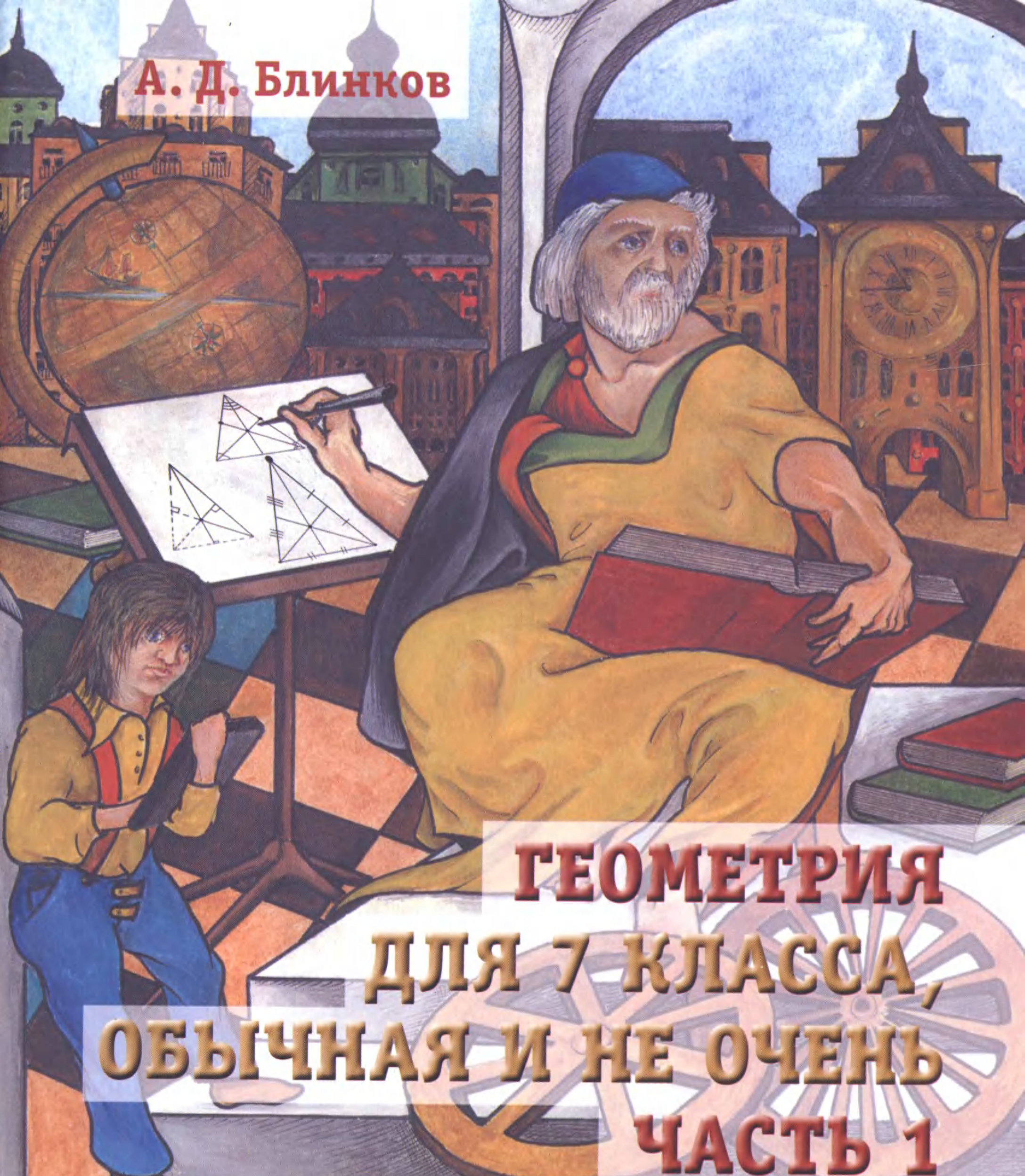
А. Д. Блинков



ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА, ОБЫЧНАЯ И НЕ ОЧЕНЬ
ЧАСТЬ 1

ШКОЛЬНЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
КРУЖКИ

Школьные математические кружки
Выпуск 22

А. Д. Блинков

Геометрия для 7 класса, обычная и не очень

Часть 1

Издательство МЦНМО
Москва, 2021

УДК 51(07)
ББК 22.1
Б69

Блинков А. Д.

Б69 Геометрия для 7 класса, обычная и не очень: В 2 ч. Часть 1. — М.: МЦНМО, 2021. — 144 с.: ил. — (Школьные математические кружки; Вып. 22).

ISBN 978-5-4439-1584-5
ISBN 978-5-4439-1582-1 (ч. 1)

Двадцать вторая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена занятиям по геометрии со школьниками 7 класса. В неё вошли разработки восьми занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для преподавателя.

Значительный объём книжки занимает список дополнительных задач, их решения и комментарии. Приведён список использованной литературы, а также указаны авторы задач. Для удобства использования заключительная часть книжки, как всегда, сделана в виде раздаточных материалов.

Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, студентам педагогических вузов, а также всем любителям элементарной геометрии.

Учебно-методическое издание

Александр Давидович Блинков

Геометрия для 7 класса, обычная и не очень. Часть 1

Серия «Школьные математические кружки»

Иллюстрация и оформление обложки
художник Евгений Чижевский

В соответствии с Федеральным законом № 436-ФЗ
от 29 декабря 2010 года издание маркируется знаком 6+

Подписано в печать 24.02.2021 г. Формат $60 \times 88\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объём 9 печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ № 255.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

ISBN 978-5-4439-1584-5
ISBN 978-5-4439-1582-1 (ч. 1)

Предисловие

Эта книга серии «Математические кружки» не совсем обычная. В отличие от большинства книг этой серии, она ориентирована только на школьников одной параллели. Её издание — это попытка решить проблему проведения кружков (факультативов, элективных курсов) по геометрии в 7 классе, ориентируясь на постепенное освоение учащимися минимума сведений общеобразовательной школьной программы. При этом учтено разнообразие базовых школьных программ и учебников.

Объём представленного материала оказался настолько большим, что книга состоит из двух частей (книжек), издаваемых отдельно. Каждая из частей содержит восемь занятий. Тематика занятий первой части традиционная, их последовательность соответствует порядку изучения этих тем в школьной программе. Исключением может являться только занятие 8, так как «полупризнак» равенства треугольников не рассматривается в большинстве школьных учебников.

Отметим, что к материалу занятий первой части естественным образом примыкает ряд геометрических задач на построение, но они не включены в эту книгу, так как таким задачам посвящена отдельная книжка серии: «Геометрические задачи на построение» (авторы — А. Д. Блинков и Ю. А. Блинков). Для 7 класса из неё при желании можно использовать первые два занятия

Как обычно, в материалы каждого занятия входят: вступительный и поясняющий текст учителя, включающий в себя несколько подробно разобранных типовых задач по теме; упражнения и задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач; методические комментарии для учителя (в том числе и комментарии в начале занятия, поясняющие основное содержание и цели занятия и содержащие перечень необходимых предварительных сведений). Ещё раз отметим, что разбиение на занятия максимально учитывает наличие или отсутствие сведений, которые учащиеся имеют на тот или иной момент в соответствии со школьной программой, но в некоторых случаях даются комментарии для «продвинутых» школьников, которые обладают знаниями сверх базовой школьной программы.

Отдельным списком представлены дополнительные задачи различного уровня трудности, часть из которых в какой-то степени дублирует задачи, предложенные для занятий, а часть — дополняет их новыми идеями (наиболее сложные задачи отмечены знаком *). Эти задачи можно использовать на усмотрение преподавателя (или обучающегося). Для них также приведены подробные решения. Для удобства в конце каждого занятия приведён список задач из этого раздела, которые имеет смысл использовать для закрепления материала, контроля его освоения и более глубокого изучения. Следует учесть, что есть задачи, которые могут быть отнесены к нескольким занятиям (в том числе из разных частей книги).

Краткое содержание и цели занятий

Занятие 1. Равенство треугольников и равнобедренный треугольник — 1. Это занятие посвящено решению задач на применение признаков равенства треугольников, свойств и признаков равнобедренного треугольника. Основная цель — приобретение школьниками навыков распознавания равных треугольников в простых геометрических конструкциях и обоснования этих равенств. Решение задач не требует дополнительных построений. Также не потребуется использовать теоремы о сумме углов и внешнем угле треугольника.

Занятие 2. Равенство треугольников и равнобедренный треугольник — 2. На этом занятии рассматриваются более сложные задачи, для решения которых применяются признаки равенства треугольников, а также свойства и признаки равнобедренного треугольника. Кроме того, либо при решении потребуются дополнительные построения, либо исходная конструкция такова, что увидеть равные треугольники весьма непросто. Некоторые дополнительные построения являются «типовыми», то есть применяются для решения многих задач (не только представленных на этом занятии). Отдельное внимание уделено построению примеров и контрпримеров к утверждениям, связанным с равенством треугольников. По-прежнему для освоения материала занятия не потребуется знания теорем, связанных с суммой углов треугольника.

Занятие 3. Параллельность и сумма углов треугольника. Это занятие посвящено задачам, для решения которых требуется применить свойства параллельных прямых или теорему о сумме углов треугольника. Присутствуют как задачи на непосредственный счёт углов, заданных числами, так и задачи, в которых для вычисления углов требуется составить простые уравнения. Также есть задачи, в которых вычисление углов позволяет доказать равенство треугольников, равнобедренность треугольника или найти соотношение между линейными элементами треугольника. Некоторые задачи также дают возможность повторить типовые дополнительные построения, рассмотренные в занятии 2, в частности «удвоение» медианы.

Занятие 4. Внешний угол треугольника. На этом занятии продолжается отработка навыков счёта углов и применение теорем о параллельности прямых и сумме углов треугольника. При этом в ряде задач уже потребуется работа с углами, обозначенными буквенными выражениями. Отдельная цель — приучить школьников эффективно использовать теорему о внешнем угле треугольника для решения задач. Это представляется весьма важным, так как многие учащиеся редко используют эту теорему, предпочитая каждый раз пользоваться суммой углов треугольника, что часто делает решение более громоздким.

Занятие 5. Прямоугольный треугольник — 1. Основное содержание этого занятия — применение свойства медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, и обратного утверждения, которое является признаком прямоугольного треугольника. Так как в большинстве базовых школьных учебников эти факты не выделены в качестве теорем, то они формулируются и доказываются. В процессе решения ряда задач потребуется счёт углов, что даст возможность повторить применение теорем о внешнем угле и сумме углов треугольника. Кроме того, во многих случаях будут рассматриваться равнобедренные треугольники и это даст возможность повторить их свойства и признаки.

Занятие 6. Прямоугольный треугольник — 2. На этом занятии основное внимание уделено применению свойства прямоугольного треугольника с углом 30° и утверждения, ему обратного. Кроме того, решение некоторых задач потребует применения признаков равенства прямоугольных треугольников. Этому уделено отдельное внимание, так как учащиеся не всегда распознают возможность их применения в конкретных геометрических конструкциях. Кроме того, на этом занятии сформулированы и доказаны свойство и признак биссектрисы угла, которые будут неоднократно использованы впоследствии.

Занятие 7. Равносторонний треугольник. Основное содержание этого занятия — решение задач, связанных с равносторонним треугольником. При этом существенным образом используется, что каждый угол равностороннего треугольника равен 60°. В частности, по ходу решения многих задач будет возникать равнобедренный треугольник, в котором один из углов равен 60°, откуда и будет следовать, что этот треугольник равносторонний (признак равностороннего треугольника). Помимо этого, материал занятия даёт возможность закрепить навыки, полученные на предыдущих занятиях: применение признаков равенства треугольников, свойств и признаков параллельности, свойств и признаков равнобедренного треугольника, свойств прямоугольного треугольника и пр.

Занятие 8. Ещё раз о равенстве треугольников. Основные цели этого занятия: 1) познакомиться с четвёртым признаком равенства треугольников (его ещё называют «полупризнаком» равенства треугольников) и научиться применять его при решении задач; 2) научиться различать верные и неверные утверждения, связанные с равенствами треугольников, и строить контрпримеры к правдоподобным, но неверным утверждениям. Кроме того, решение некоторых задач позволит вновь повторить типовые дополнительные построения. Материал этого занятия тесно связан с некоторыми задачами на построение, в частности с построением треугольника по двум сторонам и углу, лежащему напротив одной из них.

По традиции в конце книжки все занятия представлены в виде дидактических материалов. Понятно, что преподаватель математического кружка (или учитель на уроках или факультативных занятиях) может по своему усмотрению использовать только часть предложенных занятий, поменять порядок их изучения и т. д.

Выражаю благодарность всем авторам книг и статей, указанных в списке литературы, а также авторам всех использованных задач (многих из которых установить, к сожалению, не удалось).

Автор благодарен А. В. Антропову, Ю. А. Блинкову и Д. В. Прокопенко, в чьих материалах были найдены некоторые задачи, а также всем школьникам, на занятиях с которыми этот материал был апробирован и «протестирован». Часть этой работы проходила на математических кружках под руководством Т. А. Барановой, за что ей отдельное спасибо.

Кроме того, Ю. А. Блинков, будучи редактором книги, оказал существенное влияние на идеологию, компоновку материалов и улучшение текста. Ряд важных замечаний от редактора серии А. В. Шаповалова также способствовал улучшению текста книги.

Занятие 1
Равенство треугольников и равнобедренный треугольник — 1

Основные цели занятия: 1) научить школьников видеть равные треугольники в простых геометрических конструкциях и применять три признака равенства треугольников; 2) применять основные свойства и признаки равнобедренного треугольника.

Исходя из уровня школьников, возможно, имеет смысл повторить формулировки признаков равенства треугольников, уделив особое внимание понятию соответствующих сторон и углов, и повторить формулировки основных свойств и признаков равнобедренного треугольника, обсудив, почему одни утверждения являются свойствами, а другие — признаками.

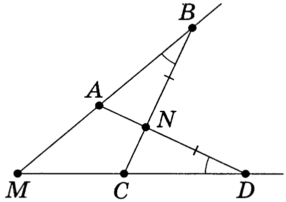
Для освоения предложенного материала, помимо указанного, потребуется знание свойств смежных и вертикальных углов. Подчеркнём, что ни одна из предложенных задач этого занятия не потребует знания теорем о сумме углов и внешнем угле треугольника. Кроме того, решение задач первого занятия практически не потребует дополнительных построений (за исключением очевидных).

Преждевременным, с нашей точки зрения, является также рассмотрение задач на построение контрпримеров к утверждениям, связанным с предложенной тематикой. Но если преподаватель сочтёт нужным, то он сможет использовать такие задачи из дополнительной части.

На этом занятии будут рассмотрены сравнительно несложные задачи, для решения которых применяются признаки равенства треугольников, а также свойства и признаки равнобедренных треугольников. Кроме этого, вам могут потребоваться свойства вертикальных и смежных углов. Рассмотрим два примера.

Пример 1.1. На одной стороне угла с вершиной M отмечены точки A и B, а на другой стороне — точки C и D (см. рисунок). Отрезки AD и BC пересекаются в точке N,

$BN = DN$ и $\angle MBC = \angle MDA$. Докажите, что точка N лежит на биссектрисе угла M.



Решение. Проведём отрезок MN.

Первый способ. Так как $\angle ANB = \angle CND$ (вертикальные углы), то треугольники ANB и CND равны (по стороне и двум прилежащим к ней углам, см. рис. 1.1а). Следовательно, $AN = CN$ и $\angle BAN = \angle DCN$. Тогда $AD = CB$ и $\angle MAD = \angle MCB$ (углы, смежные с равными). Значит, равны треугольники MAD и MCB (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Следовательно, $MA = MC$.

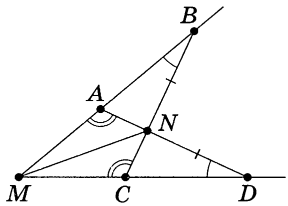


Рис. 1.1а

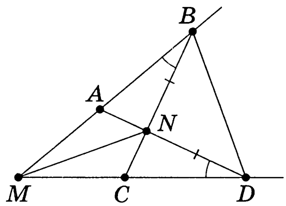


Рис. 1.1б

Тогда треугольник MAN равен треугольнику MCN (по трём сторонам), откуда $\angle AMN = \angle CMN$, что и требовалось.

Второй способ. Проведём отрезок BD, тогда треугольник BND равнобедренный (см. рис. 1.1б). Следовательно, $\angle NBD = \angle NDB$. Значит, $\angle MBD = \angle MDB$ (суммы двух соответственно равных углов), поэтому треугольник BMD также равнобедренный: $MB = MD$.

Следовательно, треугольник MBN равен треугольнику MDN (по двум сторонам и углу между ними), откуда $\angle AMN = \angle CMN$, что и требовалось.

► Доказав, что BMD — равнобедренный треугольник, можно рассуждать иначе. Отметим середину K отрезка BD

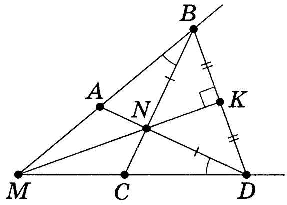


Рис. 1.1в

(см. рис. 1.1в), тогда MK и NK — медианы равнобедренных треугольников BMD и BND соответственно. Следовательно, они же являются их высотами и биссектрисами. Но через точку K проходит единственный перпендикуляр к BD, значит, точка N лежит на биссектрисе MK угла BMD, что и требовалось. ◄

Пример 1.2. Высота AK, биссектриса BL и медиана CM треугольника ABC пересекаются в точке O, причём $AO=BO$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

Решение. Из условия задачи следует, что треугольник AOB равнобедренный, а OM — его медиана, проведённая к основанию (см. рис. 1.2). Следовательно, OM — высота треугольника AOB. Тогда и медиана CM треугольника ABC является его высотой, значит, этот треугольник равнобедренный: $CA = CB$.

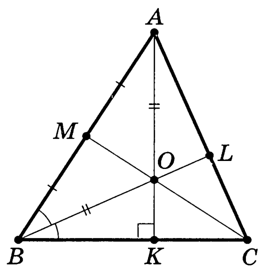


Рис. 1.2

Из равнобедренности треугольников ACB и AOB следует равенство углов при их основаниях, значит, $\angle OBC =$ $= \angle OAC$. Тогда, учитывая, что BL — биссектриса угла ABC, получим, что AK — биссектриса угла BAC. По условию AK — высота треугольника ABC, поэтому $AB = AC$. Таким образом, $AB = BC = AC$, то есть треугольник ABC равносторонний.

► Доказав, что $CA = CB$, можно продолжить рассуждение иначе (при наличии у школьников знания о точке пересечения высот). Медиана CM данного треугольника является его высотой, поэтому O — точка пересечения высот AK и CM, значит, биссектриса BL, проходящая через точку O, также является высотой этого треугольника. Следовательно, $BC = BA$. ◀

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1.1. В треугольнике ABC медиана BE перпендикулярна биссектрисе AD. Найдите длину AB, если $AC = 12$.

1.2. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = CE$. Докажите, что треугольник DBE является равнобедренным с основанием DE тогда и только тогда, когда треугольник ABC равнобедренный с основанием AC.

1.3. Внутри треугольника ABC отмечена точка M так, что луч BM делит пополам углы ABC и AMC. Докажите, что $BM \perp AC$.

1.4. Треугольники ABC и ADC равнобедренные с общим основанием AC. Их вершины B и D расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Докажите, что B, D и середина M стороны AC лежат на одной прямой.

1.5. На продолжении биссектрисы BL треугольника ABC отмечена точка M так, что $BM = BC$. Докажите, что если $BL = AB$, то $AM = CL$.

1.6. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка K и проведены биссектриса KE треугольника AKC и высота KH треугольника BKC. Оказалось, что угол EKH прямой. Найдите BC, если $HC = 5$.

1.7. В остроугольном треугольнике ABC медиана AM равна высоте BH, причём равны углы MAB и HBA. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

1.8. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что $AB = CE$, $BE = AD$, $\angle AED = \angle BAD$. Докажите, что $BC > AD$.

Ответы, решения, комментарии

1.1. Ответ: 6.

Пусть F — точка пересечения AD и BE (см. рис. 1.3). В треугольнике ABE биссектриса AF является высотой,

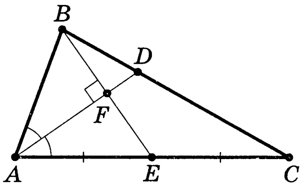


Рис. 1.3

поэтому этот треугольник равнобедренный. Следовательно, $AB = AE = \frac{1}{2}AC = 6$.

1.2. ► Имеет смысл напомнить школьникам, что при такой формулировке задачи требуется доказать два взаимно обратных утверждения. ◄

Первый способ. См. рис. 1.4а.

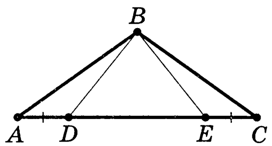


Рис. 1.4а

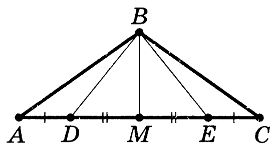


Рис. 1.4б

1. Пусть $AB = BC$. Тогда $\angle BAC = \angle BCA$, значит, равны треугольники ABD и CBE (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $BD = BE$, что и требовалось.

2. Пусть $BD = BE$. Тогда $\angle BDE = \angle BED$, значит, $\angle BDA = \angle BEC$ (углы, смежные с равными). Следовательно, равны треугольники ABD и CBE (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $AB = BC$.

Второй способ. Пусть M — середина AC (см. рис. 1.4б). Так как $AD = CE$, то M — середина DE. Значит, BM — медиана как треугольника ABC, так и треугольника DBE. Если один из этих треугольников является равнобедренным с основанием, указанным в условии, то BM — его высота. Тогда в другом треугольнике высота совпадает с медианой, поэтому он также равнобедренный.

► Отметим, что если поменять местами точки D и E, то рассуждения по сути не изменятся. ◄

1.3. ► Если у школьников возникнут трудности с поиском решения, то имеет смысл обратить их внимание на то, что конструкция, возникающая в этой задаче, похожа на рассмотренную в примере 1.1. ◄

Пусть луч BM пересекает сторону AC в точке D (см. рис. 1.5). Так как $\angle AMB = \angle CMB$ (углы, смежные с равными), то $\Delta AMB = \Delta CMB$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Следовательно, $AB = CB$. Тогда биссектриса BD равнобедренного треугольника ABC, проведённая к основанию, является его высотой, то есть $BM \perp AC$.

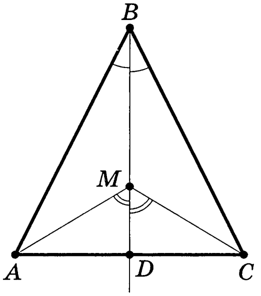


Рис. 1.5

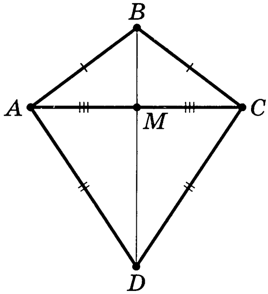


Рис. 1.6

► Из доказанного равенства треугольников также следует, что $AM = CM$, поэтому заключительный вывод можно также получить из того, что MD — биссектриса равнобедренного треугольника AMC. ◄

1.4. Из условия задачи следует, что BM и DM — медианы равнобедренных треугольников ABC и ADC соответственно, проведённые к их общему основанию (см. рис. 1.6). Следовательно, они являются высотами этих треугольников, то есть $\angle AMB = \angle AMD = 90°$. Но через точку M проходит единственная прямая, перпендикулярная AC, значит, точки B, M и D лежат на одной прямой.

► Отметим, что аналогичные рассуждения возможны и для случая, когда точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно AC (см. рис. 1.5), то есть опять возникает связь с примером 1.1.

Четырёхугольник $ABCD$, составленный из двух равнобедренных треугольников с общим основанием, называют дельтоидом. Из доказанного следует, что его диагонали перпендикулярны и одна из них делит каждый из двух противолежащих углов пополам. ◀

1.5. Проведём отрезок AM и рассмотрим треугольники ABM и LBC (см. рис. 1.7). Так как $AB = LB$, $BM = BC$ и $\angle ABM = \angle LBC$, то эти треугольники равны. Значит, $AM = CL$.

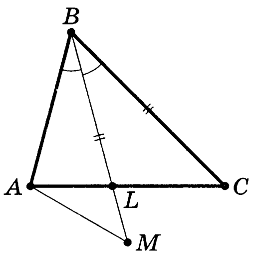


Рис. 1.7

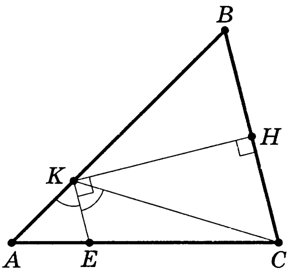


Рис. 1.8

1.6. Ответ: 10.

Так как углы AKC и BKC смежные, то их биссектрисы перпендикулярны (см. рис. 1.8). Следовательно, биссектриса угла BKC, перпендикулярная биссектрисе KE угла AKC, совпадает с KH. Таким образом, KH — высота и биссектриса треугольника BKC, значит, BKC — равнобедренный треугольник с основанием BC, а KH — медиана, проведённая к основанию. Следовательно, $BC = 2HC = 10$.

1.7. ▶ Конструкция, возникающая в задаче, похожа на рассмотренную в примере 1.2, поэтому и рассуждения похожи. ◀

По условию ABC — остроугольный треугольник, поэтому высота BH лежит внутри него.

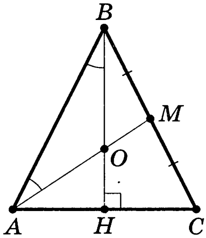


Рис. 1.9

Первый способ. В треугольниках ABM и ABH сторона AB общая, $AM = BH$ и $\angle MAB = \angle HBA$, поэтому $\Delta ABM = \Delta BAH$ (по двум сторонам и углу между ними, см. рис. 1.9). Следовательно, $\angle ABM = \angle BAH$ и $\angle AMB = \angle BHA = 90°$.

Из первого равенства углов следует, что $AC = BC$, а из второго равенства следует, что медиана AM является также и высотой данного треугольника, поэтому $AB = AC$.

Таким образом, три стороны треугольника ABC равны между собой.

Второй способ. Пусть O — точка пересечения отрезков AM и BH (см. рис. 1.9). В треугольнике AOB углы OAB и OBA равны, следовательно, $OA = OB$. Тогда $OM = AM - OA = BH - OB = OH$. Рассмотрим треугольники AOH и BOM. В них $OA = OB$, $OH = OM$ и $\angle HOA = \angle MOB$, поэтому эти треугольники равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle AMB = \angle BHA = 90°$ и $\angle MBO = \angle HAO$.

Из первого равенства следует, что медиана AM треугольника ABC является его высотой, поэтому $AB = AC$. Из второго равенства следует, что $\angle MBA = \angle ABO + \angle MBO = \angle BAO + \angle HAO = \angle HAB$, поэтому $AC = BC$. Следовательно, треугольник ABC равносторонний.

► Школьники, уже знакомые с теоремой о сумме углов треугольника, могут использовать и другие способы доказательства. Например, доказав, что $AB = AC$, можно получить, что $\angle CAM = \angle BAM = \angle HBA$, а затем использовать, что сумма этих трёх углов равна $90°$. Тогда в равнобедренном треугольнике ABC угол CAB равен $60°$, откуда и следует, что треугольник ABC равносторонний. ◄

1.8. Рассмотрим треугольники BAD и CEB. В них $BA = CE$, $DA = BE$, $\angle BAD = \angle AED = \angle BEC$ (см. рис. 1.10), следовательно, $\Delta BAD = \Delta CEB$ (по двум сторонам и углу между ними). Тогда $BC = BD > BE = AD$.

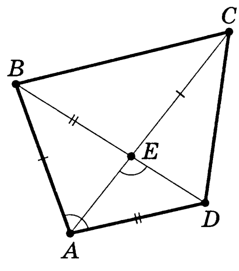


Рис. 1.10

► Для учащихся, уже знакомых с признаками параллельности прямых, можно отметить, что из доказанного равенства треугольников следует равенство углов BDA и CBE, поэтому $AD \parallel BC$. ◄

Можно также использовать задачи Д1—Д9.

Занятие 2
Равенство треугольников и равнобедренный треугольник — 2

На этом занятии основное внимание опять уделено задачам на применение признаков равенства треугольников, а также свойств и признаков равнобедренного треугольника. Но, в отличие от задач занятия 1, решение задач этого занятия потребует, как правило, дополнительных построений. Отдельное внимание уделено построению примеров и контрпримеров к утверждениям, связанным с равенством треугольников. По-прежнему для освоения материала занятия не потребуется знания теоремы о сумме углов треугольника.

На этом занятии будут рассмотрены более сложные задачи, для решения которых применяются признаки равенства треугольников, а также свойства и признаки равнобедренного треугольника. Сложность этих задач состоит в том, что для их решения потребуются дополнительные построения либо исходная конструкция такова, что увидеть равные треугольники весьма непросто. Некоторые дополнительные построения являются «типовыми», то есть применяются для решения многих задач (не только представленных на этом занятии). Рассмотрим два примера.

Пример 2.1. Две стороны и медиана, проведённая к третьей стороне одного треугольника, соответственно равны двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне другого треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.

► В этой задаче даже после того, как сделан чертёж, равных треугольников не видно, поэтому в случае затруднений у школьников можно и нужно подсказать, что надо, сделав дополнительное построение, попытаться «объединить» три данных элемента в один треугольник. ◄

Решение. Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и равны их медианы

BM и B_1M_1. Продлим каждую из медиан на её длину, то есть на лучах BM и B_1M_1 отметим точки D и D_1 соответственно так, что $DM = BM$ и $D_1M_1 = B_1M_1$ (см. рис. 2.1). Учитывая, что $\angle AMD = \angle CMB$ (вертикальные углы), получим, что $\Delta AMD = \Delta CMB$ (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $AD = BC$. Аналогично докажем равенство треугольников $A_1M_1D_1$ и $C_1M_1B_1$, из которого следует, что $A_1D_1 = B_1C_1$.

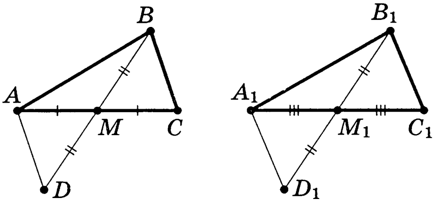
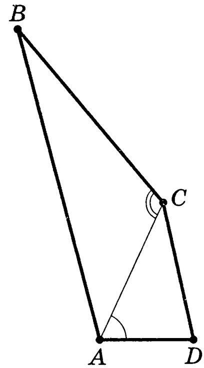


Рис. 2.1

Таким образом, $AD = A_1D_1$, $AB = A_1B_1$ и $BD = B_1D_1$, поэтому $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$ (по трём сторонам). Следовательно, $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$, а значит, $\Delta ABM = \Delta A_1B_1M_1$ (по двум сторонам и углу между ними). Из этого равенства следует, что $AM = A_1M_1$, поэтому $AC = A_1C_1$. Тогда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (по трём сторонам).

► Полезно обсудить другие способы рассуждений (например, равенство треугольников ABD и $A_1B_1D_1$ можно получить по двум сторонам и углу между ними), а также провести аналогию с решением задачи на построение треугольника по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне. Желательно также подчеркнуть, что «удвоение медианы» часто применяется при решении различных задач, если медиана присутствует на чертеже. ◄



Пример 2.2. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CAD + \angle BCA = 180°$ и $AB = BC + AD$ (см. рисунок). Докажите, что $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.

► И в этом случае школьники, скорее всего, сами не придумают нужного построения. Тогда придётся им подсказать, что если сумма двух углов равна 180°, то можно приложить их один к другому так, чтобы они имели общую сторону, а две другие стороны стали противоположными лучами. ◀

Решение. Для удобства введём обозначения: $AD = x$, $BC = y$, $\angle CAD = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $\angle ADC = \gamma$, $\angle BAC = \delta$, $\angle ACD = \varphi$ (см. рис. 2.2а). Тогда $\alpha + \beta = 180°$ и $AB = x + y$ (по условию).

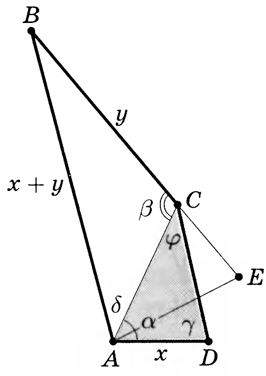


Рис. 2.2а

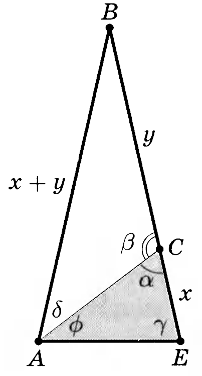


Рис. 2.2б

Теперь «отрежем» треугольник ACD, перевернём его и приставим обратно так, чтобы вершины A и C поменялись местами. Новое положение вершины D обозначим E.

Так как $\alpha + \beta = 180°$, то точки B, C и E будут лежать на одной прямой. При этом $CE = AD = x$, то есть $BE = x + y = AB$ (см. рис. 1.2б). В равнобедренном треугольнике ABE углы при основании равны, то есть $\delta + \varphi = \gamma$, что и требовалось.

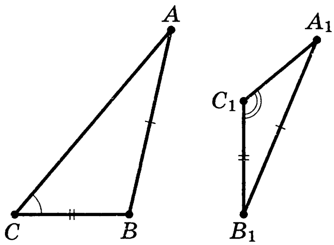
▶ Следует обратить особое внимание учащихся на необычное дополнительное построение, которое использовано при решении задачи, так как этот приём встретится и в дальнейшем. Его иногда так и называют: «отрежем, перевернём и приставим...». ◀

В нескольких задачах этого занятия сформулирован вопрос: «Обязательно ли..?». Напомним, что в задачах такого типа надо понять ответ и если он утвердительный, то провести доказательство, а если он отрицательный, то привести контрпример.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

2.1. Вася вырезал из картона треугольник, разрезал его на два треугольника и послал обе части Пете, который также сложил из них треугольник. Обязательно ли Петин треугольник окажется равен Васиному?

2.2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle C + \angle C_1 = 180°$ (см. рисунок). Докажите, что $\angle A = \angle A_1$.



2.3. Докажите, что если медиана треугольника совпала с его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.

2.4. В треугольнике ABC на стороне AC отмечены такие точки D и E, что $AD = DE = EC$. Может ли оказаться так, что $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$?

2.5. Две стороны и угол, лежащий напротив одной из них, в одном треугольнике соответственно равны двум сторонам и углу, лежащему напротив соответствующей стороны в другом треугольнике. Обязательно ли эти треугольники равны?

2.6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AD = BC$; $\angle ABD + \angle CDB = 180°$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

2.7. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL, причём $BL = AB$. На её продолжении за точку L отмечена точка K так, что $\angle BAK + \angle BAL = 180°$. Докажите, что $BK = BC$.

2.8. Пусть K — середина стороны BC треугольника ABC. На лучах AB и AC отмечены точки X и Y соответственно так, что $AX = AY$ и точка K лежит на отрезке XY. Докажите, что $BX = CY$.

Ответы, решения, комментарии

2.1. Ответ: не обязательно.

Например, Вася может разрезать остроугольный треугольник ABC по медиане BD (см. рис. 2.3а), а Петя может сложить из полученных частей треугольник ABB', совместив отрезки AD и CD (см. рис. 2.3б).

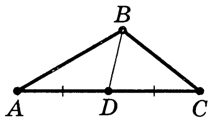


Рис. 2.3а

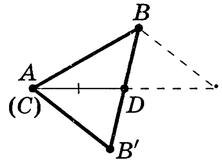


Рис. 2.3б

▶ Отметим, что и в этом случае помогло «удвоение медианы». Приведённый пример можно упростить, рассматривая равнобедренный треугольник, в котором BD будет являться высотой. ◀

2.2. Приложим данные треугольники друг к другу так, чтобы совпали вершины B и B_1, C и C_1, а вершины A и A_1 оказались в разных полуплоскостях относительно прямой BC (см. рис. 2.4). Так как $\angle C + \angle C_1 = 180°$, то точки A, C и A_1 лежат на одной прямой. Следовательно, образовался равнобедренный треугольник ABA_1, в котором углы A и A_1 при основании равны.

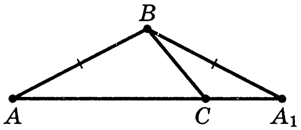


Рис. 2.4

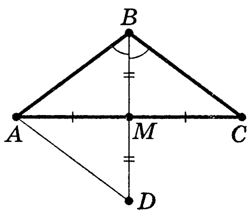


Рис. 2.5

2.3. Пусть в треугольнике ABC отрезок BM является медианой и биссектрисой. «Удвоим» медиану BM, то есть на луче BM отметим точку D так, что $DM = BM$ (см. рис. 2.5). Тогда равны треугольники AMD и CMB (по двум сторонам и углу между ними), значит, $AD = CB$ и $\angle ADB = \angle CBD = \angle ABD$. Следовательно, треугольник ABD равнобедренный с основанием BD, поэтому $AB = AD = CB$, что и требовалось.

► Имеет смысл провести аналогию с примером 2.1 (особенно в случае, когда школьники испытывают затруднения). Кроме того, стоит подчеркнуть, что доказанное утверждение является признаком равнобедренного треугольника. ◄

2.4. Ответ: не может.

Предположим, что требуемая конструкция построена (см. рис. 2.6). Рассмотрим треугольник ABE: BD — его медиана. Если $\angle ABD = \angle DBE$, то BD является также и биссектрисой этого треугольника, поэтому ABE — равнобедренный треугольник с основанием AE, а BD — его высота. Аналогично BE — высота равнобедренного треугольника DBC. Таким образом, из точки B опущено два различных перпендикуляра на прямую AC, что противоречит теореме о единственности перпендикуляра к прямой: *через любую точку можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной.*

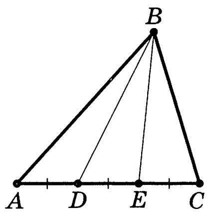


Рис. 2.6

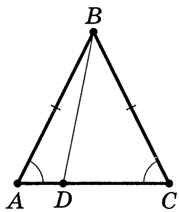


Рис. 2.7

2.5. Ответ: не обязательно.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC. На его основании AC отметим точку D, отличную от его середины (см. рис. 2.7). Тогда в треугольниках ABD и CBD сторона BD общая, $AB = CB$, $\angle BAD = \angle BCD$, но эти треугольники не равны, так как $AD \neq CD$.

► В случае затруднений имеет смысл обратить внимание школьников на рис. 2.4. ◄

2.6. Разрежем данный четырёхугольник по диагонали BD (см. рис. 2.8а) и, «перевернув» треугольник BCD, вновь приложим его к диагонали BD (см. рис. 2.8б). Получился равнобедренный треугольник $AB'C'$ ($AB' = B'C'$). Следовательно, $\angle B'AD' = \angle B'C'D'$, то есть $\angle BAD = \angle BCD$, что и требовалось.

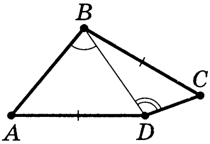


Рис. 2.8а

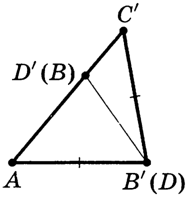


Рис. 2.8б

► Отметим, что в треугольниках ABD и CBD, на которые диагональ BD разбивает данный четырёхугольник, BD — общая сторона, $AD = BC$, $\angle BAD = \angle BCD$, но эти треугольники не обязаны быть равными (на рис. 2.8б отрезок $B'D'$ в общем случае не перпендикулярен AC'). Таким образом, треугольники ADB и CBD (см. рис. 2.8а) — ещё один контрпример для задачи 2.5. ◄

2.7. ► В случае затруднений имеет смысл вернуться к задаче 1.5. ◄

Из того, что $BL = AB$, следует, что треугольник ABL равнобедренный, значит, $\angle BAL = \angle BLA$ (см. рис. 2.9а). Тогда $\angle BAK + \angle BLA = 180°$. Учитывая, что углы BLA и BLC смежные, получим, что $\angle BAK = \angle BLC$. Значит, $\Delta BAK = \Delta BLC$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Следовательно, $BK = BC$.

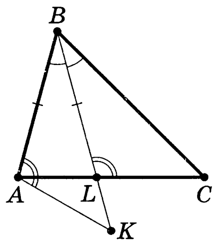


Рис. 2.9а

► Несмотря на то, что такое решение не требует дополнительных построений, увидеть равные треугольники не просто. Поэтому ту же идею решения можно реализовать иначе, если вспомнить решение задачи 1.2: на продолжении стороны AC за точку A отложить отрезок AD, равный AK

(см. рис. 2.9б). Тогда из равенства $\angle BAK + \angle BAL = 180°$ и рассуждения о смежных углах, приведённого выше, следует, что $\angle BAD = \angle BAK = \angle BLC$. Значит, равны треугольники BAD и BAK (по двум сторонам и углу между ними), откуда $\angle ABD = \angle KBA = \angle LBC$. Следовательно, равны треугольники BAD и BLC (по стороне и прилежащим к ней углам). Тогда $BC = BD = BK$.

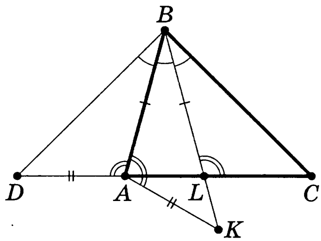


Рис. 2.9б

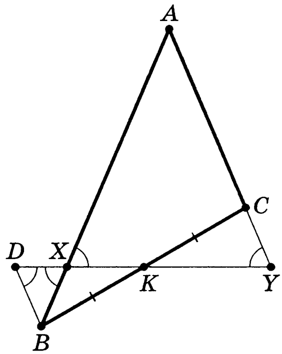


Рис. 2.10

С «продвинутыми» учащимися можно также обсудить, что треугольник BLC можно получить из треугольника BAK поворотом против часовой стрелки с центром B на угол, равный половине угла ABC. ◄

2.8. Из условия задачи следует, что $\angle AXY = \angle AYX$ (см. рис. 2.10). Заметим, что точка K не может быть серединой отрезка XY. Действительно, пусть K — середина XY, тогда равны треугольники BXK и CYK (по двум сторонам и углу между ними), значит, $\angle BXK = \angle CYK$. Но это невозможно, так как угол BXK тупой, а угол CYK острый.

Без ограничения общности можно считать, что $XK < YK$. На луче KX отметим точку D так, что $KD = KY$. Тогда треугольники BDK и CYK равны (по двум сторонам и углу между ними), значит, $BD = CY$ и

$$\angle BDK = \angle CYK = \angle AXY = \angle BXD.$$

Следовательно, треугольник BXD равнобедренный: $BD = BX$. Таким образом, $BX = CY$, что и требовалось.

► Отметим, что в данной конструкции возникла ситуация, разобранная в задаче 2.5: в треугольниках BXK и CYK соответственно равны две стороны и углы, лежащие напротив одной из них, но эти треугольники не равны. ◄

Можно также использовать задачи Д1, Д2, Д10—Д17, Д87, Д89.

Занятие 3
Параллельность и сумма углов треугольника

Основная цель этого занятия — отработать применение свойств параллельных прямых и теоремы о сумме углов треугольника для вычисления углов. При этом в некоторых задачах требуется лишь непосредственный подсчёт углов, а в других задачах вычисление углов помогает доказать равенство треугольников или найти соотношение между линейными элементами треугольника. Особое внимание стоит обратить на задачи, в условии которых одновременно встречаются биссектрисы и параллельные прямые. Некоторые задачи также дают возможность повторить типовые дополнительные построения, рассмотренные в занятии 2, в частности удвоение медианы.

Поскольку счёт углов, заданных буквенными выражениями, вызывает отдельные затруднения у школьников, на этом занятии углы задаются в основном числовыми выражениями, но в некоторых задачах для вычисления углов потребуется вводить буквенные обозначения и составлять простейшие уравнения.

На этом занятии будут предложены задачи, для решения которых потребуется применение теоремы о сумме углов треугольника, а также применение свойств параллельных прямых. Использование этих фактов даст возможность не только вычислять конкретные углы, но и доказывать равенство треугольников, а также находить соотношения между линейными элементами треугольника.

Сначала рассмотрим пример непосредственного вычисления углов, результаты которого полезно запомнить.

Пример 3.1. В треугольнике ABC биссектрисы внутренних углов B и C пересекаются в точке I, а биссектрисы внешних углов B и C — в точке J. Найдите углы BIC и BJC, если $\angle BAC = \alpha$.

Решение. См. рис. 3.1.

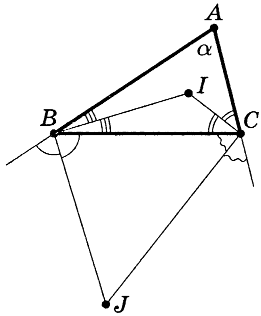


Рис. 3.1

1. Из теоремы о сумме углов треугольника для треугольника ABC следует, что $\angle ABC + \angle ACB = 180° - \alpha$. Значит, $\angle IBC + \angle ICB = (180° - \alpha) : 2 = 90° - 0{,}5\alpha$. Тогда из треугольника IBC получаем $\angle BIC = 180° - (90° - 0{,}5\alpha) = 90° + 0{,}5\alpha$.

2. Сумма внешних углов B и C равна $(180° - \angle ABC) + (180° - \angle ACB) = 360° - (\angle ABC + \angle ACB) = 360° - (180° - \alpha) = 180° + \alpha$. Значит, $\angle JBC + \angle JCB = (180° + \alpha) : 2 = 90° + 0{,}5\alpha$. Тогда из теоремы о сумме углов треугольника для треугольника JBC получаем $\angle BJC = 180° - (90° + 0{,}5\alpha) = 90° - 0{,}5\alpha$.

Ответ: $\angle BIC = 90° + 0{,}5\alpha$; $\angle BJC = 90° - 0{,}5\alpha$.

Из полученных результатов следует, что в любом треугольнике угол между биссектрисами является тупым, а угол между *внешними биссектрисами* (биссектрисами внешних углов) — острым.

▶ Отметим, что сумма двух найденных углов равна 180°, что также можно получить из теоремы о сумме углов для четырёхугольника $BICJ$, если использовать, что угол между внутренней и внешней биссектрисами, проведёнными из одной вершины, равен 90°. ◀

Следующий пример показывает, что вычисление углов может оказаться полезным для доказательства соотношения между элементами треугольника.

Пример 3.2. Медиана треугольника образует с его сторонами, выходящими из той же вершины, углы 40° и 70°. Докажите, что она равна половине одной из сторон этого треугольника.

Решение. Пусть BM — медиана треугольника ABC. По условию $\angle ABM = 70°$, $\angle CBM = 40°$. На продолжении BM за точку M отметим точку D так, что $DM = BM$ (см. рис. 3.2). Тогда из равенства треугольников CMD и AMB (по двум сторонам и углу между ними) получим, что $\angle CDM = \angle ABM = 70°$. Из теоремы о сумме углов треугольника для треугольника BCD получаем $\angle BCD = 180° - (\angle CBD + \angle CDB) = 70° = \angle CDB$, значит, $BC = BD = 2BM$, что и требовалось.

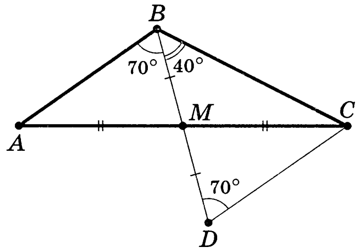


Рис. 3.2

► Отметим, что по признаку параллельности прямых $AB \parallel CD$, то есть продолжение медианы на её длину (удвоение медианы) даёт возможность получить прямую, параллельную стороне треугольника. ◄

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

3.1. Два угла треугольника равны 34° и 72°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины третьего угла треугольника.

3.2. Точки N и M — середины параллельных сторон AD и BC четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Докажите, что если MA — биссектриса угла BMN, то MD — биссектриса угла CMN.

3.3. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника образует с его боковой стороной угол 75°. Найдите углы треугольника.

3.4. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отметили точку E. На отрезке AE отложили отрезок $ED = BE$. Найдите угол DBC, если известно, что $\angle CBE = \angle DBA$.

3.5. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке E и образует равные углы с этой стороной и медианой BM. Найдите длину BM, если $BE = 4$, $CE = 3$.

3.6. Биссектрисы треугольника ABC, проведённые из вершин B и C, пересекаются в точке I. Через точку I проведены две прямые, которые параллельны прямым AB и AC и пересекаются с BC в точках D и E. Докажите, что периметр треугольника DIE равен отрезку BC.

3.7. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. На лучах BA и CA отложены отрезки BX и CY, равные стороне BC. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения биссектрис треугольника ABC.

3.8. Внутри треугольника ABC отмечена точка P так, что сумма углов ABC и APC равна $180°$ и $CP = AB$. Докажите, что $\angle CAP < 60°$.

Ответы, решения, комментарии

3.1. Ответ: $19°$.

Рассмотрим треугольник ABC, в котором $\angle A = 34°$, $\angle C = 72°$, BD — биссектриса, BH — высота (см. рис. 3.3). По теореме о сумме углов из треугольника ABC находим $\angle ABC = 180° - (\angle A + \angle C) = 74°$, а из треугольника BCH находим $\angle CBH = 180° - (\angle BHC + \angle C) = 18°$. Так как $\angle CBD = 0{,}5\angle ABC = 37°$, то искомый угол DBH равен $\angle CBD - \angle CBH = 19°$.

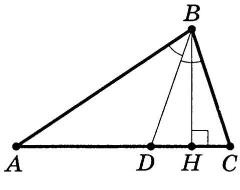


Рис. 3.3

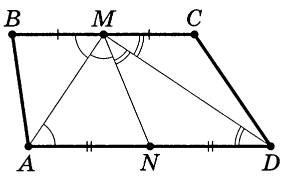


Рис. 3.4

► Для «продвинутых» школьников можно дать эту задачу в общем виде, тогда искомый угол равен $\dfrac{|\angle C - \angle A|}{2}$. ◄

3.2. Так как $AD \| BC$, то $\angle MAN = \angle BMA$ и $\angle MDN = \angle CMD$ (см. рис. 3.4). По условию $\angle AMN = \angle BMA = \angle MAN$, значит,

$MN = AN = DN$. Следовательно, $\angle NMD = \angle NDM = \angle CMD$, что и требовалось.

► Отметим, что мы также доказали, что $\angle AMD = 90°$. Кроме того, имеет смысл обратить внимание школьников на то, что такая конструкция типична: если есть две параллельные прямые и секущая, то луч, лежащий между одной из параллельных прямых и секущей, отсекает равнобедренный треугольник тогда и только тогда, когда он является биссектрисой внутреннего одностороннего угла. ◄

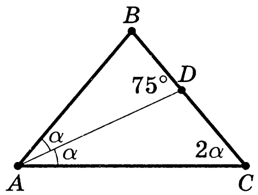


Рис. 3.5а

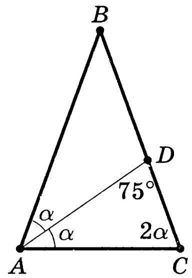


Рис. 3.5б

3.3. Ответ: 50°, 50°, 80° или 70°, 70°, 40°.

Пусть AD — биссектриса равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) и $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$. Тогда $\angle BCA = \angle BAC = 2\alpha$. Далее возможны два случая: $\angle ADB = 75°$ или $\angle ADC = 75°$.

1. Если $\angle ADB = 75°$ (см. рис. 3.5а), то $\alpha + 2\alpha = 75°$, откуда $\alpha = 25°$. Тогда $\angle BCA = \angle BAC = 50°$, $\angle ABC = 80°$.

2. Если $\angle ADC = 75°$ (см. рис. 3.5б), то $\alpha + 2\alpha + 75° = 180°$, откуда $\alpha = 35°$. Тогда $\angle BCA = \angle BAC = 70°$, $\angle ABC = 40°$.

3.4. Ответ: 60°.

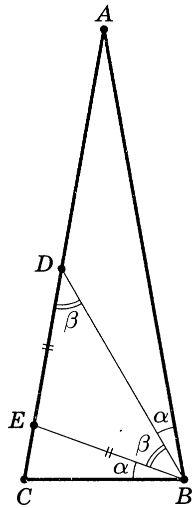


Рис. 3.6

Так как треугольник DBE равнобедренный, то $\angle EBD = \angle EDB = \beta$. Пусть $\angle CBE = \angle DBA = \alpha$. Тогда $\angle B = \angle C = 2\alpha + \beta$, $\angle DBC = \alpha + \beta$ (см. рис. 3.6). По теореме о сумме углов для треугольника DBC получаем $\alpha + \beta + + 2\alpha + \beta + \beta = 180°$, значит, $\alpha + \beta = 60°$.

3.5. ► Исходная конструкция подсказывает, что имеет смысл удвоить медиану. ◄

Ответ: 5,5.

Пусть AE пересекает BM в точке K, тогда $\angle AKM = = \angle EKB = \angle KEB$, значит, $BK = BE = 4$ (см. рис. 3.7). На продолжении BM за точку M отметим точку D так, что $DM = BM$. Тогда из равенства треугольников AMD и CMB (по двум сторонам и углу между ними) получим, что $AD = = BC = 7$ и $\angle MAD = \angle MCB$, следовательно, $AD \parallel BC$. Значит, $\angle KAD = \angle KEB = \angle AKD$, поэтому $KD = AD = 7$. Тогда $BD = BK + KD = 11$, $BM = 0{,}5BD = 5{,}5$.

3.6. ► В условии задачи есть биссектрисы и параллельность, а это подсказывает, что надо поискать равнобедренные треугольники (см. комментарий к задаче 3.2). ◄

Так как CI — биссектриса угла ACE и $IE \parallel AC$, то $\angle ECI = = \angle ACI = \angle EIC$ (см. рис. 3.8), а значит, $IE = CE$. Аналогично, рассматривая биссектрису BI и учитывая, что $ID \parallel AB$, получим, что $ID = BD$.

Таким образом, $P_{DIE} = ID + IE + DE = BD + CE + DE = BC$.

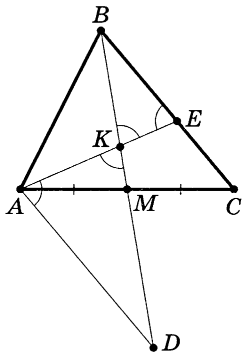


Рис. 3.7

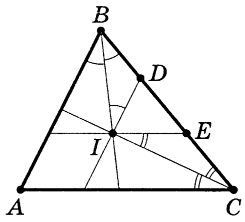


Рис. 3.8

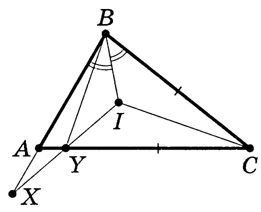


Рис. 3.9

► Можно усмотреть некоторую схожесть с решением задачи на построение треугольника по двум углам и периметру. ◄

3.7. Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC (см. рис. 3.9). Тогда $\angle BIC = 90° + 0{,}5\angle BAC = 120°$ (см. пример 3.1). Так как $\Delta IYC = \Delta IBC$ (по двум сторонам и углу между ними), то $\angle YIC = \angle BIC = 120°$.

Аналогично из равенства треугольников IXB и ICB получим, что $\angle XIB = \angle CIB = 120°$. Тогда $\angle XIC = 360° - \angle XIB - \angle BIC = 120°$. Так как $\angle XIC = \angle YIC$, то точки I, X и Y лежат на одной прямой.

► С «продвинутыми» учащимися можно также обсудить, что использованные при доказательстве равные треугольники симметричны относительно соответствующих биссектрис. Тот факт, что биссектриса угла является его осью симметрии, будет подробнее рассмотрен в занятии 6. ◄

3.8. ► Если сумма двух углов равна 180°, то часто имеет смысл отложить их так, чтобы они стали смежными. Такая идея уже рассматривалась в занятии 2 («отрежем, перевернём и приставим»). ◄

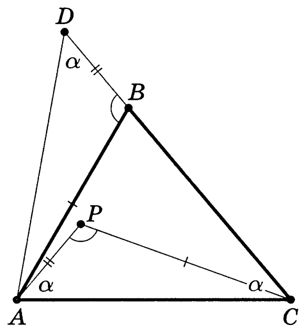


Рис. 3.10

На продолжении стороны BC за точку B отметим точку D так, что $BD = AP$ (см. рис. 3.10). Из условия задачи следует, что $\angle DBA = 180° - \angle ABC = \angle APC$. Тогда треугольник DBA равен треугольнику APC (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $AD = AC$, то есть треугольник ADC равнобедренный. Кроме того, $\angle ACD = \angle ADC = \angle CAP = \alpha$. Тогда по теореме о сумме углов треугольника для треугольника ADC получим, что $3\alpha + \angle DAP = 180°$, откуда $\alpha < 60°$.

Можно также использовать задачи Д18—Д30.

Занятие 4
Внешний угол треугольника

На этом занятии продолжается отработка навыков подсчёта углов и применения теорем о параллельности прямых и сумме углов треугольника. При этом в ряде задач потребуется работа с углами, обозначенными буквенными выражениями.

Отдельная цель — приучить школьников эффективно использовать теорему о внешнем угле треугольника для решения задач. Это представляется весьма важным, так как многие учащиеся редко используют эту теорему, предпочитая каждый раз пользоваться суммой углов треугольника, что часто делает решение более громоздким.

На этом занятии будут предложены задачи, для решения которых, помимо свойств и признаков параллельности прямых и теоремы о сумме улов треугольника, потребуется использовать теорему о внешнем угле треугольника.

Рассмотрим два примера. В первом из них формулируется и доказывается важный факт, который полезно знать, так как он применяется при решении многих более сложных задач.

Пример 4.1. Докажите, что биссектриса внешнего угла треугольника параллельна его стороне тогда и только тогда, когда треугольник равнобедренный.

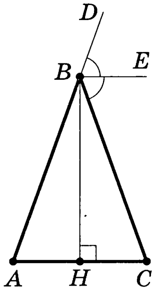


Рис. 4.1

Решение. Пусть BE — биссектриса внешнего угла CBD треугольника ABC (см. рис. 4.1).

Первый способ. 1. Если $BE \parallel AC$, то, используя свойства параллельных прямых, получим, что $\angle BCA = \angle CBE = \angle DBE = \angle BAC$. Тогда по признаку равнобедренного треугольника $AB = BC$.

2. Если $AB = BC$, то по свойству равнобедренного треугольника $\angle BCA = \angle BAC$. По теореме о внешнем угле $\angle DBC = \angle BCA + \angle BAC$,

значит, $\angle CBE = \frac{1}{2}\angle DBC = \angle BCA$. Тогда по признаку параллельности прямых $BE \parallel AC$.

Второй способ. Проведём высоту BH треугольника ABC (см. рис. 4.1).

1. Если $BE \parallel AC$, то $BH \perp BE$, тогда BH — биссектриса угла ABC, смежного с углом CBD. Таким образом, BH — высота и биссектриса данного треугольника, значит, $AB = BC$.

2. Если $AB=BC$, то BH — биссектриса треугольника ABC. Так как биссектрисы смежных углов перпендикулярны, то $BH \perp BE$, тогда $BE \parallel AC$.

► Отметим, что идея, «созвучная» второму способу, уже встречалась при решении задачи 1.6. ◄

Таким образом, получены ещё один признак и ещё одно свойство равнобедренного треугольника.

В качестве второго примера предлагается несложная задача, решение которой позволит вспомнить важный факт.

Пример 4.2. На свой день рождения Василиса купила треугольный пирог, который она разрезала по каждой биссектрисе, при этом получилось 6 кусков (*три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке*). Опоздавшему Игорю достался кусок в форме прямоугольного треугольника, на основании чего он заявил, что пирог имел форму равнобедренного треугольника. Прав ли Игорь?

Решение. Рассмотрим пирог в виде треугольника ABC, в котором проведены биссектрисы AM, BP и CK. Пусть I — точка их пересечения, а углы обозначены так, как показано на рис. 4.2.

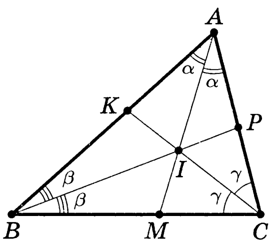


Рис. 4.2

Без ограничения общности можно считать, что Игорю достался кусок в виде треугольника BIK. Рассмотрим его углы. Заметим, что $\angle IBK = \beta < 90°$. По теореме о сумме углов треугольника получим $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Так как угол BIK внешний для треугольника BIC, то $\angle BIK = \beta + \gamma = 90° - \alpha < 90°$. Следовательно, прямым мог быть только угол BKI. В этом случае биссектриса CK треугольника является и его высотой, поэтому треугольник ABC равнобедренный ($AC = BC$).

Ответ: Игорь прав.

Отметим, что в процессе решения мы практически ещё раз доказали важный факт, который получен на предыдущем занятии, но сделали это другим способом: *если в треугольнике ABC биссектрисы, проведённые из вершин B и C, пересекаются в точке I, то* $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$ (см. пример 3.1).

Действительно, если $\angle BIK = 90° - \alpha$, то $\angle BIC = 90° + \alpha$, что и требуется.

► Понятно, что можно изложить решение и по-другому, сразу используя этот факт.

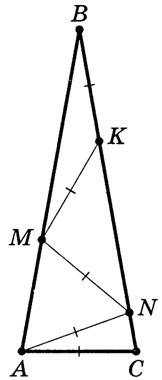
Имеет смысл также напомнить учащимся важное следствие из теоремы о внешнем угле треугольника: *внешний угол больше любого внутреннего, с ним не смежного.* ◄

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

4.1. Точка D лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что $\angle ADC > \angle ABC$.

4.2. В треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD. CE — биссектриса треугольника ACD. Докажите, что $BC = BE$.

4.3. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки K, M и N так, что $BK = KM = MN = NA = AC$ (см. рисунок). Найдите угол ABC.



4.4. В треугольнике ABC угол A равен α. Биссектриса угла B и биссектриса внешнего угла C пересекаются в точке D. Найдите угол BDC.

4.5. В треугольнике ABC угол C в три раза больше угла A. На стороне AB отмечена такая точка D, что $BD = BC$. Найдите CD, если $AD = 4$.

4.6. Найдите сумму углов при вершинах самопересекающейся пятиконечной звезды.

4.7. Сторона BC треугольника ABC в два раза больше стороны AC. На стороне BC отмечена точка D так, что $\angle DAC = \angle DBA$. Биссектриса внешнего угла C пересекает луч AD в точке E. Докажите, что $AE = AB$.

4.8. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I, $\angle ABC = 120°$. На продолжениях сторон AB и CB за точку B отмечены точки P и Q соответственно так, что $AP = CQ = AC$. Докажите, что угол PIQ прямой.

Ответы, решения, комментарии

► При разборе решений полезно подчеркнуть преимущество использования теоремы о внешнем угле треугольника по сравнению с теоремой о сумме углов (там, где это возможно). ◄

4.1. *Первый способ.* Пусть прямая BD пересекает сторону AC в точке E (см. рис. 4.3а). Так как ADE — внешний угол треугольника ABD, $\angle ADE > \angle ABD$. Аналогично для треугольника CBD получаем, что $\angle CDE > \angle CBD$. Следовательно, $\angle ADC = \angle ADE + \angle CDE > \angle ABD + \angle CBD = \angle ABC$, что и требовалось.

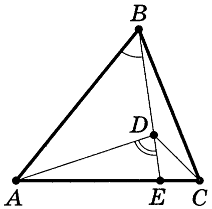


Рис. 4.3а

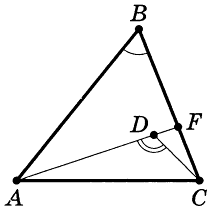


Рис. 4.3б

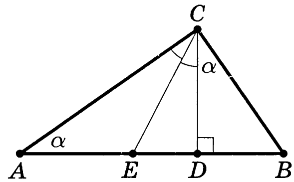


Рис. 4.4

Второй способ. Пусть прямая AD пересекает BC в точке F (см. рис. 4.3б), тогда AFC — внешний угол треугольника AFB, значит, $\angle AFC > \angle ABF$. Так как ADC — внешний угол треугольника CDF, то $\angle ADC > \angle DFC$. Учитывая, что DFC и AFC — один и тот же угол, получим $\angle ADC > \angle ABC$.

4.2. Пусть $\angle CAB = \alpha$, тогда из треугольника ABC находим $\angle CBA = 90° - \alpha$ (см. рис. 4.4). Из треугольника BCD находим $\angle BCD = 90° - \angle CBA = \alpha$. Так как угол CEBявляется внешним для треугольника ACE, то $\angle CEB = \alpha + \angle ACE = \alpha + \angle DCE = \angle BCE$. Следовательно, треугольник BCE равнобедренный: $BC = BE$.

4.3. Ответ: $20°$.

Из условия задачи следует, что треугольники KBM, MKN, NAM и CAN равнобедренные, поэтому равны углы при их основаниях. Пусть $\angle KBM = \angle KMB = \alpha$, тогда, учитывая свойство внешнего угла треугольника, последовательно получим $\angle MNK = \angle MKN = 2\alpha$, $\angle NAM = \angle NMA = 3\alpha$, $\angle ACN = \angle ANC = 4\alpha$ (см. рис. 4.5). Так как $\angle BAC = \angle BCA = 4\alpha$, то по теореме о сумме углов треугольника для треугольника ABC получим, что $4\alpha + 4\alpha + \alpha = 180°$, откуда $\alpha = 20°$.

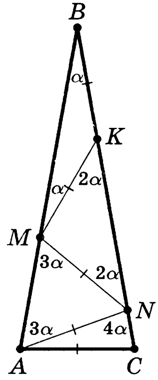


Рис. 4.5

4.4. Ответ: $\angle BDC = 0{,}5\alpha$.

Первый способ. Пусть биссектриса угла ACB пересекает биссектрису угла ABC в точке I (см. рис. 4.6а). Тогда $\angle BIC = 90 + 0{,}5\alpha$ (см. пример 3.1 или утверждение после примера 4.2). Так как BIC — внешний угол треугольника DIC и $CI \perp CD$, то $\angle BDC = \angle BIC - 90° = 0{,}5\alpha$.

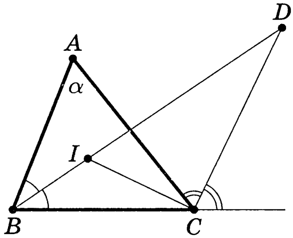


Рис. 4.6а

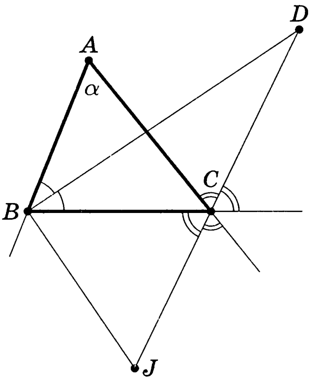


Рис. 4.6б

Второй способ. Проведём внешнюю биссектрису угла B до пересечения с прямой DC в точке J (см. рис. 4.6б). По свойству вертикальных углов CJ — внешняя биссектриса угла C.

Тогда J — точка пересечения внешних биссектрис, поэтому $\angle BJC = 90^\circ - 0{,}5\alpha$ (см. пример 3.1). Учитывая, что $BD \perp BJ$, из треугольника BJD получим $\angle BDC = \angle BDJ = 180^\circ - (\angle BJD + \angle JBD) = 180^\circ - (90^\circ + 90^\circ - 0{,}5\alpha) = 0{,}5\alpha$.

4.5. Ответ: $CD = 4$.

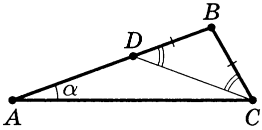


Рис. 4.7

Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle BCA = 3\alpha$ (см. рис. 4.7). Так как треугольник DBC равнобедренный, то $\angle BDC = \angle BCD = \beta$. Тогда $\angle DCA = 3\alpha - \beta$. Так как $\angle CDB$ внешний для треугольника ADC, то $\angle CDB = \angle DAC + \angle DCA$. Следовательно, $\beta = \alpha + (3\alpha - \beta) \Leftrightarrow \beta = 2\alpha$. Таким образом, $\angle DCA = \alpha$, то есть треугольник ADC равнобедренный с основанием AC. Следовательно, $CD = AD = 4$.

4.6. Ответ: 180°.

Обозначим вершины звезды последовательно буквами A, B, C, D, E. Пусть M — точка пересечения отрезков AC и BE, а N — точка пересечения отрезков AC и BD (см. рис. 4.8). Тогда угол BMC внешний для треугольника CME, а угол BNA внешний для треугольника AND. Следовательно, $\angle BMC = \angle C + \angle E$, $\angle BNA = \angle A + \angle D$. Таким образом, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = \angle BMC + \angle BNA + \angle B = 180^\circ$.

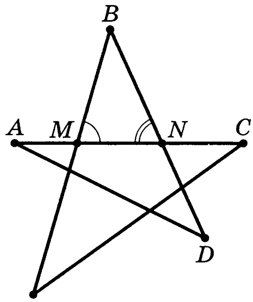


Рис. 4.8

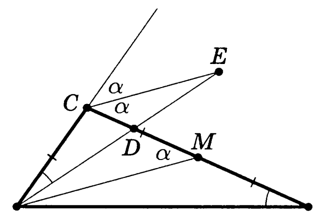


Рис. 4.9

4.7. Пусть M — середина BC, тогда треугольник CAM равнобедренный (см. рис. 4.9). Значит, биссектриса его внешнего угла C параллельна основанию AM, то есть $\angle ECM = \angle AMC = \alpha$ (см. пример 4.1). Тогда $\angle AMB = 180^\circ - \alpha = \angle ECA$.

Следовательно, равны треугольники AMB и ECA (по стороне и двум прилежащим к ней углам), а значит, $AB = EA$, что и требовалось.

▶ Отметим, что если один из заданных отрезков в два раза больше другого, то часто бывает полезно отметить середину большего отрезка для получения равных отрезков. ◀

4.8. *Первый способ* (см. рис. 4.10а). По свойству смежных углов $\angle ABQ = \angle CBP = 60°$. Так как BI — биссектриса угла ABC, то $\angle ABI = \angle CBI = 60°$.

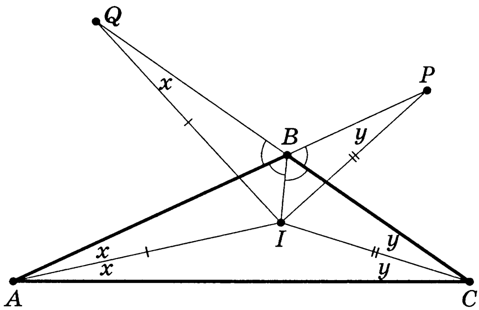


Рис. 4.10а

Пусть теперь $\angle BAC = 2x$, а $\angle BCA = 2y$, тогда по теореме о сумме углов треугольника (для треугольника ABC) получим $2x + 2y + 120° = 180°$, значит, $x + y = 30°$.

Треугольники ACI и QCI равны (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $\angle CQI = \angle CAI = x$. Из треугольника QBI получаем $\angle QIB = 180° - 120° - x = 60° - x$. Аналогичными рассуждениями из равенства треугольников ACI и API получим, что $\angle PIB = 60° - y$.

Таким образом,

$$\angle PIQ = \angle PIB + \angle QIB = (60° - y) + (60° - x) = \\ = 120° - (x + y) = 120° - 30° = 90°.$$

▶ Можно также использовать тот факт, что

$$\angle PIA = \angle QIC = \angle AIC = 90° + 0{,}5\angle ABC = 150°.$$

Тогда $\angle PIQ = \angle PIA + \angle QIC + \angle AIC - 360° = 90°$. ◀

Второй способ (см. рис. 4.10б). Пусть прямая CI пересекает AQ в точке M, тогда CM — биссектриса равнобедренного треугольника ACQ, проведённая к основанию. Следовательно, CM также является медианой и высотой этого треугольника. Тогда IM — медиана и высота треугольника AIQ. Значит, этот треугольник также равнобедренный, а IM — его биссектриса.

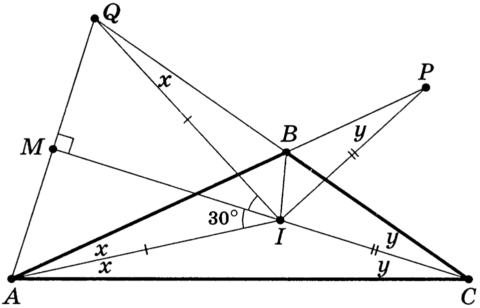


Рис. 4.10б

Введя такие же обозначения углов, как в первом способе решения, и действуя аналогично, получим, что $\angle CAI + \angle ACI = 30°$, поэтому $\angle AIM = 30°$ (внешний угол треугольника AIC). Тогда $\angle AIQ = 2\angle AIM = 60°$.

Аналогично доказывается, что $\angle CIP = 60°$, тогда $\angle PIQ = 180° - \angle MIQ - \angle CIP = 180° - 30° - 60° = 90°$.

► На рис. 4.10б можно обратить внимание школьников на симметрию треугольников относительно прямой CM. ◄

Можно также использовать задачи Д31—Д42.

Занятие 5
Прямоугольный треугольник — 1

На этом занятии основное внимание уделено применению свойства медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, и применению обратного утверждения, которое является признаком прямоугольного треугольника. Так как в большинстве базовых школьных учебников эти факты не выделены в качестве теорем, то имеет смысл начать занятие с их формулировок и доказательства.

В процессе решения ряда задач будет часто требоваться подсчёт углов, что даст возможность повторить применение теорем о внешнем угле и сумме углов треугольника. Кроме того, во многих случаях будут рассматриваться равнобедренные треугольники и это даст возможность повторить их свойства и признаки.

Основу материала этого занятия составят прямоугольные треугольники, при этом мы сосредоточимся на применении свойства медианы прямоугольного треугольника: *медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине*. Ряд задач потребует применения обратного утверждения, которое является признаком прямоугольного треугольника: *если медиана равна половине стороны треугольника, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный*. Докажем эти факты, начав с признака.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

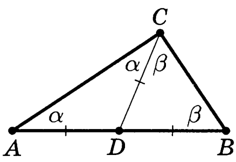


Рис. 5.1

1. Проведём медиану CD. Если $CD = 0{,}5AB$, то $DC = DA = DB$, то есть треугольники ADC и BDC равнобедренные (см. рис. 5.1). Следовательно, $\angle DCA = \angle A = \alpha$, $\angle DCB = \angle B = \beta$. Тогда $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, а значит, $\alpha + \beta = 90^\circ$. Таким образом, треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C.

2. Пусть в данном треугольнике $\angle C = 90°$. На гипотенузе AB отметим точку D так, что $\angle DCA = \angle A = \alpha$ (см. рис. 5.1). Тогда $DC = DA$. Так как $\angle A + \angle B = \alpha + \beta = 90°$, то $\angle DCB = \beta = \angle B$. Следовательно, $DC = DB$. Таким образом, $CD = 0{,}5AB$.

► Имеет смысл обратить внимание школьников на то, что для доказательства того, что CD — медиана прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, достаточно доказать любое из равенств $CD = AD$ или $CD = BD$. Кроме того, *медиана, проведённая к гипотенузе, разбивает прямоугольный треугольник на два равнобедренных*.

Возможен также и другой способ доказательства признака и свойства: «удвоить» медиану и использовать параллельность. ◄

Отметим, что в условиях некоторых задач нет прямоугольных треугольников, но они возникают по ходу решения, в том числе в результате дополнительных построений. Наиболее часто в таких случаях помогает отрезок, соединяющий основание высоты и середину стороны данного треугольника (не той, к которой проведена высота). Рассмотрим пример, который интересен ещё и тем, что в процессе решения поочерёдно применяются и свойство медианы прямоугольного треугольника, и соответствующий признак прямоугольного треугольника.

Пример 5.1. В треугольнике ABC проведены биссектриса AL, медиана BM и высота CH. Треугольник LMH равносторонний. Докажите, что треугольник ABC также равносторонний.

Решение. Треугольник AHC прямоугольный, значит, $LM = HM = AM = MC$ (см. рис. 5.2). Тогда в треугольнике ALC медиана LM равна половине стороны AC, то есть этот треугольник также прямоугольный. Значит, биссектриса AL треугольника ABC является его высотой, следовательно, $AB = AC$ и L — середина BC. Поэтому HL — медиана прямоугольного треугольника BHC, и тогда $BC = 2HL = 2LM = AC$. Таким образом, $AB = AC = BC$, что и требовалось.

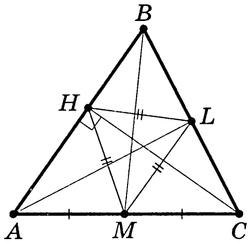


Рис. 5.2

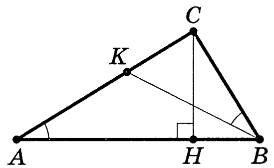
Упражнения и задачи для самостоятельного решения

5.1. Основание H высоты CH треугольника ABC соединили с серединами M и N сторон AC и BC. Докажите, что периметр четырёхугольника $CMHN$ равен сумме сторон AC и BC.

5.2. В треугольнике DEF проведена медиана DK. Найдите углы треугольника, если $\angle KDE = 70°$, $\angle DKF = 140°$.

5.3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведены высота CH, биссектриса CL и медиана CM. Докажите, что CL — биссектриса угла MCH.

5.4. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла. Из вершины B большего острого угла проведён отрезок BK так, что $\angle CBK = \angle CAB$ (см. рисунок). Докажите, что CH делит BK пополам.



5.5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Точки K, L и M — середины сторон AB, BC и CA соответственно. Докажите, что длина замкнутой ломаной $KB_1LC_1MA_1K$ равна периметру треугольника ABC.

5.6. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечена точка K так, что $CK = BC$. Отрезок CK пересекает биссектрису AL в её середине. Найдите углы треугольника ABC.

5.7. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена биссектриса BD. Перпендикуляр к BD, проведённый через точку D, пересекает BC в точке F. Найдите DC, если $BF = a$.

5.8. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, $AB = AD$, CA — биссектриса угла C, $\angle BAD = 140°$, $\angle BEA = 110°$. Найдите угол CDB.

5.1. Медиана HM прямоугольного треугольника ACH равна половине его гипотенузы AC, то есть $HM = 0{,}5AC$ (см. рис. 5.3). Аналогично $HN = 0{,}5BC$. Значит, $P_{CMHN} =$ $= HM + MC + CN + NH = AC + BC$.

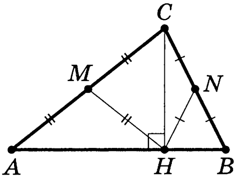


Рис. 5.3

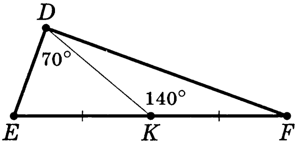


Рис. 5.4

► Отметим, что в этом рассуждении никак не использовано, что высота CH лежит внутри треугольника. ◄

5.2. Ответ: 70°; 90° и 20°.

Так как угол DKF внешний для треугольника DKE, то $\angle DEK = \angle DKF - \angle KDE = 70^\circ$ (см. рис. 7.4). Значит, треугольник DKE равнобедренный: $DK = EK = FK$.

Таким образом, медиана DK треугольника DEF равна половине стороны EF, к которой она проведена, поэтому этот треугольник прямоугольный: $\angle EDF = 90^\circ$. Следовательно, $\angle DFE = 180^\circ - (\angle DEF + \angle EDF) = 20^\circ$.

5.3. Пусть $\angle CAB = \alpha$, тогда из треугольника ACH получим, что $\angle ACH = 90^\circ - \alpha$ (см. рис. 5.5). Так как $CM = BM$, то $\angle BCM = \angle CBM =$ $= \angle CBA = 90^\circ - \alpha$ (из треугольника ABC).

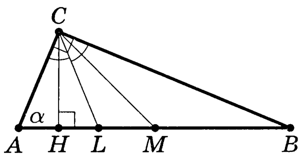


Рис. 5.5

Таким образом, углы HCL и MCL дополняют равные углы ACH и BCM до равных углов ACL и BCL, значит, $\angle HCL = \angle MCL$. Следовательно, CL — биссектриса угла MCH.

► По ходу рассуждений получено, что углы, которые высота, проведённая к гипотенузе, образует с катетами, соответственно равны острым углам прямоугольного треугольника. ◄

5.4. Пусть отрезки CH и BK пересекаются в точке D (см. рис. 5.6). Так как $\angle BCH = \angle CAB = \angle CBK$, то треугольник BCD равнобедренный: $CD = BD$. Тогда CD — медиана прямоугольного треугольника BCK (см. следствие из свойства медианы), то есть $BD = KD$.

► Заключительный вывод можно также сделать из того, что равны углы KCD и CKD (они дополняют равные углы до прямого), поэтому $CD = KD$. Тем самым будет повторён фрагмент доказательства свойства медианы. ◄

5.5. В прямоугольном треугольнике ABB_1 отрезок B_1K — медиана, проведённая к гипотенузе AB, значит, $KB_1 = 0{,}5AB$ (см. рис. 5.7).

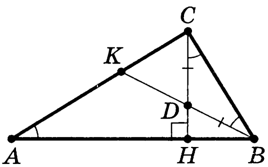


Рис. 5.6

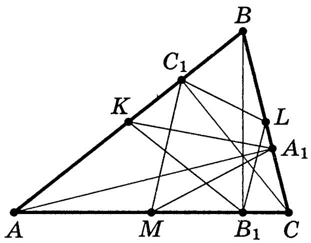


Рис. 5.7

Аналогично каждое звено ломаной является медианой прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, которая совпадает со стороной исходного треугольника. Поэтому длина указанной ломаной равна $KB_1 + B_1L + LC_1 + C_1M + MA_1 + A_1K = 0{,}5AB + 0{,}5BC + 0{,}5BC + 0{,}5CA + 0{,}5CA + 0{,}5AB = AB + BC + CA = P_{ABC}$, что и требовалось.

5.6. Ответ: 36°, 54°, 90°.

Пусть $\angle A = 2\alpha$, O — точка пересечения отрезков CK и AL (см. рис. 5.8). Тогда CO — медиана, проведённая к гипоте-

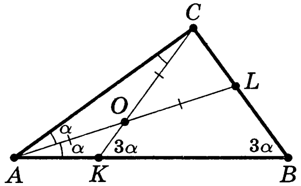


Рис. 5.8

нузе прямоугольного треугольника ACL. Значит, $AO = OC = OL$ и $\angle OCA = \angle OAC = \angle OAK = \alpha$.

Так как треугольник CBK равнобедренный, то $\angle B = \angle BKC = \angle ACK + \angle KAC = 3\alpha$. Тогда $\angle A + \angle B = 2\alpha + 3\alpha = 90°$. Таким образом, $\alpha = 18°$, $\angle A = 36°$, $\angle B = 54°$.

5.7. Ответ: $DC = 0{,}5a$.

Пусть M — середина BF, тогда DM — медиана прямоугольного треугольника BDF, проведённая из вершины прямого угла (см. рис. 5.9). Значит, $DM = 0{,}5BF = 0{,}5a$. Так как треугольник BDM равнобедренный, то $\angle BDM = \angle DBM$. Тогда $\angle DMF = 2\angle DBM = \angle ABC = \angle ACB$, значит, треугольник MDC также равнобедренный. Следовательно, $DC = DM = 0{,}5a$.

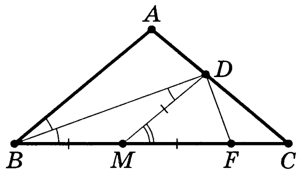


Рис. 5.9

► Отметим, что точку M можно получить иначе. Так как BD — биссектриса, то, проведя $DM \parallel AB$, получим, что $BM = MD$. Схожая идея встречалась, например, в занятии 3. ◄

5.8. Ответ: 50°.

В равнобедренном треугольнике BAD углы при основании BD равны по 20°. Значит, $\angle CAD = \angle AEB - \angle ADE = 90°$ (см. рис. 5.10). Продлим стороны BC и AD до пересечения в точке F. Точка F лежит в той же полуплоскости относительно AC, что и вершина B, так как угол ACD острый, поэтому острый и равный ему угол ACB.

Так как биссектриса CA треугольника CDF является его высотой, то треугольник CDF равнобедренный. Поэтому $FA = AD = AB$. Так как медиана AB треугольника BFD равна половине стороны DF, то $\angle DBF = 90°$. Значит, $\angle CDF = \angle BFD = 90° - \angle BDF = 70°$. Тогда $\angle CDB = \angle CDF - \angle BDA = 50°$.

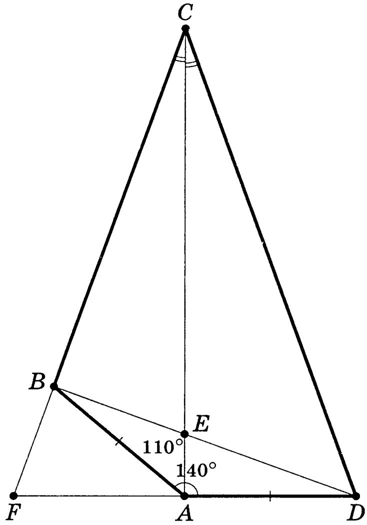


Рис. 5.10

► Отметим, что в треугольниках ABC и ADC сторона AC общая, $AB = AD$ и равны углы ACB и ACD, лежащие напротив этих сторон. Эти треугольники не равны, но $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. Эта ситуация уже встречалась в занятии 2 и будет подробно рассмотрена в занятии 8. ◄

Можно также использовать задачи Д13, Д19, Д23, Д24, Д43—Д53.

Занятие 6
Прямоугольный треугольник — 2

На этом занятии основное внимание уделено применению свойства прямоугольного треугольника с углом 30° и утверждения, ему обратного, а также применению признаков равенства прямоугольных треугольников.

Утверждения, связанные с углом 30°, полезно не только сформулировать, но и доказать (в некоторых школьных учебниках они не выделены в качестве теорем). Признаки равенства прямоугольных треугольников формулируются и доказываются в школьных учебниках, но практика показывает, что учащиеся пользуются ими неохотно, предпочитая использовать признаки равенства треугольников общего вида. Это загромождает обоснования, а иногда и затрудняет их, особенно в случае, когда можно использовать равенство прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе. Имеет смысл в начале занятия повторить формулировки признаков равенства прямоугольных треугольников и мотивировать школьников на их использование.

Основу материала этого занятия вновь составят прямоугольные треугольники При решении ряда задач, связанных с прямоугольными треугольниками, потребуется использовать различные признаки их равенства, поэтому рассмотрим простой факт, который позволяет повторить два таких признака. Кроме того, это утверждение найдёт применение в дальнейшем.

Пример 6.1. Докажите, что точка, лежащая внутри угла, равноудалена от его сторон тогда и только тогда, когда она лежит на биссектрисе угла.

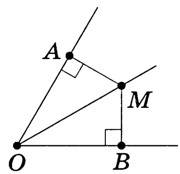


Рис. 6.1

Решение. Пусть точка M лежит внутри угла с вершиной O. Опустим перпендикуляры MA и MB на стороны угла и проведём луч OM (см. рис. 6.1).

1. Пусть OM — биссектриса угла AOB, то есть $\angle AOM = \angle BOM$. Тогда прямоугольные треугольники AOM и BOM

равны (по гипотенузе и острому углу), откуда следует, что $MA = MB$. Таким образом, точка M равноудалена от сторон угла.

2. Пусть точка M равноудалена от сторон угла, то есть $MA = MB$. Тогда прямоугольные треугольники AOM и BOM равны (по гипотенузе и катету), откуда следует, что $\angle AOM = \angle BOM$. Таким образом, OM — биссектриса угла AOB.

► Для подготовленных школьников можно также сформулировать этот факт, используя понятие геометрического места точек. Тогда полезно также обратить внимание на значимость условия «...лежащих внутри угла...», обсудив случай, когда точка M лежит на луче, дополнительном к биссектрисе угла.

В любом случае имеет смысл обратить внимание учащихся на тот факт, что *биссектриса угла является его осью симметрии*, то есть при перегибании чертежа по биссектрисе стороны угла совмещаются. ◄

Важнейшими фактами для прямоугольных треугольников являются свойство угла, равного 30°, и утверждение, ему обратное: *катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы тогда и только тогда, когда противолежащий ему угол равен* 30° (*при необходимости можно сформулировать свойство и признак по отдельности*).

Разберём одно из возможных доказательств этого утверждения, основанное на материале прошлого занятия.

Пусть дан треугольник ABC с прямым углом C. Его медиана CD разбивает данный треугольник на два равнобедренных треугольника (см. занятие 5). Обозначим их углы при основаниях α и β (см. рис. 6.2).

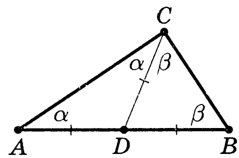


Рис. 6.2

Тогда если $\alpha = 30°$, то $\beta = 60°$, значит, $\angle BCD = 60°$, а потому и $\angle CBD = 60°$, то есть треугольник BCD равносторонний. Следовательно, $BC = CD = 0{,}5AB$.

Обратно, если $BC = 0{,}5AB = CD = BD$, то $\beta = 60°$, а тогда $\alpha = 30°$.

► Отметим, что попутно обосновано следующее утверждение: равнобедренный треугольник с углом 60° является равносторонним. Оно также найдёт применение на этом занятии и станет основой для следующего. ◀

Доказанные утверждения применяются при решении многих задач, причём во многих случаях прямоугольных треугольников даже нет в условии, но они возникают по ходу решения, в том числе в результате дополнительных построений. Наиболее часто в таких случаях помогает проведение высот в каких-либо треугольниках.

Пример 6.2. В треугольнике ABC угол A равен $30°$, а угол C равен $105°$. Найдите угол между медианой BM и стороной AB.

Решение. Из условия задачи следует, что угол ABC равен $45°$. Проведём высоту CD, тогда $\angle DCB = 45° = \angle DBC$, значит, $BD = CD$ (см. рис. 6.3). В прямоугольном треугольнике ACD катет CD, лежащий напротив угла $30°$, равен половине гипотенузы AC, то есть $CD = CM$. Учитывая, что $\angle DCM = 60°$, получим, что треугольник CMD равносторонний, следовательно, $MD = CD = BD$, то есть треугольник BDM равнобедренный. Его внешний угол ADM равен $30°$, значит, $\angle ABM = 15°$.

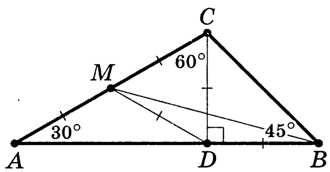


Рис. 6.3

▶ Отметим, что также можно было использовать тот факт, что DM — медиана треугольника ADC, откуда $DM = AM = CM$. ◀

Ответ: $15°$.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

6.1. Острый угол прямоугольного треугольника равен $30°$, а гипотенуза равна 8. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, проведённая из вершины прямого угла.

6.2. В равнобедренном треугольнике ABC угол B равен 30°, $AB = BC = 6$. Проведены высота CD треугольника ABC и высота DE треугольника BDC. Найдите BE.

6.3. В прямоугольном треугольнике ABC точка K — середина гипотенузы AB, а точка M делит катет AC в отношении $2:1$ (считая от вершины A). Найдите острые углы треугольника ABC, если отрезок MK перпендикулярен AB.

6.4. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1, один из острых углов равен 15°. Найдите гипотенузу.

6.5. Один из углов треугольника на 120° больше другого. Докажите, что биссектриса треугольника, проведённая из вершины третьего угла, вдвое длиннее, чем высота, проведённая из той же вершины.

6.6. Прямые, содержащие высоты BP и CQ треугольника ABC, пересекаются в точке H. Какие значения может принимать угол ABC, если известно, что $BH = AC$?

6.7. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах AC и AB отметили точки K и L соответственно так, что прямая KL параллельна BC и $KL = KC$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\angle KMB = \angle BAC$. Докажите, что $KM = AL$.

6.8. В треугольнике ABC угол C прямой. Точки D и E расположены на гипотенузе AB так, что $BD = BC$ и $AE = AC$. Из точки D провели перпендикуляр DG на катет AC, а из точки E — перпендикуляр EF на катет BC. Докажите, что $DE = EF + DG$.

Ответы, решения, комментарии

6.1. Ответ: 2 и 6.

Пусть в треугольнике ABC с прямым углом C угол A равен 30°, CD — высота (см. рис. 6.4). Тогда $BC = 0{,}5AB = 4$. Так как $\angle DCB = \angle CAB = 30^\circ$, то $BD = 0{,}5BC = 2$. Значит, $AD = AB - BD = 6$.

▶ Отметим, что вновь использован простой, но важный факт: угол между высотой и катетом прямоугольного треугольника равен одному из острых углов данного треугольника (см. комментарий к задаче 5.3). ◀

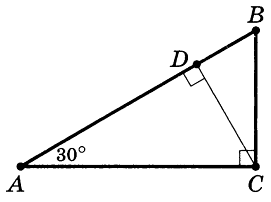


Рис. 6.4

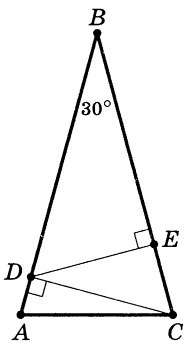


Рис. 6.5

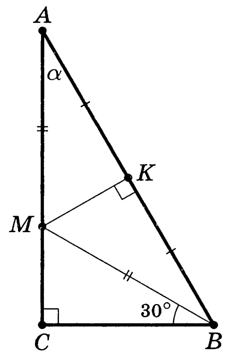


Рис. 6.6

6.2. Ответ: 4,5.

Так как треугольник BDC прямоугольный и его катет DC лежит напротив угла DBC, который равен 30°, то $DC = \frac{1}{2}BC$ (см. рис. 6.5). Кроме того, DE — высота треугольника BDC, проведённая к гипотенузе, поэтому $\angle CDE = \angle DBC = 30°$ (см. комментарий к задаче 6.1). Значит, в прямоугольном треугольнике CED катет CE лежит напротив угла 30°, поэтому $CE = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{4}BC$. Таким образом,

$$BE = BC - CE = \frac{3}{4}BC = 4{,}5.$$

6.3. Ответ: 30° и 60°.

Проведём отрезок MB, тогда MK — медиана и высота треугольника AMB (см. рис. 6.6). Следовательно, треугольник AMB равнобедренный: $MB = MA$. Тогда в прямоугольном треугольнике CBM катет CM в два раза меньше гипотенузы MB, следовательно, угол CBM равен 30°.

Пусть $\angle ABM = \angle CAB = \alpha$. В прямоугольном треугольнике ABC сумма острых углов равна 90°, поэтому $2\alpha + 30° = 90°$, то есть $\alpha = 30°$. Следовательно, $\angle CAB = 30°$, $\angle CBA = 60°$.

► В заключительной части решения можно было действовать иначе: в треугольнике CMB один из острых углов равен 30°, поэтому другой острый угол равен 60°. Тогда CMB — внешний угол при вершине равнобедренного треугольника AMB, поэтому он равен 2α, значит, $\alpha = 30°$.

Полезно обратить внимание школьников на факты, полученные попутно: 1) в прямоугольном треугольнике с углом 30° серединный перпендикуляр к гипотенузе и биссектриса угла, равного 60°, делят исходный треугольник на три равных прямоугольных треугольника с такими же углами, как у исходного; 2) $MK = MC = \frac{1}{3}AC$. ◀

6.4. Ответ: 4.

Пусть CH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла, $\angle A = 15^\circ$ (см. рис. 6.7). Проведём медиану CM, тогда $CM = AM = BM$. Значит, $\angle MCA = \angle MAC = 15^\circ$, тогда $\angle CMH = 30^\circ$. Из прямоугольного треугольника CMH получаем, что $CM = 2CH = 2$. Следовательно, $AB = 2CM = 4$.

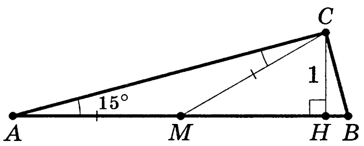


Рис. 6.7

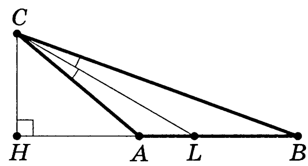


Рис. 6.8

6.5. Пусть ABC — данный треугольник, $\angle B = \alpha$, $\angle A = 120^\circ + \alpha$ (см. рис. 6.8).

Тогда $\angle C = 60^\circ - 2\alpha$. Если CL — биссектриса данного треугольника, то $\angle CLA = \angle LCB + \angle LBC = (30^\circ - \alpha) + \alpha = 30^\circ$. Пусть CH — высота треугольника ABC, тогда в прямоугольном треугольнике CLH катет CH, лежащий напротив угла в 30°, в два раза меньше, чем гипотенуза CL.

6.6. Ответ: 45° или 135°.

Пусть треугольник ABC остроугольный, то есть точка H лежит внутри треугольника (см. рис. 6.9а). Заметим, что $\angle ACQ = 90^\circ - \angle QAC = 90^\circ - \angle BAP = \angle ABP$. Тогда прямоугольные треугольники ACQ и HBQ равны по гипотенузе и острому углу ($AC = HB$ по условию и $\angle ACQ = \angle HBQ$ по доказанному).

Следовательно, $CQ = BQ$, то есть треугольник BQC прямоугольный и равнобедренный. В таком треугольнике углы при основании равны по 45°, поэтому $\angle ABC = 45^\circ$.

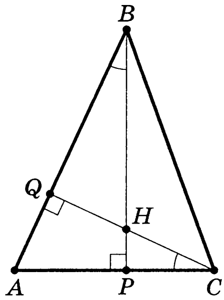


Рис. 6.9а

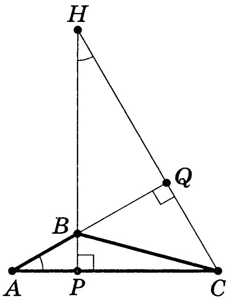


Рис. 6.9б

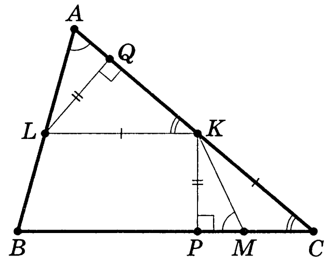


Рис. 6.10

В случае, если треугольник ABC тупоугольный и точка H лежит вне треугольника (см. рис. 6.9б), рассуждения аналогичны. Разница только в том, что угол QBC, равный 45°, является внешним углом треугольника ABC, поэтому $\angle ABC = 135^\circ$.

► Справедливо и обратное: если угол B треугольника ABC равен 45° или 135°, то $BH = AC$. ◄

6.7. Пусть KP и LQ — высоты треугольников KMC и LAK (см. рис. 6.10). Так как $KL \parallel BC$, то $\angle KCM = \angle AKL$. Тогда, учитывая, что $CK = KL$, получим, что прямоугольные треугольники CKP и KLQ равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $KP = LQ$, значит, прямоугольные треугольники KPM и LQA равны по катету и противолежащему острому углу. Таким образом, $KM = AL$, что и требовалось.

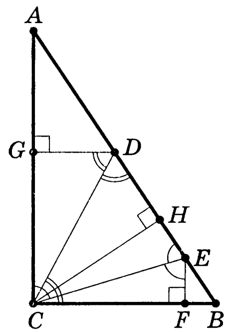


Рис. 6.11

6.8. Проведём отрезки CD и CE, а также высоту CH данного треугольника (см. рис. 6.11). Точка H лежит между точками D и E, так как углы CDE и CED острые (они являются углами при основаниях в равнобедренных треугольниках BCD и CAE соответственно).

Из равнобедренности треугольника CAE и параллельности прямых AC и EF получаем, что $\angle AEC = \angle ACE = \angle FEC$. Тогда прямоугольные треугольники CFE и CHE равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $EF = EH$.

Аналогично из равнобедренного треугольника BCD и параллельности прямых BC и DG получаем, что $\angle BDC = \angle BCD = \angle GDC$, значит, равны также прямоугольные треугольники CGD и CHD. Следовательно, $DG = DH$. Таким образом, $DE = DH + HE = DG + EF$, что и требовалось.

► Отметим, что из доказанного равенства двух пар треугольников следует также, что если «перегнуть» чертёж по прямым CD и CE, то точки G и F совместятся с точкой H, откуда и следует утверждение задачи. Ещё одно следствие: $\angle ECD = 45°$. Схожие ситуации встретятся в занятиях 11 и 12 второй части. ◄

Можно также использовать задачи Д54—Д69.

Занятие 7
Равносторонний треугольник

Задачи, в которых рассматривались равносторонние треугольники, уже встречались в предыдущих занятиях. Основное отличие материала этого занятия состоит в том, что существенным образом используется, что каждый угол равностороннего треугольника равен 60°. В частности, по ходу решения многих задач будет возникать равнобедренный треугольник, в котором один из углов равен 60°, откуда и будет следовать, что этот треугольник равносторонний (признак равностороннего треугольника). Помимо этого, материал занятия даёт возможность закрепить навыки, полученные на предыдущих занятиях: применения признаков равенства треугольников, свойств и признаков параллельности, свойств и признаков равнобедренного треугольника, свойств прямоугольного треугольника и пр. В связи с этим в некоторых задачах продемонстрировано несколько способов решения либо даны соответствующие комментарии.

На этом занятии будут рассмотрены задачи, в которых так или иначе фигурируют равносторонние треугольники. Если такой треугольник задан в условии задачи, то её решение, как правило, использует, что каждый угол треугольника равен 60°. Кроме того, при решении многих задач возникает равнобедренный треугольник, в котором один из углов равен 60°, откуда следует, что он равносторонний. Этот факт легко следует из свойства равнобедренного треугольника и теоремы о сумме углов треугольника (при необходимости можно проговорить это рассуждение, рассмотрев два случая: угол 60° лежит при основании или при вершине равнобедренного треугольника, напомнив, что первый случай уже рассматривался в начале занятия 6). Это утверждение является *признаком равностороннего треугольника*.

Разберём два примера.

Пример 7.1. Одна из сторон треугольника вдвое больше другой, а угол между ними равен 60°. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AB = 2AC$ и $\angle BAC = 60°$.

► Идею первого способа подсказывает аналогия с доказательством признака равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету. ◄

Первый способ. На луче AC отметим точку D так, что $DC = AC$, тогда $AD = AB$ (см. рис. 7.1а). Таким образом, треугольник ABD равнобедренный с углом 60°, то есть этот треугольник равносторонний. Следовательно, его медиана BC является и высотой, то есть угол ACB прямой.

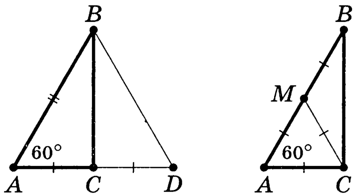


Рис. 7.1а   Рис. 7.1б

► Отметим, что из доказанного утверждения следует, что $\angle ABC = 30°$. Поэтому из доказанного утверждения можно ещё одним способом получить, что если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то противолежащий этому катету угол равен 30°. Обратное утверждение можно доказать аналогично. ◄

Второй способ. Проведём медиану CM треугольника ABC (см. рис. 7.1б). Тогда $AM = 0{,}5AB = AC$. В равнобедренном треугольнике CAM угол A равен 60°, поэтому этот треугольник равносторонний, значит, $CM = 0{,}5AB$. Тогда треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C (по признаку прямоугольного треугольника).

Третий способ. Опустим перпендикуляр BC' на прямую AC, тогда в прямоугольном треугольнике ABC' угол ABC' равен 30°. Следовательно, $AC' = 0{,}5AB = AC$, то есть точки C' и C совпадают.

Второй пример — задача, решение которой не потребует дополнительных построений, но придётся очень искусно использовать все условия.

Пример 7.2. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC отмечены точки D и K соответственно, а на стороне AC отмечены точки E и M так, что $DA + AE = KC + CM = AB$. Отрезки DM и KE пересекаются. Найдите угол между ними.

Решение. Рассмотрим треугольники ADM и CEK (см. рис. 7.2): $DA = AB - AE = AC - AE = CE$; $AM = AC - CM = AB - CM = KC$; $\angle DAM = 60^\circ = \angle ECK$. Следовательно, эти треугольники равны (по двум сторонам и углу между ними). Тогда $\angle AMD = \angle CKE$.

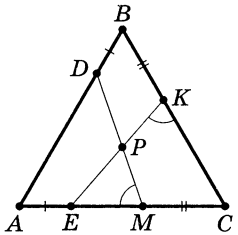


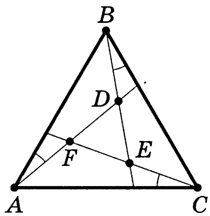
Рис. 7.2

Пусть отрезки DM и KE пересекаются в точке P. Из треугольника PEM находим $\angle MPE = 180^\circ - (\angle PEM + \angle PME) = 180^\circ - (\angle KEC + \angle CKE) = \angle KCE = 60^\circ$.

Ответ: 60°.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

7.1. Треугольник ABC равносторонний. Лучи AD, BE, CF попарно пересекаются внутри треугольника, причём равны углы BAD, CBE и ACF (см. рисунок). Докажите, что треугольник DEF также равносторонний.



7.2. На сторонах AB, BC и CA равностороннего треугольника ABC отмечены точки P, Q и R соответственно так, что $AP : PB = BQ : QC = CR : RA = 2 : 1$. Докажите, что треугольник PQR равносторонний, а его стороны перпендикулярны сторонам треугольника ABC.

7.3. Треугольник ABC равнобедренный, $\angle BAC = 120°$. На продолжении стороны AC за вершину A отмечена точка D так, что $AD = 2AB$. Докажите, что треугольник BDC также равнобедренный.

7.4. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен $60°$, AM и CN — его высоты, а Q — середина стороны AC. Докажите, что треугольник MNQ равносторонний.

7.5. Биссектриса AK треугольника ABC делит противоположную сторону на отрезки $BK = 2$ и $CK = 1$. Найдите длину AK, если $\angle AKC = 60°$.

7.6. На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60°$. Докажите, что $AC = BK$.

7.7. Через точку Y на стороне AB равностороннего треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке Z, а продолжение стороны CA за точку A — в точке X. Известно, что $XY = YZ$ и $AY = BZ$. Докажите, что прямые XZ и BC перпендикулярны.

7.8. Один из углов треугольника равен $60°$, а лежащая против этого угла сторона равна трети периметра треугольника. Докажите, что данный треугольник равносторонний.

Ответы, решения, комментарии

7.1. По условию $AB = BC = CA$ и $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF$. Кроме того, $\angle ABD = \angle BCE = \angle CAF$, так как эти углы дополняют равные углы до $60°$ (см. рисунок в условии). Следовательно, равны треугольники ADB, BEC и CFA (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Тогда $AD = BE = CF$ и $BD = CE = AF$. Поэтому $DE = EF = FD$, так как они дополняют равные отрезки до равных. Таким образом, треугольник DEF равносторонний.

► Можно также доказать, что точки пересечения данных лучей со сторонами исходного треугольника являются вершинами равностороннего треугольника. ◄

7.2. Из условия задачи следует, что $\Delta ARP = \Delta BPQ = \Delta CQR$ (по двум сторонам и углу межу ними, см. рис. 7.3). Следовательно, $RP = PQ = QR$.

Рассмотрим, например, треугольник BPQ, в котором $\angle PBQ = 60°$ и $BQ = 2PB$. По доказанному в примере 7.1 получаем, что $\angle BPQ = 90°$. Аналогично из треугольников CQR и ARP получим, что $\angle CQR = \angle ARP = 90°$.

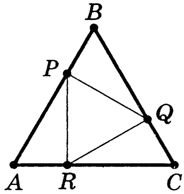


Рис. 7.3

► Отметим, что треугольник PQR является равносторонним при любом равенстве отношений, указанных в условии (не обязательно 2 : 1).

Также отметим, что в данном случае можно сначала доказать перпендикулярность, а затем счётом углов получить, что в треугольнике PQR каждый из углов равен 60°. ◄

7.3. *Первый способ.* Из условия задачи следует, что $\angle ACB = \angle ABC = 30°$, $\angle BAD = 60°$ (см. рис. 7.4а). Рассмотрим треугольник ABD. В нём $AD = 2AB$ и $\angle BAD = 60°$, следовательно, $\angle ABD = 90°$, $\angle ADB = 30°$ (см. пример 7.1). Тогда в треугольнике BDC равны углы C и D, то есть этот треугольник равнобедренный.

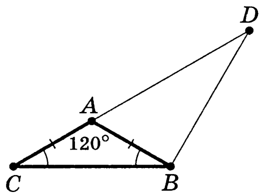


Рис. 7.4а

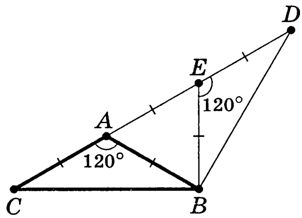


Рис. 7.4б

► Если учащиеся не увидят, что можно в явном виде использовать результат, полученный в примере 7.1, то можно использовать рассуждение, которое дублирует обоснование этого факта: проведём медиану BE треугольника ABD (см. рис. 7.4б) и докажем, что треугольник ABE равносторонний, откуда $BE = 0{,}5AD$, значит, угол ABD прямой.

Возможно также рассуждение, которое не использует того, что $\angle ABD = 90°$. ◄

Второй способ. Пусть E — середина отрезка AD, тогда $AE = \frac{1}{2}AD = AB$ (см. рис. 7.4б). Так как $\angle BAC = 120°$, то угол BAE равен $60°$. Таким образом, треугольник BAE равнобедренный с углом $60°$, а значит, равносторонний. Кроме того, $\angle BED = 180° - \angle AEB = 120°$. Значит, треугольники BAC и BED равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $BD = BC$, то есть треугольник BDC равнобедренный.

7.4. В прямоугольных треугольниках AMC и ANC точка Q — середина гипотенузы AC, значит, медианы QM и QN этих треугольников равны половине AC, то есть равны между собой (см. рис. 7.5).

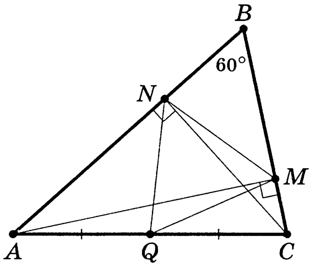


Рис. 7.5

Так как треугольники AQN и CQM равнобедренные, то $\angle AQN = 180° - 2\angle CAB$, $\angle CQM = 180° - 2\angle ACB$. Тогда $\angle AQN + \angle CQM = 360° - 2(\angle CAB + \angle ACB) = 360° - 2(180° - \angle ABC) = 120°$, значит, $\angle MQN = 180° - (\angle AQN + \angle CQM) = 60°$. Следовательно, MQN — равнобедренный треугольник с углом $60°$, то есть он равносторонний.

► Справедливо и обратное: если треугольник MNQ, образованный основаниями высот, проведённых из вершин A и C остроугольного треугольника ABC, и серединой Q стороны AC, равносторонний, то угол B равен $60°$. ◄

7.5. Ответ: 2.

Отметим на стороне AB данного треугольника точку D так, что $AD = AC$, и соединим её с точкой K (см. рис. 7.6). Из равенства треугольников AKD и AKC (по двум сторонам и углу между ними) получим, что $DK = CK = 1$;

$\angle AKD = \angle AKC = 60°$. Рассмотрим треугольник BDK. В нём $\angle BKD = 60°$, $BK = 2$, $DK = 1$, то есть этот треугольник прямоугольный с прямым углом D и $\angle DBK = 30°$ (см. пример 7.1). Тогда $\angle ACB = \angle ADK = 90°$ и $\angle KAC = 30°$, значит, $AK = 2CK = 2$.

► Отметим, что эта задача является в каком-то смысле обратной к задаче 6.3, так как в итоге возникает одна и та же конструкция. При этом $AC : AB = 1 : 2 = CK : BK$, то есть этот частный случай иллюстрирует основное свойство биссектрисы треугольника. ◄

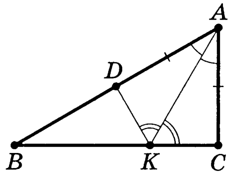


Рис. 7.6

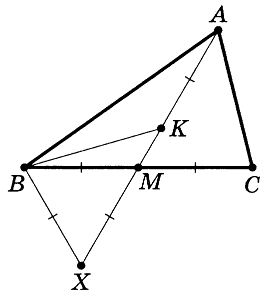


Рис. 7.7а

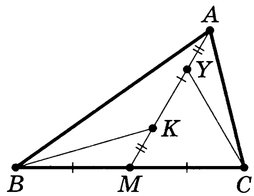


Рис. 7.7б

7.6. *Первый способ.* На продолжении медианы AM за точку M отметим такую точку X, что $MX = BM$ (см. рис. 7.7а). Тогда $\angle BMX = \angle AMC = 60°$, поэтому равнобедренный треугольник BMX является равносторонним. Следовательно, $\angle BXK = 60° = \angle AMC$. Тогда треугольники BXK и CMA равны (по двум сторонам и углу между ними), значит, $AC = BK$.

Второй способ. На медиане AM отметим точку Y так, что $AY = KM$ (см. рис. 7.7б). Тогда, независимо от взаимного расположения точек K и Y на отрезке AM, $YM = AM - AY = AM - KM = AK = BM = CM$. Кроме того, $\angle YMC = 60°$, значит, треугольник YMC равносторонний. Тогда $CY = MB$ и $\angle AYC = 120° = \angle KMB$. Следовательно, равны треугольники AYC и KMB (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $AC = BK$.

► Можно также обратить внимание учащихся на треугольники BMK и AMC. Из доказанного следует, что две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого и равны углы KBM и CAM, но сами треугольники не равны. Эта ситуация будет подробно рассмотрена в занятии 8. ◀

7.7. *Первый способ.* Отметим на стороне AC точку T так, что $AT = AY$, тогда $TC = CZ$ (см. рис. 7.8а). Каждый из треугольников ATY и CTZ является равнобедренным с углом $60°$, поэтому они оба равносторонние. Следовательно,

$$\angle YTZ = 180° - (\angle ATY + \angle CTZ) = 60°.$$

Тогда в треугольнике XTZ отрезок TY является биссектрисой (так как $\angle YTZ = \angle YTX$) и медианой (по условию). Поэтому треугольник XTZ равнобедренный, а TY — его высота.

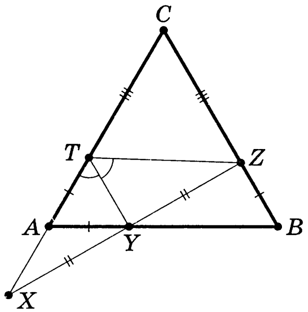


Рис. 7.8а

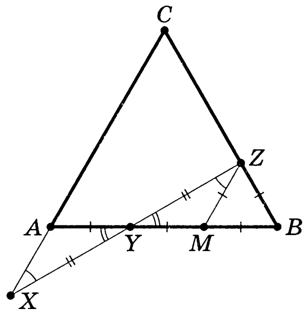


Рис. 7.8б

Кроме того, так как $\angle YTZ = \angle CZT$, то $TY \parallel CZ$. Так как $XZ \perp TY$, $TY \parallel BC$, то $XZ \perp BC$, что и требовалось.

Второй способ. Через точку Z проведём прямую, параллельную стороне AC, которая пересечёт сторону AB в точке M (см. рис. 7.8б). Углы треугольника BZM равны по $60°$, поэтому он равносторонний. Значит, $BM = MZ = BZ = AY$.

Кроме того, из параллельности ZM и AB следует, что $\angle YZM = \angle YXA$, тогда треугольники MYZ и AYX равны (по данным равным сторонам и двум прилежащим к ним углам). Следовательно, $AY = MY$.

Таким образом, медиана ZM треугольника BZY равна половине его стороны BY, поэтому этот треугольник прямоугольный: $\angle BZY = 90°$, то есть прямые XZ и BC перпендикулярны.

► Этот способ решения возникает, если вспомнить задачу 2.8. ◄

Третий способ. Отметим на стороне AC точку P так, что $CP = AY = BZ$ (см. рис. 7.8в). Тогда $CZ = AP = BY$. Следовательно, треугольники CZP, APY и BYZ равны (по двум сторонам и углу между ними), значит, $ZP = PY = YZ$, то есть треугольник ZPY равносторонний.

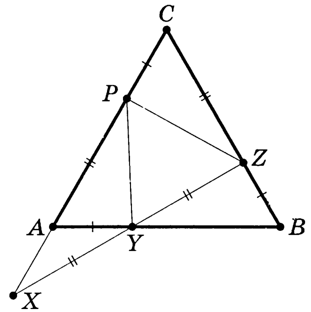


Рис. 7.8в

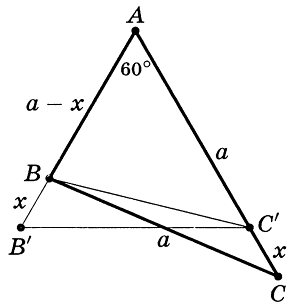


Рис. 7.9

Кроме того, в треугольнике XPZ медиана PY равна половине стороны XZ, поэтому $\angle XPZ = 90°$. Тогда в треугольнике CZP угол ZPC равен $90°$, значит, в равном ему треугольнике BYZ угол YZB равен $90°$, то есть $XZ \perp BC$.

7.8. Предположим противное. Пусть в треугольнике ABC угол A равен $60°$, $BC = a$, $AB = a - x$, тогда $AC = a + x$ $(x > 0)$. Отметим точку B' на луче AB и точку C' на луче AC так, что $AB' = AC' = a$ (см. рис. 7.9).

Так как треугольник $AB'C'$ равнобедренный с углом $60°$, то он является равносторонним, то есть $B'C' = a$. Тогда треугольники $BC'B'$ и $C'BC$ равны (по трём сторонам). Поэтому $\angle BCC' = \angle C'B'B = 60°$. Таким образом, в треугольнике ABC угол C равен $60°$. Значит, треугольник ABC равносторонний (точки C' и B' совпадают с вершинами C и B).

Можно также использовать задачи Д4, Д8, Д46, Д47, Д53, Д65, Д70—Д84.

Занятие 8
Ещё раз о равенстве треугольников

Основные цели этого занятия: 1) познакомить школьников с четвёртым признаком равенства треугольников (его ещё называют «полупризнаком») и научить их применять его при решении задач; 2) научить школьников различать верные и неверные утверждения, связанные с равенствами треугольников, и строить контрпримеры к правдоподобным, но неверным утверждениям. Для этого можно использовать следующий приём: перед разбором верного решения примера 8.1 учитель может привести «доказательство» равенства указанных треугольников, содержащее ошибку, и добиться, чтобы школьники её нашли. При необходимости этот приём можно повторить в случае затруднений с решением задач 8.3 и 8.4.

Важно подчеркнуть тесную связь построения контрпримеров с решением ряда задач на построение треугольников. Отметим также, что в занятии 2 уже было рассмотрено построение некоторых контрпримеров, связанных с тематикой этого занятия. Кроме того, решение некоторых задач позволит вновь повторить типовые дополнительные построения.

На этом занятии мы вновь займёмся равенством треугольников. При решении задачи 2.5 (см. занятие 2, при необходимости можно повторить это решение) мы выяснили, что если соответственно равные углы треугольников лежат не между равными сторонами, то треугольники могут быть и неравными. Но в ряде случаев они оказываются равными, и это можно применять при решении задач. Кроме того, если треугольники не равны, то существует связь между ними.

Рассмотрим возникающую ситуацию подробно. Для этого удобно вспомнить задачу на построение треугольника по двум сторонам и углу, лежащему напротив одной из них.

Пусть надо построить треугольник ABC, в котором $AB=c$, $BC=a$, $\angle BAC=\alpha<90^\circ$. Тогда, построив угол A, равный α, и отложив на одной из его сторон отрезок AB длины c, проводим окружность с центром B и радиусом a. Далее возможны различные случаи в зависимости от соотношения между a и расстоянием от точки B до другой стороны угла A. Рассмотрим их по мере постепенного увеличения a.

1. Если a меньше, чем указанное расстояние, то окружность не пересечёт эту сторону и тогда задача решений не имеет. Этот случай нам неинтересен.

2. Если указанное расстояние равно a, то окружность будет касаться стороны угла, тогда задача имеет одно решение. Но этот случай также не очень интересен, так как искомый треугольник прямоугольный, а признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу хорошо известен.

3. Если же a больше, чем расстояние от точки B до другой стороны угла A, то окружность пересечёт прямую, содержащую сторону угла, в двух точках (см. рис. 8.1а, б).

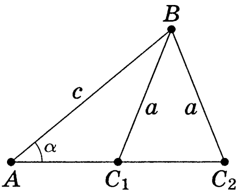


Рис. 8.1а

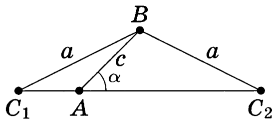


Рис. 8.1б

В случае, показанном на рис. 8.1а, мы получим два треугольника, удовлетворяющих условию задачи: ABC_1 и ABC_2, то есть в этом случае треугольники с указанными данными не равны. Но имеет смысл заметить, что в этих треугольниках сумма углов C_1 и C_2 равна $180°$, так как углы AC_1B и C_2C_1B смежные, а угол C_2C_1B равен углу C_1C_2B.

В случае, показанном на рис. 8.1б, задача имеет единственное решение: условию удовлетворяет только треугольник ABC_2, то есть в этом случае треугольники с указанными данными равны.

Таким образом, можно сформулировать общее утверждение: *если две стороны одного треугольника соответственно равны сторонам другого треугольника и равны углы,* *противолежащие одной паре равных сторон, то либо эти треугольники равны, либо сумма углов, противолежащих другой паре равных сторон, равна* 180°.

Для того чтобы различить эти два случая, заметим, что в случае, изображённом на рис. 8.1а, $a < c$, а в случае, изображённом на рис. 8.1б, $a > c$. Теперь можно сформулировать четвёртый признак равенства треугольников: *если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника и равны углы, лежащие напротив бо́льших из этих сторон, то такие треугольники равны*.

Обратим внимание ещё на два частных случая.

1. Если $a = c$, то точка C_1 совпадает с A и задача на построение имеет единственное решение. Таким образом, треугольники с указанными равными элементами будут равны, что не удивительно, так как для равенства равнобедренных треугольников достаточно равенства любой пары соответствующих сторон и любой пары соответствующих углов.

2. Если $\alpha \geqslant 90^\circ$, то $a > c$, поэтому треугольники с указанными равными элементами будут равны (соответствующая задача на построение имеет одно решение).

► Отметим, что полное исследование рассмотренной задачи на построение будет возможно после изучения метрических теорем.

Важно подчеркнуть, что для случая, когда треугольники не равны, справедливо и обратное утверждение, которое было рассмотрено в задаче 2.2. Кроме того, соответствующие конструкции возникали в уже упомянутой задаче 2.5, а также в задачах 2.8, 5.8, 7.6 и 7.7. ◄

Как равные, так и неравные треугольники могут возникать при соответствующем равенстве не только их основных (стороны и углы), но и вспомогательных элементов (медианы, высоты, биссектрисы, периметры и пр.). Например, у треугольников ABC_1 и ABC_2 (см. рис. 8.1а), помимо уже указанных равных элементов, есть общая высота, проведённая из вершины B. Поэтому этот рисунок является примером двух неравных треугольников, у которых соответственно равны две стороны и высоты, проведённые к третьим сторонам.

Наличие общей высоты у двух неравных треугольников, которая в одном треугольнике лежит внутри, а в другом — снаружи, помогает при решении многих задач о равенстве или неравенстве треугольников.

Пример 8.1. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны острые углы A и A_1, высоты, проведённые из вершин B и B_1, и медианы, проведённые из вершин C и C_1. Обязательно ли эти треугольники равны?

► Опять обратившись к рис. 8.1а, заметим, что у треугольников ABC_1 и ABC_2 есть общий угол A и общая высота, проведённая из вершины B. Значит, если из такой конструкции мы сумеем создать похожую, заменив равные стороны BC_1 и BC_2 равными медианами, то получим неравные треугольники, удовлетворяющие условию. И вновь получение контрпримера сводится к решению задачи на построение. ◄

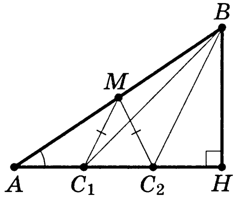


Рис. 8.2

Построим прямоугольный треугольник ABH с прямым углом H по острому углу A и катету BH (см. рис. 8.2). Пусть M — середина AB. Проведём окружность с центром M и радиусом, меньшим половины AB. Она пересечёт отрезок AH в двух точках C_1 и C_2. Таким образом, в неравных треугольниках ABC_1 и ABC_2 равны углы BAC_1 и BAC_2, высота, проведённая из вершины B, общая и равны медианы C_1M и C_2M, проведённые из вершин C_1 и C_2.

Ответ: нет.

► Отметим, что из приведённого рассуждения следует, что если нашлись два неравных треугольника, удовлетворяющие условию задачи, то они оба тупоугольные. ◄

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

8.1. У двух прямоугольных треугольников равны гипотенузы. Обязательно ли равны эти треугольники, если у них ещё равны проведённые к гипотенузам: а) медианы; б) высоты?

8.2. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC отмечена точка K так, что $\angle AKB = \angle BKC$. Докажите, что прямая BK проходит через середину стороны AC.

8.3. а) Две стороны и высота, проведённая к одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника, проведённой к соответствующей стороне. Обязательно ли эти треугольники равны?

б) Две стороны и высота, проведённая к третьей стороне, одного тупоугольного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне, другого тупоугольного треугольника. Обязательно ли эти треугольники равны?

8.4. а) На равных сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки E и D соответственно так, что $AD = BE$. Обязательно ли равны отрезки AE и BD?

б) В четырёхугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны соответствующие углы. Кроме того, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $BD = B_1D_1$. Обязательно ли равны эти четырёхугольники?

8.5. Две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого, а также равны разности противолежащих им углов. Обязательно ли эти треугольники равны?

8.6. На стороне BC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны AC за точку C — точка N, причём $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

8.7. В треугольнике ABC на сторонах AC и BC отмечены такие точки X и Y, что $\angle ABX = \angle YAC$, $\angle AYB = \angle BXC$, $XC = YB$. Найдите углы треугольника ABC.

Ответы, решения, комментарии

8.1. Ответ: а) нет; б) да.

а) Так как медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине, то второе условие автоматически следует из первого. Поэтому достаточно рассмотреть два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой и разными острыми углами. Пусть, например, один из треугольников равнобедренный, а другой — нет (см. рис. 8.3а). Понятно, что треугольники ABC и ABD не равны.

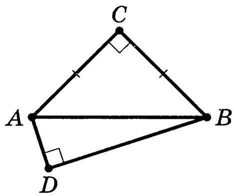


Рис. 8.3а

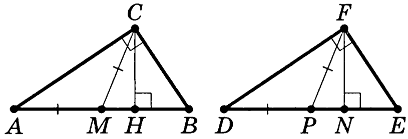


Рис. 8.3б

б) Рассмотрим треугольники ABC и DEF, в которых $\angle C = \angle F = 90°$, $AB = DE$, CH и FN — соответствующие высоты и $CH = FN$ (см. рис. 8.3б). Проведём медианы CM и FP в этих треугольниках, тогда $CM = 0{,}5AB = 0{,}5DE = FP$. Значит, равны прямоугольные треугольники CMH и FPN (по катету и гипотенузе), следовательно, $\angle CMH = \angle FPN$. Тогда равны углы CMA и FPD, смежные с равными. Значит, равны треугольники AMC и DPF (по двум сторонам и углу между ними), откуда следует, что $AC = DF$. Таким образом, треугольники ABC и DEF равны (по катету и гипотенузе).

► Отметим, что возможна другая ситуация, не меняющая ответа, в которой вершины треугольников по-разному ориентированы (см. рис. 8.3в). Не забыть об этом помогает «классическое» решение соответствующей задачи на построение методом ГМТ. ◄

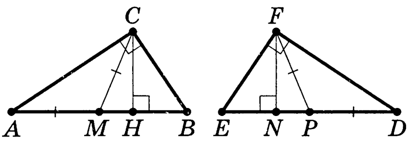


Рис. 8.3в

8.2. Так как BK — общая сторона треугольников AKB и CKB, то из условия задачи следует, что либо эти треугольники равны, либо $\angle KAB + \angle KCB = 180°$ (см. рис. 8.4). Но второй случай противоречит теореме о сумме углов треугольника.

Из равенства треугольников AKB и CKB следует, что луч BK — биссектриса угла ABC, тогда прямая BK содержит медиану треугольника ABC, то есть пересекает сторону AC в её середине.

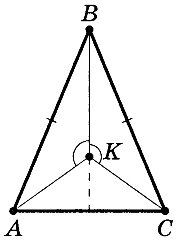


Рис. 8.4

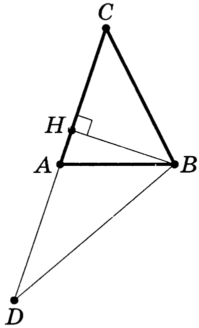


Рис. 8.5а

8.3. Ответ: а), б) нет.

а) ► Понять ответ помогает уже рассмотренная ситуация: наличие общей высоты у остроугольного и тупоугольного треугольников с общей стороной. Кроме того, может помочь и решение соответствующей задачи на построение. ◄

Рассмотрим остроугольный треугольник ABC и его высоту BH. На продолжении стороны AC за вершину A отметим точку D так, что $AD = AC$ (см. рис. 8.5а). Тогда в треугольниках ABC и ABD сторона AB общая, $AC = AD$ и к этим сторонам проведена общая высота. Но эти треугольники не равны, так как ABD — тупоугольный треугольник.

б) ► На первый взгляд, ответ должен быть положительным. И это действительно так, если тупыми являются соответствующие углы. Но если в одном треугольнике проводить высоту из вершины тупого угла, а в другом — из вершины острого угла, то можно построить контрпример. ◄

Построим, например, два равнобедренных прямоугольных треугольника ABH и FEN с равными гипотенузами

AB и FE. Такие треугольники равны, поэтому равны их катеты (см. рис. 8.5б).

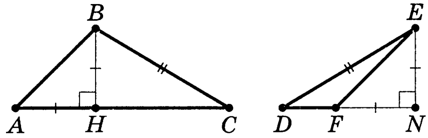


Рис. 8.5б

На продолжении отрезка AH за точку H отметим точку C, а на продолжении отрезка NF за точку F отметим точку D так, что $HC = ND > NF = AH$. Из равенства прямоугольных треугольников BHC и END (по двум катетам) следует, что $BC = ED$. Рассмотрим треугольники ABC и DEF. В них $AB = FE$, $BC = ED$ и равны высоты BH и EN, проведённые к сторонам AC и DF соответственно. При этом углы ABC и DFE будут тупыми. Действительно, $\angle ABC > 90°$, так как $\angle ABH = 45°$, $\angle CBH > 45°$, поскольку $CH > BH$. Угол DFE тупой, так как высота EN лежит вне треугольника DEF.

8.4. Ответ: а), б) нет.

а) Рассмотрим, например, равносторонний треугольник ABC. На сторонах AC и BC отметим точки E и D, не совпадающие с серединами сторон, так, что $CE = BD$ (см. рис. 8.6а). Тогда треугольники ABD и BCE равны (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $AD = BE$. Но один из отрезков AE или BD больше половины стороны треугольника, а другой — меньше, то есть $AE \neq BD$.

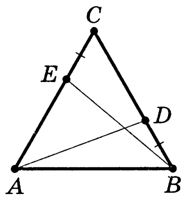


Рис. 8.6а

► Отметим, что в треугольниках ABD и BAE сторона AB общая, равны стороны AD и BE и равны углы ABD и BAE, лежащие напротив этих сторон, но эти треугольники не равны. При этом из приведённых выше рассуждений следует, что сумма углов ADB и BEA равна $180°$. ◄

б) Используем аналогичную конструкцию, дополнив её и сменив некоторые обозначения. Рассмотрим равносторонний треугольник APB и будем считать, что точки A_1 и B_1 совпадают с точками A и B. На стороне AP отметим точки D и D_1, а на стороне BP — точки C и C_1, не совпадающие с серединами сторон, так, что $AD = PD_1 = PC_1 = BC$ (см. рис. 8.6б). Тогда из равенства треугольников ABD, BAC, PA_1C_1 и PB_1D_1 (по двум сторонам и углу между ними) следует, что $AC = BD = A_1C_1 = B_1D_1$. Кроме того, треугольники CPD и C_1PD_1 также равносторонние, поэтому $CD \parallel C_1D_1$, значит, в четырёхугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны соответствующие углы. Таким образом, получены два неравных четырёхугольника, удовлетворяющие условию задачи.

8.5. Ответ: да.

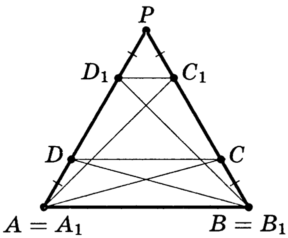


Рис. 8.6б

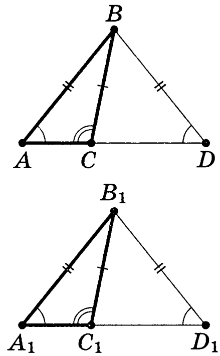


Рис. 8.7

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C - \angle A = \angle C_1 - \angle A_1$. На прямых AC и A_1C_1 отметим точки D и D_1 соответственно так, что $BD = AB = A_1B_1 = B_1D_1$ (см. рис. 8.7). Тогда $\angle D = \angle A$ и $\angle D_1 = \angle A_1$, значит, $\angle CBD = \angle C - \angle D = \angle C_1 - \angle D_1 = \angle C_1B_1D_1$. Следовательно, равны треугольники CBD и $C_1B_1D_1$ (по двум сторонам и углу между ними). Значит, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$, а тогда равны и смежные с ними углы C и C_1. Учитывая условие, получим, что равны углы A и A_1, тогда равны и углы B и B_1, значит, равны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними).

► Доказав, что равны углы C и C_1, можно сразу сделать вывод о равенстве треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, используя четвёртый признак равенства треугольников (углы C и C_1 лежат напротив бо́льших из данных равных сторон).

Отметим также, что идея использования дополнительного построения может возникнуть, если вновь обратиться к задаче 2.2, а также вспомнить решение задачи на построение треугольника по тем же элементам. ◄

8.6. ► Заметим, что если утверждение задачи выполняется, то в треугольниках ABM и MCN есть две пары равных сторон, а сумма углов B и C, лежащих между этими сторонами, равна $180°$. Тогда углы BAM и CMN должны оказаться равными (см. задачу 2.2). Это соображение подсказывает один из способов решения. ◄

Первый способ. Через точку M проведём прямую, параллельную AC, которая пересечёт AB в точке K (см. рис. 8.8а). Тогда каждый угол треугольника BMK равен $60°$, то есть этот треугольник равносторонний. Следовательно, $\angle AKM = 120° = \angle MCN$. Кроме того, $AM = MN$ и $AK = AB - BK = BC - BM = MC$. Так как углы AKM и MCN тупые, то их сумма не равна $180°$, значит, треугольники AKM и MCN равны. Следовательно, $BM = CN$.

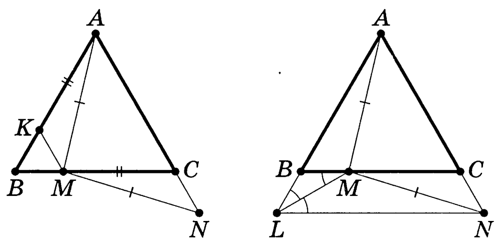


Рис. 8.8а Рис. 8.8б

► Возможно также другое решение, не использующее «полупризнак» равенства треугольников. ◄

Второй способ. Через точку N проведём прямую, параллельную BC, которая пересечёт прямую AB в точке L (см. рис. 8.8б). Из параллельности следует, что $\angle ALN = 60°$, значит, треугольник ALN равносторонний. Тогда $CN = AN - AC = AL - AB = BL$.

Кроме того, равны треугольники AML и NML (по трём сторонам), поэтому $\angle ALM = \angle NLM$. Учитывая, что $BM \parallel LN$, получим $\angle BML = \angle NLM = \angle ALM$, значит, $BM = BL = CN$.

8.7. Ответ: три угла по 60°.

Так как углы BXC и AYB являются внешними для треугольников ABX и CAY соответственно, то $\angle BAX = \angle BXC - \angle ABX = \angle AYB - \angle YAC = \angle YCA$ (см. рис. 8.9). Следовательно, треугольник ABC является равнобедренным: $AB = BC$.

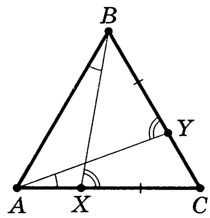


Рис. 8.9

Рассмотрим треугольники XBC и YAB. В них $XC = YB$, $BC = AB$ и $\angle BXC = \angle AYB$. Кроме того, $YB < BC = AB$ и $XC = YB < BC$. Так как равные углы лежат напротив бóльших из рассматриваемых сторон, то эти треугольники равны (по четвёртому признаку равенства треугольников). Следовательно, $\angle BCX = \angle ABY$, и тогда $AB = AC$.

Таким образом, треугольник ABC равносторонний, значит, каждый его угол равен 60°.

► Обосновать, что из полученных равенств следует именно равенство треугольников, а не случай, когда $\angle XBC + \angle YAB = 180°$, можно иначе: $\angle XBC + \angle YAB < \angle ABC + \angle CAB = 180° - \angle ACB < 180°$. ◄

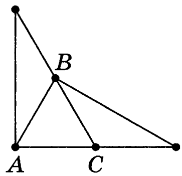
Можно также использовать задачи Д6, Д10, Д12, Д14, Д17, Д57, Д85—Д92.

Дополнительные задачи

Д1. Верно ли, что в неравных треугольниках напротив неравных сторон лежат неравные углы?

Д2. Известно, что треугольники ABC и ADC прямоугольные равнобедренные. Следует ли из этого, что $\angle ABC = \angle ADC$?

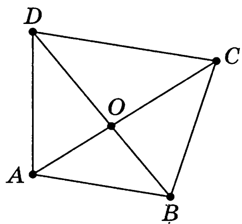
Д3. В четырёхугольниках $ABCD$ и $EFGH$ известно, что $AB = EF$, $BC = FG$, $CD = GH$, $\angle ABC = \angle EFG$, $\angle BCD = \angle FGH$. Докажите, что $AD = EH$.



Д4. Два одинаковых прямоугольных треугольника из бумаги удалось положить один на другой так, как показано на рисунке (вершина прямого угла одного попала на сторону другого). Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

Д5. В треугольнике ABC проведена медиана AM, точка P — её середина, Q — точка пересечения прямых CP и AB. Докажите, что если $BP = BM$, то треугольник APQ равнобедренный.

Д6. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC отмечены точки E и D соответственно так, что а) $AD = CE$; $\angle BAD = \angle BCE$; б) $AE = CD$; $\angle BEC = \angle BDA$. Обязательно ли треугольник ABC равнобедренный?

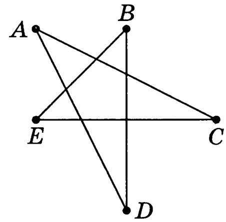


Д7. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O (см. рисунок). Периметр треугольника ABC равен периметру треугольника ABD, а периметр треугольника ACD равен периметру треугольника BCD. Найдите длину AO, если $BO = 10$ см.

Д8. На стороне BC равностороннего треугольника ABC отмечена точка D. Точка E такова, что треугольник BDE также равносторонний. Докажите, что $CE = AD$.

Д9. Биссектрисы внешних углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке P. Оказалось, что $AP = BP$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

Д10. Даны два равнобедренных треугольника, в каждом из которых есть сторона, длина которой 6 см, и угол, градусная мера которого $100°$. Обязательно ли эти треугольники равны?



Д11. В пятиугольной звезде, изображённой на рисунке, $\angle ACE = \angle ADB$ и $\angle DBE = \angle BEC$. Известно также, что $BD = CE$. Докажите, что $\angle ACD = \angle ADC$.

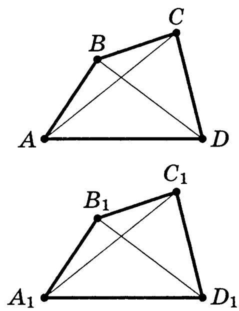
Д12. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны медианы BM и B_1M_1, $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$, $\angle CBM = \angle C_1B_1M_1$. Докажите, что $AC = A_1C_1$.

Д13. В треугольнике ABC сторона AB вдвое меньше стороны AC, AD — биссектриса, $AD = CD$. Найдите угол ABC.

Д14. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ и а) $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$; б) $AB - BC = A_1B_1 - B_1C_1 > 0$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Д15. На медиане BM треугольника ABC отмечена точка E так, что угол AEM равен углу CBM. Докажите, что отрезок EA равен одной из сторон треугольника.

Д16. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Из вершины C опущен перпендикуляр CL на прямую AM (L лежит между A и M). На отрезке AM отмечена точка K так, что $AK = 2LM$. Докажите, что $\angle BKM = \angle CAM$.



Д17. а) На рисунке изображены четырёхугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Известно, что у них равны соответствующие стороны и $AC = A_1C_1$. Докажите, что $BD = B_1D_1$.

б) Можно ли изобразить два четырёхугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ так, чтобы все условия пункта а) о равенствах были выполнены, но при этом $BD \neq B_1D_1$?

Д18. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно так, что $BD = BE$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке F. Найдите угол AFC, если угол EAC равен $25°$.

Д19. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AN, высота BH и серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Докажите, что биссектриса AN, высота, проведённая из вершины C, и серединный перпендикуляр к стороне AC также пересекаются в одной точке.

Д20. В треугольнике ABC известно, что $\angle B = 20°$, $\angle C = 40°$, длина биссектрисы AM равна 2 см. Найдите разность $BC - AB$.

Д21. Даны два треугольника. Сумма двух углов первого треугольника равна некоторому углу второго. Сумма другой пары углов первого треугольника также равна некоторому углу второго. Верно ли, что первый треугольник равнобедренный?

Д22. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. На стороне AB отмечена точка M так, что $AM = MD$. Докажите, что $MD \parallel AC$.

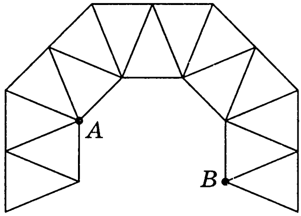
Д23. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD из вершины прямого угла. На сторонах AC и BC отмечены точки E и F соответственно так, что $CE = BF$. Докажите, что треугольник DEF прямоугольный и равнобедренный.

Д24. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно так, что угол MKN прямой. Докажите, что из отрезков AM, BN и MN можно составить прямоугольный треугольник.

Д25. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, а биссектриса CE пересекается с отрезком BD в точке O, причём $EO = DO$ и $\angle EOD = 120°$. Найдите угол BAC.

Д26. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка E, а на биссектрисе BD — точка F таким образом, что $EF \parallel AC$ и $AF = AD$. Докажите, что $AB = BE$.

Д27. Из равных равнобедренных треугольников с углом $45°$ при вершине и боковой стороной, равной 1, сложили картинку (см. рисунок). Найдите расстояние между точками A и B.

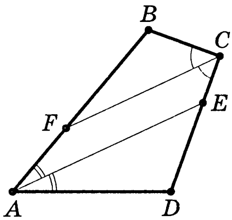


Д28. В равнобедренном треугольнике ABC угол B, противолежащий основанию, равен $20°$. На стороне AB отмечена точка D так, что $BD = AC$. Найдите угол ACD.

Д29*. В равнобедренном треугольнике ABC угол B при вершине равен $20°$, точки N и M лежат на сторонах AB и BC соответственно, $\angle ACN = 60°$, $\angle CAM = 50°$. Найдите угол MNC.

Д30. Дан треугольник, стороны которого попарно различны, и ещё два треугольника, равных ему. Каждый из трёх треугольников разрезали по медиане, проводя эти медианы к различным сторонам. Всегда ли из получившихся шести треугольников можно составить (без «просветов» и «наложений») новый треугольник?

Д31. В треугольнике ABC проведены высоты AP и CN, которые пересекаются в точке H, лежащей внутри треугольника. Может ли угол AHC оказаться острым?



Д32. В четырёхугольнике $ABCD$ проведены биссектрисы AE и CF углов A и C (см. рисунок). Докажите, что AE и CF параллельны тогда и только тогда, когда равны углы B и D.

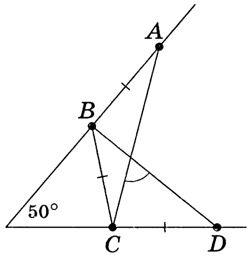
Д33. В равнобедренном треугольнике ABC проведена высота BH к основанию AC. На стороне BC отмечена точка D так, что $\angle BAD = 2\angle CAD$. Отрезки AD и BH пересекаются в точке E. Докажите, что треугольник CDE равнобедренный.

Д34. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Докажите, что если $BC + CL = AB$, то $\angle BCA = 2\angle BAC$.

Д35. Угол при основании BC равнобедренного треугольника ABC вдвое больше угла при вершине, BD — биссектриса треугольника. Докажите, что $AD = BC$.

Д36. В треугольнике ABC угол A в два раза меньше угла C, BD — высота Докажите, что $AD = BC + CD$.

Д37. На сторонах угла, величина которого равна 50°, отмечены точки A, B, C и D так, как это показано на рисунке, причём $AB = BC = CD$. Найдите угол между прямыми AC и BD.



Д38. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбрана точка M таким образом, что $\angle AMC = 2\angle ABC$. На отрезке AM нашлась такая точка K, что $\angle BKM = \angle ABC$. Докажите, что $BK = KM + MC$.

Д39. В треугольнике ABC угол C прямой. На стороне AC нашлась такая точка D, а на отрезке BD — такая точка K, что $\angle B = \angle KAD = \angle AKD$. Докажите, что $BK = 2DC$.

Д40. В треугольнике ABC ($AB \neq BC$) проведена медиана BM. На стороне AB отмечена точка K так, что $\angle BMK = 90^\circ$. Оказалось, что $BK = BC$. Найдите угол ABM, если угол CBM равен 60°.

Д41. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) угол между биссектрисами AD и BE равен углу ABC. Найдите углы треугольника.

Д42*. В равнобедренном треугольнике ABC угол B при вершине равен 80°. Внутри треугольника отмечена точка M так, что $\angle MAC = 10^\circ$, $\angle MCA = 30^\circ$. Найдите угол CBM.

Д43. В треугольнике ABC проведены медиана BM и высота CH. Найдите AC, если $MH = 10$.

Д44. Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Угол между AM и высотой AH равен 40°. Найдите углы треугольника ABC.

Д45. Медиана DM треугольника DEF равна половине стороны EF. Один из углов, образованных при пересечении стороны EF с биссектрисой DL, равен 55°. Найдите углы треугольника DEF.

Д46. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°. Докажите, что высота и медиана, проведённые из вершины прямого угла, делят прямой угол на три равные части.

Д47. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен одной из медиан. Какой угол образует эта медиана со вторым катетом?

Д48. В остроугольном треугольнике ABC известно, что $\angle A = 30^\circ$, BB_1 и CC_1 — высоты, B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Под каким углом пересекаются прямые B_1C_2 и C_1B_2?

Д49. Отрезки AM и BH — медиана и высота остроугольного треугольника ABC соответственно. Известно, что $AH = 1$ и $2\angle MAC = \angle MCA$. Найдите сторону BC.

Д50. Меньший катет AC прямоугольного треугольника ABC имеет длину b. На гипотенузе AB отмечена точка D так, что $BD = BC$. На катете BC выбрана такая точка E, что $DE = BE = m$. Найдите периметр четырёхугольника $ADEC$.

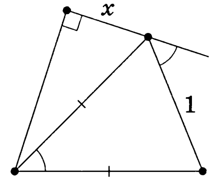
Д51. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка D, что $BD = BC$, а на катете BC — такая точка E, что $DE = BE$. Докажите, что $AD + CE = DE$.

Д52. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена биссектриса CL. На стороне AC отмечена точка K так, что угол CLK прямой. Оказалось, что $AK = BC$. Найдите углы треугольника ABC.

Д53*. Можно ли разрезать равносторонний треугольник на три части и сложить из них прямоугольный треугольник?

Д54. Из середины M стороны AB равностороннего треугольника ABC опустили перпендикуляры MK и ML на стороны AC и BC. Найдите KL, если $AB = 1$.

Д55. Найдите длину отрезка, обозначенного на рисунке буквой x.



Д56. Угол A треугольника ABC равен 60°. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямую AC в точке N. Серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает прямую AB в точке M. Докажите, что $CB = MN$.

Д57*. Высота BN треугольника ABC в два раза меньше стороны AC, а один из углов, прилежащих к AC, равен 75°. Докажите, что ABC — равнобедренный треугольник.

Д58. Дан равносторонний треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C отмечена точка D, а на продолжении стороны BC за точку C — точка E, причём $BD = DE$. Докажите, что $AD = CE$.

Д59. Биссектриса CL треугольника ABC в два раза больше его высоты CH. Определите вид треугольника ABC (по углам).

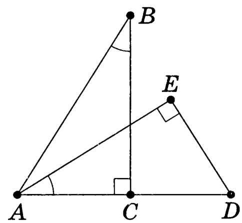
Д60. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A = 90°$, $\angle B = 120°$, $\angle D = 30°$, $AB = 1{,}5$, $BC = 1$. Найдите CD.

Д61. На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D так, что угол ADC равен $60°$. Найдите AD, если $BD = n$, $CD = m$.

Д62. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равнобедренные прямоугольные (стороны AB и A_1B_1 — их гипотенузы). Известно, что C_1 лежит на BC, B_1 лежит на AB, а A_1 лежит на AC. Докажите, что $AA_1 = 2CC_1$.

Д63. Внутри треугольника ABC на биссектрисе его угла B выбрана такая точка M, что $AM = AC$ и $\angle BCM = 30°$. Докажите, что $\angle AMB = 150°$.

Д64. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABC = 90°$, $\angle BAC = \angle DAC$, $AC = AD$. Из вершины D опущен перпендикуляр DH на диагональ AC. Докажите, что прямая BH пересекает отрезок CD в его середине.



Д65. Два равных прямоугольных треугольника ABC и ADE расположены так, как показано на рисунке. Оказалось, что точка E равноудалена от B и D. Найдите отмеченный угол.

Д66. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 45°$, $\angle C = 60°$. На продолжении стороны BC за вершину C отмечена точка D так, что $BC = 2CD$. Найдите угол CAD.

Д67. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена произвольная точка D, из которой опущены перпендикуляры DE и DF на стороны AB и BC соответственно. Докажите, что $DE + DF = CH$, где CH — высота данного треугольника.

Д68. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса BE и высота CD пересекаются в точке M. Найдите углы этого треугольника, если M — середина BE и $CM = 2MD$.

Д69*. На катете AC прямоугольного треугольника ABC отмечена точка M так, что $AM = BC$, а на катете BC — точка N так, что $BN = MC$. Найдите угол между прямыми AN и BM.

Д70. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC = CD$, $\angle ABC = 60°$, $\angle BCD = 90°$. Найдите угол ADC.

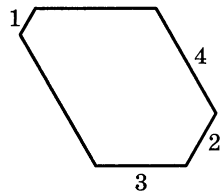
Д71. В треугольнике ABC известно, что $AB = 2$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$. На стороне AC взята такая точка D, что $AD = 1$. Найдите углы треугольника DBC.

Д72. На каждой стороне равностороннего треугольника отмечено по точке. Стороны треугольника с вершинами в этих точках перпендикулярны сторонам исходного треугольника. В каком отношении каждая из отмеченных точек делит сторону исходного треугольника?

Д73. В треугольнике ABC угол A равен $60°$, $AB > AC$. Докажите, что существует треугольник со сторонами, равными AC, BC и $AB - AC$.

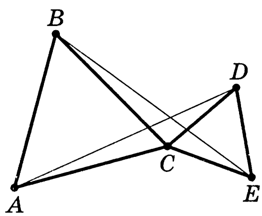
Д74. В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Докажите, что существует треугольник со сторонами, равными AC, BC и $AB + AC$.

Д75. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ на диагонали AD отмечена точка P, равноудалённая от вершины F и середины стороны AB. В каком отношении точка P делит AD? (*Шестиугольник называется правильным, если равны все его стороны и углы.*)



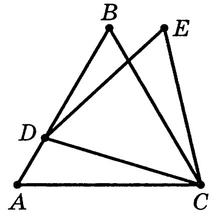
Д76. Каждый угол шестиугольника равен $120°$. Известны длины четырёх его сторон (см. рисунок). Найдите длины двух остальных сторон.

Д77. Два равносторонних треугольника ABC и CDE имеют общую вершину C (см. рисунок). Найдите угол между прямыми AD и BE.



Д78. В треугольнике ABC угол A равен $60°$, а биссектриса AL, медиана BM, и высота CH пересекаются в одной точке. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

Д79. Два равносторонних треугольника ABC и CDE расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что $BE \parallel AC$.



Д80. Угол BAC треугольника ABC равен $120°$. На биссектрисе этого угла взята точка D так, что $AD = AB + AC$. Найдите углы треугольника BDC.

Д81. На стороне BC равностороннего треугольника ABC отмечены точки K и L так, что $BK = KL = LC$, а на стороне AC отмечена точка M так, что $AM = \frac{1}{3}AC$. Найдите сумму углов AKM и ALM.

Д82. В равнобедренном треугольнике ABC с углом $120°$ при вершине B проведены медианы AA_0, BB_0, и CC_0. Из точек A_0, B_0 и C_0 восставили перпендикуляры к сторонам треугольника вне его и отметили на них точки A_1, B_1 и C_1 соответственно так, что $A_0A_1 = AA_0$, $B_0B_1 = BB_0$ и $C_0C_1 = CC_0$. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний.

Д83*. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle B = 120°$. На продолжениях сторон AB и CB за точку B отметили точки P и Q соответственно так, что лучи AQ и CP пересекаются под прямым углом. Докажите, что $\angle PQB = 2\angle PCQ$.

Д84. В треугольнике ABC угол A равен $30°$, угол B равен $105°$. На биссектрисе угла A внутри треугольника отмечена точка P так, что $PC = BC$. Найдите угол APC.

Д85. Угол BAC треугольника ABC равен $15°$. Можно ли однозначно найти сторону AC, если а) $AB = 3$, $BC = 4$; б) $AB = 4$, $BC = 3$?

Д86. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны стороны AB и A_1B_1, высоты, проведённые из вершин B и B_1, медианы, проведённые из вершин C и C_1. Обязательно ли эти треугольники равны?

Д87. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка P так, что $AP = AB$. На стороне AB отмечена точка Q так, что $PQ = PB$. Докажите, что $AQ = CP$.

Д88. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $\angle A = \angle A_1 = \alpha$, $\angle B = \angle B_1 = \beta$, $AC + BC = A_1C_1 + B_1C_1$. Обязательно ли эти треугольники равны?

Д89. Докажите равенство треугольников по двум углам и периметру.

Д90*. Существует ли треугольник, в котором одна из сторон равна какой-то из его высот, другая — какой-то из биссектрис, третья — какой-то из медиан?

Д91*. Внутри равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $AB = BC = CK$ и $\angle KAC = 30°$. Найдите угол AKB.

Д92*. Три стороны одного четырёхугольника соответственно равны сторонам другого четырёхугольника. Кроме того, у этих четырёхугольников соответственно равны диагонали. Обязательно ли равны четвёртые стороны?

Ответы, решения, комментарии

Д1. Ответ: нет.

Например, см. рис. 1. Треугольники ABC и PQC не равны, $AB \neq PQ$, но напротив этих сторон лежат равные прямые углы.

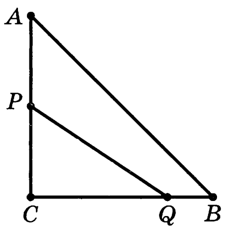


Рис. 1

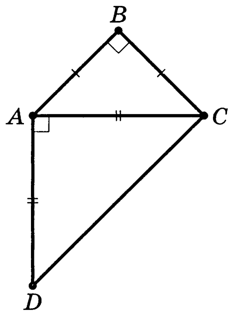


Рис. 2

► Существует и много других примеров. ◄

Д2. Ответ: не следует.

Общая сторона AC в одном из треугольников может являться катетом, а в другом — гипотенузой (см. рис. 2). Тогда угол ABC прямой, а угол ADC острый.

Д3. Проведём диагонали AC и EG (см. рис. 3), тогда треугольники ABC и EFG равны (по двум сторонам и углу меж-

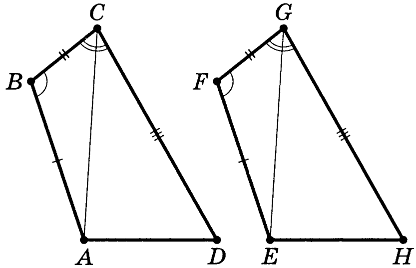


Рис. 3

ду ними). Следовательно, $AC = EG$ и $\angle ACB = \angle EGF$, тогда

$$\angle ACD = \angle BCD - \angle ACB = \angle FGH - \angle EGF = \angle EGH.$$

Значит, треугольники ACD и EGH также равны (по двум сторонам и углу между ними). Поэтому $AD = EH$.

► Если рассматривать другую пару диагоналей, то рассуждения аналогичны. ◄

Д4. В треугольнике ABC углы A и C равны (соответствующие углы равных бумажных треугольников, см. рисунок в условии); значит, его стороны AB и BC равны. Но и его стороны AB и AC также равны (соответствующие стороны равных бумажных треугольников); значит, треугольник ABC равносторонний.

► Отметим, что в решении никак не используется то, что бумажные треугольники имеют прямой угол, важно только то, что они равны. Кроме того, указанным образом можно расположить не любые треугольники, а только равные треугольники, имеющие угол 60°. ◄

Д5. Так как $BP = BM$, то $\angle BPM = \angle BMP$, поэтому равны углы, смежные с ними: $\angle APB = \angle PMC$ (см. рис. 5). Тогда равны треугольники APB и PMC (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle PAB = \angle MPC = \angle APQ$. Таким образом, $QA = QP$, что и требовалось.

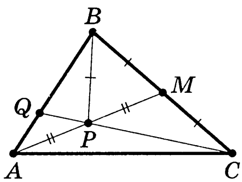


Рис. 5

► Из равенства треугольников APB и PMC также следует, что $AB = CP$. ◄

Д6. Ответ: а), б) обязательно.

а) В треугольниках BAD и BCE угол B общий и $\angle BAD = \angle BCE$, значит, $\angle BDA = \angle BEC$ (см. рис. 6а). Тогда эти треугольники равны (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Следовательно, $BA = BC$, то есть треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть AD и CE пересекаются в точке O (см. рис. 6б). Из условия задачи следует, что $\angle AEC = \angle CDA$. Кроме того, $\angle AOE = \angle COD$. Следовательно, $\angle EAO = \angle DCO$. Тогда треугольники EAO и DCO равны (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Следовательно, $AO = CO$, поэтому

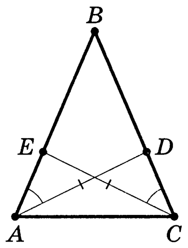


Рис. 6а

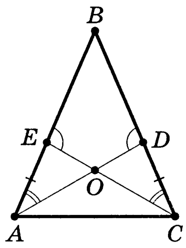


Рис. 6б

$\angle OAC = \angle OCA$. Таким образом, $\angle BAC = \angle BCA$, значит, треугольник ABC равнобедренный.

Д7. Ответ: 10 см.

Так как $P_{ABC} = P_{ABD}$, то $AC + BC = AD + BD$ (см. рисунок в условии). Аналогично так как $P_{ACD} = P_{BCD}$, то $AC + AD = BC + BD$. Приведём второе равенство к виду $AC - BC = BD - AD$ и сложим его с первым: $2AC = 2BD$, то есть $AC = BD$. Значит, $AD = BC$, следовательно, $\Delta ADB = \Delta BCA$ (по трём сторонам), тогда $\angle ABD = \angle BAC$, то есть треугольник AOB равнобедренный: $AO = BO = 10$ см.

Д8. Возможны два случая расположения точки E (см. рис. 8а, б). В обоих случаях треугольники CBE и ABD равны, так как $CB = AB$, $BE = BD$, $\angle CBE = \angle ABD$ (на рис. 8а этот угол общий). Следовательно, $CE = AD$.

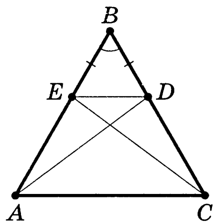


Рис. 8а

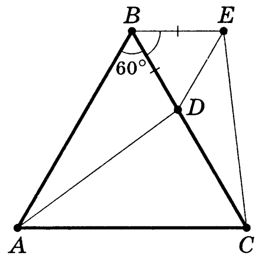


Рис. 8б

▶ Требуемое равенство для случая на рис. 8б также следует из того, что при повороте с центром B на 60° против часовой стрелки образами точек A и D являются точки C и E соответственно. ◀

Д9. Так как треугольник APB равнобедренный, то $\angle PAB = \angle PBA$ (см. рис. 9). Тогда равны и внешние углы A и B данного треугольника, поскольку они в два раза больше. Следовательно, $\angle CAB = \angle CBA$, откуда $CA = CB$, что и требовалось.

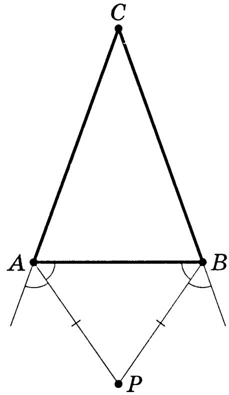


Рис. 9

Д10. Ответ: не обязательно.

Рассмотрим, например, два треугольника, в одном из которых длину 6 см имеет основание, а в другом — боковая сторона, причём величину 100° имеет в каждом треугольнике угол при вершине (угол при основании равнобедренного треугольника не может быть тупым). Треугольники не равны, так как не равны их соответствующие стороны (треугольники тупоугольные, значит, они не равносторонние, поэтому в первом из них боковые стороны не могут иметь длину 6, а во втором основание не равно 6).

Д11. Пусть AC и AD пересекают отрезок BE в точках K и M соответственно (см. рис. 11). Из условия задачи следует, что треугольники CEK и DBM равны по стороне и двум прилежащим углам. Следовательно, $CK = DM$ и $\angle CKE = \angle DMB$. Тогда $\angle AKE = \angle AMB$ (углы, смежные с равными).

Получим, что в треугольнике AMK равны углы, прилежащие к стороне MK, поэтому этот треугольник равнобедренный ($AK = AM$). Следовательно,

$$AC = AK + CK = AM + DM = AD,$$

то есть треугольник ACD также равнобедренный (с основанием CD). Поэтому $\angle ACD = \angle ADC$, что и требовалось.

Д12. Продлим каждую из медиан на её длину, то есть на лучах BM и B_1M_1 отметим точки D и D_1 соответственно так, что $DM = BM$ и $D_1M_1 = B_1M_1$ (см. рис. 12). Учитывая, что $\angle AMD = \angle CMB$ (вертикальные углы), получим, что $\triangle AMD = \triangle CMB$ (по двум сторонам и углу между ними).

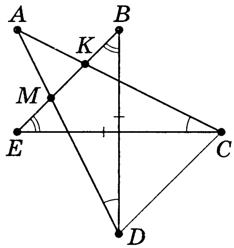


Рис. 11

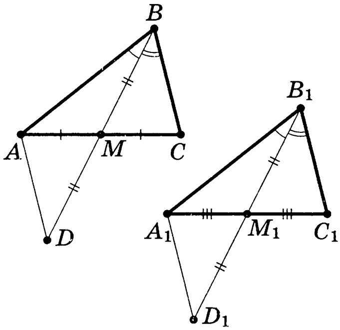


Рис. 12

Следовательно, $\angle ADM = \angle CBM$. Аналогично докажем равенство треугольников $A_1M_1D_1$ и $C_1M_1B_1$, из которого следует, что $\angle A_1D_1M_1 = \angle C_1B_1M_1$.

Тогда, учитывая равенство $\angle CBM = \angle C_1B_1M_1$ из условия задачи, получим, что $\angle ADM = \angle A_1D_1M_1$. Следовательно, треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны (по стороне и двум прилежащим к ней углам), откуда $AB = A_1B_1$. Значит, $\Delta ABM = \Delta A_1B_1M_1$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $AM = A_1M_1$. Тогда $AC = 2AM = 2A_1M_1 = A_1C_1$.

► Отметим, что равенство $\Delta ABM = \Delta A_1B_1M_1$ можно также получить, используя другой признак равенства треугольников (как?). ◄

Д13. Ответ: $90°$.

Пусть M — середина AC, тогда DM — медиана равнобедренного треугольника ADC, значит, $DM \perp AC$ (см. рис. 13). Кроме того, $CM = AM = AB$, поэтому $\Delta ABD = \Delta AMD$ (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle ABD = \angle AMD = 90°$.

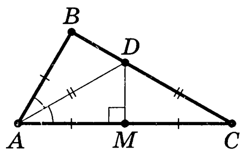


Рис. 13

► Зная теорему о сумме углов треугольника, несложно вычислить, что остальные углы треугольника ABC равны $30°$ и $60°$. ◄

Д14. а) В треугольнике ABC на продолжении стороны AB за вершину B отметим точку D так, что $DB = BC$, и сделаем аналогичное дополнительное построение для треугольника $A_1B_1C_1$ (см. рис. 14а). Тогда $AD = A_1D_1$, значит, $\Delta ADC = \Delta A_1D_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$ и $\angle BCD = \angle ADC = \angle A_1D_1C_1 = \angle B_1C_1D_1$. Тогда

$$\angle ACB = \angle ACD - \angle BCD = \angle A_1C_1D_1 - \angle B_1C_1D_1 = \angle A_1C_1B_1.$$

Таким образом, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам).

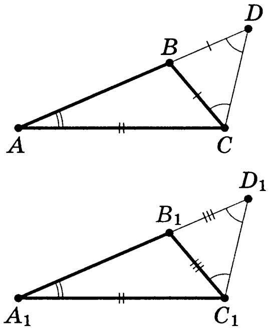


Рис. 14а

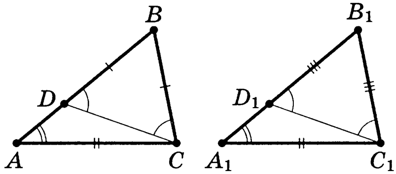


Рис. 14б

б) В треугольнике ABC на стороне AB отметим точку D так, что $DB = BC$, и сделаем аналогичное дополнительное построение для треугольника $A_1B_1C_1$ (см. рис. 14б). Тогда $AD = A_1D_1$, значит, $\Delta ADC = \Delta A_1D_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$ и $\angle ADC = \angle A_1D_1C_1$, поэтому равны и смежные с ними углы. Тогда, учитывая равенство углов при основании в равнобедренных треугольниках, получим, что $\angle BCD = \angle BDC = \angle B_1D_1C_1 = \angle B_1C_1D_1$. Следовательно,

$$\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD = \angle A_1C_1D_1 + \angle B_1C_1D_1 = \angle A_1C_1B_1.$$

Таким образом, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам).

► Отметим, что в обоих пунктах можно немного сократить рассуждения, если использовать теорему о сумме углов или свойство внешнего угла треугольника.

Полезно провести аналогию с задачами на построение треугольника по тем же элементам. ◄

Д15. На продолжении BM за точку M отметим точку D так, что $DM = BM$ (см. рис. 15). Тогда из равенства треугольников AMD и CMB (по двум сторонам и углу между ними) получим, что $AD = BC$ и $\angle ADM = \angle CBM = \angle AEM$. Следовательно, треугольник ADE равнобедренный, а значит, $AE = AD = BC$, что и требовалось.

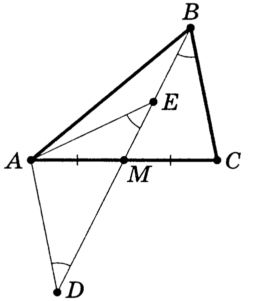


Рис. 15

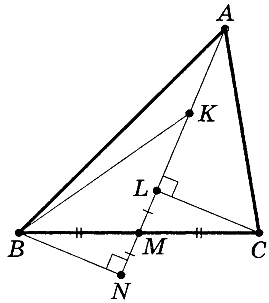


Рис. 16

Д16. На продолжении отрезка LM отметим точку N так, что $NM = LM$ (см. рис. 16). Тогда треугольники CLM и BNM равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle BNM = \angle CLM = 90^\circ$ и $BN = CL$.

Так как $KN = KL + 2LM = KL + AK = AL$, то треугольники BNK и CLA равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle BKM = \angle CAM$.

► Отметим, что возможен случай, когда точка L лежит на отрезке AK, но его можно не рассматривать, так как при таком расположении точек рассуждения аналогичны. ◄

Д17. а) Из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (по трём сторонам) следует, что $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ (см. рисунок в условии). Аналогично из равенства треугольников ADC и $A_1D_1C_1$ получим, что $\angle DAC = \angle D_1A_1C_1$. Тогда

$$\angle DAB = \angle BAC + \angle DAC = \angle B_1A_1C_1 + \angle D_1A_1C_1 = \angle D_1A_1B_1.$$

Значит, $\Delta DAB = \Delta D_1A_1B_1$ (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $BD = B_1D_1$.

б) Можно, например, см. рис. 17.

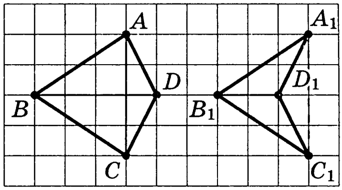


Рис. 17

▶ Полезно обратить внимание школьников на то, что утверждение, которое верно для выпуклого четырёхугольника, оказывается неверным для невыпуклого.

С «продвинутыми» учащимися можно также рассмотреть такую задачу: «У двух выпуклых четырёхугольников соответственно равны стороны и одна диагональ первого четырёхугольника равна диагонали второго. Обязательно ли равны вторые диагонали этих четырёхугольников?».

Это даст возможность обсудить, что четырёхугольник с заданными сторонами не является «жёсткой» фигурой, в отличие от треугольника, а также затронуть идею непрерывности в геометрических рассуждениях. ◀

Д18. Ответ: 130°.

Так как $AB = BC$ и $BD = BE$, то $AD = CE$ (см. рис. 18). Кроме того, $\angle BAC = \angle BCA$ (углы при основании равнобедренного треугольника). Рассмотрим треугольники ACD и CAE. Так как у них общая сторона AC, то эти треугольники равны (по двум сторонам и углу между ними). Следо-

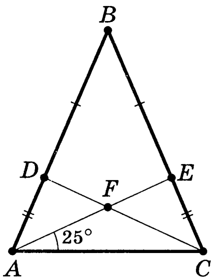


Рис. 18

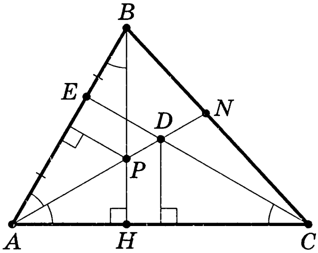


Рис. 19

вательно, $\angle DCA = \angle EAC = 25°$. Тогда из треугольника AFC получим, что $\angle AFC = 180° - (25° + 25°) = 130°$.

Д19. Пусть P — точка пересечения AN и BH (см. рис. 19). Так как серединный перпендикуляр к стороне AB тоже проходит через точку P, то $PA = PB$, то есть треугольник APB равнобедренный. Следовательно, $\angle ABP = \angle BAP = \angle PAH$, так как AP — биссектриса угла BAH. Кроме того, $\angle AHB = 90°$, значит, сумма этих трёх равных углов равна $90°$, то есть каждый из них равен $30°$. Тогда $\angle BAC = 60°$.

Пусть серединный перпендикуляр к AC и биссектриса AN пересекаются в точке D. Тогда $DA = DC$, следовательно, $\angle DCA = \angle DAC = 30°$. Если прямая CD пересекает сторону AB в точке E, то $\angle AEC = 180° - (\angle BAC + \angle DCA) = 90°$, то есть CE — высота треугольника ABC, что и требовалось.

Д20. Ответ: 2 см.

Рассмотрим данный треугольник ABC (см. рис. 20). Так как $\angle BAC = 180° - (\angle B + \angle C) = 120°$, то $\angle BAM = \angle CAM = 60°$. На стороне BC отметим такую точку D, что $BD = AB$, тогда $CD = BC - BD = BC - AB$.

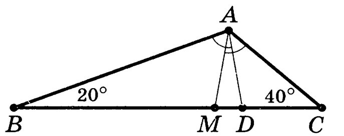


Рис. 20

Из равнобедренного треугольника BAD находим $\angle BAD = \angle BDA = (180° - 20°) : 2 = 80°$. Так как $\angle BAM = 0{,}5\angle BAD = 60°$, то точка M лежит на отрезке BD. Тогда из треугольника AMC находим $\angle AMC = 180° - (\angle CAM + \angle C) = 80°$. Так как $\angle BDA = \angle AMC$, то треугольник MAD равнобедренный с основанием MD. Кроме того, $\angle CAD = \angle BAC - \angle BAD = 120° - 80° = 40°$, то есть $\angle CAD = \angle DCA$, значит, треугольник CAD равнобедренный с основанием AC. Таким образом, $CD = AD = AM = 2$ (см).

Д21. Ответ: верно.

Пусть α, β и γ — углы первого треугольника. По условию $\alpha + \beta = x$ и $\beta + \gamma = y$, где x и y — некоторые углы второго треугольника. Возможны два случая.

1. Если x и y — один и тот же угол второго треугольника, то из записанных равенств следует, что $\alpha = \gamma$, то есть первый треугольник равнобедренный.

2. Если x и y — различные углы второго треугольника, то, сложив эти равенства почленно, получим $\alpha + \beta + \beta + \gamma = x + y$. Но это равенство выполняться не может, так как его левая часть равна $(\alpha + \beta + \gamma) + \beta = 180° + \beta > 180°$, а правая часть меньше чем $180°$.

Таким образом, первый треугольник равнобедренный.

Д22. Так как $AM = MD$ и AD — биссектриса, то $\angle MDA = \angle MAD = \angle CAD$ (см. рис. 22). Тогда по признаку параллельности прямых $MD \parallel AC$.

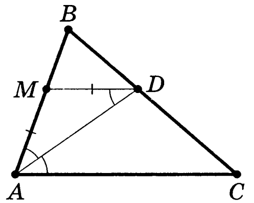


Рис. 22

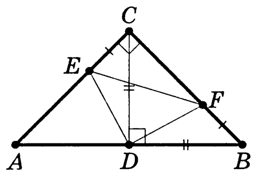


Рис. 23

Д23. Так как высота CD является биссектрисой и медианой данного треугольника, то $\angle ACD = 45° = \angle ABC$ и $CD = BD$ (см. рис. 23). Значит, треугольники CED и BFD равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $ED = FD$ и $\angle CDE = \angle BDF$. Тогда $\angle EDF = \angle EDC + \angle FDC = \angle BDF + \angle FDC = \angle BDC = 90°$. Таким образом, треугольник DEF прямоугольный и равнобедренный.

Д24. Продлим отрезок MK за точку K на его длину и получим точку P (см. рис. 24). Из равенства треугольников BKP и AMK получим, что $BP = AM$ и $BP \parallel AM$. Так как $BP \parallel AM$, то $BP \perp BN$. В треугольнике MPN отрезок NK является высотой и медианой, следовательно, этот треугольник равнобедренный: $NP = MN$. Таким образом, NBP —

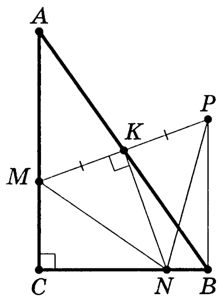


Рис. 24

искомый прямоугольный треугольник. Действительно, его стороны: $BP = AM$, BN и $NP = MN$.

Д25. Ответ: $60°$.

Проведём биссектрису OM угла BOC (M — точка её пересечения со стороной BC, см. рис. 25). Тогда

$$\angle MOC = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}\angle EOD = 60°$$

и

$$\angle DOC = 180° - \angle EOD = 60°.$$

Получим, что $\Delta DOC = \Delta MOC$ (OC — общая сторона; углы, прилежащие к этой стороне, соответственно равны). Следовательно, $DO = MO$. Тогда $\Delta EOB = \Delta MOB$ (OB — общая сторона; $EO = MO$; $\angle EOB = 180° - \angle EOD = 60° = \angle MOB$). Следовательно, BO — биссектриса угла ABC, поэтому O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC.

Так как $\angle BOC = 120°$, то $\angle OBC + \angle OCB = 60°$, тогда $\angle ABC + \angle ACB = 120°$, следовательно, $\angle BAC = 60°$.

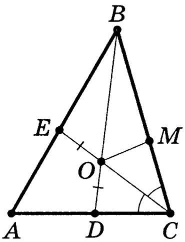


Рис. 25

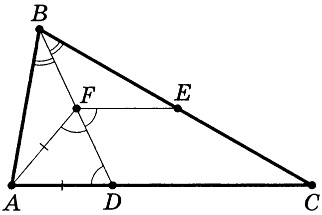


Рис. 26

Д26. Так как $AF = AD$, то $\angle AFD = \angle ADF$, а из параллельности EF и AC вытекает, что $\angle ADF = \angle EFD$ (см. рис. 26). Следовательно, $\angle AFD = \angle EFD$, а тогда равны и углы, смежные с ними: $\angle AFB = \angle EFB$. Учитывая, что $\angle ABF = \angle EBF$, получим, что $\Delta ABF = \Delta EBF$ (по стороне и прилежащим к ней углам). Значит, $AB = BE$.

► Отметим, что треугольники ABF и EBF симметричны относительно биссектрисы угла ABC. ◄

Д27. Ответ: $AB = 2$.

Введём обозначения так, как показано на рис. 27. Угол при основании каждого из данных треугольников равен $(180° - 45°) : 2 = 67{,}5°$, значит, $\angle AKL = \angle KLM = \angle LMB = 360° - 2 \cdot 45° - 2 \cdot 67{,}5° = 135°$.

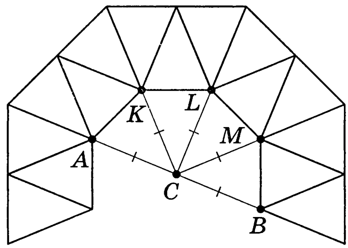


Рис. 27

Построим равнобедренный треугольник ACK, равный заданному, и проведём отрезки CL, CM и CB. Так как $\angle LKC = 135° - \angle AKC = 67{,}5°$, то $\Delta ACK = \Delta LCK$ (по двум сторонам и углу между ними). Аналогично $\Delta LCK = \Delta LCM = \Delta MCB$. Тогда $\angle ACB = 4 \cdot 45° = 180°$, то есть точка C лежит на отрезке AB. Значит, $AB = 2AC = 2$.

Д28. Ответ: $\angle ACD = 70°$.

Пусть ABC — данный треугольник. Вычислим его углы при основании: $\angle A = \angle B = (180° - 20°) : 2 = 80°$. Дальнейшие рассуждения потребуют дополнительных построений, которые могут различаться, но так или иначе используют равенство $80° - 20° = 60°$.

Первый способ. Построим равносторонний треугольник AMC (см. рис. 28а), тогда $\Delta ABM = \Delta CBM$ (по трём сторонам), следовательно, $\angle ABM = 10°$.

Так как $\angle BAM = 20° = \angle DBC$, то $\Delta DBC = \Delta MAB$ (по двум сторонам и углу между ними), значит, $\angle BCD = \angle ABM = 10°$. Следовательно, $\angle ACD = 80° - 10° = 70°$.

Второй способ. Построим перпендикуляры к AC в точках A и C и отложим на них точки F и E соответственно так, чтобы $\angle ABF = \angle ABE = 20°$ (см. рис. 28б). Тогда $\angle EBF = 60°$ и $\Delta ABF = \Delta CBE$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам), значит, $BF = BE$, то есть треугольник FBE равносторонний. Следовательно, $BE = FE = AC = BD$. Тогда

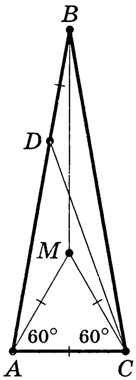


Рис. 28а

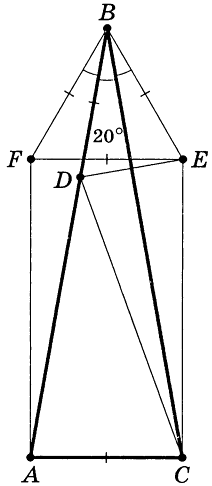


Рис. 28б

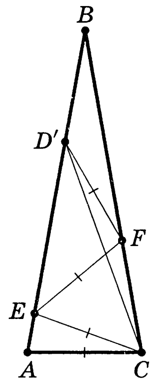


Рис. 28в

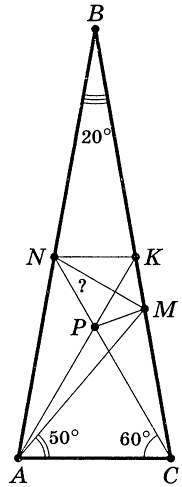


Рис. 29

$\Delta BCD = \Delta BCE$ (по двум сторонам и углу между ними) и $\angle BCD = 90° - 80° = 10°$, поэтому $\angle ACD = 80° - 10° = 70°$.

Третий способ. Построим точки E и D' на стороне AB и точку F на стороне BC так, чтобы $AC = CE = EF = FD'$ (см. рис. 28в). Последовательно вычислим углы: $\angle AEC = 80°$; $\angle ACE = 20°$; $\angle ECB = 60°$; $\angle CEF = \angle CFE = 60°$; $\angle D'EF = 40°$; $\angle ED'F = 40°$; $\angle D'FB = 40° - 20° = 20°$, следовательно, $BD' = D'F = AC$, то есть точка D' совпадает с данной точкой D.

Кроме того, в треугольнике CEF каждый угол равен 60°; значит, этот треугольник равносторонний. Следовательно, $CF = FD$. Тогда из равнобедренного треугольника DFC получим $\angle DCF = 20° : 2 = 10°$, поэтому $\angle ACD = 80° - 10° = 70°$.

► Отметим, что при любом способе решения используется такое дополнительное построение, чтобы один из построенных равнобедренных треугольников оказался равносторонним. Это и даёт возможность получить дополнительное равенство. ◄

Д29. Ответ: $\angle MNC = 30°$.

Из условия задачи следует, что $\angle BAC = \angle BCA = 80°$. На стороне BC отметим точку K так, что $\angle CAK = 60°$ (см. рис. 29). Пусть AK и CN пересекаются в точке P. Так как $\angle AMC =$

$= 180° - (\angle MAC + \angle MCA) = 50° = \angle CAM$, то треугольник AMC равнобедренный: $MC = AC$.

Так как $\angle PAC = \angle PCA = 60°$, то треугольник APC равносторонний, следовательно, треугольник PMC равнобедренный: $PC = MC$. Тогда $\angle PMC = (180° - \angle PCM) : 2 = 80°$.

В треугольнике PKM известно, что $\angle M = 100°$, $\angle K = 40°$, значит, $\angle P = 40°$, поэтому и этот треугольник равнобедренный. Из равенства треугольников AKC и CAN (по стороне и прилежащим к ней углам) следует, что $AK = CN$, а тогда $PK = PN$. Учитывая, что $\angle NPK = \angle APC = 60°$, получим, что треугольник NPK равносторонний.

Таким образом, треугольники MPN и MKN равны (по трём сторонам), значит, NM — биссектриса угла KNP, поэтому $\angle MNC = 0{,}5\angle KNP = 30°$.

Д30. Ответ: всегда.

Разрезав треугольник по медиане, приложим два получившихся треугольника друг к другу, совместив две половинки разрезанной стороны (см. рис. 30а). В каждом случае получим новый треугольник, так как углы, образованные каждой медианой и стороной, к которой она проведена, в сумме составляют развёрнутый угол.

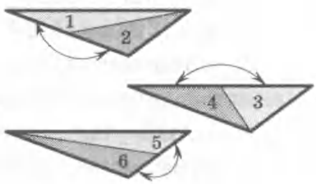


Рис. 30а

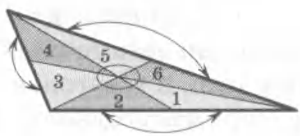


Рис. 30б

Полученные треугольники совместим равными сторонами так, чтобы вершины их углов, ранее составленные из двух частей, сошлись в одной точке (см. рис. 30б). Таким образом, в одной точке совместятся шесть углов, равных углам исходного треугольника, причём каждый угол встретится дважды. Следовательно, их сумма равна 360°, поэтому треугольники совместятся без «просветов» и «наложений» и образуют новый треугольник.

► В случае затруднений можно вернуться к задаче 2.1. ◄

Д31. Ответ: не может.

Пусть ABC — данный треугольник, AP и CN — его высоты (см. рис. 31). Так как угол AHC внешний для треугольника CHP, то $\angle AHC > \angle HPC = 90°$. Следовательно, угол AHC тупой.

▶ Заметим, что если не потребовать, чтобы точка пересечения высот лежала внутри треугольника, то ответ будет положительным. Действительно, B — точка пересечения высот AH и CP треугольника AHC и прямой угол APC является внешним для треугольника ABP, значит, $\angle APC > \angle ABP$. Следовательно, угол ABC острый. ◀

Д32. Обозначим $\angle DAE = \angle EAF = \alpha$, $\angle BCF = \angle FCE = \gamma$.

Первый способ. См. рис. 32а.

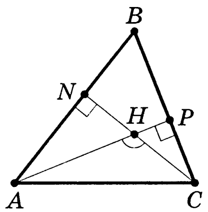


Рис. 31

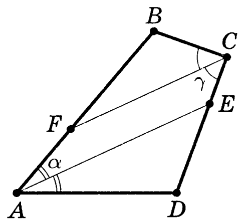


Рис. 32а

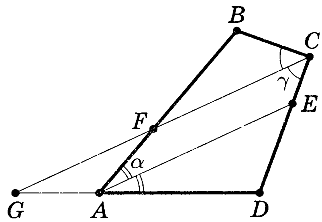


Рис. 32б

1. Пусть $AE \parallel CF$. Тогда по свойству параллельных прямых $\angle CFB = \angle EAF = \alpha$ и $\angle AED = \angle FCE = \gamma$. Следовательно, $\angle B = 180° - (\alpha + \gamma) = \angle D$, что и требовалось.

2. Пусть $\angle B = \angle D = \beta$, тогда, используя тот факт, что сумма углов четырёхугольника равна $360°$, получим $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360°$, то есть $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Угол AFC является внешним для треугольника BFC, значит, $\angle AFC = \beta + \gamma$. Следовательно, $\angle AFC + \angle FAE = 180°$, поэтому $AE \parallel CF$.

Второй способ. Продлим CF до пересечения с прямой AD в точке G (см. рис. 32б).

1. Если $AE \parallel CF$, то треугольник AFG равнобедренный (см. пример 4.1), и тогда $\angle CFB = \angle AFG = \angle AGF = \alpha$. Из треугольника CBF находим $\angle B = 180° - (\alpha + \gamma)$, а из треугольника CDG находим $\angle D = 180° - (\alpha + \gamma)$, то есть $\angle B = \angle D$.

2. Если $\angle B = \angle D = \beta$, то из треугольника CDG находим

$$\angle CGD = 180^\circ - (\beta + \gamma),$$

а из треугольника CBF находим

$$\angle CFB = 180^\circ - (\beta + \gamma) = \angle AFG.$$

Значит, $\angle AFG = \angle FGA$, поэтому треугольник AFG равнобедренный. Следовательно, $AE \parallel CF$ (см. пример 4.1).

Д33. Так как высота BH является также медианой и биссектрисой данного треугольника, то $\Delta ABE = \Delta CBE$ и $\Delta AHE = \Delta CHE$ (по двум сторонам и углу между ними, см. рис. 33). Пусть $\angle EAC = \alpha$, тогда $\angle ECH = \angle EAH = \alpha$, $\angle ECB = \angle EAB = 2\alpha$. Угол CED является внешним для треугольника AEC, значит, $\angle CED = 2\alpha$. Так как $\angle CED = 2\alpha = \angle ECD$, то $ED = CD$, что и требовалось.

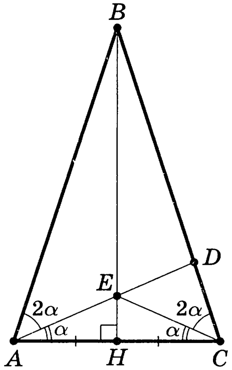


Рис. 33

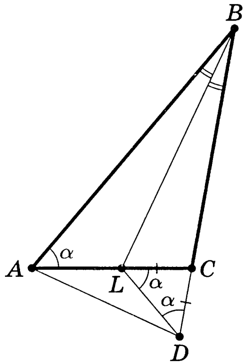


Рис. 34

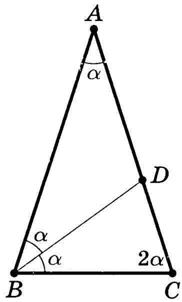


Рис. 35

Д34. На продолжении стороны BC за вершину C отметим точку D так, что $CD = CL$, тогда $BD = BA$ и $\angle CDL = \angle CLD$; обозначим эти углы через α (см. рис. 34). Так как $\Delta ABL = \Delta DBL$ (по двум сторонам и углу между ними), то $\angle BAL = \angle CDL = \alpha$. Так как BCL — внешний угол треугольника DCL, то $\angle BCL = 2\alpha$. Следовательно, $\angle BCA = 2\angle BAC$.

► Сравните эту конструкцию с конструкцией из задачи Д33. ◄

Д35. Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $\angle B = \angle C = 2\alpha$ (см. рис. 35). Так как $\angle ABD = \alpha = \angle BAD$, то $AD = BD$. Кроме того, BDC —

внешний угол треугольника ABD, значит, $\angle BDC = 2\alpha = \angle BCD$. Следовательно, $BD = BC$. Таким образом, $AD = BC$.

▶ Отметим, что углы треугольника ABC определяются однозначно, так как $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180$, то есть $\alpha = 36°$. Значит, $\angle A = 36°$, $\angle B = \angle C = 72°$. Такой треугольник «всплывает» в ряде геометрических конструкций. ◀

Д36. Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $\angle C = 2\alpha$. На луче DA отметим точку E так, что $ED = CD$ (см. рис. 36). Тогда в треугольнике CBE высота BD совпадает с медианой, значит, $BC = BE$. Поэтому $\angle EBD = \angle CBD$, а из условия задачи следует, что $\angle ABD > \angle CBD$, значит, точка E лежит между D и A. Кроме того, $\angle BED = \angle BCD = 2\alpha$. Угол BED является внешним для треугольника AEB, значит, $\angle ABE = \alpha = \angle BAE$, поэтому $AE = BE = BC$.

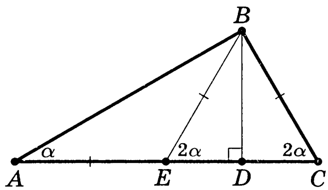


Рис. 36

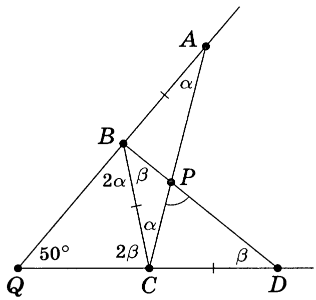


Рис. 37

Таким образом, $AD = AE + ED = BC + CD$, что и требовалось.

Д37. Ответ: 65°.

Пусть Q — вершина данного угла, и пусть $\angle QAC = \alpha$, $\angle QDB = \beta$, а прямые AC и BD пересекаются в точке P. Из условия задачи следует, что треугольники ABC и DCB равнобедренные, а тогда $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$, $\angle CBD = \angle CDB = \beta$ (см. рис. 37).

По теореме о внешнем угле треугольника $\angle QBC = 2\alpha$, $\angle QCB = 2\beta$. Из треугольника QBC по теореме о сумме углов треугольника получаем $2\alpha + 2\beta + 50° = 180°$, откуда $\alpha + \beta = 65°$. Так как CPD — внешний угол треугольника BPC, то $\angle CPD = \alpha + \beta = 65°$.

Д38. Продлим отрезок CM до пересечения с BK в точке L (см. рис. 38). По теореме о внешнем угле треугольника $\angle KLM = \angle AMC - \angle BKM = \angle ABC$, откуда $MK = ML$.

Так как $\angle LCB = \angle KLM - \angle LBC = \angle ABC - \angle KBC = \angle ABK$ и $\angle BAK = \angle BKM - \angle ABK = \angle KLM - \angle BCL = \angle LBC$, то треугольники ABK и BCL равны (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Значит, $BK = CL = CM + ML = CM + MK$, что и требовалось.

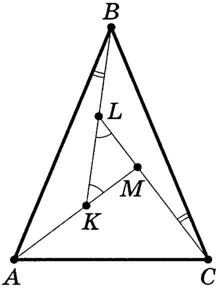


Рис. 38

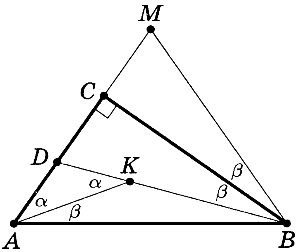


Рис. 39

Д39. Пусть $\angle B = \angle KAD = \angle AKD = \alpha$, $\angle BAK = \beta$ (см. рис. 39). На продолжении отрезка DC за точку C отложим отрезок $CM = DC$. Тогда высота BC треугольника DBM является его медианой, поэтому треугольник DBM равнобедренный с основанием DM. Из треугольника BAK по свойству внешнего угла получаем $\angle ABK = \angle AKD - \angle BAK = \alpha - \beta$. Поэтому $\angle CBM = \angle CBD = \angle B - \angle ABK = \beta$, $\angle ABM = \alpha + \beta = \angle BAM$. Значит, треугольник ABM равнобедренный с основанием AB, $BM = AM = BD$. Следовательно, $BK = BD - DK = AM - AD = DM = 2DC$.

Д40. Ответ: 40°.

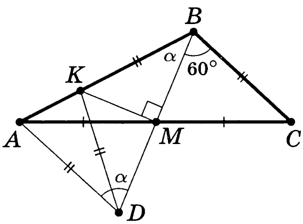


Рис. 40

На продолжении BM за точку M отметим точку D так, что $DM = BM$ (см. рис. 40). Тогда из равенства треугольников AMD и CMB (по двум сторонам и углу между ними) получим, что $AD = BC$ и $\angle MDA = \angle MBC = 60^\circ$. Кроме того, KM — высота и медиана треугольника BKD, значит, $DK = BK = BC = AD$.

Пусть $\angle ABM = \alpha$, тогда $\angle KDM = \alpha$, $\angle AKD = 2\alpha$ (внешний угол треугольника BKD), $\angle KAD = 2\alpha$. Из треугольника ABD получим $\alpha + 2\alpha + 60° = 180°$, откуда $\alpha = 40°$.

Д41. Ответ: три угла по 60° или 36°, 36°, 108°.

Пусть AD и BE пересекаются в точке I, $\angle ABE = \angle CBE = \alpha$. Тогда возможны два случая.

1. Если угол ABC острый, то $\angle AIE = \angle ABC = 2\alpha$ (см. рис. 41а). По теореме о внешнем угле треугольника $\angle IAB = \alpha$, тогда $\angle BAC = 2\alpha$, значит, $AC = BC$, то есть треугольник ABC равносторонний. Каждый его угол равен 60°.

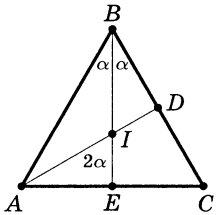


Рис. 41а

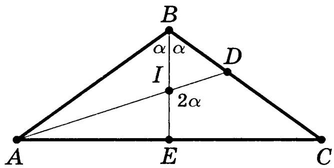


Рис. 41б

2. Если угол ABC тупой, то $\angle AIB = \angle DIE = \angle ABC = 2\alpha$ (см. рис. 41б). Так как $\angle BAE = 90° - \alpha$, то $\angle BAI = 45° - 0{,}5\alpha$. Из треугольника AIB получим, что $2\alpha + \alpha + 45° - 0{,}5\alpha = 180°$, откуда $\alpha = 54°$. Тогда $\angle ABC = 108°$, $\angle BAC = \angle BCA = 36°$.

Д42. Ответ: $\angle CBM = 10°$.

Проведём высоту треугольника из вершины B и продлим отрезок CM до пересечения с этой высотой в точке P (см. рис. 42). Тогда треугольник APC равнобедренный и

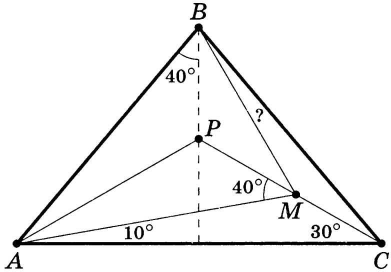


Рис. 42

$\angle APC = 120°$. Следовательно, $\angle APB = 180° - 0{,}5\angle APC = 120°$.

Так как AMP — внешний угол треугольника AMC, то он равен $40°$. Но и $\angle ABP = 0{,}5\angle ABC = 40°$, значит, $\angle BAP = \angle MAP = 20°$. Тогда треугольники ABP и AMP равны (по стороне и прилежащим углам), откуда $AB = AM$. Следовательно, треугольник ABM равнобедренный, $\angle BAM = 40°$, значит, $\angle BMA = 70°$, поэтому $\angle CBM = 10°$.

Д43. Ответ: $AC = 20$.

В прямоугольном треугольнике AHC с прямым углом H отрезок HM является медианой, проведённой к гипотенузе (см. рис. 43). Следовательно, $AC = 2MH = 20$.

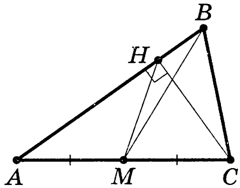


Рис. 43

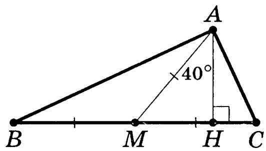


Рис. 44

Д44. Ответ: $90°$, $25°$, $65°$.

Так как медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный ($\angle A = 90°$).

Пусть точка H лежит на отрезке CM (см. рис. 44). Тогда $\angle AMC = 90° - 40° = 50°$ — внешний угол равнобедренного треугольника AMB, поэтому $\angle B = 0{,}5\angle AMC = 25°$. Следовательно, $\angle C = 90° - 25° = 65°$.

Д45. Ответ: $90°$, $10°$, $80°$.

Так как медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный ($\angle D = 90°$).

Пусть точка L лежит на отрезке FM, тогда $\angle DLF = 55°$ — внешний угол треугольника EDL (см. рис. 45). Так как $\angle EDL = 0{,}5\angle EDF = 45°$, то $\angle DEF = 55° - 45° = 10°$. Тогда $\angle DFE = 90° - 10° = 80°$.

Д46. Пусть CH и CM — высота и медиана прямоугольного треугольника ABC, где $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (см. рис. 46).

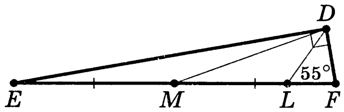


Рис. 45

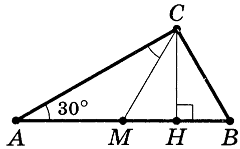


Рис. 46

Так как $CM = AM = BM$, то $\angle MCA = \angle MAC = 30°$, и тогда $\angle MCB = 60°$. Равнобедренный треугольник MCB с углом $60°$ является равносторонним, CH — его высота, следовательно, CH — биссектриса угла MCB. Таким образом, $\angle BCH = \angle MCH = \angle MCA = 30°$.

Д47. Ответ: 30°.

Рассмотрим треугольник ABC с прямым углом C. Возможны два случая: 1) медиана проведена к гипотенузе; 2) медиана проведена к одному из катетов.

1. Пусть медиана CM равна, например, катету BC (см. рис. 47а). Кроме того, $CM = \frac{1}{2}AB = BM$, поэтому треугольник BMC равносторонний, следовательно, $\angle BCM = 60°$. Значит, искомый угол ACM равен 30°.

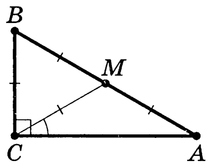


Рис. 47а

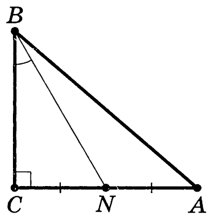


Рис. 47б

2. Пусть BN — рассматриваемая медиана (см. рис. 47б). Так как $BN > BC$, то остаётся принять, что $BN = AC$. Тогда $CN = \frac{1}{2}BN$, то есть в прямоугольном треугольнике BCN угол CBN равен 30°. Это и есть искомый угол.

Д48. Ответ: под прямым углом.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABB_1, B_1C_2 — его медиана (см. рис. 48а). Тогда $B_1C_2 = \frac{1}{2}AB = AC_2$. Следовательно, треугольник AC_2B_1 равнобедренный с углом 30° при основании, значит, $\angle AC_2B_1 = 120°$. Аналогично C_1B_2 —

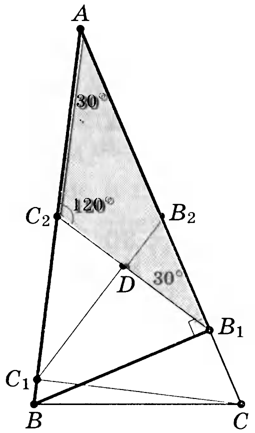


Рис. 48а

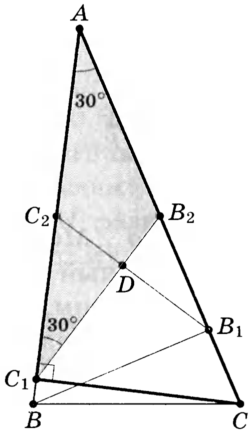


Рис. 48б

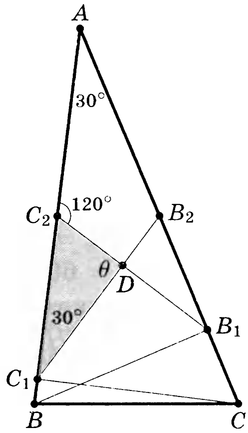


Рис. 48в

медиана прямоугольного треугольника ACC_1 (см. рис. 48б), поэтому $C_1B_2 = \frac{1}{2}AC = AB_2$. Следовательно, треугольник AB_2C_1 также равнобедренный с углом 30° при основании.

Рассмотрим треугольник C_1C_2D, где D — точка пересечения отрезков B_1C_2 и C_1B_2 (см. рис. 48в). Пусть $\angle C_1DC_2 = \theta$. По теореме о внешнем угле треугольника $\theta + 30° = 120°$. Следовательно, искомый угол между прямыми B_1C_2 и C_1B_2 равен 90°.

► Отметим, что приведённое решение опирается на то, что середины сторон AB и AC расположены ближе к вершине A, чем соответствующие основания высот, что и показано на рис. 48а—в. Поясним, почему это так для точек C_1 и C_2 (для B_1 и B_2 ситуация аналогична). Из условия задачи следует, что $\angle ACC_1 = 60°$, а $\angle ACC_2 < \angle AB_1C_2 = 30°$.

Отметим также, что вместо треугольника AB_2C_1 можно было рассмотреть треугольник B_2CC_1 (см. рис. 48б), в котором $C_1B_2 = \frac{1}{2}AC = CB_2$ и $\angle ACC_1 = 90° - \angle BAC = 60°$. Следовательно, этот треугольник равносторонний, значит, $\angle C_1B_2C = 60°$. Тогда по теореме о сумме углов треугольника $\angle B_1DB_2 = 90°$. ◄

Д49. Ответ: $BC = 2$.

Пусть $\angle MAC = \alpha$, тогда $\angle MCA = 2\alpha$. Так как HM — медиана прямоугольного треугольника BHC, проведённая из вершины прямого угла, то $HM = MB = MC$ (см. рис. 49). Треугольник CMH равнобедренный, значит, $\angle CHM = \angle MCH = 2\alpha$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle AMH = \angle CHM - \angle MAC = \alpha$. Следовательно, треугольник AHM также равнобедренный, то есть $HM = AH = 1$. Тогда $BC = 2HM = 2$.

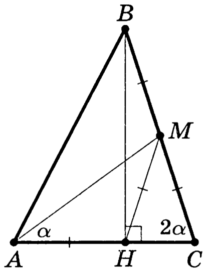


Рис. 49

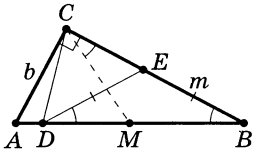


Рис. 50

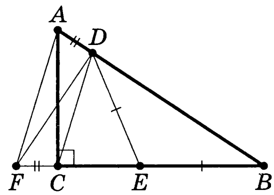


Рис. 51

Д50. Ответ: $2m + b$.

Пусть M — середина гипотенузы AB данного прямоугольного треугольника ABC (см. рис. 50). Тогда $AM = BM = CM$ и $\angle BDE = \angle MBC = \angle MCB$ (углы при основаниях двух равнобедренных треугольников). Так как $BD = BC$, то $\Delta BDE = \Delta BCM$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам), следовательно, $CM = DE = m$ и $CE = BC - BE = BD - BM = DM$. Тогда

$$P_{ADEC} = AD + DE + EC + CA = AD + m + DM + b = AM + b + m = 2m + b.$$

Д51. На продолжении катета BC за точку C отложим отрезок CF, равный DA (см. рис. 51). Тогда $BA = BF$, значит, $\angle BAF = \angle BFA$. Следовательно, равны треугольники DAF и CFA (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $DF = CA$. Тогда равны и треугольники BDF и ACB (по трём сторонам), значит, $\angle BDF = \angle ACB = 90^\circ$. Поэтому из равенства $DE = BE$ следует, что DE — медиана прямоугольного треугольника BDF, проведённая к гипотенузе, то есть $DE = BE = FE = CF + CE = AD + CE$, что и требовалось.

Д52. Ответ: 22,5° и 67,5°.

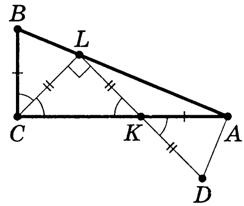


Рис. 52

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Так как в прямоугольном треугольнике CLK угол LCK равен 45°, то этот треугольник ещё и равнобедренный (см. рис. 52). На продолжении отрезка LK отметим точку D так, что $KD = KL = CL$. Тогда $\angle AKD = \angle CKL = \angle BCL = 45°$. Следовательно, $\Delta AKD = \Delta BCL$ (по двум сторонам и углу между ними). Значит, $\angle KAD = \angle CBL = \beta$, поэтому $\angle BAD = \alpha + \beta = 90°$.

Таким образом, AK — медиана прямоугольного треугольника DAL, проведённая к гипотенузе, значит, $AK = KD$. Тогда $\angle KDA = \angle KAD = \beta = (180° - 45°) : 2 = 67{,}5°$; $\alpha = 22{,}5°$.

Д53. Ответ: можно.

На рисунке 53а показано, как разрезать равносторонний треугольник, а на рисунках 53б и 53в поэтапно показано, каким образом сложить из получившихся частей прямоугольный треугольник.

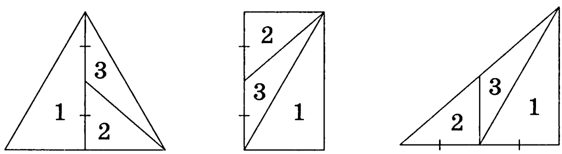


Рис. 53а Рис. 53б Рис. 53в

Д54. Ответ: $KL = \frac{3}{4}$.

Так как $\angle CAB = \angle CBA = 60°$, то $\angle KMA = \angle LMB = 30°$ (см. рис. 54).

Катет прямоугольного треугольника, лежащий напротив угла величиной 30°, равен половине гипотенузы, поэтому $AK = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{4}$ и $BL = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{4}$. Следовательно, $CK = CL = \frac{3}{4}$.

В равнобедренном треугольнике CKL угол CKL равен 60°, поэтому этот треугольник равносторонний, то есть $KL = CK = CL = \frac{3}{4}$.

► В заключительной фазе решения можно было рассуждать и по-другому: $\Delta AMK = \Delta BML$ (по гипотенузе и острому углу), поэтому $MK = ML$. Тогда можем найти

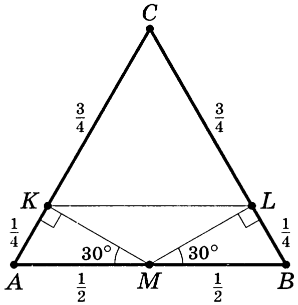


Рис. 54

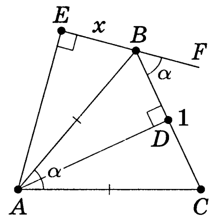


Рис. 55

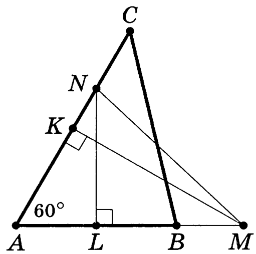


Рис. 56

углы равнобедренного треугольника KML: $\angle KML = 120°$, $\angle MKL = \angle MLK = 30°$. Следовательно, $\angle CKL = \angle CLK = 60°$ (непосредственный счёт углов или использование параллельности прямых KL и AB). ◀

Д55. Ответ: $x = 0{,}5$.

Введём обозначения так, как показано на рис. 55, и проведём высоту AD к основанию BC равнобедренного треугольника ABC, которая является также биссектрисой и медианой этого треугольника. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Так как $\angle BAD = 0{,}5\alpha$, то $\angle ABD = 90° - 0{,}5\alpha$, значит,

$$\angle ABE = 180° - (\angle ABD + \angle DBF) = 90° - 0{,}5\alpha = \angle ABD.$$

Следовательно, прямоугольные треугольники ABE и ABD равны (по гипотенузе и острому углу), значит, $BE = BD = 0{,}5BC = 0{,}5$.

Второй способ. $\angle ABE = 180° - (\angle ABC + \angle CBF) = \angle BAC + \angle ACB - \angle CBF = \angle ACB$. Следовательно, прямоугольные треугольники ABE и ACD равны (по гипотенузе и острому углу), значит, $BE = CD = 0{,}5BC = 0{,}5$.

Д56. Пусть K и L — середины сторон AC и AB соответственно (см. рис. 56). В прямоугольном треугольнике ANL катет AL лежит напротив угла 30°, поэтому $AN = 2AL = AB$. Аналогично $AM = 2AK = AC$. Тогда треугольники ACB и AMN равны (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $BC = MN$.

Д57. Пусть угол BAC равен $75°$. Докажем, что $BC = AC$ (см. рис. 57). Пусть это не так, тогда на луче AC отметим точку C' так, что $AC' = BC'$ (такая точка существует, так как серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает луч AC). Получим, что $\angle C'BA = \angle C'AB = 75°$, значит, $\angle BC'N = 30°$. Следовательно, $BN = 0{,}5BC' = 0{,}5AC'$, то есть точка C' совпадает с точкой C. Таким образом, $BC = AC$.

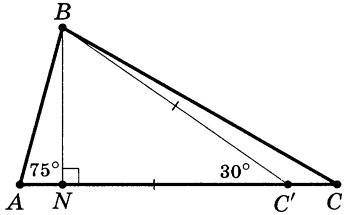


Рис. 57

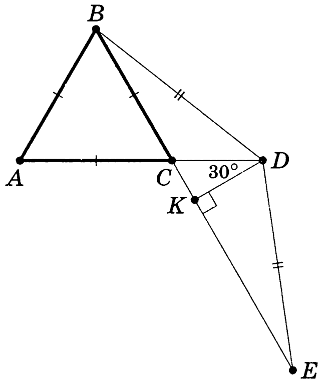


Рис. 58

Д58. Пусть DK — высота равнобедренного треугольника BDE, тогда $KB = KE$ (см. рис. 58). В прямоугольном треугольнике DKC угол CDK равен $30°$, значит, $CK = 0{,}5CD$. Следовательно, $CE = CK + KE = CK + KB = CK + (CK + BC) =$
$= CD + AC = AD$.

Д59. Ответ: тупоугольный.

Из условия задачи следует, что угол CLH в прямоугольном треугольнике CLH равен $30°$, значит, $\angle LCH = 60°$.

Предположим, что высота CH лежит внутри треугольника или совпадает с его стороной, тогда $\angle ACL < \angle CLH = 30°$, а $\angle LCB \geqslant \angle LCH = 60°$, значит, CL не может являться биссектрисой угла ACB (см. рис. 59а).

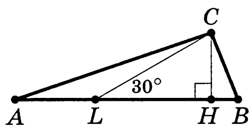


Рис. 59а

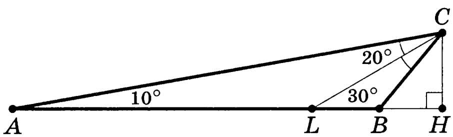


Рис. 59б

Если же CH лежит вне треугольника, то либо угол A, либо угол B является тупым. Эта ситуация возможна, например, см. рис. 59б.

Д60. Ответ: $CD = 4$.

Проведём перпендикуляр CE к стороне AD и перпендикуляр BF к отрезку CE (см. рис. 60). Так как $AB \parallel CE$, то $BF \perp AB$ и $BF \parallel AE$. Следовательно, $EF = AB = 1{,}5$ и $\angle CBF = \angle ABC - \angle ABF = 30°$. Тогда из треугольника CBF находим $CF = 0{,}5CB = 0{,}5$, значит, $CE = EF + CF = 2$. Из треугольника CED находим $CD = 2CE = 4$.

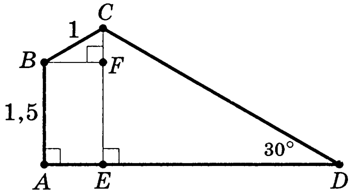


Рис. 60

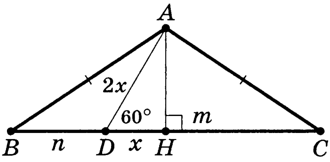


Рис. 61

Д61. Ответ: $m - n$.

Проведём высоту AH, тогда $\angle DAH = 30°$ (см. рис. 61). Пусть $DH = x$, тогда $AD = 2x$. Кроме того, $BH = n + x$, $CH = m - x$. Так как $AB = AC$, то $BH = CH$. Значит, $n + x = m - x$, откуда $2x = m - n$.

Д62. Обозначим $CC_1 = x$, $CA_1 = y$. Так как $\angle CA_1C_1 + \angle CC_1A_1 = 90°$ и $\angle BC_1B_1 + \angle CC_1A_1 = 90°$, то $\angle CA_1C_1 = \angle BC_1B_1$ (см. рис. 62). Опустим перпендикуляр B_1N на сторону BC. Тогда треугольники B_1NC_1 и C_1CA_1 равны (по гипотенузе и

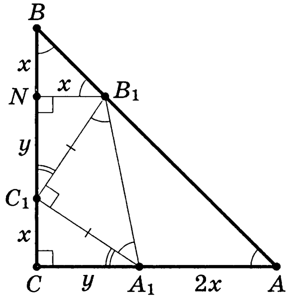


Рис. 62

острому углу). Следовательно, $B_1N = x$ и $NC_1 = y$. Так как треугольник BNB_1 прямоугольный и равнобедренный, то $NB = x$. По условию

$$y + AA_1 = CA = CB = y + 2x.$$

Следовательно, $AA_1 = 2x = 2CC_1$.

Д63. Пусть K и L — основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны AB и BC соответственно, а N — середина гипотенузы CM прямоугольного треугольника CML (см. рис. 63). Точка, лежащая на биссектрисе угла, равноудалена от его сторон, поэтому $MK = ML$. Катет, лежащий напротив угла 30°, равен половине гипотенузы, поэтому $ML = 0{,}5CM = MN$, значит, $MK = MN$. Кроме того, так как AN — медиана равнобедренного треугольника MAC, то AN — биссектриса угла MAC и $MN \perp AN$, то есть точка M равноудалена от сторон угла NAK. Следовательно, AM — биссектриса этого угла.

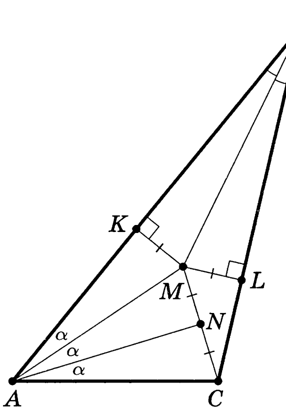


Рис. 63

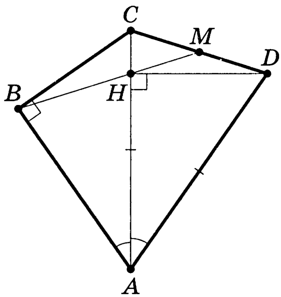


Рис. 64

Пусть $\angle CAN = \angle NAM = \angle MAK = \alpha$. Тогда $\angle ACN = 90° - \alpha$, $\angle ACB = (90° - \alpha) + 30° = 120° - \alpha$, $\angle BAC = 3\alpha$, $\angle ABC = 180° - 3\alpha - (120° - \alpha) = 60° - 2\alpha$, $\angle ABM = 0{,}5\angle ABC = 30° - \alpha$. Следовательно, $\angle AMB = 180° - \alpha - (30° - \alpha) = 150°$.

Д64. Пусть M — точка пересечения прямой BH и отрезка CD (см. рис. 64). Так как прямоугольные треугольники ABC и AHD равны (по гипотенузе и острому углу), то $AB = AH$, то есть треугольник ABH равнобедренный. Пусть $\angle HBA = \alpha$, тогда $\angle CHM = \angle BHA = \alpha$ и

$$\angle ACM = 0{,}5(180^\circ - \angle CAD) = 0{,}5(180^\circ - \angle CAB) = \alpha.$$

Значит, $\angle MHD = 90^\circ - \alpha = \angle MDH$. Таким образом, $CM = HM = DM$, то есть M — середина отрезка CD.

Д65. Ответ: 30°.

Из условия задачи следует, что $AB = AD$. Проведём отрезок BE, тогда треугольники ABE и ADE равны (по трём сторонам). Следовательно, $\angle AEB = \angle AED = 90^\circ$, то есть точка E лежит на отрезке BD (см. рис. 65). Кроме того, $AB = AD$ и $\angle CAB = \angle EDA$ (по условию), значит, $AB = BD$.

Таким образом, треугольник ADB равносторонний, его высоты являются биссектрисами, значит, отмеченный угол равен 30°.

► Можно также использовать тот факт, что равны прямоугольные треугольники ABC и BAE (например, по гипотенузе и катету), поэтому $\angle CAB = \angle EBA$. Тогда треугольник ADB равнобедренный: $AD = BD$. ◄

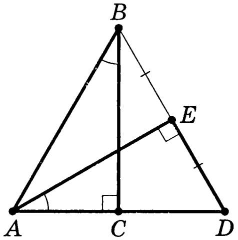


Рис. 65

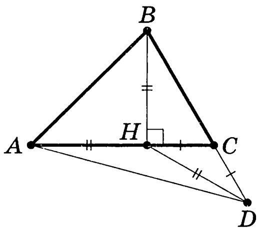


Рис. 66

Д66. Ответ: 15°.

Из условия задачи следует, что $\angle ABC = 75^\circ$ (см. рис. 66). Проведём высоту BH треугольника ABC, тогда $\angle ABH = 45^\circ$, $\angle HBC = 30^\circ$. Значит, $CH = 0{,}5BC = CD$. Следовательно,

$$\angle CDH = \angle CHD = 0{,}5\angle HCB = 30^\circ = \angle HBC.$$

Таким образом, $DH = BH = AH$, значит, $\angle CAD = \angle HDA = 0{,}5\angle CHD = 15^\circ$.

Д67. Опустим перпендикуляр DK на CH, тогда $DE = KH$ (см. рис. 67). Так как $DK \parallel AB$, то $\angle KDC = \angle BAC = \angle BCA$. Тогда прямоугольные треугольники CFD и DKC равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $DF = CK$.

Таким образом, $DE + DF = KH + CK = CH$, что и требовалось.

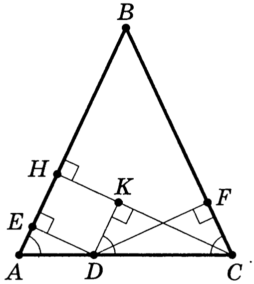


Рис. 67

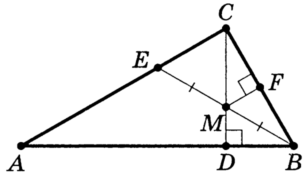


Рис. 68

Д68. Ответ: $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$.

Из точки M опустим перпендикуляр MF на сторону BC (см. рис. 68). Тогда $MF = MD = 0{,}5CM$. Следовательно, в прямоугольном треугольнике MCF имеем $\angle MCF = 30°$. Тогда из треугольника BDC получим, что $\angle ABC = 60°$.

Так как BM — биссектриса угла CBD, то $\angle MBC = 30° = \angle MCB$, значит, $CM = BM = EM$. Следовательно, треугольник BEC прямоугольный: $\angle BCE = 90°$. Тогда $\angle BAC = 180° - (\angle ABC + \angle ACB) = 30°$.

Д69. Ответ: 45°.

Пусть прямые AN и BM пересекаются в точке O, тогда угол AOM искомый.

Вне треугольника ABC построим квадрат $CEDM$ (см. рис. 69). Тогда $EN = CE + CN = CN + CM = CN + NB = CB$. Значит, прямоугольные треугольники EDN, CMB и MDA равны по двум катетам ($DE = MC = DM$ и $EN = CB = MA$). Следовательно, $ND = AD$ и $\angle EDN = \angle MDA$. Тогда $\angle ADN = \angle MDE = 90°$.

Таким образом, треугольник AND равнобедренный и прямоугольный, значит, $\angle AND = 45°$. Кроме того, из равенства треугольников следует, что $\angle DNE = \angle MBC$, поэтому $BM \parallel ND$. Тогда $\angle AOM = \angle AND = 45°$.

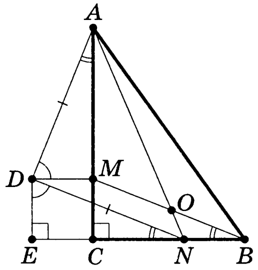


Рис. 69

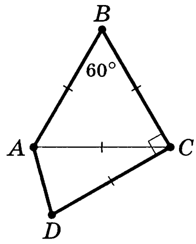


Рис. 70

Д70. Ответ: 75°.

Проведём диагональ AC, тогда равнобедренный треугольник ABC с углом 60° является равносторонним (см. рис. 70). Треугольник ACD равнобедренный, $\angle ACD = 90° - \angle ACB = 30°$, значит, $\angle ADC = (180° - \angle ACD) : 2 = 75°$.

Д71. Ответ: 90°; 50°; 40°.

Пусть ABC — данный треугольник (см. рис. 71), тогда $\angle DCB = 180° - (\angle A + \angle B) = 50°$. Рассмотрим треугольник ABD. В нём $AB = 2AD$ и $\angle A = 60°$, поэтому $\angle ADB = 90°$ (см. пример 7.1). Значит, $\angle BDC = 90°$; $\angle DBC = 40°$.

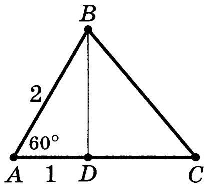


Рис. 71

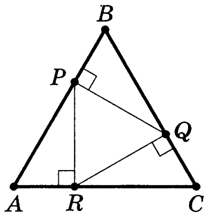


Рис. 72

Д72. Ответ: 2 : 1.

Пусть точки P, Q и R лежат на сторонах AB, BC и CA соответственно равностороннего треугольника ABC, причём $QR \perp BC$, $RP \perp AC$, $PQ \perp AB$ (см. рис. 72). Тогда $\angle APR = \angle BQP = \angle CRQ = 30°$, значит, каждый угол треугольника PQR равен 60°, то есть треугольник PQR равносторонний. Прямоугольные треугольники APR, BQP и CRQ равны по катету и острому углу. Следовательно, $BP = AR = 0{,}5AP$, то есть $AP : PB = 2 : 1$. Аналогично $BQ : QC = CR : RA = 2 : 1$.

► Отметим, что доказанное утверждение является обратным к утверждению задачи 7.2. ◄

Д73. На стороне AB отметим точку D так, что $AD = AC$ (см. рис. 73). Тогда треугольник CAD равнобедренный с углом $60°$, поэтому он является равносторонним. Так как $BD = AB - AD = AB - AC$, $CD = AC$, то BCD — искомый треугольник.

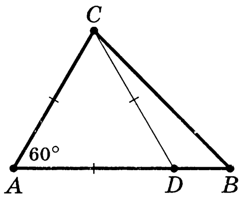


Рис. 73

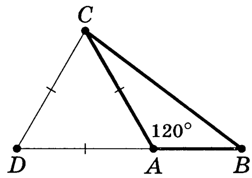


Рис. 74

Д74. На продолжении стороны AB за точку A отметим точку D так, что $AD = AC$ (см. рис. 74). Тогда треугольник CAD равнобедренный с углом $60°$, поэтому он является равносторонним. Так как $BD = AB + AD = AB + AC$, $CD = AC$, то BCD — искомый треугольник.

Д75. Ответ: $AP : PD = 3 : 1$.

Пусть K — середина AB. Из условия задачи и симметрии относительно AD следует, что $PK = PF = PB$ (см. рис. 75а, б). Значит, треугольник BPK равнобедренный. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Из того, что треугольник BPK равнобедренный, следует, что $\angle PBK = \angle PKB$ (см. рис. 75а). Пусть O — середина AD (*центр правильного шестиугольника*), тогда треугольник AOB равносторонний, значит, $\angle ABO = \angle BAO = 60°$. На отрезке AO отметим такую точку M, что $AM = AK$, тогда треугольник AMK равносторонний.

Рассматривая треугольники KMP и POB, получаем, что $KP = PB$, $\angle KMP = 120° = \angle POB$, $\angle KPM = \angle BKP - \angle BAP = \angle KBP - 60° = \angle PBO$. Тогда третьи углы этих треугольников также равны, то есть $\Delta KMP = \Delta POB$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Следовательно, $MP = OB = OD = \frac{1}{2}AB$. Учитывая, что $AM = AK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}AD$, получим $AP = AM + MP = \frac{3}{4}AD$, откуда $AP : PD = 3 : 1$.

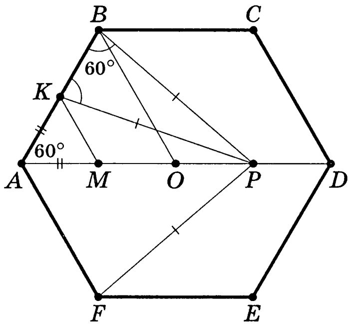


Рис. 75а

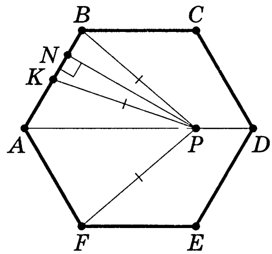


Рис. 75б

Второй способ. Проведём высоту PN треугольника BPK, которая является и его медианой (см. рис. 75б). В треугольнике APN угол PAN равен $60°$, тогда $\angle APN = 30°$. Следовательно, $AP = 2AN = \frac{3}{2}AB = \frac{3}{4}AD$. Значит, $AP : PD = 3 : 1$.

► Отметим также, что P является точкой пересечения прямых AD и CE. ◄

Д76. Ответ: 5 и 4.

Обозначим длины искомых сторон через x и y. Продлим стороны 1, 3 и 4 до их попарного пересечения в точках A, B и C (см. рис. 76). Образовавшиеся треугольники со сторонами x, y и 2 равносторонние, так как в каждом из них углы, прилежащие к указанным сторонам, равны по $60°$. Следовательно, и углы A, B и C треугольника ABC также равны по $60°$, то есть и этот треугольник равносторонний.

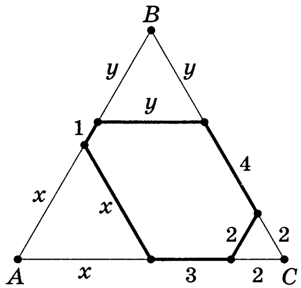


Рис. 76

Таким образом, $x + 1 + y = y + 4 + 2 = x + 3 + 2$, откуда $x = 5$, $y = 4$.

Д77. Ответ: $60°$.

Пусть P — точка пересечения прямых AD и BE (см. рис. 77). Заметим, что треугольники ACD и BCE равны (по двум сторонам и углу между ними), откуда следует, что $\angle CAD = \angle CBE$. Значит, искомый $\angle APB$ равен

$$180° - (\angle PAB + \angle PBA) = 180° - (\angle CAB + \angle CBA) = 60°.$$

► Из доказанного равенства треугольников следует также, что $AD = BE$.

Отметим также, что треугольник BCE может быть получен из треугольника ACD поворотом с центром C на угол $60°$ по часовой стрелке. ◄

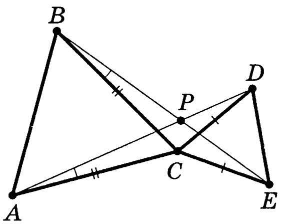


Рис. 77

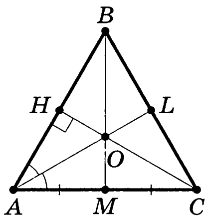


Рис. 78

Д78. Пусть O — точка пересечения указанных отрезков (см. рис. 78). В прямоугольном треугольнике AHC угол ACH равен $30°$, поэтому $AC = 2AH$, а так как M — середина AC, то $AM = 0{,}5AC = AH$. Значит, треугольник AMO равен прямоугольному треугольнику AHO (по двум сторонам и углу между ними). Тогда $\angle AMO = 90°$, то есть медиана BM является и высотой треугольника ABC. Следовательно, $AB = BC$. Таким образом, ABC — равнобедренный треугольник с углом $60°$, значит, он является равносторонним.

Д79. Рассмотрим треугольники CAD и CBE. Из того, что $CA = CB$, $CD = CE$ и $\angle ACD = \angle BCE$ (они дополняют угол BCD до $60°$, см. рис. 79) следует, что эти треугольники равны, а тогда $\angle CBE = \angle DAC = 60° = \angle ACB$. Таким образом, равны накрест лежащие углы для прямых BE и AC и секущей BC, поэтому $BE \parallel AC$.

▶ Треугольник CBE может быть получен из треугольника CAD поворотом с центром C против часовой стрелки. ◀

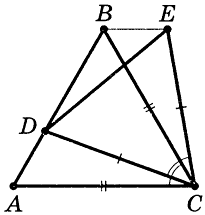


Рис. 79

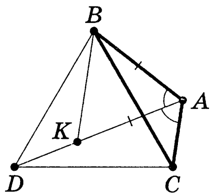


Рис. 80

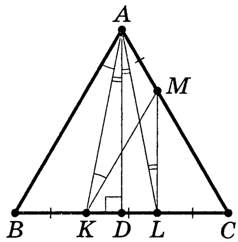


Рис. 81

Д80. Ответ: три угла по 60°.

Отложим на луче AD отрезок AK, равный AB (см. рис. 80). Тогда треугольник BAK равнобедренный с углом 60°, то есть равносторонний. Следовательно, $BK = BA$, $DK = AD - AK = AD - AB = CA$ и $\angle BKD = 180^\circ - \angle BKA = 120^\circ = \angle BAC$. Тогда $\Delta BKD = \Delta BAC$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $BD = BC$ и $\angle DBC = \angle DBK + \angle CBK = \angle CBA + \angle CBK = 60^\circ$. Таким образом, треугольник BDC равнобедренный с углом 60°, то есть равносторонний.

▶ Возможны и другие способы решения, использующие различные дополнительные построения. Все эти способы так или иначе связаны с идеей поворота на плоскости вокруг некоторой точки. В данном случае треугольник BAC получается из треугольника BKD поворотом с центром B на угол 60° против часовой стрелки.

По сути, утверждение этой задачи является обратным к так называемой теореме Помпею, которую в этих обозначениях можно сформулировать так: «Около равностороннего треугольника BDC описана окружность. На дуге BC, не содержащей точки D, отмечена точка A. Тогда $AD = AB + AC$». ◀

Д81. Ответ: 30°.

Заметим, что треугольник MKC также равносторонний, так как $CM = \frac{2}{3}CA = \frac{2}{3}CB = CK$ и $\angle MCK = 60^\circ$ (см. рис. 81). Следовательно, $MK \parallel AB$, поэтому $\angle AKM = \angle KAB$.

Кроме того, точка L — середина отрезка KC, значит, медиана ML треугольника MKC является и его высотой. Проведём высоту AD треугольника ABC, тогда $ML \parallel AD$, поэтому $\angle ALM = \angle LAD$. Из условия задачи следует, что точка D — середина KL, значит, треугольник KAL равнобедренный с основанием KL, следовательно, его высота AD является и биссектрисой, то есть $\angle LAD = \angle KAD$.

Таким образом,

$$\angle AKM + \angle ALM = \angle KAB + \angle KAD = \angle BAD = 30^\circ,$$

так как AD — биссектриса треугольника ABC.

Д82. Так как треугольник ABC равнобедренный, то BB_0 — серединный перпендикуляр к его основанию AC (см. рис. 82). Значит, B_1 лежит на этом перпендикуляре и $CB_0 \perp BB_1$. Таким образом, CB_0 — высота и медиана треугольника BCB_1, откуда $BC = B_1C$. Кроме того, $\angle B_1BC = 60^\circ$, значит, треугольник B_1BC равносторонний.

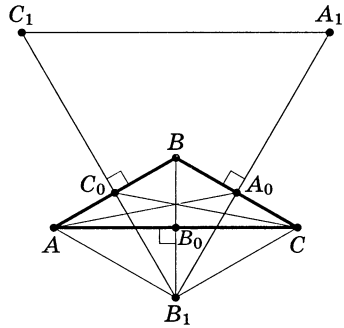


Рис. 82

Точка A_0 — середина стороны BC этого треугольника, поэтому она же является основанием его высоты. Следовательно, точки A_1 и B_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку BC. Аналогично точки C_1 и B_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Значит, $\angle A_1B_1B = \angle C_1B_1B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, то есть $\angle A_1B_1C_1 = 60^\circ$. Так как $AA_0 = CC_0$, то $A_0A_1 = C_0C_1$. Учитывая также, что $B_1C_0 = B_1A_0$ (это следует, например, из равенства треугольников A_0BB_1 и C_0BB_1 по двум сторонам и углу между ними), получим, что треугольник $A_1B_1C_1$ равнобедренный с углом $60°$, то есть равносторонний.

► Равенство сторон B_1A_1 и B_1C_1 можно также обосновать симметрией относительно прямой BB_1. ◄

Д83. Выберем на луче BC такие точки X и P', что $BX = BP$, $BP' = BP + BQ$ (см. рис. 83). Тогда треугольник BPX равнобедренный с углом $60°$, то есть равносторонний, и $PX = BP$, $\angle PXP' = 120°$. Значит, треугольники PBQ и PXP' равны (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $PP' = PQ$ и $\angle PP'B = \angle PQB$.

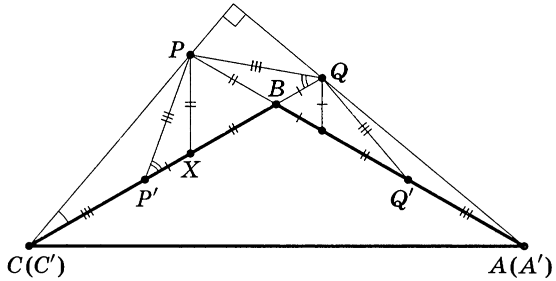


Рис. 83

Аналогично, выбрав на луче BA точку Q' так, что $BQ' = BP + BQ$, получим, что $QQ' = QP$ и $\angle QQ'B = \angle QPB$. Отложим теперь на лучах BP' и BQ' за точки P' и Q' отрезки $P'C' = Q'A' = PQ$. Тогда $BA' = BQ' + Q'A' = BP + BQ + PQ = BP' + P'C' = BC'$. Треугольники $QQ'A'$ и $PP'C'$ равнобедренные, поэтому

$$\angle Q'A'Q + \angle P'C'P = 0{,}5(\angle QQ'B + \angle PP'B) = 0{,}5(\angle BPQ + \angle BQP) = 30°.$$

Значит, угол между прямыми QA' и PC' равен

$$180° - (\angle Q'A'Q + \angle P'C'P + \angle BA'C' + \angle BC'A') = 90°.$$

Но если $BA' = BC' < BA$, то этот угол должен быть меньше $90°$, а если $BA' > BA$, то он должен быть больше $90°$. Значит, $A' \equiv A$, $C' \equiv C$, тогда $\angle PQB = \angle PP'B = 2\angle PCP' = 2\angle PCQ$.

Д84. Ответ: $150°$.

Из условия задачи следует, что $\angle BAP = \angle CAP = 15°$. На луче AB отметим точку D так, что $AD = AC$, тогда

$\angle ADC = \angle ACD = (180° - \angle CAD) : 2 = 75°$ (см. рис. 84). Так как $\angle ABC > \angle ADC$, то точка B лежит между A и D. Кроме того, треугольники DAP и CAP равны (по двум сторонам и углу между ними), значит, $PD = PC$.

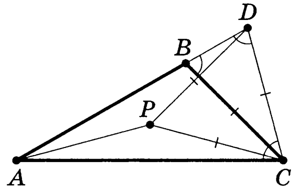


Рис. 84

Так как $\angle DBC = 180° - \angle ABC = 75° = \angle BDC$, то $DC = BC = PC$. Таким образом, треугольник PCD равносторонний, поэтому $\angle PCD = 60°$. Тогда $\angle PCA = 15° = \angle CAP$, значит, $\angle APC = 150°$.

► Отметим, что из приведённых рассуждений также следует, что треугольники APC и APD равнобедренные. Кроме того, они симметричны относительно прямой AP, поэтому точку D можно было определить как симметричную вершине C относительно AP. ◄

Д85. Ответ: а) да; б) нет.

а) Все треугольники со сторонами 3 и 4 и углом 15°, лежащим напротив большей из данных сторон, между собой равны. Следовательно, сторона AC однозначно определяется.

б) Заданный угол лежит напротив меньшей из данных сторон, поэтому существуют два неравных треугольника, удовлетворяющих условию. Следовательно, сторона AC однозначно не определяется.

► Полезно провести аналогию с задачей на построение треугольника по тем же элементам. ◄

Д86. Ответ: нет.

► Условие этой задачи похоже на условие примера 8.1, а это наводит на мысль, что и ответ должен быть таким же. Более того, контрпример, построенный при разборе указанной задачи (см. рис. 8.2), может служить и контрпримером в этой, так как в треугольниках ABC_1 и ABC_2 сторона AB

общая. Но, в отличие от примера 8.1, можно также построить контрпример, в котором один из треугольников тупоугольный, а другой остроугольный. Для построения используется та же идея, что и в указанном примере (см. рис. 86). ◄

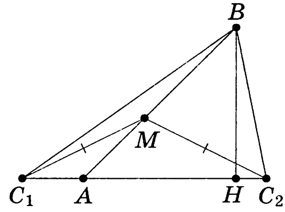


Рис. 86

Д87. Из условия задачи следует, что $BC = AB = AP$ и $\angle BCA = \angle BAC$ (см. рис. 87). Докажем равенство треугольников AQP и CPB, из которого и будет следовать, что $AQ = CP$. В этих треугольниках $AP = BC$ и $QP = PB$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Так как $\angle QAP = \angle PCB$, то либо треугольники AQP и CPB равны, либо $\angle AQP + \angle CPB = 180°$. Покажем, что второй случай невозможен. Действительно, $\angle AQP > 90°$, так как он является внешним углом при основании BQ равнобедренного треугольника BPQ, а $\angle CPB > 90°$, так как он является внешним углом при основании BP равнобедренного треугольника BAP. Таким образом, $\Delta AQP = \Delta CPB$, а значит, $AQ = CP$.

Второй способ. Заметим, что $\angle AQP = 180° - \angle BQP = 180° - \angle QBP = 180° - \angle BPA = \angle CPB$. Тогда $\angle APQ = 180° - (\angle AQP + \angle QAP) = 180° - (\angle CPB + \angle PCB) = \angle CBP$. Следовательно, треугольники AQP и CPB равны (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $AQ = CP$.

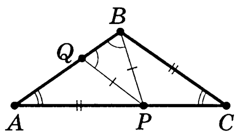


Рис. 87

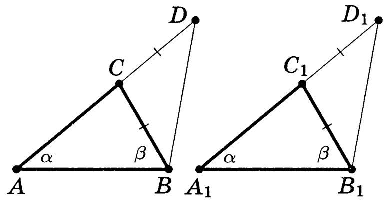


Рис. 88

Д88. Ответ: обязательно.

На продолжении стороны AC за точку C отметим точку D так, что $DC = BC$ (*спрямление!*). Аналогичное построение сделаем и в треугольнике $A_1B_1C_1$ (см. рис. 88). Тогда $AD = AC + CD = AC + CB = A_1C_1 + C_1B_1 = A_1C_1 + C_1D_1 = A_1D_1$.

Кроме того, $\angle BCD = \alpha + \beta = \angle B_1C_1D_1$, значит, $\angle ADB = 90° - 0{,}5(\alpha + \beta) = \angle A_1D_1B_1$.

Таким образом, треугольники ADB и $A_1D_1B_1$ равны (по стороне и прилежащим к ней углам), а значит, $AB = A_1B_1$. Следовательно, равны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Этот вывод можно сделать по любому из двух признаков равенства: по стороне и прилежащим к ней углам либо по двум сторонам и углу между ними.

Д89. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $\angle A = \angle A_1 = \alpha$, $\angle B = \angle B_1 = \beta$, и пусть периметр каждого из них равен P. На продолжении стороны AB отметим точки D и E так, что $AD = AC$ и $BE = BC$ (*спрямление*!). Аналогичное дополнительное построение сделаем для треугольника $A_1B_1C_1$ (см. рис. 89). Учитывая свойство углов при основании равнобедренного треугольника и теорему о внешнем угле треугольника, получим $\angle ACD = \angle ADC = \angle A_1D_1C_1 = \angle A_1C_1D_1 = 0{,}5\alpha$ и $\angle BCE = \angle BEC = \angle B_1E_1C_1 = \angle B_1C_1E_1 = 0{,}5\beta$. Кроме того, $DE = D_1E_1 = P$. Тогда $\Delta DCE = \Delta D_1C_1E_1$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам).

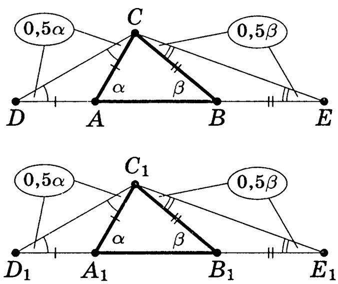


Рис. 89

Следовательно, $CD = C_1D_1$ и $CE = C_1E_1$. Тем самым получим две пары треугольников, равных по стороне и двум прилежащим к ней углам: $\Delta ADC = \Delta A_1C_1D_1$ и $\Delta BEC = \Delta B_1E_1C_1$. Поэтому $AD = AC = A_1C_1 = A_1D_1$ и $BE = BC = B_1C_1 = B_1E_1$. Заключительный вывод о равенстве треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ можно сделать либо по стороне и двум прилежащим к ней углам (из полученных равенств следует, что $AB = A_1B_1$), либо по двум сторонам и углу между ними ($\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$ по теореме о сумме углов треугольника), либо по трём сторонам.

► Полезно и в этом случае провести аналогию с задачей на построение треугольника по тем же элементам. Можно также вспомнить конструкцию, возникшую в задаче 3.6. ◄

Д90. Ответ: не существует.

Предположим, что такой треугольник существует. Заметим, что любая высота, любая биссектриса и любая медиана треугольника меньше хотя бы одной из сторон, между которыми она проведена. Действительно, один из углов, образуемых любым из этих отрезков со стороной, к которой он проведён, не острый, значит, этот отрезок меньше, чем сторона, лежащая напротив этого угла.

Следовательно, наибольшая сторона треугольника больше любой высоты, биссектрисы и медианы. Противоречие.

Д91. Ответ: 150°.

Пусть BM — высота и медиана треугольника ABC, которая пересекает прямую AK в точке O (см. рис. 91). Тогда треугольник AOC также равнобедренный, поэтому $\angle MOC = \angle MOA = 60^\circ$. Значит, $\angle BOC = 120^\circ = \angle KOC$. Следовательно, треугольники BOC и KOC равны (по четвёртому признаку равенства треугольников). Значит, $OB = OK$, а тогда $\angle OKB = \angle OBK = 30^\circ$, то есть $\angle AKB = 150^\circ$.

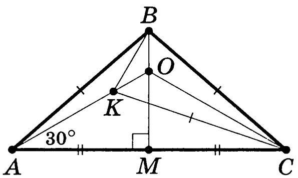


Рис. 91

► Отметим, что точка K обязана лежать между точками A и O. Действительно, в противном случае угол CKB оказался бы тупым, а это угол при основании равнобедренного треугольника. ◄

Д92. Ответ: не обязательно.

Построим равносторонние треугольники ABC и ABD с общей стороной AB. На луче, дополнительном к биссектрисе угла ABC, отметим точку E так, что $BE = AB$ (см. рис. 92). Проведём отрезки AE, CE и DE.

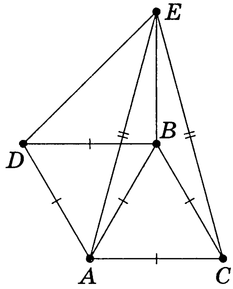


Рис. 92

Для четырёхугольников $DABE$ и $ACBE$ выполняется условие задачи: стороны DA и AB соответственно равны сторонам AC и CB, а сторона BE общая. Кроме того, $DB = AB$ и $AE = CE$ (в силу симметрии).

Докажем, что $DE \neq AE$. Пусть это не так, тогда треугольники DBE и ABE равны (по трём сторонам), откуда $\angle DBE = \angle ABE$, а это неверно.

Раздаточный материал

Занятие 1

1.1. В треугольнике ABC медиана BE перпендикулярна биссектрисе AD. Найдите длину AB, если $AC = 12$.

1.2. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = CE$. Докажите, что треугольник DBE является равнобедренным с основанием DE тогда и только тогда, когда треугольник ABC равнобедренный с основанием AC.

1.3. Внутри треугольника ABC отмечена точка M так, что луч BM делит пополам углы ABC и AMC. Докажите, что $BM \perp AC$.

1.4. Треугольники ABC и ADC равнобедренные с общим основанием AC. Их вершины B и D расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Докажите, что B, D и середина M стороны AC лежат на одной прямой.

1.5. На продолжении биссектрисы BL треугольника ABC отмечена точка M так, что $BM = BC$. Докажите, что если $BL = AB$, то $AM = CL$.

1.6. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка K и проведены биссектриса KE треугольника AKC и высота KH треугольника BKC. Оказалось, что угол EKH прямой. Найдите BC, если $HC = 5$.

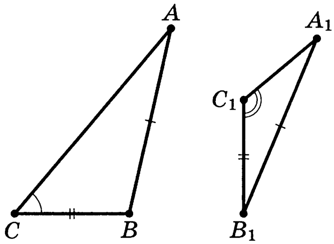
1.7. В остроугольном треугольнике ABC медиана AM равна высоте BH, причём равны углы MAB и HBA. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

1.8. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что $AB = CE$, $BE = AD$, $\angle AED = \angle BAD$. Докажите, что $BC > AD$.

Занятие 2

2.1. Вася вырезал из картона треугольник, разрезал его на два треугольника и послал обе части Пете, который также сложил из них треугольник. Обязательно ли Петин треугольник окажется равен Васиному?

2.2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $AB = A_1B_1$, $BC=B_1C_1$ и $\angle C+\angle C_1=180^\circ$ (см. рисунок). Докажите, что $\angle A=\angle A_1$.



2.3. Докажите, что если медиана треугольника совпала с его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.

2.4. В треугольнике ABC на стороне AC отмечены такие точки D и E, что $AD = DE = EC$. Может ли оказаться так, что $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$?

2.5. Две стороны и угол, лежащий напротив одной из них, в одном треугольнике соответственно равны двум сторонам и углу, лежащему напротив соответствующей стороны в другом треугольнике. Обязательно ли эти треугольники равны?

2.6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AD = BC$; $\angle ABD + \angle CDB = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

2.7. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL, причём $BL = AB$. На её продолжении за точку L отмечена точка K так, что $\angle BAK + \angle BAL = 180^\circ$. Докажите, что $BK = BC$.

2.8. Пусть K — середина стороны BC треугольника ABC. На лучах AB и AC отмечены точки X и Y соответственно так, что $AX = AY$ и точка K лежит на отрезке XY. Докажите, что $BX = CY$.

Занятие 3

3.1. Два угла треугольника равны 34° и 72°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины третьего угла треугольника.

3.2. Точки N и M — середины параллельных сторон AD и BC четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Докажите, что если MA — биссектриса угла BMN, то MD — биссектриса угла CMN.

3.3. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника образует с его боковой стороной угол 75°. Найдите углы треугольника.

3.4. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отметили точку E. На отрезке AE отложили отрезок $ED = BE$. Найдите угол DBC, если известно, что $\angle CBE = \angle DBA$.

3.5. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке E и образует равные углы с этой стороной и медианой BM. Найдите длину BM, если $BE = 4$, $CE = 3$.

3.6. Биссектрисы треугольника ABC, проведённые из вершин B и C, пересекаются в точке I. Через точку I проведены две прямые, которые параллельны прямым AB и AC и пересекаются с BC в точках D и E. Докажите, что периметр треугольника DIE равен отрезку BC.

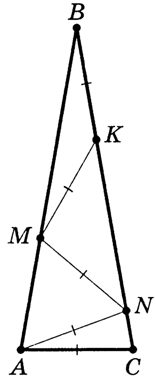
3.7. В треугольнике ABC угол A равен 60°. На лучах BA и CA отложены отрезки BX и CY, равные стороне BC. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения биссектрис треугольника ABC.

3.8. Внутри треугольника ABC отмечена точка P так, что сумма углов ABC и APC равна 180° и $CP = AB$. Докажите, что $\angle CAP < 60^\circ$.

Занятие 4

4.1. Точка D лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что $\angle ADC > \angle ABC$.

4.2. В треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD. CE — биссектриса треугольника ACD. Докажите, что $BC = BE$.



4.3. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки K, M и N так, что $BK = KM = MN = NA = AC$ (см. рисунок). Найдите угол ABC.

4.4. В треугольнике ABC угол A равен α. Биссектриса угла B и биссектриса внешнего угла C пересекаются в точке D. Найдите угол BDC.

4.5. В треугольнике ABC угол C в три раза больше угла A. На стороне AB отмечена такая точка D, что $BD = BC$. Найдите CD, если $AD = 4$.

4.6. Найдите сумму углов при вершинах самопересекающейся пятиконечной звезды.

4.7. Сторона BC треугольника ABC в два раза больше стороны AC. На стороне BC отмечена точка D так, что $\angle DAC = \angle DBA$. Биссектриса внешнего угла C пересекает луч AD в точке E. Докажите, что $AE = AB$.

4.8. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I, $\angle ABC = 120^\circ$. На продолжениях сторон AB и CB за точку B отмечены точки P и Q соответственно так, что $AP = CQ = AC$. Докажите, что угол PIQ прямой.

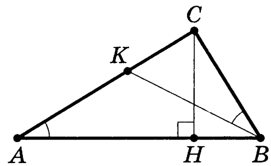
Занятие 5

5.1. Основание H высоты CH треугольника ABC соединили с серединами M и N сторон AC и BC. Докажите, что периметр четырёхугольника $CMHN$ равен сумме сторон AC и BC.

5.2. В треугольнике DEF проведена медиана DK. Найдите углы треугольника, если $\angle KDE = 70°$, $\angle DKF = 140°$.

5.3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведены высота CH, биссектриса CL и медиана CM. Докажите, что CL — биссектриса угла MCH.

5.4. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла. Из вершины B большего острого угла проведён отрезок BK так, что $\angle CBK = \angle CAB$ (см. рисунок). Докажите, что CH делит BK пополам.



5.5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Точки K, L и M — середины сторон AB, BC и CA соответственно. Докажите, что длина замкнутой ломаной $KB_1LC_1MA_1K$ равна периметру треугольника ABC.

5.6. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечена точка K так, что $CK = BC$. Отрезок CK пересекает биссектрису AL в её середине. Найдите углы треугольника ABC.

5.7. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена биссектриса BD. Перпендикуляр к BD, проведённый через точку D, пересекает BC в точке F. Найдите DC, если $BF = a$.

5.8. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, $AB = AD$, CA — биссектриса угла C, $\angle BAD = 140°$, $\angle BEA = 110°$. Найдите угол CDB.

Занятие 6

6.1. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°, а гипотенуза равна 8. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, проведённая из вершины прямого угла.

6.2. В равнобедренном треугольнике ABC угол B равен 30°, $AB = BC = 6$. Проведены высота CD треугольника ABC и высота DE треугольника BDC. Найдите BE.

6.3. В прямоугольном треугольнике ABC точка K — середина гипотенузы AB, а точка M делит катет AC в отношении $2 : 1$ (считая от вершины A). Найдите острые углы треугольника ABC, если отрезок MK перпендикулярен AB.

6.4. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1, один из острых углов равен 15°. Найдите гипотенузу.

6.5. Один из углов треугольника на 120° больше другого. Докажите, что биссектриса треугольника, проведённая из вершины третьего угла, вдвое длиннее, чем высота, проведённая из той же вершины.

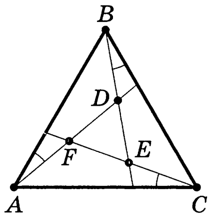
6.6. Прямые, содержащие высоты BP и CQ треугольника ABC, пересекаются в точке H. Какие значения может принимать угол ABC, если известно, что $BH = AC$?

6.7. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах AC и AB отметили точки K и L соответственно так, что прямая KL параллельна BC и $KL = KC$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\angle KMB = \angle BAC$. Докажите, что $KM = AL$.

6.8. В треугольнике ABC угол C прямой. Точки D и E расположены на гипотенузе AB так, что $BD = BC$ и $AE = AC$. Из точки D провели перпендикуляр DG на катет AC, а из точки E — перпендикуляр EF на катет BC. Докажите, что $DE = EF + DG$.

Занятие 7

7.1. Треугольник ABC равносторонний. Лучи AD, BE, CF попарно пересекаются внутри треугольника, причём равны углы BAD, CBE и ACF (см. рисунок). Докажите, что треугольник DEF также равносторонний.



7.2. На сторонах AB, BC и CA равностороннего треугольника ABC отмечены точки P, Q и R соответственно так, что $AP : PB = BQ : QC = CR : RA = 2 : 1$. Докажите, что треугольник PQR равносторонний, а его стороны перпендикулярны сторонам треугольника ABC.

7.3. Треугольник ABC равнобедренный, $\angle BAC = 120^\circ$. На продолжении стороны AC за вершину A отмечена точка D так, что $AD = 2AB$. Докажите, что треугольник BDC также равнобедренный.

7.4. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60°, AM и CN — его высоты, а Q — середина стороны AC. Докажите, что треугольник MNQ равносторонний.

7.5. Биссектриса AK треугольника ABC делит противоположную сторону на отрезки $BK = 2$ и $CK = 1$. Найдите длину AK, если $\angle AKC = 60^\circ$.

7.6. На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60^\circ$. Докажите, что $AC = BK$.

7.7. Через точку Y на стороне AB равностороннего треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке Z, а продолжение стороны CA за точку A — в точке X. Известно, что $XY = YZ$ и $AY = BZ$. Докажите, что прямые XZ и BC перпендикулярны.

7.8. Один из углов треугольника равен 60°, а лежащая против этого угла сторона равна трети периметра треугольника. Докажите, что данный треугольник равносторонний.

Занятие 8

8.1. У двух прямоугольных треугольников равны гипотенузы. Обязательно ли равны эти треугольники, если у них ещё равны проведённые к гипотенузам: а) медианы; б) высоты?

8.2. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC отмечена точка K так, что $\angle AKB = \angle BKC$. Докажите, что прямая BK проходит через середину стороны AC.

8.3. а) Две стороны и высота, проведённая к одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника, проведённой к соответствующей стороне. Обязательно ли эти треугольники равны?

б) Две стороны и высота, проведённая к третьей стороне, одного тупоугольного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне, другого тупоугольного треугольника. Обязательно ли эти треугольники равны?

8.4. а) На равных сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки E и D соответственно так, что $AD = BE$. Обязательно ли равны отрезки AE и BD?

б) В четырёхугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны соответствующие углы. Кроме того, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $BD = B_1D_1$. Обязательно ли равны эти четырёхугольники?

8.5. Две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого, а также равны разности противолежащих им углов. Обязательно ли эти треугольники равны?

8.6. На стороне BC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны AC за точку C — точка N, причём $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

8.7. В треугольнике ABC на сторонах AC и BC отмечены такие точки X и Y, что $\angle ABX = \angle YAC$, $\angle AYB = \angle BXC$, $XC = YB$. Найдите углы треугольника ABC.

Авторы задач

Большинство использованных в книжке задач давно и заслуженно стали математическим фольклором или восходят к нему. Эти задачи вошли во многие задачники, учебные пособия, книжки и статьи (см. список использованной литературы), поэтому их часто публикуют без указания авторов. Однако это не повод умалчивать об авторах в тех случаях, когда они известны (в случаях, когда автор не один, его соавторы указаны в скобках).

А. Акопян (Д. Швецов): Д83
Е. Бакаев: пример 6.2, 7.6, Д4, Д52, Д55, Д91
Ф. Бахарев: пример 2.2, 2.7, Д51
С. Берлов: 1.8, 6.7, 7.7, Д38
А. Блинков: 1.5, пример 8.1 (В. Смирнов), 8.2, 8.3б, Д65
И. Богданов: 5.6
Д. Боханов: Д92
М. Волчкевич: 7.8, Д24, Д53, Д75
Л. Емельянов: Д82
Р. Женодаров: пример 5.1, Д56
С. Иванов: Д39
Т. Казицына: 8.7
П. Кожевников: Д19
Д. Мухин: 4.8
А. Пешнин: 3.8
М. Пратусевич: Д18
В. Произволов: пример 7.2
Д. Прокопенко: 3.2
М. Раскин: Д27
В. Смирнов: пример 8.1 (А. Блинков), Д86
Б. Френкин: Д21, Д90
А. Хачатурян: Д62

А. Шаповалов: 1.6, пример 4.2
И. Шарыгин: Д28
Д. Швецов (А. Акопян): Д83
А. Шень: Д20
Д. Шноль: 8.4б

Литература и веб-ресурсы

1. *А.Д.Блинков*. Четвёртый признак равенства треугольников // Квантик. 2020. № 1. С. 18—21.

2. *М.А.Волчкевич*. Уроки геометрии в задачах (7—8 классы). — М.: МЦНМО, 2019.

3. *Р.К.Гордин*. Геометрия. Планиметрия. 7—9 классы. — М.: МЦНМО, 2004.

4. Задачи Математического праздника: `http://olympiads.mccme.ru/matprazdnik/prob.html`

5. Задачи Московской математической олимпиады: `http://olympiads.mccme.ru/mmo/books/index.htm`

6. Задачи Устной городской олимпиады для 7 классов: `http://olympiads.mccme.ru/ustn/`

7. Избранные задачи окружных олимпиад по математике в Москве / Сост. А. Д. Блинков. М.: МЦНМО, 2015.

8. Материалы турниров математических боёв имени А. П. Савина: `http://tursavin.ru/problems.html`

9. Московские математические регаты. Ч. 1, 2 / Сост. А. Д. Блинков, Е. С. Горская, В. М. Гуровиц. — М.: МЦНМО, 2014.

10. *В.В.Прасолов*. Решение задач повышенной сложности по геометрии. 7—9 классы. Учебное пособие. — М.: Просвещение, 2019.

11. Проект «Задачи»: `www.problems.ru`

12. *С.Е.Рукшин*. Математические соревнования в Ленинграде — Санкт-Петербурге (первые пятьдесят лет). — Ростов-на-Дону: издательский центр «МарТ», 2000.

13. *Д.В.Фомин*. Санкт-Петербургские математические олимпиады. — СПб.: Политехника, 1994.

Оглавление

В СЕРИИ «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ» ВЫШЛИ КНИГИ:

22. А. Д. Блинков. Геометрия для 7 класса, обычная и не очень

21. А. В. Шаповалов. Индукция без формальностей

20. И. В. Раскина, А. В. Шаповалов. Комбинаторика

19. А. И. Сгибнев. Геометрия на подвижных чертежах

18. А. Д. Блинков. Последовательности

17. Ю. А. Блинков, Е. С. Горская. Вписанные углы

16. К. А. Кноп. Азы теории чисел

15. А. Д. Блинков. Геометрия в негеометрических задачах

14. И. В. Раскина. Логика для всех: от пиратов до мудрецов

13. А. В. Шаповалов. Математические конструкции: от хижин к дворцам

12. А. Д. Блинков, В. М. Гуровиц. Непрерывность

11. И. В. Раскина, Д. Э. Шноль. Логические задачи

10. А. А. Заславский, Б. Р. Френкин, А. В. Шаповалов. Задачи о турнирах

9. А. В. Шаповалов. Как построить пример?

8. А. И. Сгибнев. Делимость и простые числа

7. А. Д. Блинков. Классические средние

6. Г. А. Мерзон, И. В. Ященко. Длина. Площадь. Объем

5. К. А. Кноп. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам

4. А. Д. Блинков, Ю. А. Блинков. Геометрические задачи на построение

3. П. В. Чулков. Арифметические задачи

2. В. М. Гуровиц, В. В. Ховрина. Графы

1. Л. Э. Медников. Чётность

ISBN 978-5-4439-1582-1

9 785443 915821 >