MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI

Matematică

M1

Manual pentru clasa a XI-a

Ion D. Ion

Eugen Câmpu

Nicolae Angelescu

Neculai I. Nediță

Adrian P. Ghioca

CORINT EDUCAȚIONAL

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI TINERETULUI

Matematică

M1

Manual pentru clasa a XI-a

Ion D. Ion

Eugen Câmpu

Nicolae Angelescu

Neculai I. Nediță

Adrian P. Ghioca

CORINT
EDUCAȚIONAL

Manualul a fost aprobat prin O.MEdCT nr. 1262/61 din 6.06.2007, în urma evaluării calitative și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al ministrului educației și cercetării nr. 3252 din 13.02.2006.

Date despre autori:

ION D. ION, profesor universitar doctor, Facultatea de Matematică, Universitatea București, autor de cursuri universitare în domeniul algebrei, de manuale școlare pentru învățământul liceal, de lucrări cu caracter științifico-metodic pentru specializările cadrelor didactice.

EUGEN CÂMPU, conferențiar doctor, Facultatea de Matematică, Universitatea București, autor de cursuri universitare în domeniul analizei matematice, coautor la manuale școlare de matematică pentru învățământul liceal.

NICOLAE ANGELESCU, profesor gradul didactic I, Colegiul Național „Mihai Viteazul", Ploiești, coautor la manuale pentru învățământul liceal, autor de auxiliare școlare pentru învățământul gimnazial și liceal, de lucrări pentru examenele de testare națională și bacalaureat.

NECULAI I. NEDIȚĂ, profesor grad I, Colegiul Național de Informatică „Tudor Vianu", București, coautor la manuale pentru învățământul liceal, autor de auxiliare școlare pentru învățământul gimnazial și liceal.

ADRIAN P. GHIOCA, fost profesor gradul didactic I, Colegiul „Mihail Cantacuzino", Sinaia, coautor la manuale pentru învățământul liceal, autor de auxiliare școlare pentru învățământul gimnazial și liceal, de lucrări pentru examenele de testare națională și bacalaureat sau pentru cercurile de elevi.

Referenți:
Prof. grd. I **Ambrinoc Costică**, Liceul „Alexandru Vlahuță", Râmnicu-Sărat
Prof. grd. I **Gabriela Streinu-Cercel**, Școala Superioară Comercială „N. Kretzulescu", București

Redactor: **Alice Raluca Petrescu**
Tehnoredactare computerizată: **Alice Raluca Petrescu**
Coperta: **Valeria Moldovan**

Editura CORINT

Difuzare: Calea Plevnei nr. 145, sector 6, București, cod poștal 060012
Tel.: 021.319.88.22; 021.319.88.33; 021.319.88.77; fax: 021.319.88.66
E-mail: vanzari@edituracorint.ro;
Magazin virtual: www.edituracorint.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică M1: manual pentru clasa a XI-a / Ion D. Ion, Neculai I. Nediță, Eugen Câmpu, … – București: Corint, 2007
Bibliogr.
ISBN 978-973-135-087-5

I. Ion, Ion D.
II. Nediță, Neculai I.
III. Câmpu, Eugen

51(075.35)

ISBN: 978-973-135-087-5

PARTEA I

Elemente de calcul matriceal
și sisteme de ecuații liniare

Capitolul 1. Permutări

Capitolul 2. Matrice

Capitolul 3. Determinanți

Capitolul 4. Sisteme de ecuații liniare

Capitolul 1 Permutări

§1. Noțiunea de permutare, operații, proprietăți

Fie A o mulțime finită cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Natura elementelor mulțimii A nu prezintă interes pentru studiul pe care îl întreprindem în continuare și le vom nota cu 1, 2, ..., i, ..., n, la fel ca pe primele n numere naturale diferite de zero. Așadar $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Vom presupune că între elementele lui A avem relația de ordine naturală:

$$1 < 2 < \ldots < i < \ldots < n.$$

Definiție

Dacă $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci o aplicație bijectivă $\sigma : A \to A$ se numește **permutare de grad *n***.
Vom nota cu S_n mulțimea tuturor permutărilor de grad n.

O permutare $\sigma \in S_n$ este prezentată, de regulă, cu ajutorul unui tablou cu două linii:

$$(*)\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(i) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

în prima linie fiind trecute, în ordine naturală, numerele 1, 2,..., i,..., n, iar în cea de a doua linie fiind inserate imaginile acestora prin σ, anume $\sigma(1)$, $\sigma(2)$,..., $\sigma(i)$,..., $\sigma(n)$.

Cum σ este aplicație bijectivă, în cea de a doua linie a tabloului (*), fiecare număr natural i, $1 \leq i \leq n$, apare numai o singură dată.

Exemplu Permutarea $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ este aplicația bijectivă $\sigma : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ care acționează astfel: $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 5$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 2$ și $\sigma(5) = 4$.

A da o permutare $\sigma \in S_n$ revine la a insera în cea de a doua linie a tabloului (*) numerele 1, 2,..., i,..., n într-o anumită ordine. Dacă întâi precizăm valoarea lui $\sigma(1)$, pentru aceasta avem n posibilități. Apoi, îndată ce $\sigma(1)$ a fost fixat, pentru $\sigma(2)$ rămân $n - 1$ posibilități. După ce se alege și $\sigma(2)$, rămân $n - 2$ posibilități pentru $\sigma(3)$ ș.a.m.d. Rezultă că numărul permutărilor de grad n este egal cu $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Dacă în cea de a doua linie a tabloului (*) trecem primele n numere naturale nenule în ordine naturală, se obține permutarea $e \in S_n$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \end{pmatrix}$, numită *permutarea identică*. Avem $e(i) = i$, oricare ar fi $i \in A = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Evident e coincide cu aplicația identică a mulțimii $A = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dacă $\sigma, \pi \in S_n$, atunci *compusa* $\sigma \circ \pi$ a permutării σ cu permutarea π:

$$\sigma \circ \pi : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\},\ (\sigma \circ \pi)(i) = \sigma(\pi(i))$$

este, de asemenea, permutare de grad n deoarece compusa a două aplicații bijective este o aplicație bijectivă. Reprezentarea lui $\sigma \circ \pi$ sub formă de tablou cu două linii este:

$$\sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ \sigma(\pi(1)) & \sigma(\pi(2)) & \ldots & \sigma(\pi(i)) & \ldots & \sigma(\pi(n)) \end{pmatrix}.$$

Exemplu Dacă $\sigma, \pi \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, atunci

$$\sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(\pi(1)) & \sigma(\pi(2)) & \sigma(\pi(3)) & \sigma(\pi(4)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(4) & \sigma(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

De asemenea,

$$\sigma \circ e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(e(1)) & \sigma(e(2)) & \sigma(e(3)) & \sigma(e(4)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix} = \sigma \text{ și}$$

$$e \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ e(\sigma(1)) & e(\sigma(2)) & e(\sigma(3)) & e(\sigma(4)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ e(3) & e(4) & e(1) & e(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma.$$

Orice permutare $\sigma \in S_n$ este aplicație bijectivă, deci admite inversă, de forma:

$$\sigma^{-1} : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\},$$

definită prin: $$\sigma^{-1}(j) = i \Leftrightarrow j = \sigma(i),$$

Se observă că σ^{-1} este tot permutare de grad n.

Cum $(\sigma \circ \sigma^{-1})(j) = (\sigma(\sigma^{-1}(j)) = \sigma(i) = j$ și $(\sigma^{-1} \circ \sigma)(i) = (\sigma^{-1}(\sigma(i)) = \sigma^{-1}(j) = i$, avem $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = e$.

Exemplu Dacă $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, avem $\sigma(1) = 4, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 5, \sigma(4) = 3,$ $\sigma(5) = 1$, deci $\sigma^{-1}(4) = 1, \sigma^{-1}(2) = 2, \sigma^{-1}(5) = 3, \sigma^{-1}(3) = 4$ și $\sigma^{-1}(1) = 5$, de unde:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_5 \text{ și } \sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = e.$$

Proprietăți ale operației de compunere a aplicațiilor de mulțimi se regăsesc și pentru operația de compunere a permutărilor. Astfel:

(1) $\forall\ \sigma, \pi, \tau \in S_n$, $(\sigma \circ \pi) \circ \tau = \sigma \circ (\pi \circ \tau)$ (*asociativitate*);

(2) $\forall\ \sigma \in S_n$, $\sigma \circ e = e \circ \sigma = \sigma$ (*e* este *element neutru*);

(3) $\forall\ \sigma \in S_n$, $\exists\ \sigma^{-1} \in S_n$, $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = e$ (orice permutare are *inversă*).

Definiție

Dacă $\sigma \in S_n$, atunci submulțimea A_σ a mulțimii $A = \{1, 2, ..., n\}$, $A_\sigma \overset{def}{=} \{i \in A \mid \sigma(i) \neq i\}$ se numește **suportul** permutării σ.

Evident $A_\sigma = \varnothing \Leftrightarrow \sigma = e$.

Exemplu Dacă $\sigma \in S_6$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $A_\sigma = \{1, 3, 5, 6\}$.

Definiție

O permutare $\tau \in S_n$, $n \geq 2$, se numește **transpoziție** dacă există i și j în $A = \{1, 2, ..., n\}$, $i \neq j$, astfel încât $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ și $\tau(k) = k$, $\forall\ k \in A \setminus \{i, j\}$.

Transpoziția $\tau \in S_n$ pentru care $\tau(i) = j$ și $\tau(j) = i$ se notează cu $\tau = (i, j)$ sau $\tau = (j, i)$.

În mulțimea S_n a permutărilor de grad n, $n \geq 2$, există $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ transpoziții.

Suportul unei transpoziții $\tau = (i, j)$ este $A_\tau = \{i, j\}$.

Exemple **1.** Permutările $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in S_3$, $\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2, 3)$, $\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 3)$

și $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1, 2)$ sunt singurele transpoziții din S_3.

2. Dacă $\tau = (2, 5) \in S_6$, atunci $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Lema 1

Dacă $\tau = (i, j) \in S_n$ este o transpoziție, atunci $\tau \neq e$ și $\tau^2 = e$.

Demonstrație. Cum $i \neq j$ și $\tau(i) = j$, avem $\tau \neq e$. Cum $\tau^2(i) = \tau(\tau(i)) = \tau(j) = i$, $\tau^2(j) = \tau(\tau(j)) = \tau(i) = j$ și $\tau^2(k) = \tau(\tau(k)) = \tau(k) = k$, oricare ar fi $k \neq i, j$, rezultă că: $\tau^2 = e$.

Lema 2

Fie $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq e$, $i \in A_\sigma$ și $j = \sigma(i)$. Au loc următoarele:

1. $j \in A_\sigma$.

2. Dacă $\tau = (i, j)$ și $\pi = \sigma \circ \tau$, atunci $A_\pi \subset A_\sigma$, $A_\pi \neq A_\sigma$.

Demonstrație. 1. Cum $i \in A_\sigma$, avem $i \neq \sigma(i) = j$ și deci, dacă $\sigma(j) = j = \sigma(i)$, rezultă $j = i$. Contradicție. Așadar, $\sigma(j) \neq j$, deci $j \in A_\sigma$.

2. Dacă $\sigma(k) = k$, atunci $k \neq i$ și $k \neq j$, deci $\pi(k) = \sigma(\tau(k)) = \sigma(k) = k$. Rezultă că $A_\pi \subseteq A_\sigma$. Avem $j \in A_\sigma$ și cum $\pi(j) = \sigma(\tau(j)) = \sigma(i) = j$, rezultă că A_π este inclus strict în A_σ.

Observăm că o transpoziție $\tau = (i, j) \in S_n$ este o permutare a cărei acțiune asupra numerelor

$$1, 2, \ldots, i, \ldots, j, \ldots, n$$

revine la a permuta între ele numerele i și j și a lăsa neschimbate celelalte numere:

$$1, 2, \ldots, j, \ldots, i, \ldots, n.$$

Teorema următoare stabilește că acțiunea unei permutări oarecare $\sigma \in S_n$ asupra numerelor $1, 2, \ldots, n$ revine la a acționa (într-o anumită ordine) asupra acestora cu un număr finit de transpoziții.

Teorema 1

Orice permutare $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, se poate reprezenta ca un produs finit de transpoziții.

Demonstrație. Să notăm cu m_σ numărul elementelor lui A_σ. Inducție după numărul m_σ. Dacă $m_\sigma = 0$, atunci $A_\sigma = \varnothing$ și deci $\sigma = e$. Dacă $\tau = (1, 2)$, avem: $e = \tau \circ \tau$. Dacă $A_\sigma \neq \varnothing$, fie $i \in A_\sigma$, $j = \sigma(i)$, $\tau = (i, j)$ și $\pi = \sigma \circ \tau$. Cum $A_\pi \subset A_\sigma$, avem $m_\pi < m_\sigma$. Conform ipotezei de inducție, există transpozițiile $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r \in S_n$ astfel încât $\sigma \circ \tau = \pi = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_r$.

Înmulțind la dreapta cu τ și ținând cont că $\tau \circ \tau = e$, se obține $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_r \circ \tau$.

Observație:

Fie $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq e$, și $i_1 \in A_\sigma$. Șirul $i_1, i_2 = \sigma(i_1), i_3 = \sigma(i_2), \ldots$ are termenii în A_σ care este mulțime finită, deci șirul precedent are termeni care se repetă. Cum σ este o aplicație injectivă, primul termen care se repetă este i_1 și să zicem că a doua apariție a sa este $i_{s+1} = i_1$. Cum $i_1 \in A_\sigma$, avem $\sigma(i_1) \neq i_1$, deci $s \geq 2$.

Fie $\pi = \sigma \circ (i_{s-1}, i_s) \circ (i_{s-2}, i_{s-1}) \circ \ldots \circ (i_2, i_3) \circ (i_1, i_2)$.

Se verifică imediat că: $A_\pi = A_\sigma \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ și $\pi(k) = \sigma(k)$ oricare ar fi $k \neq i_1, i_2, \ldots, i_s$.

Avem: $\sigma = \pi \circ (i_1, i_2) \circ (i_2, i_3) \circ \ldots \circ (i_{s-1}, i_s)$.

Dacă $\pi = e$, egalitatea de mai sus reprezintă o descompunere a lui σ în produs de transpoziții. Dacă $\pi \neq e$, se aplică permutării π tratamentul precedent aplicat lui σ. Se continuă până se obține permutarea e și, în final, vom putea preciza descompunerea lui σ în produs de transpoziții.

Exemplu Fie $\sigma \in S_7$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem $A_\sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Luăm $i_1 = 1 \in A_\sigma$.

Rezultă $i_1 = 1$, $i_2 = \sigma(1) = 5$, $i_3 = \sigma(5) = 4$, $i_4 = \sigma(4) = 7$, $i_5 = \sigma(7) = 1$. Dacă definim: $\pi \overset{def}{=} \sigma \circ (4, 7) \circ (5, 4) \circ (1, 5)$ (*),

atunci obținem că $A_\pi = A_\sigma \setminus \{1, 5, 4, 7\} = \{2, 3, 6\}$.

Fie $j_1 = 2$. Rezultă: $j_2 = \pi(2) = \sigma(2) = 6$, $j_3 = \pi(6) = \sigma(6) = 3$, $j_4 = \pi(3) = \sigma(3) = 2$ și deci, dacă: $\theta = \pi \circ (6, 3) \circ (2, 6)$, atunci $A_\theta = A_\pi \setminus \{2, 3, 6\} = \varnothing$.

Așadar $\theta = e$, deci $e = \pi \circ (6, 3) \circ (2, 6)$. Înmulțind la dreapta cu $(2, 6)$ și apoi cu $(6, 3)$, obținem $\pi = (2, 6) \circ (6, 3)$.

Înlocuind în (*) și înmulțind succesiv la dreapta cu $(1, 5)$, $(5, 4)$ și $(4, 7)$, obținem: $\sigma = (2, 6) \circ (6, 3) \circ (1, 5) \circ (5, 4) \circ (4, 7)$.

§2. Inversiuni. Semnul unei permutări

Definiție

Fie $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$. Spunem că permutarea σ prezintă o **inversiune** pentru perechea ordonată (i, j), cu $1 \leq i < j \leq n$, dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$. Notăm cu $Inv(\sigma)$ numărul tuturor inversiunilor permutării σ. Numărul $\varepsilon(\sigma)$, $\varepsilon(\sigma) \overset{def}{=} (-1)^{Inv(\sigma)} \in \{-1, 1\}$ se numește **semnul** sau **signatura permutării σ**.

Vom spune că permutarea σ este **pară**, respectiv **impară** dacă numărul $Inv(\sigma)$ este par, respectiv impar, ceea ce revine la $\varepsilon(\sigma) = 1$, respectiv $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Să observăm că, pentru i fixat, numărul perechilor (i, j) cu $i < j \leq n$, pentru care σ prezintă inversiunii este egal cu numărul elementelor din linia a doua a tabelului:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(i) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

aflate în dreapta lui $\sigma(i)$, mai mici ca $\sigma(i)$.

Exemple **1.** Fie $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

În dreapta lui $\sigma(1) = 3$ există 2 numere mai mici decât 3, în dreapta lui $\sigma(2) = 2$ există 1 număr mai mic decât 2, în dreapta lui $\sigma(3) = 5$ există 2 numere mai mici decât 5, iar în dreapta lui $\sigma(4) = 1$ nu există numere mai mici decât 1. Obținem că: $Inv(\sigma) = 2 + 1 + 2 + 0 = 5$ și $\varepsilon(\sigma) = (-1)^5 = -1$, deci σ este permutare impară.

2. Dacă $e \in S_n$, $n \geq 2$, este permutarea identică, atunci $Inv(e) = 0$ și $\varepsilon(e) = (-1)^0 = 1$. Deci, permutarea identică e este pară.

Lema 3

Fie $\sigma, \tau \in S_n$, $n \geq 2$, unde $\tau = (i, j)$, $1 \leq i < j \leq n$. Are loc relația: $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = -\varepsilon(\sigma)$.

Altfel spus:

Când compunem o permutare σ cu o transpoziție τ, permutarea σ își schimbă semnul (paritatea).

Demonstrație. Fie $\pi = \sigma \circ \tau$. Avem $\pi(i) = \sigma(\tau(i)) = \sigma(j)$, $\pi(j) = \sigma(\tau(j)) = \sigma(i)$ și $\pi(k) = \sigma(\tau(k)) = \sigma(k)$, oricare ar fi $k \neq i, j$. Așadar:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(i) & \ldots & \pi(j) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(j) & \ldots & \sigma(i) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Demonstrăm prin inducție după numărul $m = j - i$.

Dacă $m = 1$, atunci: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & i+1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, de unde rezultă că: $Inv(\pi) = \begin{cases} Inv(\sigma)+1, & \text{dacă } \sigma(i+1) > \sigma(i) \\ Inv(\sigma)-1, & \text{dacă } \sigma(i+1) < \sigma(i) \end{cases}$.

Avem: $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = (-1)^{Inv(\sigma)\pm 1} = -(-1)^{Inv(\sigma)} = -\varepsilon(\sigma)$.

Presupunem că $m > 1$. Folosind definiția compunerii permutărilor, se observă că pentru orice număr $s \neq i, j$, avem: $(i, j) = (i, s) \circ (s, j) \circ (i, s)$, iar în particular: $\tau = (i, j) = (i, i + m) = (i, i + 1) \circ (i + 1, j) \circ (i, i + 1)$.

Înmulțirea lui σ la dreapta cu τ revine la a înmulți pe σ succesiv cu transpozițiile $(i, i + 1)$, $(i + 1, j)$ și $(i, i + 1)$. Conform cazului $m = 1$ și ipotezei de inducție ($j - (i + 1) < m$) σ își schimbă paritatea de trei ori, de unde rezultă: $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = -\varepsilon(\sigma)$.

Corolar

Orice transpoziție τ este permutare impară.

Demonstrație. Cum $e = \tau \circ \tau$, avem $1 = \varepsilon(e) = \varepsilon(\tau \circ \tau) = -\varepsilon(\tau)$, de unde rezultă $\varepsilon(\tau) = -1$.

Dacă $n > 1$, notăm cu A_n mulțimea permutărilor pare din S_n și cu B_n mulțimea permutărilor impare. Evident, $S_n = A_n \cup B_n$, $A_n \cap B_n = \varnothing$.

Fie $\tau = (1, 2)$. Dacă $\sigma \in A_n$, $n \geq 2$, atunci din lema 3 rezultă că $\sigma \circ \tau \in B_n$, iar dacă $\pi \in B_n$, atunci $\pi \circ \tau \in A_n$. Putem considera aplicația $f: A_n \to B_n$, $f(\sigma) = \sigma \circ \tau$.

Dacă $f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$, atunci $\sigma_1 \circ \tau = \sigma_2 \circ \tau$ și înmulțind la dreapta cu τ, obținem $\sigma_1 = \sigma_2$. Așadar f este aplicație imjectivă.

Dacă $\pi \in B_n$ și $\sigma = \pi \circ \tau \in A_n$, atunci $f(\sigma) = \sigma \circ \tau = \pi \circ \tau \circ \tau = \pi \circ e = \pi$, deci f este și surjectivă.

Prin urmare, f este aplicație bijectivă. Rezultă că numărul permutărilor pare este același cu numărul permutărilor impare, și anume $n!/2$.

Exerciții rezolvate

1. Fie $\sigma \in S_6$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze numerele $Inv(\sigma)$ și $\varepsilon(\sigma)$.

b) Să se reprezinte σ ca produs de transpoziții.

Rezolvare:

a) În dreapta lui $\sigma(i)$ din a doua linie a lui σ sunt două numere mai mici ca $\sigma(i)$ când $i = 1$, trei când $i = 2$, două când $i = 3$, zero când $i = 4$, unul când $i = 1$.

Așadar: $Inv(\sigma) = 2 + 3 + 2 + 0 + 1 = 8$ și $\varepsilon(\sigma) = (-1)^8 = 1$.

b) Avem $A_\sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Luăm $i_1 = 1 \in A_\sigma$.

Avem: $i_1 = 1$, $i_2 = \sigma(1) = 3$, $i_3 = \sigma(3) = 4$, $i_4 = \sigma(4) = 1$.

Așadar, dacă $\pi \overset{def}{=} \sigma \circ (3,4) \circ (1,3)$, atunci: $A_\pi = A_\sigma \setminus \{1, 3, 4\} = \{2, 5, 6\}$.

Fie $j_1 = 2 \in A_\pi$, $j_2 = \pi(2) = \sigma(2) = 5$, $j_3 = \pi(5) = \sigma(5) = 6$, $j_4 = \pi(6) = \sigma(6) = 2$.

Dacă $\theta = \pi \circ (5, 6) \circ (2, 5)$, atunci $A_\theta = A_\pi \setminus \{2, 5, 6\} = \varnothing$, deci $\theta = e$.

Avem $\pi = (2, 5) \circ (5, 6)$ și $\sigma = (2, 5) \circ (5, 6) \circ (1, 3) \circ (3, 4)$.

2. a) Dacă $\sigma \in S_n$ și $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_m$ este o descompunere a lui σ în produs de transpoziții, atunci $\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$.
b) Oricare ar fi $\sigma, \pi \in S_n$, avem $\varepsilon(\sigma \circ \pi) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\pi)$.
c) Produsul a două permutări de aceeași paritate (de parități diferite) este o permutare pară (respectiv impară).

Rezolvare:
a) Dacă $m = 1$, avem $\sigma = \tau_1$, deci $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1) = -1 = (-1)^1$.
Dacă $m > 1$ și $\varepsilon(\tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_{m-1}) = (-1)^{m-1}$, atunci
$$\varepsilon(\tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_m) = -\varepsilon(\tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_{m-1}) = -(-1)^{m-1} = (-1)^m.$$
b) Fie $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_m$ și $\pi = \tau_1' \circ \tau_2' \circ ... \circ \tau_{m'}'$ descompuneri ale lui σ și π în produs de transpoziții. Cum $\sigma \circ \pi = \tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_m \circ \tau_1' \circ \tau_2' \circ ... \circ \tau_{m'}'$, avem:
$$\varepsilon(\sigma \circ \pi) = (-1)^{m+m'} = (-1)^m(-1)^{m'} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\pi).$$
c) Rezultă din punctul b).

Exerciții propuse

1. Fie $\sigma, \pi \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculați $\sigma \circ \pi$, $\pi \circ \sigma$, $(\sigma \circ \pi)^{-1}$, $\pi^{-1} \circ \sigma^{-1}$.

2. Determinați $x \in S_5$, astfel încât:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $x \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ x \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Fie $\sigma \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați σ^2, σ^3, σ^4, σ^{212}.
b) Avem $\sigma^k = e$ cu $k \in \mathbb{Z}$ dacă și numai dacă k este multiplu de 3.

4. Dacă i_1, i_2, i_3 sunt trei numere distincte din $\{1, 2, ..., n\}$, $n \geq 3$, notăm cu (i_1, i_2, i_3) permutarea $\alpha \in S_n$ pentru care $\alpha(i_1) = i_2$, $\alpha(i_2) = i_3$, $\alpha(i_3) = i_1$ și $\alpha(k) = k$, $\forall\, k \neq i_1, i_2, i_3$.
Arătați că:
a) $\alpha^3 = e$;
b) $\sigma \circ (i_1, i_2, i_3) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \sigma(i_3))$, $\forall\, \sigma \in S_n$.

5. a) Dacă $\sigma, \pi \in S_n$ și $A_\sigma \cap A_\pi = \varnothing$, atunci $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$.
b) Dacă $\pi, \tau \in S_n$, $n \geq 5$, $\pi = (1, 2, 3)$ și $\tau = (4, 5)$, atunci $(\pi \circ \tau)^6 = e$.

6. Fie $\pi \in S_5$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\pi = (1, 3, 5) \circ (2, 4)$.
b) Arătați că $\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)) \circ (\sigma(2), \sigma(4))$, oricare ar fi $\sigma \in S_5$.
c) Determinați permutările $\sigma \in S_5$ cu proprietatea $\sigma \circ \pi \circ = \pi \circ \sigma$.

7. Descompuneți în produs de transpoziții permutările $\sigma \in S_5$ și $\pi \in S_7$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Fie permutările $\sigma, \pi \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine $Inv(\sigma)$ și $Inv(\pi)$.
b) Determinați $\varepsilon(\sigma)$, $\varepsilon(\pi)$, $\varepsilon(\sigma \circ \sigma)$, $\varepsilon(\pi \circ \pi)$, $\varepsilon(\sigma \circ \pi)$ și $\varepsilon(\pi \circ \sigma)$.

9. Să se determine n astfel încât permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ să fie impară.

10. Fie numerele $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ astfel încât $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ și $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n$.
Să se arate că oricare ar fi $\sigma \in S_n$ are loc relația:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq a_1b_{\sigma(1)} + a_2b_{\sigma(2)} + \dots + a_nb_{\sigma(n)}.$$

11. Fie numerele reale $a_1, a_2, a_3 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Arătați că oricare ar fi $\sigma \in S_3$, avem:

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_{\sigma(1)}}\right)\left(a_2 + \frac{1}{a_{\sigma(2)}}\right)\left(a_3 + \frac{1}{a_{\sigma(3)}}\right) < \left(\frac{5}{2}\right)^3.$$

12. Fie transpoziția $\tau = (i, j) \in S_n$, $1 \leq i < j \leq n$, și mulțimile: $S' = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) > \sigma(j)\}$, $S'' = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) < \sigma(j)\}$. Să se arate că:
a) $S_n = S' \cup S''$ și $S' \cap S'' = \varnothing$.
b) Dacă $\sigma \in S'$, atunci $\sigma \circ \tau \in S''$.
c) Aplicația $f: S' \to S''$, $f(\sigma) = \sigma \circ \tau$, este bijectivă.

Capitolul 2 Matrice

§1. Tabel de tip matriceal. Matrice, mulțimi de matrice

Noțiunea de **matrice** permite prezentarea adecvată a unor informații numerice în vederea interpretării și prelucrării acestora. Pentru a susține această afirmație începem cu:

Exemplu Într-o întreprindere sunt utilizate trei resurse R_1, R_2, R_3 în realizarea a patru produse P_1, P_2, P_3, P_4. Să notăm cu a_{ij} costul consumului din resursa R_i, exprimat în unități monetare, pentru a produce P_j, în prima lună de activitate, $1 \le i \le 3$, $1 \le j \le 4$. O „imagine“ de ansamblu asupra costurilor consumurilor de resurse din prima lună de activitate poate fi obținută cu ajutorul unui tablou A cu trei linii (afectate resurselor R_1, R_2, R_3) și patru coloane (afectate produselor P_1, P_2, P_3, P_4) în care la intersecția liniei lui R_i cu coloana lui P_j este plasat numărul a_{ij},

	P_1	P_2	P_3	P_4
R_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
R_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
R_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

sau

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Dacă B este tabloul consumurilor din cea de a doua lună de activitate,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix},$$

atunci tabloul corespunzător consumurilor pe primele două luni de activitate, notat cu $A + B$, este:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & a_{14} + b_{14} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & a_{24} + b_{24} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & a_{34} + b_{34} \end{pmatrix}$$

Consumurile în cele două luni de activitate sunt aceleași, și scriem $A = B$, dacă și numai dacă $a_{ij} = b_{ij}$ oricare ar fi i și j, $1 \le i \le 3$, $1 \le j \le 4$. În aceste condiții, tabloul consumurilor de resurse pe primele două luni este $A + A$, notat încă $2A$,

$$2A = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} & 2a_{14} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} & 2a_{24} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} & 2a_{34} \end{pmatrix}$$

Să mai observăm că suma numerelor din linia R_i a tabloului A

$$a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}+a_{i4},\ 1\le i\le 3$$

reprezintă costul consumului din resursa R_i în prima lună de activitate, iar suma numerelor din coloana P_j

$$a_{1j}+a_{2j}+a_{3j},\ 1\le j\le 4$$

reprezintă costul resurselor utilizate în realizarea lui P_j în prima lună de activitate.

Definiție

Fie m și n două numere întregi pozitive și fie mulțimea $M=\{1, 2, ..., m\}\times\{1, 2, ..., m\}$.
O funcție $A : M\to\mathbb{C}$ se numește **matrice de tip $m\times n$**.
Notăm cu $a_{ij}=A(i, j)$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, matricea A care se dă sub forma unui tablou cu m linii și n coloane care au coeficienți numerici. Obținem forma:

$$(1)\ \ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in}\\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

Numerele a_{ij}, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, se numesc **coeficienții** (**intrările, elementele**) matricei A. La intersecția liniei i cu coloana j, numită **poziția** (i, j) a matricei A, se află coeficientul a_{ij}; i este **indicele de linie**, iar j este **indicele de coloană** al lui a_{ij}.

O matrice A de tip $m\times n$ este numită matrice cu m linii și n coloane; dacă $m=n$ atunci A se numește **matrice pătrată** de ordin n.

Vom nota cu $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ mulțimea tuturor matricelor de tip $m\times n$ cu coeficienți numerici. Mulțimea tuturor matricelor pătrate de ordin n cu coeficienți numerici se notează cu $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Evident, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})=\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Când ne restrângem doar la matricele cu coeficienți reali (raționali, întregi) vom folosi notațiile: $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Când nu este pericol de confuzie, pentru o matrice A de tip $m\times n$, de coeficienți a_{ij}, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, vom folosi notația condensată $A=(a_{ij})$ în loc de cea explicită de la (1).

Exemple **1.** Matricele

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0\\ 5 & 3 & -2 & 4\\ -3 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} -3 & 2\\ 1 & 4\\ 2 & 5\\ 0 & -1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix} -1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$$

sunt de tip respectiv 3×4, 4×2, 3×1, cu coeficienții întregi.

2. Matricele

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 5 & 0 & 2\\ -1 & -2 & 4\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}2-i & 3\\ 1+i & 2i\end{pmatrix}$$

sunt matrice pătrate respectiv de ordin 2, 3, 2 și aparțin respectiv mulțimilor $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Definiția egalității se dă numai pentru matrice de același tip, anume: dacă A și B sunt două matrice din $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, spunem că matricea A este **egală** cu matricea B, și scriem $A = B$, dacă și numai dacă $a_{ij}=b_{ij}$, oricare ar fi i și j, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$. Așadar, două matrice A și B sunt egale dacă și numai dacă sunt de același tip și în orice poziție (i, j), $1\le i\le m$, $1\le j\le n$ au aceleași intrări.

Exemplu Fie matricele $A, B\in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$,

$$A=\begin{pmatrix}2 & x^3-1 & 1\\ x^5 & 0 & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ -1 & x^4+x & 3\end{pmatrix}.$$

Vrem să determinăm $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $A=B$.

Conform definiției egalității matricelor trebuie să avem $x^3-1=-2$, $x^5=-1$ și $x^4+x=0$, ceea ce este posibil numai pentru $x=-1$.

§2. Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea, înmulțirea unei matrice cu un scalar — proprietăți

2.1. Adunarea matricelor

Operația de adunare se definește pentru matrice de același tip.

Definiție

Fie $A, B\in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$. **Suma** matricei A cu matricea B, notată cu $A+B$, este matricea $S\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $S=(s_{ij})$, astfel încât $a_{ij}+b_{ij}=s_{ij}$ oricare ar fi i și j, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$.

În scrierea explicită pentru matrice,

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

Așadar, fiind date două matrice A și B de tip $m\times n$, suma lor, notată cu $A+B$, este o matrice S tot de tip $m\times n$, ai cărei coeficienți se află adunând coeficienții cu aceeași poziție din A și B.

Exemplu Dacă $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{C})$,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

atunci $A+B=\begin{pmatrix} 2+1 & 3+2 & (-1)+(-3) & 5+3 \\ 0+3 & 2+1 & (-3)+2 & 4+5 \\ 2+(-4) & 5+1 & 1+3 & (-2)+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 8 \\ 3 & 3 & -1 & 9 \\ -2 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{C})$.

Matricea din $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ cu toți coeficienții egali cu numărul zero, notată cu $O_{m\times n}$ sau cu O când nu este pericol de confuzie, se numește **matricea zero** de tip $m\times n$,

$$O_{m\times n}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dacă $A\in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})$, se notează cu $-A$, numită **opusa** lui A, matricea $(-a_{ij})$,

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemplu Dacă $A\in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{C})$, $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, atunci $-A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ și avem

$$A+(-A)=\begin{pmatrix} 2+(-2) & (-3)+3 & 5+(-5) \\ (-1)+1 & 4+(-4) & (-3)+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operația de adunare a matricelor are *proprietăți* similare operației de adunare a numerelor. Dacă $A, B, C, O_{m\times n}\in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, atunci au loc relațiile:

(1) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (**asociativitatea**)

(2) $A+B=B+A$ (**comutativitatea**)

(3) $O_{m\times n}+A=A+O_{m\times n}=A$ (matricea zero este **element neutru**)

(4) $A+(-A)=(-A)+A=O_{m\times n}$ (orice matrice are **opusă**)

Vom demonstra proprietatea de comutativitate a operației de adunare a matricelor.

Fie $A, B\in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $S=A+B$ și $T=B+A$. Dacă $S=(s_{ij})$ și $T=(t_{ij})$, atunci folosind proprietatea de comutativitate a adunării numerelor, avem:

$$s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}=t_{ij},$$

oricare ar fi i și j, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$.

Rezultă că $S=T$, deci $A+B=B+A$.

Celelalte proprietăți ale operațiilor de adunare a matricelor se demonstrează analog.

Dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, atunci **diferența** dintre A și B, notată $A - B$, este prin definiție matricea $A + (-B)$,

$$A - B \overset{def}{=} A + (-B).$$

Astfel, dacă $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, atunci

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

2.2. Înmulțirea matricelor cu scalari

Definiție

Dacă α este un număr, iar $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$, atunci **produsul** numărului (**scalarului**) α cu matricea A, notat αA, este matricea care se obține din A înmulțind toți coeficienții acesteia cu α.

$$\alpha A \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Astfel, dacă $\alpha = 3$ și $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, atunci:

$$3A = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 3 & 3\cdot(-2) \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 2 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 2 & 3\cdot 0 & 3\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \\ 9 & 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Operația de înmulțire a matricelor cu scalari are următoarele *proprietăți*:

(5) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ (**distributivitatea** față de adunarea scalarilor)

(6) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ (**distributivitatea** față de adunarea matricelor)

(7) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (**asociativitatea**)

(8) $1\cdot A = A$ (**elementul neutru**)

Dacă $A = (a_{ij})$, atunci proprietățile (5) și (6) se justifică astfel:

$$(\alpha+\beta)A = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a_{11} & (\alpha+\beta)a_{12} & \dots & (\alpha+\beta)a_{1n} \\ (\alpha+\beta)a_{21} & (\alpha+\beta)a_{22} & \dots & (\alpha+\beta)a_{2n} \\ \vdots & & & \\ (\alpha+\beta)a_{m1} & (\alpha+\beta)a_{m2} & \dots & (\alpha+\beta)a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha a_{11}+\beta a_{11} & \alpha a_{12}+\beta a_{12} & \dots & \alpha a_{1n}+\beta a_{1n} \\ \alpha a_{21}+\beta a_{21} & \alpha a_{22}+\beta a_{22} & \dots & \alpha a_{2n}+\beta a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha a_{m1}+\beta a_{m1} & \alpha a_{m2}+\beta a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn}+\beta a_{mn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} & \dots & \beta a_{1n} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} & \dots & \beta a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \beta a_{m1} & \beta a_{m2} & \dots & \beta a_{mn} \end{pmatrix}=\alpha A+\beta A \text{ și}$$

$$\alpha(\beta A)=\alpha\cdot\begin{pmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} & \dots & \beta a_{1n} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} & \dots & \beta a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \beta a_{m1} & \beta a_{m2} & \dots & \beta a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha(\beta a_{11}) & \alpha(\beta a_{12}) & \dots & \alpha(\beta a_{1n}) \\ \alpha(\beta a_{21}) & \alpha(\beta a_{22}) & \dots & \alpha(\beta a_{2n}) \\ \vdots & & & \\ \alpha(\beta a_{m1}) & \alpha(\beta a_{m2}) & \dots & \alpha(\beta a_{mn}) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} (\alpha\beta)a_{11} & (\alpha\beta)a_{12} & \dots & (\alpha\beta)a_{1n} \\ (\alpha\beta)a_{21} & (\alpha\beta)a_{22} & \dots & (\alpha\beta)a_{2n} \\ \vdots & & & \\ (\alpha\beta)a_{m1} & (\alpha\beta)a_{m2} & \dots & (\alpha\beta)a_{mn} \end{pmatrix}=(\alpha\beta)A\,.$$

O matrice de tip $n\times 1$ se numește **vector coloană *n*-dimensional.** Restrângându-ne la mulțimea R a numerelor reale, vom nota cu $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ și cu x, y, z, ... elementele lui $\mathbb{R}^n$. Așadar, dacă $x\in\mathbb{R}^n$, atunci putem scrie:

$$x=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ cu } a_i\in\mathbb{R},\ 1\le i\le n,$$

indicele de coloană pentru coeficienți fiind omis; numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ se numesc **componentele** vectorului coloană *n*-dimensional *x*.

Dacă $\alpha\in\mathbb{R}$ și $x,\ y\in\mathbb{R}^n$,

$$x=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

atunci **suma** lui *x* cu *y*, notată $x + y$ și **produsul** lui α cu *x*, notat αx, au aceeași definiție ca și în cazul matricelor:

$$x+y=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix},\quad \alpha x=\begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}.$$

Evident, operațiile cu vectori coloană n-dimensionali, introduse mai sus, au aceleași proprietăți ca operațiile corespunzătoare cu matrice.

Elementele mulțimii $\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$, notată tot cu $\mathbb{R}^n$, se numesc **vectori linie *n*-dimensionali** și dacă $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$, $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $y = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, atunci

$$x + y = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),\ \alpha x = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$$

2.3. Înmulțirea matricelor

Definiția operației de înmulțire a matricelor nu se dă mimând pe cea a adunării: produsul a două matrice de tip $m\times n$ să fie matricea de tip $m\times n$ obținută înmulțind coeficienții factorilor cu aceeași poziție. Aceasta ar conduce la o operație algebrică lipsită de interes, practic fără aplicații semnificative.

Operația de înmulțire a matricelor, așa cum va fi definită mai jos, are un corespondent natural în Geometrie (operația de compunere a unor clase de transformări geometrice) și este un instrument major în studiul sistemelor de ecuații liniare.

Pentru ca produsul AB al matricei A cu matricea B (în această ordine!) să poată fi efectuat, este necesar ca numărul coloanelor lui A să fie egal cu numărul liniilor lui B. Mai precis, dacă A este de tip $m\times n$ și B este de tip $n\times p$ atunci **matricea produs** $P = AB$ va fi de tip $m\times p$. Pentru orice i și j, $1\le i\le m$, $1\le j\le p$, coeficientul p_{ij} al matricei P fiind

$$p_{ij} \overset{def}{=} a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

adică suma produselor dintre coeficienții liniei i a matricei A cu coeficienții coloanei j a matricei B (pe scurt **produsul liniei *i* a matricei *A* cu coloana *j* a matricei *B***).

$$i \rightarrow \underset{A}{\begin{pmatrix} \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & & \end{pmatrix}} \underset{B}{\overset{j}{\begin{pmatrix} \ldots & b_{1j} & \ldots \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{nj} & \end{pmatrix}}} = \underset{P}{\overset{j}{\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & p_{ij} & \ldots \\ & \vdots & \end{pmatrix}}} \leftarrow i$$

Exemple **1.** Fie $A \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R}), A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Matricea produs $P = AB$ are sens și $P \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{pmatrix}$.

Coeficientul p_{11} se află înmulțind linia întâi a lui A cu coloana întâi a lui B.

$$p_{11} = 2\cdot 3 + 3\cdot(-1) + 1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 = 3$$

Coeficientul p_{21} se află înmulțind linia a doua a lui A cu coloana întâi a lui B,

$$p_{21} = 3\cdot 3 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 + (-3)\cdot 1 = 3$$

și așa mai departe. În final, se obține:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Dacă $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

atunci $AB \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3. Matricele și operațiile cu matrice au fost introduse în secolul al XIX-lea pentru a obține o scriere condensată a sistemelor de ecuații liniare și pentru a valorifica operațiile cu matrice în rezolvarea acestora. Astfel sistemul de ecuații liniare:

$$(S)\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

poate fi scris mai simplu sub **forma matriceală** (S') $Ax = b$,

unde $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, iar $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ și $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ sunt vectori coloană 3-dimensional ale căror componente sunt necunoscutele x_1, x_2, x_3, respectiv termenii liberi 1, 3, 6 ai ecuațiilor sistemului.

O parte dintre proprietățile înmulțirii numerelor se regăsesc și la operația de înmulțire a matricelor. Astfel avem:

(9) $(AB)C = A(BC)$ (**asociativitatea**)

(10) $A(B+C) = AB + AC$; $(B+C)A = BA + CA$ (**distributivitatea**)

(11) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$

cu condiția ca tipurile matricelor A, B, C să fie de așa natură astfel încât operațiile din expresiile de mai sus să fie posibile. Astfel expresiile $A(B+C)$ și $AB + AC$ au sens dacă B și C sunt de același tip și numărul liniilor lor să coincidă cu numărul coloanelor lui A.

Verificarea proprietăților (9), (10) și (11) se face folosind definițiile date operațiilor cu matrice. Mai dificilă este verificarea proprietății de asociativitate a înmulțirii matricelor. Fără a afecta generalitatea, putem presupune că matricele A, B, C sunt din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ și $C = (c_{ij})$.

Notăm cu u_{ij} coeficienții matricei AB și cu v_{ij} pe cei ai matricei $(AB)C$. Așadar, $AB=(u_{ij})$ și $(AB)C=(v_{ij})$.

De asemenea, notăm cu u_{ij}' coeficienții matricei BC și cu v_{ij}' pe cei ai matricei $A(BC)$. Așadar, $BC=(u_{ij}')$ și $A(BC)=(v_{ij}')$.

Avem: $v_{ij}=\sum_{l=1}^{n}u_{il}c_{lj}=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}=\sum_{l,k=1}^{n}(a_{ik}b_{kl})c_{lj}$ și

$$v_{ij}'=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}u_{kj}'=\sum_{l=1}^{n}a_{ik}\left(\sum_{k=1}^{n}b_{kl}c_{lj}\right)=\sum_{l,k=1}^{n}a_{ik}\left(b_{kl}c_{lj}\right).$$

Cum $(a_{ik}b_{kl})c_{lj}=a_{ik}(b_{kl}c_{lj})$, rezultă că: $v_{ij}=v_{ij}'$, oricare ar fi i și j, de unde obținem că: $(AB)C)=A(BC)$.

Exemple **1.** Dacă $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\\0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&1\end{pmatrix}$, atunci expresiile $(AB)C$ și $A(BC)$ au sens și avem:

$$(AB)C=\left(\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\\0&1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\-2&-1\end{pmatrix};$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&3\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2\\-1&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\1&-3\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\-2&-1\end{pmatrix},$$

de unde rezultă că: $(AB)C=A(BC)$.

2. Dacă $A=\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-4&3&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$, atunci expresiile $A(B+C)$ și $AB+AC$ au sens și avem:

$$A(B+C)=\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\\0&3\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&3&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2&1\\1&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-6&5\\-2&2&1\\3&-6&9\end{pmatrix},$$

$$AB+AC=\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&3&0\\0&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&-1&1\\3&0&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-7&2\\-4&3&0\\0&-6&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-6&5\\-2&2&1\\3&-6&9\end{pmatrix}$$

de unde rezultă că: $A(B+C)=AB+AC$.

Comutativitatea înmulțirii numerelor și faptul că produsul a două numere diferite de zero este diferit de zero sunt proprietăți care nu se mai regăsesc și la operația de înmulțire a matricelor.

Astfel, dacă $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ avem

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ și } BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

deci $AB \neq BA$. De asemenea, $B \neq O_2$, $A = O_2$ și totuși $BA = O_2$.

Dacă A este o matrice pătrată de ordinul n, $A = (a_{ij})$, atunci coeficienții lui A cu indicele de linie egal cu indicele de coloană, $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, sunt dispuși, în această ordine, pe linia care unește colțul din stânga-sus al lui A cu cel din dreapta-jos și formează ceea ce se numește **diagonala principală** a lui A; coeficienții $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \dots, a_{n1}$, sunt plasați pe cealaltă diagonală a lui A, numită **diagonala secundară**.

Matricea pătrată de ordin n notată cu I_n, care are toți coeficienții diagonalei principale egali cu 1 și toți ceilalți coeficienți egali cu zero, are forma:

$$I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix},$$

și se numește **matricea unitate de ordin *n***.

Folosind definiția înmulțirii matricelor, se verifică imediat că:

(12) $\qquad I_m A = AI_n = A$, oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ și, în particular,

(13) $\qquad I_n A = AI_n = A$, oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Să observăm că dacă $\alpha \in \mathbb{C}$, iar $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $A + B$, AB și αA aparțin lui $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Aceeași observație este adevărată pentru $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ și $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

2.4. Partiționarea matricelor în blocuri

Dacă A este o matrice de tip $m \times n$, aceasta poate fi descompusă în submatrice disjuncte numite **blocuri**. Asemenea descompuneri ale matricelor pot simplifica calculul matriceal.

Cel mai des vom folosi în acest manual descompunerea unei matrice A în două blocuri formate cu primele r coloane ale matricei A, $1 \le r < n$, și ultimele $n - r$ coloane. O asemenea partiționare a lui A se precizează cu ajutorul unei bare verticale trasată între coloanele r și $r+1$:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc}a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & a_{mr+1} & \dots & a_{mn}\end{array}\right)=\left(B\,|\,C\right).$$

Astfel, dacă $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$, putem avea descompunerile lui A în blocuri:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|cc}-1&2&1&3&0\\2&1&-1&2&1\\0&-1&2&0&-3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|ccc}-1&2&1&3&0\\2&1&-1&2&1\\0&-1&2&0&-3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}-1&2&1&3&0\\2&1&-1&2&1\\0&-1&2&0&-3\end{array}\right)\text{ etc.}$$

Pot fi considerate și alte tipuri de partiționări pentru o matrice A, de exemplu de forma $A=\left(\begin{array}{c}B\\\hline C\end{array}\right)$, $A=\left(\begin{array}{c|c}B&C\\\hline D&E\end{array}\right)$ etc., ceea ce se poate scrie mai simplu $A=\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}B&C\\D&E\end{pmatrix}$ etc.

Astfel pentru matricea $A=\begin{pmatrix}-2&3&1&5\\2&4&0&-2\\1&2&3&1\\0&1&-1&2\end{pmatrix}$ putem considera descompunerile următoare în blocuri:

$$A=\left(\begin{array}{cccc}-2&3&1&5\\2&4&0&-2\\\hline 1&2&3&1\\0&1&-1&2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}-2&3&1&5\\2&4&0&-2\\\hline 1&2&3&1\\0&1&-1&2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&3&1&5\\2&4&0&-2\\1&2&3&1\\\hline 0&1&-1&2\end{array}\right)\text{ etc.}$$

Fie acum A o matrice de tip $m\times n$, B o matrice de tip $n\times p$, $r\in\mathbb{N}^*$, $1\le r<p$ și $B=(C\,|\,D)$ partiționarea lui B în blocurile C și D de tip $m\times r$, respectiv $m\times(n-r)$. Au sens produsele AB, AC și AD și, din regula de înmulțire a matricelor, rezultă că

$$A(C\,|\,D)=(AC\,|\,AD)$$

Într-adevăr, produsul AB se obține înmulțind liniile lui A succesiv cu coloanele lui B, înmulțirea cu primele r coloane revine la a efectua AC, iar cu ultimele $n-r$ coloane la a efectua AD.

Astfel, dacă $A=\begin{pmatrix}-2&3\\1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ și $B=\left(\begin{array}{cc|cc}-1&2&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)=(C\,|\,D)$, atunci

$$AB=A(C\,|\,D)=(AC\,|\,AD)=\left(\left.\begin{pmatrix}-2&3\\1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix}-2&3\\1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{cc|cc}5&-4&-2&3\\-2&2&1&-1\\3&-2&-1&2\end{array}\right)=\begin{pmatrix}5&-4&-2&3\\-2&2&1&-1\\3&-2&-1&2\end{pmatrix}$$

Exerciții rezolvate

1. Să se determine matricele X și Y știind că verifică condițiile: $(S)\ \begin{cases}3X-2Y=A\\2X+Y=B\end{cases}$,

unde $A=\begin{pmatrix}8&4&1\\-1&5&-1\\4&-2&-1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}3&5&-4\\4&1&4\\5&1&-3\end{pmatrix}$.

Rezolvare:
Din a doua ecuație, obținem $Y = B - 2X$ și, înlocuind în prima ecuație, avem: $7X = A + 2B$.

Așadar: $X = \frac{1}{7}(A + 2B) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 & 14 & -7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 14 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ și

$$Y = B - 2X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$, unde $\varepsilon \in \mathbb{C}$ astfel încât $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$. Calculați A^2, A^4 și A^{532}.

Rezolvare:
Deoarece $x^3 - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2)$ și $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$, rezultă că $\varepsilon^3 = 1$.

Avem: $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = A^2 \cdot A^2 = 9I_3$ și cum $532 = 4 \cdot 133$, obținem:

$A^{532} = (A^4)^{133} = (9I_3)^{133} = 9^{133} \cdot I_3$.

3. **a)** Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$. Altfel spus, matricea A este rădăcină a *ecuației caracteristice* a lui A: $x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$.

b) Calculați A^n și B^n, $n \in \mathbb{N}^*$, dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:
a) Avem $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 =$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Ecuațiile caracteristice ale lui A și B sunt $x^2 + 2 = 0$, respectiv $x^2 - 5x = 0$. Rezultă că:

$$A^n = \begin{cases} (-2)^{\frac{n}{2}} I_2, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ (-2)^{\frac{n-1}{2}} A, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases} \quad \text{și} \quad B^n = 5^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5^{n-1} & 5^{n-1} \\ 6 \cdot 5^{n-1} & 2 \cdot 5^{n-1} \end{pmatrix}.$$

4. O matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este *nilpotentă* dacă există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^m = O_2$.

Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sunt echivalente afirmațiile:

(1) A este nilpotentă; (2) $a + d = 0$ și $ad - bc = 0$; (3) $A^2 = O_2$.

Rezolvare:

(1) $\Rightarrow$ (2) Putem presupune că $A \neq O_2$ și fie $m \in \mathbb{N}^*$ minim astfel încât $A^m = O_2$. Cum $A \neq O_2$, avem $m > 1$. Înmulțind egalitatea $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$ cu A^{m-1} se obține $(ad - bc)A^{m-1} = O_2$. Cum $A^{m-1} \neq O_2$, rezultă că $ad - bc = 0$.

Dacă $m = 2$, atunci avem $(a + d)A = O_2$, deci $a + d = 0$ pentru că $A \neq O_2$.

Dacă $m > 2$, înmulțind egalitatea $A^2 = (a + d)A$ cu A^{m-2} obținem $(a + d)A^{m-1} = O_2$. Cum $A^{m-1} \neq O_2$, rezultă că $a + d = 0$.

Implicațiile (2) $\Rightarrow$ (3) și (3) $\Rightarrow$ (1) sunt evidente.

5. a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\tau = a + d$, $\delta = ad - bc$. Dacă $\delta = \left(\frac{\tau}{2}\right)^2$, atunci matricea $B = A - \frac{\tau}{2} I_2$ este nilpotentă.

b) Dacă $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare:

a) Cum $A^2 - \tau A + \delta I_2 = O_2$ și $\delta = \left(\frac{\tau}{2}\right)^2$, rezultă că $\left(A - \frac{\tau}{2} I_2\right)^2 = O_2$.

b) Avem $\tau = 4$ și $\delta = 4 = \left(\frac{\tau}{2}\right)^2$. Obținem $(A - 2I_2)^2 = O_2$. Cum $A = 2I_2 + (A - 2I_2)$ și $2I_2$ comută cu $A - 2I_2$, putem aplica formula binomului lui Newton:

$$A^n = (2I_2 + (A - 2I_2))^n = 2^n \cdot I_2 + C_n^1 \cdot 2^{n-1}(A - 2I_2) = \begin{pmatrix} 2^n + n \cdot 2^{n-1} & -n \cdot 2^{n-1} \\ n \cdot 2^{n-1} & 2^n - n \cdot 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

6. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\tau = a + d$, $\delta = ad - bc$.

a) Arătați că există două șiruri de numere reale $(x_n)_{n \geqslant 1}$, $(y_n)_{n \geqslant 1}$ astfel încât $A^n = x_n A + y_n I_2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dacă $\delta = 0$, atunci $A^n = \tau^{n-1} A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Dacă $\tau^2 - 4\delta \neq 0$ și $\delta \neq 0$, iar u, v sunt rădăcinile ecuației caracteristice $x^2 - \tau x + \delta = 0$, atunci există $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ astfel încât $x_n = \alpha u^n + \beta v^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

d) Calculați A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, când $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

a) Avem $A = 1 \cdot A + 0 \cdot I_2$ și $A^2 = \tau A - \delta I_2$, deci afirmația este adevărată pentru $n = 1$ și $n = 2$, cu $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ și $x_2 = \tau$, $y_2 = -\delta$. Dacă afirmația este adevărată pentru n, atunci: $A^{n+1} = A^n \cdot A = (x_n A + y_n I_2)A = x_n A^2 + y_n A = x_n(\tau A - \delta I_2) + y_n A = (\tau x_n + y_n)A - \delta x_n I_2 = x_{n+1} A + y_{n+1} I_2$, cu $x_{n+1} = \tau x_n + y_n$ și $y_{n+1} = -\delta x_n$, $\forall\, n > 1$.

b) Avem $A^2 = 2A$, $A^3 = A^2 \cdot A = \tau A^2 = \tau^2 A$ etc.

c) Pentru $n = 1$ și $n = 2$, trebuie să avem $\begin{cases} \alpha u + \beta v = 1 \\ \alpha u^2 + \beta v^2 = \tau \end{cases}$.

Cum $\tau^2 - 4\delta \neq 0$ și $\delta \neq 0$, avem $u \neq v$, $u \neq 0$, $v \neq 0$ și găsim:

$$\alpha = \frac{v - \tau}{u(u - v)}, \quad \beta = \frac{\tau - u}{v(u - v)}.$$

Dacă $x_{n-1} = \alpha u^{n-1} + \beta v^{n-1}$ și $x_n = \alpha u^n + \beta v^n$, atunci
$x_{n+1} = \tau x_n - \delta x_{n-1} = \tau(\alpha u^n + \beta v^n) - \delta(\alpha u^{n-1} + \beta v^{n-1}) =$
$= \alpha u^{n-1}(\tau u - \delta) + \beta v^{n-1}(\tau u - \delta) = \alpha u^{n+1} + \beta v^{n+1}$.

d) Avem $\tau = 5$, $\delta = 6$, $u = 2$, $v = 3$. Obținem: $\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 1 \\ 4\alpha + 9\beta = 5 \end{cases}$, de unde rezultă că $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $x_n = 3^n - 2^n$, $y_n = -\delta x_{n-1} \simeq 6(3^{n-1} - 2^{n-1})$. Rezultă că:

$$A^n = x_n A + y_n I_2 = \left(3^n - 2^n\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 6\left(3^{n-1} - 2^{n-1}\right) I_2 = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2\cdot 3^n - 2^{n+1} \\ 2^n - 3^n & 2\cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}.$$

Exerciții propuse

1. Calculați $A + B$, $A - B$, $2A - 3B$, dacă $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Determinați matricea X din egalitatea $2X + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 1 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$.

3. Determinați matricele $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care satisfac egalitățile: $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X + 3Y = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \end{cases}$.

4. Calculați matricea sumă în cazurile:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3^2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ -2 & 1 & n \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^2 \\ 2 & \varepsilon^4 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^n \\ 2 & \varepsilon^{2n} \end{pmatrix}$, unde ε este o rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$.

5. Calculați AB și BA în cazurile:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Verificați egalitatea $(AB)C = A(BC)$ când: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

7. Verificați egalitățile $A(B+C)=AB+AC$ și $(B+C)D=BD+CD$, când:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 0 & -4 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

8. Verificați egalitățile $(3A)B = A(3B) = 3(AB)$, când $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

9. a) Pentru matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, arătați că $A^n=2^{n-1}A$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Calculați $A+A^2+\ldots+A^n$.

10. Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, fie matricele A_x, B_x, $A_x=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B_x=\begin{pmatrix}e^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Arătați că $A_xA_y=A_{x+y}$, $B_xB_y=B_{x+y}$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$. Deduceți că înmulțirea matricelor din fiecare clasă de mai sus este comutativă.

11. Fie A și B două matrice pătrate de același ordin, astfel încât $AB=BA$. Arătați că:

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$; $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$;

$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$; $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

Se poate renunța la condiția $AB=BA$?

12. Fie $A, B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât $AB=BA$. Arătați că

$$(A+B)^n=A^n+C_n^1A^{n-1}B+C_n^2A^{n-2}B^2+\ldots+C_n^kA^{n-k}B^k+\ldots+B^n.$$

13. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Arătați că $B^3=O$ și calculați A^n, $n\in\mathbb{N}^*$, folosind egalitatea $A=I_3+B$. Generalizare.

14. Fie matricele A, B și C, unde $A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a+b\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Să se calculeze A^n, B^n și C^n, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

15. Fie matricele $A, B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB=BA$. Dacă există $p, q\in\mathbb{N}^*$ pentru care are loc $A^p=O_2=B^q$, atunci arătați că $AB=O_2$.

16. Fie matricea $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$. Calculați A^{12}.

17. Determinați $a, b, c, d\in\mathbb{C}$ astfel încât

$$a\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

18. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AX = XA$, $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Arătați că $A = \lambda I_2$ cu $\lambda \in \mathbb{C}$.

19. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, astfel încât $ad - bc = 0$. Calculați A^n și $(I_2 + A)^n$.

20*. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculați A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

21*. Fie matricele A și B, $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$, unde $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

Calculați A^n, B^n, $I_2 + A + \ldots + A^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

22*. a) Dacă $A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}A$, $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, atunci $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, cu proprietatea:

$$aX^2 + bX + cI_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

23*. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A^2 + A + I_2 = O_2$, dacă și numai dacă $a + d = -1$ și $ad - bc = 1$.

b) Arătați că ecuația $X^2 + X + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ are o infinitate de soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Determinați soluțiile de forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ale ecuației de la punctul b).

24*. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta}$ oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $(A_\alpha)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Determinați soluțiile de forma $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ale ecuațiilor: $X^3 - I_2 = O_2$ și $X^{10} - I_2 = O_2$.

25*. Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^2$ mulțimea vectorilor coloană 2-dimensionali,

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ și aplicația $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

a) Pentru $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avem $f_A = f_B \Leftrightarrow A = B$.

b) $f_A \circ f_B = f_{AB}$ oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Deduceți proprietatea de asociativitate a înmulțirii matricelor din cea a compunerii aplicațiilor de mulțimi. Generalizare.

Capitolul 3 Determinanți

§1. Determinanți de ordin 2, proprietăți

Prin *ecuație liniară* cu coeficienți numerici, cu necunoscutele $x_1, x_2, ..., x_n$, se înțelege o egalitate de forma:

$$(1) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

unde $a_1, a_2, ..., a_n, b \in \mathbb{C}$.

Numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ se numesc *coeficienții necunoscutelor*, iar b este *termenul liber* al ecuației. Când cel puțin unul dintre numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ este diferit de zero, se mai spune că (1) este o *ecuație de gradul întâi* cu necunoscutele $x_1, x_2, ..., x_n$.

Din clasele anterioare, se știe că o ecuație de gradul întâi cu coeficienți reali cu două necunoscute x_1 și x_2 are statut de ecuație a unei dreapte d dintr-un plan raportat la un reper cartezian $x_1O\,x_2$.

Vrem să abordăm acum problema soluțiilor comune pentru două ecuații liniare în două necunoscute, cu coeficienți numerici. Considerăm un ansamblu (S) de două ecuații liniare cu două necunoscute x_1 și x_2.

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

unde $a_i, b_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{1, 2}$, numit **sistem** de două ecuații liniare în două necunoscute.

Când ecuațiile sistemului (S) au coeficienții reali și sunt de gradul întâi, acestea reprezintă ecuațiile a două drepte d_1 și d_2 dintr-un plan $\mathcal{P}$ raportat la un reper cartezian x_1Ox_2. Eventualele soluți ale sistemului (S) sunt exact coordonatele (x_1, x_2) ale punctelor comune dreptelor d_1 și d_2.

Sunt posibile trei cazuri, așa cum se poate vedea în figurile de mai jos:

a) dreptele d_1 și d_2 sunt concurente (fig. 1);

b) dreptele d_1 și d_2 sunt strict paralele: $d_1 \parallel d_2$ și $d_1 \neq d_2$ (fig. 2);

c) dreptele d_1 și d_2 coincid (fig. 3).

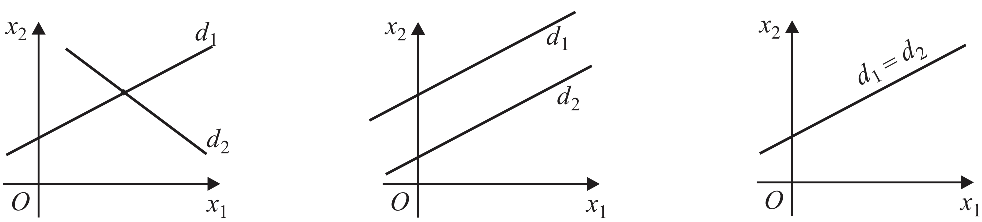


Fig. 1 **Fig. 2** **Fig. 3**

Pentru soluțiile sistemului (S), se disting trei cazuri:

a′) sistemul (S) are soluție unică, dată de coordonatele punctului comul lui d_1 și d_2;

b′) sistemul (S) nu are nici o soluție;

c′) sistemul (S) are mai multe soluții (în cazul din figura 3, o infinitate de soluții).

Corespunzător acestor cazuri, vom spune că sistemul (S) este, respectiv:

— *compatibil determinat* în cazul a′;

— *incompatibil* în cazul b′;

— *compatibil nedeterminat* în cazul c′.

Noțiunea de *determinat*, introdusă de Leibniz, permite să decidem în care dintre cele trei cazuri se încadrează un sistem (S) de ecuații liniare și, atunci când este compatibil determinat, să calculăm unica sa soluție, prin *regula lui Cramer*.

Pentru rezolvarea sistemului (S), folosim metoda *eliminării necunoscutelor*. Pentru a elimina necunoscuta x_2, adunăm prima ecuație înmulțită cu a_{22} la a doua ecuație înmulțită cu $-a_{12}$ și obținem:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Analog, din (S) se obține o ecuație în care necunoscuta x_1 este eliminată:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Folosind notațiile:

$$(2) \qquad d = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},\ d_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},\ \mathrm{d}_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

după prelucrarea precedentă, sistemul (S) devine: $(S')\ \begin{cases} dx_1 = d_1 \\ dx_2 = d_2 \end{cases}$,

și, evident, orice soluție a sistemului (S) este soluție și pentru sistemul (S').

Matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ formată cu coeficienții necunoscutelor se numește *matricea sistemului* (S).

Definiție

Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ o matrice pătrată de ordin 2 cu coeficienți numerici.

Numărul $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ se numește **determinantul matricei A** și se notează cu:

$\det A$, $|A|$ sau $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Determinantul unei matrice pătrate este egal cu diferența dintre produsul coeficienților de pe diagonala principală și produsul coeficienților de pe diagonala secundară:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Să observăm că dacă $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ este matricea sistemului (*S*), iar A_1 și A_2 sunt matricele pătrate carte se obțin din *A* înlocuind coeficienții coloanei întâi, respectiv a doua cu termenii liberi b_1 și b_2: $A_1=\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$,

atunci numerele d, d_1 și d_2 de la sistemul (*S′*) sunt: $d=|A|$, $d_1=|A_1|$, $d_2=|A_2|$.

Dacă $|A|\neq 0$, spunem că (*S*) este *sistem de tip Cramer*.

Folosind noțiunea de determinant de ordin 2, avem un răspuns satisfăcător privind soluțiile unui sistem (*S*) de două ecuații liniare cu două necunoscute.

Teoremă

Fie un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute cu coeficienți numerici

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}, \text{ și } d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ d_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ d_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix}.$$

1. Dacă $d\neq 0$, atunci sistemul (*S*) are soluție unică, și anume:

$$x_1=\frac{d_1}{d},\ x_2=\frac{d_2}{d} \text{ (obținute prin regula lui Cramer).}$$

2. Dacă $d=0$, iar $d_1\neq 0$ sau $d_2\neq 0$, atunci sistemul (*S*) este incompatibil.
3. Dacă cel puțin o ecuație a sistemului (*S*) este de gradul întâi și $d=d_1=d_2=0$, atunci sistemul (*S*) este compatibil nedeterminat.

Demonstrație. 1. Dacă $d\neq 0$, atunci sistemul (*S′*) are soluția unică: $x_1=\frac{d_1}{d}$, $x_2=\frac{d_2}{d}$.

Cum orice soluție a lui (*S*) este soluție pentru (*S′*), rezultă că (*S*) are cel mult o soluție. Deoarece $a_{11}\frac{d_1}{d}+a_{12}\frac{d_2}{d}=\frac{1}{d}\left(a_{11}\left(b_1a_{22}-b_2a_{12}\right)+a_{12}\left(a_{11}b_2-a_{21}b_1\right)\right)=\frac{b_1d}{d}=b_1$,

și, analog, $a_{21}\frac{d_1}{d}+a_{22}\frac{d_2}{d}=b_2$, rezultă că (*S*) are soluția unică: $x_1=\frac{d_1}{d}$, $x_2=\frac{d_2}{d}$.

2. În acest caz, sistemul (*S′*) nu are soluții și deci nici sistemul (*S*). ■

Exerciții rezolvate

1. Să se rezolve sistemul: $(S)\begin{cases} mx+y=1 \\ 2x+(m+1)y=n-2 \end{cases}$, $m, n\in\mathbb{R}$.

Rezolvare:

Matricea sistemului este $A=\begin{pmatrix} m & 1 \\ 2 & m+1 \end{pmatrix}$, iar determinantul este $|A|=m^2+m-2$.

Dacă $m \neq 1$ și $m \neq -2$, atunci $|A| \neq 0$ și, în acest caz, sistemul (S) are soluția unică:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ n-2 & m+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & m+1 \end{vmatrix}}=\frac{m-n+3}{m^2+m-2}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & n-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & m+1 \end{vmatrix}}=\frac{mn-2m-2}{m^2+m-2}.$$

Dacă $m=1$ și $n=4$, atunci sistemul (S) este compatibil nedeterminat, soluțiile sale fiind:

$$x=1-\lambda,\ y=\lambda, \text{ cu } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dacă $m=-2$ și $n=1$, atunci sistemul este compatibil nedeterminat, soluțiile sale fiind:

$$x=\frac{\lambda-1}{2},\ y=\lambda, \text{ cu } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Fie matricea $B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$, unde $a \neq 0$ sau $b \neq 0$. Arătați că sunt echivalente afirmațiile:

I. $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}=0$. **II.** Există $q \in \mathbb{C}$ astfel încât $a'=aq$, $b'=bq$, $c'=cq$.

Dacă, în plus, $a' \neq 0$ sau $b' \neq 0$, atunci $q \neq 0$.

Rezolvare:

I. ⇒ II. Presupunem că $a \neq 0$. Din $ab'-a'b=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=0$, rezultă $b'=bq$, unde $q=\frac{a'}{a}$.

Analog, din $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & c' \end{vmatrix}=0$, rezultă că $c'=cq$. Avem și: $a'=a\frac{a'}{a}=aq$.

II. ⇒ I. Avem $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ aq & bq \end{vmatrix}=a(bq)-(aq)b=0$.

Analog se arată egalitatea cu zero pentru ceilalți determinanți.

Exerciții propuse

1. Calculați determinanții:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sin\alpha & -\sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon^2 \\ -1 & 1+\varepsilon \end{vmatrix},$$

unde $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \neq 1$, $\varepsilon^3=1$.

2. Arătați că: a) pentru $a, b \in \mathbb{R}$, are loc echivalența $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$;

b) pentru $a, b \in \mathbb{Q}$, are loc echivalența $\begin{vmatrix} a & b \\ 2b & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

3. Arătați că următoarele sisteme de ecuații liniare sunt sisteme Cramer și determinați soluțiile lor folosind regula lui Cramer.

$(S_1)\begin{cases} 5x - y = 7 \\ -3x - y = -3 \end{cases}$; $(S_2)\begin{cases} 4x - y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$; $(S_3)\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = \cos 2\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin 2\alpha \end{cases}$;

$(S_4)\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Calculați: $|A|$, $|B|$, $|AB|$, $|A| \cdot |B|$.

Deduceți că $|AB| = |A| \cdot |B|$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

4. Într-un plan $\mathcal{P}$ raportat la un reper cartezian xOy, se consideră dreptele d și d' de ecuații: (d): $2x - 3y + m = 0$ și (d'): $(2 - n)x + (n - 1)y + 3 = 0$, unde $m, n \in \mathbb{R}$.
Stabiliți poziția relativă a celor două drepte (când sunt concurente, paralele, confundate). Discuție.

5. a) Verificați proprietățile pentru următorii determinanții de ordin 2:

$\begin{vmatrix} a'+a'' & b \\ c'+c'' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'' & b \\ c'' & d \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} a & b'+b'' \\ c & d'+d'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b'' \\ c & d'' \end{vmatrix}$;

$\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

b) Formulați și verificați proprietăți similare pentru liniile determinanților de ordin 2.

§2. Determinanți de ordin 3, proprietăți

2.1. Definiția determinanților de ordin 3. Regula lui Sarrus

Ca și determinanții de ordin 2, determinanții de ordin 3 apar în mod natural în rezolvarea sistemelor de ecuație liniare. Într-adevăr, fie (S) un sistem de trei ecuații liniare, cu trei necunoscute x_1, x_2, x_3, având coeficienți numerici:

$$(S)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, numită *matricea sistemului* (*S*).

Notăm cu A_{ij} matricea pătrată de ordin 2 care se obține din A eliminând linia i și coloana j. Obținem:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ A_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},\ A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

Pentru orice i, j, $1 \le i$ și $j \le 3$, numărul $d_{ij} \overset{def}{=} (-1)^{i+j} \left| A_{ij} \right|$ se numește *cofactorul* sau *complementul algebric* al coeficientului a_{ij}.

Exemplu Dacă $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $d_{13} = (-1)^{1+3} |A_{13}| = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$ și

$$d_{21} = (-1)^{2+1} |A_{21}| = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-5) = 5.$$

Pentru a elimina în sistemul (*S*) necunoscutele x_2 și x_3, înmulțim ecuațiile acestuia cu numerele α, β și, respectiv, γ după care le adunăm termen cu termen. Se obține

(1) $(a_{11}\alpha + a_{21}\beta + a_{31}\gamma)x_1 + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{32}\gamma)x_2 + (a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma)x_3 = b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma$.

Pentru ca în ecuația (1) necunoscutele x_2 și x_3 să fie eliminate, este necesar să se anuleze coeficienții acestora. Așadar (α, β, γ) trebuie să fie soluție a sistemului de ecuații:

$$(2)\ \begin{cases} a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z = 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

care, ca sistem în necunoscutele x și y, se scrie:

$$(2')\ \begin{cases} a_{12}x + a_{22}y = -a_{32}z \\ a_{13}x + a_{23}y = -a_{33}z \end{cases}.$$

Folosind metoda reducerii, obținem:

$$(3)\ \begin{cases} d_{31}x = d_{11}z \\ d_{31}y = d_{21}z \end{cases}.$$

Observăm că $x = d_{11}$, $y = d_{21}$, $z = d_{31}$ este o soluție pentru sistemul (3), care verifică și sistemul (2), deci:

$$(O_1)\ \begin{cases} a_{12}d_{11} + a_{22}d_{21} + a_{32}d_{31} = 0 \\ a_{13}d_{11} + a_{23}d_{21} + a_{33}d_{31} = 0 \end{cases}.$$

De asemenea, luând $\alpha = d_{11}$, $\beta = d_{21}$, $\gamma = d_{31}$, ecuația (1) devine:

$$(E_1)\ (a_{11}d_{11} + a_{21}d_{21} + a_{31}d_{31})x_1 = b_1d_{11} + b_2d_{21} + b_3d_{31}.$$

Analog, eliminând în sistemul (S) necunoscutele x_1, x_3, respectiv necunoscutele x_1, x_2, obținem:

$$(O_2)\ \begin{cases} a_{11}d_{12} + a_{21}d_{22} + a_{31}d_{32} = 0 \\ a_{13}d_{12} + a_{23}d_{22} + a_{33}d_{32} = 0 \end{cases}$$

și

$$(E_2)\ (a_{12}d_{12} + a_{22}d_{22} + a_{32}d_{32})x_2 = b_1d_{12} + b_2d_{22} + b_3d_{32},$$

respectiv

$$(O_3)\ \begin{cases} a_{11}d_{13} + a_{21}d_{23} + a_{31}d_{33} = 0 \\ a_{12}d_{13} + a_{22}d_{23} + a_{32}d_{33} = 0 \end{cases}$$

și

$$(E_3)\ (a_{13}d_{13} + a_{23}d_{23} + a_{33}d_{33})x_3 = b_1d_{13} + b_2d_{23} + b_3d_{33}.$$

Identitățile (O_1), (O_2) și (O_3) exprimă următoarea proprietate remarcabilă.

Teorema 2

Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, atunci suma produselor dintre elementele unei coloane și cofactorii altei coloane este egală cu zero.

Altfel spus:

Oricare ar fi $j \neq k$, $1 \leq j, k \leq 3$, avem $a_{1j}d_{1k} + a_{2j}d_{2k} + a_{3j}d_{3k} = 0$.

Definiție

Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, atunci numărul $\det A$ definit prin:

$$(*)\ \det A \overset{def}{=} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

se numește **determinantul** lui A și se mai notează cu: $|A|$ sau $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Teorema 3

Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, atunci suma produselor dintre elementele unei coloane și cofactorii acestora este egală cu $\det A$.

Altfel spus:

Oricare ar fi j, $1 \leq j \leq 3$, avem $\det A = a_{1j}d_{1j} + a_{2j}d_{2j} + a_{3j}d_{3j}$, numită **dezvoltarea determinantului** după elementele coloanei j.

Demonstrație. Dacă $j = 1$, atunci:

$$a_{11}d_{11} + a_{21}d_{21} + a_{31}d_{31} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) = \det A.$$

Analog se face verificare pentru $j = 2$ și pentru $j = 3$. ■

Exemplu Pentru matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, vrem să calculăm $|A|$.

Folosind dezvoltarea determinantului după coloana întâi, avem:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$= -8 - 3\cdot 0 + (-1)\cdot 2 = -10.$

Calculând $|A|$ folosind dezvoltarea după *coloana a doua*, avem:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=$$

$= -1\cdot 2 + (-1)\cdot 0 - 2\cdot 4 = -10.$

Calculând $|A|$ folosind dezvoltarea după *coloana a treia*, avem:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-2\cdot 5=-10\,.$$

Se observă că dezvoltarea determinantului după elementele *coloanei a treia* este mai avantajoasă pentru că acesta conține multe zerouri.

Complicata formulă (*) din definiția determinantului unei matrice $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ poate fi ușor memorată folosind *regula lui Sarrus*. În acest scop, din elementele matricei A formăm un tablou cu trei linii și cinci coloane, adăugând după ultima coloană a lui A coloana întâi și apoi pe a doua.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & + & + & + \end{array}$$

Se observă că termenii cu semnul + din formula (*) se obțin înmulțind coeficienții lui A care se găsesc pe direcțiile săgeților marcate cu +, iar termenii cu semnul − din formula (*) se obțin înmulțind coeficienții lui A situați pe direcțiile săgeților marcate cu −.

Exemplu Tabloul corespunzător matricei $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ este:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ - & - & - & + & + & + \end{array}$$

Obținem: $|A|=2\cdot(-1)\cdot 0+1\cdot 2\cdot(-1)+0\cdot 3\cdot 2-0\cdot(-1)\cdot(-1)-2\cdot 2\cdot 2-1\cdot 3\cdot 0=$
$= 0 - 2 + 0 - 0 - 8 - 0 = -10.$

Oricare ar fi matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, notăm cu A^T matricea care se obține din A permutând coeficienții care sunt în poziție simetrică față de diagonala principală. Matricea A^T se numește **transpusa** matricei A și are forma:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ deoarece matricea } A \text{ are forma: } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Exemplu Pentru $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, matricea transpusă este: $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Teorema 4

Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, atunci $|A^T| = |A|$.

Demonstrație. Tabelul asociat matricei A^T pentru aplicarea regulii lui Sarrus este:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{13} & a_{23} \\ - & - & - & + & + & + \end{array}$$

Se constată că $|A^T| = |A|$. ■

Observații:

1. Teorema anterioară se numește **teorema de dualitate**.

2. Rezultatul din teorema de dualitate este adevărat și pentru matrice pătrate de ordin arbitrar (se verifică imediat pentru matricele pătrate de ordin 2).

Deoarece prin transpunere determinantul se conservă, iar liniile (coloanele) lui A corespund cu coloanele (respectiv cu liniile) lui A^T, rezultatele de la teoremele 2 și 3 sunt adevărate și în formularea pentru linii, și anume:

Teorema 2′

Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, atunci suma produselor dintre elementele unei linii și cofactorii altei linii este egal cu zero.

Altfel spus:

Oricare ar fi $i \neq k$, $1 \leq i, k \leq 3$, avem: $a_{i1}d_{k1} + a_{i2}d_{k2} + a_{i3}d_{k3} = 0$.

Teorema 3′

Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, atunci suma produselor dintre elementele unei linii și cofactorii acestora este egală cu $\det A$.

Altfel spus:

Oricare ar fi i, $1 \leq i \leq 3$, avem $\det A = a_{i1}d_{i1} + a_{i2}d_{i2} + a_{i3}d_{i3}$, numită **dezvoltarea determinantului** după elementele liniei i.

Exemplu Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculând $|A|$ după elementele *liniei a treia*, avem:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+(-5)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=$$

$= 4\cdot 9 - 12 + (-5)\cdot(-2) = 34.$

Calculând $|A|$ după elementele *coloanei a doua*, avem:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=$$

$= -2\cdot(-22) + 2 - 12 = 34.$

2.2. Sistem Cramer de trei ecuații cu trei necunoscute

Considerăm din nou sistemul (S) de trei ecuații cu trei necunoscute,

$$(S)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Fie $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *matricea sistemului S* și matricele:

$$A_1=\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix},$$

obținute înlocuind coeficienții coloanei întâi, a doua, respectiv a treia a matricei A cu *termenii liberi* b_1, b_2 și b_3 ai sistemului (S).

Dezvoltând după coloana întâi, avem:

$$|A_1|=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=b_1d_{11}+b_2d_{21}+b_3d_{31}.$$

Analog rezultă și:

$|A_2| = b_1d_{12} + b_2d_{22} + b_3d_{32}$, $|A_3| = b_1d_{13} + b_2d_{23} + b_3d_{33}$.

Ecuațiile (E_1), (E_2) și (E_3) de la determinantul de ordin 2 pot fi scrise respectiv:

$$|A|x_1 = |A_1|,\ |A|x_2 = |A_2|,\ |A|x_3 = |A_3|\ ,$$

de unde rezultă că orice soluție a sistemului (S) este soluție și a sistemului (S'):

$$(S')\ \begin{cases} |A|x_1 = |A_1| \\ |A|x_2 = |A_2| \\ |A|x_3 = |A_3| \end{cases}.$$

Dacă $|A| \neq 0$, spunem că (S) este *sistem Cramer*.

Teorema 4

Dacă sistemul de ecuații liniare: (S) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{12}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

este sistem Cramer, atunci acesta admite soluția unică:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$ — ***regula lui Cramer***,

unde A este matricea sistemului iar A_1, A_2 șiA_3 se obțin înlocuind cu b_1, b_2 și b_3 coeficienții coloanei întâi, a doua, respectiv a treia a lui A.

Demonstrație. Evident orice soluție a sistemului (S) este soluție și pentru sistemul (S'). Cum $|A| \neq 0$, sistemul (S') are soluția unică: $x_j = \dfrac{|A_j|}{|A|}$, $1 \leq j \leq 3$.

Este suficient să arătăm că aceasta este soluție și pentru sistemul (S). Folosind teoremele 2, 2′, 3 și 3′, avem:

$$a_{11}\frac{|A_1|}{|A|} + a_{12}\frac{|A_2|}{|A|} + a_{13}\frac{|A_3|}{|A|} = \frac{1}{|A|}a_{11}\left(b_1d_{11} + b_2d_{21} + b_3d_{31}\right) + \frac{1}{|A|}a_{12}\left(b_1d_{12} + b_2d_{22} + b_3d_{32}\right) +$$

$$+\frac{1}{|A|}a_{13}\left(b_1d_{13} + b_2d_{23} + b_3d_{33}\right) = \frac{1}{|A|}b_1\left(a_{11}d_{11} + a_{12}d_{12} + a_{13}d_{13}\right) +$$

$$+\frac{1}{|A|}b_2\left(a_{11}d_{21} + a_{12}d_{22} + a_{13}d_{23}\right) + \frac{1}{|A|}b_3\left(a_{11}d_{31} + a_{12}d_{32} + a_{13}d_{33}\right) =$$

$$= \frac{1}{|A|}\left(b_1|A| + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0\right) = b_1.$$

Deci $x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|}$, $x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|}$, $x_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|}$ verifică prima ecuație a sistemului (S) și analog se arată că le verifică și pe celelalte. ■

Exemplu Arătăm că sistemul: $(S)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$, este sistem Cramer și determinăm soluția sa, care este unică.

Matricea sistemului (S) este $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Dezvoltând determinantul lui A după elementele primei coloane, obținem:

$$|A| = 2\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 20 - 3 - 14 = 3 \neq 0$$

și deci (S) este sistem Cramer. Avem:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Efectuând calculele, găsim $|A_1| = -9$, $|A_2| = -3$, $|A_3| = -6$. Unica soluție a sistemului (S) este:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-9}{3} = -3,\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-3}{3} = -1,\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-6}{3} = -2.$$

2.3. Proprietăți ale determinanților de ordin 3

În această secțiune, vom prezenta proprietățile fundamentale ale determinanților. Acestea se verifică imediat pentru determinanții de ordin 2. Le vom demonstra pentru determinanții de ordin 3. Proprietățile determinanților sunt adevărate pentru determinanții de ordin arbitrar.

Proprietatea 1

Determinantul unei matrice de ordinul 3 depinde liniar de fiecare dintre liniile sale:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} & a'_{13} + a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Proprietăți similare au loc pentru a doua și a treia linie.

Demonstrație. Folosind dezvoltarea determinanților după linia întâi, avem:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} & a'_{13}+a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left(a'_{11}+a''_{11}\right)\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \left(a'_{12}+a''_{12}\right)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+\left(a'_{13}+a'_{13}\right)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a'_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a'_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a'_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a''_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

$$-a''_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a''_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \lambda a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Proprietatea 2

Dacă permutăm două linii de ale unei matrice pătrate determinantul acesteia își schimbă semnul.

Demonstrație. Presupunem că permutăm primele două linii ale matricei $A = (a_{ij})$, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Dezvoltând determinantul următor după linia a doua, obținem:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{11}|A_{11}| + a_{12}|A_{12}| - a_{13}|A_{13}| = -\left(a_{11}d_{11} + a_{12}d_{12} + a_{13}d_{13}\right) = -A.$$

Analog se procedează când se permută linia întâi cu a treia sau linia a doua cu a treia. ■

Proprietatea 3

Determinantul matricei unitate de ordinul 3 este egal cu 1: $|I_3| = 1$.

Demonstrație. Dezvoltând determinatul $|I_3|$ după coloana întâi avem:

$$|I_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 = 1. \quad \blacksquare$$

Următoarele proprietăți sunt consecințe ale celor precedente.

Proprietatea 4

Dacă o matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ are două linii egale, atunci $|A| = 0$.

Demonstrație. Permutând liniile egale matricea A nu se schimbă dat determinatul își schimbă semnul. Așadar $|A| = -|A|$, de unde rezultă $2|A| = 0$, deci $|A| = 0$. ■

Proprietatea 5

Dacă la coeficienții unei linii a matricei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ adunăm coeficienții altei linii înmulțiți cu un număr λ, valoarea determinantului matricei A nu se schimbă.

Demonstrație. Verificăm această proprietate în cazul când la linia a treia se adună linia a doua înmulțită cu λ. Aplicând proprietățile 1 și 4, avem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{21} & a_{32}+\lambda a_{22} & a_{33}+\lambda a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= |A| + \lambda \cdot 0 = |A|. \quad \blacksquare$$

Observație:

Deoarece prin trecerea de la matricea pătrată A la transpusa A^T, coloanele lui A devin liniile lui A^T și cum $|A| = |A^T|$, rezultă că proprietățile 1, 2, 4 și 5 sunt adevărate și în formularea corespunzătoare pentru coloane. Așadar, determinantul unei matrice depinde liniar de coloanele sale. O matrice cu două coloane egale are determinantul egal cu 0. Dacă permutăm două coloane, determinantul își schimbă semnul, iar dacă adunăm la o coloană o altă coloană înmulțită cu un număr λ, valoarea determinantului nu se schimbă.

Exemple

1. Calculăm $|A|$, unde $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ 6 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.

Pentru a reduce volumul calculelor, aplicăm proprietăți ale determinanților. În cazul nostru, adunând prima linie înmulțită cu 2 la a doua linie și prima linie înmulțită cu -3 la a treia, valoarea determinantului nu se schimbă, iar pe prima coloană apar două zerouri, așa că vom dezvolta determinantul după elementele acesteia:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 32.$$

2. Fie a, b și c trei numere distincte și $V(a, b, c) \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$,

numit *determinantul Vandermonde* asociat numerelor a, b și c. Avem $V(a, b, c) \neq 0$. Într-adevăr, scădem coloana întâi din a doua și din a treia coloană (ceea ce revine la a adăuga prima coloană înmulțită cu $\lambda = -1$ la coloana a doua și a treia). Valoarea determinantului nu se schimbă și obținem:

$$V(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}.$$

Ultimele două coloane ale determinantului de mai sus admit ca factor comun pe $b-a$, respectiv $c-a$. Aplicând proprietățile determinanților, avem:

$$V(a,b,c)=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 1\\ a^2 & b+a & c+a\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & 1\\ b+a & c+a\end{vmatrix}=$$
$$=(b-a)(c-a)(c-b)\neq 0.$$

§3. Determinanți de ordin *n*, proprietăți

3.1. Definiția determinanților de ordin *n*

Dacă $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o matrice pătrată de ordin n și $\sigma\in S_n$, atunci numărul $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$ este numit *produs elementar* al matricei A.

Matricei A i se asociază astfel $n!$ produse elementare. În fiecare produs elementar al matricei A avem câte un factor și numai unul din fiecare linie și din fiecare coloană a lui A. Primul factor este din linia 1 și coloana $\sigma(1)$, al doilea din linia 2 și coloana $\sigma(2)$ etc.

Definiție

Fie matricea $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Numărul $\det A$, definit prin:

(*) $\det A \overset{def}{=} \sum\limits_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$, se numește **determinantul** matricei A și se mai notează cu $|A|$ sau $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{vmatrix}$.

Determinanții matricelor din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt numiți **determinanți de ordin *n***.

Cum numărul permutărilor pare este egal cu numărul permutărilor impare, rezultă că în suma din formula (*) avem $\dfrac{n!}{2}$ termeni precedați de semnul + și tot atâția termeni precedați de semnul −.

Exemple **1.** Știm că $S_2=\{e,\tau\}$, unde $e=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ și $\tau=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Pentru $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, avem: $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\sum\limits_{\sigma\in S_2}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

2. Permutările pare din S_3 sunt: $e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $\theta=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$,

iar cele impare sunt: $\tau_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $\tau_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $\tau_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Dacă $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ și $\sigma\in S_3$ parcurge în ordine valorile e, π, θ, τ_1, τ_2, τ_3, obținem: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{22}a_{33}.$$

Observație:

Pentru $n = 2$ sau $n = 3$, definiția determinantului de ordin n, prezentată în acest paragraf coincide cu cele prezentate anterior pentru determinanții de ordin 2 și 3.

Proprietatea 1

Determinantul unei matrice pătrate de ordin n depinde liniar de fiecare dintre liniile sale:

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{'}+a_{11}^{''} & a_{12}^{'}+a_{12}^{''} & \dots & a_{1n}^{'}+a_{1n}^{''} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}^{'} & a_{12}^{'} & \dots & a_{1n}^{'} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}^{''} & a_{12}^{''} & \dots & a_{1n}^{''} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Proprietățile similare au loc și pentru liniile 2, 3,..., n.

Demonstrație. Relațiile rezultă din faptul că:

$$\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\left(a_{1\sigma(1)}^{'} + a_{1\sigma(1)}^{''}\right) a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)}^{'} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)}^{''} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

și $\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\left(\lambda a_{1\sigma(1)}\right) a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = \lambda \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$. ■

Proprietatea 2

Dacă permutăm două linii ale unei matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, determinantul acesteia își schimbă semnul.

Demonstrație. Considerăm cazul când permutăm primele două linii, cazul general admițând o demonstrație asemănătoare.

Fie $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matricea care se obține din A permutând primele două linii. Avem: $b_{1j} = a_{2j}$, $b_{2j} = a_{1j}$, pentru $j = 1, 2, \dots, n$. Fie transpoziția $\tau = (1, 2) \in S_n$ și pentru orice $\sigma \in S_n$, fie $\pi = \sigma \circ \tau$. Obținem: $b_{1\pi(1)} = b_{1\sigma(2)} = a_{2\sigma(2)}$, $b_{2\pi(2)} = b_{2\sigma(1)} = a_{1\sigma(1)}$ și $b_{i\pi(i)} = b_{i\sigma(i)} = a_{i\sigma(i)}$, pentru orice $i = 3, 4, \dots, n$.

Cum orice permutare $\pi \in S_n$ se reprezintă în mod unic sub forma $\pi = \sigma \circ \tau$ și cum $\varepsilon(\pi) = -\varepsilon(\sigma)$, avem:

$$\det B = \sum_{\pi\in S_n} \varepsilon(\pi) b_{1\pi(1)} b_{2\pi(2)} \dots b_{n\pi(n)} = \sum_{\sigma\in S_n} -\varepsilon(\sigma) a_{2\sigma(2)} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = -\det A. \quad ■$$

Proprietatea 3

Determinantul matricei unitate de ordinul n este egal cu 1: $|I_n| = 1$.

Demonstrație. Avem $I_n = (\delta_{ij})$, unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}.$$

Dacă $\sigma \neq e$, atunci există i astfel încât $\sigma(i) \neq i$ și deci $\delta_{1\sigma(1)}\delta_{2\sigma(2)}...\delta_{n\sigma(n)} = 0$. Rezultă că:

$$|I_n| = \varepsilon(e)\delta_{1e(1)}\delta_{2e(2)}...\delta_{ne(n)} = 1.$$

Următoarele proprietăți sunt consecințe ale proprietăților precedente.

Proprietatea 4

Dacă matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are două linii egale, atunci $|A| = 0$.

Demonstrație. Permutând liniile egale se obține tot matricea A, iar determinantul își schimbă semnul. Obținem: $|A| = -|A| \Rightarrow 2 \cdot |A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$. ■

Proprietatea 5

Dacă la coeficienții unei linii a unei matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ adăugăm coeficienții altei linii înmulțiți cu un număr λ, determinantul matricei nu se schimbă.

Demonstrație. Pentru a nu complica notațiile, presupunem că la linia a doua se adaugă prima linie înmulțită cu λ. Folosind proprietățile 1 și 4, avem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} & \dots & a_{1n}+\lambda a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= |A| + \lambda \cdot 0 = |A|. \quad ■$$

Observație:

Deoarece prin transpunere coloanele (liniile) unei matrice A corespund cu liniile (respectiv coloanele) matricei transpuse A^T, din următoarea ***teoremă de dualitate*** rezultă că proprietățile 1, 2, 4 și 5 formulate în termeni de linii, sunt adevărate și în formularea corespunzătoare pentru coloanele lui A.

Teorema 1

Pentru orice matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avem $|A^T| = |A|$.

Demonstrație. Fie $B = (b_{ij}) = A^T$. Avem $b_{ij} = a_{ji}$, oricare ar fi i și j, deci:

$$|A^T| = |B| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} ... b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n)n}.$$

Deoarece $\sigma(i) = j \Leftrightarrow i = \sigma^{-1}(j)$ și cum numerele $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ coincid, mai puțin ordinea, cu $1, 2, \dots, n$, folosind comutativitatea înmulțirii avem:

$$a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n)n} = a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} ... a_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

Dar $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$ și aplicația $f: S_n \to S_n$, $f(\sigma) = \sigma^{-1}$, este bijectivă. Rezultă că:

$$\left|A^T\right| = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \varepsilon\left(\sigma^{-1}\right) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \ldots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \left|A\right|. \quad \blacksquare$$

Observație:

Din demonstrația teoremei precedente, rezultă că $\left|A\right|$ poate fi definit și prin:

$$\left|A\right| = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n},$$

în produsul $a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}$ primul factor fiind din coloana întâi, al doilea factor din coloana a doua ș.a.m.d.

3.2. Dezvoltarea unui determinant de ordin *n* după elementele unei linii (coloane)

Fie matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pentru i și j fixați, notăm cu A_{ij} matricea pătrată de ordin $n - 1$ care se obține din A eliminând linia i și coloana j.

Numărul d_{ij}, definit prin expresia:

$$d_{ij} \overset{def}{=} (-1)^{i+j} \left| A_{ij} \right|,$$

se numește **cofactorul** sau **complementul algebric** al lui a_{ij}.

Fie B_{ij} matricea pătrată de ordin n care se obține din A înlocuind cu 1 pe a_{ij} și cu 0 toate celelalte elemente ale liniei i. Astfel:

$$B_{nn} = \begin{pmatrix} & & & a_{1n} \\ & A_{nn} & & \vdots \\ & & & a_{n-1n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Notăm cu b_{ij} elementele matricei B_{nn}. Avem $b_{nj} = 0$, oricare ar fi $j \neq n$ și deci:

$$\left|B_{nn}\right| = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \ldots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \ldots b_{n-1\sigma(n-1)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \ldots b_{n-1\sigma(n-1)} = \left|A_{nn}\right| = d_{nn}.$$

În matricea B_{ij}, permutăm succesiv linia i cu liniile $i + 1, i + 2, \ldots, n - 1$, respectiv cu n și apoi coloana j cu coloanele $j + 1, j + 2, \ldots, n - 1$, respectiv cu n.

După cele $n - i + n - j = 2n - (i + j)$ permutări de linii și coloane efectuate anterior, matricea B_{ij} devine:

$$B_{ij} \to \begin{pmatrix} & & & * \\ & A_{ij} & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

unde cu * am marcat coeficienți ai matricei A ajunși în pozițiile menționate.

Deoarece valoarea determinantului își schimbă semnul după fiecare permutare de linii sau coloane, rezultă că:

$$\left|B_{ij}\right| = (-1)^{2n-(i+j)}\left|A_{ij}\right| = (-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right| = d_{ij}.$$

Cum determinatul lui A depinde liniar de linia i și cum

$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) = a_{i1}(1, 0, \dots, 0) + a_{i2}(0, 1, \dots, 0) + \dots + a_{in}(0, 0, \dots, 1)$, avem:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left|B_{ij}\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_{ij}.$$

Teorema 2

Fie matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Au loc următoarele dezvoltări:

1. *Dezvoltarea determinantului după elementele liniei i*:

Pentru orice i, $1 \le i \le n$, avem: $|A| = a_{i1}d_{i1} + a_{i2}d_{i2} + \dots + a_{in}d_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_{ij}$.

Altfel spus: Suma produselor dintre coeficienții liniei i a matricei A și cofactorii acestora este egală cu $|A|$.

2. *Dezvoltarea determinantului după elementele coloanei j*:

Pentru orice j, $1 \le j \le n$, avem: $|A| = a_{1j}d_{1j} + a_{2j}d_{2j} + \dots + a_{nj}d_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}d_{ij}$.

Altfel spus: Suma produselor dintre coeficienții coloanei j a matricei A și cofactorii acestora este egală cu $|A|$.

Demonstrație. Prima afirmație a fost deja demonstrată, iar a doua rezultă din prima folosind teorema de dualitate. ■

Fie $\overline{A}$ matricea care se obține din $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ înlocuind linia k cu linia $i \neq k$. Notăm cu $\overline{a}_{ij}$ coeficienții matricei $\overline{A}$. Cum $\overline{A}$ are două linii egale, avem $\left|\overline{A}\right| = 0$. Observăm că $\overline{a}_{kj} = a_{ij}$ și $\overline{A}_{kj} = A_{kj}$, $j = 1, 2, \dots, n$, de unde rezultă:

$$0 = \left|\overline{A}\right| = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj}(-1)^{k+j}\left|\overline{A}_{kj}\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_{jk}.$$

Teorema 3

Fie matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Au loc următoarele:

1. Pentru orice $i \neq k$, are loc relația: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_{kj} = 0$.

Altfel spus: Suma produselor dintre coeficienții liniei i și cofactorii coeficienților liniei $k \neq i$ este egală cu 0.

2. Pentru orice $j \neq k$, are loc relația: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}d_{ik} = 0$.

Altfel spus: Suma produselor dintre coeficienții coloanei j și cofactorii coeficienților coloanei $k \neq j$ este egală cu 0.

Demonstrație. Prima afirmație a fost deja demonstrată, iar a doua afirmație rezultă din prima aplicând teorema de dualitate. ■

Fie matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Matricea A^* egală cu transpusa matricei care se obține din A înlocuind fiecare coeficient a_{ij} cu cofactorul său $d_{ij} = (-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$, și are forma:

$$A^* = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & & & \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & \dots & d_{n1} \\ d_{12} & d_{22} & \dots & d_{n2} \\ \vdots & & & \\ d_{1n} & d_{2n} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

se numește **adjuncta matricei** A.

Teorema 4

Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și $d = \det A$, atunci: $AA^* = A^*A = dI_n = \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix}$.

Demonstrație. Arătăm că $AA^* = dI_n$. Elementele liniei i a matricei A sunt $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ și cum $A^* = (d_{ij})^T$, rezultă că elementele coloanei k a matricei A^* sunt $d_{k1}, d_{k2}, \dots, d_{kn}$.

Folosind teoremele 2 și 3, avem: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_{kj} = \begin{cases} d, \text{ dacă } i = k \\ 0, \text{ dacă } i \neq k \end{cases}$,

de unde rezultă că: $AA^* = dI_n$. Analog se arată că $A^*A = dI_n$. ■

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze $|A|$ și $|B|$, unde: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 3 & -6 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

Dezvlotând $|A|$ după elementele coloanei a treia, avem:

$$|A| = 2 \cdot d_{13} + 0 \cdot d_{23} + 3 \cdot d_{33} + 0 \cdot d_{43} = 2 \cdot (-1)^{1+3}|A_{13}| + 3 \cdot (-1)^{3+3}|A_{33}| =$$

$$+2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18, \text{ unde } |A_{13}| = 3 \text{ și } |A_{33}| = 4.$$

Adunând ultimele trei coloane la prima, dând pe 9 factor comun, scăzând apoi prima linie din ultimele trei și dezvoltând determinantul după coloana întâi, obținem:

$$|B| = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 3 & 2 \\ 9 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9.$$

2. Fie determinantul E_n, de ordin n, $E_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Arătați că $E_n = 3E_{n-1} - 2E_{n-2}$ oricare ar fi $n > 2$, și calculați E_n.

Rezolvare:

Dezvoltând determinantul E_n după elementele coloanei întâi, se obține: $E_n = 3E_{n-1} - 2E_{n-2}$. Vrem să determinăm $\alpha, \beta, u, v \in \mathbb{R}$ astfel încât $E_n = \alpha u^n + \beta v^n, \forall\ n \geq 1$. Este necesar ca $\alpha u^n + \beta v^n = 3(\alpha u^{n-1} + \beta v^{n-1}) - 2(\alpha u^{n-2} + \beta v^{n-2})$, oricare ar fi $n \geq 3$, ceea ce se mai poate scrie: $\alpha u^{n-2}(u^2 - 3u + 2) + \beta v^{n-2}(v^2 - 3v + 2) = 0$.

Ultima egalitate este posibilă dacă u și v sunt rădăcinile ecuației $x^2 - 3x + 2 = 0$, adică dacă $u = 2$ și $v = 1$. Așadar, $E_n = \alpha\cdot 2^n + \beta$, oricare ar fi $n > 2$. Pentru $n = 1$ și $n = 2$, trebuie ca $2\alpha + \beta = E_1 = 3$ și $4\alpha + \beta = E_2 = 7$. Se obține $\alpha = 2$ și $\beta = -1$.

Rezultă că $E_n = 2^{n+1} - 1, \forall\ n \geq 1$.

3. Pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, găsiți adjuncta A^* și verificați egalitățile:

$A^*A = AA^* = dI_3$, unde $d = |A|$.

Rezolvare:

Avem: $d_{11} = (-1)^{1+1}|A_{11}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$, $d_{12} = (-1)^{1+2}|A_{12}| = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 5$ și

$d_{13} = (-1)^{1+3}|A_{13}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Analog obținem că: $d_{21} = -1$, $d_{22} = -3$, $d_{23} = -1$, $d_{31} = 1$, $d_{32} = 1$, $d_{33} = -1$.

Rezultă că matricea adjunctă este: $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Dezvoltând $|A|$ după elementele coloanei întâi, obținem:

$$|A| = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 3\cdot 1 - 1 = 2.$$

Folosind regula de înmulțire a matricelor, se verifică faptul că:

$AA^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$. Analog obținem și că $A^*A = 2I_3$.

§4. Aplicații ale determinanților în geometrie: ecuația unei drepte determinate de două puncte distincte, aria unui triunghi și coliniaritatea a trei puncte în plan

1. Considerăm un plan $\mathcal{P}$ raportat la un reper cartezian xOy. Dacă P este un punct din planul P, notăm cu x_P și y_P abscisa, respectiv ordonata punctului P în raport cu reperul cartezian xOy. După cum este știut, dacă A și B sunt două puncte din planul $\mathcal{P}$, atunci lungimea segmentului AB, notată tot cu AB, se calculează cu formula:

$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}\ .$$

Știm de la geometrie că ecuația carteziană a dreptei determinată de punctele A și B (fig. 4) este:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}\text{, pentru } A \neq B.$$

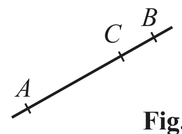


Fig. 4

Orice punct C aflat pe dreapta AB verifică relația:

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A) = 0.$$

2. Fie triunghiul ABC în planul $\mathcal{P}$ raportat la reperul cartezian xOy. Notăm cu P intersecția paralelei prin B la OA cu paralela prin O la AB și cu Q intersecția paralelei prin C la OA cu paralela prin O la AC. Triunghiurile ABC și OPQ (fig. 5) sunt congruente, deci au ariile egale:

$$\text{aria}(\triangle ABC) = \text{aria}(\triangle OPQ) = \frac{1}{2} OP \cdot OQ \cdot \sin\theta\text{, cu } \theta = \widehat{POQ}\ .$$

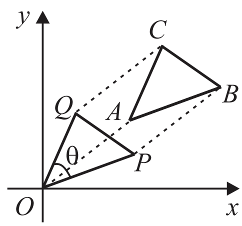


Fig. 5

Aplicând teorema cosinusului în triunghiul OPQ, obținem:

$$\cos\theta = \frac{OP^2 + OQ^2 - PQ^2}{2 \cdot OP \cdot OQ} = \frac{x_P^2 + y_P^2 + x_Q^2 + y_Q^2 - \left(x_Q - x_P\right)^2 - \left(y_Q - y_P\right)^2}{2 \cdot OP \cdot OQ} =$$

$$= \frac{x_P \cdot x_Q + y_P \cdot y_Q}{OP \cdot OQ}\ .$$

Rezultă că: $\sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} = \pm\dfrac{\sqrt{\left(x_P^2 + y_P^2\right)\left(x_Q^2 + y_Q^2\right) - \left(x_P x_Q + y_P y_Q\right)^2}}{OP \cdot OQ} =$

$$= \pm\frac{\sqrt{\left(x_P y_Q - x_Q y_P\right)^2}}{OP \cdot OQ} = \pm\frac{\left|x_P y_Q - x_Q y_P\right|}{OP \cdot OQ}\ .$$

Cum $x_P = x_B - x_A$, $y_P = y_B - y_A$, $x_Q = x_C - x_A$ și $y_Q = y_C - x_A$, avem:

$$\text{aria}(\triangle ABC) = \text{aria}(\triangle OPQ) = \pm\frac{1}{2} \cdot \left|\det\begin{pmatrix} x_P & y_P \\ x_Q & y_Q \end{pmatrix}\right| = \pm\frac{1}{2} \cdot \left|\det\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - x_A \end{pmatrix}\right|.$$

În determinantul următor, scăzând linia întâi din linia a doua și a treia și dezvoltând apoi determinantul obținut după coloana a treia, avem:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_C - x_A & y_C - y_A & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} =$$

$$= (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A).$$

Teoremă

Dacă ABC este un triunghi dintr-un plan $\mathcal{P}$ raportat la un reper cartezian xOy, atunci aria triunghiului ABC este:

$$\text{aria}(\triangle ABC) = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Corolarul 1

Dacă A și B sunt două puncte distincte dintr-un plan $\mathcal{P}$ raportat la un reper cartezian xOy, atunci ecuația carteziană a dreptei care trece prin A și B este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Demonstrație. Punctul $M(x, y)$ din planul $\mathcal{P}$ se află pe dreapta AB dacă și numai dacă aria triunghiului MAB este egală cu zero.

Observație:

În determinantul de la corolarul 1, scăzând linia 2 din linia 1 și 3 și dezvoltând apoi după elementele coloanei 3, rezultă că ecuația dreptei care trece prin punctele A și B este:

$$(x_B - x_A)(y - y_A) - (x - x_A)(y_B - y_A) = 0.$$

Corolarul 2

Trei puncte A, B și C dintr-un plan $\mathcal{P}$ raportat la un reper cartezian xOy sunt coliniare dacă și numai dacă:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercițiu rezolvat

Într-un plan $\mathcal{P}$ raportat la un reper cartezian xOy se dau punctele $A(2, 1)$, $B(7, 5)$ și $C(4, \lambda)$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Se scrie ecuația carteziană a dreptei AB.

b) Să se determine λ astfel încât punctele A, B și C să fie coliniare

c) Să se determine λ astfel încât aria$(\triangle ABC) = 7$.

Rezolvare:

a) Ecuația dreptei AB scrisă sub formă de determinant este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Calculând determinantul, obținem: $-4x + 5y + 3 = 0$.

b) Punem condiția ca ecuația dreptei AB să fie verificată de coordonatele punctului $C(4, \lambda)$. Obținem: $-16 + 5\lambda + 3 = 0$, de unde rezultă: $\lambda = 13/5$.

c) Avem aria($\triangle ABC$) = 7 dacă și numai dacă $\begin{vmatrix} 4 & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \pm 14$.

Obținem $-16 + 5\lambda + 3 = \pm 14$, de unde rezultă că: $\lambda_1 = 27/5$ și $\lambda_2 = -1/5$.

Exerciții propuse

1. Calculați următorii determinanți folosind pentru fiecare regula lui Sarrus, precum și dezvoltarea după elementele unei linii sau coloane:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix}$.

2. Calculați următorii determinanți folosind în prealabil operații care să producă mai multe zerouri pe una dintre linii sau coloane:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -6 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 5 & -7 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$.

3. Fie matricele superior triunghiulare: $T = \begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ și $T' = \begin{pmatrix} a' & d' & e' \\ 0 & b' & f' \\ 0 & 0 & c' \end{pmatrix}$

Arătați că $|TT'| = |T| \cdot |T'|$.

4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ -1 & 2 & m \end{vmatrix} \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5. Calculați determinanții: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$, unde $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

6. Verificați identitățile, pentru $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

a) $\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 \\ 1 & a+b & ab \\ 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = \dfrac{a^4 - b^4}{a-b}$, $a \neq b$; b) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$;

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a)$;

d) $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$; e) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = 0$.

7. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 1 & x \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} 1 & x & bc \\ 1 & b & xc \\ 1 & c & xb \end{vmatrix} = 0$, unde $b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq c$.

8. Fie A o matrice pătrată de ordin 3 cu coeficienții egali cu 1 sau 0. Precizați valorile posibile pentru $|A|$.

9. Dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și nu sunt toți nuli, atunci $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2c & 2a & b \\ 2b & 2c & a \end{vmatrix} \neq 0$.

Deduceți că din relația $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$, cu $a, b, c \in \mathbb{Q}$, rezultă $a = b = c = 0$.

10. În planul $\mathcal{P}$ raportat la reperul cartezian xOy, sunt date punctele $A(2, 5)$, $B(-2, -1)$ și $C(1, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Să se scrie ecuația carteziană a dreptei AB.

b) Să se determine λ astfel încât punctele A, B și C să fie coliniare.

c) Să se determine λ astfel încât aria($\triangle ABC$) = 5.

11. Calculați următorii determinanți, utilizând eventual operații care produc mai multe zerouri pe una dintre linii sau coloane.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & -9 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$.

12. Arătați că oricare ar fi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avem:

a) $\begin{vmatrix} 0 & a^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & b^2 & 1 \\ c^2 & b^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

13. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & x & x \\ x & x+a_2 & x & x \\ x & x & x+a_3 & x \\ x & x & x & x+a_4 \end{vmatrix}$, unde $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$.

Calculați $f(0)$, $f'(0)$ și $f''(0)$ și deduceți că $f(x) = f'(0) \cdot x + f(0)$.

14. Fie funcțiile derivabile $f_{ij}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 \le i, j \le n$, și funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin:

$f(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & & & \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$. Arătați că f este derivabilă și că are loc relația:

$$f'(x) = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & \cdots & f'_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & & & \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) & \cdots & f'_{2n}(x) \\ \vdots & & & \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \ldots .$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & & & \\ f'_{n1}(x) & f'_{n1}(x) & \cdots & f'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

15. Fie determinantul F_n de ordin n, $F_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$,

$a \ne b$. Arătați că $F_n = (a+b)F_{n-1} - abF_{n-2}$ oricare ar fi $n > 2$, și calculați F_n.

16. Fie matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, unde $a_{ij} = -1$ dacă $i \le j$ și $a_{ij} = 1$ dacă $i > j$.

Calculați $|A|$ și $|-A|$.

17. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel încât $a_{ij} = \max\{i, j\}$ pentru orice i, j, $1 \le i, j \le n$.

a) Să se calculeze $|A|$.

b) Să se calculeze $|B|$, unde $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b_{ij} = \min\{i, j\}$ pentru orice i, j, $1 \le i, j \le n$.

18. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, unde $a_{ij} = |i - j|$. Să se calculeze $|A|$.

Capitolul 4 Sisteme de ecuații liniare

§1. Matrice inversabile din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, n ≤ 4

1.1. Inversa unei matrice

În această secțiune, considerăm $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 4$. Am notat cu $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mulțimea tuturor matricelor pătrate de ordin n cu coeficienți numerici. Dacă A și B sunt două matrice pătrate de ordin n, atunci produsul AB are sens și este tot o matrice pătrată de ordin n.

Dacă $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci au loc următoarele *proprietăți*:

a) $(AB)C = A(BC)$ (**asociativitatea**);

b) $I_n A = AI_n = A$ (I_n **este element neutru**), unde I_n este matricea unitate de ordin n.

Se știe că orice număr $\alpha \neq 0$ are **invers**: există un număr α , notat de regulă cu α^{-1}, astfel încât $\alpha\alpha' = \alpha'\alpha = 1$. Astfel, dacă $\alpha = 3$, atunci $\alpha^{-1} = \frac{1}{3}$; dacă $\alpha = \sqrt{3}$, atunci $\alpha^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; dacă $\alpha = 1 + i$, atunci $\alpha^{-1} = \frac{1}{2}(1-i)$ ș.a.m.d.

Vom translata această problemă de la numere la matrice pătrate, înlocuind înmulțirea numerelor cu înmulțirea matricelor, iar numărul 1 cu matricea unitate I_n.

Definiție

Spunem că o matrice pătrată $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este **inversabilă** dacă există o matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AA' = A'A = I_n$.

Observăm că fiind dată o matrice pătrată $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ există cel mult o matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AA' = A'A = I_n$. Într-adevăr, dacă pentru $A'' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avem, de asemenea, $AA'' = A''A = I_n$, atunci $A'' = A'$, pentru că $A'' = A''I_n = A''(AA') = (A''A)A' = I_nA' = A'$.

Matricea A', în caz că există, se numește **inversa** matricei A și se notează A^{-1}.

Dacă A este inversabilă, atunci din $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ rezultă că A^{-1} este inversabilă și $(A^{-1})^{-1} = A$.

Am văzut că orice număr $\alpha \neq 0$ este inversabil. Nu orice matrice pătrată A diferită de matricea O_n este inversabilă. Astfel, matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ nu este inversabilă pentru că pentru orice matrice $A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, avem: $AA' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x+z & 2y+w \end{pmatrix} \neq I_2$.

Se poate arăta că o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este inversabilă dacă și numai dacă $|A| \neq 0$. Pentru matricele pătrate de ordin 2, avem o demonstrație elementară pentru această afirmație. Demonstrăm mai întâi următoarea lemă.

Lemă

Oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, avem $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Demonstrație. Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Avem:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

și deci $|AB| = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) =$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) = |A| \cdot |B|.$$

Rezultatul din lemă este adevărat și pentru matrice pătrate de ordin n.

Teorema 1

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Matricea A este inversabilă dacă și numai dacă $|A| \neq 0$ și, în acest caz

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{|A|} & -\dfrac{b}{|A|} \\ -\dfrac{c}{|A|} & \dfrac{a}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Demonstrație. Presupunem că $|A| \neq 0$ și arătăm că există o matrice $A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ astfel încât $AA' = I_2$. Avem: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = AA' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}$

și prin identificarea coeficienților obținem sistemele:

$$(S_1)\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases}; \qquad (S_2)\begin{cases} ay + bw = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}.$$

Se observă că matricele sistemelor (S_1) și (S_2) coincid cu A și cum $|A| \neq 0$, acestea admit soluții unice. Aplicând regula lui Cramer obținem:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{d}{|A|}; \; z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{c}{|A|}; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{b}{|A|}; \; w = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a}{|A|}$$

și deci $A' = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{|A|} & -\dfrac{b}{|A|} \\ -\dfrac{c}{|A|} & \dfrac{a}{|A|} \end{pmatrix}$. Prin modul cum a fost determinat A', avem $AA' = I_2$. Se verifică și egalitatea $A'A = I_2$, deci A^{-1} există și are forma din enunțul teoremei.

Reciproc, presupunem că A este inversabilă. Avem: $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$, de unde rezultă:

$$1 = |I_2| = |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$$

și, cum $1 \neq 0$, avem $|A| \neq 0$. ■

Exemplu Matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ sunt inversabile și inversele lor sunt $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$, respectiv $B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Într-adevăr, $|A| = -2 \neq 0$, $|B| = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$ și deci

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Abordăm acum problema inversabilității matricelor pătrate de ordin arbitrar, $n \leq 4$. Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, am notat cu A_{ij} matricea pătrată de ordin $n - 1$ care se obține din A eliminând linia i și coloana j, iar cu $d_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ **cofactorul** lui a_{ij}, $1 \leq i, j \leq 4$. Matricea

$$A^* = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & & & \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & \cdots & d_{n1} \\ d_{12} & d_{22} & \cdots & d_{n2} \\ \vdots & & & \\ d_{1n} & d_{2n} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}, \quad n \leq 4.$$

se numește **adjuncta** matricei A.

Dacă $n = 4$, matricea adjunctă a lui A este: $A^* = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} & d_{41} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} & d_{42} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{43} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44} \end{pmatrix}$.

Dacă $d = |A|$, am arătat că $AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix} = dI_n$, $n \leq 4$.

Acceptând ca adevărat rezultatul din lemă și pentru matrice pătrate de ordin n, obținem următoarea teoremă.

Teorema 2

Fie matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \leq 4$. Inversa matricei A există dacă și numai dacă $|A| \neq 0$ și, în acest caz:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & \cdots & d_{n1} \\ d_{12} & d_{22} & \cdots & d_{n2} \\ \vdots & & & \\ d_{1n} & d_{2n} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Demonstrație. Dacă $d = |A| \neq 0$, atunci înmulțind egalitățile $AA^* = A^*A = dI_n$ cu d^{-1} se obține: $A\left(\frac{1}{d} \cdot A^*\right) = \left(\frac{1}{d} \cdot A^*\right)A = I_n$, $n \leq 4$. Deci, inversa matricei A există și $A^{-1} = \frac{1}{d} \cdot A^*$.

Reciproc, dacă A^{-1} există, avem $I_n = AA^{-1} = A^{-1}A$, deci $1 = |I_n| = |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$, $n \leq 4$, de unde rezultă că $|A| \neq 0$. ■

Exemplu Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vrem să arătăm că matricea A este inversabilă și să calculăm A^{-1}. Determinăm cofactorii elementelor matricei A. Avem:

$d_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $d_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $d_{13} = 0$, $d_{21} = 2$, $d_{22} = 3$, $d_{23} = -2$, $d_{31} = 0$, $d_{32} = -1$, $d_{33} = -1$ și deci:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se constată că: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Analog se arată că: $A^{-1}A = I_3$.

Observație:

Pentru o matrice $A = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ de ordin 1, prin definiție avem: $|A| = a$.

Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avem $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ și dacă $|A| \neq 0$, rezultă: $\frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1}$.

Teorema 1

Fie matricele A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \leq 4$. Dacă A și B sunt inversabile, atunci AB este inversabilă și $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstrație. Avem:

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B(B^{-1}A^{-1})) = A((BB^{-1})A^{-1}) = A(I_nA^{-1}) = AA^{-1} = I_n$, $n \leq 4$.

Analog, obținem: $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$, $n \leq 4$.

Rezultă că matricea AB este inversabilă și $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

Observație:

Prin inducție matematică se demonstrează că dacă matricele $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt inversabile, atunci matricea $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_m$ este inversabilă și

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdot \dots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}.$$

1.2. Aplicații ale inversei unei matrice

♦ Modelul economic al lui Leontief

În 1973, premiul Nobel pentru *economie* a fost atribuit lui W. Leontief (economist american, originar din Rusia) care a elaborat o procedură de modelare matematică numită **analiză input-output**, adecvată pentru un sistem economic complex, formată cu un număr mare de sectoare între care există interacțiuni.

Pentru a simplifica prezentarea, presupunem că avem un sistem economic $\mathcal{E}$, format cu trei sectoare în care sunt fabricate respectiv produsele P_1, P_2, P_3. O parte din producția sistemului economic $\mathcal{E}$ este folosită în interiorul sistemului ca resurse, iar o altă parte este rezervată pentru a onora o cerere externă.

Notăm cu a_{ij} numărul unităților din produsul P_i care sunt folosite pentru realizarea unei unități din produsul P_j. Numerele a_{ij} cuantifică interacțiunile dintre sectoarele S_1, S_2, S_3.

Matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

se numește **matricea tehnologică** sau **matricea input-output**.

Dacă x_j este nivelul producției lui P_j (adică numărul de unități din produsul P_j realizate), atunci vectorul 3-dimensional

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

se numește **vectorul producție**.

Produsul $AP = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$

reprezintă consumul intern pentru că $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$ reprezintă partea din producția x_1 a lui S_1 consumată în interiorul sistemului $\mathcal{E}$ ș.a.m.d. Rezultă că $P - AP$ este partea de producție disponibilă, care poate fi folosită pentru a onora o cerere externă.

Presupunem că din afara sistemului economic $\mathcal{E}$ există o comandă de c_j unități din produsul P_j, $1 \le j \le 3$, și fie $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ numit **vectorul-comandă**. Problema fundamentală care se pune este de a planifica nivelul producției P de așa natură încât $P - AP = C$, ceea ce se mai scrie $(I_3 - A)P = C$.

Dacă matricea $I_3 - A$ este inversabilă, atunci înmulțind la stânga egalitatea $(I_3 - A)P = C$ cu $(I_3 - A)^{-1}$ se obține $P = (I_3 - A)^{-1}C$.

Exemplu Determinăm vectorul producție $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dacă matricea tehnologică este

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \text{ și vectorul comandă } C = \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 1\,000 \\ 3\,000 \end{pmatrix}.$$

Avem $I_3 - A = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0,8 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$; luăm $B = 10(I_3 - A) = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 \\ -2 & 8 & -1 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

pentru a se evita numerele zecimale și obținem $(I_3 - A)^{-1} = 10B^{-1}$, $|B| = 450$ și

$$B^* = \begin{pmatrix} 54 & 9 & 9 \\ 16 & 61 & 11 \\ 20 & 20 & 70 \end{pmatrix}, \text{ deci } B^{-1} = \frac{1}{450}B^* \text{ și } (I_3 - A)^{-1} = 10B^{-1} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 54 & 9 & 9 \\ 16 & 61 & 11 \\ 20 & 20 & 70 \end{pmatrix}.$$

Rezultă $P = (I_3 - A)^{-1}C = \dfrac{1}{45}\begin{pmatrix} 54 & 9 & 9 \\ 16 & 61 & 11 \\ 20 & 20 & 70 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 1\,000 \\ 2\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,200 \\ 2\,600 \\ 6\,000 \end{pmatrix}$.

♦ Codificarea mesajelor

Inversa unei matrice are aplicații și în *criptografie*, disciplină care are ca obiect elaborarea metodelor de codificare a mesajelor pentru secretizarea acestora.

Pentru exemplificare, vom folosi matricea A și inversa sa A^{-1},

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix};\ A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

și mesajul „SOSESC JOI“. Atribuim literelor alfabetului latin câte un număr natural pozitiv și blancului □ numărul 0, de exemplu:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}\square & A & B & C & D & E & F & G & H & I & J & \ldots & O & \ldots & S & \ldots & Y & Z\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \ldots & 15 & \ldots & 19 & \ldots & 25 & 26\end{array}.$$

Mesajul se împarte în blocuri de lungimi egale (în cazul nostru 3) luând in considerare și spațiile libere (blancuri). Se adaugă eventual la sfârșitul mesajului câteva blancuri pentru a obține blocuri de lungimi egale.

SOSESC□JOI□□

Semnele din blocuri sunt înlocuite cu numerele asociate. Se formează o matrice numerică M cu trei coloane și tot atâtea linii câte blocuri are mesajul. Se înmulțește M cu A, MA = C, matricea C fiind **mesajul codificat** care se transmite. În cazul nostru:

$$\begin{array}{ccc}S & O & S\\ E & S & C\\ \square & J & O\\ I & \square & \square\end{array}\ \underbrace{\begin{pmatrix}19 & 15 & 19\\ 5 & 19 & 3\\ 0 & 10 & 15\\ 9 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{M}\ \underbrace{\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}-4 & 15 & 42\\ 14 & 17 & -6\\ 10 & 25 & 5\\ -9 & -9 & 18\end{pmatrix}}_{C}$$

La recepție, pentru **decodificare (decriptare)** se efectuează produsul CA^{-1} și se obține M, deoarece $CA^{-1} = (MA)A^{-1} = M(AA^{-1}) = MI_3 = M$:

$$CA^{-1}=\underbrace{\begin{pmatrix}-4 & 15 & 42\\ 14 & 17 & -6\\ 10 & 25 & 5\\ -9 & -9 & 18\end{pmatrix}}_{C}\ \underbrace{\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}}_{A^{-1}}=\underbrace{\begin{pmatrix}19 & 15 & 19\\ 5 & 19 & 3\\ 0 & 10 & 15\\ 9 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{M}\ \begin{array}{ccc}S & O & S\\ E & S & C\\ \square & J & O\\ I & \square & \square\end{array}$$

♦ Rezolvarea sistemelor Cramer scrise sub formă matriceală

Considerăm, de exemplu, un sistem Cramer de trei ecuații liniare cu trei necunoscute

$$(S)\quad \begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3\end{cases}.$$

Dacă $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ este matricea sistemului (S), $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ și $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, atunci sistemul ($S$) se scrie sub formă matriceală astfel: (S) $Ax = b$.

Cum $|A| \neq 0$, există A^{-1} și înmulțind la stânga cu A^{-1} egalitatea de mai sus, obținem:

$$x = A^{-1}b.$$

Rezultă că (S) are soluție unică, anume $x = A^{-1}b$.

Exemplu Fie sistemul (S) $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$. Avem $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cum $|A| = 1 \neq 0$, există A^{-1} și avem $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Rezultă că unica soluție a sistemului (S) este $x = A^{-1}b=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

§2. Ecuații matriceale

O ecuație de gradul întâi cu coeficienți numerici și o singură necunoscută x de forma:

$$ax = b, \text{ cu } a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0,$$

are *soluție unică*, și anume $x = a^{-1}b$.

De exemplu, ecuația $2x = 6$ are soluția $x = 2^{-1}\cdot 6 = 3$.

Prin analogie, vom considera ecuația de gradul întâi cu coeficienți matrice și o singură necunoscută tot o matrice.

Definiție

O ecuație de forma:

$$AX = B,$$

unde A este o matrice pătrată inversabilă de ordin n, B este o matrice de tip $m \times n$, iar X este necunoscuta, se numește **ecuație matriceală**.

Propoziția 1

Ecuația matriceală $AX = B$, unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este inversabilă, iar $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, are o soluție unică $X \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, de forma: $X = A^{-1}B$.

Demonstrație. *Existența soluției:* $A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = I_m B = B$, deci $X = A^{-1}B$ este soluție a ecuației considerate.

Unicitatea soluției: Dacă pentru o matrice $X \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ avem $AX = B$, atunci înmulțind la stânga cu A^{-1}, obținem $X = A^{-1}B$, de unde rezultă unicitatea soluției. ■

Observație:

Deoarece înmulțirea matricelor nu este comutativă, ecuația $XA = B$, unde A este o matrice pătrată inversabilă, are soluția $X = BA^{-1}$.

De asemenea, ecuația $AXB = C$, unde A și B sunt matrice pătrate inversabile, are soluția unică $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Exerciții rezolvate

Să se rezolve ecuațiile matriceale:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon \in \mathbb{C}, \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

Rezolvare:

a) Dacă $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, atunci $|A| = -2$ și găsim $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$, de unde rezultă:

soluția: $X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -3 \\ -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

b) Dacă $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$, atunci $|B| = 3(\varepsilon^2 - \varepsilon) \neq 0$ și găsim $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$,

utilizând faptul că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ și $\varepsilon^3 = 1$. Obținem soluția:

$$X = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\varepsilon^2 \\ 0 & 3\varepsilon & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon^2 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exerciții propuse

1. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1+i & -i & 2 \\ 2 & -1 & 4-i \\ 2+i & -i & 2i \end{pmatrix}$.

Să se arate că A și B sunt matrice inversabile și să se calculeze A^{-1} și B^{-1}.

2. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 2 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 3 & x & -1 \\ b & 1 & x \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât matricele A și B să fie inversabile oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

3. Fie matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \\ -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că matricea B este inversabilă și calculați B^{-1}.

b) Arătați că $B^{-1}AB = C$.

c) Calculați $A^{2\,007}$.

4. Arătați că matricele sistemelor: $(S_1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$; $(S_2)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -9 \end{cases}$

sunt inversabile și calculați inversele acestora.

Rezolvați sistemele (S_1) și (S_2) folosind inversele matricelor acestora.

5. Pentru $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, rezolvați ecuațiile matriceale:

a) $AX = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $AXB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; c) $XA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

6. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculați A^{-1} și B^{-1}, apoi rezolvați ecuația: $AXB + \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 9 \\ 0 & -6 & -7 \\ 5 & -7 & -6 \end{pmatrix}$.

7. Determinați matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A^{-1} = A$ și $|A| = 1$.

8. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^{-1} = A^T$. Arătați că:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ sau } A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \text{ unde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

9. Matricea tehnologică a unui sistem economic $\mathcal{E}$ cu trei sectoare este:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Aflați vectorul producție $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dacă $C = \begin{pmatrix} 1\,000 \\ 2\,500 \\ 2\,200 \end{pmatrix}$ este vectorul comandă (externă).

10. Un mesaj codificat cu matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ este

16 11 27 24 44 48 13 3 21 24 42 47.

Care este mesajul corespunzător? Se presupune că literelor alfabetului *a*, *b*, c, ..., *z* li s-au asociat respectiv numerele 1, 2, 3, ... , 26.

11. Dacă $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și $1 \le i, j \le 2$, atunci:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

12. Dacă $A_{ij}, B_{ij} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, și $\Gamma \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ astfel încât $\Gamma = \begin{pmatrix} A & C \\ O_2 & B \end{pmatrix}$. Arătați că:

a) $|\Gamma| = |A| \cdot |B|$;

b) Γ este inversabilă dacă și numai dacă A și B sunt inversabile și $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O_2 & B^{-1} \end{pmatrix}$.

c) Dacă $\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculați Γ^{-1}.

13. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, atunci $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + iB| \cdot |A - iB|$, unde $i = \sqrt{-1}$.

Examinați cazul $AB = BA$.

14. Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $|A| \neq 0$.

a) Arătați că $\begin{pmatrix} A^{-1} & O_2 \\ -CA^{-1} & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & A^{-1}B \\ O_2 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$.

b) Dacă $AC = CA$, atunci $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.

c) Folosiți punctul b) pentru calculul determinanților:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & 0 & -b & 0 \\ 0 & b & 0 & -a \\ c & 0 & 0 & -d \\ 0 & d & -c & 0 \end{vmatrix}.$$

15. Oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ avem $\begin{pmatrix} I_2 & A \\ O_2 & I_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_2 & -A \\ O_2 & I_2 \end{pmatrix}$.

16. Fie $A, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AN = NA$ și există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $N^n = O_2$.

Arătați că $|A + N| = |A|$.

17. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA$ și există $p, q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^p = O_2$, $B^q = O_2$.
Arătați că:

a) $(A + B)^{p+q-1} = O_2$;

b) $\left(I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}A^{p-1}\right) \cdot \left(I_n + B + \frac{1}{2!}B^2 + \ldots + \frac{1}{(q-1)!}B^{q-1}\right) =$

$$= I_n + (A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2 + \ldots + \frac{1}{(p+q-2)!}B^{p+q-1}.$$

c) Matricea $I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}A^{p-1}$ este inversabilă cu inversa de forma:

$$I_n - A + \frac{1}{2!}A^2 - \frac{1}{3!}A^3 + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{1}{(p-1)!}A^{p-1}.$$

d) Matricea $I - A$ este inversabilă cu inversa de forma:

$$(I - A)^{-1} = I_n + A + A^2 \ldots + A^{p-1}.$$

§3. Metode de calcul a determinanților — metoda pivotului

3.1. Transformări elementare

Vom prezenta o metodă eficientă de calcul pentru determinanți și pentru inversa unei matrice, cunoscută sub numele de *metoda pivotului*, datorată lui Gauss. În capitolul următor vom aplica metoda pivotului pentru a obține o rezolvare rapidă a sistemelor de ecuații liniare.

Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 3$, calculul produsului $a_1a_2...a_n$ se face recurent,

$$a_1a_2a_3 = (a_1a_2)a_3$$
$$a_1a_2a_3a_4 = (a_1a_2a_3)a_4$$
$$\vdots$$
$$a_1a_2...a_n = (a_1a_2...a_{n-1})a_n.$$

Așadar pentru a calcula produsul $a_1a_2...a_n$ trebuie să efectuăm $n-1$ înmulțiri.

Analog, pentru calculul sumei $a_1 + a_2 + ... + a_n$ este necesar să efectuăm $n-1$ adunări.

Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci calculul determinantului matricei A pe baza definiției acestuia,

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)},...a_{n\sigma(n)},$$

presupune să efectuăm câte $n-1$ înmulțiri pentru calculul fiecărui produs $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$, în total $(n-1)\cdot n!$ înmulțiri, și apoi să efectuăm $n! - 1$ adunări sau scăderi după cum $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$. Astfel: când $n = 10$, pentru calculul lui $|A|$ folosind definiția sunt necesare $(10 - 1)\cdot 10! = 32\ 659\ 200$ înmulțiri și $10! - 1 = 3\ 628\ 799$ adunări sau scăderi, ceea ce reprezintă o sarcină incomodă chiar pentru un calculator performant.

Când matricea pătrată A are o formă particulară, numărul operațiilor necesare calculului determinantului său poate fi foarte mic. Acesta este cazul matricelor triunghiulare.

Definiție

O matrice pătrată T este **superior triunghiulară** dacă toți coeficienții săi de sub diagonala principală sunt egali cu zero.

Exemplu Matricele următoare:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sunt superior triunghiulare.

Forma generală a unei matrice T superior triunghiulară este:

$$T=\begin{pmatrix} a_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & a_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & * \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

unde în pozițiile marcate cu simbolul „*” pot fi puse numere oarecare.

Calculând $|T|$ după elementele primei coloane, avem:

$$|T|=a_1\begin{vmatrix} a_2 & * & \dots & * \\ 0 & a_3 & \dots & * \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\begin{vmatrix} a_3 & * & \dots & * \\ 0 & a_4 & \dots & * \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}=\dots=a_1a_2\dots a_n .$$

Așadar pentru a calcula $|T|$ sunt necesare doar $n-1$ înmulțiri, iar când 0 apare pe diagonala principală, putem pune direct $|T| = 0$.

Exemplu
$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot(-2)\cdot 1\cdot 2=-12;$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=3\cdot(-2)\cdot 0=0.$$

Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Asupra liniilor matricei A putem efectua următoarele operații numite **transformări elementare:**

I. La linia i a lui A se adună linia j, $j \neq i$, înmulțită cu $\alpha \in \mathbb{C}$.

II. Liniile i și j ale lui A, $i < j$, se permută între ele.

III. Linia i a lui A se înmulțește cu $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.

Aceste transformări vor fi numite **transformări elementare** asupra liniilor lui A de tip I, II, respectiv III și vor fi consemnate cu notațiile: $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ (tip I), $L_i \leftrightarrow L_j$ (tip II), $L_i \leftarrow \alpha L_i$ (tip III).

Dacă A este matrice pătrată, o transformare elementară de tip I îi conservă determinantul, o transformare elementară de tip II schimbă semnul determinantului lui A, iar una de tip III produce o matrice de determinant $\alpha|A|$.

Exemplu Fie matricea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & -4 & 5 \\ -4 & -8 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Vom imagina o secvență de transformări elementare de tip I sau II care, aplicate liniilor lui A, o reduc la forma superior triunghiulară T, ceea ce ne permite să calculăm $|A| = \pm|T|$.

Mai întâi, efectuăm asupra liniilor lui A transformările elementare $L_1 \leftrightarrow L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ (în această ordine!) și se obține o matrice B care are numai 0 sub primul coeficient al coloanei întâi. Consemnăm operațiile de mai sus astfel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & -4 & 5 \\ -4 & -8 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix} = B.$$

Pentru a avea numai 0 și sub cel de al doilea număr pe de diagonala lui B, efectuăm transformările elementare.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = C.$$

În final, transformăm în 0 și coeficientul lui C de sub cel de al treilea număr al diagonalei sale,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2}L_3 \; \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = T.$$

Cum am efectuat o singură transformare elementară de tip II, avem:

$$|A| = -|T| = -(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3) = -72.$$

Ca o consecință a celor prezentate anterior, putem spune că orice matrice pătrată A poate fi adusă la forma superior triunghiulară T printr-un număr finit de transformări elementare asupra liniilor sale.

3.2. Matrice eșalon

Definiție

O matrice $E \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ se numește **matrice eșalon** cu r **pivoți**, $1 \le r \le \min\{m, n\}$, dacă este de forma:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 & * & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_2 & * & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_r & * & * & \dots & * \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

unde $\alpha_i \ne 0$, $1 \le i \le r$. Numerele α_i, $1 \le i \le r$ se numesc **pivoții (liderii)** matricei eșalon E. (Pivoții au fost încercuiți pentru o mai bună vizualizare.)

Pivoții $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ se găsesc respectiv în coloanele $j_1, j_2, \dots, j_r$ cu $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_r \le n$ și, respectiv, în liniile 1, 2,..., r ale matricei eșalon.

Evident, o matrice eșalon pătrată este superior triunghiulară.

Exemplu Matricele $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

sunt matrice eșalon cu 2 pivoți, 3 pivoți, respectiv 2 pivoți.

Teorema 1

Orice matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $A \ne O_2$, poate fi adusă la forma eșalon E printr-un număr finit de transformări elementare de tip I sau II asupra liniilor sale.

Demonstrație. Vom prezenta un algoritm de reducere a lui A la forma eșalon E printr-un număr finit de transformări elementare asupra liniilor sale, ceea ce va avea și valoare de demonstrație pentru afirmația din enunț.

Faza 1. Se inspectează coloana întâi a lui A pentru a descoperi coeficienții diferiți de 0. Dacă toți coeficienții coloanei întâi a lui A sunt egali cu 0, se trece la coloana a doua ș.a.m.d. până se întâlnește o primă coloană j_1 care conține coeficienți diferiți de 0. Putem avea $j_1 = 1$.

Dacă $a_{1j_1} \ne 0$ notăm cu $\alpha_1 = a_{1j_1} \ne 0$ și se aplică asupra liniilor matricei A transformările elementare $L_i \leftarrow L_i - \alpha_1^{-1} a_{ij_1} L_1$ pentru orice $i \ge 2$ astfel încât $a_{ij_1} \ne 0$ și toți coeficienții de sub pivotul α_1 devin egali cu 0.

Dacă $a_{1j_1}=0$, există $i>1$ astfel încât $\alpha_{ij_1}\neq 0$. Matricei A i se aplică transformarea elementară $L_1 \leftrightarrow L_i$ și se obține o matrice care în poziția $(1,j_1)$ are coeficientul $\alpha_1 \overset{def}{=} a_{ij_1}\neq 0$. Se cade peste cazul examinat anterior.

La finalul acestei faze, matricea A devine matricea A_1 de forma:

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & & & & B & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Faza 2. Dacă $B\neq 0$, se aplică matricei B procedura de la faza 1 folosită pentru matricea A. Deoarece blocul B al matricei A_1 are în stânga sa numai zerouri, transformările elementare asupra liniilor lui B pot fi imaginate ca fiind transformări elementare asupra liniilor 2, 3,..., m ale lui A_1.

În finalul fazei 2, matricea A_1 devine o matrice A_2 de forma:

$$A_2=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & & & & & & C & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

După r faze, cu $1\le r\le \min\{m,n\}$ se obține o matrice eșalon E. ■

Exemplu Să reducem la forma eșalon matricea:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -4 & -5 & 0 \\ 3 & -6 & -7 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inspectând coloana întâi a lui A constatăm că aceasta conține coeficienți diferiți de 0, de exemplu $\alpha_1=-1$ care capătă statut de prim pivot al matricei eșalon căutate după ce permutăm linia 1 cu linia 2. După ce executăm și transformările elementare $L_3 \leftarrow L_3+2L_1$ și $L_4 \leftarrow L_4+3L_1$, toți coeficienții de sub pivotul $\alpha_1=1$ sunt egali cu 0. Așadar:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -4 & -5 & 0 \\ 3 & -6 & -7 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1\leftrightarrow L_2 \\ L_3\leftarrow L_3+2L_1 \\ L_4\leftarrow L_4+3L_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{c|cccc} -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 4 \end{array}\right)=A_1.$$

Aplicăm acum blocului B limitat în matricea A_1 procedura de la prima fază. Se alege ca al doilea pivot al matricei eșalon căutate primul coeficient din a doua coloană a lui B, și anume $\alpha_2 = -2$.

Asupra matricei A_1, efectuăm transformările elementare $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, $L_4 = L_4 - 2L_2$ și toți coeficienții de sub pivotul α_2 devin egali cu 0. Se obține matricea eșalon:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E\,.$$

Așa cum am mai observat, o matrice eșalon E pătrată este o matrice superior triunghiulară și $|E| \neq 0$ dacă și numai dacă toți pivoții lui E se găsesc pe diagonala principală și numărul lor este egal cu ordinul lui E.

Cum determinantul unei matrice pătrate A de ordin n se conservă dacă asupra liniilor sale aplicăm o transformare elementară de tip I și își schimbă semnul dacă aplicăm o trasformare elementară de tip II, avem următorul procedeu de calcul pentru $|A|$:

a) Se aplică matricei A algoritmul reducerii la forma eșalon.

b) După ce se obține un prim pivot α_i, care nu este pe diagonala principală, se deduce că $|A| = 0$.

c) Toți pivoții $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ai formei eșalon E a lui A se găsesc pe diagonala principală. Obținem:

$$|A| = \begin{cases} 0, & \text{dacă } r < n \\ (-1)^{m_A} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n, & \text{dacă } r = n \end{cases}.$$

unde m_A este numărul transformărilor elementare de tip II utilizate pentru a obține forma eșalon a lui A.

Exemplu Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ -4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$; calculăm $|A|$ și $|B|$.

Avem:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ -4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

și deci $|A| = 0$. De asemenea,

$$B=\begin{pmatrix}1&3&5&4\\-2&-3&3&2\\1&2&3&4\\3&5&7&2\end{pmatrix}\begin{matrix}L_2\leftarrow L_2+2L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\\L_4\leftarrow L_4-3L_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&3&5&4\\0&8&13&10\\0&-1&-2&0\\0&-4&-8&-10\end{pmatrix}=B_1,$$

$$B_1=\begin{pmatrix}1&3&5&4\\0&3&13&10\\0&-1&-2&0\\0&-4&-8&-10\end{pmatrix}\begin{matrix}L_2\leftrightarrow L_3\\L_3\leftarrow L_3+3L_2\\L_4\leftarrow L_4-4L_2\end{matrix}\begin{pmatrix}1&3&5&4\\0&-1&-2&0\\0&0&7&10\\0&0&0&-10\end{pmatrix}=E.$$

Avem $m_B = 1$ și $|B|=(-1)^1\cdot 1\cdot(-1)\cdot 7\cdot(-10)=-70$.

Observație. Puteți face o evaluare a *costului algortimului* (adică a numărului operațiilor necesare) pentru calculul determinantului cu metoda pivotului. Fie, în acest sens, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $|A|\neq 0$ (când $|A|=0$, costul algoritmului este mai mic!). Fie α_1 primul pivot al formei eșalon E a lui A. Pentru a transforma în 0 coeficienții lui A de sub pivotul α_1, efectuăm transformările elementare:

$$L_i \leftarrow L_i - \alpha_1^{-1}a_{i1}L_1,\ i = 2, 3,..., n,$$

ceea ce implică efectuarea a $(n + 1)(n - 1) = n^2 - 1$ înmulțiri și a $(n - 1)n$ adunări. De aceea, pentru a transforma în zero toți coeficienții de sub pivoții $\alpha_1, \alpha_2,...,\alpha_{n-1}$, sunt necesare:

$$n^2-1+(n-1)^2-1+...+2^2-1=\frac{n(n+2)(2n+1)}{6}-1-(n-1)$$

înmulțiri și:

$$(n-1)n+(n-2)(n-1)+...+1\cdot 2=\sum_{K=2}^{n}k^2-\sum_{K=2}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}$$

adunări. Când $n = 10$, pentru calculul lui $|A|$ sunt necesare deci 377 de înmulțiri și 330 de adunări. Comparând cu cele 32 659 200 de înmulțiri și 3 628 799 de adunări necesare pentru a calcula $|A|$ cu formula dată de definiția determinantului, concluzia este evidentă.

3.3. Matrice elementare*

Vom descrie transformările elementare asupra liniilor unei matrice cu ajutorul operației de înmulțire a matricelor.

Pornind de la matricea unitate $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, vom nota cu:

$T_{ij}(\alpha)$ — matricea care se obține din I_n dacă la linia i adăugăm linia j, $j \neq i$, înmulțită cu $\alpha \in \mathbb{C}$;

[*] Secțiunea *Matrice elementară* este facultativă

P_{ij} — matricea care se obține din I_n permutând linia i cu linia j, $1 \le i \le j \le n$.

$\mathcal{M}_i(\alpha)$ — matricea care se obține din I_n înmulțind linia $\boldsymbol{i}$ cu $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.

Așadar, $T_{ij}(\alpha)$, P_{ij}, $\mathcal{M}_i(\alpha)$ sunt matrice pătrate din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de forma:

$$T_{ij}(\alpha)=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1 & & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & \alpha & \cdots \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & \vdots & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{r} j \end{array} & \end{array} \qquad P_{ij}=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1 & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ i \\ j \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{c} i \quad j \end{array} & \end{array} \qquad M_i(\alpha)=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1 & & \vdots & \\ & 1 & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \alpha & \cdots \\ & & \vdots & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{c} i \end{array} & \end{array}$$

și se numesc **matrice elementare** de tip I, II, respectiv III.

Matricea $T_{ij}(\alpha)$ coincide cu I_n mai puțin poziția (i, j), $i \neq j$, unde are drept coeficient numărul $\alpha \in \mathbb{C}$. Matricea $\mathcal{M}_i(\alpha)$ coincide cu I_n mai puțin poziția (i, i) unde este plasat numărul $\alpha \neq 0$. Matricea P_{ij}, $i < j$ se obține din I_n înlocuind pe 1 din pozițiile (i, i) și (j, j) cu 0 și pe 0 din pozițiile (i, j) și (j, i) cu 1.

Evident, $T_{ij}(0) = I_n = \mathcal{M}_i(1)$.

Când $n = 2$, matricele elementare sunt:

$$T_{12}(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ T_{21}(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha & 1\end{pmatrix}, \text{ unde } \alpha \in \mathbb{C};\ \ P_{12}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};\ \ M_1(\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$M_2(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}, \text{ cu } \alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0.$$

Când $n = 3$, putem da exemplele:

$$T_{13}(5)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ T_{32}\left(\sqrt{2}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix},\ T_{21}(-1)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$P_{13}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ P_{23}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ P_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$M_1\left(\sqrt{3}\right)=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ M_2(-1)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ M_3\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix} \text{ etc.}$$

Să observăm că dacă U și A sunt două matrice astfel încât produsul UA are sens, atunci linia i a matricei UA se află înmulțind linia i a lui U cu coloanele matricei A. Așadar, dacă linia i a lui U coincide cu cea a matricei unitate, atunci linia i a matricei UA coincide cu linia i a matricei A.

Având în vedere faptul că matricele elementare au majoritatea liniilor identice cu cele ale matricei unitate, se stabilește ușor:

Teorema 2

Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$, U o matrice elementară de ordin m și $B = UA \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$. Avem:

1. Dacă $U = T_{ij}(\alpha)$, atunci B se obține din A adunând la linia i linia j înmulțită cu α.
2. Dacă $U = P_{ij}$, atunci B se obține din A permutând linia i cu linia j.
3. Dacă $U = \mathcal{M}_i(\alpha)$, atunci B se obține din A înmulțind linia i cu $\alpha \neq 0$.

Așadar a efectua asupra liniilor lui A o transformare elementară este echivalent cu a înmulți pe A la stânga cu matricea elementară corespunzătoare.

Exemplu Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{C})$, atunci:

$$T_{21}(5)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}+5a_{11} & a_{22}+5a_{12} & a_{23}+5a_{13} & a_{24}+5a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix};$$

$$P_{23}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix};$$

$$M_3\left(-\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ -\sqrt{2}a_{31} & -\sqrt{2}a_{32} & -\sqrt{2}a_{33} & -\sqrt{2}a_{34} \end{pmatrix}.$$

Dacă în teorema 2 luăm matricea A egală cu $T_{ij}(\beta)$, P_{ij}, respectiv cu $\mathcal{M}_i(\beta)$, $\beta \neq 0$, obținem:

(1) $T_{ij}(\alpha)T_{ij}(\beta) = T_{ij}(\alpha + \beta)$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
(2) $P_{ij}P_{ij} = I_m$;
(3) $M_i(\alpha)M_i(\beta) = M_i(\alpha \cdot \beta)$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$.

În particular, luând $\beta = -\alpha$ în (1) și $\beta = \alpha^{-1}$ în (3), se obține:

$$T_{ij}(\alpha)T_{ij}(-\alpha) = T_{ij}(\alpha + (-\alpha)) = T_{ij}(0) = I_m = T_{ij}(-\alpha)T_{ij}(\alpha)$$

și

$$\mathcal{M}_i(\alpha)\mathcal{M}_i(\alpha^{-1}) = \mathcal{M}_i(\alpha\alpha^{-1}) = \mathcal{M}_i(1) = I_m = \mathcal{M}_i(\alpha^{-1})\mathcal{M}_i(\alpha).$$

În acest fel am demonstrat teorema următoare.

Teorema 3

Dacă U este o matrice elementară, atunci U este inversabilă și U^{-1} este o matrice elementară de același tip cu U. Mai precis:

$$T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha),\ P_{ij}^{-1} = P_{ij},\ \mathcal{M}_i(\alpha)^{-1} = \mathcal{M}_i(\alpha^{-1}).$$

Exemplu Inversele matricelor elementare

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ sunt respectiv matricele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezultatul de la teorema 1 poate fi acum reformulat astfel:

Teorema 1′

Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $A \neq 0$, atunci există un număr finit de matrice elementare $U_1, U_2, \ldots, U_p \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ de tip I sau II astfel încât:

$$U_p \ldots U_2 U_1 A = E = \text{matrice eșalon.}$$

♦ Algoritm pentru calculul inversei unei matrice

Expunem metoda pentru matricele pătrate A de ordin 3, cazul general fiind apoi evident. Dacă A^{-1}există, adică $|A| \neq 0$, aducem matricea A la forma eșalon E printr-un număr finit de transformări elementare.

$$A \to E = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * \\ 0 & \alpha_2 & * \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Cum $|A| \neq 0$, avem $\alpha_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 3$.

În continuare, *normalizăm* pivoții lui E, aplicându-i transformările elementare:

$$L_i \leftarrow \alpha_i^{-1} L_i,\ 1 \leq i \leq 3,$$

ceea ce revine la a înmulți la stânga pe E cu matricele elementare $\mathcal{M}_i(\alpha^{-1}_i)$, $1 \leq i \leq 3$.

Matricea E devine matricea E', care are forma:

$$E' = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuând acum asupra lui E' transformările elementare:

$$L_2 \leftarrow L_2 - b_{23}L_3,\ L_1 \leftarrow L_1 - b_{13}L_3,\ L_1 \leftarrow L_1 - b_{12}L_2,$$

matricea E' devine matricea unitate I_3. În termeni de matrice elementare, avem:

$$T_{12}(-b_{12})T_{13}(-b_{13})T_{23}(-b_{23})E' = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Acum este evident rezultatul din teorema care urmează.

Teorema 4

Fie A o matrice pătrată de ordin n astfel încât $|A| \neq 0$. Există un număr finit de matrice elementare $U_1, U_2, \ldots, U_p$, de tip I, II sau III, astfel încât:

$$U_p \ldots U_2 U_1 A = I_n.$$

Mai mult:

$$A^{-1} = U_p \ldots U_2 U_1.$$

Ținând seama de modul cum se înmulțesc matricele partiționate în blocuri, din egalitatea din enunțul teoremei precedente rezultă că:

$$U_p \ldots U_2 U_1 (A \mid I_n) = (U_p \ldots U_2 U_1 A \mid U_p \ldots U_2 U_1) = (I_n \mid A^{-1}).$$

Așadar, efectând asupra liniilor matricei $(A \mid I_n)$ transformările elementare corespunzătoare matricelor elementare $U_1, U_2, \ldots$,respectiv U_p, se obține în final, în cel de al doilea compartiment matricea A^{-1}.

Exemplu Calculăm A^{-1} dacă $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Efectuăm mai întâi asupra matricei $(A \mid I_3)$ transformările elementare de linii care reduc matricea A la forma eșalon E. Nomalizăm primul pivot al lui E cu transformarea elementară $L_1 \leftarrow -L_1$, după care transformăm în 0 toți coeficienții de deasupra diagonalei primului component.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow -L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_2 + 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 10 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(I_3 \,|\, A^{-1}\right).$$

Rezultă că: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exerciții propuse

1. Reduceți la forma eșalon matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 8 & 10 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Determinați în funcție de valorile lui $\alpha \in \mathbb{R}$ numărul pivoților formei eșalon, pentru următoarele matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1/4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \alpha & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Calculați determinanții matricelor: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$,

găsind în prealabil forma lor eșalon.

4. Stabiliți, folosind transformări elementare asupra liniilor, că matricele A, B, C, D,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sunt inversabile și reprezentați fiecare dintre matricele A, B, C, D, A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}, D^{-1}ca produse de matrice elementare.

5*. Arătați că $|AB| = |A| \cdot |B|$ oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Indicație. Considerați succesiv cazurile: (1) A este matrice elementară, (2) $|A| \neq 0$, (3) $|A| = 0$.

§4. Sisteme liniare cu cel mult 4 necunoscute, sisteme de tip Cramer

În acest capitol, vom întreprinde un studiu sistematic al sistemelor de ecuație liniare cu coeficienți numerici.

Vom numi **ecuație liniară** cu n necunoscute $x_1, x_2, ..., x_n$ o relație de forma:

$$(*)\ a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

unde $a_1, a_2, ..., a_n, b$ sunt numere date.

Spunem că un sistem ordonat $(c_1, c_2, ..., c_n)$ de n numere $c_1, c_2, ..., c_n$ **verifică** sau **satisface** ecuația liniară (*) dacă, atribuind fiecărei necunoscute x_j valoarea c_j, $1 \leq j \leq n$, se obține o egalitate:

$$a_1c_1 + a_2c_2 + ... + a_nc_n = b.$$

Se mai spune că sistemul ordonat de numere $(c_1, c_2, ..., c_n)$ este **soluție** pentru ecuația liniară (*).

În continuare, vom studia problema soluțiilor comune unui număr finit de ecuații liniare. Așadar, obiectul studiului nostru va fi un ansamblu (S) de m ecuații liniare în n necunoscute:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_nx_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

unde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{C}$, numit **sistem de *m* ecuații cu *n* necunoscute cu coeficienți numerici**.

Pentru a fi mai ușor de urmărit, rezultatele fundamentale vor fi prezentate pentru sisteme cu un număr mic de ecuații și de necunoscute ($m \leq 4$, $n \leq 4$).

Matricele $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ și $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

sunt numite **matricea sistemului (*S*)**, respectiv **matricea extinsă a sistemului (*S*)**. Numerele a_{ij} se numesc **coeficienții necunoscutelor**, iar $b_1, b_2, .., b_m$, **termenii liberi** ai ecuațiilor sistemului.

Un sistem ordonat $(c_1, c_2, ..., c_n)$ de numere se numește **soluție** a sistemului (S) dacă verifică fiecare ecuație a acestuia, adică:

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + ... + a_{in}c_n = b_i,\ 1 \leq i \leq m.$$

Spunem că sistemul (S) este **compatibil** dacă are cel puțin o soluție. Un sistem (S) este **incompatibil** dacă nu are nici o soluție. Sistemul (S) este **compatibil determinat** dacă are soluție unică și este **compatibil nedeterminat** dacă are mai multe soluții. Când $m = n$ și $|A| \neq 0$, spunem că (S) este **sistem Cramer**.

În capitolul *Determinanți*, am arătat în cazurile $m = n = 2$ și $m = n = 3$ că un sistem Cramer are soluție unică și aceasta poate fi determinată cu **regula lui Cramer.**

Probleme importante din matematică, fizică, economie etc. cer considerarea unor sisteme de ecuații liniare pentru care $m \neq n$. Astfel, studiul configurației geometrice dată de trei drepte d, d' și d'' dintr-un plan raportat la un reper cartezian xOy se reduce la studiul unui sistem de trei ecuații liniare în două necunoscute cu coeficienți reali:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \\ a''x+b''y+c''=0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} ax+by=-c \\ a'x+b'y=-c' \\ a''x+b''y=-c'' \end{cases}.$$

Sistemul de mai sus este *compatibil determinat* dacă și numai dacă dreptele d, d' și d'' sunt distincte și au un punct comun, este *nedeterminat* dacă cele trei drepte coincid și *incompatibil* în cazurile rămase.

Pentru un sistem (S) de ecuații liniare, este necesar:

1. Să avem criterii cu ajutorul cărora să putem decide dacă este compatibil.
2. Să avem metode eficiente de rezolvare (de determinare a soluțiilor) în caz că este compatibil.

§5. Rangul unei matrice

5.1. Minorii și rangul unei matrice

Definiție

Fie $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ și $r \in \mathbb{N}^*$, $r \leq \min\{m,n\}$. Cu coeficienții matricei A situați la intersecțiile a r linii distincte $i_1, i_2, ..., i_r$ cu r coloane distincte $j_1, j_2, ..., j_r$ se poate forma o matrice pătrată M de ordin r,

$$M=\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_r} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_r} \\ \vdots & & & \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \cdots & a_{i_rj_r} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}),$$

numită **submatrice** (pătrată de ordin r) a lui A. Determinantul $|M|$ al unei submatrice pătrate de ordin r a lui A se numește **minor de ordin *r*** al lui A.

Nu cerem ca $i_1 < i_2 < ... < i_r$ și $j_1 < j_2 < ... < j_r$, dar putem realiza acest lucru prin permutări de linii și de coloane, ceea ce schimbă cel mult semnul minorului, fără efect în considerațiile noastre viitoare.

Dacă $i \neq i_1, ..., i_r$ și $j \neq j_1, ..., j_r$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, atunci spunem că minorul de ordin $r+1$ următor

$$\left|\begin{array}{ccc|c} a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_1j_r} & a_{i_1j} \\ & M & & \\ a_{i_rj_1} & \cdots & a_{i_rj_r} & a_{i_rj} \\ \hline a_{ij_1} & \cdots & a_{ij_r} & a_{ij} \end{array}\right|,$$

bordează cu linia i și coloana j minorul $|M|$ de ordin r.

Evident, există $(m-r)\times(n-r)$ minori de ordin $r+1$ care bordează un minor $|M|$ de ordin r.

Exemplu Fie matricea $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{C})$, $A=\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ \hline -2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right)$.

Submatricea pătrată de ordin 2 a lui A situată în primele două linii și două coloane este $M=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, iar minorul de ordin 2 corespunzător este $|M|=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=5$.

Matricea A are $C_4^2\times C_5^2=6\times 10=60$ submatrice pătrate de ordin 2 și 60 de minori de ordin 2, pentru că avem $C_4^2=6$ posibilități de a alege două linii distincte ale lui A și $C_5^2=10$ posibilități de a alege 2 coloane distincte.

Astfel submatricea lui A din liniile 1, 3 și coloanele 2, 4 este $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ și minorul corespunzător este $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5$.

Submatricea lui A din liniile 2, 4 și coloanele 1, 5 este $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ și minorul corespunzător este $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=9$.

Dacă M este submatricea lui A din primele două linii și două coloane, atunci avem: $(4-2)\times(5-2)=2\times 3=6$ minori de ordin 3 care bordează minorul $|M|$, și anume:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix},$$

obținuți bordând pe $|M|$ cu linia a treia a lui A și coloanele 3, 4, 5, și

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix},$$

obținuți bordând pe $|M|$ cu linia a patra a lui A și coloanele 3, 4 și 5.

Dacă N este submatricea lui A situată în liniile 2, 3, 4 și coloanele 2, 4, 5, atunci:

$$N = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix},$$

iar minorii de ordin 4 ai lui A care bordează pe N, în total în număr de $(4-3)\times(5-3) = 1\times 2 = 2$, sunt:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Primul minor de ordinul 4 se află bordând pe $|N|$ cu linia 1 și coloana 1, iar al doilea se obține bordând pe $|N|$ cu linia 1 și coloana 3.

Definiție

Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $A \neq 0$ și $r \in \mathbb{N}^*$. Spunem că **matricea A are rangul r**, și scriem rang $A = r$, dacă A are cel puțin un minor de ordin r diferit de 0 și toți minori lui A de ordin mai mare ca r sunt egali cu 0.
Matricea $O_{m\times n}$ are prin definiție rangul 0.

Exemple

1. Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ are rangul egal cu 2. Într-adevăr, se observă că submatricea pătrată $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ provenită din primele două linii ale lui A și coloanele 1, 3 are determinantul $|M| = 5 \neq 0$. Rezultă că rang $A \geq 2$. Cum linia 3 a lui A coincide cu linia 2, orice minor de ordin 3 al lui A are două linii egale, deci este egal cu 0. Așadar rang $A = 2$.
Să observăm că A mai are și alți minori de ordin 2 diferiți de 0, de exemplu $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, provenit din liniile 1, 3 și coloanele 2, 4 ale lui A.

2. Matricea eșalon $E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

are rangul egal cu 3. Într-adevăr, submatricea M de ordin 3 a lui E provenită din liniile și coloanele pivoților,

$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ are determinantul egal cu produsul pivoților, $|M| = 2 \cdot (-2) \cdot 5 = -20 \neq 0$. Rezultă rang $E \geq 3$. Cum ultima linie a lui E are toți coeficienții egali cu 0, rezultă că orice minor de ordin 4 al lui E este egal cu 0, deci rang = 3.

Mai general: *orice matrice eșalon E cu r pivoți are rangul egal cu r*.

Observație:

Dacă toți minori de ordin t ai unei matrice A sunt egali cu 0, atunci orice minor de ordin $t + 1$ al lui A este, de asemenea, egal cu 0.

Într-adevăr, dacă M este o submatrice pătrată de ordin $t + 1$ a lui A, cofactorul oricărui coeficient al lui M este minor de ordin t al lui A și deci este egal cu 0. Dezvoltând $|M|$ după elementele unei linii, obținem $|M| = 0$.

În particular, rezultă că pentru o matrice A avem rang $A = r$ dacă și numai dacă are un minor de ordin r diferit de 0 și toți minori săi de ordin $r + 1$ sunt egali cu 0.

5.2. Teorema Kronecker

Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ și $1 \leq j \leq n$, notăm cu c_j^A vectorul coloană m-dimensional ale cărui componente sunt coeficienții lui A din coloana j

$$c_j^A = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{mj} \end{pmatrix}, 1 \leq j \leq n.$$

De asemenea, dacă $1 \leq i \leq m$, notăm cu l_i^A vectorul linie n-dimensional ale cărui componente sunt coeficienții lui A din linia i,

$$l_i^A = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}), 1 \leq i \leq m.$$

Coloana c_j^A, respectiv linia l_i^A este **combinație liniară** de coloanele $c_1^A, c_2^A, ..., c_r^A$, respectiv de liniile $l_1^A, l_2^A, ..., l_r^A$ dacă există $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ și $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ în $\mathbb{C}$ astfel încât:

$$c_i^A = \alpha_1 c_1^A + \alpha_2 c_2^A + ... + \alpha_r c_r^A, \text{ respectiv } l_i^A = \beta_1 l_1^A + \beta_2 l_2^A + ... + \beta_r l_r^A.$$

Numerele $\alpha_1, .., \alpha_r$, respectiv $\beta_1, ..., \beta_r$ se numesc **coeficienții combinațiilor liniare**.

Exemplu Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, atunci avem:

$$c_1^A=\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix},\ c_2^A=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\ c_3^A=\begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix},\ c_4^A=\begin{pmatrix}7\\-1\\4\end{pmatrix}\quad \text{și}$$

$l_1^A=(2,-1,3,7)$, $l_2^A=(1,1,-2,-1)$, $l_3^A=(5,2,-3,4)$.

Avem $c_4^A=2c_1^A+(-3)c_2^A$ și $l_3^A=l_1^A+3l_2^A$ pentru că:

$$2c_1^A+(-3)c_2^A=\begin{pmatrix}4\\2\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+3\\2-3\\10-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-1\\4\end{pmatrix}=c_4^A \quad \text{și}$$

$$l_1^A+3l_2^A=(2,-1,3,7)+(3,3,-6,-3)=(2+3,(-1)+3,3+(-6),7+(-3))=$$
$$=(5,2,-3,4)=l_3^A.$$

Teorema 1

Fie $A=(a_{ij})$, $A\neq 0$ și $r\in\mathbb{N}^*$. Au loc următoarele:

1. rang $A=r$ dacă și numai dacă A are un minor diferit de 0 de ordin r și toți minorii de ordin $r+1$ care îl bordează sunt egali cu 0.

2. Dacă rang $A=r$ și $|M|\neq 0$ este minor de ordin r al lui A, atunci orice coloană (linie) a lui A, alta decât cele din care provine M, este combinație liniară de coloanele (respectiv liniile) lui A care-l conțin pe M.

Demonstrație. Dăm demonstrația în cazul $r=2$ și A are $m=4$ linii și $n=5$ coloane:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}.$$

Dacă rang $A=2$, atunci A are un minor $|M|\neq 0$ de ordin 2 și cum toți minorii de ordin 3 ai lui A sunt egali cu 0, în particular cei care bordează pe $|M|$ sunt egali cu 0.

Reciproc, presupunem că A are un minor $|M|$ de ordin 2 diferit de 0 și că toți minorii de ordin 3 care îl bordează sunt egali cu 0. Sub aceste ipoteze, arătăm că rang $A=2$.

Pentru a nu complica notațiile, presupunem că submatricea M a fost extrasă din primele două linii și coloane ale lui A. Așadar, putem scrie:

$$M=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix} \text{ și } d=|M|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Arătăm că există $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât $c_3^A = \alpha_1 c_1^A + \alpha_2 c_2^A$.

Avem:

$$(*)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{vmatrix} = 0,\quad i = 1, 2, 3, 4,$$

pentru că sunt determinați cu două linii egale când $i = 1$ sau $i = 2$, iar când $i = 3$ sau $i = 4$ sunt minori de ordin 3 care bordează pe $|M|$.

Dezvoltând după elementele liniei 3 fiecare dintre determinanții de la (*), obținem:

$$a_{i1}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{i2}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{i3}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

pentru $i = 1, 2, 3, 4$.

Dacă luăm $\alpha_1 = -\dfrac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{d}$ și $\alpha_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{d}$, avem $a_{i3} = \alpha_1 a_{i1} + \alpha_2 a_{i2}$, $1 \le i \le 4$,

de unde rezultă $c_3^A = \alpha_1 c_1^A + \alpha_2 c_2^A$.

Analog se arată că există $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât $c_4^A = \beta_1 c_1^A + \beta_2 c_2^A$, $c_5^A = \gamma_1 c_1^A + \gamma_2 c_2^A$.

De asemenea, din teorema de dualitate, rezultă că există $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât: $l_3^A = \xi_1 l_1^A + \xi_2 l_2^A$, $l_4^A = \eta_1 l_1^A + \eta_2 l_2^A$.

Pentru a concluziona că rang $A = 2$, trebuie să arătăm că orice minor de ordin 3 al lui A este egal cu 0. Cum coloanele c_3^A, c_4^A și c_5^A sunt combinații liniare de coloanele c_1^A și c_2^A, orice minor de ordin 3 al lui A se exprimă în funcție de determinanții cu cel puțin două coloane egale. Astfel minorul de ordin 3 al lui A din coloane 2, 3, 5 și liniile 1, 3, 4 este:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} & \gamma_1 a_{11} + \gamma_2 a_{12} \\ a_{32} & \alpha_1 a_{31} + \alpha_2 a_{32} & \gamma_1 a_{31} + \gamma_2 a_{32} \\ a_{42} & \alpha_1 a_{41} + \alpha_2 a_{42} & \gamma_1 a_{41} + \gamma_2 a_{42} \end{vmatrix} = \alpha_1\gamma_1 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} & a_{31} \\ a_{42} & a_{41} & a_{41} \end{vmatrix} +$$

$$+\alpha_1\gamma_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{12} \\ a_{32} & a_{31} & a_{32} \\ a_{42} & a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} + \alpha_2\gamma_1 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{32} & a_{31} \\ a_{42} & a_{42} & a_{41} \end{vmatrix} + \alpha_2\gamma_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{12} \\ a_{32} & a_{32} & a_{32} \\ a_{42} & a_{42} & a_{42} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1\gamma_1 \cdot 0 + \alpha_1\gamma_2 \cdot 0 + \alpha_2\gamma_1 \cdot 0 + \alpha_2\gamma_2 \cdot 0 = 0.$$

Analog se arată că oricare alt minor de ordin 3 al lui A este egal cu 0. ■

Exercițiu rezolvat

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4 & s\\ 1 & 1 & 5 & 0\\ 1 & -5 & t & 6\end{pmatrix}$, cu $s, t \in \mathbb{R}$. Să se determine $s, t \in \mathbb{R}$ astfel încât rang $A = 2$ și să se exprime, în acest caz, coloanele c_3^A, c_4^A sub formă de combinație liniară de coloanele c_1^A și c_2^A și linia l_3^A sub formă de combinație liniară de liniile l_1^A și l_2^A.

Rezolvare:

Se observă că submatricea $M=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ din primele două linii și două coloane ale lui A are determinantul diferit de 0 căci $|M|=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3$. Rezultă că rang $A \geq 2$.

Vom avea rang $A = 2$ dacă și numai dacă minorii care bordează pe $|M|$

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 1 & 5\\ 1 & -5 & t\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & -1 & s\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -5 & 6\end{vmatrix}$$

sunt egali cu 0. Calculând acești minori, avem $3t + 21 = 0$ și $18 - 6s = 0$. Obținem $t = -7$ și $s = 3$.

Când $s = 3$ și $t = -7$, există, conform teoremei precedente, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât $c_3^A=\alpha_1 c_1^A+\alpha_2 c_2^A$, $c_4^A=\beta_1 c_1^A+\beta_2 c_2^A$, $l_3^A=\xi_1 l_1^A+\xi_2 l_2^A$.

Condiția $c_3^A=\alpha_1 c_1^A+\alpha_2 c_2^A$, revine la $\begin{pmatrix}4\\ 5\\ -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\alpha_1-\alpha_2\\ \alpha_1+\alpha_2\\ \alpha_2-5\alpha_2\end{pmatrix}$, ceea ce este echivalent cu sistemul:

$$(S)\ \begin{cases}2\alpha_1-\alpha_2=4\\ \alpha_1+\alpha_2=5\\ \alpha_2-5\alpha_2=-7\end{cases}$$

Rezolvând sistemul, găsim $\alpha_1 = 3$ și $\alpha_2 = 2$, deci $c_3^A=3c_1^A+2c_2^A$.

Analog găsim $c_4^A=c_1^A-c_2^A$ și $l_3^A=2l_1^A-3l_2^A$.

5.3. Calculul rangului unei matrice prin transformări elementare asupra liniilor sale

Calculul rangului pornind de la definiție necesită un volum exagerat de mare de operații când dimensiunile sunt mari. Astfel dacă A este o matrice cu 5 linii și 9 coloane în care am identificat un minor $|M| \neq 0$ de ordin 2, atunci rangul $A \geq 2$. Pentru a decide că rang A = 2, trebuie să verificăm că toți minorii de ordin 3 ai lui A, în total $C_5^3 \times C_9^3 = 10 \times 84 = 840$, sunt egali cu 0. O primă simplificare se face aplicând teorema Kroneker. Într-adevăr, este suficient să arătăm că toți minorii de ordin 3 care bordează minorul $|M| \neq 0$ de ordin 2, în total (5 – 2) × (9 – 2) = 3 × 7 = 21, sunt egali cu zero. Dar nici această reducere nu este satisfăcătoare pentru o matrice A cu multe linii și coloane.

Folosind faptul că determinarea rangului unei matrice eșalon E revine la a număra pivoții acesteia, importanța rezultatului următor este evidentă.

Teorema 2

Rangul unei matrice A nu se schimbă dacă asupra liniilor sale efectuăm o transformarea elementară.

Demonstrație. Verificăm proprietatea din enunț când asupra lui A se efectuează transformarea elementară de linii $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, cu $i \neq j$ și $\lambda \in \mathbb{C}$. Dacă A' este matricea care se obține din A efectuând transformarea $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, arătăm că rang $A' \leq$ rang A. Este suficient să arătăm că dacă A' admite un minor $|M'| \neq 0$ de ordin r, atunci și A admite un asemenea minor. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că submatricea M' a fost extrasă din primele r linii și r coloane ale lui A' și fie M submatricea pătrată de ordin r a lui A la fel poziționată.

Dacă $r < i$, atunci $M = M'$ și deci $|M| = |M'| \neq 0$. Dacă $i, j \leq r$, atunci M' se obține din M adăugând la linia i linia j înmulțită cu λ, deci $|M| = |M'| \neq 0$. În fine, presupunem că $i \leq r < j$ și $\lambda \neq 0$. Dacă $|M| \neq 0$, nu mai este nimic de demonstrat. Dacă $|M| = 0$, atunci $0 \neq |M'| = \lambda |M_1|$, unde M_1 se obține prin permutări de linii din submatricea M_2 a lui A din primele r coloane și liniile $1, 2, ..., i-1, i+1, ..., r, j$. Evident, $|M_1| \neq 0$ și $|M_2| \neq \pm |M_1| \neq 0$.

Aplicând lui A' transformarea elementară $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$, se obține A și, datorită primei părți a demonstrației, avem rang $A \leq$ rang A'. Așadar, rang A' = rang A.

Analog se arată că rangul lui A se conservă dacă asupra liniilor sale aplicăm transformările elementare $L_i \leftrightarrow L_j$, cu $i < j$, și $L_i \leftarrow \lambda L_j$, cu $\lambda \neq 0$. ■

Observație:

Rezultatul din teorema 2 fundamentează o metodă eficientă pentru determinarea rangului unei matrice A: se reduce matricea A la forma eșalon E printr-un număr finit de transformări elementare asupra liniilor sale. Cum rangul se conservă atunci când efectuăm transformări elementare, avem rang A = rang E = numărul pivoților lui E.

Exerciții rezolvate

1. Să se determine rang A, unde $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -4 & -5 & 1 \\ -3 & 6 & 1 & 10 & 6 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

Aplicăm algoritmul reducerii la forma eșalon. Executăm transformările elementare

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -4 & -5 & 1 \\ -3 & 6 & 1 & 10 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E.$$

Rezultă că rang $A = 3$.

2. Arătați că matricea $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$, are rangul 3 oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

Aducem matricea A la forma eșalon.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (3\lambda+1)L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2-6\lambda-3 & -3\lambda^2-2\lambda \end{pmatrix} = E.$$

Cum ecuațiile $-x^2-6x-3=0$ și $-3x^2-2x=0$ nu au rădăcini comune, rezultă că E este o matrice eșalon cu trei pivoți oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{R}$, de unde rang $A = 3$ oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{R}$.

§6. Studiul compatibilității și rezolvarea sistemelor: proprietatea Kronecker-Capelli, proprietatea Rouché, metoda Gauss

6.1. Teoreme de compatibilitate

În această secțiune, vom stabili condiții necesare și suficiente ca un sistem (S) de ecuații liniare să fie compatibil și vom prezenta o metodă de determinare a soluțiilor unui sistem compatibil.

Teorema 1 (Proprietatea Kronecker-Capelli)

Un sistem (S) de ecuații liniare este compatibil dacă și numai dacă rang A = rang $\overline{A}$, unde A este matricea sistemului (S), iar $\overline{A}$ este matricea extinsă a acestuia.

Demonstrație. Pentru a ușura urmărirea demonstrației vom considera cazul unui sistem (S) de trei ecuații liniare în patru necunoscute

$$(\mathrm{S})\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases}$$

În acest caz, matricea A a sistemului (S) și matricea sa extinsă $\overline{A}$ sunt:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right),\ \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array}\right)$$

Vom presupune că rang $A = 2$ și că $|M| \neq 0$, unde $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ este submatricea pătrată de ordin 2 extrasă din primele două linii și două coloane ale lui A. Cum M este submatrice și pentru $\overline{A}$ și $|M| \neq 0$, rezultă că rang $\overline{A} \geq 2 =$ rang A.

Presupunem acum că rang $\overline{A} =$ rang A = 2. Atunci conform teoremei lui Kroneker, ultima coloană a matricei $\overline{A}$ este combinație liniară de primele sale două coloane. Există deci $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$c_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

ceea ce se mai scrie:

$$(*)\ \begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}\cdot 0 + a_{14}\cdot 0 = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}\cdot 0 + a_{24}\cdot 0 = b_2 \\ a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}\cdot 0 + a_{34}\cdot 0 = b_3 \end{cases}$$

Rezultă că sistemul ordonat de numere (c_1, c_2, 0, 0) este soluție a sistemului (S), deci sistemul (S) este compatibil.

Reciproc, presupunem că sistemul (S) este compatibil și să arătăm că rang $A = \overline{A}$. Fie (c_1, c_2, c_3, c_4) o soluție a sistemului (S). Avem: $a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + a_{i3}c_3 + a_{i4}c_4 = b_i$, $1 \leq i \leq 3$. (**).

Pentru ca rang $\overline{A}$ = rang $A = 2$, trebuie ca toți minorii de ordin 3 ai lui $\overline{A}$ care bordează pe $|M| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ să fie egali cu 0, conform teoremei lui Kroneker.

Minorii obținuți bordând cu coloanele 3 și 4 sunt egali cu 0 pentru că rang $A = 2$. Este necesar să fie egali cu 0 minorii obținuți bordând cu ultima coloană a lui $\overline{A}$, formată cu termenii liberi b_1, b_2, b_3. În cazul nostru, avem unul singur și, folosind relațiile (**), avem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} +$$

$$+ c_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + c_4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 + c_4 \cdot 0 = 0 .$$

În suma precedentă, primii doi determinanți sunt egali cu 0 pentru că au câte două coloane egale, iar următorii doi determinanți sunt 0 căci rang $A = 2$.

Fie (S) un sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ matricea sistemului (S) și $\overline{A}$ matricea extinsă obținută adăugând la A încă o coloană formată cu termenii liberi $b_1, b_2, ..., b_m$ ai sistemului.

Presupunem că rang $A = r$ și fie o submatrice M a lui A pătrată de ordin r astfel încât $|M| \neq 0$. Ca să nu complicăm notațiile, presupunem că submatricea M a fost extrasă din primele r linii și r coloane ale lui A. Următorii $m - r$ determinanți de ordin $r + 1$, obținuți brodând minorul $|M| \neq 0$ cu liniile $r + 1, r + 2, ..., m$ și cu coloana termenilor liberi

$$d_i^c = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & M & & b_2 \\ a_{r1} & ... & a_{r2} & b_r \\ a_{i1} & ... & a_{ir} & b_i \end{vmatrix}, \ i = r + 1, ..., m,$$

se numesc **determinanții caracteristici** ai sistemului (S).

Examinând demonstrația teoremei precedentei, rezultă că rang A = rang $\overline{A}$ dacă și numai dacă toți minorii caracteristici sunt egali cu 0. Obținem următorul rezultat.

Teorema 2 (Proprietatea Rouché)

Un sistem (S) de ecuații liniare este compatibil dacă și numai dacă toți minorii caracteristici sunt egali cu 0.

Exercițiu rezolvat

Fie sistemul (S) de ecuații liniare: $(S) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + bx_4 = m \\ x_1 - 7x_2 + ax_3 - 4x_4 = -1 \\ -x_1 + cx_2 - 3x_3 + dx_4 = n \end{cases}$,

unde a, b, c, d, m, n sunt numere reale.

1. Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât rang $A = 2$, unde A este matricea sistemului (S).

2. Dacă a, b, c, d au valorile găsite la punctul 1, să se determine m, $n \in \mathbb{C}$ astfel încât sistemul (S) să fie compatibil.

Rezolvare:

1. Avem: $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & b \\ \hline 1 & -7 & a & -4 \\ -1 & c & -3 & d \end{array}\right)$, $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -3 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 & b & m \\ \hline 1 & -7 & a & -4 & -1 \\ -1 & c & -3 & d & n \end{array}\right)$.

Submatricea $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ din primele două linii și două coloane ale lui A are determinantul $|M| = -2 \neq 0$ și deci rang $A \geq 2$. Vom avea rang $A = 2$ dacă și numai dacă minorii de ordin 3 ai lui A care bordează pe $|M|$ sunt egali cu 0, adică:

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & -7 & a \end{array}\right| = 0, \quad \left|\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & b \\ \hline 1 & -7 & -4 \end{array}\right| = 0, \quad \left|\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & c & -3 \end{array}\right| = 0, \quad \left|\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & b \\ \hline -1 & c & d \end{array}\right| = 0,$$

ceea ce revine la: $-2a - 2 = 0$, $4b - 4 = 0$, $1 + c = 0$, $3b + 2c - 2d - bc - 2 = 0$, de unde $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$ și $d = 0$.

2. Cu valorile pentru a, b, c, d determinate mai sus, matricea $\overline{A}$ devine:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -3 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & m \\ \hline 1 & -7 & -1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 0 & n \end{array}\right).$$

Sistemul (S) este compatibil dacă și numai dacă rang $\overline{A}$ = rang $A = 2$, conform teoremei Kroneker-Capelli, și, conform teoremei Rouché, aceasta revine la egalitate cu 0 a minorilor caracteristici, adică: $\left|\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & m \\ \hline 1 & -7 & -1 \end{array}\right| = 0$ și $\left|\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & m \\ \hline 1 & -7 & n \end{array}\right| = 0$.

Calculând, găsim $4m - 16 = 0$ și $-2n + 4m - 6 = 0$, de unde $m = 4$ și $n = 5$.

6.2. Determinarea soluțiilor unui sistem de ecuații liniare compatibil

Fie (S) un sistem de m ecuații liniare în n necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Dacă notăm cu x respectiv cu b vectorul coloană n-dimensional ale cărui componente sunt necunoscutele $x_1, x_2,..., x_n$, resp. vectorul coloanei m-dimensional ale cărui componente sunt termenii liberi $b_1, b_2,..., b_m$,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix},$$

atunci, folosind regula de înmulțire a matricelor, putem scrie sistemul (S) sub *forma matriceală*:

$$(S)\ Ax = b.$$

Când $m = n$ și $|A| \neq 0$, sistemul (S) a fost numit *sistem Cramer*. În cazurile $m = n = 2$ și $m = n = 3$, am arătat că sistemele Cramer admit soluție unică și calculul acesteia se poate face cu regula lui Cramer. Rezultatul este general:

Teorema 3

Orice sistem Cramer (S) are soluție unică, și anume: $x_j = \dfrac{|A_j|}{|A|}$, $1 \le j \le n$ (regula lui Cramer), unde A_j este matricea care se obține din matricea A a sistemului înlocuind coeficienții coloanei j cu termenii liberi $b_1, b_2,..., b_n$.

Demonstrație. Cum $|A| \neq 0$, există A^{-1} și înmulțind la stânga cu A^{-1} egalitatea $Ax = b$ se obține $x = A^{-1}b$. Pe de altă parte $A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = I_n b = b$.

Așadar soluția există și este unică: $x = A^{-1}b$.

Arătăm că soluția poate fi calculată cu regula lui Cramer. Pentru a fi expliciți, considerăm cazul $n = 4$. Avem:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{|A|}A^*,$$

unde $d_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ este cofactorul lui a_{ij}.

Soluția este $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{|A|}A^* b = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} & d_{41} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} & d_{42} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{43} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} =$

$= \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1d_{11} + b_2d_{21} + b_3d_{31} + b_4d_{41} \\ b_1d_{12} + b_2d_{22} + b_3d_{32} + b_4d_{42} \\ b_1d_{13} + b_2d_{23} + b_3d_{33} + b_4d_{43} \\ b_1d_{14} + b_2d_{24} + b_3d_{34} + b_4d_{44} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A_1| \\ |A_2| \\ |A_3| \\ |A_4| \end{pmatrix}$ pentru că cofactorii elementelor coloanei j a lui A_j coincid cu cofactorii elementelor coloanei j a lui A și dezvoltând $|A_j|$ după elementele coloanei j obținem: $|A_j| = b_1d_{1j} + b_2d_{2j} + b_3d_{3j} + b_4d_{4j}$, $1 \le j \le 4$. ■

Exemplu Fie a, b, c, t patru numere astfel încât primele trei sunt distincte.

Vrem să arătăm că $(S)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=t \\ a^2x+b^2y+c^2z=t^2 \end{cases}$ este sistem Cramer și să determinăm unica sa soluție. Avem:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & b & c \\ t^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & t & c \\ a^2 & t^2 & c^2 \end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & t \\ a^2 & b^2 & t^2 \end{pmatrix}.$$

Calculând determinanții acestor matrice, găsim:

$|A|=(b-a)(c-a)(c-b)\neq 0$, $|A_1|=(b-t)(c-t)(c-b)$,

$|A_2|=(t-a)(c-a)(c-t)$, $|A_3|=(b-a)(t-a)(t-b)$

Cum $|A|\neq 0$ rezultă că (S) este sistem Cramer și avem

$$x=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{(b-t)(c-t)}{(b-a)(c-a)},\ y=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{(t-a)(c-t)}{(b-a)(c-b)},$$

$$z=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{(t-a)(t-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

În continuare vom arăta că rezolvarea unui sistem compatibil (S) de m ecuații liniare cu n necunoscute revine la rezolvarea sistemelor Cramer.

Vom spune că două sisteme (S) și (S') sunt **echivalente** dacă au aceleași soluții.

Să notăm cu $E_1, E_2, ..., E_m$ ecuațiile sistemului (S) în ordinea în care acestea sunt date. Așadar notăm cu E_i ecuația:

$$(E_i)\quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i,\ 1\leq i\leq m.$$

Dacă $\alpha\in\mathbb{C}$, notăm cu (αE_i) ecuația care se obține din (E_i) înmulțind ambii termenii ai acesteia cu α:

$$(\alpha E_i)\quad \alpha a_{i1}x_1 + \alpha a_{i2}x_2 + ... + \alpha a_{in}x_n = \alpha b_i.$$

Dacă $i\neq j$ și $\alpha, \beta\in\mathbb{C}$, notăm cu $(\alpha E_i + \beta E_j)$ ecuația care se obține adunând termen cu termen ecuațiile (αE_i) și (αE_j):

$$(\alpha E_i + \beta E_j)\quad (\alpha a_{i1} + \beta a_{j1})x_1 + (\alpha a_{i2} + \beta a_{j2})x_2 + ... + (\alpha a_{in} + \beta a_{jn})x_n = \alpha b_i + \beta b_j.$$

Spunem că ecuația $(\alpha E_i + \beta E_j)$ este *combinație liniară* de ecuațiile (E_i) și (E_j).

Dacă $(c_1, c_2, .., c_n)$ este soluție comună pentru ecuațiile (E_i) și (E_j), atunci este soluție și pentru ecuația $(\alpha E_i + \beta E_j)$ pentru că:

$$(\alpha a_{i1} + \beta a_{j1})c_1 + (\alpha a_{i2} + \beta a_{j2})c_2 + ... + (\alpha a_{in} + \beta a_{jn})c_n =$$
$$= \alpha(a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + ... + a_{in}c_n) + \beta(a_{j1}c_1 + a_{j2}c_2 + ... + a_{jn}c_n) = \alpha b_i + \beta b_j.$$

Analog se poate considera că ecuația $(\alpha E_i + \beta E_j + \gamma E_k)$, cu $\alpha, \beta, \gamma\in\mathbb{C}$, este **combinație liniară** de ecuațiile (E_i), (E_j), (E_k) ș.a.m.d.

Considerăm acum un sistem (S) de ecuații liniare compatibil. Pentru a fi mai ușor urmăriți, presupunem că (S) este un sistem de 3 ecuații în necunoscutele x_1, x_2, x_3, x_4,

$$(S)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases}$$

și că rang A = rang $\overline{A}$ = 2. Cazul general al unui sistem compatibil (S) de m ecuații în n necunoscute cu rang A = rang $\overline{A}$ = r $\in \mathbb{N}^*$ se tratează analog.

Cum rang A = 2, matricea A a sistemului (S) are cel puțin un minor de ordin 2 diferit de 0. Fixăm unul dintre minorii $|M| \neq 0$ de ordin 2 care va purta numele de **minor principal**. Ecuațiile sistemului (S) corespunzătoare liniilor lui A din care este extras minorul principal se numesc **ecuații principale**, iar celelalte se numesc **ecuații secundare**. Necunoscutele x_j corespunzătoare coloanelor lui A din care provine minorul principal $|M|$ se numesc **necunoscute principale**, iar celelalte se numesc **necunoscute secundare**.

Pentru a nu complica notațiile, presupunem că minorul principal $|M|$ a fost extras din primele două linii și două coloane ale lui A. Sub această ipoteză, ecuațiile principale sunt (E_1) și (E_2), iar necunoscutele principale sunt x_1 și x_2.

Sistemul (S') format cu ecuațiile principale ale lui (S)

$$(S')\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \end{cases}$$

este echivalent cu sistemul (S).

Într-adevăr, orice soluție (c_1, c_2, c_3, c_4) a lui (S) verifică în particular și ecuațiile principale, deci este soluție și pentru sistemul (S').

Reciproc, fie (c_1, c_2, c_3, c_4) o soluție a sistemului (S'). Cum rang $\overline{A}$ = 2 și minorul principal $|M|$ este situat în primele două linii ale lui $\overline{A}$, unde

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array}\right),$$

rezultă că există α, β, $\in \mathbb{C}$ astfel încât $l_3^{\overline{A}} = \alpha l_1^{\overline{A}} + \beta l_2^{\overline{A}}$ (conform teoremei Kroneker), ceea ce revine la egalitatea ecuațiilor: (E_3) = (α E_1 + β E_2).

Rezultă că (c_1, c_2, c_3, c_4) este soluție și pentru (E_3), deci pentru sistemul (S).

Sistemul (S') mai poate fi scris:

$$(S'')\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 \end{cases}.$$

Se observă că (S'') este sistem Cramer cu necunoscutele principale x_1 și x_2 pentru că

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |M| \neq 0$$

prin ipoteză. Așadar, oricare ar fi valorile date necunoscutelor secundare $x_3 = \lambda_1$, $x_4 = \lambda_2$, cu $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, se pot determina în mod unic (de exemplu cu regula lui Cramer) valorile corespunzătoare pentru x_1și x_2, fie acestea $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$ astfel încât: $(c_1, c_2, \lambda_1, \lambda_2)$ să fie soluție pentru (S') și deci și pentru sistemul (S) echivalent cu (S'). Evident orice soluție a lui (S) poate fi determinată pe această cale.

Dacă $m = 5$, $n = 4$, rang A = rang $\overline{A} = 3$, iar $|M| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$

sistemul corespunzător lui (S'') este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 - a_{14}x_4 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 - a_{24}x_4 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 - a_{34}x_4 \end{cases},$$

care va fi sistem Cramer în raport cu necunoscutele x_1, x_2, x_3.

În acest caz, pentru orice valoare $x_4 = \lambda \in \mathbb{C}$ se pot determina în mod unic $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = c_3$, astfel încât (c_1, c_2, c_3, λ) să fie soluție pentru sistemul (S) și orice soluție a lui (S) poate fi determinată pe această cale.

Exerciții rezolvate

1. Fie sistemul: $(S)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -5 \\ -x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul (S) să fie compatibil și, în acest caz, să se determine mulțimea tuturor soluțiilor sale.

Rezolvare:

Matricea A a sistemului (S) și matricea sa extinsă $\overline{A}$ sunt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 1 & -5 \\ -1 & 5 & 5 & -4 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Să determinăm mai întâi rang A. Observăm că submatricea $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ extrasă din primele două linii și două coloane ale lui A are determinantul nenul. Rezultă că rang $A \geq 2$.

Cum minorii lui A de ordin 3 care bordează pe $|M|$ sunt nuli,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

rezultă că rang $A = 2$ și deci $|M| = 2 \neq 0$ poate fi luat ca minor principal.

Ecuațiile principale sunt primele două ecuații ale sistemului (S), iar necunoscutele principale sunt x_1 și x_2. Avem un singur minor caracteristic (pentru că A are o singură linie fără elemente comune cu M), și anume:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -5 \\ -1 & 5 & \alpha \end{vmatrix} = 2(\alpha + 4),$$

și deci sistemul (S) este compatibil dacă și numai dacă $\alpha = -4$.

Sistemul (S) este echivalent cu sistemul (S') $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$,

format cu ecuațiile principale, care poate fi scris ca sistem Cramer în necunoscutele principale x_1 și x_2 sub forma:

$$(S'') \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 - 3x_3 + 2x_4 \\ -2x_1 + 4x_2 = -5 + 2x_3 - x_4 \end{cases}.$$

Matricea lui (S'') ca sistem Cramer în necunoscutele x_1 și x_2 este $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ și cum

$|M| = 2$, folosind regula lui Cramer, avem:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 - 3x_3 + 2x_4 & -1 \\ -5 + 2x_3 - x_4 & 4 \end{vmatrix}}{2} = -5x_3 + \frac{7}{2}x_4 + \frac{3}{2},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 - 3x_3 + 2x_4 \\ -2 & -5 + 2x_3 - x_4 \end{vmatrix}}{2} = -2x_3 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}.$$

Cum necunoscutele secundare x_3 și x_4 pot lua valori arbitrare, fie λ_1și λ_3, soluțiile sistemului (S), pentru $\alpha = -4$, sunt:

$$\left(-5\lambda_1 + \frac{7}{2}\lambda_2 + \frac{3}{2}, -2\lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}, \lambda_1, \lambda_2\right) \text{ cu } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul (S) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

să fie compatibil și să se rezolve în acest caz.

Rezolvare:

Matricea A a sistemului (S) și matricea extinsă $\overline{A}$ sunt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Cum submatricea $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a lui A extrasă din primele două linii ale lui A are determinantul $\neq 0$, rezultă că rang $A = 2$. Sistemul (S) este compatibil dacă și numai dacă rang $\overline{A} = 2$ și aceasta se întâmplă dacă și numai dacă determinantul caracteristic (avem unul singur!) este egal cu 0, deci:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 0 .$$

Calculând, găsim $3\alpha - 3 = 0$, deci $\alpha = 1$.

Ecuațiile principale sunt primele două ecuații ale sistemului (S), iar necunoscutele principale sunt x_1 și x_2. Așadar, soluțiile sistemului (S) sunt soluțiile sistemului (S'), unde

$$(S') \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases},$$

format cu ecuațiile principale, are soluție unică, și anume $x_1 = 3$ și $x_2 = 2$.

Observații:

1. Dacă ecuațiile E_1, E_2, E_3 ale sistemului (S) de la exemplul precedent sunt ecuațiile unor drepte d_1, d_2, d dintr-un plan raportat la un reper cartezian xOy, atunci dreptele d_1 și d_2 se intersectează în punctul $P(3,2)$. Sistemul (S) este compatibil dacă și numai dacă dreapta d trece prin punctul P și aceasta se întâmplă dacă și numai dacă $\alpha = 1$ (fig. 1).

2. Dacă (S) este un sistem compatibil de m ecuații cu n necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și $r = \text{rang } A = \text{rang } \overline{A}$, atunci (S) are o singură soluție (adică este compatibil determinat), dacă și numai dacă $r = n$, adică toate necunoscutele sistemului sunt principale. Este cazul sistemului (S) de la exercițiul rezolvat 2 anterior.

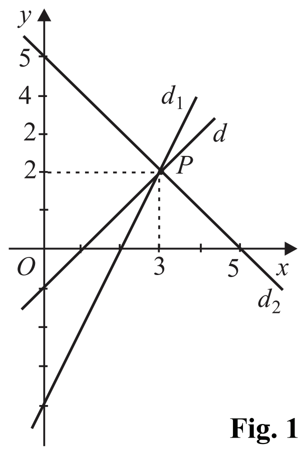


Fig. 1

Când $n - r = 1$, avem o singură necunoscută secundară și sistemul are tot atâtea soluții câte valori poate lua necunoscuta secundară, adică tot atâtea câte numere există. În acest caz, se spune că sistemul (S) este *simplu nedeterminat* sau că (S) are o *infinitate de soluții*.

Când $n - r = 2$ avem două necunoscute secundare care pot lua independent orice valoare numerică. Se spune în acest caz că sistemul (S) este *dublu nedeterminat* sau că are o *dublă infinitate de soluții* ș.a.m.d. Sistemul (S) de la exemplul 1 de mai sus este dublu nedeterminat.

6.3. Sistemele omogene

Spunem că un sistem (S_0) de ecuații liniare este **omogen** dacă toți termenii liberi sunt nuli. Un sistem omogen are forma:

$$(S_0)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{24}x_4 = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} .$$

Orice sistem omogen este compatibil deoarece admite întotdeauna soluția $x_1 = 0$, $x_2 = 0,..., x_n = 0$, numită **soluția banală**.

Din observația 2 din secțiunea precedentă, rezultă că sistemul omogen (S_0) admite numai soluția banală (adică este compatibil determinat) dacă și numai dacă rang $A = n =$ = numărul necunsocutelor.

În particular, dacă $m = n$, atunci sistemul omogen (S_0) admite numai soluția banală dacă și numai dacă $|A| \neq 0$ și admite cel puțin o soluție nebanală dacă și numai dacă $|A| = 0$.

Exerciții rezolvate

1. Să determinăm $m \in \mathbb{R}$, astfel încât sistemul omogen $(S_0)\ \begin{cases} mx + my + z = 0 \\ mx + 2y + 2z = 0 \\ x + my + z = 0 \end{cases}$

să admită soluții nebanale și să se rezolve în acest caz.

Rezolvare:

Trebuie ca $|A| = 0$, unde A este matricea sistemului (S_0), $A = \begin{pmatrix} m & m & 1 \\ m & 2 & 2 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$.

Calculând, obținem $|A| = -2(m-1)^2$. Avem $|A| = 0$ dacă și numai dacă $m = 1$ și, în acest caz, sistemul (S_0) devine:

(S_0) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$, iar $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Avem $|M|=1\neq 0$, unde $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, adică

submatricea lui A din primele două linii și două coloane. Cum $|A|=0$, rezultă că rang A = 2 și putem lua pe $|M|=1\neq 0$, ca minor principal. Sistemul (S_0') format cu ecuațiile principale este: (S_0') $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$, iar necunoscutele principale sunt x și y.

Găsim $x = -z$ și $y = 0$, deci soluția generală este $(-\lambda, 0, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ trei numere distincte și $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât
$\alpha\, 2^{ax} + \beta\, 2^{bx} + \gamma\, 2^{cx} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Rezolvare:
Fie $a_1 = 2^a$, $b_1 = 2^b$ și $c_1 = 2^c$.

Dând lui x valorile 0, 1 și 2, obținem: $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma=0 \\ a_1^2\alpha+b_1^2\beta+c_1^2\gamma=0 \end{cases}$, ceea ce arată că (α, β, γ)

este soluție a sistemului omogen (S_0) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3=0 \\ a_1^2x_1+b_1^2x_2+c_1^2x_3=0 \end{cases}$.

Matricea A a sistemului omogen (S_0) este $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 \end{pmatrix}$, care are determinantul

$|A|=(c_1-a_1)(b_1-a_1)(c_1-b_1)\neq 0$ pentru că numerele a_1, b_1, c_1 sunt distincte.
Rezultă că sistemul omogen (S_0) admite numai soluția banală, de unde $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

6.4. Metoda Gauss a eliminării necunoscutelor

Fie (S) un sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cu coeficienți numerici. Sistemul (S) are forma:

$$(S)\ \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m_1}x_1+a_{m_2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}.$$

Notăm cu $E_1, E_2, \dots, E_m$ ecuațiile sistemului (S) și cu $L_1, L_2, \dots, L_m$ liniile matricei extinse $\overline{A} = \left(A \mid b\right)$ a lui (S).

Transformărilor elementare asupra liniilor lui $\overline{A}$:

$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, $1 \le i \ne j \le m$, $\alpha \in \mathbb{C}$ (tip I) și $L_i \leftrightarrow L_j$, $1 \le i < j \le m$ (tip II),

facem să le corespundă *transformările elementare* asupra sistemului (S):

$E_i \leftarrow E_i + \alpha E_i$, $1 \le i \ne j \le m$, $\alpha \in \mathbb{C}$ (tip I) și $E_i \leftrightarrow E_j$, $1 \le i < j \le m$ (tip II),

care revin la următoarele etape:

— se adună termen cu termen la ecuația E_i ecuația E_j înmulțită cu α,

— respectiv, se permută între ele ecuațiile E_i și E_j.

Metoda lui Gauss de rezolvare a unui sistem (S) de ecuații liniare constă în:

Faza 1. Se execută transformările elementare asupra ecuațiilor lui (S) care corespund transformărilor elementare asupra liniilor lui $\overline{A} = \left(A \mid b\right)$ care reduc pe A la forma eșalon E,

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} \dots & & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \to \left(E \mid b'\right) = \left(\begin{array}{cccccccccc|c} \alpha_{j_1} & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & b'_1 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{j_2} & * & & & & & * & b'_2 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & \dots & 0 & \alpha_{j_r} & * & \dots & * & b'_r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b'_m \end{array}\right),$$

pivoții lui E fiind plasați în coloana $j_1, j_2, \dots, j_r$ cu $1 = j_1 < j_2 < \dots < j_r \le n$ (putem presupune că coloana întâi a lui A are coeficienții diferiți de 0 căci altfel în sistemul (S) nu apare x_1)

Dacă există $i > r$ astfel încât $b'_i \ne 0$, atunci sistemul (S) este incompatibil.

Dacă $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$, atunci sistemul ($S$) este compatibil și este echivalent cu sistemul (S')

$$\begin{cases} \alpha_1 x_{j_1} + \dots = b'_1 \\ \qquad \alpha_2 x_{j_2} + \dots = b'_2 \\ \qquad\quad \ddots \\ \qquad\qquad \alpha_r x_{j_r} + \dots = b'_r \end{cases}.$$

Faza 2. Matricea sistemului (S') este forma eșalon E a matricei A a sistemului (S). Se alege ca minor principal pentru sistemul (S') determinantul submatricei M a lui E de ordin r conținut în coloanele, $j_1, j_2, \dots, j_r$.

Necunoscutele principale sunt $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_r}$ și se determină în funcție de necunoscutele secundare x_j, $j \in \{1, 2, ..., n\} \setminus \{j_1, j_2, ..., j_r\}$ făcând „marche arrière" de la ultima ecuație a lui (S') până la prima ecuație a sa.

Justificarea metodei. Orice transformare elementară asupra ecuațiilor unui sistem (S) îl transformă într-un sistem (S_1) echivalent cu (S). Acest lucru este evident când aplicăm transformarea elementară $E_i \leftrightarrow E_j$. Cât privește tipul I de transformare elementară, este evident că orice soluție comună a ecuațiilor E_i și E_j, $i \neq j$, este soluție și pentru ecuația $E_i + \alpha E_j$, și orice soluție comună a ecuațiilor $E_i + \alpha E_j$ și E_j este soluție și pentru ecuația $(E_i + \alpha E_j) - \alpha E_j = E_i$. Acum este evident că sistemele (S) și (S') de mai sus au aceleași soluții.

Cum transformările elementare de linii conservă rangul unei matrice, rezultă că rang A = rang E = r = numărul pivoților, iar

$$\operatorname{rang} \bar{A} = \operatorname{rang}\left(E \mid b'\right) = \begin{cases} r, & \text{dacă } b'_{r+1} = ... = b'_m = 0 \\ r+1, & \text{dacă există } i > r \text{ cu } b'_i \neq 0 \end{cases}.$$

Așadar (S) este compatibil dacă și numai dacă $b'_{r+1} = ... = b'_m = 0$.

Exerciții rezolvate

1. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul (S) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -5 \\ 7x_1 - 8x_2 + 9x_3 + x_4 = \alpha \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$

să fie compatibil și să se rezolve în acest caz.

Rezolvare:

Se alege ca prim pivot $\alpha_1 = 1$, egal cu coeficientul lui x_1 din prima ecuație a sistemului (S) după care se elimină necunoscuta x_1 din ecuațiile E_2, E_3 și E_4 ale lui (S) prin transformările elementare următoare:

$$(S) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -5 \\ 7x_1 - 8x_2 + 9x_3 + x_4 = \alpha \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases} \begin{matrix} E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 - 7E_1 \\ E_4 \leftarrow E_4 + E_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_2 + x_3 - 3x_3 = -9 \\ 6x_2 + 2x_3 - 6x_4 = \alpha - 14 \\ -3x_2 - x_3 + 3x_4 = 9 \end{cases}.$$

În sistemul astfel obținut, se alege pivotul $\alpha_2 = 3$, egal cu coeficientul lui x_2 din a doua ecuație după care se elimină x_2 din ultimele două ecuații cu transformările elementare următoare:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ x_3 + \ \ x_4 = 2 \\ \quad 3x_2 + \ x_3 - \ 3x_4 = -9 \\ \quad 6x_2 + 2x_3 - \ 6x_4 = \alpha - 14 \\ -3x_2 - \ x_3 + \ 3x_4 = 9 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ E_3 \leftarrow E_3 - 2E_2 \\ E_4 \leftarrow E_4 + E_2 \\ \end{matrix} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + \ x_4 = 2 \\ \quad 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -9 \\ \qquad\qquad 0 = \alpha + 4 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}.$$

Ultimul sistem, deci și (S), este compatibil dacă și numai dacă $\alpha = -4$. În acest caz, sistemul (S) este echivalent cu sistemul (S') $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + \ x_4 = \ \ 2 \\ \quad 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -9 \end{cases}$.

Necunoscutele principale în sistemul (S') sunt x_1 și x_2 (corespunzătoare pivoților $\alpha_2 = 1$, $\alpha_2 = 3$) și acestea se exprimă în funcție de necunoscutele secundare x_3 și x_4 făcând „marche arrière”. Din a doua ecuație a lui (S'), se obține $x_2 = -3 - \frac{1}{3}x_3 + x_4$ și, înlocuind x_2 în prima ecuație a lui (S), rezultă $x_1 = -4 - \frac{5}{3}x_3 + x_4$.

Necunoscutele secundare x_3 și x_4 pot lua valori arbitrare λ_1 și λ_2 în $\mathbb{R}$, deci soluția generală a sistemului (S') și, prin urmare, a sistemului (S) echivalent cu (S') este:

$$\left(-4 - \frac{5}{3}\lambda_1 + \lambda_2, -3 - \frac{1}{3}\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2\right) \text{ cu } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Observație:

Putem proceda și astfel: asupra liniilor matricei extinse $\overline{A}$ a sistemului (S) executăm transformările elementare care reduc matricea A a sistemului (S) la forma eșalon E,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & -5 \\ 7 & -8 & 9 & 1 & \alpha \\ -1 & -1 & -2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha + 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sistemul corespunzător matricei astfel obținute fiind $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 0x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -9 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = \alpha + 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{cases}$.

Acesta este compatibil dacă și numai dacă $\alpha = -4$ și, în acest caz, devine sistemul (S') a cărei rezolvare a fost dată anterior.

2. Fie sistemul (S) de ecuații liniare (S) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$.

Să se arate că sistemul (S) este compatibil și să se rezolve.

Rezolvare:

Efectuăm asupra ecuațiilor E_1, E_2, E_3 ale sistemului (S) transformările elementare care elimină necunoscuta x_2 din ecuațiile E_2 și E_3 și necunoscuta x_2 din E_3.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 + E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 + E_2 \end{matrix} \quad \begin{cases} x_1 \;+2x_2 \;+2x_3 = -1 \\ \qquad -5x_2 \;-2x_3 = 1 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 2 \end{cases}.$$

Din ultima ecuație a sistemului (S') astfel obținut, rezultă că $x_3 = 2$. Din a doua ecuație, rezultă că $x_2 = -1$, iar din prima ecuație rezultă că $x_1 = -3$.

3. Într-un plan raportat la un reper cartezian xOy sunt date dreptele d_1, d_2, d_3, d_4 de ecuații carteziene respectiv $x + y + 1 = 0$, $2x + 3y + 5 = 0$, $x - y + m = 0$, $2x + y + n = 0$, unde $m, n \in \mathbb{R}$. Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele date să admită un punct comun.

Rezolvare:

Coordonatele (x, y) ale unui punct comun celor patru drepte constituie o soluție a sistemului:

$$(S) \begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + 3y = -5 \\ x - y = -m \\ 2x + y = -n \end{cases}, \quad m, n \in \mathbb{R}.$$

Asupra liniilor matricei extinse $\overline{A} = \left(A \,|\, b\right)$ a sistemului (S) efectuăm transformările elementare care reduc pe A la forma eșalon E:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & -m \\ 2 & 1 & -n \end{array}\right) \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5-m \\ 0 & 0 & -1-n \end{array}\right).$$

Sistemul (S) este compatibil dacă și numai dacă rang A = rang $\overline{A}$ ceea ce are loc dacă $m = -5$ și $n = -1$. Sistemul (S) este, în acest caz, echivalent cu sistemul

(S') $\begin{cases} x + y = -1 \\ y = -3 \end{cases}$, care admite soluția $x = 2$, $y = -3$.

Punctul comun este P (2, −3), ca în figura 2.

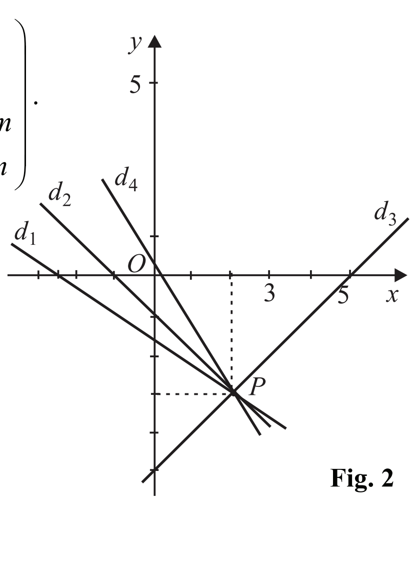


Fig. 2

Exerciții propuse

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & s \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & t & 2 \end{pmatrix}$ cu $s, t \in \mathbb{R}$.

a) Determinați s și t astfel încât rang $A = 2$

b) Când valorile lui s și t sunt cele determinate la pct. (1), găsiți $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $c_3^A = \alpha_1 c_1^A + \alpha_2 c_2^A$, $c_4^A = \beta_1 c_1^A + \beta_2 c_2^A$, $l_3^A = \gamma_1 l_1^A + \gamma_2 l_2^A$.

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. Arătați că rang $A = 2$ și reprezentați liniile (coloanele) 3 și 4 sub forma de combinații liniare de primele două linii (respectiv coloane).

3. Determinați rangurile matricelor:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

a) folosind teorema Kroneker, b) găsind în prealabil forma eșalon.

4. Determinați rangurile matricelor următoare în funcție de parametrii $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Discuție.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 2 & 2 & \alpha & -2 \\ 4 & 5 & -1 & 2\alpha \\ 2 & 1 & 10 & -12 \end{pmatrix};$$

$$E=\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & c \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix};\quad F=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix};\quad G=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & \gamma & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Arătați că sistemele (S_1) și (S_2) sunt sisteme Cramer și determinați soluțiile lor:

$$(S_1)\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases};\quad (S_2)\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases};\quad (S_3)\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ -2x + y + 3z = -7 \\ x + 2y - 2z = 7 \end{cases}.$$

6. Arătați că următoarele sisteme sunt compatibile și determinați soluțiile acestora:

$$(S_1)\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + 5z = -7 \end{cases};\ (S_2)\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ x + 4y + 9z = 16 \end{cases};\quad (S_3)\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}.$$

7. Rezolvați următoarele sisteme liniare folosind metoda Ganss:

$$(\mathbf{S}_1)\begin{cases} x-2y+z=-3 \\ 2x-5y+5z=-7 \\ -x+4y-7z=5 \end{cases};\quad (S_2)\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3+x_4=2 \\ 2x_1-3x_2-x_3+x_4=-1 \\ -x_1+3x_2+2x_3+4x_4=5 \end{cases};\quad (S_3)\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=3 \\ 6x_1+x_2-2x_3=6 \\ -2x_2+3x_2-x_3=3 \end{cases}.$$

8. Determinați soluțiile următoarelor sistemele omogene:

$$(S_1)\begin{cases} x_1+5x_2+x_3+7x_4=0 \\ 2x_1+7x_2+3x_3+2x_4=0 \\ x_1+2x_2+2x_3-5x_4=0 \end{cases};\quad (S_2)\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ -4x_1+3x_2-3x_3=0 \\ -2x_1+3x_2+2x_3=0 \end{cases}.$$

9. Determinați valorile parametrului real α pentru care sistemele admit soluții nebanale și, în acest caz, să se rezolve:

$$(S_1)\begin{cases} x+\alpha y+z=0 \\ \alpha x+y+z=0 \\ x+y+\alpha z=0 \end{cases};\quad (S_2)\begin{cases} x_1+4x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1-5x_2-4x_3+2x_4=0 \\ 5x_1+3x_2-3x_3+4x_4=0 \\ 2x_1-\alpha x_2-2x_3=0 \end{cases}.$$

10. Să se stabilească sub ce condiții următoarele sisteme de ecuații liniare sunt compatibile și să se rezolve atunci când admit soluții:

$$(S_1)\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+2my+z=-1 \\ 2mx+y+(m+1)z=0 \end{cases},\ m\in\mathbb{R};\quad (S_2)\begin{cases} x+my+nz=1 \\ x+mny+z=-m \\ nx+my+z=1 \end{cases},\ m,n\in\mathbb{R}.$$

11. Să se determine α, β, γ ∈ ℝ astfel încât pentru sistemul $(S)\begin{cases} x_1-x_2+x_3+\alpha x_4=\beta \\ x_1+x_2+\gamma x_3+x_4=1 \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=1 \end{cases}$

să avem rang A = rang $\overline{A}$ și să se rezolve în acest caz, unde A și $\overline{A}$ sunt matricea lui (S), respectiv matricea extinsă a lui (S).

12. Arătați că sistemul $(S)\begin{cases} x+y+z=0 \\ (b+c)x+(a+c)y+(b+a)z=0,a,b,c\in\mathbb{R} \\ bcx+acy+abz=0 \end{cases},$

admite soluție unică dacă și numai dacă a, b și c sunt numere distincte.

13. Fie a, b, c laturile unui triunghi ABC și sistemul de ecuații liniare:

$$(S)\begin{cases} cy+bz=a \\ cx+ay=b \\ bx+ay=c \end{cases}.$$

a) Arătați că (S) este sistem Cramer și determinați soluția sa.

b) Arătați că $x = \cos A$, $y = \cos B$, $z = \cos C$ verifică sistemul (S).

PARTEA a II-a

Elemente de analiză matematică

Capitolul **1**. Limite de funcții

Capitolul **2**. Continuitate

Capitolul **3**. Derivabilitate

Capitolul **4**. Reprezentarea grafică a funcțiilor

Capitolul 1 Limite de funcții

În prima parte a capitolului vom oferi o privire de ansamblu asupra mulțimii numerelor reale, vom reaminti noțiuni referitoare la funcțiile numerice, vom completa mulțimea $\mathbb{R}$ la mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$ cu scopul de a îngloba într-o formulare unitară unele proprietăți, vom defini noțiunile de vecinătate și punct de acumulare — cu ajutorul cărora se exprimă matematic ideea de apropiere — și vom recapitula funcțiile elementare care au fost definite în clasele anterioare. În celelalte părți ale capitolului vom studia noțiunile de limită a unui șir, șir convergent și limită a unei funcții.

Pentru simplificarea unor enunțuri, vom folosi semnele „ $\forall$ ” pentru „*oricare ar fi*” și „$\exists$” pentru „*există*” și vom face prescurtarea „a.î.” pentru „*astfel încât*”.

§1. Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală; dreapta reală încheiată, simbolurile $-\infty$ și $+\infty$

Mulțimea numerelor reale (numită și **dreapta reală**) se notează cu $\mathbb{R}$ (litera R cu linia verticală dublată) sau cu **R** (litera R îngroșată), iar elementele sale se numesc **numere reale**.

Reamintim că se notează cu $\mathbb{Q}$ mulțimea numerelor raționale, cu $\mathbb{Z}$ mulțimea numerelor întregi, cu $\mathbb{N} = \{0, 1, 2,...\}$ mulțimea numerelor naturale și cu $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3,...\}$ mulțimea numerelor naturale nenule. Avem $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Mulțimea $\mathbb{R}$ are două structuri fundamentale, una algebrică (dată de operațiile de adunare și înmulțire) și alta de ordine (dată de relația de mărime “mai mic sau egal”), legate între ele prin proprietăți de compatibilitate.

1.1. Structura algebrică a lui $\mathbb{R}$

Pe $\mathbb{R}$ sunt definite două operații, *adunarea* și *înmulțirea*, care fac să corespundă fiecărei perechi ordonate de numere reale $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un număr real notat $x + y$, numit *suma* lui x cu y și un număr real notat $x \cdot y$ sau xy, numit *produsul* lui x cu y.

Pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$, *adunarea are proprietățile următoare*:

1. $x + y = y + x$ (adunarea este **comutativă**);
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (adunarea este **asociativă**);
3. $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ a.î. $x + 0 = x$ (numărul 0 (**zero**) este **element neutru** pentru adunare);
4. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, -x \in \mathbb{R}$ a.î. $x + (-x) = 0$ (orice număr x are un **opus**, $-x$).

Pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$, *înmulțirea are proprietățile următoare*:

5. $xy = yx$ (înmulțirea este **comutativă**);
6. $(xy)\, z = x\, (yz)$ (înmulțirea este **asociativă**);
7. $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ a.î. $1 \cdot x = x$ (numărul 1 (**unu**) este **element neutru** pentru înmulțire);

8. $\forall\, x \neq 0, \exists\, x^{-1} \in \mathbb{R}$ a.î $x \cdot x^{-1} = 1$ (orice $x \neq 0$ are un **invers** $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$).

Cele două operații sunt legate prin proprietatea de *distributivitate*:

9. $x(y+z) = xy + xz$ (înmulțirea este **distributivă** față de adunare).

1.2. Structura de ordine a lui $\mathbb{R}$

Pe $\mathbb{R}$ este definită o *relație de mărime* (numită și *relație de ordine*), notată $x \leq y$ (*x este mai mic sau egal decât y*), unde $x, y \in \mathbb{R}$.

Pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$, *relația de ordine are proprietățile următoare:*

10. $x \leq x$ (relația este **reflexivă**);

11. $x \leq y$ și $y \leq x \Rightarrow x = y$ (relația este **antisimetrică**);

12. $x \leq y$ și $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (relația este **tranzitivă**);

13. avem $x \leq y$ sau $y \leq x$ (relația este **totală**).

Proprietățile 10-13 se exprimă pe scurt spunând că $\mathbb{R}$ este **mulțime total ordonată**.

Dacă $x \leq y$ și $x \neq y$, atunci vom spune că $x < y$ (*x* **este mai mic decât** *y*).

Se definesc și relațiile opuse:

a) $x \geq y$ (*x* **este mai mare sau egal decât** *y*), dacă $y \leq x$;

b) $x > y$ (*x* **este mai mare decât** *y*), dacă $y < x$.

Exemple $0 < 1$; $1 > 0$; $-1 < 0$; $0 > -1$; $2 \leq 2$; $2 \geq 2$;
$2 \leq 3$; $2 < 3$; $3 \geq 2$; $3 > 2$; $-5 \leq -2$; $-5 < -2$.

Numerele $x \geq 0$ se numesc **numere pozitive**, numerele $x > 0$ se numesc **numere strict pozitive**, numerele $x \leq 0$ se numesc **numere negative**, iar numerele $x < 0$ se numesc **numere strict negative**. Numărul 0 (zero) este și pozitiv, și negativ.

Notații: $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

1.3. Proprietăți de compatibilitate între structurile algebrică și de ordine

Pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$, avem proprietățile:

14. $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (legătura dintre relația de ordine și adunare);

15. $x \leq y$ și $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$ (legătura dintre relația de ordine și înmulțire).

1.4. Axioma lui Cantor

Ultima proprietate fundamentală a lui $\mathbb{R}$ (axioma lui Cantor) necesită o scurtă pregătire.

Fie mulțimea nevidă $A \subset \mathbb{R}$.

Se numește **minorant** al lui *A*, un număr $\alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall\, x \in A$ să avem $\alpha \leq x$. Fie A_* mulțimea minoranților lui *A*. Dacă $A_* \neq \varnothing$, atunci spunem că *A* este **minorată** (**mărginită inferior**).

Se numește **majorant** al lui *A*, un număr $\beta \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall\, x \in A$ să avem $x \leq \beta$. Fie A^* mulțimea majoranților lui *A*. Dacă $A^* \neq \varnothing$, atunci spunem că *A* este **majorată** (**mărginită superior**).

Mulțimea A se numește **mărginită** dacă A este minorată și majorată; rezultă că există numerele $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \le \beta$, a.î. $\forall\, x \in A$ să avem $\alpha \le x \le \beta$; de asemenea, rezultă că există numărul $M > 0$ a.î. $\forall\, x \in A$ să avem $-M \le x \le M$. În caz contrar, spunem că A este mulțime **nemărginită**.

Exemple

1. Fie $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \le 1\}$. Atunci: $A_* = \varnothing$ și $A^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 1\}$; A este nemărginită inferior și mărginită superior.

2. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\} \cup \mathbb{N}$. Atunci: $A_* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le -2\}$ și $A^* = \varnothing$; A este mărginită inferior și nemărginită superior.

3. Fie $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Atunci: $A_* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0\}$ și $A^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 1\}$; A este mărginită.

Se numește **minimumul** (**cel mai mic element** al) lui A, un număr $a \in A$ care este minorant pentru A. Dacă există, atunci este unic și se notează $a = \min A$.

Se numește **maximumul** (**cel mai mare element** al) lui A, un număr $b \in A$ care este majorant pentru A. Dacă există, atunci este unic și se notează $b = \max A$.

Exemple

1. Fie $A = \{-1, -5, 3, 4\}$; $\min A = -5$; $\max A = 4$.

2. Fie $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \le 1\}$; $\min A$ *nu* există; $\max A = 1$.

3. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\} \cup \mathbb{N}$; *nu* există $\min A$ și $\max A$.

4. Fie $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$; $\min A$ *nu* există; $\max A = 1$.

Să presupunem că $A_* \ne \varnothing$ și există $m = \max A_*$ (m este cel mai mare minorant al lui A). Atunci m se numește **infimumul** (**marginea inferioară** a) lui A și se notează $m = \inf A$.

Să presupunem că $A^* \ne \varnothing$ și există $M = \min A^*$ (M este cel mai mic majorant al lui A). Atunci M se numește **supremumul** (**marginea superioară** a) lui A și se notează $M = \sup A$.

Observație. Dacă $\exists\ a = \min A$, atunci $a = \inf A$; dacă $\exists\ b = \max A$, atunci $b = \sup A$.

Exemple

1. Fie $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \le 1\}$; $\inf A$ *nu* există; $\sup A = \min A^* = 1$.

2. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\} \cup \mathbb{N}$; $\inf A = \max A_* = -2$; $\sup A$ *nu* există.

3. Fie $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$; $\inf A = \max A_* = 0$; $\sup A = \min A^* = 1$.

Se presupune că mulțimea $\mathbb{R}$ are următoarea proprietate fundamentală:

16. Axioma lui Cantor (**axioma marginii superioare**):

Orice parte nevidă și majorată $A \subset \mathbb{R}$ are margine superioară, $\sup A \in \mathbb{R}$.

Consecința: „Orice parte nevidă și minorată $A \subset \mathbb{R}$ are margine inferioară, $\inf A \in \mathbb{R}$”, se va numi tot **axioma lui Cantor**.

Din proprietățile 1-16 au fost deduse, în clasele anterioare, toate regulile calculului algebric și ale calculului cu inegalități.

Aici se încheie prezentarea structurilor fundamentale ale lui $\mathbb{R}$. La această prezentare axiomatică a lui $\mathbb{R}$ s-a ajuns prin contribuția matematicienilor germani Karl Weierstrass (1815-1897), Richard Dedekind (1831-1916) și Georg Cantor (1845-1918).

1.5. Proprietăți remarcabile

Pentru numerele și submulțimile din $\mathbb{R}$ se pot da următoarele definiții.

Definiții

1. Se numește **partea întreagă** a numărului real $x \in \mathbb{R}$, numărul întreg $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \le x\}$ (cel mai mare întreg, mai mic sau egal decât x).

2. Se numește **număr irațional**, orice număr care aparține mulțimii $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3. Spunem că o mulțime $A \subset \mathbb{R}$ **este densă în** $\mathbb{R}$, dacă $\forall\ x, y \in \mathbb{R}, x < y, \exists\ r \in A$ a.î. $x < r < y$.

4. Spunem că o mulțime X **este finită**, dacă $X = \varnothing$ sau dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ și o funcție bijectivă $\varphi : \{1,..., n\} \to X$ (în acest caz spunem că X are n elemente).

5. Spunem că o mulțime X **este numărabilă**, dacă există o funcție bijectivă $\varphi : \mathbb{N} \to X$.

6. Spunem că o mulțime X **este infinită**, dacă X *nu* este finită.

Exemple **1**. Părți întregi de numere raționale: $[2,55] = 2$; $\left[\frac{100}{3}\right] = 33$; $[-5,71] = -6$; $\left[-\frac{100}{3}\right] = -34$.

2. Părți întregi de numere iraționale: $\left[\sqrt{2}\right] = 1$; $\left[5 + 3\sqrt{2}\right] = 9$; $\left[\sqrt{2} + \sqrt{3}\right] = 3$.

3. Mulțimea $A = \{7, 3, -1\}$ este finită cu 3 elemente (funcția $f : \{1,2,3\} \to A$, definită prin $f(1) = 7, f(2) = 3$ și $f(3) = -1$ este bijectivă).

4. Mulțimea $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ este numărabilă (funcția $f : \mathbb{N} \to A$, $f(n) = \frac{1}{n+1}$, este bijectivă).

5. Mulțimea $\mathbb{Z}$ este numărabilă (funcția $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = (-1)^{n+1} \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right]$ este bijectivă).

În continuare, vom menționa câteva proprietăți remarcabile, unele cunoscute și altele depășind programa (care sunt facultative):

1. Proprietatea lui Arhimede: $\forall\ x, y \in \mathbb{R}, y > 0, \exists\ n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $ny > x$.

2. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, mulțimea $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \le x\}$ are un maximum, deci există partea întreagă $[x] \in \mathbb{Z}$, și avem relațiile: $[x] \le x < [x] + 1$; $x - 1 < [x] \le x$.

3. Mulțimile $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sunt dense în $\mathbb{R}$.

4. Mulțimea $\mathbb{Q}$ este numărabilă, iar mulțimile $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}$ sunt nenumărabile.

1.6. Modul, semn, distanță, inegalități

Fie numerele arbitrare $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Modulul (**valoarea absolută** a) lui x este numărul $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

Semnul lui x este numărul $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -1, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

Distanța de la x la y este numărul $d(x, y) = |x - y|$.

Exemple $|5| = 5$; $|-5| = 5$; $\operatorname{sgn}(3,5) = 1$; $\operatorname{sgn}(-3,5) = -1$; $d(7, -3) = 10$.

Proprietățile modulului:

1. $|x| \geq 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (**inegalitatea triunghiului**);

3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ (pentru $y \neq 0$);

4. $\operatorname{sgn}(x \cdot y) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(y)$ (**regula semnelor**);

5. $|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$.

Fie în plus numerele $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Adăugăm următoarele inegalități:

1. $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$;

2. $|x - y| < \varepsilon \Leftrightarrow y - \varepsilon < x < y + \varepsilon$;

3. $x > -1$ și $x \neq 0 \Rightarrow (1 + x)^n > 1 + nx$ (**inegalitatea lui Bernoulli**)*.

1.7. Reprezentarea zecimală a numerelor reale

Sistemul de numerație zecimal a apărut din necesitatea practică de a scrie cât mai simplu numerele, de a le compara rapid și de a opera cu acestea după reguli eficace. Scrierea și folosirea cifrelor zecimale arabe au fost introduse în Europa de către matematicianul italian Leonardo Fibonacci (1170-1240).

Să notăm cu $I_{10} = \{0, 1, ..., 8, 9\}$ mulțimea cifrelor sistemului zecimal.

Un număr natural $a \in \mathbb{N}$ admite o reprezentare zecimală de forma:

$$a = \overline{b_m b_{m-1} ... b_1 b_0} = b_m \cdot 10^m + b_{m-1} \cdot 10^{m-1} + ... + b_1 \cdot 10 + b_0,$$

unde $m \in \mathbb{N}$ și $b_i \in I_{10}$, $\forall i \in \{0, 1, ..., m-1, m\}$.

Fie un număr real $x > 0$. Din clasele anterioare se știe că x se reprezintă printr-o **fracție zecimală**, adică printr-o succesiune infinită de cifre de forma $x = a, a_1 a_2 ... a_n ...$,

* Jacob Bernoulli (1654-1705), matematician elvețian.

unde $a \in \mathbb{N}$ are reprezentarea zecimală precedentă, $a_n \in I_{10}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimea $\{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n < 9\}$ este infinită.

Reprezentarea lui x cu aceste proprietăți este unică.

Numărul negativ $-x$ are reprezentarea $-x = -a, a_1...a_n...$

Dacă $a_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci x se scrie $x = a = b_m b_{m-1}...b_1 b_0$.

Dacă există $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ astfel încât $a_n = 0$, $\forall\ n \geq k$, atunci reprezentarea se numește **fracție zecimală finită** și x se scrie: $x = a, a_1...a_k = a + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_k}{10^k}$.

Dacă mulțimea $\{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n > 0\}$ este infinită, atunci reprezentarea lui x se numește **fracție zecimală infinită**. Numărul asociat acestei reprezentări se obține printr-un „**proces de trecere la limită**”, specific analizei matematice și care va fi explicat în acest capitol.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie **aproximarea zecimală de ordin *n* a lui *x***:

$$x^{(n)} = a, a_1...a_n = a + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_n}{10^n} = \frac{a \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + ... + a_n}{10^n} = \frac{\left[x \cdot 10^n\right]}{10^n}.$$

Mai departe, în acest capitol, vom arăta că pe măsură ce n crește, $x^{(n)}$ „se apropie” din ce în ce mai mult de x și avem evaluarea $0 < x - x^{(n)} < \frac{1}{10^n}$.

Menționăm că x este rațional dacă și numai dacă reprezentarea lui x este periodică, adică $x = a, a_1...a_k \underbrace{a_{k+1}...a_{k+i}}\,\underbrace{a_{k+1}...a_{k+i}}... = a, a_1...a_k\left(a_{k+1}...a_{k+i}\right)$; $k \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}^*$.

Exemple

1. Fracție zecimală finită: $57,24 = 57 + \frac{2}{10} + \frac{4}{10^2} = \frac{5724}{100}$.

2. Fie fracția zecimală infinită neperiodică (reprezentând un număr irațional) $x = 5,232232223...\underbrace{2...2}_{n}3...$

Aproximările de ordin 2 și de ordin 5 sunt: $x^{(2)} = 5,23$ și $x^{(5)} = 5,23223$.

3. Fie reprezentarea zecimală infinită periodică: $x = 2,(3) = 2,333...3...$

Aproximarea de ordin $n \in \mathbb{N}^*$ a lui x este:

$$x^{(n)} = 2,\underbrace{3...3}_{n} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + ... + \frac{3}{10^n} = 2 + \frac{3}{10} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = 2 + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

Am adunat n termeni în progresie geometrică, având rația $q = \frac{1}{10}$.

În mod intuitiv, atunci când n crește, numărul $\frac{1}{10^n}$ „se apropie” din ce în ce mai mult de 0, deci $x^{(n)}$ se apropie din ce în ce mai mult de numărul

$$x = 2 + \frac{1}{3} \cdot (1 - 0) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Se consideră că fracția zecimală reprezintă numărul $x = \frac{7}{3}$. Acest raționament plauzibil va fi fundamentat mai târziu, în acest capitol.

1.8. Reprezentarea lui $\mathbb{R}$ pe o dreaptă și reprezentarea lui $\mathbb{R}^2$ pe un plan: dreapta reală și planul real

Reprezentările lui $\mathbb{R}$ și $\mathbb{R}^2$ sunt utile, printre altele, pentru a măsura distanțe și pentru a interpreta geometric unele rezultate ale analizei matematice.

Fie o *axă de coordonate Ox*, adică o dreaptă Δ pe care s-au fixat un punct O (origine), un punct I (punct unitate) și un sens pozitiv de la O spre I (fig. 1).

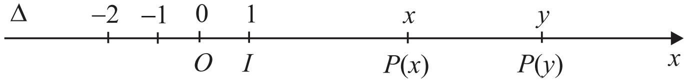


Fig. 1

Se știe că există o corespondență bijectivă $\varphi : \mathbb{R} \to \Delta$ care asociază fiecărui număr $x \in \mathbb{R}$ un punct $\varphi(x) = P(x)$ de abscisă x pe dreapta Δ astfel încât $P(0) = O$, $P(1) = I$ și astfel încât, dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, atunci punctul $P(x)$ este situat înaintea punctului $P(y)$ și $d(x,y) = d(P(x), P(y))$. Prin această corespondență, se pot identifica numerele reale cu punctele dreptei Δ, motiv pentru care numerele reale se mai numesc „**puncte**” și $\mathbb{R}$ se mai numește „**dreapta reală**”.

Reamintim că $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ şi } y \in \mathbb{R}\}$.

Într-un plan $\mathcal{P}$, fie un **sistem ortonormal de axe de coordonate** xOy (fig. 2). Se stabilește o corespondență bijectivă $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}$, care asociază fiecărei perechi ordonate $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punct $\psi(x, y) = M(x, y)$ din planul $\mathcal{P}$, care are proiecțiile ortogonale punctul P de *abscisă* x pe axa Ox și punctul Q de *ordonată* y pe axa Oy. Prin această corespondență, se pot identifica perechile ordonate de numere reale cu punctele planului $\mathcal{P}$, motiv pentru care perechile (x, y) se mai numesc „**puncte din plan**” și $\mathbb{R}^2$ se mai numește „**planul real**.”

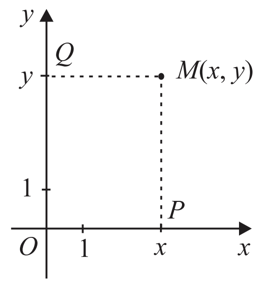


Fig. 2

1.9. Dreapta reală încheiată, simbolurile $-\infty$ și $+\infty$

Necesitatea de a îngloba într-o formulare unitară unele proprietăți fundamentale ale analizei matematice, impune completarea lui $\mathbb{R}$ cu două elemente noi, distincte, de natură neprecizată, notate cu simbolurile $-\infty$ (**minus infinit**) și $+\infty$ (**plus infinit**). Se mai face notația $+\infty = \infty$ (**infinit**).

Notăm $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (citim R barat); $\overline{\mathbb{R}}$ se numește **mulțimea numerelor reale completată** sau **încheiată** (ori **dreapta reală completată** sau **încheiată**).

Relația de ordine $\leq$ (mai mic sau egal) a lui $\mathbb{R}$ se extinde la $\overline{\mathbb{R}}$, definind în plus relațiile de mărime $-\infty \leq x$ și $x \leq \infty$, pentru orice $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Pentru $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, relația $x < y$ (x mai mic decât y) va însemna $x \leq y$ și $x \neq y$.

Exemple $-\infty \leq -\infty$; $-\infty \leq \infty$; $-\infty < \infty$; $\infty \leq \infty$; $-\infty < -10 < \infty$; $-\infty < 10 < \infty$.

Se arată simplu că $\overline{\mathbb{R}}$ capătă o structură de **mulțime total ordonată** (relația $\leq$ are proprietățile 10-13 prezentate la secțiunea 1.2). În plus, orice mulțime nevidă $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ are margine inferioară și margine superioară în $\overline{\mathbb{R}}$, notate prin $\inf A$ și $\sup A$.

Exemple **1**. $\inf \mathbb{R} = -\infty$; $\sup \mathbb{R} = \infty$; $\inf \mathbb{Q} = -\infty$; $\sup \mathbb{Q} = \infty$; $\min \mathbb{N} = 0$; $\sup \mathbb{N} = \infty$.

2. $A = \left\{n \in \mathbb{Z} \mid n^3 - 4n > 0\right\}$; $\min A = -1$; $\sup A = \infty$.

Operațiile algebrice din $\mathbb{R}$ se extind numai parțial la $\overline{\mathbb{R}}$ și își vor găsi justificarea la limite de șiruri. Pentru $x \in \overline{\mathbb{R}}$, definim în plus operațiile:

1. $x + \infty = \infty + x = \infty$, dacă $x \neq -\infty$; $\quad x - \infty = -\infty + x = -\infty$, dacă $x \neq \infty$;

2. $x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \operatorname{sgn}(x) \cdot (\pm\infty)$, dacă $x \neq 0$;

3. $\dfrac{x}{\pm\infty} = 0$, dacă $x \in \mathbb{R}$; $\quad \dfrac{\pm\infty}{x} = \operatorname{sgn}(x) \cdot (\pm\infty)$, dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aceste operații, împreună cu operațiile algebrice din $\mathbb{R}$, se vor numi „*operații cu sens*”.

Din rațiuni care vor fi explicate la limite de șiruri, **nu se definesc expresiile** $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty) \cdot 0$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ și $\dfrac{x}{0}\left(x \in \overline{\mathbb{R}}\right)$, pe care le vom numi „*cazuri exceptate*” sau „*operații fără sens*” sau „*nedeterminări*”.

Exemple $-100 + \infty = \infty$; $5 - \infty = -\infty$; $(-9) \cdot \infty = -\infty$; $(-9) \cdot (-\infty) = \infty$; $7 \cdot \infty = \infty$;

$7 \cdot (-\infty) = -\infty$; $\dfrac{13}{-\infty} = 0$; $\dfrac{-\infty}{-6} = \infty$.

Scurt istoric

1. *Karl Weierstrass* (1815-1897) – matematician german, profesor universitar la Berlin, unul dintre fondatorii teoriei funcțiilor analitice. Este autorul unor teoreme de aproximare a funcțiilor prin polinoame, al unor lucrări în domeniul integralelor, funcțiilor abeliene, funcțiilor derivabile, al calculului variațional și al seriilor convergente.

2. *Georg Cantor* (1845-1918) – matematician geman, profesor universitar la Halle. A pus bazele teoriei mulțimilor și ale teoriei numerelor reale. A introdus numerele cardinale transfinite și diverse noțiuni de topologie și de analiză matematică.

Exerciții propuse

1. Fie $A = (0, 1) \cup (1, 2]$. Să se arate că A este mărginită și să se găsească mulțimea minoranților, mulțimea majoranților, $\inf A$ și $\sup A$. Există $\min A$ și $\max A$?

2. Fie două mulțimi mărginite $A, B \subset \mathbb{R}$. Să se arate că $A \cup B$, $A \cap B$ și $A \setminus B$ sunt mărginite.

3. Fie o mulțime mărginită nevidă $A \subset \mathbb{R}$ și o mulțime nevidă $B \subset A$. Să se arate că:

$$\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A.$$

4. Să se găsească mulțimea minoranților, mulțimea majoranților, inf A, sup A și min A, max A (atunci când există), în următoarele situații:
a) $A = [-1, 3]$; b) $A = (-5, 2] \cup [3, 10)$; c) $A = (-\infty, 5] \cup \{7\}$;
d) $A = \{-2\} \cup [-1, 1] \cup \{10\}$; e) $A = [-2, 10] \cap \mathbb{N}$; f) $A = (-\infty, 2) \cap \mathbb{Z}$.

5. Să se arate că mulțimile următoare sunt mărginite și să se găsească inf A, sup A și min A, max A (atunci când există), în următoarele situații:

a) $A=\left\{\frac{1}{n} \mid n\in \mathbb{N}^*\right\}$; b) $A=\left\{(-1)^n\cdot\frac{2}{n+3} \mid n\in \mathbb{N}\right\}$; c) $A=\left\{\frac{n+1}{4n^2+3} \mid n\in \mathbb{N}\right\}$;

d*) $A=\left\{\frac{3n+1}{5n+2} \mid n\in \mathbb{N}\right\}$; e*) $A=\left\{\frac{2n+1}{3n-1} \mid n\in \mathbb{N}^*\right\}$; f) $A=\left\{\frac{2n+(-1)^n}{n} \mid n\in \mathbb{N}^*\right\}$.

6. Să se arate că mulțimile următoare sunt mărginite și să se găsească inf A, sup A și min A, max A (atunci când există), în următoarele situații:

a) $A=\left\{x\in \mathbb{R} \mid x^2-5x+6\le 0\right\}$; b) $A=\left\{x\in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\} \mid \frac{x-1}{2x-3}\le 0\right\}$;

c) $A=\left\{x\in \mathbb{R} \mid x^2-3x+2\ne 0 \text{ şi } \frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}\le 0\right\}$.

7. Să se dea exemple de mulțimi mărginite $A \subset \mathbb{R}$ care să verifice următoarele proprietăți:
a) *nu* există min A; b) *nu* există max A; c) inf A = min A; d) sup A = max A.

8. Fie o mulțime nevidă mărginită $A \subset \mathbb{R}$ și fie mulțimea $-A=\left\{-x \mid x\in A\right\}$. Să se arate că:

a) sup $(-A) = -$ inf A; b) inf $(-A) = -$ sup A.

9*. Fie două mulțimi nevide mărginite $A, B \subset \mathbb{R}$. Definim mulțimea:

$$A+B=\left\{a+b \mid a\in A \text{ şi } b\in B\right\}.$$

Să se arate că mulțimea $A + B$ este mărginită și avem relațiile:
inf $(A + B)$ = inf (A) + inf (B), sup $(A + B)$ = sup (A) + sup (B).

10*. Fie două mulțimi nevide mărginite $A, B \subset \mathbb{R}_+$. Definim mulțimea:

$$A\cdot B=\left\{a\cdot b \mid a\in A \text{ şi } b\in B\right\}.$$

Să se arate că mulțimea $A \cdot B$ este mărginită și avem relațiile:
inf $(A \cdot B)$ = (inf (A)) · (inf (B)), sup $(A \cdot B)$ = (sup (A) · (sup (B))).

11. Fie două mulțimi nevide mărginite $A, B \subset \mathbb{R}$. Să se arate că:

$$\inf(A\cup B)=\min\{\inf A,\inf B\},\quad \sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}.$$

12. Să se arate că $\min\{a,b\}=\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$ și $\max\{a,b\}=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$.

13. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$, și $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}_+^*$, atunci avem

$$\min\left\{\frac{a_i}{b_i} \mid i=\overline{1,n}\right\} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n} \leq \max\left\{\frac{a_i}{b_i} \mid i=\overline{1,n}\right\}.$$

14. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}^*$ și $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall\, i=\overline{1,n}$, atunci avem:

$$\min\left\{|a_i| \mid i=\overline{1,n}\right\} \leq \sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \leq \max\left\{|a_i| \mid i=\overline{1,n}\right\}.$$

15. Fie o mulțime nevidă mărginită $A \subset \mathbb{R}$ a.î. $\inf A = \sup A$. Ce se poate spune despre A?

16. Să se arate că mulțimea $A=\left\{\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{5^l}+\dfrac{1}{6^m} \mid k,l,m \in \mathbb{N}\right\}$ este mărginită și să se găsească

$\inf A$ și $\sup A$.

17. Fie o mulțime nevidă mărginită $A \subset \mathbb{R}$, și un număr $\varepsilon > 0$. Să se arate că:
a) $\exists\, x \in A$ a.î. $\inf A \leq x < \inf A + \varepsilon$; b) $\exists\, y \in A$ a.î. $\sup A - \varepsilon < y \leq \sup A$.

18*. Fie o mulțime nevidă $A \subset \mathbb{R}$. Numărul δ, $0 \leq \delta \leq \infty$, definit prin $\delta = \sup\limits_{x,y\in A} d(x,y)$, se numește *diametrul* lui A și se notează $\delta = \operatorname{diam}(A)$. Să se arate că:
a) A este mărginită dacă și numai dacă $\operatorname{diam}(A) < \infty$;
b) $\operatorname{diam}(A) = \sup A - \inf A \leq 2\,|A|$, unde $|A| = \sup\{|x| \mid x \in A\}$ (în $\overline{\mathbb{R}}$).

19. Să se reprezinte în fracție zecimală periodică numerele: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{25}{9}$; $\frac{5}{11}$; $\frac{36}{55}$; $\frac{1}{18}$; $\frac{1}{24}$.

20. Să se găsească aproximările zecimale de rang 4 și 6 ale numerelor: $\frac{12}{11}$; $\frac{100}{27}$; $\frac{151}{33}$.

21. Fie numărul $x = 5,(4)$. Să se aducă aproximarea de rang n a lui x la forma

$x^{(n)} = m+\dfrac{p}{q}\cdot\left(1-\dfrac{1}{10^n}\right)$, cu $m,n,p,q \in \mathbb{N}^*$ și să se deducă $x = m+\dfrac{p}{q}$.

22. Fie numărul $x = 2,(31)$. Să se aducă reprezentarea de rang $2n$ a lui x la forma

$x^{(2n)} = m+\dfrac{p}{q}\cdot\left(1-\dfrac{1}{10^{2n}}\right)$, cu $m,n,p,q \in \mathbb{N}^*$ și să se deducă $x = m+\dfrac{p}{q}$.

23. Fie numărul $x = 7,(135)$. Să se aducă reprezentarea de rang $3n$ a lui x la forma
$x^{(3n)} = m + \frac{p}{q}\cdot\left(1 - \frac{1}{10^{3n}}\right)$, cu $m,n,p,q \in \mathbb{N}^*$ și să se deducă $x = m + \frac{p}{q}$.

24. Fie $a = \frac{p}{q}\left(p,q \in \mathbb{N}^*\right)$ o aproximare a lui $\sqrt{2}$. Să se arate că $b = \frac{p+2q}{p+q}$ este o aproximare mai bună a lui $\sqrt{2}$, adică avem $\left|b - \sqrt{2}\right| \le \left|a - \sqrt{2}\right|$.

25. Să se arate că următoarele numere sunt iraționale: $\sqrt{2}; \sqrt{3};\ \sqrt{2}+\sqrt{3};\ \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

26. Să se arate că următoarele numere sunt iraționale: $1+\sqrt{2};\ \sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{3};\ \log_2 3$.

27. Să se dea exemple pentru următoarele situații:

a) $x, y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, dar $x + y \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$; b) $x, y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, dar $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

28. Să se arate că dacă $x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ și $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci $x+y, x\cdot y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

29. Să se arate că dacă $m, n \in \mathbb{N}$ sunt numere impare, atunci $\sqrt{m^2+n^2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

30. Pentru $x > 0, x \neq 1$ și $y \in \mathbb{R}$, să se dea exemple în următoarele situații:

a) $x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $x^y \in \mathbb{Q}$; b) $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $x^y \in \mathbb{Q}$.

31. Fie $x_o \in \mathbb{R}$. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $a \in \mathbb{Q}$ și există $b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a.î. să avem: $\left|a - x_0\right| < \frac{1}{n}$ și $\left|b - x_0\right| < \frac{1}{n}$.

32. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, cu proprietatea că $ax^2 + bx + c > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}$. Să se arate că $a > 0$ și $b^2 - 4ac \le 0$.

33*. Să se arate că pentru orice numere $a < b$, există $m, n \in \mathbb{Z}$ a.î. $a < m + n\sqrt{2} < b$. Altfel spus, mulțimea $A = \left\{m + n\sqrt{2} \mid m,n \in \mathbb{Z}\right\}$ este densă în $\mathbb{R}$.

34. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|x-1| = 5$; b) $|x-2| + |x-3| = 4$;

c) $\left|x^2 - 3x + 2\right| + \left|x^2 - 1\right| = 2$; d) $|x| + x^2 - 5 + |x-1| = 2$.

35. Să se rezolve inecuațiile:

a) $|x-1| \ge 2$; b) $|x-2| + |x| \le 4$; c) $3|x-1| - 3|x-2| \ge 2x - 3$;

d) $\left|x^2 - 2x\right| \ge |x-2|$; e) $\left|x^2 - 4x\right| \ge 3$.

36. Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}, n \ge 2$, $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ și $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$, avem:
$$\left|\varepsilon_1 \cdot x_1 + \varepsilon_2 \cdot x_2 + ... + \varepsilon_n \cdot x_n\right| \le |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|.$$

37. Fie $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $[x]+[y]\leq[x+y]$; dați un exemplu când inegalitatea este strictă.

b) Arătați că $[x]=[y]\Rightarrow|x-y|<1$; dovediți că reciproca nu este adevărată.

38*. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și fie numerele $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}_+^*$ cu proprietatea $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$. Atunci avem $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n$.

39*. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și fie $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Să se arate că:

a) $\dfrac{2}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}} \leq \sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \dfrac{x_1+x_2}{2}$; b) $\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+...+\dfrac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \leq \dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$.

(media armonică ≤ media geometrică ≤ media aritmetică).

40*. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și fie $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

a) $|x_1y_1 + x_2y_2| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$;

b) $|x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2}$.

(inegalitatea Cauchy-Buniakovski).

41*. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și fie $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$$ (inegalitatea lui Minkowski).

42. Să se arate că oricare ar fi numerele $a, b, c, x \in \mathbb{R}_+$, are loc inegalitatea:

$$\left(ax^2+bx+c\right)\left(a+bx+cx^2\right) \geq x^2 \cdot (a+b+c)^2.$$

43. Să se reprezinte pe o axă mulțimile:

$A=\{x\in\mathbb{R} \mid d(x,1)\leq 2\}$; $B=\{x\in\mathbb{R} \mid d(x,2)\leq 3\}$; $C=\{x\in\mathbb{R} \mid d(x,-1)<2\}$;

$D=\{x\in\mathbb{R} \mid d(x,-3)<1\}$; $E=\{x\in\mathbb{R} \mid d(x,3)\geq 2\}$; $F=\{x\in\mathbb{R} \mid 1\leq d(x,2)\leq 4\}$.

44. Să se reprezinte în plan mulțimile ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$):

a) $A=\{(x,y) \mid \max\{|x|,|y|\}\leq 1\}$; b) $A=\{(x,y) \mid |x|+|y|\leq 1\}$;

c) $A=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leq 1\}$; d) $A=\{(x,y) \mid (x-1)^2+(y-2)^2\leq 4\}$;

e) $A=\{(x,y) \mid x\geq 0, y\geq 0, 2x-y+1\leq 0\}$; f) $A=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leq 1, x-y\leq 0\}$;

g) $A=\{(x,y) \mid -x+y\leq 1, x+y\leq 1, y\geq 0\}$; h) $A=\{(x,y) \mid x\geq 0, y\geq 0, x+3y\leq 3\}$.

45. Să se arate că mulțimile A sunt nemărginite și să se găsească inf A, sup A (în $\overline{\mathbb{R}}$):

a) $A=\left\{\left(1+(-1)^n\right)\cdot n \mid n\in\mathbb{N}\right\}$; b) $A=\left\{\dfrac{5-n^2}{n} \mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$; c) $A=\left\{(\mathrm{n}-2)(\mathrm{n}-5) \mid n\in\mathbb{N}\right\}$;

d) $A=\left\{2x+1 \mid x\in\mathbb{R}\right\}$; e) $A=\left\{2x^2-2 \mid x\in\mathbb{R}\right\}$; f) $A=\left\{\dfrac{x+|x|}{x^2} \mid |x|\le 1, x\neq 0\right\}$.

§ 2. Intervale, vecinătăți și puncte de acumulare

Mulțimea numerelor reale are două structuri fundamentale: structura algebrică și structura de ordine. Pentru studiul analizei matematice, pe $\mathbb{R}$ se introduce o a treia structură, „*structura de convergență*”, formată din noțiunea de vecinătate și din toate noțiunile care folosesc acest concept. O „structură de convergență” va fi introdusă și pe $\overline{\mathbb{R}}$.

Vecinătățile se definesc cu ajutorul intervalelor și permit o prezentare unitară a conceptelor de limită.

Vom conveni ca o relație de forma „$r > 0$” să însemne „$r \in \mathbb{R}$ și $r > 0$”.

Definiție

Se numește **interval** o mulțime $I\subset\mathbb{R}$ sau $I\subset\overline{\mathbb{R}}$, cu proprietatea:

„$x \in I, y \in I$ și $x<z<y \Rightarrow z\in I$”.

În particular, mulțimea vidă $\varnothing$ și mulțimea cu un element $\{a\}$, unde $a\in\overline{\mathbb{R}}$, sunt *intervale*, numite *degenerate*. (Propoziția „fals $\Rightarrow$ fals sau adevăr” este un adevăr). Convenim ca prin „interval” să înțelegem „interval nedegenerat” (adică având cel puțin două elemente).

Fie un interval I (subînțeles nedegenerat). Numerele $a = \inf I$ și $b = \sup I$ din $\overline{\mathbb{R}}$ se numesc **extremitățile stângă și dreaptă ale lui *I*** și se verifică ușor relațiile:

$$a<b \text{ și } \left\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\right\}\subset I\subset\left\{x\in\overline{\mathbb{R}} \mid a\le x\le b\right\}.$$

Aceste relații ne permit să clasificăm intervalele I din $\overline{\mathbb{R}}$ în 4 tipuri ($x\in\overline{\mathbb{R}}$):

1. $I=(a,b)=\left\{x \mid a<x<b\right\}$, numit **interval deschis**;

2. $I=[a,b]=\left\{x \mid a\le x\le b\right\}$, numit **interval închis**;

3. $I=(a,b]=\left\{x \mid a<x\le b\right\}$, numit **interval deschis la stânga și închis la dreapta**;

4. $I=[a,b)=\left\{x \mid a\le x<b\right\}$, numit **interval închis la stânga și deschis la dreapta**.

Intervalul I se numește: **mărginit** dacă $a, b\in\mathbb{R}$; **nemărginit** dacă $b-a=\infty$; **compact** dacă I este închis și mărginit. Prin convenție, intervalele degenerate se notează $\varnothing=(a,a)=(a,a]=[a,a)$ și $\{a\}=[a,a]$, unde $a\in\overline{\mathbb{R}}$.

Numărul $b-a$ se numește **lungimea** intervalului I și se notează cu $l(I) = b - a$.

Exemple 1. Intervale mărginite: (0, 1); [0, 1]; (0, 1]; [0, 1); (– 7,2; 100,5); [– 7,2; 100,5].

2. Intervale nemărginite: $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$; $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$; $\mathbb{R}_+^*=(0,\infty]$; $\overline{\mathbb{R}}=[-\infty,\infty]$;

$\overline{\mathbb{R}}_+=[0,\infty]$; $(-\infty,10)$; $[-\infty,-3]$; $(-\infty,5]$; (5, ∞].

3. $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, este reuniunea a două intervale deschise.

4. Intervalul [– 2, 3) este reprezentat (îngroșat) pe axa Ox în figura 3.

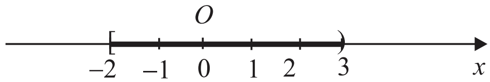


Fig. 3

Definiții

Fixăm un punct $x \in \mathbb{R}$.
Se numește **vecinătate a punctului** x, o mulțime $V \subset \mathbb{R}$ care include un interval deschis centrat în x. În acest caz, există un număr $r > 0$ a.î. să avem $(x - r, x + r) \subset V$. Intervalul deschis $(x - r, x + r)$, de centru x și semilungime r, se numește **vecinătate elementară a lui x**.
Vom nota cu $\mathcal{V}(x)$ mulțimea vecinătăților punctului x și cu $\mathcal{V}_e(x)$ **mulțimea vecinătăților elementare ale lui x**.

În figura 4, este reprezentată o vecinătate elementară $V = (x - r, x + r)$ a lui x.

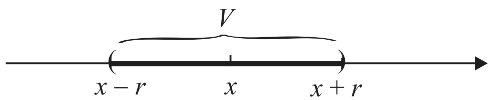


Fig. 4

Proprietatea de separare a punctelor

Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, există $V \in \mathcal{V}_e(x)$ și $W \in \mathcal{V}_e(y)$ a.î. să avem $V \cap W = \varnothing$.

Într-adevăr, putem lua $V = (x - r, x + r)$ și $W = (y - r, y + r)$, unde $r=\dfrac{y-x}{2}$.

Observație:

Noțiunea de vecinătate trebuie raportată întotdeauna la un anumit punct. Astfel, *nu* are sens să spunem „V este o vecinătate”, ci are sens să spunem „V este o vecinătate a lui x”. De exemplu, intervalul $(0,2]$ este o „vecinătate a punctului 1” și nu este o „vecinătate a punctului 2”.

Exemple 1. Mulțimile $V_1=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, $V_2=\left[\frac{1}{2},\frac{11}{10}\right)$, $V_3=[0,2]\cup[3,4]$, $V_4=\left[\frac{1}{2},\infty\right)$, $V_5=\left(-\infty,\frac{101}{100}\right)$ și $V_6=\mathbb{R}$ sunt vecinătăți ale lui 1, deoarece includ vecinătatea elementară $V=\left(1-\frac{1}{100},1+\frac{1}{100}\right)$ *a* lui 1.

2. Mulțimile $V_1=\{2\}\cup(3,4]$ și $V_2=(0,2]$ *nu* sunt vecinătăți ale lui 2, deoarece pentru orice număr $r > 0$, nu includ vecinătatea elementară $(2 - r, 2 + r)$ a lui 2, datorită faptului că $(2-r,2)\cap V_1=\varnothing$ și $(2,2+r)\cap V_2=\varnothing$.

3. Fie $a,b\in \overline{\mathbb{R}}, a<b$. Atunci, intervalul deschis (a, b) este vecinătate pentru orice punct $x \in (a, b)$. În adevăr, pentru $r = \min \{1, x-a, b-x\}$ avem $(x-r, x+r)\subset(a,b)$.

4. Intervalul închis $[a,b]$ unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, este vecinătate pentru orice punct $x \in (a, b)$ și *nu* este vecinătate pentru punctele a și b. Prima afirmație se stabișește ca în exemplul 3.

A doua afirmație rezultă din faptul că pentru orice număr $r > 0$, intervalele $(a - r, a + r)$ și $(b - r, b + r)$ nu sunt incluse în intervalul $[a,b]$ (părțile $(a - r, a)$ și $(b, b + r)$ sunt disjuncte de $[a, b]$).

5. Mulțimile $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ *nu* sunt vecinătăți pentru nici un punct $x \in \mathbb{R}$, deoarece aceste mulțimi sunt dense în $\mathbb{R}$ (orice interval deschis conține atât numere raționale, cât și numere iraționale, deci $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ *nu* includ nici un interval deschis).

Introducem acum o „structură de convergență” pe $\overline{\mathbb{R}}$.

Definiții

1. Se numește **vecinătate a lui** $-\infty$, o mulțime $V\subset\overline{\mathbb{R}}$ care include un interval de forma $[-\infty, -r)$, unde $r>0$. Intervalul $[-\infty, -r)$ se numește **vecinătate elementară a lui** $-\infty$. Vom nota cu $\mathcal{V}(-\infty)$ mulțimea vecinătăților lui $-\infty$ și cu $\mathcal{V}_e(-\infty)$ **mulțimea vecinătăților elementare ale lui** $-\infty$.

2. Se numește vecinătate a lui $+\infty$, o mulțime $V\subset\overline{\mathbb{R}}$ care include un interval de forma $(r, +\infty]$, unde $r > 0$. Intervalul $(r, +\infty]$ se numește **vecinătate elementară a lui** $+\infty$. Vom nota cu $\mathcal{V}(+\infty)$ **mulțimea vecinătăților lui** $+\infty$ și cu $\mathcal{V}_e(+\infty)$ **mulțimea vecinătăților elementare ale lui** $+\infty$.

3. Se numește **vecinătate** în $\overline{\mathbb{R}}$ **a unui punct** $x \in \mathbb{R}$, o mulțime $V\subset\overline{\mathbb{R}}$ care include un interval deschis centrat în x, adică o mulțime V cu proprietatea $V\cap\mathbb{R}\in\mathcal{V}(x)$.

Proprietate de separare a punctelor

Pentru orice $x, y\in \overline{\mathbb{R}}$, $x<y$, există vecinătățile $V\in \mathcal{V}_e(x)$ și $W\in \mathcal{V}_e(y)$ a.î. $V\cap W=\varnothing$ (vecinătăți disjuncte).

Exemple

1. Vecinătăți ale lui $-\infty$ sunt:

$[-\infty,-5)$; $[-\infty,-5]$; $[-\infty,2]\cup[3,4]$; $[-\infty,0)\cup(1,2)$; $\overline{\mathbb{R}}$.

2. Vecinătăți ale lui $+\infty$ sunt:

$\overline{\mathbb{R}}_+=[0,\infty]$; $\overline{\mathbb{R}}_+^*=(0,\infty]$; $(2,\infty]$; $\{0\}\cup[2,\infty]$; $\overline{\mathbb{R}}$.

Noțiunea de punct de acumulare va fi utilizată în elaborarea conceptului de limită.

Definiții

Fie o mulțime nevidă $A \subset \mathbb{R}$.

1. Se numește **punct de acumulare al mulțimii** A, un punct $x \in \overline{\mathbb{R}}$ cu proprietatea că orice vecinătate V a lui x conține cel puțin un punct din A, diferit de x. Mai concis, proprietatea se scrie: $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ avem $(V \cap A) \setminus \{x\} \neq \varnothing$.

Vom nota cu A' **mulțimea punctelor de acumulare ale lui** A.

2. Se numește **punct izolat al lui** A, un punct $y \in A$ care nu este punct de acumulare al lui A. Proprietatea se poate scrie: $\exists V_0 \in \mathcal{V}(y)$ a.î. $V_0 \cap A = \{y\}$.

Vom nota cu A_0 **mulțimea punctelor izolate ale lui** A.

Observații:

1. Punctele de acumulare și cele izolate se pot defini numai cu ajutorul vecinătăților elementare.

2. Dacă x este punct de acumulare pentru A, se poate întâmpla ca x să nu aparțină lui A. De exemplu, 2 este punct de acumulare al intervalului deschis $A = (2, 3)$. Pentru orice vecinătate elementară $V = (2 - r, 2 + r)$, $r > 0$, a lui 2, avem $(V \cap A) \setminus \{2\} = (2, \min\{r, 3\}) \neq \varnothing$.

Exemple

1. Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ și $A = (a, b)$. Atunci $A' = [a, b]$ și $A_0 = \varnothing$.

2. Fie $A = [0,1) \cup \{2\}$. Atunci $A' = [0, 1]$ și $A_0 = \{2\}$.

3. Fie $A = (0,1) \cup (2, \infty)$. Atunci $A' = [0, 1] \cup [2, \infty]$ și $A_0 = \varnothing$.

4. Fie $A = \mathbb{N}$. Atunci $A' = \{\infty\}$ și $A_0 = \mathbb{N}$.

5. Fie $A = \mathbb{Q}$. Atunci $A' = \overline{\mathbb{R}}$ și $A_0 = \varnothing$ (deoarece $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$).

6. Fie $A = \mathbb{Z}$. Atunci $A' = \{-\infty, +\infty\}$ și $A_0 = \mathbb{Z}$.

7. Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este finită, atunci $A' = \varnothing$ și $A_0 = A$.

8. Fie $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Atunci $A' = \{0\}$ și $A_0 = A$.

Scurt istoric

Richard Dedekind (1831-1916), matematician german. A făcut cercetări în domeniul ecuațiilor și al funcțiilor algebrice, precum și în domeniul fundamentelor analizei matematice; a dezvoltat teoria șirurilor de numere și a numerelor iraționale, folosind noțiunea de tăietură pe dreapta reală.

Exerciții propuse

1. Fie numerele $a < b$. Să se arate că $[a, b] = \{\lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+ \text{ și } \lambda + \mu = 1\}$.

2. Să se efectueze operațiile cu intervale: a) $(0, 2) \cap (1, 3]$; b) $(-\infty, 1] \cap (-3, 5)$;
c) $[-1, 2] \cup \left[\frac{1}{2}, 10\right]$; d) $(-\infty, 5] \cup (-1, 6)$; e) $(-2, 5) \setminus (-1, 2)$.

3. Să se arate că: a) $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(-n,n)$; b) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n,n+1)$.

4. a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $k \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că dacă $b - a < k$, atunci $(a, b) \cap \mathbb{Z}$ are cel mult k elemente.

b) Să se găsească numerele $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$, știind că $(a, b) \cap \mathbb{N}$, are un element, iar $(-a, b) \cap \mathbb{N}$ are 6 elemente.

5. Să se arate că dacă I, J sunt intervale deschise, atunci $I \cap J$ este interval deschis.

6. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Să se arate că:

a) $\dfrac{a+b\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \in (a,b)$; b) dacă $a, b \in \mathbb{Q}$, atunci $\dfrac{a+b\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$;

c) $I \setminus \mathbb{Q} \neq \varnothing$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este interval, folosind punctele a) și b).

7. a) Să se scrie sub formă de interval mulțimea soluțiilor inecuației $|x-2| < \dfrac{1}{10}$.

b) Să se găsească $a \in \mathbb{R}$ și $\varepsilon > 0$ astfel încât intervalul $\left(\dfrac{7}{4}, \dfrac{9}{4}\right)$ să fie mulțimea de soluții a inecuației $|x-a| < \varepsilon$.

8. a) Fie $x_0 \in (3, 5)$. Să se arate că există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (3,5)$.

b) Fie $x_1, x_2 \in (3, 5)$, $x_1 < x_2$. Să se arate că există $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ astfel încât să avem: $(x_1-\varepsilon_1, x_1+\varepsilon_1) \subset (3,5)$, $(x_2-\varepsilon_2, x_2+\varepsilon_2) \subset (3,5)$ și
$(x_1-\varepsilon_1, x_1+\varepsilon_1) \cap (x_2-\varepsilon_2, x_2+\varepsilon_2) = \varnothing$.

9. Să se găsească numerele $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care avem relațiile:

a) $\dfrac{1}{2^n} \in \left(0, \dfrac{1}{512}\right)$; b) $\dfrac{n}{3n+1} \in \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{100}\right)$; c) $\dfrac{n}{n^2+99} \in \left(0, \dfrac{1}{100}\right)$;

d) $\dfrac{n^2}{n^2+11} \in \left(\dfrac{99}{100}, \dfrac{101}{100}\right)$; e) $\dfrac{n^2}{2n^2+2} \in \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{100}\right)$; f) $\dfrac{3^n+2}{3^n+1} \in \left(\dfrac{9}{10}, \dfrac{11}{10}\right)$.

10. Să se găsească un număr $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$ să avem:

$$\left|\frac{2n^2}{n^2+n+1} - 2\right| < \frac{1}{10}.$$

11. Să se arate că mulțimile următoare sunt nemărginite și să se determine $\inf A$, $\sup A$ în $\overline{\mathbb{R}}$:

a) $A = \left\{\dfrac{n^2+1}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$; b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - x^2 \geq 0\}$;

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_2(x+3) \geq 1\}$; d) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 5x + 4 \geq 0\}$.

12. Care dintre următoarele mulțimi reprezintă vecinătăți ale lui 2:

a) $(-1,3)$; b) $[2,\infty)$; c) $(-10,2)$; d) $[2^{-3}, 2^3)$.

13. Care dintre următoarele mulțimi reprezintă vecinătăți ale lui ∞ în $\overline{\mathbb{R}}$:

a) $(3,\infty)$; b) $[-1,\infty]$; c) $[-\infty,\infty]$; d) $[10,\infty]$.

14. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și fie $V_1, V_2, \ldots, V_n$ vecinătăți ale lui $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Să se arate că $V = V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n$ reprezintă o vecinătate a lui x_0.

15. Să se determine mulțimea punctelor de acumulare A' și mulțimeas punctelor izolate A_0, ale unei mulțimi $A \subset \mathbb{R}$, în următoarele situații:

a) $A = (0, 1)$; b) $A = [-1,2] \cup \{5,7\}$; c) $A = \mathbb{N}$; d) $A = \mathbb{Q}$;

e) $A = (-1,2] \cup (5,8) \cup \{10\}$; f) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2)(2x+1) \leq 0\}$.

16*. Fie două mulțimi nevide $A, B \subset \mathbb{R}$. Să se arate că:

a) dacă $A \subset B$, atunci $A' \subset B'$; b) $(A \cup B)' = A' \cup B'$; c) $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$.

17. a) Determinați două mulțimi $A, B \subset \mathbb{R}$, astfel încât $(A \cap B)' \neq A' \cap B'$.

b) Pentru fiecare $k = 1, 2, 3$ să se determine câte o mulțime $A \subset \mathbb{R}$, astfel încât A' să aibă k elemente.

18. Să se determine mulțimea punctelor de acumulare A' și mulțimea punctelor izolate A_0, ale unei mulțimi $A \subset \mathbb{R}$, în următoarele situații:

a) $A = \left\{\dfrac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$; b) $A = \left\{\dfrac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$; c) $A = \left\{\dfrac{1}{n} + \left(1 + (-1)^n\right)n \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

19*. Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ și $A = \left\{\dfrac{1}{n} + \cos\dfrac{2n\pi}{k} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Să se găsească A'și A_0.

20*. Să se determine mulțimea punctelor de acumulare A' și mulțimea punctelor izolate A_0, ale unei mulțimi $A \subset \mathbb{R}$, în următoarele situații:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2(x-2) \geq 0\}$; b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x^2 + 2x < 0\}$;

c) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ şi } \cos\dfrac{1}{x} = 1\right\}$; d) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ şi } \sin\dfrac{\pi}{x} > 0\right\}$.

§ 3. Funcții reale de variabilă reală și funcții elementare (funcțiile polinomială, rațională, putere, radical, logaritm, exponențială, funcții trigonometrice directe și inverse)

În acest paragraf, vom face o **recapitulare** a unor noțiuni din clasele anterioare, referitoare la funcțiile reale de variabilă reală.

3.1. Funcții numerice, grafice

Se numește **variabilă** a lui $\mathbb{R}$ un element arbitrar al lui $\mathbb{R}$ notat cu o literă, de exemplu, $x \in \mathbb{R}$.

Se numește **funcție reală de variabilă reală** (sau **funcție numerică**), o funcție $f: A \to B$, unde A și B sunt mulțimi nevide de numere reale ($A \subset \mathbb{R}$ și $B \subset \mathbb{R}$). Funcția f este numită *funcție reală* deoarece valorile lui f sunt numere reale. Funcția f este numită *funcție de variabilă reală* deoarece valorile lui f se mai notează și prin $f(x)$, folosind *variabila reală* $x \in A$.

În loc de *funcție numerică*, vom spune, mai simplu, *funcție*.

Atunci când *mulțimea de definiție A a lui f* (numită și *domeniul de definiție al lui f*) *nu* este precizată, se consideră că A este *mulțimea maximă de definiție a lui f*, adică A este mulțimea tuturor numerelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care au sens operațiile din definiția lui $f(x)$. Atunci când *mulțimea B în care ia valori funcția f* (numită și *codomeniul* lui f) *nu* este precizată, se consideră că $B = \mathbb{R}$. În general, funcțiile supuse studiului vor avea codomeniul $B = \mathbb{R}$, dacă *nu* se precizează altfel.

Funcțiile $f: A \to B$ și $g: C \to D$ ($C \subset \mathbb{R}$ și $D \subset \mathbb{R}$) *sunt egale* și scriem $f = g$ dacă $A = C$, $B = D$ și dacă $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in A$.

Exemple

1. Funcția $f(x)=\sqrt{x^2\cdot(x-1)}$ are mulțimea maximă de definiție $A = \{0\} \cup [1, \infty)$ (s-a rezolvat inecuația $x^2\cdot(x-1)\geq 0$) și are mulțimea în care ia valori $B = \mathbb{R}$.

2. Funcția f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x)=|x|$, este diferită de funcția $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin $g(x)=|x|$, deoarece funcțiile *nu* au aceeași mulțime de definiție.

Graficul funcției $f: A \to B$ este submulțimea G_f a lui $\mathbb{R}^2$, formată din toate perechile $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pentru care $x \in A$ și $y = f(x)$, adică $G_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in A \text{ și } y=f(x)\}\subset\mathbb{R}^2$.

Relația $y = f(x)$, între variabilele $x \in A$ și $y \in B$, se numește **ecuația graficului lui f**.

Să considerăm dat un plan $\mathcal{P}$ în care a fost fixat un sistem ortonormal de axe de coordonate xOy. Să reprezentăm mulțimea A ca mulțime de puncte pe axa absciselor Ox și valorile lui f ca puncte pe axa ordonatelor Oy. Se numește **reprezentare grafică a funcției** f, mulțimea punctelor $M(x, y)$ din planul $\mathcal{P}$ care au abscisa $x \in A$ și ordonata $y = f(x)$ și va fi notată tot cu G_f, adică: $G_f=\{M(x,y)\in\mathcal{P} \mid x\in A \text{ şi } y=f(x)\}\subset\mathcal{P}$.

A reprezenta grafic funcția f (sau a *trasa graficul funcției f*) înseamnă a desena graficul G_f în planul $\mathcal{P}$ cât mai exact și cuprinzând puncte caracteristice ale lui.

Exemple

1. Funcția modul $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x|$, are graficul reprezentat în figura 5.

2. Funcția $f:[-2,2]\to\mathbb{R}, f(x)=[x]$ (partea întreagă a lui x) are graficul reprezentat în figura 6.

3. Funcția $f:[-2,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x, & \text{pentru } x\in[-2,0] \\ 2-x^2, & \text{pentru } x\in(0,2] \end{cases}$, are graficul reprezentat în figura 7.

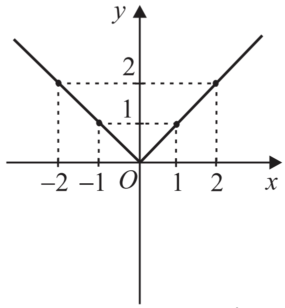


Fig. 5

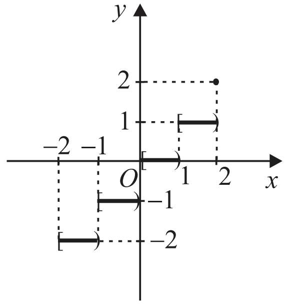


Fig. 6

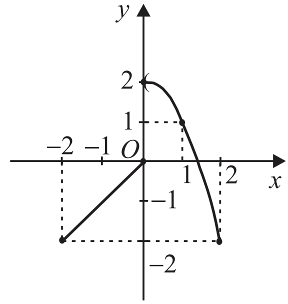


Fig. 7

3.2. Imagini de mulțimi. Restricții, corestricții și prelungiri de funcții

Fie o funcție $f : A \to B\left(A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}\right)$ și o submulțime X a lui A ($X \subset A$).

Se numește **imagine a lui *X* prin *f***, mulțimea valorilor $f(x)$ ale punctelor $x \in X$ și se notează cu $f(X)$, adică mulțimea $f\left(X\right) = \left\{f\left(x\right) \middle| x \in X\right\} \subset \mathbb{R}$.

În particular, pentru $X = A$, mulțimea $f(A)$ se numește **mulțimea valorilor lui *f*** sau **imaginea lui *f*** și se notează $Im(f) = f(A)$; $Im(f)$ diferă, în general, de mulțimea B în care f ia valori.

Exemplu Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$. Avem: $Im\left(f\right) = \left[1, \infty\right)$; $f\left(\left[0,1\right]\right) = \left[1,2\right]$; $f\left(\left[1,2\right]\right) = \left[2,5\right]$; $f\left(\left[-3,-2\right)\right) = \left(5,10\right]$; $f\left(\left\{5\right\}\right) = \left\{26\right\}$.

Fie două mulțimi nevide $X \subset A$ și $Y \subset B$. Presupunem că $f(A) \subset Y$.

Restricția lui f la X este funcția $f_X = f|_X : X \to B, f_X\left(x\right) = f\left(x\right), \forall x \in X$.

Corestricția lui f la Y este funcția $f^Y : A \to Y, f^Y\left(x\right) = f\left(x\right), \forall x \in A$.

Se numește **prelungire a lui *f*** o funcție $g : C \to D\left(C \subset \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}\right)$ care are proprietățile: $A \subset C$, $B \subset D$ și $g(x) = f(x)$, $\forall x \in A$.

Exemplu Fie funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$; $g : \mathbb{R} \to [-1, 1], g(x) = \cos x$; $h : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $h(x) = \cos x$. Aceste funcții sunt diferite: diferă fie mulțimea de definiție, fie codomeniul. Funcția f este o prelungire a funcțiilor g și h, g este corestricție a lui f, h este restricție a lui g, iar h este restricție și corestricție a lui f.

3.3. Compunerea și inversarea funcțiilor

Să considerăm două funcții $f : A \to B$ ($A \subset \mathbb{R}$ și $B \subset \mathbb{R}$) și $g : C \to D$ ($C \subset \mathbb{R}$ și $D \subset \mathbb{R}$).

Dacă $f(A) \subset C$, atunci definim **compunerea funcției *g* cu funcția *f*** ca fiind funcția $h = g \circ f : A \to D$, $h(x) = g(f(x))$, $\forall\, x \in A$.

Funcția identică a mulțimii *A* este funcția $id_A : A \to A$, $id_A\left(x\right) = x$, $\forall x \in A$.

Avem relațiile: $f \circ id_A = f$ și $id_B \circ f = f$.

Funcția $f: A \to B$ se numește:

1. injectivă dacă $\forall\, x, y \in A$, cu $x \neq y$, avem $f(x) \neq f(y)$;

2. surjectivă dacă $f(A) = B$;

3. bijectivă dacă f este injectivă și surjectivă;

4. inversabilă dacă există o funcție $\varphi: B \to A$ a.î. $\varphi \circ f = id_A$ și $f \circ \varphi = id_B$ (φ este unică, se numește **inversa lui *f*** și se notează $\varphi = f^{-1}$); f este inversabilă dacă și numai dacă f este bijectivă; $\varphi = f^{-1}$ face ca fiecărui $y \in B$ să îi corespundă soluția unică $x = \varphi(y) \in A$ a ecuației $f(x) = y$.

Exemple

1. Funcția $f:[0,\infty)\to[0,\infty), f(x)=x^2$, este bijectivă și inversa ei este, prin definiție, *funcția radical de ordin* 2, $f^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty), f^{-1}(x)=\sqrt{x}$.

2. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, este bijectivă și inversa ei este, prin definiție, *funcția radical de ordin* 3, $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$.

3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, n număr par. Funcția $f:[0,\infty)\to[0,\infty), f(x)=x^n$ este bijectivă și inversa ei este, prin definiție, *funcția radical de ordin par n*, $f^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty), f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$.

4. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, n număr impar. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^n$, este bijectivă și inversa ei este, prin definiție *funcția radical de ordin impar n*, $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$.

5. Fie un număr $a > 0$, $a \neq 1$. Funcția $f:\mathbb{R}\to(0,\infty), f(x)=a^x$, este bijectivă și inversa ei este, prin definiție, *funcția logaritmică de bază a*, $f^{-1}=\log_a:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f^{-1}(x)=\log_a(x)$.

6. Funcțiile $\sin:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ și $\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$, sunt bijective și inversele lor sunt, prin definiție, respectiv funcțiile $\arcsin:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ și $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$. Acestor funcții li se asociază funcțiile notate la fel: arcsin, arccos : $[-1, 1] \to \mathbb{R}$.

7. Funcțiile $\text{tg}:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ și $\text{ctg}:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ sunt bijective și inversele lor sunt, prin definiție, funcțiile: $\text{arctg}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ și arcctg : $\mathbb{R} \to (0, \pi)$. Acestor funcții li se asociază funcțiile notate la fel: arctg, arcctg : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3.4. Operații algebrice cu funcții

Vom considera două funcții $f, g: A \to \mathbb{R}$, definite pe aceeași mulțime $A \subset \mathbb{R}$. Vom considera un număr $\alpha \in \mathbb{R}$. Folosind structura algebrică a lui $\mathbb{R}$, introducem următoarele *operații cu funcții*:

1. *suma* $f+g:A\to\mathbb{R},\ (f+g)(x)=f(x)+g(x),\ \forall x\in A$;

2. *diferența* $f-g:A\to\mathbb{R},\ (f-g)(x)=f(x)-g(x), \forall x\in A$;

3. *înmulțirea* cu numere reale $\alpha f:A\to\mathbb{R},\ (\alpha f)(x)=\alpha\cdot f(x),\ \forall x\in A$;

4. *produsul* $fg:A\to\mathbb{R},\ (fg)(x)=f(x)\cdot g(x),\ \forall x\in A$;

5. *inversa algebrică și funcția-cât* $\frac{1}{g},\ \frac{f}{g}:B\to\mathbb{R}$, unde $B=\{x\in A \mid g(x)\neq 0\}$ este presupusă nevidă, definite prin relațiile $\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{g(x)}$ și $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ \forall x\in B$.

Folosind structura de ordine a lui $\mathbb{R}$, se pot defini:

1. *funcția minimum* $\varphi=\min(f,g):A\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\min\{f(x),g(x)\},\ \forall x\in A$;

2. *funcția maximum* $\psi=\max(f,g):A\to\mathbb{R}$, $\psi(x)=\max\{f(x),g(x)\},\ \forall x\in A$;

3. *funcția-modul* $|f|:A\to\mathbb{R}$, $(|f|)(x)=|f(x)|, \forall x\in A$; avem $|f|=\max(f,-f)$.

Observație:

Noțiunile de funcție sumă, funcție produs, funcție minimum și funcție maximum se pot extinde, în același mod, pentru un număr finit de funcții $f_1,\dots,f_n:A\to\mathbb{R}\,(n\in\mathbb{N}, n\geq 3)$.

3.5. Funcții monotone

Să considerăm o funcție $f:A\to\mathbb{R}$ ($A\subset\mathbb{R}$) și o submulțime $B\subset A$. Spunem că f este *funcție*:

1. *monoton crescătoare* (sau *crescătoare*) *pe B* dacă: $x, y\in B$ și $x<y \Rightarrow f(x)\leq f(y)$;

2. *strict crescătoare pe B* dacă: $x, y\in B$ și $x<y\Rightarrow f(x)<f(y)$;

3. *monoton descrescătoare* (sau *descrescătoare*) *pe B* dacă: $x, y\in B$ și $x<y\Rightarrow f(x)\geq f(y)$;

4. *strict descrescătoare pe B*, dacă: $x, y\in B$ și $x<y\Rightarrow f(x)>f(y)$;

5. *monotonă pe B* dacă f este sau monoton crescătoare pe B sau monoton descrescătoare pe B;

6. *strict monotonă pe B*, dacă f este sau strict crescătoare pe B sau strict descrescătoare *pe B*;

7. *constantă pe B* și notăm $f=$ const. pe B dacă există $c\in\mathbb{R}$ a.î. $f(x)=c,\ \forall x\in B$.

Atunci când *nu* se specifică mulțimea B, se subînțelege că ea este $B=A$.

De exemplu, se spune „f este monoton crescătoare”, în loc să se spună „f este monoton crescătoare pe A”.

Exemplu Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x|$, cu graficul în figura 5, *nu* este monotonă, dar f este strict descrescătoare pe $(-\infty,0]$ și f este strict crescătoate pe $[0,\infty)$.

3.6. Funcții pare și funcții impare

Fie o mulțime $A \subset \mathbb{R}$, simetrică față de $O\left(x \in A \Leftrightarrow -x \in A\right)$ și o funcție $f : A \to \mathbb{R}$.

Spunem că f este:

1. funcție pară dacă $\forall\, x \in A$, avem $f(-x) = f(x)$; graficul funcției f este simetric față de axa Oy;

2. funcție impară dacă $\forall\, x \in A$, avem $f(-x) = -f(x)$; graficul funcției f este simetric față de orginea O a sistemului de axe de coordonate.

Exemplu Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Funcția putere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f\left(x\right) = x^n$, este funcție pară dacă n este număr par și este funcție impară dacă n este număr impar.

3.7. Funcții periodice

Fie un număr $T \in \mathbb{R}^*$, o mulțime $A \subset \mathbb{R}$ și o funcție $f : A \to \mathbb{R}$. Spunem că funcția f este **periodică de perioadă *T***, dacă pentru orice $x \in A$ avem $x \pm T \in$ A și $f(x + T) = f(x)$.

În acest caz, pentru orice $n \in \mathbb{Z}^*$, numărul nT este perioadă a lui f. Dacă există o cea mai mică perioadă $T_0 > 0$, atunci T_0 se numește **perioadă principală a lui *f***.

Exemple **1**. Funcțiile sin, cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt periodice cu perioada principală $T_0 = 2\pi$.

2. Funcțiile $\mathrm{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$ și $\mathrm{ctg} : \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$ sunt periodice cu perioada principală $T_0 = \pi$.

3. *Funcția lui Dirichlet** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f\left(x\right) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ pentru } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, este periodică de perioadă orice număr $T \in \mathbb{Q}^*$ și nu are perioadă principală.

3.8. Margini și puncte de extrem ale funcțiilor

Fie o mulțime $A \subset \mathbb{R}$ și o funcție $f : A \to \mathbb{R}$.

Marginile inferioară și superioară ale lui f sunt marginile imaginii $f(A)$ și se notează:

$$m_f = \inf_{x \in A} f\left(x\right) = \inf f\left(A\right) \in \left[-\infty, \infty\right) \text{ și } M_f = \sup_{x \in A} f\left(x\right) = \sup f\left(A\right) \in \left(-\infty, \infty\right].$$

Spunem că funcția f este:

1. *mărginită inferior* (sau *minorană*) dacă $-\infty < m_f$;

2. *mărginită superior* (sau *majorată*) dacă $M_f < \infty$;

3. *mărginită* dacă $-\infty < m_f \le M_f < \infty$.

Spunem că un punct $a \in A$ este **punct de minim al lui *f*** dacă $f(a) = m_f$; în acest caz, mai spunem că $f(a)$ este **valoarea minimă a lui *f*** și că *f își atinge marginea inferioară în a.*

Spunem că un punct $b \in A$ este **punct de maxim al lui *f***, dacă $f(b) = M_f$; în acest caz, mai spunem că $f(b)$ este **valoarea maximă a lui *f*** și că *f își atinge marginea superioară în b.*

Punctele de minim și de maxim ale lui f se numesc **puncte de extrem ale lui *f***, iar valorile corespunzătoare ale lui f se numesc **valori extreme ale lui *f***.

* Peter Dirichlet (1805-1859), matematician german.

Observație. Funcția f este mărginită dacă și numai dacă există un număr $M \in \mathbb{R}_+$ a.î. pentru orice $x \in A$ să avem $|f(x)| \leq M$. (Se ia $M = \max\{|m_f|, |M_f|\}$).

Exemple 1. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - x^2$, este reprezentată în figura 8; f *nu* este mărginită inferior $(m_f = -\infty)$; f este mărginită superior ($M_f = 1$); f *nu* are puncte de minim; f are un singur punct de maxim: $x = 0$, deoarece $f(0) = 1 = M_f$.

2. Funcția $f : (-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x^2$, este reprezentată în figura 9; f este mărginită, $m_f = -1$ și $M_f = 1$; $\sqrt{2}$ este singurul punct de minim; 0 este singurul punct de maxim.

3. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ||x| - 1|$, este reprezentată în figura 10; f este mărginită inferior ($m_f = 0$); f nu este mărginită superior ($M_f = \infty$); -1 și 1 sunt puncte de minim ($f(-1) = f(1) = 0 = m_f$); nu există puncte de maxim; se poate spune însă că 0 este punct de maxim al lui f pe vecinătatea $V = (-1, 1)$ a lui 0.

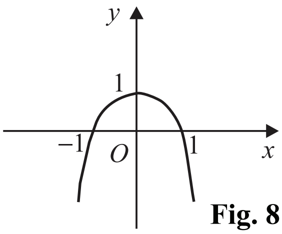


Fig. 8

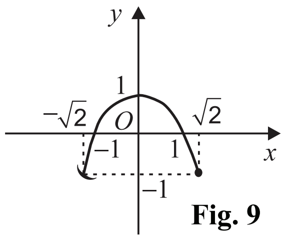


Fig. 9

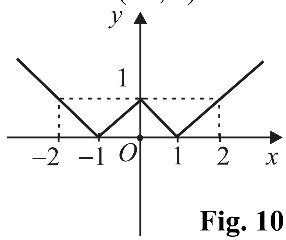


Fig. 10

3.9. Funcții elementare

Funcțiile prezentate în cele ce umează la numerele 1-10, studiate și în clasele anterioare, se vor numi *funcții principale*.

1. Funcția polinomială este o funcție de forma $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$P(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_{p-1} x + a_p, \forall x \in \mathbb{R},$$

unde $p \in \mathbb{N}$ și $a_0, a_1, \ldots, a_p$ sunt numere reale, numite **coeficienții funcției polinomiale**.

Dacă $a_p \neq 0$, atunci funcția polinomială P are gradul grad(P) = p.

Funcția polinomială identic zero $O : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $O(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, are grad($O$) = $-\infty$.

Exemple **1**. Funcția polinomială de gradul zero este funcție constantă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a$, unde $a \in \mathbb{R}^*$. Graficul lui f este o dreaptă paralelă cu axa Ox (fig. 11).

2. Funcția (polinomială) de gradul întâi este funcția de forma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Graficul lui f este o dreaptă. În figura 11, este reprezentată grafic funcția $f(x) = 2x - 1$.

3. Funcția (polinomială) de gradul doi este funcția de forma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Graficul lui f este o parabolă cu axa de simetrie paralelă cu axa Oy. În figura 12, este reprezentată grafic funcția $f(x) = x^2 - 2x$.

4. Funcția polinomială de gradul trei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3$, este reprezentată în figura 13.

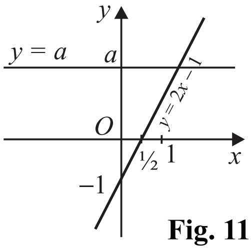


Fig. 11

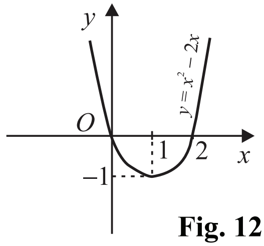


Fig. 12

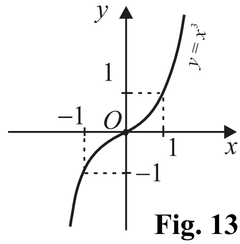


Fig. 13

2. Funcția rațională este funcția de forma $f=\dfrac{P}{Q}:D\to\mathbb{R}$, unde P și Q sunt funcții polinomiale, $Q\neq O$, și D este mulțimea maximă de definiție, adică $D=\{x\in\mathbb{R} \mid Q(x)\neq 0\}$.

Exemple **1**. Funcția rațională $f(x)=\dfrac{1}{x}$ are mulțimea maximă de definiție $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ și este reprezentată în figura 14. Această funcție este monoton descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$ și pe intervalul $(0,\infty)$, dar *nu* este monotonă pe D deoarece $-1<1$ și $f(-1)=-1<f(1)=1$.

2. Funcția rațională $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-2x}$ are mulțimea maximă de definiție $D=\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$ deoarece ecuația $x^2-2x=0$ are rădăcinile $x=0$ și $x=2$.

3. Funcția rațională $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ are mulțimea maximă de definiție $D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ deoarece ecuația $x^2-1=0$ are rădăcinile $x=-1$ și $x=1$. Funcția f diferă de funcția obținută prin simplificarea cu $x-1$, $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$, deoarece g este definită pe mulțimea $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Avem totuși relația $f(x)=g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

3. Funcția radical de ordin par $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, este funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $\forall\, x\geq 0$. Funcția f este strict crescătoare, iar graficul său este reprezentat în figura 15.

4. Funcția radical de ordin impar $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$, este funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Funcția f este strict crescătoare, iar graficul său este reprezentat în figura 16.

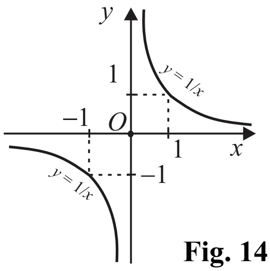


Fig. 14

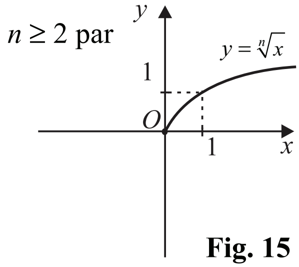


Fig. 15

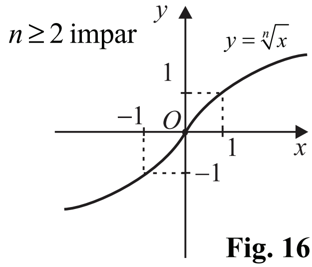


Fig. 16

5. Funcția exponențială de bază *a* ($a > 0, a \neq 1$) este funcția $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $0 < a < 1$, funcția f_a este strict descrescătoare și este reprezentată grafic în figura 17. Pentru $a > 1$, funcția f_a este strict crescătoare și este reprezentată grafic în figura 18.

Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, avem identitatea fundamentală $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

6. Funcția logaritmică de bază *a* ($a > 0$, $a \neq 1$) este funcția $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Pentru $0 < a < 1$, funcția $\log_a$ este strict descrescătoare și este reprezentată grafic în figura 19. Pentru $a > 1$, funcția $\log_a$ este strict crescătoare și este reprezentată grafic în figura 20.

Pentru orice $x > 0$ și $y > 0$, avem identitatea fundamentală $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Pentru $a = 10$ se fac notațiile $\log_{10} = \log = \lg$ (*logaritm zecimal*).

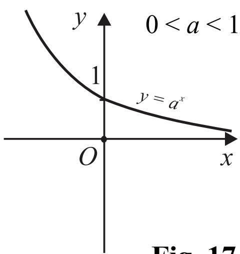


Fig. 17

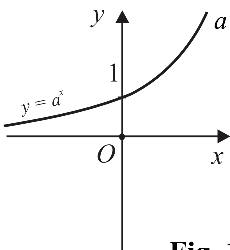


Fig. 18

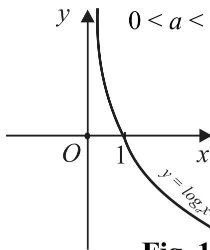


Fig. 19

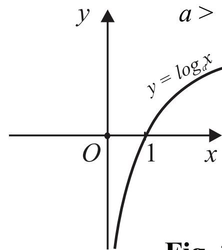


Fig. 20

7. Funcția putere de exponent *a*, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, este funcția $f_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = x^a = 10^{a \cdot \lg x}$, $\forall x > 0$. Pentru $a < 0$, funcția f_a este strict descrescătoare și pentru $a > 0$, funcția f_a este strict crescătoare. Funcția f_a este reprezentată în figurile 21, 22 și 23.

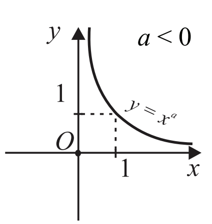


Fig. 21

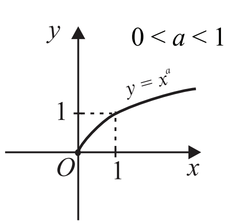


Fig. 22

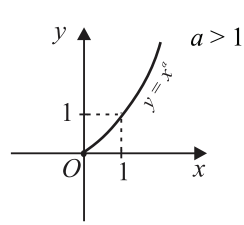


Fig. 23

Exemple $f_{-\frac{2}{3}}(x) = x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; $f_{\frac{2}{3}}(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$; $f_{\frac{4}{3}}(x) = x^{\frac{4}{3}} = x \cdot \sqrt[3]{x}\ (x > 0)$.

8. Funcțiile trigonometrice directe sinus și cosinus sunt funcțiile $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pentru $x \in \mathbb{R}$, valorile $\sin x$ și $\cos x$ *se interpretează geometric ca fiind sinusul și cosinusul unui unghi cu măsura de x radiani*. Funcțiile sinus și cosinus sunt reprezentate în figurile 24 și 25.

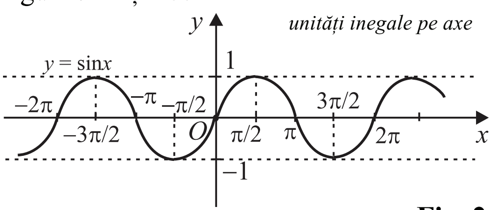


Fig. 24

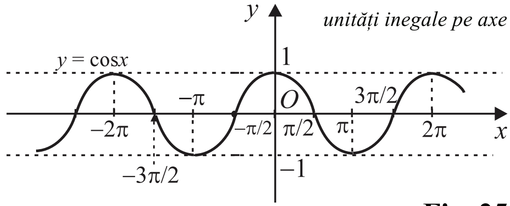


Fig. 25

9. Funcțiile trigonometrice directe tangentă și cotangentă sunt funcțiile

$$\mathrm{tg} = \frac{\sin}{\cos} : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R} \text{ și } \mathrm{ctg} = \frac{\cos}{\sin} : \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}.$$

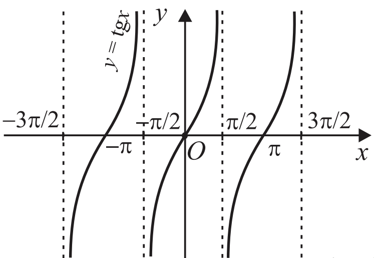


Fig. 26

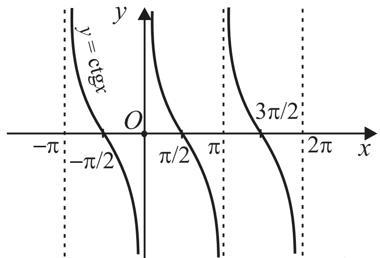


Fig. 27

Pentru $x \in \mathbb{R}$, valorile $\mathrm{tg}x$ și $\mathrm{ctg}x$ *se interpretează geometric ca fiind tangenta și cotangenta unui unghi cu măsura de x radiani*. Funcțiile tg și ctg, reprezentate în figurile 26 și 27, sunt impare, periodice de perioadă principală π și au mulțimea valorilor $\mathbb{R}$.

10. Funcțiile trigonometrice inverse sunt funcțiile: $\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $\mathrm{arcctg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aceste funcții sunt repezentate grafic în figurile 28, 29, 30 și, respectiv, 31.

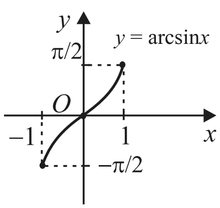


Fig. 28

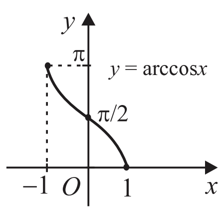


Fig. 29

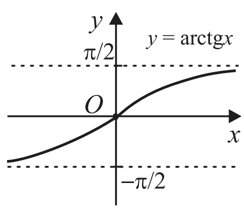


Fig. 30

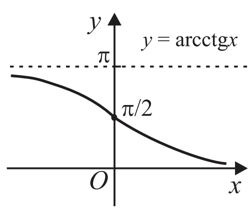


Fig. 31

11. Noțiunea de funcție elementară

Vom defini mai întâi **funcțiile elementare principale**. Acestea sunt:

a) funcția polinomială $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

b) funcția rațională $f = \dfrac{P}{Q} : D \to \mathbb{R}$, unde P și Q sunt funcții polinomiale, $Q \neq O$, și $D = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$;

c) funcția exponențială de bază *a* ($a > 0$, $a \neq 1$), $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

d) funcția logaritmică de bază *a* ($a > 0$, $a \neq 1$), $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$;

e) funcția putere de exponent $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $f_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = x^a$, $\forall x > 0$;

f) funcțiile trigonometrice directe sin, cos : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tg : $C \to \mathbb{R}$ și ctg : $D \to \mathbb{R}$, unde $C = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ și $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$;

g) funcțiile trigonometrice inverse arcsin, arccos : $(-1, 1) \to \mathbb{R}$ și arctg, arcctg : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Toate aceste funcții au codomeniul $\mathbb{R}$ și sunt definite pe intervale deschise sau pe reuniuni de intervale deschise.

Se numește **funcție elementară**, o funcție care se obține din **funcțiile elementare principale** prin aplicarea succesivă, de un număr finit de ori, a operațiilor de adunare și înmulțire și a operației de compunere.

Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ și $g : B \to \mathbb{R}$ sunt funcții elementare, atunci *suma* și *produsul* sunt funcțiile $f + g, f \cdot g : A \cap B \to \mathbb{R}$ (în ipoteza $A \cap B \neq \emptyset$), iar *compunerea* este funcția $g \circ f : f^{-1}(B) \to \mathbb{R}$ (în ipoteza $f^{-1}(B) \neq \emptyset$). *Toate funcțiile elementare au codomeniul $\mathbb{R}$ și se poate arăta că sunt definite pe intervale deschise sau pe reuniuni de intervale deschise.*

Exemplu

Fie funcția radical $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \geq 0$, și fie restricția sa $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $\forall x > 0$. Funcția f este funcție principală, dar nu este funcție elementară (domeniul lui f **nu** este interval deschis). Totuși, restricția g este o funcție elementară principală (este funcția putere $g(x) = x^{1/2}$, $\forall x > 0$).

Scurt istoric

Arhimede (287-212 î.e.n., născut la Siracuza, Sicilia), a fost un învățat grec al antichității. În matematică, s-a ocupat de calculul lungimii curbelor și al ariilor și volumelor unor corpuri speciale. A dat o aproximare a raportului dintre lungimea cercului și diametru (numărul π), a calculat raportul dintre volumul cilindrului și al sferei care îl circumscrie, a studiat numerele mari („axioma sau proprietatea lui Arhimede”) și s-a ocupat de proprietățile spiralelor. A calculat aria unui segment de parabolă, pentru care este considerat precursor al „calculului integral”.

În mecanică, a descoperit principiul fundamental al hidrostaticii (cunoscut sub denumirea de „legea lui Arhimede”), conform căruia orice corp scufundat într-un lichid este împins de jos în sus cu o forță egală cu greutatea volumului de lichid dislocuit. A făcut numeroase invenții: șuruburi fără sfârșit, scripeți mobili, sisteme de pârghii, roți dințate, dispozitive de luptă, mașini pentru irigarea câmpurilor. A realizat un planetariu pentru studierea mișcărilor soarelui, lunii și planetelor.

Arhimede a împiedicat timp de trei ani ca trupele romane asediatoare să pătrundă în Siracuza și se povestește că a incendiat flota romană cu ajutorul unui număr mare de oglinzi care concentrau lumina solară. A fost omorât atunci când a fost cucerit orașul.

Exerciții propuse

*Atunci când **nu** se specifică altfel, funcțiile au domeniul de definiție maxim (mulțimea valorilor $x \in \mathbb{R}$ pentru care au sens operațiile indicate în expresia funcției) și codomeniul $\mathbb{R}$.*

1. Să se determine domeniul maxim de definiție pentru următoarele funcții:

a) $f(x)=\sqrt{(2-x)(x+5)}$; b) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$; c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x^2-6x+9}}{2x^2+3x-5}$;

d) $f(x)=\dfrac{\lg(2x^2-3x)}{\sqrt{x-1}}$; e) $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$; f) $f(x)=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

g) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2^x-4}}{4^x-5\cdot 2^x+4}$; h) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4\cdot\pi^2-x^2}}{\sin x}$; i) $f(x)=\dfrac{\log(5^x-25)}{2\cos 2x-1}$.

2. Să se verifice dacă următoarele funcții sunt egale.

a) $f:\mathbb{R}\to[0,\infty), f(x)=x^2$ și $g:[0,\infty)\to[0,\infty), g(x)=x^2$;

b) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+1, \text{ dacă } x\geq 1\\ -x, \text{ dacă } x<1\end{cases}$ și $g(x)=\begin{cases}2x+1, \text{ dacă } x>1\\ -x, \text{ dacă } x\leq 1\end{cases}$;

c) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ și $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, \text{ dacă } x\neq 0\\ 0, \text{ dacă } x=0\end{cases}$;

d) $f,g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ și $g(x)=\sin(\arccos x)$;

e) $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5^{(\log_3 x)}$ și $g(x)=x^{(\log_3 5)}$;

f) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-1|+2^x+2^{-x}$ și $g(x)=\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{4^x+4^{-x}+2}$.

3. Pentru $I\subset\mathbb{R}$ interval, să se determine $f(I)=\{f(x)\mid x\in I\}$ în următoarele situații:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, \text{ dacă } x<0\\ 1, \text{ dacă } x\geq 0\end{cases}$ și $I=(-3,5]$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x\in\mathbb{Q}\\ 0, \text{ dacă } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ și $I=(-1,1)$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-1$ și $I=[-7,2]$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^{x-1}$ și $I=[0,1]$;

e) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$ și $I=[0,2\pi]$.

4. Pentru $J\subset\mathbb{R}$ interval, să se găsească $I=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\in J\}$ în următoarele situații:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$, $J=(-5,2)$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$, $J=(0,2)$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$, $J=\left(\dfrac{1}{2},1\right)$; d)) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x, \text{ dacă } x\in\mathbb{Q}\\ x^3, \text{ dacă } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, $J=(0,1)$.

5. Să se studieze paritatea următoarelor funcții:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$; b) $f(x)=\dfrac{1+x^6+x^{12}}{x^3-x}$; c) $f(x)=\left|\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\right|$; d) $f(x)=\left|x\sqrt{|x|}\right|$;

e) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{1-x^2}$; f) $f(x)=\cos x\cdot\sin x$; g) $f(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$; h) $f(x)=10^x+10^{-x}$.

6. Fie o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se arate că există $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, g funcție pară și h funcție impară, astfel încât $f(x)=g(x)+h(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

7. Fie A, $B\subset\mathbb{R}$, două mulțimi simetrice față de 0 $(x\in A\Leftrightarrow -x\in A)$ și $f:A\to B$ o funcție inversabilă impară. Să se arate că inversa $f^{-1}:B\to A$ este funcție impară. Ce se poate spune despre f^{-1}, dacă f este funcție pară?

8. Să se studieze periodicitatea funcțiilor următoare, indicând și perioada, atunci când este cazul.

a) $f(x)=\cos x$; b) $f(x)=\cos(3x+4)$; c) $f(x)=\sin x$; d) $f(x)=\{x\}=x-[x]$ (partea fracționară); e) $f(x)=\cos\dfrac{x}{4}$; f*) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\{x\}}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$; g) $f(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x\in\mathbb{Q}\\ 0, \text{ dacă } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$;

h) $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$.

9. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$ cu proprietatea: $f(x+2)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)},\forall x\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f(x+4)$, $f(x+6)$, $f(x+8)$.
b) Să se stabilească dacă f este periodică.

10. Să se reprezinte grafic funcțiile următoare:

a) $f=\operatorname{sgn}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+4x$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, \text{ dacă } x<0\\ 1, \text{ dacă } x\geq 0\end{cases}$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|2x-1|+|x+1|$; e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x^2-4x+3|$;

f) $f:[-2,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]$; g) $f:[1,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{[x-3]}{[x]}$;

h) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\cos 2x$; i) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2+\arcsin x$;

j) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max\{3x+2,x-2\}$;

k) $f:(-5,10)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max\{x^2,x-[x]\}$;

l) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sgn}(x)\cdot\min\{|x|,|x|^3\}$.

11. Să se reprezinte grafic funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, aflată în următoarele situații:

a) $f(x)=x+1$, $\forall x\in[0,2)$ și $f(x+2)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

b) $f(x)=x^2-4$, $\forall x\in[2,\infty)$ și $f(x+2)=f(2-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

12. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{2x^2+8x+9}$. Să se arate că $f(x-2)=f(-x-2)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

13. Pentru funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, să se calculeze $g\circ f$ și $f\circ g$ în următoarele situații:

a) $f(x)=x^2$, $g(x)=2x+5$; b) $f(x)=\cos x$, $g(x)=\operatorname{sgn}(x)$;

c) $f(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x\in\mathbb{Q}\\ 0, \text{ dacă } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}\pi, \text{ dacă } x\le 3\\ 1, \text{ dacă } x>3\end{cases}$.

14. Verificați dacă următoarele funcții sunt bijective și calculați f^{-1}, în caz afirmativ.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$; b) $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=3^{x+2}$;

c) $f:\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_3(2x-1)$; d) $f:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\to[-2,2]$, $f(x)=2\sin x$.

15*. Fie $a, b, c, d\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, este injectivă dacă și numai dacă $b^2-3ac\le 0$

16*. Fie $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax-[ax]$. Să se studieze injectivitatea lui f.

17. Fie $f:\mathbb{R}\to B$, $f(x)=2+3\cos x$. Să se găsească mulțimea B astfel încât f să fie surjectivă.

18. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se notează $f_n=f\circ f\circ\ldots\circ f$ de n ori. Dacă există $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f_n(x)=ax+b$, $\forall x\in\mathbb{R}$, să se arate că $f(b)-b=a\cdot f(0)$.

19. Fie o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f\circ f$ este funcție constantă. Să se stabilească dacă f este funcție constantă.

20*. Pentru funcțiile următoare, să se arate că sunt bijective și să se calculeze inversa f^{-1}:

a) $f:\overline{\mathbb{R}}\to[-1,1]$, $f(x)=\begin{cases}-1, \text{ dacă } x=-\infty\\ \dfrac{x}{1+|x|}, \text{ dacă } x\in\mathbb{R}\\ 1, \text{ dacă } x=\infty\end{cases}$;

b) $f:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\to\overline{\mathbb{R}}$, $f(x)=\begin{cases}-\infty, \text{ dacă } x=-\dfrac{\pi}{2}\\ \operatorname{tg}x, \text{ dacă } x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \infty, \text{ dacă } x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

§4. Limita unui șir utilizând vecinătăți, proprietăți

Șirurile de numere reale au fost întâlnite atât la algebră, pentru aproximarea numerelor cu funcții zecimale sau la studiul progresiilor aritmetice și geometrice, cât și la geometrie, pentru definirea lungimii unor curbe, a ariilor unor suprafețe și a volumelor unor corpuri. Aceste probleme, precum și altele, au impus introducerea și studierea noțiunii de *limită a unui șir* (ca proprietate a unui „*proces infinit*”). Noțiunea de limită este fenomenul cel mai important al analizei matematice și diferențiază acest domeniu de algebră.

Încă din antichitate, unii învățați greci au evidențiat șiruri care au tendința de „a se apropia oricât de mult dorim de un anumit număr”, prefigurând însăși „trecerea la limită”. Mult mai târziu, a fost introdus conceptul de limită a unui șir. Fundamentarea riguroasă a noțiunii de limită, datează din secolul al XIX-lea și se datorează matematicianului francez Augustin Cauchy (1789-1857), care a adus în analiză standarde noi de rigoare.

Șirurile de numere reale vor fi numite, mai simplu, *șiruri*.

Vom considera variabila $n \in \mathbb{N}$, și vom conveni ca o relație de forma „$r > 0$” să însemne „$r \in \mathbb{R}$ și $r > 0$”.

4.1. Exemple care evidențiază utilitatea șirurilor

Vom da trei exemple simple, care să ateste necesitatea studierii comportării șirurilor.

1. *Reprezentarea numărului rațional* $\frac{2}{11}$ *în fracție zecimală*

Aplicând algortimul înpărțirii lui 2 la 11, de 6 ori, se obțin succesiv aproximările zecimale: $x^{(1)} = 0,1$; $x^{(2)} = 0,18$; $x^{(3)} = 0,181$; $x^{(4)} = 0,1818$; $x^{(5)} = 0,18181$; $x^{(6)} = 0,181818$.

Dacă vrem să continuăm, constatăm că operația se repetă la nesfârșit și împărțirea nu se mai termină. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, să notăm $a_n = 1$, pentru n impar și $a_n = 8$, pentru n par.

Aproximarea zecimală a lui $\frac{2}{11}$, de rang $n \in \mathbb{N}^*$, este $x^{(n)} = 0, a_1a_2 \ldots a_n$.

În acest mod, se pun în evidență două funcții.

$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(n) = x^{(n)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, și $g : \mathbb{N}^* \to \{0,1,...,9\}$, $g(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Funcția f se numește **șirul aproximărilor zecimale** ale lui $\frac{2}{11}$.

Funcția g se numește **șirul cifrelor reprezentării zecimale** a lui $\frac{2}{11}$.

Numărul $\frac{2}{11}$ se scrie ca o succesiune „infinită” de cifre, în care rangul unei cifre se deduce din poziția pe care o are cifra față de virgulă:

$$\frac{2}{11} = 0, a_1a_2a_1a_2 \ldots a_{2n-1}a_{2n} \ldots = 0,1818 \ldots 18 \ldots = 0,(18).$$

Evident, nu putem să scriem decât un număr finit de cifre, dar regula de succesiune a cifrelor este dată de funcția g, care este cunoscută.

2. *Reprezentarea fracției zecimale periodice* $x = 0,(5)$, *ca raport de numere naturale*

Fracția zecimală infinită $x = 0,55...5...$ este caracterizată de *șirul cifrelor*, adică de funcția $g:\mathbb{N}^* \to \{0,1,...,9\}$, $g(n) = a_n = 5$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru a găsi numărul x, formăm *șirul aproximărilor zecimale*

$$x^{(1)} = 0,5 = \frac{5}{10};\ x^{(2)} = 0,55 = \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2};\ x^{(3)} = 0,555 = \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3};\ ...$$

Termenul general este suma unei progresii geometrice de rație $\frac{1}{10}$, care se restrânge:

$$x^{(n)} = 0,a_1a_2...a_n = \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + ... + \frac{5}{10^n} = \frac{5}{10} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^n}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Se constată că atunci când n crește destul de mult, numărul $\frac{1}{10^n}$ are tendința de „a se apropia oricât de mult dorim de zero”, deci aproximarea $x^{(n)}$ are tendința de „a se apropia oricât de mult dorim” de numărul $\frac{5}{9}$. Este natural să luăm $x = \frac{5}{9}$. Probăm acest rezultat făcând împărțirea lui 5 la 9 și obținem: $x = \frac{5}{9} = 0,55...5... = 0,(5)$.

Expresia „*a se apropia oricât de mult dorim de un număr*” este intuitivă și va fi definită matematic riguros în cele ce urmează.

3. *Lungimea cercului*

Ca punct de plecare, considerăm că știm ce înseamnă lungimea unui segment de dreaptă (aceasta presupune cunoașterea noțiunii de număr real), deci știm ce înseamnă lugimea unei linii poligonale (reuniune a unui număr finit de segmente puse cap la cap).

Lungimea unui cerc $\mathcal{C}(O, R)$, de centru O și rază $R > 0$, se definește cu ajutorul perimetrelor poligoanelor regulate înscrise și circumscrise cercului, care „se apropie” din ce în ce mai mult de cerc.

Concret, se pleacă de la triunghiurile echilaterale t_1 înscris și T_1 circumscris cercului, cu perimetrele $p_1 = 3\sqrt{3}R$ și $P_1 = 6\sqrt{3}R$. Apoi, se dublează numărul laturilor și se calculează perimetrele $p_2 = 6R$ și $P_2 = 4\sqrt{3}R$ ale hexagoanelor regulate t_2 înscris și T_2 circumscris cercului, desenate în figura 32.

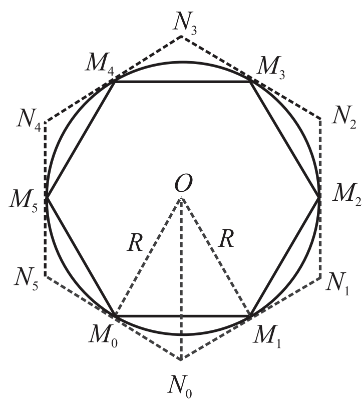


Fig. 32

În ipoteza că pentru $n \geq 3$ se cunosc perimetrele p_{n-1} și P_{n-1}, ale poligoanelor regulate având $3 \times 2^{n-2}$ laturi, t_{n-1} înscris și T_{n-1} circumscris cercului, dublând numărul de laturi, se calculează ușor perimetrele p_n și P_n ale poligoanelor regulate având $3 \times 2^{n-1}$ laturi, t_n înscris și T_n circumscris cercului.

În acest mod, se pun în evidență două șiruri, adică două funcții de forma $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}, f(n) = p_n$ și $g(n) = P_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Valorile lui *f* și *g* au fost definite prin inducție. Așa cum se vede și din figura 32, p_n aproximează prin lipsă și P_n aproximează prin adaos lungimea cercului. Se demonstrează că p_n și P_n au tendința de „*a se apropia oricât de mult dorim*” de unul și același număr *L*, atunci când *n* este „*destul de mare*”. Numărul *L* se numește *lungimea cercului* $\mathcal{C}(O, R)$.

Se poate arăta că raportul $\frac{L}{2R}$ dintre lungimea cercului și diametru *nu* depinde de cercul $\mathcal{C}(O, R)$ și acest raport se notează cu litera grecească π (pi).

Marele învățat grec al antichității, Arhimede a definit cel dintâi lungimea cercului și a calculat cu metoda precedentă valoarea aproximată prin adoas $\pi \approx \frac{22}{7}$, cu o eroare mai mică decât $\frac{1}{100}$, folosind poligoanele regulate t_6 și T_6, cu $3 \times 2^5 = 96$ laturi.

Menționăm că numărul π este irațional și primele zecimale ale sale sunt:
$\pi = 3{,}141592653...$

4.2. Noțiunea de șir numeric

În mod intuitiv, prin **șir** înțelegem o infinitate de numere, distincte sau nu, scrise unul după altul. Un șir *nu* este o mulțime de numere, deoarece la un șir este esențial locul pe care îl ocupă fiecare număr, ordinea în care sunt scrise numerele. De asemenea, numerele unui șir se pot repeta. De exemplu, șirurile:

(1) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,... (șirul numerelor naturale);
(2) 1, 0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, 8, 11, 10, 13, 12, 15, 14,...;
(3) 0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 0, ...;

sunt distincte, deși sunt formate din aceleași numere.

La o examinare mai atentă, apare „caracterul de funcție” al șirului, dacă asociem fiecărui număr natural *n*, termenul aflat pe locul *n* în șir. De exemplu, șirul (2) realizează următoarea corespondență de la mulțimea $\mathbb{N}$ la mulțimea $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15,... \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1, & 0, & 3, & 2, & 5, & 4, & 7, & 6, & 9, & 8, & 11, & 10, & 13, & 12, & 15, & 14,... \end{array}$$

(pe locul 0 se află 1, pe locul 1 se află 0, pe locul 2 se află 3, pe locul 3 se află 2 etc.)

Suntem astfel conduși la definiția șirului.

Definiții

1. Se numește **șir de numere reale** (sau **șir numeric**) o funcție reală definită pe $\mathbb{N}$ sau pe $\mathbb{N}^*$, adică o funcție $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sau o funcție $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$. Atunci când nu se fac alte precizări, șirul se consideră funcție definită pe $\mathbb{N}$, adică funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.

2. Pentru variabila $n\in\mathbb{N}$, valoarea funcției f în punctul n se notează cu x_n, adică $f(n)=x_n$ (citim x indice n). Numărul real x_n se numește **termenul de rang** n sau **termenul general al șirului**. Indicele n arată poziția sau rangul unui termen din șir.

Șirul $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ se notează în diverse moduri:

$$f=(x_n)_n=(x_n)_{n\geq 0}=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=(x_0,x_1,x_2,...,x_n,...).$$

Pentru a nota un șir se pot folosi și alte litere: $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$.

3. Șirurile $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ se numesc **egale**, dacă pentru orice $n\in\mathbb{N}$, avem $x_n=y_n$.

4. Se spune că f este **șir**: **de numere naturale** dacă $f(\mathbb{N})\subset\mathbb{N}$; **de numere întregi** dacă $f(\mathbb{N})\subset\mathbb{Z}$; **de numere raționale** dacă $f(\mathbb{N})\subset\mathbb{Q}$ etc.

5. Uneori este necesar să folosim un concept mai general. Fie un număr fixat $m\in\mathbb{N}$ și fie mulțimea $\mathbb{N}_m=\{n\in\mathbb{N}\mid n\geq m\}$. Explicit, $\mathbb{N}_m=\{m,\ m+1,\ m+2,...\}$. În particular, $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}_1=\mathbb{N}^*$. Se numește, de asemenea, **șir de numere reale** o funcție $f:\mathbb{N}_m\to\mathbb{R}$.

Punând $f(n)=x_n$, $\forall n\in\mathbb{N}_m$, șirul se notează $(x_n)_{n\geq m}$ sau $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$.

De exemplu, putem considera șirul $\left(\dfrac{n+1}{2n-100}\right)_{n\geq 51}$, unde $x_n=\dfrac{n+1}{2n-100},\forall n\geq 51$.

♦ Modalități de a defini șiruri

A defini un șir înseamnă a indica modul de calcul al termenilor săi.

Există 3 tipuri de șiruri.

1. ***Șiruri definite descriptiv***

Se scriu câtiva termeni, până când regula de obținere a termenului general devine clară.

Exemplu Fie șirul (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...). Se constată că fiecare termen este o putere a lui 2, deci $x_n=2^n,\forall n\in\mathbb{N}$.

2. ***Șiruri definite cu ajutorul formulei termenului general***

Se dau valori în formula explicită a termenului general: $x_n=f(n),\forall n\in\mathbb{N}$.

Exemplu Fie șirul $\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)_n$. Avem $x_n=\dfrac{2n}{2n+1},\forall n\in\mathbb{N}$. Se obțin termenii:

$x_0=0,\ x_1=\dfrac{2}{3},\ x_2=\dfrac{4}{5},\ x_3=\dfrac{6}{7},\ x_4=\dfrac{8}{9},\ x_5=\dfrac{10}{11}$ etc.

3. *Șiruri definite prin recurență*

Șirul se definește prin inducție, în două etape.

Etapa I: Se dau numărul $k \in \mathbb{N}^*$ și termenii $x_0, x_1, ..., x_{k-1}$.

Etapa II: Se dă o relație, o regulă sau o formulă care exprimă termenul general $x_n\left(n \geq k\right)$, în funcție de rangul *n* (facultativ) și de termenii precedenți (unul sau mai mulți).

Exemple **1**. Fie șirul definit prin relațiile: I. $x_0 = 0$; II. $x_n = \frac{1}{2} \cdot x_{n-1} + 1, \forall n \geq 1$. Se obțin termenii: $x_1 = \frac{1}{2} \cdot x_0 + 1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{2} \cdot x_1 + 1 = \frac{3}{2}$; $x_3 = \frac{1}{2} \cdot x_2 + 1 = \frac{7}{4}$.

Raționând prin inducție, se obține formula termenului general: $x_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$, $\forall n \geq 0$.

2. Fie șirul definit prin relațiile: I. $x_0 = 0$; II. $x_n = \frac{1}{2} \cdot x_{n-1} + \frac{1}{2^n}, \forall n \geq 1$.

Se obțin termenii: $x_1 = \frac{1}{2} \cdot x_0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2^2} = \frac{2}{2^2}$;

$x_3 = \frac{1}{2} \cdot x_2 + \frac{1}{2^3} = \frac{3}{2^3}$ etc.

Raționând prin inducție, se obține formula termenului general: $x_n = \frac{n}{2^n}, \forall n \geq 0$.

♦ Reprezentarea grafică a unui șir

Pentru a vizualiza proprietățile unui șir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f = (x_n)_n$, putem să reprezentăm termenii șirului pe o axă sau putem să reprezentăm grafic funcția *f*, așa ca în exemplul următor.

Exemplu Fie șirul $(x_n)_n$, $x_n = \frac{n \cdot \left(-1\right)^n}{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$. Calculăm termenii $x_0 = 0$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{3}{5}$, $x_4 = \frac{2}{3}$, $x_5 = -\frac{5}{7}$, $x_6 = \frac{3}{4}$.

În figura 33, sunt reprezentați acești termeni pe o axă, iar în figura 34 este reprezentat parțial graficul șirului.

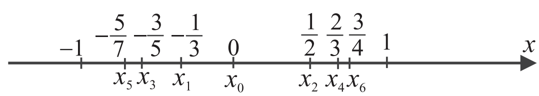


Fig. 33

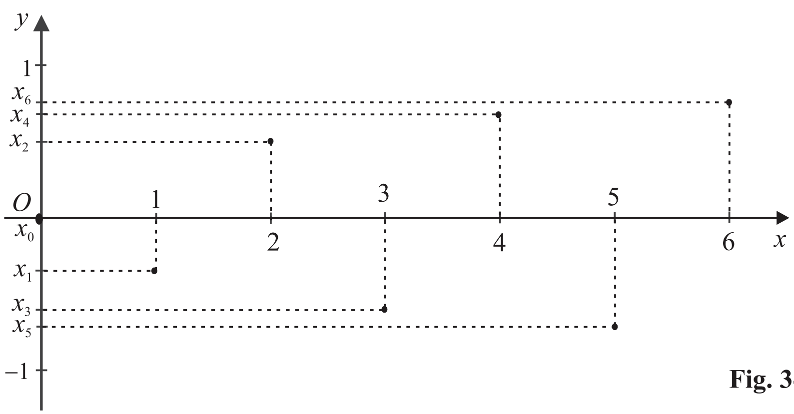


Fig. 34

4.3. Limită a unui şir. Şir convergent

Înainte de a defini noţiunea de limită a unui şir, vom analiza câteva exemple.

1. Să considerăm şirul $(x_n)_n$, cu termenul general $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}, \forall n \geq 0$.

Să scriem mai mulţi termeni ai şirului:

$$2,\ 1-\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{5},\ 1-\frac{1}{6},\ 1+\frac{1}{7},\ ...,\ 1-\frac{1}{1000},\ 1+\frac{1}{1001},\ ...$$

Ne dăm seama, foarte uşor, de faptul că *termenii acestui şir se apropie tot mai mult de numărul 1, pe măsură ce rangurile lor cresc*.

Această constatare are caracter intuitiv, de observaţie, şi vom încerca să o cuprindem într-o definiţie matematică precisă, formulată în termeni ai structurilor lui $\mathbb{R}$ (algebrică, de ordine şi de convergenţă).

Noţiunea cea mai adecvată pentru a descrie *ideea de apropiere* este noţiunea de vecinătate. Pentru a verifica matematic faptul că „termenii şirului se apropie tot mai mult de 1 când rangurile lor cresc”, vom proceda astfel: vom lua o vecinătate arbitrară V a lui 1 şi vom verifica dacă există un rang $m = m_V \in \mathbb{N}$ (depinzând de V), începând de la care toţi termenii şirului să se afle în V.

Fie V o vecinătate a lui 1. Conform definiţiei vecinătăţii, există un număr $\varepsilon > 0$ (depinzând de V) şi o vecinătate elementară $U = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ a lui 1, astfel încât să avem $U \subset V$.

Afirmaţia $x_n \in U$ este echivalentă, succesiv, cu fiecare dintre relaţiile:

$$1-\varepsilon < x_n < 1+\varepsilon;\ -\varepsilon < x_n - 1 < \varepsilon;\ |x_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon;\ n+1 > \frac{1}{\varepsilon};\ \ n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Rangul căutat este $m = m_V = [1/\varepsilon] \in \mathbb{N}$ (ε depinde de V, deci m depinde de V).

Într-adevăr, pentru orice $n \geq m$, avem $n \geq [1/\varepsilon]$; deoarece $[1/\varepsilon] > (1/\varepsilon) - 1$, avem $n > (1/\varepsilon) - 1$; rezultă că $x_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = U$, deci $x_n \in V\ (U \subset V)$.

În concluzie, în orice vecinătate V a lui 1 se află toţi termenii şirului începând de la un anumit rang m_V (care depinde de V) şi, în consecinţă, în afara lui V vor rămâne cel mult un număr finit de termeni (aflaţi printre termenii $x_0, x_1, ..., x_{m_V - 1}$). Vom spune, mai simplu, că *şirul* $(x_n)_n$ *are limita* 1.

2. Să considerăm şirul numerelor naturale $(x_n)_n$, $x_n = n$, $\forall n \geq 0$.

Constatăm că şirul $(n)_n$ are o proprietate asemănătoare cu aceea a şirului din exemplul 1, şi anume, pentru orice vecinătate V a lui ∞, există un rang $m_V \in \mathbb{N}$ începând de la care toţi termenii şirului să se afle în V. În mod convenţional, vom putea spune că *termenii şirului se apropie tot mai mult de* ∞ *când rangurile lor cresc*. Mai simplu, vom spune că *şirul* $(n)_n$ *are limita* ∞.

Fie V o vecinătate arbitrară a lui ∞. Conform definiţiei vecinătăţii, există un număr $\varepsilon > 0$ (depinzând de V) şi o vecinătate elementară $U = (\varepsilon, \infty]$ a lui ∞ astfel încât să avem $U \subset V$.

Afirmația $x_n \in U$ este echivalentă cu inegalitatea $n > \varepsilon$. Rangul căutat este $m_V = [\varepsilon] + 1$. Într-adevăr, pentru orice $n \geq m_V$ avem $n \geq [\varepsilon] + 1 > \varepsilon$, deci $n \in U$ și $n \in V$ $(U \subset V)$.

3. Să considerăm șirul numerelor întregi negative $(x_n)_n$, $x_n = -n, \forall n \geq 0$.

Constatăm că acest șir are o proprietate asemănătoare cu aceea a șirurilor precedente, și anume, pentru orice vecinătate V a lui $-\infty$, există un rang $m_V \in \mathbb{N}$, începând de la care toți termenii șirului să se afle în V. În mod convențional, vom putea spune că *termenii șirului se apropie tot mai mult de* $-\infty$, *când rangurile lor cresc*. Mai simplu, vom spune că *șirul* $(-n)_n$ *are limita* $-\infty$.

Fie V o vecinătate arbitrară a lui $-\infty$. Conform definiției vecinătății, există un număr $\varepsilon > 0$ (depinzând de V) și o vecinătate elementară $U = [-\infty, -\varepsilon)$ a lui $-\infty$, astfel încât să avem $U \subset V$. Afirmația $-n \in U$ este echivalentă cu $-n < -\varepsilon$, deci cu inegalitatea $n > \varepsilon$. Rangul căutat este $m_V = [\varepsilon] + 1$. Într-adevăr, pentru orice $n \geq m_V$ avem $n \geq [\varepsilon] + 1 > \varepsilon$, deci $-n < -\varepsilon$. Rezultă $-n \in U$ și $-n \in V$ $(U \subset V)$.

Astfel de exemple sunt numeroase și au impus următoarele definiții.

Definiții

1. Fie un șir de numere reale $(x_n)_n$. Se spune că **șirul $(x_n)_n$ are limită** dacă există un punct $a \in \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât pentru orice vecinătate V a punctului a, există un rang $m_V \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice rang $n \geq m_V$ să avem proprietatea $x_n \in V$.
Altfel spus (întrebuințând cuantificatorii):
Șirul $(x_n)_n$ **are limită** dacă $\exists a \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î. $\forall V \in \mathcal{V}(a), \exists\, m_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq m_V$ să avem $x_n \in V$.
Reformulare:
Șirul $(x_n)_n$ **are limită** dacă există $a \in \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât orice vecinătate a punctului a să conțină toți termenii șirului, cu excepția eventuală a unui număr finit dintre ei (adică, în orice vecinătate a punctului a se află toți termenii șirului începând de la un anumit rang, depinzând de vecinătate).
Punctul (sau numărul) a este unic, se numește **limita șirului $(x_n)_n$** și se notează cu simbolul $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (citim: limită de x_n, când n tinde la ∞, este egală cu a).
Alte notații: $(x_n)_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ sau $x_n \to a$, sau $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Mai spunem că ș*irul* $(x_n)_n$ *tinde către a când n tinde la* ∞.
2. Șirul $(x_n)_n$ se numește **convergent** dacă are limită finită: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$. În acest caz, se spune că **șirul $(x_n)_n$ este convergent** (sau **converge**) **către a când n tinde la ∞**.
3. Șirul $(x_n)_n$ se numește **divergent** dacă șirul $(x_n)_n$ *nu* este convergent.

Observații:

1. Rangul m_V poate fi luat oricât de mare dorim, deoarece esențială este numai existența sa.

2. În definiția limitei se pot utiliza numai vecinătăți elementare $U \in \mathcal{V}_e(a)$, deoarece orice vecinătate V a lui a include o vecinătate elementată U a lui a.

3. Șirul $(x_n)_n$ este divergent dacă și numai dacă *nu* are limită, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ sau $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

4. Limita șirului nu se schimbă dacă modificăm, eliminăm sau adăugăm un număr finit de termeni la acest șir. Într-adevăr, putem să luăm rangul m_V astfel încât acesta să fie mai mare decât rangurile termenilor unde s-au făcut schimbări.

5. Fie $p \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+p} = a$. Într-adevăr, șirul $(x_{n+p})_n$ se obține din șirul $(x_n)_n$ prin eliminarea primilor p termeni $x_0, x_1, ..., x_{p-1}$.

6. Fie o funcție bijectivă $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ și fie funcția inversă $g = f^{-1}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Fie șirul $(y_n)_n$, $y_n = x_{f(n)}$, $\forall n \geq 0$. Avem $x_n = y_{g(n)}$, $\forall n \geq 0$. Se spune că *șirul $(y_n)_n$ a fost obținut din șirul $(x_n)_n$ prin schimbarea ordinii termenilor*. Are loc echivalența: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Într-adevăr, să presupunem, de exemplu, că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Atunci $\forall V \in \mathcal{V}(a)$, $\exists m = m_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq m$ să avem $x_n \in V$. Fie $p_V = \max\{g(i) \mid 0 \leq i < p\} + 1$. Atunci $\forall n \geq p_V$ avem: $n \notin \{g(i) \mid 0 \leq i < p\}$, $f(n) \notin \{0, ..., m-1\}$, $f(n) \geq m$, $y_n = x_{f(n)} \in V$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Teoremă — Unicitatea limitei

Dacă șirul $(x_n)_n$ are o limită $a \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci aceasta este unică.

Demonstrație. Să presupunem prin absurd că șirul $(x_n)_n$ ar mai avea o limită $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \neq a$. Conform proprietății de separare a punctelor, există vecinătățile $V_0 \in \mathcal{V}(a)$ și $W_0 \in \mathcal{V}(b)$ astfel încât $V_0 \cap W_0 = \varnothing$. Pentru aceste vecinătăți explicităm lmitele a și b:

$\exists m_o \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq m_o$ să avem $x_n \in V_o$; $\exists p_o \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq p_o$ să avem $x_n \in W_o$.

Luând $n \geq \max\{m_o, p_o\}$, avem $x_n \in V_o \cap W_o = \varnothing$, deci $x_n \in \varnothing$, *contradicție*. În concluzie, presupunerea prin absurd este falsă, deci șirul $(x_n)_n$ are o singură limită a. ■

Exemple

1. Orice șir constant $(x_n)_n$, cu termenul general $x_n = a$, $\forall n \geq 0$, unde $a \in \mathbb{R}$, este convergent către a.
Într-adevăr, pentru orice vecinătate V a lui a și pentru orice $n \geq 0$, avem $x_n = a \in V$.

2. Conform raționamentelor din exemplele introductive 1, 2 și 3, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right) = 1;\ \lim_{n\to\infty} n = \infty;\ \lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty.$$

Exerciții rezolvate

1. Să se arate că șirul $(x_n)_n$, $x_n = 1 + (-1)^n$, $\forall n \geq 0$, este divergent.

Rezolvare: Șirul are termenii 2, 0, 2, 0, 2, 0, ..., 2, 0, ... Fie $a\in \overline{\mathbb{R}}$, arbitrar. Dacă $a\neq 0$, atunci $\exists V_0\in \mathcal{V}(a)$ a.î. $0\notin V_0$, deci o infinitate de termeni $\left(x_{2n+1}=0,\forall n\geq 0\right)$ nu aparțin lui V_0. Dacă $a\neq 2$, atunci $\exists W_0\in \mathcal{V}(a)$ a.î. $2\notin W_0$, deci o infinitate de termeni $\left(x_{2n}=2,\forall n\geq 0\right)$ nu aparțin lui W_0. În concluzie, nici V_0 și nici W_0 *nu* pot să conțină toți termenii șirului, începând de la anumit rang. Rezultă că $\forall a\in \overline{\mathbb{R}}$, șirul $(x_n)_n$ *nu* are limita a, deci șirul *nu* are limită.

2. Să se arate că: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+3}=\frac{3}{2}$.

Rezolvare: a) Fie o vecinătate elementară $V\in \mathcal{V}_e(0)$, arbitrară; există un număr $\varepsilon>0$ a.î. $V=(-\varepsilon,\varepsilon)$. Condiția $\frac{1}{n}\in V\left(n\in \mathbb{N}^*\right)$ este echivalentă cu relațiile: $-\varepsilon<\frac{1}{n}<\varepsilon$; $\frac{1}{n}<\varepsilon$; $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

Luăm rangul $m_V=[1/\varepsilon]+1$. Atunci $\forall n\geq m_V$ avem: $n\geq[1/\varepsilon]+1$; $n>\frac{1}{\varepsilon}$; $\frac{1}{n}\in V$.

În concluzie, $\forall\ V\in \mathcal{V}_e(0)$, $\exists m_V\in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall n\geq m_V$ să avem $\frac{1}{n}\in V$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

b) Notăm $a=\frac{3}{2}$ și $x_n=\frac{3n+2}{2n+3},\forall n\geq 0$. Facem majorarea simplificatoare:

$$\left|x_n-a\right|=\left|\frac{3n+2}{2n+3}-\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{4n+6}<\frac{5}{n},\forall n\geq 1.$$

Fie o vecinătate elementară arbitrară $\forall V\in \mathcal{V}_e(a)$; există $\varepsilon>0$ a.î. $V=\left(a-\varepsilon,a+\varepsilon\right)$.

Punem condiția mai simplă $\frac{5}{n}<\varepsilon$, care este echivalentă cu $n>\frac{5}{\varepsilon}$.

Luăm $m_V=[5/\varepsilon]+1$ și deducem că $\forall n\geq m_V$ avem:

$n\geq[5/\varepsilon]+1$; $n>5/\varepsilon$; $\left|x_n-a\right|<5/n<\varepsilon$; $x_n\in\left(a-\varepsilon,a+\varepsilon\right)=V$.

În concluzie, $\forall V\in \mathcal{V}_e(a)$, $\exists m_V\in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n\geq m_V$ să avem $x_n\in V$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

3. Să se arate că: a) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n=\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-n^2\right)=-\infty$.

Rezolvare: a) Folosind binomul lui Newton, obținem minorarea:

$$2^n=\left(1+1\right)^n=1+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n>C_n^1=n,\ \forall n\geq 1.$$

Fie o vecinătate elementară arbitrară $V\in \mathcal{V}_e(\infty)$; există $\varepsilon>0$ a.î. $V=\left(\varepsilon,\infty\right]$.

Punem condiția mai simplă $n>\varepsilon$ (pentru a realiza că $2^n>\varepsilon$).

Luăm $m_V=[\varepsilon]+1$ și deducem că $\forall n\geq m_V$ avem: $n\geq[\varepsilon]+1>\varepsilon$; $2^n>n>\varepsilon$; $2^n\in V$.

În concluzie, $\forall\ V\in \mathcal{V}_e(\infty)$, $\exists m_V\in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall n\geq m_V$ să avem $2^n\in V$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}2^n=\infty$.

b) Notăm $x_n = 1 - n^2, \forall n \geq 0$. Fie o vecinătate elementară arbitrară $V \in \mathcal{V}_e(-\infty)$; există $\varepsilon > 0$ a.î. $V = [-\infty, -\varepsilon)$. Relația $x_n \in V$ este echivalentă cu: $x_n < -\varepsilon$; $1 - n^2 < -\varepsilon$; $n > \sqrt{1+\varepsilon}$.

Luăm $m_V = \left[\sqrt{1+\varepsilon}\right] + 1$ și deducem că $\forall n \geq m_V$ avem $n \geq \left[\sqrt{1+\varepsilon}\right] + 1 > \sqrt{1+\varepsilon}$, deci $x_n \in V$.

În concluzie, $\forall\ V \in \mathcal{V}_e(-\infty)$, $\exists m_V \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall n \geq m_V$ să avem $x_n \in V$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

4.4. Proprietăți ale șirurilor care au limită

Vom considera un șir arbitrar de numere reale $s = (x_n)_n$.

Definiții

1. Marginea inferioară și **marginea superioară** ale șirului s sunt marginile mulțimii valorilor șirului, adică ale mulțimii $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, și se notează cu:

$$m_s = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = \inf S \in \overline{\mathbb{R}} \text{ și } M_s = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sup S \in \overline{\mathbb{R}}.$$

2. Vom spune că **șirul *s* este mărginit inferior** (sau **minorat**), **mărginit superior** (sau **majorat**), respectiv **mărginit**, după cum mulțimea S este minorată, majorată, respectiv mărginită.

Observație: Șirul $(x_n)_n$ este mărginit dacă $\exists \lambda > 0$ și $\exists k \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq k$ avem $|x_n| \leq \lambda$.

Într-adevăr, luând $M = \max\{|x_0|, ..., |x_k|, \lambda\}$, rezultă $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple

1. Șirul $(x_n)_n = \left(\dfrac{n}{n+1} \cdot (-1)^n\right)_n$ este mărginit, deoarece $|x_n| = \dfrac{n}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Șirul $(n)_n$ este minorat de 0 și nu este majorat deoarece $\forall \lambda \geq 0$, $\exists n = [\lambda] + 1$ a.î. $n > \lambda$. .

3. Șirul $(x_n)_n = \left(n \cdot (-1)^n\right)_n$ nu este minorat sau majorat, deci $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = -\infty$ și $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \infty$, deoarece $\forall \lambda \geq 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $\lambda < 2n = x_{2n}$ și, în plus: $x_{2n+1} = -(2n+1) < -2n < -\lambda$.

Teorema 1

Dacă șirul $(x_n)_n$ este convergent, atunci el este mărginit.

Demonstrație. Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$ și fie vecinătatea elementară $V_1 = (a-1, a+1) \in \mathcal{V}_e(a)$. Conform definiției limitei, $\exists m_1 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq m_1$ să avem $x_n \in V_1$; vecinătatea V_1 fiind mărginită, rezultă că șirul este mărginit. ■

Observație. Reciproca teoremei 1 este, în general, falsă.

Într-adevăr, șirul $x_n = 1 + (-1)^n$ este mărginit $\left(|x_n| \leq 2, \forall n \geq 0\right)$, dar *nu* este convergent.

Definiție

Se numește **subșir** al șirului $(x_n)_n$ un șir de forma $\left(x_{i_n}\right)_n$, unde $(i_n)_n$ este un șir strict crescător de numere naturale.

Înseamnă că avem relațiile: $i_0 < i_1 < i_2 < ... < i_n < i_{n+1} < ...$ și $i_n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Avem proprietățile: $i_0 \geq 0$; $i_1 > i_0 \geq 0$, deci $i_1 \geq 1$; $i_2 > i_1 \geq 1$, deci $i_2 \geq 2$.

Prin inducție, se arată că $\forall n \in \mathbb{N}$ avem $i_n \geq n$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = \infty$.

Exemple Luând $i_n = 2n$, se obține s*ubșirul termenilor de rang par* $(x_{2n})_n$ al șirului $(x_n)_n$.
Luând $i_n = 2n+1$, se obține *subșirul termenilor de rang impar* $(x_{2n+1})_n$ al șirului $(x_n)_n$.

Teorema 2

Presupunem că șirul $(x_n)_n$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$. Dacă $(i_n)_n$ este un șir de numere naturale astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = \infty$, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} x_{i_n} = a$.

Demonstrație. $\forall V \in \mathcal{V}(a)$, $\exists p_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq p_V$ să avem $x_n \in V$; pentru numărul p_V, $\exists m_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq m_V$ să avem $i_n \geq p_V$, deci $x_{i_n} \in V$; rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{i_n} = a$. ■

Consecință. Dacă șirul $(x_n)_n$ are două subșiruri care au limite diferite, atunci șirul $(x_n)_n$ *nu* are limită.

Exemplu Șirul $x_n = 1 + (-1)^n$ *nu* are limită deoarece: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.

Teorema 3

Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Demonstrație. Fie o vecinătate arbitrară $V \in \mathcal{V}(a)$. Explicităm cele două limite:
$\exists p_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq p_V$ să avem $x_{2n} \in V$; $\exists q_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq q_V$ să avem $x_{2n+1} \in V$.

Luăm $m_V = \max\{2p_V, 2q_V + 1\}$. Fie $n \geq m_V$, arbitrar. Dacă n este par, atunci $n \geq 2p_V$, deci $x_n \in V$. *Dacă n* este impar, atunci $n \geq 2q_V+1$, deci $x_n \in V$.

În concluzie, $\forall V \in \mathcal{V}(a)$, $\exists m_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq m_V$ să avem $x_n \in V$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ■

Observație. Teorema 3 poate fi generalizată în felul următor. Fie $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, fixat. Dacă $\exists a \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î. $\forall i \in \{0, 1, ..., p-1\}$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_{pn+i} = a$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Exemplu Fie șirul $(x_n)_n$, $x_n = \frac{1}{2}\cdot\left(1-(-1)^n\right) + 2^{\left((-1)^n-1\right)\cdot n}$, $\forall n \geq 0$. Calculăm:

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(0+2^0\right) = 1 \text{ și } \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+2^{-2(2n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4\cdot 16^n}\right) = 1$$

(Se folosesc inegalitățile $\frac{1}{4\cdot 16^n} = \frac{1}{4(1+15)^n} < \frac{1}{4(1+15n)} < \frac{1}{60n}$, $\forall n \geq 2$).

Conform teoremei 3, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

4.5. Criterii de comparație pentru limite de șiruri

Vom considera patru șiruri de numere reale: $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$, $(\alpha_n)_n$.

Teorema 1 — Trecerea la limită în inegalități

Să presupunem că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$ și $\forall n \in \mathbb{N}$ avem $x_n \le y_n$.
Atunci rezultă $a \le b$.

Demonstrație. Să presupunem *prin absurd* că $b < a$. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ a.î. $b < \lambda < a$ și fie vecinătățile $V_0 = (\lambda, \infty]$ a lui a și $W_0 = [-\infty, \lambda)$ a lui b. Explicităm simultan limitele (luând rangul maxim): $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \ge m_0$ să avem $x_n \in V_0$ și $y_n \in W_0$. Rezultă că $x_n > \lambda$ și $y_n < \lambda$, deci $y_n < x_n$, *contradicție*. În concluzie, presupunerea prin absurd este falsă, deci $a \le b$. ■

Observație. Dacă $x_n < y_n$, $\forall n \ge 0$, atunci la limită se obține tot $a \le b$. De exemplu, $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, $\forall n \ge 1$ și la limită obținem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$.

Teorema 2 — Regula „cleștelui"

Să presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ și $\forall n \in \mathbb{N}$ avem $x_n \le z_n \le y_n$.

Atunci șirul $(z_n)_n$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Demonstrație Fie o vecinătate elementară arbitrară $V \in \mathcal{V}_e(a)$. Explicităm simultan limitele (luând rangul maxim): $\exists m_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \ge m_V$ să avem $x_n \in V$ și $y_n \in V$. Deoarece V este interval și $x_n \le z_n \le y_n$, rezultă că $z_n \in V$. În concluzie, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. ■

Teorema 3 — Consecință la regula „cleștelui"

Fie un număr $a \in \mathbb{R}$. Să presupunem că $\forall n \in \mathbb{N}$ avem $\alpha_n \ge 0$.

1. Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ și dacă $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n - a| \le \alpha_n$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2. Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$ și dacă $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \ge \alpha_n$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

3. Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$ și dacă $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \le -\alpha_n$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Demonstrație. Se aplică teorema 2: în cazul 1 pentru inegalitățile $a - \alpha_n \le x_n \le a + \alpha_n$; în cazul 2 pentru inegalitățile $\alpha_n \le x_n < \infty$; în cazul 3 pentru inegalitățile $-\infty < x_n \le -\alpha_n$. ■

Exemplu Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$, deoarece pentru orice $n \ge 2$ avem

$$0 < \frac{n}{2^n} = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n} < \frac{n}{C_n^2} = \frac{2}{n-1} \text{ și } \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n-1} = 0.$$

Teorema 4 — Condiție echivalentă cu convergența

Fie un număr $a \in \mathbb{R}$. Are loc echivalența: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$.

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar și fie vecinătățile $V = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \in \mathcal{V}_e(a)$ și $U = (-\varepsilon, \varepsilon) \in \mathcal{V}_e(0)$.

Teorema rezultă din echivalențele: $x_n \in V \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| \in U$.

Teorema 5 — Limita șirului modulelor

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$ (cu convenția $|\pm\infty| = \infty$).

Demonstrație. Presupunem că $a \in \mathbb{R}$. Atunci $\forall n \in \mathbb{N}$ avem $\big||x_n| - |a|\big| \le |x_n - a|$. Conform teoremei 4, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$. Conform teoremei 3, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

Presupunem că $a = \infty$. Atunci $\forall V = (\varepsilon, \infty] \in \mathcal{V}_e(\infty)$, $\varepsilon > 0$, $\exists m_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \ge m_V$ să avem $x_n \in V$, deci $x_n > \varepsilon > 0$, deci $|x_n| = x_n \in V$. Conform definiției, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \infty = |a|$.

Presupunem că $a = -\infty$. Atunci $\forall V = (\varepsilon, \infty] \in \mathcal{V}_e(\infty)$, $\varepsilon > 0$, pentru $U = [-\infty, -\varepsilon)$, $\exists m_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \ge m_V$, să avem $x_n \in U$, deci $x_n < -\varepsilon < 0$, $|x_n| = -x_n > \varepsilon$, $|x_n| \in V$.

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \infty = |a|$. ■

Observație. Teorema reciprocă *nu* este adevărată. De exemplu, șirul $(x_n)_n$, $x_n = (-1)^n$, nu are limită, dar șirul modulelor $(|x_n|)_n$, $|x_n| = 1$ este convergent (fiind constant).

4.6. Operații cu limite de șiruri

În practică, pentru a arăta că un șir are limită, putem utiliza definițiile, însă aceasta conduce, de fiecare dată, la demonstrații lungi și delicate. Criteriile de comparație și operațiile cu limite vor permite ca, în numeroase cazuri, să se deducă existența și valorile limitelor, prin reducerea cercetării la calculul unor limite cunoscute și evitând astfel reîntoarcerea la definiții.

Vom considera două șiruri de numere reale $(x_n)_x$, $(y_n)_x$, și un număr $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 1 — Operații cu limite de șiruri

Să presupunem că șirurile $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ au limită și să notăm $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

1. Dacă $a + b$ are sens, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$.

(*Limita sumei este egală cu suma limitelor. Cazuri exceptate*: $\infty - \infty$; $-\infty + \infty$).

2. Dacă $a \cdot b$ are sens, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

(*Limita produsului este egală cu produsul limitelor. Cazuri exceptate*: $0 \cdot (\pm\infty)$; $(\pm\infty) \cdot 0$).

3. Dacă $\lambda \cdot a$ are sens, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (\lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot a$.

(*O constantă poate fi „scoasă” în afara limitei. Cazuri exceptate:* $\lambda = 0$, $a = \pm\infty$).

4. Dacă $\dfrac{a}{b}$ are sens și $y_n \neq 0$, $\forall n \ge 0$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

(*Limita raportului este egală cu raportul limitelor. Cazuri exceptate*: $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $\dfrac{x}{0}\left(x \in \overline{\mathbb{R}}\right)$).

Comentarii. Aceste proprietăți ale limitelor de șiruri justifică introducerea „*operațiilor cu sens*” în $\overline{\mathbb{R}}$. Prin câteva exemple analizate mai departe, vom constata că, în cazul în care una dintre expresiile $a+b$, $a\cdot b$ sau $\frac{a}{b}$ *nu* are sens, despre șirul corespunzător (sumă, produs sau raport), *nu* se poate afirma nimic în privința limitei (adică, șirul poate să *nu* aibă limită sau poate să aibă tot felul de limite).

Despre șirurile $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ vom spune că se află în „cazul exceptat”: „$\infty-\infty$” dacă $a+b$ nu are sens; „$0\cdot\infty$” dacă $a\cdot b$ nu are sens; „$\frac{\infty}{\infty}$” dacă $\frac{a}{b}=\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; „$\frac{x}{0}$” dacă $\frac{a}{b}=\frac{x}{0}$ ($x\in\overline{\mathbb{R}}$). În locul expresiei „*caz exceptat*” se mai folosește expresia „*caz de nedeterminare*”.

Demonstrația teoremei. Verificarea fiecărei formule se va împărți în mai multe cazuri. Limitele vor fi explicitate simultan, luând de fiecare dată rangul maxim.

Afirmația 1

Cazul 1: $a, b\in\mathbb{R}$. Fie vecinătatea arbitrară $U=(a+b-\varepsilon, a+b+\varepsilon)\in\mathcal{V}_e(a+b)$, $\varepsilon>0$. Explicităm limitele a și b pentru vecinătățile $V=\left(a-\frac{\varepsilon}{2}, a+\frac{\varepsilon}{2}\right)\in\mathcal{V}_e(a)$ și $W=\left(b-\frac{\varepsilon}{2}, b+\frac{\varepsilon}{2}\right)\in\mathcal{V}_e(b)$. $\exists m_U\in\mathbb{N}$ a.î. $\forall n\geq m_U$ să avem $x_n\in V$ și $y_n\in W$; rezultă $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ și $|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$; rezultă $|x_n+y_n-(a+b)|=|x_n-a+y_n-b|\leq|x_n-a|+|x_n-b|$ $<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, deci $x_n+y_n\in U$.

Conform definiției, $\exists\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$.

Cazul 2: $a\in(-\infty,\infty]$ și $b=\infty$. Fie $\lambda\in\mathbb{R}$ fixat a.î. $\lambda<a$. Fie vecinătatea arbitrară $U=(\varepsilon,\infty]\in\mathcal{V}_e(\infty)$, $\varepsilon>0$. Pentru vecinătățile $V=(\lambda,\infty]$ a lui a și $W=(\varepsilon-\lambda,\infty]$ a lui ∞: $\exists m_U\in\mathbb{N}$ a.î. $\forall n\geq m_U$ să avem $x_n\in V$ și $y_n\in W$; rezultă $x_n>\lambda$ și $y_n>\varepsilon-\lambda$; rezultă $x_n+y_n>\lambda+\varepsilon-\lambda=\varepsilon$, deci $x_n+y_n\in U$.

Conform definiției, $\exists\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\infty=a+\infty=a+b$.

Celelalte cazuri ($a<\infty, b=-\infty$; $a=-\infty, b\in\mathbb{R}$; $a=\infty, b\in\mathbb{R}$) se tratează similar.

Afirmația 2

Cazul 1: $a, b\in\mathbb{R}$. Șirurile sunt mărginite: $\exists M>0$ a.î. $\forall n\geq 0$ să avem $|x_n|\leq M$ și $|y_n|\leq M$. La limită, au loc relațiile $|a|\leq M$ și $|b|\leq M$. Fie vecinătatea arbitrară $U=(ab-\varepsilon, ab+\varepsilon)\in\mathcal{V}_e(ab)$, $\varepsilon>0$. Notăm $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2M}$ și explicităm limitele pentru $V=(a-\varepsilon', a+\varepsilon')\in\mathcal{V}_e(a)$ și $W=(b-\varepsilon', b+\varepsilon')\in\mathcal{V}_e(b)$. $\exists m_U\in\mathbb{N}$ a.î. $\forall n\geq m_U$ să avem $x_n\in V$ și $y_n\in W$; rezultă $|x_n-a|<\varepsilon'$ și $|y_n-b|<\varepsilon'$; rezultă $|x_n\cdot y_n-a\cdot b|=$

$=|x_ny_n-ay_n+ay_n-ab|=|(x_n-a)\cdot y_n+a\cdot(y_n-b)|\leq|x_n-a|\cdot|y_n|+|a|\cdot|y_n-b|<$

$<\varepsilon'\cdot M+M\cdot\varepsilon'=2M\cdot\varepsilon'=\varepsilon$; rezultă $x_n\cdot y_n\in U$.

Conform definiției, $\exists\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$.

Cazul 2: $a \in (0,\infty]$ și $b = \infty$. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ fixat a.î. $0 < \lambda < a$. Fie $U = (\varepsilon,\infty] \in \mathcal{V}_e(\infty)$, arbitrară, $\varepsilon > 0$. Pentru vecinătățile $V = (\lambda,\infty]$ a lui a și $W = \left(\frac{\varepsilon}{\lambda},\infty\right]$ a lui ∞:

$\exists m_U \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq m_U$ să avem $x_n \in V$ și $y_n \in W$; rezultă $x_n > \lambda > 0$ și $y_n > \frac{\varepsilon}{\lambda} > 0$; rezultă $x_n \cdot y_n > \lambda \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon$, deci $x_n \cdot y_n \in U$.

Conform definiției, $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \infty = a \cdot \infty = a \cdot b$.

Celelalte cazuri ($a < 0$, $b = \infty$; $a > 0$, $b = -\infty$; $a < 0$, $b = -\infty$) se tratează similar.

Afirmația 3

Se aplică proprietatea 2 pentru șirurile $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$, $y_n = \lambda$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Afirmația 4

Cazul 1: $a \in \overline{\mathbb{R}}$ și $b \in (0,\infty)$. Arătăm mai întâi că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ fixat a.î. $0 < \lambda < b$. Pentru vecinătatea $V_0 = (\lambda,\infty) \in \mathcal{V}(b)$, $\exists n_o \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_o$ să avem $y_n \in V_0$, deci $y_n > \lambda > 0$. Rezultă proprietățile:

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - y_n}{y_n \cdot b}\right| = \frac{|y_n - b|}{y_n \cdot b} < \frac{|y_n - b|}{\lambda \cdot b} \text{ și } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda b}\cdot|y_n - b| = 0$$

Conform consecinței regulii „cleștelui”, $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$.

Aplicând proprietatea 2, rezultă că $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \frac{1}{y_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

Cazul 2: $a \in \mathbb{R}$ și b = ∞. Arătăm că $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = 0$. Fie $U = (-\varepsilon,\varepsilon) \in \mathcal{V}_e(0)$, $\varepsilon > 0$, arbitrară. Pentru vecinătatea $V = \left(\frac{1}{\varepsilon},\infty\right] \in \mathcal{V}_e(\infty)$, $\exists m_U \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq m_U$ să avem $y_n \in V$; rezultă $y_n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$, deci $0 < \frac{1}{y_n} < \varepsilon$, deci $\frac{1}{y_n} \in U$.

Conform definiției, $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = 0$.

Aplicând proprietatea 2, rezultă că $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \frac{1}{y_n} = a \cdot 0 = 0 = \frac{a}{\infty} = \frac{a}{b}$.

Celelalte cazuri ($a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in (-\infty,0)$; $a \in \mathbb{R}$, $b = -\infty$) se tratează similar. ■

Observații:

1. *Regulile referitoare la limitele sumei și produsului* se pot extinde prin inducție la un număr finit (fixat) de șiruri, în ipoteze evidente. Dacă însă numărul șirurilor crește indefinit, atunci aceste reguli *nu* se mai aplică. De exemplu:

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1, \text{ deși } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Dacă am fi aplicat regula, am fi obținut l = 0 + ... + 0 + ... = 0, ceea ce este fals.

2. *Referitor la operația de adunare*, vom constata că șirurile următoare, $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$, se află în cazul exceptat $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ și $b=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=-\infty$, iar șirul sumă $s=(s_n)_n$, $s_n=x_n+y_n$, poate să aibă o limită oarecare sau poate să *nu* aibă limită. Din acest motiv, *nu* se acordă nici un sens expresiei $a+b=\infty-\infty$.

a) $c\in\mathbb{R},\ x_n=n+c,\ y_n=-n,\ \lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty} c=c$.

b) $x_n=2n,\ y_n=-n,\ \lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$.

c) $x_n=n,\ y_n=-2n,\ \lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$.

d) $x_n=n+(-1)^n,\ y_n=-n,\ s_n=(-1)^n$ *nu* are limită.

3. *Referitor la operația de înmulțire*, vom constata că șirurile următoare, $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$, se află în cazul exceptat $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ și $b=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$, iar șirul produs $(p_n)_n$, $p_n=x_n\cdot y_n$, poate să aibă o limită oarecare sau poate să *nu* aibă limită. Din acest motiv, *nu* se acordă nici un sens expresiei $a\cdot b=0\cdot\infty$.

a) $c\in\mathbb{R},\ x_n=\dfrac{c}{n},\ y_n=n,\ \lim\limits_{n\to\infty} p_n=\lim\limits_{n\to\infty} c=c$.

b) $x_n=\dfrac{1}{n},\ y_n=n^2,\ \lim\limits_{n\to\infty} p_n=\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$.

c) $x_n=-\dfrac{1}{n},\ y_n=n^2,\ \lim\limits_{n\to\infty} p_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$.

d) $x_n=\dfrac{1}{n}\cdot(-1)^n,\ y_n=n,\ p_n=(-1)^n$ *nu* are limită.

4. *Referitor la operația de împărțire*, vom constata că șirurile următoare, $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$, $y_n\neq 0, \forall n\geq 1$, se află în cazul exceptat $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ și $b=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$, iar șirul cât $(r_n)_n$, $r_n=\dfrac{x_n}{y_n}$, poate să aibă o limită oarecare sau poate să *nu* aibă limită. Din acest motiv *nu* se acordă nici un sens expresiei $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\infty}{\infty}$.

a) $c>0, x_n=c\cdot n,\ y_n=n,\ \lim\limits_{n\to\infty} r_n=\lim\limits_{n\to\infty} c=c$;

b) $x_n=n,\ y_n=n^2,\ \lim\limits_{n\to\infty} r_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$;

c) $x_n=n^2,\ y_n=n,\ \lim\limits_{n\to\infty} r_n=\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$;

d) $x_n=\left(2+(-1)^n\right)\cdot n,\ y_n=n,\ r_n=2+(-1)^n$ *nu* are limită.

Inversele acestor șiruri, $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$, $a_n=\dfrac{1}{x_n}$ și $b_n=\dfrac{1}{y_n}$, se află în cazul exceptat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$, iar șirul cât poate să aibă limita $\dfrac{1}{c}>0,\ \infty,\ 0$ sau poate să *nu* aibă limită. Din acest motiv, *nu* se acordă nici un sens expresiei $\dfrac{0}{0}$.

5. Exemplele precedente și exemple asemănătoare justifică faptul că nu s-a acordat nici un sens expresiilor: $\infty-\infty$, $-\infty+\infty$, $0\cdot(\pm\infty)$, $(\pm\infty)\cdot 0$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{x}{0}\left(x\in\overline{\mathbb{R}}\right)$.

În majoritatea exemplelor care urmează, regulile de calcul *nu* se aplică pentru forma inițială în care sunt date șirurile, ci este necesară o transformare judicioasă a expresiilor în vederea *„înlăturării” nedeterminărilor*.

Șirul exponențial

Fie un număr $a > 0$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, \text{ pentru } 0 < a < 1 \\ 1, \text{ pentru } a = 1 \\ \infty, \text{ pentru } a > 1 \end{cases}$.

Demonstrație. Au loc următoarele cazuri:

Cazul 1: $a > 1$. Notăm $r = a - 1$. Rezultă $r > 0$ și $a = 1 + r$. Conform inegalității lui Bernoulli, avem: $a^n = (1+r)^n > 1 + nr > nr, \forall\, n \geq 2$. În plus, $\lim\limits_{n\to\infty} nr = \infty \cdot r = \infty$. Conform consecinței la regula „cleștelui”, avem: $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.

Cazul 2: $a = 1$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Cazul 3: $0 < a < 1$. Notăm $b = \frac{1}{a}$. Rezultă $b > 1$ și $a = \frac{1}{b}$. Conform cazului 1 și operațiilor cu limite, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b^n} = \frac{1}{\infty} = 0$. ■

Șirul putere

Fie un număr $a \in \mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} 0, \text{ pentru } a < 0 \\ 1, \text{ pentru } a = 0 \\ \infty, \text{ pentru } a > 0 \end{cases}$.

Demonstrație. Au loc următoarele cazuri:

Cazul 1: $a > 0$. Luăm $k \in \mathbb{N}$ fixat a.î. $k \geq 2$ și $0 < \frac{1}{k} < a$. Avem $n^{n/k} < n^a, \forall\, n \geq 2$. Fie vecinătatea arbitrară $U = (\varepsilon, \infty] \in \mathcal{V}_e(\infty), \varepsilon > 0$. Condiția $n^{1/k} \in U$ este echivalentă cu $n^{1/k} > \varepsilon$, deci cu $n > \varepsilon^k$. Luăm $m_U = \left[\varepsilon^k\right] + 2$ și deducem că $\forall n \geq m_U$, avem $n \geq 2$ și $n > \varepsilon^k$, deci $n^a > n^{1/k} > \varepsilon$, adică $n^a \in U$. Conform definiției, $\lim\limits_{n\to\infty} n^a = \infty$.

Cazul 2: $a = 0$. Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Cazul 3: $a < 0$. Notăm $b = -a$. Avem $b > 0$ și $n^a = n^{-b} = \frac{1}{n^b}, \forall n \geq 1$. Conform cazului 1 și operațiilor cu limite, avem: $\lim\limits_{n\to\infty} n^a = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^b} = \frac{1}{\infty} = 0$. ■

Șiruri cu termenul general funcție polinomială sau rațională de variabilă n

Fie două funcții polinomiale $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin
$P(x) = a_p \cdot x^p + a_{p-1} \cdot x^{p-1} + \ldots + a_0$ și $Q(x) = b_q \cdot x^q + b_{q-1} \cdot x^{q-1} + \ldots + b_0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, unde: $p, q \in \mathbb{N}^*$; $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p, b_0, b_1, \ldots, b_{q-1}, b_q \in \mathbb{R}$; $a_p \neq 0$; $b_q \neq 0$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} P(n) = a_p \cdot \infty$ (are sens) și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_p}{b_q} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n^{p-q}$ (are sens).

Demonstrație. Q are cel mult q rădăcini reale, deci $\exists\ m \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall\ x \geq m$ să avem $Q(x) \neq 0$. Vom considera șirurile $\left(P(n)\right)_{n\geq 1}$ și $\left(\dfrac{P(n)}{Q(n)}\right)_{n\geq m}$, $Q(n) \neq 0,\ \forall n \geq m$.

Pentru a calcula $\lim\limits_{n\to\infty} P(n)$, se dă factor comun n^p și $P(n)$ se aduce la forma $P(n) = n^p \cdot x_n$, unde $x_n = a_p + a_{p-1}\cdot\dfrac{1}{n} + \ldots + a_0\cdot\dfrac{1}{n^p}, \forall n \geq 1$.

Conform teoremei 1: $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^i} = 0\left(1 \leq i \leq p\right)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_p$.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} P(n) = \lim\limits_{n\to\infty} n^p \cdot x_n = \infty\cdot a_p$. (are sens). Pentru a calcula $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P(n)}{Q(n)}$, se aduce $Q(n)$ la forma $Q(n) = n^q \cdot y_n$, unde $y_n = b_q + b_{q-1}\cdot\dfrac{1}{n} + \ldots + b_0\cdot\dfrac{1}{n^q}, \forall n \geq m$.

Conform teoremei 1, avem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P(n)}{Q(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{p-q}\cdot\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a_p}{b_q}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-q}$ (are sens). ■

Exemple Pentru exemplificare, calculăm următoarele limite:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-3n^2 + 5n + 7\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot\left(-3 + \dfrac{5}{n} + \dfrac{7}{n^2}\right) = \infty\cdot(-3) = -\infty$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3n^2 + 5n + 7}{2n^2 - 4n + 6} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\cdot\left(-3 + \dfrac{5}{n} + \dfrac{7}{n^2}\right)}{n^2\cdot\left(2 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{6}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3 + \dfrac{5}{n} + \dfrac{7}{n^2}}{2 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{6}{n^2}} = \dfrac{-3}{2} = -\dfrac{3}{2}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^3 + 2n^2 + 1}{n^5 + 7n^3 + 2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{n^5}\cdot\dfrac{-1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^3}}{1 + \dfrac{7}{n^2} + \dfrac{2}{n^5}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{-1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^3}}{1 + \dfrac{7}{n^2} + \dfrac{2}{n^5}} = 0\cdot(-1) = 0$.

Exerciții rezolvate

1. Fie șirul $(x_n)_n$, $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Rezolvare. Avem $\sqrt[3]{n^2} = n^{2/3}$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2} = \infty$. Suntem în cazul de nedeterminare $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Pentru a elimina nedeterminarea, vom da factor comun n la numitor și vom face simplificarea:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2/3}}{n\cdot\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} n^{-1/3}\cdot\frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} = 0\cdot\frac{1}{1+0} = 0.$$

Am observat că $\left(n^{-1/3}\right)_n$ este șir de puteri, cu puterea $-1/3 < 0$.

2. Fie șirul $(x_n)_n$, $x_n = \dfrac{2\cdot 3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + 2^{n+1}}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Rezolvare. Avem de a face cu șiruri exponențiale. Pentru a elimina nedeterminarea $\dfrac{\infty}{\infty}$, vom da factor comun 3^n (exponențiala cu baza mai mare) la numărător și la numitor și vom face simplificarea. Pe de altă parte, $\frac{2}{3}<1$ și $\left|\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right|=\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Conform consecinței regulii „cleștelui”, avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n=0$, deci

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot\left[2+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]}{3^n\cdot\left[3+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{3+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}.$$

Teorema 2

Fie o funcție elementară $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}$ și fie un punct $a\in D$. Dacă $(x_n)_n$ este un șir convergent de numere din D astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, atunci avem proprietatea:

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=f(a).$$

Demonstrație. Dacă f este funcție polinomială sau funcție rațională, proprietatea rezultă din aplicarea (în număr finit a) operațiilor cu limite de șiruri (teorema 1). Pentru celelalte funcții elementare, proprietatea își va găsi justificarea ulterior. ■

Exemple **1.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\sin\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\pi}{2n+1}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

2. Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$. Ne aflăm în cazul exceptat $\infty-\infty$ deoarece

$\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$ și, conform teoremelor 1 și 2, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\left(\lim_{n\to\infty}n\right)\cdot\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\infty\cdot\sqrt{1+0}=\infty\cdot1=\infty.$$

Vom elimina nedeterminarea amplificând cu expresia conjugată $\sqrt{n^2+n}+n$, dând factor comun n la numitor, simplificând și aplicând apoi teoremele 1 și 2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}.$$

Teorema 3

Fie șirul $(x_n)_n$, $n\geq0$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Avem următoarele proprietăți:

1. Dacă $x_n>0,\forall n\geq0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=+\infty$.

2. Dacă $x_n<0,\forall n\geq0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=-\infty$.

Demonstrație. **1.** Fie o vecinătate arbitrară $U=(\varepsilon,\infty]\in \mathcal{V}_e(\infty)$, $\varepsilon>0$. Pentru vecinătatea $V=(-1/\varepsilon,\ 1/\varepsilon)\in \mathcal{V}_e(0)$, $\exists\, m_U\in\mathbb{N}$ a.î. $\forall n\geq m_U$ să avem $x_n\in V$; rezultă $x_n<\frac{1}{\varepsilon}$, deci $\frac{1}{x_n}>\varepsilon$, de unde rezultă că $\frac{1}{x_n}\in U$. În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\infty$.

2. Dacă $x_n<0,\forall n\geq 0$, atunci $-x_n>0,\forall n\geq 0$. Conform teoremei 1 și afirmației 1, avem $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n)=-\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{-x_n}\right)=-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{-x_n}=-\infty$. ■

Exemple $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-\sqrt[10]{1+\frac{1}{n}}}=-\infty$, deoarece $1-\sqrt[10]{1+\frac{1}{n}}<0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\sqrt[10]{1+\frac{1}{n}}\right)=1-\sqrt[10]{1}=0$.

4.7. Șiruri monotone

Vom considera un șir arbitrar de numere reale $(x_n)_n$.

Definiții

Fie variabila $n\in\mathbb{N}$. *Șirul* $(x_n)_n$ *se numește*:

1. **constant** dacă $x_n=x_{n+1}$, $\forall\ n$ (echivalent, $\exists a\in\mathbb{R}$, a.î. $x_n=a$, $\forall\ n$);

2. **monoton crescător** (respectiv **strict crescător**) dacă $x_n\leq x_{n+1}$, $\forall\ n$ (respectiv $x_n<x_{n+1}$, $\forall\ n$);

3. **monoton descrescător** (respectiv **strict descrescător**) dacă $x_n\geq x_{n+1}$, $\forall\ n$ (respectiv $x_n>x_{n+1}$, $\forall\ n$);

4. **monoton** dacă șirul este monoton cresctor sau monoton descrescător;

5. **strict monoton** dacă șirul este strict crescător sau strict descrescător.

Vom mai spune *șir crescător* (*descrescător*) în loc de șir monoton crescător (monoton descrescător).

Exemple **1**. Orice șir constant este monoton crescător și monoton descrescător.

2. Șirurile $((-1)^n)_n$ și $\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)_n$ *nu* sunt monotone.

3. Șirul $(x_n)_n$, $x_n=\left[\frac{10+(-1)^n}{n+1}\right]$ (partea întreagă), este constant pentru $n\geq 11$.

4. Șirul $(x_n)_n$, $x_n=(n-5)^2+1$, este strict crescător pentru $n\geq 5$.

Teorema lui Weierstrass pentru șiruri monotone

Dacă șirul $(x_n)_n$ este monoton și mărginit, atunci șirul este convergent.

Generalizare

1. Dacă șirul $(x_n)_n$ este monoton crescător, atunci $\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}x_n\in\overline{\mathbb{R}}$.

2. Dacă șirul $(x_n)_n$ este monoton descrescător, atunci $\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}x_n\in\overline{\mathbb{R}}$.

Consecință

Fie două șiruri $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ cu următoarele proprietăți:

1. $x_n \le x_{n+1} \le y_{n+1} \le y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$; **2.** $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$.

Atunci șirurile sunt convergente și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Demonstrație. Avem relațiile $x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n \le y_n \le \ldots \le y_1 \le y_0$. Rezultă că șirul $(x_n)_n$ este monoton crescător și mărginit. Conform proprietății lui Weierstrass, șirul este convergent. Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$. Deoarece $y_n = (y_n - x_n) + x_n$, rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) + \lim_{n\to\infty} x_n = 0 + a = a. \quad \blacksquare$$

Exemple **1**. Șirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\ge1}$ este strict descrescător, deci $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n} = 0$.

2. Șirul $(n)_n$ este strict crescător, deci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n = \sup \mathbb{N} = \infty$.

3. Șirul $(-n)_n$ este strict descrescător, deci $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(-n) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(-n) = -\infty$.

Comentarii:

În practică, pentru a arăta că un șir $(x_n)_n$ este monoton, se pot utiliza trei procedee, în funcție de particularitățile șirului:

1. Se studiază semnul diferenței $x_{n+1} - x_n$.

2. Se compară raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ cu numărul 1 (în ipoteza $x_n > 0, \forall n$).

3. Se verifică prin inducție matematică inegalitatea $x_n \le x_{n+1}$ (sau $x_n \ge x_{n+1}$), mai ales atunci când șirul este definit prin recurență.

Exemple **1.** Pentru $a > 0$, șirul $x_n = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n}{n!}, \forall n \ge 2$, este strict crescător deoarece $x_{n+1} - x_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} > 0, \forall n \ge 2$, în timp ce șirul $y_n = \frac{a^n}{n!}, \forall n \ge 2$, este strict descrescător pentru $n > [a]$, deoarece $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} < 1$, pentru $n > [a]$.

2. Fie șirul $(x_n)_n$ definit prin relația de recurență: $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}, \forall n \ge 0$, $x_0 = 1$.

Prin inducție se arată că șirul este strict crescător: **Pas 1.** $x_0 = 1 < \sqrt{2} = x_1$. **Pas 2.** Dacă pentru un $n \ge 0$, avem $x_n < x_{n+1}$, atunci $1 + x_n < 1 + x_{n+1}$, deci $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} < \sqrt{1 + x_{n+1}} = x_{n+2}$.

Tot prin inducție se arată că $x_n < 2, \forall n \ge 0$: **Pas 1.** $x_0 = 1 < 2$. **Pas 2.** Dacă pentru un $n \ge 0$ avem $x_n < 2$, atunci $1 + x_n < 3$, deci $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} < \sqrt{3} < 2$.

Conform proprietății lui Weierstrass, rezultă că șirul $(x_n)_n$ este convergent.

4.8. Șiruri de puteri și șiruri de logaritmi

Cu scopul de a scrie o formulă generală de trecere la limită pentru șirurile de puteri, vom extinde în continuare operația uzuală de ridicare la putere, considerată „operație cu sens”.

Definiții

Fie trei numere $1<a<\infty$, $0<b<1$ și $0<c\le\infty$ (c poate să ia și valoarea ∞). Extindem operația uzuală de ridicare la putere, definind **operațiile cu sens**:

$$a^{\infty}=\infty;\ a^{-\infty}=0;\ b^{\infty}=0;\ b^{-\infty}=\infty;$$
$$\infty^{c}=\infty;\ \infty^{-c}=0;\ 0^{c}=0;\ 0^{-c}=\infty.$$

Nu se definesc expresiile 0^0, $1^{-\infty}$, 1^{∞} și ∞^0, pe care le vom denumi **cazuri exceptate** sau **nedeterminări** sau **operații fără sens**.

Teorema 1 — Limita unui șir de puteri

Fie $a\in\overline{\mathbb{R}}_+$ și $x\in\overline{\mathbb{R}}$. Fie două șiruri de numere reale $(a_n)_n$ și $(x_n)_n$ a.î. $a_n>0$, $\forall\ n\ge 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ și $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. Dacă expresia a^x *are sens*, atunci avem:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{x_n}=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)^{\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\right)}$$ (*limita unei puteri se distribuie bazei și exponentului*).

Consecință — Limita unui șir de radicali

Fie un număr $m\in\mathbb{N}, m\ge 2$. Definim *operația cu sens*: $\sqrt[m]{\infty}=\infty$. Dacă m este impar, atunci definim *operația cu sens*: $\sqrt[m]{-\infty}=-\infty$.

Fie un șir de numere reale $(x_n)_n$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\left(x\in\overline{\mathbb{R}}\right)$.

Dacă $x_n\ge 0$, $\forall\ n\ge 0$, sau dacă m este impar, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[m]{x_n}=\sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}$ (*limita radicaului este egală cu radicalul limitei*).

Demonstrație. **1.** Presupunem că $x_n\ge 0$, $\forall\ n\ge 0$, și notăm $p=\dfrac{1}{m}$. Rezultă $x\ge 0$. Conform teoremei 1, avem $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[m]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^p=\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\right)^p=x^p=\sqrt[m]{x}$.

2. Presupunem că *m este impar*. Este suficient să presupunem $x\le 0$.

Dacă $x=0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$ și, conform demonstrației precedente, avem:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sqrt[m]{x_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[m]{|x_n|}=\sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|}=\sqrt[m]{0}=0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[m]{x_n}=0$.

Dacă $x<0$, atunci putem presupune $x_n<0$, $\forall\ n\ge 0$, și avem: $-x_n>0$, $\forall\ n\ge 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[m]{x_n}=-\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[m]{-x_n}=-\sqrt[m]{-x}=\sqrt[m]{x}$. ■

Cu scopul de a da o regulă generală pentru limita unui șir de logaritmi, vom extinde operația de logaritmare.

Definiții

Fie două numere reale $a>1$ și $0<b<1$. Definim **operațiile cu sens**:

$$\log_a\infty=\infty;\ \log_a 0=-\infty;\ \log_b\infty=-\infty;\ \log_b 0=\infty.$$

Teorema 2

Fie $a>0$, $a\ne 1$ și $x\in\overline{\mathbb{R}}_+$. Fie un șir $(x_n)_n$ a.î. $x_n>0$, $\forall\ n\ge 0$, și $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}(\log_a x_n)=\log_a\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)$$ (*limita logaritmului este egală cu logaritmul limitei*).

Exemple **1**. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{4n}{n+1}}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n}{n+1}}=\sqrt{4}=2$ (are sens).

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{1-8n}{1+n}}=\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-8n}{1+n}}=\sqrt[3]{-8}=-2$ (are sens).

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{1/n}=2^{\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)}=2^0=1$ (are sens).

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{1-2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1-2n}{n}}=\left(\lim\limits_{n\to\infty}n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-2n}{n}\right)}=\infty^{-2}=0$ (are sens).

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{2n+1}=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)}=0^{\infty}=0$ (are sens).

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\lg\dfrac{(10n+1)^2}{n^2+1}=\lg\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(10n+1)^2}{n^2+1}\right)=\lg 10^2=2$ (are sens).

7. $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\log_3\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}\right]$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)=\infty$; $0^{\infty}=0$ (are sens).

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)}=0^{\infty}=0$; $L=\log_3 0=-\infty$.

Observații:

1. *Cazurile exceptate pentru puteri se transformă în cazuri exceptate pentru produs*.

Fie $a\in\overline{\mathbb{R}}_+$ și $x\in\overline{\mathbb{R}}$. Fie șirurile $(a_n)_n$ și $(x_n)_n$ a.î. $a_n>0, \forall\, n\geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ și $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. Notăm $y_n=\lg a_n, \forall\, n\geq 0$, și $y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lg a\in\overline{\mathbb{R}}$. Logaritmăm, exponențiem și avem: $(a_n)^{x_n}=10^{x_n\cdot\lg a_n}=10^{x_n\cdot y_n}, \forall n\geq 0$. Conform teoremelor precedente, rezultă: „$\exists\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{x_n}\Leftrightarrow\exists\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)$” ($a^x$ are sens $\Leftrightarrow x\cdot y$ are sens).

Prin negație: „a^x *este caz exceptat* $\Leftrightarrow x\cdot y$ *este caz exceptat*”. Concret: „$a^x=0^0\Leftrightarrow x\cdot y=0\cdot(-\infty)$”; „$a^x=1^{\pm\infty}\Leftrightarrow x\cdot y=(\pm\infty)\cdot 0$”; „$a^x=\infty^0\Leftrightarrow x\cdot y=0\cdot\infty$”.

2. *Nu se acordă nici un sens expresiilor* 0^0, $1^{\pm\infty}$, ∞^0 deoarece, în aceste cazuri, așa cum am constatat pentru produs, despre șirul $(a_n)^{x_n}$ *nu* se poate afirma nimic. Uneori acest șir are limită arbitrară, alteori *nu* are limită.

♦ ***Exemple pentru cazul exceptat*** $\mathbf{0^0}$**:**

1. $\lg a_n=-n$; $a_n=10^{-n}\to 0$ și $x_n=-\dfrac{2}{n}\to 0$; deci $(a_n)^{x_n}=10^2\to 100$.

2. $\lg a_n=-n$; $a_n=10^{-n}\to 0$ și $x_n=\dfrac{1}{n}\cdot(-1)^{n+1}\to 0$; deci $(a_n)^{x_n}=10^{(-1)^n}$ *nu* are limită.

♦ ***Exemple pentru cazul exceptat*** $1^{\pm\infty}$ **:**

1. Fie $a_n=10^{1/n}\to 1$ și $x_n=\pm 5n\to\pm\infty$. Rezultă: $(a_n)^{x_n}=10^{\pm 5}\to 10^{\pm 5}$.

2. Fie $a_n=10^{\frac{1}{n}\cdot(-1)^n}\to 1$ și $x_n=\pm n\to\pm\infty$. Rezultă: $(a_n)^{x_n}=10^{\pm(-1)^n}$ *nu* are limită.

♦ ***Exemple pentru cazul exceptat*** ∞^0 **:**

1. Fie $a_n = 10^n \to \infty$ și $x_n = \frac{1}{n} \to 0$. Rezultă: $(a_n)^{x_n} = 10 \to 10$.

2. Fie $a_n = 10^n \to \infty$ și $x_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$. Rezultă: $(a_n)^{x_n} = 10^{(-1)^n}$ *nu* are limită.

4.9. Numărul *e*. Funcția exponențială de bază *e* și funcția logaritm natural; înlăturarea nedeterminărilor în cazul exceptat $1^{\pm\infty}$

Apariția logaritmilor este legată esențial de numărul *e*, inițial fiind descoperiți logaritmii în baza *e* (numiți și logaritmi naturali sau logaritmi neperieni și notați cu ln). Aceștia au fost inventați de către matematicianul scoțian John Neper (sau Napier), 1550-1617 și au avut ca motivație simplificarea operațiilor de înmulțire și împărțire cu numere foarte mari în astronomie.

Numărul *e* are un rol important în analiza matematică.

Fie șirurile $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ și $E_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Șirul $(e_n)_n$ este strict crescător, șirul $(E_n)_n$ este strict descrescător și au aceeași limită.

Definim numărul $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,

notat după inițiala matematicianului elvețian (rezident în Rusia), Leonhard Euler (1707-1783).

Numărul *e* este irațional și are reprezentarea *e* = 2, 718281828... Acest număr generează:

1. *funcția exponențială de bază e*, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x, \forall x\in\mathbb{R}$ (notată din ce în ce mai frecvent prin „exp”);

2. *funcția logaritmică de bază e*, $\ln = \log_e : (0,\infty)\to\mathbb{R}$, numită *logaritm natural* sau *logaritm neperian*.

Teorema 1 — Înlăturarea nedeterminărilor de forma $1^{\pm\infty}$

1. Fie un șir $(x_n)_n$ a.î. $|x_n| > 1 (\forall n \geq 0)$ și $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = \infty$. Atunci: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

2. Fie un șir $(y_n)_n$ a.î. $0 < |y_n| < 1 (\forall n \geq 0)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Atunci: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e$.

Observații:

1. Șirurile $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ și $(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}$ se află în cazul de nedeterminare $1^{\pm\infty}$.

2. Șirul $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ generalizează șirul $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ din definiția numărului *e*.

3. Șirul $\left(1+y_n\right)^{\frac{1}{y_n}}$ se aduce la forma $\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ cu ajutorul notației $y_n=\dfrac{1}{x_n}$, deci proprietățile 1 și 2 din teorema 1 sunt echivalente.

♦ ***Procedeu de înlăturare a nedeterminărilor de forma*** $1^{\pm\infty}$:

Fie două șiruri $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ a.î. $a_n>0, a_n\neq 1\left(\forall n\geq 0\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left|b_n\right|=\infty$.

Șirul $\left(a_n\right)^{b_n}$ se află în cazul de nedeterminare $1^{\pm\infty}$ și se poate reduce, de exemplu, la aplicarea proprietății 2 din teorema 1, notând $y_n=a_n-1$ și făcând transformarea:

$$\left(a_n\right)^{b_n}=\left[1+\left(a_n-1\right)\right]^{b_n}=\left[\left(1+\left(a_n-1\right)\right)^{\frac{1}{a_n-1}}\right]^{\left(a_n-1\right)\cdot b_n}=\left[\left(1+y_n\right)^{\frac{1}{y_n}}\right]^{y_n\cdot b_n}.$$

Conform teoremei 1, avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+y_n\right)^{\frac{1}{y_n}}=e$.

Dacă $\exists\lim\limits_{n\to\infty} y_n\cdot b_n=\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$, atunci $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)^{b_n}=e^{\lambda}$.

Exemplu Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+3n+1}\right)^n$.

Notăm $a_n=\dfrac{n^2+1}{n^2+3n+1}$, $b_n=n$ și $c_n=\left(a_n\right)^{b_n}, \forall n\geq 1$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$, deci șirul $(c_n)_n$ se află în cazul exceptat 1^{∞}.

Transformăm pe a_n, după cum urmează:

$$a_n=1+\frac{n^2+1}{n^2+3n+1}-1=1+\frac{-3n}{n^2+3n+1}=1+y_n\text{, unde } y_n=\frac{-3n}{n^2+3n+1}.$$

Aducem pe c_n la forma $c_n=\left(a_n\right)^n=\left(1+y_n\right)^n=\left[\left(1+y_n\right)^{\frac{1}{y_n}}\right]^{n\cdot y_n}$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+y_n\right)^{\frac{1}{y_n}}=e$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot y_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3n^2}{n^2+3n+1}=\dfrac{-3}{1}=-3$.

Conform teoremei referitoare la limita unui șir de puteri, rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+y_n\right)^{\frac{1}{y_n}}\right]^{n\cdot y_n}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+y_n\right)^{\frac{1}{y_n}}\right]^{\left(\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot y_n\right)}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}.$$

4.10. Șiruri definite prin recurență

Modul de calcul recurent al termenilor unui șir este utilizat sistematic în programarea pe calculator. Un șir $(x_n)_n$ se definește prin inducție, în două etape:

1. Se dau numărul $k\in\mathbb{N}^*$ și primii k termeni $x_0,\ldots,x_{k-1}$.

2. Se dă o relație, o regulă sau o formulă care exprimă termenul general x_n (cu variabila $n\geq k$), în funcție de termenii precedenți (unul sau mai mulți) și eventual în funcție de rangul n.

Pentru un astfel de șir, *nu* există reguli generale de calcul al limitei și de aceea vom analiza un exemplu pentru a sugera un posibil mod de abordare.

Exerciţiu rezolvat

Fie un parametru $a > 0$ şi fie şirul $(x_n)_n$ definit prin relaţia de recurenţă: $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$, cu $x_0 = a$. Să se studieze existenţa limitei şi, în caz afirmativ, să se calculeze această limită.

Rezolvare:

Mai întâi, arătăm prin inducţie că $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0$:

Pas 1. $x_0 = a > 0$. **Pas 2.** Dacă presupunem că pentru un $n \in \mathbb{N}$ (neprecizat) avem $x_n > 0$, atunci $2x_n > 0$, deci $x_{n+1} = \sqrt{2x_n} > 0$.

Vom încerca să aflăm dacă şirul este monoton.

Avem, succesiv, echivalenţele: $x_0 < x_1 \Leftrightarrow a < \sqrt{2a} \Leftrightarrow a^2 - 2a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 2$.

Împărţim rezolvarea în trei cazuri.

Cazul 1: $0 < a < 2$

Demonstrăm prin inducţie că şirul este strict crescător: **Pas 1.** $x_0 < x_1$ conform echivalenţelor anterioare. **Pas 2.** Dacă presupunem că pentru un $n \in \mathbb{N}$ (neprecizat) avem $x_n < x_{n+1}$, atunci rezultă $2x_n < 2x_{n+1}$, deci $x_{n+1} = \sqrt{2x_n} < \sqrt{2x_{n+1}} = x_{n+2}$.

Demonstrăm prin inducţie că $x_n < 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$. **Pas 1.** $x_0 = a < 2$, conform cazului 1. **Pas 2.** Dacă presupunem că pentru un $n \in \mathbb{N}$ (neprecizat), avem $x_n < 2$, atunci rezultă $2x_n < 4$, deci $x_{n+1} = \sqrt{2x_n} < \sqrt{4} = 2$.

Rezultă că şirul $(x_n)_n$ este strict crescător şi mărginit. Conform proprietăţii lui Weierstrass, şirul este convergent. Notăm $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$.

Trecem la limită în relaţiile: $a = x_0 < x_n < 2$ şi $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, \forall n \geq 1$.

Rezultă: $0 < a \leq l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq 2$ şi $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \sqrt{2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \sqrt{2l}$.

Ecuaţia $l = \sqrt{2l}$, echivalentă cu $l^2 = 2l$, are soluţiile $l = 0$ şi $l = 2$. Deoarece $0 < l \leq 2$, rezultă că $l = 2$. În concluzie, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Cazul 2: $a = 2$

Se arată prin inducţie că $x_n = 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Rezultă că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Cazul 3: $a > 2$

Se arată prin inducţie că şirul este strict descrescător şi că $x_n > 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Rezultă că şirul este strict descrescător şi mărginit. Conform proprietăţii lui Weierstrass, şirul este convergent. Notăm $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$.

Trecem la limită în relaţiile: $2 < x_n$ şi $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$. Deducem: $2 \leq l$ şi $l = \sqrt{2l}$.

Ecuaţia $l = \sqrt{2l}$ are soluţiile $l = 0$ şi $l = 2$, iar condiţia $2 \leq l$ ne arată că $l = 2$.

Rezultă că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. În concluzie, în toate cazurile, rezultă: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

4.11. Aplicații*

♦ Reprezentarea numerelor reale în fracție zecimală infinită

Pentru $y \in \mathbb{R}$, notăm **partea întreagă a lui y** cu $[y]$ (cel mai mare întreg $\leq y$).

Fie un număr real $x > 0$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu $x^{(n)} = \frac{[10^n \cdot x]}{10^n}$, **aproximarea zecimală de ordin *n* a lui *x*** și avem $x^{(n)} \leq x < x^{(n)} + \frac{1}{10^n}$, conform proprietăților părții întregi ($[y] \leq y < [y] + 1$; $y - 1 < [y] \leq y$).

În clasa a IX-a, s-a arătat că există un șir unic $(a_n)_n$ cu proprietățile:

1. $a_0 \in \mathbb{N}$ (a_0 reprezentat zecimal) și $a_n \in \{0,1,...,9\}, \forall n \geq 1$;

2. mulțimea $\{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n < 9\}$ este infinită;

3. $x^{(n)} = a_0, a_1 a_2 ... a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n}, \forall n \geq 1$.

Numărul x se notează cu simbolul $x = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$, numit **fracție zecimală infinită** sau **reprezentare zecimală infinită a lui *x***. În acest mod, au fost puse în evidență șirul de numere naturale $(a_n)_{n \geq 0}$, numit, de asemenea, **reprezentare zecimală infinită a lui *x***, precum și șirul de numere raționale $(x^{(n)})_{n \geq 1}$.

Teorema 1

Șirul de aproximări zecimale $(x^{(n)})_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim\limits_{n \to \infty} x^{(n)} = x$.

Demonstrație. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem $x^{(n)} \leq x < x^{(n)} + \frac{1}{10^n}$, deci $x - \frac{1}{10^n} < x^{(n)} \leq x$.

Deoarece $\lim\limits_{n \to \infty} \left(x - \frac{1}{10^n} \right) = x$, conform regulii „cleștelui”, rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} x^{(n)} = x$. ■

Exemplu Scriem ca fracție ordinară numărul reprezentat ca fracție zecimală infinită periodică $x = 123,4(56) = 123,45656...56...$.

Fie $n \geq 1$, arbitrar. Adunând n termeni în progresie geometrică, deducem:

$$x^{(2n+1)} = 123 + \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{6}{10^3} + ... + \frac{5}{10^{2n}} + \frac{6}{10^{2n+1}} = \frac{1234}{10} + \left(5 + \frac{6}{10}\right) \cdot \frac{1}{10^2} + ... +$$

$$+ \left(5 + \frac{6}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{10^2}\right)^n = \frac{1234}{10} + \frac{56}{10} \cdot \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1 - \left(1/10^2\right)^n}{1 - 1/10^2} = \frac{1234}{10} + \frac{56}{990} \cdot \left(1 - \frac{1}{100^n}\right).$$

Conform operațiilor cu limite: $x = \lim\limits_{n \to \infty} x^{(2n+1)} = \frac{1234}{10} + \frac{56}{990}(1 - 0) = \frac{122222}{990}$.

* Rezultatele din această parte a paragrafului sunt facultative.

♦ Aproximarea marginilor unei mulțimi, cu ajutorul șirurilor

Teorema 2

Fie o mulțime $A \subset \mathbb{R}$ cu cel puțin două elemente. Fie $a = \inf A$ și $b = \sup A$ în $\overline{\mathbb{R}}$. Atunci există două șiruri $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ de elemente din A, cu proprietățile:

1. $a \le x_n \le x_{n+1} < y_{n+1} \le y_n \le b, \forall n \in \mathbb{N}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Demonstrație. Rezultă $a < b$. Luăm două șiruri de numere reale $(u_n)_n$ și $(v_n)_n$ cu proprietățile: $a < u_n < v_n < b, \forall n \in \mathbb{N}$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$; $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem: $a < u_n$; u_n *nu* este minorant pentru A; $\exists a_n \in A$ a.î. $a \le a_n < u_n$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim $x_n = \min\{a_0, a_1, ..., a_n\}$.

Rezultă că $\forall n \in \mathbb{N}$, avem $x_n \in A$ și $a \le x_{n+1} \le x_n < u_n < v_n$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, conform regulii „cleștelui”, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

În mod asemănător, se stabilește existența șirului $(y_n)_n$. ■

♦ Aproximarea punctelor de acumulare, cu ajutorul șirurilor

Având în vedere importanța pe care o au punctele de acumulare pentru limitele de funcții, vom stabili următoarea teoremă de caracterizare.

Teorema 3

Fie o mulțime nevidă $A \subset \mathbb{R}$ și $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $a \in A'$ (a este punct de acumulare al lui A).

2. Există un șir $(x_n)_n$ de elemente din A a.î. $x_n \ne a$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

În consecință, dacă $A' \ne \varnothing$, atunci A este infinită.

Demonstrație. Împărțim demonstrația în trei părți.

Cazul 1: $a \in \mathbb{R}$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie vecinătatea $V_n = \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{V}_e(a)$.

1 ⇒ 2. Presupunem că $a \in A'$. Atunci, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, avem $(A \cap V_n) \setminus \{a\} \ne \varnothing$, deci $\exists x_n \in (A \cap V_n) \setminus \{a\}$; rezultă $x_n \in A$, $x_n \ne a$ și $|x_n - a| < \frac{1}{n}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, conform regulii „cleștelui”, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Mai mult, șirul $(x_n)_n$ are o infinitate de termeni diferiți (în caz contrar, șirul ar conține un subșir constant, cu constanta diferită de a, ceea ce ar contrazice convergența către a).

2 ⇒ 1. Presupunem afirmația 2 adevărată. Atunci, $\forall V \in \mathcal{V}(a), \exists m_V \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall n \ge m_V$ să avem $x_n \in V$, deci $x_n \in (V \cap A) \setminus \{a\}$, deci $(V \cap A) \setminus \{a\} \ne \varnothing$. În concluzie, $a \in A'$.

Cazul 2: $a = \infty$. Luăm $V_n = (n, \infty] \in \mathcal{V}_e(\infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, și raționăm ca în cazul 1.

Cazul 3: $a = -\infty$. Luăm $V_n = [-\infty, -n) \in \mathcal{V}_e(-\infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Raționăm ca în cazul 1. ■

♦ Existența radicalilor

Acum suntem în măsură să demonstrăm existența radicalilor (afirmată în clasa a IX-a).

Teorema 4

Fie numerele $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, și $a \in \mathbb{R}_+^*$. Ecuația $x^n = a$ admite o soluție unică $x \in \mathbb{R}_+^*$, numită **radical de ordin *n* al lui *a*** și notată $x = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.

Demonstrație. Unicitatea soluției pozitive este evidentă.

Fie mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{R}_+ \middle| \, x^n \leq a\right\}$; A este nevidă $(0 \in A)$ și majorată de $c = \max\{1, a\}$.

Într-adevăr, $\forall x \in A$ avem $x^n \leq a \leq c = c \cdot 1^{n-1} \leq c \cdot c^{n-1} = c^n$, deci $x \leq c$.

Conform axiomei lui Cantor, $\exists b = \sup A \in \mathbb{R}_+$.

Conform teoremei 2, există un șir $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ a.î. $x_i \in A(\forall i \in \mathbb{N})$ și $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = b$. Atunci, $(x_i)^n \leq a$, $\forall i \in \mathbb{N}$. La limită, obținem: $b^n = \lim\limits_{i \to \infty}(x_i)^n \leq a$.

Pe de altă parte, fie un șir $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ a.î. $b < y_i \, (\forall i \in \mathbb{N})$ și $\lim\limits_{i \to \infty} y_i = b$. Atunci, $\forall i \in \mathbb{N}$, avem: $\sup A = b < y_i$; $y_i \notin A(\forall x \in A, x \leq b)$; $(y_i)^n > a$. La limită, avem: $b^n = \lim\limits_{i \to \infty}(y_i)^n \geq a$.

Rezultă că $b^n \leq a$ și $b^n \geq a$, deci $b^n = a$, adică $b \geq 0$ este soluție a ecuației $x^n = a$. ■

♦ Lema lui Stolz și consecințe

Lema lui Stolz

Fie două șiruri $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ a.î. $0 < y_n < y_{n+1} \, (\forall n \in \mathbb{N})$ și $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \infty$.
Dacă există $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci există $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l$.

Observație: Lema lui Stolz se folosește pentru calcularea unor limite reductibile la cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Exemplu Calculăm $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}}{n \cdot \sqrt{n}} = L$.

Aplicăm lema lui Stolz pentru $x_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}$ și $y_n = n\sqrt{n}$, $\forall n \geq 1$:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}} = \frac{(n+1)^2 + n\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{(n+1)^3 - n^3} = \frac{(1+1/n)^2 + \sqrt{1+1/n}}{3 + 3/n + 1/n^2},$$

unde am amplificat cu conjugata $(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}$ și am simplificat fracția cu n^2.

Rezultă că $L = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(1+1/n)^2 + \sqrt{1+1/n}}{3 + 3/n + 1/n^2} = \dfrac{2}{3}$.

Consecința 1 — Lema lui Cesàro

Fie un șir $(a_n)_n$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = a$.

Demonstrație. Se aplică lema lui Stolz pentru $x_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ și $y_n = n,\ \forall n \geq 1$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{(n+1) - n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$. ■

Consecința 2

Fie un șir $(a_n)_n$ a.î. $a_n > 0\ (\forall n \geq 1)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = a$.

Demonstrație. Să notăm $c_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}, \forall n \geq 1$. Conform lemei lui Cesàro,

$$\lim_{n\to\infty} (\ln c_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1}}{(n+1) - n} = \ln a.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln c_n} = e^{\ln a} = a$. ■

Consecința 3 — Criteriul raportului

Fie un șir $(a_n)_n$ a.î. $a_n > 0\ (\forall n \geq 1)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Demonstrație. Conform consecinței 2, $\forall n \geq 2$, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_1}{1} \cdot \frac{a_2}{a_1} ... \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l. \quad ■$$

Exerciții rezolvate

1. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Rezolvare:

Aplică criteriul raportului. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Rezolvare:

Notăm $x_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}, n \geq 2$, și aplicăm criteriul raportului:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}, \text{ deci } \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{e}.$$

Scurt istoric

Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matematician francez, a fost profesor la Paris. Cauchy a „renovat” analiza matematică prin introducerea de metode riguroase. S-a remarcat ca unul dintre creatorii teoriei funcțiilor de variabilă complexă. A adus contribuții fundamentale în teoria funcțiilor analitice, a cercetat condiții de existență a soluțiilor ecuațiilor diferențiale, a redus formele pătratice la forma canonică și a adus contribuții la studiul grupurilor finite. A scris multe lucrări în domeniile mecanicii, fizicii, astronomiei.

Exerciții propuse

1. Să se scrie primii 5 termenii ai șirului $(x_n)_{n\geq 1}$, în următoarele situații:

a) $x_n = \frac{2n-1}{n^2-n+1}$; b) $x_n = \cos n\cdot\frac{\pi}{4}$; c) $x_n = \frac{2^n}{n!}$; d) $x_n = \cos(2n+1)\pi$;

e) $x_n = \left(\frac{2}{2!}+\frac{7}{3!}+...+\frac{n^2-2}{n!}\right)+\frac{n+2}{n!},\ n\geq 2$; f) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = -\frac{x_n}{2}+(-1)^n$.

2. Să se găsească termenul general al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$, în următoarele situații:

a) $-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},-\frac{1}{6},\frac{1}{7},-\frac{1}{8},\frac{1}{9},...$; b) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36,... ;

c) $\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},...$; d) 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63,... .

3. Să se găsească termenul general al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$, în următoarele situații:

a) $x_1 = 2,\ x_{n+1} = x_n+3, \forall n\geq 1$; b) $x_1 = \frac{1}{2},\ x_{n+1} = \frac{1}{5}\cdot x_n, \forall n\geq 1$;

c) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = 2x_n+3, \forall n\geq 1$; d) $x_1 = 2,\ x_{n+1} = 1-\frac{1}{x_n}, \forall n\geq 1$;

e) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{x_n+\sqrt{2}-1}{1+x_n(\sqrt{2}-1)}, \forall n\geq 1$.

4. Să se determine $m_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât să se verifice relațiile următoare.

a) $\left|\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{360},\ \forall n\geq m_0$; b) $\left|\frac{n}{n+1}-1\right| < 0{,}15,\ \forall n\geq m_0$;

c) $\left|\frac{2n}{5n+3}-\frac{2}{5}\right| < \frac{1}{10},\ \forall n\geq m_0$; d) $\left|\frac{n+1}{3n+2}-\frac{1}{3}\right| < \frac{1}{100},\ \forall n\geq m_0$.

5*. Folosind definiția limitei, să se stabilească egalitățile următoare.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5n+2} = \frac{3}{5}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n} = 0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1} = \infty$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{3n^2+2n+1} = \frac{1}{3}$.

6. Să se arate că următoarele șiruri $(x_n)_{n\geq 1}$ *nu* sunt mărginite:

a) $x_n = (-1)^n\cdot n$; b) $x_n = n^2+3n+1$; c) $x_n = \frac{3^n}{n+1}$; d) $x_n = n+n\cdot(-1)^n$.

7. Să se arate că următoarele șiruri $(x_n)_{n\geq 1}$ *nu* sunt monotone:

a) $x_n = \cos n\cdot\frac{\pi}{4}$; b) $x_n = \operatorname{tg}(2n+1)\frac{\pi}{4}$; c) $x_n = n+(-1)^n$.

8. Să se studieze monotonia și mărginirea următoarelor șiruri $(x_n)_{n\geq 1}$:

a) $x_n=5n^2+2$; b) $x_n=(-1)^n\cdot\frac{n}{n+1}$; c) $x_n=\log_3\frac{n+2}{n+4}$; d) $x_n=2^n$;

e) $x_n=\cos n\frac{\pi}{5}$; f) $x_n=\sin(n+1)\frac{\pi}{3}$; g) $x_n=\sqrt{n^2+1}-n$; h) $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

i) $x_n=\sqrt[3]{n^3-1}-n$; j) $x_n=2^n-3^n$; k) $x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{5}\right)^n$; l) $x_n=\frac{(n+2)!}{3^n}$;

m) $x_n=\frac{C_n^3}{A_n^3}(n\geq 3)$; n) $x_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$; o) $x_n=\frac{1+2+...+n}{n^2}$.

9. Să se arate că următoarele șiruri $(x_n)_{n\geq 1}$ sunt divergente:

a) $x_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$; b) $x_n=3^n$; c) $x_n=\cos n\cdot\frac{\pi}{3}$; d) $x_n=3^n-n^2$;

e) $x_n=\sin n-n$; f) $x_n=n\cdot n^{(-1)^n}$; g) $x_n=\sin n$.

10. Fie o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ de rație $r\in\mathbb{R}$. Să se arate că:

a) șirul $(a_n)_n$ este mărginit dacă și numai dacă $r=0$;

b) șirul $(a_n)_n$ este strict crescător dacă și numai dacă $r>0$.

11. Fie o progresie geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ de rație q ($q>0$ și $b_1>0$). Să se arate că:

a) șirul $(b_n)_n$ este mărginit $\Leftrightarrow q\in(0,1]$;

b) șirul $(b_n)_n$ este strict crescător $\Leftrightarrow q>1$.

12. Să se calculeze limita pentru următoarele șiruri:

a) $x_n=n^2+n+1$; b) $x_n=1-2n-3n^2$; c) $x_n=n+\frac{1}{n}$; d) $x_n=\frac{2n-1}{3n+1}$;

e) $x_n=\frac{5n^2-2n+1}{8n^2+3n+2}$; f) $x_n=\frac{2n^5+1}{(n+1)^3-n^3}$; g) $x_n=\frac{(n+1)^4-n^4}{(2n+1)^3}$;

h) $x_n=\frac{1+2+...+n}{C_n^3}$; i) $x_n=\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3}$; j) $x_n=\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^2}-\frac{n}{3}$;

k) $x_n=\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+..+n\cdot(n+1)}{n^3}$; l) $x_n=1+\frac{1}{C_2^2}+\frac{1}{C_3^2}+...+\frac{1}{C_n^2}$;

m) $x_n=\frac{1}{2^n}+(0,75)^n+1$; n) $x_n=\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^n+\left(\sin\frac{\pi}{15}\right)^n$; o) $x_n=\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^n-\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{1}{n}}$;

p) $x_n=\frac{2^n+1}{2^{n+2}+3}$; r) $x_n=\frac{(-5)^n+3\cdot 7^n}{5^{n+1}+7^{n+1}}$; s) $x_n=\left(tg\frac{\pi}{3}\right)^{-n}+\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^{-n}$;

t) $x_n=\frac{n-\sqrt[3]{n^2+1}}{3n+1}$; u) $x_n=\frac{\sqrt[4]{n}+\sqrt[5]{n^2}}{\sqrt[3]{n}+n}$; v) $x_n=\frac{\sqrt[3]{n^2-5n+7}}{n+1}$; w) $x_n=\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}$;

x) $x_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2n^2+1}{(n+1)^3-n^3}}$; y) $x_n=\left(\frac{2n-5}{3n+1}\right)^{\frac{n^2+1}{2n^2+5}}$; z) $x_n=\left(\frac{\sqrt{1+2n^2}}{3n^2+2}\right)^{\frac{\sqrt[3]{n^4+4}}{5n}}$.

13. Să se calculeze limita următoarelor șiruri.

a) $x_n=\sqrt{n^2+1}-n$; b) $x_n=\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}$; c) $x_n=\sqrt[3]{n^3+1}-n$;

d) $x_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-2\sqrt{n}$; e) $x_n=\dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}-n}{n}$; f) $x_n=n^2\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)$;

g) $x_n=\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$; h) $x_n=n^3\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}\right)$;

i) $x_n=\sqrt{n^3}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$; j) $x_n=n^2\left(\sqrt{\dfrac{n+2}{n+3}}-\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\right)$;

k) $x_n=\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$ [*Indicație:* se scade πn]; l) $x_n=\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n}$;

m) $x_n=\dfrac{\sqrt[n]{2^{n+1}+3^n}}{\sqrt[n+1]{3^n+5^{n+1}}}$; n) $x_n=\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}{n+\sqrt[3]{1+2n^2-n^3}}$;

o) $x_n=\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{\sqrt[3]{n^3+2}}{(n+1)^2-n^2}}$; p) $x_n=\cos\left(\dfrac{n^2+2n+2}{2n^2}\cdot\pi\right)$; r) $x_n=\log_3\dfrac{9n^3+7}{1^2+2^2+\ldots+n^2}$.

14*. Fie $a, b, c\in\mathbb{R}$ cu proprietatea $a+b+c=0$. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}+c\sqrt{n+2}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}\left(a\sqrt[3]{n}+b\sqrt[3]{n+1}+c\sqrt[3]{n+2}\right)$.

15*. Să se găsească numerele reale a și b astfel încât să avem relațiile următoare:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-a\cdot n\right)=b$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\left(\sqrt[3]{1-n^3}-a\cdot n\right)=b$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n^a\right)=b$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}n^a\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-\sqrt{n^2-\sqrt{n}}\right)=b$.

16*. Să se calculeze, în funcție de valorile parametrului real a, limitele următoarelor șiruri:

a) $x_n=\sqrt[n]{1+a^{2n}}$; b) $x_n=n^a\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)$; c) $x_n=n^a\left(\sqrt{\dfrac{n+2}{n+3}}-\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\right)$.

17*. Folosind regula „cleștelui”, să se calculeze limitele următoarelor șiruri:

a) $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n+n}}$; b) $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

c) $x_n=\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n}$; d) $x_n=\dfrac{1\cdot\cos 1}{n^3+1}+\dfrac{2\cdot\cos 2}{n^3+2}+\ldots+\dfrac{n\cdot\cos n}{n^3+n}$;

e) $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{i}{n^2}}-1\right)$.

18*. Utilizând teorema de convergență a șirurilor monotone și căutând o formulă de recurență, să se găsească limita următoarelor șiruri:

a) $x_n=\dfrac{a^n}{n!}(a>0)$; b) $x_n=\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$; c) $x_n=\dfrac{n^n}{(n!)^2}$.

19. Să se calculeze limita următoarelor șiruri:

a) $x_n = \left(\frac{n+5}{n+1}\right)^n$; b) $x_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n$; c) $x_n = \frac{2^n}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$;

d) $x_n = tg^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$; e) $x_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$; f) $x_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n^2}, n \geq 2$.

20*. Utilizând teorema de convergență a șirurilor monotone, să se găsească limita următoarelor șiruri definite prin recurență (în funcție de valorile parametrilor *a*, *b* menționați).

a) $x_{n+1} = \frac{1}{8}\left(x_n^3+4x_n\right), \forall n \in \mathbb{N}, x_0 = a,\ a \geq 0$; b) $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}, \forall n \in \mathbb{N},\ x_0 = \sqrt{a}$, $a > 0$;

c) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \forall n \in \mathbb{N}, x_0 = b,\ a > 0,\ b > 0$;

d) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a+x_n^2\right), \forall n \in \mathbb{N}, x_0 = 0,\ a \in [0,1]$;

e) $x_{n+1} = \frac{2ax_n}{a+x_n}, \forall n \in \mathbb{N},\ x_0 = b,\ a > 0,\ b > 0$.

21*. Utilizând teorema lui Weierstrass pentru subșirurile de rang par și de rang impar ale șirurilor care urmează, să se cerceteze existența limitei și să se calculeze această limită, în cazul în care există.

a) $x_{n+1} = -\frac{x_n}{2}+1, \forall n \in \mathbb{N}, x_0 = a,\ a \in \mathbb{R}$;

b) $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, \forall n \in \mathbb{N}, x_0 = a,\ a > -1$;

c) $x_{n+1} = \sqrt{1-x_n}, \forall n \in \mathbb{N}, x_0 = a,\ a \in [0,1]$.

22. Fie șirul $(x_n)_n$ definit prin relațiile $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}, \forall n \geq 1$.

Să se demonstreze prin inducție că $x_n = \frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^n}{2^n}\right), \forall n \geq 1$ și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

23*. Fie șirurile $x_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$ și $y_n = x_n - 2\sqrt{n}, \forall n \geq 2$. Să se arate că:

a) $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \geq 2$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$;

c) $(y_n)_n$ este monoton și mărginit (convergent).

24*. Fie șirurile $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ și $y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n, \forall n \geq 1$.

a) Folosind proprietățile șirurilor $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ și $E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, să se arate că:

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}, \forall n \geq 1.$$

b) Să se arate că șirul $(x_n)_n$ este nemărginit, iar șirul $(y_n)_n$ este monoton și mărginit, deci convergent.

25*. Fie două șiruri $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ cu proprietatea că șirurile $(x_n + y_n)_n$ și $(x_n \cdot y_n)_n$ sunt convergente. Să se arate că, dacă $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ sunt convergente, iar dacă se renunță la această condiție, atunci șirurile pot fi divergente.

26*. Fie o mulțime nevidă $A \subset \mathbb{R}$. Să se arate că A este mărginită dacă și numai dacă pentru orice șir $(x_n)_n$ de elemente din A avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 0$.

27*. Fie un șir $(x_n)_n$ a.î. $x_n > 0 (\forall n \geq 0)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Să se arate că:

a) dacă $l < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; b) dacă $l > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

28*. Fie $a > 0, a \neq 1$. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$.

29*. Folosind lema lui Stolz și consecințele sale, să se calculeze limita următoarelor șiruri $(x_n)_{n \geq 1}$, care au termenul general de forma:

a) $x_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$; b) $x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$; c) $x_n = \frac{\ln n}{n}$; d*) $x_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$; e) $x_n = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}$;

f) $x_n = \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3} + ... + \sqrt[n]{n}\right)$; g) $x_n = \frac{1}{n^6} \cdot \left(1^5 + 2^5 + ... + n^5\right)$;

h*) $x_n = \frac{1^5 + 2^5 + ... + n^5}{n^5} - \frac{n}{6}$; i*) $x_n = \frac{1}{\ln n} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right)$.

§5. Limite de funcții, interpretarea grafică a limitei unei funcții într-un punct utilizând vecinătăți

În paragraful precedent, au fost studiate limitele unor funcții particulare, anume șirurile, pentru n tinzând la ∞, ∞ fiind unicul punct de acumulare al lui $\mathbb{N}$. Acum vom trece de la șiruri numerice la funcții numerice oarecare.

Dându-se o mulțime nevidă $A \subset \mathbb{R}$, o funcție $f : A \to \mathbb{R}$ și un punct de acumulare a pentru A, vom răspunde la problema următoare: „Ce tendință manifestă valorile $f(x)$ ale funcției f, atunci când argumentul $x \in A$ se apropie din ce în ce mai mult de punctul a?" Altfel spus, problema care se pune este dacă pentru valorile argumentului x, suficient de apropiate de a, putem realiza ca valorile funcției $f(x)$ să fie cât dorim de apropiate de un anumit număr l (finit sau infinit).

Reiese că **nu** ne va interesa valoarea lui f în punctul a de care ne apropiem (a poate chiar să **nu** aparțină lui A), ci ne vor interesa valorile lui f în puncte x vecine lui a. **Ideea de apropiere** de un anumit punct este exprimată matematic cu ajutorul noțiunilor de **vecinătate** și de **punct de acumulare**. În mulțimea A, sunt puncte oricât de apropiate de punctul a, dacă în orice vecinătate a punctului a există măcar un punct din A, diferit de a, deci dacă a este punct de acumulare pentru A. Mulțimea punctelor de acumulare pentru A a fost notată cu A', $A' \subset \overline{\mathbb{R}}$.

În concluzie, problema limitei lui f se va pune numai în puncte de acumulare pentru A și definiția limitei va semăna cu cea cunoscută a limitei unui șir.

5.1. Limita unei funcții într-un punct de acumulare

Vom considera o mulțime $A \subset \mathbb{R}$, astfel încât $A' \neq \varnothing$, o funcție $f : A \to \mathbb{R}$, un punct de acumulare $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pentru A, $a \in A'$, și o variabilă $x \in \mathbb{R}$.

Definiții

Se spune că **funcția f are limită în punctul** a dacă există $l \in \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât pentru orice vecinătate V a lui l, există o vecinătate U_V (depinzând de V) a punctului a, astfel încât pentru orice $x \in (U_V \cap A) \setminus \{a\}$ să avem $f(x) \in V$.

Altfel spus (întrebuințând cuantificatorii):

Funcția f are limită în punctul a dacă:

$\exists\, l \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î. $\forall V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists\, U_V \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $\forall\, x \in (U_V \cap A) \setminus \{a\}$ să avem $f(x) \in V$.

Raționând ca la șiruri, se arată că elementul l este unic; acest element se numește **limita funcției f în punctul a** și se notează $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ (citim: limită de $f(x)$ când x tinde către a este egală cu l).

Alte notații

Atunci când vom scrie $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ sau $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=l$, vom subînțelege că funcția f are limită în a și limita sa este l. În loc de $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$, vom scrie uneori „$f(x)\to l$ când $x\to a$“ sau „$f(x)\xrightarrow[(x\to a)]{} l$“ și vom citi „**$f(x)$ tinde către l când x tinde către a**“.

Dacă $l\in\mathbb{R}$, atunci vom mai spune că „**$f(x)$ converge către l când x tinde la a**“.

Observații:

1. În mod intuitiv, definiția exprimă faptul că pentru orice x „oricât de apropiat de a“ (dar diferit de a), $f(x)$ este „oricât de apropiat de l“.

2. Mulțimea $(U\cap A)\setminus\{a\}$ are elemente, deoarece a este punct de acumulare pentru A.

3. În cazul în care $a\notin A$, condiția $x\in(U\cap A)\setminus\{a\}$ se înlocuiește cu $x\in U\cap A$, deoarece $a\notin U\cap A$ (așa cum stau lucrurile, de exemplu, când $a=-\infty$ sau $a=\infty$).

4. Dacă a **nu** este punct de acumulare pentru A (în particular, dacă a este punct izolat pentru A), atunci problema existenței limitei în a **nu** are sens. De exemplu, **nu** are sens $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x}$, deoarece -1 **nu** este punct de acumulare pentru $[0,\infty)$.

5. Spunem că o funcție $\varphi: A\to B$, unde $B\subset\mathbb{R}$ este mulțime nevidă, are limită în punctul a dacă prelungirea formală $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x)=\varphi(x)$, $\forall x\in A$, are limită în punctul a și definim $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (mulțimea B a fost înlocuită cu $\mathbb{R}$).

6. Definiția limitei unei funcții generalizează definiția limitei unui șir. Într-adevăr, un șir $(x_n)_n$ este o funcție $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $g(n)=x_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, și $\mathbb{N}$ îl are pe ș ca unic punct de acumulare. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} g(n)=l \Leftrightarrow \forall V\in\mathcal{V}_e(l)$, $\exists m_V\in\mathbb{N}$ $\big($adică $\exists U_V=(m_V,\infty]\in\mathcal{V}_e(\infty)\big)$ a.î. $\forall n>m_V$ (adică $\forall n\in U_V$) să avem $x_n=g(n)\in V$.

♦ Caracterizarea cu vecinătăți elementare a limitei unei funcții

Teorema 1

Fie $l\in\overline{\mathbb{R}}$. Presupunem că $a\in\overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare pentru A.

Atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow$ pentru orice vecinătate elementară V a lui l, există o vecinătate elementară U a lui a astfel încât pentru orice $x\in(U\cap A)\setminus\{a\}$ să avem $f(x)\in V$.

Demonstrație. Echivalența rezultă din faptul că orice vecinătate a unui punct include o vecinătate elementară a acelui punct. ■

Recapitulare

Fie $b\in\overline{\mathbb{R}}$.

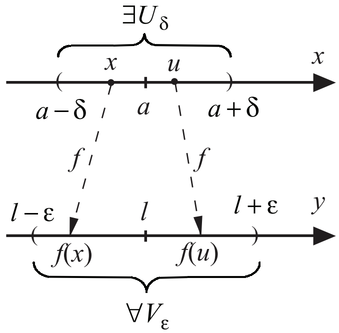
Dacă $b\in\mathbb{R}$, atunci $V=(b-r,b+r)\in\mathcal{V}_e(b)$, $r>0$ (V este *vecinătate elementară a lui b*).

Dacă $b=-\infty$, atunci $V=[-\infty,-r)\in\mathcal{V}_e(-\infty)$, $r>0$ (V este *vecinătate elementară a lui $-\infty$*).

Dacă $b=\infty$, atunci $V=(r,\infty]\in\mathcal{V}_e(\infty)$, $r>0$ (V este *vecinătate elementară a lui ∞*).

Ilustrarea grafică a teoremei 1

În figura 35, explicăm grafic utilizarea vecinătăților elementare pentru definirea limitei, în cazul: $a \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$; $V = V_\varepsilon = (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \in \mathcal{V}_e(l), \varepsilon > 0$; $U = U_\delta = (a-\delta, a+\delta) \in \mathcal{V}_e(a)$, $\delta = \delta_\varepsilon > 0$; $W_\varepsilon = f((U \cap A) \setminus \{a\})$ — mulțimea valorilor lui f pe mulțimea $(U \cap A) \setminus \{a\}$.



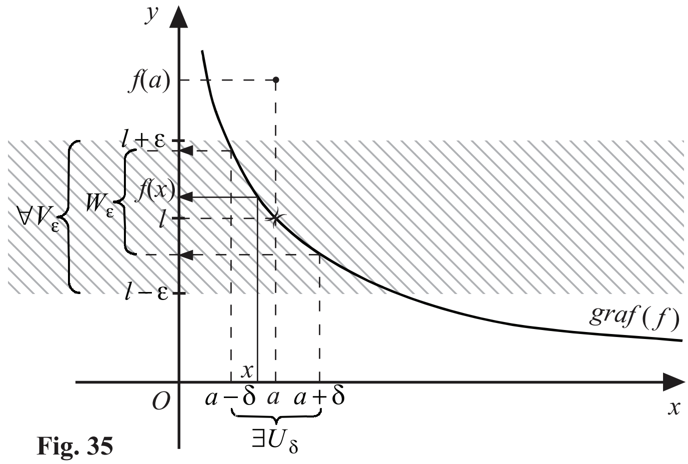


Fig. 35

Exemple de utilizare a definiției

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că:
a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

Rezolvare. a) Fie o vecinătate arbitrară $V = V_\varepsilon = (4-\varepsilon, 4+\varepsilon) \in \mathcal{V}_e(4)$, $\varepsilon > 0$. În ipoteza $|x-2| \le 1 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$, avem: $x^2 \in V \Leftrightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$;

$|x^2 - 4| = (x+2)\cdot|x-2| \le 5\cdot|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$. Luăm $\delta = \delta_\varepsilon = \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{5}, 1\right\}$ și $U = U_\delta = (2-\delta, 2+\delta) \in \mathcal{V}_e(2)$. Rezultă că $\forall x \in U \setminus \{2\}$, avem succesiv: $|x-2| < \delta \le 1$;

$|x^2 - 4| \le 5\cdot|x-2| < 5\cdot\delta \le 5\cdot\dfrac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$; $f(x) = x^2 \in U$.

Conform teoremei 1, $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$. Ilustrația grafică este realizată în figura 36 ($W_\varepsilon = f(U)$).

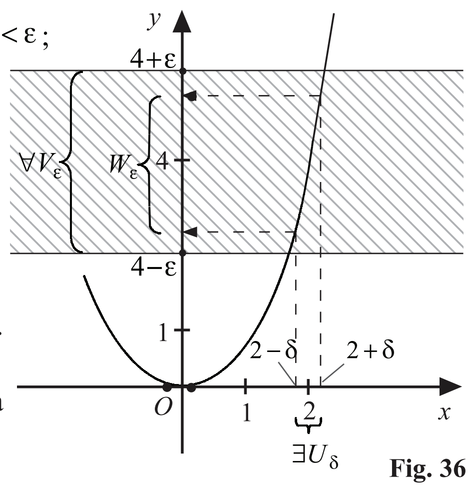


Fig. 36

b) Fie o vecinătate arbitrară $V = V_\varepsilon = (\varepsilon, \infty] \in \mathcal{V}_e(\infty)$, $\varepsilon > 0$. Avem $x^2 \in V \Leftrightarrow x > \sqrt{\varepsilon}$. Luăm $\delta = \delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} > 0$ și $U = U_\varepsilon = (\delta, \infty] \in \mathcal{V}_e(\infty)$. Rezultă că $\forall x \in U$, avem succesiv: $x > \delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$; $x^2 > \varepsilon$; $f(x) = x^2 \in V$. Conform teoremei 1, obținem: $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$.

Rezolvare. Fie o vecinătate arbitrară $V=V_\varepsilon = (\varepsilon, \infty] \in \mathcal{V}_e(\infty)$, $\varepsilon>0$. Pentru $x\neq 0$, avem: $\dfrac{1}{x^2}\in V \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2}>\varepsilon \Leftrightarrow |x|<\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Luăm $\delta=\delta_\varepsilon=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ și $U=U_\delta=(-\delta,\delta)\in\mathcal{V}_e(0)$. Rezultă că $\forall x\in U\setminus\{0\}$, avem: $|x|<\delta=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, deci $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\in V$.

Conform teoremei 1, obținem: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$.

Ilustrația grafică este realizată în figura 37.

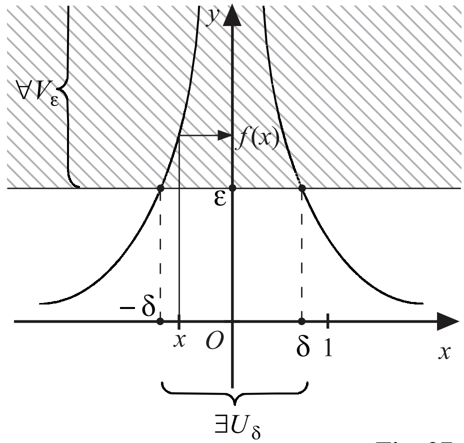


Fig. 37

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$. Să se arate că f **nu** are limită în 0.

Rezolvare. Pentru șirul $x_n=\dfrac{1}{n}$, $\forall n\geq 1$, avem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$.

Dacă funcția ar avea limită în 0, atunci aceasta ar trebui să fie $l=\infty$. Dar ∞ **nu** este limită a lui f în 0.

Într-adevăr, fie vecinătatea $V=(1,\infty]\in\mathcal{V}_e(\infty)$. Pentru orice vecinătate $U_\delta=(-\delta,\delta)\in\mathcal{V}_e(0)$, $\delta>0$, există puncte $\alpha\in U_\delta$ a.î. $\alpha<0$, pentru care avem $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}<0$, adică $f(\alpha)\notin V$.

În concluzie, **nu** se verifică definiția limitei în 0. Acest raționament este ilustrat grafic în figura 38.

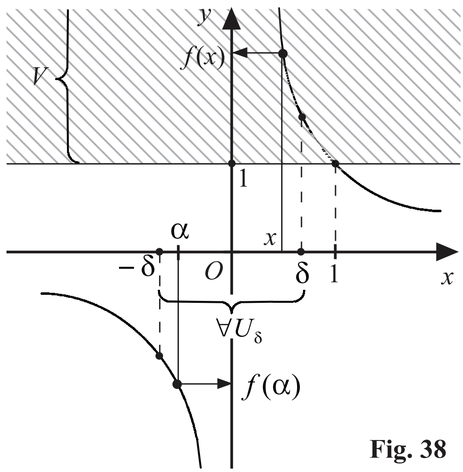


Fig. 38

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$. Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

Rezolvare. Avem relațiile $|f(x)|=\left|x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right|=|x|\cdot\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq|x|\cdot 1=|x|$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$. Atunci pentru orice vecinătate $V=(-\varepsilon,\varepsilon)\in\mathcal{V}_e(0)$, $\varepsilon>0$, luăm vecinătatea $U=(-\varepsilon,\varepsilon)\in\mathcal{V}_e(0)$ și $\forall x\in U\setminus\{0\}$, avem: $|x|<\varepsilon$, deci $|f(x)|\leq|x|<\varepsilon$, deci $f(x)\in V$. Conform teoremei 1, obținem: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$.

5. Fie funcția $f : A = \mathbb{R} \setminus \{ 1 \} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x-1|},\ \forall x \in A.$

Să se arate că f **nu** are limită în 1.

Rezolvare. Rezultă că $f(x) = -x - 1$ pentru $x < 1$ și $f(x) = x + 1$ pentru $x > 1$. Luând șirul $(x_n)_n$, $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, $\forall\ n \geq 1$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + 1) = 2$. Dacă f ar avea limită în 1, atunci aceasta ar trebui să fie $l = 2$. Dar 2 *nu* este limită a lui f în 1.

Fie vecinătatea $V = (1, 3) \in \mathcal{V}_e(2)$. Pentru orice vecinătate $U_\delta = (1 - \delta, 1 + \delta) \in \mathcal{V}_e(1)$, $\delta > 0$, există puncte $\alpha \in U \setminus \{1\}$ astfel încât $\alpha \in (0, 1)$ și pentru aceste puncte avem $f(\alpha) = -\alpha - 1 < 0$, deci avem $f(\alpha) \notin V$. În concluzie, nu există nici o vecinătate U_δ a lui 1 pentru care să avem $f(U_\delta \setminus \{1\}) \subset V$, deci *nu* se verifică definiția limitei în 1.

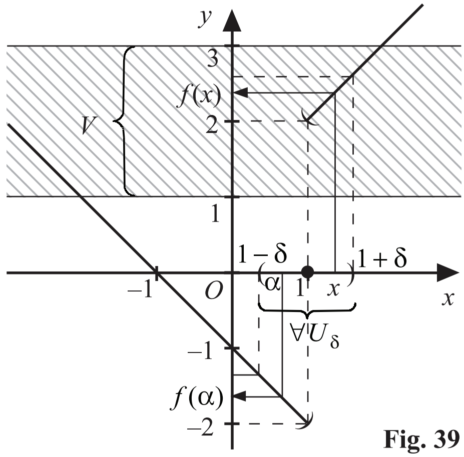


Fig. 39

Acest raționament este ilustrat grafic în figura 39.

Remarcă. Deoarece $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare al mulțimii A, rezultă că există cel puțin un șir $(x_n)_n$ astfel încât $x_n \in A \setminus \{a\}$, $\forall\ n \geq 0$, și astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

♦ Caracterizarea cu șiruri a limitei unei funcții

Teorema 2

Fie un număr $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ dacă și numai dacă pentru orice șir $(x_n)_{n\geq 0}$ de puncte din $A \setminus \{a\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Demonstrație. **1. Necesitatea condiției**. Presupunem că $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. Fie un şir arbitrar $(x_n)_n$ de puncte din $A \setminus \{a\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Vom explicita succesiv limitele precedente: $\forall V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists U = U_V \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $\forall x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$ să avem $f(x) \in V$; pentru $U \in \mathcal{V}(a)$, $\exists m_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq m_V$ să avem $x_n \in U$; rezultă că $x_n \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, deci $f(x_n) \in V$.

În concluzie, $\forall V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists m_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq m_V$ să avem $f(x_n) \in V$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

2. Suficiența condiției. Presupunem că afirmația din partea a doua este adevărată.

Admitem **prin absurd** că l **nu** este limita lui f în a. Înseamnă că $\exists V_0 \in \mathcal{V}(l)$ a.î. $\forall U \in \mathcal{V}(a)$, $\exists x_U \in (U \cap A) \setminus \{a\}$ a.î. să avem $f(x_U) \notin V_0$. Deoarece vecinătatea U este arbitrară, putem lua un şir $(U_n)_{n\geq 1}$ de vecinătăți ale lui a de forma: $U_n = \left(a - \dfrac{1}{n},\ a + \dfrac{1}{n}\right)$, dacă $a \in \mathbb{R}$; $U_n = (n, \infty]$ dacă $a = \infty$; $U_n = [-\infty, -n)$ dacă $a = -\infty$. Atunci, $\forall n \geq 1$, $\exists c_n \in (U_n \cap A) \setminus \{a\}$ a.î. $f(c_n) \notin V_0$.

Am obținut astfel un şir $(c_n)_{n\geq 1}$ de puncte din $A\setminus\{a\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ (deoarece $|c_n - a| < \frac{1}{n}$ sau $c_n > n$ sau $c_n < -n$, după cum $a \in \mathbb{R}$ sau $a = \infty$ sau $a = -\infty$). Conform ipotezei, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n) = l$. Atunci, pentru vecinătatea V_0 a lui l, $\exists m \geq 1$ (în particular) a.î. $f(c_m) \in V_0$, **în contradicție cu** $f(c_m) \notin V_0$. Contradicția obținută arată că trebuie să avem $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. ■

Consecință

Negația condiției din teoremă ne dă un criteriu pentru ca f să **nu** aibă limită în a.
Să presupunem că există două șiruri $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ de puncte din $A \setminus \{a\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.
Dacă șirul $(f(x_n))_n$ **nu** are limită sau dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lambda$ și $l \neq \lambda$, atunci funcția f **nu** are limită în punctul a.

Exemplul 6 Reanalizăm exemplele 1, 2, 3, 5, cu ajutorul teoremei 2 şi a consecinței ei.

a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ deoarece $\forall (x_n)_n \to 2$ $(x_n \neq 2,\ \forall n \geq 0)$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^2 = 4$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$ deoarece $\forall (x_n)_n \to \infty$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^2 = \infty^2 = \infty$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ deoarece $\forall (x_n)_n \to 0$ $(x_n \neq 0,\ \forall n \geq 0)$, avem: $(x_n)^2 > 0, \forall n \geq 0$;

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^2 = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(x_n)^2} = \infty$ (conform operațiilor cu limite de șiruri).

d) Funcția $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ **nu** are limită în 0, deoarece pentru șirurile $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$,

$x_n = \frac{1}{n}$ și $y_n = -\frac{1}{n}$ $(\forall n \geq 1)$, avem: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$;

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$.

e) Funcția $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x-1|}$, $\forall x \in A = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, **nu** are limită în 1 deoarece pentru şirurile convergente la 1, $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$, $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ și $y_n = 1 + \frac{1}{n}$ $(\forall n \geq 1)$, avem:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(-2 + \frac{1}{n}\right) = -2; \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2.$$

Observație:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{și} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Pentru verificare, se utilizează șirurile folosite pentru înlăturarea nedeterminărilor $1^{\pm\infty}$ și teorema 2.

Exerciții rezolvate

1. Fie $c \in \mathbb{R}$ și funcția constantă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = c,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}$ avem $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} c = c$.

Rezolvare. $\forall (x_n)_n \to a$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

2. Fie funcția identică $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}$ avem $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} x = a$.

Rezolvare. $\forall (x_n)_n \to a$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

3. Să se arate că funcția $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **nu** are limită în punctul ∞.

Rezolvare. Pentru șirul $x_n \to \infty,\ x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, șirul $\sin x_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$ **nu** are limită.

4. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin\frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}^*$, **nu** are limită în 0.

Rezolvare. Pentru șirul $x_n \to 0,\ x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}\ (\forall n \geq 0)$, șirul $f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$ **nu** are limită.

Teorema 3 — Caracterul local al limitei

Fie o vecinătate $E \in \mathcal{V}(a)$, fie restricția $f_{E\cap A} : E \cap A \to \mathbb{R}$, a lui f, și fie $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a} f_{E\cap A}(x) = l.$$

Demonstrație. Constatăm că a este punct de acumulare și pentru $E \cap A$. Proprietatea rezultă din aplicarea definiției limitei și din faptul că $\forall U \in \mathcal{V}(a)$ avem $U \cap E \subset U$ și $U \cap E \in \mathcal{V}(a)$. ■

Teorema 4 — Inegalități locale

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Presupunem că $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ și $l < \alpha$ (respectiv $l > \alpha$). Atunci există $U \in \mathcal{V}_e(a)$ a.î. $\forall x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$ să avem $f(x) < \alpha$ (respectiv $f(x) > \alpha$).

Demonstrație. Presupunem $l < \alpha$. Explicităm limita pentru vecinătatea $V = [-\infty, \alpha)$ a lui l. Există $U \in \mathcal{V}_e(a)$ a.î. $\forall x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$ să avem $f(x) \in V$, adică $f(x) < \alpha$. ■

Consecință

Dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l < 0$ (respectiv $l > 0$), atunci există $U \in \mathcal{V}_e(a)$ a.î. $\forall x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$ să avem $f(x) < 0$ (respectiv $f(x) > 0$).

Exemplu Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x \cdot [x],\ \forall x \in \mathbb{R}$. Studiem existența limitei funcției f în punctul $x = 2$. Conform teoremei 3, va fi suficient să studiem funcția pe o vecinătate adecvată a lui 2. Fie $E = (1, 3) \in \mathcal{V}(2)$ și fie restricția $g = f_E : E \to \mathbb{R}$ a lui f. Avem explicitarea: $g(x) = x \cdot [x] = \begin{cases} x, & \text{pentru } x \in (1,\ 2) \\ 2x, & \text{pentru } x \in [2,\ 3) \end{cases}$. Fie șirurile $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$, $x_n = 2 - \frac{1}{n} \in (1,\ 2)$ și $y_n = 2 + \frac{1}{n} \in (2,\ 3)$, $\forall n \geq 2$, cu proprietățile:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ și $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 2y_n = 4$. Conform consecinței teoremei 2, g **nu** are limită în 2. Conform teoremei 3, f **nu** are limită în 2.

Teorema 5 — Limitele funcțiilor elementare

Fie o funcție elementată $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, și fie un punct $a \in D$. Atunci:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right) = f(a).$$

Demonstrație. Conform teoremei 2, afirmația rezultă din proprietatea corespunzătoare de la limite de șiruri. ■

Exemple

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 2}{x^2 - 2x} = \dfrac{11}{3}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt[5]{x^7} = \lim\limits_{x\to 2} x^{\frac{7}{5}} = 2^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{2^7} = 2 \cdot \sqrt[5]{4}$.

3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$.

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x = \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$.

Teorema 6 — Limita modulului unei funcții

Dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, atunci există $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |l|$.

Demonstrație. Se aplică teorema 2 și proprietatea corespunzătoare de la limite de șiruri. ■

5.2. Limite laterale

Vom considera o mulțme $A \subset \mathbb{R}$ astfel încât $A' \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$, o funcție $f: A \to \mathbb{R}$ și un punct de acumulare $a \in \mathbb{R}$ pentru A ($a \in A' \cap \mathbb{R}$). Dacă a este punct de acumulare al mulțimii $E = (-\infty, a) \cap A$, atunci vom spune că a este **punct de acumulare la stânga pentru A**. Dacă a este punct de acumulare al mulțimii $F = (a, \infty) \cap A$, atunci vom spune că a este **punct de acumulare la dreapta pentru A**.

Definiții

1. Să presupunem că a este punct de acumulare la stânga pentru A.

Dacă restricția $f_E: E \to \mathbb{R}$ a lui f are limită în punctul a, $\lim\limits_{x\to a} f_E(x) = l_s \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci se spune că f **are limită la stânga în punctul** a și această limită se notează

$$f(a-0) = \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \lim_{x\nearrow a} f(x) = l_s.$$

2. Să presupunem că a este punct de acumulare la dreapta pentru A.

Dacă restricția $f_F: F \to \mathbb{R}$ a lui f are limită în punctul a, $\lim\limits_{x\to a} f_F(x) = l_d \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci se spune că f **are limită la dreapta în punctul** a și această limită se notează

$$f(a+0) = \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \lim_{x\searrow a} f(x) = l_d.$$

3. Limitele l_s și l_d se numesc **limite laterale ale lui f în** a. Pentru acestea se extind direct caracterizările „cu vecinătăți elementare“ și „cu șiruri“.

♦ Caracterizarea limitei unei funcții cu ajutorul limitelor laterale

Teorema 1

Funcția f are limită în a dacă și numai dacă f are în a limite laterale egale. În acest caz,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a-0) = f(a+0).$$

Demonstrație. **1. Necesitatea condiției** este evidentă.

2. Suficiența condiției. Să presupunem că $\exists f(a-0) = f(a+0) = l$. Fie o vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$, arbitrară. Atunci $\exists U_1, U_2 \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $\forall x \in U_1 \cap E$ să avem $f(x) \in V$ și $\forall x \in U_2 \cap F$ să avem $f(x) \in V$. Considerăm vecinătatea $U = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}(a)$ și luăm $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, arbitrar; dacă $x < a$, atunci $x \in U_1 \cap E$, deci $f(x) \in V$; dacă $x > a$, atunci $x \in U_2 \cap F$, deci $f(x) \in V$. Conform definiției, $\exists \lim_{x\to a} f(x) = l$. ■

Exemple

1. Fie funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Conform operațiilor cu limite de șiruri și caracterizării „cu șiruri" pentru restricțiile $f_{(-\infty,\, 0)}$ și $f_{(0,\, \infty)}$, se deduce că există limitele laterale:

$$f(0-0) = \lim_{x\nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \text{ și } f(0+0) = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

2. Pentru a găsi parametrul $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2, & \text{dacă } x < 1 \\ x^2 + 3ax, & \text{dacă } x > 1 \end{cases},$$

să aibă limită în punctul $x = 1$, trebuie să calculăm limitele laterale în punctul 1. Avem:

$$f(1-0) = \lim_{x\nearrow 1} f(x) = \lim_{x\nearrow 1}(ax+2) = a+2 \text{ și}$$

$$f(1+0) = \lim_{x\searrow 1} f(x) = \lim_{x\searrow 1}(x^2+3ax) = 1+3a.$$

Condiția $f(0-0) = f(0+0)$ devine ecuația $a + 2 = 1 + 3a$, care are soluția $a = \frac{1}{2}$.

> *Notație.* Fie o mulțime $B \subset A$ a.î. a să fie punct de acumulare și pentru B. Dacă restricția $f_B : B \to \mathbb{R}$ a lui f are limită în punctul a egală cu $l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci notăm limita l prin $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in B}} f(x) = \lim_{x\to a} f_B(x) = l$ (**limita lui** f **relativ la** B **în punctul** a).

Exemplu

Funcția lui Dirichlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{pentru } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$, nu are limită în nici un punct $a \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, a este punct de acumulare pentru $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{Q}}} 1 = 1$, $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} 0 = 0$. Rezultă că f **nu** are limită în a (în caz contrar, limitele precedente ar fi trebuit să fie egale).

5.3. Operații cu limite de funcții

Vom prezenta o serie de rezultate care permit să se stabilească anumite reguli generale de obținere a limitei unei funcții din limite ale unor funcții mai simple.

Vom considera o mulțime $A \subset \mathbb{R}$ astfel încât $A' \neq \varnothing$, două funcții $f, g : A \to \mathbb{R}$, un punct de acumulare $a \in A'$, un număr $\alpha \in \mathbb{R}$ și variabila $x \in \mathbb{R}$. Toate „operațiile cu sens" își păstrează valabilitatea, iar „cazurile exceptate" rămân exceptate în continuare.

Recapitulare

Cazurile exceptate, referitoare la operațiile algebrice, sunt următoarele:

$$\infty - \infty;\ -\infty + \infty;\ 0 \cdot (\pm\infty);\ (\pm\infty) \cdot 0;\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty};\ \frac{x}{0}\left(x \in \overline{\mathbb{R}}\right);\ 0^0;\ 1^{\pm\infty};\ \infty^0.$$

Teorema 1 — Operații algebrice cu limite de funcții

Să presupunem că $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ și $\exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Dacă $l + \lambda$ are sens, atunci $\exists \lim\limits_{x \to a} \left(f(x) + g(x)\right) = l + \lambda$.

2. Dacă $l \cdot \lambda$ are sens, atunci $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = l \cdot \lambda$.

3. Dacă $\alpha \cdot l$ are sens, atunci $\exists \lim\limits_{x \to a} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot l$.

4. Dacă $\frac{l}{\lambda}$ are sens și $g(x) \neq 0, \forall x \in A \setminus \{a\}$, atunci $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{\lambda}$.

5. Dacă l^λ are sens și $f(x) > 0, \forall x \in A \setminus \{a\}$, atunci $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x)\right)^{g(x)} = l^\lambda$.

Demonstrație. Toate afirmațiile din enunț rezultă direct din proprietățile corespunzătoare de la șiruri, folosind caracterizarea „cu șiruri" a limitei. De exemplu, în cazul afirmației **1**, se ia un șir arbitrar $(x_n)_n \to a$ ($x_n \in A \setminus \{a\}, \forall n \geq 0$) și se constată că $f(x_n) \to l,\ \ g(x_n) \to \lambda$ și $l + \lambda$ are sens, deci $\left(f(x_n) + g(x_n)\right)_n \to l + \lambda$. Conform caraterizării „cu șiruri", rezultă: $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) + g(x)\right) = l + \lambda$. ■

Teorema 2 — Criterii de comparație pentru limite de funcții

Fie o funcție $h : A \to \mathbb{R}$. Presupunem că $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ și $\exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Dacă $f(x) \leq g(x), \forall x \in A \setminus \{a\}$, atunci $l \leq \lambda$ (**trecerea la limită în inegalități**).

2. Dacă $l = \lambda$ și $f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x \in A \setminus \{a\}$, atunci $\exists \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ (**regula „cleștelui"**).

3. Dacă $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lambda = 0$ și $\left|h(x) - \alpha\right| \leq g(x), \forall x \in A \setminus \{a\}$, atunci $\exists \lim\limits_{x \to a} h(x) = \alpha$ (**consecință la regula „cleștelui"**).

Demonstrație. Afirmațiile din enunț rezultă direct din proprietățile corespunzătoare de la șiruri, folosind caracterizarea „cu șiruri" a limitei. ■

Teorema 3 — Înlăturarea unor nedeterminări de forma $\frac{1}{0}$

Presupunem că $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.

1. Dacă $g(x) > 0$, $\forall\, x \in A \setminus \{a\}$, atunci $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}=\infty$.

2. Dacă $g(x) < 0$, $\forall\, x \in A \setminus \{a\}$, atunci $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}=-\infty$.

Demonstrație. Afirmațiile rezultă direct din proprietățile corespunzătoare de la șiruri.■

Exemple

1. Vrem să calculăm $\lim\limits_{x\to 5}\left(x^3-7\sqrt{8x^2-4}\right)$. Conform teoremei 1, avem:

$$l=\lim_{x\to 5}x^3-7\sqrt{\lim_{x\to 5}\left(8x^2-4\right)}=5^3-7\sqrt{8\cdot 5^2-4}=125-98=27.$$

Pentru a putea aplica teorema, am observat că $\sqrt{8x^2-4}=\left(8x^2-4\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. Cercetăm dacă funcția $f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1+e^{1/x})^{-1}$, are limită în punctul $x=0$. Cu ajutorul teoremelor 1 și 3, calculăm următoarele limite laterale:

$$\lim_{x\nearrow 0}\frac{1}{x}=-\infty;\ \lim_{x\searrow 0}\frac{1}{x}=\infty;$$

$$l_s=f(0-0)=\lim_{x\nearrow 0}\left(1+e^{1/x}\right)^{-1}=\left(1+\lim_{x\nearrow 0}e^{1/x}\right)^{-1}=\left(1+e^{-\infty}\right)^{-1}=(1+0)^{-1}=1;$$

$$l_d=f(0+0)=\lim_{x\searrow 0}\left(1+e^{1/x}\right)^{-1}=\left(1+\lim_{x\searrow 0}e^{1/x}\right)^{-1}=\left(1+e^{\infty}\right)^{-1}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Rezultă că $l_s = 1 \neq 0 = l_d$, deci f **nu** are limită în 0.

Exercițiii rezolvate

1. Cercetați dacă funcția $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin\pi x\cdot\sin\dfrac{1}{x-1}$, are limită în punctul 1.

Rezolvare. Funcția $\sin\pi x$ are limtă în 1, dar funcția $\sin\dfrac{1}{x-1}$ *nu* are limtă în 1. Avem însă evaluările: $|f(x)|=|\sin\pi x|\cdot\left|\sin\dfrac{1}{x-1}\right|\le|\sin\pi x|\cdot 1=|\sin\pi x|$, $\forall\, x\neq 0$.

Conform limitei modulului și limitei unei funcții elementare, avem:

$\lim\limits_{x\to 1}|\sin\pi x|=|\sin\pi\cdot 1|=|\sin\pi|=0$.

Se aplică consecința la regula „cleștelui” și rezultă că $\exists\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$.

2. Să se arate că funcția $f\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot\left[\dfrac{1}{x}\right]$, are limită în 0.

Rezolvare. Folosim inegalitățile $\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\le\dfrac{1}{x}$. Înmulțim cu $x>0$ și obținem:

$1-x<x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=f(x)\leq 1$. Avem: $\lim\limits_{x\searrow 0}(1-x)=1-0=1$ și $\lim\limits_{x\nearrow 0}1=1$. Conform regulii

„cleștelui”, rezultă că: $\exists\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=1$.

3. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)$.

Rezolvare. Folosim minorarea $x+\sin x\geq x-1$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)=\infty$, conform regulii „cleștelui”, avem: $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)=\infty$.

Teorema 4 — Limita funcției compuse

Fie două mulțimi $A, B\subset\mathbb{R}$ și două puncte de acumulare $a\in A'$, $b\in B'$. Fie o funcție $\varphi : A\to B$, o funcție $g : B\to\mathbb{R}$ și funcția compusă $f=g\circ\varphi : A\to\mathbb{R}$. Presupunem că:

1. $\exists\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$ și $\exists\lim\limits_{y\to b}g(y)=l\in\overline{\mathbb{R}}$ $(x\in A,\ \ y\in B)$;

2. $\exists\ U_0\in\mathcal{V}_e(a)$ a.î. $\forall\, x\in(U_0\cap A)\setminus\{a\}$ să avem $\varphi(x)\neq b$.

În aceste condiții, există $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(\varphi(x))=\lim\limits_{y\to b}g(y)=l$.

Demonstrație. Fie un șir arbitrar $(x_n)_n\to a$ ($x_n\in A\setminus\{a\}$, $\forall\, n\geq 0$). Există $n_0\geq 0$ a.î. $\forall\, n\geq n_0$, să avem $x_n\in U_0$. Fie șirul $(y_n)_n$, $y_n=\varphi(x_n)$, $\forall n\geq 0$. Conform ipotezelor **1** și **2**, $y_n\to b$ și $y_n\in B\setminus\{b\}$, $\forall\, n\geq n_0$. Conform ipotezei 1, $f(x_n)=g(\varphi(x_n))=g(y_n)\to l$. Conform caracterizării „cu șiruri“, rezultă că $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$. ■

Exemplu Fie funcțiile $\varphi, g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\begin{cases}0, & \text{pentru } x\in\mathbb{Q}\\ x, & \text{pentru } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ și

$g(y)=\begin{cases}0, & \text{pentru } y=0\\ 1, & \text{pentru } y\neq 0\end{cases}$. Fie funcția $f=g\circ\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Rezultă că

$$f(x)=g(\varphi(x))=\begin{cases}0, & \text{pentru } x\in\mathbb{Q}\\ 1, & \text{pentru } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}.$$

Avem: $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$ și $\lim\limits_{y\to 0}g(y)=1$.

Cu toate acestea, funcția compusă $f=g\circ\varphi$ *nu* are limită în 0 (funcția nu are limită în nici un punct). *Nu se aplică teorema 4* deoarece funcția φ *nu verifică ipoteza 2* pe nici o vecinătate a lui 0. Într-adevăr, $\forall\, n\geq 1$ avem $\frac{1}{n}\in\mathbb{Q}$, deci avem: $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=0=\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$.

Exercițiii rezolvate

1. Fie funcția $\varphi : A \to \mathbb{R}$ a.î.: $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$; $\varphi(x)\in B=(-1,\,0)\cup(0,\,\infty)$, $\forall x\in A\setminus\{a\}$.

Arătați că are loc relația: $\lim\limits_{x\to a}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e.$

Rezolvare. Notând $y=\varphi(x)$, punem în evidență funcția $g : B\to\mathbb{R}$, $g(y)=(1+y)^{\frac{1}{y}}$, $\forall y\in B$. Avem $\varphi(x)\neq 0$, $\forall\, x\in A$, și $\lim\limits_{y\to 0} g(y)=\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$. Conform teoremei 4, rezultă $\lim\limits_{x\to a}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\lim\limits_{x\to a} g(\varphi(x))=\lim\limits_{y\to 0} g(y)=\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e.$

2. Să se calculeze $l=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$.

Rezolvare. Limita se află în cazul exceptat 1^{∞}. Transformăm funcția: $\dfrac{x-1}{x+1}=1+\dfrac{-2}{x+1}$;

$\varphi(x)=\dfrac{-2}{x+1}$; $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\left[(1+\varphi(x))^{1/\varphi(x)}\right]^{x\cdot\varphi(x)}$. Observăm că $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$ și $\varphi(x)\in(-1,0)$, $\forall\, x\in[2,\infty)$. Rezultă relațiile:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\varphi(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{1+\frac{1}{x}}=-2 \text{ și } l=\left[\lim_{x\to\infty}(1+\varphi(x))^{1/\varphi(x)}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\varphi(x)}=e^{-2}=\frac{1}{e^{2}}.$$

Teorema 5 — Schimbarea de variabilă în calculul limitelor

Fie două mulțimi A, $B\subset\mathbb{R}$ și două puncte de acumulare $a\in A'$, $b\in B'$. Fie două funcții $\varphi : A\to B$ și $g : B\to\mathbb{R}$. Presupunem că:

1. φ este bijectivă;

2. $\exists\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$ și $\exists\lim\limits_{y\to b}\varphi^{-1}(y)=a$ (a și b corespund prin trecerea la limită).

Atunci are loc echivalența: $\exists\lim\limits_{y\to b} g(y)=l\in\overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \exists\lim\limits_{x\to a} g(\varphi(x))=l\in\overline{\mathbb{R}}$.

Schimbarea de variabilă este: $y=\varphi(x)$, $x\in A\setminus\{a\}$, $y\in B\setminus\{b\}$.

Demonstrație. Presupunem *prin absurd* că φ *nu* verifică ipoteza 2 din teorema 4. Atunci, în orice vecinătate elementară a lui a se află un punct $x\in A\setminus\{a\}$ a.î. $\varphi(x)=b$. Fie $U_1\in\mathcal{V}_e(a)$ și fie $x_1\in(U_1\cap A)\setminus\{a\}$ a.î. $\varphi(x_1)=b$. Deoarece $x_1\neq a$, fie $U_2\in\mathcal{V}_e(a)$ a.î. $x_1\notin U_2$.

Fie $x_2\in(U_2\cap A)\setminus\{a\}$ a.î. $\varphi(x_2)=b$. Rezultă $x_1\neq x_2$ și $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$, în contradicție cu faptul că φ este bijectivă. Rezultă că φ și, în mod analog, φ^{-1} verifică ipoteza 2 din teorema 4. În continuare, se aplică teorema 4 și rezultă:

Dacă $\lim\limits_{y\to b} g(y)=l$, atunci $\exists\lim\limits_{x\to a} g(\varphi(x))=l$.

Dacă $\lim\limits_{x\to a} g(\varphi(x))=l$, atunci $\exists\lim\limits_{y\to b} g\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(y)\right)\right)=\lim\limits_{y\to b} g(y)=l$. ■

Exemplu Vrem să calculăm limita $l = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ (nedeterminare de forma $\dfrac{0}{0}$).

Funcția $\dfrac{\ln x}{x-1}$ este definită pentru $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Facem schimbarea de variabilă $x = \varphi(y) = y + 1$, $y \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$. Funcția φ este bijectivă și $\lim\limits_{y \to 0} \varphi(y) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1} \varphi^{-1}(x) = \lim\limits_{x \to 1}(x-1) = 0$. Constatând ulterior că limita obținută în urma schimbării de variabilă există, se aplică teorema 5 și avem:

$$l = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{y} \cdot \ln(1+y) = \lim_{y \to 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}} = \ln e = 1.$$

§6. Calculul limitelor pentru funcțiile studiate; cazuri exceptate la calculul limitelor de funcții: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞, 1^∞, ∞^0, 0^0

6.1. Limitele funcțiilor elementare

Să considerăm o funcție elementară $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Având în vedere teorema 5 din secțiunea *Limita unei funcții într-n punct de acumulare*, a rămas de studiat calculul limitei într-un punct $\alpha \in D'$, care nu aparține lui D.

♦ ***Funcții polinomiale și funcții raționale***

Fie două funcții polinomiale $P, Q : D \to \mathbb{R}$, definite prin:

$P(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + ... + a_0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $p \in \mathbb{N}^*$ și $a_p \neq 0$;

$Q(x) = b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + ... + b_0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $q \in \mathbb{N}^*$ și $b_q \neq 0$.

Se consideră că $a_0, a_1, ..., a_p, b_0, b_1, ..., b_q \in \mathbb{R}$.

Fie mulțimea $D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$ și funcția raționlă $f = \dfrac{P}{Q} : D \to \mathbb{R}$. Deducem că:

$$\lim_{x \to \infty} P(x) = \lim_{x \to \infty} a_p x^p, \qquad \lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_p x^p,$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{a_p}{b_q} \cdot \lim_{x \to \infty} x^{p-q}, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{a_p}{b_q} \cdot \lim_{x \to -\infty} x^{p-q}.$$

În cazul când $\alpha \in \mathbb{R}$ și $Q(\alpha) = 0$, se face următoarea discuție. Dacă $P(\alpha) \neq 0$, atunci se calculează limitele laterale în α ale funcției $\dfrac{P}{Q}$, care vor fi infinite. Dacă $P(\alpha) = 0$, atunci fracția $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ poate fi simplificată cu $x - \alpha$, după care se reia discuția.

Exemple **1.** $$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^2 + 7x + 1}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(-2 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{3}.$$

2. $$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}.$$

3. $\lim\limits_{x \nearrow 2} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \lim\limits_{x \nearrow 2}(x+1)\dfrac{1}{x^2-4} = 3\cdot(-\infty) = -\infty$, deoarece $x^2-4<0$ $(0<x<2)$.

4. $\lim\limits_{x \searrow 2} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \lim\limits_{x \searrow 2}(x+1)\dfrac{1}{x^2-4} = 3\cdot(\infty) = \infty$, deoarece $x^2-4>0$ $(x>2)$.

♦ ***Funcțiile radical, exponențială și putere***

Limitele acestor funcții se calculează cu teorema 1 (operații cu limite de funcții).

♦ ***Funcția logaritmică***

Fie numerele $a>1$ și $0<b<1$. Au loc următoarele relații:

$\lim\limits_{x\to 0}\log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\log_b x = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\log_b x = -\infty$.

♦ ***Funcții trigonometrice***

Funcția sin și funcția cos **nu** au limită în $+\infty$ și $-\infty$ (vezi exercițiul rezolvat pag.178).

Pentru a afla limitele corespunzătoare funcțiilor tg și ctg, se calculează limitele laterale în puncte care nu aparțin mulțimii de definiție. De exemplu:

$\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\cos x} = \infty$, deoarece $\cos x > 0$, $\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, și $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$;

$\lim\limits_{x\searrow\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \lim\limits_{x\to\searrow\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\infty$, deoarece $\cos x < 0$, $\forall x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, și $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$.

♦ ***Funcții trigonometrice inverse***

Ca pentru orice funcție elementară, pentru arcsin și arccos, au loc relațiile:

$\lim\limits_{x\to a}\arcsin x = \arcsin a$, $\lim\limits_{x\to a}\arccos x = \arccos a$ în orice punct $a\in[-1, 1]$.

Pentru arctg și arcctg, limitele următoare vor fi justificate ulterior:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg} x = \pi$, $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arcctg} x = 0$.

6.2. Limite fundamentale

1. Avem $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Demonstrație. Fie $x\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Deoarece x are interpretarea geometrică de măsură în radiani a unui arc pe cercul trigonometric, avem $\sin x \le x \le \operatorname{tg} x$, deci $\cos x \le \dfrac{\sin x}{x} \le 1$.

Funcțiile $\cos x$ și $\dfrac{\sin x}{x}$ sunt pare, deci inegalitățile se verifică și pentru $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ (regula „cleștelui“). ■

Observație. La analiză matematică, **unghiurile sunt măsurate în radiani** pentru a obține rezultate mai simple în calculul unor limite.

2. Avem $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. Limita a fost stabilită într-un exemplu anterior.

3. Fie $a>0$, $a\neq 1$ și $r\in\mathbb{R}$. Avem limitele:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r.$$

Demonstrație. Avem: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$.

Făcând substituția $a^x-1=y\left(x=\log_a(1+y)=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}\right)$, rezultă

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y\cdot\ln a}{\ln(1+y)}=\ln a\cdot\lim_{y\to 0}\left(\frac{\ln(1+y)}{y}\right)^{-1}=\ln a\cdot 1^{-1}=\ln a.$$

Făcând substituția $1+x=e^y$ $(x=e^y-1)$, rezultă:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{ry}-1}{e^y-1}=\lim_{y\to 0}r\cdot\left(\frac{e^{ry}-1}{ry}\right)\cdot\left(\frac{e^y-1}{y}\right)^{-1}=r\cdot(\ln e)\cdot(\ln e)^{-1}=r.$$

6.3. Cazuri exceptate

În cazurile exceptate, de tipul $\infty-\infty$, $-\infty+\infty$, $0\cdot(\pm\infty)$, $(\pm\infty)\cdot 0$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{x}{0}\left(x\in\overline{\mathbb{R}}\right)$, 0^0, $1^{\pm\infty}$, ∞^0, sunt necesare transformări de natură algebrică, efectuări de compuneri sau schimbări de variabilă (bijective), cu respectarea strictă a proprietăților limitelor, în vederea eliminării nedeterminărilor. Se urmărește reducerea calculului limitelor la limite fundamentale sau la limite de funcții elementare. Nu există însă reguli generale de calcul al acestor limite și, de fiecare dată, trebuie să căutăm singuri posibilități de simplificare a calculului, după modelele care au fost prezentate în acest capitol, la limite de șiruri.

Exemple **1.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{\cos 0}=1.$

2. În cazul exceptat 1^{∞}, avem:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(1+(\sin x-1)\right)^{\frac{1}{\sin x-1}}\right]^{(\sin x-1)\operatorname{tg}^2 x}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}},$$

deoarece $(\sin x-1)\cdot\operatorname{tg}^2 x=-\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}\cdot\operatorname{tg}^2 x=\frac{-\cos^2 x}{1+\sin x}\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=-\frac{\sin^2 x}{1+\sin x}$,

deci $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\cdot\operatorname{tg}^2 x=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\sin x}=-\frac{1}{2}$.

3. În cazul radicalilor, se recomandă amplificarea cu expresia conjugată:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1+2x-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\sqrt{1+2x-x^2}\right)}{1-\left(1+2x-x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sqrt{1+2x-x^2}}{x-2}=\frac{2}{-2}=-1.$$

§7. Asimptotele graficului funcțiilor studiate: asimptote verticale, orizontale, oblice

În cele ce urmează, vom da o aplicație geometrică a limitelor de funcții.

Fie o mulțime $D \subset \mathbb{R}$ și o funcție $f: D \to \mathbb{R}$. Dacă graficul funcției f, notat G_f, este o mulțime nemărginită în plan (adică nu poate fi cuprinsă într-un dreptunghi), atunci se pune problema dacă anumite ramuri (sau părți) nemărginite ale sale „se aproprie oricât de mult dorim” de o dreaptă, într-un sens care va fi precizat în continuare. Dacă există, o astfel de dreaptă se numește **asimptotă*** a lui f și este utilă pentru trasarea cât mai exactă a graficului.

Vom considera dat un plan $\mathcal{P}$ în care a fost fixat un sistem ortonormal de axe de coordonate xOy, în care vom reprezenta grafic funcțiile și la care vom raporta sensurile cuvintelor „vertical”, „orizontal”, „oblic”.

Asimptotele vor fi împărțite în trei clase: asimptote verticale, asimptote orizontale și asimptote oblice.

Fie un punct $a \in \mathbb{R}$. Reamintim că a se numește **punct de acumulare la stânga pentru mulțimea *D*** dacă a este punct de acumulare pentru mulțimea $(-\infty, a) \cap D$ (în acest caz, există un șir $(x_n)_n$, $x_n \to a$ a.î. $x_n \in (-\infty, a) \cap D$, $\forall\, n \geq 0$). Punctul a se numește **punct de acumulare la dreapta pentru mulțimea *D*** dacă a este punct de acumulare pentru mulțimea $(a, \infty) \cap D$ (în acest caz, există un șir $(y_n)_n$, $y_n \to a$ a.î. $y_n \in (a, \infty) \cap D$, $\forall\, n \geq 0$). În ambele cazuri, a este **punct de acumulare pentru *D***.

7.1. Asimptote vericale

Definiții

Fie o mulțime $D \subset \mathbb{R}$, o funcție $f: D \to \mathbb{R}$ și $a \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare (finit) pentru D.

1. Dreapta $x = a$ se numește **asimptotă verticală la stânga a funcției *f*** dacă a este punct de acumulare la stânga pentru D și dacă limita la stânga $f(a-0) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ există și este egală cu $-\infty$ sau $+\infty$.

2. Dreapta $x = a$ se numește **asimptotă verticală la dreapta a funcției *f*** dacă a este punct de acumulare la dreapta pentru D și dacă limita la dreapta $f(a+0) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ există și este egală cu $-\infty$ sau $+\infty$.

3. Dreapta $x = a$ se numește **asimptotă verticală a funcției *f*** dacă este asimptotă verticală la stânga sau la dreapta a lui f sau de ambele părți.

Observație. Atributul „verticală” provine de la faptul că dreapta $x = a$ este paralelă cu axa Oy, considerată axă verticală dacă planul $\mathcal{P}$ este chiar planul tablei dintr-o clasă.

* Cuvântul **asimptotă** vine din limba greacă, de la „asumptôtos” — „care *nu* coincid”.

♦ ***Interpretare geometrică***

Să luăm $x \in D$ (arbitrar) și două puncte: $M(x, f(x))$ pe graficul lui f și $N(a, f(x))$ pe dreapta δ de ecuație $x = a$. Dacă dreapta δ este asimptotă verticală la stânga, respectiv la dreapta a lui f, atunci distanța $d(M, N) = |x - a|$ converge la 0 când $x < a$, respectiv $x > a$ tinde la a, iar ordonata lui M tinde la ∞ sau la $-\infty$. În mod intuitiv, aceasta înseamnă că punctele graficului G_f „se apropie din ce în ce în ce mai mult” de dreapta δ, pe măsură ce abscisa x „se apropie” de a. Acest raționament este ilustrat în figurile 40-43.

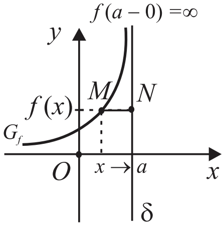


Fig. 40

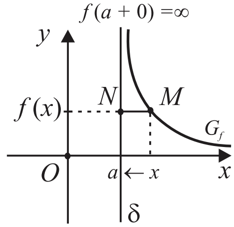


Fig. 41

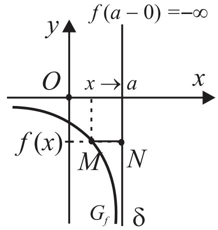


Fig. 42

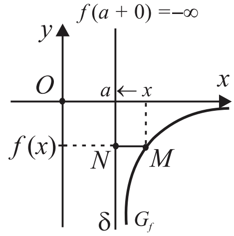


Fig. 43

Exemple **1.** Fie $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Dreapta $x = 0$ (axa Oy) este asimptotă verticală atât la stânga, cât și la dreapta pentru că $f(0-0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty$ și $f(0+0) = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \infty$ (fig. 44).

2. Pentru funcția $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta deoarece $f(0+0) = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = -\infty$. Evident, problema limitei la stânga în punctul $x = 0$ *nu* se pune (fig. 45).

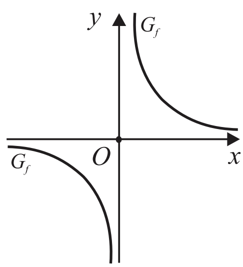


Fig. 44

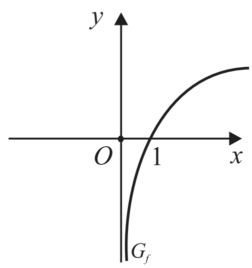


Fig. 45

3. Funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2 (x-1)}$, are două asimptote verticale: $x = -1$ și $x = 1$. Într-adevăr:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty, \quad f(1-0) = \lim_{x \nearrow 1} f(x) = -\infty \quad \text{și} \quad f(1+0) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = \infty.$$

4. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{1/(x-1)}$, dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală la dreapta deoarece $f(1+0) = \lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = e^{\infty} = \infty$, dar dreapta $x = 1$ *nu* este asimptotă verticală la stânga deoarece $f(1-0) = \lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = e^{-\infty} = 0$.

5. Funcția $f: (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, are două asimptote verticale: $x = -1$ la dreapta și $x = 1$ la stânga. Într-adevăr, $f(-1 + 0) = \infty$ și $f(1 - 0) = \infty$.

6. Funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, *nu* are asimptote verticale. Într-adevăr, în punctul $x = 0$ funcția f are limită finită: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

7. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$ pentru $x \le 2$, $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ pentru $x > 2$.

Avem: $f(2-0) = \lim\limits_{x \nearrow 2} 2 = 2$ și $f(2+0) = \lim\limits_{x \searrow 2} \dfrac{1}{x-2} = \infty$.

Rezultă că dreapta $x = 2$ este asimptotă verticală la dreapta.

8. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{1/x^2(x-1)}$. Problema asimptotelor verticale se pune în punctele 0 și 1. Cum $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = e^{-\infty} = 0$, dreapta $x = 0$ *nu* este asimptotă verticală. Cum $f(1 + 0) = e^{\infty} = \infty$, dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală la dreapta, dar *nu* este asimptotă verticală la stânga deoarece $f(1 - 0) = e^{-\infty} = 0$ (este finită).

7.2. Asimptote orizontale

Definiții

Fie o mulțime $D \subset \mathbb{R}$, o funcție $f: D \to \mathbb{R}$ și $b \in \mathbb{R}$ un număr.

1. Dreapta $y = b$ se numește **asimptotă orizontală spre $-\infty$ a funcției f** dacă există un număr $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(-\infty, a) \subset D$ și dacă $\lim\limits_{x \to -\infty} |f(x) - b| = 0$. Conform unor proprietăți ale limitelor, ultima condiție este echivalentă cu condiția $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

2. Dreapta $y = b$ se numește **asimptotă orizontală spre $+\infty$ a funcției f** dacă există un număr $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(a, \infty) \subset D$ și dacă $\lim\limits_{x \to \infty} |f(x) - b| = 0$. Conform unor proprietăți ale limitelor, ultima condiție este echivalentă cu condiția $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.

♦ ***Interpretare geometrică***

Să luăm $x \in D$ (arbitrar) și două puncte: $M(x, f(x))$ pe graficul lui f și $N(x, b)$ pe dreapta Δ de ecuație $y = b$.

1. Presupunem că dreapta Δ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ a funcției f. Definiția este echivalentă cu faptul că lungimea segmentului MN, adică distanța $d(M, N) = |f(x) - b|$, converge către 0 când x tinde la $-\infty$ (fig. 46). Cu alte cuvinte, graficul lui f „se apropie din ce în ce mai mult” de dreapta Δ când x tinde la $-\infty$.

2. Presupunem că dreapta Δ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ a funcției f. Definiția este echivalentă cu faptul că lungimea segmentului MN, adică distanța $d(M, N) = |f(x) - b|$, converge către 0 când x tinde la $+\infty$ (fig. 47). Cu alte cuvinte, graficul lui f „se apropie din ce în ce mai mult” de dreapta Δ când x tinde la $+\infty$.

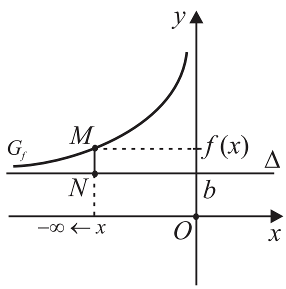


Fig. 46

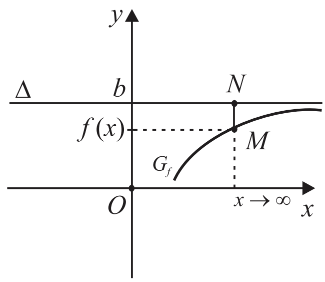


Fig. 47

Exemple **1.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^2 + x}{x^2 + 1}$. Deoarece $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$, rezultă că dreapta $y = 2$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$.

2. Funcția $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, **nu** are asimptote orizontale pentru că $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$.

3. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, **nu** are asimptote orizontale spre $-\infty$ și spre $+\infty$ pentru că **nu există** $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin x$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$.

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$. Avem $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = e^{\infty} = \infty$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$. rezultă că f **nu** are asimptotă orizontală spre $-\infty$, dar are ca asimptotă orizontală spre $+\infty$ dreapta $y = 0$ (axa Ox).

5. Funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$, are asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$ pe dreapta $y = 1$, deoarece $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

6. Fie funcția $f: (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{x^2 - 1}$. Avem:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x}\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = -1 \text{ și}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x}\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1\ .$$

Rezultă că dreapta $y = -1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$, iar dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

7.3. Asimptote oblice

Fie o mulțime $D \subset \mathbb{R}$ și o funcție $f: D \to \mathbb{R}$.

În ipoteza că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(a, \infty) \subset D$, se pune problema dacă „ramura spre $+\infty$" a graficului funcției f „se apropie oricât de mult dorim" de o dreaptă de ecuație $y = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$. O problemă asemănătoare se pune și pentru „ramura spre $-\infty$" a graficului funcției f în ipoteza că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(-\infty, a) \subset D$.

Definițiile următoare precizează sensul în care înțelegem aceste probleme.

Definiții

Fie două numere reale $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, și fie dreapta δ, de ecuație $y = mx + n$.

Fie $x \in D$ (arbitrar) și fie punctele: $M(x, f(x))$ pe graficul lui f și $N(x, mx + n)$ pe dreapta δ.

1. În ipoteza că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(a, \infty) \subset D$, dreapta $y = mx + n$ se numește **asimptotă oblică spre $+\infty$ a funcției f** dacă $\lim\limits_{x \to +\infty} \left| f(x) - mx - n \right| = 0$, adică dacă lungimea segmentului MN, distanța $d(M, N) = \left| f(x) - mx - n \right|$, converge către 0 când x tinde la $+\infty$ (fig. 48).

2. În ipoteza că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(-\infty, a) \subset D$, dreapta $y = mx + n$ se numește **asimptotă oblică spre $-\infty$ a funcției f** dacă $\lim\limits_{x \to -\infty} \left| f(x) - mx - n \right| = 0$, adică dacă lungimea segmentului MN, distanța $d(M, N) = \left| f(x) - mx - n \right|$, converge către 0 când x tinde la $-\infty$ (fig. 49).

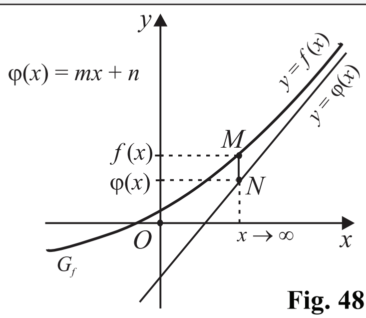


Fig. 48

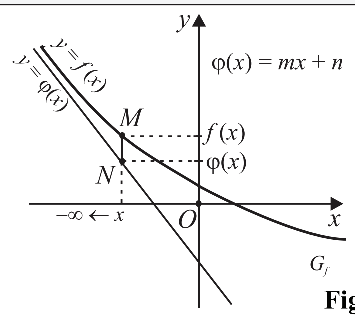


Fig. 49

Teorema 1

1. În ipoteza că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(a, \infty) \subset D$, dreapta de ecuație $y = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, este asimptotă oblică spre $+\infty$ a funcției f dacă și numai dacă există și sunt finite limitele:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{și} \quad n = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right), \text{ iar } m \neq 0.$$

2. În ipoteza că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(-\infty, a) \subset D$, dreapta de ecuație $y = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, este asimptotă oblică spre $-\infty$ a funcției f dacă și numai dacă există și sunt finite limitele:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{și} \quad n = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx \right), \text{ iar } m \neq 0.$$

Demonstrație. **1.** Dacă dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ a funcției f, atunci $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx - n \right) = 0$. Deoarece $f(x) - mx = (f(x) - mx - n) + n$, rezultă că $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right) = n \in \mathbb{R}$.

Pentru $x \in (a, \infty)$, $x > 0$, avem: $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x) - mx - n}{x} + m + \dfrac{n}{x}$. La limită, obținem:

$$\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x) - mx - n}{x} + m + \frac{n}{x} \right] = \frac{0}{\infty} + m + \frac{n}{\infty} = 0 + m + 0 = m \in \mathbb{R}.$$

Reciproc, dacă $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$ și $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right) = n \in \mathbb{R}$, atunci avem:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx - n \right) = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(f(x) - mx \right) - n \right] = n - n = 0,$$

deci dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ a funcției f.

2. Se demonstrează în mod asemănător. ■

Observații:

1. În condițiile teoremei 1, pentru $m = 0$ se obține asimptota orizontală $y = n$.

2. Pentru determinarea eventualei asimptote oblice sau orizontale spre $+\infty$ a funcției f, recomandăm parcurgerea următoarelor etape (pentru determinarea asimptotei oblice sau orizontale spre $-\infty$ a funcției f, se parcurg etape asemănătoare):

a) Stabilim dacă problema are sens, adică dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(a, \infty) \subset D$.

b) Calculăm $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ și constatăm că această limită *nu* are sens (în $\overline{\mathbb{R}}$). Atunci f **nu** are asimptotă spre $+\infty$. Într-adevăr, dacă presupunem că f ar avea ca asimptotă spre $+\infty$ dreapta $y = mx + n$, atunci, conform definiției asimptotei, s-ar ajunge la constatarea contradicției:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left[\left(f(x) - mx - n \right) + mx + n \right] = 0 + \lim_{x \to \infty} mx + n \text{ are sens (în } \overline{\mathbb{R}}\text{)}.$$

c) Calculăm $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ și constatăm că $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Atunci dreapta $y = b$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ a lui f.

d) Calculăm $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ și constatăm că $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ sau $-\infty$.

Dacă $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$, atunci continuăm cercetarea.

Dacă $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = n \in \mathbb{R}$, atunci dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ a funcției f.

Exemple **1.** Funcția $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$, are asimptotă oblică dreapta $y = 2x + 2$ atât spre $-\infty$, cât și spre $+\infty$ a funcției f pentru că:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x-1} = 2 \text{ și}$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x-1} = 2.$$

2. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+1}$, **nu** are asimptotă oblică pentru că

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \pm\infty \text{ (limita \textbf{nu} este finită).}$$

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$. Avem:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} = 1,$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^2 - x^3}{\sqrt[3]{\left(x^3 - x^2\right)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + 1\right)} = -\frac{1}{3}.$$

Deci, dreapta $y = x - \dfrac{1}{3}$ este asimptotă oblică la $-\infty$, dar și la $+\infty$.

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$. La $-\infty$ avem nedeterminare de forma $\infty - \infty$. Calculăm limita, amplificând cu conjugata:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1\right)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

Am observat că x < 0 și $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Deci, dreapta $y = -\frac{1}{2}$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

La $+\infty$, avem: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty + \infty = \infty$, deci calculăm numărul m:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{x} = 2.$$

Pentru că m există și este finit, calculăm numărul n:

$$n = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

Rezultă că dreapta $y = 2x + \frac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x-2)^2}{|x|+2}$. Explicităm modulul și avem:

$f(x) = 2 - x$ pentru $x \le 0$ și $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x+2}$ pentru $x > 0$. Calculăm:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2-x) = \infty \text{ și } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)^2}{x+2} = \infty.$$

La $-\infty$ avem:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}-1\right) = -1,\ n = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to-\infty}(2-x+x) = 2.$$

Rezultă că dreapta $y = -x + 2$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

La $+\infty$ avem:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)^2}{x^2+2x} = 1,\ n = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{-6x+4}{x+2} = -6.$$

Rezultă că dreapta $y = x - 6$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

6. Fie funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin x$. Problema asimptotelor se pune numai spre $+\infty$. Deoarece $x - 1 \le x + \sin x = f(x)$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = \infty$, rezultă că

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ (regula „cleștelui”). Calculăm numărul m:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1, \text{deoarece } \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{x} \le \frac{1}{x} \text{ și } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Constatăm însă că $n = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x)$ *nu* există.

În concluzie, funcția f **nu** are asimptote.

Scurt istoric John Neper (sau Napier, 1550-1617), matematician scoțian, a descoperit logaritmii naturali (numiți și logaritmi neperieni), notați ln. A scris lucrări în domeniul trigonometriei și al algebrei; a acătuit tabele de logaritmi și a construit un calculator rudimentar.

Exerciții propuse

*Atunci când **nu** se specifică altfel, funcțiile au domeniul de definiție maxim (mulțimea valorilor $x \in \mathbb{R}$ pentru care au sens operațiile indicate în expresia funcției) și codomeniul $\mathbb{R}$.*

1. Utilizând definiția limitei, să se demonstreze egalitățile următoare:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$; *b*) $\lim\limits_{x\to 5}x^2=25$; *c*) $\lim\limits_{x\to 0}3^x=1$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)=0$; *e*) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x-1}{x-3}=1$; *f*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}}{x+2}=\dfrac{2}{3}$.

2. Să se reprezinte grafic funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și să se studieze existența limitei lui f în punctul x_0, în următoarele situații:

a) $x_0=0,\ f(x)=\begin{cases}2x+1, \text{ dacă } x\le 0\\ x^2, \text{ dacă } x>0\end{cases}$; *b*) $x_0=1,\ f(x)=\begin{cases}1-x, \text{ dacă } x\le 1\\ \ln x, \text{ dacă } x>1\end{cases}$.

3. Să se cerceteze dacă următoarele funcții au limită în punctele specificate:

a) $x_0=-1,\ f(x)=\dfrac{2}{x+1}$; b) $x_0=-2,\ f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$; c) $x_0=e,\ f(x)=\dfrac{3}{|\ln x-1|}$;

d) $x_0=\dfrac{\pi}{2},\ f(x)=e^{\frac{1}{\sin x-1}}$; e*) $x_0=0,\ f(x)=\dfrac{a+\cos\frac{1}{x}}{x^2}$ (discuție, $a\in\mathbb{R}$);

f) $x_0=0,\ f(x)=e^{\frac{1}{x}}$; g) $x_0=1,\ f(x)=e^{-\frac{1}{|x^2-1|}}$; h) $x_0=\dfrac{\pi}{4},\ f(x)=e^{\frac{1}{\operatorname{tg} x-1}}$.

4. Să se calculeze limitele laterale ale funcțiilor următoare, în punctele precizate:

a) $x_0=-4,\ f(x)=\dfrac{3}{x+4}$; *b*) $x_0=1,\ f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$;

c) $x_0=-2,\ f(x)=[x]$; *d*) $x_0=2,\ f(x)=\dfrac{x^4-4x+4}{x^3-4x}$.

5. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+5)$; *b*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+3}{|x+1|}$; *c*) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)e^{x-1}$; *d*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{x^4}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+5x+1)$; *f*) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{x^2+1}+e^x\right)$; *g*) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+\cos x)$.

6. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 1}[(x^2-1)+\cos(x-1)]$; *b*) $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x\cdot\log_{10}5x-\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$; *c*) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}}(2x^3-5\sin x)$.

7. Să se găsească punctele în care următoarele funcții au limită:

$a)\ f(x)=\begin{cases} x+2, \text{ dacă } x<1 \\ x, \text{ dacă } x\geq 1 \end{cases};$ $\quad b)\ f(x)=\begin{cases} e^x+2x+1, \text{ dacă } x\leq 0 \\ \ln x, \text{ dacă } x>0 \end{cases};$

$c)\ f(x)=\dfrac{x}{|x|}\ (x\neq 0);$ $\quad d)\ f(x)=[x]\ ;$ $\quad e)\ f(x)=x-[x].$

8. Să se calculeze următoarele limite:

$a)\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right);$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right);$

$c)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1},$ unde $m,\ n\in \mathbb{N}^*;$ $\quad d)\ \lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{2}{x(x-2)}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right].$

9. Să se calculeze următoarele limite:

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}-x};$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x};$ $\quad c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{16+x^2}-4};$

$d)\ \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+2}-x}{x};$ $\quad e)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{x-1};$ $\quad f)\ \lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right).$

10. Să se calculeze următoarele limite:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x};$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}\, 5x}{2x};$ $\quad c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x};$

$d)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{(\sin 2x)^2};$ $\quad e)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2};$ $\quad f)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin x};$

$g)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}x-\sin x}{x\sin^2 x};$ $\quad h^*)\ \lim\limits_{x\to 3}(x-3)\,\text{tg}\left(\dfrac{\pi x}{6}\right);$ $\quad i^*)\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}.$

11. Să se calculeze următoarele limite:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{1-\cos x};$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1};$ $\quad c^*)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln\left(1+x^3\right)};$ $\quad d^*)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{\ln\left(1+e^{3x}\right)}.$

12. Să se calculeze următoarele limite:

$a)\ \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+2}{x^2}\right)^{\frac{x^2+3}{x+1}};$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^{\frac{x^5+2}{x^3+1}};$ $\quad c)\ \lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+2}{5-x}\right)^{\frac{x-3}{x^2-9}}.$

13. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{5x}}$; d) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$; e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\text{tg}x)^{\text{tg}2x}$;

f*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{\alpha}{x}\right)^x,\ \alpha>0$; g*) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\text{tg}x}$; h*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{\alpha}{x}+\beta\sin\dfrac{\alpha}{x}\right)^x,\ \alpha>0,\ \beta>0.$

14. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$; *c*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$; *e*) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\frac{1}{x}}$; *f**) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}^*$.

15. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{x}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$, $a,\ b\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$; *c**) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{\ln(\cos 2x)}$, $a,\ b\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$.

16*. Fie $a>0$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\dfrac{x-1}{4x+1}}-ax\right)$ (discuție în raport cu a).

17. Fie $a, b\in\mathbb{R}$ şi $k\in\mathbb{N}^*$. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}ax^k, & \text{dacă } x\in\mathbb{Q}\\ bx^{k+1}, & \text{dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

Să se găsească punctele x_0 în care funcția f are limită (discuție după a şi b).

18. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}^*$ **nu** are limită în 0.

19. Să se studieze existența asimptotelor verticale pentru funcțiile:

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{5\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+2}{x-5}$; b) $f:\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$;

c) $f:\mathbb{R}\setminus[-1, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$; d) $f:(0,+\infty)\setminus\{e^{-1}\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\ln x+1}$;

e) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{\frac{1}{|x-1|}}$; f) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

20. Să se studieze existența asimptotelor orizontale pentru funcțiile:

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2}$; b) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-5$;

e) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}$; f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg} x$.

21. Să se determine eventualele asimptote oblice spre $+\infty$ şi spre $-\infty$ pentru funcțiile:

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-2}$; b) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x-1}$;

c) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+1+\dfrac{1}{x}$; d) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x|}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3-x}$; f) $f:\mathbb{R}\setminus[0, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\sqrt{x^2-x}$.

22. Să se determine eventualele asimptote pentru următoarele funcții:

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+4}{x}$;

b) $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x^2+3}$;

d) $f:\mathbb{R}\setminus\{4\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x-4}$;

e) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

f) $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$;

g) $f:(0,+\infty)\setminus\{e^{-2}\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln x+2}$;

h*) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

23. Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+6}{x-1}$ să admită ca asimptotă dreapta de ecuație $y=x-2$.

24. Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{(x+a)^2}{bx-1}$, $a, b\in\mathbb{R}$. Să se determine *a* și *b* astfel încât graficul funcției *f* să admită dreapta de ecuație $y=x+3$ ca asimptotă, unde *D* este mulțimea maximă de definiție.

25. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+ax+a}$ să admită o singură asimptotă verticală, unde *D* este mulțimea maximă de definiție.

26. Să se determine *a* și *b* reale astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{ax^3+bx^2}$ să admită ca asimptotă dreapta de ecuație $y=2x-\dfrac{1}{3}$.

Capitolul 2 Continuitate

Ideea de „continuitate“ a unei funcții, definită pe o mulțime „fără întreruperi“ (interval), are la origine proprietatea intuitivă a graficului funcției de a fi și el „fără întreruperi“ (adică să poată fi trasat pe o foaie de hârtie fără a ridica vârful creionului de pe foaie). Această proprietate capătă interpretarea: „**nu** se poate trece de la o valoare la alta a funcției fără a parcurge toate valorile intermediare“. Noțiunea matematică de continuitate cere însă o definiție precisă, care va fi prezentată în continuare.

Francezului A. L. Cauchy (1789-1857) și cehului B. Bolzano (1781-1848) le datorăm definirea modernă a conceptului de continuitate.

§1. Interpretarea grafică a continuității unei funcții, studiul continuității în puncte de pe dreapta reală

În această secțiune, vom considera o mulțime $A \subset \mathbb{R}$, o funcție $f : A \to \mathbb{R}$, un punct $a \in A$ (a aparținând lui A) şi o variabilă $x \in \mathbb{R}$.

Problema care se pune acum este următoarea: să se cerceteze dacă $f(x)$ se apropie de $f(a)$, atunci când x se apropie din ce în ce mai mult de a. Pentru aceasta, vom analiza mai întâi un exemplu simplu.

Fie funcția $f : [-1,\ 2] \to \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{dacă } x \in [-1,\ 1] \\ x, & \text{dacă } x \in (1,\ 2] \end{cases}.$

Graficul lui f este trasat în figura 1. Funcția f este definită pe o mulțime „fără întreruperi“ (interval), totuși graficul ei se întrerupe în punctul de abscisă $x = 1$. Constatăm că în punctul 1, limitele laterale sunt

$$f(1-0) = \lim_{x \nearrow 1}(1 - x^2) = 0 = f(1),$$

$$f(1+0) = \lim_{x \searrow 1} x = 1 \neq 0 = f(1).$$

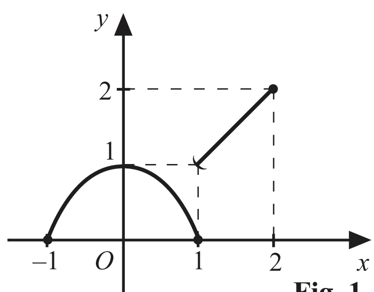


Fig. 1

Întreruperea este cauzată de faptul că $f(x)$ **nu** se apropie de $f(1)$, când $x > 1$ se apropie de 1. Se consideră că f **nu** este continuă în 1.

Dacă luăm un alt punct de pe grafic, de exemplu punctul de abscisă $x = 0$, în care graficul **nu** se întrerupe, atunci $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}(1 - x^2) = 1 = f(0)$, deci, când x se apropie de 0, $f(x)$ se apropie de $f(0)$. Se consideră că f este continuă în 0.

Definiții

1. Funcția $f: A \to \mathbb{R}$ se numește **continuă în punctul** $a \in A$, dacă pentru orice vecinătate V a punctului $f(a)$, există o vecinătate U (depinzând de V) a punctului a, astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$ să avem $f(x) \in V$. În acest caz, se spune că a este **punct de continuitate** al funcției f. Întrebuințând cuantificatorii, proprietatea se scrie:

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists U \in \mathcal{V}(a) \text{ a.î. } \forall x \in U \cap A \text{ să avem } f(x) \in V.$$

2. Funcția f se numește **discontinuă în punctul** a dacă f **nu** este continuă în a.

Observații:

1. În definiția continuității, a aparține lui A, dar nu este în mod necesar punct de acumulare pentru A. Dacă a este punct izolat al lui A, adică dacă $\exists U_0 \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $U_0 \cap A = \{a\}$, atunci proprietatea de continuitate se verifică automat (pentru $U = U_0$) și f rezultă continuă în a.

2. Problema continuității **nu** are sens în punctele în care funcția **nu** este definită. De exemplu, **nu** are sens să spunem că funcția $f = \text{tg}$ este continuă sau discontinuă în punctele $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ sau $x = \pm\infty$.

3. Noțiunea de funcție continuă într-un punct este o **proprietate locală**, adică dacă $E \in \mathcal{V}(a)$ și $f_{E\cap A}$ este restricția lui f la $E \cap A$, atunci: „f este continuă în $a \Leftrightarrow f_{E\cap A}$ este continuă în a“.

4. Dată fiind asemănarea dintre definiția limitei și definiția continuității, o serie întreagă de proprietăți ale limitelor rămân valabile și pentru funcțiile continue, și cu aceleași demonstrații, cu singura deosebire că **nu** se mai pune condiția $x \neq a$. În cele ce urmează, vom enunța astfel de proprietăți.

Teorema 1 — Afirmații echivalente cu continuitatea într-un punct

Fie o funcție $f: A \to \mathbb{R}$ și un punct $a \in A$, care este și punct de acumulare pentru A. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. Funcția f este continuă în punctul a.

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu $|x - a| < \delta_\varepsilon$ să avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (caracterizarea „cu ε și δ“).

3. Pentru orice șir $(x_n)_{n\geq 0}$ de puncte din A astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ (caracterizarea „cu șiruri“).

4. Există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ (caracterizarea „cu limite“).

Consecință

Orice funcție elementară $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$ este continuă în orice punct $x \in D$.

Demonstrație. Pentru demonstrația teoremei 1 și a consecinței, se folosesc vecinătăți elementare arbitrare $V = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \in \mathcal{V}_e(f(a))$, $\varepsilon > 0$, și $U = (a - \delta, a + \delta) \in \mathcal{V}_e(a)$, $\delta > 0$, precum și proprietăți ale limitelor de funcții. ■

Exemple **1.** Funcția *f*, studiată la începutul paragrafului (*fig. 1*), este discontinuă în punctul $x = 1$ și continuă în orice punct $x \in [-1, 1) \cup (1, 2]$.

2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin relațiile:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \text{ și } g(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Conform exemplelor de la limite de funcții, funcția *f* **nu** are limită în nici un punct $a \in \mathbb{R}$, deci este discontinuă în toate punctele. Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q}}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q}}} x = a$ și $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} (-x) = -a$. Rezultă că *g* are limită în *a* dacă și numai dacă $a = -a$, adică dacă și numai dacă $a = 0$.

În plus, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$, deci *g* este continuă numai în punctul $a = 0$.

3. Funcția $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + x}$ este definită pe mulțimea maximă $A = \{-1\} \cup [0, \infty)$. Punctul -1 este izolat pentru *A*, deci *f* este continuă în -1. Folosind caracterizarea „cu șiruri“, funcția *f* rezultă continuă și în celelalte puncte $a \in [0, \infty)$.

4. Fie funcția $f(x) = x^{\operatorname{sgn}|x-2|}$, $\forall x \in [0, 3]$. Graficul funcției este redat în figura 2. Rezultă că funcția are limită în 2 și $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} x = 2 \neq 1 = f(2)$, deci *f* este discontinuă în 2.

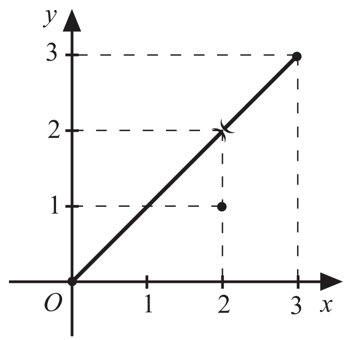


Fig. 2

Definiții

1. Fie mulțimile $E = A \cap (-\infty, a]$ și $F = A \cap [a, \infty)$. Dacă restricția $f_E : E \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul *a*, atunci se spune că *f* este **continuă la stânga** în punctul *a*. Dacă restricția $f_F : F \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul *a*, atunci se spune că *f* este **continuă la dreapta** în punctul *a*.

2. Punctele de discontinuitate ale funcției *f* se împart în două categorii. **Un punct de discontinuitate** *a* al lui *f* este **de speța întâi**, dacă limitele laterale ale lui *f* în *a* (acelea care au sens), există și sunt finite. **Celelalte puncte de discontinuitate** ale lui *f* **sunt de speța a doua**.

Teorema 2

1. Dacă *a* este punct de acumulare pentru *E* (respectiv pentru *F*), atunci *f* este continuă la stânga (respectiv la dreapta) în *a* $\Leftrightarrow \exists f(a-0) = f(a)$ (respectiv $\exists f(a+0) = f(a)$).

2. Dacă *a* este punct de acumulare pentru *E* și *F*, atunci *f* este continuă în punctul *a* dacă și numai dacă $\exists f(a-0) = f(a+0) = f(a)$.

Exemple **1.** Funcția *f*, studiată la începutul paragrafului (*fig. 1*), este continuă la stânga în $a=1$ și discontinuă la dreapta în $a=1$, deoarece $f(1-0)=f(1)$ și $f(1+0)=$ $=1\neq f(1)$. Rezultă că 1 este punct de discontinuitate de speța întâi al lui *f*.

2. Fie funcțiile $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definite prin relațiile

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0\\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases} \quad \text{și} \quad g(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x\leq 0\\ \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x>0\end{cases}.$$

Numărul 0 este punct de discontinuitate de speța a doua pentru *f*, deoarece limitele laterale $f(0-0)$ și $f(0+0)$ **nu** există. Numărul 0 este punct de discontinuitate de speța a doua pentru *g*, deoarece limita la dreapta $g(0+0)=$ $=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{1}{x}=\infty$ (**nu** este finită).

Definiții

Funcția $f:A\to\mathbb{R}$ se numește **continuă**, dacă pentru orice punct $x\in A$, *f* este continuă în *x*. Funcția *f* se numește **discontinuă**, dacă *f* **nu** este continuă.
Fie o mulțime $B\subset A$. Se spune că **funcția** f **este continuă pe mulțimea** *B*, dacă pentru orice $x\in B$, *f* este continuă în *x*. Se spune că *f* **este continuă în punctul** $a\in B$, **relativ la mulțimea** *B*, dacă restricția $f_B:B\to\mathbb{R}$ este continuă în *a*.

Observații:

1. Funcțiile elementare sunt continue.

2. Funcția f este continuă la stânga (respectiv la dreapta) în punctul $a\in A$ dacă și numai dacă *f* este continuă în *a* relativ la mulțimea $A\cap(-\infty, a]$ (respectiv $A\cap[a,\infty)$).

§2. Operații cu funcții continue

Folosind caracterizările „cu șiruri“ sau „cu limite“, proprietățile funcțiilor continue din această secțiune se deduc ușor din proprietățile corespunzătoare ale limitelor.

Vom considera mulțimea $A\subset\mathbb{R}$, funcțiile $f,\ g:A\to\mathbb{R}$, punctul $a\in A$ și numărul $\lambda\in\mathbb{R}$.

Definim **modulul funcției** *f*, $|f|:A\to\mathbb{R}$, $(|f|)(x)=|f(x)|$, $\forall x\in A$. Dacă $f(x)>0$, $\forall x\in A$, definim **funcția putere**, $f^g:A\to\mathbb{R}$, $(f^g)(x)=(f(x))^{g(x)}$, $\forall x\in A$.

Teorema 1 — Operații cu funcții continue

Să presupunem că *f* și *g* sunt continue în *a*, respectiv pe *A*. Atunci funcțiile $|f|$, $f+g$, fg, λf, $\dfrac{f}{g}$ (în ipoteza $g(x)\neq 0,\ \forall x\in A$) și f^g (în ipoteza $f(x)>0,\ \forall x\in A$) sunt continue în *a*, respectiv pe *A*.

Observație:

Raționând pin inducție matematică, se arată că dacă funcțiile $f_1, \quad f_2, \quad ..., \quad f_n : A \to \mathbb{R}$ ($n \geqslant 2$) sunt continue în a, atunci suma $f_1 + f_2 + ... + f_n$ și produsul $f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n$ sunt continue în a.

Teorema 2 — Proprietăți locale

Să presupunem că funcția f este continuă în a și $f(a) < \lambda$ (respectiv $f(a) > \lambda$). Atunci există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U \cap A$ să avem $f(x) < \lambda$ (respectiv $f(x) > \lambda$). În particular, pentru $\lambda = 0$, $\forall x \in U \cap A$ avem $f(x) < 0$ (respectiv $f(x) > 0$).

Teorema 3 — Continuitatea funcției compuse

Fie $A, B \subset \mathbb{R}$, funcțiile $\varphi : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ și funcția compusă $f = g \circ \varphi : A \to \mathbb{R}$.

1. Dacă φ este continuă în $a \in A$ și g este continuă în $b = \varphi(a)$, atunci f este continuă în a.

2. Mai general, dacă a este punct de acumulare pentru A (nu neapărat în A), dacă există $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = b$, dacă $b \in B$ și dacă g este continuă în b, atunci există

$$\lim_{x \to a} g(\varphi(x)) = g\left(\lim_{x \to a} \varphi(x)\right) = g(b).$$

Exemple

1. Funcția $f(x) = (1 + x^3) + x^2 \cdot e^x + \sin x$ este continuă pe $\mathbb{R}$ ca sumă de funcții continue. Funcția $g(x) = x^2 \cdot e^x$ este continuă ca produs de funcții continue.

2. Funcția $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ este continuă pe $[0, \infty)$ ca raport de funcții continue.

3. Funcția $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, deoarece este compunerea funcțiilor continue $y = \varphi(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ şi $g(y) = \arcsin y$ $(y \in [-1, 1])$.

§3. Semnul unei funcții continue pe un interval de numere reale, proprietatea lui Darboux, studiul existenței soluțiilor unor ecuații în $\mathbb{R}$

Vom stabili proprietăți globale ale continuității.

În această secțiune, **vom considera un interval** $I \subset \mathbb{R}$ și **o funcție** $f : I \to \mathbb{R}$.

3.1. Proprietatea valorilor intermediare (proprietatea lui Darboux)

Vom arăta că funcțiile continue, definite pe un interval, au proprietatea că **nu** pot trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare.

Definiții

1. Spunem că funcția $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, **are proprietatea lui Darboux pe intervalul *I*** dacă, pentru orice două puncte $a < b$ din I și pentru orice număr λ situat între $f(a)$ și $f(b)$, există cel puțin un punct $c \in [a, b]$, depinzând de a, b și λ, astfel încât $f(c) = \lambda$.

2. Spunem că **λ este situat între $f(a)$ și $f(b)$** dacă:

a) $f(a) \le f(b)$ și $f(a) \le \lambda \le f(b)$ *sau* b) $f(a) \ge f(b)$ și $f(b) \le \lambda \le f(a)$.

Observații:

1. Proprietatea valorilor intermedire (nunită astăzi **proprietatea lui Darboux**) a fost clarificată de către matematicianul francez Gaston Darboux (1842-1917), ca fiind o proprietate distinctă de noțiunea de continuitate.

2. Intuitiv, proprietatea lui Darboux exprimă faptul că **nu** se poate trece de la o valoare a funcției la alta, fără a se parcurge toate valorile intermediare. Din punct de vedere geometric, pentru orice $a < b$ din I, orice dreaptă $y = \lambda$, situată între dreptele $y = f(a)$ și $y = f(b)$, intersectează cel puțin o dată graficul lui f în intervalul $[a, b]$, ca în figura 3.

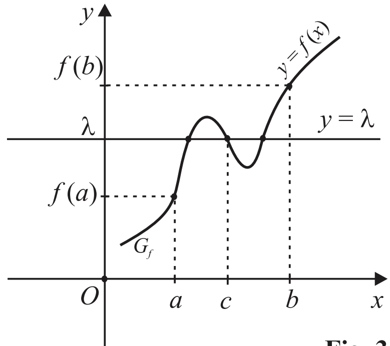


Fig. 3

Proprietate fundamentală

Funcția $f : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul I dacă și numai dacă, pentru orice interval $J \subset I$, mulțimea valorilor $f(J)$ este interval.

Demonstrație. Echivalența rezultă din următoarea caracterizare a intervalului: mulțimea $f(J)$ este interval dacă și numai dacă pentru orice valori $f(x), f(y) \in f(J)$, unde $x, y \in J$, rezultă că intervalul $[f(a), f(b)]$ este inclus în $f(J)$. ■

Exemplu Fie funcția $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{pentru } x = 1 \\ x, & \text{pentru } x \in [0, 1) \cup (1, 3] \end{cases}.$$

Funcția f este discontinuă în $x = 1$ deoarece $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x = 1 \ne 3 = f(1)$.

Funcția f **nu** are proprietatea lui Darboux deoarece imaginea intervalului $[1, 2]$, de exemplu, prin f nu este interval: $f([1, 2]) = (1, 2] \cup \{3\}$, după cum se vede și din figura 4.

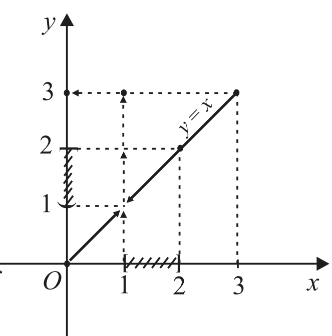


Fig. 4

Lema 1

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, și fie o funcție continuă $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ și fie mulțimea $A = \{x \in [a, b] \mid \varphi(x) \le \lambda\}$. Dacă $A \ne \varnothing$ și $c = \sup A$, atunci $\varphi(c) \le \lambda$.

Demonstrație. Conform aplicațiilor de la limite de șiruri, există un șir $(x_n)_n \to c$, $x_n \in A$, $\forall\, n \geq 0$. Rezultă că $\varphi(x_n) \leq \lambda$, $\forall n \geq 0$. La limită, se obține $\varphi(c) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) \leq \lambda$. ■

Teorema 1 — Proprietatea valorilor intermediare

Presupunem că funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este continuă. Atunci, pentru orice puncte $a < b$ din I și pentru orice număr λ cuprins între $f(a)$ și $f(b)$, există un punct $c \in [a, b]$ (depinzând de a, b și λ) astfel încât să avem $f(c) = \lambda$, adică f are **proprietatea lui Darboux**.

Demonstrație. Pentru a face o alegere, să presupunem $f(a) < f(b)$ şi să luăm un număr λ astfel încât $f(a) < \lambda < f(b)$. Fie mulțimea $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq \lambda\}$.

A este nevidă şi mărginită ($a \in A$ şi $A \subset [a, b]$), deci există $c = \sup A$. Evident, $a \leqslant c \leqslant b$. Conform lemei 1, $f(c) \leqslant \lambda$.

Deoarece $f(b) > \lambda$, rezultă $c \neq b$, deci $c < b$. Pentru orice $x \in (c, b)$ avem $x > c = \sup A$, deci $x \notin A$, şi deci $f(x) > \lambda$. La limită, $f(c) = \lim\limits_{x \searrow c} f(x) \geqslant \lambda$.

În concluzie, $f(c) \leqslant \lambda$ şi $f(c) \geqslant \lambda$, deci $f(c) = \lambda$, şi proprietatea este demonstrată.

Consecințe

1. Fie o funcție continuă $f: I \to \mathbb{R}$ şi fie $a < b$ din I. Dacă $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = 0$.

2. Dacă funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este continuă şi $f(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, atunci funcția f păstrează acelaşi semn pe tot intervalul I.

3. Dacă funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci pentru orice interval $J \subset I$, rezultă că $f(J)$ este interval.

Demonstrație. 1. Avem $f(a) < 0 < f(b)$ sau $f(b) < 0 < f(a)$; aplicăm teorema 1 pentru $\lambda = 0$.

2. Dacă ar exista $a < b$ din I astfel încât $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci funcția s-ar anula într-un punct, ceea ce ar contrazice ipoteza.

3. Pentru orice valori $f(a), f(b) \in f(J)$, cu $a, b \in J$, $a < b$, și pentru orice λ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$, avem $[a, b] \subset J$ şi $\lambda \in f([a, b]) \subset f(J)$, deci $f(J)$ este interval. ■

Exemplu Fie funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } x = 0 \\ 1 + \sin\dfrac{\pi}{2x}, & \text{pentru } x \in (0, 1] \end{cases}$.

Funcția f **nu** este continuă în $x = 0$ deoarece $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \sin\dfrac{\pi}{2x}\right)$ **nu** există. Totuși funcția f are proprietatea lui Darboux conform raționamentului care urmează. Pentru orice $0 < a \leq 1$, mulțimea $f([0, a]) = [0, 2]$ este interval deoarece $[0, a]$ include un interval de forma $\left[\dfrac{1}{2k+3}, \dfrac{1}{2k+1}\right]$, $k \in \mathbb{N}^*$, și

$f\left(\left[\frac{1}{2k+3}, \frac{1}{2k+1}\right]\right)=[0, 2]$ cum se vede și în figura 5, unde pe axe sunt luate unități de măsură diferite pentru a surprinde mai bine fenomenul.

Pentru orice interval $J \subset (0, 1]$, restricția lui f la J este continuă și, conform teoremei anterioare, $f(J)$ este interval. Conform proprietății fundamentale, f are proprietatea lui Darboux.

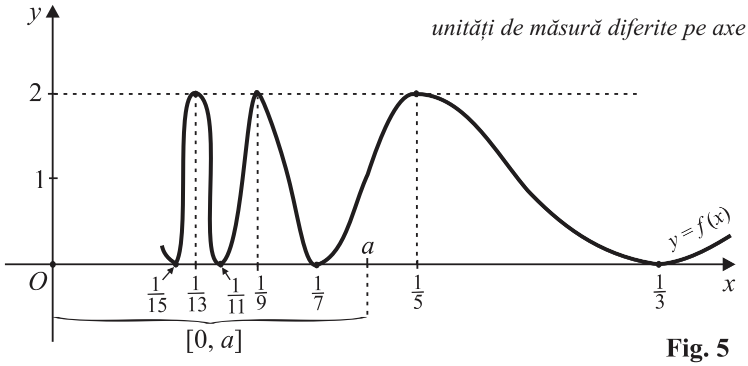


Fig. 5

3.2. Proprietăți de mărginire

Marginea inferioară şi **marginea superioară** ale funcției $f: I \to \mathbb{R}$ (I interval), sunt numerele $m_f = \inf f(I)$ și $M_f = \sup f(I)$ din $\overline{\mathbb{R}}$.

Se spune că **funcția f este mărginită pe** I, dacă mulțimea $f(I)$ este mărginită. În acest caz, se spune că f **îşi atinge marginile pe** I, dacă există două puncte $\alpha, \beta \in I$ astfel încât $m_f = f(\alpha)$ şi $M_f = f(\beta)$.

De exemplu, funcția $f:(0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ îşi atinge marginea inferioară $m_f = 1 = f(1)$ şi **nu** îşi atinge marginea superioară $M_f = \infty$, iar funcția $g:(0, 1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ **nu** îşi atinge marginile $m_g = 0$ şi $M_g = 1$.

Teorema 2 — Teorema lui Weierstrass de mărginire

Fie un interval compact $I = [a, b]$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și fie o funcție continuă $f: I \to \mathbb{R}$. Atunci funcția f este mărginită pe I și există $\alpha, \beta \in I$ astfel încât să avem

$$m_f = \inf f(I) = f(\alpha) \quad \text{și} \quad M_f = \sup f(I) = f(\beta).$$

Altfel spus:

Orice funcție continuă pe un interval compact este mărginită și își atinge marginile.

Demonstrație (facultativă). $M_f \in (-\infty, \infty]$. Luăm un şir $(y_n)_n \to M_f$ $(y_n < y_{n+1} < M_f, \forall n \geq 0)$. Pentru orice $n \geq 0$, notăm $B_n = \{x \in I \mid f(x) \geq y_n\}$. Rezultă : $B_n \neq \varnothing$ ($y_n < M_f$; y_n **nu** este majorant pentru $f(I)$; $\exists x \in I$ a.î. $y_n < f(x)$); $B_{n+1} \subset B_n$.

Pentru orice $n \geq 0$, notăm $b_n = \sup B_n$. Rezultă : $a \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b$; $b_n \in B_n$ (conform lemei 1); $y_n \leq f(b_n) \leq M_f$. Şirul $(b_n)_n$ este convergent (este monoton şi mărginit) şi notăm $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. La limită ($f$ continuă), obţinem $a \leq \beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \leq b$ şi $M_f = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(\beta) \leq M_f$.

Rezultă că $M_f = f(\beta)$. Deoarece $f(\beta) \in \mathbb{R}$, rezultă că $M_f \in \mathbb{R}$.

În mod analog, se stabilesc şi proprietăţile marginii inferioare. ■

Consecință

Fie un interval compact $I = [a, b]$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și fie o funcție continuă $f: I \to \mathbb{R}$. Atunci avem $f([a, b]) = [m_f, M_f]$.

Demonstrație (facultativă). $f(I)$ este interval cu extremitățile m_f și M_f. Conform teoremei 2, $m_f, M_f \in f(I)$, deci $f(I) = [m_f, M_f]$. ■

3.3. Inversarea funcțiilor continue

Teorema 3 — Continuitatea inversei unei funcții de la un interval la altul

Fie două intervale $I, J \subset \mathbb{R}$. Fie o funcție $f: I \to J$ continuă şi bijectivă. Atunci f este strict monotonă şi inversa $g = f^{-1}: J \to I$ este continuă.

Demonstrație (facultativă). **1.** Să presupunem **prin absurd** că f **nu** este strict monotonă. Atunci $\exists x < y < z$ în I a.î. „$f(x) > f(y)$ şi $f(y) < f(z)$" sau „$f(x) < f(y)$ şi $f(y) > f(z)$". Pentru a face o alegere, să presupunem că $f(x) > f(y)$ şi $f(y) < f(z)$. Fie λ a.î. $f(y) < \lambda < \min\{f(x), f(z)\}$. Conform teoremei 1, $\exists a \in (x, y)$ a.î. $f(a) = \lambda$ şi $\exists b \in (y, z)$ a.î. $f(b) = \lambda$. Rezultă că $a \neq b$ şi $f(a) = f(b) = \lambda$, deci f **nu** este bijectivă, **contradicție**. În concluzie, f este strict monotonă.

2. Arătăm că g este continuă. Presupunem pentru demonstrație că f este strict crescătoare. Rezultă că $g = f^{-1}$ este, de asemenea, strict crescătoare. Fie $y_0 \in J$, arbitrar. Vom arăta că g este continuă în y_0. Va rezulta că g este continuă. Presupunem pentru demonstrație că y_0 **nu** este extremitate a lui J (în caz contrar, se raționează la fel). Fie $x_0 = g(y_0) \in I$. Rezultă că x_0 **nu** este extremitate a lui I.

Fie o vecinătate arbitrară U a lui $g(y_0) = x_0$. Atunci $\exists a, b \in I$ a.î. $a < x_0 < b$ şi a.î. $[a, b] \subset U$. Rezultă că $f(a) < f(x_0) = y_0 < f(b)$. Luăm $V = [f(a), f(b)]$, deci V este vecinătate a lui y_0. Pentru orice $y \in V$, conform proprietății lui Darboux, rezultă:

$\exists x \in [a, b]$ a.î. $f(x) = y$, deci $g(y) = x \in [a, b] \subset U$, şi deci $g(y) \in U$.

În concluzie, $\forall U \in \mathcal{V}(g(y_0))$, $\exists V \in \mathcal{V}(y_0)$ a.î. $\forall y \in V$ să avem $g(y) \in U$, deci g este continuă în y_0. ■

Teorema 4

Să presupunem că $I = (a, b)$ şi $J = (\alpha, \beta)$, unde $a, b, \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ și $\alpha < \beta$. Să presupunem că $f: I \to J$ este continuă şi bijectivă.

1. Dacă f este strict crescătoare, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$ şi $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \beta$.

2. Dacă f este strict descrescătoare, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \beta$ şi $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \alpha$.

Demonstrație (facultativă). Vom arăta, de exemplu, că $\lim_{x \to b} f(x) = \beta$, în ipoteza de la 1.

Constatăm că $-\infty < \beta = \sup J = \sup f(I) = M_f$. Fie $V \in \mathcal{V}(\beta)$, arbitrară. Atunci $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda < \beta$ a.î. $(\lambda, \beta] \subset V$. Rezultă : $\lambda < \beta = \sup f(I)$; λ **nu** este majorant pentru $f(I)$; $\exists x_V \in I$ $(a < x_V < b)$ a.î. $\lambda < f(x_V)$. Fie vecinătatea $U = (x_V, \infty]$ a lui b. Atunci, $\forall x \in U \cap I$ avem: $x_V < x < b$; $\lambda < f(x_V) < f(x) < \beta$ (f este strict crescătoare); $f(x) \in (\lambda, \beta] \subset V$; $f(x) \in V$.

În concluzie, $\forall V \in \mathcal{V}(\beta), \exists U \in \mathcal{V}(b)$ a.î. $\forall x \in U \cap I$ să avem $f(x) \in V$, deci $\lim_{x \to b} f(x) = \beta$. ■

3.4. Aplicații la funcții elementare

Vom stabili câteva proprietăți ale funcțiilor elementare, care au fost enunțate în capitolul 1.

♦ ***Funcțiile exponențială și logaritmică***

Fie $a > 1$. Funcția $f_a : (-\infty, \infty) \to (0, \infty)$, $f_a(x) = a^x$, este continuă, strict crescătoare și bijectivă. Conform teoremei 4, avem $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ și $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$.

Funcția $\log_a : (0, \infty) \to (-\infty, \infty)$ este inversa funcției $f_a : (-\infty, \infty) \to (0, \infty)$. Conform teoremei 3, ea este continuă, strict crescătoare și bijectivă. Conform teoremei 4, avem $\lim_{x \to 0} (\log_a x) = -\infty$ și $\lim_{x \to \infty} (\log_a x) = \infty$.

Pentru $0 < a < 1$, se raționează asemănător.

Proprietățile funcției putere (radicalii sunt caz particular) se deduc din proprietățile exponențialei și logaritmului, cu ajutorul identității $x^b = e^{b \cdot \ln x}, x > 0, b \in \mathbb{R}$.

♦ ***Funcții trigonometrice***

Funcția $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, este continuă. Într-adevăr, $\forall a \in \mathbb{R}$, avem:

$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\cos \frac{x+a}{2}\right| \cdot \left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \le 2 \cdot 1 \cdot \left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a| \xrightarrow[(x \to a)]{\text{conv.}} 0.$$

La fel se arată că funcția cos este continuă.

Funcțiile $\text{tg} = \dfrac{\sin}{\cos}$ și $\text{ctg} = \dfrac{\cos}{\sin}$ sunt continue ca rapoarte de funcții continue.

♦ ***Funcții trigonometrice inverse***

Funcția $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este, prin definiție, inversa funcției continue, bijective, strict crescătoare $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$. Conform teoremei 3, arcsin este continuă, bijectivă, strict crescătoare. Mai mult, aplicând limita funcției compuse pentru funcțiile $y = \arcsin x$ și $g(y) = \dfrac{y}{\sin y}$ $(y \in [-1, 1] \setminus \{0\})$, rezultă că

$$\exists \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = \lim_{x \to 0} g(\arcsin x) = \lim_{y \to 0} g(y) = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

Raționând în mod asemănător, se arată că funcțiile următoare sunt continue, bijective.

$\arccos:[-1, 1]\to[0, \pi]$ şi $\text{arcctg}:(-\infty, \infty)\to(0, \pi)$ sunt strict descrescătoare;

$\text{arctg}:(-\infty, \infty)\to\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este strict crescătoare.

Cu ajutorul teoremei 4 şi a limitei funcției compuse, se stabilesc limitele

$$\lim_{x\to-\infty}(\text{arctg}\,x)=-\frac{\pi}{2};\ \lim_{x\to\infty}(\text{arctg}\,x)=\frac{\pi}{2};\ \lim_{x\to-\infty}(\text{arcctg}\,x)=\pi;\ \lim_{x\to\infty}(\text{arcctg}\,x)=0;\ \lim_{x\to0}\frac{\text{arctg}\,x}{x}=1.$$

3.5. Rezolvarea unor ecuații

Fie o funcție continuă $f:I\to\mathbb{R}$ (I interval). Ne propunem să vedem dacă ecuația $f(x)=0$ $(x\in I)$ are soluții în anumite intervale ale lui I.

Dacă găsim două numere $a, b\in I, a<b$ astfel încât $f(a)\cdot f(b)<0,$ atunci, conform consecinței 1 la teorema 1, ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție $x = c \in (a, b)$. Dacă, în plus, funcția f este strict monotonă pe $[a, b]$, atunci soluția c este unică.

Exemple 1. Ecuația $f(x)=x^5+x^3-10=0$ are o soluție unică $x_1\in(1, 2)$.
Într-adevăr, funcția f este continuă și $f(1) = -8 < 0$, $f(2) = 30 > 0$. În plus, f este strict crescătoare pe $[1, 2]$.

2. Ecuația $f(x)=x\cdot\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-1=0$ are cel puțin o soluție $x_1\in(0, 1)$.
Într-adevăr, funcția f este continuă şi $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = \frac{\pi}{2}-1 > 0$.

3.6. Rezolvarea unor inecuații

Fie o funcție continuă $f:I\to\mathbb{R}$ (I interval). Ne propunem să rezolvăm inecuația $f(x)>0,\ x\in I.$ Problema revine la a studia semnul funcției f, folosind consecința 2 la teorema 1. Vom da următorul procedeu practic. Rezolvăm ecuația $f(x)=0$ $(x\in I)$ şi presupunem că toate soluțiile acesteia sunt:

$$a_1<a_2<a_3<...<a_{n-1}<a_n\ (n\geq2).$$

Atunci pe fiecare dintre intervalele:

$$(-\infty, a_1)\cap I, (a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., (a_{n-1}, a_n), (a_n, \infty)\cap I,$$

funcția are un semn constant şi, în consecință, este suficient ca în fiecare din aceste intervale să alegem câte un singur punct şi să determinăm semnul lui f în acel punct.

Exemple **1.** Să se rezolve inecuația $f(x)=x^3-3x^2+2x>0.$
Rezolvăm ecuația $f(x)=0$ şi obținem soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Funcția f are semn constant pe fiecare dintre intervalele $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, 1)$, $I_3 = (1, 2)$, $I_4 = (2, \infty)$. Calculăm valorile:
$f(-1)=-6<0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}>0,\ f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{8}<0,\ f(3)=6>0.$ Rezultă că f este pozitivă pe $I_2\cup I_4,$ care este mulțimea de soluții a inecuației.

2. Să se rezolve inecuația $\arcsin\frac{1}{x}-\arccos\frac{1}{x}<\frac{\pi}{6}$.

Inecuația are sens pentru $x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$. Vom studia semnul funcției $f(x)=\arcsin\frac{1}{x}-\arccos\frac{1}{x}-\frac{\pi}{6}$. Ecuația $f(x)=0$ se scrie sub forma: $\arcsin\frac{1}{x}-\arccos\frac{1}{x}=\frac{\pi}{6}$. Aplicăm sinusul şi obținem consecințele:

$\frac{1}{x^2}-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$; $x^2=\frac{4}{3}$; $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Constatăm că

$f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{4\pi}{3}<0$ şi $f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=0$, deci ecuația $f(x)=0$ are o singură soluție $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Funcția f are semn constant pe fiecare dintre intervalele

$I_1=(-\infty,-1]$, $I_2=\left[1,\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $I_3=\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\ \infty\right)$. Avem: $-\frac{2}{\sqrt{3}}\in I_1$,

$f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{4\pi}{3}<0$; $1\in I_2$, $f(1)=\frac{\pi}{3}>0$; $\frac{2}{\sqrt{2}}\in I_3$, $f\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{\pi}{6}<0$.

În concluzie, f este negativă pe $I_1\cup I_3$, care este mulțimea de soluții a inecuației.

Scurt istoric

Bernhard Bolzano (1781-1848), matematician, filozof și teolog ceh, a contribuit la fondarea analizei matematice moderne; a studiat mulțimile de numere reale și funcțiile reale de variabilă reală.

Gaston Darboux (1842-1917), matematician francez, a contribuit la clarificarea ideii de continuitate, extinzând funcțiile continue la clasa funcțiilor „cu proprietatea valorii intermediare” (numită azi proprietatea lui Darboux). A realizat lucrări în domeniile geometriei diferențiale, teoriei integrării funcțiilor reale, teoriei suprafețelor algebrice, teoriei ecuațiilor cu derivate parțiale.

Exerciții propuse

Atunci când ***nu*** *se specifică altfel, funcțiile au domeniul de definiție maxim (mulțimea valorilor $x\in\mathbb{R}$ pentru care au sens operațiile indicate în expresia funcției) și codomeniul* $\mathbb{R}$.

1. Utilizând caracterizarea „cu ε şi δ“ a continuității, să se arate că funcțiile următoare sunt continue în punctele indicate.

a) $f(x)=3x-5$, $x=2$; b) $f(x)=x^3$, $x=-1$; c) $f(x)=\frac{2x}{x+1}$, $x=3$;

d) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x=-3$; e) $f(x)=\sqrt{x}-1$, $x=4$; f) $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$, $x=1$.

2. Să se reprezinte grafic și să se studieze continuitatea următoarelor funcții:

a) $f(x)=x-1+|x-1|$; b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|}, & \text{dacă } x\neq 0\\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{dacă} \quad x\le -1 \\ x^2-1, & \text{dacă} \quad x>-1 \end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{dacă} \quad x\le 1 \\ 2-x, & \text{dacă} \quad x>1 \end{cases}$;

e) $f(x)=x\cdot \operatorname{sgn}(\sin x), \quad x\in[-2\pi, \ 2\pi]$; f) $f(x)=(x+1)^{\operatorname{sgn}(x-1)}, \quad x\in[0, \ 2]$.

g) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$, $x\in[0, \infty)$; h) $f(x)=x^2-[x^2]$, $x\in[0, 2]$;

i) $f(x)=|x^2-1|$; j) $f(x)=\max\{\sin x, \cos x\}$, $x\in[-\pi, \pi]$;

k) $f(x)=\min\{1, x, x^2\}$; l) $f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{dacă } x<0 \\ \min\{x, \sqrt{x}\}, & \text{dacă } x\ge 0 \end{cases}$.

3. Pentru ce valori ale parametrului real a, funcțiile următoare sunt continue?

a) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le a \\ x^2-1, & x>a \end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}ax+2, & x<1 \\ \sqrt{a^2x^2+2ax+1}, & x\ge 1 \end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases} \left(1+2^{\frac{x-3}{x}}\right)^{-1}, & x<0 \\ 2x+a, & x\ge 0 \end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases} 2x+a, & x\le 0 \\ \left(1+2^{\frac{x-3}{x}}\right)^{-1}, & x>0 \end{cases}$;

e) $f(x)=\begin{cases} \left(3+3^{\frac{1}{x-1}}\right)^{-1}, & x\ne 1 \\ a, & x=1 \end{cases}$; f) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}, & x\ne 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$;

g*) $f(x)=\begin{cases} x\cdot\left[\dfrac{1}{x}\right], & x\ne 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$; h) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin a(x-1)}{x-1}, & 0\le x<1 \\ 3ax-1, & 1\le x\le 2 \end{cases}$.

4. Să se găsească valorile parametrului real a pentru care funcția următoare are un singur punct de continuitate: $f(x)=\begin{cases} ax, & \text{dacă} \quad x\in\mathbb{Q} \\ x^2-4x+3, & \text{dacă} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$.

5. Să se arate că funcțiile următoare au câte un punct de discontinuitate de speța întâi:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{dacă } x<1 \\ 3x-1, & \text{dacă } x\ge 1 \end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{dacă } x\ne 0 \\ 1, & \text{dacă } x=0 \end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{x}, & \text{dacă } x\ne 0 \\ 1, & \text{dacă } x=0 \end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{dacă } x<1 \\ 3, & \text{dacă } x=1 \\ 2x-1, & \text{dacă } x>1 \end{cases}$;

e) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2^x-1}{x}, & \text{dacă } x<0 \\ x^2+2, & \text{dacă } x\ge 0 \end{cases}$; f) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}, & \text{dacă } x\in[-1, 0) \\ 2x+2, & \text{dacă } x\in[0, 1] \end{cases}$.

6. Să se arate că funcțiile următoare au câte un punct de discontinuitate de speța a doua:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x, & x\leq 0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases}\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}e^x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

7. Să se găsească punctele de discontinuitate de speța a doua ale funcțiilor următoare:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Q}\\ x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2+x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

8. Să se studieze continuitatea funcțiilor următoare:

a) $f(x)=\sqrt{x^3-x^2}$; b) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\leq 1\\ |x-1|, & |x|>1\end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$;

d*) $f(x)=\begin{cases}e^x+x-1, & x\leq 1\\ x^{\frac{1}{x-1}}, & x>1\end{cases}$; e*) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{|x|}{x}\right)+\left(1+e^{1/x}\right)^{-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

9. Să se arate că ecuațiile următoare au cel puțin o soluție pe intervalele indicate:

a) $x^3+\sin x-3=0, x\in[1,2]$; b) $x\cdot 3^x-1=0, x\in[0,1]$; c) $e^x-\cos x-1=0, x\in[0,1]$;

d) $\cos x=x,\ x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$; e) $10^x+x^2-1=0, x\in\left[-1,\ -\dfrac{1}{2}\right]$.

10. Să se arate că ecuația $x^3-5x+3=0$ are cel puțin două soluții în $[0, 2]$.

11. Fie $a\in\mathbb{R}$. Să se arate că ecuația $x^3+x=a$ admite o soluție unică $x\in\mathbb{R}$.

12. Să se rezolve inecuațiile următoare:

a) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}>1$; b) $\sin x+\cos x\geq 1, x\in[0,2\pi]$; c) $\arcsin\dfrac{1}{x}-\arccos\dfrac{1}{x}\leq-\dfrac{\pi}{6},\ |x|\geq 1$.

13*. Fie $a, b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Fie o funcție continuă $f:[a,b]\to[a,b]$. Să se arate că există $c\in[a,b]$ astfel încât $f(c)=c$.

14*. Fie o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă şi mărginită. Să se arate că există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(c)=c$.

15*. Fie o funcție continuă $f:[0,1]\to[0,1]\cup[2,3]$ astfel încât $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$. Să se arate că f **nu** este nici surjectivă şi nici injectivă.

Capitolul 3 Derivabilitate

Noțiunea de derivată a unei funcții este o noțiune centrală a analizei matematice, fiind cea mai importantă aplicație a ideii de limită. În acest capitol vom prezenta această noțiune şi vom studia proprietăți ale funcțiilor derivabile.

§1. Probleme care conduc la noțiunea de derivată

1.1. Viteza medie și viteza instantanee a unui mobil aflat într-o mișcare rectilinie

Se consideră un mobil M care se mişcă rectiliniu şi a cărui lege de mişcare este dată de relația $s = f(t)$. Viteza medie a mobilului într-un interval de timp $[t_1, t_2]$ se obține calculând raportul:

$$v(t_1, t_2) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Dacă, în plus, mişcarea este şi uniformă, adică pentru oricare t_1, t_2, t_3, t_4, cu $t_1 \neq t_2$, $t_3 \neq t_4$, vom avea

$$\frac{f(t_4) - f(t_3)}{t_4 - t_3} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = v.$$

deci pentru orice interval $[t_1, t_2]$ viteza medie este constantă şi este normal să considerăm că la un moment oarecare t_0, viteza este $v(t_0) = v$.

Nu aceeaşi situație vom întâlni când mişcarea este neuniformă. Ne propunem să determinăm viteza mobilului la un moment fixat. Este natural să identificăm această viteză instantanee în momentul t_0 ca fiind valoarea limită a unui raport de forma

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

atunci când $h \to 0$, adică

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Exemplu În cazul căderii unui corp în vid, avem legea de mişcare: $s(t) = \frac{1}{2} g t^2$ unde $g \approx 9{,}81\,\text{m/s}^2$. Viteza instantanee într-un moment oarecare t_0, va fi:

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2} g (t_0 + h)^2 - \frac{1}{2} g t_0^2}{h} = g t_0.$$

Mai mult, se observă că putem pune în evidență o relație funcțională care să ne dea viteza la un moment oarecare t, şi anume: $t \mapsto v(t) = g \cdot t$.

Vom spune, din motive care se vor clarifica pe parcurs, că viteza este derivata spațiului.

1.2. Tangenta la o curbă

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ un interval nevid de numere reale, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală continuă şi $G_f = \{(x, f(x) \mid x \in D\}$, graficul său.

Dacă $M_0(x_0, f(x_0))$ şi $M_1(x_1, f(x_1))$ sunt puncte situate pe reprezentarea geometrică a lui G_f, într-un plan înzestrat cu un reper ortonormal xOy (fig. 1), ecuația dreptei M_0M_1 este:

$$M_0M_1: \qquad y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

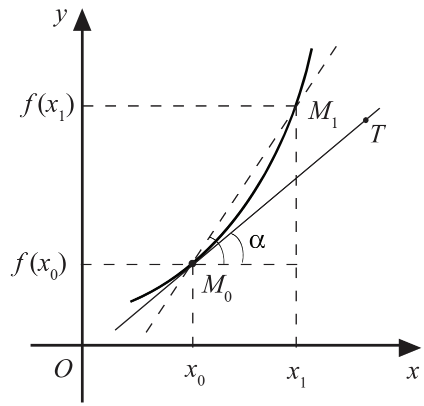


Fig. 1

Alegând M_1 cât mai aproape de M_0, secanta M_0M_1 se apropie, ca poziție, din ce în ce mai mult de o poziție limită M_0T, numită prin asemănare cu noțiunea de tangentă din geometria sintetică, tangentă la grafic. Constatăm că, teoretic, existența acestei poziții este condiționată de existența limitei:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

În condițiile în care această limită există şi este finită, vom spune că dreapta:

$$M_0T: \qquad y - f(x_0) = A(x - x_0)$$

unde $A = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, este tangenta la graficul lui f în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$.

Dacă limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există şi este $+\infty$ sau $-\infty$, vom spune, de asemenea, că G_f admite tangentă în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$; tangenta la grafic în acest punct este, prin definiție, dreapta $M_0T: \ x = x_0$ adică paralela la axa Oy dusă prin M_0.

§2. Derivata unei funcții într-un punct

Exemplele precedente conduc la studiul limitei raportului $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ în punctul x_0, unde $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcție reală de o variabilă reală şi $x_0 \in D$. Din considerente justificate la capitolul limite de funcții, suntem nevoiți să cerem ca x_0 să fie un punct de acumulare al lui D. Mai mult, în acest capitol, vom face convenția ca D să fie o submulțime a lui $\mathbb{R}$ cu proprietatea că **orice punct al său este punct de acumulare**. De exemplu, D poate fi interval sau reuniune de intervale.

Definiția 1

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ și $f : D \to \mathbb{R}$, iar $x_0 \in D$.
Funcția f se numește **derivabilă** în punctul x_0 dacă există și este finită

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Numărul real $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ îl vom nota cu $f'(x_0)$ și îl vom numi **derivata lui** f **în** x_0.

Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există și este egală cu $-\infty$ sau $+\infty$ vom spune că funcția f **nu este derivabilă** în x_0, dar are derivată în x_0 și vom nota tot cu $f'(x_0)$ această limită. În această situație, avem $f'(x_0) = -\infty$ sau $f'(x_0) = +\infty$.
Vom face distincție între expresiile: „f este derivabilă în x_0“, când avem $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, și „f are derivată în x_0“, situație în care $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Observații:

1. Pentru derivata lui f în punctul x_0 se mai folosesc şi notațiile $Df(x_0)$, $\partial f(x_0)$ sau $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

2. Dacă notăm $x - x_0 = h$ se constată că atunci când $x \to x_0$ avem $h \to 0$ şi vom obține

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

3. Ținând cont de definiția dată, vom spune că derivata în punctul x_0, reprezintă limita raportului dintre variația funcției $f(x) - f(x_0)$ și variația argumentului $x - x_0$ atunci când variația argumentului tinde către zero.

4. La fel ca şi proprietatea de continuitate sau cea de existență a limitei într-un punct, proprietatea de derivabilitate are un caracter local, adică pentru studiul derivabilității unei funcții într-un punct este suficient să cunoaştem funcția într-o vecinătate a punctului.

Scurt istoric

Noțiunea de derivată şi calculul derivatelor, au apărut în secolul al XVII-lea, derivata fiind considerată la început sub aspectul ei geometric şi cinematic. Cei care au formulat pentru prima dată în mod general aceste noțiuni au fost savantul englez Isaac Newton (1642-1727) şi savantul german Gottfried Leibniz (1646-1716). Prima publicație a lui Leibniz asupra acestei probleme a apărut în 1684, iar a lui Newton în 1687. Leibniz este cel care introduce notația $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pentru derivată.

Exemple 1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $x_0=2$. Avem:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4.$$

Deci $f'(2)=4$, prin urmare funcția este derivabilă cu derivata în 2 egală cu 4.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty.$$

Prin urmare funcția nu este derivabilă în 0, dar are derivată şi aceasta este $f'(0)=+\infty$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, iar $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x},$$

limită care nu există. În această situație vom spune că funcția nu are derivată în 0.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x, & \text{dacă } x\leq 0\\ x^2, & \text{dacă } x>0\end{cases}$, iar $x_0=0$. Ținând cont de definiția funcției, în calculul limitei $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, va trebui să analizăm cele două limite laterale.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{3x}{x}=3,\quad \text{iar}\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^2}{x}=0.$$

Cum cele două limite laterale sunt distincte, atunci concluzia va fi că nu există $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, prin urmare funcția nu are derivată în 0.

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$. Dorim să studiem derivabilitatea în 0.

Conform cu definiția, avem de calculat: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Evaluînd raportul $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, observăm că: $\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leq\left|\dfrac{x^2}{x}\right|=|x|$, de unde se obține: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.

Rezultă că funcția f este derivabilă în 0, cu $f'(0)=0$.

§3. Funcții derivabile

3.1. Funcția derivată

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval de numere reale şi $f: I \to \mathbb{R}$.

Definiția 1

Funcția $f: I \to \mathbb{R}$ se numeşte derivabilă pe intervalul I, dacă f este derivabilă în orice punct al lui I.

Observația 1. Dacă $f: D \to \mathbb{R}$, cu $D \subseteq \mathbb{R}$ şi $D \subseteq D'$, vom spune că f este derivabilă pe D dacă este derivabilă în orice punct x, cu $x \in D$.

Dacă $E \subseteq \mathbb{R}$ este o mulțime de numere reale şi $f: E \to \mathbb{R}$ o funcție, se numeşte **domeniu de derivabilitate** al lui f, mulțimea

$$D_{f'} = \{x \mid x \in E \cap E' \text{ şi } f \text{ derivabilă în } x\}.$$

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe I. Atunci, pentru orice $x \in I$, are sens $f'(x)$, adică putem construi o funcție definită pe I cu valori în $\mathbb{R}$, care să asocieze unui punct $x \in I$ numărul real $f'(x)$. Suntem în măsură să definim funcția $f': I \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Funcția astfel definită se numeşte **derivata lui** f, sau **funcția derivată a lui** f, iar operația prin care se obține funcția f' se numeşte **operație de derivare** a lui f. Deci pentru obținerea lui f' vom spune că am **derivat** funcția f.

Vom face distincție între *derivata funcției f în punctul x_0*, care este un număr real, notat $f'(x_0)$, şi *derivata funcției f*, care este o funcție $f': I \to \mathbb{R}$.

Remarcăm că derivata funcției f în punctul x_0 reprezintă valoarea funcției f' în x_0. Uneori vom mai scrie

$$f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0}$$

3.2. Derivatele unor funcții elementare

1. Funcția constantă. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $c \in \mathbb{R}$, fixat. Pentru $x \in \mathbb{R}$ fixat, avem

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Avem deci $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Vom nota

$$c' = 0.$$

2. Funcția identică. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x \in \mathbb{R}$ fixat, avem

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1.$$

Deci $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, vom nota: $x' = 1$.

3. Funcția putere cu exponent natural. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n$, unde $n\in\mathbb{N}^*$ fixat. Pentru $x\in\mathbb{R}$ fixat, avem

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{C_n^1x^{n-1}h+C_n^2x^{n-2}h^2+\ldots+C_n^{n-1}xh^{n-1}}{h}=nx^{n-1}.$$

Prin urmare derivata lui *f* este:

$f':\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f'(x)=nx^{n-1}$, avem deci:

$$(x^n)'=nx^{n-1},\ n\in\mathbb{N}^*$$

4. Funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x}$, este derivabilă pe domeniul de definiție şi avem

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{hx(x+h)}=-\frac{1}{x^2}.$$

Prin urmare derivata funcției este: $f':\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$. Vom mai scrie:

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

5. Funcția $\sin:\mathbb{R}\to[-1,\ 1]$, este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$\sin'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=\cos x.$$

Derivata funcției sin este funcția cos:

$$\sin'(x)=\cos x.$$

6. Funcția $\cos:\mathbb{R}\to[-1,\ 1]$, este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$\cos' x=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\frac{2x+h}{2}}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)=$$
$$=-\sin x.$$

Prin urmare, derivata funcției cos este funcția – sin. Avem:

$$\cos'(x)=-\sin x.$$

7. Funcția exponențială $f:\mathbb{R}\to(0,\ +\infty),\ f(x)=a^x,\ a\in(0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$. Pentru $x\in\mathbb{R}$ fixat, avem:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}a^x\frac{a^h-1}{h}=a^x\ln a.$$

Derivata funcției este $f':\mathbb{R}\to(0,+\infty),\ f'(x)=a^x\ln a$,

$$\boxed{\left(a^x\right)'=a^x\ln a}$$

8. Funcția logaritmică

Reamintim că $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ și deci limita se poate calcula:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\ln(x+h)}{\ln a}-\dfrac{\ln x}{\ln a}}{h}=\frac{1}{\ln a}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\frac{1}{\ln a}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}.$$

Derivata funcției este $f':(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$:

$$\boxed{\log_a' x=\frac{1}{x\ln a}.}$$

În particular, dacă $a=e$, avem

$$\boxed{\ln' x=\frac{1}{x}.}$$

9. Funcția radical de ordinul doi $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$, este derivabilă pe $(0,\infty)$.

Pentru $x>0$, avem:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Prin urmare, funcția derivată este: $f':(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; vom nota:

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

În $x=0$, f are derivata $f'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=+\infty$, deci funcția f **nu** este derivabilă în 0.

10. Funcția radical de ordinul trei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$, este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$.

Pentru $x\neq 0$, avem:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Prin urmare, funcția derivată este: $f':\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; vom nota:

$$\boxed{\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}.$$

3.3. Legătura dintre derivabilitate și continuitate

Teorema 1

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Dacă funcția f este derivabilă în x_0, atunci funcția f este continuă în x_0.

Demonstrație. Deoarece f este derivabilă, există şi este finită limita: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
Vom obține $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$, deci
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, prin urmare f este continuă în x_0.

Observații:

1. Din teorema 1 se obține că dacă f este derivabilă pe D, atunci f este continuă pe D.

2. Reciproca teoremei 1 nu este adevărată. Putem exemplifica acest lucru studiind funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ în $x_0 = 0$. Evident funcția f este continuă, în timp ce

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1$, iar $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{+x}{x} = +1$, deci f nu este derivabilă în $x_0 = 0$.

3. Condiția de continuitate a funcției în punctul x_0 este o condiție necesară pentru deriva-bilitatea în acel punct. În cazul unor aplicații, dacă f nu este continuă în x_0, atunci cu siguranță f nu este derivabilă în acel punct.

4. Să remarcăm că dacă funcția f are derivată în x_0 nu rezultă că f este continuă. De exemplu în cazul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, adică:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x > 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \\ -1, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}.$$

Avem: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)}{x} = +\infty$, de unde $f'(0) = +\infty$, deci are derivată în 0, dar f nu este continuă în 0.

Scurt istoric

Multă vreme s-a crezut că o funcție continuă pe un interval este derivabilă pe acesta, cu excepția, eventual, a unei submulțimi finite. Primul care a reuşit să construiască un exemplu de funcție continuă pe un interval fără nici un punct de derivabilitate a fost matematicianul german Karl Weierstrass (1815-1897).
Un alt exemplu celebru de o astfel de funcție îl constituie cel dat în aceeaşi perioadă de filozoful şi matematicianul ceh Bernhard Bolzano (1781-1848). Gradul de dificultate al acestor exemple nu permite prezentarea lor în acest manual.

3.4. Derivate laterale

Fie $x_0 \in D$ un punct de acumulare care este în același timp și punct interior.

Funcția $f : D \to \mathbb{R}$ se numește **derivabilă la stânga în** x_0 dacă există și este finită:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A.$$

Numărul real A îl vom nota $f_s'(x_0)$ și îl vom numi derivata la stânga în x_0.

Dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \{-\infty, +\infty\}$, atunci vom spune că funcția are **derivată la stânga** și vom nota tot cu $f_s'(x_0)$. În acest caz există posibilitatea să avem $f_s'(x_0) = -\infty$ sau $f_s'(x_0) = +\infty$. Asemănător, f se numește **derivabilă la dreapta** dacă există și este finită limita $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = B$. Numărul real B îl vom nota cu $f_d'(x_0)$ și îl vom numi **derivata la dreapta a lui** f **în** x_0. Dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \{-\infty, +\infty\}$, atunci vom spune că funcția are **derivată la dreapta** și vom nota tot cu $f_d'(x_0)$ această limită. Există deci posibilitatea să avem: $f_d'(x_0) = +\infty$ sau $f_d'(x_0) = -\infty$.

Ținând cont de caracterizarea existenței limitei într-un punct cu ajutorul limitelor laterale, vom obține următoarea teoremă:

Teorema 1

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$ un punct interior. Funcția f este derivabilă în x_0 dacă și numai dacă f este derivabilă la stânga și la dreapta în x_0 și $f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$. În plus, obținem: $f_s'(x_0) = f_d'(x_0) = f'(x_0) \in \mathbb{R}$.

Observație. Dacă $D = [a, b]$ și $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vom conveni să spunem că f este derivabilă (are derivată) în a, respectiv b, dacă f este derivabilă la dreapta (are derivată la dreapta) în a, respectiv este derivabilă la stânga (are derivată la stânga) în b.

Exemple

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x < 0 \\ x^5, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$.

$$f_s'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 0,$$

iar $$f_d'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^5}{x} = 0.$$

Cum $f_s'(0) = f_d'(0) = 0$ atunci f este derivabilă în 0 și $f'(0) = 0$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x<0\\ \sqrt[3]{x}, & \text{dacă } x\geq 0\end{cases}$.

$$f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\frac{1}{x}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x^2}=+\infty, \text{ iar}$$

$$f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty.$$

Se obține deci că $f_s'(0)=f_d'(0)=f'(0)=+\infty$, prin urmare f nu este derivabilă, dar are derivată în $x_0=0$.

Observație: Să remarcăm că derivata la stânga în x_0 poate fi calculată și prin:

$$f_s'(x_0)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

în timp ce derivata la dreapta se poate defini astfel:

$$f_d'(x_0)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Exerciții propuse

*Atunci când **nu** se specifică altfel, funcțiile au domeniul de definiție maxim (mulțimea valorilor $x\in\mathbb{R}$ pentru care au sens operațiile indicate în expresia lui f(x)) și codomeniul $\mathbb{R}$.*

1. Utilizând definiția, studiați derivabilitatea următoarelor funcții $f:D\to\mathbb{R}$ în punctele x_0 precizate:

a) $f(x)=2x+3$, $x_0=1$; b) $f(x)=-5x+3$, $x_0=0$; c) $f(x)=4$, $x_0=2$;
d) $f(x)=x^2$, $x_0=1$; e) $f(x)=3x^2+5x$, $x_0=2$; f) $f(x)=-3x^2-2$, $x_0=0$;
g) $f(x)=x^2+x+1$, $x_0=\dfrac{1}{2}$; h) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=-1$; i) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $x_0=1$;
j) $f(x)=x^3-2x^2$, $x_0=1$; k) $f(x)=\sqrt{x+2}$, $x_0=0$; o) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $x_0=2$;
p) $f(x)=2^x$, $x_0=0$; q) $f(x)=5^x+3$, $x_0=1$; r) $f(x)=e^x$, $x_0=0$;
s) $f(x)=\log_2 x$, $x_0=1$; t) $f(x)=\log_3(x^2+1)$, $x_0=0$; u) $f(x)=\ln(x^2+1)$, $x_0=2$;
v) $f(x)=x\sqrt{x}+3^x$, $x_0=1$; w) $f(x)=\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$; x) $f(x)=\cos x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;
y) $f(x)=\operatorname{tg} x$, $x_0=\dfrac{\pi}{6}$; z) $f(x)=\operatorname{ctg} x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

2. Utilizând definiția, verificați dacă următoarele funcții $f:D\to\mathbb{R}$ au derivată în punctele x_0 precizate.

a) $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x_0=0$; b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $x_0=0$; c) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Q}\\ x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, $x_0=0$;
d) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, $x_0=0$; e) $\sigma(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$, $x_0=0$; f) $f(x)=[x]$, $x_0=1$.

3. Demonstrați că dacă $f: D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0, $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0).$$

4. a) Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x=0 \end{cases}$ este continuă în 0, dar nu este derivabilă. Calculați $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}=0.$

b) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Arătați că $f'(0)=+\infty$ și calculați $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}$.

5. Să se determine parametrul real a, astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-a)\cdot|x|$, $\forall x\in\mathbb{R}$, să fie derivabilă în punctul $x_0=0$.

6. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-a,0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-|x-a|}{x^2+ax}$. Există valori ale lui a pentru care funcția este derivabilă în punctul a?

7. Utilizând definiția să se verifice dacă următoarele funcții sunt derivabile, sau dacă au derivată, în punctele indicate.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{dacă } x>0 \\ x^3-x^2+1, & \text{dacă } x\leq 0 \end{cases}$, în $x_0=0$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x^2), & \text{dacă } x\geq 0 \\ x^7+5x^4, & \text{dacă } x<0 \end{cases}$, în $x_0=0$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+x, & \text{dacă } x\leq 0 \\ 2x^2+x, & \text{dacă } x>0 \end{cases}$, în $x_0=0$;

d) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max(\cos x,\cos^2 x)$, în $x_0=\frac{\pi}{2}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max(1,x,x^2)$, în $x_0=0$ şi $x_0=1$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & \text{dacă } x\geq 0 \\ \ln|\sin x|, & \text{dacă } x<0 \end{cases}$, în $x_0=0$;

g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{x-1}}, & \text{dacă } x<1 \\ 0, & \text{dacă } x=1, \\ \ln(x^2-2x+2) & \text{dacă } x>1 \end{cases}$ în $x_0=1$;

h) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\pm\sqrt{2}\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2-2x-1}$, în $x_0=0$;

i) $f:[-8,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^5+8x^4}$, în $x_0=0$;

j) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x-3x}{x^2-x}, & \text{dacă } x\notin\{0,1\}\\ 2, & \text{dacă } x\in\{0,1\}\end{cases}$, în $x_0 = 0$ şi $x_0 = 1$;

k) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1+\sin^2 x-\cos x, & \text{dacă } x\le 0\\ \operatorname{tg} x-\sin x, & \text{dacă } x>0\end{cases}$, în $x_0 = 0$ şi $x_0 = 1$;

l) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}, & \text{dacă } x<0\\ \dfrac{x^2-3x+4}{x^2-x+1}, & \text{dacă } x\ge 0\end{cases}$, în $x_0 = 0$.

8. Să se calculeze derivata funcției *f* pe domeniul maxim de derivabilitate și să se precizeze acest domeniu în următoarele situații:

a) $f(x) = x^4$; b) $f(x) = 5$; c) $f(x) = x^3 + x$; d) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$; e) $f(x) = 2 + \cos x$;

f) $f(x) = 1 + \sin x$; g) $f(x) = 3^x$; h) $f(x) = 2^x + \cos x$; i) $f(x) = \ln x$;

j) $f(x) = \log_3 x$; k) $f(x) = x^2 + \log_2 x$; l) $f(x)=2^x+\dfrac{1}{x}$.

9. Să se determie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, & x\le 0\\ \ln(1+x), & x>0\end{cases}$,

să fie continuă și derivabilă și $f(-1) = f(1)$.

10. Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$ astfel ca funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & \text{dacă } x\ge 0\\ a\sin x+b\cos x, & \text{dacă } x<0\end{cases}$, să fie derivabilă în $x_0 = 0$.

11. Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$ astfel ca funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}\ln^3 x, & \text{dacă } x\in(0,e]\\ ax+b, & \text{dacă } x\in(e,+\infty)\end{cases}$, să fie derivabilă în $x_0 = e$.

12. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}ae^{2x}, & \text{dacă } x\le 0\\ \sin 2x+b\cos 3x, & \text{dacă } x>0\end{cases}$.

Să se determine *a* şi *b* pentru care funcția *f* este derivabilă în $x_0 = 0$.

13. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, & x\le \pi/2\\ \sin x, & x>\pi/2\end{cases}$,

să fie derivabilă în $x=\dfrac{\pi}{2}$.

14. Arătați că nu există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$, să fie derivabilă în punctul $x = 1$.

3.5. Interpretarea geometrică a derivatei

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă în x_0, unde $x_0 \in D$, şi $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$ graficul lui *f*. Pentru $M_0(x_0, f(x_0))$ şi $M(x, f(x))$, puncte situate pe reprezentarea geometrică a lui G_f, dreapta M_0M va avea ecuația

$$M_0M: \qquad y - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \qquad (1)$$

Cum $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$, se observă că M_0M admite o poziție limită:

$$M_0T: \qquad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (2)$$

adică G_f admite o tangentă, a cărui ecuație este dată de (2).

Reciproc, dacă G_f admite o tangentă în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$, neparalelă cu *Oy*, înseamnă că există poziția limită

$$M_0T: \qquad y - f(x_0) = A(x - x_0)$$

către care tinde, ca poziție, orice altă secantă de tip M_0M, unde $M(x, f(x))$ se apropie de M_0.

Cum ecuația secantei este dată de (1), ajungem la concluzia că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \in \mathbb{R},$$

adică *f* este derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) = A$.

În concluzie, *f* este derivabilă în x_0 dacă şi numai dacă graficul lui *f* admite în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ o tangentă neparalelă cu axa *Oy* (fig. 2). Mai mult, ecuația tangentei este dată de:

$$M_0T: \qquad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

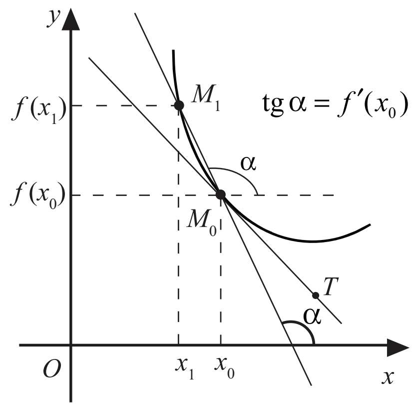


Fig. 2

Dacă funcția *f* nu este derivabilă, dar are derivate laterale, atunci vom obține următoarele situații:

1. Dacă $f'_s(x_0) = l \in \mathbb{R}$, atunci graficul funcției admite la stânga, în semiplanul determinat de $x \le x_0$ o semitangentă în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ cu panta *l* (figura 3, respectiv figura 4).

2. Dacă $f'_s(x_0) = -\infty$, atunci graficul funcției admite o semitangentă, în semiplanul determinat de dreapta verticală $x = x_0$, alura graficului fiind cea din figura 5.

3. Cazul $f'_s(x_0) = +\infty$, este prezentat în figura 6.

În figurile 7, 8, 9 şi 10, sunt prezentate situațiile analoge pentru $f'_d(x_0)$.

Dacă x_0 este un punct de continuitate al lui *f* şi $f'_s(x_0) = -\infty$, iar $f'_d(x_0) = +\infty$ sau $f'_s(x_0) = +\infty$ şi $f'_d(x_0) = -\infty$, atunci punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ situat pe reprezentarea geometrică a graficului funcției *f* se numeşte **punct de întoarcere** (fig. 11).

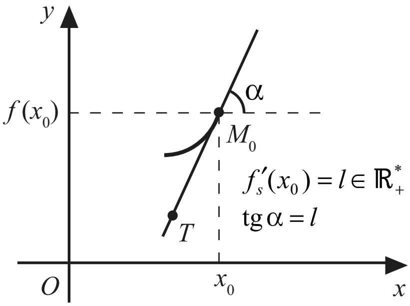


Fig. 3

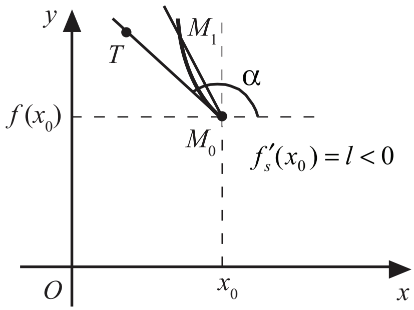


Fig. 4

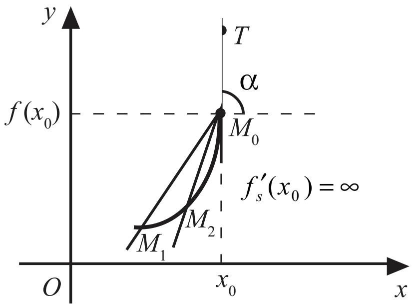


Fig. 5

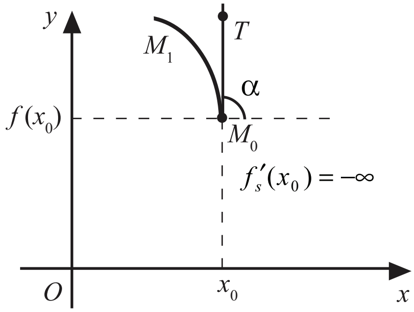


Fig. 6

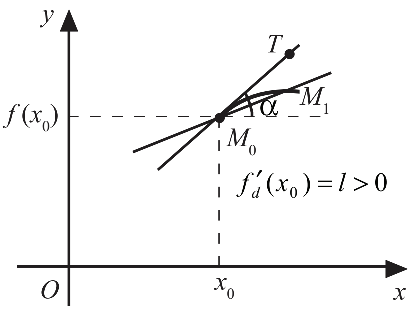


Fig. 7

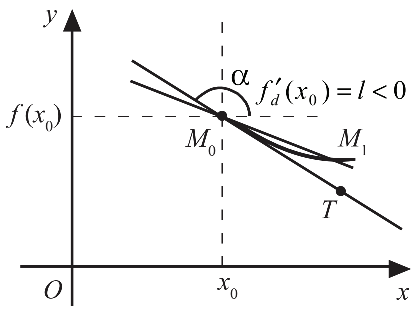


Fig. 8

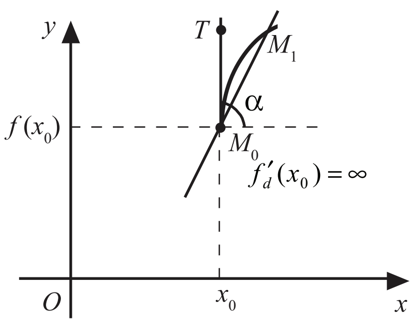


Fig. 9

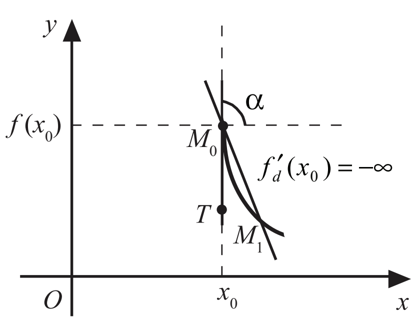


Fig. 10

Dacă x_0 este un punct de continuitate şi f admite derivate laterale în x_0, cel puțin una dintre ele finită, atunci punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ situat pe reprezentarea geometrică a graficului se numeşte **punct unghiular al graficului** (fig. 12).

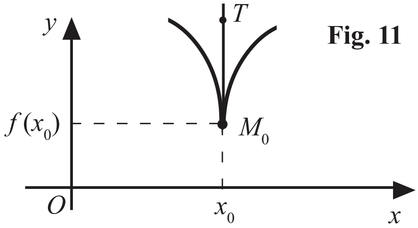


Fig. 11

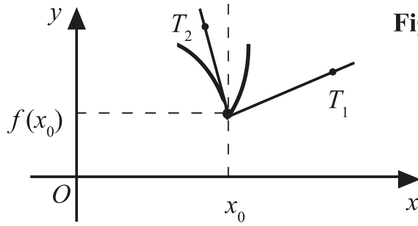


Fig. 12

Exemplu Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3+1$. Ne propunem să scriem ecuația tangentei la grafic în punctul $A(1, f(1))$. Calculăm $f(1)=3$, iar $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=$ $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+1-3}{x-1}=6$. Conform formulei obținute avem AT: $6x-y-3=0$.

Exerciții propuse

1. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f: D\to\mathbb{R}$ în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$:
a) $f(x)=x^2$, în $M_0(1, 1)$; b) $f(x)=\sin x$, în $M_0(\pi, 0)$; c) $f(x)=2^x$, în $M_0(1, 2)$;
d) $f(x)=\ln x$, în $M_0(e, 1)$; e) $f(x)=x^3-8x+1$, în $M_0(1, 1)$;
f) $f(x)=\cos x+1$, în $M_0(0, 2)$; g) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, în $M_0(1, 1)$; h) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, în $M_0\left(2, \dfrac{1}{8}\right)$.

2. Determinați tangentele la graficul funcției $f: D\to\mathbb{R}$ care au panta 1, în situațiile următoare:
a) $f(x)=x^3-3x+2$; b) $f(x)=x+2$; c) $f(x)=x^3$; d) $f(x)=x^3+2x^2-4x$;
e) $f(x)=\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x}$; f) $f(x)=\ln(1+x)$; g) $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\cos x$;
h) $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos^2 x+x$; i) $f(x)=5^x+1$; j) $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\alpha x-3$. Să se determine α astfel încât tangenta la graficul funcției în punctul $M(2, f(2))$, să fie paralelă cu dreapta d de ecuație $y=x$.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\alpha}{x^2+1}$. Să se determine α astfel încât tangenta la graficul funcției în punctul $M(1, f(1))$ să fie paralelă cu dreapta d de ecuație $y+x=0$.

5. Fie $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{a}{x}$, $a\in\mathbb{R}^*$.
a) Să se scrie ecuația tangentei la grafic într-un punct $M_0(x_0, f(x_0))$, notată *MT*.
b) Dacă tangenta *MT* intersectează axa *Ox* în *A* şi axa *Oy* în *B*; arătați că *M* este mijlocul segmentului *AB*.

6. Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2$, $g(x)=x^2+4x+c$, $c\in\mathbb{R}$. Să se determine c astfel încât graficele lui f şi g să aibă o tangentă comună într-un punct comun.

7. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+ax+b$, unde $a, b\in\mathbb{R}$. Să se determine a și b știind că tangenta la graficul funcției în punctul $M(0, 2)$ situat pe grafic este paralelă cu dreapta d de ecuație

8. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$, cu $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, și punctele $A(x_1, y_1)$ și $B(x_1, y_1)$ situate pe graficul funcției. Dacă $x_1+x_2=-\dfrac{2b}{a}$, arătați că:

a) $y_1=y_2$.

b) Dreptele tangente la graficul funcției în punctele A și B se intersectează într-un punct situat pe dreapta verticală de ecuație: $x=-\dfrac{b}{a}$.

9. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$ și punctele $A(0, 0)$ și $B(\pi, 0)$ situate pe graficul funcției. Să se arate că dreptele tangente la graficul funcției în punctele A și B sunt perpendiculare.

10. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x$, și $g:(-1, +\infty]\to\mathbb{R}$, $g(x)=1+\ln(1+x)$. Arătați că dreapta d de ecuație $x-y+1=0$ este tangentă comună celor două grafice corespunzătoare funcțiilor, în punctul $A(0, 1)$.

11. Să se calculeze derivatele laterale pentru funcțiile $f, f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în punctele precizate. Stabiliți dacă punctele respective sunt puncte unghiulare sau puncte de întoarcere.

a) $f(x)=|x^2-1|$, în $x_0=1$ şi $x_0=-1$;

b) $f(x)=|x(x+1)|$, în $x_0=0$;

c) $f(x)=|x^2-1|+2|x|+3$, în $x_0=1$ şi $x_0=-1$;

d) $f(x)=\dfrac{1}{2+|x|}$, în $x_0=0$;

e) $f(x)=\begin{cases} x(x+4), \text{ dacă } x\in[-2, 0] \\ \ln(1+x), \text{ dacă } x\in(0, 2]\end{cases}$, în $x_0=0$;

f) $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}, \text{ dacă } x\le 0 \\ x+1, \text{ dacă } x>0\end{cases}$, în $x_0=0$;

g) $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ dacă } x<0 \\ \dfrac{1}{2}, \text{ dacă } x=0 \\ x, \text{ dacă } x>0\end{cases}$, în $x_0=0$;

h) $f(x)=\sqrt{|x-2|}$, în $x_0=2$;

i) $f(x)=x\sqrt{|x-1|}$, în $x_0=0$ şi $x_0=1$;

j) $f(x)=\dfrac{|x|}{|1+x|+1}$, în $x_0=0$, $x_0=-1$;

k) $f(x)=|x^2-4x+3|$, în $x_0=1$ şi $x_0=3$;

l) $f(x)=(x-1)|x|$, în $x_0=0$;

m) $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$, în $x_0=1$.

§4. Operații cu funcții care admit derivată, calculul derivatei de ordinul I pentru funcțiile studiate

4.1. Reguli de derivare

În această secțiune, vom demonstra că fiind date două funcții derivabile $f, g: D\to\mathbb{R}$ cu ajutorul operațiilor algebrice studiate putem obține noi funcții derivabile şi vom prezenta regulile după care se obțin derivatele acestor funcții.

Teorema 1

Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$.

a) Dacă *f* şi *g* sunt derivabile în x_0, atunci funcţia $f + g$ este derivabilă în x_0 şi

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

b) Dacă *f* şi *g* sunt funcţii derivabile pe *D*, atunci funcţia $f + g$ este funcţie derivabilă pe *D* şi

$$(f+g)' = f' + g'.$$

Demonstraţie. *a*) Ştim că $f + g : D \to \mathbb{R}$ şi $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, de unde

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) = f'(x_0)+g'(x_0)$$

deci $f + g$ este derivabilă în x_0.

b) Pentru $x \in D$, arbitrar, avem $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, conform cu punctul *a*), deci într-adevăr, $f + g$ este funcţie derivabilă pe *D* şi $(f+g)' = f' + g'$. ■

Observaţii:

1. Prin inducţie putem demonstra că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ şi f_1, f_2, $f_3, \ldots, f_n : D \to \mathbb{R}$ funcţii derivabile, funcţia $f_1 + f_2 + \ldots + f_n : D \to \mathbb{R}$ este derivabilă şi

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x),\ \forall x \in D,$$

deci

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'.$$

2. Dacă $g : D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0, $x_0 \in D$, atunci şi funcţia $-g : D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 şi avem $(-g)'(x_0) = -g'(x_0)$. Se obţine deci că $f - g = = f + (-g)$ este o funcţie derivabilă în x_0 şi $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$ unde $f : D \to \mathbb{R}$ este, de asemenea, o funcţie derivabilă în x_0.

Exemplu Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \geq 1$, $g(x) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cum $f'(x) = nx^{n-1}$, iar $g'(x) = \cos x$, vom obţine că $(x^n + \sin x)' = nx^{n-1} + \cos x$.

Teorema 2

Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$.

a) Dacă *f* şi *g* sunt derivabile în x_0, atunci funcţia produs $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 şi

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

b) Dacă *f* şi *g* sunt funcţii derivabile pe *D*, atunci funcţia $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe *D* şi

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Demonstraţie. *a*) Avem de calculat:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x) + f(x_0)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} g(x) + f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

unde am ținut cont de derivabilitatea funcțiilor f și g și de continuitatea lui g în x_0.

b) Fie $x \in D$ un punct oarecare; cum f și g sunt funcții derivabile, vom obține ținând cont de punctul a), că: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. ■

Observații:

1. Prin inducție putem demonstra că pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ și $f_1, f_2, ..., f_n : D \to \mathbb{R}$ funcții derivabile, avem că funcția produs $f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n : D \to \mathbb{R}$ este derivabilă și

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n'.$$

Mai putem scrie

$$\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_k' \cdot ... \cdot f_n.$$

2. În particular, dacă $f_1 = f_2 = ... = f_n = f$, se obține

$$(f^n)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'.$$

3. Ținând cont că derivata unei funcții constante este zero, atunci pentru $c \in \mathbb{R}$ fixat și $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, avem

$$(cf)' = c \cdot f'.$$

Vom spune: „constanta iese în afara derivatei“.

Lemă

Fie $g : D \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$. Dacă g este derivabilă în x_0 și nu se anulează pe D, atunci funcția $\frac{1}{g} : D \to \mathbb{R}$, $\frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)}$ este derivabilă în x_0 și

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Demonstrație. Funcția este continuă în x_0. Calculăm limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{(x - x_0) g(x_0) \cdot g(x)} = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \quad ■$$

Teorema 3

Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$, $g(x) \neq 0$, $\forall x \in D$.

a) Dacă f, g sunt derivabile în x_0, atunci funcția $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ este derivabilă în x_0 și

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

b) Dacă f, g sunt derivabile pe D, atunci funcția $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ este o funcție derivabilă și

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Demonstrație. *a*) Vom ține cont de regula de derivare a funcției produs, şi avem:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)+f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=f'(x_0)\left(\frac{1}{g(x_0)}\right)+f(x_0)\frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}=$$

$$=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

b) Ținând cont de a) pentru $x\in D$ oarecare, obținem $\frac{f}{g}$ derivabilă şi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Reținem regulile de derivare:

$(f+g)'=f'+g'$	$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$
$(f-g)'=f'-g'$	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$
$(c\cdot f)'=c\cdot f'$, $c\in\mathbb{R}$	

4.2. Derivatele funcțiilor elementare

Derivata unei funcții polinomiale

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, unde $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{N}^*$, o fucție polinomială de grad *n*.

Am stabilit deja că: $(x^n)'=nx^{n-1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, și $(c)'=0$, dacă $c\in\mathbb{R}$.

Aplicând regula de derivare a funcției sumă și respectiv a funcției produs, obținem:

$$f':\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}.$$

Să remarcăm că dacă *f* este o funcție polinomială de grad *n*, atunci *f'* este o funcție polinomială de grad $n-1$.

Derivata unei funcții raționale

Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$, unde *g*, *h* sunt funcții polinomiale și $h(x)\neq 0,\ \forall x\in D$.
Ținând cont de regula de derivare a funcției cât, avem:

$$f'(x)=\frac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{h^2(x)}.$$

Exemplu Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+1}$. Funcția derivată va fi $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f'(x)=\frac{(2x+1)'(x^2+1)-(2x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{2\cdot(x^2+1)-(2x+1)(2x)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+2-4x^2-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2-2x-2x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Derivata funcției radical de ordin par

Fie $f:[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, n par.

Pentru $x > 0$ avem:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n}}}{h}=\lim_{h\to 0}x^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

unde s-a ținut cont de limita fundamentală $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r,\ \ r\in\mathbb{R}.$

Dacă $x = 0$, se observă că $f'_d(0) = +\infty$.

Funcția derivată va fi deci:

$$f':(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Derivata funcției radical de ordin impar

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\sqrt[n]{x},\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ n$ – impar.

Procedând ca la punctul 3, pentru $x \neq 0$, avem:

$f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, iar $f'_s(0)=f'_d(0)=+\infty$.

Prin urmare, funcția derivată este

$$f':\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ \ f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Derivata funcției putere $f(x)=x^r$, $r\in\mathbb{Q}$

Funcția f este derivabilă pe $(0, \infty)$ cu derivata $f'(x)=rx^{r-1},\ \ \forall x>0.$

Mai mult, aşa cum s-a constatat la punctele 3 şi 4, avem:

1. dacă $r>1$, funcția f este derivabilă în zero cu $f'(0)=0$;
2. dacă $r=1$, funcția f este derivabilă în zero şi $f'(0)=1$;
3. dacă $0<r<1$, funcția f nu este derivabilă în zero.

Derivatele funcțiilor trigonometrice

Funcția $\mathrm{tg}:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$. Vom ține cont de formula de derivare a funcției cât, precum şi de formulele obținute pentru funcțiile sin şi cos:

$$\mathrm{tg}'x=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\sin' x\cos x-\sin x\cos' x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Funcția tg este derivabilă pe domeniul ei de definiție, iar derivata sa este:

$$\text{tg}' : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}, \ \text{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

În aplicații este utilă identitatea:

$$\text{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x.$$

Funcția $\text{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe domeniul de definiție, iar derivata ei este:

$$\text{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

4.3. Derivarea funcțiilor compuse

În secțiunile precedente, am văzut că aplicând funcțiilor derivabile operațiile algebrice, obținem în continuare funcții derivabile. În acest paragraf, vom demonstra că operația de compunere păstrează proprietatea de derivabilitate şi că în anumite condiții inversa unei funcții derivabile este o funcție derivabilă.

Teorema 1

Fie I şi J două intervale din $\mathbb{R}$ şi $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, iar $x_0 \in I$.
Dacă funcția f este derivabilă în x_0 iar g este derivabilă în $f(x_0)$ atunci funcția $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 şi $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Demonstrație. Notăm cu $y_0 = f(x_0)$ şi construim funcția

$$\alpha : J \to \mathbb{R}, \ \alpha(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}, & \text{dacă} \quad y \neq y_0 \\ g'(y_0), & \text{dacă} \quad y = y_0 \end{cases}.$$

Cum g este derivabilă se obține continuitatea lui α şi, de asemenea, avem

$$g(y) - g(y_0) = \alpha(y)(y - y_0), \ \forall y \in J \qquad (1)$$

Acum pentru $x \in I$ avem $f(x) = y \in J$ şi deci relația (1) devine

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \alpha(f(x))(f(x) - f(x_0)), \ \forall x \in I.$$

Cum f este continuă în x_0, rezultă continuitatea lui $\alpha \circ f$ în x_0 şi obținem:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \alpha(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0) \cdot f'(x_0). \ \blacksquare$$

Consecință. Dacă $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile, atunci funcția $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă şi avem

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x), \forall x \in I.$$

Observație. În cadrul demonstrației există tentația de a transforma raportul

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

și apoi să trecem la limită, obținându-se rezultatul cerut în enunț. Un astfel de raționament nu ar fi corect, deoarece ipotezele nu asigură $f(x) \neq f(x_0)$, pentru $x \neq x_0$.

De exemplu, considerând funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x=0 \end{cases}$ și

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2^x$, raportul devine, pentru $x = 0$, $\dfrac{g(f(x))-g(f(0))}{f(x)-f(0)}=\dfrac{2^{x^2\cos\frac{1}{x}}-1}{x^2\cos\frac{1}{x}}$

și se observă că numitorul se anulează în orice vecinătate a lui zero.

Reținem deci

$$(g\circ f)'=g'(f)\cdot f',$$

avertizând că f nu este argumentul funcției g, ci o funcție de x iar $g'(f)=g'\circ f$.

Observație: Teorema se poate extinde în cazul unor compuneri succesive de funcții, de exemplu

$$(h\circ g\circ f)'=h'(g\circ f)\cdot g'(f)\cdot f'.$$

Reținem că derivata unei funcții compuse se obține înmulțind derivatele funcțiilor care se compun, în ordinea compunerii lor.

Exerciții propuse

*Atunci când **nu** se specifică altfel, funcțiile au domeniul de definiție maxim (mulțimea valorilor $x \in \mathbb{R}$ pentru care au sens operațiile indicate în expresia lui f(x)) și codomeniul $\mathbb{R}$.*

1. Să se calculeze derivatele următoarelor funcții f, $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=3x^2+5x+1$; *b*) $f(x)=x^{10}-2x^9+3$; *c*) $f(x)=\sin x+x^2$;

d) $f(x)=x\sqrt{x}+3x^2$; *e*) $f(x)=x^3+3x^2-\frac{1}{x}$; *f*) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{x^2}$;

g) $f(x)=2\cos x-4\sin^2 x$ *h*) $f(x)=x^{15}-2x+\ln(x+1)$.

i) $f(x)=(x-1)^3(x+2)^5$; *j*) $f(x)=x^2\sqrt{x+1}$; *k*) $f(x)=x^3\cos x$;

l) $f(x)=\cos x\cdot\ln x+x^5$; *m*) $f(x)=(x^2-1)\cdot(\cos x+\sin x)$;

n) $f(x)=(x^3+x)(e^x+2)$; *o*) $f(x)=(x^2-3x)(2^x+1)(1+\cos x)$;

p) $f(x)=e^x\sin x$; *q*) $f(x)=(x^2+x+1)^5$; *r*) $f(x)=\cos^{11}x\cdot\sin^{10}x$.

2. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții reale și $x_0\in\mathbb{R}$.

a) Dacă f nu este derivabilă în x_0 iar g este derivabilă în x_0, atunci $f+g$ poate fi derivabilă în x_0?

b) Dacă f și g nu sunt derivabile în x_0 atunci $f+g$ poate fi derivabilă în x_0?

3. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții reale și $x_0\in\mathbb{R}$.

a) Dacă f nu este derivabilă în x_0 iar g este derivabilă cu $g(x_0)\neq 0$, atunci $f\cdot g$ poate fi derivabilă în x_0?

b) Dacă f și g nu sunt derivabile în x_0 atunci $f\cdot g$ poate fi derivabilă în x_0?

c) Fie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ şi $f(0) = 0$, iar $g(x) = x$. Să se studieze derivabilitatea în $x = 0$ a funcţiilor $f, g, f + g, f \cdot g$.

4. Să se calculeze derivatele următoarelor funcţii $f: D \to \mathbb{R}$, cu D domeniul maxim de derivabilitate:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$; *b*) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$; *c*) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$;

d) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^4}$; *e*) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$; *f*) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-3}$;

g) $f(x) = \dfrac{(x-3)^4}{(x+2)^5}$; *h*) $f(x) = \dfrac{4-\cos x}{2-\sin x}$; *i*) $f(x) = \dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$;

j) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$; *k*) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x - \sin x + 1}{2\sin^2 x - 1}$;

l) $f(x) = \left(\dfrac{2}{\cos^4 x} + \dfrac{3}{\cos^3 x}\right) \cdot \sin x$; *m*) $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$;

n) $f(x) = \operatorname{ctg} x + \dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x$; *o*) $f(x) = \dfrac{2\cos^2 x - 4\cos x - 3}{4\cos^2 x - 1}$;

p) $f(x) = \left(x^3 + 2x + 1\right)^4$. *q*) $f(x) = (1+\cos x)^5$; *q*) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.

v) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$; *w*) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$; *x*) $f(x) = x(2-x^2)\sqrt{2+x}$;

5. Aflaţi derivatele următoarelor funcţii $f: D \to \mathbb{R}$, cu D domeniul maxim de derivabilitate:

a) $f(x) = 2\sin x\sqrt{x^2+1}$; *b*) $f(x) = \cos^2(\sqrt{x}+1)$; *c*) $f(x) = \operatorname{tg}(\cos x^2)$;

d) $f(x) = \operatorname{tg}^2(\cos x)$; *e*) $f(x) = \sin(\operatorname{ctg} x)$; *f*) $f(x) = \ln(4x-1)$;

g) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$; *h*) $f(x) = \ln(1 + \sin x)$; *i*) $f(x) = \ln(1 + 2^x)$;

j) $f(x) = \ln\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$; *k*) $f(x) = \ln(\ln x)$; *l*) $f(x) = \ln^3(1+\cos x)$;

m) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; *n*) $f(x) = \ln(x - \sqrt{1+x^2})$; *o*) $f(x) = \ln(\ln(1+x^2))$;

p) $f(x) = x \cdot \ln^3 x$; *q*) $f(x) = \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; *r*) $f(x) = \ln(1 + \sqrt[3]{1+x^3})$;

s) $f(x) = \ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; *ş*) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$. *t*) $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$;

ţ) $f(x) = e^{5x}(\sin 3x + 1)$; *u*) $f(x) = e^{1/x}$; *v*) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

w) $f(x) = e^{\sin x}$; *x*) $f(x) = e^{\frac{x}{1+x^2}}$; *y*) $f(x) = 2^{x^2+x+1}$.

6. Fie funcțiile $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile și funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_3(x) & f_4(x) \end{vmatrix}$.

Arătați că:

a) funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$;

b) $f'(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ f_3(x) & f_4(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_3'(x) & f_4'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2(x) \\ f_3'(x) & f_4(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2'(x) \\ f_3(x) & f_4'(x) \end{vmatrix}$.

7. Fie funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sunt derivabile, ar funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$. Arătați că: $f'(x) = \dfrac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \dfrac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \ldots + \dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)}$.

8. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(n+1)!} \cdot e^{x+x^2+\ldots+x^{n+1}}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Arătați că:

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n$.

4.4. *Derivarea inversei unei funcții

Teorema 1

Fie I și J două intervale din $\mathbb{R}$ și $f : I \to J$ o funcție continuă și bijectivă. Dacă funcția f este derivabilă în x_0, $x_0 \in I$ și $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția inversă $f^{-1} : J \to I$ este derivabilă în $f(x_0) = y_0$ și mai mult avem

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demonstrație. Deoarece f este continuă și bijectivă, în particular injectivă, obținem că f este strict monotonă, deci $f(x) \neq f(x_0)$, $\forall x \neq x_0$.

Vom obține că funcția inversă $f^{-1} : J \to I$ este și ea continuă și monotonă. Avem de demonstrat că există și este finită $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$.

Cum f este surjectivă, pentru orice $y \in J$ există $x \in I$ astfel încât $f(x) = y$, iar dacă $y \to y_0$ avem $x \to x_0$. Atunci

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

de unde se obține că f^{-1} este derivabilă în $y_0 = f(x_0)$ și

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \blacksquare$$

Consecință. Fie $f : I \to J$, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervale, o funcție derivabilă pe I și bijectivă. Dacă $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, atunci funcția inversă este derivabilă, iar pentru $y = f(x)$ avem

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

4.5. Derivatele unor funcții elementare inverse

Funcțiile trigonometrice inverse

1. Fie $f:(-1,1)\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=\arcsin x$.

Considerând funcția $\sin:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(-1,1)$ remarcăm că este bijectivă, cu inversa arcsin, derivabilă, şi $\sin' x=\cos x\neq 0$, $\forall x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, prin urmare putem aplica teorema de derivare a funcției inverse şi obținem

$$\arcsin' x=\frac{1}{\sin' y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

unde $x=\sin y$.

Obținem formula $\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x\in(-1,1)$.

Observație. Ştim că domeniul de definiție al lui arcsin este $[-1,1]$, dar deoarece $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$, $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$ şi $\sin'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, respectiv $\sin'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, în aceste puncte nu putem aplica teorema 1.

Se poate demonstra că în punctele -1 şi 1 funcția arcsin nu este derivabilă, dar are derivată şi anume

$$\arcsin'(-1)=\arcsin'(1)=+\infty.$$

2. Funcția $\arccos:(-1,1)\to(0,\pi)$ este inversa funcției $\cos:(0,\pi)\to(-1,1)$ care este derivabilă, bijectivă şi $\cos' x=\sin x\neq 0$, $\forall x\in(0,\pi)$.

Pentru $x=\cos y$ avem

$$\arccos' x=\frac{1}{\cos' y}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Prin urmare obținem $\arccos' x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x\in(-1,1)$.

Observație. Ca şi în cazul funcției arcsin ştim că arccos este definită pe $[-1,1]$ dar ea este derivabilă pe intervalul deschis $(-1,1)$. Se poate demonstra că arccos are derivată în -1 şi 1, şi anume $\arccos'(-1)=\arccos'(1)=-\infty$.

3. Funcția $\operatorname{arctg}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Funcția $\mathrm{tg}:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ este derivabilă, bijectivă, cu funcția inversă arctg, şi aşa cum am văzut $\mathrm{tg}' x = 1 + \mathrm{tg}^2 x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, deci sunt verificate ipotezele teoremei 1.

Pentru $x = \mathrm{tg}\, y \in \mathbb{R}$ avem

$$\mathrm{arctg}'(x) = \frac{1}{\mathrm{tg}' y} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

Prin urmare,

$$\mathrm{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2},\quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Funcția $\mathrm{arcctg}: \mathbb{R} \to (0, \pi)$

Funcția $\mathrm{ctg}: (0, \pi) \to \mathbb{R}$ este derivabilă, bijectivă şi

$$\mathrm{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\mathrm{ctg}^2 x) < 0,\ \forall x \in (0, \pi).$$

Cum $\mathrm{ctg}^{-1}(x) = \mathrm{arcctg}\, x$, putem aplica teorema pentru $x = \mathrm{ctg}\, y$ şi avem

$$\mathrm{arcctg}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ctg}' y} = \frac{1}{-(1+\mathrm{ctg}^2 y)} = -\frac{1}{1+x^2}$$

deci

$$\mathrm{arcctg}'(x) = \frac{-1}{1+x^2},\quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ținând cont şi de teorema de derivare a funcțiilor compuse vom obține şi următoarele formule (f este o funcție derivabilă)

$$(\arcsin(f))' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}},\quad (f: D \to (-1, 1))$$

$$(\arccos(f))' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}},\quad (f: D \to (-1, 1))$$

$$(\mathrm{arctg}(f))' = \frac{f'}{1+f^2},\quad (f: D \to \mathbb{R})$$

$$(\mathrm{arcctg}(f))' = -\frac{f'}{1+f^2},\quad (f: D \to \mathbb{R})$$

Exercițiu rezolvat

Fie funcția $f: [0, 1] \to [0, e], f(x) = xe^x$. Să se arate că funcția f este funcție bijectivă, f^{-1} este derivabilă și să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{\frac{e}{4}}\right)$.

Rezolvare. Funcția f este strict crescătoare, $0 \le x_1 < x_2$ conduce la $x_1 e^{x_1} < x_2 e^{x_2}$, deci funcția este injectivă. Din $f(0) = 0$, $f(1) = e$ și f continuă, cu proprietatea lui Darboux, obținem că f este și surjectivă. Cum $f'(x) = (x+1)e^x$, avem $f'(x) \neq 0, \forall x \in [0, 1]$. Prin urmare, f^{-1} este derivabilă. Deoarece $\sqrt{\frac{e}{4}} = f\left(\frac{1}{2}\right)$, vom avea:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{\frac{e}{4}}\right) = \left(f^{-1}\right)'\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+1\right)e^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3\sqrt{e}}.$$

Tabel cu derivatele funcțiilor elementare					
Nr. crt	Funcția	Derivata	Mulțimea de derivabilitate	Funcția compusă	Derivata
1.	c	0	$\mathbb{R}$		
2.	x	1	$\mathbb{R}$	u	u'
3.	$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	u^n	$nu^{n-1}\cdot u'$
4.	$x^\alpha,\ \alpha>1$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$[0,\infty)$	$u^\alpha\ (\alpha>1,\ u>0)$	$\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$
5.	$x^\alpha,\ \alpha<1$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(0,\infty)$	$u^\alpha\ (\alpha<1,\ u>0)$	$\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$
6.	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{u}\ (u\neq 0)$	$-\frac{1}{u^2}\cdot u'$
7.	$\frac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{u^n}\ (n\in\mathbb{N},\ u\neq 0)$	$-\frac{n}{u^{n+1}}\cdot u'$
8.	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\sqrt{u},\ u>0$	$\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
9.	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin u$	$\cos u\cdot u'$
10.	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos u$	$-\sin u\cdot u'$
11.	$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\,\middle\vert\, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathrm{tg}\, u,\ (\cos u\neq 0)$	$\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
12.	$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathrm{ctg}\, u\ (\sin u\neq 0)$	$-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
13.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,\ 1)$	$\arcsin u,\ u\in(-1,\ 1)$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,\ 1)$	$\arccos u,\ u\in(-1,\ 1)$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
15.	$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{arctg}\, u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
16.	$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{arcctg}\, u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$
17.	e^x	e^x	$\mathbb{R}$	e^u	$e^u\cdot u'$
18.	$a^\alpha,\ a\in(0,\ \infty)\setminus\{1\}$	$a^x\ln a$	$\mathbb{R}$	a^u	$a^u\ln a\cdot u'$
19.	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0,\ \infty)$	$\ln u$	$\frac{1}{u}\cdot u'$
20.	$\log_a x,\ a\in(0,\ \infty)\setminus\{1\}$	$\frac{1}{x\ln a}$	$(0,\ \infty)$	$\log_a u,\ u>0,\ a\in(0,\ \infty)\setminus\{1\}$	$\frac{u'}{u\ln a}$

§5. Calculul derivatei de ordinul al II-lea pentru funcțiile studiate

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe I. În această situație, am văzut că există o funcție $f' : I \to \mathbb{R}$ numită derivata lui f.

Definiția 1

Funcția derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$ se numește de **două ori derivabilă** în x_0, $x_0 \in I$, dacă funcția derivată $f' : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0.
Derivata lui f' în x_0 se numește **derivata de ordinul doi a lui f în x_0** și se notează $f''(x_0)$. Avem deci: $f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$.

Exemplu Fie funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Știm că f este derivabilă pe $(0, +\infty)$, cu funcția derivată $f' : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Observăm că funcția derivată este, de asemenea, derivabilă. Vom avea, de exemplu, pentru $x_0 = 2$:

$$f''(2) = (f')'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}}{x - 2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Definiția 2

Funcția f se numește **derivabilă de două ori pe mulțimea I** dacă funcția f' este derivabilă pe mulțimea I.

Funcția derivată a funcției f' pe mulțimea I se numește **derivata de ordinul doi a lui f pe mulțimea I** și o vom nota f''.

Exemplu Reluând exemplul precedent, avem:

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $f' : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$;

$f'' : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$.

Observații:

Din exemplul anterior, se remarcă faptul că f'' este, la rândul său, o funcție derivabilă și că am putea calcula $(f'')'$. Se poate defini, prin recurență, noțiunea de derivată de ordinul n, înțelegând prin derivata de ordinul n, $n \in \mathbb{N}^*$, funcția derivată a funcției derivată de ordinul $(n - 1)$.

Pentru aceste derivate de ordin superior se folosesc notațiile: $f^{(n)}$ = derivata de ordinul n și vom avea $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Uneori pentru uniformizarea notațiilor se folosesc următoarele notații: $f' = f^{(1)}$, $f'' = f^{(2)}$, $f''' = f^{(3)}$, și chiar $f = f^{(0)}$, adică funcția însăși este derivata de ordin zero.

Exemple

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty), f(x) = a^x$, unde $a \in (0, +\infty)$. Funcția derivată este $f' : \mathbb{R} \to (0, +\infty), f'(x) = a^x\ln a$, adică o funcție derivabilă. Prin urmare, există $f'' : \mathbb{R} \to (0, +\infty), f''(x) = (a^x\ln a)' = a^x(\ln a)^2$. Este ușor de constatat că există pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, și, mai mult: $f^{(n)}(x) = a^x(\ln a)^n$.

2. Fie $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin x$. Știm că funcți f este derivabilă pe $(-1, 1)$, cu derivata $f' : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, care este la rândul său o funcție derivabilă, cu derivata $f'' = (f')' : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2), f(x) = \operatorname{arctg} x$. Cum f este derivabilă, avem derivata $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, care este, de asmenea, o funcție derivabilă. Prin urmare, derivata de ordnul al II-lea este $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

Observăm că avem identitatea: $(1 + x^2)f'(x) = 1$, de unde, prin derivare, rezultă că: $2xf'(x) + (1 + x^2)f''(x) = 0$.

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Ne propunem să determinăm numerele a, b, c pentru care funcția f verifică relația:
$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 6x^2$. Cum $f'(x) = 2ax + b$, iar $f''(x) = 2a$, avem:
$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 6ax^2 + (6b - 10a)x + 6c - 5b + 2a = 6x^2$. Rezultă că: $6a = 6$, $6b - 10a = 0$ și $6c - 5b + 2a = 0$. Obținem soluția: $a = 1$, $b = \frac{5}{3}$ și $c = \frac{19}{18}$. Funcția căutată este: $f(x) = x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{19}{18}$.

5*. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = \sin x$. Ne propunem să determinăm $\sin^{(n)}(x)$ pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Vom avea: $(\sin)'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$(\sin)''(x) = \cos'(x) = -\sin x = \sin(x + \pi),\ (\sin)'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Observând că putem presupune $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, și aplicând metoda inducției matematice, avem:

$$\sin^{(n+1)}(x) = \left(\sin^{(n)}\right)'(x) = \sin'\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) =$$

$$= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$

Conform principiului inducției matematice, putem trage concluzia că:

$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, oricare $x \in \mathbb{R}$ și oricare $n \in \mathbb{N}$.

* Exercițiu facultativ.

6*. Fie $f:(-1,+\infty)\to \mathbb{R}, f(x)=\ln(1+x)$. Ne propunem să stabilim o formulă pentru $f^{(n)}(x)$. Derivând succesiv, avem:

$f'(x)=(1+x)^{-1},\ f''(x)=(-1)(1+x)^{-2},\ f'''(x)=(-1)(-2)(1+x)^{-3},$

de unde putem presupune că:

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n},\ \forall x\in(-1,\infty).$

Derivata de ordin $(n+1)$ va fi:

$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}\right)'(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!(-n)(1+x)^{-n-1}=(-1)^{n}n!(1+x)^{-n-1},$

de unde rezultă:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^{n}},\ \forall x\in(-1,\infty),\ \forall n\in\mathbb{N}^{*}.$$

Scurt istoric

Derivatele de ordin superior au apărut în acelaşi timp cu întreg aparatul calculului diferenţial şi au fost aplicate sistematic de I. Newton şi G. Leibniz spre sfârşitul secolului al XVII-lea la probleme de geometrie, mecanică şi fizică. În ceea ce priveşte aplicaţiile la probleme de mecanică, interpretarea acceleraţiei unei mişcări, ca derivata a doua a spaţiului parcurs, în raport cu timpul, este esenţială. Legea fundamentală a mecanicii (a doua lege a lui Newton) pune în legătură forţa care acţionează asupra unui corp cu acceleraţia şi masa corpului. Pentru înţelegerea rolului derivatelor de ordin superior este sugestiv următorul pasaj din lucrarea „Introducere în folozofia naturală“ (1867) a filozofilor englezi W. Thomson, P. G. Tait:

„Dacă prima derivată ne permite să decidem la un moment dat caracterul unei mişcări, derivata a doua ne ajută să pătrundem cauzele ei ascunse“.

Exerciţii propuse

1. Verificați dacă următoarele funcții sunt bijective și, în caz afirmativ, determinați $f'(x_0)$, respectiv $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))$ pentru x_0 precizat.

a) $f:[-1,1]\to[0,2], f(x)=x+1,\ x_0=\frac{1}{2}$; b) $f:[1,3]\to[1,9], f(x)=x^2, x_0=2$;

c) $f:[0,2]\to[1,4], f(x)=2^x, x_0=1$; d) $f:[0,e-1]\to[0,1], f(x)=\ln(1+x), x_0=1$.

2. Verificați dacă următoarele funcții sunt bijective, derivabile cu $f'(x)\neq 0$, și determinați $\left(f^{-1}\right)'(y)$:

a) $f:(-1,1)\to(-1,3), f(x)=x^3-x+1, y=1$; b) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x+1}{x^2-1}, y=-1$;

* Exercițiu facultativ.

c) $f:[-1,\ 1]\to\left[\frac{1}{4},\ \frac{5}{4}\right]$, $f(x)=\sin\frac{\pi x}{6}+\cos^2\frac{\pi x}{6}$;

d) $f:(-1,\ 1]\to\left(0,\ 2\sqrt{2}\right]$, $f(x)=\sqrt{5+4x-x^2}$.

3. Fie $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ o funcție definită prin $f(x)=x+\ln x$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

a) Să se arate că *f* este bijectivă.

b) Să se arate că f^{-1} este derivabilă în orice punct $x\in\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(1)$ şi $\left(f^{-1}\right)'(e+1)$.

4. Fie $f:(0,\ \infty)\to(1,\ \infty)$ funcția dată prin $f(x)=x^4+x^2+x+1$ oricare ar fi $x\in(0,\ \infty)$.

a) Să se arate că *f* este bijectivă.

b) Să se arate că funcția inversă f^{-1} este derivabilă pe $(1,\ \infty)$.

c) Să se calculeze $(f^{-1})'(4)$.

5. Fie funcția f: $(1,+\infty)\to(0,+\infty)$ o funcție definită prin $f(x)=x\ln x$.

a) Să se arate că funcția *f* este bijectivă.

b) Să se arate că f^{-1} este o funcție derivabilă pe $(0,+\infty)$.

c) Calculați $(f^{-1})'(3e^3)$.

6. Fie funcția f: $(e,+\infty)\to(e^2,+\infty)$ o funcție definită prin $f(x)=x^2+\ln(\ln x)$.

a) Arătați că funcția *f* este bijectivă și derivabilă.

b) Calculați $f'(x)$.

c) Arătați că f^{-1} este o funcție derivabilă pe $(e,+\infty)$.

d) Calculați $(f^{-1})'(e^3+\ln 2)$.

7. Fie $u,v:I\to\mathbb{R}$ două funcții derivabile pe intervalul $I\subseteq\mathbb{R}$ şi $u(x)>0$, $\forall x\in I$. Să se arate că funcția $h:I\to\mathbb{R}$, $h(x)=(u(x))^{v(x)}$ este derivabilă pe *I* şi avem:

$$(u^v)'(x)=(u(x))^{v(x)}\cdot\left[v'(x)\ln(u(x))+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

8. Să se calculeze f' în următoarele situații:

a) $f(x)=x^x$; b) $f(x)=(\sin x)^x$; c) $f(x)=(x^2+2x)^{\sqrt{x}}$; d) $f(x)=x^{\sin x}$; e) $f(x)=x^{2^x}$.

9. Să se calculeze derivatele următoarelor funcții $f: D\to\mathbb{R}$, cu *D* domeniul maxim de derivabilitate:

a) $f(x)=\arcsin x^2$; b) $f(x)=\arcsin\frac{x}{x+1}$; c) $f(x)=\arcsin\sqrt{x^2-1}$; d) $f(x)=\arccos e^x$;

e) $f(x)=\arccos(\ln x+1)$; f) $f(x)=\arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$; g) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

h) $f(x)=\operatorname{arctg}(1+x^2)$; i) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x+2\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}$.

10. Să se calculeze f' și f'' pentru funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$, cu D domeniul maxim de derivabilitate:

a) $f(x) = x^2 - x + 1$; b) $f(x) = \sin x$; c) $f(x) = \cos x$; d) $f(x) = e^x$; e) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$;

f) $f(x) = \ln x$; g) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; j) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{4x(1-x^2)}{1-6x^2+x^4} - \arcsin\dfrac{4x(1-x^2)}{(1-x^2)^2}$.

11. Să se arate că:

a) $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ verifică $4xf''(x) + 2f'(x) - f(x) = 0$;

b) $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(\ln x) + \sin(\ln x)$ verifică $x^2 f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$;

c) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}\cos x$ atunci: $f^{(4)}(x) + 4f(x) = 0$;

d) $f:(1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ atunci:
$(x^2-1)f''(x) + xf'(x) - n^2 f(x) = 0$;

e) $f:(0,\pi/2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$ atunci: $f''(x) + f(x) = 3\left(f(x)\right)^5$.

12. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$, să verifice relația:
$(1 + x^2)^2 f''(x) + 2x(1 + x^2)f'(x) + f(x) = a - 3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

13. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}$, să verifice relația: $(x^2 + 4x + 5)^2 f''(x) + a(x + 2)(x^2 + 4x + 5)f'(x) + f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

14. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\sin x + b\cos x$, să verifice relația: $f''(x) + 3f'(x) + f(x) = \cos x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

15. Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (ax^2 + bx + b)e^x$, să verifice relația: $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = (x^2 + 1)e^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

16. Să se determine a şi b astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (ax + b)e^{2x}$, să verifice relația: $f''(x) + 2f'(x) - 9f(x) = 9xe^{2x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. .

17.** Să se calculeze derivata de ordinul n a funcțiilor $f: D \to \mathbb{R}$, cu D domeniul maxim de derivabilitate:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$; b) $f(x) = x^n$; c) $f(x) = \cos x$; d) $f(x) = e^{ax}$; e) $f(x) = \sin(ax + b)$;

f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; g) $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$; h) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-a^2}$; i) $f(x) = \ln\dfrac{x}{x+1}$; j) $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$.

18.** Fie $f, g:(a,b) \to \mathbb{R}$ două funcții de n–ori derivabile pe intervalul (a, b). Să se arate, prin inducție, că $\forall x \in (a,b)$ avem:

$$\left(f \cdot g\right)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)\ ) \text{ (regula lui Leibniz).}$$

19.** Să se determine funcția derivată de ordinul n a funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$, cu D domeniul maxim de derivabilitate:

a) $f(x) = x^5 \cdot e^x$; b) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$; c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$; d) $f(x) = \arcsin x$.

20. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale distincte două câte două, $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$P(x) = (x-a_1)(x-a_2) \cdot \ldots \cdot (x-a_n)$ şi $f : E \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \dfrac{1}{x-a_1} + \dfrac{1}{x-a_2} + \ldots + \dfrac{1}{x-a_n}$, unde $E = \mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

a) Să se arate că funcția f este indefinit derivabilă pe E și că $f'(x) < 0$, $\forall x \in E$.

b) Să se arate că $f(x) = \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ și că $P(x) \cdot P''(x) < \left(P'(x)\right)^2$ pentru orice $x \in E$.

§6. Funcții derivabile pe un interval, puncte de extrem ale unei funcții, teorema lui Fermat, teorema lui Rolle, teorema lui Lagrange și interpretarea lor geometrică, derivata unei funcții într-un punct

6.1. Puncte de extrem ale unei funcții

Definiție

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție reală.

Un punct $a \in I$ se numeşte **punct de maxim local** (maxim relativ) al funcției f, dacă există o vecinătate V a lui a astfel încât $f(x) \le f(a)$, $\forall x \in V \cap I$.

Un punct $a \in I$ se numeşte **punct de minim local** (minim relativ) al funcției f, dacă există o vecinătate V a lui a astfel încât $f(x) \ge f(a)$, $\forall x \in V \cap I$.

Punctele de maxim sau de minim local ale funcției f se numesc **puncte de extrem local,** (sau extrem relativ) ale funcției f.

Definițiile rămân valabile şi atunci când $I \subset \mathbb{R}$ **nu** este interval.

Dacă $a \in I$ este un punct de maxim local, atunci numărul $f(a)$ se numește maxim local al lui f, iar punctul de pe graficul său $A(a, f(a))$ se numește punct de maxim local al graficului.

Analog, dacă $a \in I$ este un punct de minim relativ, atunci valoarea $f(a)$ se numeşte minim local al funcției f, iar punctul de pe grafic corespunzător îl vom numi punct de minim local al graficului. Valorile funcției în punctele de extrem, maxime sau minime se numesc extremele funcției.

Observații:

1. Dacă $a \in I$ este un punct de maxim cu proprietatea că $f(x) \le f(a)$, $\forall x \in I$, atunci a se numeşte punct de maxim global, iar $f(a)$ este valoarea de maxim a lui f pe I şi notăm: $f(a) = \max\limits_{x \in I} f(x)$. Analog, dacă $f(x) \ge f(a)$, $\forall x \in I$ atunci a se numeşte punct de minim global, iar $f(a)$ este valoarea de minim a lui f pe I şi notăm $f(a) = \min\limits_{x \in I} f(x)$. Punctele de extrem global sunt puncte de extrem local.

2. O funcție poate avea mai multe puncte de maxim local, respectiv de minim local. Să remarcăm şi faptul că valoarea de minim într-un punct de minim relativ poate fi mai mare decât valoarea de maxim într-un punct de maxim relativ (fig. 13).

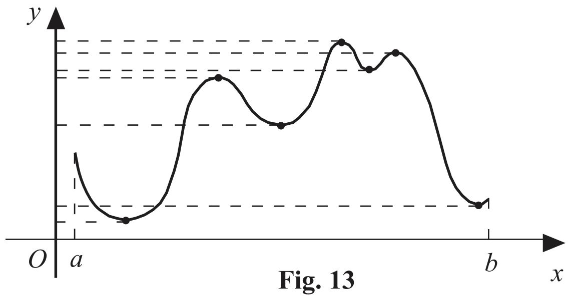


Fig. 13

6.2. Teorema lui Fermat

Teorema lui Fermat

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $f: I \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in I$ este un punct de extrem local al lui f, interior lui I. Dacă f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.

Demonstrație. Să presupunem că x_0 este un punct de maxim local; cum x_0 este şi punct interior, atunci există $\varepsilon > 0$ pentru care $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$ şi $f(x) \le f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Pentru $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$, vom obține: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$, de unde, prin trecere la limită, avem $f_s'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$. Pe de altă parte, pentru $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ avem $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$, şi, prin trecerea la limită, obținem $f_d'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$. Cum prin ipoteză funcția f este derivabilă, avem $f'(x_0) = f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$ ceea ce conduce la $f'(x_0) = 0$.

Cazul x_0 punct de minim local se tratează analog.

Comentarii

1. Ținând cont de ecuația tangentei la graficul unei funcții derivabile într-un punct $(x_0, f(x_0))$ şi anume $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, deducem că într-un punct interior, de extrem local, tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox.

2. Teorema lui Fermat dă o condiție necesară nu și suficientă pentru existența punctelor de extrem ale unei funcții derivabile. Mai precis, este posibil ca derivata funcției să se anuleze într-un punct interior, fără ca valoarea funcției în x_0 să fie o valoare de extrem local. De exemplu: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$; avem $f'(0) = 0$, dar nu există $\varepsilon > 0$ astfel încât $f(x) - f(0) = x^3$ să aibă semn constant pe $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Scurt istoric

Pierre de FERMAT (1601-1665), matematician francez. Precursor al calculului probabilităților împreună cu B. Pascal. A avut contribuții în domeniul geometriei analitice şi diferențiale. În teoria numerelor i se datorează o teoremă de bază, care îi poartă numele, şi vestita problemă a imposibilității rezolvării în numere întregi a ecuației $x^n + y^n = z^n$, $n \ge 3$.

3. Dacă x_0 punctul de extrem local nu este punct interior atunci este posibil ca $f'(x_0) \neq 0$. De exemplu, $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Avem $f(0) \leq f(x)$, $x \in [0,1]$, dar $f'(x) = 1$, $\forall x \in (0, 1)$.

6.3. Teorema lui Rolle

Definiție

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe *I*. Un punct $x_0 \in I$ se numeşte **punct critic** sau **staționar** al lui *f* dacă $f'(x_0) = 0$.

În acest context, putem afirma că mulțimea punctelor de extrem local interioare intervalului *I* este inclusă în mulțimea punctelor staționare (sau critice).

Teorema lui Rolle

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietățile:
1. *f* este continuă pe $[a,b]$; 2. *f* este derivabilă pe (a,b); 3. $f(a) = f(b)$.
Atunci există un punct $c \in (a,b)$ pentru care $f'(c) = 0$.

Demonstrație. Dacă *f* este o funcție constantă pe $[a, b]$, atunci $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$, prin urmare concluzia este adevărată. Dacă *f* nu este o funcție constantă pe $[a,b]$, atunci, cum *f* este continuă pe $[a, b]$, rezultă că *f* este o funcție mărginită şi îşi atinge marginile. Prin urmare există $u, v \in [a,b]$ pentru care $f(u) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ iar $f(v) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Cum f nu este constantă, avem $f(u) < f(v)$, iar din $f(a) = f(b)$ obținem că cel puțin unul dintre punctele *u* sau *v* este interior. De exemplu, dacă $u \in (a,b)$ atunci, ținând cont de teorema lui Fermat, avem $f'(u) = 0$. Analog, dacă $v \in (a, b)$, avem $f'(v) = 0$. Prin urmare există $c \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

♦ Interpretarea geometrică a teoremei lui Rolle

Deoarece $f'(c) = 0$ semnifică faptul că tangenta la graficul funcției în $(c, f(c))$ este paralelă cu axa *Ox* (fig. 14), putem spune: dacă o funcție $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b) are valori egale la capetele intervalului, atunci există cel puțin un punct $(c, f(c))$ de pe graficul lui *f*, $a < c < b$, în care tangenta la graficul lui *f* este paralelă cu *Ox*.

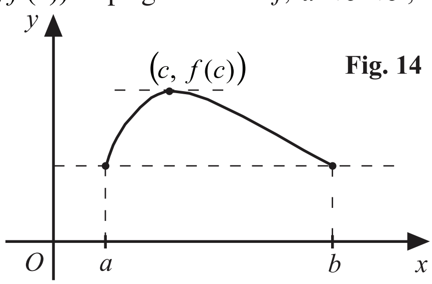


Fig. 14

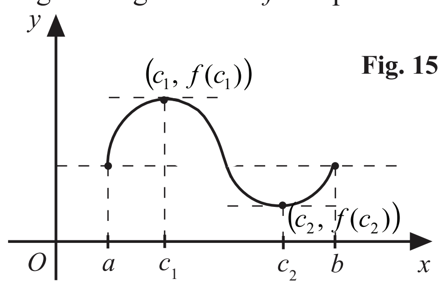


Fig. 15

Observații:

1. Dacă în particular $f(a) = f(b) = 0$, atunci putem spune că între două soluții ale ecuației $f(x) = 0$ există cel puțin o soluție a ecuației $f'(x) = 0$.

2. Punctul c din enunțul teoremei lui Rolle nu este „în general“ unic (vezi fig. 15).

3. Fiecare dintre condițiile teoremei sunt esențiale.

De exemplu:

a) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$. Observăm că f este continuă pe $[0,1]$, derivabilă pe $(0,1)$, iar $f(0)\neq f(1)$. Avem $f'(x)=1$, $\forall x\in[0,1]$.

b) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x, \text{ dacă } x\in(0,1] \\ 1, \text{ dacă } \ x=0\end{cases}$. Cum $f(0)=f(1)=1$, dar $f'(x)=1$, $\forall x\in[0,1]$. Se observă că f nu este continuă în $x=0$.

c) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$. Avem f continuă şi $f(-1)=f(1)$, dar $f'(x)=-1$ dacă $x\in(-1,0)$ şi, respectiv $f'(x)=1$, $\forall x\in(0,1)$. Evident f nu este derivabilă în $x=0$.

4 Condițiile din ipoteza teoremei lui Rolle sunt numai condiții suficiente nu şi necesare pentru ca derivata să se anuleze într-un punct.

5. O funcție $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $a<b$, cu proprietățile: f este continuă pe $[a, b]$ şi f este derivabilă pe (a, b) se numeşte funcție Rolle pe $[a, b]$.

♦ Utilizarea teoremei lui Rolle în aplicații

Fie $a, b\in\mathbb{R}$, $a<b$ și $0\notin[a,b]$, și fie funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție Rolle. În aceste condiții, există un punct $c\in[a,b]$ pentru care are loc relația:

$$f(c)-cf'(c)=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

Vom considera o funcție auxiliară care să verifice ipotezele teoremei lui Rolle. Fie $F:[a,b]\to\mathbb{R}, F(x)=\frac{1}{x}\cdot\left[(a-b)f(x)-af(b)+bf(a)\right]$. Se observă că ipoteza $0\notin[a,b]$ asigură faptul că funcția F este bine definită, iar faptul că f este funcție Rolle ne asigură că și funcția F este o funcție Rolle. Verificăm că $F(a) = F(b)$. Avem:

$$F(a)=\frac{1}{a}\cdot\left[af(a)-bf(a)-af(b)+bf(a)\right]=f(a)-f(b) \text{ și}$$

$$F(b)=\frac{1}{b}\cdot\left[af(b)-bf(b)-af(b)+bf(a)\right]=f(a)-f(b).$$

Prin urmare, există un punct $c\in[a,b]$ pentru care $F'(c)=0$, de unde rezultă că:

$$f(c)-cf'(c)=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

Scurt istoric **Michel ROLLE** (1652-1719), matematician francez. Contribuții privind rezolvarea ecuațiilor algebrice de ordin superior lui 2.

♦ Şirul lui Rolle

O aplicație utilă a teoremei lui Rolle o constituie şirul lui Rolle asociat unei ecuații $f(x)=0$, unde $f: I \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe intervalul *I*.

Metoda se bazează pe următoarele consecințe ale teoremei lui Rolle:

a) între două soluții consecutive ale ecuației $f(x)=0$ există cel puțin o soluție a lui $f'(x)=0$;

b) între două soluții consecutive ale ecuației $f'(x)=0$ există cel mult o soluție a ecuației $f(x)=0$;

şi pe continuitatea funcției *f* (proprietatea lui Darboux).

Mai exact, dacă α, β sunt două soluții consecutive ale ecuației $f'(x)=0$ avem situațiile:

a) dacă $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, atunci ecuația $f(x)=0$ nu are rădăcini reale pe intervalul $[\alpha, \beta]$;

b) dacă $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, atunci ecuația $f(x)=0$ are o singură rădăcină reală în intervalul $[\alpha, \beta]$;

c) dacă $f(\alpha)\cdot f(\beta)=0$, atunci $f(\alpha) = 0$ sau $f(\beta) = 0$, dar $f^2(\alpha)+f^2(\beta)\neq 0$. Să presupunem că $f(\alpha) = 0$, atunci α este rădăcină pentru *f*, iar ecuația $f(x) = 0$, $f(x)=0$ nu mai admite altă rădăcină în intervalul $[\alpha, \beta]$.

„Şirul lui Rolle“ se bazează pe posibilitatea rezolvării ecuației $f'(x)=0$ şi constă în următoarele etape:

1. Se rezolvă ecuația $f'(x)=0$ şi fie $x_1' < x_2' < \ldots < x_n'$ rădăcinile acestei ecuații.

2. Se calculează $f(x_1'), f(x_2'), ..., f(x_n')$, precum şi $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$, respectiv $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$ unde $I=(a, b)$.

3. Se organizează datele astfel:

a	x_1'	x_2'	...	x_n'	b
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$	$f(x_1')$	$f(x_2')$	...	$f(x_n')$	$\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$

Şirul lui Rolle este şirul

$$\operatorname{sgn}\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) \quad \operatorname{sgn}\left(f(x_1')\right) \quad \operatorname{sgn}\left(f(x_2')\right) \quad \ldots \quad \operatorname{sgn}\left(f(x_n')\right) \quad \operatorname{sgn}\left(\lim_{x\to b} f(x)\right)$$

şi orice schimbare de semn între două poziții consecutive semnalează prezența unei soluții a ecuației $f(x)=0$ în intervalul respectiv. Dacă $\left(f(x_i')\right)=0,$ atunci x_i' este o soluție multiplă a ecuației $f(x) = 0$ iar pe intervalele $\left(x_{i-1}', x_i'\right)$, $\left(x_i', x_{i+1}'\right)$ nu mai avem alte soluții.

Determinarea intervalelor de forma $\left(x_i', x_{i+1}'\right)$ în care ecuația $f(x)=0$ are soluție se numeşte separarea rădăcinilor reale ale aceste ecuații.

Exemplu Folosind metoda „şirul lui Rolle“ să se discute natura soluţiilor ecuaţiei $x^3 + 3x^2 + m = 0,\ x \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{R}.$

Vom considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 + m$ şi aplicăm raţionamentul prezentat.

Calculând $f'(x) = 3x^2 + 6x$, obţinem soluţiile ecuaţiei $f'(x) = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, iar $f(-2) = m + 4$, $f(0) = m$. Vom obţine

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$-\infty$	$m+4$	m	$+\infty$

unde s-a ţinut cont că $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, iar $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

În funcţie de valorile lui m vom avea situaţiile :

1. $m \in (-\infty, -4)$, şirul lui Rolle este: –, –, –, +, deci ecuaţia are o unică soluţie reală x_1, $x_1 \in (0, +\infty)$ şi două complexe $x_{2,3} \in \mathbb{C}$.
2. $m = -4$, şirul lui Rolle este: –, 0, –, +, deci ecuaţia are soluţie dublă $x_1 = x_2 = -2$ iar $x_3 \in (0, \infty)$.
3. $m \in (-4, 0)$, şirul lui Rolle este: –, +, –, +, deci avem trei schimbări de semn, de unde tragem concluzia că soluţiile sunt reale, distincte, şi anume $x_1 \in (-\infty, -2)$, $x_2 = (-2, 0)$, $x_3 \in (0, \infty)$.
4. $m = 0$, şirul lui Rolle este: –, +, 0, +, şi vom avea: $x_1 \in (-\infty, -2)$ şi soluţia dublă $x_2 = x_3 = 0$.
5. $m \in (0, +\infty)$, şirul lui Rolle este: –, +, +, +, prin urmare $x_1 \in (-\infty, -2)$ iar x_2 şi x_3 sunt numere complexe.

Toate aceste situaţii pot fi centralizate cu ajutorul unui tabel de forma următoare:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
m \ $f(x)$	$-\infty$	$m+4$	m	$+\infty$	Concluzii
$m \in (-\infty, -4)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x_1 \in (0, \infty),\ x_{2,3} \in \mathbb{C},\ x_2 = \overline{x}_3$
$m = -4$	$-$	0	$-$	$+$	$x_1 = x_2 = -2,\ x_3 \in (0, \infty)$
$m \in (-4, 0)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$x_1 \in (-\infty, -2),\ x_2 \in (-2, 0),\ x_3 \in (0, \infty)$
$m = 0$	$-$	$+$	0	$+$	$x_1 \in (-\infty, -2),\ x_2 = x_3 = 0$
$m \in (0, \infty)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$x_1 \in (-\infty, -2),\ x_{2,3} \in \mathbb{C},\ x_2 = \overline{x}_3$

6.4. Teorema lui Lagrange

Teorema lui Lagrange

Fie $f: I \to \mathbb{R}$, cu $I \subseteq \mathbb{R}$ interval şi $a, b \in I$, $a < b$. Dacă:
1. funcţia f este continuă pe $[a, b]$;
2. funcţia f este derivabilă pe (a, b);

Atunci există un punct $c \in (a, b)$ pentru care $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Demonstraţie. Vom considera funcţia auxiliară $g: [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \lambda \cdot x$, unde $\lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Ţinând cont de ipotezele teoremei avem:

1, g continuă pe $[a, b]$;
2. g derivabilă pe (a, b);
3. $g(a) = g(b)$ datorită alegerii convenabile a lui λ. Aplicând teorema lui Rolle, rezultă: există $c \in (a, b)$ pentru care $g'(c) = 0$ de unde relaţia căutată

(1) $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Observaţii:

1. Egalitatea (1) se numeşte şi formula lui Lagrange.

2. Aşa cum s-a observat şi la teorema lui Rolle, punctul c nu este, în general, unic.

3. Cum raportul $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ reprezintă panta dreptei AB determinată de punctele $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$, practic teorema lui Lagrange afirmă că există un punct $M(c, f(c))$ situat pe graficul lui f, $a < c < b$, pentru care dreapta tangentă la graficul lui f este paralelă cu AB (fig.16).

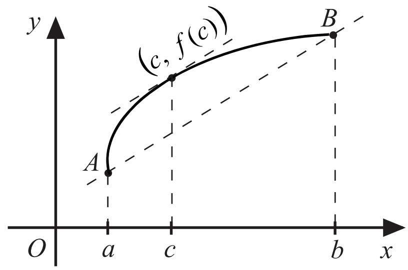


Fig. 16

4. Teorema lui Lagrange se mai numeşte şi **teorema creşterilor finite** sau prima teoremă de medie.

5. Teorema lui Rolle poate fi considerată un caz particular al teoremei lui Lagrange, în situaţia $f(b) = f(a)$, dar teorema lui Rolle nu poate fi considerată o consecinţă a acesteia deoarece, aşa cum s-a remarcat, această teoremă a fost utilizată în cadrul demonstraţiei teoremei lui Langrange.

Corolar — Derivata unei funcţii într-un punct

Fie $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $x_0 \in I$. Dacă:
1. f este continuă pe I;
2. f este derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$ şi există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}}$,

atunci există derivata $f'(x_0)$ şi în plus avem: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

Demonstrație. Fie $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=l$. Vom demonstra că $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere din I cu $x_n\neq x_0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Pentru $n\in\mathbb{R}, n\geq 1$ fixat, aplicăm teorema lui Lagrange pe $[x_0,\ x_n]$ sau $[x_n,\ x_0]$, după cum $x_0<x_n$ respectiv $x_n<x_0$ şi obținem un punct c_n cu proprietatea:

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=f'(c_n).$$

Cum c_n se află între x_0 şi x_n avem: $0<|c_n-x_0|<|x_n-x_0|$, de unde

$$0\leq \lim_{n\to\infty}|c_n-x_0|\leq \lim_{n\to\infty}|x_n-x_0|=0,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = x_0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n)=f'(x_0)=0$, de unde

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\lim_{n\to\infty} f(c_n)=f'(x_0).$$

Cum şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ a fost ales arbitrar, obținem concluzia: f are derivată în x_0 şi $f'(x_0)=l$.

Exemplu Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^x-1, & x<0\\ x^2+x, & x>0\end{cases}$. Studiem derivabilitatea lui f în x_0, utilizând consecința teoremei lui Lagrange. Mai întâi, verificăm continuitatea:

$f_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(e^x-1\right)=0$, $f_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^2+x\right)=0$ și cum $f(0)=0$, obținem că f este continuă în 0. Evident, f este continuă pe $\mathbb{R}$. Se observă că f este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, având derivata: $f'(x)=\begin{cases} e^x, & x<0\\ 2x+1, & x>0\end{cases}$.

Verificăm existența limitei $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. Avem:

$f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^x=1$ și $f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(2x+1)=1$.

Prin urmare, există $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=1$. Aplicând consecința teoremei lui Lagrange, avem că există $f'(0)$ și, mai mult, că $f'(0)=0$.

Observații:

1. Dacă derivata f' are limită la stânga, respectiv la dreapta în x_0, atunci f are derivată la stânga, respectiv la dreapta şi avem:

$$f_s'(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x),\ \text{respectiv}\ f_d'(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f'(x).$$

2. În condițiile consecinței, dacă $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ există şi este finită, atunci f este derivabilă în x_0 iar derivata sa f' este continuă în x_0.

3. Condiția de existență a limitei derivatei f' în punctul x_0 este suficientă nu şi necesară pentru existența derivatei lui f în punctul x_0.

Exemplul următor ilustrează această situație:

Exemplu Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x=0 \end{cases}$. Pentru $x\neq 0$ se observă că f este o funcție continuă şi derivabilă. În $x_0 = 0$, continuitatea se verifică imediat:

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

În ceea ce priveşte derivabilitatea, pentru $x\neq 0$, avem $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$.

Dacă dorim să aplicăm consecința teoremei lui Lagrange, constatăm că:

$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ nu există, deci nu putem aplica acest rezultat (limita **nu** există deoarece $\lim_{x\to 0} 2x\sin\dfrac{1}{x}=0$ şi $\lim_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ **nu** există).

Pe de altă parte, cu ajutorul definiției avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0,$$

deci f este derivabilă în 0 şi $f'(0)=0$. Mai precis:

$$f':\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x=0 \end{cases}.$$

Observație:

Exemplul precedent pune în evidență faptul că derivata f' poate să nu fie funcție continuă.

Un rezultat important, care răspunde la întrebarea „Ce proprietăți are funcția derivată?“ îl constituie următoarea teoremă (pe care o acceptăm fără demonstrație):

Teorema lui Darboux

Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe I, atunci funcția $f':I\to\mathbb{R}$ este o funcție cu proprietatea lui Darboux.

Ca urmare a acestei teoreme, vom obține următoarele consecințe:

1. Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe intervalul *I*, atunci eventualele discontinuități ale funcției $f': I \to \mathbb{R}$ sunt discontinuități de speța a doua.

2. Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe intervalul I și $f'(x) \neq 0, \forall x \in I,$ atunci $f'(x) > 0, \forall x \in I,$ sau $f'(x) < 0, \forall x \in I.$ Vom mai spune: dacă f' nu se anulează pe un interval *I*, atunci f' are semn constant pe *I*.

3. Teorema ne sugerează o metodă de a demonstra că anumite funcții au proprietatea lui Darboux. De exemplu pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},$ dacă $x \neq 0$ și $f(0) = 0$ există funcția $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = x^2 \sin\frac{1}{x},$ dacă $x \neq 0$, și $F(0) = 0$, care este derivabilă și $F'(x) = f(x),$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Conform cu teorema lui Darboux, vom obține că funcția *f* are proprietatea lui Darboux (se observă că funcția *f* nu este continuă).

Scurt istoric **Gaston DARBOUX** (1842-1917), matematician francez. A publicat lucrări în domeniul geometriei diferențiale, teoriei integrării, funcțiilor analitice.

6.5. Obținerea unor inegalități cu ajutorul teoremei lui Lagrange

Vom prezenta în această secțiune modul cum putem obține unele inegalități cu ajutorul teoremei lui Lagrange.

1. Să se arate că $|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$ pentru oricare $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Soluție: Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ puncte fixate și considerăm funcția: $\sin: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$. După cum știm funcția sin este derivabilă pe $\mathbb{R}$ deci este continuă pe $[x_1, x_2]$ și derivabilă pe (x_1, x_2), prin urmare aplicând teorema lui Lagrange, există $c \in (x_1, x_2)$ pentru care:

$$\sin x_2 - \sin x_1 = \cos c \cdot (x_2 - x_1).$$

Cum $|\cos c| \leq 1$ se obține: $|\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1|$. Dacă $x_1 = x_2$ relația este evidentă.

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, să se arate că: $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$.

Soluție: Vom considera funcția $\ln: [n, n+1] \to \mathbb{R}$, și după cum știm funcția ln verifică ipotezele teoremei lui Lagrange, deci există $c \in (n, n+1)$ pentru care:

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c}(n+1-n).$$

Cum $n < c < n+1$, vom avea $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$, de unde $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$.

6.6. Calculul unor limite cu ajutorul teoremei lui Lagrange

Vom exemplifica în această secțiune modul cum putem calcula unele limite cu ajutorul teoremei lui Lagrange.

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}\ln(x+1) - \sqrt{x}\ln x\right)$.

Rezolvare. Considerăm funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=\sqrt{t}\ln t$. Aplicând teorema lui Lagrange pe interalul $[x, x+1]$, se obține existența lui $c_x \in (x, x+1)$ astfel încât $\sqrt{x+1}\ln(x+1)-\sqrt{x}\ln x=\frac{\ln c_x+2}{2\sqrt{c_x}}$. Obsevăm că $x < c_x < x+1$ implică faptul că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln c_x+2}{2\sqrt{c_x}}=0$, de unde rezultă că: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}\ln(x+1)-\sqrt{x}\ln x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln c_x+2}{2\sqrt{c_x}}=0$.

6.7. Rezolvarea unor ecuații exponențiale cu ajutorul teoremei lui Lagrange

Vom exemplifica în această secțiune modul cum putem rezolva unele ecuații exponențiale cu ajutorul teoremei lui Lagrange.

Să se rezolve ecuația: $4^x + 5^x = 6^x + 3^x$.

Rezolvare. Considerăm că ecuația inițială este echivalentă cu $6^x - 5^x = 4^x - 3^x$, de unde apare ideea de a considera funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=t^x$, care verifică ipotezele teoremei lui Lagrange. Aplicând succesiv această teoremă pe intervalele $[3, 4]$ și, respectiv, $[5, 6]$, vom obține că există $c_x \in (3, 4)$ și, respectiv, $d_x \in (5, 6)$ pentru care: $4^x - 3^x = x\cdot(c_x)^{x-1}$ și $6^x - 5^x = x\cdot(d_x)^{x-1}$, de unde ecuația devine echivalentă cu: $x\cdot(c_x)^{x-1} = x\cdot(d_x)^{x-1}$. Observăm că $x = 0$ este soluție a acestei ecuații. Pentru $x \neq 0$, prin simplificare cu x, obținem: $(c_x)^{x-1} = (d_x)^{x-1}$, adică $\left(\frac{c_x}{d_x}\right)^{x-1}=1$. Cum $c_x \in (3,4)$ și $d_x \in (5,6)$, avem soluția unică: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. În concluzie, ecuația are soluțiile: $x = 0$ și $x = 1$.

6.8. Teorema lui Cauchy

Teorema lui Cauchy*

Fie $f, g: I\to\mathbb{R}$, $I\subseteq\mathbb{R}$ interval, și $a, b\in I$, $a<b$. Dacă:
1. f, g sunt continue pe $[a, b]$; **2.** f, g sunt derivabile pe (a, b); **3.** $g'(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$,
atunci există un punct $c\in(a,b)$, pentru care $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Demonstrație. Pentru început să observăm că $g(b)\neq g(a)$. Dacă $g(b)=g(a)$, atunci conform teoremei lui Rolle, există $c\in(a,b)$ pentru care $g'(c)=0$, ceea ce vine în contradicție cu ipoteza 3. Prin urmare $g(b)\neq g(a)$.

Asemănător cu demonstrația teoremei lui Lagrange, considerăm funcția auxiliară:

$$h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g(x),\text{ cu } h:[a, b]\to\mathbb{R}.$$

Se observă că h verifică ipotezele teoremei lui Rolle, de unde se obține existența unui punct $c\in(a,b)$ pentru care $h'(c)=0$, adică tocmai concluzia teoremei. ■

* Teorema lui Cauchy este facultaivă.

Observații:

1. Teorema lui Cauchy se mai numește și a doua teoremă a creșterilor finite sau a doua teoremă de medie.

2. Se observă că teorema lui Lagrange se obține din teorema lui Cauchy, particularizând, $g(x) = x, \forall x \in I$.

3. Teorema lui Lagrange a fost enunțată de Lagrange în anul 1789, dar enunțurile moderne ale acestor teoreme apar în lucrarea „Curs de analiză matematică pentru Școala Politehnică" a lui A. Cauchy din anul 1821. Definiția riguroasă a derivatei bazată pe cea de limită, apare pentru prima dată la Cauchy.

Scurt istoric

Augustin Louis CAUCHY (1789-1857), matematician francez. A avut contribuții fundamentale în analiza matematică clasică și în teoria funcțiilor analitice („Calculul infinitezimal").

Exerciții propuse

1. Să se determine punctele de extrem local ale următoarelor funcții și analizați dacă se poate aplica teorema lui Fermat.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 5x + 6;$ *b*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 3x - 2;$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x-1| + |x-2|;$ *d*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x^2 - 4|;$

e) $f : [-2, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = [x];$ *f*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{x+1}, & x > 0 \end{cases};$

g) $f : [-2, \pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ \sin x, & x \in (0, \pi] \end{cases};$

h) $f : [-3, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x+3, & x \in [-3, -2] \\ x(x+4), & x \in (-2, 0) \\ \cos x, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ x - \dfrac{\pi}{2}, & x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, 3\right] \end{cases};$

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ \ln(1+x), & x > 0 \end{cases};$ *j*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \le 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}.$

2. Să se determine valorile de extrem local ale funcției *f* în cazurile următoare:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{1+x^2};$ *b*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \{x\}, & x \le 0 \\ \cos x - 1, & x > 0 \end{cases};$

c) $f : [-3, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - x - 2;$ *d*) $f : [-5, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 7x + 10;$

e) $f:[-2, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-1$; *f*) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$;

g) $f:[1, 4]\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\ln(1+x)$; *h*) $f:[-2, 5]\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{x+3}$;

i) $f:[-3, 4]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+e^{-x})$.

3. Să se determine punctele critice ale funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-9x^2+15x+2$; *b*) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x+2$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x}$; *d*) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{4x}{1+x^2}$; *f*) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x+\cos x$;

g) $f:[0, \infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=|x-1|\sqrt{x}$; *h*) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^2(x-1)}$;

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$; *j*) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+x^2)+\operatorname{arctg} x$.

4. 1) Fie $a, b, c\in(0, \infty)$ cu proprietatea: $a^x+b^x+c^x\geq 3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Să se arate că $abc=1$.

2) Fie $a_1, a_2, ..., a_n\in(0, \infty)$, $n\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea $a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x\geq n$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Să se arate că: $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$.

5. Fie $a, b\in\mathbb{R}_+^*$ cu proprietatea că $\dfrac{x+a}{x^2+b}\leq\dfrac{1+a}{1+b}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Arătați că $b=2a+1$.

6. Fie $a, b\in\mathbb{R}_+^*$ cu proprietatea că $a^x+bx^2\geq a+b$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Să se arate că $a^a\cdot e^{2b}=1$, unde *e* este baza logaritmului natural.

7. Fie $f:[0, \pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin x,\ x\in\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\\ x(x-\pi)+1+\dfrac{\pi^2}{4},\ x\in\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]\end{cases}$.

a) Să se studieze derivabilitatea lui *f* în $x=\dfrac{\pi}{2}$.

b) Să se reprezinte grafic funcția şi să se precizeze dacă $x=\dfrac{\pi}{2}$ este punct de extrem.

c) Rezolvați ecuația $f'(x)=0$.

8. Fie $f:[2, 5]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-1$.

a) Dovediți că $f(2)\leq f(x)\leq f(5)$, pentru orice $x\in[2, 5]$.

b) Calculați f' şi arătați că $f_d'(2)\neq 0$ şi $f_s'(5)\neq 0$.

9. Fie funcția $f:[-1, 1]\to\mathbb{R}$, definită de: $f(x)=\begin{cases}1+x,\ \text{pentru } x\in[-1, 0]\\ x,\ \text{pentru } x\in(0, 1]\end{cases}$.

a) Dovediți că $f(0) \geq f(x)$, pentru orice $x \in [-1, 1]$.

b) Arătați că $f'(x) = 1$ pe tot domeniul de derivabilitate. Justificați de ce nu se poate aplica teorema lui Fermat.

10. Fie $f:[0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ dacă } x = 0 \\ x, \text{ dacă } x \in (0, 2] \end{cases}$.

a) Să se arate că $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in (0, 2)$.

b) Dovediți că $f(0) = f(2)$. Justificați de ce nu se poate aplica teorema lui Rolle.

11. Fie $f:[-1, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x(2-x) \text{ pentru } x \in [-1, 2] \\ (x-2)(x-4) \text{ pentru } x \in (2, 5] \end{cases}$.

a) Dovediți că f este funcție Rolle pe intervalul $[-1, 5]$.

b) Comparați $f(-1)$ și $f(5)$.

c) Rezolvați ecuația $f'(x) = 0$.

12. *a*) Fie funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2x-1)(3x+2)(4x-3)(5x+4)$. Să se arate că ecuația $f'(x) = 0$ are toate soluțiile reale.

b) Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție polinomială de grad n, pentru care ecuația $f(x) = 0$ are toate soluțiile reale și distincte. Să se arate că ecuația $f'(x) = 0$ are toate soluțiile reale și distincte.

13. Fie $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval, f derivabilă pe I.

a) Să se arate că între două soluții consecutive ale ecuației $f(x) = 0$, există cel puțin o soluție a ecuației $f'(x) = 0$.

b) Să se arate că între două soluții consecutive ale ecuației $f'(x) = 0$, există cel mult o soluție a ecuației $f(x) = 0$.

14. Să se verifice dacă următoarele funcții îndeplinesc condițiile teoremei lui Rolle. În caz afirmativ (atunci când este posibil), să se determine punctul c corespunzător.

a) $f:[-1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)(x-2)$; *b*) $f:[-2,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x+2| \cdot |x-5|$;

c) $f:[0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$; *d*) $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

e) $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2-1) \cdot e^{-x}$; *f*) $f:\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x \cdot e^{2x}$;

g) $f:[-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x^2) + x^2$; *h*) $f:[2,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{e^{2x}}$;

i) $f:[-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (4-x^2)e^{x^2-1}$.

15. Să se verifice dacă următoarele funcții îndeplinesc condițiile teoremei lui Rolle.

a) $f:[-1,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)(x-3)$; *b*) $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln(2-|x|)}{x+3}$;

c) $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ dacă } x\in[-1,0) \\ -x+1, \text{ dacă } x\in[0,1] \end{cases}$;

d) $f:[-2,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{e^{|x|}+e^{-|x|}}{2}$.

16. a) Să se determine parametrii reali a, b, c pentru care funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases} ax^2-3x+1, \text{ pentru } x\in(-1,0] \\ x^2+bx-c, \text{ pentru } x\in(0,1] \end{cases}$ satisface condițiile teoremei lui Rolle.

Să se determine punctul c corespunzător.

b) Aceleaşi cerințe pentru $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b, \text{ pentru } x\in(-1,0] \\ cx^2+4x+4, \text{ pentru } x\in(0,1] \end{cases}$.

c) Aceleaşi cerințe pentru $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2^x, \text{ dacă } x\in(-1,0] \\ ax^2+bx+c, \text{ dacă } x\in(0,1] \end{cases}$.

17. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) şi $f(a)=f(b)$. Aplicând teorema lui Rolle funcției $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)\cdot e^{-x}$ dovediți că există $c\in(a,b)$ pentru care $f(c)+f'(c)=0$.

18. Fie $a, b\in\mathbb{R}$, $a<b$ şi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b). Atunci între două zerouri ale lui f există cel puțin o soluție a ecuației $f'(x)+\lambda f(x)=0$, pentru orice $\lambda\in\mathbb{R}$.

19. Fie $f, g:[a, b]\to\mathbb{R}$ două funcții Rolle pentru care $f(a)=f(b)=0$ și pentru orice $x\in(a, b)$ avem: $f'(x)\cdot g(x)\neq f(x)\cdot g'(x)$. Să se arate că există $c\in[a, b]$ astfel încât $g(c)=0$.

20. Fie $a_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{0,n}$ cu $\sum_{i=0}^{n}\dfrac{a_i}{1+i}=0$. Să se arate că polinomul $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ admite cel puțin o rădăcină reală în intervalul $(0, 1)$.

21. Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$. Să se verifice dacă există cel puțin un punct situat pe reprezentarea geometrică a graficului pentru care tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox. În caz afirmativ, găsiți acest punct.

22. Să se arate că dacă m, M sunt valori extreme ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+ax+b$, ($a,b\in\mathbb{R}$, $a<0$) atunci $m\cdot M=b^2+\dfrac{4}{27}a^3$.

23. Folosind metoda „şirul lui Rolle", să se discute numărul de soluții reale ale ecuațiilor următoare:

a) $x^3-2x^2+5x+1=0;$

b) $2x^3-9x^2+12x+6=0;$

c) $3x^4-8x^3+18x^2-24x+10=0;$

d) $\frac{1}{2}x^4+\frac{4}{3}x^3-x^2-4x+1=0;$

e) $2\ln x+x^2-4x+3=0;$

f) $\ln(1+x)-(x-1)^2=0;$

g) $e^{x^2+x}-x^2-x=0;$

h) $x^2+x-\sqrt{x^2+1}=0.$

24. Să se stabilească numărul de soluții reale pentru ecuațiile următoare:

a) $x^3+3x+m=0,\ m\in\mathbb{R};$

b) $x^4-4x^3+m=0,\ m\in\mathbb{R};$

c) $3x^4-8x^3-6x^2+24x+m=0,\ m\in\mathbb{R};$

d) $x^5-5x+m=0,\ m\in\mathbb{R};$

e) $\ln x=mx,\ m\in\mathbb{R};$

f) $e^x=mx^2,\ m\in\mathbb{R};$

g) $\frac{2\ln x-1}{x^2}=m,\ m\in\mathbb{R};$

h) $\ln(1+x^2)-\sqrt{1+x^2}=m,\ m\in\mathbb{R}.$

25. Stabiliți dacă următoarele funcții îndeplinesc ipotezele teoremei lui Lagrange, iar în caz afirmativ determinați punctul *c* corespunzător:

a) $f:[-2,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+x;$

b) $f:[-3,5]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-5x+6;$

c) $f:[-1,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^x;$

d) $f:[-1,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+2)x^2;$

e) $f:[e,e^3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x;$

f) $f:\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x;$

g) $f:\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin x;$

h) $f:[1,e^2]\to\mathbb{R},\ f(x)=1+2\ln x;$

i) $f:\left[\frac{1}{2},3\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x};$

j) $f:[1,e^3]\to\mathbb{R},\ f(x)=2\ln x-x+1.$

26. Aplicând teorema lui Lagrange, să se demonstreze următoarele inegalități:

a) $|\sin b-\sin a|\le|b-a|,\ \forall a,b\in\mathbb{R};$

b) $|\cos b-\cos a|\le|b-a|,\ \forall a,b\in\mathbb{R};$

c) $\frac{b-a}{\sin^2 b}<\operatorname{ctg}a-\operatorname{ctg}b<\frac{b-a}{\sin^2 a},\ 0<a<b\le\frac{\pi}{2};$

d) $\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*;$

e) $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a},\ 0<a<b;$

f) $(ae)^{b-a}<\frac{b^b}{a^a}<(be)^{b-a},\ \frac{1}{e}<a<b;$

g) $\frac{1}{(1+k)\ln(1+k)}<\ln\frac{\ln(1+k)}{\ln k}<\frac{1}{k\ln k},\ k\in\mathbb{N}^*,\ k\ge 2.$

27. Pe graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x$, să se determine abscisa punctului în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta determinată de $A(2,f(2))$ şi $B(-1,f(-1))$.

28. Folosind corolarul teoremei lui Lagrange, să se studieze derivabilitatea următoarelor funcții:

a) $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{dacă } x\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]\\ 2x^2+\dfrac{3}{2}, & \text{dacă } x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{dacă } x\le 1\\ 2\ln x, & \text{dacă } x>1\end{cases}$; *c*) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}e^x, & \text{dacă } x\le 0\\ 2^x, & \text{dacă } x>0\end{cases}$;

d) $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & \text{dacă } x\in[0,1]\\ \pi(x^2-3x+2), & \text{dacă } x\in(1,2]\end{cases}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{|x^2-4|}$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\arcsin\dfrac{x}{x^2+1}, & \text{dacă } x\in(-\infty,0]\\ x\cdot e^x, & \text{dacă } x\in(0,\infty)\end{cases}$;

g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$;

h) $f:[1,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{25x}{x^2+1}-1, & \text{dacă } x\in[1,2]\\ \dfrac{(x+1)^2}{x-1}, & \text{dacă } x\in(2,3]\end{cases}$.

29. Fie $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{dacă } x\in[0,1]\\ ax-1, & \text{dacă } x\in(1,2]\end{cases}$. Determinați parametrul real *a* astfel încât funcția *f* să satisfacă condițiile teoremei lui Lagrange pe intervalul [0, 2] şi apoi aplicați această teoremă.

30. Se consideră $f:[1,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x^3-ax, & \text{dacă } x\in[1,2]\\ -x^2+b, & \text{dacă } x\in(2,3]\end{cases}$. Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția *f* să satisfacă condițiile teoremei lui Lagrange şi apoi să se găsească punctul *c* din teoremă corespunzător.

31. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

a) Dovediți că funcția *f* satisface condițiile teoremei lui Lagrange pe orice interval $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

b) Aplicând teorema lui Lagrange funcției *f* pe intervalul $[k+1,\ k+2],\ k \in \mathbb{N},$ dovediți că există un şir $(x_k)_{k\geq 0}$ cu $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} f'(x_k) = -\dfrac{1}{2}.$

32**. Pentru fiecare dintre perechile de funcții de mai jos să se studieze dacă sunt verificate ipotezele teoremei lui Cauchy şi apoi, în caz afirmativ, să se aplice efectiv.

a) $f,\ g:[0,\ 3]\to \mathbb{R},\ f(x)=2x^2+4x,\ g(x)=x+1;$

b) $f,\ g:[-1,\ 2]\to \mathbb{R},\ f(x)=2^x,\ g(x)=x+2;$

c) $f,\ g:[0,\ 1]\to \mathbb{R},\ f(x)=e^x,\ g(x)=4x+1;$

d) $f,\ g:\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]\to \mathbb{R},\ f(x)=\arcsin x,\ g(x)=2x+1;$

e) $f,\ g:[1,\ e]\to \mathbb{R},\ f(x)=\ln x,\ g(x)=x^2;$

f) $f,\ g:\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]\to \mathbb{R},\ f(x)=\sin x,\ g(x)=\cos x;$

g) $f,\ g:[-2,\ 5]\to \mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+3}, & x\in[-2,\ 1]\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{4}, & x\in(1,\ 5]\end{cases},\ g(x)=x.$

33. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\ln n}{n}-\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}\right);$ *b*) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{e^n}{n}-\dfrac{e^{n+1}}{n+1}\right).$

34. Fie $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe [*a*, *b*] și derivabilă pe (*a*, *b*). Aplicând teorema lui Rolle funcției $g:[a,b]\to \mathbb{R},\ g(x)=(x-a)(x-b)e^{-f(x)}$, dovediți că există $c\in(a,b)$ pentru care: $f'(c)=\dfrac{2c-a-b}{(c-a)(c-b)}.$

35. Fie $f,\ g,\ h:[a,b]\to \mathbb{R}$ cu proprietățile: continue pe [*a*, *b*] şi derivabile pe (*a*, *b*). Să se arate că există $c\in(a,b)$ pentru care:

$$\begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & h'(c)\\ f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\end{vmatrix}=0.$$

36. Fie numerele reale $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că ecuația $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=0$ admite cel puțin o rădăcină în intervalul $(0,\ 2\pi)$.

** Teorema lui Cauchy este facultativă.

§7. Regulile lui l'Hospital

În această secțiune, ne vom ocupa de prezentarea modului în care putem explora rezultatele obținute în studiul derivabilității în vederea obținerii unor condiții suficiente pentru a justifica existența, dar și pentru a calcula unele limite de funcții care prezintă nedeterminări de tipul $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $x_0 \in I$ un punct de acumulare finit sau infinit și $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile: $g(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$, și

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \text{, respectiv } \lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty .$$

În asemenea situații, spunem că $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ prezintă o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$, respectiv $\frac{\infty}{\infty}$.

Știm deja că în aceste situații, orice rezultat este potențial posibil, adică se poate ca limita să nu existe sau ca limita să existe și $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, unde $k \in \overline{\mathbb{R}}$ este abitrar. A înlătura, a elimina aceaste nedeterminari, revine la a preciza dacă limita există sau nu, iar dacă există, să se precizeze rezultatul final.

Analog vom aborda și nedeterminările de forma $\frac{\infty}{\infty}$, 1^{∞}, $\infty - \infty$, ∞^0, 0^0.

Din experiența acumulată la capitolul *Limite de funcții*, am constatat că pentru aceste situații se impune un studiu direct și, prin utilizarea unor transformări și a unor limite remarcabile, reușim să rezolvăm problema.

În această secțiune, vom prezenta modul în care derivabilitatea contribuie la înlăturarea unor astfel de nedeterminări, prin obținerea unor condiții suficiente de existență a limitei și sugerarea unui algoritm de calcul pentru o clasă largă de situații. Aceste condiții sunt precizate în așa numitele **reguli ale lui l'Hospital** care se aplică pentru cazurile $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$, celelalte situații urmând a fi supuse la ușoare transformări pentru a le reduce la acestea.

Pentru început, vom prezenta situația în care funcțiile $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în punctul $x_0 \in I$, cu $g'(x_0) \neq 0$.

Teorema 1

Dacă $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval, $x_0 \in I$ și $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt două funcții cu proprietățile:
1. $f(x_0) = g(x_0) = 0$; **2.** f, g sunt derivabile în x_0; **3.** $g'(x_0) \neq 0$,
atunci există o vecinătate V a punctului x_0 pentru care $g'(x) \neq 0, \forall x \in V$, și:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Demonstrație (facultativă). Cum $g'(x_0) \neq 0$, ținând cont de definiția derivabilității, avem:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0) \neq 0,$$

de unde există o vecinătate $V \setminus \{x_0\}$ a lui x_0 pentru care

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \neq 0, \ \forall x \in V \setminus \{x_0\}$$

deci $g(x)-g(x_0) \neq 0$ prin urmare $g(x) \neq g(x_0) = 0$, pentru $\forall x \in V \setminus \{x_0\}$.

Se observă că:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \frac{1}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}},$$

şi cum, conform ipotezei b), *f* şi *g* sunt derivabile, avem:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \frac{1}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \quad \blacksquare$$

Exemple

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(1+x)$.

Ne propunem să calculăm $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, care este o nedeterminare de forma $\dfrac{0}{0}$.

Verificăm ipotezele teoremei precedente:

1. $f(0) = g(0) = 0$;
2. *f* este derivabilă în 0, cu $f'(0) = 0$, respectiv *g* este derivabilă în 0;
3. $g'(0) = \dfrac{1}{1+0} = 1 \neq 0$.

Conform concluziei teoremei, avem: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(0)}{g'(0)} = \dfrac{0}{1} = 0$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x$. Avem:

a) $f(0) = g(0) = 0$;

b) *f* și *g* sunt derivabile în 0. În cazul lui *f*, avem:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x-0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0;$$

c) $g'(0) = \cos 0 = 1$, prin urmare: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin 1/x}{\sin x} = \dfrac{f'(0)}{g'(0)} = \dfrac{0}{1} = 0$.

Regula lui l'Hospital — Cazul $\frac{0}{0}$

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și x_0 un punct de acumulare al lui I, finit sau infinit, iar $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$;

2. f și g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$ și $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$;

3. există $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, și există $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ și este egală cu L..

Demonstrație (facultativă). Vom prezenta demonstrația numai în cazul x_0 număr real, şi vom omite situațiile $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$.

Din ipoteza $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ rezultă că cele două funcții pot fi prelungite prin continuitate în x_0 cu $f(x_0) = g(x_0) = 0$, deci putem presupune că cele două funcții sunt definite în zero.

Avem deci de demonstrat că $g(x_0) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ și $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Dacă există $x_1' \in I \setminus \{x_0\}$ cu $g(x_1') = 0$, atunci aplicând teorema lui Rolle pe intervalul de capete x_1 şi x_0 se obține un punct c pentru care $g'(c) = 0$, ceea ce contrazice ipoteza teoremei.

Fie acum un şir $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale din I cu proprietatea $\lim\limits_{x \to x_0} x_n = x_0$ şi $x_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ aplicăm perechii f şi g teorema lui Cauchy şi obținem existența unui punct c_n cu proprietatea: $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$.

Cum c_n se află între x_n şi x_0 vom avea inegalitățile: $0 < |c_n - x_0| < |x_n - x_0|$, de unde

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} |c_n - x_0| \leq \lim_{n \to \infty} |x_n - x_0| = 0,$$

deci $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = x_0$ şi ținând cont de ipoteza 3, obținem $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = L$, adică

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = L.$$

Cum şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ a fost ales arbitrar, avem în concluzie:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L. \quad \blacksquare$$

Observații

1. Se poate ca $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ să existe, dar $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ să nu existe. Reluăm exemplul:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x$. Am văzut deja că

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, în timp ce: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{2\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$, limită care nu există.

2. Aplicarea regulii lui l'Hospital în cazul $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, cu toate că ipotezele sunt verificate pentru $f(x)=\sin x$ şi $g(x)=x$, nu este corectă deoarece în determinarea lui $f'(x)=\cos x$ s-a ținut cont de această limită.

3. Dacă la ipotezele teoremei adăugăm $f,g:I\to\mathbb{R}, x_0\in I$ și continuitatea derivatelor f' și g' în x_0 și $g'(x_0)\neq 0$, rezultatul final ar fi: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ (vezi teorema 1).

4. Dacă funcțiile derivate f' şi g' verifică şi ele ipotezele teoremei, atunci regula lui l'Hospital poate fi aplicată succesiv şi vom obține: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ şi evident putem obține un rezultat asemănător şi pentru derivatele de ordin superior.

Exemplul 1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$. Alegând $f(x)=1-\cos x$ şi $g(x)=x^2$ se observă că ipotezele teoremei sunt satisfăcute şi avem: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$.

Exemplul 2 În exemplele următoare vom aplica teorema lui l'Hospital de două, respectiv de trei ori pentru calculul limitelor respective:

$$\lim_{x\to 0}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6};$$

$$\lim_{x\to 0}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{x^4}{x^2+2\cos x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{2x-2\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{12x^2}{2-2\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{24x}{2\sin x}=12;$$

Regula lui l'Hospital — Cazul $\frac{\infty}{\infty}$

Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval şi x_0 un punct de acumulare al lui *I*, finit sau infinit, iar $f,g\in I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty$;

2. *f* şi *g* derivabile pe $I\setminus\{x_0\}$ şi $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in I\setminus\{x_0\}$;

3. există $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $g(x)\neq 0$, $\forall x\in I\setminus\{x_0\}$ şi există $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ fiind egală cu *L*.

Lăsăm ca exercițiu demonstrația acestui caz.

Comentariu:

În aplicațiile curente, condițiile din ipotezele teoremei sunt satisfăcute şi de aceea uneori nu mai sunt verificate explicit, trecându-se direct la calculul limitei în x_0. Avertizăm că aplicarea regulii fără ca ipoteza să fie satisfăcută conduce la rezultate false, aşa cum se poate constata din următorul exemplu.

Dacă vrem să calculăm: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{x}$, aplicând regula lui l'Hospital avem:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{1} = +\infty$, ceea ce evident nu este corect, $\ln x < 0$, $\forall x \in (0,1)$.

Se observă că nu sunt satisfăcute ipotezele teoremei, şi anume $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$.

Calculul corect va fi: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x \cdot \frac{1}{x} = (-\infty \cdot \infty) = -\infty$.

Exemple

1. Să se calculeze: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x} \cdot \ln x$. Limita se mai poate scrie sub forma:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(-2\sqrt{x}\right) = 0.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Aplicând succesiv, de n ori regula lui l'Hospital,

avem: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \ldots = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$.

Formele nedeterminate $0 \cdot \infty$, 1^{∞}, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 se pot reduce prin operații algebrice sau utilizând funcția logaritmică, la formele $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$. Vom prezenta această situație prin următoarele exemple:

1. Cazul $0 \cdot \infty$

Avem de calculat $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x)$ şi suntem în situația $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ şi respectiv $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$.

a) Dacă $g(x) \neq 0$ pentru $x \neq x_0$, $x \in I$, atunci putem scrie: $f(x)\cdot g(x) = f(x) \cdot \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$

şi am redus la cazul $\frac{0}{0}$.

b) Dacă $f(x) \neq 0$ pentru $x \in I,\ x \neq x_0$, atunci putem scrie: $f(x) \cdot g(x) = \dfrac{g(x)}{1/f(x)}$ şi reducem la cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$.

2. Cazul $\infty - \infty$

Avem de calculat $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - g(x)\right)$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ sau $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$.

a) Dacă $f(x) \neq 0$ şi $g(x) \neq 0$ pentru $x \in I \setminus \{x_0\}$ putem scrie:

$$f(x) - g(x) = \frac{\dfrac{f(x) - g(x)}{f(x) \cdot g(x)}}{\dfrac{1}{f(x) \cdot g(x)}} = \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$ şi am redus la cazul $\dfrac{0}{0}$ studiat deja.

b) Uneori este utilă transformarea: $f(x) - g(x) = f(x) \cdot \left(1 - \dfrac{g(x)}{f(x)}\right)$, urmând să analizăm $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ care este de tip $\dfrac{\infty}{\infty}$. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$, atunci limita devine de tip $\infty \cdot 0$, caz pe care l-am studiat la punctul precedent.

3. Cazurile 0^0, 1^∞, ∞^0

Vom avea de calculat $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)}$, unde $f(x) > 0$, $\forall x \in D$, $x \neq x_0$, iar cele trei cazuri corespund la următoarele situații: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ sau: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ sau $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Vom scrie: $f^g = e^{\ln f^g} = e^{g \ln f}$ iar $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \cdot \ln f(x)$ va prezenta o nedeterminare de tip studiat deja, după care avem: $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \ln f(x)}$.

Recomandăm în cazul aplicațiilor, combinarea metodelor elementare cu regula lui l'Hospital. Menționăm că regula lui l'Hospital se poate folosi şi pentru calculul unor limite de şiruri, dar nu direct.

Observație. Primul curs de analiză matematică a fost scris de matematicianul francez Jean Bernoulli ca manual pentru un marchiz care s-a arătat un elev foarte bun. Acesta a fost G. F. de l'Hospital, marchiz de Sainte-Mesme, şi a publicat cursul respectiv în 1696, ceea ce l-a făcut cunoscut în lumea matematicii. Probabil, ar fi mai corect din punct de vedere istoric să numim aceste reguli, „regulile lui Bernoulli", în loc de „regulile lui l'Hospital".

Exerciții propuse

1. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, utilizând teorema 1, în următoarele situații:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$, $g(x) = x^2 + x$, $x_0 = 0$;

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\leq 1 \\ x+\ln x-1, & x>1\end{cases}$, $g(x) = x^3 - 5x + 4$, $x_0 = 0$;

c) $f(x)=\begin{cases} e^x-1, & x>0 \\ x^2+x, & x\leq 0\end{cases}$, $g(x) = \arcsin x$, $x_0 = 0$.

2. Să se calculeze limitele următoare, utilizând regula lui l'Hospital.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^4}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{xe^{ax}-2ax}$; d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3^{\sin^2 x}-3^{\sin x}}{x-\dfrac{\pi}{2}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\ln(1+3x)}$; g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^3}$; h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}}$; i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$;

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}}{\ln(1+x^2)}$; m) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2^x}{x^3-\ln x}$; n) $\lim\limits_{x\to 0}x^x$; o) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

p) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$; q) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)$; r) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(e+x)\right]^{\frac{1}{x}}$; s) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{\alpha}{x}\right)^{x^2}$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

ș) $\lim\limits_{x\to\infty}x^n\sin\dfrac{a}{x}$, $n>0$, $a\in\mathbb{R}$; t) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; ț) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$;

u) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{x^2}}{\sin x}$; v) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\dfrac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right]$; w) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

x) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\dfrac{1+x}{x}\right)$; y) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\cos x-1}{e^x-e^{-x}+2\sin x}$; z) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x+\sin x\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

3. a) Fie $f, g:[1, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2\sin\dfrac{1}{x-1}, & x\neq 1\\ 0, & x=0\end{cases}$, iar $g(x)=x-1$. Să se studieze existența limitelor $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ și respectiv $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

b) Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \sin x$ și $g(x) = x + \cos^2 x$. Să se studieze existența limitelor $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ și $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

4. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$, $n\in \mathbb{N}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(e^n + n\right)^{\frac{1}{n}}$, $n\in \mathbb{N}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + n}{n + \ln n}$, $n\in \mathbb{N}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$, $n\in \mathbb{N}$.

5. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}}$.

a) Calculați $f'(x)$, pentru $x \neq 0$.

b) Verificați dacă f este derivabilă în $x = 0$.

6. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} - 2x\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1 + x^6\right) - x^6}{x^7}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^6 - \ln^6(1+x)}{x^7}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1 + x^6\right) - \ln^6(1+x)}{\operatorname{tg}^7 x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1 + x^n\right) - \ln^n(1+x)}{\operatorname{arctg}^{n+1} x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\ln(e+x)\ln(e+2x)}}{x}$; g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\ln(e+x)\ln(e+2x)\ln(e+3x)}}{x}$;

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\ln(e+x)\ln(e+2x)\ldots\ln(e+nx)}}{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$;

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(ax) - \sin(ax)}{\operatorname{tg}(bx) - \sin(bx)}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$;

j) $\lim\limits_{x\to 0} x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+2}\right)$; k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}^n x} - \dfrac{1}{x^n}\right)$; l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - \operatorname{arctg}^3 x}{x^5}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x^3 - x^3}{x^5}$; n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x^3 - \operatorname{arctg}^3 x}{\arcsin^5 x}$; o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x^n - \operatorname{arctg}^n x}{\arcsin^{n+2} x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$;

p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{x}$; r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{tg} ax} - 1}{\sin(bx)}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - x\sin x - \cos x}{x^2}$;

t) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - x\operatorname{tg} x - \cos x}{x^2}$.

§8. Rolul derivatei I în studiul funcțiilor: puncte de extrem, monotonia funcțiilor

8.1. Monotonia funcțiilor

Reamintim că o funcție $f : A \to B$ este monotonă, pe mulțimea A, dacă raportul $R(x, x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ păstrează un semn constant pentru orice x şi x_0 din A ($x \neq x_0$) şi anume: dacă $R(x, x_0) \geq 0$, $\forall x \neq x_0$ din A, atunci f este crescătoare pe A, iar dacă $R(x, x_0) \leq$ ≤ 0, $\forall x \neq x_0$ din A, atunci f este descrescătoare pe A.

Teoremă

Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ (I interval) este derivabilă atunci ea este monotonă pe I dacă şi numai dacă $f'(x)$ păstrează semn constant pe intervalul I şi anume:

$f'(x) \geq 0$ pe $I \Leftrightarrow f$ crescătoare pe I; $f'(x) \leq 0$ pe $I \Leftrightarrow f$ descrescătoare pe I.

Demonstrație. Vom trata cazul funcțiilor monoton crescătoare (demonstrația se poate reface prin analogie pentru funcțiile monoton descrescătoare).

Presupunem că $f : I \to \mathbb{R}$ este monoton crescătoare şi derivabilă, deci $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, $\forall x \in I$ şi $\forall x_0 \in I$ ($x \neq x_0$) şi, în plus, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există şi este finită, deci $f'(x_0) \geq 0$, $\forall x_0 \in I$.

Reciproc: dacă $f'(x_0) \geq 0$, $\forall x_0 \in I$, aplicăm teorema Lagrange funcției f pe orice interval $[x, x_0] \subset I$ şi obținem $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$, cu $c \in (x, x_0)$, deci $c \in I$.

Rezultă că $R(x, x_0) \geq 0$, $\forall x \neq x_0$ din I, deci f este crescătoare pe I.

Din cele de mai sus rezultă că studiul monotoniei unei funcții derivabile se reduce la stabilirea semnului derivatei pe acel interval.

Exemple

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$. Cum f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = 3x^2 +$ $+1 > 0$ rezultă că f este crescătoare (chiar strict) pe $\mathbb{R}$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$. Avem $f'(x) = -e^{-x} < 0$, deci f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

3. Să considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Pentru a studia, cu uşurință, monotonia este recomandabil să se întocmească un tabel, în care pe prima linie apare mulțimea de definiție şi punctele în care se anulează derivata, pe linia a doua semnul derivatei şi eventualele zerouri ale derivatei, iar pe a treia linie valorile funcției în punctele specificate pe prima linie şi monotonia concretizată prin săgeți. În cazul exemplului considerat avem tabelul alăturat.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Deducem că funcția considerată nu este monotonă pe $\mathbb{R}$, dar este strict crescătoare pe intervalele $I_1 = (-\infty, -1]$ şi $I_2 = [1, +\infty)$ şi strict descrescătoare pe intervalul $I_3 = [-1, 1]$.

Observații:

1. Condiția ca funcția să fie definită pe un interval *I* (şi, evident, derivabilă pe *I*) este esențială pentru că există funcții derivabile pe o reuniune de intervale, cu derivata având semn constant, fără ca ele să fie monotone (cu acelaşi fel de monotonie) pe reuniunea de intervale.

Exemplu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x+1, \text{ dacă } x\le 0\\ x-2, \text{ dacă } x>0\end{cases}$,

$f'(x)=\begin{cases}2, \text{ dacă } x<0\\ 1, \text{ dacă } x>0\end{cases}$, deci $f'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$\vert$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$1 \mid -2$		$\nearrow$	$+\infty$

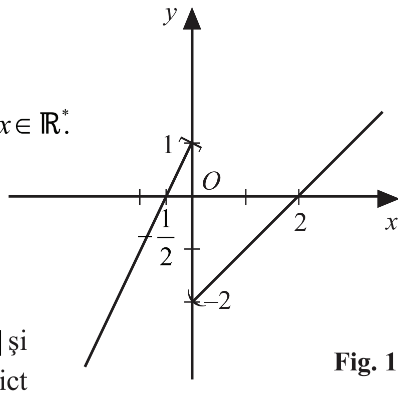


Fig. 17

Funcția este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi tot strict crescătoare pe $(0, +\infty)$ fără a fi strict crescătoare pe reuniunea lor.

2. Dacă $f'(x)>0$ pe *I*, atunci rezultă *f* strict crescătoare.

Reciproca nu este, în general, adevărată pentru că din „*f* strict crescătoare pe *I*“ nu rezultă întotdeauna că $f'(x)>0$.

Exemplu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, iar derivata sa: $f'(x)=3x^2$, nu este strict pozitivă pe $\mathbb{R}$.

3. S-a demonstrat faptul că dacă $f:A\to\mathbb{R}$ este constantă şi derivabilă pe *A*, atunci $f'(x)=0$.

Dacă *f* este derivabilă pe mulțimea *A* şi are derivata nulă pe *A*, rezultă oare că este constantă pe *A*? Răspunsul este: „nu întotdeauna“.

Justificare. Fie $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$.

O funcție care ia cel puțin două valori distincte pe mulțimea de definiție nu este o funcție constantă. În cazul exemplului considerat, avem: $f'(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}^*$, şi totuşi funcția *f* nu este constantă pe $\mathbb{R}^*$, pentru că $\mathbb{R}^*$ nu este interval, unde $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0)\cup(0, \infty)$. Răspunsul va fi afirmativ dacă mulțimea *A* este un interval deci:

Teoremă

Dacă o funcție $f:I\to\mathbb{R}$ este derivabilă pe intervalul *I* şi are derivata nulă pe *I*, atunci funcția *f* este constantă pe *I*.

Demonstrație: Aplicând teorema lui Lagrange funcției *f* pe orice interval $[x_0, x] \subset I, x \neq x_0$, se deduce că există $c \in (x_0, x)$ astfel încât să avem: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)$. Cum $f'(c) = 0$, rezultă $f(x) - f(x_0) = 0$, adică $f(x) = f(x_0)$, $\forall x \in I$, deci *f* este constantă pe *I*.

Să remarcăm şi faptul că dacă f este derivabilă pe intervalul *I* şi $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, rezultă că f este atât crescătoare pe *I* cât şi descrescătoare pe *I*, dar nu este nici strict crescătoare pe *I* şi nici strict descrescătoare pe *I*.

4. Dacă două funcții *f* şi *g* sunt derivabile pe o mulțime *A* şi diferă printr-o constantă pe mulțimea *A*, adică $f(x) = g(x) + k, \forall x \in A$, atunci, evident, $f'(x) = g'(x), \forall x \in A$.

Din $f'(x) = g'(x), \forall x \in A$, nu rezultă întotdeauna că $f(x) = g(x) + k$.

Exemplu Fie $f(x) = \begin{cases} x+3, & x<0 \\ x-5, & x>0 \end{cases}$ şi $g(x) = \begin{cases} x+1, & x<0 \\ x+3, & x>0 \end{cases}$.

Se observă că $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = g'(x)$, iar

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} 2, & x<0 \\ -8, & x>0 \end{cases}, \text{ deci } f(x) = \begin{cases} g(x)+2, & x<0 \\ g(x)-8, & x>0 \end{cases}.$$

Impunând condiția ca mulțimea *A* să fie un interval obținem următorul corolar:

Corolar

Dacă *f* şi *g* sunt două funcții derivabile pe un interval *I* şi dacă $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in I$, atunci cele două funcții diferă printr-o constantă pe *I*.

Demonstrație: Fie $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in I$; $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ deci, conform teoremei precedente, există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem: $h(x) = k$, $\forall x \in I$, ceea ce înseamnă că $f(x) = g(x) + k, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exemple **1**. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^2 x$ şi $g(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$.

Se constată cu uşurință $f'(x) = g'(x) = -2 \sin x \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$, deci există o constantă *k* astfel încât $f(x) = g(x) + k$. Pentru a determina constanta *k* este suficient să-i dăm o singură valoare lui *x*, de exemplu $x = 0$.

Avem: $f(0) = g(0) + k$, de unde $k = \cos^2 0 - \frac{1}{2}\cos 0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, deci $\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$, adică $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ ceea ce constituie o formulă trigonometrică cunoscută.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ şi $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Cum $f'(x) = g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, am putea greşi afirmând că cele două funcții diferă printr-o constantă pe $\mathbb{R}^*$. Să observăm însă că $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ nu reprezintă un interval, ci o reuniune de intervale.

Rezultă că cele două funcții diferă printr-o constantă pe fiecare din cele două intervale.

Pentru $x\in(-\infty,0)$ luăm, de exemplu, $x=-1$ şi obținem

$$k=f(-1)-g(-1)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2},\ \text{iar pentru } x\in(0,+\infty),\ k=f(+1)-g(+1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$

$$\text{deci } \operatorname{arctg} x=\begin{cases}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}-\dfrac{\pi}{2},\ x<0\\ -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+\dfrac{\pi}{2},\ x>0\end{cases}.$$

8.2. Puncte de extrem

Fie: $f:A\to\mathbb{R}\ (A\subset\mathbb{R})$. Punctul $x_0\in A$ se numeşte **punct de maxim local** (respectiv de **minim local**) dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât $f(x)\le f(x_0)$ (respectiv $f(x)\ge f(x_0)$) oricare ar fi $x\in A\cap V$. În acest caz numărul $f(x_0)$ se numeşte **maxim local** (respectiv **minim local**) al lui f.

Observații:

1. Pentru graficul funcției punctele $(x_0, f(x_0))$ din definiția precedentă se numesc puncte de extrem local sau relativ.
Dacă există $x_0\in A$ astfel încât $f(x)\le f(x_0),\ \forall x\in A$ (respectiv $f(x)\ge f(x_0),\ \forall x\in A$), atunci x_0 se numeşte **punct de maxim global** al lui f şi $f(x_0)$ se numeşte **maxim global** al lui f (respectiv, x_0 se numeşte **punct de minim global** al lui f şi $f(x_0)$ se numeşte **minim global** al lui f).

2. Dacă funcția are mai multe puncte de extrem local este posibil ca un maxim local să fie mai mic decât un minim.

3. Dacă inegalitățile din definiție sunt stricte pentru orice $x\ne x_0$, atunci punctele de extrem se numesc puncte de extrem strict.

4. „Punctele de extrem local“ vor fi numite mai simplu, „puncte de extrem“.

În cele ce urmează vom analiza cazuri particulare în care un punct x_0, $x_0\in I$ poate să fie punct de extrem local. Vom determina numai condiții „suficiente“, pentru ca un punct x_0 să fie punct de extrem.

1) Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ este derivabilă pe I atunci orice punct de extrem interior intervalului se află printre punctele critice ale funcției, conform teoremei lui Fermat.

Reamintim că se numesc puncte critice ale unei funcții derivabile zerourile derivatei, adică soluțiile ecuației $f'(x)=0$.

Evident, teorema lui Fermat asigură o condiție necesară dar nu şi suficientă pentru ca un punct să fie punct de extrem.

Reciproca teoremei nu este, în general, adevărată, adică un punct critic nu este întotdeauna punct de extrem local. De exemplu, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3$, are derivata nulă în $x_0=0$ şi totuşi acest punct nu este punct de extrem, funcția fiind strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Un punct critic, interior intervalului, este punct de maxim (respectiv de minim) dacă la stânga lui x_0 funcția este crescătoare (respectiv descrescătoare), iar la dreapta lui x_0 funcția este descrescătoare (respectiv crescătoare). Cele două situații sunt ilustrate în tabelele a) şi b).

Când funcția este derivabilă, este suficient să reținem că un punct critic interior intervalului în care derivata îşi schimbă semnul este punct de extrem local.

Dacă în x_0, interior intervalului, derivata se anulează, dar nu îşi schimbă semnul, atunci punctul x_0 nu este punct de extrem (tabelele c) şi d)).

x		x_0	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	M	$\searrow$

a)

x		x_0	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	m	$\nearrow$

b)

x		x_0	
f'	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\nearrow$

c)

x		x_0	
f'	$-$	0	$-$
f	$\searrow$		$\searrow$

d)

În punctele de extrem interioare intervalului în care derivata se anulează, reprezentarea grafică are tangenta paralelă cu axa Ox.

Exemplu Să determinăm eventualele puncte de extrem ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^5-5x^3$.
Funcția este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x)=15x^4-15x^2=15x^2(x^2-1)$.
Zerourile derivatei sunt: –1, 0, 1.
Întocmim tabelul de variație:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	2 M	$\searrow$	0	$\searrow$	-2 m	$\nearrow$	

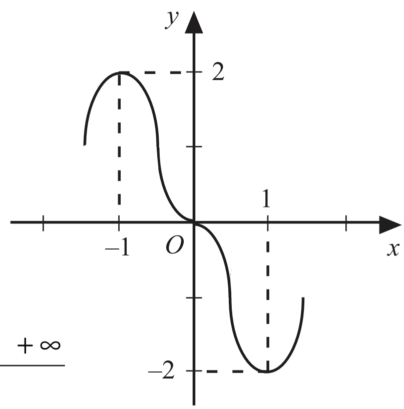


Fig. 18

Se observă că $x=-1$ este un punct de maxim, iar $x=1$ punct de minim. Punctul $x=0$ este punct critic, dar nu este punct de extrem. În figura 18, este trasat graficul pe o restricție ce include intervalul $[-1, 1]$.

2) Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ este continuă pe intervalul I (închis sau deschis) şi nu este derivabilă într-un punct x_0 interior intervalului, dar are derivate laterale diferite (finite sau infinite), atunci punctul x_0 este punct unghiular sau punct de întoarcere pentru graficul funcției.

Lemă

Fie funcția $f: I \to \mathbb{R}$ şi x_0 un punct interior intervalului. Dacă:

a) f este continuă în x_0;

b) f are în x_0 derivate laterale diferite (finite sau nu) cu proprietatea că $f_s'(x_0) \cdot f_d'(x_0) < 0$,

atunci x_0 este un punct de extrem.

Demonstrație: Vom trata cazul în care derivatele laterale sunt finite şi astfel încât $f_s'(x_0) = a > 0$ şi $f_d'(x_0) = b < 0$. Celelalte situații se tratează similar.

Din ipoteză, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a > 0$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b < 0$.

Fie $\varepsilon > 0$ astfel încât $a - \varepsilon > 0$ şi $b + \varepsilon < 0$.

Din definiția cu vecinătăți a limitei, rezultă că există intervalele $(x_0-\alpha, x_0) \subset I$ şi $(x_0, x_0+\beta) \subset I$, cu $\alpha > 0$ şi $\beta > 0$, astfel încât: $\forall\, x \in (x_0-\alpha, x_0)$ să avem $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > a - \varepsilon > 0$ (*)

şi $\forall\, x \in (x_0, x_0+\beta)$ să avem $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < b + \varepsilon < 0$ (**).

Din (*), rezultă $f(x) - f(x_0) < 0$, deci $f(x) < f(x_0)$ pe $(x_0-\alpha, x_0)$.

Din (**), rezultă, de asemenea, că $f(x) - f(x_0) < 0$, de unde $f(x) < f(x_0)$ pe $(x_0, x_0+\beta)$.
Am dovedit că $\forall x \in (x_0-\alpha, x_0+\beta) \subset I$, $x \neq x_0$, $f(x_0) > f(x)$, deci x_0 este un punct de maxim strict.

Cum într-un punct de întoarcere derivatele laterale sunt infinite şi de semne contrare, rezultă că orice punct de întoarcere este punct de extrem.

În cazul în care una dintre derivatele laterale este zero în punctul x_0 se analizează monotonia funcției de o parte şi de alta a lui x_0.

Exemple **1.** Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|$ cu $f'(x) = \begin{cases} +1, & x < 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$.

Funcția este continuă în $x = 0$, dar nu este derivabilă. Cum $f_s'(0) > 0$ şi $f_d'(0) < 0$, rezultă că punctul $x = 0$ este punct de maxim local (fig. 19).

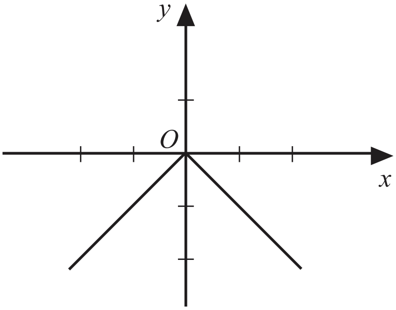


Fig. 19

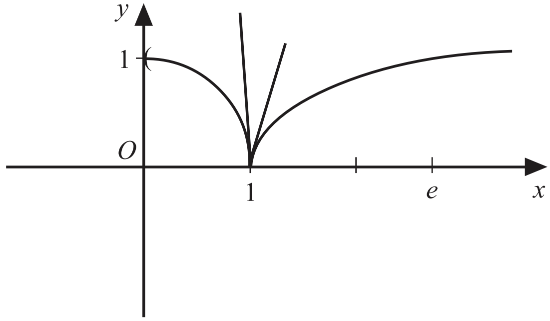


Fig. 20

2. În $x = 1$ funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x^2+1, & x \in (0,1] \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ este continuă și cum

$f'(x) = \begin{cases} -2x, & x < 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$, iar $f_s'(1) = -2$ și $f_d'(1) = 1$, rezultă că nu este derivabilă în $x = 1$,

dar acest punct este de minim pentru graficul funcției (fig. 20).

3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty,1] \\ 1, & x \in (1, 3) \\ x-2, & x \in [3, +\infty) \end{cases}$ cu $f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty,1) \\ 0, & x \in (1, 3) \\ 1, & x \in (3, +\infty) \end{cases}$.

În $x = 1$ și în $x = 3$ funcția este continuă, dar nu este derivabilă.
Avem $f_s'(1) > 0,\ f_d'(3) > 0$ și $f'(x) = 0,\ \forall x \in (1, 3)$.
Cum $f'(x) > 0,\ \forall x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, rezultă că $x = 1$ este un punct de maxim, iar $x = 3$ un punct de minim (fig. 21).

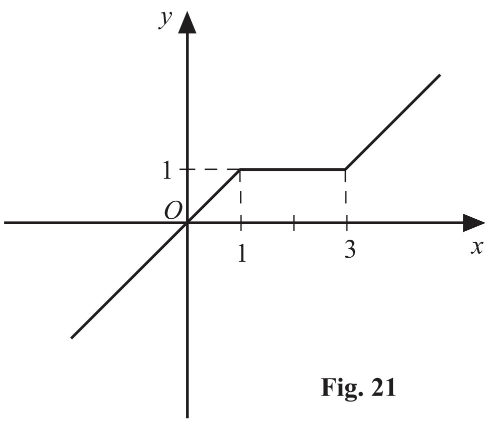


Fig. 21

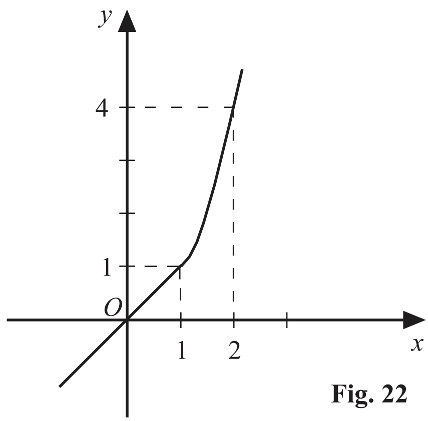


Fig. 22

4. În $x = 1$ funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$ este continuă, dar nu este derivabilă.

$f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$. Cum $f'(x) > 0,\ \forall x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, rezultă că funcția este cres-cătoare și la stânga și la dreapta lui 1, deci $x = 1$ nu este punct de extrem. Acest exemplu arată că nu orice punct unghiular este punct de extrem (fig. 22).

5. Fie $f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-1,0] \\ x^2 e^x, & x \in (0,1) \end{cases}$.

Aceasta este continuă în $x = 0$. Derivând obținem $f'(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1,0) \\ x(2+x)e^x, & x \in (0, 1) \end{cases}$.

Se constată că $f_s'(0) = -1$, iar $f_d'(0) = 0$, deci în $x = 0$ graficul are punct unghiular. Cum funcția este descrescătoare la stânga lui 0 şi crescătoare la dreapta, rezultă că $x = 0$ este punct de minim.

6. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$.
Observăm că $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$, $x \neq 1$, şi $f_s'(1) = -\infty$, iar $f_d'(1) = +\infty$, deci în $x = 1$ graficul are un punct de întoarcere. Cum $f'(x) > 0$, $\forall x \in (1, +\infty)$, şi $f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 1)$, rezultă că $x = 1$ este un punct de minim. În figura 23, este prezentat graficul funcției pe restricția $[0, 2]$.

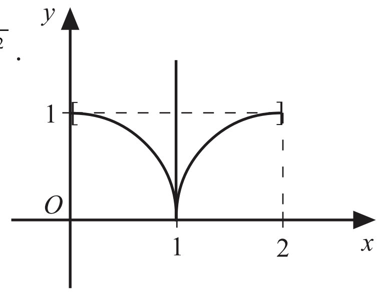


Fig. 23

3) Dacă într-un punct x_0, interior mulțimii de definiție, funcția este discontinuă, este necesar să studiem monotonia funcției de o parte şi de alta a acestui punct şi apoi, având în vedere definiția, să decidem dacă acesta este sau nu un punct de extrem.

Exemplu Graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & x \in (0, 1) \\ -2, & x = 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$$

este trasat în figura 24.

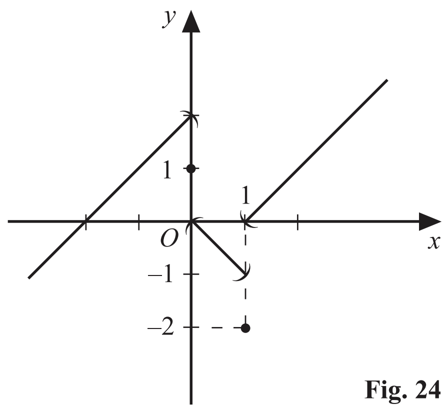


Fig. 24

Funcția este discontinuă în $x = 0$ şi $x = 1$.
Se constată că $x = 0$ nu este punct de extrem pentru că în orice vecinătate a lui 0 există simultan valori ale lui x pentru care $f(x) < f(0) = 1$ şi valori pentru care $f(x) > f(0)$.
Punctul $x = 1$ este punct de minim pentru că, de exemplu, $\forall x \in (0, 2)$, $f(x) > f(1) = -2$.

4) Dacă o funcție este definită pe un interval închis la ambele capete sau numai la unul dintre ele (sau este definită pe reuniune de astfel de intervale) este necesar să se analizeze dacă acestea sunt sau nu puncte de extrem.

Exemple **1.** Funcția $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ are derivata $f'(x) = -\sin x$, care se anulează în $x = 0$, $x = \pi$ şi $x = 2\pi$. Toate cele trei puncte sunt puncte de extrem local.

x	0		π		2π
f'	0	$-$	0	$+$	0
f	1 M	$\searrow$	-1 m	$\nearrow$	1 M

2. Funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ are în $x=0$ punct de minim.

3. Fie $f:[0,3)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$.
Să observăm că $x=0$ este punct de minim (fig. 25).

x	0		$+\infty$
f'	0	$+$	
f	0 m	$\nearrow$	

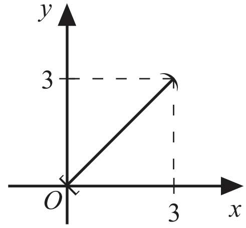


Fig. 25

4. Funcția $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1) \\ 0, & x=0 \end{cases}$ este chiar derivabilă pe intervalul $[0, 1)$, dar se poate demonstra că $x=0$ nu este punct de extrem pentru că nu există nici o vecinătate a lui zero în care f să aibă semn constant.

În concluzie, eventualele puncte de extrem ale unei funcții definite pe un interval (sau reuniune de intervale) se află printre:

1. punctele critice ale funcției;
2. punctele în care funcția nu este derivabilă dar are derivate laterale diferite;
3. punctele de discontinuitate din interiorul intervalului I;
4. capetele de interval închis.

Exerciții propuse

1. Să se demonstreze că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ are un singur punct de extrem de abscisă $x=\dfrac{-b}{2a}$ (abscisa vârfului parabolei corespunzătoare).

2. Să se determine intervalele de monotonie şi eventualele puncte de extrem pentru funcțiile:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+3x^2+1$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+3x+5$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x^2$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$;

e) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x-1}$;

f) $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$;

g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+2}$;

h) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$;

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$;

j) $f:(0,2\pi)\setminus\{\pi\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{\sin x}$.

3. Să se determine valoarea parametrului real m astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+x+m)\cdot e^{2x}$ să fie strict crescătoare.

4. Să se demonstreze că funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)^{\frac{1}{x}}$ este strict descrescătoare.

5. Să se studieze monotonia funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+x, & x\ge 0 \\ \dfrac{e^{x^2}-1}{x}, & x<0 \end{cases}$.

6. Să se demonstreze că următoarele funcţii diferă printr-o constantă şi să se determine această constantă:

a) $f,g:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin x$ şi $g(x)=-\arccos x$;

b) $f,g:(-\infty,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$ şi $g(x)=\operatorname{arctg}x$;

c) $f,g:(1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$ şi $g(x)=\operatorname{arctg}x$;

d) $f,g:(-\infty,-1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{2(1+x^2)}}$ şi $g(x)=\operatorname{arctg}x$;

e) $f,g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{2(1+x^2)}}$ şi $g(x)=-\operatorname{arctg}x$.

7. Să se determine cel mai mare termen al şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n=27n-\dfrac{n^4}{4}+7$.

8. a) Să se afle $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} xe^x, & x\le 1 \\ -x^2+\alpha x+\beta, & x>1 \end{cases}$ să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru α şi β determinate la punctul a) să se determine punctele de extrem ale funcţiei *f*.

9. Să se determine punctele de extrem ale funcţiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\sqrt{|1-x^2|}$;

b) $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{|x-1|}{x+1}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$;

d) $f:[-2\pi,2\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\sin x$;

e) $f:(-\infty,0)\cup[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x+2}e^{|x|}$;

g) $f:[0,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 1, & x\in[0,3]\setminus\{1,2\} \\ 0, & x=1 \\ 2, & x=2 \end{cases}$;

h) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x+1, & x<-1 \\ x^2-1, & |x|\le 1 \\ |1-\ln x|, & x>1 \end{cases}$;

i) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x\ln\dfrac{1}{x}+(1-x)\ln\dfrac{1}{1-x}, & x\in(0,1) \\ 0, & x\in\{0,1\} \end{cases}$.

10. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-6x+m}{2x-4}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să admită un extrem în $x=1$.

11. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x^2+4x+m)\cdot e^x,\ m\in\mathbb{R}$. Să se determine m astfel încât funcția să admită puncte de extrem.

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x^2+mx)\cdot e^{-x},\ m\in\mathbb{R}$. Să se arate că f admite două puncte de extrem pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

13. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2+(a-2)x+1-a, & x<1\\ a\ln x, & x\ge 1\end{cases}$. Să se determine valorile parametrului real a astfel încât f să admită un punct de extrem.

14. Fie funcția $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\dfrac{1}{x+m},\ m\in\mathbb{R}$, D fiind domeniul maxim de definiție al funcției f. Pentru ce valoare a lui m abscisa punctului de minim este jumătate din abscisa punctului de maxim?

§9. Rolul derivatei a II-a în studiul funcțiilor: concavitate, convexitate, puncte de inflexiune

Fie funcțiile $f,g:[0,1]\to[0,1],\ f(x)=x^2$ şi $g(x)=\sqrt{x}$.

Să observăm că: $f'(x)=2x>0,\ \forall x\in[0,1]$ şi $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0,\ \forall x\in[0,1]$.

Tabelele de variație sunt:

x	0		1
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

x	0		1
$g'(x)$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	0	$\nearrow$	1

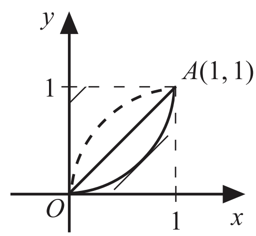


Fig. 26

Ambele funcții sunt strict crescătoare pe [0, 1], pornesc din punctul $O(0,0)$ şi ajung în $A(1,1)$. Traseul de la O la A poate fi parcurs de fiecare dintre ele în cele două moduri din figura 26.

Cunoaşterea numai a monotoniei funcției nu ne permite să decidem, în toate cazurile, care este alura graficului.

Exemplul considerat arată că reprezentarea grafică a unei funcții derivabile pe (a, b), strict crescătoare, poate fi făcută în două moduri, după cum tangenta la grafic, în fiecare punct, se află sub grafic sau deasupra graficului.

Vom justifica ulterior că graficul din figura 10 prezentat sub formă de linie continuă este al funcției $f(x)=x^2$, iar cel cu linie punctată este al funcției $g(x)=\sqrt{x}$.

9.1. Concavitate-convexitate

În figura 27, sunt prezentate cele două modalități de reprezentare a unei funcții derivabile crescătoare, iar în figura 28, cele două modalități de reprezentare a unei funcții derivabile descrescătoare.

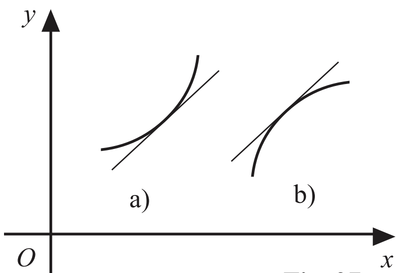


Fig. 27

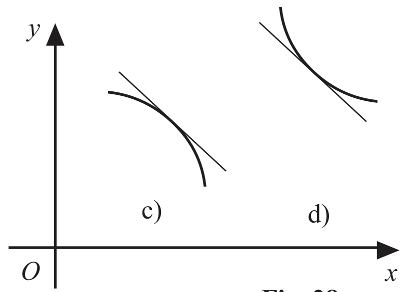


Fig. 28

Curbele *a*) şi *d*) din figuraile 28 şi 29 sunt curbe convexe, iar cele notate cu *b*) şi *c*) sunt curbe concave.

În cele ce urmează vom arăta că, în cazul funcțiilor de două ori derivabile pe un interval, semnul funcției f'' va preciza intervalele pe care funcția este convexă (respectiv concavă), deci va constitui un criteriu foarte util pentru determinarea convexității (respectiv concavității) funcției.

Pentru aceasta este necesar să reamintim cum au fost definite funcțiile convexe (respectiv concave) în clasa a X-a.

Definiții

Vom considera o funcție $f: I \to \mathbb{R},\ I \subset \mathbb{R},\ I$ interval.

1. Funcția *f* se numeşte convexă dacă pentru orice $a, b \in I$ şi pentru orice $t \in [0,1]$ avem $f((1-t)a+tb) \le (1-t)f(a)+tf(b)$.

2. Funcția *f* se numeşte concavă dacă funcția $-f$ este convexă.

Reamintim de asemenea că f este concavă (respectiv convexă), dacă pentru orice $a, b \in I$, $a < b$, segmentul determinat de punctele $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$ se află deasupra (respectiv dedesubtul) graficului funcției *f* cuprins între punctele *A* şi *B* (graficul restricției lui *f* la $[a, b]$).

Lemă

Pentru orice $a \neq x$ din *I* notăm panta $p_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (evident, $p_a(x) = p_x(a)$).

f este convexă dacă şi numai dacă pentru orice $a < c < b$ din *I* avem $p_c(a) \le p_c(b)$.

Demonstrație: 1) **Necesitatea** condiției. Presupunem că *f* este convexă. Fie $a < c < b$ din *I*, arbitrare. Atunci $\exists t \in (0,1)$ astfel încât $c = (1-t)a + tb$. Într-adevăr, rezolvând ecuația, rezultă $t = \dfrac{c-a}{b-a}$ şi $1 - t = \dfrac{b-c}{b-a}$. Utilizând condiția de convexitate şi înlocuindu-l pe t şi $1-t$, se obțin relațiile:

$(1-t)f(c)+tf(c)=f(c)\le(1-t)f(a)+tf(b)$; $\quad(1-t)(f(c)-f(a))\le t(f(b)-tf(c))$;

$\dfrac{f(c)-f(a)}{t}\le\dfrac{f(b)-f(c)}{1-t}$; $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}\le\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$; $p_c(a)\le p_c(b)$.

2) **Suficiența** condiției: Presupunem că pentru orice $a<c<b$ din I avem $p_c(a)\le p_c(b)$ cu $a,b\in I$, $a<b$ şi $t\in(0,1)$, arbitrari. Notăm $c=(1-t)a+tb$ şi constatăm că $a<c<b$. Conform ipotezei, $p_c(a)\le p_c(b)$.

Refăcând calculele de la 1) în sens invers, rezultă că $f((1-t)a+tb)\le f(c)\le(1-t)f(a)+tf(b)$.

În concluzie, f este convexă.

Teoremă

Cu notațiile din definițiile precedente, să presupunem că f este continuă pe I şi este de două ori derivabilă pe J - interiorul lui I (adică I fără extremități). Atunci f este convexă pe I dacă şi numai dacă $f''(x)\ge 0$ pentru orice $x\in J$.

Demonstrație: 1) **Necesitatea** condiției. Presupunem că f este convexă.

Fie $a<b$ din J, arbitrari. Vom arăta că $f'(a)\le f'(b)$. Fie numerele s şi t arbitrare, astfel încât $a<s<t<b$. Conform lemei, avem relațiile $\dfrac{f(s)-f(a)}{s-a}=p_s(a)\le p_s(t)=p_t(s)\le p_t(b)=\dfrac{f(t)-f(b)}{t-b}$.

Trecând la limită după s obținem $f'(a)=\lim\limits_{s\to a}\dfrac{f(s)-f(a)}{s-a}\le\dfrac{f(t)-f(b)}{t-b}$, şi apoi după t obținem $f'(a)\le\lim\limits_{t\to b}\dfrac{f(t)-f(b)}{t-b}=f'(b)$, ceea ce trebuia arătat.

Rezultă că derivata $f':J\to\mathbb{R}$ este crescătoare. Atunci, $\forall x\in J$ avem $(f')'(x)=f''(x)\ge 0$.

2) **Suficiența** condiției. Presupunem că $f''(x)\ge 0$, $\forall x\in J$.

Rezultă că derivata $f':J\to\mathbb{R}$ este crescătoare. Fie numerele $a<c<b$ arbitrare, din I.

Aplicăm teorema lui Lagrange pentru f pe intervalele $[a,c]$ şi $[c,b]$. Rezultă că există s şi t astfel încât să avem $a<s<c<t<b$, $p_c(a)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(s)$ şi $p_c(b)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(t)$.

Deoarece a, b, c sunt arbitrare, se aplică lema şi rezultă că f este convexă.

Observație: Din demonstrație, a reieşit faptul că „$f:I\to\mathbb{R}$ este convexă dacă şi numai dacă derivata $f':J\to\mathbb{R}$ este crescătoare".

Exemple și observații.

a) Să reluăm funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$f(x)=x^2$ şi $g(x)=\sqrt{x}$.

Avem $f'(x)=2x$ şi $f''(x)=2>0$, iar $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ şi $g''(x)=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}<0$.

x	0		1
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	0	$\nearrow$	1
$f''(x)$		$\smile$ +	

x	0		1
$g'(x)$	+	+	+
$g(x)$	0	$\nearrow$	1
$g''(x)$		$\frown$ −	

De aici rezultă cu certitudine că f este convexă, iar g este concavă. Tabelele lor de variație pot fi completate cu o nouă linie în care este precizat semnul derivatei a doua.

b) Funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\ln x$ este concavă pe $(0,+\infty)$ pentru că $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$, $\forall x\in(0,+\infty)$, iar funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ este convexă pentru că $g''(x)=\dfrac{1}{x^2\ln 2}>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

c) Să stabilim intervalele de convexitate ale funcției $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Avem $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ și $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$. Deci pentru $x\in(-\infty,0)$, f este concavă iar pentru $x\in(0,+\infty)$, f este convexă.

d) Funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ este continuă pe $[-1, 1]$ și derivabilă de două ori pe $(-1, 1)$, cu $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ și $f''(x)=-\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}<0$. Rezultă că f este concavă pe $[-1, 1]$.

Tabelul de variație și graficul ei sunt prezentate mai jos.

x	-1		0		1
$f'(x)$	$\vert^{+\infty}$	$+$	0	$-$	$^{-\infty}\vert$
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$f''(x)$		$\frown$ $-$		$\frown$ $-$	

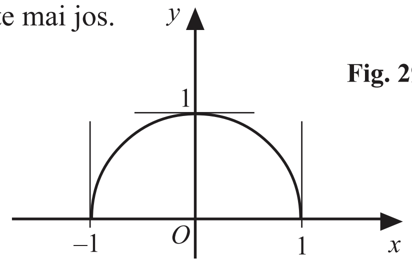


Fig. 29

Să remarcăm că graficul funcției din figura 29 este semicercul de centru $O(0, 0)$ și rază 1 având toate punctele de ordonată pozitivă.

Observații:

1. Dacă inegalitatea $f((1-t)x_1+tx_2)\le(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$ devine strictă funcția se numește strict convexă. Dacă $f''(x)>0$ pe intervalul (a, b) funcția va fi strict convexă. Dacă funcția este strict convexă nu este însă necesar ca $f''(x)$ să fie strict pozitivă. De exemplu funcția $f(x)=x^4$ este strict convexă cu toate că derivata a doua, $f''(x)=12x^2$, se anulează în $x = 0$.

2. Dacă derivata a doua a unei funcții nenule este zero pe un interval I, atunci prima derivată este $f'(x)=0$ sau $f'(x)=a$, $a\neq 0$. În primul caz $f(x)=k$, iar în al doilea $f(x)=ax+b$. În ambele cazuri graficul funcției este o dreaptă și deci, în astfel de cazuri, funcția este simultan convexă și concavă.

3. Prin abuz de limbaj se mai spune că funcțiile convexe au „*concavitatea în sus*“, iar cele concave au „*concavitatea în jos*“ sau încă, pentru stabilirea concavității sau convexității, se aplică *„regula ploii“,* ilustrată în figura 31.

a) „ține apa“ **Fig. 31** b) „nu ține apa“

4. Funcția f derivabilă pe intervalul I, este convexă (respectiv concavă) pe acest interval, dacă tangenta dusă în orice punct al graficului se află sub grafic (respectiv deasupra graficului).

9.2. Puncte de inflexiune

Considerând funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2$ obținem $f'(x)=3x^2-6x$ şi $f''(x)=6x-6$.

Tabelul de variație este:

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
			M				m				

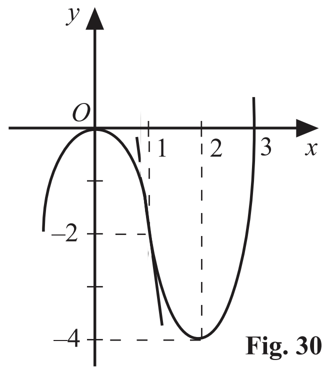


Fig. 30

iar graficul este cel din figura 30.

Funcția este concavă pe intervalul $(-\infty, 1]$ şi convexă pe intervalul $[1,+\infty)$.

În punctul $x = 1$ derivata a doua se anulează şi își schimbă semnul. În acest punct graficul admite tangentă pentru că funcția este derivabilă, iar tangenta traversează graficul. Pentru a putea analiza astfel de cazuri este necesar să dăm următoarea:

Definiție

Fie $f: I \to \mathbb{R}$, unde I este interval. Punctul x_0 se numeşte punct de inflexiune al funcției f dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

a) x_0 este interior intervalului I;

b) funcția este continuă în x_0;

c) funcția are derivată (finită sau infinită) în x_0;

d) funcția schimbă concavitatea în x_0 (adică de o parte a lui x_0 este convexă, iar de cealaltă parte este concavă) pe un interval $[x_0-r,\ x_0+r]\subset I$, cu $r>0$.

Din definiție rezultă că într-un punct de inflexiune funcția admite tangentă (pentru că are derivată) şi că de o parte a lui x_0 graficul este deasupra tangentei, iar de cealaltă parte el este sub tangentă, deci tangenta traversează graficul. În figura 31, sunt prezentate posibile puncte de inflexiune.

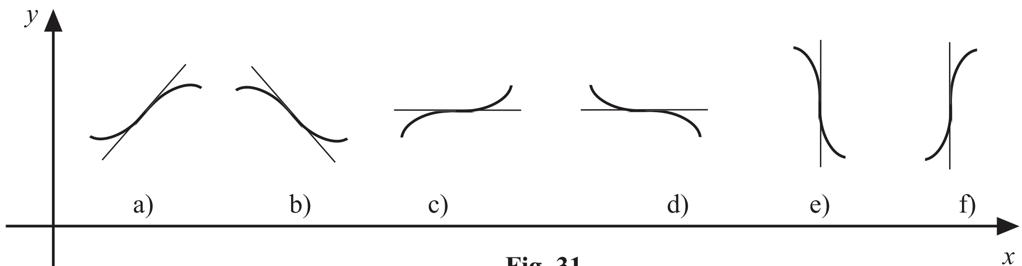


Fig. 31

Din definiția punctului de inflexiune şi din condiția de concavitate (convexitate) prezentate anterior rezultă următorul criteriu pentru determinarea eventualelor puncte de inflexiune ale unei funcții:

Fie funcția $f : I \to \mathbb{R}$ şi x_0 un punct interior intervalului I. Dacă:

a) f este continuă în x_0;

b) f are derivată în x_0;

c) există $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < x_0 < \beta$, astfel încât f este de două ori derivabilă pe $(\alpha, \beta) \setminus \{x_0\}$;

d) $f''(x) > 0$, $\forall x \in (\alpha, x_0)$ şi $f''(x) < 0$, $\forall x \in (x_0, \beta)$ sau invers (adică $f''(x) < 0$ pe (α, x_0) şi $f''(x) > 0$ pe (x_0, β)) atunci x_0 este punct de inflexiune pe f.

Observații:

1. Dacă funcția este de două ori derivabilă pe I, atunci eventualele puncte de inflexiune se află cu siguranță, printre zerourile derivatei a doua, interioare intervalului I.

Într-adevăr, dacă $f''(x_0) = 0$ şi f'' schimbă semnul în x_0, atunci x_0 îndeplineşte condițiile definiției punctului de inflexiune.

Exemplu Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = x^5 - 5x^4$ are $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$ şi $f''(x) = 20x^3 - 60x^2$. Tabelul de variație este:

x	$-\infty$		0		3		4		5		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(3)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
			M		I		m				

Se observă că singurul punct de inflexiune este $x = 3$.

Să remarcăm faptul că din $f''(0) = 0$ nu a rezultat că $x_0 = 0$ este punct de inflexiune.

2. Din exemplul precedent rezultă: condiția ca $f''(x_0) = 0$, pentru ca x_0 să fie punct de inflexiune, nu este suficientă. Vom dovedi că o astfel de condiție nu este nici necesară.

Exemplu Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Avem $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, iar $f''(x) = \dfrac{-2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$ pentru $x \neq 0$. Tabelul de variație este dat mai jos, iar graficul este prezentat în figura 32

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+\infty \mid +\infty$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$+$	$\mid$	$-$	$-$

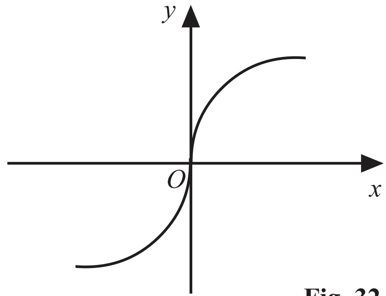


Fig. 32

Să observăm că $x = 0$ este punct de inflexiune c toate că funcția nu este derivabilă în x_0. Tangenta la gra fic în $x = 0$ este chiar axa Oy şi ea traversează graficul.

Exerciții rezolvate

Să se precizeze intervalele de convexitate şi concavitate ale funcțiilor de mai jos şi eventualele puncte de inflexiune:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x^2+3x+1$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x^2+4x+6)e^{-x}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x\le 0\\ -\sqrt{x}, & x>0\end{cases}$.

Rezolvare: a) $f'(x)=3x^2-6x+3,\ f''(x)=6x-6$.
Din tabelul de mai jos rezultă că pe intervalul $(-\infty, 1]$ funcția este concavă, iar pe intervalul $[1, \infty)$ este convexă.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

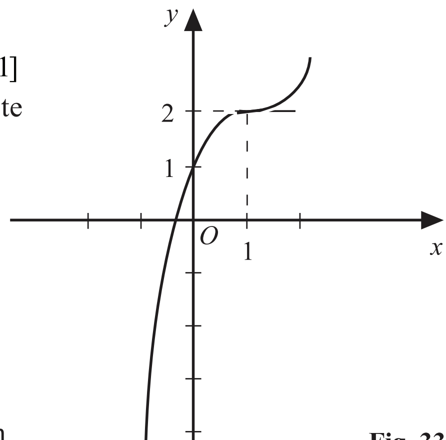


Fig. 33

În $x = 1$ funcția are un punct de inflexiune.
În jurul punctului $x = 1$, alura graficului este dată în figura 33. Se observă că tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox şi traversează graficul.

b) $f'(x)=(-x^2-2x-2)e^{-x}$, iar $f''(x)=x^2e^{-x}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	6	$\searrow$	
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$+$	$+$

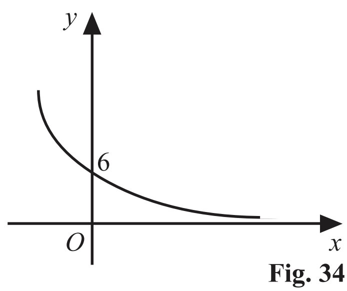


Fig. 34

Funcția este strict convexă pe $\mathbb{R}$ şi nu are puncte de inflexiune. Graficul este în figura 34.

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x}, & x\le 0\\ \dfrac{x}{1+x}, & x>0\end{cases}$; $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2}, & x\le 0\\ \dfrac{1}{(1+x)^2}, & x>0\end{cases}$; $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{(1-x)^3}, & x<0\\ \dfrac{-2}{(1+x)^3}, & x>0\end{cases}$.

Tabelul de variație este:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	1	$+$	$+$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$
$f''(x)$	$+$	$+$	$\vert$	$-$	$-$

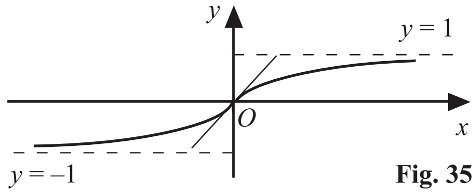


Fig. 35

Rezultă că pe intervalul $(-\infty,0)$ funcția este convexă, iar pe intervalul $(0,+\infty)$ funcția este concavă. Să remarcăm faptul că în punctul $x = 0$ funcția este derivabilă, cu $f'(0)=1$, dar nu este de două ori derivabilă $(f_s''(0)=2,$ iar $f_d''(0)=-2)$.
Cum în $x = 0$, interior mulțimii de definiție, funcția este continuă, are derivată şi, în plus, în acest punct, funcția îşi schimbă concavitatea, atunci conform definiției, el este punct de inflexiune. Graficul este prezentat în figura 35.

d) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{2\sqrt{-x}}, & x<0\\ \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}, & x>0\end{cases}$. Cum f este continuă în $x = 0$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=-\infty$ rezultă că f are derivată (infinită) în $x = 0$; $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4x\sqrt{-x}}, & x<0\\ \dfrac{1}{4x\sqrt{x}}, & x>0\end{cases}$.

Tabelul de variație este:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-\infty \vert -\infty$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$\vert$	$+$	$+$

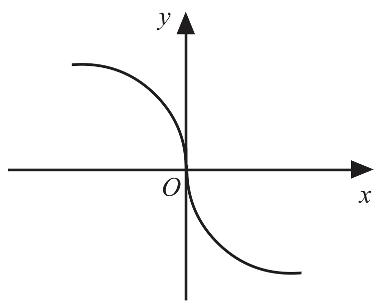


Fig. 36

Pe intervalul $(-\infty,0]$ funcția este concavă , iar pe intervalul $[0,+\infty)$ este convexă. În $x = 0$ funcția are punct de inflexiune. Tangenta la grafic traversează graficul şi este chiar axa Oy (fig. 36).

Exerciţii propuse

1. Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcţiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-x+1;$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4-6x^3+12x^2+5;$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+1};$

d) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=-x+2-4\dfrac{\ln x}{x};$

e) $f:[-2\pi,\ 2\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\sin x;$

f) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2\ln x;$

g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}};$

h) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\ge 0\\ -\sqrt{-x}, & x<0\end{cases}.$

2. Se dă funcţia $f:(-\infty,\alpha)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{\alpha-x}},\ \alpha\in\mathbb{R}$. Să se determine α astfel încât graficul funcţiei să admită un punct de inflexiune în $x=-4$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{ax^2+1}{x^2-1},\ a\in\mathbb{R}$. Să se cerceteze, în funcţie de a, existenţa punctelor de inflexiune.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^2+ax+1},\ a\in\mathbb{R}$. Să se determine valorile lui a pentru care funcţia are două puncte de inflexiune.

5. Să se arate că pentru orice număr natural $n\ge 2$ funcţia $f_n(x)=\sin^n nx$ are un singur punct de inflexiune $x_n\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2n}\right)$.

6. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+a^2},\ a>0$. Să se demonstreze că cele două puncte de extrem şi punctele de inflexiune diferite de origine ale graficului funcţiei f formează un paralelogram, $\forall a>0$. Pentru ce valori ale lui a obţinem un dreptunghi?

§10. Demonstrarea unor inegalităţi cu ajutorul derivatelor

Studiul monotoniei unei funcţii derivabile şi determinarea punctelor de extrem permit demonstrarea, cu destulă uşurinţă, a unor inegalităţi. Să analizăm câteva.

1. Dacă f şi g sunt două funcţii derivabile pe $\mathbb{R}$ şi se cere să arătăm că $f(x)\ge g(x)$ pentru orice x din $\mathbb{R}$, este suficient să considerăm funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=f(x)-g(x)$ şi să arătăm că mulţimea imaginilor acesteia, $h(\mathbb{R})$, este inclusă în $[0,+\infty)$.

Exemple

1. Să se demonstreze că $e^x\ge x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Fie $h(x)=e^x-x-1$. Cum $h'(x)=e^x-1$ avem tabelul alăturat.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$

Rezultă de aici că valoarea cea mai mică a lui h este $h(0)=0$ şi deci $h(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ adică $e^x\ge x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Să se arate că $\sin x \le \cos x + \sqrt{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$h(x) = \cos x - \sin x + \sqrt{2}$. Cum funcția este periodică, de perioadă principală $T = 2\pi$, este suficient să aflăm mulțimea imaginilor funcției numai pentru $x \in [0, 2\pi)$.

Cum $h'(x) = -\sin x - \cos x$ rezultă tabelul:

x	0		$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{7\pi}{4}$		2π
$h'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$h(x)$	$1+\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	$1+\sqrt{2}$

Se observă că $h(\mathbb{R}) = [0, 2\sqrt{2}] \subset [0, +\infty)$ deci inegalitatea este demonstrată.

Observație: Evident că inegalitatea se putea demonstra şi fără derivate dar am vrut să punem în evidență metoda.

2. Dacă f şi g sunt derivabile pe $[a, +\infty)$ şi se cere să arătăm că $f(x) \ge g(x)$ pentru orice x din $[a, +\infty)$ nu mai este necesară întocmirea tabelului. Este suficient să arătăm că $h(a) \ge 0$ şi $h'(x) \ge 0, \ \forall x \in [a, +\infty)$

Într-adevăr, din $h'(x) \ge 0$ rezultă că h este crescătoare şi cum $h(a) \ge 0$ este valoarea minimă a funcției rezultă că $\forall x \in [a, +\infty)$, $h(x) \ge 0$, deci $f(x) \ge g(x)$.

Exemple

1. Să se demonstreze că $\ln(x+1) \ge \dfrac{2x}{x+2}$ pentru $x \ge 0$.

Fie $h(x) = \ln(x+1) - \dfrac{2x}{x+2}$.

Avem $h(0) = 0$ şi $h'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{4}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} \ge 0$ de unde

$h(x) \ge h(0)$ şi deci $\ln(x+1) \ge \dfrac{2x}{x+2}, \ \forall x \in [0, +\infty)$.

2. Să se arate că, oricare ar fi $x \ge 0$, $\cos x \ge 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Dacă $h(x) = \cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1$ avem $h(0) = 0$, iar $h'(x) = -\sin x + x$.

Pentru a arăta că $h'(x) \ge 0, \ \forall x \ge 0$, vom folosi derivata a doua a lui h.

$h''(x) = -\cos x + 1$, deci $h''(x) \ge 0$, şi cum $h'(0) = 0$, rezultă că $h'(x) \ge 0, \ \forall x \in [0, +\infty)$. De aici şi din $h(0) = 0$ obținem inegalitatea cerută.

Observații:

1. Pentru inegalități pe intervale de forma $(a, +\infty)$ se înlocuieşte condiția $h(a) \ge 0$ cu $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} h(x) \ge 0$.

2. Procedeele expuse se pot adapta şi la intervale de forma $(-\infty, a]$ sau la reuniune de intervale disjuncte.

Exerciții rezolvate

1. Să se demonstreze că $e^{\pi} > \pi^{e}$.

Soluție: $e^{\pi} > \pi^{e} \Leftrightarrow \pi \ln e > e \ln \pi \Rightarrow \dfrac{\ln e}{e} > \dfrac{\ln \pi}{\pi}$.

Considerăm funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Cum $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ rezultă tabelul de variație:

x	0		e	π	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{\ln e}{e}$	$\searrow$	

Cum pe intervalul $[e, +\infty)$ funcția este descrescătoare şi cum $e < \pi \Leftrightarrow f(e) > f(\pi)$, deci $\dfrac{\ln e}{e} > \dfrac{\ln \pi}{\pi} \Leftrightarrow e^{\pi} > \pi^{e}$.

Din demonstrația anterioară rezultă că în $x = e$ funcția are un maxim global.

2. Demonstrați că oricare ar fi $n,\ n \in \mathbb{N}^*$, există relația: $\dfrac{2}{2n+1} < \ln \dfrac{n+1}{n} < \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Soluție: Dacă aplicăm teorema lui Lagrange funcției $f(x) = \ln x$ definită pe intervalul $[n, n+1],\ n \in \mathbb{N}^*$ obținem: $\dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{n+1-n} = \dfrac{1}{c}$, cu $c \in (n, n+1)$.

De aici rezultă: $\dfrac{1}{n+1} < \ln \dfrac{n+1}{n} < \dfrac{1}{n}$ (*), $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dar $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{2}{2n+1}$ şi $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, deci dubla inegalitate (*) este mai „slabă“ decât cea cerută. Vom demonstra o inegalitate mai „tare“ decât cea din enunț şi anume:

oricare ar fi numerele reale x_1 şi x_2 cu $0 < x_1 < x_2$, avem:

$$\frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 + x_2} < \ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_1 x_2}} \ (**).$$

Să observăm că din $0 < x_1 < x_2$ rezultă $\dfrac{x_2}{x_1} > 1$, şi notând $\dfrac{x_2}{x_1} = x$, inegalitatea (**) devine $\dfrac{2(x-1)}{1+x} < \ln x < \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ pentru $x \in (1, +\infty)$. Fie $f(x) = \ln x - \dfrac{2(x-1)}{1+x}$; cum $f(1) = 0$ şi $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{(1+x)^2}$, deci $f'(x) = \dfrac{(1-x)^2}{x(1+x)^2} > 0$, rezultă $f(x) > 0$, $x \in (1, \infty)$, adică partea stângă a inegalității este demonstrată.

Să demonstrăm acum că $\ln x < \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$. Fie $g(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \ln x,\ x \in (1, +\infty)$.

$g(1) = 0$ şi $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}} > 0$, deci $g(x) > 0$, adică $\ln x < \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$,

ceea ce termină demonstrația inegalității.

Observații:

1. În esență, rezolvarea anterioară dovedește că intervalul de existență a lui c din teorema lui se poate micşora. În cazul nostru, $\left(\frac{2}{2n+1}, \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right) \subset (n, n+1)$.
2. În particular, pentru $x_1 = n$ şi $x_2 = n+1$, $n \in \mathbb{N}^*$, obținem relația din enunțul inițial.

Exerciții propuse

1. Să se arate că:

a) $e^x \leq 1 + xe^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

b) $x\cos x < \sin x, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1, \quad \forall x \geq 1$;

d) $(x+1)\ln(x+1) > \operatorname{arctg} x, \quad \forall x > 0$;

e) $x - \frac{x^3}{3} \leq \operatorname{arctg} x, \quad \forall x \geq 0$;

f) $\frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$;

g) $\ln(1-x^2) < x + \frac{1}{2}, \quad \forall x \in (-1, 1)$.

2. Dovediți că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1+x^2)$.

3. Determinați valorile reale ale lui a astfel încât $e^x \geq ax + 1, \quad \forall x \geq 0$.

4. Arătați că pentru orice $x \geq 2$ are loc inegalitatea: $(x+1)\cos\frac{\pi}{x+1} - x\cos\frac{\pi}{x} > 1$.

5. Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea: $e^x + e^{-x} \leq 2e^{ax^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

6. Să se arate că pentru orice $x > -1$ avem: $1 + \ln(1+x) \leq e^x$.

7. Să se arate că pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ este adevărată inegalitatea: $\sin x \geq \frac{x}{x+1}$.

8. a) Să se arate că pentru orice $x > 0$ avem: $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

b) Calculați: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

9. a) Să se arate că pentru orice $x > 0$ avem: $x - \frac{x^2}{2} < \sin x < x$.

b) Calculați: $\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \ldots + \sin\frac{n}{n^2}\right)$.

Capitolul 4 Reprezentarea grafică a funcțiilor

Reamintim câteva noțiuni importante întâlnite în studiul funcțiilor elementare de bază.

Definiție

Fie funcția $f : A \to B$. Se numește **graficul funcției** f mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.
Rezultă de aici că G_f este o submulțime a mulțimii $A \times B$.

Dacă A și B sunt submulțimi ale lui $\mathbb{R}$, funcția $f : A \to B$ se numește **funcție reală de variabilă reală** sau **funcție numerică**. În acest caz $G_f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ și unui cuplu $(x, y) \in \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ îi putem asocia un punct $M(x, y)$ într-un plan înzestrat cu un reper ortonormal xOy.

Definiție

Fie $f : A \to B$ o funcție numerică. Se numește **reprezentarea geometrică** a funcției f mulțimea punctelor $M(x, y)$ din plan, pentru care $x \in A$ și $y = f(x)$.

În dorința de a simplifica limbajul, atunci când nu există pericol de confuzie, reprezentarea geometrică o vom numi **reprezentare grafică** sau **graficul funcției**.

Este evident faptul că reprezentarea grafică a unei funcții permite vizualizarea unor proprietăți importante ale acesteia. Cum însă fixarea într-un sistem de referință xOy a unor puncte (de exemplu cele de coordonate iraționale) este dificilă, vom obține o redare aproximativă a graficului unei funcții adică obținem „alura" graficului și nu reprezentarea grafică (este suficient să încercăm să reprezentăm o funcție definită pe toată mulțimea numerelor reale).

Reprezentarea grafică a unor funcții elementare (de bază) a fost deja făcută.

În cele ce urmează ne propunem să studiem, cu ajutorul instrumentelor oferite de analiza matematică, variația oricărei funcții, finalizată printr-o reprezentare grafică ce poate ilustra proprietățile ei, locale sau globale.

Reciproc, având în față o reprezentare grafică, putem, prin așa numita „lectură grafică", să decidem dacă aceasta este sau nu reprezentarea grafică a unei funcții și, în caz afirmativ, să deducem importante proprietăți ale acesteia.

Studiul șirurilor, al limitelor de funcții, al continuității și derivabilității precum și teoremele asupra funcțiilor derivabile permit abordarea, acum mult mai riguros, a problemei reprezentării grafice a unei funcții oarecare.

Este nevoie însă de o reinterpretare a unor rezultate și de câteva precizări.

§1. Reprezentarea grafică a funcțiilor

Studiul făcut până acum asupra variației unei funcții ne permite să trasăm, cu destulă precizie, reprezentarea grafică a acesteia într-un sistem ortogonal de axe xOy.

De multe ori, în loc de „*să se reprezinte grafic funcția*“ se foloseşte expresia „*să se traseze graficul funcției*“, iar în loc de „*mulțimea de definiție*“ se foloseşte termenul „*domeniul de definiție*“.

În cele ce urmează vom folosi în mod esențial noțiunea de derivată.

Studiul variației unei funcții este vizualizat prin graficul ei. Precizăm din nou că nu există o reprezentare grafică perfectă, ci numai una aproximativă.

Pentru obținerea unui grafic cât mai exact recomandăm parcurgerea următoarelor etape:

1. **Stabilim mulțimea maximă de definiție** a funcției în cazul în care aceasta nu este precizată în enunț.
2. **Stabilim mulțimea de studiu** (studiem paritatea sau imparitatea funcției, periodicitatea sau mulțimea de studiu rezultată din contextul problemei). Astfel, dacă funcția este definită pe o multime simetrică în raport cu originea (adică dacă mulțimea de definiție conține punctul x_0 atunci conține şi punctul $-x_0$) şi, în plus, $f(-x)=f(x)$, atunci funcția este pară şi deci graficul ei este simetric în raport cu Oy, iar dacă $f(-x)=-f(x)$, atunci funcția este impară şi graficul ei este simetric în raport cu originea axelor.

   În cele două cazuri de mai sus, este suficient să studiem funcția pentru valorile pozitive ale lui x. Dacă funcția este periodică şi are perioadă principală, este suficient să o studiem pe perioada principală T, deci pentru $x \in [0, T]$.

   Dacă studiem o funcție în care variabila reprezintă, de exemplu, înălțimea unui con înscris într-o sferă, atunci evident că mulțimea de studiu va fi $[0, 2R]$.

   Dacă se cere să studiem variația şi să reprezentăm grafic funcția derivată a unei funcții, trebuie să avem în vedere că mulțimea de definiție a funcției derivate este cel mult egală cu mulțimea de definiție dată.

   De exemplu, dacă se consideră funcția $f(x)=\ln x$ şi se cere graficul funcției $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ atunci mulțimea de studiu a funcției f' este $(0,+\infty)$.
3. **Determinăm eventualele intersecții cu axele** de coordonate, adică analizăm existența pe grafic a unor puncte de forma $(x_0,0)$ şi $(0,f(0))$.

   Pentru a afla intersecția cu axa Ox rezolvăm ecuația $f(x)=0$.

   Dacă aceasta are soluțiile x_i atunci punctele de intersecție sunt de forma $(x_i,0)$.

   Intersecția cu axa Oy este punctul $(0,f(0))$ dacă acesta există.
4. **Calculăm limitele la capetele intervalelor** din mulțimea de definiție.
5. **Analizăm existența asimptotelor**

   Această problemă a fost rezolvată în bună parte la punctul anterior.

Dacă într-un punct $x = a$ cel puțin o derivată laterală este infinită, dreapta $x = a$ este asimptotă verticală.

Dacă problema limitelor la $-\infty$ sau $+\infty$ a avut sens şi cel puțin una a existat şi a fost finită (egală cu n) atunci dreapta $y = n$ este asimptotă orizontală la ramura respectivă.

Dacă cel puțin una dintre aceste limite a fost infinită atunci procedând ca la paragraful 6 se cercetează existența asimptotelor oblice ($y = mx + n$), sau a altor asimptote.

6. Studiem mulțimea de continuitate a funcției.

7. Calculăm derivata pe intervalele pe care aceasta există şi stabilim semnul ei. Analizăm natura punctelor în care funcția nu este derivabilă.

Obținem astfel intervalele de monotonie ale funcției şi determinăm eventualele puncte de extrem.

Aceste aspecte au fost analizate pe larg în paragrafele 1 şi 2.

Reamintim că pe intervalul pe care derivata este pozitivă funcția este crescătoare, iar pe cele pe care este negativă funcția este descrescătoare.

Eventualele puncte de extrem se găsesc printre punctele critice ale funcției sau printre punctele în care funcția este continuă dar nu este derivabilă sau printre punctele de discontinuitate ale funcției sau printre capetele de interval închis.

8. Calculăm derivata a doua pe intervalele pe care aceasta există. Aflăm zerourile ei şi stabilim intervalele de concavitate (sau convexitate). Determinăm eventualele puncte de inflexiune. Reamintim că pe intervalele pe care derivata a doua este pozitivă funcția este convexă, iar pe cele pe care derivata a doua este negativă funcția este concavă. Punctele de **inflexiune** vor fi numai acele puncte din interiorul domeniului de definiție, în care **funcția este continuă**, **are derivată** (finită sau infinită) şi în care **funcția îşi schimbă concavitatea**.

9. Întocmim tabelul de variație al funcției cu rubricația de mai jos:

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	
$f''(x)$	

şi-l completăm în felul următor:

- pe linia lui x se scriu intervalele care reprezintă mulțimea de definiție şi toate valorile importante ale lui x determinate la punctele precedente. Se haşurează intervalele pe care funcția nu există;
- pe linia lui f', în dreptul punctelor critice, se scrie 0, iar în punctele în care funcția nu este derivabilă se trage bară verticală si se scrie, când există, valorile derivatelor laterale. Completăm apoi această linie cu semnul derivatei.
- pe linia lui f se trec toate valorile $f(x)$ corespunzătoare pentru x din prima linie şi marcăm, prin săgeți, monotonia funcției. De aici putem deduce mulțimea imaginilor funcției notată $\operatorname{Im} f$.

Completarea liniei lui f'' se face prin scrierea lui zero în dreptul soluțiilor ecuației $f''(x)=0$ sau prin bară acolo unde derivata a doua nu există. Trecem în această linie semnul derivatei a doua.

Sub tabel putem scrie în dreptul punctelor de maxim *M*, a celor de minim *m*, iar în dreptul punctelor de inflexiune *I* şi prin curbe de genul $\frown$, $\smile$ precizăm convexitatea sau concavitatea funcției.

10. Trasăm graficul funcției.

Fixăm un sistem ortonormal de axe *xOy* (în unele cazuri putem să fixăm un sistem ortogonal cu unități de măsură, care diferă, convenabil alese, pe fiecare dintre axe).
Haşurăm porțiunile pe care funcția nu este definită sau dacă este vorba de un singur punct x_0 în care nu e definită, construim dreapta $x=x_0$.
Trasăm, dacă există, asimptotele.
Fixăm punctele importante $(x, f(x))$ din tabelul de variație. Când este cazul, acestea pot fi marcate prin tangente şi semitangente. Pentru capete finite de interval închis sau deschis putem folosi marcajul cu semne de forma [,], (,).
Urmărind cu atenție tabelul de variație se trasează graficul funcției. Înscriem studiul variației unei funcții precizând mulțimea imaginilor ei.

Exemple **1.** $f(x)=x^3-3x+2$;

a) $x \in \mathbb{R}$

b) Funcția nu este nici pară, nici impară. Mulțimea de studiu este $\mathbb{R}$.

c) Intersecția cu axa *Ox*: $y=0$ implică $x^3-3x+2=0$ adică $(x-1)^2(x+2)=0$ de unde $x_1=x_2=1$ şi $x_3=-2$. Punctele graficului situate pe axa *Ox* vor fi: $(1,0)$ şi $(-2,0)$. Inter-secția cu *Oy*: $x=0$ implică $f(0)=2$ deci punctul situat pe *Oy* este $(0,2)$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

e) Funcțiile polinomiale nu au asimptote.

f) Funcția este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x)=3x^2-3$. Punctele critice sunt –1 şi 1. Vom face semnul derivatei direct în tabelul de variație.

g) $f''(x)=6x$. Semnul derivatei a doua îl putem trece direct în tabelul de variație.

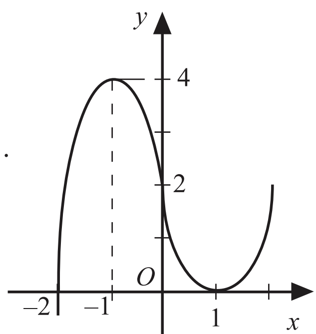


Fig. 1

h)

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		
$f'(x)$	+	+	+	+	0	−	−	−	0		
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	4	↘	2	↘	0		
$f''(x)$	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+
					M		*I*		*m*		

i) Graficul este cel din figura 1. Observăm că $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2. $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x}$;

a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Domeniul de studiu coincide cu domeniul de definiție.

c) Intersecția cu axa Ox: $y = 0$ implică $2x^2 - x - 1 = 0$ cu soluțiile $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ şi $x_2 = 1$. Intersecția cu axa Oy: observăm că funcția nu este definită în $x = 0$ deci nu intersectează axa Oy.

d) Cum $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ avem:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = +\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$.

e) Observăm că funcția f se mai poate scrie $f(x) = 2x - 1 - \dfrac{1}{x}$.

Cum limitele laterale în $x = 0$ sunt infinite rezultă că dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga şi la dreapta. Din precizările făcute la observația 4 de la paragraful 6, rezultă că dreapta $y = 2x - 1$ este asimptotă oblică la $-\infty$ şi la $+\infty$.

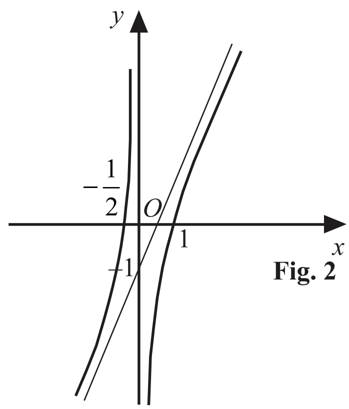


Fig. 2

f) Funcția este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

g) $f'(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

h) $f''(x) = -\dfrac{2}{x^3}$.

i)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+	|	+	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$^{+\infty}\|_{-\infty}$	↗	0	↗	$+\infty$
$f''(x)$	+	+	+	+	|	−	−	−	−

j) Graficul se află în figura 2. Observație: $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

3. $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x$;

a) Condiția de existență $x^2 - x + 1 \geq 0$ este satisfăcută oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Rezultă că $D = \mathbb{R}$.

b) Mulțimea de definiție coincide cu mulțimea de studiu.

c) $y = 0$ implică $\sqrt{x^2 - x + 1} = x$, de unde $x_0 = 0$. Dacă $x = 0$, obținem $f(0) = 1$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(-1+\frac{1}{x}\right)\Big/ x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)=-\frac{1}{2}.$

e) Din d), rezultă că $y=-\frac{1}{2}$ este asimptotă orizontală la $+\infty$ .Cum

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, avem: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)}{x}=-2$,

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Rezultă că dreapta $y=-2x+\frac{1}{2}$ este asimptotă oblică la $-\infty$.

f) Funcția este continuă pe mulțimea maximă de definiție.

g) $f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}-1$.

Punctele critice sunt soluțiile ecuației $2x-1=2\sqrt{x^2-x+1}$. Impunem condiția $2x-1\geq 0$ și apoi ridicăm la pătrat. Obținem egalitatea: $4x^2-4x+1=4x^2-4x+4$ care este o ecuație imposibilă. Rămâne că $f'(x)$ are semn constant pe $\mathbb{R}$. Pentru a-i afla semnul este suficient să aflăm semnul pentru o valoare particulară. De exemplu, $f'(0)=-\frac{1}{2}-1<0$.

h) $f''(x)=\frac{3}{4(x^2-x+1)\sqrt{x^2-x+1}}>0$.

i)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1/2$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	

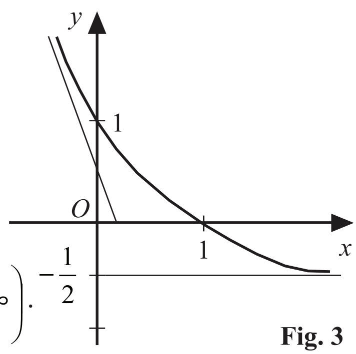


Fig. 3

j) Graficul se află în figura 3. Im $f=\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

4. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$;

a) $D=\mathbb{R}$.

b) Mulțimea de studiu coincide cu mulțimea de definiție.

c) Din $y=0$ rezultă $x_1=x_2=1$ și $x_3=-2$, $f(0)=\sqrt[3]{2}$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}{x}=1$,

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x+2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x+2-x^3}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-3x+2}+x^2}=$$

$$=\frac{x\left(-3+\dfrac{2}{x}\right)}{x^2\left[\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1\right]}=0.$$

Deci $y=x$ este asimptotă oblică la $-\infty$ şi la $+\infty$.

f) Funcția este continuă pe $\mathbb{R}$.

g) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$:

$$f'(x)=\frac{3x^2-3}{3\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}}=\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{(x-1)^4(x+2)^2}}=\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}$$

pentru $x\neq 1$ şi $x\neq -2$.

Observăm că $f'(-2)=+\infty$, $f_s'(1)=-\infty$, iar $f_d'(1)=+\infty$.

Punctul $x=-2$ este punct de inflexiune, iar $x=1$ este punct de întoarcere.

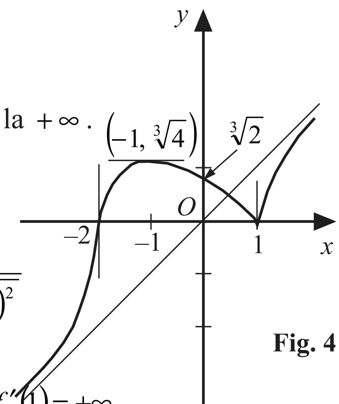


Fig. 4

h) Graficul se află în figura 4.

Observație: Graficul intersectează asimptota oblică în punctul $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$; $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$.

5. $f(x)=|x-2|\cdot e^{\frac{1}{x}}$;

Deoarece: $e^{\frac{1}{x}}>0, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, putem scrie: $f(x)=|x-2|\cdot\left|e^{\frac{1}{x}}\right|=\left|(x-2)\cdot e^{\frac{1}{x}}\right|$.

Este suficient să construim graficul funcției $g(x)=(x-2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$, care coincide cu graficul funcției f pentru $x\geq 2$. Pentru $x<2$ graficul lui f coincide cu graficul funcției $-g$ care se obține prin simetrie față de axa Ox.

a) $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) Mulțimea de definiție coincide cu multimea de studiu.

c) $y=0 \Rightarrow x-2=0$ deci $x=2$. Cum funcția nu este definită în zero $f(0)$ nu există.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}g(x)=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}g(x)=-\infty$.

e) Dreapta $x=0$ este asimptotă verticală la dreapta; $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-2)\cdot e^{\frac{1}{x}}}{x}=1$,

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-2)\cdot e^{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-2e^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-2e^{\frac{1}{x}}\right]=1-2=-1.$$

Cum la $-\infty$ obținem aceleaşi valori pentru m şi n, rezultă că $y=x-1$ este asimptotă oblică şi la $-\infty$ şi la $+\infty$.

f) Funcția este continuă pe $\mathbb{R}^*$.

g) $f'(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}$. h) $f''(x)=\dfrac{-x-28-3x^2}{x^4}\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

i)

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$^0\vert$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-4e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	$^0\vert_{-\infty}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$-$	$-$	$-$
			I						

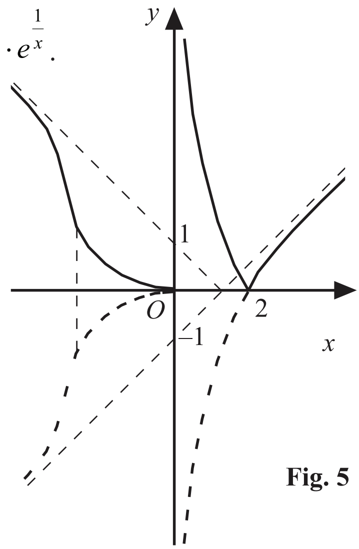


Fig. 5

j) Graficul lui f este cel din figura 5, format din linie neîntreruptă şi s-a obținut păstrând graficul lui g pentru $x\geq 2$, iar pentru $x\in(-\infty,0)\cup(0,2)$ simetrizând graficul funcției g față de axa Ox.
Să remarcăm faptul că punctul $(2,0)$ este un punct unghiular pentru graficul lui f şi în acelaşi timp punct de minim. Evident $\text{Im } f=[0,+\infty)$.

6. $f(x)=\dfrac{1-\ln|x|}{|x|}$;

a) $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) $f(-x)=f(x)$ deci funcția este pară. Graficul va fi simetric față de axa Oy. Este suficient să studiem funcția pentru $x\in(0,+\infty)$. Vă propunem să întocmiți singuri tabelul de variație. Vom da aici numai „alura" graficului (fig. 6): $\text{Im } f=\left[-\dfrac{1}{e^2},+\infty\right)$.

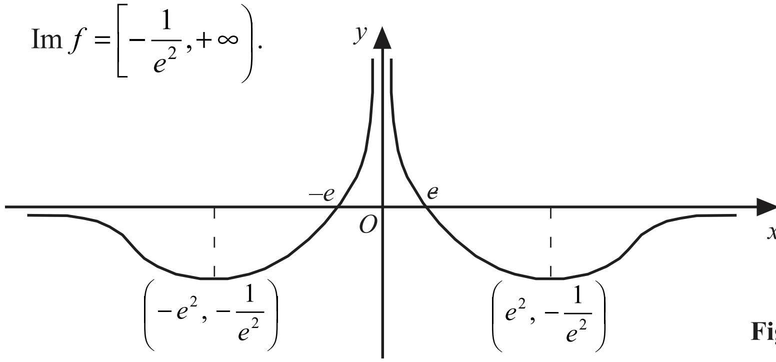


Fig. 6

7. $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\cos 2x}$;

a) Se impune condiția $\cos 2x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{4}$.

Rezultă că $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\dfrac{\pi}{4} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) Funcția este periodică de perioadă principală $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$. Deci mulțimea de studiu va fi: $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$. Să observăm că $f(-x)=f(x)$, deci funcția este pară. Graficul funcției pe mulțimea maximă de definiție va fi simetric față de axa *Oy*.

c) $y=0 \Rightarrow x \in \{0,\pi\}$; $x=0 \Rightarrow f(0)=0$.

d) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x<\frac{\pi}{4}}} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3\pi}{4}\\ x<\frac{3\pi}{4}}} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3\pi}{4}\\ x>\frac{3\pi}{4}}} f(x)=+\infty$.

e) Dreptele $x=\dfrac{\pi}{4}$ şi $x=\dfrac{3\pi}{4}$ sunt asimptote verticale.

f) Funcția este continuă pe mulțimea maximă de definiție.

g) $f'(x)=\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 2x}$; 8. $f''(x)=\dfrac{1+2\sin^2 2x}{(\cos 2x)^3}$.

h) Tabelul de valori este cel alăturat:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$^{+\infty}\vert_{-\infty}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$_{-\infty}\vert^{+\infty}$	$\searrow$	0
$f''(x)$		$+$	$\vert$	$-$	M	$-$	$\vert$	$+$	

i) Să observăm că $\operatorname{Im} f=(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$. Un detaliu al graficului yeste prezentat în figura 7.

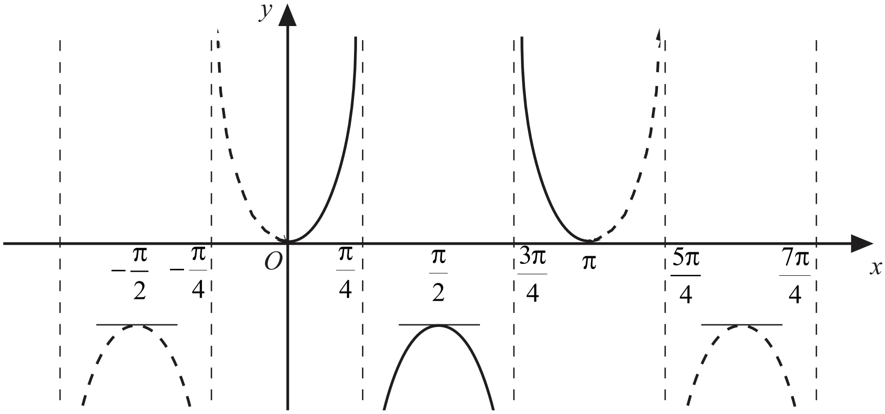


Fig. 7

8. $f(x)=\arccos\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$;

a) Se impune condiția $-1\leq\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\leq 1$ şi $x\geq 0$ de unde $x\in[0,+\infty)$.

b) Mulțimea de studiu coincide cu mulțimea de definiție.

c) $y=0\Rightarrow\arccos\frac{2\sqrt{x}}{1+x}=0\Rightarrow\frac{2\sqrt{x}}{1+x}=1\Rightarrow x=1$; $x=0\Rightarrow f(0)=\arccos 0=\frac{\pi}{2}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\arccos 0=\frac{\pi}{2}$;

e) Funcția nu are asimptote oblice, dar are asimptotă orizontală la $+\infty$.

Aceasta este dreapta $y=\frac{\pi}{2}$.

f) Funcția fiind o compunere de funcții de bază este continuă pe $[0,+\infty)$.

g) $f'(x)=\frac{x-1}{|1-x|(1+x)\sqrt{x}}=\begin{cases}-\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}, & \text{dacă } x\in(0,1)\\ \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}, & \text{dacă } x\in(1,+\infty)\end{cases}$.

Funcția nu este derivabilă în $x=0$ şi în $x=1$.

h) $f''(x)=\begin{cases}\frac{3x+1}{2x(1+x)^2\sqrt{x}}, & \text{dacă } x\in(0,1)\\ -\frac{3x+1}{2x(1+x)^2\sqrt{x}}, & \text{dacă } x\in(1,+\infty)\end{cases}$.

i)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	|	$-$	$-1/2$ | $+1/2$	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

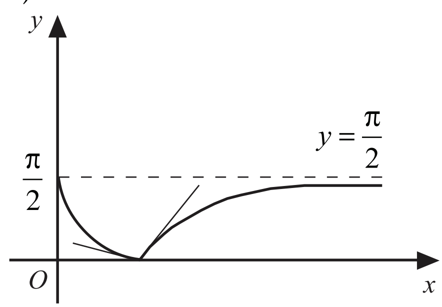


Fig. 8

j) Graficul este redat în figura 8. Observăm că $\operatorname{Im} f=[0,1)$.

Exercițiu comentat: Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$. Se cere:

1. să se determine mulțimea $f(\mathbb{R})=\operatorname{Im} f=F$;

2. să se demonstreze că $f:\mathbb{R}\to F$ este bijectivă şi să se afle inversa ei;

3. să se reprezinte grafic funcția $g:F\to\mathbb{R}$, unde $g(x)=f^{-1}(x)$.

Evident că, pentru a rezolva primele două subpuncte, se pot folosi, în mod direct, definițiile injectivității şi surjectivității. Este însă mult mai simplu să apelăm la proprietățile funcțiilor derivabile.

1. Avem: $f'(x)=\dfrac{2^{x+1}\ln 2}{\left(2^x+1\right)^2}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$, iar $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, şi corelând aceste rezultate cu faptul că funcția este continuă şi monotonă, rezultă că $F=\operatorname{Im}\ f=(-1,1)$.

2. Din $f'(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că funcția este strict crescătoare, ceea ce constituie o condiție suficientă pentru injectivitate. Din punctul a) ştim deja că $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ este surjectivă. Rămâne că f este bijectivă.

Din $y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ rezultă $2^x=\dfrac{1+y}{1-y}$ deci: $f^{-1}(x)=\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$.

3. $g'(x)=\dfrac{2}{\left(1-x^2\right)\ln 2}$; $g''(x)=\dfrac{4x}{\left(1-x^2\right)^2\ln^2 2}$;

x	-1		0		1
$g'(x)$	$\mid$	$+$	2	$+$	$\mid$
$g(x)$	$\mid_{-\infty}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$^{+\infty}\mid$
$g''(x)$	$\mid$	$-$	0	$+$	$\mid$

Graficul este redat în figura 9.

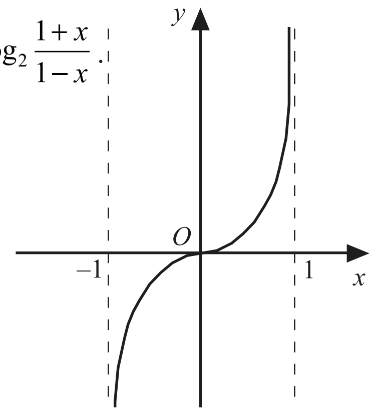


Fig. 9

Exerciții propuse

Să se reprezinte grafic funcțiile de mai jos pe mulțimea lor maximă de definiție:

I. **1.** $f(x)=|x|+\left|2x-x^2\right|$; **2.** $f(x)=4x^3-3x$;

3. $f(x)=x^3-3x+1$; **4.** $f(x)=x^3-3x^2-2x-1$;

5. $f(x)=x^4-4x^3$; **6.** $f(x)=\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$;

7. $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-2$; **8.** $f(x)=(x-2)^2(x+3)(x-4)$.

II. **1.** $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$; **2.** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$; **3.** $f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x|}$;

4. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x}$; **5.** $f(x)=\dfrac{4x+5}{x^2-1}$; **6.** $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$;

7. $f(x)=\dfrac{x}{1+|x-2|}$; **8.** $f(x)=\dfrac{3x+\left|x^2-4\right|}{|x-2|}$; **9.** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$;

10. $f(x)=\frac{|x|(x+3)}{x-1}$; **11.** $f(x)=\frac{x^2-8}{x}$; **12.** $f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$;

13. $f(x)=\frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-1}$; **14.** $f(x)=\frac{(x-1)^2|x+2|}{x^2}$.

III. **1.** $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$; **2.** $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\frac{x}{\sqrt{2}}$;

3. $f(x)=\sqrt{x^2+2|x|}$; **4.** $f(x)=(x+1)\sqrt{x+2}$;

5. $f(x)=x+\sqrt{|1-x^2|}$; **6.** $f(x)=x+\sqrt{x^2+x+1}$;

7. $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$; **8.** $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$; **9.** $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$;

10. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$; **11.** $f(x)=x\sqrt{\frac{|x-1|}{|x|}}$; **12.** $f(x)=\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}$;

13. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$; **14.** $f(x)=\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$; **15.** $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$;

16. $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$; **17.** $f(x)=x+\sqrt{|1-x^2|}$; **18.** $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$.

IV. **1.** $f(x)=\frac{1}{\ln x}$; **2.** $f(x)=\ln(x^2-1)$; **3.** $f(x)=\frac{2+e^x}{1+e^x}$;

4. $f(x)=x\ln x$; **5.** $f(x)=x^2e^x$; **6.** $f(x)=x^x$;

7. $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$; **8.** $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; **9.** $f(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$;

10. $f(x)=\begin{cases} x\cdot e^{\frac{1}{x+1}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$; **11.** $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}+\ln\frac{1+x}{1-x}$;

12. $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x-1}}$; **13.** $f(x)=|x-1|e^{-|x|}$; **14.** $f(x)=\frac{x-1}{e^{|x+1|}}$;

15. $f(x)=\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$; **16.** $f(x)=\frac{\ln|x|}{1+\ln|x|}$.

V. **1.** $f(x)=\sin x(1+\cos x)$; **2.** $f(x)=\sin x|\cos x|$;

3. $f(x)=\frac{\sin x+\sin 3x}{\sqrt{1+\cos 2x}}+\frac{\cos x-\cos 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$; **4.** $f(x)=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$;

5. $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$;

6. $f(x)=x-2\operatorname{arctg} x$;

7. $f(x)=\arcsin\left(3x-4x^3\right)$;

8. $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{x^2+1}$;

9. $f(x)=\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$;

10. $f(x)=2\arcsin x-\arccos x$;

11. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$;

12. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1-x^2}$;

13. $f(x)=\arccos\dfrac{x^3-3x}{2}$;

14. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$.

VI. **1.** $f(x)=x+\sin x$;

2. $f(x)=x+\operatorname{arctg} x$;

3. $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$;

4. $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$;

5. $f(x)=e^{-x}\cdot\cos x$;

6. $y=2x-\dfrac{1}{3}$;

7. $f(x)=\cos x\cdot e^{\sin^2 x}$;

8. $f(x)=\dfrac{xe^x-1}{x}$;

9. $f(x)=\dfrac{x\ln x-1}{x}$.

VII. **1.** Fie $f_n(x)=\dfrac{1+x+...+x^n}{1+x^n}$, $x\in(0,\infty)$, $n\in\mathbb{N}$. Să se reprezinte grafic funcția $g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)$.

2. Să se reprezinte grafic funcția $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n+1}-x^2+6}{x^{2n}+x^2+4}$.

3. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{ax^3+bx^2}$, $a,b\in\mathbb{R}$, are asimptotă $y=2x-\dfrac{1}{3}$.

Reprezentați grafic această funcție.

4. Să se reprezinte grafic funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\max(x,x^2,x^3), & x\le 0\\ \min\left(1+x,\dfrac{1}{x},e^x\right), & x>0\end{cases}$.

5. Fie funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^e-e^x$.

a) Reprezentați grafic funcția f.

b) Arătați că $f(x)\le 0, \forall\, x\in[0,\infty)$.

c) Există un $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $f(x)=m$ are trei soluții reale, distincte.

§2. Rezolvarea grafică a unor ecuații, utilizarea reprezentării grafice a funcțiilor în determinarea numărului de ecuații

Fiind date funcțiile $f, g : D \to \mathbb{R}$, a rezolva ecuația $f(x) = g(x)$ prin metoda grafică înseamnă să determinăm abscisele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor *f* și *g*. Evident că nici o reprezentare grafică nu poate fi atât de riguros făcută încât să putem citi, cu exactitate, din reprezentarea grafică, valoarea lui $f(x)$ pentru *x* fixat. În cele mai multe cazuri putem afla numărul de soluții reale ale ecuației $f(x) = g(x)$ și, eventual, precizând intervale „cât mai mici" în care se află fiecare dintre ele.

Exemplu Ecuația $x \cdot e^x - 1 = 0$ este echivalentă (pentru $x \neq 0$) cu ecuația $e^x = \frac{1}{x}$. Dacă considerăm funcțiile $f(x) = e^x$ și $g(x) = \frac{1}{x}$, graficele lor sunt cunoscute. Le reprezentăm în același sistem de axe și observăm că acestea se intersectează, din considerente de continuitate și monotonie, într-un singur punct situat în cadranul I. Nu putem determina efectiv abscisa acestuia. Să observăm că $h(0) \cdot h(1) < 0$, unde $h(x) = x \cdot e^x - 1$, deci soluția x_0 a ecuației date se află în intervalul (0,1).

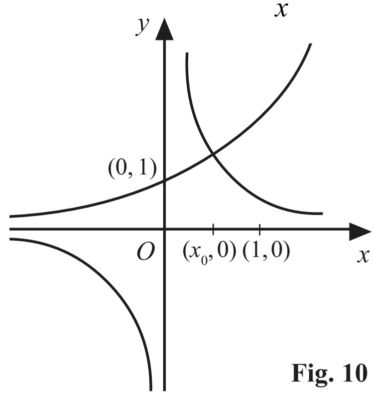


Fig. 10

Este bine să reținem că, în general, suportul intuitiv ne poate ajuta în rezolvarea unor probleme, dar niciodată intuiția nu se poate substitui raționamentului riguros.

În cele ce urmează, vom considera ecuații de forma $f(x, m) = 0$, unde *m* este parametru real. Dacă se poate calcula convenabil *m* funcție de *x*, deci $m = g(x)$, se reprezintă grafic funcția $y = g(x)$ și se intersectează graficul cu dreapta variabilă $y = m$, unde $m \in \mathbb{R}$. Abscisele punctelor de intersecție sunt tocmai soluțiile ecuației date.

Exemplu Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, m) = x^3 - 3x + m$, $m \in \mathbb{R}$. Determinăm, în funcție de valorile lui *m*, numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x, m) = 0$.

Din $x^3 - 3x + m = 0$, avem $m = -x^3 + 3x$.

Reprezentăm grafic funcția $g(x) = -x^3 + 3x$.

Avem: $g'(x) = -3x^2 + 3$, $g''(x) = -6x$.

x	$-\infty$ $\quad -\sqrt{3} \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad \sqrt{3} \quad +\infty$
$g'(x)$	$- \ - \ - \ - \ 0 \ + \ + \ + \ 0 \ - \ - \ - \ -$
$g(x)$	$-\infty \searrow 0 \searrow -2 \nearrow 0 \nearrow 2 \searrow 0 \searrow +\infty$
$g''(x)$	$+ \ + \ + \ + \ 0 \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ -$

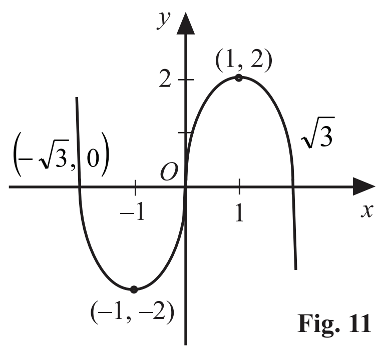


Fig. 11

Fie dreapta $y = m$.

Pentru $m \in (-\infty, -2)$, există o soluție reală și două complexe, soluția reală fiind în intervalul $(\sqrt{3}, +\infty)$.

Pentru $m = -2$, există trei soluții reale: $x_1 \in (\sqrt{3}, +\infty)$, $x_2 = x_3 = -1$.

Pentru $m \in (-2, 0)$, există trei soluții reale: $x_1 \in (-\sqrt{3}, -1)$, $x_2 \in (-1, 0)$, $x_3 \in (\sqrt{3}, +\infty)$.

Pentru $m = 0$, există trei soluții reale: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$ și $x_3 = \sqrt{3}$.

Pentru $m \in (0, 2)$, există trei soluții reale: $x_1 \in (-\infty, -\sqrt{3})$, $x_2 \in (0, 1)$, $x_3 \in (1, \sqrt{3})$.

Pentru $m = 2$, există trei soluții reale: $x_1 \in (-\infty, -\sqrt{3})$, $x_2 = x_3 = 1$.

Pentru $m \in (2, +\infty)$, există o soluție reală: $x_1 \in (-\infty, -\sqrt{3})$ și două complexe.

Problema a cerut numărul soluțiilor reale și am dat multe amănunte în plus despre intervalele în care se află aceste soluții. Pentru aceasta, am considerat mai multe cazuri decât era necesar (de exemplu, am fragmentat intervalul (–2, 2), interval pe care concluzia era aceeași: trei soluții reale). Am făcut totuși discuția mai în detaliu pentru a arăta că, prin metoda grafică, se obțin precizări în plus asupra soluțiilor reale, precizări pe care, de exemplu, prin șirul lui Rolle nu le obținem imediat.

Să rezolvăm aceeași problemă prin șirul lui Rolle:

$$f(x) = x^3 - 3x + m,\ f'(x) = 3x^2 - 3,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\},\ f(-1) = m + 2,\ f(1) = m - 2.$$

Trebuie să întocmim un tabel cu dublă intrare:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
m \ $f(x)$	$-\infty$	$m+2$	$m-2$	$+\infty$	Concluzii
$(-\infty, -2)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x_1 \in (1, +\infty)$, $x_{2,3} \in \mathbb{C}$
-2	$-$	0	$-$	$+$	$x_1 = x_2 = -1$, $x_3 \in (1, +\infty)$
$(-2, 2)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 \in (-1, 1)$, $x_3 \in (1, +\infty)$
2	$-$	$+$	0	$+$	$x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 = x_3 = 1$, $x_3 \in (\sqrt{3}, +\infty)$
$(2, +\infty)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_{2,3} \in \mathbb{C}$

Comparând metodele observăm că metoda grafică permite o analiză mai amănunțită. Evident că, dacă fragmentăm intervalele din șirul lui Rolle, putem obține aceleași precizări, dar după calcule mai lungi.

Exerciții propuse

1. Să se determine numărul soluțiilor ecuațiilor:

$a)$ $xe^x - 1 = 0$; $b)$ $\sin x = x$; $c)$ $\operatorname{tg} x = x$; $d)$ $\ln x + x - 1 = 0$; $e)$ $2^x + x - 1 = 0$.

2. Să se analizeze după valorile lui $m \in \mathbb{R}$ numărul soluțiilor reale ale ecuațiilor:

$a)$ $e^x \cdot \sqrt[3]{x} + me^x - m \cdot \sqrt[3]{x} - m^2 = 0$; $b)$ $x^4 - (m+4)x^2 - 4mx - 4m = 0$;

$c)$ $x^4 - mx^3 - (2m-1)x^2 - mx - 2m = 0$; $d)$ $x^3 - (m-2)x^2 - 4mx - 4m = 0$.

§3. Reprezentarea grafică a conicelor (cerc, elipsă, hiperbolă, parabolă)

3.1. Cercul

Definiție

Cercul este locul geometric al punctelor din plan echidistante de un punct fix C numit centru.

Elementele unui cerc sunt deci coordonatele centrului $C(a, b)$ și raza r. Vom nota cercul de centru C și rază r astfel: $\mathbf{C}(C, r)$. Reamintim că expresia distanței dintre două puncte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ este:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

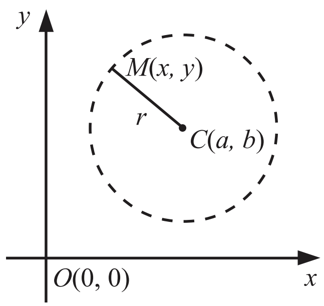


Fig. 12

Fie $C(a, b)$ un punct fix, iar $M(x, y)$ un punct mobil. Scriind că punctele M sunt echidistante de punctul C, $CM = r$ (const.) (fig. 12), rezultă:

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

ceea ce revine la ecuația:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Am obținut că cercul $\mathbf{C}(C, r)$ este:

$$\mathcal{C}(C,r) = \{M(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$$

sau $\mathbf{C}(C, r)$: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, care se numește **ecuația carteziană implicită** a cercului de centru $C(a, b)$ și rază r (se mai spune că este ecuația cercului cu pătrate restrânse).

Efectuând calculele, ecuația cercului se poate scrie sub forma:

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0$$

unde $m = -a$, $n = -b$ și $p = a^2 + b^2 - r^2$ și se numește **ecuația carteziană generală** a cercului sau **ecuația normală**.

Scriind ecuația de mai sus sub forma: $(x+m)^2 + (y+n)^2 = m^2 + n^2 - p$, deducem:

1. dacă $m^2 + n^2 - p < 0$, nu există nici un punct $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ care să verifice această ecuație;

2. dacă $m^2 + n^2 - p = 0$, rezultă $r = 0$ și există un singur punct $M(-m, -n)$ care coincide cu $C(a, b)$ și verifică ecuația cercului (de obicei numit punctul cerc);

3. dacă $m^2 + n^2 - p > 0$, atunci $a = -m$, $b = -n$, $r = \sqrt{m^2 + n^2 - p}$ și ecuația reprezintă ecuația unui cerc $\mathbf{C}(C, r)$ cu centrul $C(a, b)$.

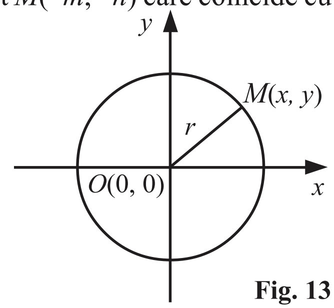


Fig. 13

În cazul particular când centrul cercului este originea reperului $C(a, b) = O(0, 0)$, ecuația cercului $\mathbf{C}(O, r)$ este $x^2 + y^2 = r^2$ (fig. 13).

Pentru reprezentarea grafică a cercului urmărim etapele prezentate anterior.

1. Domeniul maxim de definiție

Pentru $y \geq 0, f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, se impune condiției $r^2-x^2 \geq 0$, deci $x \in [-r,r]$, deci $f:[-r,r] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$.

2. Mulțimea de studiu

Funcția $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ este o funcție pară. Oricare ar fi $M(x_M, y_M)$, astfel încât $y_M=\sqrt{r^2-x^2{}_M}$, atunci și punctul $M(-x_M, y_M)$ se află pe graficul curbei, avem $y_M''=\sqrt{r^2-(x_M'')^2}=\sqrt{r^2-(-x_M)^2}=\sqrt{r^2-x_M^2}=y_M$, deci $f(-x)=f(x)$ și vom studia funcția f numai pe restricția $[0,r]$, graficul fiind simetric în raport cu axa Oy.

3. Intersecția graficului cu axele de coordonate

Intersecția cu axa Ox, axa absciselor. Din ecuația $f(x) = 0$, rezultă $\sqrt{r^2-x^2}=0$, deci $r^2-x^2=0$, astfel încât $x=\pm r$. Pentru $x > 0$ obținem punctul $A(r, 0)$.

Intersecția cu axa Oy, axa ordonatelor.

Pentru $x = 0$, din ecuația $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ obținem $f(0) = r$ și rezultă punctul de intersecție cu axa ordonatelor $B(0, r)$.

4. Valorile funcției la capetele intervalului de definiție

Intervalul de definiție al funcției fiind $[-r,r]$, avem $f(-r)=0$ și $f(r) = 0$, de unde rezultă punctele de intersecție ale graficului cu axa absciselor $A(r, 0)$ și $A`(-r,0)$.

5. Analiza existenței asimptotelor

Mulțimea maximă de definiție a funcției $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ este $[-r,r]$, iar mulțimea de studiu este $[0, r]$. Nu există asimptote.

6. Mulțimea de continuitate

Funcția $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ pentru $x \in [0,r]$ este o funcție continuă.

7. Studiul derivatei întâi

Pentru $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, $x \in [0, r)$, obținem $f`(x)=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, unde $f':[0, r) \to \mathbb{R}$; pentru $f`(x)=0$, rezultă $x = 0$. Semnul derivatei întâi este cel din tabelul de mai jos. Rezultă că funcția f este strict descrescătoare.

x		0		r	
$f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$		0	$- - - - - - - - -$	$\vert$	
$f(x)$		r	$\searrow$	0	

8. Studiul derivatei a doua

Calculând derivata a doua, obținem: $f''(x) = -\dfrac{r^2}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} = -\dfrac{r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$, unde f'':[0, r)→ℝ. Semnul derivatei a doua este cel din tabelul de mai jos. Se constată că funcția f este concavă.

x		0		r	
$f''(x) = -\dfrac{r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$		$-\dfrac{1}{r}$	$- - - - - - - -$	$\vert$	
$f(x)$		r	$\frown$	0	

9. Tabelul de variație

Cu ajutorul rezultatelor obținute, pentru mulțimea de studiu [0, r] rezultă următorul tabel de variabile:

Rezultă că pe mulțimea de studiu [0, r] funcția este strict descrescătoare și este concavă, „nu ține apă”.

x		0		r	
$f'(x)$		0	$- - - - - - - -$	$\vert$	
$f(x)$		r	$\searrow$	0	
$f''(x)$		$-\dfrac{1}{r}$	$- - - - - - - -$ $\frown$	$\vert$	

10. Graficul funcției

În reperul ortonormal xOy precizăm punctele importante obținute în studiul precedent și pentru mulțimea de studiu [0, r] rezultă graficul pentru funcția f (fig. 14).

Având în vedere că funcția f este pară și domeniul de definiție este $[-r, r]$ funcția are graficul simetric în raport cu axa Oy și obținem (fig. 15).

Pentru cercul $C(0, r)$ de ecuație implicită $x^2 + y^2 = r^2, r \geq 0$, am găsit $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$.

Am studiat graficul funcției $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} = y \geq 0$, de unde deducem reprezentarea geometrică a cercului studiind și cazul pentru $y = -\sqrt{r^2 - x^2} \leq 0$, funcție al cărui grafic se obține considerând, prin simetrie în raport cu axa absciselor, graficul funcției $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ din figura 15. În figura 16, este reprezentat graficul cercului $C(0, r)$.

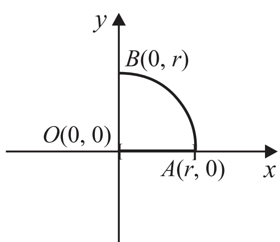


Fig. 14

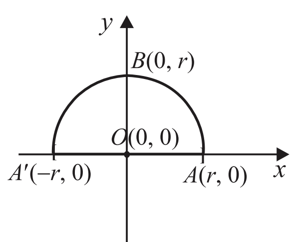


Fig. 15

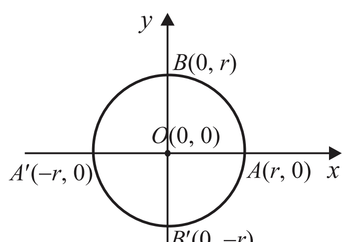


Fig. 16

Observații

Din studiul făcut rezultă că reprezentarea geometrică a unui cerc $C(0, r)$, de ecuație $x^2 + y^2 = r^2$, $r \geq 0$ este o curbă închisă situată într-un pătrat de latură $l_4 = 2r$, al cărei centru este originea reperului, centrul cercului.

Axele de coordonate sunt axe de simetrie.

Mai mult, orice dreaptă care trece prin centrul cercului este axă de simetrie. Centrul cercului este centru de simetrie.

Exercițiu de rezolvat în clasă: Urmărind etapele în studiul reprezentării grafice a cercului $C(0, r)$, $x^2 + y^2 = r^2$, să se reprezinte grafic cercul de ecuație:

$$C(C,r):(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,\ C(a,b), r\geq 0.$$

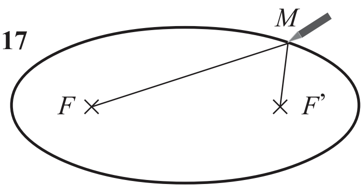
3.2. Elipsa

Definiție

Locul geometric al punctelor M din plan pentru care suma distanțelor la două puncte fixe F și F' din plan este constantă se numește **elipsă**.

O construcție geometrică simplă a elipsei se poate obține astfel: se fixează în două puncte F și F' capetele unei sfori de lungime $2a > FF'$. Cu un creion, ținând cu vârful creionului sfoara întinsă, prin deplasarea vârfului creionului, se obține reprezentarea geometrică a unei elipse (fig. 17).

Fig. 17



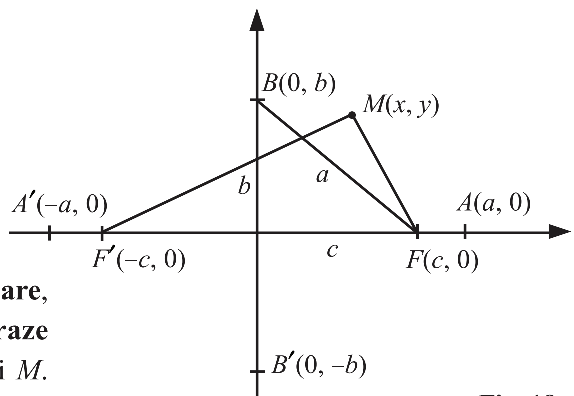


Fig. 18

Punctele fixe *F* și *F′* se numesc **focare**, iar segmentele ***FM*** și ***F′M*** se numesc **raze vectoare** sau **razele focale** ale punctului M. Conform definiției, relația geometrică pe care o satisface punctul M este:

$$MF + MF' = 2a \text{ (constant) } (*)$$

Alegem ca axă Ox, dreapta FF' și ca axă Oy mediatoarea segmentului FF' (fig. 18) și notăm $FF' = 2c$, $c \geqslant 0$.

Rezultă $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, iar punctul mobil fiind $M(x, y)$ condiția (*) devine:

$$\sqrt{(x_{\mathcal{M}}-x_F)^2+(y_{\mathcal{M}}-y_F)^2}+\sqrt{(x_{\mathcal{M}}-x_{F'})^2+(y_{\mathcal{M}}-y_{F'})^2}=2a,$$

sau

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

Izolând un radical și ridicând la pătrat se obține:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2.$$

Izolând din nou radicalul rămas după ce se reduc termenii asemenea:

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx,$$

şi ridicând la pătrat, rezultă: $(a^2-x^2)c^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$.

Ținând seama că $MF + MF' > FF'$, deducem că $2a > 2c$, deci $a > c$. Putem nota: $b^2=a^2-c^2$ și obținem ecuația: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Împărțind ecuația cu a^2b^2, rezultă:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

care se numește **ecuația carteziană implicită** a elipsei.

Dreapta FF' se numește **axa focală**, iar distanța $FF' = 2c$ se numește **distanța focală**.

Punctele de intersecție ale curbei cu axele de coordonate sunt: $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$ și $B'(0, -b)$ și se numesc **vârfurile elipsei**. Segmentul $AA' = 2a$ se numește **axa mare** a elipsei, iar $BB' = 2b$ **axa mică**.

Segmentele $OA = a$, $OB = b$ sunt **semiaxele elipsei**. Din triunghiul dreptunghic OFB, se deduce:

$$a^2=b^2+c^2.$$

Am stabilit ecuația implicată a elipsei:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

unde focarele sunt $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, $c^2=a^2-b^2$.

Vom studia graficul unei elipse stabilind ecuațiile carteziene explicite:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \text{ dacă } y\geq 0 \\ y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \text{ dacă } y\leq 0 \end{cases} \quad x\in[-a,a]$$

Pentru $y\geq 0$, considerăm funcția: $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

1. Domeniul maxim de definiție

Pentru $y\geq 0$, $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; se impune condiția $a^2-x^2\geq 0$, deci $x\in[-a,a]$.

2. Mulțimea de studiu

Funcția $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ este o funcție pară oricare ar fi punctul $M(x_M, y_M)$ situat pe graficul funcției f, adică $y_M=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_M^2}$, atunci și punctul $M'(x_M', y_M')$, unde $x_M'=-x_M$

și $y_M' = y_M$, este situat pe graficul funcției f. Avem:

$$y_M' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x_M')^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-(-x_M)^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_M^2} = y_M,$$

deci $f(-x) = f(x)$, de unde deducem că vom studia funcția f numai pe restricția $[0, a]$, adică mulțimea de studiu este $[0, a]$. Obținem: $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, al cărei grafic este simetric în raport cu axa Oy.

3. Intersecția graficului cu axele de coordonate

Intersecția cu axa Ox, axa absciselor. Din ecuația $f(x) = 0$ rezultă $\sqrt{a^2-x^2}=0$, deci $a^2-x^2=0$, astfel încât $x=\pm a$. Pentru $x > 0$, obținem punctul $A(a, 0)$.

Intersecția cu axa Oy, axa ordonatelor. Pentru $x = 0$, din $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ obținem $f(0) = b$ și rezultă punctul de intersecție cu axa ordonatelor $B(0, b)$.

4. Valorile funcției la capetele intervalului de definiție

Intervalul de definiție al funcției fiind $[-a,a]$ avem $f(-a)=0$ și $f(a)=0$, de unde rezultă punctele de intersecție ale graficului cu axa absciselor $A(a, 0)$ și $A'(-a, 0)$, iar pentru $x = 0$ rezultă $f(0) = b$, deci punctul $B(0, b)$.

5. Analiza existenței asimptotelor

Mulțimea maximă de definiție a funcției $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ este $[-a,a]$, iar mulțimea de studiu este $[0, a]$. Nu există asimptote.

6. Mulțimea de continuitate

Funcția $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, pentru $x \in [0, a]$ este o funcție continuă.

7. Studiul derivatei întâi

Pentru $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\geq 0$, $x \in [0, a]$, obținem $f'(x)=-\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, unde $f':[0, a)\to\mathbb{R}$; pentru $f'(x) = 0$, rezultă $x = 0$, iar semnul derivatei întâi este cel din tabelul de mai jos. Rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe mulțimea de studiu.

x		0		a	
$f'(x)=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$		0	$- - - - - - - - -$	$\vert$	
$f(x)$		b	$\searrow$	0	

8. Studiul derivatei a doua

Calculând derivata a doua, obținem: $f''(x)=-\frac{ab}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, unde $f``:[0,a)\to\mathbb{R}$. Semnul derivatei a doua este cel din tabelul de mai jos. Rezultă că funcția *f* este concavă.

x		0		a	
$f''(x)=-\dfrac{ab}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$		$-b$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	$\vert$	
$f(x)$		b	⌒	0	

9. Tabelul de variație

Cu ajutorul rezultatelor obținute pentru mulțimea de studiu [0, *a*], rezultă următorul tabel de variație. Se observă că, pe mulțimea de studiu [0, *a*], funcția *f* este strict descrescătoare și este concavă, adică „nu ține apă”.

x		0		a	
$f'(x)$		0	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	$\vert$	
$f(x)$		b	↘	0	
$f''(x)$		$-b$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$ ⌒	$\vert$	

10. Graficul funcției

În reperul ortonormal xOy, precizăm punctele importante obținute în studiul precedent și pentru mulțimea de studiu [0, *a*] rezultă graficul pentru funcția *f* (fig. 19).

Având în vedere că funcția *f* este pară și domeniul de definiție este $[-a,a]$,funcția are graficul simetric în raport cu axa Oy (fig.20).

Pentru elipsa de ecuație implicită $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a,b\in\mathbb{R}_+^*$, am dedus $y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

Am studiat graficul funcției $f(x)=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=y\geq 0$, de unde deducem reprezentarea geometrică a elipsei studiind și cazul pentru $y=-\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\leq 0$, funcție al cărui grafic se obține considerând prin simetrie, în raport cu axa absciselor graficului funcției $f(x)=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=y\geq 0$, din figura 20. În figura 21, este reprezentat graficul elipsei.

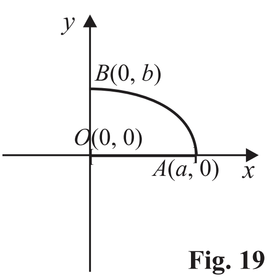


Fig. 19

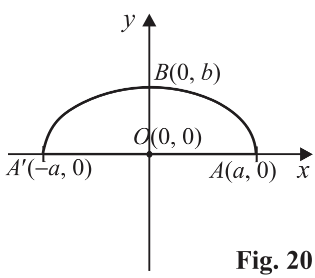


Fig. 20

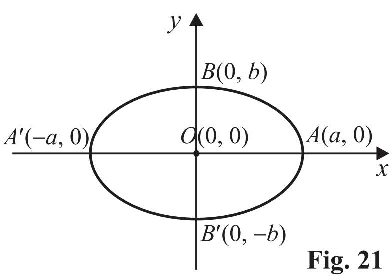


Fig. 21

Observație:

Din studiul făcut rezultă că reprezentarea geometrică a unei elipse de ecuație $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, a, $b>0$, este o curbă închisă situată într-un dreptunghi având lungimile laturilor egale $AA'=2a$ și $BB'=2b$ care sunt paralele cu axele de coordonate iar centrul dreptunghiului este originea reperului.

Axele de coordonate sunt axe de simetrie pentru elipsă și originea reperului este centru de simetrie.

3.3. Hiperbola

Definiție

Locul geometric al punctelor M din plan, care au diferența distanțelor la două puncte fixe F și F' constantă, se numește **hiperbolă**.

Punctele F și F' se numesc **focare**, dreapta FF' se numește **axa focală**, iar segmentele FM și $F'M$ se numesc **raze vectoare** sau **razele focale** ale punctului M. Conform definiției, relația geometrică pe care o satisface punctul M este:

$$\left|MF-MF'\right|=2a \text{ sau } MF-MF'=\pm 2a \quad (*)$$

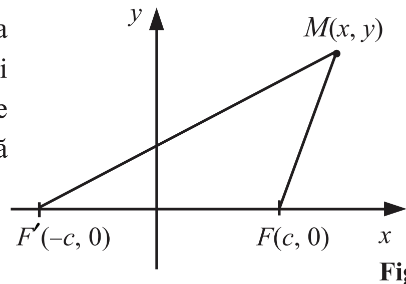


Fig. 22

Alegem ca axă a absciselor, dreapta FF' și ca axă a ordonatelor, mediatoarea segmentului FF' (fig. 22) și notăm $FF'=2c$, $c\geqslant 0$.

Rezultă $F(c,0)$, $F'(-c,0)$, iar punctul mobil fiind $M(x,y)$, condiția (*) devine:

$$\sqrt{\left(x_{\mathcal{M}}-x_F\right)^2+\left(y_{\mathcal{M}}-y_F\right)^2}-\sqrt{\left(x_{\mathcal{M}}-x_{F'}\right)^2+\left(y_{\mathcal{M}}-y_{F'}\right)^2}=\pm 2a \text{ sau}$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

Pentru a obține ecuația curbei sub formă rațională, vom izola unul dintre radicali, apoi vom ridica la pătrat. Rezultă:

$$(x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2.$$

Izolând din nou radicalul rămas după ce se reduc termenii asemenea și ridicând la pătrat, rezultă:

$$cx-a=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y},$$

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right).$$

La hiperbolă, din triunghiul MFF' rezultă $FF'>\left|MF-MF'\right|>2a$, adică $2c>2a$, deci $c>a$, deci putem nota $c^2-a^2=b^2$ și obținem ecuația:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

de unde, împărțind ecuația cu a^2b^2, rezultă:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

care se numește **ecuația carteziană implicită** a hiperbolei. Distanța $FF' = 2c$ se numește **distanța focală**. Punctele de intersecție ale curbei cu axa Ox sunt $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ și se numesc **vârfurile** hiperbolei, iar dreapta AA' (axa absciselor) se numește **axă transversă** a hiperbolei. Axa Oy nu intersectează curba și se spune că axa Oy este **axa netransversă**.

Am stabilit ecuația implicită a hiperbolei

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

unde focarele sunt $F(c, o)$, $F'(-c, 0)$, $c^2 = a^2 + b^2$.

Vom studia graficul unei hiperbole stabilind ecuațiile carteziene explicite:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \text{ dacă } y\ge 0 \\ \text{sau} \\ y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \text{ dacă } y\le 0 \end{cases};x\in(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$$

Pentru $y \ge 0$, considerăm funcția: $f:(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$, $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$.

1. Domeniul maxim de definiție

Pentru $y \ge 0$, $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, se impune condiția $x^2-a^2\ge 0$, de unde se obține: $x\in(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$.

2. Mulțimea de studiu

Funcția $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ este o funcție pară. Oricare ar fi punctul $M(x_M, y_M)$ situat pe graficul funcției f, adică $y_M=\frac{b}{a}\sqrt{x_M^2-a^2}$ atunci și punctul $M'(x_{M'}, y_{M'})$ unde $x_{M''}=-x_M$ și $y_{M'}=y_M$ este situat pe graficul funcției. Avem:

$y_M' = \frac{b}{a}\sqrt{(y_M'')^2-a^2}=\frac{b}{a}\sqrt{(-x_M)^2-a^2}=\frac{b}{a}\sqrt{x_M^2-a^2}=y_M$, deci $f(-x)=f(x)$, de unde deducem că vom studia funcția f numai pe restricția $[a,+\infty)$, adică mulțimea de studiu este $[a,+\infty)$, $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, graficul funcției f fiind simetric în raport cu axa Oy.

3. Intersecția graficului cu axele de coordonate

Intersecția cu axa Ox, axa absciselor. Din ecuația $f(x) = 0$, rezultă $\sqrt{x^2-a^2}=0$, deci $x^2-a^2=0$ astfel încât $x=\pm a$. Pentru $x > 0$, obținem punctul $A(a, 0)$.

Domeniul de definiție al funcției f este $(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$, iar mulțimea de studiu $[a,+\infty)$ nu conține valoarea lui $x = 0$, deci graficul lui f nu intersectează axa ordonatelor.

4. Valorile funcției la capetele intervalului de definiție

Intervalul de definiție al funcției fiind $(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$, avem $f(-a)=0$ și $f(a)=0$, de unde rezultă punctele de intersecție ale graficului cu axa absciselor $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$.

Pentru mulțimea de studiu, restricția $[a, +\infty)$ avem $f(a) = 0$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=+\infty$.

5. Analiza existenței asimptotelor

Mulțimea maximă de definiție a funcției $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ este $(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$, iar mulțimea de studiu este $[a, +\infty)$. Deducem că nu există asimptote verticale și nici asimptote orizontale, am arătat că $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Să studiem existența asimptotei de forma $y = mx + n$. Avem:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\frac{b}{a} \text{ și}$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=-\frac{b\cdot a^2}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0.$$

Deducem că $y=\frac{b}{a}x$ este ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f pe mulțimea de studiu.

6. Mulțimea de continuitate

Funcția $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, pe mulțimea de studiu $[a, +\infty)$ este o funcție continuă.

7. Studiul derivatei întâi

Pentru $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $x \in [a, +\infty)$, obținem: $f`(x)=\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, unde $f`:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$; pentru $f`(x)=0$, rezultă $x=0\notin(a,+\infty)$. Semnul derivatei întâi este cel din tabelul care urmează. Se observă că funcția f este strict crescătoare pe mulțimea de studiu.

x		a	$+\infty$
$f'(x)=\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$		| + + + + + + + + + +	
$f(x)$		0 $\nearrow$	$+\infty$

8. Studiul derivatei a doua

Calculând derivata a doua, obținem: $f''(x)=-\dfrac{ab}{\left(x^2-a^2\right)\sqrt{x^2-a^2}}=-\dfrac{ab}{\left(x^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$,

unde $f``:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ .Semnul derivatei a doua este cel din tabelul de mai jos. Se observă că funcția f este concavă.

x		a	$+\infty$
$f''(x)=-\dfrac{ab}{\left(x^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$		| + + + + + + + + + +	
$f(x)$		0 $\frown$	$+\infty$

9. Tabelul de variație

Cu ajutorul rezultatelor obținute pentru mulțimea de studiu $[a, +\infty)$ rezultă următorul tabel de variație. Se observă că, pe mulțimea de studiu $[a, +\infty)$ funcția este strict crescătoare și concavă.

x		a	$+\infty$
$f'(x)$		| + + + + + + + + + +	
$f(x)$		0 $\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		| $\frown$	

10. Graficul funcției

În reperul ortonormal xOy, precizăm punctele importante obținute în studiul precedent, asimptota de ecuație $y=\dfrac{b}{a}x$ pentru mulțimea de studiu $[a, +\infty)$ astfel încât rezultă graficul funcției f restricționată la mulțimea de studiu (fig. 23).

Având în vedere faptul că funcția f este pară și domeniul de definiție este $(-\infty,a]\cup[a,+\infty)$, funcția are graficul simetric în raport cu axa Oy (fig. 24).

Pentru hiperbola de ecuație implicită $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a,b\in\mathbb{R}_+^*$, avem: $y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$.

Am studiat graficul funcției $f(x)=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=y\geq 0$, din care putem deduce reprezentarea geometrică a hiperbolei studiind și cazul pentru $y=-=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\leq 0$, al cărei grafic se obține simetrizând în raport cu axa absciselor graficul funcției $f(x)=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=y\geq 0$, din figura 24. Graficul hiperbolei se regăsește în figura 25.

Observație:

Din studiul făcut, rezultă că reprezentarea grafică a unei hiperbole de ecuație $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, a, b >0, este o curbă deschisă situată între asimptotele de ecuații $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ care sunt diagonalele dreptunghiului cu lungimile laturilor egale cu $AA' = 2a$ și $BB' = 2b$ și care sunt paralele cu axele de coordonate iar centrul dreptunghiului este originea reperului. Axele de coordonate sunt axe de simetrie pentru hiperbolă, și originea reperului este centru de simetrie. Dreptele de ecuații $x = \pm\, a$ sunt tangentele la hiperbolă în vârfurile sale $A(a, 0)$ și $A'(-a, 0)$.

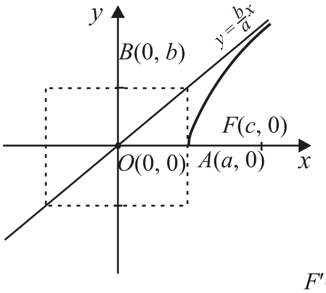


Fig. 23

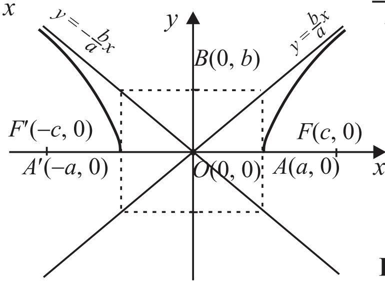


Fig. 24

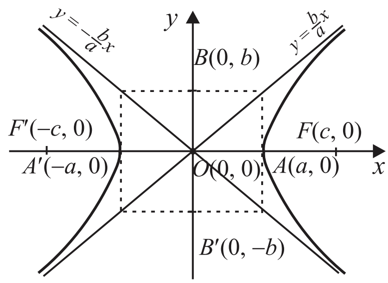


Fig. 25

Hiperbola echilateră este cazul particular când semiaxele hiperbolei sunt egale ($a = b$); ecuația unei hiperbole echilatere este: $x^2 - y^2 = a^2$.

Se spune că **hiperbola echilateră este raportată la axele ei**. Rezultă că asimptotele hiperbolei echilatere au ecuațiile: $y = \pm x$, și sunt bisectoarele axelor de coordonate. Se observă că hiperbola echilateră are asimptotele perpendiculare (fig. 26).

Faptul că hiperbola echilateră are asimptotele perpendiculare face ca acestea să poată fi luate drept axe de coordonate. **Hiperbola echilateră raportată la asimptote** are ecuația: $xy = k^2$, care se poate deduce refăcând calculele conform definiției hiperbolei, alegând focarele pe prima bisectoare, sau se obține printr-o rotație de 45° în sens trigonometric (fig. 27).

Dacă rotația se face în sens invers, deci cu unghiul –45°, axa transversă este cea de a doua bisectoare, iar ecuația hiperbolei are forma: $xy = -k^2$.

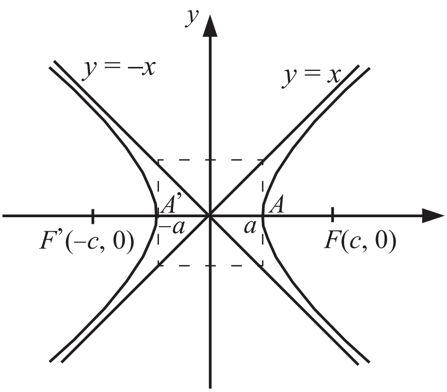


Fig. 26

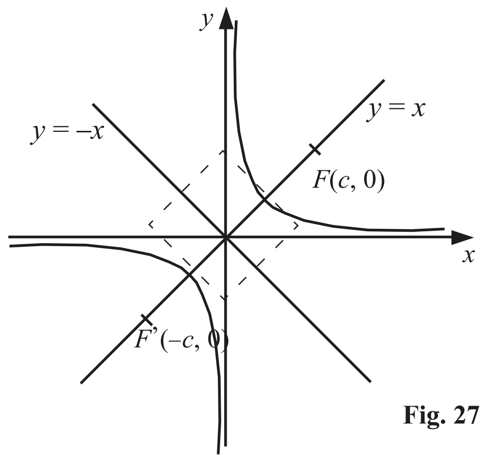


Fig. 27

3.4. Parabola

În studiul funcției de gradul al doilea, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, a fost pus în evidență graficul acestei funcții, care este o parabolă. Curba admite dreapta $x=-\dfrac{b}{2a}$, ca axă de simetrie, aceasta fiind paralelă cu axa ordonatelor. Vârful parabolei este $V\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ și reprezintă un punct de minim dacă $a>0$, respectiv un punct de maxim, dacă $a<0$.

În cele ce urmează va fi pusă în evidență o proprietate caracteristică a acestei curbe.

Definiție

Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix F, numit focar, și de o dreaptă fixă δ, numită directoare, se numește **parabolă**.

Pentru a stabili ecuația parabolei vom alege, ca axă Ox, perpendiculara din focarul F pe directoarea δ, și ca axă Oy, paralela dusă la directoarea δ a parabolei care trece prin mijlocul distanței dintre focar și directoarea δ (fig. 28).

Notăm cu A punctul de intersecție a directoarei δ cu axa Ox. Fie $M(x, y)$ un punct al parabolei și $N=\text{pr}_{\delta}M$.

Se obișnuiește să se noteze $AF=p$. Rezultă: $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$; $A\left(-\dfrac{p}{2},0\right)$. Pentru parabolă **raza focală** este segmentul MF. Numărul $p=AF>0$ se numește **parametrul parabolei**.

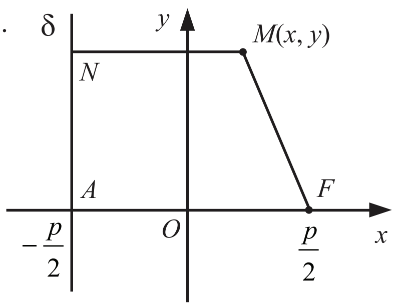


Fig. 28

Relația geometrică pe care o satisface punctul $M(x, y)$, conform definiției este:

$$MF=MN \quad \text{sau} \quad \frac{MF}{MN}=1.$$

Rezultă: $\sqrt{(x_M-x_F)^2+(y_M-y_F)^2}=x_M-x_N$, sau $\sqrt{\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\dfrac{p}{2}$.

Ridicând la pătrat și reducând termenii asemenea, obținem: $y^2=2px$, care se numește **ecuația carteziană implicită** a parabolei. Axa absciselor taie parabola în punctul $O(0, 0)$, care se numește **vârful parabolei**. Axa Ox se numește **axă transversă**. Axa Oy nu intersectează parabola și se numește axa **netransversă**.

Am arătat că ecuația carteziană implicită a parabolei este $y^2=2px$, de unde deducem:

$$y^2=2px \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{2px} \text{ dacă } y\geq 0 \\ \text{sau} \\ y=-\sqrt{2px} \text{ dacă } y\leq 0 \end{cases} ; x\in[0,+\infty),\ p>0$$

care reprezintă **ecuațiile carteziene explicite ale parabolei**.

Pentru a construi graficul parabolei, vom considera funcția $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2px}, p > 0$.

1. Domeniul maxim de definiție

Pentru $p > 0$ condiția de existență a funcției $f(x) = \sqrt{2px}$, este $x \in [0, +\infty)$.

2. Mulțimea de studiu

Pentru $f(x) = \sqrt{2px}$, mulțimea de studiu coincide cu domeniul maxim de definiție: $x \in [0, +\infty)$.

3. Intersecția graficului cu axele de coordonate

Intersecția cu axa absciselor. Din ecuația, $f(x) = 0, p > 0$ rezultă $\sqrt{2px} = 0$, deci $2px = 0$, astfel încât $x = 0$ și rezultă punctul $O(0, 0)$, deci graficul funcției trece prin originea reperului, deci este și punctul de intersecție cu axa ordonatelor.

4. Valorile funcției la capetele intervalului de definiție

Intervalul de definiție al funcției, pentru $p > 0$, fiind $[0, +\infty)$, avem $f(0) = 0$, unde rezultă că $O(0, 0)$ este punctul de intersecție al graficului cu axele de coordonate și $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2px} = +\infty$.

5. Analiza existenței asimptotelor

Mulțimea maximă de definiție a funcției $f(x) = 0, p > 0$ este $[0, +\infty)$, care coincide cu mulțimea de studiu și deducem că nu există asimptote verticale și nici asimptote orizontale, am arătat că $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Graficul funcției nu admite nici asimptote oblice de forma $y = mx + n$ deoarece avem: $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2px}}{x} = 0$ și $n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

6. Mulțimea de continuitate

Funcția $f(x) = 0, p > 0$, pe mulțimea de studiu $[0, +\infty)$, este o funcție continuă.

7. Studiul derivatei întâi

Pentru $f(x) = 0, p > 0, x \in [0, +\infty)$, obținem $f'(x) = \sqrt{2p} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, deci $f' : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, iar ecuația $f(x) = 0$ nu admite rădăcini reale. Semnul primei derivate este cel din tabelul de mai jos. Se observă că funcția f este strict crescătoare pe domeniul de definiție.

x		0		$+\infty$
$f'(x) = \sqrt{2p} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$		|	+ + + + + + + + + +	
$f(x)$		0	$\nearrow$	$+\infty$

8. Studiul derivatei a doua

Calculând derivata a doua, obținem: $f'': [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f''(x) = -\frac{\sqrt{2p}}{4 \cdot x^{\frac{3}{2}}}$, $p > 0$.

Semnul derivatei a doua este cel din tabelul de mai jos. Se observă că funcția f este concavă.

x		0		$+\infty$
$f''(x) = -\frac{\sqrt{2p}}{4 \cdot x^{\frac{3}{2}}}$		$\vert$	− − − − − − − − −	
$f(x)$		0	⌢	$+\infty$

9. Tabelul de variație

Cu ajutorul rezultatelor obținute pentru mulțimea de studiu, care este domeniul maxim de definiție, rezultă următorul tabel de variație. Se observă că funcția f este strict creascătoare și este concavă.

x		0		$+\infty$
$f'(x)$		$\vert$	+ + + + + + + + + +	
$f(x)$		0	↗	$+\infty$
$f''(x)$		$\vert$	− − − − − − − − − ⌢	

10. Graficul funcției

În reperul ortonormal xOy, precizăm elementele importante obținute în studiul precedent și construim graficul funcției (fig. 29).

Pentru parabola de ecuație implicită $y^2 = 2px$, $p > 0$, am dedus $y = \pm\sqrt{2px}$.

Am studiat graficul funcției $f(x) = \sqrt{2px} = y \geq 0$, de unde deducem reprezentarea geometrică a parabolei studiind și cazul pentru $y = -\sqrt{2px} \leq 0$, funcție al cărei grafic se obține simetrizând în raport cu axa absciselor graficul funcției $f(x) = \sqrt{2px}, p > 0$, din figura 29. Graficul parabolei se regăsește în figura 30.

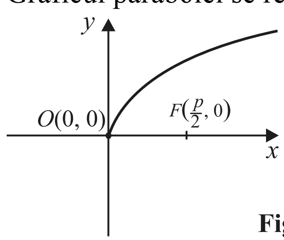


Fig. 29

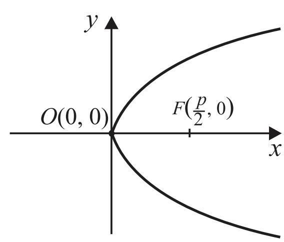


Fig. 30

Observații:

Din studiul făcut rezultă că reprezentarea grafică a unei parabole de ecuație $y^2 = 2px$, $p > 0$, este o curbă deschisă cu domeniul maxim de definiție $[0, +\infty)$ și nu admite asimptote. Axa absciselor este axă de simetrie și punctul $O(0, 0)$, originea reperului, este vârful parabolei. Dreapta de ecuația $x = 0$ (axa ordonatelor) este tangenta în vârf a parabolei.

Exercițiu de rezolvat în clasă: Urmărind etapele în studiul reprezentării grafice a parabolei $y^2 = 2px$, $p > 0$, să se reprezinte grafic parabola de ecuație $y^2 = 2px$ pentru $p < 0$.

Exerciții și probleme propuse

1. Să se reprezinte grafic cercul cu centrul în originea reperului și de rază 5.

2. Reprezentați grafic cercul circumscris triunghiului cu vârfurile $A(6, 7)$, $B(-2, 7)$, $C(6, 1)$.

3. Să se reprezinte grafic cercul care are centrul pe una dintre bisectoarele reperului și raza egală cu distanța de la centrul cercului la axele de coordonate de lungime 4.

4. Să se reprezinte grafic elipsa de ecuație $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$ Să se determine focarele elipsei.

5. Să se reprezinte grafic elipsa știind că axa mare are lungimea 26 și distanța focală 24.

6. Reprezentați grafic elipsa cu un focar în $F'(-3, 0)$ și care trece prin $M\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, 2\right)$.

7. Să se reprezinte grafic hiperbola de ecuație: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$

8. Să se reprezinte grafic hiperbola pentru care lungimea axei transverse este 10, iar distanța focală este 26.

9. Să se reprezinte grafic hiperbola, cunoscând un focar $F(5,0)$ și că punctul $M\left(-\sqrt{10}, \frac{4}{3}\right)$ se află pe hiperbolă.

10. Să se reprezinte grafic parabola de ecuație: a) $y^2 = 4x$; b) $y^2 = -4x$.

11. Să se reprezinte grafic parabola $y^2 = 2px$, care are focarul $F(4, 0)$.

12. Să se reprezinte grafic parabola $y^2 = 2px$, știind că ecuația directoarei este $x - 3 = 0$.

3.5. Tangenta într-un punct la o conică

1. Tangenta la cerc într-un punct situat pe cerc

Ecuația tangentei la cercul $\mathbf{C}(C, r)$, de centru $C(a, b)$ și ecuație $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, unde $M_0(x_0, y_0) \in \mathbf{C}(C, r)$, este: $(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) = r^2$.

2. Tangenta într-un punct la elipsă (*E*), hiperbola (*H*) și parabolă (*P*)

Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct pe conica (E), (H) sau (P). Ecuația tangentei la conică în acest punct are respectiv forma:

$$(E)\ t\colon \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1;\quad (H)\ t\colon \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1;\quad (P)\ t\colon yy_0 = \mathrm{p}(x + x_0).$$

Exerciții și probleme propuse

1. Să se scrie ecuația tangentei la cercul $\mathbf{C}(O, r)$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$:

a) $x^2 + y^2 = 4$, $M_0\left(1, \sqrt{3}\right)$; b) $x^2 + y^2 = 9$, $M_0\left(2\sqrt{2}, 1\right)$; c) $x^2 + y^2 = 100$, $M_0(6, -8)$.

2. Să se scrie ecuația tangentei la cercul $\mathbf{C}(C, r)$, cu centrul $C(a, b)$, în punctul $M_0(x_0, y_0)$:
a) $(x-5)^2+(y+12)^2=169$, $M_0(-7,-7)$; b) $x^2+y^2-8x-6y=0$, $M_0(7,7)$;
c) $x^2+y^2-10x-8y-9=0$, $M_0(10,9)$.

3. Să se scrie ecuațiile tangentelor la elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, în punctul $M_0(x_0, y_0)$:

a) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$, $M_0(-2,3)$; b) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$, $M_0\left(12,\ -\dfrac{25}{13}\right)$; c) $\dfrac{x^2}{50}+\dfrac{y^2}{32}=1$, $M_0(-5,4)$.

4. Să se scrie ecuația tangentei la hiperbola $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$:

a) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$, $M_0\left(5,\ \dfrac{9}{4}\right)$; b) $x^2-y^2=16$, $M_0(-5,3)$; c) $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$, $M_0(-4,\ 2)$.

5. Să se scrie ecuațiile tangentelor la parabola $y^2=2px$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$:
a) $y^2=6x$, $M_0(6,6)$; b) $y^2=18x$, $M_0(2,6)$; c) $y^2=-12x$, $M_0(-3,6)$.

6. Pe parabola $y^2=12x$, se consideră punctele $T_1(x_1,6)$, $T_2(x_2,2)$, $T_3(x_3,-3)$ și tangentele t_1, t_2, t_3 la parabolă în aceste puncte. Să se calculeze raportul dintre aria triunghiului $T_1T_2T_3$ și aria triunghiului determinat de tangentele t_1, t_2, t_3. Generalizare.

7. Să se demonstreze că aria triunghiului determinat de o tangentă la hiperbola $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ și asimptotele hiperbolei, este constantă. Să se determine această constantă.

8. Să se arate că:
a) tangenta la elipsă într-un punct M este bisectoarea exterioară a unghiului format de razele vectoare ale unghiului M;
b) normala la elipsă într-un punct M este bisectoarea interioară a unghiului format de razele vectoare ale unghiului M;
c) tangenta într-un punct M al unei hiperbole este bisectoarea interioară a unghiului format de razele vectoare ale punctului M;
d) normala într-un punct M al unei hiperbole este bisectoarea exterioară a unghiului format de razele vectoare ale punctului M;
e) tangenta la parabolă într-un punct M este bisectoarea interioară a unghiului format de raza vectoare și paralela la axă prin M;
f) normala într-un punct M al unei parabole este bisectoarea exterioară a unghiului format de raza vectoare și paralela la axă prin M;
g) tangentele dintr-un punct exterior M la o elipsă sunt egal înclinate pe razele focale în M;
h) tangentele dintr-un punct exterior M la o hiperbolă sunt egal înclinate pe razele focale în M.

9. a) Să se arate că cercurile $x^2+y^2=1$ și $(x+1)^2+(y-3)^2=9$ sunt ortogonale, adică tangentele în punctele de intersecție sunt perpendiculare.
b) Să se găsească condiția ca cercurile $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$ și $(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$ să fie ortogonale.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Să se arate că pentru orice numere reale a și b, avem $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$. **(1 p)**

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$. **(2 p)**

3. Să se găsească parametrii $a \in \mathbb{R}$ și $b \ge 0$ astfel încât să avem:

$$\lim_{n\to\infty} n^a\left(\sqrt{n+\sqrt{n+2}}-\sqrt{bn+\sqrt{n-2}}\right)=1.$$ **(2 p)**

4. Să se determine punctele de continuitate și derivabilitate pentru funcția

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\max\{x,\ x^2, x^3\}, & x\in\mathbb{Q}\\ \min\{x,\ x^2, x^3\}, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}.$$ **(2 p)**

5. Fie funcția $f: D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+ax}{bx-2}$, $a, b\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $D \subset \mathbb{R}$, domeniul maxim de definiție al funcției f. **(1 p)**

b) Să se determine a și b astfel ca funcția f să aibă puncte de extrem de abscise $x = -2$ și $x = 6$. **(1 p)**

Notă: Timp de lucru: 2 ore; se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

1. Fie un număr $\varepsilon \in (0, 1)$ arbitrar. Să se găsească mulțimea numerelor $a \in (0, 1)$ pentru care avem $\left|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-ax^2}\right|\le\varepsilon,\ \forall x\in[-1, 1]$. **(1 p)**

2. Să se calculeze limitele următoare, în funcție de valorile parametrilor reali a și b:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-a\sqrt{n^2-1}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^a\left(\sqrt{n^2+n}-an\right)$; **(2 p)**

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^a\left(\sqrt[3]{n+\sqrt{n}}+b\cdot\sqrt[3]{n-\sqrt{n}}\right)$. **(1 p)**

3. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, unde $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$.

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$. **(2 p)**

4. Fie $0 < a < 1$. Să se determine o funcție continuă $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietățile: $f(0) = a$ și $f(x) - f(ax) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. **(2 p)**

5. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției $f: [0, 2]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-2x^2}{1-\sqrt{1+2x-x^2}}, & x\in(0,\ 2)\\ 0, & x\in\{0,\ 2\}\end{cases}.$$ **(1 p)**

Notă: Timp de lucru: 2 ore; se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

1. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x + \cos x\sqrt{2}$, nu este periodică. **(2 p)**

2. Să se arate că funcțiile următoare sunt inversabile și să se găsească inversele lor:

a) $f: \left[\dfrac{5\pi}{6}, \ \dfrac{11\pi}{6}\right] \to [-2, \ 2], \quad f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$; **(1 p)**

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. **(1 p)**

3. Să se găsească limita șirului $(x_n)_n$ definit prin recurență, în funcție de valorile parametrului a menționat, dacă: $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + x_n^2\right), \forall\, n \in \mathbb{N}, x_0 = a, a > 0$. **(2 p)**

4. Să se calculeze următoarele limite de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}\right)$; **(1 p)**

c) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$ **(1 p)**

5. Să se arate că nu există nici o funcție polinomială P a cărei restricție la intervalul $(0, 1)$ să fie egală cu funcția $f: (0, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = e^x, \forall\, x \in (0, 1)$. **(1 p)**

Notă: Timp de lucru: 2 ore; se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 4

1. a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}$, unde $a > 0$ și $b > 0$. **(1 p)**

b) Fie numerele $n \geq 2$ și $a_1 > a_2 > ... > a_n > 0$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x\right)^{\frac{1}{x^2}}$. **(1 p)**

2. Să se găsească limita șirului $(x_n)_n$ definit prin recurență, în funcție de valorile parametrilor a și b menționați, dacă: $x_{n+1} = \dfrac{ax_n}{1 + bx_n}, \forall\, n \in \mathbb{N}, x_0 = 1, a > 0, b > 0$. **(2 p)**

3. Să se determine parametrul real a astfel încât să avem:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos^2 x + (2a-1)\cos x - a}{2a\cos^2 x - (a+2)\cos x + 1} = -3.$$ **(2 p)**

4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că ecuația $e^{nx} = nex + 1$ are o soluție $x \in \left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right]$. **(2 p)**

5. Să se arate că $\forall\, a \in (0, 1), \exists\ n \in \mathbb{N}^*$ și $\exists\, x \in \left(0, \ \dfrac{\pi}{2}\right)$ astfel încât să avem:

$\sin^{2n} x + \cos^{2n} x = a$. **(1 p)**

Notă: Timp de lucru: 2 ore; se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I. Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare
Capitolul 1. Permutări (pag. 10)

1. $\sigma\circ\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$, $\pi\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$, $(\sigma\circ\pi)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}=\pi^{-1}\circ\sigma^{-1}$.

2. a) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&1&4&3\end{pmatrix}$; b) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&5&1&4\end{pmatrix}$; c) $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&3&5&1\end{pmatrix}$.

3. a) $\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$, $\sigma^3=e,\sigma^{212}=\left(\sigma^3\right)^{70}\circ\sigma^2=\sigma^2$. **7.** $\sigma=(2,3)\circ(3,4)\circ(4,5)$, $\pi=(1,4)\circ(4,5)\circ(5,7)\circ(2,6)\circ(6,3)$; descompunerea nu este unică! **8.** a) $Inv(\sigma)=6$, $Inv(\pi)=7$; b) $\varepsilon(\sigma)=1$, $\varepsilon(\pi)=-1$, $\varepsilon(\sigma\circ\sigma)= =\varepsilon(\sigma)^2=1$, $\varepsilon(\pi\circ\pi)=\varepsilon(\pi)^2=1$, $\varepsilon(\sigma\circ\pi)=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\pi)=-1$ și $\varepsilon(\pi\circ\sigma)=-1$. **9.** Avem $Inv(\sigma)=\frac{n(n-1)}{2}$, deci $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ de unde $\varepsilon(\sigma)=-1$ dacă și numai dacă $n = 4k + 2$ sau $n = 4k + 3$. **10.** Fie $\pi\in S_n$ a.î. $a_1b_{\pi(1)}+a_2b_{\pi(2)}+...+a_nb_{\pi(n)}$ este cel mai mare număr . **11.** Aplicăm inegalitatea mediilor.

Capitolul 2. Matrice (pag. 25)

3. $X=\begin{pmatrix}-1&2\\4/5&1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}2&1\\2/5&-2\end{pmatrix}$. **4.** a) $\begin{pmatrix}n&\frac{n(n+1)}{2}&\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\-2n&n&\frac{n(n+1)}{2}\end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix}n&0\\2n&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}n&\varepsilon\\2n&\varepsilon^2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}n&-1\\2n&-1\end{pmatrix}$ după cum $n = 3k$, n = $3k + 1$, $n = 3k + 2$, $k\in\mathbb{N}^*$.

9. a) $A^2 = 2A$ pentru că este ridăcină a ecuației sale caracteristice. Se continuă prin inducție b) $\begin{pmatrix}2^n-1&-2^n+1\\-2^n+1&2^n-1\end{pmatrix}$. **10.** Avem $A_xA_y=A_{x+y}=A_{yx}=A_yA_x$ și analog $B_xB_y=B_yB_x$. numere. **13.** Avem $A^n=(I_3+B)^n=I_3+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2=\begin{pmatrix}1&2n&-n(n-1)\\00&1&-n\\0&&1\end{pmatrix}$. **16.** Aplicând formula Moivre lui $A=2\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{3}&-\sin\frac{2\pi}{3}\\\sin\frac{2\pi}{3}&\cos\frac{2\pi}{3}\end{pmatrix}$, obținem $A^{12}=2^{12}\begin{pmatrix}\cos 8\pi&-\sin 8\pi\\\sin 8\pi&\cos 8\pi\end{pmatrix}=2^{12}I_2$.

17. $a = 2$, $b = -3$, $c = 3$, $d = 1$. **19.** Cum $ad - bc = 0$, ecuația caracteristică a lui A este $x^2 - (a + d)x = 0$. Așadar $A^2 = (a + d)A$, de unde $A^n = (a+d)^{n-1} A$. Dacă $a + d = 0$ atunci $A^2 = 0$, deci $(I_2 + A)^n = I_2 + nA$, iar dacă $a + d \neq 0$, atunci $(I_2 + A)^n = I_2 + \dfrac{(1+a+d)^n - 1}{a+d} A$.

20. $A^n = \left(I_2 + (A - I_2)\right)^n = I_2 + C_n^1 (A - I_2) = \begin{pmatrix} 4n+1 & 4n \\ -4n & -4n+1 \end{pmatrix}$.

21. $A^{3k} = I_2$, $A^{3k+1} = A$, $A^{3k+2} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $B^{4k} = 3^{2k} I_3$, $B^{4k+1} = 3^{2k}B$, $B^{4k+3} = 3^{2k+1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$B^{4k+3} = 3^{2k+1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$. **24.** Soluțiile pentru $X^3 - I_2 = 0$ sunt $\begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. **25.** Din $(f_A \circ f_B) \circ f_C = f_A \circ (f_B \circ f_C)$ rezultă $f_{(AB)C} = f_{A(BC)}$, de unde $(AB)C = A(BC)$.

Capitolul 3. Determinanți

(pag. 31) 2. a) $\begin{vmatrix} a & b \\ xb & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2b^2 = 0$. Dacă $b \neq 0$ și $a^2 - 2b^2 = 0$, atunci $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 2$ cu $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, deci $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Contradicție. Așadar $b = 0$ și atunci din $a^2 = 0$ rezultă și $a = 0$. **3.** (S_3) $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$; (S_4) $x = a + b$, $y = a - b$. **4.** Dacă $n \neq 4$ dreptele d și d' sunt concurente, dacă $n = 4$ și $m \neq -3$ avem $d \,//\, d'$ și $d \neq d'$, iar dacă $n = 4$, $m = -3$ avem $d = d'$.

(pag. 51) 4. Valoarea determinantului este $-(1+m)x^2 + 2x - 2m - 3$ și acesta este $\neq 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ dacă $\Delta < 0$. Avem $\Delta = -8m^2 - 20m - 8 < 0$ dacă $m \in (-8, -2) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$. **5.** $2(ad - bc)$, $-3(1+2\varepsilon)$. **7.** $x = -1$, $x = -5$; $x = b$, $x = c$. **8.** (S) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; (S') $x = y = z = 0$. **9**. Determinatul matricei sistemului este egal cu $2abc \neq 0$, unica soluție se calculează cu regula lui Cramer și se găsește $x = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ etc. Dacă D este piciorul perpendicularei din A, avem $a = BC = BD + DC = \cos B + b\cos C$ etc. **10.** Ca sistem în necunoscutele a, b, c este sistem Cramer pentru că determinantul matricei sistemului este $V(\alpha, \beta, \gamma) = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) \neq 0$. Unica soluție este $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$.

11. $|A| \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. **13.** $f(0) = a_1a_2a_3a_4$, $f'(0) = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4$ și $f''(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ și $f(x) = ax + b$ cu $b \in \mathbb{R}$. Evident $b = f(0)$ și $a = f'(0)$.

15. $F_n=\frac{1}{a-b}\left(a^{n+1}-b^{n+1}\right)$. **16.** $|A|=(-1)^n 2^{n-1}$, $|A|=2^{n-1}$. **17.** $|A|=(-1)^{n-1}\cdot n$; $|B|=1$. **18.** $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

Capitolul 4. Sisteme de ecuații liniare

(pag. 63) 2. $a\neq 1$; $b\in(-4,4)$. **3.** c) $A^{2007}=BC^{2007}B^{-1}=BCB^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-4&2\\-2&-3&2\\-4&-8&5\end{pmatrix}$.

6. $A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2&6&4\\10&-14&-8\\4&-4&-4\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&1&-3\\12&4&-10\\-6&-2&6\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}-8&-3&1\\-20&-7&33\\-12&-4&16\end{pmatrix}$. **7.** $A=I_2$ sau $A=-I_2$. **14.** Se folosește identitatea $\begin{pmatrix}I_2&0\\iI_2&I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_2&0\\-iI_2&I_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+iB&-B\\0&A-iB\end{pmatrix}$.

17. b) Se observă că $\sum_{i+j=k}\frac{1}{i!}\cdot\frac{1}{j!}A^iB^i=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{k!}C_k^jA^{k-j}B^j=\frac{1}{k!}(A+B)^k$.

(pag. 77) 1. $E=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$; $E=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-3&0&-6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. **2.** 2 pivoți dacă $\alpha=-9$ și 3 pivoți dacă $\alpha\neq-9$; 2 pivoți dacă $\alpha=5$ și 3 pivoți dacă $\alpha\neq 5$. **3.** $|A|=-44$; $|B|=24$.

(pag. 103) 1. $s=1$, $t=5$, $c_3^A=2c_1^A+c_2^A$, $C_4^A=C_1^A+C_2^A$, $l_3^A=2l_1^A+3l_2^A$.

2. $c_3^A=c_1^A+c_2^A$, $c_4^A=c_1^A-2c_2^A$, $l_3^A=-2l_1^A+3l_2^A$, $l_4^A=l_1^A+l_2^A$. **3.** rang $A=2$, rang $B=2$, rang $C=3$. **4.** rang $A=2$ dacă $\lambda\in\{0,-2\}$ și rang $B=3$ dacă $\lambda\neq3$; rang C = 1 dacă $\lambda=1$, rang C = 3 dacă $\lambda=-3$ și rang $C=4$ în rest. **6.** rang $A=2$ dacă $\alpha=\gamma=-1$ și $\beta=1$, rang $A=3$ în rest; rang $B=2$ dacă $\alpha=5$ și $\beta=4$, rang $B=3$ în rest. **7.** (S_1) $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=2$; (S_2) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{1}{3}$. **8.** (S_1) $x=1$, $y=2$, $z=-z$; (S_2) $x=-2$, $y=0$, $z=3$; (S_3) $x=1$, $y=1$, $z=-2$; (S_4) $x=1$, $y=0$, $z=1$. **9.** (S_1) $(3-\lambda_1-3\lambda_2,4-\lambda_1-5\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2)$ cu $\lambda\in\mathbb{R}$; (S_2) $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=1$. **11.** (S_1) $\left(-\frac{8}{3}\lambda_1+13\lambda_2,\frac{1}{3}\lambda_1-4\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2\right)$ cu $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$; (S_2) $x_1=x_2=x_3=0$. **12**. (S_1) $\alpha=1$ cu soluțiile $(-\lambda_1,-\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2)$ cu $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ și $\alpha=-2$ cu soluțiile $(\lambda,\lambda,\lambda)$ cu $\lambda\in\mathbb{R}$; (S_2) $\alpha=\frac{2}{3}$. **14.** $\alpha=\gamma=-1$, $\beta=1$ și soluțiile sunt $(0,1+\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2)$ cu $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. **15.** Determinantul matricei sistemului este egal cu $(a-b)(a-c)(b-c)$ și este $\neq 0$ dacă și numai dacă a, b, c sunt numere distincte.

Partea a II-a. Elemente de analiză matematică
Capitolul 1. Limite de funcții

(pag. 113) **1.** $\forall x\in A, 0\le x\le 2$; $A_* = [-\infty, 0], A^* = [2, \infty]$; 0, 2; min nu există, max = 2. **2.** $\exists a,b>0$, a.î. $A\subset[-a,a]$, $B\subset[-b,b]$; pentru $m=\max\{a,b\}$, avem $A\cup B\subset[-m,m]$. **6.** a) A = [2, 3]; 2, 3; 2, 3; b) A = [1, 3/2); 1, 3/2; min = 1, max nu există; c) A = (2, 4]; 2, 4; min nu există, max = 4. **7.** a) (0, 1]; b) [0, 1); c) [0, 1]; d) [0, 1]. **14.** Se minorează și se majorează termenii sumei. **15.** A are un singur punct. **16.** 0; 3. **17.** a) $\inf A+\varepsilon$ nu este minorant pentru A; b) $\sup A-\varepsilon$ nu este majorant pentru A. **19.** 0, (3); 0,(1); 2,(7); 0,(45); 0,6(54); 0,0(5); 0,041(6). **20.** 1,0909; 1,090909; 3,7037; 3,703703; 4,5757; 4,575757. **24.** Se descompune $b-\sqrt{2}$ în factori. **25.** Se raționează prin reducere la absurd. **27.** a) $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$; b) $x=\sqrt{2}, y=1/\sqrt{2}$. **28.** Se raționează prin reducere la absurd. **29.** Rezultă că $m^2+n^2=4k+2\,(k\in\mathbb{N})$, în timp ce orice pătrat perfect p^2 $(p\in\mathbb{N})$ este de forma $4i$ sau $4i+1$, $i\in\mathbb{N}$ (după cum p este par sau impar). La fel ca pentru $\sqrt{2}$, se arată că $\sqrt{4k+2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. **30.** a) x = 2, $y=\log_2 3$; b) $x=\sqrt{2}$, $y=\log_{\sqrt{2}}3$. **34.** a) –4, 6; b) 1/2, 9/2; c) 1/3, 5/3; d) $1-\sqrt{7}, 2$. **35.** a) $(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$; b) $[-1, 3]$; c) $(-\infty, 0]\cup[3/2, 3]$; d) $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$; e) $\left(-\infty,\ 2-\sqrt{7}\right]\cup[1,\ 3]\cup\left[2+\sqrt{7},\ \infty\right)$. **45.** a) $0, \infty$; b) $-\infty, 4$; c) $-2, \infty$; d) $-\infty, \infty$; e) $-2, \infty$; f) $0, \infty$.

(pag. 121) **2.** a) (1, 2); b) (–3, 1]; c) [–2, 10]; d) $(-\infty, 6)$; e) $(-2,-1]\cup[2,5)$. **3.** Egalitățile se verifică prin dublă incluziune. **4.** a) Se raționalizează prin absurd. b) (a, b) = (4, 6). **6.** a) Se folosește minorarea sau majorarea $a<b$, după caz. b) Se raționează prin absurd. c) Se subînțelege că I este interval nedegenerat (cu capete diferite). Deoarece $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$, $\exists a,b\in\mathbb{Q}$, $a<b$, a.î. $[a,b]\subset I$. Apoi se aplică a) și b). **7.** a) (1,9; 2,1); b) a=2, ε=1/4. **8.** a) $\varepsilon=\min\{x_0-3, 5-x_0\}$. b) Fie $r=(x_2-x_1)/2$; luăm $\varepsilon_1=\min\{r, x_1-3\}$, $\varepsilon_2=\min\{r, 5-x_2\}$. **14.** Se explicitează definiția vecinătăților $V_1,\dots,V_n$ ale lui x_0, în cazurile $x_0\in\mathbb{R}, x_0=-\infty$ și $x_0=\infty$. **15.** a) [0, 1], $\varnothing$; b) [–1, 2], $\{5, 7\}$; c) $\{\infty\}$, $\mathbb{N}$; d) $\mathbb{R}$, $\varnothing$; e) $[-1,2]\cup[5,8]$, $\{10\}$; f) $[-1/2, 2]$, $\varnothing$.

(pag. 134) **1.** a) [–5, 2]; b) [–3, 3]; c) $[-2, 2]\setminus\{-1\}$; d) $(3/2, \infty)$; e) $\mathbb{R}$; f) $\mathbb{R}$; g) $(2, \infty)$; h) $(-2\pi, 2\pi)\setminus\{-\pi, 0, \pi\}$; i) $(2,\infty)\setminus\left\{\pm\pi/6+k\pi \mid k\in\mathbb{N}^*\right\}$. **2.** a) diferite; b) diferite; c) egale; d) egale; e) egale; f) egale. **3.** a) {0, 1}; b) {0, 1}; c) [–36, 9]; d) [1/2, 1]; e) [–1, 1]. **4.** a) (–2, 3/2); b) $\left(1-\sqrt{3}, 0\right)\cup\left(2, 1+\sqrt{3}\right)$; c) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[(2k\pi-\pi/6, 2k\pi)\cup(2k\pi, 2k\pi+\pi/6)\right]$; d) (0, 1). **5.** a) Impară; b) impară; c) pară; d) pară; e) nu este pară sau impară; f) impară; g) impară; h) pară. **6.** Funcțiile g și h se deduc din relațiile $f(x)=g(x)+h(x)$, $f(-x)=g(x)-h(x)$. **7.** Fie $\varphi=f^{-1}$. Se calculează $f(-\varphi(y))$, $\forall y\in B$. Dacă f este pară, atunci A=B= {0}.

8. a) Periodică, $T = 2\pi$; b) periodică, $T = 2\pi / 3$; c) periodică, $T = 2\pi$; d) periodică, $T = 1$; e) periodică, $T = 8\pi$; f) *nu* este periodică; g) periodică, de perioadă orice număr $T \in \mathbb{Q}$, $T > 0$; h) neperiodică. **9.** a) Se constată că $f(x + 8) = f(x)$; b) periodică, de perioadă T = 8. **10.** Se explicitează modulele, părțile întregi, max, min și, pe porțiuni, se folosesc grafice de funcții elementare. **16.** Nu este injectivă. Pentru $x = 1 / a$ și $y = 2 / a$, $f(x) = f(y)$.

(pag. 167) 13. a) 0; b) 0; c) 0; d) 0; e) –1; f) $\frac{1}{3}$; g) $\frac{4}{3}$; h) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$; i) $-\frac{1}{4}$; j) 1; k) 1; l) 3; m) $\frac{3}{5}$; n) 0; o) $\sqrt{2}$; p) 0; r) 3. **14**. a) $\frac{b+2c}{2}$; b) $\frac{b+2c}{3}$. **15**. a) $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$; b) $a = -1$, $b = \frac{1}{3}$; c) $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$; d) orice $a < \frac{1}{2}$ și $b = 0$; $a = \frac{1}{2}$ și $b = 1$. **16**. a) $l = 1$ pentru $|a| \le 1$, $l = a^2$ pentru $|a| > 1$; b) $l = 0$ pentru $a < 2$, $l = \frac{1}{3}$ pentru $a = 2$, $l = \infty$ pentru $a > 2$; c) $l = 0$ pentru $a < 2$, $l = 1$ pentru $a = 2$, $l = \infty$ pentru $a > 2$. **17**. a) ∞; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) 0; e) $\frac{1}{4}$. **19**. a) e^4; b) $\frac{1}{e}$; c) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; d) e^2; e) e^3; f) ∞.

(pag. 196) 2. a) *Nu* are limită în 0; b) $l = 1$. **3**. a) *Nu* are limită în –1; b) *nu* are limită în –2; c) $l = \infty$; d) $l = 0$; e) nu are limită în 0 pentru $a \in [-1, 1]$, $l = -\infty$ pentru $a < -1$, $l = \infty$ pentru $a > 1$; f) *nu* are limită în 0; g) $l = 0$; h) *nu* are limită în $\pi/4$. **18**. $l_s = -\infty$, $l_d = \infty$. **19.** a) $x = 5$; b) $x = -2$, $x = 2$; c) $x = -1$, $x = 1$; d) $x = 1/e$; e) $x = 1$; f) $x = 0$ as. la dreapta. **20.** a) $y = 0$ as. spre $\pm\infty$; b) $y = 2$ as. spre $\pm\infty$; c) *nu* are; d) $y = -5$ as. spre $-\infty$; e) $y = -1$ as. spre $-\infty$; $y = 1$ as. spre ∞; f) $y = -\pi / 2$ as. spre $-\infty$, $y = 1$ as. spre ∞. **23**. $a = 1$, $b = -3$. **24.** $a = -1$, $b = 1$. **25.** $a = 0$, $a = 4$. **26.** $a = 8$, $b = -4$.

Capitolul 2. Continuitate

(pag. 211) 2. a) continuă; b) discontinuă în 0; c) continuă; d) discontinuă în *1*; e) discontinuă în $-2\pi, -\pi, \pi, 2\pi$; *f*) discontinuă în 1; g) discontinuă în *1*; h) discontinuă în 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2; i) continuă; j) continuă; k) continuă; l) discontinuă în 0. **3.** a) $a = -1$ și $a = 2$; b) $a = -2$ și $a = 2$; c) $a = 0$; d) $a = 1$; e) *f* **nu** este continuă în *1* pentru nici un *a*; f) $a = 2$; g) *f* este continuă în 0 pentru $a = 1$; *f* rămâne discontinuă în $x = \pm 1/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$); h) $a = 1/2$. **7.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. **8.** a) continuă; b) discontinuă în –1; c) continuă; d) continuă; e) continuă. **12.** a) $x \in (4, \infty)$; *b*) $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \{2\pi\}$; *c*) $x \in (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$. **13.** Se studiază semnul funcției $g(x) = f(x) - x$ în punctele *a* și *b*. **14.** Se ia restricția lui *f* la intervalul limitat de marginile lui *f*. **15.** Se folosește proprietatea funcției continue pe interval de a fi strict monotonă și de a avea mulțimea valorilor-interval.

Capitolul 3. Derivabilitate

(pag. 235) 5. a) $2\cos x\sqrt{x^2+1} + 2\sin x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; b) $-\cos\left(\sqrt{x}+1\right)\sin\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$; c) $\frac{1}{\cos^2\left(\cos x^2\right)}\cdot\left(-\sin x^2\right)\cdot\left(2x\right) = \frac{-2x\sin\left(x^2\right)}{\cos^2\left(\cos x^2\right)}$; d) $2tg\left(\cos x\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\cos x\right)}\cdot\left(-\sin x\right)$; e) $\cos\left(ctg\alpha\right)\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}$; f) $\frac{1}{4x-1}\cdot 4$; g) $\frac{2x-2}{x^2-2x+3}$; h) $\frac{1}{1+\sin x}\cos x$; i) $\frac{2^x\ln 2}{2^x+1}$.

(pag. 243) **2.** a) $\left(f^{-1}\right)`(1)=\left(f^{-1}\right)\left(f(0)\right)=\frac{1}{f`(0)}=\frac{-1}{3}$. **3.** a) *f* este crescătoare, deci injectivă, *f* continuă și $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$, deci *f* surjectivă; b) $f'(x)=$ $=1+\frac{1}{x}\neq 0$, $\forall x\in(0,+\infty)$, prin urmare f^{-1} este derivabilă; c) $\frac{e}{e+1}$. **4.** a) *f* este strict crescătoare pe (0, +∞) și $\lim_{x\to 0} f(x)=1$, iar $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$, cum *f* continuă se obține *f* bijectivă; b) $f'(x)=4x^3+2x+1\neq 0$, $\forall x\in(0,+\infty)$, deci f^{-1} este derivabilă.

(pag 257) 1. a) $f'(x) = 2x - 5$, $x_0 = 5/2$ punct de minim local; b) $f'(x) = -2x + 3$, $x_0 = 3/2$, punct de maxim local; c) *f* nu este derivabilă în $x = 1$ și $x = 2$. Pentru oricare $x \in (1, 2]$, *x* este punct de minim local; d) *f* nu este derivabilă în $x = -2$ și $x = 2$, $x = -2$ și $x = 2$ sunt puncte de minim local, nu se aplică Fermat $x = 0$ punct de maxim local. Se aplică teorema Fermat; e) Pentru $x \in (-1, -2]$, $f(x) = -2$, valoare de minim local. $x = 3$, punct de maxim local, *f* nu este derivabilă și $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$; f) $x = 2$ punct de maxim local, *f* nu este derivabilă; g) $x = 0$ punct de minim local, *f* nu este derivabilă în $x = 0$. $x = \pi/2$ este punct de maxim local, se poate aplica teorema Fermat. **4. 1)** Funcția $f(x) = a^x + b^x + c^x$ are în $x = 0$ o valoare cu minim, cum 0 este punct interior lui ℝ și *f* este derivabilă în 0, avem $f'(0) = 0$, deci $abc = 1$. **2)** Se aplică teorema lui Fermat pentru funcția $f(x)=a_1^x+a_2^x+...+a_n^x$, în $x = 0$.
8. a) $3 \le x^2 - 1 \le 24$, $\forall x\in[2,5]$; b) $f'_d(2) = 4$, $f'_s(5) = 10$. **9.** *f* nu este continuă în 0.
18. Aplicăm teorema lui Rolle funcției $g(x)=f(x)e^{\lambda x}$.

(pag. 281) 1. $f'(x) = 2ax + b$, $f'(x) = 0$ obținem $x=-\frac{b}{2a}$. **2.** a) $f'(x) = 3x^2 + + 6x$; *f* este crescătoare pe $(-\infty,-2]$ și pe $[0,+\infty)$ și descrecătoare pe $[-2, 0]$; b) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 =$ $= 3(x - 1)^2 \ge 0$. *f* este crescătoare pe ℝ. **3.** $f'(x)=\left(2x^2+4x+2m+1\right)e^{2x}$; *f* crescătoare dacă și numai dacă $f'(x) \ge 0$ pentru orice $x \in$ ℝ. Se obține $m\le\frac{1}{2}$. **4.** $f'(x)=(x+1)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot$ $\cdot\left(\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)\right)$ și demonstrăm că $\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)\le 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
5. $f'(x) = 2x + 1$ dacă $x \ge 0$ și $f'(x)=\frac{\left(2x^2-1\right)e^{x^2}+1}{x^2}$. Notăm $g(x)=\left(2x^2-1\right)e^{x^2}+1$ și obținem $g'(x)=2x\left(2x^2+1\right)e^{x^2}$, cu $g'(x) > 0$, deci *g* este strict crescătoare și $g(x) > g(0) = 0$; vom avea *f* strict crescătoare pe ℝ. **6.** a) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ și $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, prin urmare $(f - g)'(x) = 0$ și deducem că $(f - g)(x)$ este constantă. Cum $(f-g)(0)=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$,

obținem $(f-g)(x)=\frac{\pi}{2}$, $\forall x$. Analog, demonstrăm că $f'(x) = g'(x)$, $\forall x$. **7.** Studiem variația funcției $f(x)=27x-\frac{x^4}{4}+7$. Avem $f'(x)=27x-x^3$, cu soluție a ecuației $f'(x)=0$, $x=3$. Deci $a_3=81-\frac{81}{4}+7=\frac{3\cdot 81}{4}+7=\frac{271}{4}$. **8.** $\alpha=2+2e$, $\beta=-1-e$, $x=-1$ min, $x=1+e$ max. **9.** a) puncte de extrem -1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1; b) $x=1$, punct de minim; c) $x=-1$ punct de minim, $x=+1$, punct de maxim; d) f strict crescătoare; e) $x=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ punct de minim; g) $x=1$ punct de minim, $x=2$ punct de maxim; h) $x=-1$ maxim, $x=0$ minim, $x=1$ maxim, $x=e$ minim. **10.** $m=9$. **11.** $m\in(-\infty, 5]$. **12.** $|m|>2$. **13.** $a>0$. **14.** $m=3$.

(pag. 290) 1. a) f este convexă pe $(-\infty, 0]$ și concavă pe $[0, +\infty)$; b) $f''(x)=12(x^2-3x+2)$, convexă pe $(-\infty, 1]$, $[2, +\infty)$ și concavă pe $[1, 2]$; c) $f''(x)=\frac{2x(x^4-2x^2-3)}{(x^2+1)^4}$, concavă pe $(-\infty,-\sqrt{3}]$ și pe $[0,\sqrt{3})$, respectiv convexă pe $(-\sqrt{3},0]$ și $[\sqrt{3},+\infty)$; d) convexă pe $[-2\pi,-\pi]$ și pe $[0,\pi]$, concavă pe $[-\pi,0]$ și pe $[\pi,2\pi]$; f) $f''(x)=2\ln x+3$, concavă pe $\left(0,\frac{\sqrt{e}}{e^2}\right)$, convexă $\left(\frac{\sqrt{e}}{e^2},+\infty\right)$; h) convexă pe $(-\infty, 0)$, concavă pe $[0, +\infty)$. **2.** $f''(x)=\frac{x^2-5\alpha x+4\alpha^2}{(2\alpha-2x)^2(\alpha-x)}$, $\alpha=-1$.

3. $f''(x)=\frac{2(a+1)(3x^4-2x^2-1)}{(x^2-1)^4}$, $f''(x)=0$ conduce la $x=\pm1$, dar nu aparține domeniului. **4.** $a\in(-2, 2)$. **5.** $f''(x)=n^3\sin^{n-2}nx\cdot\left[n\cdot\cos^2 nx-1\right]$, iar ecuația $f''(x)=0$ are soluțiile $x_k=\frac{k\pi}{n}$, $k\in\mathbb{Z}$, și $x_k'=\frac{1}{n}\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{2k\pi}{n}$, $k\in\mathbb{Z}$.

(pag. 292) 1. a) Considerăm $f(x)=e^x-1-xe^x$ și avem $f'(x)=-xe^x$; făcând tabelul de variație, observăm că $f(x)\le 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$; b) $f(x)=x\cos x-\sin x$, cu $f'(x)=-x\sin x$, făcând tabelul de variație, observăm că $f(x)<f(0)=0$, $\forall x\in(0,\pi)$; c) $f(x)=\ln x-x+1$, cu $f'(x)=\frac{1}{x}-1\le 0$, $\forall x\ge 1$, respectiv $g(x)=1-\frac{1}{x}-\ln x$, cu $g'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\le 0$, $\forall x\ge 1$; d) Considerăm $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-\operatorname{arctg} x$ și procedăm analog, folosind tabelul de variație.

Cuprins

Ion D. Ion
Eugen Câmpu
Neculai I. Nediță
Nicolae Angelescu
Adrian P. Ghioca

Matematică

M1

Manual pentru clasa a XI-a

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică (TC + CD) şi filiera vocațională, profilul militar MApN, specializarea matematică-informatică (CD).

CORINT EDUCAȚIONAL

ISBN: 978-973-135-087-5