de curbe (C), depinzând de un parametru, se zice că o curbă (C') este o *traiectorie ortogonală* a curbelor (C), dacă ea le taie pe toate sub un unghiu drept*). Unei familii de curbe (C) îi corespunde o familie de curbe (C'). Curbele (C) și (C') luate împreună se zice că formează două familii de curbe ortogonale. Traiectoriile ortogonale ale curbelor (C') vor fi curbele (C).

In Mecanica teoretică *curbele de nivel (curbe echipotențiale)* și cu *liniile de forță* formează două familii de curbe ortogonale. In Hidrodinamică liniile de forță se numesc *linii de curent* și traiectoriile lor ortogonale sunt *liniile potențialului vitezelor.*

După modul cum este definită familia de curbe (C), avem următoarele metode pentru determinarea traiectoriilor ortogonale.

a) Familia de curbe (C) este definită prin ecuația carteziană: $f(x, y; a)=0$, a fiind un parametru. Familia de curbe (C') va fi determinată prin ecuația diferențială ce se capătă din eliminarea lui a între ecuațiile

$$f(x, y; a)=0, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{f'_y}{f'_x}. \tag{I}$$

b) Familia de curbe (C) este definită prin ecuația lor în coordonate polare: $\rho=f(\theta; a)$; traiectoriile lor ortogonale (C') sunt definite prin eliminarea parametrului a între ecuațiile

$$\rho=f(\theta, a), \quad \frac{\rho}{\rho'}=-\frac{f'_\theta}{f}. \tag{II}$$

c) Familia de curbe (C), plane sau strâmbe**), definită prin ecuațiile lor parametrice

$$x=f(t, a), \quad y=g(t, a), \quad z=h(t, a). \tag{III}$$

Se consideră ecuația diferențială

$$(f'^2_t+g'^2_t+h'^2_t)\,dt+(f'_t f'_a+g'_t g'_a+h'_t+h'_a)\,da=0, \tag{IV}$$

care ne definește pe a ca funcție de t, sau invers. Inlocuind această valoare în (III) obținem familia de traiectorii ortogonale.

d) Dacă familia de curbe (C) este definită printr'o ecuație diferențială de forma: $f(x, y, y')=0$, ecuația diferențială ce definește curbele (C'), se obține din aceasta înlocuind pe y' cu $-\frac{1}{y'}$.

*) Prin unghiul a două curbe plane înțelegem unghiul tangentelor în punctul lor de intersecție.

**) In cazul curbelor plane, ecuațiile (III) se reduc la primele două.

3. După cum am spus la § 65 no. 3—5, liniile de curbură, asimptotice și geodezice ale unei suprafețe, sunt determinate prin ecuații diferențiale a căror integrare ne dă determinarea lor.

104. 1. *Să se găsească curbele plane care au curbura constantă.*

Se știe (§ 59, III) că raza de curbură a unei curbe plane este dată de formula

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=R,$$

unde în problema noastră îl vom presupune pe R constant.

Punem: $y'=\operatorname{tg}\theta$; ecuația precedentă se scrie

$$\cos\theta\, d\theta=\frac{1}{R}\cdot dx;\quad \sin\theta=\frac{x-C_1}{R},$$

sau, revenind la vechea variabilă

$$\frac{y'^2}{1+y'^2}=\frac{(x-C_1)^2}{R^2},$$

de unde

$$y=\int\frac{x-C_1}{\sqrt{R^2-(x-C_1)^2}}\,dx+C_2=-\sqrt{R^2-(x-C_1)^2}+C_2,$$

sau încă

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=R^2,$$

adică curbele căutate sunt cercuri.

104. 2. *Să se găsească traiectoria ortogonală a unei familii de parabole tangente în origină la axa Oy și având toate pe Ox ca axă.*

Ecuația parabolelor este: $y^2-2ax=0$. Traiectoriile ortogonale sunt definite prin ecuațiile

$$y^2-2ax=0,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{-a},$$

între cari eliminând pe a obținem ecuația diferențială

$$y+2x\frac{dx}{dy}=0,\quad y\,dy+2x\,dx=0,$$

care integrată dă

$$\frac{1}{2}y^2+x^2=C^2;\quad \frac{x^2}{C^2}+\frac{y^2}{(C\sqrt{2})^2}=1,$$

și care reprezintă o familie de elipse având drept axe, axele de coordonate și fiind omotetice între ele.

104. 3. *Să se găsească traiectoria ortogonală a cercurilor tangente în origină la axa Oy.*

Ecuația cercurilor date este

$$(x-a)^2+y^2=a^2,\quad x^2+y^2-2ax=0.$$

Folosind formulele de transformare a coordonatelor carteziene în coordonate polare (§ 58, I) ecuația curbelor se scrie: $\rho=2a\cos\theta$. Traiectoriile ortogonale se vor găsi eliminând pe a între ecuațiile

$$\rho=2a\cos\theta,\quad \frac{\rho}{\rho'}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Cum în ultima ecuație parametrul nu mai există, ea va reprezenta ecuația diferențială căutată. Integrată dă

$$\frac{\rho'}{\rho}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta};\quad \ln\rho=\ln\sin\theta+\ln C,$$

de unde: $\rho=C\sin\theta$, adică traiectoriile ortogonale sunt tot cercuri tangente în origine la axa Ox.

104. 4. *Să se găsească traiectoria ortogonală a unei familii de cercuri având raza constantă și centrul mobil pe axa Ox.*

Ecuația cercurilor este

$$(x-a)^2+y^2=R^2.$$

Punând: $x-a=R\cos\varphi$, $y=R\sin\varphi$ ecuația precedentă este verificată rezultând următoarea reprezentare parametrică a familiei,

$$x=a+R\cos\varphi,\quad y=R\sin\varphi.$$

Ecuația (IV) este

$$R\,d\varphi-\sin\varphi\,da=0;\quad da=R\frac{d\varphi}{\sin\varphi}.$$

care integrată dă

$$a=R\ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi+C,$$

încât familia traiectoriilor ortogonale are ecuațiile parametrice

$$x=R\left(\cos\varphi+\ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\right)+C,\quad y=R\sin\varphi;\qquad (1)$$

aceste curbe sunt *tractoare* ce se obțin din tractoarea corespunzătoare lui $C=0$ printr'o translație dealungul axei Ox (prob. 61. 7).

Să justificăm acest lucru, adică să arătăm că ecuațiile (1), în care facem $C=0$, sunt totuna cu ecuațiile (2) dela problema citată cu deosebirea semnului lui x (curbele din problemă sunt simetricele celor reamintite, față de axa Oy). Punem

$$\operatorname{ch}\theta=\frac{1}{\sin\varphi}.\qquad (2)$$

Având în vedere relațiile ce există între funcțiunile iperbolice (§ 40), avem

$$\operatorname{sh}\theta=\sqrt{ch^2\theta-1}=\operatorname{ctg}\varphi;\quad (3)\quad \operatorname{th}\theta=\cos\varphi.$$

Tot așa

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi=\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi}=\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}=\frac{1}{\operatorname{ch}\theta+\operatorname{sh}\theta}=e^{-\theta};\quad (4)\quad \theta=-\ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi.$$

Formulele (1), în baza formulelor (2), (3), (4), devin

$$x=R(\operatorname{th}\theta-\theta),\quad y=\frac{R}{\operatorname{ch}\theta},$$

adică ceiace trebuia arătat.

104. 5. *Să se găsească loxodromicele, adică curbele care intersectează sub un unghiu* α *toate meridianele sferei.*

Luând sfera cu centrul în origine, ecuația ei va fi: $x^2+y^2+z^2=a^2$ și are reprezentarea parametrică

$$x=a\sin\theta\cos\varphi,\quad y=a\sin\theta\sin\varphi,\quad z=a\cos\theta \tag{1}$$

unde meridianele se găsesc scriind că $\varphi=\text{const}$ (§ 64, fig. 101). Problema cere să găsim legătura ce există între φ și θ care definește loxodromicele pe suprafață. Presupunând că această legătură este de forma: $\varphi=f(\theta)$, parametrii directori ai tangentei într'un punct depe suprafață la meridiana și loxodromica ce trec prin acest punct, vor fi

$$\begin{aligned} l&=a\cos\theta\cos\varphi & l'&=a\cos\theta\cos\varphi-a\sin\theta\sin\varphi\frac{d\varphi}{d\theta},\\ m&=a\cos\theta\sin\varphi, & m'&=a\cos\theta\sin\varphi+a\sin\theta\cos\varphi\frac{d\varphi}{d\theta},\\ n&=-a\sin\theta & n'&=-a\sin\theta. \end{aligned}$$

Formula

$$\cos\alpha=\frac{ll'+mm'+nn'}{\sqrt{(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)}}$$

devine după ce se fac toate înlocuirile

$$\cos^2\alpha\left[1+\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2\sin^2\theta\right]=1;\quad \epsilon\operatorname{tg}\alpha\frac{dQ}{\sin\theta}=d\varphi,$$

unde $\epsilon=\pm 1$. Integrând această ecuație, obținem

$$\epsilon\operatorname{tg}\alpha\ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta=\varphi+C.$$

Inlocuind în (1) pe φ scos din această relație, avem reprezentarea parametrică a loxodromicelor sferei.

104. 6. *Să se găsească liniile asimptotice ale suprafeței*

$$x=u+v,\quad y=u^2+v^2,\quad z=u^2-v^2.$$

Ecuația (XI) dela § 65 se scrie

$$v\,du^2+u\,dv^2=0,$$

sau încă

$$\frac{du}{\sqrt{u}}\pm\frac{dv}{\sqrt{-v}}=0;\quad \sqrt{u}\pm\sqrt{-v}=C,$$

unde C este o constantă arbitrară. Aceste două ecuații caracterizează liniile asimptotice. Ecuațiile lor se pot scrie sub forma rațională

$$(u+v)^2-2C^2(u-v)+C^4=0.$$

104. 7. *Să se găsească liniile de curbură ale suprafețelor de rotație.*

In general, o suprafață de rotație având drept axă pe Oz, are ecuațiile parametrice

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=f(r), \tag{1}$$

pe care curbele reprezentate de ecuațiile $r=\text{const.}$, respectiv $\theta=\text{const.}$, sunt paralelii și meridianele suprafeței. Vom folosi ecuația (VIII) dela § 65. Avem succesiv

$$x_r=\cos\theta,\ y_r=\sin\theta,\ z_r=f'(r);\quad x_\theta=-r\sin\theta,\ y_\theta=r\cos\theta,\ z_\theta=0;$$

$$x_{rr}=0,\ y_{rr}=0,\ z_{rr}=f''(r);\qquad x_{r\theta}=-\sin\theta,\ y_{r\theta}=\cos\theta,\ z_{r\theta}=0;$$

$$x_{\theta\theta}=-r\cos\theta,\ y_{\theta\theta}=-r\sin\theta,\quad z_{\theta\theta}=0;$$

$$E=1+f'^2(r),\ F=0,\ G=r^2;\ D=rf''(r),\ D'=0,\ D''=r^2f'(r),$$

încât ecuația liniilor de curbură este

$$\begin{vmatrix} d\theta^2 & -drd\theta & dr^2 \\ 1+f'^2(r) & 0 & r^2 \\ rf''(r) & 0 & r^2f'(r) \end{vmatrix}=0,$$

sau încă

$$r^2\{f'(r)[1+f'^2(r)]-rf''(r)\}drd\theta=0, \tag{2}$$

adică se reduce la: $drd\theta=0$ sau separat la $dr=0$, $d\theta=0$. Liniile de curbură ale suprafețelor de rotație sunt paralelii și meridianele. Dacă în (2) paranteza este nulă, liniile de curbură sunt nedeterminate. Să se arate că în acest caz, suprafața este o sferă.

§ 105. Integrarea prin serii

Să presupunem că avem de integrat o ecuație diferențială de ordinul n care nu este de tipul celor considerate până aci și nici nu poate fi redusă printr'o substituție oarecare la unul din aceste tipuri. In acest caz încercăm să-i căutăm o soluție sub formă de serie întreagă

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \tag{1}$$

în care coeficienții a_n sunt nedeterminați și se determină prin înlocuirea seriei în ecuație, scriind că rezultatul este o identitate. In general, coeficienții seriei sunt determinați în funcție de primii n: $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, cari reprezintă, abstracție făcând de factori numerici, valorile funcțiunei y și a derivatelor ei pentru $x=0$. Se poate demonstra că în ipoteza că acești coeficienți satisfac la anumite inegalități, seria (1) este convergentă într'un interval în interiorul căruia y reprezentat prin suma ei, reprezintă soluția generală a ecuației diferențiale, constantele fiind primii n coeficienți.

105. 1. *Se dă ecuația diferențială*

$$(x^2-1)y''-2(n-1)xy'+n(n-1)y=0. \tag{1}$$

n fiind întreg și pozitiv. Să se găsească integrala y (x) a ecuației (1) *satisfăcând condițiilor: y (0) = a, y'(0) = b, a și b fiind cunoscute. Din rezultatul găsit să se deducă integrala generală a ecuației.*

Fie

$$y(x)=a+bx+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_px^p+\cdots,$$

soluția căutată. Va trebui să avem

$$(x^2-1)[1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3x+\cdots+p\,(p-1)\,a\,x^{p-2}+\cdots]-2(n-1)(bx+a_2x^2+$$
$$+\cdots+pa_px^p+\cdots)+n(n-1)(a+bx+a_2x^2+\cdots+a_px^p+\cdots)=0.$$

Coeficienții diferitelor puteri ale lui x trebuind să fie nuli, rezultă

$$a_2=\frac{n(n-1)}{2!}a,\quad a_3=\frac{(n-1)(n-2)}{3!}b,\ldots,$$

$$a_p=\frac{(n-p+2)(n-p+1)}{(p-1)p}a_{p-2},\ldots$$

Din aproape în aproape se găsește termenul general

$$a_{2p}=C_n^{2p}a,\quad a_{2p+1}=C_n^{2p+1}\frac{b}{n},$$

și $a_p=0$ dacă $p>n$. Soluția căutată este deci

$$y(x)=a(1+C_n^2x^2+C_n^4x^4+\cdots)+\frac{b}{n}(C_n^1x+C_n^3x^3+C_n^5x^5+\cdots),$$

sau încă

$$y(x)=\frac{1}{2}a[(1+x)^n+(1-x)^n]+\frac{b}{2n}[(1+x)^n-(1-x)^n],$$

și cum a și b sunt două constante arbitrare, iar $y_1=(1+x)^n$ și $y_2=(1-x)^n$ două soluții independente deoarece determinantul

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (1+x)^n & (1-x)^n \\ n(1+x)^{n-1} & -n(1-x)^{n-1} \end{vmatrix}=-2n(1-x^2)^{n-1},$$

nu este identic nul, soluția generală va fi (§ 102, no. 4).

$$y=A(1+x)^n+B(1-x)^n,$$

A și B fiind două constante arbitrare.

105. 2. *Se dă ecuația diferențială*

$$xy''+(2n+1)y'+xy=0, \qquad (E_n)$$

unde n este un număr pozitiv sau nul.

1° *Admițând că condițiile inițiale* $y(0)=1$, $y'(0)=0$, *determină o singură integrală* $I_n(x)$ *continuă pentru toate valorile lui* x, *să se demonstreze, fără a integra* E_n, *că:* a) I_n *este o funcțiune pară;* b) xI_{n+1} *este proporțional cu* I_n' c) $x^2 I_{n+1}$ *se exprimă linear cu coeficienți constanți în funcție de* I_n *și* I_{n-1}; d) *două rădăcini consecutive și de același semn ale lui* I_n *cuprind o rădăcină a lui* I_{n+1}.

2° *Să se determine seria întreagă*

$$I_n = 1 + a_2 x^2 + \cdots + a_{2p} x^{2p} + \cdots,$$

care satisface lui E_n. *Să se studieze convergența și apoi să se stabilească relațiile*

$$xI_{n+1} = AI_n', \quad x^2 I_{n+1} = BI_n + CI_{n-1},$$

A, B, C fiind constante ce urmează să se determine.

3° *Să se examineze cazul particular* $n=-\frac{1}{2}$; $I_{1/2}$ *este câtul a două funcțiuni simple. Care este forma lui* $I_{k+1/2}$ *k fiind un întreg pozitiv.*

1° a) Fie: $I_n(-x)=z(x)$; avem $z_x'=-I_n'(-x)$, $z_{x^2}''=I_n''(-x)$.

Dar

$$xI_n''(x)+(2n+1)I_n'(x)+xI_n(x)=0,$$

unde înlocuind pe x prin $-x$

$$-xI_n''(-x)+(2n+1)I_n'(-x)-xI_n(-x)=0$$

adică

$$xz_{x^2}''+(2n+1)z_x'+xz=0.$$

Această relație demonstrează că $z(x)$ este o soluție a lui E_n, dar $z(0)=I_n(0)=1$, $z_x'(0)=-I_n'(0)=0$. Cum E_n, prin ipoteză are o singură soluție continuă, definită prin condițiile inițiale date, rezultă că: $z(x)=I_n(x)$, adică: $I_n(-x)=I_n(x)$, ceeace exprimă că $I_n(x)$ este o funcțiune pară.

b) Scriem pe E_n sub forma

$$y''+(2n+1)\frac{y'}{x}+y=0,$$

care derivată ne dă

$$y'''+\frac{2n+1}{x}y''+\left(1-\frac{2n+1}{x^2}\right)y'=0;$$

aceasta însemnează că: $I_n'=u$ este o soluție a ecuației

$$u''+\frac{2n+1}{x}u'+\left(1-\frac{2n+1}{x^2}\right)u=0.$$

Cu ajutorul acestei ecuații diferențiale putem găsi ecuația la care satisface funcțiunea

$$\frac{I_n'}{x}=\frac{u}{x}=v \quad (u=vx),$$

şi anume

$$xv''+(2n+3)v'+xv=0,$$

care nu este altceva decât E_{n+1}. Mai mult, prin ipoteză $I_{n+1}(0)=1$, $I'_{n+1}(0)=0$. Să considerăm şi funcţiunea $v(x)=\frac{I'_n(x)}{x}$. Am arătat mai sus că $I_n(x)$ este o funcţie pară, deci $I'_n(x)$ este impară, adică $v(x)$ este o funcţiune pară şi $v'(x)$ o funcţie impară; deci $v(0)=k$, $v'(0)=0$. In concluzie

$$I_{n+1}=\frac{v(x)}{k}=\frac{I'_n}{kx} \quad \text{sau:} \quad I'_n=kx\,I_{n+1}.$$

c) In virtutea celor de mai sus, avem

$$xI_{n+1}=AI'_n \quad \text{şi} \quad xI_n=A_1I'_{n-1},$$

A şi A_1 fiind constante. Din ultima rezultă că

$$xI'_n+I_n=A_1I'_{n-1}$$

şi în baza faptului că I_{n-1} verifică pe E_{n-1},

$$x^2I_{n+1}=AxI'_n=-AI_n+AA_1I'_{n-1}=-AI_n-AA_1(I_{n+1}+$$

$$+\frac{2n+1}{x}I'_{n-1})=-AI_n-AA_1I_{n-1}-(2n+1)AI_n.$$

adică x^2I_{n+1} se exprimă linear cu ajutorul lui I_n şi I_{n-1}.

d) Fie α şi β două rădăcini de acelaşi semn ale funcţiunei $I_n(x)$. Atunci în baza teoremei lui *Rolle* (§ 44, no. 3) există cel puţin o valoare γ cuprinsă între α şi β, astfel ca $I'_n(\gamma)=0$. Dar $I'_n(x)=kxI_{n+1}(x)$, încât $k\gamma I_{n+1}(\gamma)=0$. Cum $\gamma\neq0$, căci prin ipoteză $I_{n+1}(0)=1$, rezultă că $I_{n+1}(\gamma)=0$, adică ce trebuia arătat.

2° Luând primele două derivate ale seriei găsim că

$$xI''_n+(2n+1)I'_n+xI_n=\sum[a_{2p}+(2n+1)(2p+2)a_{2p+2}+$$

$$+(2p+2)(2p+1)a_{2p+2}]x^{2p+1},$$

ceeace spune că trebue să avem

$$(2p+2)(2n+2p+2)a_{2p+2}+a_{2p}=0,$$

şi cum $n>0$ coeficientul lui a_{2p+2} nu se anulează niciodată şi deci putem scrie

$$a_{2p+2}=-\frac{a_{2p}}{4(p+1)(n+p+1)}.$$

Rezultă din aproape în aproape că

$$a_{2p}=\frac{(-1)^p}{2^{2p}p!(n+1)(n+2)\dots(n+p)}.$$

Pentru convergență observăm că

$$\lim_{p\to\infty}\left|\frac{a_{2p+2}}{a_{2p}}x^2\right|=\lim_{p\to\infty}\frac{|x|^2}{4(p+1)(n+p+1)}=0,$$

adică seria este absolut convergentă pentru toate valorile lui x. Mai departe, cum avem

$$xI_{n+1}=\sum\frac{(-1)^p x^{2p+1}}{2^{2p}\,p!\,(n+2)\dots(n+p+1)},\quad I'_n=\sum\frac{(-1)^{p+1}(2p+2)\,x^{2p+1}}{2(p+1)!\,(n+1)\dots(n+p+1)},$$

rezultă că

$$xI_{n+1}=-2(n+1)I'_n.$$

Pentru a stabili cea de-a doua relație ținem seamă că va trebui să avem

$$\frac{(-1)^{p-1}}{2^{2p-2}(p-1)!\,(n+2)\dots(n+p)}=\frac{B(-1)^p}{2^{2p}\,p!\,(n+1)\dots(n+p)}+$$

$$+\frac{C(-1)^p}{2^{2p}\,p!\,n\,(n+1)\dots(n+p-1)},$$

pentru orice valoare întreagă și pozitivă a lui p. Simplificând ne rămâne

$$-4(n+1)\,np=Bn+C(n+p),$$

de unde prin identificare, rezultă: $C=-4n(n+1)$, $B=4n(n+1)$.

3° Pentru $n=\frac{1}{2}$, I_n devine

$$I_{\frac{1}{2}}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots+\frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p+1)!}+\dots$$

$$=\frac{1}{x}\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+\frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}+\dots\right]=\frac{\sin x}{x},$$

în baza formulei dela § 51, (IV). Folosind formula ce leagă pe I_{n+1} de I'_n avem

$$xI_{\frac{3}{2}}=-3I'_{\frac{1}{2}}=-3\frac{x\cos x-\sin x}{x^2};\quad I_{\frac{3}{2}}=-\frac{3}{x^2}\cos x+\frac{3}{x^3}\sin x.$$

Mai departe folosind relația ce leagă pe I_{n+1} de I_n și I_{n-1}, deducem

$$I_{\frac{5}{2}}=\frac{3\cdot 5}{x^2}(I_{\frac{3}{2}}-I_{\frac{1}{2}})=-\frac{45}{x^4}\cos x+\left(\frac{45}{x^5}-\frac{15}{x^3}\right)\sin x,$$

și din aproape în aproape

$$I_{k+\frac{1}{2}}=P_k\left(\frac{1}{x}\right)\cos x+Q_k\left(\frac{1}{x}\right)\sin x,$$

$P_k(u)$ fiind un polinom par în u de gr. $2k$ iar $Q_k(u)$ un polinom impar în u și de gr. $2k+1$.

105. 3. *Presupunând că m nu este întreg, se cere să se integreze ecuația diferențială*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0. \tag{1}$$

numită ecuația lui Bessel.

Pentru integrare, facem mai întâiu schimbarea: $y=x^m z$.

Avem

$$y'=x^{m-1}(xz'+mz),\quad y''=x^{m-2}[x^2z''+2mxz'+m(m-1)z],$$

valori cari introduse în (1), conduc la ecuația

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{2m+1}{x}\frac{dz}{dx}+z=0,$$

și care nu este alta decât ecuația dela problema precedentă. Rezultă

$$y=Cx^m\left[1-\frac{x^2}{2^2(m+1)}+\frac{x^4}{2^4 2!(m+1)(m+2)}-\frac{x^6}{2^6 3!(m+1)(m+2)(m+3)}+\cdots\right]. \tag{2}$$

Dacă se ia pentru constanta C valoarea particulară

$$C=\frac{1}{2^m\Gamma(m+1)}, \tag{3}$$

în baza unei formule stabilită la prob. 79. 1 vom putea scrie pe y sub forma

$$J_m(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}, \tag{4}$$

seria din dreaptă fiind convergentă oricare ar fi x (conform celor arătate la problema menționată). Funcția $J_m(x)$ se numește *funcția cilindrică de ordinul m*, sau *funcția lui Bessel de ordinul m.*

Se observă că dacă în ecuația diferențială schimbăm pe m în $-m$, ecuația nu se schimbă. Aceasta înseamnă că și funcția $J_{-m}(x)$ satisface la aceiași ecuație diferențială. Presupunând că am demonstrat că funcțiile $J_m(x)$ și $J_{-m}(x)$ sunt independente (ceiace este adevărat când m nu este întreg), soluția generală a ecuației (1) va fi

$$y=C_1 J_m(x)+C_2 J_{-m}(x),$$

C_1 și C_2 fiind două constante arbitrare.

Observație. Când am introdus funcțiunea $\Gamma(a)$ (§ 79, no. 2), am spus că prin ipoteză $a>0$. În funcțiunea $J_{-m}(x)$ intră prin formula (3) valoarea lui $\Gamma(-m+1)$ ceiace ar însemna că trebue să luăm $1-m>0$, $m<1$. Această condiție restrânge mult ordinul funcțiunilor lui *Bessel* când acesta este negativ. Pentru a se evita acest lucru se atribue lui $\Gamma(a)$ în cazul $a<0$ (dar diferit de numere întregi) altă definiție cu ajutorul unei expresii sub formă de limită și anume

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{a-1}}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}. \tag{6}$$

Pentru a se evita însă arătarea existenței acestei limite și proprietățile ei, se poate lua valoarea lui $\Gamma(1-m)$ din formula (prob. 79, 8).

$$\Gamma(m)\,\Gamma(1-m)=\frac{\pi}{\sin \pi}\,.$$

105. 4. *Să se găsească soluția generală a ecuației*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx}+y=0. \tag{7*}$$

Ecuația din enunț se deduce din cea dela problema precedentă făcând $m=0$. Soluția obținută acolo nu poate fi folosită deoarece m este întreg. Cele două soluții particulare se reduc la soluția unică

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \tag{8}$$

Pentru a se obține o nouă soluție, se procedează precum urmează**). Se notează cu $F(m, x)$ funcțiunea y definită prin (2), în care luăm $C=1$. Deoarece când m este mic, $F(m, x)$ și $F(-m, x)$ sunt soluții ale ecuației (1), și expresia

$$\frac{F(m, x)-F(-m, x)}{m-(-m)},$$

îi va fi soluție. Aceasta însemnează că funcția

$$K_0(x)=\lim_{m\to 0}\frac{F(m, x)-F(-m, x)}{m-(-m)}=\left[\frac{d}{dm}F(m, x)\right]_{m=0} \tag{9}$$

va fi o soluție a ecuației (7). Soluția generală a ecuației (7) va fi deci

$$y=C_1 J_0(x)+C_2 K_0(x). \tag{10}$$

Funcția $K_0(x)$ se numește *funcțiunea cilindrică sau a lui Bessel de speța a doua* de ord. zero.

Avem

$$K_0(x)=\left\{x^m \ln x\left[1-\frac{x^2}{2^2(m+1)}+\frac{x^4}{2^4 2!(m+1)(m+2)}-\cdots\right]\right.$$
$$\left.+x^m\frac{d}{dm}\left[1-\frac{x^2}{2^2(m+1)}+\frac{x^4}{2^4 2!(m+1)(m+2)}-\cdots\right]\right\}. \tag{11}$$

Termenul general al parantezei a doua este egal cu

$$(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^{2n}n!}\,\frac{d}{dm}\,\frac{1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}\,.$$

---

*) Deoarece această problemă are o strânsă legătură cu precedenta s'a numerotat formulele în continuare.

**) Metoda poate fi folosită cu succes pentru găsirea unei a doua soluții a ecuației lui *Bessel* în cazul când m este întreg.

Dar,

$$\frac{d}{dm}\ln\frac{1}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}=-\frac{d}{dm}[\ln(m+1)+\ln(m+2)+\dots+\ln(m+n)]=$$
$$=-\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\dots+\frac{1}{m+n}\right),$$

de unde

$$\frac{d}{dm}\frac{1}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}=-\frac{1}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}\left(\frac{1}{m+1}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{m+2}+\dots+\frac{1}{m+n}\right).$$

Folosind această formulă, avem din (11),

$$\left\{\begin{array}{l} K_0(x)=J_0(x)\ln x+\frac{x^2}{2^2(1!)^2}\ \frac{1}{1}-\frac{x^4}{2^4(2!)^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+ \\ +\frac{x^6}{2^6(3!)^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n!)^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+\dots \end{array}\right. \tag{12}$$

105. 5. *Să se integreze ecuația lui Legendre*

$$(1-x^2)y''-2xy'+m(m+1)y=0. \tag{1}$$

Vom căuta o soluție sub formă de serie: $y=\sum a_n x^n$. Inlocuind în ecuația dată, rezultă că între coeficienți trebue să avem relația

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}+[m(m+1)-n(n+1)]a_n=0;$$

$$a_{n+2}=-\frac{(m-n)(m+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n.$$

Această relație ne spune că pentru coeficienții de rang cu soț avem

$$a_2=-\frac{m(m+1)}{2!}a_0,\ a_4=\frac{m(m-2)(m+1)(m+3)}{4!}a_0, \tag{1}$$

$$a_6=-\frac{m(m-2)(m-4)(m+1)(m+3)(m+5)}{6!}a_0,\dots$$

iar pentru coeficienții de rang fără soț,

$$a_3=-\frac{(m-1)(m+2)}{3!}a_1,\ a_5=\frac{(m-1)(m-3)(m+2)(m+4)}{5!}a_1,$$

$$a_7=-\frac{(m-1)(m-3)(m-5)(m+2)(m+4)(m+6)}{7!}a_1,\dots$$

Deci, dacă punem

$$p_m(x)=1-\frac{m(m+1)}{2!}x^2+\frac{m(m-2)(m+1)(m+3)}{4!}x^4-\dots,$$

$$q_m(x)=x-\frac{(m-1)(m+2)}{3!}x^3+\frac{(m-1)(m-3)(m+2)(m+4)}{5!}x^5-\dots$$

atunci soluţia generală a ecuaţiei date va fi

$$y = a_0\, p_m(x) + a_1\, q_m(x), \tag{2}$$

unde a_0 şi a_1 sunt două constante arbitrare.

Seriile cari definesc cele două funcţiuni $p_m(x)$ şi $q_m(x)$ sunt absolut convergente în ipoteza $|x|<1$. In adevăr, pentru prima serie avem

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(m-2n)(m+2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}\,x^2\right| = x^2,$$

şi la fel pentru a doua.

Dacă m este un întreg pozitiv, atunci una din cele două serii ce reprezintă pe $p_m(x)$ sau $q_m(x)$ se reduce la un polinom. Acest polinom abstracţie făcând de un factor constant, scris după puterile descrescătoare ale lui m este,

$$P_m(x) = \frac{1.3\ldots(2m-1)}{m!}\left[x^m - \frac{m(m-1)}{2(2m-1)}\,x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.4(2m-1)(2m-2)}\,x^{m-4} - \ldots\right], \tag{3}$$

şi se numeşte *polinomul lui Legendre* de gr. m.

Se vede din (2), că ecuaţia (1), atunci când are drept soluţie un polinom, orice polinom care o verifică nu poate diferi de polinomul lui Legendre decât printr'un factor constant.

CAPITOLUL XIV

SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE

§ 106. Sisteme de primul ordin.

1. Incepem prin a considera cazul simplu a două ecuaţii diferenţiale care conţin două funcţii necunoscute, de o singură variabilă, derivatele acestor funcţii întrând în compunerea ecuaţiilor, numai de ordinul 1. Un asemenea sistem rezolvat în raport cu aceste derivate este de forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y,z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x,y,z). \tag{I}$$

şi se rezolvă în general prin eliminarea uneia din necunoscute şi integrând ecuaţia obţinută (având o singură funcţiune necunoscută) prin metodele date la Cap. 13. *Soluţia generală* a sistemului conţine două constante arbitrare şi este de forma

$$y = F(x,C_1,C_2), \quad z = G(x,C_1,C_2), \tag{II}$$

O *soluţie particulară* se obţine particularizând constantele. Se numeşte *soluţie determinată prin condiţii iniţiale,* soluţia care pentru $x=x_0$, ia valorile impuse dinainte: $y=y_0$, $z=z_0$.

Din punct de vedere geometric soluţia generală a sistemului (I) reprezintă o familie de curbe de doi parametri. A determina o soluţie prin condiţii iniţiale, revine la a găsi din această familie curba ce trece printr'un punct dat.

2. Sistemul (I) se poate scrie în general sub forma

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \quad \text{(III)}$$

Se numeşte o *integrală* a sistemului: (I), sau (III), o funcţiune $u(x,y,z)$ care egalată cu o constantă verifică sistemul. Rezolvând sistemul (II) (în raport cu C_1 şi C_2 obţinem două integrale $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ ale sistemului. Orice funcţie: $w(u,v)$ este o integrală a sistemului. Invers, dacă cunoaştem două integrale independente ale sistemului

$$u(x,y,z)=C_1,\ v(x,y,z)=C_2, \quad \text{(IV)}$$

ele definesc soluţia generală, deoarece rezolvându-le în raport cu y şi z ajungem la forma (II).

3. In general, un sistem de n ecuaţii cu n funcţii necunoscute y_k, de o singură variabilă x, este de forma

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x,y_1,y_2,\dots y_n), \qquad (k=1,2,\dots,n). \quad \text{(V)}$$

Un asemenea sistem se poate scrie şi sub forma (III); în acest caz, funcţiunile şi variabila joacă acelaşi rol, încât uniformizând notaţiile, notând variabila cu x_1 şi funcţiunile cu $x_2,x_3,\dots,x_n$, sistemul se scrie sub forma

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n}, \quad \text{(VI)}$$

P_k fiind în general o funcţiune de $x_1,x_2,\dots,x_n$.

Integrala generală a sistemului (V) este de forma

$$y_k = F_k(x,C_1,C_2,\dots,C_n) \qquad (k=1,2,\dots,n), \quad \text{(VII)}$$

depinzând de n constante arbitrare: o integrală a sistemului (VI) este o expresie de forma

$$u(x_1,x_2,\dots,x_n)=C. \quad \text{(VIII)}$$

n integrale determină integrala generală a sistemului.

4. **Traiectorii ortogonale a unei familii de suprafeţe.** Fiind dată o familie de suprafeţe reprezentată prin ecuaţia: $f(x,y,z;\alpha)=0$, (IX) analog ca la § 104, no. 2, se zice că o curbă (C) este traiectorie ortogonală a familiei, când ea taie toate suprafeţele familiei sub un unghi drept*). Traiectoriile ortogonale se găsesc integrând sistemul ce se capătă eliminând parametrul α înte ecuaţia (IX) şi ecuaţiile

$$\frac{dx}{F'_x} = \frac{dy}{F'_y} = \frac{dz}{F'_z}. \quad \text{(X)}$$

Traiectoriile ortogonale sunt o familie de curbe cu doi parametri.

*) Tangenta la curbă este perpendiculară pe planul tangent la suprafaţă, în punctul lor de intersecţie.

Problema traiectoriilor ortogonale este strâns legată de următoarea problemă de Mecanică teoretică. Să presupunem că ni se dă un câmp de forțe, definit prin componentele (X,Y,Z) ale forței, atașată fiecărui punct al câmpului, și presupunem funcțiuni de x,y,z coordonatele acestui punct. Dacă X,Y,Z sunt derivatele parțiale ale unei funcțiuni $F(x,y,z)$, prin fiecare punct al câmpului trece câte o suprafață a familiei: $F(x,y,z)=C$, numită *suprafață de nivel* (sau *echipotențială*). Curbele definite prin ecuațiile (X), care iau forma,

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}, \qquad (X')$$

se numesc *linii de forță* și sunt ortogonale suprafețelor de nivel.

106. 1. *Să se integreze sistemul*

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}.$$

Făcând suma numărătorilor pe suma numitorilor deducem

$$dx+dy+dz=0; \quad x+y+z=C_1. \qquad (1)$$

Analog deducem

$$2(xdx+ydy+zdz)=0; \quad x^2+y^2+z^2=C_2. \qquad (2)$$

Cele două integrale obținute ne definesc pe y și z ca funcțiuni de x prin două constante arbitrare și deci ele dau soluția generală. Cum ecuația (2) reprezintă sfere iar (1) plane, curbele integrale sunt cercuri.

106. 2. *Să se integreze sistemul*

$$\frac{dx}{x-y}=\frac{dy}{x+y}=\frac{dz}{z}.$$

Înmulțind primul raport cu x, al doilea cu y și făcând suma numărătorilor pe suma numitorilor obținem un raport egal cu al treilea

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{dz}{z},$$

de unde integrând obținem integrala

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln C_1 z; \quad \sqrt{x^2+y^2}=C_1 z. \qquad (1)$$

Analog obținem expresia integrabilă

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

de unde

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C_2. \qquad (2)$$

Integralele (1) și (2) definesc integrala generală a sistemului.

106. 3. *Să se rezolve sistemul*

$$\frac{dy}{dx} = -3y+4z+4e^{5x}, \quad \frac{dz}{dx} = -y+2z+11\,e^{5x}.$$

Luând derivata primei ecuații și înlocuind pe $\frac{dz}{dx}$ prin valoarea sa dată de ecuația a doua, obținem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3\frac{dy}{dx} - 4y+8z+64e^{5x}. \tag{1}$$

Prima ecuație dă pentru z valoarea

$$z = \frac{1}{4}\frac{dy}{dx} + \frac{3}{4}y - e^{5x}, \tag{2}$$

care introdusă în (1) dă ecuația diferențială liniară și cu coeficienți constanți

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 56e^{5x}.$$

Această ecuație integrată dă soluția

$$y = C_1e^x + 4C_2e^{-2x} + 2e^{5x},$$

valoare care introdusă în (2) dă mai departe,

$$z = C_1e^x + C_2e^{-2x} + 3e^{5x}.$$

106. 4. *Se dă familia de sfere, tangente în origină la planul xOy, a cărei ecuație este*

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha z = 0; \tag{1}$$

se cere să i se găsească traiectoriile ortogonale.

Va trebui să eliminăm parametrul între ecuația (1) și ecuațiile

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z-\alpha},$$

ceiace conduce la sistemul

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2\,zdz}{z^2-x^2-y^2} = \frac{2\,(xdx+ydz+zdz)}{x^2+y^2+z^2}.$$

Acest sistem dă integralele

$$y = C_1x, \quad x^2+y^2+z^2 = C_2x,$$

care definesc traiectoriile căutate. Ele sunt cercuri situate în plane ce trec prin Oz și sunt tangente acestei axe în origine.

106. 5. *Să se determine liniile de forță ale câmpului*

$$X = xy^2, \quad Y = x^2y, \quad Z = z(x^2+y^2).$$

Problema se reduce la integrarea sistemului

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}.$$

Primele două ecuații comparate între ele dau

$$x dx = y dx; \quad x^2 - y^2 = C_1. \tag{1}$$

Scriem sistemul sub forma

$$\frac{\frac{dx}{x}}{\frac{y^2}{}} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{x^2}{}} = \frac{\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{dz}{z}}{x^2 + y^2},$$

adică

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}; \quad xy = C_2 z. \tag{2}$$

Liniile de forță sunt curbe strâmbe situate la intersecția cilindrului hiperbolic (1) cu paraboloidul iperbolic (2).

106. 6. *Să se determine liniile de forță ale câmpului*

$$X = x(y - z); \quad Y = y(z - x), \quad Z = z(x - y).$$

Avem

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}.$$

Făcând suma numărătorilor pe suma numitorilor, rezultă

$$dx + dy + dz = 0; \quad x + y + z = C_1. \tag{1}$$

Scriind sistemul sub forma

$$\frac{\frac{dx}{x}}{y - z} = \frac{\frac{dy}{y}}{z - x} = \frac{\frac{dz}{z}}{x - y},$$

și făcând aceiași operație, rezultă

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0; \quad xyz = C_2. \tag{2}$$

Liniile de forță sunt secțiunile plane făcute prin planele (1) în suprafețele (2).

§ 107. Sisteme de ordin superior

1. Considerăm pentru început, sisteme de două ecuații cu două funcții necunoscute y și z de o singură variabilă x; presupunând că y intră în sistem prin derivatele ei până la ord. m și z prin derivatele ei până la ord. n, sistemul se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} \dfrac{d^m y}{dx^m} = f\left(x; \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}; \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{d^2z}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right), \\ \dfrac{d^n z}{dx^n} = g\left(x; \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}; \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{d^2z}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right). \end{cases} \tag{I}$$

Sistemul se rezolvă în general prin metoda eliminării; *soluția generală* conține $m+n$ constante arbitrare. Se zice că o soluție (y, z) este determinată

prin condiții inițiale, când pentru $x=x_0$, y precum și toate derivatele ei până la ord. $m-1$, z precum și toate derivatele ei până la ord. $n-1$ iau valorile date dinainte.

Se numește *integrală* a sistemului (I), orice funcție

$$w\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}};\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right),$$

care se reduce la o constantă când înlocuim pe y și z prin valorile lor date de soluția generală. Cunoașterea uneia, sau mai multor integrale, permite reducerea ordinului sistemului cu un număr de unități egal cu cel al integralelor cunoscute (deoarece fiecare introduce câte o constantă arbitrară).

2. Cele de mai sus se extind imediat la sistemele care conțin mai multe funcții necunoscute. În dinamică se întâlnesc sisteme de forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z. \tag{II}$$

unde X, Y, Z depind în general de x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, t. Soluția generală va depinde de *șase* constante arbitrare și anume de poziția inițială a mobilului (valorile lui x, y, z) și de viteza inițială $\left(\text{valorile lui } \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)$.

Un caz important este atunci când X, Y, Z nu depind decât de x, y, z și sunt derivatele parțiale ale unei funcțiuni $F(x, y, z)$. În acest caz o integrală a sistemului este

$$\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]-F(x,\ y,\ z)=C. \tag{III}$$

107. 1. *Să se integreze sistemul*

$$t^2x''+2ty'+t^2x+4y=0,\quad ty'+2y-tx'=0.$$

Scriind prima ecuație sub forma

$$t^2(x''+x)+2(ty'+2y)=0,$$

și înlocuind paranteza a doua prin valoarea ei scoasă din ultima ecuație, obținem ecuația

$$t(x''+x)+2x'=0,$$

care nu are decât o singură funcțiune necunoscută. Pentru integrare, facem schimbarea de funcție: $tx=z$. Avem

$$tx'+x=z',\quad tx''+2x'=z'',$$

și ecuația devine: $z''+z=0$, care are soluția

$$z=tx=A\cos t+B\sin t \tag{1}$$

unde A și B sunt două constante arbitrare. Pentru a găsi valoarea lui y din a doua ecuație, o integrăm ca o ecuație liniară de ord. 1 în y, unde x este o funcțiune cunoscută. Aplicând formula (§ 98), avem

$$t^2y=\int t^2x'dt+C,$$

unde C este o nouă constantă. Integrând prin părți avem

$$t^2y=t^2x-2\int txdt+C=t(A\cos t+B\sin t)-2(A\sin t-B\cos t)+C. \quad (2)$$

Formulele (1) și (2) definesc soluția generală a sistemului, soluție ce depinde de trei constante arbitrare.

107. 2. *Să se integreze sistemul*

$$x^2y''+xz'+y+z=x+1,\quad x^2z''+xy'-y-z=-x-1. \quad (1)$$

Vom elimina funcția z. In acest scop derivăm de două ori prima ecuație având grijă ca de fiecare dată să înlocuim pe z'' scos din ecuația a doua. Găsim

$$\begin{cases} x^3y'''+2x^2y''+2xz'+y+z=2x+1, \\ x^4y^{(IV)}+5x^3y'''+4x^2y''-xy'+3xz'+2y+2z=4x+2. \end{cases} \quad (2)$$

Eliminăm pe z' și z între ecuațiile formate de prima din (1) și (2). Rezultatul acestei eliminări este (§ 28, no. 3)

$$\begin{vmatrix} x^2y''+y-x-1, & 1, & 1 \\ x^3y'''+2x^2y''+y-2x-1, & 2, & 1 \\ x^4y^{(IV)}+5x^3y'''+4x^2y''-xy'+2y-4x-2, & 3, & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Scăzând prima linie din a doua și apoi dublată din a treia, avem mai departe,

$$\begin{vmatrix} x^3y'''+x^2y''-x & 1 \\ x^4y^{(IV)}+5x^3y'''+2x^2y''-xy'-2x, & 1 \end{vmatrix}=0, \text{ sau}$$

$$x^4y^{(IV)}+4x^3y'''+x^2y''-xy'=x,$$

care este ecuația de tip Euler. Făcând schimbarea: $x=e^t$, și folosind formulele date cu ocazia rezolvării prob. 57. 7 (pentru $\alpha=0$), pe care le complectăm cu

$$\frac{d^4y}{dx^4}=e^{-4t}\left(\frac{d^4y}{dt^4}-6\frac{d^3y}{dt^3}+11\frac{d^2y}{dt^2}-6\frac{dy}{dt}\right),$$

obținem ecuația cu coeficienți constanți (noile derivate sunt în raport cu t)

$$y^{(IV)}-2y'''=e^t.$$

Rezolvând această ecuație după metoda dată la § 103, no. 1, b) și revenind la vechia variabilă, avem

$$y=C_1x^2-x+C_4+C_2(\ln x)^2+C_3\ln x. \quad (3)$$

Pentru a-l găsi pe z, scădem prima ecuație din (1) înmulțită cu 2, din prima ecuație (2). Obținem

$$x^3y'''-y-z=-1,$$

unde înlocuind pe y dat de (3), avem

$$z=-C_1x^2+x+(2C_3-6C_2-C_4+1)-C_2(\ln x)^2+(4C_2-C_3)\ln x. \quad (4)$$

Formulele (3) și (4) definesc soluția generală care conține patru constante arbitrare.

107. 3. *Să se integreze sistemul*

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+m\sin\theta=0,\quad \frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-m\cos\theta=0.$$

Forma ecuațiilor date ne face să ne gândim la interpretarea lui r și θ ca coordonate polare legate de coordonatele carteziene prin relațiile

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

Ne propunem să vedem ce devine sistemul considerat când luăm drept funcțiuni pe x și y. Derivând relațiile (1) obținem

$$\frac{dx}{dt}=\cos\theta\frac{dr}{dt}-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt}=\sin\theta\frac{dr}{dt}+r\cos\theta\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=m,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

Aceste două ecuații integrate ne dau

$$r\cos\theta=\frac{1}{2}mt^2+C_1t+C_2,\quad r\sin\theta=C_3t+C_4,$$

care definesc soluția generală a sistemului.

§ 108. Sisteme liniare cu coeficienți constanți

1. Fie sistemul de n ecuații cu n funcții necunoscute

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{dy_1}{dx}+a_1^1y_1+a_1^2y_2+\cdots+a_1^ny_n=0,\\&\frac{dy_2}{dx}+a_2^1y_1+a_2^2y_2+\cdots+a_2^ny_n=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\frac{dy_n}{dx}+a_n^1y_1+a_n^2y_2+\cdots+a_n^ny_n=0.\end{aligned}\right.\qquad (I)$$

Oricare ar fi coeficienții a_i^j funcții de x, soluția generală a sistemului este dată de formulele

$$\left\{\begin{aligned}&y_1=C_1y_1^1+C_2y_1^2+\cdots+C_ny_1^n\\&y_2=C_1y_2^1+C_2y_2^2+\cdots+C_ny_2^n\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&y_n=C_1y_n^1+C_2y_n^2+\cdots+C_ny_n^n,\end{aligned}\right.\qquad (II)$$

unde grupele $(y_1^i, y_2^i, \ldots, y_n^i)$ formează un *sistem fundamental*, adică determinantul funcţiilor y_k^i aşezate în ordinea în care intervin în (II) este diferit zero.

2. Dacă coeficienţii sistemului (I) sunt constanţi, atunci se ia

$$y_1^i = \alpha_1 e^{r_i x}, \quad y_2^i = \alpha_2 e^{r_i x}, \ldots, \quad y_n^i = \alpha_n e^{r_i x}, \tag{III}$$

unde r_i *este rădăcină a ecuaţiei caracteristice*

$$\begin{vmatrix} a_1^1 + r & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 + r & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n + r \end{vmatrix} = 0, \tag{IV}$$

iar α_k sunt constante arbitrare ce sunt determinate, abstracţie făcând de un factor constant, scriind că (III) verifică sistemul (I). a) In caz că ecuaţia (IV) are n rădăcini reale distincte, grupele (III) corespunzătoare ne definesc complect integrala generală (II). b) Dacă ecuaţia (IV) are două rădăcini complexe conjugate $\lambda \pm i\mu$, grupele (III) corespunzătoare se înlocuiesc cu

$$y_1^{i,i+1} = e^{\lambda x}(\alpha_1 \cos \mu x + \beta_1 \sin \mu x), \ldots, \quad y_n^{i,i+1} e^{\lambda x}(\alpha_n \cos \mu x + \beta_n \sin \mu x), \tag{V}$$

unde α_i şi β_i sunt constante ce se determină ca la cazul precedent. c) Dacă ecuaţia (IV) are o rădăcină reală multiplă de ord. p, grupele corespunzătoare (III) se înlocuiesc prin una singură în care α_k vor fi polinoame de ord. $p-1$ ai căror coeficienţi sunt determinaţi scriind că grupa corespunzătoare verifică ecuaţia dată. Dacă ecuaţia (IV) are două rădăcini complexe conjugate multiple de ord. p, grupele (V) corespunzătoare se înlocuiesc prin una singură în care coeficienţii α_k şi β_k sunt înlocuiţi cu polinoame de gr. $p-1$ ai căror coeficienţi urmează să fie determinaţi.

3. Dacă sistemul (I) nu mai este omogen ecuaţiile având parte dreaptă, soluţia generală se găseşte din soluţia sistemului fără parte dreaptă, adăogându-i o soluţie particulară a sistemului cu parte dreaptă. Soluţia generală se găseşte prin metoda variaţiei de constante (§ 103, no. 1, b).

108. 1. *Să se integreze sistemul*

$$2\frac{d^2x}{dt^2} = (a^2-b^2)x + (a^2+b^2)y,$$

$$2\frac{d^2y}{dt^2} = (a^2+b^2)x + (a^2-b^2)y,$$

a şi b fiind constante.

Derivând pe prima de două ori,

$$2\frac{d^4x}{dt^4} = \frac{1}{2}(a^2-b^2)\left[(a^2-b^2)x + (a^2+b^2)y\right] + \frac{1}{2}(a^2+b^2)\left[(a^2+b^2)x + (a^2-b^2)y\right],$$

în baza ecuaţiilor ce formează sistemul. Inlocuind pe y dat de prima ecuaţie se ajunge la ecuaţia diferenţială

$$\frac{d^4x}{dt^4} - (a^2-b^2)\frac{d^2x}{dt^2} - a^2b^2x = 0,$$

a cărei ecuație caracteristică este

$$r^4-(a^2-b^2)r^2-a^2b^2=0,$$

și care ne dă mai întâiu: $r^2=a^2$ și $r^2=-b^2$, de unde apoi: $r_1=a$, $r_2=-a$, $r_3=ib$, $r_4=-ib$, încât

$$x=C_1e^{at}+C_2e^{-at}+C_3\cos bt+C_4\sin bt.$$

Mai departe

$$(a^2+b^2)y=2\frac{d^2x}{dt^2}-(a^2-b^2)x,\quad y=C_1e^{at}+C_2e^{-at}-C_3\cos bt-C_4\sin bt.$$

108. 2. *Să se integreze sistemul*

$$y''-y'-2y+z=xe^{-2x},\quad z'-4y+z=0.$$

Soluția I. Din prima scoatem

$$z=xe^{-2x}-y''+y'+2y, \tag{1}$$

valoare care introdusă în a doua ne conduce la ecuația diferențială lineară și cu coeficienți constanți

$$y'''-3y'+2y=(1-x)e^{-2x}, \tag{2}$$

ecuația caracteristică se scrie

$$r^3-3r+2=(r+2)(r-1)^2=0,$$

încât integrala generală a ecuației fără parte dreaptă este

$$\bar{y}=Ae^{-2x}+(Bx+C)e^x.$$

Cum puterea exponențială din partea dreaptă este o rădăcină a ecuației caracteristice, vom căuta o soluție particulară de forma:

$$y_0=(ax+b)xe^{-2x}. \tag{3}$$

Avem

$$y_0'=(-2ax^2+2ax-2bx+b)e^{-2x},\quad y_0''=(4ax^2-8ax+4bx+$$
$$+2a-4b)e^{-2x},$$
$$y_0'''=(-8ax^2+24ax-8bx-12a+12b)e^{-2x}. \tag{4}$$

Introducând aceste valori în ecuația diferențială se obține prin identificare:

$$18a=-1 \tag{5}$$

$-12a+9b=1$, adică $a=-\frac{1}{18}$, $b=\frac{1}{27}$.

Deci valoarea definitivă este

$$y=\left(-\frac{1}{18}x^2+\frac{1}{27}x+A\right)e^{-2x}+(Bx+C)e^x, \tag{6}$$

*) Această metodă se generalizează la sisteme cu n funcții necunoscute prin *Calculul matricial*.

iar (1) ne dă pe

$$z=\left(\frac{2}{9}x^2+\frac{8}{27}x-4A+\frac{8}{27}\right)e^{-2x}+(2Bx-B+2C)e^x.$$

108. 3. *Să se integreze sistemul*

$$y''-5y'+z'+13y+20z=0,\quad z''+y'+3z'+2y+3z=0.$$

Din prima ecuație scoatem

$$z'=-20z-13y+5y'-y'',$$

relația care derivată și valoarea găsită introdusă în a doua ne dă

$$343z=-223y+97y'-22y''+y'''. \tag{1}$$

Introducând în prima ecuație pe z dat de această relație, găsim

$$y^{(IV)}-2y'''+2y'-y=0.$$

Ecuația caracteristică se scrie

$$r^4-2r^3+2r-1=(r-1)^3(r+1)=0.$$

așa că integrala generală este

$$y=(Ax^2+Bx+C)e^x+De^{-x},$$

unde A, B, C, D sunt constante. Din (1) deducem imediat:

$$z=\left[-\frac{3}{7}Ax^2+\left(\frac{16}{49}A-\frac{3}{7}B\right)x-\frac{38}{343}A+\frac{8}{49}B-\frac{3}{7}C\right]e^x-De^{-x}.$$

108. 4. *Să se integreze sistemul*

$$\frac{dx}{dt}=-x+y+z,\quad \frac{dy}{dt}=x-y+z,\quad \frac{dz}{dt}=x+y-z.$$

Ecuația caracteristică este

$$\begin{vmatrix} 1+r & -1 & -1 \\ -1 & 1+r & -1 \\ -1 & -1 & 1+r \end{vmatrix}=r^3+3r^2-4=(r-1)(r+2)^2=0.$$

Soluțiile (III) sunt

$$x_1=\alpha_1e^t,\qquad y_1=\alpha_2e^t,\qquad z_1=\alpha_3e^t;$$

$$x_2=(\beta_1+\gamma_1t)e^{-2t},\qquad y_2=(\beta_2+\gamma_2t)e^{-2t},\qquad z_2=(\beta_3+\gamma_3t)e^{-2t};$$

Scriind că (x_1, y_1, z_1) verifică sistemul, rezultă

$$-2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0,\quad \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0,\quad \alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3=0,$$

sistem care admite soluții nu toate nule (acest lucru se întâmplă întotdeauna în baza alegerei valorilor lui r ca rădăcini ale ecuației caracteristice). Lăsând deoparte una din ecuații și rezolvând cele rămase, rezultă că sistemul admite

soluții proporționale cu ($\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$) (factorul de proporționalitate poate fi lăsat deoparte în baza faptului că în soluția generală x_1, y_1, z_1 se înmulțesc cu o aceiași constantă arbitrară C_1).

Mai departe, scriind că (x_2, y_2, z_2) este soluție, obținem

$$\gamma_1 - 2(\beta_1 + \gamma_1 t) = -(\beta_1 + \gamma_1 t) + (\beta_2 + \gamma_2 t) + (\beta_3 + \gamma_3 t),$$

$$\gamma_2 - 2(\beta_2 + \gamma_2 t) = (\beta_1 + \gamma_1 t) - (\beta_2 + \gamma_2 t) + (\beta_3 + \gamma_3 t).$$

$$\gamma_3 - 2(\beta_3 + \gamma_3 t) = (\beta_1 + \gamma_1 t) + (\beta_2 + \gamma_2 t) - (\beta_3 + \gamma_3 t),$$

egalități care trebuind să aibă loc oricare ar fi t, dau naștere la sistemul de ecuații

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0.$$

Deoarece $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$, ultima ecuație spune că: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ și ne rămâne ecuația unică

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0.$$

Această ecuație ne spune că: $\beta_3 = -\beta_1 - \beta_2$ adică soluția generală este (am introdus β_1, β_2 în constantele C_2 și C_3)

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}, \quad y = C_1 e^t + C_3 e^{-2t}, \quad z = C_1 e^t - (C_2 + C_3) e^{-2t}.$$

108. 5. *Să se integreze sistemul*

$$\frac{dx}{dt} = z - y, \quad \frac{dy}{dt} = z \quad \frac{dz}{dt} = z - x + \cos t.$$

și să găsească soluția care pentru $t = 0$ dă $x = y = z = 0$.

Scriem sistemul sub forma

$$\frac{dx}{dt} + y - z = 0. \quad \frac{dy}{dt} - z = 0, \quad \frac{dz}{dt} + x - z = \cos t.$$

Rezolvarea problemei se face în următoarele etape.

1° Integrăm sistemul fără parte dreaptă. Ecuația caracteristică este

$$\begin{vmatrix} r & 1 & -1 \\ 0 & r & -1 \\ 1 & 0 & -1+r \end{vmatrix} = r^3 - r^2 + r - 1 = (r-1)(r^2+1) = 0,$$

care are ca rădăcini $r_1 = 1$, $r_{2,3} = \pm i$. Soluția generală va fi de forma

$$\begin{cases} x = Ae^t + B\cos t + C\sin t, \\ y = A_1 e^t + B_1 \cos t + C_1 \sin t, \\ z = A_2 e^t + B_2 \cos t + C_2 \sin t. \end{cases}$$

Scriind că această soluție verifică sistemul dat, obținem relațiile

$$\begin{array}{lll} A + A_1 - A_2 = 0, & -B + C_1 - C_2 = 0; & C + B_1 - B_2 = 0; \\ A_1 - A_2 = 0, & -B_1 - C_2 = 0, & C_1 - B_2 = 0; \\ A = 0, & -B_2 + C - C_2 = 0, & C_2 + B - B_2 = 0, \end{array}$$

de unde rezultă valorile

$$A=0,\ A_2=A_1;\quad C_2=-B_1=-\frac{1}{2}(B-C);\quad B_2=C_1=\frac{1}{2}(B+C).$$

Înlocuind pe A_1 cu α, B și C cu 2β și 2γ, avem soluția generală

$$\begin{cases} x= & 2\beta\cos t & +2\gamma\sin t, \\ y=\alpha e^t+(\beta-\gamma)\cos t+(\beta+\gamma)\sin t, \\ z=\alpha e^t+(\beta+\gamma)\cos t+(\gamma-\beta)\sin t, \end{cases} \tag{1}$$

unde α, β, γ sunt trei constante arbitrare.

2° Căutăm o soluție a ecuației cu parte dreaptă. În acest scop presupunem în (1) că α, β, γ sunt funcții de x și scriem că verifică sistemul cu parte dreaptă. Obținem ecuațiile

$$\frac{d\beta}{dt}\cos t+\frac{d\gamma}{dt}\sin t=0,$$

$$e^t\frac{d\alpha}{dt}+(\cos t+\sin t)\frac{d\beta}{dt}+(\sin t-\cos t)\frac{d\gamma}{dt}=0,$$

$$e^t\frac{d\alpha}{dt}+(\cos t-\sin t)\frac{d\beta}{dt}+(\cos t+\sin t)\frac{d\gamma}{dt}=\cos t,$$

care rezolvate dau

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{2}e^{-t}\cos t,\ \frac{d\beta}{dt}=-\frac{1}{2}\sin t\cos t,\ \frac{d\gamma}{dt}=\frac{1}{2}\cos^2 t,$$

și care integrate conduc la (pentru prima vezi prob. 68. 5)

$$\alpha=\frac{1}{4}e^{-t}(\sin t-\cos t)+\alpha_1,\quad \beta=\frac{1}{8}\cos 2t+\beta_1,\quad \gamma=\frac{1}{8}\sin 2t+\frac{1}{4}t+\gamma_1,$$

unde α_1, β_1, γ_1 sunt trei noi constante arbitrare. Soluția generală a sistemului dat este deci

$$x=\left(\frac{1}{4}\cos 2t+2\beta_1\right)\cos t+\left(\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{2}t+2\gamma_1\right)\sin t=$$
$$=\frac{1}{4}\cos t+2\beta_1\cos t+\left(\frac{1}{2}t+2\gamma_1\right)\sin t,$$

$$y=\frac{1}{4}(\sin t-\cos t)+\alpha_1 e^t+\left(\frac{1}{8}\cos 2t+\beta_1-\frac{1}{8}\sin 2t-\frac{1}{4}t-\gamma_1\right)\cos t+$$
$$+\left(\frac{1}{8}\cos 2t+\beta_1+\frac{1}{8}\sin 2t+\frac{1}{4}t+\gamma_1\right)\sin t=$$
$$=\frac{1}{8}(2t+1)(\sin t-\cos t)+\alpha_1 e^t+(\beta_1-\gamma_1)\cos t+(\beta_1+\gamma_1)\sin t,$$

$$z=\frac{1}{4}(\sin t-\cos t)+\alpha_1 e^t+\left(\frac{1}{8}\cos 2t+\beta_1+\frac{1}{8}\sin 2t+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}t+\gamma_1\right)\cos t+\left(\frac{1}{8}\sin 2t+\frac{1}{4}t+\gamma_1-\frac{1}{8}\cos 2t-\beta_1\right)\sin t=$$
$$=\frac{1}{8}[(2t+3)\sin t+(2t-1)\cos t]+\alpha_1 e^t+(\beta_1+\gamma_1)\cos t+(\gamma_1-\beta_1)\sin t.$$

3° Condițiile inițiale impuse prin enunț, impun constantelor α_1, β_1, γ_1 trei relații din care rezultă

$$x=\frac{1}{2}t\sin t,\quad y=\frac{1}{4}[t\sin t-(t+1)\cos t+e^t],$$

$$z=\frac{1}{4}[(t+2)\sin t+(t-1)\cos t+e^t].$$

§ 109. Ecuații cu diferențiale totale

Se numește ecuație cu diferențiale totale, o ecuație de forma

$$P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=0, \tag{I}$$

sau sub forma

$$dz=A(x,y,z)\,dx+B(x,y,z)\,dy. \tag{II}$$

Pentru a exista o funcție z care să satisfacă acestei ultime ecuații, este necesar să avem identic îndeplinită condiția

$$\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}B=\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial z}A, \tag{III}$$

condiție care se numește *condiție de integrabilitate*. Condiția de integrabilitate pentru ecuația (I) este

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0. \tag{IV}$$

Presupunând ecuația scrisă sub forma (II), dacă condiția (III) este îndeplinită, există o funcțiune z care o satisface și care va fi dată de sistemul

$$\frac{\partial z}{\partial x}=A(x,y,z),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=B(x,y,z). \tag{V}$$

In prima ecuație presupunând pe y constant, ecuația poate fi considerată ca o ecuație diferențială de ord. 1 în raport cu x care integrală ne va da drept soluție o funcțiune care depinde de o constantă arbitrară în raport cu x, dar care este în realitate o funcțiune de y. Această funcțiune de y este determinată de ecuația a doua din (V) (care nu depinde de x). Soluția definitivă depinde de o constantă arbitrară.

109. 1. *Să se integreze ecuația cu diferențiale totale*

$$xydz-y(z-y)\,dx-x(z-x)\,dy=0.$$

Mai întâi verificăm condiția de integrabiltate

Soluția va fi dată de sistemul

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z-y}{x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z-x}{y}.$$

Presupunând că z este funcțiune numai de x, prima se scrie

$$\frac{dz}{z-y}=\frac{dx}{x},\quad z=y+ux,$$

unde u este funcțiune numai de y. Scriind că soluția obținută verifică a doua ecuație, obținem

$$\frac{du}{dy}=\frac{u-1}{y};\quad \ln(u-1)=\ln C y;\quad u=1+Cy,$$

și deci: $z=x+y+Cxy$, unde C este o constantă arbitrară.

109. 2. *Să se integreze ecuația*

$$y(yz+a^2)\,dx+x(xz+a^2)\,dy-xy(x+y)\,dz=0.$$

Condiția de integrabilitate este verificată. Integrarea se reduce la sistemul

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz+a^2}{x(x+y)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz+a^2}{y(x+y)}.$$

Prima ecuație se scrie

$$\frac{dz}{yz+a^2}=\frac{1}{y}\left(\frac{dx}{x}-\frac{dx}{x+y}\right);\quad \ln(yz+a^2)=\ln x-\ln(x+y)+\ln u;$$

$$yz+a^2=\frac{ux}{x+y};\quad z=\frac{1}{y}\left(\frac{ux}{x+y}-a^2\right).$$

A doua ecuație devine

$$-\frac{1}{y^2}\left(\frac{ux}{x+y}-a^2\right)+\frac{1}{y}\left[\frac{x}{x+y}\frac{du}{dy}-\frac{ux}{(x+y)^2}\right]=\frac{1}{y(x+y)}\left[\frac{x}{y}\left(\frac{ux}{x+y}-a^2\right)+a^2\right],$$

și care se reduce la

$$y\frac{du}{dy}=2(u-a^2);\quad \frac{du}{2(u-a^2)}=\frac{dy}{y};\quad \ln(u-a^2)=\ln C y^2,$$

adică: $u=Cy^2+a^2$, și deci indefinitiv

$$z=\frac{Cxy-a^2}{x+y}.$$

109. 3. *Să se integreze ecuația*

$$(y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz=0.$$

Condiția (IV) este identic verificată deoarece toate parantezele sunt nule. Va trebui să integrăm sistemul

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y+z}{x+y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z+x}{x+y}.$$

Prima ecuație dă

$$\frac{dz}{y+z}=-\frac{dx}{x+y};\quad \ln(y+z)=\ln\frac{u}{x+y};\quad z=-y+\frac{u}{x+y}.$$

Introducând această valoare în a doua fracție, avem

$$-1+\frac{1}{x+y}\frac{du}{dy}-\frac{u}{(x+y)^2}=-\frac{z+x}{x+y};\quad \frac{du}{dy}=2y;\quad u=y^2+C,$$

adică soluția generală este: $xy+yz+zx=C$.

CAPITOLUL XV

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE

§ 110. Ecuații de primul ordin lineare.

1. In interiorul acestui capitol vom obișnui următoarele notații

$$P=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},\ r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \tag{I}$$

Prin ecuația lineară de primul ordin, cu derivate parțiale, înțelegem o ecuație de forma

$$Pp+Qq=R, \tag{II}$$

unde P, Q, R sunt funcții de x, y, z. Soluția unei ecuații cu derivate parțiale*) poate să conțină două constante arbitrare (independente între ele) când se numește *soluție completă*, sau poate să conțină o funcțiune arbitrară când se numește *soluție generală*. Particularizând constantele sau funțiunea arbitrară se obțin *soluții particulare*. Dacă există altfel de soluții, atunci ele se numesc *singulare*. Dacă se interpretează soluția generală geometric, ea reprezintă o familie de suprafețe. A determina o soluție prin *condiții inițiale*, înseamnează a găsi din această familie, suprafața care trece printr'o curbă dată.

2. Integrarea ecuațiilor cu derivate parțiale lineare și de primul ordin se face prin găsirea soluției generale. In acest scop, se înlocuește ecuația (II) cu sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}. \tag{III}$$

Dacă: $u=C_1$ și $v=C_2$ sunt două integrale distincte ale acestui sistem, atunci soluția generală a ecuației (II) este definită prin relația: $u=f(v)$, unde f este o funcție oarecare.

Curbele definite prin sistemul (III) se numesc *curbe caracteristice*.

3. In general, pentru a integra ecuația cu derivate parțiale

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=Z, \tag{IV}$$

unde X_k și Z sunt funcțiuni de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și z, reducem problema la integrarea sistemului

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{dz}{Z}. \tag{V}$$

Dacă notăm cu: $\varphi_1=C_1, \ldots, \varphi_n=C_n$, n integrale particulare independente ale acestui sistem, atunci soluția generală este definită prin relația:

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)=0,$$

unde f este o funcțiune arbitrară.

*) lineară sau nu.

110. 1. *Să se integreze ecuațiile cu derivate parțiale*

$$p=x \text{ și } q=x.$$

Cele două ecuații date sunt în fond ecuații diferențiale deoarece nu conțin derivatele funcției în raport decât cu una din variabile. Pentru prima

$$\frac{dz}{dx}=x; \quad z=\frac{1}{2}x^2+C(y),$$

constanta fiind funcțiune de y; iar pentru a doua

$$\frac{dz}{dy}=x, \quad z=xy+C(x),$$

constanta fiind de data aceasta funcție numai de x.

110. 2. *Să se integreze ecuația*: $p+q=1$.

Sistemul corespunzător este

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{1},$$

de unde

$$dy=dx, \quad y=x+C, \quad C=y-x,$$

$$dz=dy, \quad z=y+C', \quad C'=z-y,$$

și integrala generală este: $z-y=g(y-x)$.

Observație. Evident că soluția generală se mai poate scrie și sub forma: $y-x=f(z-y)$ care nu diferă de precedenta decât prin forma.

110. 3. *Să se integreze ecuația*

$$x^2p+y^2q=z.$$

Integrarea ecuației date se reduce la integrarea sistemului

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{z}.$$

Prima combinată cu a doua ne dă

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}; \quad -\frac{1}{x}=-\frac{1}{y}+C,$$

iar a doua cu a treia

$$\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{z}; \quad \ln z=-\frac{1}{y}+C',$$

încât soluția generală este

$$\ln z=-\frac{1}{y}+g\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right).$$

110. 4. *Să se integreze ecuația*

$$(x-1)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial z}{\partial y}+1-z=0.$$

Problema revine la a integra sistemul

$$\frac{dx}{x-1}=\frac{dy}{y-1}=\frac{dz}{z-1}.$$

Avem soluțiile

$$y-1=C(x-1),\quad z-1=C'(x-1),$$

încât soluția generală este

$$\frac{z-1}{x-1}=f\left(\frac{y-1}{x-1}\right).$$

110. 5. *Să se integreze ecuația*

$$(x-y+z)p+(2y-z)q=z.$$

Trebue să integrăm sistemul

$$\frac{dx}{x-y+z}=\frac{dy}{2y-z}=\frac{dz}{z}.$$

O primă combinare integrabilă este

$$\frac{dx+dy}{x+y}=\frac{dz}{z};\ \ln(x+y)=\ln Cz;\quad x+y=Cz.$$

O a doua combinare se găsește luând egalitatea formată de ultimele două rapoarte. Avem

$$zdy-2ydz+zdz=0;\ d\left(\frac{y}{z^2}\right)-d\left(\frac{1}{z}\right)=0;\ \frac{y}{z^2}-\frac{1}{z}=C'.$$

Soluția generală este deci

$$y-z=z^2 f\left(\frac{x+y}{z}\right).$$

110. 6. *Să se integreze ecuația*

$$(x^2-y^2-z^2)p+2xyq=2xz.$$

Problema se reduce la a integra sistemul

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz}.$$

Ultimele două ne dau: $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$; $y=Cz$; pentru a găsi a doua integrală pregătim puțin sistemul, anume îl scriem sub forma

$$\frac{2xdx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{2ydy}{2y^2}=\frac{2zdz}{2z^2},$$

de unde prin adunarea numărătorilor și numitorilor, găsim

$$\frac{2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{dz}{z};\ \ln(x^2+y^2+z^2)=\ln C'z;\ x^2+y^2+z^2=C'z.$$

Soluția generală este

$$x^2+y^2+z^2=zf\left(\frac{y}{z}\right).$$

110. 7. *Să se integreze ecuația*

$$2xy\frac{\partial z}{\partial x}+(y^2-x^2)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Trebue să integrăm sistemul: $\frac{dx}{2xy}=\frac{dy}{y^2-x^2}=\frac{dz}{0}$.

Primele două ecuații ne dau

$$(y^2-x^2)\,dx=2xydy;\quad 2\frac{y}{x}\,dy-\frac{y^2}{x^2}\,dx+dx=0.\quad d\left(\frac{y^2}{x}\right)+dx=0;\quad \frac{y^2}{x}+x=C.$$

Ultima combinată cu oricare din celelalte ne spune că: $dz=0$, $z=C'$. In rezumat integrala generală este

$$y^2+x^2=xf(z).$$

110. 8. *Să se găsească suprafața integrală a ecuației*

$$z(py+qx)+xy=0.$$

care trece prin cercul cu centrul în originea axelor, de rază R, și situat în planul xOy.

Soluția generală este

$$x^2-y^2=g(x^2+z^2). \qquad (1)$$

Ecuațiile cercului despre care este vorba în enunț, sunt

$$x^2+y^2=R^2 \quad \text{și} \quad z=0.$$

Făcând în (1) $z=0$, găsim că: $x^2-y^2=g(x^2)$, care trebue să fie identică cu: $x^2+y^2=R^2$. Eliminând pe y^2 se găsește că:

$$g(x^2)=2x^2-R^2;\quad g(u)=2u-R^2.$$

Suprafața căutată este deci elipsoidul

$$x^2-y^2=2(x^2+z^2)-R^2;\quad x^2+y^2+2z^2-R^2=0.$$

Observație. Această problemă are legătură cu următoarea problemă geometrică: *Să se găsească suprafețele care sunt ortogonale paraboloizilor hiperbolici*: $z=\alpha xy$. Vom scrie că planele tangente în punctul curent sunt perpendiculare. Aceste plane tangente au respectiv parametrii directori: $(p, q, -1)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}=\alpha y, \frac{\partial z}{\partial y}=\alpha x, -1\right)$; va trebui să avem

$$\alpha yp+\alpha xq+1=0$$

și eliminând parametrul α între această relație și ecuația suprafeței, se obține ecuația din enunț.

110. 9. *Să se găsească soluțiile ecuației*

$$px+qy=0,$$

cari verifică și ecuația

$$(p^2+q^2)(x^2+y^2)=a^2.$$

Prima ecuație se reduce la sistemul

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{0}.$$

Avem combinând aceste ecuații între ele, $y=Cx$, $z=C'$, adică integrala generală este $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$. Pentru mai departe, punem: $\frac{y}{x}=u$.

Cum

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'(u),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f'(u),$$ va trebui să avem $\frac{f'^2(u)(x^2+y^2)^2}{x^4}=a^2$;

$$f'(u)=\frac{a}{1+u^2},$$

înglobând semnul din fața radicalului în a. Mai departe, avem indefinitiv

$$f(u)=a\operatorname{arctg}u+C;\quad z=a\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C.$$

110. 10. *Să se găsească suprafața care trece prin curba:* $y=x$, $z=x^3$ *și satisface ecuația*

$$xp-yq=z.$$

Să se găsească liniile asimptotice ale acestei suprafețe.

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z}.$$

Avem integralele particulare: $xy=C_1$, $z=C_2x$ și deci soluția generală este: $z=x\varphi(xy)$. În baza condițiilor din enunț va trebui să avem: $\varphi(x^2)=x^2$, adică $\varphi(u)=u$. Suprafața în chestiune este: $z=x^2y$.

Liniile asimptotice ale unei suprafețe reprezentată printr'o ecuație de forma: $z=f(x,y)$ sunt date de ecuația (X) dela § 65. În cazul nostru această ecuație este

$$ydx^2+2xdxdy=0;\quad dx(ydx+2xdy)=0.$$

Cele două familii de asimptotice vor fi definite respectiv prin ecuațiile

$$1^\circ\ dx=0,\quad x=C_1$$

$$2^\circ\ 2\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0,\quad xy^2=C_2,$$

adică au respectiv ecuațiile

$$x=C_1,\quad z=x^2y;\quad xy^2=C_2,\quad z=x^2y.$$

§ 111. Ecuații de primul ordin generale

1. Soluția unei ecuații de primul ordin oarecare, este dată în general prin soluția completă (§ 110, no. 1). Înainte de a considera cazul general, punem în evidență următoarele cazuri particulare:

a) Dacă ecuația este de forma: $f(p,q)=0$, (I) soluția este de forma: $z=C_1x+C_2y+C_3$, (II) între constantele C având relația: $f(C_1,C_2)=0$.

b) Dacă ecuația este de forma: $f(z, p, q)=0$ (III), se pune $q=C_1 p$ și din ecuație scoatem: $p=g(z, C_1)$; soluția este

$$x+C_1 y+C_2=\int \frac{dz}{g(z, C_1)} \qquad \text{(IV)}$$

c) Dacă ecuația este de forma

$$f(x, p)=g(y, q), \qquad \text{(V)}$$

se egalează ambele părți C_1 de unde se scoate: $p=f_1(x, C_1), q=g_1(y, C_1)$ și soluția va fi

$$z=\int f_1(x, C_1)dx+\int g_1(y, C_1)\,dy+C_2, \qquad \text{(VI)}$$

2. In general, ecuația va fi de forma: $f(x, y, z, p, q)=0$; (VII) se formează sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{dx}{f'_p}=\frac{dy}{f'_q}=\frac{dz}{f'_p p+f'_q q}=\frac{-dp}{f'_x+pf'_z}=\frac{-dq}{f'_y+qf'_z}. \qquad \text{(VIII)}$$

Două cazuri se pot întâmpla: a) Putem determina două integrale ale acestui sistem,

$$g(x, y, z, p, q)=C_1, h(x, y, z, p, q)=C_2. \qquad \text{(IX)}$$

Din aceste două ecuații scoatem pe p și q valori care le introducem în (VII), relație care ne dă pe z; este necesar să verificăm dacă în adevăr derivatele parțiale ale soluției, sunt p și q obținute anterior. b) Putem determina o singură integrală a sistemului (VIII) fie: $g(x, y, z, p, q)=C_1$, care combinată cu ecuația însăși ne dă pe p și q, valori care introduse în

$$dz=pdx+qdy, \qquad \text{(X)}$$

ne dă o diferențială totală pe care o integrăm după regulele date la § 109.

111. 1. *Să se integreze ecuația:* $p^2+q^2=m^2$, *unde* m *este o constantă.*

Ecuația este de forma (I). Soluția va fi de forma: $z=C_1 x+C_3 y+C_2$, unde: $C_1^2+C_3^2=m^2$, adică

$$z=C_1 x \pm y\sqrt{m^2-C_1^2}+C_2.$$

111. 2. *Să se integreze ecuația:* $x^2 p^2+y^2 q^2=z$.

Ecuația se poate reduce la tipul (I) prin substituția

$$\frac{dz}{\sqrt{z}}=dZ, \quad \frac{dx}{x}=dX, \quad \frac{dy}{y}=dY. \qquad (1)$$

In adevăr, în baza ultimelor două, prima se scrie

$$\frac{pdx+qdy}{\sqrt{z}}=\frac{\partial Z}{\partial X}dY+\frac{\partial Z}{\partial Y}dY=\frac{\partial Z}{\partial X}\frac{dx}{x}+\frac{\partial Z}{\partial Y}\frac{dy}{y},$$

de unde rezultă (§ 52, II și III)

$$\frac{xp}{\sqrt{z}}=\frac{\partial Z}{\partial X}, \quad \frac{yq}{\sqrt{z}}=\frac{\partial Z}{\partial Y},$$

în baza cărora, ecuația dată se scrie

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2=1.$$

Soluția acestei ecuații este: $Z=aX\pm Y\sqrt{1-a^2}+b$, adică în baza lui (1),

$$2\sqrt{z}=a\ln x\pm\sqrt{1-a^2}\ln y+b.$$

111. 3. *Să se integreze ecuația:* $p^2=z^2(1-pq)$.

Ecuația întră în tipul (III). Punem: $q=C_1 p$; din ecuație scoatem valoarea lui p și soluția va fi

$$x+C_1 y+C_2=\pm\int\frac{\sqrt{1+C_1 z^2}}{z}dz,$$

Pentru calculul integralei din partea dreaptă facem substituția $\sqrt{1+C_1 z^2}=t$. Avem

$$\int\frac{\sqrt{1+C_1 z^2}}{z}dz=\int\frac{t^2\,dt}{t^2-1}=t+\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}=\sqrt{1+C_1 z^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+C_1 z^2}-1}{\sqrt{1+C_1 z^2}+1},$$

constanta aditivă a fost lăsată deoparte intrând în C_2. Soluția generală va fi

$$x=C_1 y+C_2=\pm\left(\sqrt{1+C_1 z^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+C_1 z^2}-1}{\sqrt{1+C_1 z^2}+1}\right).$$

111. 4. *Să se integreze ecuația:* $p^2+q^2=x+y$.

Ecuația este de tipul (V). Scriem ecuația sub forma

$$p^2-x=y-q^2=C_1,$$

de unde scoatem: $p=\pm\sqrt{x+C_1}$, $q=\pm\sqrt{y-C_1}$ încât soluția este

$$z=\pm\int\sqrt{x+C_1}\,dx\pm\int\sqrt{y-C_1}\,dy=\frac{2}{3}(x+C_1)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}(y-C_1)^{\frac{3}{2}}+C_2.$$

111. 5. *Să se integreze ecuația:* $\sqrt{p}+\sqrt{q}=2x$.

Suntem în cazul (V). Scriem ecuația

$$2x-\sqrt{p}=\sqrt{q}=C_1;\quad p=(2x-C_1)^2,\quad q=C_1^2,$$

încât soluția completă va fi

$$z=\int(2x-C_1)^2dx+C_1^2\int dy+C_2=\frac{1}{6}(2x-C_1)^3+C_1^2 y+C_2.$$

111. 6. *Să se integreze ecuația:* $y^2p(xp+yq)=z+yq$.

Problema se reduce la integrarea sistemului

$$\frac{dx}{y^2(2xp+yq)}=\frac{dy}{yx(y^2p-1)}=\frac{-dp}{p(y^2p-1)}=\frac{-dq}{2xyp^2+3y^2pq-2q}.$$

Egalitatea care o formează rapoartele dela mijloc spune că: $py = C_1$. Introducând această valoare în ecuație obținem pe q. Rezultă că z va fi dat de ecuația

$$dz = C_1 \frac{dx}{y} + \frac{C_1^2 x - z}{y - C_1 y^2} dy,$$

care este o ecuație cu diferențiale totale (§ 109). Va trebui să integrăm sistemul

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{C_1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{C_1^2 x - z}{y - C_1 y^2}.$$

Prima ecuație spune că: $z = C_1 \frac{x}{y} + u$, unde u este o funcțiune numai de y care va fi determinată de ecuația a doua. Introducând aci valoarea lui z găsită, obținem

$$\frac{du}{u} = \frac{dy}{C_1 y^2 - y}; \quad \ln u = \ln (C_1 y - 1) - \ln y + \ln C_2,$$

adică

$$z = \frac{C_1 x - C_2}{y} + C_1 C_2.$$

111. 7. *Să se integreze ecuația:* $xp^2 + yq^2 = z^2$.

Sistemul (VIII) este

$$\frac{dx}{2px} = \frac{dy}{2qy} = \frac{dz}{2z^2} = \frac{-dp}{p^2 - 2pz} = \frac{-dq}{q^2 - 2qz}.$$

Cu ajutorul lui, obținem combinația integrabilă.

$$\frac{ydx - xdy}{2xy} = \frac{pdq - qdp}{pq}; \quad \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 2\left(\frac{dq}{q} - \frac{dp}{p}\right), \tag{1}$$

de unde rezultă integrala: $xp^2 = C_1 yq^2$. In baza acesteia, ecuația dă

$$p = \pm \sqrt{\frac{C_1}{C_1 + 1}} \frac{z}{\sqrt{x}}, \quad q = \pm \frac{1}{\sqrt{C_1 + 1}} \frac{z}{\sqrt{y}},$$

valori care introduse în (X) dau

$$\frac{dz}{z} = \pm \sqrt{\frac{C_1}{C_1 + 1}} \frac{dx}{\sqrt{x}} \pm \frac{1}{\sqrt{C_1 + 1}} \frac{dy}{\sqrt{y}},$$

de unde

$$\ln z = \pm \frac{2}{\sqrt{C_1 + 1}} (\sqrt{C_1 x} + \sqrt{y}) + C_2.$$

Observații. 1°. Se poate da o soluție asemănătoare cu cea dela pr. 111. 2, făcând substituțiile

$$\frac{dz}{z} = dZ, \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = dX, \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = dY.$$

2°. Din ecuațiile (1) se pot deduce și alte integrale ale sistemului. Astfel avem

$$\frac{dz}{2z^2} = \frac{dp}{2pz - p^2}; \quad \frac{dp}{dz} = \frac{1}{z} p - \frac{1}{2z^2} p^2, \tag{2}$$

care este o integrală tip Bernoulli și se integrează așa cum am spus la (§ 99, no. 1). Soluția ei este

$$p=\frac{2z}{\ln C_1 z}. \tag{3}$$

Analog, tot din sistemul (1) constatăm că și q verifică ecuația (2), adică va trebui să avem și

$$q=\frac{2z}{\ln C_2 z}. \tag{4}$$

In felul acesta am obținut două integrale cari complectate cu ecuația însăși și eliminând între ele p și q vom obține soluția problemei. Această eliminare se face ușor și obținem

$$\frac{4x}{(\ln C_1 z)^2}+\frac{4y}{(\ln C_2 z)^2}=1,$$

sau încă

$$4[x(\ln C_2 z)^2+y(\ln C_1 z)^2]=(\ln C_1 z)^2(\ln C_2 z)^2. \tag{5}$$

Vreau să arăt că functia z definită de ecuația (5) nu este o soluție bună. Pentru aceasta voiu arăta că ecuațiile (3) și (5) nu sunt compatibile. In adevăr, derivând relația (5) în raport cu x obținem

$$2(\ln C_2 z)^2+4\frac{p}{z}[x(\ln C_2 z)+y(\ln C_1 z)]=\frac{p}{z}(\ln C_1 z)(\ln C_2 z)[(\ln C_1 z)+(\ln C_2 z)].$$

Inlocuind aci valoarea lui $\frac{p}{z}$ dată de (3) și făcând reducerile obținem

$$4[x(\ln C_2 z)+y(\ln C_1 z)]=(\ln C_1 z)^2(\ln C_2 z); \tag{6}$$

înmulțind-o pe (6) cu $(\ln C_2 z)$ și scăzând-o din (5), rezultă

$$y(\ln C_1 z)\left(\ln\frac{C_1}{C_2}z^2\right)=0.$$

ceiace cere ca z să fie constantă soluție ce nu verifică ecuația dată.

111. 8. *Să se găsească suprafața care trece prin dreapta: $x+y=1$, $z=0$ și la care distanța dintre urma pe planul xOy a normalei dusă din punctul M și proecția acestui punct pe planul xOy, este a.*

In punctul curent $M(x, y, z)$, ecuațiile normalei la suprafață sunt (§ 64, III),

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1};$$

pentru a găsi punctul unde această dreaptă înțeapă planul xOy facem $Z=0$. Coordonatele acestui punct vor fi $(pz+x, qz+y, 0)$; pe de altă parte proiecția lui M pe planul xOy are coordonatele $(x, y, 0)$, încât condiția problemei se traduce prin relația

$$z^2(p^2+q^2)=a^2.$$

Această relație este o ecuație cu derivate parțiale de tipul (III). Pentru integrare punem $q=C_1 p$. Soluția este

$$x+C_1 y+C_2=\pm\frac{\sqrt{1+C_1^2}}{2a}z^2.$$

Făcând aci $z=0$, rezultă: $C_1=1$, $C_2=-1$. Suprafața particulară cerută de problemă este una din soluțiile

$$\pm a\sqrt{2}(x+y-1)=z^2.$$

§ 112. Ecuații de ordinul al doilea

Teoria ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul al doilea depășește programul cărții de față. De aceia, mergând pe aceiași linie ca la ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul întâiu, vom da câteva generalități, fără multe precizări, care împreună cu problemele ce vor urma, să ne dea o vagă ideie despre conținutul acestui capitol important din Matematică, important în special pentru legăturile lui cu științele aplicate.

1. Fiind dată o ecuație de ordinul 2, o soluție a ei care depinde de cinci constante arbitrare se numește *soluție complectă*; iar o soluție ce depinde de două funcții arbitrare (de o singură variabilă) se numește în mod obișnuit, *soluție generală*. Trecerea dela soluția completă la soluția generală nu este întotdeauna posibilă cum este în cazul ecuațiilor de primul ordin. In plus, nu orice soluție care conține două funcțiuni arbitrare și care verifică ecuația, poate fi interpretată ca soluția generală a ecuației. Singura metodă care ne spune fără echivoc dacă o funcțiune reprezintă soluția generală este de a vedea dacă această funcțiune poate reprezenta o suprafață care să treacă printr'o curbă dată și să aibă dealungul acestei curbe o familie de plane tangente dată dinainte.

Problemele de Fizică în cari se prezintă o ecuație cu derivate parțiale de ordinul 2, și acestea sunt foarte numeroase, cer în general determinarea unei soluții particulare care să satisfacă la anumite condiții care pot fi de două feluri: *condiții inițiale* și *condiții la limită*. Primele au de scop precizarea anumitor elemente ale fenomenului fizic la începutul experienței, iar celelalte arată cum trebue să se prezinte acest fenomen la periferia mediului în care se produce.

2. Se numește ecuație de ordinul 2 liniară, o ecuație de forma

$$Pr+2Qs+Rt+H=0 \qquad \text{(I)}$$

unde P, Q, R, H sunt funcții de x, y, z, p, q. Cazurile cele mai frecvente sunt acelea pentru cari P, Q, R sunt funcții numai de x și y. In acest caz, ecuația (I) poate fi redusă la o formă canonică în felul următor. Se face în ecuație o schimbare de variabile*) definită prin funcțiunile

$$\xi=\xi(x,\ y),\quad \eta=\eta(x,\ y),$$

și determinată precum urmează.

a) $Q^2-PR>0$. Se consideră ecuația cu derivate parțiale de primul ordin

$$Pp^2+2Qpq+Rq^2=0, \qquad \text{(III)}$$

care se descompune în ecuațiile

$$Ap+Bq=0,\quad Cp+Dq=0. \qquad \text{(III')}$$

Se alege pentru ξ o soluție particulară a primei ecuații și pentru η o soluție particulară a celei de-a doua. Ecuația (I) se reduce la forma canonică

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}=H_1\left(\xi,\ \eta,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial\xi},\ \frac{\partial z}{\partial\eta}\right), \qquad \text{(IV)}$$

și se zice că este de *tip iperbolic*.

*) Această schimbare este tratată pe larg pe un caz particular în prob. 112. 2. Metoda este aceiași și în cazul general.

b) $Q^2-PR<0$. Se poate proceda în mod analog dar se introduc variabile complexe. Pentru a le evita se pune

$$2\xi=u+iv, \quad 2\eta=u-iv. \tag{V}$$

Noua forma a ecuației (I) va fi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=H_1\left(u,\ v,\ z\ \frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v}\right);$$

Se zice că ecuația este de *tip eliptic.*

c) $Q^2-PR=0$. Ecuațiile (III') se reduc la una singură. Se ia pentru ξ o soluție particulară a acesteia iar $\eta=y$; ecuația (I) ia forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=H_1\left(\xi,\ \eta,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial \xi},\ \frac{\partial z}{\partial \eta}\right),$$

și se zice că este de *tip parabolic.*

Observație. Se poate ca natura expresiei Q^2-PR să difere în diferite regiuni ale planului; atunci, ecuația respectivă va avea în fiecare regiune forma canonică corespunzătoare. Pe liniile ce despart regiunile între ele, ecuația va fi de tipul parabolic.

112. 1. *Să se integreze ecuațiile*

1° $r=A(x,\ y)$; 2° $r+A(y)p+B(y)=0$; 3° $s=0$.

Ecuațiile date pot fi considerate ca ecuații diferențiale. Avem pe rând:

1° Ecuația se scrie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=A(x,\ y)$$

și integrată de două ori în raport cu x,

$$z=\int dx\int A(x,\ y)\,dx+f(y)\,x+g(y),$$

unde f și g sunt două funcțiuni arbitrare.

2° Ecuația

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+A(y)\frac{\partial z}{\partial x}+B(y)=0, \tag{1}$$

considerată numai în variabila x este o ecuație cu coeficienți constanți. Integrarea ei depinde de natura rădăcinilor ecuației caracteristice (§ 103, no. 1)

$$\alpha^2+A(y)\,\alpha+B(y)=0.$$

In orice caz, această ecuație dă două integrale particulare z_1, z_2 ale ecuației (1), încât soluția generală va fi

$$z=f(y)\,z_1+g(y)\,z_2,$$

unde f și g sunt două funcții arbitrare.

Ecuația 1° este un caz particular al acesteia.

3° Scriem ecuația sub forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \quad \text{de unde} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(y),$$

sau, printr'o nouă integrare,

$$z=f(x)+g(y),$$

unde am pus

$$g(y)=\int \varphi(y)\,dy.$$

Funcțiunile f și g sunt arbitrare.

112. 2. *Să se integreze ecuația*

$$ar+2bs+ct=0.$$

a, b, c fiind constante.

Facem schimbarea de variabile

$$u=x+\alpha y, \qquad v=x+\beta y, \tag{1}$$

unde α și β sunt constante ce urmează să fie determinate. Pentru derivatele lui z vom avea

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

și analog găsim

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Introducând aceste valori în ecuația dată obținem o ecuație de aceiași formă

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+C\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0, \tag{2}$$

unde A, B, C sunt numerele

$$A=a+2b\alpha+c\alpha^2, \quad B=a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta, \quad C=a+2b\beta+c\beta^2. \tag{3}$$

Integrarea ecuației (2) se poate reduce la ecuații simple impunând asupra lui A, B, C anumite condiții. In acest scop considerăm ecuația

$$a+2b\rho+c\rho^2=0; \tag{4}$$

natura rădăcinilor acestei ecuații impune următoarele cazuri.

1° Ecuația (4) are rădăcini reale distincte. Luăm pentru α și β aceste rădăcini. Atunci din (3) se vede că $A=C=0$ și

$$B=a-\frac{2b^2}{c}+a=\frac{2(ac-b^2)}{c}\neq 0.$$

deoarece numărătorul este realizantul ecuației (4) diferit de zero în ipoteza noastră. Ecuația se reduce la forma simplă: $s=0$ care are drept soluție (vezi problema precedentă)

$$z=f(u)+g(v)=f(x+\alpha y)+g(x+\beta y). \tag{5}$$

2° Ecuația (4) are o rădăcină dublă care fie α. Atunci $A=0$ și $B=0$. In adevăr, α trebue să anuleze și derivata ecuației (4), adică: $b+c\alpha=0$ și ecuația însăși spune că și $a+b\alpha=0$.

Deci,

$$B=a+b\alpha+\beta(b+c\alpha)=0.$$

Ecuația se reduce la forma simplă: $t=0$ și are drept soluție (analog ca la cazul 1° dela problema precedentă)

$$z=f(u)+vg(u)=f(x+\alpha y)+(x+\beta y)\,g(x+\alpha y), \qquad (6)$$

β fiind o constantă oarecare.

3° Ecuația (4) are rădăcini imaginare. Se poate folosi rezultatul dela primul caz, dar dacă vrem să evităm numerele complexe, putem alege pe α și β astfel ca: $A=C$, $B=0$. Acest lucru are loc atunci când

$$2b+c(\alpha+\beta)=0, \quad a+b(\alpha+\beta)+c\,\alpha\beta=0,$$

ecuații care spun că α și β sunt rădăcinile ecuației de gr. 2:

$$c^2\sigma^2+2bc\,\sigma+(2b^2-ac)=0, \qquad (7)$$

și care se poate arăta că are rădăcinile reale când (4) are rădăcinile imaginare. Ecuația dată ia forma *ecuației lui Laplace* (ecuația potențialului în plan)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0. \qquad (8)$$

După cum vom vedea (§ 116, no. 5), o soluție a acestei ecuații se poate obține în felul următor. Se consideră o funcție arbitrară de variabilă complexă $u+iv$; separând partea reală de cea imaginară, se obțin două funcții X și Y de variabilele u, v cari sunt soluții ale ecuației (8). Revenind la variabilele x și y prin (1) se obțin soluții ale ecuației date.

Observație. Dacă: $c=0$, schimbăm rolul lui x și y.

112. 3. *Fiind dată ecuația: $s=z$, se cere să se găsească soluția de forma $\varphi(u)$ unde: $u=(x-a)(y-b)$. a și b fiind două constante arbitrare, soluția care pentru $u=0$ să se reducă la 1.*

Avem

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(u)\,\frac{\partial u}{\partial x}=(y-b)\,\varphi'(u),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\varphi'(u)+(y-b)\,\varphi''(u)\,\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(u)+u\,\varphi''(u),$$

adică $\varphi(u)$ trebue să fie o soluție a ecuației diferențiale

$$u\,\varphi''(u)+\varphi'(u)-\varphi(u)=0.$$

Dacă folosim rezultatul dela prob. 105. 4, unde facem schimbarea de variabilă: $x^2=-4u$, înseamnă că $\varphi(u)$ va fi funcția lui *Bessel* de ordinul zero

$$\varphi(u)=1+\frac{u}{1^2}+\frac{u^2}{(2!)^2}+\cdots+\frac{u^n}{(n!)^2}+\cdots$$

112. 4. *Să se integreze ecuația*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

Să se găsească soluția care satisface condițiilor:

1° *pentru* $t=0$, $z=F(x)$ și $\frac{\partial z}{\partial t}=V(x)$, $F(x)$ și $V(x)$ *fiind două funcțiuni date* $(0\leqq x\leqq l)$ *(condiții inițiale).*

2° $z=0$ *când* $x=0$ *și* $x=l$ *(condiții de limită).*

Soluția I. Conform rezultatelor dela prob. 112. 2, soluția generală a ecuației date este

$$z=f(x+at)+g(x-at), \tag{2}$$

unde f și g sunt două funcții de o singură variabilă ce urmează să determinăm prin condițiile date de enunț. Condițiile 1° cer ca

$$f(x)+g(x)=F(x), \quad af'(x)-ag'(x)=V(x),$$

ultima condiție prin integrare cere ca

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{a}\int V(x)\,dx+C=G(x); \tag{3}$$

relațiile obținute se scriu

$$f(x)+g(x)=F(x), \quad f(x)-g(x)=G(x). \tag{4}$$

Aceste două ecuații rezolvate ne dau valorile lui f și g care introduse în (2) ne dau soluția scrisă sub forma*)

$$z=\frac{1}{2}[F(x+at)+G(x+at)]+\frac{1}{2}[F(x-at)-G(x-at)]. \tag{5}$$

Condițiile 2° arată o altă proprietate a funcțiilor f și g și deci a funcțiilor F și G definite prin (4). Inlocuind în (2), pe $x=0$ și apoi $x=l$ va trebui să avem (punem $at=u$)

$$f(u)+g(-u)=0, \quad f(l+u)+g(l-u)=0 \tag{6}$$

Inlocuind în a doua ecuație pe u cu $u+l$ și comparând rezultatul cu prima ecuație, rezultă: $f(u)=f(u+2l)$, adică (§ 35, pct. 3, b) funcțiunea $f(u)$ este periodică având perioada $2l$. Analog se arată despre funcțiunea $g(-u)$ și deci spre $g(u)$. Aceasta însemnează că și funcțiunile $F(x)$ și $G(x)$ date de problemă, trebue să fie periodice, în baza formulelor (4).

Funcțiunile $F(x)$ și $G(x)$ date prin enunț sunt definite numai în intervalul $[0, l]$. Problema impune pentru aceste funcțiuni valori bine determinate oricare ar fi x. In adevăr, prima ecuație din (6) spune că

$$f(-u)=-g(u) \quad \text{și} \quad g(-u)=-f(u), \tag{7}$$

încât din (4) avem

$$F(-x)=-g(x)-f(x)=-F(x), \quad G(-x)=-G(x), \; V(-x)=-V(x) \tag{8}$$

adică intervalului $[0, l]$ unde cunoaștem valorile funcțiilor prin datele problemei, îi va corespunde prin (8) intervalul $[-l, 0]$. Cunoscând acum valorile funcții-

*) Este interesant de observat că constanta C care intră în calcul prin formula (3) dispare în valoarea lui z dată de (5).

lor în intervalul $[-l, +l]$ și știind că sunt periodice de perioadă $2l$, le vom cunoaște valorile peste tot.

Soluția II. Se poate obține o soluție a ecuației (1) cu ajutorul seriilor trigonometrice*), Prin analogie cu ecuațiile diferențiale cu coeficienți constanți, să căutăm o soluție de forma: $z=e^{\alpha x+\beta t}$, unde α și β sunt presupuși constanți. Pentru a verifica ecuația, este necesar să avem condiția: $\beta^2=a^2\alpha^2$, adică soluția va fi de forma: $z=e^{\alpha x\pm a\alpha t}$. Numărul α poate fi real sau complex. Dacă-l luăm pur imaginar, adică: $\alpha=i\gamma$, atunci soluția se va putea scrie sub forma

$$z=e^{i\gamma x}\cdot e^{\pm ia\gamma t}=(\cos\gamma x+i\sin\gamma x)(\cos a\gamma t\pm i\sin a\gamma t)=$$
$$=\cos\gamma(x\pm at)+i\sin\gamma(x\pm at)$$

adică sume de termeni de forma

$$\cos\gamma x\cos\gamma at,\quad \sin\gamma x\sin\gamma at,\quad \sin\gamma x\cos\gamma at,\quad \cos\gamma x\sin\gamma at.$$

Aceasta înseamnează că aceste funcțiuni separat sunt soluții ale ecuației (1)**). Vom alege dintre ele, acelea care se potrivesc problemei noastre. Conform enunțului este necesar ca pentru $x=0$ soluția să se anuleze, adică va trebui să alegem soluții de forma

$$\sin\gamma x\ \sin\gamma at,\quad \sin\gamma x\cos\gamma at,$$

In plus, pentru $x=l$, deasemeni aceste soluții trebue să se anuleze, adică va trebui ca: $\gamma l=n\pi$; soluțiile vor lua forma

$$\sin\frac{n\pi x}{l}\ \sin\frac{na\pi t}{l},\quad \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{na\pi t}{l},$$

unde n este un parametru oarecare pe care noi îl vom alege egal cu un număr întreg și pozitiv. Evident că dacă expresiile date sunt soluții ale ecuației (1) cum aceasta este liniară și suma lor înmulțite în prealabil cu câte o constantă va fi soluție: adică funcțiunea z care satisface ecuației (1) și condițiilor la limită are forma

$$z=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\left(A_n\cos\frac{na\pi t}{l}+B_n\sin\frac{na\pi t}{l}\right), \tag{9}$$

unde A_n și B_n sunt constante ce urmează să fie determinate astfel ca soluția să satisfacă și condițiilor inițiale. In acest scop va trebui să avem

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l},\quad V(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na\pi}{l}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{10}$$

adică A_n și B_n se determină prin desvoltările în serie trigonometrică a funcțiilor date $F(x)$ și $V(x)$.

*) Această soluție va fi citită după ce s'au învățat cele cuprinse în § 115.

**) Se poate constata și direct că aceste patru funcții sunt soluții evitând astfel folosirea funcțiunilor de variabilă complexă. Totuși soluția dată are avantajul de a arăta originea acestor soluții.

Formulele (10) ne spun că funcțiile $F(x)$ și $V(x)$ trebue să fie impare, ceiace am arătat la prima soluție prin formulele (8), și periodice având perioada $2l$. Pentru desvoltarea în serie trigonometrică (§ 80), se va lua pentru funcțiunile $F(x)$ și $V(x)$ în intervalul $[-l,0]$ valorile definite prin (8).

Observație. Ecuația (1) intervine în Fizică în studiul vibrațiilor plane ale unei coarde întinse de lungime l, z reprezentând mărimea oscilației în punctul de abscisă x în momentul t. Din această cauză se numește *ecuația coardelor vibrante.*

112. 5. *Să se găsească soluția ecuației*

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial t},$$

care satisface condițiilor:

1° *Funcția z să ia pentru $x=0$ valoarea V_0 iar pentru $x=l$, valoarea V_l (condiții la limită).*

2° *Funcțiunea z pentru $t=0$ să fie o funcție dată $f(x)$ $(0\leq x\leq l)$, (condiții inițiale).*

O soluție imediată este funcția

$$z=A+Bx, \tag{1}$$

unde A și B sunt constante. Aceste constante se pot determina astfel ca funcția (1) să satisfacă condițiilor la limită. In adevăr, va trebui să avem

$$V_0=A,\quad V_l=A+Bl$$

adică

$$z=V_0+\frac{V_l-V_0}{l}x. \tag{2}$$

Se vede însă de pe însăși forma particulară a acestei soluții că ea nu poate fi soluția căutată deoarece în primul rând nu depinde de t. Soluția care ne interesează, se va obține din aceasta, adăugându-i încă și alți termeni. Vom căuta acești termeni de forma: $z=Ce^{\alpha x+\beta t}$ unde C, α, β sunt constante. Scriind că verifică ecuația dată, rezultă că va trebui să luăm: $\beta=a\alpha^2$, adică: $z=Ce^{\alpha x+a\alpha^2 t}$ unde α și C sunt constante la voia noastră. Ca și la problema precedentă luând $\alpha=\gamma i$, această soluție se poate scrie

$$z=Ce^{-a\gamma^2 t}\cdot e^{\gamma x i}=Ce^{-a\gamma^2 t}(\cos\gamma x+i\sin\gamma x),$$

ceiace pune în evidență soluțiile

$$z_1=Ce^{-a\gamma^2 t}\cos\gamma x,\quad z_2=Ce^{-a\gamma^2 t}\sin\gamma x.$$

Dar acești termeni adunați la (2) trebue să fie în așa fel ca z să satisfacă mai departe condițiile la limită, adică să se anuleze pentru $x=0$ și $x=l$. Aceasta însemnează că vom lua termeni de tipul z_2 în cari vom lua: $\gamma l=n\pi$. In concluzie, soluția problemei va fi de forma

$$z=V_0+\frac{V_l-V_0}{l}x+W(x,t), \tag{3}$$

unde

$$W(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\,e^{-a\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{4}$$

unde coeficienții C_n sunt deocamdată arbitrari. Ei vor fi determinați prin condițiile inițiale. In adevăr, făcând în (3) $t=0$, va trebui să avem

$$f(x)=V_0+\frac{V_l-V_0}{l}x+W(x,0),$$

unde $W(x,0)$ este calculat din (4). Rezultă

$$f(x)-V_0-\frac{V_l-V_0}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{5}$$

dezvoltare care ne va determina coeficienții C_n și odată cu ei, soluția căutată.

Din formula (5) rezultă anumite consecințe asupra lui $f(x)$. In adevăr, partea dreaptă este o funcțiune periodică de perioadă $2l$; aceasta înseamnează că și prima parte trebue să aibă aceiași proprietate adică trebue ca

$$f(x+2l)-V_0-\frac{V_l-V_0}{l}(x+2l)=f(x)-V_0-\frac{V_l-V_0}{l}x;$$

$$f(x+2l)-2(V_l-V_0)=f(x), \tag{6}$$

deci funcția $f(x)$ trebue să fie aleasă în așa fel ca să satisfacă relației (6) In al doilea rând, pentru a face desvoltarea (5) este necesar să cunoaștem prima parte, adică pe $f(x)$ într'un interval de mărime $2l$ (§ 80, no. 2). Așa cum este dat enunțul, funcția $f(x)$ este definită numai în intervalul $[0,l]$. Dar însăși desvoltarea spune că prima parte trebue să fie (ca și partea a doua) o funcțiune impară, adică

$$f(-x)-V_0+\frac{V_l-V_0}{l}x=-\left[f(x)-V_0-\frac{V_l-V_0}{l}x\right];$$

$$f(-x)=2V_0-f(x), \tag{7}$$

relație care ne definește pe $f(x)$ în intervalul $[-l,0]$. Cunoscând pe $f(x)$ în intervalul $[-l,+l]$ dezvoltarea în serie trigonometrică se poate face.

Observație. Ecuația considerată este un caz particular al ecuației mai generale

$$\frac{\partial V}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right),$$

și care se numește *ecuația propagării căldurii.* In particular ecuația din enunț se întâlnește și în alte probleme de Fizică ca de exemplu în teoria conductibilității electrice. Deasemen se întâlnește în Chimie când se studiază variația cu timpul a concentrației unei soluții sărate aflate într'un cilindru.

112. 6. *Să considerăm o spiră circulară de sârmă cu raza c. Intr'un punct Q de pe normala ridicată din centru funcția potențialului gravitațional este*

$$V_0=\frac{M}{\sqrt{c^2+x^2}}, \tag{1}$$

unde M este masa spirei și x distanța punctului Q la centrul spirei.

Se să se găsească funcția potențială datorită acestei spire într'un punct oarecare.

Deoarece funcția potențială satisface ecuației lui Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0, \tag{2}$$

problema revine la a integra această ecuație diferențială cu condiția la limită (1). Mai precis, scriind ecuația (2) în coordonate sferice (prob. 57. 16), problema se reduce la a găsi soluția ecuației cu derivate parțiale.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \theta}=0, \tag{3}$$

care satisface condiției la limită

$$V=\frac{M}{(c^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{pentru } \theta=0,$$

În baza simetriei spirei, valoarea funcției potențiale trebue să fie independentă de φ, adică ecuația (3) se reduce la

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \theta}=0. \tag{4}$$

Vom căuta o soluție a acestei ecuații de forma: $V=r^m P_m$ (5) unde P_m este o funcție numai de θ iar m un întreg pozitiv. Înlocuind în (4), ecuația se transformă în

$$\frac{d^2P_m}{d\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{dP_m}{d\theta}+m(m+1)P_m=0, \tag{6}$$

unde am lăsat deoparte factorul r^{m-2}. Facem aici schimbarea: $x=\cos\theta$.

Formulele stabilite cu ocazia rezolvării problemei 57.1 se scriu

$$\frac{dV}{dx}=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{dV}{d\theta},\quad \frac{d^2V}{dx^2}=\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{d^2V}{d\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{dV}{d\theta},$$

care rezolvate în raport cu derivatele în raport cu θ și valorile obținute introduse în (6) dau pentru P_m ecuația diferențială

$$(1-x^2)\frac{d^2P_m}{dx^2}-2x\frac{dP_m}{dx}+m(m+1)P_m=0. \tag{7}$$

Ori, am văzut cu ocazia rezolvării prob. 105.5 că această ecuație unde prin ipoteză m este un întreg, are printre soluțiile sale un polinom de gradul m ce se numește *polinomul lui Legendre* de gradul m și are expresia (3) dată cu ocazia rezolvării problemei amintită mai sus. Notăm acest polinom cu: $P_m(x)=P_m(\cos\theta)$.

Ne propunem să arătăm că aceste polinoame sunt definite prin *funcția generatoare*

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}}=\sum_{m=0}^{\infty} r^m P_m(x). \tag{8}$$

Pentru aceasta, considerăm din nou ecuația (2) care știm că admite soluția (prob. 53.6)

$$v = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}},$$

oricare ar fi x_1, y_1, z_1. Trecând la coordonate sferice prin formulele cunoscute, rezultă pentru v expresia

$$v = \frac{1}{\sqrt{r^2-2rr_1[\cos\theta\cos\theta_1+\sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi-\varphi_1)]+r_1^2}}.$$

Luând aci $r_1=1$; $\varphi=\varphi_1=0$, $\theta_1=0$, obținem funcțiunea

$$v = \frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}, \tag{9}$$

care va verifica ecuația (4). Pedealtă parte, aceiași ecuație am arătat mai sus că este verificată de soluția: $r^m P_m(\cos\theta) = r^m P_m(x)$, oricare ar fi m; aceasta însemnează că vom putea scrie (făcând și în (9) $\cos\theta = x$),

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = A_0P_0(x)+A_1rP_1(x)+\cdots+A_mr^mP_m(x)+\cdots, \tag{10}$$

unde A_m sunt coeficienți numerici ce urmează să determinăm. In acest scop, înlocuim pe r cu r/x și-l facem pe x să tindă către infinit; atunci obținem

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r}} = \sum_{m=0}^{\infty} r^m \lim_{x\to\infty}\frac{A_mP_m(x)}{x^m}.$$

Dar, conform formulei binomului, în ipoteza $|r|<1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r}} = (1-2r)^{-\frac{1}{2}} = \sum (-1)^m \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-m+1\right)}{m!}(2r)^m$$
$$= \sum \frac{1\cdot 3\ldots(2m-1)}{m!}r^m,$$

încât prin comparație

$$A_m \lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{x^m} = \frac{1\cdot 3\ldots(2m-1)}{m!}. \tag{11}$$

Folosind pe de altă parte expresia lui $P_m(x)$ dată la prob. 105.5, avem imediat

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{x^m} = \frac{1\cdot 3\ldots(2m-1)}{m!}. \tag{12}$$

Comparând pe (11) cu (12) rezultă $A_m=1$ oricare ar fi m, și deci formula (8) este demonstrată.

Să folosim această formulă pentru a găsi valoarea lui $P_m(1)$. Facem în (8) $x=1$; găsim

$$\frac{1}{\sqrt{(1-r)^2}} = \frac{1}{1-r} = \sum_{m=0}^{\infty} r^m = \sum_{m=0}^{\infty} r^m P_m(1),$$

adică: $P_m(1)=1$.

Acum suntem în măsură să rezolvăm problema dată de enunț. Ca și la găsirea funcției generatoare, va trebui să avem

$$V=A_0P_0(\cos\theta)+A_1rP_1(\cos\theta)+A_2r^2P_2(\cos\theta)+\cdots$$

unde A_m sunt coeficienți numerici. Ținând seamă de condiția la limită, va trebui să avem

$$\frac{M}{(c^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}=A_0+A_1r+A_2r^2+\cdots$$

Această relație ne determină coeficienții A_m în ipoteza că $|r|<|c|$. Avem atunci

$$\frac{M}{(c^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{M}{c}\left(1+\frac{r^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{M}{c}\left(1-\frac{1}{2}\frac{r^2}{c^2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{r^4}{c^4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{r^6}{c^6}+\cdots\right),$$

adică indefinitiv

$$V=\frac{M}{c}\left[P_0(\cos\theta)-\frac{1}{2}\frac{r^2}{c^2}P_2(\cos\theta)+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{r^4}{c^4}P_4(\cos\theta)-\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{r^6}{c^6}P_6(\cos\theta)+\cdots\right].$$

Observație. In cursul acestei probleme am scris unele formule ale căror calcule nu au fost complect justificate. Această metodă este des întrebuințată în științele aplicate.

CAPITOLUL XVI

CALCULUL VARIAȚIILOR

§ 113. Extremele integralelor conținând o singură funcție necunoscută

1. In cele ce urmează, ne punem problema de a determina curba (sau curbele) a cărei ecuație este $y=f(x)$ și pentru cari integrala

$$I=\int_A^B F(x,y,y')\,dx, \tag{I}$$

luată între două puncte A și B de pe curbă, prezintă un extrem. De obiceiu se caută condiția ca acest extrem să fie un minim. Condiția necesară pentru extrem, este ca funcția y să satisfacă ecuației lui Euler

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0, \tag{II}$$

care dezvoltată este

$$\frac{\partial^2F}{\partial y'^2}y''+\frac{\partial^2F}{\partial y\,\partial y'}y'+\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0. \tag{III}$$

O funcţie y, care satisface acestei ecuaţii, se numeşte *funcţie extremală*. Extremalele unei integrale depind în general de două constante arbitrare care se determină prin condiţiile ca ele să treacă prin A şi B.

2. Condiţia precedentă este numai necesară. Condiţia necesară şi suficientă pentruca o curbă $y=f(x)$ să dea un minim pentru integrala (I), este în primul rând de a fi extremală şi apoi să mai indeplinească şi condiţiile:

a) $R>0$ (condiţia lui Legendre), (IV)

b) ecuaţia lui Jacobi

$$u''+\frac{R'}{R}u'+\frac{Q'-P}{R}u=0, \tag{V}$$

să admită o integrală particulară care să nu se anuleze în intervalul format de abscisele punctelor A şi B. Condiţia (IV) este deasemeni presupusă adevărată în acelaşi interval.

In aceste condiţii P, Q, R sunt valorile derivatelor parţiale $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}, \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ când înlocuim pe y (şi deci pe y') prin funcţiunea extremală.

113. 1. *Să se găsească curba care dă minimul integralei*

$$I=\int_{-a}^{a}\left(\frac{1}{3}y^3+x^2-a^2y\right)dx \qquad (a>0).$$

In general, dacă funcţia F din (I) nu depinde de y', cum este cazul în problema actuală, ecuaţia (III) se reduce la: $F'_y=0$ care este o ecuaţie algebrică. Această ecuaţie defineşte una sau mai multe curbe extremale care nu depind de constante arbitrare. Punctele A şi B din (I), vor fi punctele depe aceste curbe care au abscisele respectiv $-a$ şi $+a$. In cazul problemei noastre există o singură curbă extremală şi anume cercul de ecuaţie

$$F'_y=y^2+x^2-a^2=0,$$

care trece prin punctele $A(-a,0)$, $B(a,0)$. Pentru a vedea dacă această curbă dă un minim trecem la condiţiile următoare. Aceste condiţii nu mai sunt aplicabile în cazul actual deoarece R este identic nul. Pentru a rezolva problema este deci necesar să ne raportăm la teorie îndreptând pe cititor spre un curs de Analiză Matematică. Se constată astfel că problema se rezolvă în general, înlocuindu-se integrala (I) cu

$$I=\int_{A}^{B}F[x,f(x)+\alpha g(x),\ f'(x)+\alpha g'(x)]\,dx=I+\alpha I_1+\alpha^2 I_2+\cdots$$

unde $g(x)$ este o funcţie arbitrară. Ecuaţia (II) se obţine scriind că $I_1=0$, iar condiţiile (IV) şi (V) scriind că $I_2>0$. In general expresia lui I_2 este

$$I_2=\int_{A}^{B}[Pg^2(x)+2Qg(x)g'(x)+Rg'^2(x)]\,dx.$$

În cazul nostru

$$I_2=2\int_{-a}^{a} yg^2(x)\,dx$$

expresie ce va fi pozitivă dacă luăm $y>0$. Deci curba ce corespunde problemei noastre este semi-cercul ce unește punctele A, B situat deasupra axei Ox.

113. 2. *Să se determine minimul integralei*

$$I=\int_A^B (y^2+2xyy')\,dx,$$

unde $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

Vrând să scriem ecuația (III) constatăm că este identic verificată, adică minimul integralei este dat de orice curbă ce trece prin punctele A și B! Care este motivul? Pentru a justifica acest fapt, observăm că integrând prin părți,

$$\int_{x_1}^{x_2} x(2yy'dx) = \left| xy^2 \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$$

adică: $I=\left| xy^2 \right|_{x_1}^{x_2} = x_2 y_2^2 - x_1 y_1^2$. Aceasta înseamnă că integrala dată nu depinde de curba dealungul căreia o calculăm având mereu aceiași valoare și care se va confunda cu minimul pe care-l căutăm.

113. 3. *Să se găsească minimul integralei*

$$I=\int_A^B ds.$$

Înlocuind pe: $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$, integrala devine

$$I=\int_A^B \sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{1}$$

În general, când elementul de integrat nu depinde decât de y', ecuația (III) se reduce la: $y''=0$, adică: (2) $y=ax+b$ și extremalele sunt drepte. În cazul nostru,

$$F=\sqrt{1+y'^2},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=\frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

adică înlocuind pe $y'=a$, $P=0$, $Q=0$, $R=\dfrac{1}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}>0$, adică condiția (IV) este verificată. Ecuația (V) se reduce la: $u''=0$ a cărei integrală se poate lua o constantă oarecare diferită de zero.

Rezultatul era de bănuit deoarece integrala al cărui minim l-am căutat exprimă lungimea curbei extremale cuprinsă între A și B. Ori curba ce asigură acest minim este dreapta ce unește aceste puncte.

113. 4. *Să se determine curba care asigură minimul integralei*

$$I=\int_A^B \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx,$$

punctele date A și B fiind situate în semi-planul $y>0$.

Vom începe prin a considera în general cazul când funcția F din (I) nu conține pe x și vom da o metodă pentru integrarea ecuației (III) care în acest caz se scrie

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}y'-\frac{\partial F}{\partial y}=0. \tag{1}$$

Punem $y'=p$ și o considerăm ca fiind o ecuație diferențială de primul ordin în y și p, prima fiind considerată ca variabilă independentă. Cu noile notații, ecuația se scrie

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{dp}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial p}p=\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}p\frac{dp}{dy}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial p}p. \tag{2}$$

Dar,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial F}{\partial p}\right)=\frac{dp}{dy}\frac{\partial F}{\partial p}+p\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial p}+p\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{dp}{dy},$$

încât (2) se mai scrie

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dy}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial F}{\partial p}\right)=0 \quad \text{sau} \quad \frac{d}{dy}\left(F-p\frac{\partial F}{\partial p}\right)=0,$$

de unde rezultă, revenind la vechile notații

$$F(y,\,y')-y'\frac{\partial F(y,\,y')}{\partial y'}=C_1, \tag{3}$$

ecuație ce nu conține decât pe y și y', și care integrată introduce o nouă constantă C_2.

Revenim la problema din enunț. Ecuația (3) este

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}-\frac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{C_1};\quad y^2(1+y'^2)=C_1^2,$$

sau încă

$$dx=\frac{y\,dy}{\pm\sqrt{C_1^2-y^2}};\quad x+C_2=\pm\sqrt{C_1^2-y^2},$$

ecuație ce reprezintă familia de cercuri

$$(x+C_2)^2+y^2=C_1^2. \tag{4}$$

Să arătăm că în adevăr aceste curbe fac integrala minimă. Această demonstrație se poate face cu ajutorul condițiilor (IV) și (V) sau geometric. Alegem calea a doua, deoarece aceasta este mai intuitivă și totodată ne face să pătrundem mai bine noțiunile. Începem prin a face câteva pregătiri.

a) Dacă schimbăm axa Oy paralel cu ea însăşi, integrala nu se schimbă. In adevăr, această operaţie revine la a face: $x = x_0 + X$, $y = Y$ ceiace spune că: $dx = dX$, $dy = dY$, şi deci

$$I = \int_A^B \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \int_A^B \frac{\sqrt{dX^2 + dY^2}}{Y}.$$

b) Inversiunea, în raport cu un punct de pe axa Ox, luat ca pol, nu schimbă integrala. In baza primei proprietăţi se poate alege polul chiar în origină. Dacă M este punctul ce transformăm şi M' punctul transformat, atunci:

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k \ (k \text{ puterea de inversiune}). \qquad (5)$$

Dacă $M(x, y)$ şi $M'(X, Y)$, atunci avem formulele [care se reduc proectând relaţia (5) pe axe],

$$x = \frac{kX}{X^2 + Y^2}, \quad y = \frac{kY}{X^2 + Y^2}. \qquad (6)$$

In baza acestor formule, avem

$$dx = k \frac{(Y^2 - X^2)\,dX - 2XY\,dY}{(X^2 + Y^2)^2}, \quad dy = k \frac{-2XY\,dX + (X^2 - Y^2)\,dY}{(X^2 + Y^2)^2}$$

cari dau

$$dx^2 + dy^2 = k^2 \frac{dX^2 + dY^2}{(X^2 + Y^2)^2},$$

şi deci în baza celei de-a doua formula din (6),

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \frac{\sqrt{dX^2 + dY^2}}{Y}$$

ceiace demonstrează proprietatea.

c) Dacă A, B sunt două puncte situate pe o paralelă la Oy (fig. 177) minimul integralei este dat de segmentul AB. In adevăr, fie (C) o curbă oarecare din plan ce uneşte cele două puncte şi fie ds elementul ei de arc care se proiectează pe AB după dy. Dacă I_1 este valoarea integralei dealungul segmentului AB, atunci

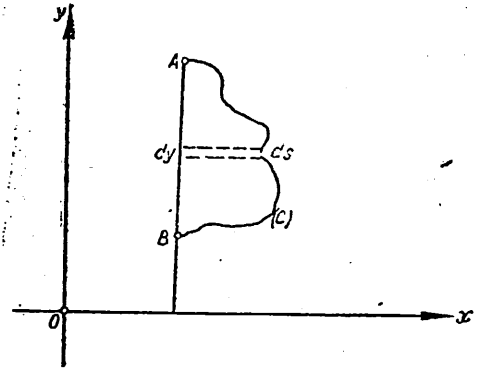


Fig. 177

$$I = \int_{(C)} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} > \int_C \frac{\sqrt{dy^2}}{y} =$$

$$= \int_B^A \frac{dy}{y} = I_1;$$

$$I > I_1,$$

adică I_1 este cea mai mică valoare pe care poate s'o ia I.

Suntem acum în măsură să rezolvăm problema. S'a arătat în prima parte, că fiind date două puncte oarecare A şi B curba extremală este un

arc de cerc ce trece prin ele şi are centrul pe Ox (acest cerc se construieşte geometric găsindu-i centrul la intersecţia unei perpendiculare ridicată pe mijlocul lui AB cu Ox, construcţie valabilă în ipoteza că AB nu este paralelă cu Ox; acest caz particular a fost studiat separat). Arcul de cerc extremal taie axa Ox în două puncte C şi D. Se mută origina într'unul din aceste două puncte, de exemplu în C, şi apoi se aplică o înversiune cercului $ABCD$. Toate aceste operaţii am văzut că nu schimbă integrala I. Deci curba extremală va fi aceiaşi cu cea a punctelor transformate. Dar care sunt aceste puncte? In urma sehimbărei de origină în cercul (4) trebue să luăm $C_1 = C_2$ ca să treacă prin noua origină,

$$x^2+y^2+2C_2x=0.$$

Aplicându-i o inversiune prin formulele (6), curba transformată va fi

$$k+2C_2X=0.$$

adică o dreaptă paralelă la OY. Punctele A şi B se transformă în două puncte A', B' situate pe o paralelă la OY şi extremala integralei va fi însăşi segmentul $A'B'$ adică transformatul arcului AB.

Observaţie. Dacă ar fi să numim aceste extremale *linii drepte*, iar valoarea integralei din enunţ, luată dealungul acestei extremale, *distanţa* dintre punctele A şi B, atunci se obţine o verificare a geometriei lui Lobacevschi în semi-planul $y > 0$.

113. 5. *Să se găsească curba plană ce trece prin două puncte A şi B (care să nu fie coliniare cu 0) pentru care integrala*

$$I=\int_A^B \frac{ds}{\rho^2},$$

are un minim, ρ fiind distanţa dela origină la elementul ds.

Inlocuind în integrală elementul de arc ds prin valoarea sa în coordonate polare (§ 89, IV), integrala ia forma

$$I=\int_A^B \frac{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}{\rho^2}\,d\theta. \qquad (1)$$

Pentru a încadra o asemenea integrală în formulele noastre, vom spune că θ joacă rolul lui x iar ρ pe a lui y. Deoarece funcţiunea de integrat nu conţine pe θ, suntem în cazul dela pr. 113. 4. Ecuaţia (3) de acolo ia forma aci

$$\sqrt{\rho^2+\rho'^2}=a;\quad d\theta=\frac{-d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}};\quad \theta-\alpha=\arccos\frac{\rho}{a},$$

de unde*)

$$\rho=a\cos(\theta-\alpha), \qquad (2)$$

unde a şi α sunt două constante ce urmează să fie determinate prin condiţia ca curba (2) să treacă prin A şi B. Ecuaţia (2) reprezintă un cerc care trece prin origine, are raza $\frac{1}{2}a$ şi centrul situat pe dreapta OI ce face unghiul α

*) S'a luat numai semnul — în faţa radicalului pentruca în ecuaţia (2) să apară linia trigonometrică cosinus. Dacă se lua şi semnul +, obţineam aceiaşi curbă numai că ecuaţia era scrisă sub altă formă,

cu direcția pozitivă a axei Ox (fig. 178). Constantele a și α se vor putea întotdeauna determina pentruca cercul (2) să treacă prin două puncte date A și B. In adevăr, acest lucru se vede geometric, deoarece prin punctele O, A, B nesituate pe o aceiași dreaptă, trece întotdeauna un cerc și numai unul. In cazul când A, B, O sunt coliniare cercul se reduce la o dreaptă (caz ce corespunde la soluția $a=\infty$, și ecuația se reduce la: $\theta=\alpha$).

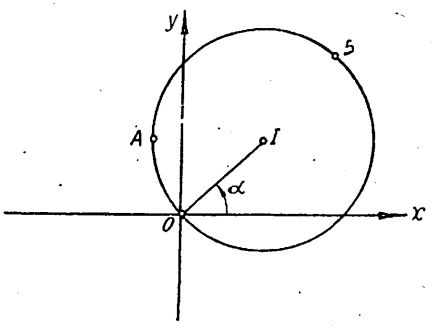


Fig. 178

Să vedem ce devin condițiile (IV) și (V) pentru extremala (2). Avem

$$F=\frac{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}{\rho^2},\quad \frac{\partial^2F}{\partial\rho^2}=\frac{2\rho^4+9\rho^2\rho'^2+6\rho'^4}{\rho^4(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial^2F}{\partial\rho\partial\rho'}=-\frac{3\rho^2\rho'+2\rho'^3}{\rho^3(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial^2F}{\partial\rho'^2}=\frac{1}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Înlocuind în aceste expresii pe ρ și ρ' date de (2), avem cu notațiile din introducere,

$$a^3P=\frac{2\cos^4(\theta-\alpha)+9\cos^2(\theta-\alpha)\sin^2(\theta-\alpha)+6\sin^4(\theta-\alpha)}{\cos^4(\theta-\alpha)}=2+9\operatorname{tg}^2(\theta-\alpha)+6\operatorname{tg}^4(\theta-\alpha),$$

$$a^3Q=\frac{3\cos^2(\theta-\alpha)\sin(\theta-\alpha)+2\sin^3(\theta-\alpha)}{\cos^3(\theta-\alpha)}=3\operatorname{tg}(\theta-\alpha)+2\operatorname{tg}^3(\theta-\alpha),$$

$a^3R=1$ și deci $R'=0$. Mai departe,

$$a^3Q'=\frac{3}{\cos^2(\theta-\alpha)}+6\frac{\operatorname{tg}^2(\theta-\alpha)}{\cos^2(\theta-\alpha)}=3+9\operatorname{tg}^2(\theta-\alpha)+6\operatorname{tg}^4(\theta-\alpha),$$

și deci: $a^3(Q'-P)=1$. Condiția (IV) este identic verificată deoarece a fiind o lungime (reprezintă jumătate din raza cercului) este presupusă pozitivă. Ecuația (V) este

$$u''+u=0,$$

care are integrala particulară: $u=\sin\theta$ și care nu se anulează cât timp θ variază dela zero la π (de altfel θ variază între argumentele lui A și B a căror diferență nu poate depăși 180°). Astfel integrala I va reprezenta un minim pentru arcul de cerc ce nu trece prin origină.

Observație. Problema rezolvată are următoarele aplicații în Mecanică și anume: a) Curba obținută dă poziția de echilibru a unui fir acționat de o forță egală cu $\frac{2}{r^3}$ care derivă din funcțiunea de forță $-\frac{1}{r^2}$, tensiunea firului fiind $\frac{1}{r^2}$. b) Deasemeni curba obținută este curba *brachistocronă* a unui mobil care s'ar mișca cu o viteză V definită prin formula: $V=r^2$.

113. 7. *Se consideră în spațiu două puncte A și B având cota pozitivă. Să se găsească minimul integralei.*

$$J=\int_A^B\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{z},\qquad (1)$$

presupunând curba extremală situată pe una din suprafețele: a) un plan (Π) *neparalel eu xOy; b) un con de rotație având axa paralelă cu Oz și având vârful situat în plannl xOy.*

Inainte de a rezolva problema propriu zisă, să facem câteva observări cari vor uşura soluţia. In primul rând, ne propunem să arătăm că o deplasare a axelor astfel ca planul xOy să alunece pe el însuşi nu schimbă pe J. Lucru este uşor de bănuit, deoarece expresia: dx^2+dy^2 reprezintă o lungime în planul xOy şi deci mărimea ei nu va depinde de alegerea axelor. Deasemeni z rămâne neschimbat şi deci J. Iată o demonstraţie analitică pentru faptul că: dx^2+dy^2 rămâne neschimbat. In schimbarea menţionată, z rămâne acelaşi iar x şi y se schimbă prin formulele cunoscute din Geometrie Analitică,

$$x=x_0+X\cos\alpha-Y\sin\alpha,\quad y=y_0+X\sin\alpha+Y\cos\alpha. \tag{2}$$

Deci,

$$dx=\cos\alpha\,dX-\sin\alpha\,dY,\quad dy=\sin\alpha\,dX+\cos\alpha\,dY,$$

de unde

$$dx^2+dy^2=dX^2+dY^2. \tag{3}$$

n baza acestei proprietăţi, se zice că expresia: dx^2+dy^2 este un *invariant* faţă de transformarea (2).

Pentru a găsi o extremală care trece prin A şi B să facem mai întâiu observarea că prin A şi B trece întotdeauna un plan (P) paralel cu Oz (dacă dreapta AB este paralelă cu Oz trec o infinitate în care caz (P) va fi unul oarecare din aceste plane). Fie (C) o curbă oarecare ce trece prin A şi B şi nu este situată în (P); proiectăm (C) pe (P) şi fie ds elementul de arc al lui (C) şi ds_1 elementul de arc al proiecţiei sale pe (P): avem evident $ds>ds_1$ iar $z=z_1$ (proiecţia făcută pe planul (P) este paralelă cu xOy, deoarece planul (P) este paralel cu Oz). Rezultă $J>J_1$; concluzia: extremala trebue să fie situată în planul (P). Dacă sunt mai multe plane (P) ea trebue să fie în toate, deci: *dacă AB este paralelă cu Oz, extremala este segmentul AB.*

Trecem la rezolvarea problemei.

a) Planul (Π) taie planul xOy după o dreaptă. Făcând să alunece planul xOy pe el însuşi, putem face ca această dreaptă să fie Ox, adică ecuaţia planului (Π) să fie: $z=my$. Atunci

$$J=\frac{1}{m}\int_A^B\frac{\sqrt{dx^2+(1+m^2)\,dy^2}}{y}.$$

Dacă punem: $\sqrt{1+m^2}\,y=u$, minimul integralei J se reduce la minimul integralei

$$J_1=\int_{A'}^{B'}\frac{\sqrt{dx^2+du^2}}{u}=\int_{A'}^{B'}\frac{\sqrt{1+u'^2}}{u}\,dx,$$

care a fost studiată în prob. 113. 4. Extremala este deci un cerc în planu xOu având centrul pe Ox, de ecuaţie

$$x^2+u^2+2ax+b=0,$$

sau dacă vrem să revenim la planul (Π), va fi cercul

$$x^2+y^2+z^2+2ax+b=0,\quad z=my$$

b) Putem muta planul xOy, făcându-l să alunece pe el însuşi, astfel ca vârful conului să fie în origină şi deci axa de rotaţie Oz. Ecuaţia conului în coordonate cilindrice va fi

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta, \quad z=m\rho.$$

Integrala devine

$$J=\frac{1}{m}\int_A^B \frac{\sqrt{(1+m^2)\,d\rho^2+\rho^2 d\theta^2}}{\rho},$$

încât dacă punem

$$\sqrt{1+m^2}\ \frac{d\rho}{\rho}=dR, \tag{4}$$

atunci integrala se reduce la

$$J=\frac{1}{m}\int_{A'}^{B'}\sqrt{dR^2+d\theta^2},$$

care spune că în planul (R, θ) extremalele vor fi drepte de ecuaţii (prob. 113. 3)

$$AR+B\theta=C \qquad (A, B, C \text{ constante}) \tag{5}$$

Dar, din (4) scoatem

$$\sqrt{1+m^2}\ln\rho=R,$$

încât extremalele (5) se scriu în coordonate cilindrice

$$A\sqrt{1+m^2}\ln\rho+B\theta=C \quad \text{sau} \quad \rho=e^{h(\theta-\theta_0)}.$$

unde h şi θ_0 sunt constante uşor de determinat.

113. 8. *Fiind dată funcţia $f(\rho)$ integrabilă, se cere să se determine constanta a astfel ca integrala*

$$I=\iint_{(0)}[f(\rho)-a]^2\,d\sigma,$$

unde ρ este raza vectoare a coordonatelor polare, $d\sigma$ elementul de suprafaţă iar (D) domeniul interior unui cerc cu centrul în origină şi de rază r.

Luând coordonate polare, $d\sigma=\rho d\rho d\theta$ şi deci

$$I=\int_0[f(\rho)-a]^2\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi\int_0^r[f(\rho)-a]^2\rho d\rho.$$

Fie b o altă constantă şi I' valoarea corespunzătoare a integralei. Avem

$$I'=2\pi\int_0^r[f(\rho)-b]^2\rho d\rho=2\pi\int_0^r[f(\rho)-a+(a-b)]^2\rho d\rho=$$

$$=I+4\pi(a-b)\int_0^r[f(\rho)-a]\,\rho d\rho+2\pi(a-b)^2\int_0^r\rho d\rho.$$

Ori, dacă a asigură minimul integralei atunci oricare ar fi b trebue să avem $I<I'$ ceeace cere ca

$$\int_0^r [f(\rho)-a]\,\rho d\rho=0, \tag{1}$$

căci dacă acest lucru nu are loc întotdeauna putem găsi o constantă b astfel ca

$$4\pi(a-b)\int_0^r [f(\rho)-a]\rho d\rho+2(a-b)^2\int_0^r \rho d\rho<0.$$

In adevăr, dacă notăm cu J valoarea integralei (1) diferită de zero prin ipoteză, această inegalitate se mai scrie

$$(a-b)[4\pi J+(a-b)r^2]<0,$$

care este un trinom în b şi este suficient să luăm pe b între rădăcini pentruca inegalitatea precedentă să fie asigurată. Deci (1) trebue să aibă loc. Egalitatea se mai scrie

$$\int_0^r f(\rho)\,\rho d\rho-\frac{1}{2}r^2a=0,$$

de unde rezultă

$$a=\frac{2}{r^2}\int_0^r f(\rho)\,\rho d\rho.$$

113. 9. *Se consideră în planul xOy un domeniu (D) mărginit de o curbă închisă (C). Se cere să se găsească o suprafaţă de ecuaţie: $z=f(x, y)$ pentru care integrala dublă*

$$I=\iint_{(D)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy,$$

este minimă.

Observând că funcţia de integrat este $d\sigma$ pentru suprafaţă (§ 91, IV), însemnează că problema cere să se găsească o suprafaţă de arie minimă care să treacă printr'o curbă închisă dată ce se proiectează pe planul xOy după curba (C).

Ne dăm seama imediat că problema este asemănătoare problemei studiată mai sus pentru integralele simple. Se poate demonstra că dacă o suprafaţă $z=f(x, y)$ asigură minimul unei integrale de forma

$$I=\iint_{(D)} f(x, y, z, p, q)\,dxdy, \tag{VI}$$

atunci z trebue să fie o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale

$$\frac{dF}{dz}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)=0. \tag{VII}$$

In cazul problemei noastre această ecuaţie se scrie

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0.$$

Dar,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=\frac{r\sqrt{1+p^2+q^2}-p\dfrac{pr+qs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{1+p^2+q^2}=\frac{(1+q^2)r-pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d}{ay}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=\frac{t\sqrt{1+p^2+q^2}-q\dfrac{ps+qt}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{1+p^2+q^2}=\frac{(1+p^2)t-pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

adică

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

Această relație exprimă (prob. 65.5) că suma razelor de curbură principale într'un punct al suprafeței, este nulă. Suprafețele corespunzătoare se numesc *suprafețe minime.*

PARTEA A CINCEA

FUNCŢII DE VARIABILĂ COMPLEXĂ

CAPITOLUL XVII

FUNCŢII ELEMENTARE DE VARIABILA COMPLEXA

§ 114. Şiruri şi serii de variabilă complexă

1. Definiţia limitei unui şir de numere complexe este aceiaşi cu definiţia limitei unui şir de numere reale (§ 31) înlocuind cuvântul „valoare absolută" cu „modulul" numărului complex corespunzător*).

Dacă un şir de numere complexe: $a_n=\alpha_n+i\beta_n$ are o limită $A=a+ib$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=a,\quad \lim_{n\to\infty}\beta_n=b, \tag{I}$$

şi reciproc, egalităţile (I) trag după ele egalitatea

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A. \tag{II}$$

2. Pentru seriile cu termenii complexi,

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{III}$$

avem aceleaşi teoreme ca, pentru seriile cu termeni reali (§ 31—§ 34) înlocuind peste tot valoarea absolută cu modul.

Dacă în seria (III), $u_n=v_n+iw_n$ şi dacă seria este convergentă având drept sumă pe: $S=S'+iS''$, atunci seriile $\sum v_n$ şi $\sum w_n$ sunt convergente şi au drept sume pe S' şi S'',

$$\left.\begin{aligned} v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots&=S',\\ w_1+w_2+\cdots+w_n+\cdots&=S''; \end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

reciproc, egalităţile (IV) trag după ele egalitatea

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=S. \tag{V}$$

3. Tot ce am spus la § 50 despre serii de funcţiuni în domeniul real, se extinde şi în domeniul complex cu schimbarea de nomenclatură menţionată mai sus.

---

*) Se vor evita inegalităţi între numere complexe care nu au sens. De ex., în egalitatea (II) dela paragraful citat se va înlocui (II') $|a_n|>M$, iar inegalităţile (III) vor fi lăsate deoparte.

Pentru seriile de puteri

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots \qquad \text{(VI)}$$

se extinde deasemeni noţiunea de rază de convergenţă numai că de data aceasta seria va fi convergentă pentru toate punctele din plan interioare cercului $|z|=R$, R fiind raza de convergenţă.

Teorema lui Abel din domeniul real (§ 50. no. 2), are următoarea formă în domeniul complex: dacă coeficienţii unei serii întregi $\sum a_nz^n$ sunt reali şi pozitivi, şi dacă termenii seriei $\sum a_nR^n$, R fiind raza de convergenţă a seriei, descresc şi tind către zero, seria este convergentă pe tot cercul de convergenţă, exceptând poate punctele $z=\pm R$.

114. 1. *Se consideră şirul de numere*

$$a_n=\rho_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n),$$

care are o limită

$$a=\rho(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Să se arate că dacă şirul θ_n *are o limită atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n=\rho \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty}\theta_n=\theta+2k\pi. \qquad (k=\text{întreg})$$

şi reciproc.

In adevăr, fie: $a_n=\alpha_n+i\beta_n$ şi $a=\alpha+i\beta$. Cum prin ipoteză şirul a_n are limita a, în baza egalităţilor (I) va trebui să avem

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\rho_n\cos\theta_n=\rho\cos\theta, \quad \lim_{n\to\infty}\beta_n=\lim_{n\to\infty}\rho_n\sin\theta_n=\rho\sin\theta.$$

In baza proprietăţilor limitelor numerelor reale, avem

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n^2\cos^2\theta_n=\lim_{n\to\infty}\rho_n\cos\theta_n\lim_{n\to\infty}\rho_n\cos\theta_n=\rho^2\cos^2\theta,$$

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n^2\sin^2\theta_n=\lim_{n\to\infty}\rho_n\sin\theta_n\lim_{n\to\infty}\rho_n\sin\theta_n=\rho^2\sin^2\theta,$$

încât

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n^2=\lim_{n\to\infty}(\rho_n^2\cos^2\theta+\rho_n^2\sin^2\theta)=\lim_{n\to\infty}\rho_n^2\cos^2\theta_n+\lim_{n\to\infty}\rho_n^2\sin^2\theta_n=$$
$$=\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=\rho^2.$$

şi cum modulul este un număr pozitiv,

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n=\rho.$$

Totaşa, cum funcţiunile $\sin x$ şi $\cos x$ sunt continui în vecinătatea originei,

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n\cos\theta_n=\lim_{n\to\infty}\rho_n\lim_{n\to\infty}\cos\theta_n=\rho\cos(\lim_{n\to\infty}\theta_n)=\rho\cos\theta,$$

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n\sin\theta_n=\lim_{n\to\infty}\rho_n\lim_{n\to\infty}\sin\theta_n=\rho\sin(\lim_{n\to\infty}\theta_n)=\rho\sin\theta,$$

relaţii care spun că

$$\lim_{n\to\infty}\theta_n=\theta+2k\pi.$$

Deoarece teorema dela no. 1 pe care am folosit-o în această problemă, este directă şi reciprocă, şi proprietatea din enunţ va fi directă şi reciprocă.

114. 2. *Să se găsească:* $\lim_{n\to\infty} z^n$ *când* z *este un număr complex oarecare*

Fie: $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$; atunci

$$z^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

Problema se rezolvă uşor pe cale geometrică. Avem trei cazuri de considerat după valoarea modulului ρ faţă de numărul 1.

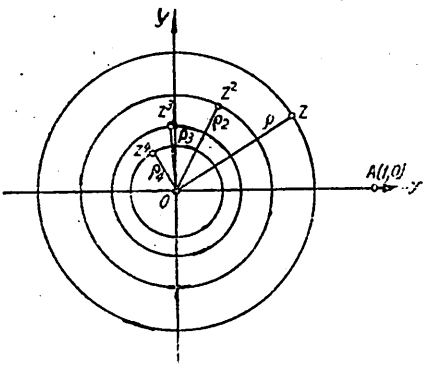


Fig. 179

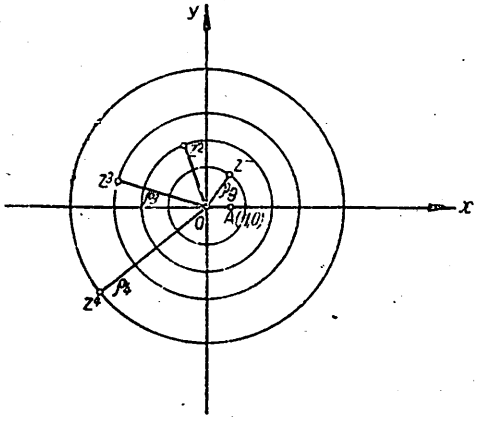


Fig. 180

1° $\rho<1$ (fig. 179). Reprezentând geometric valorile termenilor şirului format de puterile lui z, se constată că punctele reprezentative se apropie mereu de origină fiind situate pe cercuri de raze

$$\rho,\rho^2,\rho^3,\ldots,\rho^n,\ldots$$

raze ce tind către zero. Adică

$$\lim_{n\to\infty} z^n=0 \quad (|z|<1) \qquad (1)$$

2° $\rho>1$ (fig. 180). Lucrurile se petrec invers,

$$\lim_{n\to\infty} z\to\infty \qquad (2)$$

3° $\rho=1$ (fig. 181). Şirul are toate punctele situate pe cercul rază cu 1 şi cu centrul în origine: z^n nu tinde către nici o limită.

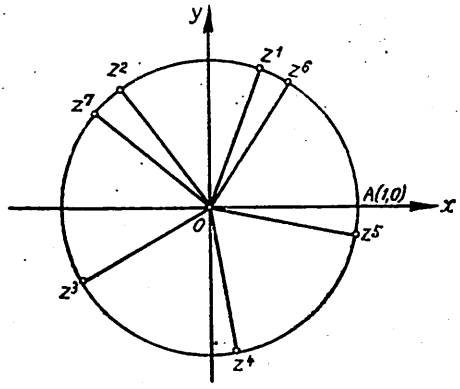


Fig. 181

Observaţie. Inegalitatea (l') trebue interpretată în sensul următor: vom zice că un număr complex z tinde către infinit când el se găseşte în plan exterior unui cerc de rază M oricât de mare vrem. Noţiunea de infinit în domeniul complex apare deci sub un singur aspect, nu ca în domeniul real când un număr poate tinde către $+\infty$ sau $-\infty$.

114. 3. *Să se găsească punctele limită ale şirului*

$$a_n=\frac{2n}{n+1}\left[\cos\frac{2n^2+n+1}{2(n+1)}\pi+i\sin\frac{2n^2+n+1}{4(n+1)}\pi\right].$$

Scriem pe a_n sub forma

$$a_n=\frac{2n}{n+1}\left\{\cos\left[n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2(n+1)}\right]+i\sin\left[n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2(n+1)}\right]\right\},$$

şi facem diferite ipoteze asupra lui n faţă de numărul 4. Dacă $n=4k$, atunci

$$a_{4k}=\frac{8k}{4k+1}\left\{\cos\left[2k\pi-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2(4k+1)}\right]+i\sin\left[2k\pi-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2(4k+1)}\right]\right\}=$$
$$=\frac{8k}{4k+1}\left\{\cos\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2(4k+1)}\right]+i\sin\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2(4k+1)}\right]\right\},$$

şi conform celor stabilite la pr. 114. 1,

$$\lim_{k\to\infty}a_{4k}=2\left[\cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right)\right]=\sqrt{2}(1-i).$$

Analog, avem mai departe

$$\lim_{k\to\infty}a_{4k+1}=\sqrt{2}(1+i),\quad\lim_{k\to\infty}a_{4k+2}=\sqrt{2}(-1+i),\quad\lim_{k\to\infty}a_{4k+3}=-\sqrt{2}(1+i).$$

Şirul dat are patru puncte limită situate pe cercul de centru origină, rază $\sqrt{2}$ şi la intersecţia lui cu bisectoarele axelor.

Observaţie. Punctele şirului, de ex. a_{4k}, tind către punctul lor limită pe o curbă. Dacă ni s'ar cere să spunem care este această curbă observăm că dacă punem $a_{4k}=x_{4k}+iy_{4k}$ atunci

$$x_{4k}=\frac{8k}{4k+1}\cos\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2(4k+1)}\right],\quad y_{4k}=\frac{8k}{4k+1}\sin\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2(4k+1)}\right],$$

cu alte cuvinte aceste puncte sunt situate pe curba a cărei reprezentare parametrică este

$$x=\frac{2t}{t+1}\cos\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2(t+1)}\right],\quad y=\frac{2t}{t+1}\sin\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2(t+1)}\right].$$

114. 4. *Să se studieze seria cu termeni complecşi*

$$1+z+z^2+\cdots+z^n+\ldots, \tag{1}$$

şi apoi să se deducă, în caz de convergenţă, sumele seriilor

$$\begin{cases} S_1=1+\rho\cos\theta+\rho^2\cos\theta+\cdots+\rho^n\cos n\theta+\ldots, \\ S_2=\rho\sin\theta+\rho^2\sin 2\theta+\cdots+\rho^n\sin n\theta+\ldots \end{cases} \tag{2}$$

Punem: $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$. Seria formată cu modulele termenilor seriei date este

$$1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^n+\cdots\cdots, \tag{3}$$

şi care este o progresie geometrică cu raţia numărul real şi pozitiv ρ. Dacă: $\rho<1$ adică $|z|<1$, seria (3) este convergentă şi deci seria (1) este absolut

convergentă; dacă: $|z| \geq 1$ seria (1) este divergentă deoarece în baza celor arătate la prob. 114. 2, termenul general nu tinde către zero.

Seria (1), şi deci seriile (2), care sunt seriile (IV) corespunzătoare, sunt convergente în ipoteza $\rho=|z|<1$. In această ipoteză, fie S suma seriei (1) Scriind

$$S=1+z(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots);\quad S=1+zS:\quad S=\frac{1}{1-z}\cdot$$

Pentru calculul lui S_1 şi S_2 separăm partea reală de cea imaginară din S; găsim

$$S=\frac{1}{1-\rho(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{1}{(1-\rho\cos\theta)-i\rho\sin\theta)}=\frac{(1-\rho\cos\theta)+\rho i\sin\theta}{(1-\rho\cos\theta)^2+\rho^2\sin^2\theta}=\frac{(1-\rho\cos\theta)+\rho i\sin\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

şi deci

$$S_1=\frac{1-\rho\cos\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2},\quad S_2=\frac{\rho\sin\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\quad(\rho<1)\cdot$$

114. 5. *Să se studieze seria*

$$1+\frac{z^p}{1}+\frac{z^{2p}}{2}+\cdots+\frac{z^{np}}{n}+\cdots \tag{1}$$

pe cercul ei de convergenţă.

Considerăm mai întâi seria

$$1+\frac{t}{1}+\frac{t^2}{2}+\cdots+\frac{t^n}{n}+\cdots \tag{2}$$

Aplicând criteriul raportului la seria formată cu valorile absolute, obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|t|=|t|<1,$$

ceiace înseamnează că raza de convergenţă a seriei (2) este $R=1$. Deoarece coeficienţii seriei: $a_n=1/n$ sunt reali, pozitivi şi tind către zero (seria $\sum a_nR^n$ în cazul acesta este $\sum a_n$), în baza teoremei lui Abel (no. 3), seria este convergentă pe cercul de convergenţă afară poate de punctele $z=\pm 1$. Pentru $z=-1$ seria (2) este seria armonică alternată care ştim că este convergentă, iar pentru $z=1$ este seria armonică care ştim că este divergentă. Deci seria (2) este divergentă pe cercul de convergenţă în punctul $t=1$. Dela seria (2) trecem la seria (1) făcând $z^p=t$. Cercul de convergenţă va fi definit de ecuaţia

$$|z^p|=1;\quad |z|^p=1;\quad |z|=1,$$

deoarece $|z|$ este real şi pozitiv. Pe cercul de convergenţă: $|z|=1$, seria (1) va fi divergentă în punctele definite de relaţia $z^p=1$, adică (§22, no.1)

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\qquad(k=0,1,2,\ldots,n-1.)$$

114. 6. *Fiind dată seria întreagă*

$$S(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

având raza de convergenţă egală cu R, se cere să se găsească suma seriei

$$f(z)=a_0+a_pz^p+a_{2p}z^{2p}+\cdots+a_{np}z^{np}+\cdots$$

Alături de seria dată să considerăm seria

$$a_0 + a_1(x_i z) + a_2(x_i z)^2 + \cdots + a_n(x_i z)^n + \cdots$$

unde x_i este o rădăcină oarecare a ecuaţiei binome: $x^p - 1 = 0$. Cum: $|x_i z| = |x_i| \cdot |z| = |z|$, deoarece toate rădăcinile x_i au modulul 1 (§ 21, no. 1), rezultă, (deoarece seria formată cu valorile absolute ale termenilor este aceiaşi ca seriă formată cu valorile absolute ale termenilor seriei date) că dacă $|z| < R$ seria precedentă va fi convergentă şi va avea drept sumă pe $S(x_i z)$. Făcând aci $i = 1,2,..,p$ obţinem egalităţile

$$S(x_1 z) = a_0 + a_1(x_1 z) + a_2(x_1 z)^2 + \cdots + a_n(x_1 z)^n + \cdots$$

$$S(x_2 z) = a_0 + a_1(x_2 z) + a_2(x_2 z)^2 + \cdots + a_n(x_2 z)^n + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S(x_p z) = a_0 + a_1(x_p z) + a_2(x_p z)^2 + \cdots + a_n(x_p z)^n + \cdots,$$

care adunate parte cu parte ne dau

$$S(x_1 z) + S(x_2 z) + \cdots + S(x_p z) = p a_0 + a_1 S_1 z + a_2 S_2 z^2 + \cdots + a_n S_n z^n + \cdots,$$

şi ţinând seamă de cele demonstrate la prob. 16. 7

$$S(x_1 z) + S(x_2 z) + \cdots + S(x_p z) = p a_0 + p a_p z^p + p a_{2p} z^{2p} + \cdots + p a_{np} z^{np} + \cdots,$$

adică

$$f(z) = \frac{1}{p}[S(x_1 z) + S(x_2 z) + \cdots + S(x_p z)].$$

§ 115. Funcţii elementare

Primele funcţii de variabilă complexă $z = x + iy = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, sunt funcţiile exprimabile sub formă de polinoame sau fracţii raţionale. Trecerea dela variabilă la funcţie, se face prin operaţiile elementare de adunare, scădere, înmulţire şi ridicare la putere, operaţii definite în Cap. 3. Pentru celelalte funcţiuni, avem definiţiile următoare.

1. **Funcţia exponenţială.** Prin definiţie, avem

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \qquad (I)$$

seria din dreapta fiind absolut convergentă oricare ar fi z. Plecând dela definiţie, rezultă

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y), \qquad (II)$$

ceiace spune că e^z are modulul e^x şi argumentul $y + 2k\pi$. Acest rezultat arată că funcţiunea e^z este periodică în domeniul complex, având perioada $2\pi i$.

In baza acestei formule, numărul complex z se mai poate scrie şi sub forma

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}. \qquad (III)$$

Tot formula (II) are drept consecinţă formulele lui Euler

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \tag{IV}$$

2, **Funcţii trigonometrice directe.** Prin definiţie vom pune

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}. \tag{V}$$

Înlocuind în (I) pe z cu iz, apoi cu $-iz$, şi făcând diferenţa şi suma seriilor obţinute, avem dezvoltările analoage celor din domeniul real,

$$\left.\begin{aligned} \sin z &= \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{V'}$$

Noile funcţii sunt periodice (primele au perioada 2π, iar ultima perioada π) şi verifică aceleaşi formule ca funcţiile corespunzătoare din domeniul real. Avem

$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y, \quad \cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y. \tag{VI}$$

Funcţiile hiperbolice se extind în domeniul complex prin aceleaşi formule cu care sunt definite în domeniul real (§ 40).

3. **Funcţia logaritmică.** Notând cu $\ln z$ funcţia logaritmică din domeniul complex, avem

$$\ln z = \ln \rho + i\,(\theta + 2k\pi), \tag{VII}$$

unde k este un număr întreg pozitiv sau negativ. Funcţia logaritmică în domeniul complex are o infinitate de *determinări.*
Dacă θ este ales astfel ca: $-\pi < \theta \leqq +\pi$, atunci valoarea

$$\ln z = \ln \rho + i\theta, \tag{VII'}$$

se numeşte *valoarea principală* a lui $\ln z$.

Proprietăţile logaritmilor din domeniul real (§ 37, III) se menţin şi în domeniul complex, în sensul că egalităţile ce exprimă aceste proprietăţi au loc între două determinări oarecari ale logaritmilor. Avem deasemeni (§ 37 II),

$$e^{\ln z} = z. \tag{VIII}$$

Funcţia a^m, când a este complex, se bazează pe egalitatea

$$a^m = e^{m \ln z}. \tag{IX}$$

Dacă m este întreg, a^m are o singură valoare (determinare); dacă m este fracţionar p/q, a^m are q valori (determinări) distincte; dacă m este iraţional sau complex, a^m are o infinitate de valori (determinări) distincte. Tot egalitatea (IX) defineşte pe a^m când m este deasemeni complex.

4. **Funcţii trigonometrice inverse.** Avem

$$\arcsin z = -i \ln \left[iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{X}$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{i - z}{i + z}. \tag{XI}$$

Funcţia arcsin z definită prin (X) are o dublă infinitate de valori; în adevăr $(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ are în domeniul complex două valori (§ 21, no. 2), iar logaritmul o infinitate. Dacă se cunoaşte una din aceste determinări, fie u, atunci toate celelalte valori date prin formulele

$$\arcsin z = u + 2k\pi, \quad \arcsin z = (2k+1)\pi - u, \tag{XII}$$

unde k este un număr întreg pozitiv sau negativ. Analog, funcţiunea arctg z are o infinitate de valori; dacă cunoaştem una din ele, fie u, atunci toate celelalte sunt date prin formula

$$\operatorname{arctg} z = u + k\pi, \tag{XIII}$$

unde deasemeni k este un număr întreg pozitiv sau negativ, (§ 39, III).

Funcţiunea arccos z se defineşte caşi în domeniul real prin formula.

$$\arccos z = \frac{1}{2}\pi - \arcsin z. \tag{XIV}$$

115. 1. *Să se demonstreze relaţia*

$$e^{(2k+1)\pi i} = -1$$

unde k este întreg.

In baza formulei (II), avem

$$e^{(2k+1)\pi i} = \cos(2k+1)\pi + i \sin(2k+1)\pi = -1.$$

115. 2. *Funcţia e^z nu se anulează pentru nici o valore finită a lui z.*

In adevăr, deoarece modulul lui e^z este e^x unde x este partea reală a lui z, pentruca numărul complex e^z să fie nul, va fi necesar ca (§ 18, no. 2): $e^x = 0$. Ori, se ştie (§ 36, graficele 36.1 şi 36.2) că această egalitate nu poate avea loc pentru nici o valoare finită a lui x.

115. 3. *Să se rezolve ecuaţia: $e^z = -2$.*

Notăm rădăcinile cu: $z = x + iy$. Deoarece -2 este un număr real negativ, va avea modulul 2 şi argumentul π. Ecuaţia se scrie sub forma

$$e^x(\cos y + i \sin y) = 2(\cos\pi + i \sin\pi).$$

Pentruca aceste două numere complexe să fie egale, este necesar ca (§ 18, no. 2)

$$e^x = 2, \quad y = 2k\pi + \pi. \qquad (k = \text{întreg})$$

Soluţiile ecuaţiei sunt

$$z = \ln 2 + i\pi(2k+1).$$

115. 4. *Să se demonstreze că avem formula*

$$\operatorname{tg}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{tg} z_1 + \operatorname{tg} z_2}{1 - \operatorname{tg} z_1 \operatorname{tg} z_2}.$$

Folosind formulele (V), demonstrarea nu este decât o chestiune de calcul. In adevăr, scriind

$$\operatorname{tg} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{e^{2iz} - 1}{i(e^{2iz} + 1)},$$

avem, plecând dela partea dreaptă,

$$\frac{\operatorname{tg} z_1+\operatorname{tg} z_2}{1-\operatorname{tg} z_1 \operatorname{tg} z_2}=\frac{\frac{e^{2iz_1}-1}{i(e^{2iz_1}+1)}+\frac{e^{2iz_2}-1}{i(e^{2iz_2}+1)}}{1+\frac{(e^{2iz_1}-1)(e^{2iz_2}-1)}{(e^{2iz_1}+1)(e^{2iz_2}+1)}}=\frac{1}{i}\,\frac{(e^{2iz_1}-1)(e^{2iz_2}+1)+(e^{2iz_2}-1)(e^{2iz_1}+1)}{(e^{2iz_1}+1)(e^{2iz_2}+1)+(e^{2iz_1}-1)(e^{2iz_2}-1)}$$

115. 5. *Să se arate că numărul* $(-i)^i$ *este real.*

Din reprezentarea grafică rezultă că $-i$ are modulul 1 și argumentul $-\frac{1}{2}\pi$, încât,

$$\ln(-i)=i\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}\right),$$

și deci în baza lui (IX),

$$(-i)^i=e^{i\ln(-i)}=e^{\frac{\pi}{2}-2k\pi} \qquad (k=\text{întreg}).$$

Numărul dat are o infinitate de determinări.

115. 6. *Să se calculeze valorile funcției*

$$u=\arcsin\frac{3}{4}i.$$

Avem: $1-z^2=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$, încât pentru $(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ (considerat ca un radical în domeniul complex) avem determinările $\pm\frac{5}{4}$. Alegând una din aceste valori avem

$$iz+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{4}+i\frac{3}{4},$$

număr care are modulul și argumentul definit prin formulele

$$\rho=\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2},\quad \cos\theta_0=\frac{5}{2\sqrt{34}},\quad \sin\theta_0=\frac{3}{2\sqrt{34}}.$$

Aceasta înseamnă că una din valorile lui u este

$$u=-i\ln[iz+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}]=-i\left(\ln\frac{\sqrt{34}}{2}+i\theta_0\right)=\theta_0-i\ln\frac{\sqrt{34}}{2},$$

iar toate celelalte sunt definite prin formulele (XII).

115. 7. *Să se determine curbele din plan pentru cari funcția* $e^{\frac{1}{z}}$ *are: 1° același modul; 2° același argument.*

Fie $z=x+iy=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$; atunci

$$e^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{1}{\rho}(\cos\theta-i\sin\theta)}=e^{\frac{1}{\rho}\cos\theta}\left(\cos\frac{\sin\theta}{\rho}-i\sin\frac{\sin\theta}{\rho}\right).$$

1° Dacă notăm valoarea constantă a modulului cu $e^{\frac{1}{a}}$, atunci

$$\frac{1}{\rho}\cos\theta=\frac{1}{a};\quad \rho=a\cos\theta;\quad x^2+y^2=ax,$$

adică cercuri se trec prin origine și au centrul pe Ox.

2° Dacă notăm valoarea constantă a argumentului cu $\frac{1}{b}$, atunci

$$\frac{1}{\rho}\sin\theta=\frac{1}{b},\quad \rho=b\sin\theta;\quad x^2+y^2=by,$$

adică cercuri trecând prin origine şi având centrul pe Oy.

115. 8. *Să se arate că*

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1,$$

z fiind complex.

In baza primei formule (V'), avem

$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots$$

şi cum seria din partea dreaptă este convergentă în punctul $z=0$, însemnează că prima parte va avea în acest punct valoarea pe care o capătă seria din dreapta în care facem $z=0$.

115. 9. *Să se deducă din desvoltările (V'), desvoltările în serie ale funcţiilor* $\operatorname{sh}x$ *şi* $\operatorname{ch}x$. *Ce se poate spune despre desvoltarea lui* $\operatorname{th}x$?

Folosind formulele de definiţie ale lui $\operatorname{sh}x$ şi $\operatorname{ch}x$, avem în baza formulelor (V),

$$-i\sin(ix)=\operatorname{sh}x,\quad \cos(ix)=\operatorname{ch}x. \tag{1}$$

Ori, în baza formulelor (V') care sunt valabile oricare ar fi z, avem

$$\operatorname{sh}x=-i\sin(ix)=-i\left[\frac{ix}{1!}-\frac{(ix)^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right]=$$

$$=-i\left[\frac{ix}{1!}+\frac{ix^3}{3!}+\cdots+\frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right]=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

şi analog se găseşte

$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

formule cunoscute din domeniul real (§ 51, V şi VI).

Din (1) avem

$$\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=-i\operatorname{tg}(ix),$$

adică din desvoltarea în serie a lui $\operatorname{tg}(ix)$, care se obţine prin împărţirea seriilor (V') între ele, vom obţine desvoltarea lui $\operatorname{th}x$, aşa cum seria lui $\operatorname{sh}x$ se deduce din seria lui $\sin x$. Aşa se explică rezultatul obţinut la prob. 43. 4 prin comparaţie cu rezultatul dela prob. 43.1.

115. 10. *Să se găsească suma seriei*

$$1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$$

Seria este convergentă oricare ar fi x, deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=0.$$

Notând cu $f(x)$ suma seriei, în baza celor stabilite la prob. 114. 6 vom avea

$$3f(x)=e^{x_1x}+e^{x_2x}+e^{x_3x},$$

unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile cubice ale unităţii. Avem

$$x_1=1,\ x_2=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),\quad x=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}).$$

Cum

$$e^{x_2x}=e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x}=e^{-\frac{x}{2}}e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x}e^{-\frac{x}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right],$$

$$e^{x_3x}=e^{-\frac{x}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$$

rezultă

$$f(x)=\frac{1}{3}\left[e^x+2e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right].$$

§ 116. Funcţii analitice. Funcţii armonice.

1. Se zice că: $z=x+iy$ este o variabilă complexă, atunci când z poate lua diferite valori cuprinse într'un domeniu (d) (aceasta însemnează, că x, y reprezintă coordonatele unui punct oarecare interior domeniului). Analog ca la variabilă reală, se zice că: $Z=f(z)$ este o funcţie de variabilă complexă când valorile lui Z depind de valorile lui z. Deoarece Z la rându-i este un număr complex îl vom nota cu $X+iY$ unde evident X şi Y sunt funcţiuni de variabilele reale x, y. Vom scrie

$$Z=f(z)=X(x,\ y)+iY(x,\ y)=X+iY. \tag{1}$$

Când z va descrie domeniul (d) în planul xoy, Z va descrie un domeniu (D) într'un al doilea plan XOY (fig. 182).

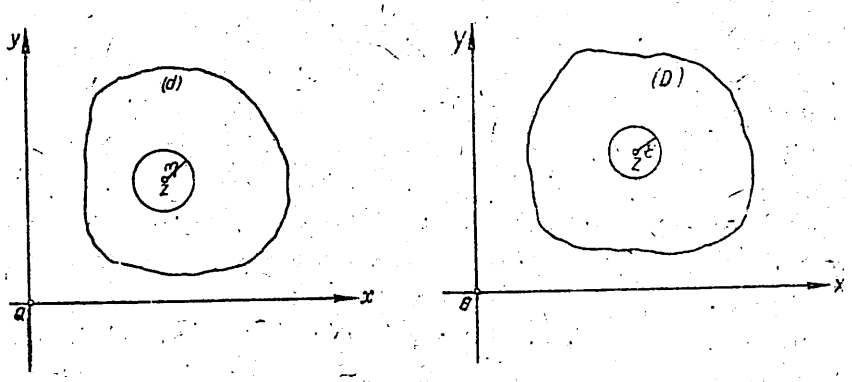


Fig. 182

2. Analog ca în plan, vom spune că funcţia $f(z)$ este continuă în domeniul (d), atunci când $|\Delta z|$ este mic, modulul diferenţei $|f(z+\Delta z)-f(z)|$ este deasemeni destul de mic. Aceasta însemnează că atunci când punctul $z+\Delta z$ este interior unui cerc de rază η şi de centru z, $f(z+\Delta z)$ va fi interior-

unui cerc de rază ϵ şi de centru Z, (în adevăr, modulul diferenţei a două numere complexe reprezintă distanţa dintre punctele lor reprezentative; § 18, no. 3).

3. Se zice că o funcţie este *analitică* (sau *monogenă*) într'un domeniu (d), atunci când în interiorul acestui domeniu avem satisfăcute *condiţiile lui Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial y},\quad \frac{\partial X}{\partial y}=-\frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{II}$$

Când aceste condiţii sunt satisfăcute, funcţia $f(z)$ admite o derivată în fiecare punct al domeniului şi pe care o vom nota ca şi în domeniul real prin: $\frac{dZ}{dz}=f'(z)$. Această derivată are drept valoare

$$f'(z)=\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial y}-i\frac{\partial X}{\partial y}. \tag{III}$$

4. Funcţiile elementare z^m, e^z, a^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\ln z$, $\arcsin z$, $\operatorname{arctg} z$ au aceleaşi derivate ca şi în domeniul real, bineînţeles acolo unde aceste derivate există.

Suma, produsul sau raportul (în punctele unde nu se anulează numitorul) a două sau mai multor funcţii analitice în aceleaşi domeniu, este tot o funcţie analitică a cărei derivată se calculează ca în domeniul real.

5. Funcţiile X şi Y care satisfac condiţiilor (II) satisfac deasemeni *ecuaţiei lui Laplace*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0; \tag{IV}$$

o funcţie care satisface ecuaţiei lui Laplace se numeşte *funcţie armonică.*

116. 1. *Două funcţii analitice care au aceiaşi derivată diferă printr'o constantă.*

Fie funcţiile

$$f(z)=X+iY \quad \text{şi} \quad f_1(z)=X_1+iY_1.$$

Conform ipotezei, avem în baza lui (III),

$$\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X_1}{\partial x}+i\frac{\partial Y_1}{\partial x},$$

de unde rezultă

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial X_1}{\partial x},\ \frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial Y_1}{\partial x} \text{ sau încă: } \frac{\partial(X-X_1)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial(Y-Y_1)}{\partial x}=0. \tag{1}$$

Analog, folosind a doua formă a derivatei dată de (III), vom găsi

$$\frac{\partial(X-X_1)}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial(Y-Y_1)}{\partial y}=0. \tag{2}$$

Condiţiile (1) şi (2) ne spun că $X-X_1$ şi $Y-Y_1$ trebue să fie constante, adică: $X-X_1=C_1$ şi $Y-Y_1=C_2$. Aceasta înseamnează că vom putea scrie

$$f(z)=X+iY=X_1+C_1+i(Y_1+C_2)=f_1(z)+C,$$

unde am pus: $C=C_1+iC_2=\text{const.}$

116. 2. *Să se găsească derivatele de ord. n ale funcţiilor* (pr. 42.8).

$$y_1=e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha),\quad y_2=e^{x\sin\alpha}\sin(x\sin\alpha).$$

Soluţia ce vom da este mai simplă decât cea dată la problema citată. Avem

$$z=y_1+iy_2=e^{x\cos\alpha}[\cos(x\sin\alpha)+i\sin(x\sin\alpha)]=e^{x\cos\alpha}e^{ix\sin\alpha}=e^{x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}.$$

Cum funcţia exponenţială este analitică în tot planul, vom avea

$$z^{(n)}=(y_1+iy_2)^{(n)}=y_1^{(n)}+iy_2^{(n)}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n e^{x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=$$

$$=e^{x\cos\alpha}[\cos(x\sin\alpha+n\alpha)+i\sin(x\sin\alpha+n\alpha)]$$

şi egalând părţile reale şi cele imaginare între ele, rezultă

$$y_1^{(n)}=e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha+n\alpha),\quad y_2^{(n)}=e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha+n\alpha).$$

Observaţie. In particular, dacă luăm $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$ şi obţinem rezultatele dela prob. 42.4. In felul acesta prob. 42.4 apare ca un caz particular al prob. 42.8

116. 3. *Să se determine o funcţie analitică $f(z)$ a cărei parte reală să fie*

$$X=e^x(x\cos y-y\sin x)$$

şi astfel ca: $f(0)=0$.

In baza formulelor (II), avem

$$dY=\frac{\partial Y}{\partial x}dx+\frac{\partial Y}{\partial y}dy=-\frac{\partial X}{\partial y}dx+\frac{\partial X}{\partial x}dy \qquad (1)$$

expresie care va fi o diferenţială totală dacă X este o funcţie aromonică Deci, va fi necesar mai întâiu să verificăm dacă funcţia X dată este armonică şi apoi să integrăm diferenţiala totală (1) prin metoda dată la § 82. Avem

$$\frac{\partial X}{\partial x}=e^x[(x+1)\cos y-y\sin y],\quad \frac{\partial X}{\partial y}=-e^x[(x+1)\sin y+y\cos y)],$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=e^x[(x+2)\cos y-y\sin y],\quad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}=-e^x[(x+2)\cos y-y\sin y],$$

ceiace arată că ecuaţia (IV) este verificată. Avem apoi

$$Y=\left|e^x(x\sin y+y\cos y)\right|_0^x+\left|e^a[(a+1)\sin y+y\cos y+\cos y]\right|_b^y.$$

$$Y=\int_a^x e^x[(x+1)\sin y+y\cos y]\,dx+\int_b^y e^a[(a+1)\cos y-y\sin y]\,dy=$$

$$=e^x(x\sin y+y\cos y)+C,$$

In baza condiţiei impusă de problemă, dacă $x=y=0$, va trebui să avem $Y=0$, adică $C=0$.

Funcţia analitică corespunzătoare va fi

$$f(z)=X+iY=e^x(x\cos y-y\sin y)+ie^x(x\sin y+y\cos y)=$$

$$=e^x[(x+iy)\cos y+(x+iy)i\sin y]=e^x(x+iy)(\cos y+i\sin y)=$$

$$=ze^{x+iy}=ze^z.$$

116. 4. *Să se găsească forma condiţiilor* (II) *exprimate cu ajutorul modulului şi argumentului variabilei.*

Punând; $z=x+iy=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, vom avea

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta. \qquad (1)$$

Problema se reduce la o problemă de schimbare de variabile definită prin formulele (1). Această problemă a fost tratată, prob. 57.11; folosind rezultatele date acolo, cu notaţiile actuale, va trebui să avem

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta\frac{\partial X}{\partial\rho}-\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial X}{\partial\theta}&=\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\rho}+\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial Y}{\partial\theta},\\ \sin\theta\frac{\partial X}{\partial\rho}+\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial X}{\partial\theta}&=-\cos\theta\frac{\partial Y}{\partial\rho}+\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial Y}{\partial\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Aceste condiţii se pot scrie sub o formă mai simplă si anume: înmulţind prima cu $\sin\theta$, a doua cu $\cos\theta$ şi adunând, obţinem

$$\frac{\partial X}{\partial\theta}=-\rho\frac{\partial Y}{\partial\rho}; \tag{3}$$

înmulţind prima cu $\cos\theta$ şi a doua cu $\sin\theta$ şi adunând, obţinem o a doua condiţie

$$\rho\frac{\partial X}{\partial\rho}=\frac{\partial Y}{\partial\theta}. \tag{3'}$$

Relaţiile (3) şi (3') înlocuiesc condiţiile lui Cauchy-Riemann când variabila este dată sub formă trigonometrică.

Pentru a avea valoarea derivatei, folosim de exemplu prima expresie (III); obţinem

$$f'(z)=\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial X}{\partial\rho}-\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial X}{\partial\theta}+i\left(\cos\theta\frac{\partial Y}{\partial\rho}-\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)=$$

$$=\cos\theta\frac{\partial X}{\partial\rho}+\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\rho}+2\cos\theta\frac{\partial Y}{\partial\rho}-i\sin\theta\frac{\partial X}{\partial\rho}=$$

$$=(\cos\theta-i\sin\theta)\left(\frac{\partial X}{\partial\rho}+i\frac{\partial Y}{\partial\rho}\right).$$

116. 5. *Să se scrie condiţiile* (II) *cu ajutorul modulului şi argumentului funcţiei, variabila fiind scrisă sub formă algebrică.*

Fie

$$f(z)=R(x,y)[\cos\varphi(x,y)+i\sin\varphi(x,y)]=R(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{1}$$

Problema se reduce în realitate la schimbul funcţiilor X, Y, cu R şi φ legate între ele prin relaţiile

$$X=R\cos\varphi,\quad Y=R\sin\varphi. \tag{2}$$

Preferăm să dăm o altă soluţie mai legată de natura capitolului în care lucrăm. A spune că funcţia $f(z)$ este analitică, înseamnează că admite o derivată oricum l-am face pe $z+\Delta z$ să tindă către z. Rezultatul căutat de problemă va fi dedus din calculul derivatei pe două drumuri diferite şi anume pe o paralelă la Ox (când $\Delta y=0$, adică variază numai x), apoi pe o paralelă la Oy (când $\Delta x=0$, adică variază numai y). Va trebui deci să avem

$$\frac{df(z)}{dz}=\frac{\partial f(z)}{\partial x},\quad \frac{df(z)}{dz}=\frac{\partial f(z)}{i\partial y}.$$

Ținând seamă că $f(z)$ este definită prin (1), vom avea succesiv

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f(z)}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial x}(\cos\varphi+i\sin\varphi)+R(-\sin\varphi+i\cos\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}= \\ &=(\cos\varphi+i\sin\varphi)\left(\frac{\partial R}{\partial x}+iR\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial f(z)}{i\partial y} &= -i\frac{\partial R}{\partial y}(\cos\varphi+i\sin\varphi)+R(\cos\varphi+i\sin\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial y}= \\ &=(\cos\varphi+i\sin\varphi)\left(R\frac{\partial\varphi}{\partial y}-i\frac{\partial R}{\partial y}\right).\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Cum aceste derivate trebue să fie egale, este necesar ca

$$\frac{\partial R}{\partial x}=R\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial y}=-R\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Valoarea derivatei este dată de una din expresiile (3).

116. 6. *Fiind dată funcția analitică:* $f(z)=X+iY$, *să se arate că funcția:* $V=\ln|f(z)|$ *este o funcție armonică.*

Deoarece: $V=\ln\sqrt{X^2+Y^2}=\frac{1}{2}\ln(X^2+Y^2)=\frac{1}{2}\ln R$, unde: $R=X^2+Y^2$, găsim

$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}=-\frac{2}{R^2}\left[\left(X\frac{\partial Y}{\partial y}+Y\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2+\left(-X\frac{\partial Y}{\partial x}+Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{2}{R}\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{X}{R}\left(\frac{\partial^2X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2X}{\partial y^2}\right)+\frac{Y}{R}\left(\frac{\partial^2Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2Y}{\partial y^2}\right)=0,$$

deoarece făcându-se calculele în prima paranteză mare se constată că este egală cu a doua, iar ultimele două paranteze mici sunt nule prin faptul că însăși funcțiile X și Y sunt armonice.

§ 117. Transformarea conformă

Dacă presupunem că: $z=x+iy$ reprezintă un punct M într'un plan (z) și $f(z)=Z=X+iY$ un punct M' într'un plan (Z), zicem că am transformat primul plan în al doilea; formulele ce ne dau posibilitatea să trecem dela M la M' sunt

$$X=X(x,y),\quad Y=Y(x,y). \quad (I)$$

Dacă funcția $Z=f(z)$ este analitică, transformarea se numește *conformă* și se bucură de proprietatea de a conserva unghiurile. Aceasta însemnează că dacă considerăm două curbe (C) și (Γ) ce trec prin M (fig. 184) și curbele corespunzătoare (C') și (Γ') ce trec prin M' (fig. 184), atunci unghiul tangentelor Mt_1, Mt_2 la primele, este același ca unghiul tangentelor $M't_1'$, $M't_2'$ la curbele transformate. În transformare, sunt lăsate deoparte punctele pentru cari: $f'(z)=0$, puncte cari sunt considerate ca *puncte critice* ale transformării.

De multe ori planele (P) şi (P') sunt considerate ca fiind suprapuse, în special atunci când se dau metode geometrice precise care fac ca prin construcţii simple să deducem din punctul z, punctul Z.

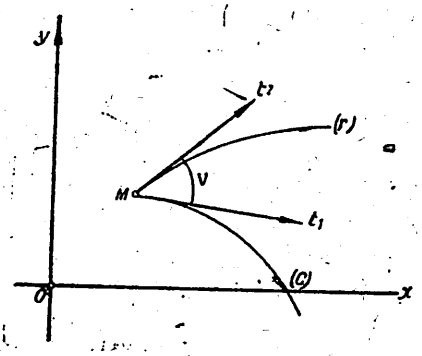


Fig. 183

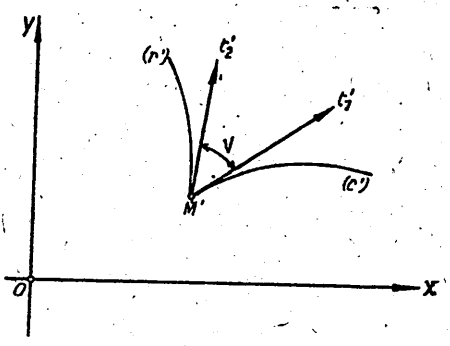


Fig. 184

117. 1. *Să se studieze transformarea circulară*

$$Z=\frac{az+b}{cz+d},$$

unde a, b, c, d sunt patru constante complexe date.

Începem prin a studia câteva transformări particulare cu ajutorul cărora cazul general se va rezolva mai uşor. Presupunem planul (z) confundat cu planul (Z).

1°. Considerăm transformarea: $Z=z+h$, unde h este o constantă complexă reprezentată în plan prin punctul notat chiar cu această literă (fig. 185). Punctul Z se va găsi din z printr'o translaţie de mărime, direcţie şi sens egală cu Oh. Deci, dacă z descrie o curbă (C), Z va descrie curba (C') ce se deduce din această prin translaţia amintită.

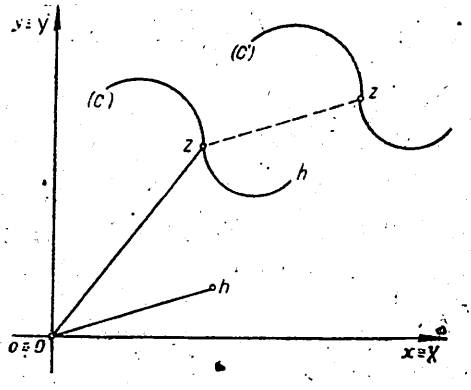


Fig. 185

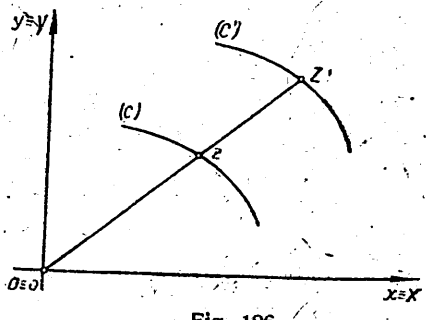


Fig. 186

2° Considerăm transformarea: $Z=kz$, unde trebue să deosebim mai multe cazuri după natura lui k. a) k este un număr real şi pozitiv. Atunci Z va avea acelaşi argument cu z iar modulul va fi mărit de k ori (fig. 186). Cu alte cuvinte dacă z va descrie curba (C), Z va descrie omotetica ei (C') în raport

cu originea, raportul de omotetie fiind k. b) k un număr complex de modul 1, adică de forma

$$k=\cos\alpha+i\sin\alpha.$$

Dacă notăm ca deobicei cu ρ modulul lui z şi cu θ argumentul lui, atunci

$$Z=\rho\,[\cos(\theta+\alpha)+i\sin(\theta+\alpha),$$

adică Z are acelaşi modul cu z dar argumentul mărit cu α (fig. 187). Aceasta înseamnă că dacă z descrie o curbă (C), atunci Z va descrie o curbă (C') care este poziţia rotită a lui (C) în jurul originei şi de amplitudine α. c) k este un număr complex oarecare, fie

$$k=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

atunci

$$Z=kz=r\rho\,[\cos(\theta+\alpha)+i\sin(\theta+\alpha)].$$

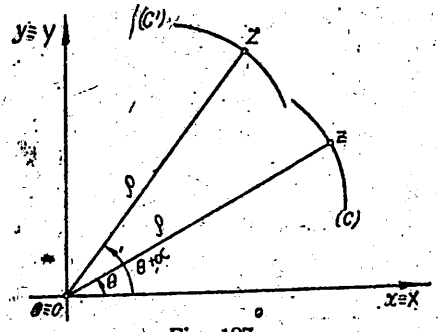


Fig. 187

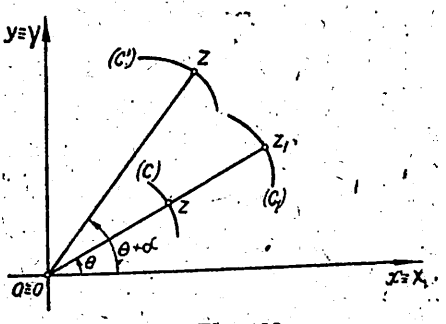


Fig. 188

Acest rezultat, comparat cu rezultatele dela cazurile precedente, spune că pentru a-l găsi pe Z din z se construeşte mai întâiu omoteticul lui z, z_1, şi apoi z_1 se roteşte până în Z (fig. 188). Deci curba (C') se deduce din (C) printr'o omotetie şi apoi o rotaţie.

3° Să considerăm transformarea

$$Z=\frac{1}{z}=\frac{1}{\rho}\,[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)],$$

adică Z are drept modul inversul modulului lui z şi argumentul egal şi de semn contrar. Aceasta înseamnă că curba transformată (C') se găseşte din (C) prin două operaţii (fig. 189): întâiu printr'o inversiune având drept pol originea şi puterea egală cu unitatea, care duce curba din (C) în (C_1) şi apoi printr'o simetrie în raport cu Ox care duce curba din (C_1) în (C').

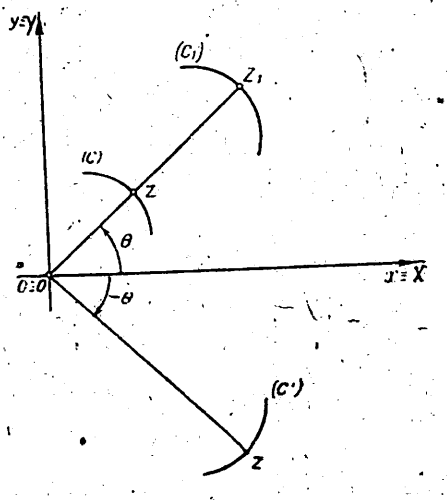


Fig. 189

4° **Cazul general.** Descompunem transformarea dată în transformările succesive

$$z_1=z+\frac{d}{c},\quad z_2=cz_1,\quad z_3=\frac{1}{z_2},\quad z_4=(cb-ad)z_3,\quad z_5=z_4+a,\quad Z=\frac{1}{c}z_5,$$

toate fiind de tipul celor studiate precedent. Transformarea ce duce dela z la Z prin intermediul punctelor $z_1, \ldots, z_5$ este transformarea considerată (analog ca la prob. 57. 10). Deci transformarea din enunț se face cu ajutorul transformărilor elementare: translație, omotetie, inversiune, rotație și simetrie. Cum toate aceste transformări păstrează unghiurile, transformarea însăși va avea această proprietate, adică este conformă. Numele de *transformare circulară* vine de acolo că transformă cercurile în cercuri.

Ca încheiere, e bine să observăm că în transformările ce duc dela z la Z s'a presupus că: $cb-ad\neq 0$ în care caz transformarea nu mai are sens. In adevăr, în ipoteză contrară, avem

$$Z=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{acz+bc}{c(cz+d)}=\frac{a(cz+d)}{c(cz+d)}=\frac{a}{c},$$

adică transformarea duce orice punct z în punctul fix a/c.

117. 2. *Să se arate că transformarea*

$$Z=i\frac{1-z}{1+z},$$

reprezintă domeniul interior cercului cu centrul în origine și de rază 1 *în semi-planul superior axei OX.*

Presupunem că ne aflăm pe cerc și fie: $z=\cos\theta+i\sin\theta$. Avem

$$Z=i\frac{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}{(1+\cos\theta)+i\sin\theta}=i\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\,\frac{\sin\frac{1}{2}\theta-i\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta+i\sin\frac{1}{2}\theta}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\,\frac{\cos\frac{1}{2}\theta+i\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta+i\sin\frac{1}{2}\theta}=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta,$$

adică Z este real, și anume: când se află pe arcul AB (fig. 190) θ variază dela 0 la $\frac{1}{2}\pi$ și deci $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$ dela 0 la $\operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi=1$, adică Z descrie segmentul $A'B'$ (fig. 191); dacă z este pe arcul BC, θ variază dela $\frac{1}{2}\pi$ la π, adică $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$ dela 1 la $+\infty$, adică Z descrie

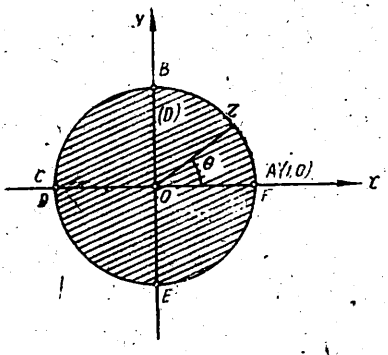


Fig. 190

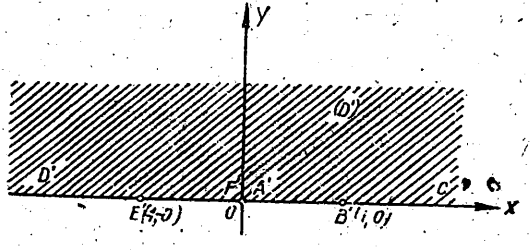


Fig. 191

semi-dreapta $B'C'$, ș. a. m. d., arcului DE îi corespunde semi-dreapta $D'E$ iar arcului EF, segmentul $E'F'$. Deci cercul din fig. 190 se transformă

în axa OX din fig. 191. Mai mult, fie: $z=x+iy$ un punct din planul (z): îi corespunde

$$Z=i\frac{1-(x+iy)}{1+(x+iy)}=i\frac{(1-iy-x)(1-iy+x)}{(1+x)^2+y^2}=i\frac{(1-iy)^2-x^2}{(1+x)^2+y^2}=\frac{2y+i(1-x^2-y^2)}{(1+x)^2+y^2},$$

adică

$$X=\frac{2y}{(1+x)^2+y^2},\quad Y=\frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}. \tag{1}$$

Dar din Geometrie Analitică se ştie că în interiorul cercului de rază 1, avem: $x^2+y^2<1$, încât pentru aceste puncte avem $Y>0$. Ori această proprietate spune că domeniul (D) se transformă în domeniul (D').

117. 3. *Să se transforme conturul din* fig. 192, *cu ajutorul funcţiei*

$$Z=z+\frac{1}{z}.$$

Conturul se compune din semicercul ABC de rază 1, de centrul origine, şi din semi-dreptele AD, CE.

Avem

$$X+iY=x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2};$$

$$X=x\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}, \tag{1}$$

$$Y=y\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}. \tag{2}$$

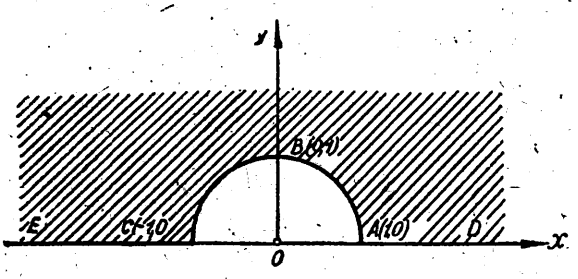


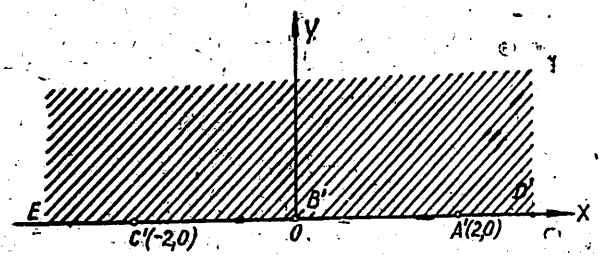
Fig. 192

Când z este pe semi-cerc, $x^2+y^2=1$, adică $X=2x$, $Y=0$, adică Z se află pa OX şi anume, cum pe semi-cerc $-1<x<1$, X va descrie segmentul $A'C'$. Când z se va afla pe AD sau CE, $y=0$ şi

$$X=\frac{x^2+1}{x},\quad Y=0,$$

adică Z se va afla pe OX şi anume la dreapta lui A' respectiv la stânga lui C' după cum $x>0$ sau <0. Mai mult, acest lucru se vede şi din faptul că abscisa X este în valoare absolută mai mare ca 2. In adevăr,

$$|X|=\frac{x^2+1}{|x|}=2+\frac{x^2+1-2|x|}{|x|}=2\frac{(|x|-1)^2}{|x|}\geq 2.$$



Fig, 193

Folosind transformarea de mai sus, se poate spune că domeniul dinplan situat deasupra axei ox exterior conturului din fig. 193 se transformă în semi-planul superior al celui de-al doilea plan. Acest lucru se bazează pe observarea că pentru $y>0$ şi punctele exterioare cercului, $x^2+y^2>1$, încât Y dat de (2) este întotdeauna pozitiv pentru aceste puncte.

Observaţie. Transformarea considerată este un caz particular al transformării Jucovschi (prob. 117. 7)

117. 4. *Să se arate că transformarea:* $Z=e^z$ *transformă domeniul dreptunghiular din* fig. 194 *în coroana circulară din* fig. 195.

Avem

$$X=e^x\cos y,\quad Y=e^x\sin y.$$

Când $y=0$, $X=e^x$, $Y=0$, adică segmentul AB se transformă într'un segment $A'B'$ depe OX şi anume dacă x variază între a, b, atunci X va varia între e^a şi e^b. Analog, pe latura DE avem $y=\pi$ şi deci $X=-e^x$, $Y=0$, adică transformatul segmentului DE va fi segmentul $D'E'$ simetricul lui $A'B'$ faţă de O. Să presupunem că z descrie latura AE, adică $x=a$: atunci (1) $X=e^a\cos y$, $Y=e^a\sin y$, ceiace spune că Z va descrie cercul

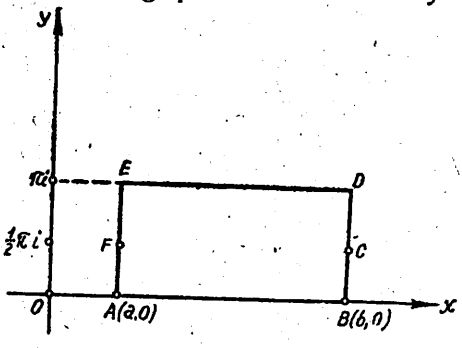


Fig. 194

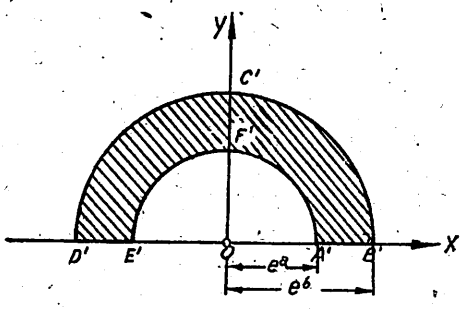


Fig. 195

$$X^2+Y^2=e^{2a},$$

adică cercul de rază $e^a=OA'$. Mai mult, din (1) se vede că dacă y variază dela 0 la π, Z va descrie semi-cercul $A'F'E'$. In particular, pentru punctul F avem: $X=0$, $Y=e^a$, adică F'. Tot aşa, când z va descrie latura BD, Z va descrie semi-cercul $B'C'D'$.

117. 5. *Să se arate că transformarea*

$$Z=\ln\frac{z-1}{z+1},$$

schimbă jumătatea superioară a planului situată deasupra axei Ox (fig. 196) *într'o bandă infinită de lăţime* π *situată deasupra* OX (fig. 197); *în formulă este aleasă determinarea principală a funcţiei*

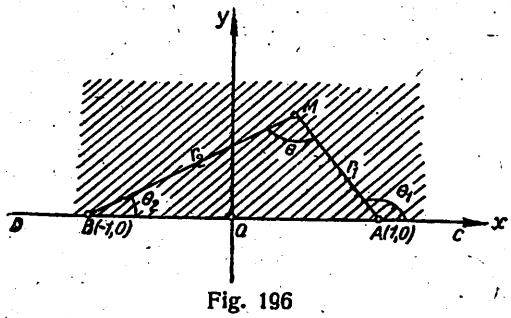


Fig. 196

Dacă punem

$$z-1=r_1\,e^{i\theta_1},\quad z+1=r_2\,e^{i\theta_2},$$

unde r_1, r_2, θ_1, θ_2 au interpretările din fig. 196 (§ 18, no. 3), atunci

$$Z=\ln\frac{r_1}{r_2}+i\,(\theta_1-\theta_2).$$

Această formulă ne va da soluţia problemei. Să transformăm axa Ox.

a) Semi-dreapta AC; dealungul ei $\theta_1=\theta_2=0$ şi $r_1<r_2$ încât: $Z=\ln(r_1/r_2)<0$. Cum r_1/r_2 creşte dela 0 până la 1, $\ln(r_1/r_2)$ va creşte dela $-\infty$ la 0, adică semi-dreptei AC îi corespunde semi-dreapta $A'C'$ (fig. 197) b) Analog, pe

semi-dreapta BD pe care $\theta_1=\theta_2=\pi$, deci $Z=\ln(r_1/r_2)$ unde de data aceasta $r_1>r_2$ şi $\frac{r_1}{r_2}$ descreşte dela $+\infty$ la 1 încât Z va descrie semi-dreapta $B'D'$.

c(Segmentul AB; avem $\theta_1=\pi$, $\theta_2=0$, încât: $z=\ln(r_1/r_2)+i\pi$, adică îi corespunde dreapta $A'B'$; mai precis, segmentului Ao îi corespunde $A'O'$ şi segmentului oB îi corespunde semi-dreapta $O'B'$.

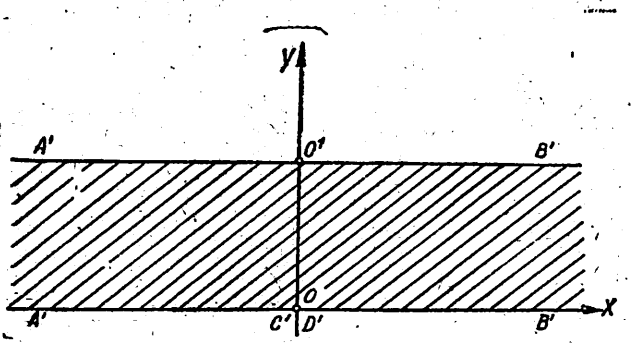


Fig. 197

In general dacă M este un punct oarecare din semi-planul superior, Z va fi un număr complex care va avea partea reală $\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$ pozitivă sau negativă, iar coeficientul lui i, $\theta_1-\theta_2=\theta<\pi$, adică ordonata cuprinsă între OO'. Deci acest semi-plan se transformă în banda haşurată depe fig. 197.

117. 6. *Să se studieze transformarea* $Z=\sin z$.

Conform celor spuse la § 115 pct. 2, vom avea

$$X=\sin x\,\mathrm{ch}\,y,\quad Y=\cos x\,\mathrm{sh}\,y.$$

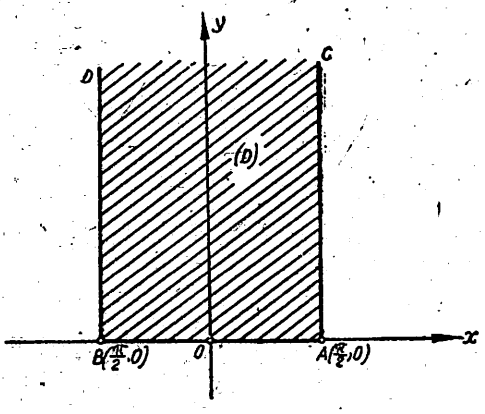


Fig. 198

Incepem prin a examina ce devine conturul din fig. 198 prin transformarea propusă. Pe latura AC, $x=\frac{1}{2}\pi$, adică $X=\mathrm{ch}\,y$, $Y=0$. cu alte cuvinte când z va fi undeva pe semi-dreapta AC, Z va avea coordonatele $(\mathrm{ch}\,y,\ 0)$ adică va fi pe axa OX (fig. 199). Ba mai mult, cum $\mathrm{ch}\,y$ este pozitiv şi supraunitar (prob. 40. 4), Z se va găsi pe OX la dreapta punctului A'. Pe latura AB, $y=0$, adică $Z(\sin x,\ 0)$ ceiace spune că Z se găseşte deasemeni pe OX având abscisa cuprinsă între -1 şi $+1$, adică Z descrie segmentul $A'B'$. In fine, pe latura $\overset{\frown}{BD}$, $x=-\frac{1}{2}\pi$ şi deci $Z(-\mathrm{ch}\,y,\ 0)$ adică Z descrie restul din axa OX situată la stânga lui B'. In concluzie, conturul din fig. 198 este transformat în axa OX. Mai mult, când $-\frac{1}{2}\pi\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\pi$, $\cos x>0$ şi $y>0$, $\mathrm{sh}\,y>0$ adică atunci când z este interior conturului din fig. 198, Z se află deasupra axei OX. *Transformarea din enunţ transformă deci domeniul (D) în semi-planul situat deasupra axei OX.*

Să rezolvăm o altă problemă. Considerăm în planul (z) segmentul de dreaptă MN (fig. 200) a cărei ecuație s'o notăm cu $y=b$. Care este transformatul lui în planul (Z)? Ecuațiile parametrice ale curbei din acest plan vor fi

$$X=\sin x \operatorname{ch} b, \quad Y=\cos x \operatorname{sh} b, \quad (2)$$

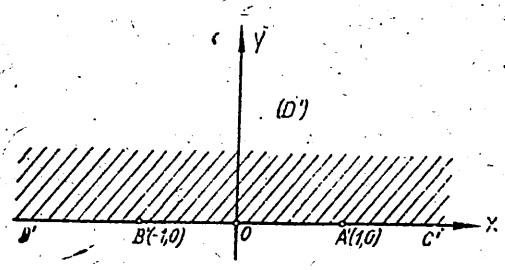


Fig. 199

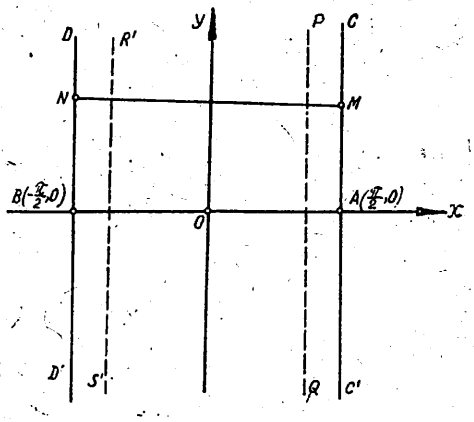


Fig. 200

între cari eliminând pe x se ajunge la ecuația carteziană

$$\frac{X^2}{\operatorname{ch}^2 b}+\frac{Y^2}{\operatorname{sh}^2 b}=1, \quad (3)$$

adică o elipsă cu centrul în origine și cu axele așezate pe axele de coordonate. Depe ecuațiile (2) se citește că dacă z descrie segmentul MN, Z descrie jumătatea de elipsă superioară $M'N'$ (fig. 201) când $b>0$ și cea inferioară când $b<0$.

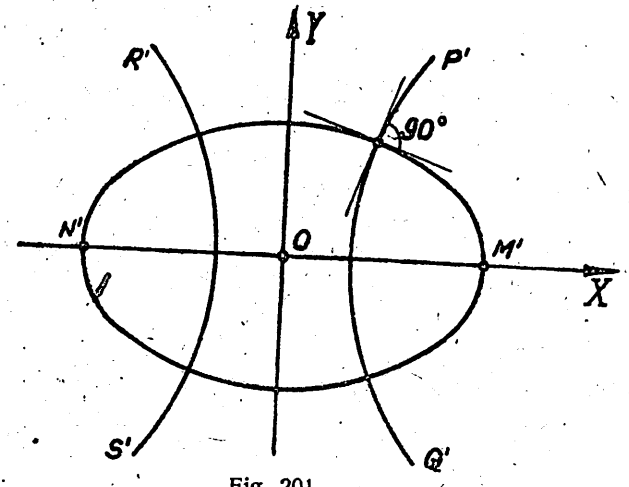


Fig. 201

Dacă z descrie o dreaptă PQ paralelă cu Oy, de ecuație $x=a$, atunci

$$X=\sin a \operatorname{ch} y, \quad Y=\cos a \operatorname{sh} y, \quad (4)$$

ecuații ce reprezintă iperbola

$$\frac{X^2}{\sin^2 a}-\frac{Y^2}{\cos^2 y}=1. \quad (5)$$

Din (4) se vede că dreptei PQ îi corespund ramura $P'Q'$, iar unei drepte $R'S'$ (simetrica lui PQ față de oy) ramura $R'S'$.

Dreptelor PQ, MN ortogonale din planul (z) le corespund curbele (3) și (5) ortogonale din planul (Z).

Din discuția făcută mai sus rezultă următorul rezultat. Se consideră în planul (z) (fig. 202) un domeniu (D) în formă de dreptunghiu, având laturile

paralele cu axele şi de lungime 2π. Acest domeniu se va transforma în planul (Z) (fig. 203) în domeniul (D') cuprins între două elipse concentrice ale căror ecuaţii vor fi (3) şi cea ce se capătă din ea înlocuind pe b cu c. Seg-

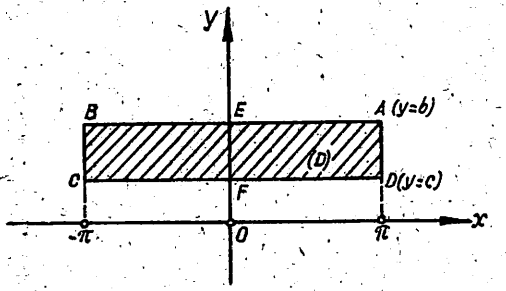


Fig. 202

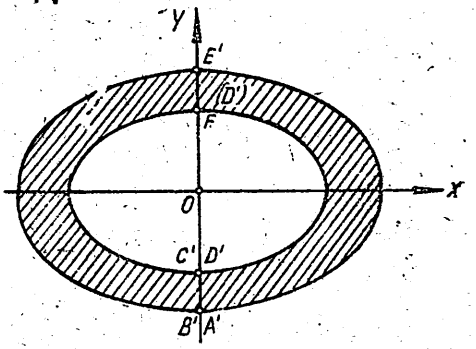


Fig. 203

mentelor AD şi BC le va corespunde segmentul unic $A'D'=B'C'$, cum se vede din (1) în care facem $x=\pi$ sau $-\pi$. Pentruca să nu se producă confuzii este bine ca domeniul (D') să fie socotit ca tăiat dealungul lui $A'D'$, adică fiind limitat de curba închisă $A'E'B'C'F'D'A'$.

Observaţie. Dreptele AB şi AC din fig. 198 se transformă în fig. 199. 17 în dreptele $A'C'$ şi $A'B'$. Dreptele iniţiale sunt ortogonale iar cele transformate în prelungire. Cum se explică faptul că unghiul nu se menţine deşi funcţiunea ce face transformarea este analitică? Cauza este că în punctul A derivata $Z'=\cos z$ se anulează.

117. 7. *Să se studieze transformarea*

$$Z=z+\frac{q^2}{z}, \tag{1}$$

unde q este o constantă reală (transformarea Jucovschi).

Considerăm trei cazuri mai importante care se întâlnesc în Hidrodinamică şi Aerodinamică.

1° Considerăm în planul z un cerc cu centrul în origine de rază a; ne propunem să găsim care este curba transformată în planul Z în ipoteza $q=a$ (planele z şi Z sunt presupuse confundate) (fig. 204). Dacă notăm cu θ argumentul lui z, avem (§ 115, III)

$$Z=ae^{i\theta}+ae^{-i\theta}=2a\cos\theta,$$

adică: $X=2a\cos\theta$, $Y=0$. Punctul transformat Z se găseşte pe axa Ox. Construcţia lui este simplă. Se prelungeşte OM până taie cercul cu centrul în origine şi de rază $2a$, în M'; proiecţia lui OM' pe Ox este Z. Ţinând seama de această construcţie, se vede că transformatul cercului dat, este segmentul: $A'B'=4a$, şi anume dacă considerăm acest segment ca având două feţe, când M descrie arcul ACB, Z va descrie faţa superioară $A'B'$, iar când M va descrie arcul BDA, Z va descrie faţa inferioară $B'A'$.

2° Transformăm un cerc cu centrul pe Oy (fig. 205) în punctul $I(0, b)$ de rază a prin transformarea (1) în care luăm: $q^2 = a^2 - b^2$. Ne propunem să arătăm că Z descrie tot un arc de cerc având centrul tot pe Oy şi tăind din Ox un segment: $A'B' = 4q$, q fiind egal în baza relaţiei date, cu OA. In acest scop să scriem pe (1) sub forma

$$\frac{Z-2q}{Z+2q} = \left(\frac{z-q}{z+q}\right)^2 \qquad (2)$$

care se obţine din (1), înlocuind pe Z cu valoarea dată de această formulă. Dacă considerăm diferenţa $z-q$, în care z reprezintă punctul M iar q punctul A, argumentul ei va fi unghiul pe care-l face dreapta MA cu direcţia pozitivă a axei Ox (§ 18, pct. 3). Analog pentru celelalte diferenţe ce intră în (2). Deoarece argumentul unui cât este diferenţa argumentelor numărătorului şi numitorului, iar pătratul unui număr complex are argumentul dublu (§ 19, pct. 2), avem

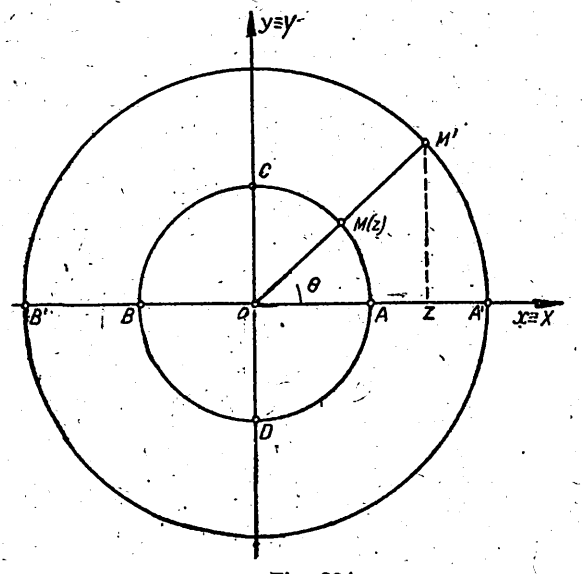


Fig. 204

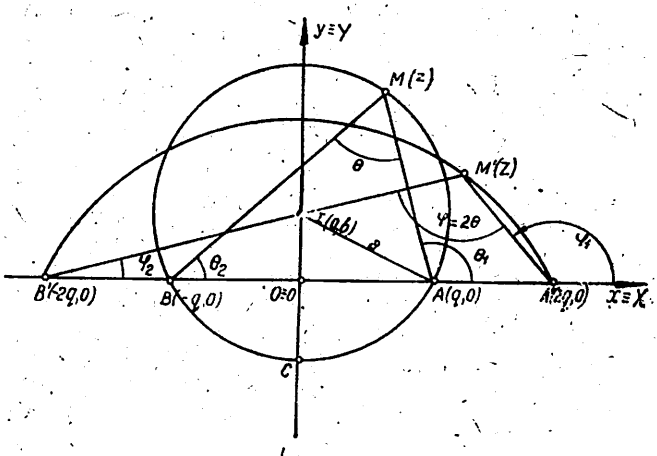


Fig. 205

$$\arg(Z-2q) - \arg(Z+2q) = 2[\arg(z-q) - \arg(z+q)],$$

sau cu notaţiile de pe figură,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2(\theta_1 - \theta_2).$$

Dar, conform unei proprietăţi a triunghiului,

$$\varphi_1-\varphi_2=ungh\,A'M'B'=2\,ungh\,AMB=2\theta=\text{arc}\,ACB=\text{const},$$

adică M' descrie arcul de cerc descris pe AB şi capabil de unghiul 2θ.

3° Transformăm cercul cu centrul în punctul $I(\alpha, \beta)$ şi astfel ca să taie axa Ox în două puncte dintre cari unul să fie $B(-q, 0)$. Facem mai întâiu o pregătire. Să considerăm transformarea auxiliară

$$z_1=\frac{q^2}{z}. \tag{2}$$

Conform celor spuse la prob. 117. 1, această transformare va transforma cercul considerat tot într'un cerc a cărei construcţie vrem s'o precizăm. Punând ca deobiceiu: $z=x+iy$ şi $z_1=x_1+iy_1$, va trebui să avem

$$(x+iy)(x_1+iy_1)=q^2;$$

$$x+iy=\frac{q^2}{x_1+iy_1}=$$

$$=\frac{q^2(x_1-iy_1)}{x_1^2+y_1^2}$$

adică separat

$$x=\frac{q^2x_1}{x_1^2+y_1^2},\quad y=\frac{-q^2y_1}{x_1^2+y_1^2} \tag{3}$$

Pe de altă parte, ecuaţia cercului pe care-l transformăm este

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(\alpha+q)^2+\beta^2;$$

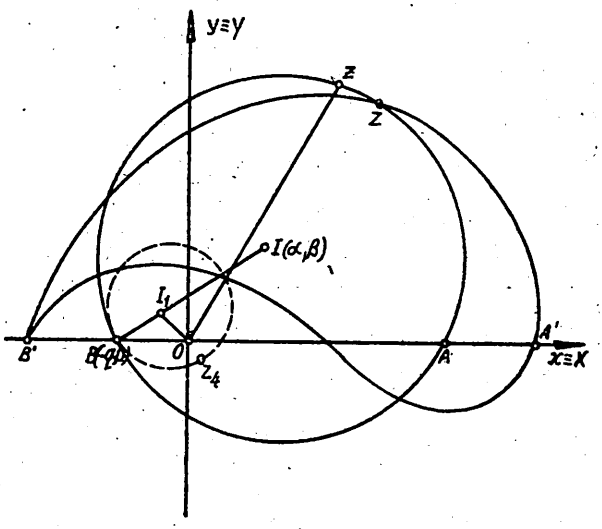


Fig. 206

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-2\alpha q-q^2=0.$$

Inlocuind în această ecuaţie pe x şi y daţi de (3) se găseşte că ecuaţia cercului transformat va fi

$$(2\alpha+q)(x_1^2+y_1^2)+2\alpha q x_1-2\beta q y_1-q^3=0.$$

Acest cerc trece şi el prin $B(-q, 0)$ cum se constată cu uşurinţă. Coordonatele centrului sunt $I_1\left(-\frac{\alpha q}{2\alpha+q}, \frac{\beta q}{2\alpha+q}\right)$, punct ce se obţine geometric prin intersecţia lui BI cu simetrica lui OI faţă de Oy; în adevăr, ecuaţiile acestor drepte sunt

$$y=\frac{\beta}{\alpha+q}(x+q),\quad y=-\frac{\beta}{\alpha}x.$$

Fie acum z un punct pe cercul dat; conform celor arătate la problema citată, z_1 se va găsi pe al doilea cerc la intersecţia lui cu simetrica lui Oz faţă de Ox. Conform lui (1), Z va fi suma lui z cu z_1 adică al patrulea vârf al paralelogramului construit pe Oz şi Oz_1 ca laturi. Transformata va avea forma din fig. 206, şi se numeşte *profil Jucovschi.*

CAPITOLUL XVIII

NOŢIUNI ASUPRA FUNCŢIILOR ANALITICE

§ 118. Clasificarea funcţiilor. Puncte singulare

1. Fiind date două funcţii $X(x, y)$, $Y(x, y)$, funcţia

$$f(x)=X(x, y)+iY(x, y),$$

se numeşte *funcţie de variabila complexă* $z=x+iy$. Dacă funcţiile X şi Y sunt continui, admit derivate parţiale de ord. 1 continui în interiorul unui domeniu (D), şi satisfac condiţiilor lui Cauchy-Riemann (§ 116, II), se zice că funcţia $f(z)$ este *analitică* în domeniul (D). O funcţie analitică într'un domeniu, are o derivată unică şi bine determinată în fiecare punct al domeniului. Acestea sunt singurele funcţii care ne interesează pe noi. O funcţie analitică care în interiorul domeniului (D), în fiecare punct, are o valoare unică, se numeşte *uniformă* în domeniul (D). O funcţie analitică, şi uniformă într'un domeniu (D) se zice că este *olomorfă* în acest domeniu. O funcţie olomorfă în tot planul se numeşte *funcţie întreagă.*

2. O funcţie analitică într'un domeniu (D) poate lua în interiorul unui domeniu, într'un punct oarecare, mai multe valori; se zice că funcţia este *multiformă* în domeniul (D). Pentru o asemenea funcţie, mergând pe un contur închis (C), când ne întoarcem în punctul de plecare se poate ca să avem aceiaşi valoare sau o valoare diferită. Din contră, pentru o funcţie uniformă într'un domeniu (D), oricum am merge pe un drum închis situat în domeniu, ajungem în punctul de plecare cu aceiaşi valoare cu care am plecat.

O funcţie multiformă într'un domeniu (D) are în acest domeniu mai multe *determinări* sau mai multe *ramuri,* care pot fi în număr finit sau infinit. Un punct M, care ocolit pe un cerc de rază foarte mică, face ca să revenim în punctul de plecare cu o altă determinare a funcţiunei, se zice că este un *punct critic* al funcţiei. Să presupunem că facem în domeniul (D) anumite tăieturi (şanţuri) peste care să nu putem trece când mergem pe un drum oarecare înterior domeniului, în aşafel ca să nu putem ocoli unul din punctele critice ale funcţiei. In domeniul aştfel transformat, una din determinările funcţiei analitice multiforme, este o funcţie analitică uniformă.

Polinoamele, fracţiile raţionale, funcţia exponenţială, funcţiile trigonometrice directe sunt funcţii analitice uniforme în orice domeniu din plan. Din contră, funcţia z^m (când m nu este întreg), funcţia logaritmică precum şi funcţiile trigonometrice inverse sunt funcţii multiforme în domenii care conţin anumite puncte din plan. Dar determinările lor sunt funcţii analitice în anumite regiuni din plan, după cum vom vedea pe probleme.

3. Un punct în care o funcţie analitică are o valoare finită şi bine determinată se numeşte *punct ordinar.* Dacă într'un punct o funcţie nu are o valoare finită şi bine determinată, se zice că acel punct este un *punct singular.* De exemplu, punctele critice ale unei funcţii analitice multiforme sunt puncte singulare ale funcţiei. In afară de punctele critice, punctele singulare se împart în două categorii şi anume, în *poli* şi *puncte singulare esenţiale.* Se zice că un punct singular este pol, când inversa funcţiei admite acest punct ca punct ordinar; se zice că este punct singular esenţial în caz contrar.

Dacă punctul a este un pol pentru o funcţiune $f(z)$, atunci el este un zero pentru inversa ei. Ordinul de multiplicitate al acestui zero se numeşte *ordinul* polului a pentru funcţia $f(z)$. O funcţie analitică care nu are alte singularităţi decât poluri, se numeşte *meromorfă*.

In problemele noastre nu vom considera decât funcţii analitice care au puncte *singulare izolate*, adică dacă M este un asemenea punct, să putem descrie un cerc cu centrul în el şi cu rază oricât de mică astfel ca în interiorul lui să nu mai existe alt punct singular.

118. 1. *Să se determine punctele singulare ale funcţiei*

$$f(z)=\frac{z}{z^2+1}.$$

Funcţia dată devine infinită pentru: $z^2+1=0$, adică $z=\pm i$. Pentru aceste valori, inversa funcţiei

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{z^2+1}{z}$$

se anulează. Funcţia este uniformă, deci nu are puncte critice. Deci: singurele puncte singulare sunt $\pm i$ care sunt poli de ord. 1.

118. 2. *Să se determine punctele singulare ale funcţiei* $Z=\operatorname{ctg} z$.

Funcţia se poate scrie sub forma

$$Z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Deoarece funcţiile $\sin z$ şi $\cos z$ sunt analitice uniforme în tot planul, funcţia Z va fi analitică şi uniformă în toate punctele planului afară de cele care anulează numitorul, adică zerourile funcţiei $\sin z$. Pentru a avea: $\sin z=0$, trebue ca (§ 115, VI)

$$\sin x \operatorname{ch} y=0, \quad \cos x \operatorname{sh} y=0,$$

unde x şi y sunt reali. Deoarece (prob. 40.4) $\operatorname{ch} y$ nu poate fi nul, prima ecuaţie cere ca: $\sin x=0$. Dar, deoarece când $\sin x=0$, $\cos x=1$, a doua ecuaţie cere ca: $\operatorname{sh} y=0$, adică $y=0$. Punctele pentru cari funcţia Z devine discontinuă sunt deci punctele depe axa reală de abscise $k\pi$ unde k este un număr întreg. Aceste puncte sunt poluri de ord. 1 pentru Z, deoarece inversa funcţiei admite aceste puncte ca zerouri simple. In adevăr, în baza formulei a doua (VI) dela § 115, funcţia $\cos z$ din domeniul complex are valoarea

$$\cos k\pi = \cos k\pi \operatorname{ch} 0 - i \sin k\pi \operatorname{sh} 0 = (-1)^k.$$

118. 3. *Să se studieze funcţia:* $f(z)=(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ (fig. 208).

Incepem prin a studia o funcţie mai simplă, şi anume pe $Z=z^{\frac{1}{2}}$. Fie: $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$; atunci (§ 21, pct. 1)

$$Z=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{2}\right) \qquad (k=0,1),$$

unde $\sqrt{\rho}$ are semnul aritmetic (§ 9, no. 1). Funcţia Z are două determinări

$$Z_1=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{1}{2}\theta+i\sin\frac{1}{2}\theta\right), \quad Z_2=\sqrt{\rho}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\theta+\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\theta+\pi\right)\right].$$

Presupunem că z descrie un drum (C_1) ce nu conţine origina în interior. Dealungul unui asemenea drum ρ şi θ iau diferite valori revenind în punctul de plecare cu aceleaşi valori şi deci valoarea funcţiei cu care am plecat este aceiaşi şi la sosire. Din contră, dacă z descrie un drum (C_2) ce conţine origina în interior, ρ şi θ iau diferite valori astfel ca la întoarcere în punctul de plecare ρ va fi acelaşi iar θ va deveni $\theta+2\pi$. Aceasta înseamnă că dacă am plecat cu valoarea lui Z_1, la înapoiere vom avea

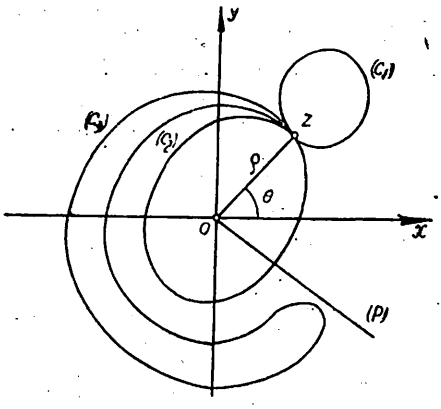


Fig. 207

$$Z_1' = \sqrt{\rho}\left[\cos\frac{1}{2}(\theta+2\pi) + i\sin\frac{1}{2}(\theta+2\pi)\right] = Z_2^{*})$$

iar dacă vom pleca cu valoarea lui Z_2, la înapoiere vom avea: $Z_2' = Z_1$. De aci rezultă că origina este un punct critic pentru funcţie. Funcţiile Z_1 şi Z_2 luate separat sunt funcţii analitice uniforme în orice domeniu ce nu conţine origina. Dacă din origine vom duce o tăietură reprezentată prin semi-dreapta (D), atunci cele două funcţii Z_1 şi Z_2 vor deveni două funcţii analitice uniforme în orice domeniu din plan, deoarece în acest caz drumuri ca (C_2) nu mai pot fi folosite. De exemplu, dacă am merge pe un drum ca (C_3), ρ şi θ vor reveni la înapoiere cu aceleaşi valori.

Din studiul făcut mai sus, rezultă că funcţia: $Z=(z-a)^{\frac{1}{2}}$ este multiformă având două determinări. Punctul critic este de data aceasta a. Dacă din a se duce o semi-dreaptă (D) (fig. 208) peste care nu este permis să se treacă, cele două determinări vor deveni funcţii analitice uniforme în orice domeniu din plan.

Cu aceste pregătiri să trecem la rezolvarea problemei propuse. Pentru o mai bună înţelegere, să scriem

$$f(z) = (z^2-1)^{\frac{1}{2}} = (z-1)^{\frac{1}{2}}(z+1)^{\frac{1}{2}} = Z\cdot T,$$

unde am pus: $Z=(z-1)^{\frac{1}{2}}$, $T=(z+1)^{\frac{1}{2}}$. Fiecare din funcţiile Z şi T [şi pentru aceleaşi motive şi $f(z)$] au două determinări (Z_1, Z_2), (T_1, T_2) definite prin formulele (1), unde ρ şi θ vor fi modulul şi argumentul respectiv ale numerelor complexe $z-1$ şi $z+1$. Pentru a nu se produce confuzii le notăm respectiv cu (ρ, θ) (γ, φ) după cum se vede depe fig. 209 (pentru reprezentare se va ţine seamă cum se reprezintă modulul şi argumentul diferenţei § 18, pct. 3). Funcţiile Z şi T au punctele critice 1 respectiv -1; ceeace înseamnă că aceste puncte critice vor fi împreună puncte critice ale funcţiei $f(z)$. Împărţim contururile închise, pe care se poate merge în plan în trei categorii: a) Contururi (C_1) cari nu ocolesc nici un punct critic şi

*) Să nu se confunde această notaţie cu notaţia derivatei.

deci valoarea de plecare a lui $f(z)$ va fi aceiaşi şi la sosire. b) Contururi cari nu ocolesc decât un singur punct critic, cum este de exemplu (C_2). Când plecăm din z şi sosim în acelaşi punct, Z va veni cu valoarea schimbată, iar T va veni cu aceiaşi valoare. Pe un asemenea drum funcţia $f(z)$ îşi schimbă valoarea. c) Contururi cari ocolesc ambele puncte critice, cum este de exemplu (C_3). Să presupunem că plecăm din z cu determinările Z_1 şi T_1; atunci după ocolire vom avea

$$f'(z)=Z_1' T_1'=Z_2 T_2=\sqrt{\rho}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\theta+\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\theta+\pi\right)\right]\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\varphi+\pi\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\frac{1}{2}\varphi+\pi\right)\right]=\sqrt{r\rho}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\varphi+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\varphi+2\pi\right)\right]=$$

$$=\sqrt{r\rho}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\varphi\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\varphi\right)\right]=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{1}{2}\theta+\right.$$

$$\left.+i\sin\frac{1}{2}\theta\right)\sqrt{r}(\cos\varphi+i\sin\varphi)=Z_1 T_1=f(z),$$

adică am sosit cu aceaşi valoare. Se vede depe demonstraţie că ea va fi valabilă oricum am alege determinările lui Z şi T deoarece ea se bazează pe faptul că argumentul lui $f(z)$ sporeşte cu 2π.

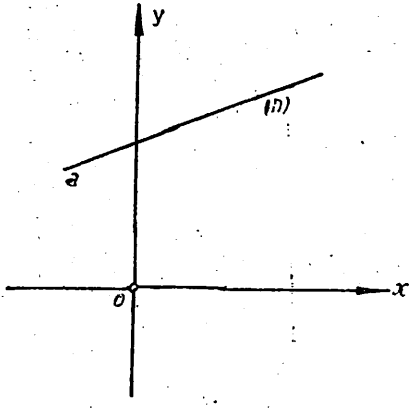


Fig. 208

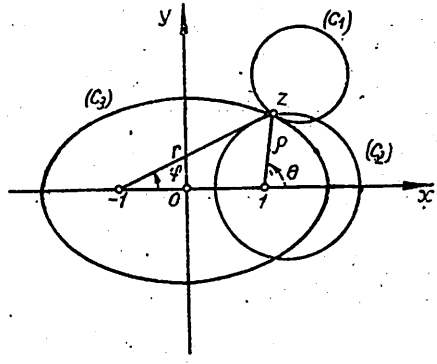


Fig. 209

În concluzie dacă vom exclude drumuri de tipul (C_2), cele două determinări ale lui $f(z)$ vor fi funcţii analitice în orice domeniu din plan. Acest lucru se face tăind planul dealungul segmentului -1, $+1$. Dacă nu se permite să trecem peste această tăietură, cele două determinări ale lui $f(z)$ vor fi două funcţii analitice uniforme.

118. 4. *Să se definească o tăietură în plan astfel ca una din ramurile funcţiei*

$$f(z)=\ln(a-z)(b-z)$$

să fie uniformă, a şi b fiind două numere reale.

Incepem prin a studia funcţia

$$Z=\ln z=\ln\rho+i(\theta+2k\pi) \qquad (k=\text{întreg})$$

unde ρ şi θ sunt modulul şi argumentul lui z. Depe forma lui Z, se vede că este o funcţie multiformă cu o infinitate de determinări. Punctul z poate descrie în plan un drum închis pe două feluri de conture (fig. 210) a) Contur (C_1) care nu cuprinde origina în interior. Pe un asemenea contur, z după ce îl ocoleşte revine la punctul de plecare cu acelaşi modul şi acelaşi argument. b) Contur (C_2) care conţine origina în interior. Valoarea lui Z după ce se face ocolul nu va mai fi aceiaşi, deoarece θ se măreşte cu 2π, şi anume va fi

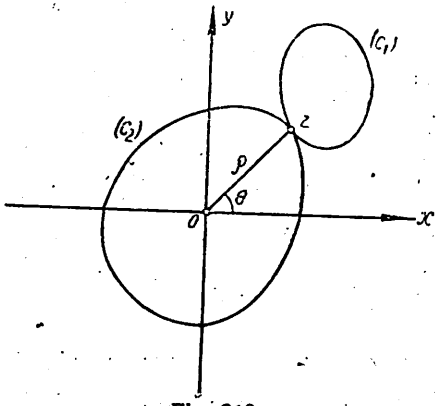


Fig. 210

$$Z'=\ln\rho+i(\theta+2\pi+2k\pi)=Z+2\pi i.$$

Origina este deci un punct critic care se numeşte *punct singular logaritmic.* Conform celor de mai sus, făcând în plan o tăietură dealungul semi-axei Ox, contururile (C_2) sunt evitate şi o determinare oarecare a funcţiei Z va deveni o funcţie analitică uniformă.

Conform celor precedente, funcţia: $Z=\ln(a-z)$, unde a este un număr complex oarecare, este o funcţie multiformă având pe a ca punct critic. Deci, dacă se face o tăietură în plan sub formă de semi-dreaptă, care să plece din a, oricare din determinările funcţiei Z va deveni o funcţie uniformă.

Infine venind la problema din enunţ, în baza celor spuse la § 115 pct. 3, vom scrie

$$f(z)=\ln(a-z)+\ln(b-z),$$

unde în partea dreaptă, prin $\ln(a-z)$ şi $\ln(b-z)$, înţelegem una oarecare din determinările logaritmilor. Studiul de mai sus arată că trebue să facem tăieturile arătate pe fig. 211. In cazul actual, dacă am fi făcut o tăietură care să unească punctele a şi b, contururile care ar ocoli ambele puncte critice a şi b ar face ca funcţia să ajungă în punctul de plecare sporită cu $4\pi i$.

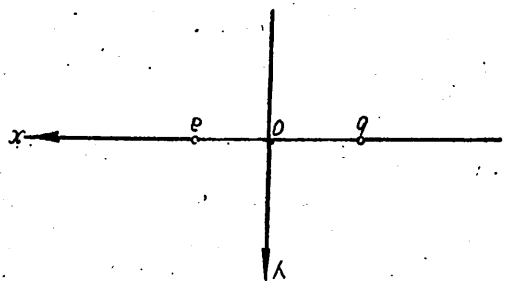


Fig. 211

§ 119. Calculul integral

1. Noţiunea de funcţie primitivă se introduce în domeniul complex analog ca în domeniul real; adică, integrala nedefinită este operaţia inversă derivatei. Se extind aci proprietăţile cunoscute din domeniul real, cum este de exemplu formula integrării prin părţi. Formularul dat la § 66 se menţine şi în domeniul complex, ba chiar se simplifică.

2. Noţiunea de integrală definită se introduce în domeniul complex tot prin suma (I) dela § 76 cu deosebirea că drumul pe care integrăm este o curbă oarecare (C) din plan ce uneşte extremităţile z_0 şi z_1. Dacă notăm cu: $f(z)=X+iY$, o integrală din domeniul complex se reduce la integrale curbilinii în felul următor:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz=\int_{z_0}^{z_1}(X+iY)(dx+idy)=\int_{(C)}(Xdx-Ydy)+i\int_{(C)}(Xdy+Ydx). \qquad (I)$$

Prin ipoteză funcţia $f(z)$ este presupusă continuă într'un domeniu ce conţine curba (C).

Proprietăţile integralelor definite din domeniul real se menţin şi în domeniul complex. De exemplu, dacă funcţia analitică $F(z)$ este o primitivă a funcţiei analitice $f(z)$, atunci

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz=F(z_1)-F(z_0). \qquad (II)$$

3. **Teorema lui Cauchy.** Dacă $f(z)$ este o funcţie olomorfă într'un domeniu (D), şi dacă (C) este o curbă închisă interioară acestui domeniu, atunci

$$\int_{(C)} f(z)dz=0 \qquad (III)$$

4. **Integrala lui Cauchy.** Dacă (C) este o curbă închisă situată în domeniul de olomorfie al funcţiei $f(z)$, şi dacă z_0 este un punct interior acestei curbe, atunci

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)}{z-z_0}dz. \qquad (IV)$$

5. Dacă dealungul curbei (C) avem: $|f(z)|<M$, atunci

$$\left|\int_{(C)} f(z)dz\right|<\int_{(C)}|f(z)|\,ds<ML, \qquad (V)$$

L fiind lungimea curbei (C).

119. 1. *Să se dea o nouă soluţie* prob. 68. 5.

Era vorba în această problemă de a găsi valorile integralelor

$$I=\int e^{ax}\sin bx dx, \quad J=\int e^{ax}\cos bx dx.$$

Folosind variabila complexă avem

$$J+iI=\int e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)dx=\int e^{ax}e^{ibx}dx=\int e^{(a+ib)x}dx=\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}+C,$$

unde C este o constantă complexă oarecare. Avem mai departe

$$J+iI=e^{ax}\frac{\cos bx+i\sin bx}{a+ib}+(C'+iC'')=e^{ax}\frac{(a-ib)(\cos bx+i\sin bx)}{a^2+b^2}+C'+iC''=$$

$$=\left[e^{ax}\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}+C'\right]+i\left[e^{ax}\frac{\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}+C''\right],$$

şi separând părţile reale de cele imaginare ajungem la rezultatele găsite la problema menţionată.

119. 2. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int\frac{dz}{z^2}.$$

1° *dealungul semi-cercului ABC;* 2° *cu ajutorul primitivei.* (fig. 212)

1° Pe semi-cercul *ABC*, vom avea

$$z=\cos\theta+i\sin\theta,$$

unde θ variază dela 0 la π. Deci

$$I=\int_{ABC}\frac{(-\sin\theta+i\cos\theta)\,d\theta}{(\cos\theta+i\sin\theta)^2}=\int_0^{\pi}\frac{(-\sin\theta+i\cos\theta)d\theta}{\cos 2\theta+i\sin 2\theta}=i\int_0^{\pi}(\cos\theta+i\sin\theta)[\cos(-2\theta)+$$

$$+i\sin(-2\theta)]\,d\theta=i\int_0^{\pi}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]\,d\theta=i\int_0^{\pi}(\cos\theta-i\sin\theta)\,d\theta=$$

$$=i\,|\sin\theta+i\cos\theta|_0^{\pi}=i[(\sin\pi+i\cos\pi)-(\sin 0+i\cos 0)]=2.$$

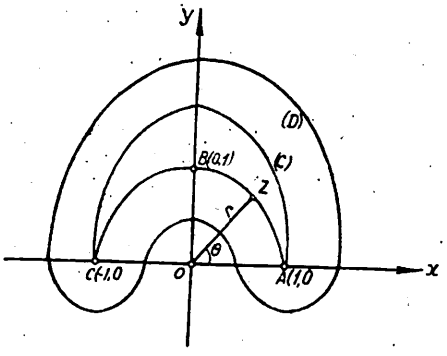


Fig. 212

2° Cu ajutorul primitivei avem

$$I=\int_A^C\frac{dz}{z^2}=\left|-\frac{1}{z}\right|_A^C=2.$$

In cazul acesta integrarea s'a făcut pe un drum oarecare (C) cuprins într'un domeniu (D) în care funcțiunea $-z^{-1}$ este olomorfă. In legătură cu aceasta, este bine s'o spunem că integrala precedentă nu putea fi calculată dela A la B dealungul axei reale, deoarece pe acest drum, funcțiunea $-z^{-1}$ nu mai este analitică (în origină).

119. 3. *Să se calculeze integralele*

$$I=\int_{(C)}z^n dz,\qquad J_n=\int_{(C)}z^{\frac{1}{2}}dz,$$

(în prima n este presupus întreg) dealungul unui cerc cu centrul în origină și de rază r. Să se discute rezultatele (fig. 213).

1° Dealungul cercului avem

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}.$$

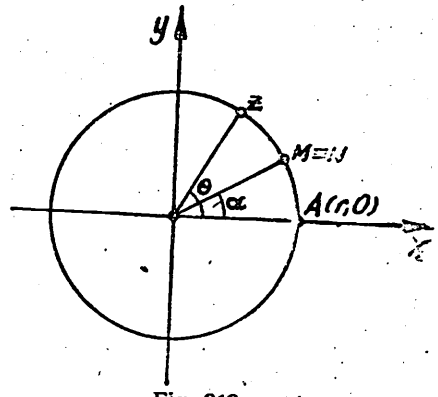


Fig. 213

In calcule se poate folosi forma trigonometrică sau forma exponențială; în această problemă o vom folosi pe a doua. Cum problema nu precizează punctul de plecare, vom lua un punct oarecare M al cercului, de argument α punctul de sosire va fi $N=M$.

Avem

$$I=\int_M^N z^n dz=\int_\alpha^{\alpha+2\pi} r^n e^{in\theta} rie^{i\theta} d\theta = ir^{n+1}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = ir^{n+1}\left|\frac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)}\right|_\alpha^{\alpha+2\pi} =$$

$$=\frac{r^{n+1}}{n+1}\left[e^{i(n+1)(\alpha+2\pi)}-e^{i(n+1)\alpha}\right]=0, \qquad (1)$$

deoarece $2\pi i$ fiind perioada funcției exponențiale, avem

$$e^{i(n+1)(\alpha+2\pi)}=e^{i(n+1)\alpha+2(n+1)\pi i}=e^{i(n+1)\alpha}.$$

Această egalitate nu are loc decât în ipoteza că n este întreg. Calculul cere un caz de excepție; cazul $n=-1$: Atunci

$$I=\int_M^N \frac{dz}{z}=\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\frac{1}{r}e^{-i\theta} rie^{i\theta} d\theta = i\int_\alpha^{\alpha+2\pi} d\theta = 2\pi i. \qquad (2)$$

2° Procedăm analog pentru integrala a doua. Avem

$$J=\int_M^N z^{\frac{1}{2}} dz=\int_\alpha^{\alpha+2\pi} r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}i\theta} rie^{i\theta} d\theta = r^{\frac{3}{2}} i\int_\alpha^{\alpha+2\pi} e^{\frac{3}{2}i\theta} d\theta = \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}}\left|e^{\frac{3}{2}i\theta}\right|_\alpha^{\alpha+2\pi} = \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}}\left[e^{\frac{3}{2}i(\alpha+2\pi)}-e^{\frac{3}{2}i\alpha}\right]$$

Dar,

$$e^{\frac{3}{2}i(\alpha+2\pi)}=e^{\frac{3}{2}i\alpha+3\pi i}=e^{\frac{3}{2}i\alpha}e^{3\pi i}=e^{\frac{3}{2}i\alpha}(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=-e^{\frac{3}{2}i\alpha},$$

încât

$$J=\frac{4}{3} r^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}i\alpha}. \qquad (3)$$

Discuție. Valorile (1), (2), (3) sunt diferite între ele, dar primele două au o caracteristică ce le deosebește de ultima. In adevăr, valorile lui I nu depind de α, adică de punctul de plecare, în timp ce valoarea lui J depinde. Cauza este că z^n, oricare ar fi n întreg, este o funcție uniformă în interiorul drumului dealungul căruia am integrat. Funcția $z^{\frac{1}{2}}$ nu este uniformă într'un domeniu ce conține curba (C) și deci era natural să depindă de determinarea radicalului cu care am plecat din M.

119. 4. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int_C^{2\pi}\frac{\cos p\theta\, d\theta}{1+2a\cos\theta+a^2},$$

unde p este un număr întreg iar a un număr real diferit de 1 sau -1.

Plecăm dela integrala

$$J=\int_\theta^{2\pi}\frac{(1-a^2)e^{pi\theta}d\theta}{1+2a\cos\theta+a^2}, \qquad (1)$$

calculată pe cercul cu centrul în origină şi de rază 1, adică făcându-l pe θ să varieze dela zero la 2π. Pe acest cerc: $z=e^{i\theta}$. Scriind integrala luând pe z ca variabilă, cum

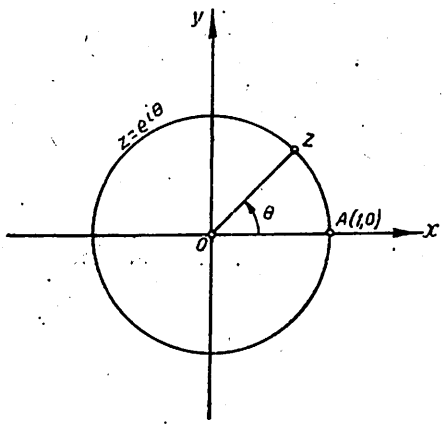


Fig. 214

$$dz=ie^{i\theta}d\theta,\quad \cos z=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

vom avea

$$J=i\int_{(C)}\frac{(1-a^2)z^p\,dz}{az^2-(a^2+1)z+a}.$$

Dar,

$$\frac{1-a^2}{az^2-(a^2+1)z+a}=\frac{1-a^2}{(z-a)(az-1)}=$$

$$=\frac{a}{az-1}-\frac{1}{z-a},$$

încât

$$J=i\int_{(C)}\frac{z^p\,dz}{z-\frac{1}{a}}-i\int_{(C)}\frac{z^p dz}{z-a}. \tag{2}$$

ambele integrale fiind de tipul (IV). Pentru a le calcula trebue să precizăm poziţia punctului a faţă de cercul (C) (pe cerc nu poate fi deoarece prin ipoteză $|a|\neq 1$).

1° $|a|<1$. Punctul a este în interiorul lui (C), iar $\frac{1}{a}$ în afară. Expresia de sub prima integrală este olomorfă în (C), deci în baza lui (III), integrala este nulă. In a doua integrală comparând cu (IV), $f(z)=z^p$ şi $z_0=a$, încât

$$J=-i\,(2\pi i a^p)=2\pi a^p. \tag{3}$$

2° $|a|>1$. Lucrurile se petrec invers faţă de cele două integrale şi avem

$$J=i\cdot\frac{2\pi i}{a^p}=-\frac{2\pi}{a^p}. \tag{4}$$

Odată J calculat valoarea lui I se deduce separând în (1) partea reală de cea imaginară. Inlocuind

$$e^{pi\theta}=\cos p\theta+i\sin p\theta,$$

avem

$$J=(1-a^2)I+i(1-a^2)\int_0^{2\pi}\frac{\sin p\theta\,d\theta}{1+2a\cos\theta+a^2},$$

şi cum J este real, cum spune (3), respectiv (4), rezultă dela început

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin p\theta\,d\theta}{1+2a\cos\theta+a^2}d\theta=0.$$

In ceeace priveşte I vom avea rezultatul

$$I=\begin{cases}\dfrac{2\pi a^p}{1-a^2} & \text{dacă } |a|<1,\\[2ex] \dfrac{2\pi}{a^p(a^2-1)} & \text{dacă } |a|>1.\end{cases}$$

119. 5. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int_{(C)}\frac{e^{iz}}{z}\,dz,$$

dealungul conturului din fig. 215, *şi din rezultatul obţinut să se deducă valoarea integralei*

$$J=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Funcţiunea de integrat e^{iz}/z este olomorfă în interiorul conturului dealungul căruia ni se cere să integrăm (în adevăr, funcţiunea are pe $z=0$ şi pe $z=\infty$ (vezi prob. 120. 2) ca poli; cum aceste puncte sunt ocolite de conturul (C), funcţia este olomorfă în interiorul lui). Valoarea integralei este deci zero,

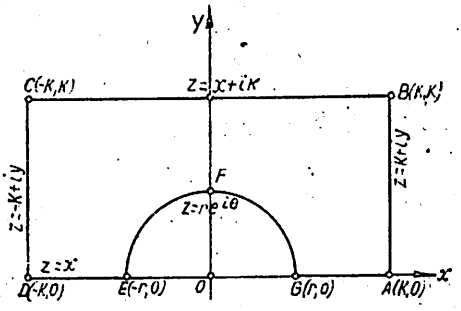


Fig. 215

Pentru a ajunge la valoarea lui J. vom descompune integrala pe fiecare din drumurile ce aparţin conturului (C) ţinând seama de valorile lui z pe aceste drumuri (indicate pe figură) şi vom face apoi pe k să tindă către infinit şi pe r către zero. Plecăm din A:

$$i\int_A^B\frac{e^{ik-y}}{k+iy}\,dy+\int_B^C\frac{e^{ix-k}}{x+ik}\,dx+i\int_C^D\frac{e^{-ik-y}}{-k+iy}\,dy+\int_D^E\frac{e^{ix}}{x}\,dx+$$

$$+\int_{EFG}\frac{e^{iz}}{z}\,dz+\int_G^A\frac{e^{ix}}{x}\,dx=0. \qquad (1)$$

Pentru prima integrală aplicând pe (V), avem

$$\left|\int_0^k\frac{e^{ik-y}}{k+iy}\,dy\right|<\int_0^k\left|\frac{e^{-y+ik}}{k+iy}\right|dy=\int_0^k\frac{e^{-y}}{\sqrt{k^2+y^2}}\,dy,$$

suprimând dela numitor pe y^2 vom avea cu atât mai mult,

$$\left|\int_0^k\frac{e^{ik-y}}{k+iy}\,dy\right|<\frac{1}{k}\int_0^k e^{-y}\,dy=\frac{1}{k}(1-e^{-k}),$$

şi cum prin regula lui *Hospital*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1-e^{-k}}{k}=\lim_{k\to\infty}e^{-k}=0,$$

însemnează că atunci când k tinde către infinit, prima integrală tinde către zero. Pentru acelaşi motiv şi a treia integrală. Pentru a doua avem

$$\left|\int_{k}^{-k}\frac{e^{ix-k}}{x+ik}\,dx\right|<\int_{-k}^{k}\left|\frac{e^{ix-k}}{x+ik}\right|dx=\int_{-k}^{k}\frac{e^{-k}\,dx}{\sqrt{x^2+k^2}}<e^{-k}\int_{-k}^{k}\frac{dx}{k}=2e^{-k},$$

şi care deasemeni tinde către zero când k tinde către infinit. Relaţia (1) devine

$$\int_{-\infty}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{EFG}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{r}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx=0,$$

sau, schimbând în prima pe x în $-x$,

$$\int_{r}^{\infty}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx+\int_{EFG}\frac{e^{iz}}{z}dz=0,$$

şi în baza formulelor lui *Euler* (§ 115, IV), rezultă

$$\int_{r}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}i\int_{GFE}\frac{e^{iz}}{z}dz. \qquad (2)$$

Dar, folosind dezvoltarea (§ 115, I), putem scrie: $e^{iz}=1+zg(z)$, unde $g(z)$ este o serie întreagă convergentă în tot planul şi deci suma ei are o valoare finită şi bine determinată. Dacă luăm valorile acestei funcţii pe cercul GFE şi dacă notăm cu M cel mai mare modul al lor, atunci

$$\int_{GFE}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{GFE}\frac{dz}{z}+\int_{GEF}g(z)\,dz,$$

ultima integrală fiind mai mică, în baza lui (V) decât $2\pi r$, şi deci tinde către zero odată cu r. Pentru prima întegrală punem $z=re^{i\theta}$, şi la fel ca la prob. 119.4, găsim rezultatul πi. Făcând în (2) pe r să tindă către zero, găsim $J=\frac{1}{2}\pi$.

Observaţie. Această integrală a fost considerată deja în prob. 81.8.

119. 6. *Să se calculeze integralele* (integralele lui Fresnel)

$$I=\int^{\infty}\cos x^2dx,\qquad J=\int^{\infty}\sin x^2dx.$$

Plecăm dela funcţia e^{-z^2} care este olomorfă în tot planul. Atunci conform formulei (III),

$$\int_{OAB} e^{-z^2}dz = \int_{OA} e^{-z^2}dz + \int_{AB} e^{-z^2}dz + \int_{BO} e^{-z^2}dz = 0.$$

Ţinând seama de valorile lui z pe diferite laturi ale conturului, aşa cum se vede depe fig. 216*) putem scrie această relaţie

$$\int_0^R e^{-x^2}dx + \int_0^R e^{-(R^2-y^2)}e^{-2iRy}\,idy + \int_{R\sqrt{2}}^0 e^{-i\rho^2}\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,d\rho = 0. \qquad (1)$$

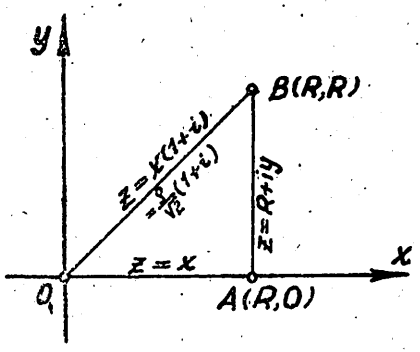


Fig. 216

Să examinăm ce se întâmplă cu aceste integrale când R tinde către infinit. Prima şi ultima vor avea valori bine definite iar a doua tinde către zero. Pentru a arăta acest ultim punct, împărţim integrala în două prin valoarea r, situată între 0 şi R, definită prin egalităţile

$$r = R - \alpha \quad \text{unde} \quad \alpha = \frac{\ln R}{R}. \qquad (2)$$

Integrala se descompune în două. Prima este

$$I_1 = \int_0^r e^{-(R^2-y^2)}dy;$$

înlocuind pe R scos din (2) avem

$$I_1 = e^{-r(2r+\alpha)}\int_0^r e^{-(r^2-y^2)}dy = e^{-2\ln R}\cdot e^{-\alpha^2}\int_0^r e^{-(r^2-y^2)}dy;$$

dar în intervalul de integrare $y<r$ încât: $r^2-y^2>0$ şi deci $e^{-(r^2-y^2)}$ este subunitar. Inlocuind în integrală toate elementele cu 1, vom avea

$$I_1 < \frac{1}{R^2}e^{-\alpha^2}\int_0^r dy = \frac{e^{-\alpha^2}}{R}\,\frac{r}{R} < \frac{e^{-\alpha^2}}{R},$$

deoarece $r<R$. Dar: $\lim_{R\to\infty}\alpha = 0$ (§ 46, III) deci I_1 este inferior unei cantităţi care tinde către zero, adică va tinde el însuşi către zero. Pentru a doua integrală avem

$$I_2 = \int_r^R e^{-(R^2-y^2)}dy < \int_r^R dy = R - r = \alpha,$$

şi va tinde către zero.

*) Pe OB ρ reprezintă distanţa dela origină la punct.

Când R tinde către infinit, relaţia (1) se scrie

$$\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\int_0^\infty(\cos\rho^2-i\sin\rho^2)(1+i)\,d\rho=\int_0^\infty(\cos\rho^2+\sin\rho^2)d\rho+i\int_0^\infty(\cos\rho^2-$$
$$-\sin\rho^2)\,d\rho=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$$

în baza prob. 79. 4 în care facem $n=1$. Rezultă

$$\int_0^\infty(\cos\rho^2-\sin\rho^2)\,d\rho=0; \qquad I=J$$

$$\int_0^\infty(\cos\rho^2+\sin\rho^2)\,d\rho=2I=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}; \qquad I=J=\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}.$$

§ 120. Dezvoltări în serie

1. Dacă o funcţie $f(z)$ este olomorfă într'un cerc cu centrul în punctul a şi de rază r, în interiorul acestui cerc funcţia $f(z)$ poate fi reprezentată prin *seria lui Taylor*

$$f(z)=f(a)+\frac{z-a}{1!}f'(a)+\cdots+\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\cdots \qquad (I)$$

Seria din dreaptă este convergentă într'un cerc de rază R număr care este cel puţin egal cu r şi este egal cu distanţa dela a la cel mai apropiat punct singular al lui $f(z)$. Seriile (I) şi (V') reprezintă seriile lui Taylor corespunzătoare originei pentru funcţiile e^z, $\sin z$, $\cos z$. Pentru a găsi desvoltările în serie Taylor (sau mai simplu *în serie*) a funcţiilor, se va ţine seama că operaţiile cu seriile definite în domeniul real, sunt valabile şi în domeniul complex şi deci cele spuse la § 51 rămân valabile şi aci.

O funcţie întreagă este dezvoltabilă în serie convergentă in tot planul. Funcţiile e^z, $\sin z$, $\cos z$ sunt funcţii întregi.

In cercul $|z|=1$, avem dezvoltarea

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1!}z+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\cdots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n+\cdots \qquad (II)$$

analoagă seriei binomului din domeniul real. Aci trebue să facem o precizare. Dacă m este întreg, egalitatea are loc; dacă m este fracţionar sau iraţional' prima parte este o funcţie multiformă în timp ce suma seriei din partea dreaptă reprezintă o funcţie uniformă. Egalitatea are loc, dacă în prima parte luăm determinarea care se reduce la 1 când $z=0$.

2. O serie întreagă poate fi derivată şi integrată termen cu termen. Adică punând,

$$\begin{cases} f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots, \\ g(z)=a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots, \\ h(z)=C+a_0z+a_1\frac{z^2}{2}+\cdots+\cdots+a_n\frac{z^{n+1}}{n+1}+\cdots, \end{cases} \qquad (III)$$

funcţiile $g(z)$ şi $h(z)$ sunt analitice în cercul de convergenţă al primei serii (unde şi $f(z)$ este analitică) şi verifică relaţiile

$$f'(z)=g(z), \quad h(z)=\int f(z)\,dz. \tag{IV}$$

3. O funcţie $f(z)$ olomorfă într'o coroană circulară cu centrul într'un punct a se poate scrie sub forma

$$f(z)=\cdots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-a}+ \\ +a_0+a_1(z-a)+\cdots+a_n(z-a)^n+\cdots, \tag{V}$$

unde coeficienţii a_k au drept expresii

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}, \tag{VI}$$

k fiind întreg pozitiv, negativ sau zero, iar (C) este un cerc cu centrul a şi având raza cuprinsă între razele cercurilor ce mărginesc coroana. Seria (II) se numeşte *serie Laurent*.

4. In particular, dacă $f(z)$ este olomorfă în interiorul unui cerc cu centrul în punctul a, exceptând centrul a, se poate exprima sub forma (II). Dacă punctul a este pol atunci dezvoltarea (II) este limitată la stânga începând cu $\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$ unde n este ordinul polului. Dacă a este punct singular esenţial dezvoltarea este nelimitată la stânga. Aceasta este chiar un criteriu de a deosebi punctele singulare între ele.

120. 1. *Să se dezvolte în serie funcţia*

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}, \qquad (a\neq b),$$

în diverse regiuni din plan; a şi b sunt două numere complexe oarecari.

Funcţia dată este analitică în tot planul având drept poli simpli punctele a şi b. După poziţia lui z faţă de aceste puncte vom distinge trei cazuri. Presupunem: $|a|<|b|$.

1° $|z|<|a|$, adică z este interior unui cerc cu centrul în origine şi de rază $|a|$. Scriem pe $f(z)$ sub forma

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}\,\frac{1}{1-\frac{z}{a}}-\frac{1}{b}\,\frac{1}{1-\frac{z}{b}}\right). \tag{1}$$

In baza rezultatului dela prob. 114. 3, cum prin ipoteză $\left|\frac{z}{a}\right|<1$ şi cu atât mai mult $\left|\frac{z}{b}\right|<1$, avem

$$\frac{1}{1-\frac{z}{a}}=1+\frac{z}{a}+\frac{z^2}{a^2}+\cdots+\frac{z^n}{a^n}+\cdots \tag{2}$$

$$\frac{1}{1-\frac{z}{b}}=1+\frac{z}{b}+\frac{z^2}{b^2}+\cdots+\frac{z^n}{b^n}+\cdots, \tag{3}$$

încât

$$f(z)=\frac{1}{b-a}\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)z+\cdots+\left(\frac{1}{a^{n+1}}-\frac{1}{b^{n+1}}\right)z^n+\cdots\right].$$

2° $|a|<|z|<|b|$, adică z este interior coroanei circulare mărginite de cercurile cu centrele în origine și de raze respectiv $|a|$ și $|b|$. În aceste ipoteze desvoltarea (2) nu mai este valabilă. Scriem pe (1) sub forma

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{a}{z}}+\frac{1}{b}\,\frac{1}{1-\frac{z}{b}}\right),$$

și cum prin ipoteză $\left|\frac{a}{z}\right|<1$, seria (2) va fi înlocuită cu

$$\frac{1}{1-\frac{a}{z}}=1+\frac{a}{z}+\frac{a^2}{z^2}+\cdots+\frac{a^n}{z^n}+\cdots, \tag{4}$$

și avem pentru z dezvoltarea în serie Laurent,

$$f(z)=\frac{1}{a-b}\left(\cdots+\frac{a^n}{z^{n+1}}+\cdots+\frac{a}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{b}+\frac{z}{b^2}+\cdots+\frac{z^n}{b^{n+1}}+\cdots\right).$$

3° $|z|>|b|$ adică z este exterior cercului de rază $|b|$ și de centru origina. Atunci dezvoltarea (4) se menține dar nu mai este valabilă (3); încât vom scrie pe (1) sub forma

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{a}{z}}-\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{b}{z}}\right),$$

și prin analogie cu (4) vom avea dezvoltarea

$$f(z)=\frac{1}{a-b}\left(\frac{a-b}{z^2}+\frac{a^2-b^2}{z^3}+\frac{a^3-b^3}{z^4}+\cdots+\frac{a^n-b^n}{z^{n+1}}+\cdots\right).$$

120. 2. *Origina este un punct singular pentru funcțiile*

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}},\quad g(z)=\sin\frac{1}{z};$$

care este natura lui?

Ținând seama de dezvoltările în serie ale lui e^z și $\sin z$ date la § 115, dezvoltări valabile oricare ar fi z, presupunând pe $z\neq 0$ vom avea

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\cdots+\frac{1}{n!\,z^n}+\cdots$$

$$g(z)=\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!\,z^3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,z^{2n+1}}+\cdots$$

Ambele serii sunt serii Laurent; cum dezvoltările corespunzătoare punctului singular $z=0$ au o infinitate de termeni, însemnează că origina este punct singular esențial pentru ambele funcții.

Observație. Considerațiile de mai sus pun în evidență o proprietate a funcțiilor e^z și $\sin z$ pe care este bine s'o subliniem. Dacă s'ar cere să studiem care este natura punctului $z=\infty$ pentru aceste funcții, am face transformarea $z=\frac{1}{z'}$ și am căuta care este natura originei pentru noile funcții. Ori, rezultatul de mai sus ne spune că punctul $z=\infty$ *este punct singular esențial pentru funcțiile* e^z *și* $\sin z$. Analog se arată că orice funcție întreagă se bucură de această proprietate.

120. 3. *Să se dezvolte în serie funcția*: $\ln(1+z)$.

Considerăm dezvoltările

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots+(-1)^n z^n+\cdots,$$

$$f(z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}+\cdots,$$

ambele fiind convergente în cercul de rază unitate, cum se constată ușor aplicând teorema raportului seriilor formate cu modulele termenilor. Derivând ultima serie obținem

$$f'(z)=\frac{1}{1+z}.$$

Dar funcția din partea dreaptă este derivata lui: $\ln(1+z)$, încât putem scrie

$$\ln(1+z)-f(z)=C.$$

Cum: $\ln(1+z)$ are o infinitate de determinări, și valoarea constantei va diferi după alegerea determinării. Dacă facem $z=0$, $\ln 1=2k\pi i$ și dacă alegem $k=0$, atunci înseamnă că luăm pentru $\ln(1+z)$ determinarea care se anulează pentru $z=0$; pentru această determinare cum și $f(z)=0$, înseamnă că trebue să luăm $C=0$, și rezultă dezvoltarea

$$\ln(1+z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}+\cdots,$$

valabilă în cercul $|z|=1$.

120. 4. *Să se descompună în serie* $(z+i)^{\frac{1}{2}}$ *luându-se determinarea care pentru* $z=0$ *se reduce la* $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Scriem:

$$(z+i)^{\frac{1}{2}}=i^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

In baza lui (II), vom avea

$$\left(1+\frac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{z}{i}-\frac{1}{2\cdot 4}\frac{z^2}{i^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{z^3}{i^3}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{z^4}{i^4}+\cdots=$$

$$=1-\frac{1}{2}iz+\frac{1}{2\cdot 4}z^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}iz^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}z^4+\cdots, \tag{2}$$

partea a doua reprezentând dezvoltarea determinării primei părţi care pentru $z=0$ se reduce la 1. Dar,

$$i^{\frac{1}{2}} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \cos\left(\frac{\pi+4k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+4k\pi}{4}\right) \qquad (k=0,1)$$

şi care dau valorile: $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ şi $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Determinarea din enunţ corespunde primei valori. In baza lui (1) şi (2) vom avea

$$(z+i)^{\frac{1}{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{2}iz + \frac{1}{2\cdot 4}z^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}iz^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}z^4 + \ldots\right).$$

Această dezvoltare va fi valabilă în cercul $\left|\frac{z}{i}\right| < 1$, adică $|z| < 1$, deoarece $|i| = 1$.

§ 121. Reziduuri

1. Dacă a este un punct singular izolat al funcţiei $f(z)$ analitică şi uniformă, în vecinătatea acestui punct funcţia admite dezvoltarea în serie Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (z-a)^n. \qquad (I)$$

Coeficientul A_{-1} se numeşte *reziduul* funcţiei $f(z)$ relativ la punctul singular a. Dacă $f(z)$ este de forma

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(x)}, \qquad (II)$$

unde $P(z)$ şi $Q(z)$ sunt funcţii olomorfe în vecinătatea polului simplu a, fără ca $P(a)$ să fie nul, atunci reziduul lui $f(z)$ în a este egal cu

$$A_{-1} = \frac{P(a)}{Q'(a)}. \qquad (III)$$

In aceleaşi condiţii, dacă a este pol de ord. n, valoarea reziduului este

$$A_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z)\right]_{z=a}. \qquad (IV)$$

2. Dacă o funcţie uniformă $f(z)$ este continuă dealungul unei curbe închise (C) şi are în domeniul mărginit de această curbă un număr finit de puncte singulare, atunci

$$\int_{(C)} f(z)\,dz = 2\pi i \sum A_{-1}, \qquad (V)$$

unde în partea dreaptă este suma reziduurilor funcţiei $f(z)$ relative la punctele singulare interioare conturului (C). Conturul este descris în sensul pozitiv (trigonometric).

3. Următoarele două teoreme sunt necesare pentru aplicaţiile ce urmează.

a) Dacă o funcţie analitică $f(z)$ devine infinită într'un punct a, astfel ca produsul $|(z-a)f(z)|$ să tindă către zero împreună cu $|z-a|$, integrala

$$\int_{(C)} f(z)\,dz, \tag{VI}$$

luată pe un cerc (C) descris din a ca centru şi cu o rază ρ, tinde către zero odată cu ρ. Teorema este adevărată chiar dacă integrala se calculează numai pe o parte din cercul (6).

b) Dacă $f(z)$ este o funcţie analitică şi dacă produsul $|zf(z)|$ tinde către zero când $|z|$ tinde către infinit, atunci integrala

$$\int_{(C)} f(z)\,dz, \tag{VII}$$

luată dealungul unui cerc (C) cu centrul în origine şi de rază R, tinde către zero când R tinde către infinit. Integrala (VII) poate fi calculată numai pe o porţiune din cerc şi rezultatul este acelaşi.

121. 1. *Să se găsească reziduul funcţiei*

$$f(z)=\frac{\operatorname{ctg} z}{z^4},$$

relativ la punctul singular $z=0$.

Folosind dezvoltările lui $\sin z$ şi $\cos z$ cunoscute, avem prin împărţire obişnuită ca şi în domeniul real (§ 43),

$$\operatorname{ctg} z=\frac{1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\cdots}{z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\cdots}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{45}z^4+\cdots\right),$$

adică

$$f(z)=\frac{\operatorname{ctg} z}{z^4}=\frac{1}{z^5}-\frac{1}{3}\frac{1}{z^3}-\frac{1}{45}\frac{1}{z}+A_1 z+\cdots,$$

ceiace spune că reziduul este $-\frac{1}{45}$.

121. 2. *Să se găsească reziduul funcţiei*

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^n},$$

relativ la polurile ei.

Funcţia are două poluri în punctele $z=+i$ şi $z=-i$ corespunzătoare rădăcinilor ecuaţiei: $z^2+1=0$. Polurile sunt fiecare de ordinul n deoarece funcţia se mai poate scrie

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)^n(z+i)^n}.$$

Pentru găsirea reziduurilor lor putem proceda în două feluri.

1° Aplicând formula (IV), avem pentru polul $z=i$,

$$A_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z+i)^{-n}\right]_{z=i}=\frac{1}{(n-1)!}(-n)(-n-1)\cdots$$

$$\cdots(-2n+2)(z+i)^{-2n+1}_{z=i}=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!}(2i)^{-2n+1}=-$$

$$=-\frac{i}{2^{2n-1}}\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!},$$

şi analog se găseşte pentru polul $z=-i$,

$$B_{-1}=\frac{i}{2^{2n-1}}\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!}.$$

2° In general, pentru a găsi reziduul unei funcţii $f(z)$ relativ la punctul $z=a$, se înlocueşte z cu $a+h$ şi reziduul căutat va fi coeficientul lui h^{-1} din această desvoltare. Să calculăm pe această cale pe B_{-1}. Avem

$$f(-i+h)=(h^2-2ih)^{-n}=(-2ih)^{-n}\left(1+\frac{1}{2}hi\right)^{-n}=\frac{(-1)^n}{(2ih)}\left[1-\frac{n}{1!}\frac{hi}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(-n)(-n-1)}{2!}\left(\frac{hi}{2}\right)^2+\cdots+\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)}{(n-1)!}\left(\frac{hi}{2}\right)^{n-1}+\cdots\right].$$

şi deci

$$B_{-1}=\frac{(-1)^n}{(2i)^n}\frac{-n(-n-1)\cdots(-2n+2)}{(n-1)!}\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}.$$

121. 3. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int_{(C)}\frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}dz,$$

dealungul cercului $x^2+y^2=2x+2y$.

Cercul taie axele în punctele $A(2,0)$ şi $B(0,2)$ (fig. 217). Funcţia de integrat are polurile $z=1$, $z=\pm i$ dintre cari numai polurile $z=1$, $z=i$ (reprezentate prin punctele M şi N) sunt interioare lui (c). Notând cu A_{-1} şi B_{-1} reziduurile lor, vom avea

$$I=2\pi i(A_{-1}+B_{-1}).$$

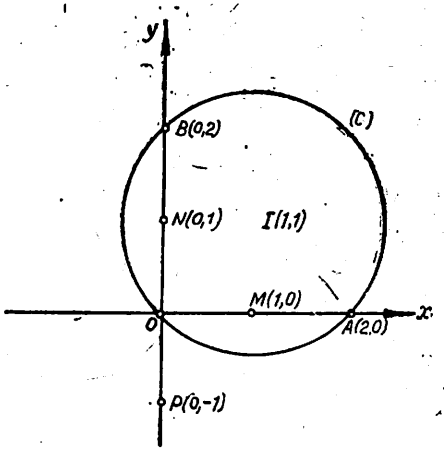


Fig. 217

Folosind pe rând formulele (III) şi (IV), găsim

$$B_{-1}=\left[\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}\right]_{z=i}=$$

$$=\frac{1}{2i(i-1)^2}=\frac{1}{-4i^2}=\frac{1}{4},$$

$$A_{-1}=\left[\frac{d}{dz}\frac{1}{z^2+1}\right]_{z=1}=-\left[\frac{2z}{(z^2+1)^2}\right]_{z=1}=-\frac{1}{2},$$

şi deci: $I=-\frac{1}{2}\pi i$

121. 4. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx, \tag{1}$$

unde $P(x)$ şi $Q(x)$ sunt polinoame în x, gradul primului fiind cu două unităţi mai mic decât gradul celui de-al doilea.

Condiţia pusă asupra gradelor, este necesară pentruca integrala să aibă un sens. Evident că pentru acest lucru mai este necesar ca zerourile lui $Q(x)$ să nu fie reale, căci dacă ar exista un asemenea punct, elementul integralei corespunzător, ar fi infinit.

Considerăm integrala

$$\int_{(\Gamma)}\frac{P(z)}{Q(z)}dz,$$

(Γ) fiind conturul din fig. 218 raza cercului fiind aleasă mai mare decât cel mai mare modul al rădăcinilor ecuaţiei: $Q(x)=0$. Conform lui (V), vom avea

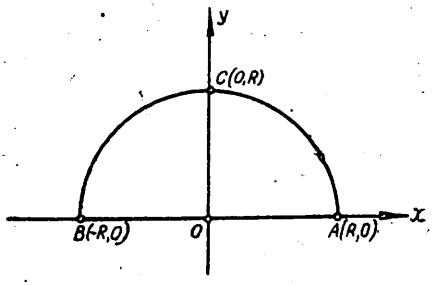


Fig. 218

$$\int_{(\Gamma)}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=2\pi i\sum A_{-1}, \tag{2}$$

unde $\sum A_{-1}$ este suma tuturor reziduurilor fracţiei de sub integrală referitoare la polii ei, proveniţi din rădăcinile numitorului şi situate deasupra axei Ox. Dar integrala se poate descompune în

$$\int_{BA}\frac{P(x)}{Q(x)}dx+\int_{ACB}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=\int_{-R}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}dx+\int_{ACB}\frac{P(z)}{Q(z)}dz.$$

A doua integrală tinde către zero când R tinde către infinit (no. 3), deoarece cum gradul numărătorului este cu două unităţi mai mare decât al numitorului

$$\lim_{|z|\to\infty} z\frac{P(z)}{Q(z)}=0.$$

Rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum A_{-1}, \tag{3}$$

121. 5. *Să se calculeze integrala*

$$I_n=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Cum ecuația: $x^2+1=0$, are o singură rădăcină $x=i$ deasupra axei Ox, $I_n=2\pi i A_{-1}$ unde A_{-1} este reziduul, funcție de sub semnul integrală referitorul la polul $z=i$. Conform rezultatului dela prob. 121. 2, avem

$$I_n=\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!}\,\frac{\pi}{2^{2n-2}}.$$

121. 6. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}},$$

în ipoteza $m<n$, m *și* n *fiind intregi.*

Funcția de sub semnul integrală este uniformă și nu are alte singularități decât poli (adică este meroformă) proveniți din rădăcinile ecuației: (1) $x^{2n}+1=0$, adică numerele

$$\alpha_k=(-1)^{\frac{1}{2n}}=(\cos\pi+i\sin\pi)^{\frac{1}{2n}}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

unde $k=0,1,\ldots,2n-1$. Pe noi nu ne interesează decât acele numere din acestea situate deasupra axei Ox. Cum aceste puncte sunt vârfurile unui poligon cu $2n$ laturi, simetrice față de Ox, vârfurile care ne trebue vor fi date de valorile $k=0,1,\ldots,n-1$. Dacă punem

$$\alpha=\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}=e^{i\frac{\pi}{2n}},$$

atunci polii ce ne interesează au valorile, în baza formulei lui Moivre

$$\alpha_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}=\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{2k+1}=\alpha^{2k+1}.$$

Deoarece poli sunt simpli, în baza formulei (III) reziduurile corespunzătoare vor fi

$$\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}=\frac{\alpha_k^{2m}}{2n\alpha_k^{2n-1}}=\frac{\alpha_k^{2m+1}}{2n\alpha_k^{2n}}=-\frac{1}{2n}\alpha^{(2m+1)(2k+1)},$$

în baza faptului că α_k verifică ecuația (1). Avem

$$I=-\frac{\pi i}{n}[\alpha^{2m+1}+\alpha^{3(2m+1)}+\cdots+\alpha^{(2m+1)(2n-1)}].$$

Pentru a calcula mai ușor suma din paranteză, punem: $\alpha^{2m+1}=u$. Atunci

$$I=-\frac{\pi iu}{n}(1+u^2+\cdots+u^{2(n-1)})=-\frac{\pi iu}{n}\,\frac{u^{2n}-1}{u^2-1}.$$

Dar: $u^{2n}=\alpha^{2n(2m+1)}=(-1)^{2m+1}=-1$, încât

$$I=\frac{2\pi i}{n}\,\frac{\alpha^{2m+1}}{\alpha^{2(2m+1)}-1}=\frac{2\pi i}{n}\,\frac{1}{\alpha^{2m+1}-\alpha^{-(2m+1)}},$$

și ținând seama de cine este α, în baza formulelor lui Euler

$$I=\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

§ 122. Aplicații ale transformării conforme la rezolvarea unor probleme de Fizică

1. In multe probleme de Fizică intervine determinarea unei funcții armonice $V(x,y)$, adică (§ 116, no. 5) o funcție care satisface ecuației lui Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0, \tag{I}$$

impunându-i-se diferite valori constante ei, precum și derivatelor ei normale la curbele $V(x,y)=\text{const}$, pe frontiera conturului unde este definită funcția. Găsirea unei asemenea funcții este ușurată în baza observării că printr'o transformare conformă, definită prin funcția analitică: $Z=f(z)$, *condițiile la limită,* impuse se mențin pe frontierele transformate.

2. In Hidrodinamică, transformarea conformă dă posibilitatea determinării fluxului unui lichid într'un canal având diferite forme. Dacă viteza q a unui lichid este scrisă sub forma

$$q=q_1+iq_2 \tag{II}$$

unde q_1 și q_2 vor fi componentele ei pe axele de coordonate, și dacă aceste funcții derivă dintr'o funcție gradient

$$q_1=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad q_2=\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{III}$$

atunci funcția ψ care împreună cu φ definesc o funcție analitică:

$$F(z)=\varphi+i\psi, \tag{IV}$$

se numește *funcție de curent* sau potențial complex. Curbele: $\psi=\text{const}$ definesc *liniile de curent* ale lichidului. Facem observarea că viteza q este conjugata lui $F'(z)$ ceiace vom nota cu:

$$q=F'(z). \tag{V}$$

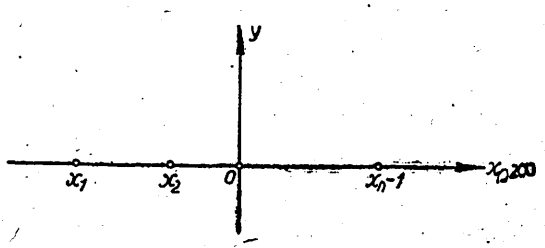


Fig. 219

3. Transformarea definită prin formula

$$Z=A\int(z-x_1)^{-k_1}(z-x_2)^{-k_2}\cdots(z-x_{n-1})^{-k_{n-1}}dz+B, \tag{VI}$$

unde A și B sunt două constante arbitrare, transformă axa Ox fig. 219 într'un contur poligonal $Z_1 Z_2,\ldots, Z_n$ (fig. 220) având unghiurile exterioare

respectiv egale cu $k_1\pi$, $k_2\pi$, ...; punctul Z_n corespunde punctului $x_n=\infty$ depe axa Ox. Dacă

$$k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}=2, \tag{VII}$$

atunci poligonul nu se închide având ultimele două laturi paralele. Tehnica alegerii punctelor x_j şi a exponenţilor k_j se va vedea pe problemele din interiorul paragrafului.

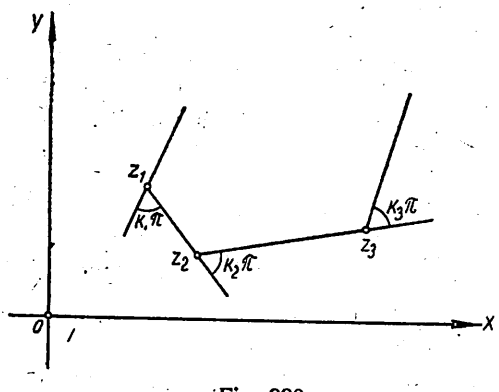


Fig. 220

Observaţie. In problemele din interiorul acestui capitol, vom considera că o funcţiune armonică este unic determinată prin condiţii la limită. In realitate această afirmaţie nu este adevărată, putându-se arăta prin exemple că există mai multe funcţii armonice care răspund la aceleaşi condiţii la limită.

122. 1. *Să se determine funcţia armonică $T(x,y)$ definită în banda $-\frac{1}{2}\pi<x<\frac{1}{2}\pi$, $y>0$, astfel ca să satisfacă condiţiilor la limită* $T\left(-\frac{1}{2}\pi, y\right)=T\left(\frac{1}{2}\pi, y\right)=0$, $T(x,0)=1$ *când* $-\frac{1}{2}\pi<x<\frac{1}{2}\pi$. *Funcţia $T(x,y)$ este presupusă mărginită în toate punctele domeniului considerat şi tinde către zero când y tinde către infinit.*

Problema cere să se determine funcţia $T(x,y)$ definită în domeniul din fig. 198 în condiţia de a fi armonică, adică

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

şi astfel ca pe marginele laterale ale domeniului funcţia să fie nulă iar pe baza să fie 1. Aplicând transformarea conformă: $z_1=\sin z$ (2) funcţia T va fi tot armonică, iar domeniul se va transforma în semi-planul din fig. 199. Condiţiile la limită pentru T vor fi de data aceasta

$$T(x_1,0)=1 \quad (-1<x_1<1), \qquad T(x_1,0)=0 \quad (x_1>1 \text{ şi } x_1<-1),$$

Aplicând din nou transformarea

$$z_2=\ln\frac{z_1-1}{z_1+1}, \tag{3}$$

funcţia T rămâne armonică, domeniul se transformă în cel din fig. 199, şi condiţiile la limită vor fi

$$T(x_2,0)=0 \text{ (oricare ar fi } x_2), \qquad T(x_2,\pi)=1 \text{ (oricare ar fi } x_2).$$

Funcţia armonică care se bucură de aceste proprietăţi, continuă şi finită, este evident funcţia: (4) $T=y_2/\pi$. Dar, din (3) scoatem

$$z_2=x_2+iy_2=\ln\left|\frac{z_1-1}{z_1+1}\right|+\arg\frac{z_1-1}{z_1+1}, \tag{4}$$

adîcă

$$y_2 = \arg\frac{z_1-1}{z_1+1} = \arg\frac{(x_1-1)+iy_1}{(x_1+1)+iy_1} = \arg\frac{[(x_1-1)+iy_1][(x_1+1)-iy_1]}{(x_1+1)^2+y_1^2} =$$

$$= \arg\frac{x_1^2+y_1^2-1+2iy_1}{(x_1+1)^2+y_1^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{2y_1}{x_1^2+y_1^2-1}.$$

Dar,

$$z_1 = x_1+iy_1 = \sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y,$$

încât

$$T = \frac{y_2}{\pi} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\cos x \operatorname{sh} y}{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y - 1}.$$

Conform formulelor ce leagă liniile hiperbolice şi cele trigonometrice între ele, numitorul se mai poate scrie

$$(1-\cos^2 x)\operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x(\operatorname{ch}^2 y - 1) - 1 = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x - 1 = \operatorname{sh}^2 y - \cos^2 x,$$

încât, avem mai departe

$$\frac{2\cos x \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh}^2 y - \cos^2 x} = \frac{2\frac{\cos x}{\operatorname{sh} y}}{1-\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sh} y}\right)^2} = \operatorname{tg} 2\alpha, \text{ unde am pus: } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos x}{\operatorname{sh} y}$$

şi deci

$$T = \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} 2\alpha) = \frac{2\alpha}{\pi} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sh} y}\right) \tag{6}$$

care este funcţia ce căutam. Din forma acestei funcţii se vede că $T(x,y)$ este inferioară lui 1 (deoarece funcţia arc tg este inferioară lui $\frac{1}{2}\pi$), şi tinde către zero când y tinde către infinit deoarece: $|\cos x| < 1$ $\operatorname{sh}\infty = \infty$ (vezi graficul din fig. 35). Ultimele condiţii din enunţ sunt deci indeplinite.

Observaţii. 1° In formula (5) y_2 este definit între 0 şi π în timp ce arctg între $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ (§ 39. pct. 2). S'ar părea că este o neînţelegere. In realitate, după cum se vede din (6), raportul $\frac{\cos x}{\operatorname{sh} y}$, în banda din enunţ este întotdeauna pozitiv şi deci arctg va fi cuprins între $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ în timp ce $y_2 = 2\alpha$ rămâne cuprins tot între 0 şi π. S'a eliminat în felul acesta partea care nu era comună celor două intervale.

2. Problema din enunţ corespunde unei probleme fizice şi anume ea dă temperatura unei plăci subţiri de forma celei din fig. 198, care primeşte pe latura inferioară o temperatură constantă egală cu unitatea. Izotermele: $T = c$ au ecuaţiile

$$\cos x = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\pi \operatorname{csh} y.$$

Această ecuaţie se poate explicita dacă înlocuim funcţiunea iperbolică sh$y$ în funcţie de exponenţiale.

122. 2. *Să se determine funcţia armonică $T(x,y)$ care satisface condiţiilor la limită*

$$\left|\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad (0<x<1); \quad T(x,0) = 1, \quad (x>1); \quad T(0,y) = 0 \quad (y>0),$$

funcţia fiind definită în interiorul primului cadran.

Aplicăm o transformare, definită printr'o funcţie analitică care să schimbe domeniul (D) din fig. 221 în domeniul (D') din fig. 222. Această transformare este

$$z_1 = \arcsin z\,; \quad z = \sin z_1, \tag{1}$$

cu alte cuvinte să arătăm invers că plecând dela domeniul (D') ajungem la domeniul (D). In adevăr, avem

$$x = \sin x_1 \operatorname{ch} y_1, \quad y = \cos x_1 \operatorname{sh} y_1. \tag{2}$$

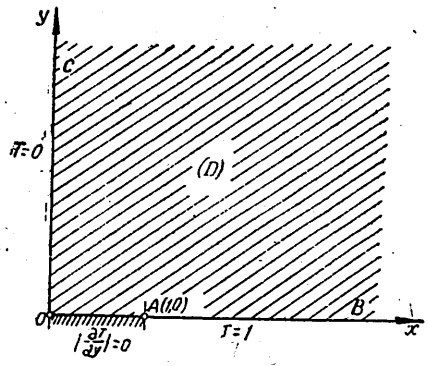


Fig. 221

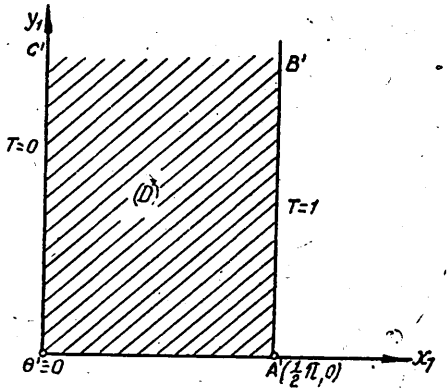


Fig. 222

Pe latura Oy_1 avem $x=0$, adică $x=0$, $y=\operatorname{sh} y_1$ şi cum $\operatorname{sh} y_1$ poate lua orice valoare, ne corespunde dreapta oy în întregime. Pe OA' avem $y_1=0$, $x_1 < \frac{1}{2}\pi$, adică $x=\sin x_1$, $y=0$ corespunde segmentul OA. Pe $A'B'$ avem $x_1=\frac{1}{2}\pi$ şi rezultă $x=\operatorname{ch} y_1 > 1$, $y=0$, corespunde semi-dreapta AB.

Acum, o funcţie armonică (ea satisface ecuaţiei lui Laplace) care în (D') să se bucure ca pentru $x=0$, $T=0$ şi pentru $x=\frac{1}{2}\pi$, $T=1$ este $T=\frac{2}{\pi}x_1$. Prima condiţie din enunţ este deasemeni verificată, deoarece $\frac{\partial T}{\partial y_1}=0$ oricare ar fi x_1 cu atât mai mult pe axa Ox. Problema s'a redus la a exprima pe T cu ajutorul lui x şi y. Din (2) scoatem

$$\frac{x^2}{\sin^2 x_1} - \frac{y^2}{\cos^2 x_1} = 1. \tag{3}$$

Ce spune această relaţie din punct de vedere geometric? Ea spune că punctul $M(x, y)$ se găseşte pe hiperbola (3) care are semi-axa mare egală cu $2 \sin x_1$ iar focarele situate pe Ox au abscisele: $\sin^2 x_1 + \cos^2 x_1 = 1$. Această însemnează că dacă am vrea să-i scriem ecuaţia pornim dela relaţia

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} - \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 2 \sin x_1,$$

de unde scoatem pe x_1. Deci

$$T=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}\left[\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right], \tag{4}$$

și care este funcția căutată.

Observație. Caşi cea precedentă, problema dă temperatura unei plăci sub forma unui unghiu drept în care o porțiune din capătul uneia din laturi este izolată, dându-se pe această porțiune valoarea derivatei normale a funcției ce reprezintă temperarura și dându-se valorile însăși funcției pe restul laturilor.

122. 3. *Se cere să se determine funcția armonică $V(x, y)$ care să satisfacă condițiilor la limită:*

$V(x, y)=0$ pe jumătatea superioară a cercului $x^2+y^2=1$,

$V(x, y)=1$ pe cealaltă jumătate.

Cu ocazia rezolvării prob. 117. 2, am arătat că transformarea conformă

$$Z=i\frac{1-z}{1+z},$$

face ca cercul de rază 1 și cu centrul în origină să fie transformat în semiplanul situat deasupra axei OX și anume după cum arată literele din fig. 190, 191. Aceasta însemnează că trebue să găsim o funcție armonică în planul (Z), adică o funcție care să derive dintr'o funcție analitică, și astfel ca pe partea pozitivă a axei OX să ia valoarea zero iar pe partea negativă a aceleiași axe să ia valoarea 1. Această funcție este coeficientul lui i din funcția analitică

$$\frac{1}{\pi}\ln Z=\frac{1}{\pi}\ln|Z|+\frac{i}{\pi}\varphi,$$

unde am notat cu φ argumentul lui Z (pentru $\ln Z$ alegem valoarea principală, adică $-\pi<\varphi\leqq\pi$). In adevăr, când Z este pe partea pozitivă a lui OX, $\varphi=0$, iar când Z este pe partea negativă, $\varphi=\pi$. Alegem deci

$$V=\frac{1}{\pi}\varphi=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{Y}{X}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1-x^2-y^2}{2y},$$

în baza formulelor (1) dela prob. 117. 2. În această formulă, ca o derogare dela cele spuse la § 39, pct. 2, considerăm pentru funcția $\operatorname{arctg} u$ valorile cuprinse în intervalul $(0, \pi)$. Dacă vrem ca să păstrăm pentru $\operatorname{arctg} u$ valoarea dată la locul indicat, ar trebui să scriem

$$V=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1-x^2-y^2}{2y} & \text{pentru } y\geqq 0\\ 1-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1-x^2-y^2}{2y} & \text{pentru } y<0.\end{cases}$$

Observație. Problema aceasta corespunde determinării potențialului electric într'un cilindru în anumite condițiuni.

122. 4. *Să se determine fluxul unui lichid intr'un canal format dintr'un unghiu drept* (fig. 223).

Incepem prin a rezolva o altă problemă. Considerăm un fluid al cărui potențial complex este funcția: $F(z)=Az$, unde A este o constantă reală

pozitivă. Atunci, cu notaţiile noastre, $\varphi(x, y) = Ax$ şi $\psi(x, y) = Ay$. Aceasta înseamnă că liniile de curent $\psi = c$ sunt drepte orizontale $y = A/c$ (fig. 224), iar viteza fluidului este determinată de vectorul $q = \overline{F'(z)} = A$, adică fluidul are o mişcare uniformă spre dreapta.

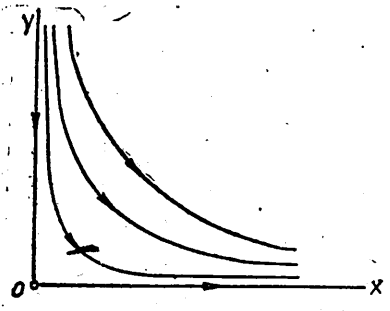


Fig. 223

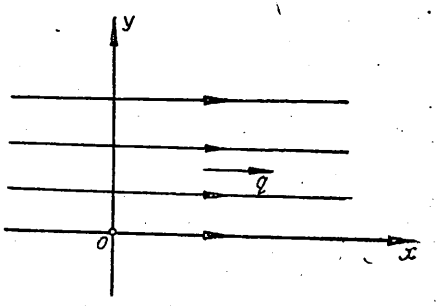


Fig. 224

Revenim la problema din enunţ, făcând transformarea planului (z) din fig. 223 prin funcţia analitică

$$Z = z^{\frac{1}{2}} \ (1), \quad \text{adică} \quad z = Z^2 = X^2 - Y^2 + 2XYi. \ (2)$$

In felul acesta unghiul drept din fig. 223 se transformă în axa ox din fig. 224. în adevăr, din (1) rezultă

$$x = X^2 - Y^2, \quad 2XY = y.$$

Deci, când $X = 0$, rezultă $y = 0$ şi $x = -Y^2$ adică partea negativă a axei ox, iar când $X = 0$, $y = 0$, $x = X^2$ adică partea pozitivă a aceleiaşi axe. Aceasta înseamnă că funcţia de curent va fi: $\psi = 2AXY$, funcţie armonică ce se anulează pe laturile unghiului. Liniile de curent au ecuaţiile: $2AXY = c$ şi sunt iperbole echilatere având drept asimptote laturile unghiului. Potenţialul complex este: $F(z) = AZ^2$. Deci, cum: $F'(z) = 2AZ$, viteza fluidului este

$$q = \overline{F'(z)} = 2A\,(X - iY),$$

şi deci mărimea ei: $|q| = 2A\sqrt{X^2 + Y^2}$ adică o particulă de fluid are viteza direct proporţională cu distanţa ei la origine.

Observaţie. Transformarea (1) are desavantajul faţă de (2) că nu este univocă; deaceia dacă s'ar fi aplicat transformarea planului (z) pe (Z) era necesar să precizăm care din determinarea lui $z^{\frac{1}{2}}$ o folosim.

122. 5. *Să se studieze fluxul unui lichid care întâlneşte în cale un cilindru aşezat perpendicular pe direcţia cursului lichidului.*

Fără a particulariza problema, putem presupune că cilindrul are raza egală cu unitatea. O secţiune transversală în lichid se prezintă ca în fig. 225. In baza simetriei vom putea studia numai partea de deasupra axei Ox.

Cu ocazia rezolvării problemei 117. 3 am arătat că funcția

$$Z=f(z)=z+\frac{1}{z},$$

transformă conturul $DABCE$ în semi-planul din fig. 193. Ori, am arătat în problema precedentă că într'un asemenea semi-plan, potențialul complex al fluxului uniform este $F=Az$ (A real și pozitiv). Aceasta înseamnă că în cazul nostru potențialul complex va fi

$$F=AZ=A\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

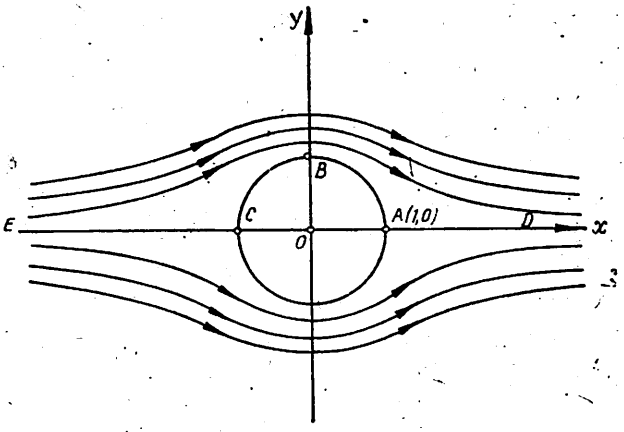


Fig. 225

Scriind pe z sub formă trigonometrică, rezultă că liniile de curent au ecuațiile în coordonate polare

$$A\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta=c \qquad (c=\text{const.})$$

Vectorul viteză este

$$q=A\left[1-\frac{1}{(x-iy)^2}\right],$$

care se apropie în mărime de A cu cât $|z|$ crește. Aceasta înseamnă că; fluxul este aproape uniform și paralel cu axa Ox când z este depărtat de cerc.

122. 6. *Să se găsească transformarea care duce banda semi-infinită* $-\frac{1}{2}\pi\leqslant u\leqslant\frac{1}{2}\pi$, $Y>0$ *în semi-planul* $y>0$.

Considerăm banda ca limita unui triunghiu $Z_1\ Z_2\ Z_3$ în care Z_1, Z_2 sunt

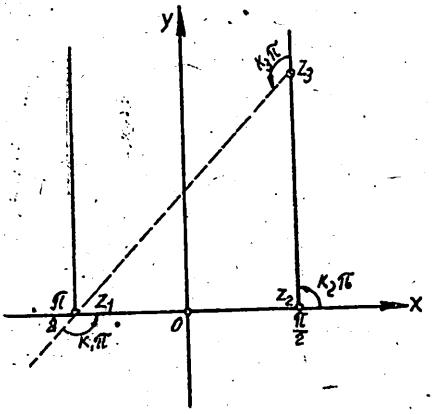


Fig. 226

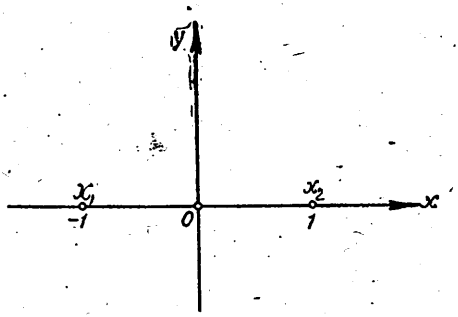


Fig. 227

fixi și iar Z_3 tinde către infinit. Alegem drept imagine ale vârfurilor, punctele din planul (z): $x_1=-1$, $x_2=1$ și pentru x_3 punctul dela infinit al axei Ox.

La limită avem: $k_1\pi=\frac{1}{2}\pi$, $k_2\pi=\frac{1}{2}\pi$, $k_3\pi=0$, adică: $k_1=k_2=\frac{1}{2}$, $k_3=0$. Înlocuind în (VI), rezultă transformarea

$$Z=A\int(z+1)^{-\frac{1}{2}}(z-1)^{-\frac{1}{2}}dz+B=iA\int\frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}+B=iA\arcsin z+B.$$

Constantele A și B se determină scriind că punctele x_1 și x_2 le corespund punctele Z_1 și Z_2; avem

$$-\frac{1}{2}\pi=-iA\frac{1}{2}\pi+B;\quad \frac{1}{2}\pi=iA\frac{1}{2}\pi+B,$$

de unde rezultă: $iA=1$, $B=0$, adică transformarea este: $Z=\sin z$, ceeace este conform cu rezultatele dela prob. 117. 6.

122. 7. *Două plăci infinite cu potențialul electrostatic $V=0$ și o placă semi-infinită situată la mijlocul primelor două are potențialul $V=1$. Se cere să se determine funcția potențială $V(x,y)$ în regiunea cuprinsă între plăci.*

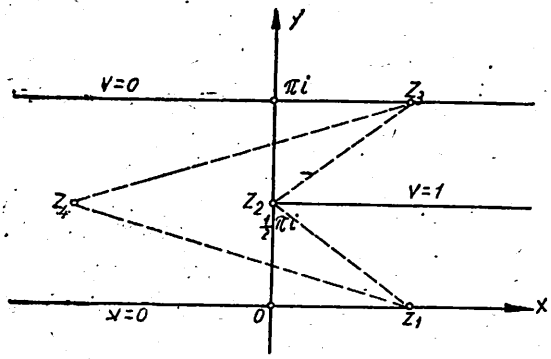


Fig. 228

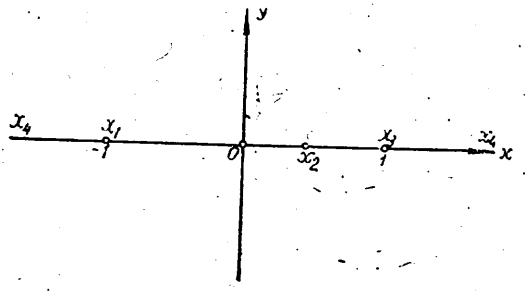


Fig. 229

Vom ține seamă că funcția $V(x,y)$ este o funcție armonică. O secțiune transversală, în cele trei plăci are forma din fig. 228, unde am ales convenabil unitatea de măsură astfel ca să avem ordonatele notate pe figură. Problema se pune de a găsi o transformare adecuată astfel ca conturul format de cele trei plăci să se transforme în axa Ox (fig. 229). În acest scop, considerăm conturul ca fiind limita poligonului $Z_1Z_2Z_3Z_4$ atunci când Z_2 este fix, Z_1, Z_3 tind către infinit spre dreapta, iar Z_4 către infinit spre stânga. Vom lua drept imagini pentru Z_1 și Z_3 punctele $x_1=-1$, $x_3=1$, pentru Z_2 un punct oarecare x_2 (deocamdată nedeterminat), iar pentru Z_4 punctul dela infinit. La limită vom avea: $k_1\pi=\pi$, $k_2\pi=-\pi$, $k_3\pi=k_4\pi=\pi$, adică transformarea va fi

$$\left.\begin{aligned}Z=A\int(z+1)^{-1}(z-x_2)(z-1)^{-1}dz+B=A\int\frac{z-x_2}{z^2-1}dz+B=\frac{A}{2}\int\left(\frac{1+x_2}{z+1}+\right.\\ \left.+\frac{1-x_2}{z-1}\right)dz+B=\frac{1}{2}A\,[(1+x_2)\ln(z+1)+(1-x_2)\ln(z-1)]+B,\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

unde A și B sunt două constante complexe ce urmează să fie determinate pentru a avea corespondență între cele două figuri. Fie: $A=A_1+iA_2$, $B=B_1+lB_2$. Dacă presupunem că z este pe ox, va trebui să avem

$$X+iY=\frac{1}{2}(A_1+iA_2).\{(1+x_2)[\ln|x+1|+i\arg(x+1)]+$$
$$+(1-x_2)[\ln|x-1|+i\arg(x-1)]\}+B_1+iB_2 \qquad (2)$$

Presupunem că Z_4 este situat la infinit pe dreptele paralele Z_4Z_1 și Z_4Z_3. Axei $OX(Y=0)$ îi va corespunde semi-dreapta x_4x_1. Făcând pe Z_1 să tindă către infinit, adică x să tindă către x_1 (x fiind pe porțiunea x_4x_1) vom avea pentru expresiile ce intră în formulă,

$$Y=0,\ x+1 \text{ tinde către zero și deci } \ln|x+1| \text{ către } -\infty,\ \arg(x+1)=\pi,$$
$$\ln|x-1|=\ln 2,\ \arg(x-1)=\pi,$$

și cum $-1<x_2<+1$, făcând în (2) pe x să tindă către -1 vom avea formal

$$X=\frac{1}{2}(A_1+iA_2)\{(1+x_2)[\ln|x+1|+i\pi]+(1-x_2)(\ln 2+i\pi)\}+B_1+iB_2,$$

care se desparte în

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{1}{2}A_1[(1+x_2)\ln|x+1|+(1-x_2)\ln 2]-\frac{1}{2}A_2[(1+x_2)\pi+(1-x_2)\pi]+B_1,\\ 0&=\frac{1}{2}A_1[(1+x_2)\pi+(1-x_2)\pi]+\frac{1}{2}A_2[(1+x_2)\ln|x+1|+(1-x_2)\ln 2]+B_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Prima egalitate este formată în sensul că ambele părți tind către infinit. A doua egalitate, în baza faptului că $\ln|x+1|$ tinde către infinit, nu poate avea loc decât dacă $A_2=0$ și restul dă $B_2=-\pi A_1$.

Mai departe, să scriem că imaginea lui Z_1Z_2 (la limită), este segmentul x_1x_2. Pe acest segment

$$Y=\frac{1}{2}\pi i,\quad \arg(x+1)=0,\quad \arg(x-1)=\pi;$$

identificarea părților complexe dau relația

$$\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{2}A_1(1-x_2)\pi+B_2. \qquad (4)$$

Infine, scriind că la limită imaginea lui Z_3Z_4, pe care $Z=X+\pi i$ este semi-dreapta $x>1$, și egalând părțile complexe găsim: $B_2=\pi$. Introducând această valoare în (4), în baza valorilor găsite anterior, rezultă: $A_1=-1$, $x_2=0$. Scrind acuma că pentru $x=0$ trebue să avem $Z=\frac{1}{2}\pi i$, rezultă: $B_1=0$.

Indefinitiv, rezultă că transformarea este

$$Z=-\frac{1}{2}\ln(z^2-1)+\pi i, \qquad (5)$$

sau, în baza periodicității funcției exponențiale,

$$z^2-1=e^{2\pi i-2Z}=e^{-2Z};\qquad z^2=1+e^{-2Z}. \qquad (6)$$

Prin această transformare, funcția V cerută de problemă, din planul (Z) devine o funcție V armonică în planul (z). Această funcție este definită în

semi-planul $y>0$ şi va satisface condiţiilor la limită: $V=0$ pentru $x<-1$ sau $x>1$ şi $V=1$ pentru $-1<x<1$. Această funcţie este coeficientul lui i din funcţiunea analitică

$$F(z)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{z-1}{z+1}=\frac{1}{\pi}\ln\frac{r_1}{r_2}+\frac{i}{\pi}(\theta_1-\theta_2)$$

(vezi fig. 196) unde θ_1 şi θ_2 variază între 0 şi π. Aceasta înseamnă că

$$\operatorname{tg}(\pi V)=\operatorname{tg}(\theta_1-\theta_2)=\frac{2y}{x^2+y^2-1}. \tag{7}$$

Dar, din (6) scoatem

$$x^2-y^2=1+e^{-2X}\cos 2Y, \qquad 2xy=-e^{-2X}\sin 2Y.$$

Scoţând de aci valorile lui x^2+y^2 şi y şi înlocuindu-le în (7), rezultă că în planul (Z) vom avea

$$\operatorname{tg}(\pi V)=\frac{\sqrt{e^{-4X}-U^2}}{U}, \tag{8}$$

unde am pus

$$U=-1+\sqrt{1+2e^{-2X}\cos 2Y+e^{-4X}}. \tag{9}$$

In privinţa valoarei ce trebue să luăm pentru V este bine să se aibă în vedere formula (7) unde θ_1 şi θ_2 au valorile depe figură.

BIBLIOGRAFIE

Bermant, prof. *A. F.*: Curs de analiză Matematică, Ed. a IV-a. Gostehizdat, Moscova, 1950

Fadeev A. C. și *Sominschi I. S.*: Culegere de probleme de Algebră superioară Gostehizdat, Moscova, 1949.

Eichtenoholz G. M.: Curs de Calcul diferențial și integral, Moscova, 1949.

Grebencea M. C. și *Novoselov S. I.*: Curs de Analiză matematică, Gostehizdat, Moscova, 1949.

Günther N. M. și *Cuzmin R. O.*: Culegere de probleme de Matematici superioare, Edit Tehnică, București, 1950.

Luzin N. N.: Calcul diferențial și integral, Edit. de Stat, București, 1949.

Petrovschi I. G.: Lecții de teoria ecuațiilor diferențiale obișnuite, Gostehizdat, Moscova, 1949.

Smirnov V. I.: Curs de Matematici superioare, Gostehizdat, Moscova, 1949.

Vinogradov, S. P.: Curs scurt de Matemateci superioare, Moscova. 1949.

TABLA DE MATERII

PREFAȚĂ 3

Partea întâi: **ALGEBRA ELEMENTARĂ**

Cap. I: **Calculul algebric** 7
§ 1. Notații. Valori numerice 7
§ 2. Adunarea și scăderea polinoamelor 8
§ 3. Inmulțirea polinoamelor. Progresii geometrice . . . 13
§ 4. Formula binomului. Puterea unui polinom 17
§ 5. Aplicații ale formulei binomului. Progresii aritmetice . 22
§ 6. Impărțirea polinoamelor. Descompunerea în factori . . 27
§ 7. Cel mai mare comun divizor și cel mai mic comun multiplu al mai multor polinoame 32
§ 8. Fracții 36
§ 9. Puteri și radicali 40
§ 10. Expresia $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. Numitori rationali 44
Cap. II: **Ecuații algebrice. Inegalități** 48
§ 11. Ecuații de gradul 1 48
§ 12. Ecuații de gradul 2 52
§ 13. Ecuații de grad superior rezolvabile prin diferite artificii de calcul 57
§ 14. Ecuații conținând radicali 62
§ 15. Inegalități 66
§ 16. Relații între rădăcini și coeficienți. Funcțiuni simetrice . 73
§ 17. Sisteme de ecuații algebrice 79
Cap. III: **Numere complexe** 86
§ 18. Scrierea numerelor complexe; adunarea și scăderea lor . 86
§ 19. Inmultirea și împărțirea 91
§ 20. Puterile unui număr complex 94
§ 21. Extragerea de rădăcină 100
§ 22. Aplicații la ecuațiile algebrice 102
§ 23. Descompunerea unui polinom în factori reali 106
Cap. IV: **Determinanți. Ecuații lineare** 109
§ 24. Analiza combinatorie 109
§ 25. Calculul determinanților 113
§ 26. Inmulțirea determinanților 119
§ 27. Sisteme normale 123
§ 28. Sisteme lineare oarecari 126
§ 29. Eliminări. Rădăcini comune a două ecuații 132
§ 30. Rezolvarea sistemelor de ecuații de un grad oarecare . . 136

Partea a doua: **CALCULUL DIFERENȚIAL**

Cap. V: **Limite. Serii** 140
§ 31. Exemple de limite 140
§ 32. Serii cu termeni pozitivi 149
§ 33. Serii cu termeni oarecari 157
§ 34. Operații cu seriile 160
Cap. VI: **Funcții de o singură variabilă. Derivate. Aplicații** . . . 163
§ 35. Funcții. Continuitate. Puncte de discontinuitate . . . 163
§ 36. Funcția exponențială 172
§ 37. Funcția logaritmică 176
§ 38. Ecuații exponențiale și logaritmice 179

§ 39. Funcţii trigonometrice inverse 181
§ 40. Funcţii iperbolice 184
§ 41. Derivatele funcţiilor elementare 187
§ 42. Derivate de ordin superior 195
§ 43. Desvoltări limitate 201
§ 44. Aplicaţii la teoria ecuaţiilor. Discuţii 208
§ 45. Descompunerea fracţiilor raţionale în fracţii simple . . 213
§ 46. Infiniţi mici şi infiniţi mari. Diferenţiale 217
§ 47. Forme nedeterminate 222
§ 48. Extreme 230
§ 49. Reprezentarea grafică a funcţiilor 238
§ 50. Serii de funcţii. Serii întregi 249
§ 51. Desvoltări în serie 256
Cap. VII: **Funcţii de mai multe variabile** 261
§ 52. Derivate parţiale. Determinanţi funcţionali 261
§ 53. Funcţii compuse. Funcţii omogene 266
§ 54. Funcţii dependente şi independente 271
§ 55. Funcţii implicite 273
§ 56. Extreme 279
§ 57. Schimbarea variabilelor 292
Cap. VIII: **Aplicaţii geometrice ale calculului diferenţial** 300
§ 58. Reprezentarea analitică a curbelor plane. Tangente şi normale. Concavitate 300
§ 59. Curbura curbelor plane. Centrul şi raza de curbură . . 316
§ 60. Înfăşurători 321
§ 61. Desfăşurate şi desfăşurante 324
§ 62. Reprezentarea analitică a curbelor strâmbe. Triedrul lui Frenet 330
§ 63. Curburile curbelor strâmbe. Formulele lui Frenet . . 334
§ 64. Reprezentarea analitică a suprafeţelor. Plan tangent şi normala la suprafeţe. Suprafeţe riglate 339
§ 65. Curbe pe suprafaţă. Curbura suprafeţelor 345

Partea a treia: **CALCULUL INTEGRAL**

Cap. IX: **Integrale nedefinite** 354
§ 66. Formular de integrale uzuale 354
§ 67. Integrale imediate. Integrarea prin substituţie . . . 356
§ 68. Integrarea prin părţi 363
§ 69. Formule de reducere 365
§ 70. Integrarea fracţiilor raţionale 371
§ 71. Integrale de funcţii trigonometrice 376
§ 72. Integrale de funcţii iperbolice 382
§ 73. Integrale de funcţii iraţionale 384
§ 74. Integrale binome 390
§ 75. Integrale diverse 392
Cap. X: **Integrale definite** 397
§ 76. Calcul de integrale definite. Schimbări de variabile . . 397
§ 77. Integrale generalizate 405
§ 78. Folosirea seriilor pentru calculul sau demonstrarea existenţei integralelor 409
§ 79. Integrale euleriene 416
§ 80. Serii trigonometrice (serii Fourier) 420
§ 81. Derivarea sub semnul integrală. Probleme diverse . . 428
Cap. XI: **Integrale multiple, curbilinii şi de suprafaţă** 435
§ 82. Integrarea diferenţialelor totale 435
§ 83. Integrale curbilinii 438
§ 84. Integrale duble 444
§ 85. Integrale triple 454
§ 86. Integrale de suprafaţă 463
§ 87. Formule care leagă între ele diferite tipuri de integrale . 467

Cap. XII: **Aplicaţiile geometrice, mecanice şi fizice ale calculului integral** . 473
§ 88. Calculul ariei suprafeţelor plane 473
§ 89. Lungimi de arce 480
§ 90. Volumul şi aria corpurilor de rotaţie 487
§ 91. Volumul şi aria corpurilor oarecari 493
§ 92. Aplicaţiile calculului integral în Mecanică 501
§ 93. Aplicaţiile calculului integral în Rezistenţa Materialelor . 502
§ 94. Aplicaţiile calculului integral în Fizică 503

Partea a patra: **ECUAŢII DIFERENŢIALE ŞI CU DERIVATE PARŢIALE**

Cap. XIII: **Ecuaţii diferenţiale** 509
§ 95. Formarea ecuaţiilor diferenţiale 509
§ 96. Ecuaţii cu variabilele separabile 511
§ 97. Ecuaţii omogene şi reductibile la ele 513
§ 98. Ecuaţii lineare de ordinul 1 516
§ 99. Ecuaţii Bernoulli şi Riccati 520
§ 100. Factor integrant 524
§ 101. Alte ecuaţii de ordinul întâi integrabile 526
§ 102. Ecuaţii de ordin superior integrabile 529
§ 103. Ecuaţii lineare şi cu coeficienţi constanţi. Ecuaţii Euler . 535
§ 104. Aplicaţii geometrice. Curbe pe suprafeţe 544
§ 105. Integrarea prin serii 548
Cap. XIV: **Sisteme de ecuaţii diferenţiale** 556
§ 106. Sisteme de primul ordin 556
§ 107. Sisteme de ordin superior 560
§ 108. Sisteme lineare cu coeficienţi constanţi 563
§ 109. Ecuaţii cu diferenţiale totale 569
Cap. XV. **Ecuaţii cu derivate parţiale** 571
§ 110. Ecuaţii de primul ordin lineare 571
§ 111. Ecuaţii de primul ordin generale 575
§ 112. Ecuaţii de ordinul al doilea 580
Cap. XVI. **Calculul variaţiilor** 590
§ 113. Extremele integralelor conţinând o singură funcţiune necunoscută 590

Partea a cincia. **FUNCŢII DE VARIABILĂ COMPLEXĂ**

Cap. XVII: **Funcţii elementare de variabilă complexă** 604
§ 114. Şiruri şi serii de variabilă complexă 604
§ 115. Funcţii elementare 607
§ 116. Funcţii analitice. Funcţii armonice 613
§ 117. Transformarea conformă 617
Cap. XVIII: **Noţiuni asupra funcţiilor analitice** 628
§ 118. Clasificarea funcţiilor. Puncte singulare 628
§ 119. Calculul integral 632
§ 120. Desvoltări în serie 640
§ 121. Reziduuri 644
§ 122. Aplicaţii ale transformării conforme la rezolvarea unor probleme de Fizică 649

Redactor de carte: Moscovici M.
Tehnoredactor: Horowitz S.
Corector resp.: Markovits Şt.

Dat la cules 29. VII. 1953. Bun de tipar 21. IX. 1953. Hârtia cărţi şcolare 70×100/16, 65 g/m². Coli editoriale 40. Coli tipar 41,25. Preţul unui exemplar lei 25,06.
Comanda 1770. — A. 0.1556/1953.
Pentru bibliotecile mici, indicele de clasificare 512.
Pentru bibliotecile mari, indicele de clasificare 5127517.

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică Timişoara, Str. Popa Şapcă Nr. 8. — R.P.R.

ERATA

Pag.	Rând.	In loc de:	Pune:	Din vina cui:
29	9	$P(4)=m+n+64$	$P(4)=4m+n+64$	autorului
29	3 j.	$-x^{2n-1}-\ldots.$	$-x^{2n-1}+\ldots$	autorului
31	8	$(x^2+xy+yz+zx).$	$(x^2+xy+yz+zx)=$	autorului
31	7 j.	$+4\,abc\ldots.$	$+8\,abc$	autorului
42	10	$(32x^6+48x^4+3x^2+1)$	$(32x^6+48x^4+18x^2+1)$	autorului
42	8 j.	$[(a^{-\frac{1}{mn}}+a^{\frac{1}{np}}b^{\frac{1}{2p}})^2]^{\frac{1}{2}}=$	$[(a^{-\frac{1}{mn}}+a^{\frac{1}{2np}}l^{\frac{1}{2p}})^2]^{\frac{1}{2}}=$	autorului
		$=a^{-\frac{1}{mn}}+(a^2b^n)^{\frac{1}{2np}}=$	$=a^{-\frac{1}{mn}}+(ab^n)^{\frac{1}{2np}}=$	
		$=\frac{1}{\sqrt[mn]{a}}+\sqrt[2np]{a^2b^n}$	$=\frac{1}{\sqrt[mn]{a}}+\sqrt[2np]{ab^n}$	
45	7.	$=2\sqrt{a^2-c^2}.$	$=\sqrt{a^2-c^2}.$	autorului
47	3 j.	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=$	autorului
55	4 j.	$h>\frac{a^2}{2g}$	$h<\frac{a^2}{2g}$	autorului
64	14	$\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$	$\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$	tipografiei
69	4 j.	9.10	9.11	autorului
69	28, 29, 30		Trebue șterse rândurile 28, 29, 30 începând cu „este interesant ...”	autorului
74	9 j.	$+a_{n-1}S_{p-1}+$	$+a_{n-1}S_{p+1}+$	autorului
88	5 j.	$\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	autorului
88	4 j.	$-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	autorului
88	2 j.	$-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	autorului
88	1 j.	$\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	autorului
89	8 j.	$\varphi=2k\pi+$	$\varphi=k\pi+$	autorului
97	7	$+\cos(a+h)\cos(a+2b)$	$+\cos(a+h)+\cos(a+2h)+$	autorului
99	9	$2\sin n\varphi=2\sin n(\pm\theta)=$	$=2i\sin n\varphi=2i\sin n(\pm\theta)=$	autorului
		$=2\sin n\theta$	$=\pm 2i\sin n\theta$	autorului
102	9 j.	negativ (în cazul n cu soț și A pozitiv	pozitiv (în cazul n cu soț și A negativ	autorului
105	6	$x^m-1=0$ (3)	$x^m-1=0$ (4)	autorului
105	6 j.	$x^{q-r}-1=0$	$x^{q-r}-1=0$ (6)	autorului

Pag.	Rând.	In loc de :	Pune :	Din vina cui :
105	2 j.	(6)	(5)	autorului
109	7	$\frac{1}{2}(n-1)$	$\frac{1}{2}n(n-1)$	autorului
110	3	*cab, abc, cba, bca, bac*	*cab, acb, abc, cba, bca, bac.*	autorului
111	19	$\frac{n^2(n-1)^2(n-2)!}{2}$	$\frac{n^2(n-1)^2(n-2)!}{4}$	autorului
131	16	$\varepsilon\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\varepsilon\delta;$	$\varepsilon\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\varepsilon\delta;$	tipografiei
133	10	$(-1)^{mm}$	$(-1)^{mn}$	tipografiei
139	2	$+650=0.$	$+650=0.$ (4)	tipografiei
143	8 j.-3 j.	începând cu „de unde ... ... $1-\cos\frac{x}{n}<\frac{x^2}{2n^2}$	$1-\cos\frac{x}{n}\leq\frac{x^2}{2n^2}$	autorului
160	4 și 6	S_{zn}	S_{2n}	tipografiei
160	13	$\Sigma(A_1 u_n^{(1)}-A_2 u_n^{(2)}+..)$	$\Sigma(A_1, u_n^{(1)}+A_2 u_n^{(2)}+\cdots)$	autorului
168	11	$y_1=\sin x$	$y_1=2\sin x$	autorului
182	24	29. 2.	39.2	autorului
183	1	29. 3.	39.3	autorului
230	19	$\ln y$	$\lim \ln y$	autorului
238	3	$-n-(n+1)(1-n\ln x)$	$-n(n+1)(1-n\ln x)$	autorului
246	3 j.	dreapta	stânga	autorului
367	3 j.	$2K-1$	$2K+1$	autorului
442	19	$\int_a^{\pi} P(x,y)\,dx=$	$\int_a^{x} P(x,y)\,dx+$	autorului
512	13	$y=\sqrt{x(1-c)}+\sqrt{C(1-x)}$	$\sqrt{y}=\sqrt{x(1-C)}+\sqrt{C(1-x)}$	tipografiei
530	form. (VII)		Pune ..... între rândurile 2 și 3	tipografiei
535	20	421	42.1	tipografiei
536	17	$a_0\,y+$	$a_0\,y^{(n)}+$	tipografiei
554	3	$=\frac{\pi}{\sin\pi}$	$=\frac{\pi}{\sin m\pi}$	autorului
554	9	$\sum_{n=\infty}^{\infty}$	$\sum_{n=0}^{\infty}$	autorului
571	5	$P=\frac{\partial z}{\partial x}$	$p=\frac{\partial z}{\partial x}$	autorului
577	1 j.	$=\frac{dy}{yx(y^2p-1)}=$	$=\frac{dy}{y(y^2p-1)}-=$	autorului
596	2 j.	113·7	113·6	autorului
598	18 j.	113·8	113·7	autorului
599	15	113·9	113,8	autorului
613	21 și 22		Se intervertesc rândurile 21 și 22 între ele	autorului