IP CENTRUL DE EXCELENȚĂ ÎN ECONOMIE ȘI FINANȚE

CATEDRA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

Itemi de exersare pentru examenul de Bacalaureat la matematică

Dedicatie

Pentru voi, elevii mei,

Cei care credeți că matematica are suflet și că în fiecare exercițiu se ascunde o mică victorie a minții.

Cartea aceasta este pentru munca voastră, pentru perseverență și pentru încrederea că orice problemă are o soluție.

Să vă însoțească în pregătirea pentru Bacalaureat, dar și dincolo de el — ca o dovadă că logica, răbdarea și pasiunea pot deschide drumuri frumoase.

Cu drag,

Cepoi-Golub Elena

Introducere

Prezenta culegere este concepută ca un instrument util de învățare și consolidare pentru elevii clasei a XII-a care se pregătesc să susțină examenul de Bacalaureat la disciplina Matematică. Lucrarea reunește o selecție de itemi din testele de Bacalaureat ți testele propuse pentru exersare din ultimii 15 ani, structurați conform cerințelor actuale ale examenului național.

Fiecare test de Bacalaureat cuprinde 14 itemi ce acoperă principalele domenii ale programei: algebră, analiză matematică și geometrie. În această culegere, exercițiile sunt grupate după modelul oficial al testului: pentru fiecare tip de exercițiu (de la 1 la 14) sunt propuse un număr mare de probleme similare, selectate cu atenție pentru a oferi elevilor o imagine completă asupra varietății de cerințe posibile.

Pentru a sprijini procesul de învățare activă, fiecare exercițiu este însoțit de răspunsul corect, iar în prima parte a lucrării sunt incluse formulele esențiale necesare rezolvării. Astfel, elevii pot verifica imediat corectitudinea soluțiilor și își pot consolida cunoștințele prin exersare constantă.

Lucrarea poate fi utilizată atât în activitatea individuală de pregătire pentru examen, cât și în cadrul orelor de recapitulare organizate de profesori. Prin conținutul său, volumul contribuie la dezvoltarea gândirii logice, a capacității de analiză și sinteză, precum și la formarea unei atitudini responsabile față de studiul matematicii.

Scopul acestei culegeri este de a transforma pregătirea pentru Bacalaureat într-un proces eficient, organizat și accesibil, oferind elevilor încredere în propriile competențe și șansa de a obține rezultate remarcabile.

Cuprins

I. Puteri. Radicali. Logaritmi.

Formulele de calcul prescurtat

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Pentru orice doua numere reale strict pozitive x și y se definesc mediile:

Media aritmetica: $m_a = \frac{x+y}{2}$;

Media geometrica: $m_g = \sqrt{x \cdot y}$;

§1 Puteri

Proprietățile puterilor

Pentru $\forall a, b \in R^*, \forall n, m \in R$

$a^0 = 1$	$0^n = 0, \quad n > 0$
$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^n : a^m = a^{n-m}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Calculați valoarea expresiei: $27^{-\frac{2}{3}} - \frac{10}{9}$.	-1
2	Să se calculeze $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2}$.	$\frac{5}{3}$
3	Calculați valoarea expresiei: $32^{\frac{3}{5}} - 8$	0
4	Calculați valoarea expresiei: $(0{,}4)^{-2} \cdot \left(\frac{125}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$.	1
5	Calculați valoarea expresiei $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + 8^{\frac{2}{3}}$.	2
6	Calculați valoarea expresiei $\left(\frac{14}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{-1{,}5}$.	8
7	Arătați că valoarea expresiei $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 2^{-3}$ este un număr natural.	$3 \in R$
8	Să se calculeze $a = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^{-2} + \frac{5}{8}$.	1
9	Calculați valoarea expresiei: $\left(-128 \cdot 0,125^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$.	-4
10	Calculați valoarea expresiei: $\left(25^{\frac{3}{2}} + (0{,}5)^{-2}\right) : \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.	43
11	Arătați că valoarea expresiei $81^{\frac{1}{4}} + (0{,}25)^{-2}$ este un număr natural.	$19 \in N$
12	Calculați valoarea expresiei: $0{,}027^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{10}\right)^{-2}$.	10
13	Calculați $216^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} - 5^{-1} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$.	5
14	Calculați $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (0{,}81)^{-0{,}5}$.	$\frac{112}{9}$

§2 Radicali

Proprietățile radicalilor

$\forall a, b \in R_+$, dacă n-par, $n \geq 2, n \in N^*$;

$\forall a, b \in R$, dacă n-impar, $n \geq 2, n \in N^*$

1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
2) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ b \neq 0$
3) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
4) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
5) $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, *dacă n-par*
6) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
7) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b \neq 0$
8) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $m \in Z$
9) $\sqrt{a^2} = |a|$
10) $\sqrt[n]{a^n} = a$, *dacă n-impar*

$$\sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = \begin{cases} a-b, dacă\ a \geq b \\ b-a, dacă\ a < b \end{cases}$$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Calculați $3 \cdot \sqrt{3} \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot \sqrt[4]{81}$.	0
2	Să se calculeze $\sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[4]{8}$.	4
3	Să se afle opusul numărului $a = \left(\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\right)^{-2}$.	-4
4	Calculați valoarea expresiei $\sqrt[3]{4 - 5 \cdot 32^{-0,6}}$.	$\frac{3}{2}$
5	Calculați $\sqrt{27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}$.	5
6	Să se calculeze $a = \left(\sqrt[3]{27}\right)^{-1} + \sqrt{\frac{4}{9}}$.	1
7	Calculați valoarea expresiei: $-\left[\sqrt[3]{\frac{8}{27}} - \sqrt[3]{\frac{125}{27}}\right]$.	1
8	Calculați valoarea expresiei: $a = \left(2\sqrt{5}\right)^2 - \sqrt[3]{125}$.	15
9	Calculați valoarea expresiei: $2^{-2} + \sqrt[3]{\frac{3}{64} - 2}$.	-1
10	Calculați valoarea expresiei: $\sqrt{9^{1,5} - 2}$.	5

11	Calculați valoarea expresiei: $\frac{\sqrt[3]{81}}{9^{\frac{1}{6}}}$.	3
12	Calculați valoarea expresiei: $\sqrt{\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} - \left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^{-2}}$.	1

§3 Logaritmi

Proprietățile logaritmilor

$\forall a, b, x, y \in R_+^*; n \in R^*, a \neq 1 \neq b$

$\log_a a = 1$	$\log_a 1 = 0$
$\log_{10} a = \lg a$	$\log_e a = \ln a$
$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$	$\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$
$\log_a b^n = n \log_a b$	$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
$a^{\log_a b} = b$	$\log_{a^n} b^n = \log_a b$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Calculați $2 \cdot lg5 + \frac{1}{2} \cdot lg16$.	2
2	Calculați valoarea expresiei $a = \log_2 0{,}04 + 2\log_2 5$.	0
3	Calculați $\sqrt[3]{81^{\log_9 6} - 7^{\log_7 9}}$.	3
4	Arătați că valoarea expresiei $9^{1+log_3 2}$ este un patrat perfect.	36
5	Calculați media aritmetică a numerelor $log_3 18$ și $log_9 \frac{1}{4}$.	1
6	Calculați valoarea expresiei $4^{log_2 3} - log_5 25$.	7
7	Calculați valoarea expresiei $2\, log_3 5 + log_{\frac{1}{3}} 75$.	-1

8	Calculați valoarea expresiei $a = 2^{\log_2 7+\log_3 \frac{1}{3}}$.	3,5
9	Calculați valoarea expresiei $E = \left(2\log_{25}\frac{8}{5} - \log_5 8 + 3\right)\cdot 6^{2\log_6 3}$.	18
10	Calculați $a = \left(7^{\log_5 75}\right)^{\log_7 5}$.	75
11	Calculați: $a = \log_2 3 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6}$.	-1
12	Calculați $3^{2\log_3 2} - 4$.	0
13	Calculați $e^{3\ln 2} - 9$.	-1
14	Calculați: $\log_{\sqrt{3}} 3 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$.	4
15	Calculați suma numerelor: $\log_5 50$ și $log_{\frac{1}{5}} 2$.	2
16	Calculați valoarea expresiei: $\log_3 36 - 2\log_3 2$.	2
17	Calculați valoarea expresiei: $\log_{\sqrt{2}} 4 - 4$.	0
18	Calculați: $\log_3 54 - \log_3 2 + \log_3 81$.	7
19	Aflați valoarea expresiei: $\log_3\left(5-\sqrt{7}\right) + \log_3\left(5+\sqrt{7}\right) - \log_3 2$.	2
20	Arătați că numărul $\frac{3\log_7 4+\log_7 0,5}{1-\log_7 14}$ este număr întreg.	-5
21	Calculați valoarea expresiei: $\left(4^{\log_2 3}\right)^{\frac{3}{2}} - \log_4 64$.	24
22	Calculați valoarea expresiei: $2\log_9 4 + \log_{\frac{1}{9}} 48$.	$-\frac{1}{2}$
23	Calculați valoarea expresiei: $2^{\log_2 7+\log_3 \frac{1}{9}}$.	$\frac{7}{4}$
24	Calculați valoarea expresiei: $9^{\log_3 7} - \log_4 64$.	46
25	Calculați valoarea expresiei: $\log_{12} 3 + \log_{12} 4 + 12^{\log_{144} 4} + \log_{\frac{1}{2}} 8$.	0
26	Calculați valoarea expresiei: $49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$.	12,5
27	Calculați valoarea expresiei: $7^{\log_{49} 3}\cdot 3^{-\frac{1}{2}}$.	1
28	Calculați valoarea expresiei: $\log_2 5 + 2\log_{\frac{1}{4}} 20 + 32^{\frac{1}{5}}$.	0
29	Calculați valoarea expresiei: $25^{\log_5 3\sqrt{5} - \log_5 \sqrt{3}}$.	15
30	Calculați valoarea expresiei: $\frac{1}{2}\lg 36 + \log_{0,1} 60$.	-1

31	Calculați valoarea expresiei: $\log_5^2 10 + \log_5 0,5 \cdot \log_5 50 + 3$.	4
32	Calculați valoarea expresiei: $\log_3 54 - \log_{\frac{1}{3}} 0,5$.	3
33	Calculați valoarea expresiei: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{4}{5} - \log_2 5$.	-2

Exerciții suplimentare

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Calculați: $a = \log_3 \frac{1}{3} + cos180°$.	-2
2	Calculați: $a = \sqrt[3]{27} : \log_2 8$.	1
3	Calculați: $a = \log_{\frac{3}{2}}\left(cos\frac{\pi}{3} + 2015^0\right) + \log_3 81$.	5
4	Calculați: $a = \log_2 \sqrt{8} - \sqrt{1,44}$.	0,3
5	Aflați valoarea expresiei $E = \log_2 8 + \sqrt[3]{27} - cos\pi$.	7
6	Arătați că valoarea expresiei $\sqrt{100^{1-\lg 2}}$ este un număr natural.	5
7	Calculați valoarea expresiei $25^{\frac{1}{\log_2 5}} - 64^{\frac{1}{6}}$.	2
8	Calculați $a = 81^{\frac{1}{4}} + 9^{1+log_3 2}$.	39
9	Calculați valoarea expresiei $a = -12 \cdot 81^{\frac{1}{4}} + \log_2 16$.	-32
10	Calculați: $\log_4 8 - 2\,cos\frac{\pi}{4}$.	$\frac{3}{2} - \sqrt{2}$
11	Calculați: $\sqrt{\left(1-\sqrt{8}\right)^2} + \log_3 9$.	$2\sqrt{2} + 1$
12	Calculați: $\log_3 36 - \log_3 4 - \sqrt[4]{(-3)^4}$.	-1
13	Calculați: $\log_2 \frac{1}{8} + \sqrt[3]{-8}$.	-5
14	Calculați: $a = \sqrt[3]{1000} - 3 \cdot \log_5 125$.	1
15	Calculați $a = \sqrt{64} + 2^{2\log_2 5 + \log_{\frac{1}{2}} 9}$.	$\frac{97}{9}$
16	Calculați$a = \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right) - \log_2 \sqrt[3]{64}$.	0
17	Calculați valoarea expresiei: $\log_{81} 27 + 4^{-1}$.	1
18	Calculați valoarea expresiei: $1,5 + \log_2 \sqrt{8}$.	3
19	Să se afle valoarea expresiei: $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_3\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) - \log_3\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]$.	1

20	Aflați 25% din numărul $\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 \frac{3}{4}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}$.	$\frac{1}{3}$
21	Calculați valoarea expresiei: $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$.	20
22	Calculați valoarea expresiei: $3^{\log_{27} 8} - \sqrt[3]{0{,}027}$.	1,7
23	Arătați că valoarea expresiei $\sqrt[3]{16^{\frac{3}{4}} + 9^{\log_3 \sqrt{19}}}$ este un număr natural.	$3 \in R$
24	Arătați că valoarea expresiei $\left[7^{\log_{49} 25} + \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}\right]^{\frac{2}{3}}$ este un număr natural pătrat perfect.	2^2
25	Calculați valoarea expresiei: $36^{\frac{1}{\log_5 6}} - 32^{\frac{2}{5}}$.	21
26	Să se afle media aritmetică a numerelor $a = \sqrt{81} + \sqrt[3]{-64} + 16^{\frac{3}{4}}$ și $b = \log_3 27 - \sqrt{6\frac{1}{4}} + 3^{\log_3 \frac{1}{2}}$.	7
27	Calculați valoarea expresiei: $\log_2\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.	11
28	Arătați că valoarea expresiei $2^{\log_8 27} + \log_{\frac{1}{5}} 25 - \sqrt[3]{125}$ este un număr întreg.	-4
29	Calculați valoarea expresiei: $\frac{4}{5} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\right]^{\log_{65} 5}$.	4
30	Calculați valoarea expresiei: $81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} - 25^{\log_{125} 8} + 100^{\lg 5}$.	$21\frac{3}{4}$
31	Să se compare $a = \log_{\frac{3}{2}}\left(cos\frac{\pi}{3} + 2015^0\right)$ *și* $b = \log_3 \pi$.	<
32	Comparați numerele $a = (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ *și* $b = \log_2 \sqrt[3]{64}$.	=
33	Comparați numerele $\log_3 36 - \log_3 4$ *și* $\sqrt[4]{(-3)^4}$.	<
34	Calculați valoarea expresiei $2^{\log_4(\sqrt{3}-2)^2} + 3^{\log_9(\sqrt{3}+2)^2}$.	4
35	Comparați numerele $a = 5^{2\, log_5 \sqrt{\pi}}, b = \sqrt[4]{81}$.	>

II. Polinoame

Fie polinomul $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$,

$$n \in N,\ a_n \in R, \qquad a_n \neq 0$$

- Dacă $P(\alpha) = 0$, atunci $\boldsymbol{\alpha}$ este rădăcină a polinomului.
- Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X) = x - \alpha$ este egal cu $P(\alpha)$.
- Polinomul $P(X)$ este divizibil cu polinomul $Q(X) = x - \alpha$, dacă și numai dacă $P(\alpha) = 0$.
- Numărul $\boldsymbol{\alpha}$ este rădăcină dublă pentru polinomul $P(X)$, dacă și numai dacă $\begin{cases} P(\alpha) = 0 \\ P'(\alpha) = 0 \\ P''(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Determinați restul împărțirii polinomului $\mathrm{P}(X) = 2X^3 + X^2 - 5X + 1$ la binomul $X - 2$.	11
2	Determinați valorile reale ale lui a, pentru care $X = -1$ este rădăcină a polinomului $\mathrm{P}(X) = X^3 - X^2 + (a-2)X + 1$.	1
3	Determinați restul împărțirii polinomului $\mathrm{P}(X) = X^3 - 2X^2 + 16$ la polinomul $Q(x) = X^2 - 1$.	$X + 14$
4	Fie polinomul $\mathrm{P}(X) = X^3 - 4X^2 - aX - 4$. Determinați valorile reale ale lui a, pentru care polinomul $\mathrm{P}(X)$ este divizibil prin $Q(X) = X - 1$.	-7
5	Fie polinomul $\mathrm{P}(X) = X^3 + X^2 + aX - 2$, unde $a \in R$. Știind că polinomul $\mathrm{P}(X)$ se divide cu $X - 2$, să se afle restul împărțirii lui $\mathrm{P}(X)$ la binomul $Q(X) = X + 3$.	-5
6	Fie polinomul $P(X) = X^3 - 3mX^2 - X + 3, m \in R$. Știind că X= -1 este rădăcină a polinomului $P(X)$, să se afle celelalte rădăcini ale polinomului.	$\{-1,1,3\}$
7	Fie polinomul $P(X) = 2X^3 - X^2 + bX + 6$. Știind că $X = -2$ este rădăcină a polinomului $P(X)$, să se afle celelalte rădăcini ale polinomului.	$\left\{-2,1,\frac{3}{2}\right\}$

8	Să se afle valorile parametrilor reali a și b pentru care polinomul $P(X) = 2X^4 + 3X^3 - aX^2 + bX - 3$ se divide prin X-3, iar la împărțirea prin X-2 dă restul egal cu 5.	56,88
9	Să se determine parametrii reali a,b,c, astfel încât polinomul $P(X) = 2X^3 - 3cX^2 - aX + b$ înpărțit succesiv la X-1, X+1 X+2, dă respectiv resturile 0,1,2.	$\frac{5}{2}, -\frac{11}{3}, -\frac{25}{18}$
10	Determinați restul împărțirii polinomului $P(X) = 2X^3 + mX^2 + (m-1)X - 3$ la polinomul $Q(X) = X - 2$, știind că împărțit la $X - 1$ dă restul -1.	14
11	Determinați valorile reale a,b, pentru care $X = 2$ este rădăcină dublă a polinomului $P(X) = X^4 - 2X^3 + aX + b$.	$a = -8$ $b = 16$
12	Se consideră polinomul $P(X) = X^3 - 3X^2 + aX + b$, unde a,b,c parametrii reali. Știind că $X = -2$ este rădăcină a polinomului $P(X)$, iar restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X - 3$ este egal cu -10, să se afle restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X - 2$.	-8
13*	Polinomul $P(X)$ se divide cu $X + 1$, iar prin împărțirea la $X^2 - 3X$ dă restul $7X - 1$. Să se afle restul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $Q(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$.	$R(X) = 2X^2 + X - 1$
14	Fie polinomul $P(X) = 2X^3 + aX^2 + bX - 6$, unde $a, b \in R$. Știind că $X = -1$ și $X = 2$ sunt rădăcini ale polinomului $P(X)$, aflați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X) = X - 3$.	36
15	Se consideră polinomul $P(X) = 3X^4 + (m-1)X^3 + 2X^2 - 5$. Dacă restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X) = X + 1$ este agal cu 7, să se afle restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $R(X) = X - 2$.	-5
16	Fie polinomul $P(X) = X^3 + mX^2 - 4X + n$, unde $m, n \in R$. Știind că $X = -2$ este rădăcină a polinomului $P(X)$, iar restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X - 4$ este egal cu 12, descompuneți $P(X)$ în factori.	$P(x) = (x-3) \cdot (x-2) \cdot (x+2)$

III. Matrici și determinanți

Determinantul matricii $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ este numărul

$$det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Determinantul matricii $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ este numărul

$$det\, A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$;

Matricea A este **inversabilă,** dacă și numai dacă $det\, A \neq 0$.

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați determinantul matricei X, dacă X+2A=B.	-20
2	Fie matricea X, astfel încât $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} + 4X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați dacă matricea X este inversabilă.	1, da
3	Să se afle valorile lui $x \in R$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} -x & 3x & 0 \\ 2 & x & 5 \\ 2 & 2x & 1 \end{pmatrix}$ este inversabilă.	$R \setminus \left\{-\frac{8}{3}, 0\right\}$
4	Să se afle valorile lui $x \in R$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & x-1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 4 & 2+x & 2 \end{pmatrix}$ nu este inversabilă.	$\{-4,1; 2\}$

IV. Numere complexe

$i^2 = -1$

$z = a + bi,\ a, b \in R$ forma algebrică a număruli complex z.

$\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$

$\bar{z} = a - bi$, conjugata numărului complex $z = a + bi$.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, modulul numărului complex z.

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Arătați că produsul dintre partea reală și partea imaginară a numărului complex $z = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$ este un număr natural.	1
2	Determinați conjugata numărului complex $z = \frac{1}{i} + 3i^3 - 3$.	$-3 + 4i$
3	Fie $z = -2i - 3i^3(1 + i) + 3$. Detirminați conjugata numărului complex Z.	$-i$
4	Fie $z = 2(1 - 3i)^2$. Determinați modulul numărului complex z.	20
5	Arătați că $z = 3 + i + \frac{2}{1+i}$ este număr real.	4
6	Rezolvați în C ecuația $(2 + i)z = 5$.	$(2 - i)$
7	Scrieți în formă algebrică numărul complex $z = \frac{25}{(2-i)^2}$.	$3 + 4i$
8	Determinați partea imaginară a numărului complex $z = \frac{1+i}{1-i}$.	1
9	Să se determine numerele reale a și b pentru care $\frac{3-4i}{4+3i} = a + bi$.	$a = 0$, $b = -1$
10	Fie numărul complex $z = -3 + 2i$. Determinați produsul dintre partea reală și partea imaginară a numărului complex $w = z^2 + 3i - 1$.	-36
11	Fie $z = 2i^3 + (2 + i)^2 - 5$. Determinați suma dintre partea reală și partea imaginară a numărului complex z.	0
12	Fie numărul complex $z = 1 - 5i$. Arătați că $w = z + 2i\bar{z} + 3i$ este un număr real , unde $\bar{z}$ este conjugata lui z.	-9
13	Fie $z = \begin{vmatrix} 2 - i & 2 + 3i \\ i & 1 + 2i \end{vmatrix}$. Determinați numărul complex $\bar{z}$.	$7 - i$
14	Să se determine partea reală a numărului complex $z = \frac{8-9i}{-5+2i}$.	-2

15	Să se determine modulul numărului complex $z = (1+i)(-1+2i) + 3i$.	5
16	Să se afle partea reală a numărului complex $z = (3+i)(3-i) - (4+i)(5+3i)$.	-7
17	Fie numărul complex $z = -1 + 2i$. Determinați modulul numărului complex $w = 5iz + 2\bar{z}$, unde $\bar{z}$ este conjugata lui z.	15
18	Să se determine modulul numărului complex $z = \frac{12+9i}{3-4i}$.	3
19	Fie $\bar{z} = (1+i)(2+i) - 2 - 5i$, unde $\bar{z}$ este conjugata numărului complex z. Detirminați numărului complex z.	$-1+2i$
20	Fie matricea $A = \begin{pmatrix} iz & 2i-1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați numărul complex z, pentru care matricea A nu este inversabilă.	$6+3i$
21	Determinați numărul complex $z = a + bi, a, b \in R$ pentru care $3 + i\bar{z} = 2z$, unde $\bar{z}$ este conjugata lui z.	$2+i$
22	Determinați conjugata numărului complex z, pentru care $(1-2i)z = 5i$.	$-2-i$
23	Fie $z = 1 + i$. Arătați că $w = \frac{z}{\bar{z}} + i^5$ este un număr pur imaginar, iar $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z.	$2i$
24	Determinați numărul complex $z = a + bi, a, b \in R$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} z & 2 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}$ nu este inversabilă.	$1-i$
25	Să se determine modulul numărului complex $z = (2+2i)(2-2i) + 6i^3$.	10
26	Calculați determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 1+3i & -6 \\ i^3 & 1+3i \end{pmatrix}$.	-8
27	Determinați produsul dintre partea reală și partea imaginară a numărului complex $z = \frac{2-4i}{1+i}$.	3
28	Fie numărul complex $z = 2 - 3i$. Determinați valorile reale ale lui p, pentru care $z^2 + pz$ este număr real.	-4
29	Fie $z = \frac{5+3i}{1+i} - 2i$. Determinați modulul numărului complex z.	5
30	Fie $z = \frac{(3+i)^2}{2i}$. Determinați conjugata numărului complex z.	$3+4i$
31	Fie numărul complex z pentru care $\frac{z}{1+i} = \frac{1}{1-i}$. Arătați că numărul z este pur imaginar.	i

32	Fie $z=(1-i)i$. Determinați inversul numărului complex z.	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$
33	Fie expresia $E(z)=pz^2+p^2z+2-6i$. Determinați valorile reale ale lui *p*, pentru care $E(1+2i)$ este un număr real nenul.	-3
34	Fie $z=\begin{vmatrix}2-i & 2\\ i & 2+i\end{vmatrix}$. Determinați numărul complex $\bar{z}$.	$5+2i$
35	Rezolvați în C ecuația $(1+i)z=3-i$.	$1-2i$
36	Determinați numărul complex z, dacă $\bar{z}=(1+i)(2-i)+3i^5$, unde $\bar{z}$ este conjugatul numărului z.	$3-4i$
37	Determinați produsul dintre partea reală și partea imaginară a numărului complex $z=\frac{26}{3-2i}-6$.	0

Două numere complexe $z_1=a+bi,\quad z_2=c+di$, $a,b,c,d\in R$ sunt egale, adică $a+bi=c+di$ dacă $\begin{cases}a=c\\ b=d\end{cases}$.

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Să se determine numărul complex $z=x+yi$ din egalitatea $(3-2i)x+(1-3i)y=4+9i$.	$3-5i$
2	Determinați numărul complex $z=a+bi$, pentru care $(1+i)z=\bar{z}-2$, unde $\bar{z}$ este conjugata lui z.	$-4+2i$
3	Determinați numărul complex $z=a+bi, a,b\in R$ pentru care $\begin{vmatrix}2z+\bar{z} & i\\ 1-3i & 1\end{vmatrix}=i$, iar $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex *z*.	$1+2i$
4	Determinați numărul complex $z=a+bi, a,b\in R$, dacă se știe că $4z-3\bar{z}=1+7i$.	$1+i$
5	Se știe că $3\cdot\bar{z}+2z=10-3i$. Determinați $z\cdot\bar{z}$.	13
6	Să se afle numărul complex z care verifică egalitatea $z+2\cdot\bar{z}=3-i$.	$1+i$
7	Determinați valorile reale ale lui *x* și *y*, pentru care $\begin{vmatrix}x-yi & 2+i\\ 2x & i\end{vmatrix}=1+2i$.	x= -2, y = -7
8	Determinați numărul complex $z=a+bi, a,b\in R$ pentru care $\begin{vmatrix}2z+6i & \bar{z}\\ 3+i & 1\end{vmatrix}=0$.	$1-i$

9	Determinați numărul complex $z = a + bi, a, b \in R$ pentru care $\frac{2\bar{z}+4i}{z+1} = i$, unde $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z.	$-1 + 2i$
10	Determinați numărul complex $z = a + bi, a, b \in R$ pentru care $3 + i\bar{z} = 2z$, unde $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z.	$2 + i$
11	Determinați valorile reale ale lui a și b, pentru care $(1 + i)ai + (2 - 3i)b = 3 - 2i$.	$a = -5$, $b = -1$
12	Determinați valorile reale ale lui p și q, pentru care $2+i$, este soluție a ecuației $x^2 + px + q = 0$.	$p = -4$, $q = 5$
13	Determinați numerele complexe $z = x + yi$, $x, y \in R$, care verifică condițiile: $\|z\| = 3\sqrt{2}$ și $(1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 0$, unde $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z.	$\left\{\begin{matrix} -3 - 3i; \\ 3 + 3i \end{matrix}\right\}$

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Rezolvați în C ecuația $z^2 - (2 - i)z + 3 - i = 0$	$\{1 - 2i; 1 + i\}$
2	Fie $d = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. Rezolvați în C ecuația $z^2 + 2z + d = 0$	$\{-1 - i; -1 + i\}$
3	Rezolvați în C ecuația $(1 + i)z^2 - (4 + 2i)z + 4 = 0$	$\{2; 1 - i\}$
4	Rezolvați în C ecuația $z^2 - 2iz + 3 = 0$	$\{-i; 3i\}$
5	Rezolvați în C ecuația: $\|z\| - z = 1 + 3i$	$4 - 3i$
6	Rezolvați în C ecuația $(2 - i)z^2 - (3 + i)z - 2 + 6i = 0$	$\{2; -1 + i\}$
7	Determinați modulul numărului complex z, dacă $\|z\| - z = 1 + 3i$	5

V. Ecuații și inecuații

§1 Ecuații și inecuații raționale

a) Ecuații raționale

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

b) Inecuații raționale

1) $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0$; $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) < 0$

2) $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$; $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \leq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$

3) $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} P(x) \leq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \end{array} \right.$; $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P(x) \leq 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \end{array} \right.$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Să se rezolve în R inecuația $\frac{3-x}{x+3} \geq 2$	$(-3;-1]$
2	Să se rezolve în R inecuația $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-3} \geq 0$	(-2;3)$\cup$ $[13; +\infty)$
3	Să se rezolve în R inecuația $\frac{2}{x-1} < 1$	$(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$
4	Să se rezolve în R inecuația $\frac{1+x}{x} \geq 2$	$(0; 1]$
5	Fie $d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$. Să se rezolve în R inecuația $\frac{x+1}{x+d} \leq 0$	$[-1; 3)$
6	Să se rezolve în R inecuația $x \geq \frac{4}{x}$	$[-2; 0) \cup [2; +\infty)$
7	Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{x-1} & 9 \\ x & x^3(x-1) \end{pmatrix}$. Să se determine valorile reale ale lui x, pentru care matricea A este inversabilă.	$R \setminus \{-3; 0; 1: 3\}$
8	Să se rezolve în R inecuația $\frac{2}{x-1} \leq x$	$[-1; 1) \cup [2; +\infty)$

§2 Ecuații și inecuații iraționale

a) Ecuații iraționale

I. $\sqrt[2k]{f(x)} = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ f(x) = a^{2k} \end{cases}$;

dacă $a < 0$, ecuația nu are sens.

II. $\sqrt[2k]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^{2k}(x) \end{cases}$

III. $f(x) \cdot \sqrt[2k]{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right. \end{cases}$

b) Inecuații iraționale

I. $\sqrt[2k]{f(x)} > a \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ f(x) > a^{2k}\cdot \end{cases}$

II. $\sqrt[2k]{f(x)} > a \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$

III. $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$

IV. $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$

V. $f(x) \cdot \sqrt{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x)\ definit\breve{a} \end{cases} \end{array}\right.$

VI. $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2x \end{cases} \end{array}\right.$

VII. $\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2x \end{cases} \end{array}\right.$

VIII. $f(x) \cdot \sqrt{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x)\ definit\breve{a} \end{cases} \end{array}\right.$

IX. $f(x) \cdot \sqrt{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}$

X. $f(x) \cdot \sqrt{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Fie $D(x) = \begin{vmatrix} \sqrt{5x^2 - x} & x \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$. Să se rezolve în R ecuația D(x)=1.	$\frac{1}{4}$
2	Să se rezolve în R inecuația $\sqrt{1 + 3x^2} \leq 2x - 1$.	$[4; +\infty)$
3	Să se rezolve în R ecuația $\sqrt{-x^2 + 6} = \sqrt{5x + 10}$.	-1
4	Să se rezolve în R inecuația $\frac{1}{\sqrt{x}} \geq 1$.	$(0; 1]$
5	Să se rezolve în R ecuația $\sqrt{4 - x} \cdot (x^2 - 3x - 10) = 0$	-2 ; 4
6	Să se rezolve în R ecuația $\sqrt{3 - x} = 2x$.	$\frac{3}{4}$
7	Fie $D(x) = \begin{vmatrix} \sqrt{x} - 1 & 3 \\ 1 - \sqrt{x} & 2 \end{vmatrix}$. Să se rezolve în R inecuația $D(x) < 5$.	[0;4)
8	Să se rezolve în R inecuația $\frac{\sqrt{17 - 15x - 2x^2}}{x + 3} > 0$.	$(-3; 1)$
9	Să se rezolve în R ecuația $\frac{\sqrt{x^2 - 3} - 1}{x + 2} = 0$.	2
10	Să se rezolve în R inecuația $\sqrt{3 - 2x} > \sqrt{x}$.	$[0; 1)$
11	Fie $d = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$. Să se rezolve în R inecuația $\sqrt[3]{x^2 - d} = -2$.	-2; 2
12	Să se rezolve în R ecuația $\sqrt{-x} \cdot \sqrt{3 - x} = 0$.	0
13	Să se rezolve în R ecuația $\sqrt{4x + 12} = x$.	6
14	Să se rezolve în R ecuația $\sqrt{2x + 3} = x$.	3
15	Să se rezolve în R ecuația $\sqrt{x} = x - 2$.	4
16	Să se rezolve în R inecuația $\sqrt{x^2 - 8x} < 3$.	$(-1; 0] \cup [8; 9)$
17	Să se rezolve în R ecuația $\sqrt{x + 2} - x = 0$.	2
18	Să se rezolve în R ecuația $\sqrt{3 + \sqrt{5 - x}} = \sqrt{x}$.	4

19	Să se rezolve în R inecuația $\sqrt{x^2+3x}<2$.	$(-4;-3]\cup[0;1)$
20	Să se rezolve în R ecuația $\sqrt{10-x}=4-x$.	1
21	Să se rezolve în R inecuația $\sqrt{2+x}\geq x$.	$[-2;2]$
22	Să se rezolve în R ecuația $\sqrt{4-x}=x-2$.	3
23	Să se rezolve în R inecuația $\sqrt{1-x}<\sqrt{2x+4}$.	$(-1;1]$
24	Rezolvați în R ecuația $\sqrt{x^2-3x-1}=\sqrt{x-1}$.	4
25	Fie $d=\begin{vmatrix}-1 & -2 & -1\\ 2 & 2 & 1\\ 5 & 4 & 3\end{vmatrix}$. Să se rezolve în R inecuația $\sqrt{x-2}\leq d$.	[2;6)
26	Să se rezolve în R ecuația $\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-5x+12}=3$.	$-\frac{3}{5}$

§3 Ecuații și inecuații exponențiale

1) Ecuații exponențiale

$$a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x),\ a>0, a\neq 1$$

2) Inecuații exponențiale

a) $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>g(x)\\ a>1\end{cases}$

b) $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)<g(x)\\ 0<a<1\end{cases}$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Să se rezolve $\frac{x\cdot 2^x-8}{x-2}=4$.	0
2	Calculați $\left(\frac{1}{8}\right)^{0,5x-1}=4$.	$\frac{2}{3}$
3	Să se rezolve în R inecuația: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-\frac{1}{4}\geq 0$.	$(-\infty;5]$
4	Rezolvați în R ecuația $0,25^{x+3}\leq 8\cdot 2^x$.	$[-3\,;+\infty)$
5	Să se rezolve în R ecuația $25^{-x+2}\leq\frac{1}{5}$.	$\left[\frac{5}{2}\,;+\infty\right)$
6	Să se rezolve în R inecuația $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}-\sqrt{\left(\frac{27}{8}\right)^x}>0$.	$\left(-\infty;-\frac{6}{5}\right)$

7	Să se rezolve în R ecuația $\frac{9^x-27}{2x^2-3x}=0.$	$\emptyset$
8	Să se rezolve în R ecuația $4^{-3x-6}=2^{-x}\cdot 8.$	-3
9	Fie $D(x)=\begin{vmatrix}3^{x^2} & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}$. Să se rezolve în R inecuația $D(x)\le 0.$	$[-1;1]$
10	Să se rezolve în R inecuația $\frac{x^3-3x^2}{5-2^x}\ge 0.$	$\{0\}\cup(\log_2 5;3]$
11	Să se rezolve în R ecuația $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{8}{x}}}=\frac{9}{16}.$	$\{-1;4\}$
12	Să se rezolve în R inecuația $\left(\frac{9}{4}\right)^{-2x-1}\le\frac{3}{2}.$	$\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$
13	Să se rezolve în R inecuația $3^{\frac{1}{x}}\ge\frac{1}{9}.$	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup(0;+\infty)$
14	Să se rezolve în R ecuația $\sqrt[3]{27^{2-x}}=\frac{9}{\sqrt[5]{3}}.$	$\frac{1}{5}$
15	Să se rezolve în R inecuația $4^{3x^2+x}-8<2\cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}.$	$\left(-1;\frac{2}{3}\right)$
16	Fie $D(x)=\begin{vmatrix}2^{x-1} & 4\\ 8 & 4^x\end{vmatrix}$. Rezolvați în R ecuația $D(x)=0.$	2
17	Să se rezolve în R ecuația $5\cdot 25^{2x}=0{,}04$.	$-\frac{3}{4}$
18	Determinați valorile reale ale lui x, pentru care matricea $A=\begin{pmatrix}\sqrt{6-2^x} & 2\\ \sqrt{5} & \sqrt{6+2^x}\end{pmatrix}$ este inversabilă.	$(-\infty;2)\cup(2;\log_2 6)$
19	Să se rezolve în N ecuația $100^{-x+2}\ge 0{,}001.$	$\{0;1;2;3\}$
20	Să se rezolve în R inecuația $\left(\frac{64}{27}\right)^{x-4}\ge\left(\frac{9}{16}\right)^{6+x}.$	$[0;+\infty)$
21	Să se rezolve în R inecuația $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3x^2+10}\le\frac{25}{4}.$	$[-2;2]$
22	Rezolvați în R ecuația $\frac{x\cdot 3^{x-1}-81x}{x+3}=0.$	0;5
23	Să se afle suma soluțiilor reale ale ecuației $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-9}.$	$-\frac{1}{2}$
24	Să se rezolve în R inecuația $\left(\frac{1}{7}\right)^{x}\le 49^{x+3}.$	$[-2\,;+\infty)$

§4 Ecuații și inecuații logaritmice

a) Ecuații logaritmice

I. $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b,$ $DVA: \begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

II. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$, sau $\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

III. $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

sau

IV. $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

b) Inecuații logaritmice

I. dacă $a > 1$, atunci inecuația

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

II. dacă $0 < a < 1$, atunci inecuația

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array} \right.$$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Să se rezolve în R inecuația $\frac{log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{2x-x^2+8}} \geq 0$.	(1;2]
2	Fie $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ log_3 x & 1 \end{vmatrix}$. Să se rezolve în R inecuația $D(x) \geq 0$.	(0;3]
3	Să se rezolve în R inecuația $(2^x - 3) \cdot \log_2(x-1) \leq 0$	$[\log_2 3 ; 2]$
4	Să se rezolve în R inecuația $\log_2 x^2 \leq 2$.	$[-2; 2] \setminus \{0\}$
5	Să se rezolve în R inecuația $(x-3)\log_2^2(x-1) \geq 0$.	$\{2\} \cup [3; +\infty)$
6	Fie $D(x) = \begin{vmatrix} \lg(12-x) & 2 \\ \lg x & 1 \end{vmatrix}$. Rezolvați în R ecuația $D(x) = 0$.	3
7	Să se rezolve în R inecuația $\log_2(x-3) \leq 1$.	$(3; 5]$
8	Să se rezolve în R ecuația $\lg\frac{x-3}{\sqrt{23-2x}} = 0$.	$2 + 3\sqrt{2}$
9	Să se rezolve în R inecuația $\frac{\log_{x-1}^2(5-x)}{x^2-3x} \leq 0$.	$(1; 2) \cup (2; 3) \cup \{4\}$
10	Să se rezolve în R inecuația $\log_{x-3}\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1$.	$\left[\frac{7}{2}; 4\right)$
11	Să se rezolve în R inecuația $log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{x+2} \geq 0$.	$[-1;0) \cup (0; 2]$
12	Să se rezolve în R inecuația $log_{\frac{1}{2}}[log_3(1-x)] > -1$.	$(-8; 0)$
13	Să se rezolve în R inecuația $log_{\frac{1}{3}}(1+x) > 1$.	$\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$
14	Să se rezolve în R ecuația $log_2(x^2-4) = log_2 x + log_2 3$.	4
15	Fie $D(x) = \begin{vmatrix} log_2 x & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$. Să se rezolve în R inecuația $D(x) \leq 0$.	$\left(0; \frac{1}{2}\right]$
16	Să se rezolve în R ecuația $log_2(x-1) = log_2(x^2-3)$.	2
17	Să se rezolve în R inecuația $log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{x+2} \geq 0$.	$[-1;0) \cup (0;2]$
18	Să se rezolve în R inecuația $3\, log_8(3x+2) < 2$.	$\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$
19	Să se rezolve în R inecuația $lg\frac{1-2x}{x+3} \geq 0$.	$\left(-3; -\frac{2}{3}\right]$

20	Să se rezolve în R inecuația$log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq -1$.	$(2;4]$
21	Să se rezolve în R inecuația $log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3x-2}{x-1}\right) \geq log_{\frac{1}{2}}\frac{16}{x+2}$.	$\left(-2;\frac{2}{3}\right) \cup \{2\}$
22	Să se rezolve în R ecuația $log_x(4x-3) = 2$.	3
23	Să se rezolve în R inecuația $log_{\frac{1}{3}}(2-x) - 1 > 0$.	$\left[\frac{5}{3};2\right)$
24	Să se rezolve în R ecuația $\log_3^2\left(\frac{x^2}{9}\right) + \log_3(x^6) - 4 = 0$.	$\{-\sqrt{3};-1;1;\sqrt{3}\}$
25	Să se rezolve în R inecuația $\lg(3x) \leq \lg(4-x^2)$.	$(0;1]$
26	Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \log_2 m & 2\log_2 m - 1 \\ 2 & \log_2 2m \end{pmatrix}$. Să se determine valorile reale ale lui *m*, pentru care matricea A este inversabilă.	$(0;+\infty) \setminus \{2;4\}$
27	Să se rezolve în R inecuația $\log_{3-x} 0{,}25 \leq -2$.	[1;2)

§5 Ecuații și inecuații cu modul

a) $|x| = \begin{cases} x, dacă\ x \geq 0 \\ -x, dacă\ x < 0 \end{cases}$

b) $|f(x)| = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{array}\right.$

c) $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases}$

d) $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$

e) $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$

f) $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \leq -g(x) \end{array}\right.$

g) $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Să se rezolve în R inecuația $\frac{\lvert x^2-4\rvert}{\log_2 x} \leq 0$.	$(0;1) \cup \{2\}$
2	Să se rezolve în R inecuația $\lvert x\rvert \ln(x-2) - \frac{x^2-9}{\lvert x-1\rvert-2} < -3$.	$(2; 2+e) \setminus \{3\}$
3	Să se rezolve în R inecuația $\frac{\lvert x\rvert}{\log_{0,2}(2x+3)} \geq 0$.	$\left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup \{0\}$
4	Să se rezolve în R inecuația $\lvert x\rvert\, log_3(3-x) \leq 0$.	$\{0\} \cup [2;3)$
5	Rezolvați ecuația $log_7(3x+7) + \sqrt[4]{log_7^4(2x+5)} = 0$.	-2
6	Să se rezolve în R ecuația $\log_3^2(-x) - 2\log_3\left(\frac{x^2}{27}\right) - 6 = 0$.	-81;-1
7	Să se rezolve în R inecuația $\frac{\lvert 4-x^2\rvert}{4^x-2^{x+1}-8} \geq 0$.	$\{-2\} \cup (2; +\infty)$
8	Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4^{-\lvert x\rvert} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2^{-x^2} \end{pmatrix}$. Arătați că matricea A este inversabilă, oricare ar fi $x \in R$.	Nu admite soluții reale
9	Să se rezolve în R ecuația $\ln^2 x + 2\lvert\ln x\rvert - 3 = 0$	$\left\{\frac{1}{e}; e\right\}$
10	Să se rezolve în R inecuația $4^{\lvert x\rvert} - 5 \cdot 2^{\lvert x\rvert} + 4 \geq 0$.	$(-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [2; +\infty)$
11	Să se rezolve în R ecuația $log_{\frac{1}{2}}^2(4x) + log_2 \frac{x^2}{8} = 8$.	$\left\{\frac{1}{128}; 2\right\}$
12	Să se rezolve în Z inecuația $\left(\frac{1}{3}\right)^{\lvert x\rvert} < \left(\frac{1}{9}\right)^{\lvert x+2\rvert}$.	$\{-3; -2\}$
13	Să se rezolve în R inecuația $\log_{\frac{1}{3}}(4-x^2) > \log_{\frac{1}{3}}(6\lvert x\rvert - 3)$.	$(-2;-1) \cup (1;2)$
14	Să se rezolve în R inecuația $\frac{2\lg\lvert x+3\rvert - \lg 8}{\lg(x+1)} \leq 1$.	$(-1;0) \cup \{1\}$
15	Să se rezolve în R ecuația $4 - \lg\lvert x\rvert = 3\sqrt{\lg\lvert x\rvert}$.	$\{-10; 10\}$

VI. Trigonometria

§1 Elemente de trigonometrie

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$
3) $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x, cosx \neq 0$
4) $\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x, cosx \neq 0$
5) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
6) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
7) $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
8) $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
9) $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm tg\beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha tg\beta}$
10) $\sin a \pm \sin b = 2\sin\frac{a \pm b}{2}\cos\frac{a \mp b}{2}$
11) $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$
12) $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

1) $\sin(-x) = -\sin x$
2) $\cos(-x) = \cos x$
3) $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
4) $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Să se determine $tg\alpha$, dacă $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ și $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.	$-\frac{4}{3}$
2	Fie expresia $E(\alpha) = tg\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$. Calculați $E\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.	-4
3	Calculați valoarea expresiei $E(\alpha) = \frac{4}{5}tg\alpha + \frac{5}{12}sin\,2\,\alpha$, dacă $cos\,\alpha = -\frac{4}{5}$ și $\alpha \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$	1

4	Știind că $\cos x = -\frac{5}{13}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Determinați valoarea expresiei $E(x) = 26 \cdot \sin 2x + 25 \cdot tgx$.	$-\frac{1020}{13}$
5	Dacă se cunoaște că $\sin x = \frac{12}{13}, x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Determinați valorile expresiei $E(x) = 169\sin(2x) - 50\,\mathrm{tg}\,x$.	0
6	Calculați $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, dacă se cunoaște că $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ și $\alpha \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.	$\frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$
7	Fie $E(\alpha) = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{8}\right)$ este un număr natural.	1
8	Fie expresia $E(\alpha) = (\cos\alpha + 1)^2 + (\cos\alpha - 1)^2 - 3$. Arătați că valoarea expresiei $2\sqrt{3} \cdot E(15^0)$ este un număr natural.	3
9	Arătați că matricea $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2\sin^2\alpha & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2\cos^2\alpha & 4 \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice număr α.	6
10	Pentru $\alpha = \frac{\pi}{6}$, să se afle valoarea expresiei $$E = 2\sin^2 2\alpha + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2\cos^2 2\alpha$$	3
11	Să se aducă la o formă mai simplă expresia $$E = \frac{1}{1 + \sin\alpha} \cdot \left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$$	1
12	Fie $tg\alpha = 10$. Aflați valoarea expresiei $$E = \frac{\sin 2\alpha - \cos\alpha}{1 - \cos 2\alpha - \sin\alpha}$$	0,1
13	Aduceți la o formă mai simplă expresia $$E(x) = \frac{\sqrt{2}\cos(-x) - 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$$	$\sqrt{2}$
14	Arătați că pentru $x = \frac{\pi}{16}$ matricea $$A(x) = \begin{pmatrix} \cos^2 x & 1 & \cos x \\ 1 & \sin x & o \\ \sin^2 x & 1 & \cos x \end{pmatrix}$$ este inversabilă.	$\frac{\sqrt{2}}{8}$
15	Fie $D(\alpha) = \begin{vmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & sin\alpha + 4\cos\alpha \end{vmatrix}$. Arătați că valoarea expresiei $D\left(\frac{\pi}{12}\right)$ este un număr întreg.	-2

§2 Ecuații trigonometrice

1) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$
2) $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$
3) $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$
4) $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$

1) $\mathbf{\sin x = a}$; $\boldsymbol{a \in [-1; 1]}$

$x \in \{ (-1)^n \arcsin a + n\pi / n \in Z \}$

a) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n,\ \ n \in Z$

b) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z$

c) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z$

2) $\mathbf{\cos x = a}$; $\boldsymbol{a \in [-1; 1]}$

$x \in \{ \pm \arccos a + 2k\pi / k \in Z \}$

a) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in Z$

b) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi,\ k \in Z$

c) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi,\ n \in Z$

3) $\mathbf{tg\, x = a}$; $\boldsymbol{a \in R}$

$x \in \{ \operatorname{arctg} a + k\pi / k \in Z \}$

a) $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ \ k \in Z$

b) $\operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$

c) $\operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$

4) $\mathbf{ctg\, x = a}$; $\boldsymbol{a \in R}$

$x \in \{ \operatorname{arcctg} a + k\pi / k \in Z \}$

a) $ctgx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in Z$

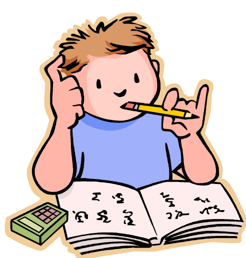
b) $\operatorname{ctg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$

c) $\operatorname{ctg} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Să se afle soluțiile ecuației $sin2x - 4cosx = 0$ care aparțin intervalului $[2\pi; 3\pi]$	$\frac{5\pi}{2}$
2	Rezolvați în R ecuația $2\,sin^2 x - 2\,sin\,x + tgx \cdot cos\,x - 1 = 0$	$(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$
3	Rezolvați pe intervalul $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ ecuația $2\cos x \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin(2x)tgx$	$\frac{3\pi}{4}$
4	Rezolvați în R ecuația $\frac{18\cos^2 x + 12\sin^2 x + 11\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{\pi x - x^2}} = 0$	$\frac{5\pi}{6}$
5	Determinați soluțiile reale ale ecuației $sin\,2\,x + cos\,x = 0$, pentru care $cos\,x > 0$	$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$
6	Să se rezolve în R ecuația $2\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{3}{2}\sin 2x$	$\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z\right\} \cup$ $\{arctg2 + n\pi, n \in Z\}$
7	Fie funcția $f: R \to R, f(x) = 2\,cos\,x - x.$ Determinați suma valorilor reale ale lui $x \in [\pi; 2\pi]$, pentru care $f'(x) = 0.$	3π
8	Rezolvați în R ecuația $\frac{sin\,x + cos\,x}{\sqrt{2x - x^2 + 3}} = 0$	$\left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$
9	Determinați soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{3}\,cos\,x - sin(2x) = 0$, pentru care $\lvert x\rvert < 2$	$x \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right\}$
10	Determinați valorile reale ale lui x, pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 2\,sin\,x & 1 \\ 1 & ctgx \end{pmatrix}$ este inversabilă.	$x \in R \setminus \left(\{\pi n, n \in Z\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z\right\}\right)$
11	Determinați valorile reale ale lui $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}; 2\pi\right)$, pentru care $sin\,\alpha - 2\int_0^{\alpha} cos\,2\,xdx = 0$	$\alpha \in \left\{\frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}\right\}$
12	Fie funcția $f: \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin^2 x.$ Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $f'(x) = 2\sqrt{3}f(x).$	$x \in \left\{0; \frac{\pi}{6}\right\}$
13	Să se rezolve în R ecuația $\frac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt{-x^2 - 4x}} = 0$	$s = \left\{-\pi; -\frac{\pi}{2}\right\}$

14	Determinați soluțiile reale ale ecuației $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = 0$, care aparțin segmentului $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.	$x \in \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$
15	Determinați numărul de soluții reale ale ecuației $\frac{13\cos\alpha+5}{5tg\alpha+12} = 0$, care aparțin intervalului $(-\pi; \pi)$.	O soluție
16	Rezolvați în R ecuația $\frac{2\cos^2 x+\cos x}{\sqrt{\sin x}} = 0$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in z\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, n \in z\right\}$
17	Fie expresia $E(x) = 2\sin(2x)\, tgx$. Determinați valorile reale ale lui x pentru care $E(x) \neq 1$.	$R \setminus (\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in z\right\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{6} + n\pi, n \in z\right\})$
18	Să se afle soluțiile ecuației $3 + 2\sin^2 x - 5\cos 4x = \frac{8}{1+\mathrm{tg}^2 x}$, care aparțin intervalului $[\pi; 2\pi]$.	$\left\{\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$
19	Să se rezolve în R ecuația $8\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin x - 4 = 0$	$\{2\,\mathrm{arctg}\, 2 + 2n\pi, n \in Z\}$ $\left\{-2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + 2k\pi, k \in Z\right\}$
20	Într-un triunghi, α este măsura în grade a unui unghi. Determinați α, dacă se cunoaște că $\cos(2\alpha) + \sin\alpha - 1 = 0$.	$\alpha \in \{30^0, 150^0\}$
21	Rezolvați în R ecuația $\frac{\sin x - \sin 3x}{\sqrt{4x-x^2}} = 0$	$\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \pi; \frac{5\pi}{4}\right\}$
22	Determinați valorile lui $\beta \epsilon \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, pentru care $tg(\alpha+\beta) = 2$ și $tg\alpha = -3$.	$\frac{3\pi}{4}$



VII. Binomul lui Newton

$$\forall\, m, n \in N, 0 \le m \le n;\ C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + \cdots. + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots.. + C_n^n b^n, m \in N, n \in N^*.$

Dacă n- impar, atunci are doi termeni de mijloc: $T_{\frac{n+1}{2}}$ și $T_{\frac{n+3}{2}}$

Dacă n- par, atunci are un termen de mijloc: $T_{\frac{n+2}{2}}$.

Suma coeficienților binomiali din dezvoltarea binomului la putere este egală cu 2^n: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + Cn_n = (1+1)^n = 2^n$.

Suma coeficienţilor binomiali situaţi pe locurile pare în dezvoltarea binomului este egală cu suma coeficienţilor binomiali situaţi pe locurile impare ale aceleiași dezvoltări și este egală cu 2^{n-1} :

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$$

Termenul general al dezvoltării:

$$\boldsymbol{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k},\ m, n \in N,\ k \in [0, n].$$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Determinați termenul care îl conține pe a^{10} în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^{25}$.	$2300a^{10}$
2	Determinați termenul de mijloc din dezvoltarea la putere a binomului $\left(x + \frac{1}{x^{1/5}}\right)^n$, dacă se cunoaște că diferența dintre coeficienții binomiali ai termenului al treilea și al doilea este egală cu 35.	$252x^4$
3	Suma coeficienților binomiali ai dezvoltării la putere a binomului $\left(x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ este egal cu 4096. Determinați termenul de mijloc al dezvoltării.	$924x^4$
4	În dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)^n$ suma coeficienților binomului de rang impar este egală cu 512. Determinați termenul care nu-l conține pe *x*.	45
5	Dezvoltarea la putere a binomului $\left(a\sqrt{a} - \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}\right)^n$ conține 9 termeni. Determinați termenul de mijloc al dezvoltării.	$70a^3$

6	Determinați termenul care nu-l conține pe x în dezvolta-rea la putere a binomului $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{10}$.	210
7	Să se determine $a>0$, știind că termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{12}$ este egală cu 1848.	4
8	Determinați termenul care îl conține pe x^5 în dezvoltarea la putere a binomului $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{n}$, știind că suma coeficienților binomului ai dezvoltării este egală cu 128.	$T_4=35x^5$
9	În dezvoltarea la putere a binomului $\left(a\sqrt[4]{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{n}$ suma coeficienților binomului de rang impar este egală cu 128. Determinați termenul care-l conține pe a^3.	$T_5=70a^3$
10	Să se determine termenul dezvoltării $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ care nu-l conține pe x.	210
11	În dezvoltarea $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{n}$ diferența dintre coeficientul binomial al termenului al treilea și coeficientul binomial al termenului al doilea este egal cu 170. Să se afle termenul care-l conține pe a^3.	$T_8 = C_{20}^{7}a^3$
12	Să se determine termenul al cincilea al dezvoltării $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^{n}$, unde $a>0$, știind că raportul coeficienților binomiali ai termenilor al patrulea și al treilea este egal cu $\frac{10}{3}$.	$T_5=55a^2$
13	În dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{n}$ raportul dinre coeficientul binomial al termenului al cincelea și coeficientul binomial al termenului al trilea este egal cu $\frac{7}{2}$. Să se afle termenul dezvoltării care-l conține pe x.	$T_4=84x$
14	Termenul din mijloc al dezvoltării $\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8}$ este egal cu 4480. Să se afle x, $x>0$.	2
15	Coeficientul binomial al temenului al treilea în dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{n}$ este cu 44 mai mare decât coeficientul binomial al termenului al doilea. Determinați numărul natual n.	11
16	Să se afle n din dezvoltarea $\left(\sqrt[30]{a^{-1}}+\sqrt[5]{a}\right)^{n}$, știind că termenul al șaselea al dezvoltării nu-l conține pe a.	35
17	Să se afle termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\frac{1}{x}-\sqrt[3]{x}\right)^{14}$.	$T_8 = -3432\frac{\sqrt[3]{x}}{x^5}$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Determinați numărul de termeni raționali în dezvoltarea la putere a binomului $(\sqrt{5}+\sqrt[3]{7})^{16}$	3
2	Coeficientul binomial al termenului al doilea din dezvoltarea la putere a binomului $\left(2^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2^{\frac{1}{5}}}\right)^{n}$ este agal cu 120. Determinați numărul de termeni raționali din dezvoltare.	9
3	Determinați numărul de termeni raționali în dezvoltarea la putere a binomului $(\sqrt{5}+\sqrt[3]{7})^{100}$.	17
4	Să se afle câți termeni raționali are dezvoltarea $(\sqrt[3]{5}+\sqrt{3})^{17}$.	3

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Determinați numărul natural n , astfel încât în dezvoltarea la putere a binomului $(\sqrt{2}+2\sqrt{3})^{n}$ raportul dintre termenul al treilea și termenul al doilea este egal cu $5\sqrt{6}$.	11
2	În dezvoltarea la putere a binomului $\left(2^{\frac{1}{2}}+4^{-\frac{1}{4}}\right)^{n}$ coeficientul binomial al termenului al treilea este egal cu 28. Determinați termenul cu cel mai mare coeficient binomial.	70
3	În dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt[3]{4}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{n}$ coeficientul binomial al termenului al treilea este de 6 ori mai mare decât coeficientul binomial al penultimului termen. Arătați că valoarea raportului $\frac{T_7}{T_8}$ este un număr întreg.	-2
4	În dezvoltarea la putere a binomului $\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{n}$ termenul al treilea este egal cu $33\sqrt[3]{2}$. Determinați suma coeficienților binomiali ai dezvoltării.	4096

IX. Probabilitatea

$\forall\, m, n \in N, 0 \leq m \leq n.\ C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},\quad A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},\quad P_m = m!,$

$P(A) = \frac{m}{n}$, unde numărul m- rezultate egal posibile favorabile, numărul n – rezultate egal posibile ale experimentului.

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Testul pentru un examen la matematică conține trei itemi de 5 puncte și trei itemi de 8 puncte. Ion a obținut punctaj maximal la trei itemi, iar la alții trei itemi nu a oținut nici un punct. Examenul este promovat dacă punctajul acumulat este mai mare sau egal decât 20. Determinați probabilitatea că Ion a pomovat examenul.	$\frac{1}{2}$
2	Într-un lot de 20 de computatoare, 4 sunt cu defect ascuns. Au fost cumpărate trei computere. Determinați probabilitatea că cel puțin două computere din cele cumpărate să fie fără defect.	$\frac{52}{57}$
3	Cu cifrele 1,2,3 se formează coduri de 6 simboluri. Determinați probabilitatea că un cod format la întâmplare va conține o cifră de 1, două de 2 și trei de 3.	$\frac{20}{243}$
4	Într-o urnă sunt 3 bile negre și câteva bile albe . Din urnă se extrag 2 bile . Probabilitatea că ambele bile extrase sunt negre este egală cu $\frac{1}{7}$. Determinați câte bile erau inițial în urnă.	7
5	Pentru participarea la un sondaj, dintr-o clasă de 25 de elevi, se iau la întâmplare 2 elevi. Probabilitatea că la sondaj vor participa două fete este egală cu $\frac{11}{50}$. Determinați numărul de fete din clasă.	12
6	Două urne conțin câte 4 bile albe și câte 5 bile negre. Din prima urnă se iau la întâmplare 3 bile și se pun în urna a doua. Determinați probabilitatea că în urna a doua bile albe nu vor fi mai puține decât bile negre.	$\frac{17}{42}$
7	La o tombolă sunt 30 de bilete, dintre care 3 câștigătoare. O persoană cumpără 4 bilete. Să se determine probabilitatea că cel puțin un bilet din cele cumpîrate este câștigător.	$\frac{73}{203}$
8	În urna A sunt 2 bile albe și 3 roșii, iar în urna B sunt 2 bile albe și 1 roșie. Din urna A se ia la întâmplare o bilă și se pune în urna B, apoi din urna B se extrage o bilă, determinați probabilitatea că din urna A și din urna B au fost extrase bile de diferite culori.	$\frac{2}{5}$
9	Într-o vază sunt trandafiri albi și trandafiri roșii. Numărul trandafirilor roșii este cu trei mai mare decât numărul trandafirilor albi. Se iau la întâmplare doi trandafiri. Probabilitatea ca tradafirii	7

	extrași să fie de culori diferite este egală cu $\frac{10}{21}$. Determinați numărul inițial de tandafiri din vază.	
10	La o loterie sînt puse în joc 100 de bilete, pentru care 10 bilete cu câștig a câte 200 de lei, 20 de bilete cu câștig a câte 100 de lei, restul biletelor fiind fără câștig. Determinați probabilitatea câștigului sumei totale de 200 de lei, dacă se cumpără 2 bilete.	$\frac{89}{495}$
11	Într-o urnă sunt 7 bile albe și 3 bile negre. Din urnă se extrag la întâmplare concomitent 4 bile. Determinați probabilitatea că printre bilele extrasesânt cel puțin 2 bile negre.	$\frac{1}{3}$
12	Într-un centru de tehnologii informaționale activează 4 programtori, 5 ingineri și 3 testeri. În luna iulie 8 angajați ai centrului, luați aleator, vor beneficia de concediu. Determinați probabilitatea că în luna iulie în centru va rămâne să activeze cel puțin câte un specialist la fiecare profil.	$\frac{6}{11}$
13	Într-o urnă sunt 4 bile roșii, 4 bile verzi și o bilă albă. Din urnă se extrag la întâmplare concomitent 3 bile. Determinați probabilitatea ca bilele extrase să fie de două culori diferite.	$\frac{5}{7}$
14	Dintr-o urnă ce conține 8 jetoane numerotate de la 1 la 8, s-au extras la întâmplare simultan 3 jetoane. Determinați probabilitatea ca suma numerelor de pe jetoanele extrase să fie mai mare decât suma numerelor de pe jetoanele rămase în urnă.	$\frac{1}{14}$
15	Colectivul de muncă al unei întreprinderi este format din 10 cupluri familiale. Pentru consiliul de administrație al întreprinderii sunt luate la întâmplare 2 persoane. Determinați probabilitatea că persoanele luate nu formează un cuplu familial.	$\frac{18}{19}$
16	Într-o urnă sunt 5 bile albe, 4 bile roșii și o bilă neagră. Din urnă se extrag la întâmplare concomitent 5 bile. Determinați probabilitatea că au fost extrase bile de toate trei culori.	$\frac{10}{21}$
17	Pentru ziua de 31 decembrie 2017 un magazin a anunțat comercializarea a 8 telivizoare la preț promoțional de 3000 de lei și 10 telefoane mobile la preț promoțional de 1500 de lei. Vânzătorul beneficiază de o primă , dacă volumul vânzărilor produselor promoționale depășește suma de 5000 de lei. Determinați probabilitatea că vânzătorul a obținut prima, dacă se cunoaște că el a vândut exact 3 unități de produse promoționale.	$\frac{29}{34}$
18	Într-o clasă cu 22 de elevi sunt două fete gemene. Clasa se împarte în douî subgrupe cu același număr de elevi. Determinați probabilitatea că gemenele vor nimeri în aceeași subgrupă.	$\frac{10}{21}$
19	Cinci scrisori sunt aruncate în mod aleator câte una la cinci cutii poștale. Determinați probabilitatea că doar trei dintre ele vor nimeri la destinație.	$\frac{1}{12}$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Se aruncă simultan 4 zaruri. Determinați probabilitatea că produsul numerelor de puncte apărute este egal cu 15.	$\frac{1}{108}$
2	Se consideră un număr de patru cifre .Să se determine probabilitatea că cifrele acestui număr sunt distincte.	0,504
3	Se aruncă un zar până la apariția feței cu 6 puncte de 2 ori consecutiv. Determinați probabilitatea că zarul se va arunca de 4 ori.	$\frac{5}{216}$
4	Cu cifrele 1,2,3,4,5,6 se formează la întâmplare un număr de patru cifre. Determinați probabilitatea că cifrele numărului format nu se repetă și primele trei cifre sunt impare.	$\frac{1}{72}$
5	Un zar este aruncat până la apariția feței cu 5 puncte. Determinați probabilitatea că zarul ba fi aruncat mai mult de o dată, dar mai puțin de 4 ori.	$\frac{55}{216}$
6	Determinați probabilitatea că un număr de 5 cifre , luat la întâmplare , are toate cifrele distincte și prima cifră impară.	$\frac{21}{125}$
7	Cu cifrele 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 se formează aleator un cod de 3 cifre care nu se repetă. Determinați probabilitatea că codul conține cifrele 0 și 1.	$\frac{1}{15}$
8	Cu cifrele 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 se formează coduri de 10 cifre care nu se repetă. Determinați probabilitatea că un cod format la întâmplare conține secvența 123.	$\frac{1}{90}$
9	Se ia la întâmplare un număr de 4 cifre. Determinați probabilitatea că acest număr conține doar cufre pare distincte.	$\frac{4}{375}$
10	Literele M,A,T,E,M,A,T,I,C,A sânt scrise câte una pe 10 fișe identice. Fișele se amestecă, apoi se extrag aleatoriu consecutiv patru fișe. Determinați probabilitatea că fișele extrase formează în ordinea extragerii cuvântului MAMA.	$\frac{1}{420}$
11	În ascensorul unei case cu șase etaje, la primul etaj au intrat patru persoane. Fiecare dintre ei poate ieși din ascensor aleatoriu la orice etaj, începând cu al doilea. Determinați probabilitatea că la etajul al patrulea vor ieși doar două persoane.	$\frac{96}{625}$
12	Pe un raft sunt arajate 8 manuale, printre care un manual de *matematică* și un manual de *chimie*. Determinați probabilitatea că manualul de *matematică* și manualul de *chimie* sânt situate alături.	$\frac{1}{4}$
13	Determinați probabilitatea că un număr natural de șase cifre, format aleator să fie divizibil prin 25.	$\frac{1}{25}$

14	Se aruncă o monetă de 5 ori. Determinați probabilitatea că stema va cădea exact de 2 ori.	$\frac{5}{16}$
15	Un zar se aruncă de 4 ori. Determinați probabilitatea că fața cu 6 puncte va apărea de 2 ori.	$\frac{25}{216}$
16	Se aruncă simultan 4 zaruri. Determinați probabilitatea că suma punctelor de pe fețele apărute va fi egală cu 5.	$\frac{1}{324}$
17	Cu literele *a, b,c,d,e,* calculatorul generează în mod aleator un cod din cinci simboluri, astfel încât fiecare literă se conține o singură dată. Determinați probabilitatea că în cod primul simbol va fi vocală.	$\frac{2}{5}$
18	Cu cifrele 1,2,3,4,5,6,7 se formează aleator un număr de șapte cifre distincte două câte două. Determinați probabilitatea ca primele trei cifre ale numărului să fie pare, iar celelalte- impare.	$\frac{1}{35}$
19	Se aruncă simultan 4 zaruri. Determinați probabilitatea că suma numerelor de puncte apărute este egal cu 22.	$\frac{5}{648}$
20	Cinci fete au decis să dăruiască de 1 Martie mărțișori celor 5 colegi ai lor. Fiecare duntre ele dăruiește un mărțișor unui coleg luat la întâmplare. Determinați probabilitatea că fiecare coleg va primi un mărțișor.	$\frac{24}{625}$
21	Într-un magazin activează secțiile A, B și C. Pe parcursul unei ore intră 7 persoane. Fiecare persoană poate intra aleator în una din secții. Determinați probabilitatea că 3 persoane intră în secția A, 2 persoane intră în secția B și 2 persoane intră în secția C.	$\frac{70}{729}$
22	Literele A,P,O,L,L,O sânt scrise câte una pe 6 fișe identice. Fișele se amestecă, apoi se extrag aleatoriu consecutiv patru fișe. Determinați probabilitatea că fișele extrase formează în ordinea extragerii cuvântului POLO.	$\frac{1}{90}$
23	Cu cifrele 2, 3, 4, 5, 6 se formează aleator un număr de 5 cifre care nu se repetă. Determinați probabilitatea că ultimele 2 cifre ale numărului format sunt impare.	$\frac{1}{10}$
24	Cu cifrele 1,2,3,4,5,6 se formează numere de cinci cifre. Determinați probabilitatea că cifrele unui număr format la întâmplare nu se repetă, iar suma ultimelor trei cifre este egală cu 13.	$\frac{1}{108}$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	În sesiune de iarnă sunt planificate două examene, care pot fi organizate în două moduri: cu prezența fizică în sală sau în format online. Probabilitatea că primul examen va fi organizat cu prezență fizică în sală este egală cu $\frac{4}{5}$, iar probabilitatea că al doilea examen va fi organizat cu prezență fizică în sală este egală cu $\frac{3}{4}$. Determinați probabilitatea că cel puțin un examen va fi organizat cu prezență fizică în sală.	$\frac{19}{20}$
2	Probabilitatea nerambursării la timp a creditului , acordat de către o bancă, este egal cu 0,1. Banca a acordat trei credite. Să se calculeze probabilitatea că unul dintre aceste credite nu va fi rambursat la timp.	0,243
3	Într-un campionat de fotbal, o echipă se calific pentru etapa următoare dacă acumulează cel puțin 4 puncte din 2 meciuri. La un meci se obțin 3 puncte pentru câștig, 1 punct pentru egalitate și 0 puncte pentru pierdere. Probabilitatea câștigului este egală cu probabilitatea pierderii și este egală cu 0,4. Determinați probabilitatea că echipa se va califica pentru etapa următoare.	0,32
4	Prețul unei acțiuni este de 10 lei. Probabilitatea că pe durata unei zile prețul acțiunei va crește cu un leu este egal cu $\frac{2}{5}$, iar probabilitatea că va descrește cu un leu este egală cu $\frac{3}{5}$. Determinați probabilitatea că peste 3 zile prețul acțiunii va fi de 11 lei.	$\frac{36}{125}$
5	În căutarea unui post de lucru, Petru a aplicat CV-ul său la două companii. Probabilitatea că Petru va primi oferta de angajare de la prima companie este egală cu 0,3, iar probabilitatea că va primi oferta de angajare de la a doua companie este egală cu 0,6. Determinați probabilitatea că Petru va primi oferta de angajare cel puțin de la o companie.	0,72
6	Probabilitatea că într-o zi de iulie va ploua este egală cu $\frac{2}{5}$. Determinați probabilitatea că în două din primele trei zile din luna iulie va ploua.	$\frac{36}{125}$
7	O echipă din trei sportivi se califică pentru etapa următoarea, dacă cel puțin doi dintre membrii ei ating performanțele setate. Probabilitatea că fiecare sportiv în parte va atinge performanțele setate este egală cu 0,9. Determinați probabilitatea că echipa se va califica pentru etapa următoare.	0,972

X. Șiruri. Progresii .

§1 Șiruri numerice

Def. Șirurile se numesc monotone dacă ele sunt crescătoare sau descrescătoare.
Pentru a determina dacă un șir este crescător sau descrescător putem proceda astfel:
I) studiem semnul diferenței a doi termeni consecutivi.
* dacă $x_{n+1} - x_n \geq 0, \forall n \in N^*$ atunci șirul este crescător.
* dacă $x_{n+1} - x_n \leq 0, \forall n \in N^*$ atunci șirul este descrescător.
II) dacă termenii șirului sunt pozitivi atunci comparăm cu unitatea raportul a doi termeni consecutivi.
* dacă $x_n > 0, \forall n \in N^*, \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ atunci șirul este crescător.
* dacă $x_n > 0, \forall n \in N^*, \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ atunci șirul este descrescător.

Definiție: Se spune că un șir (x_n) este mărginit dacă există numerele reale $a, b \in R$, astfel încât $a \leq x_n \leq b, \forall n$.

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Studiați monotonia șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{4n-5}{n}$.	Monoton crescător
2	Studiați marginea șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = 1 + \frac{1}{n}$.	Șirul este mărginit inferior și superior
3	Fie șirul $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_{n+1} = 3b_n, b_1 = 2$. Determinați termenul al treilea al șirului.	18
4	Studiați marginea șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{n}{n+1}$.	Șirul este mărginit inferior și superior
5	Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_{n+1} = 2a_n - 3$, $a_1 = 2$. Determinați valoarea expresiei $a_2 + a_3$.	0
6	Studiați monotonia șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{n}{n+1}$.	Monoton crescător
7	Fie funcția $f: R \to R, f(x) = \left(\frac{e}{3}\right)^x$. Stabiliți monotonia funcției *f*.	*f* este monoton descrescătoare
8	Studiați monotonia șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{2n}{n+1}$.	Monoton crescător
9	Studiați monotonia șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{n}{2n+1}$.	Monoton crescător

10	Studiați monotonia șirului $(a_n)_{n\geq1}$, $a_n = \frac{2n+1}{3n-1}$.	Mon. descrescător
11	Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq1}$ cu termenul general $x_n = \frac{n+1}{2n+1}$ este descrescător.	
12	Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq1}$, astfel încât $a_1 = -2$, $a_{n+1} = a_n + 3n$. Să se afle valoare expresiei $E = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.	$3\sqrt{6}$
13	Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq1}$, în care $a_1 = -3$ și $a_{n+1} = 3a_n + 7$. Calculați media aritmetică a numerelor a_3, a_4, a_5.	16
14	Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq1}$, în care $a_1 = 1$ și $3a_{n+1} = a_n, \forall n, n \in N, n \geq 1$. Să se afle $a_3 + a_4$.	$\frac{4}{27}$
15	Studiați marginea șirului $(a_n)_{n\geq1}$, $a_n = \frac{3n+8}{2n}$.	$\frac{3}{2}; \frac{11}{2}$
16	Studiați monotonia șirului $(a_n)_{n\geq1}$, $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$.	Monoton crescător

§2 Progresia aritmetică

1. (Formula termenului general). $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)r, \forall n \geq 1.}$
2. $\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2.}$
3. (Suma primilor n termeni).

$\boldsymbol{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}, \forall n \geq 1.}$

În funcţie de primul termen a_1 şi raţia *r*, $\boldsymbol{S_n = \frac{[2a_1+(n-1)r]n}{2}.}$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Determinați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, dacă $a_2 = 2, a_5 = 17$.	5
2	Într-o progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$ suma dintre termenul al doilea și al patrulea este egală cu 10, iar diferența dintre termenul al șaselea și termenul al treilea este egal cu 12. Să se afle suma primilor 18 termeni ai progresiei.	558
3	Să se determine numărul real *x*, știind că numerele $x+1, 1-x, 4$, în această ordine, sunt în progresie aritmetică.	-1
4	Fie $(a_n)_{n\geq1}$ o progresie aritmetică cu $a_8 = 10$ și rația $r = 3$. Să se afle a_{2022}.	6052

5	Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_3 = 3$ și $a_7 = 15$. Calculați $a_1 + a_9$.	18
6	Se consideră progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_2 = 2, a_5 = 5$. calculați suma primilor 10 termeni ai progresiei.	55
7	Determinați $a + b + c$, dacă primii cinci termeni ai unei progresii aritmetice sunt $a, b, 12, c, 18$.	30
8	Se consideră progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu rația $r = 3$. Știind că suma primilor 10 termeni ai progresiei este egală cu 150, să se afle primul termen.	$\frac{3}{2}$

§3 Progresia geometrică

1. (Formula termenului general). $\mathbf{b_n = b_1 q^{n-1}}, \forall$ **n≥1**.
2. $\boldsymbol{b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}, \forall n \geq 2,}$ pentru termeni pozitivi.
3. (Suma primilor n termeni).

$$\boldsymbol{S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1 - q}, q \neq 1} \qquad \boldsymbol{S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}, q \neq 1}$$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, dacă $b_3 = 20, b_6 = 160$.	2
2	Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, dacă $b_5 = 5, b_8 = -40$.	-2
3	Să se determine primul termenal progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24$ ...	3
4	Se consideră progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi, în care $b_2 = 6, b_4 = 54$. Să se afle b_7.	1458
5	Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ progresie geometrică cu termeni pozitivi, astfel încât $4b_2 = b_4$. Determinați valoarea raportului $a = \frac{b_3+b_4}{b_2}$.	6
6	Determinați suma primilor șase termeni ai progrsiei geometrice cu termeni pozitivi $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2 = 6, b_5 = 48$.	189
7	În progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ avem $b_1 = -\frac{2}{9}, b_3 = -2$. Să se afle b_7.	-162

XI. Derivata funcțiilor

Derivatele funcțiilor elementare

$c' = 0$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(a^x)' = a^x \ln x$
$x' = 1$	$(e^x)' = e^x$	$(\sin x)' = \cos x$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Reguli de derivare

$$(f \cdot g)' = f'g + g'f$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Ecuația tangentei la G_f în x_0 este: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

a) Intervalele de monotonie

Dacă $f'(x) \geq 0, \forall x \in D$, atunci *f* este monoton crescătoare pe *D*;
Dacă $f'(x) \leq 0, \forall x \in D$, atunci *f* este monoton descrescătoare pe *D*;

b) Determinarea extremelor locale ale unei funcții

Dacă, pe *D*, funcția *f* este strict crescătoare la stânga lui x_0 și strict descrescătoare la dreapta lui x_0, atunci punctul x_0 este punct de **maxim local** al funcției *f*, dacă invers, atunci punctul x_0 este punct de **minim local** al funcției *f*.

c) Determinarea punctelor de inflexiune

Dacă $f''(x) = 0$, pe *D*, funcția *f* este concavă la stânga lui x_0 și convexă la dreapta lui x_0, sau invers, atunci punctul x_0 este punct de **inflexiune** al funcției *f*.

d) Determinarea extremelor globale

1.Se află valorile funcției *f* la capetele intervalului $[a; b]$, *f(a) și f(b).*
2.Se află punctele critice ale funcției *f*, adică se rezolvă ecuația
$f'(x) = 0, x \in (a, b)$
3.Se calculează valorile funcției *f* în punctele critice deja determinate și se compară cu valorile acesteia la capetele intervalului: cea mai mică (mare) dintre aceste valori va fi minimul (maximul) global al funcției *f* pe $[a; b]$.

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Fie funcția $f:(0;+\infty)\to R, f(x)=x-\ln x$. Determinați intervalele de monotonie ale funcției *f*.	*f* mon. desc pe $(0,1]$, *f* mon. cresc pe $[1,+\infty)$
2	Fie funcția $f:R\to R, f(x)=x-e^x$. Determinați punctele de extrem local ale funcției *f*.	$x=0$, p. de max local
3	Fie funcția $f:[1;+\infty)\to R, f(x)=2\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}$. Arătați că $f(2)+\sqrt{2}\cdot f'(2)=2$.	
4	Fie funcția $f:R\to R, f(x)=3x^5-5x^4$. Determinați punctele de inflexiune ale funcției *f*.	$x=1$, p. de inflexiune
5	Fie funcția $f:R\to R, f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. Determinați punctele de extrem local ale funcției *f*.	$x=1$, p. de max local; $x=-1$, p. de min local
6	Fie funcția $f:(0;+\infty)\to R, f(x)=xlnx$. Determinați intervalele de monotonie ale funcției *f*.	*f* mon. desc pe $\left(0,\frac{1}{e}\right]$, *f* mon. cresc pe $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$
7	Fie funcția $f:R\to R, f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+1$. Determinați intervalele de monotonie ale funcției *f*.	*f* mon. desc pe $(-\infty,0]$, *f* mon. cresc pe $[0,+\infty)$
8	Fie funcția $f:R\to R, f(x)=e^x(x^2-2x+1)$. Determinați punctele de extrem local ale funcției *f*.	$x=-1$, p.de max local; $x=1$, p. de min local
9	Fie funcția $f:R^*\to R, f(x)=\frac{x^3+2}{x}$. Determinați intervalele de monotonie ale funcției *f*.	Pe $(-\infty;0)$ și $(0,1]$ *f* mon. desc, pe $[1,+\infty)$ *f* mon. cresc
10	Fie funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to R, f(x)=x\sin x+\cos x$. Determinați valoarea maximă a funcției *f*.	$\frac{\pi}{2}$
11	Fie funcția $f:R\to R, f(x)=\frac{x}{x^2+4}$. Determinați punctele de extrem local ale funcției *f*.	$x=2$ p.de max. local $x=-2$ p.de min. local
12	Fie funcția $f:(0;+\infty)\to R, f(x)=x+ln^2x$. Determinați punctele de inflexiune ale funcției *f*.	$x=e$, p. de inflexiune
13	Fie funcția $f:R\to R, f(x)=e^x(2x^4-7x^3)$. Determinați punctele de extrem local ale funcției *f*.	$x=-\frac{7}{2}$ p.de max. local $x=3$ p.de min. local
14	Fie funcția $f:R\to R, f(x)=3x^4+4x^3-1$. Determinați intervalele de monotonie ale funcției *f*.	Pe$(-\infty,-1]$ *f* mon. desc, pe $[-1,+\infty)$ *f* mon. cresc
15	Fie funcția $f:D\to R, f(x)=\frac{x}{lnx}$. Determinați punctele de extrem local ale funcției *f*.	$x=e$, p. de min local
16	Fie funcția $f:R^*\to R, f(x)=\frac{1}{x}+\frac{x^2}{2}$. Deter-minați intervalele de monotonie ale funcției *f*.	Pe $(-\infty;0)$ și $(0,1]$ *f* mon. desc, pe $[1,+\infty)$ *f* mon. cresc
17	Fie funcția $f:(0;+\infty)\to R, f(x)=lnx+\frac{1}{x}$. Determinați intervalele de monotonie ale funcției *f*.	Pe $(0,1]$ *f* mon. desc, pe $[1,+\infty)$ *f* mon. cresc

18	Fie funcția $f: R \to R, f(x) = x^4 - 4x^3$. Deter-minați intervalele de monotonie ale funcției *f*.	*f* mon. desc pe $(-\infty,3]$, *f* mon. cresc pe $[3,+\infty)$
19	Fie funcția $f: (0;+\infty) \to R, f(x) = 4lnx - x$. Determinați intervalele de monotonie ale funcției *f*.	*f* mon. cresc pe $(0;4]$, *f* mon. desc pe $[4;+\infty)$
20	Fie funcția $f: R \setminus \{2\} \to R, f(x) = \frac{x^2}{x-2}$. Determinați punctele de extrem local ale funcției *f*.	$x = 0$ p.de max. local $x = 4$ p.de min. local
21	Fie funcția $f: [-2,6] \to R, f(x) = \sqrt{x+3} + 2$. Comparați $f'(5)$ și $\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4}$.	>
22	Fie funcția $f: R \to R, f(x) = xe^x$. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul de abscisă $x_0 = 0$.	$y = x$
23	Fie funcția $f: \left[-\frac{1}{2}; 12\right] \to R, f(x) = \sqrt{2x+1}$. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul de intersecție a funcției *f* cu axa O_y.	$y = x + 1$
24	Fie funcția $f: R \to R, f(x) = e^{2x} - 2x^2$. Determinați punctele de inflexiune ale funcției *f*.	$x = 0$, p. de inflexiune
25	Fie funcția $f: R \to R, f(x) = (2x-5)e^{2x}$. De-terminați intervalele de monotonie ale funcției *f*.	Pe $(-\infty,2]$ *f* mon. desc, pe $[2,+\infty)$ *f* mon. cresc
26	Fie funcția $f: (0;+\infty) \to R, f(x) = 8\ln x - x^2$. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul de abscisă $x_0 = 1$.	$y = 6x - 7$
27	Fie funcția $f: R \setminus \{1\} \to R, f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$. Determinați punctele de extrem local ale funcției *f*.	$x = -1$ p.de max. local $x = 3$ p.de min. local
28	Fie funcția $f: (-1,+\infty) \to R$, $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{2}$. Determinați extremele globale ale funcției *f* pe segmentul $[0; e^2 - 1]$.	$\underset{[0,e^2-1]}{max} f(x) = \frac{\ln 4 - 1}{2}$ $\underset{[0,e^2-1]}{min} f(x) = \frac{5 - e^2}{2}$
29	Determinați extremele globale ale funcției $f: [0,3] \to R, f(x) = \frac{x^2+8}{x+1}$.	$\underset{[0,3]}{max} f(x) = f(0) = 8$ $\underset{[0,3]}{min} f(x) = f(2) = 4$
30	Fie funcția $f: R \to R, f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul de abscisă $x_0 = 0$.	$y = -\frac{1}{2}x + 1$
31	Determinați intervalele de monotonie ale funcției $f: (1;+\infty) \to R, f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$.	Pe $(1,\sqrt{e}]$ *f* mon. desc, pe $[\sqrt{e},+\infty)$ *f* mon. cresc

XII. Limite de funcții

§1 Calculul limetelor

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} \dots + a_n, Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} \dots + b_m,\ a_0 \neq 0, b_0 \neq 0; m, n \in N^*$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m} = \begin{cases} 0, n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, n = m \\ \pm\infty, n > m \end{cases}$$

Regula lui l'Hospital este o regulă care presupune folosirea derivatelor pentru calculul unor limite de funcții care conțin o nedeterminare (de tipul $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$):

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Fie funcția $f: R \to R, f(x) = x^4 - 4x^3$. Calculați $\lim\limits_{x\to 4} \frac{f(x)}{x^2-16}$.	8
2	Fie funcția $f: (0; +\infty) \to R, f(x) = 4lnx - x$. Comparați $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \frac{x^2-2x+3}{x}\right)$ și $f(e)$.	>
3	Fie funcția $f: [-2,6] \to R, f(x) = \sqrt{x+3} + 2$. Calculați $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)(\sqrt{x+3}-2)}{1-x^2}$.	$-\frac{1}{2}$
4	Fie funcția $f: R \to R, f(x) = xe^x$. Comparați $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+x}\right)$ și $f\left(\frac{1}{2}\right)$	>
5	Fie funcția $f: \left[-\frac{1}{2}; 12\right] \to R, f(x) = \sqrt{2x+1}$. Calculați $\lim\limits_{x\to 4} \frac{f(x)-3}{x-4}$.	$\frac{1}{3}$
6	Fie funcția $f: R \to R, f(x) = (2x-5)e^{2x}$. Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x^2)+5}{x^2}$	-8
7	Fie funcția $f: (0; +\infty) \to R, f(x) = 8\ln x - x^2$. Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x+1)+x^2+2x+1}{2x}$.	4
8	Fie funcția $f: (-1, +\infty) \to R, f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{2}$. Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big)$.	$-\frac{1}{2}$

9	Fie funcția $f: R \to R, f(x) = e^{2x} - 2x^2$. Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{6x}$.	$\frac{1}{3}$
10	Se consideră funcția $f: R \to R, f(x) = 1 + \frac{1}{x^2+1}$. Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$.	0
11	Calculați $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{6-10x}-4}{3x^2+5x+2}$.	$\frac{5}{4}$
12	Calculați $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{4+5x}-3}{1-x}$.	$-\frac{5}{6}$
13	Calculați $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+2} - \frac{x^2+3}{x-3}\right)$.	-5

§2 Asimptote

Asimptote orizontale

$y = a$ asimptotă orizontală spre $+\infty$, dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$

Asimptote oblice

$y = mx + n -$ asimptotă oblică la G_f

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}\ ;\ \ m \neq 0 \qquad n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)$$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Fie funcția $f: R \setminus \{2\} \to R, f(x) = \frac{x^2}{x-2}$. Determinați asimptota oblică la $+\infty$ a graficului funcției *f*.	$y = x + 2$
2	Fie funcția $f: R \setminus \{1\} \to R, f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$. Determinați asimptota oblică la $+\infty$ a graficului funcției *f*.	$y = x + 1$
3	Determinați asimptota oblică la $+\infty$ a graficului funcției $g: R^* \to R g(x) = \frac{1}{f(x)}$, dacă $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.	$y = x$
4	Determinați asimptota orizontală la $+\infty$ a graficului funcției $f: R \to R, f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$	$y = \frac{1}{2}$
5	Fie funcția $f: R \setminus \{1\} \to R, f(x) = \frac{x^2-x-1}{x-1}$. Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficului funcției *f*.	$y = x$
6	Fie funcția $f: R \to R, f(x) = \frac{x^2+3x}{x^2+1}$. Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficului funcției *f*.	$y = x$

XIII. Calculul integralelor

§1 Calculul integralelor

$\int 1\,dx = x + C$	$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$	$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + c$

Formula Leibniz- Newton: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$;

Formula integrării prin părți :

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Sau $\int u\,dv = uv - \int v\,d$

Exerciții

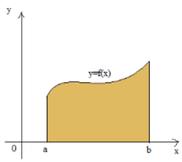
Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Calculați $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$	2
2	Fie funcția $f: R \to R, f(x) = \frac{1}{4x^2+1}$. Determinați primitiva *F* a funcției *f*, graficul căreia intersectează axa O_y într-un punct cu ordonata egală cu 3.	$F(x) = \frac{1}{2}arctg(2x) + 3$
3	Fie funcția $f: R \to R, f(x) = 6e^{3x-6} + 4$. Determinați primitiva *F* a funcției *f*, astfel încât graficul funcției *F* să intersecteze graficul funcției *f* în punctul de abscisă $x = 2$.	$F(x) = 2e^{3x-6} + 4x$
4	Arătați că $\int_1^9 \frac{dx}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = ln\,2$	
5	Fie funcția $f: R \to R, f(x) = cosx - 2\sin(2x)$. Determinați primitiva *F* a funcției *f*, pentru care $x = \frac{\pi}{6}$ este zerou.	$F(x) = sinx +$ $+\cos(2x) - 1$

6	Să se determine valorile reale ale lui a, $a \geq 1$, pentru care are loc inegalitatea $\int_1^a (3x^2 - 8x + 5)\,dx \leq a - 2$.	$a = 2$
7	Calculați: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$.	$2\sqrt{2} - 2$
8	Fie funcția $f: [0; +\infty) \to R, f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. Determinați primitiva F a funcției f, graficul căreia intersectează axa Ox în punctul de abscisă $x = 4$.	$F(x) = x + \sqrt{2x+1} - 7$
9	Fie funcția $f: \left(\frac{2}{3}; +\infty\right) \to R, f(x) = \frac{1}{3x-2} - 1$. Determi-nați primitiva F a funcției f, astfel încât graficele functi-ilor f și F se interesează în punctul de abscisă $x = 1$.	$F(x) = \frac{1}{3}\ln(3x-2) - x + 1$
10	Fie funcția $f: R \to R, f(x) = x^4 - 4x^3$. Calculați $\int_{-1}^{1} \lvert f(x) \rvert\,dx$.	2
11	Calculați: $\int_1^e \frac{4\ln x - x}{x}\,dx$.	$3 - e$
12	Fie funcția $f: R \setminus \{2\} \to R, f(x) = \frac{x^2}{x-2}$. Calculați $\int_3^8 \frac{f(x)(x-2)}{x\sqrt{x+1}}\,dx$.	$\frac{32}{3}$
13	Fie funcția $f: (0; +\infty) \to R, f(x) = \sqrt[3]{x} - x + 3$. Determinați primitiva F a funcției f, pentru care $x = 8$ este zerou.	$F(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{x^2}{2} + 3x - 4$
14	Fie funcția $f: R \to R, f(x) = 4e^{2x} + e$. Determinați primitiva F a funcției f, pentru care $x = 0$ este zerou.	$F(x) = 2e^{2x} + ex - 2$
15	Calculați $\int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$.	$\frac{8}{3}$
16	Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx\,dx}{\sin^2 x + 3}$.	$\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$
17	Fie funcția $f: [0; +\infty) \to R, f(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{5x+2}$. Determinați primitiva F a funcției f, graficul căreia trece prin punctul $A\left(5; \frac{1}{5}\right)$.	$F(x) = \frac{1}{5}(5x+2)^{\frac{4}{3}} - 16$
18	Fie funcția $g: (0; +\infty) \to R, g(x) = \frac{x \cdot e^x}{x(e^{2x}+1)}$. Determi-nați primitiva G a funcției g, pentru care $x = \frac{1}{2}\ln 3$ este zerou.	$G(x) = \mathrm{arctg}\, e^x - \frac{\pi}{3}$
19	Calculați $\int_2^3 \frac{x^2+3}{x-1}\,dx$.	$\frac{7}{2} + 4\ln 2$

20	Calculați $\int_0^1 x(e^{2x}-2x^2)dx$	$\frac{e^2-1}{4}$
21	Calculați $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$.	$\frac{1}{2}\ln 2$
22	Fie funcția $f:(0;+\infty)\to R, f(x)=8\ln x - x^2$. Calculați $\int_1^e f(x)dx$	$\frac{25-e^3}{3}$
23	Determinați primitiva F a funcției$f:(-1,+\infty)\to R$, $f(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{2}$, graficul căreia trece prin punctul $A(0;1)$.	$F(x)=$ $x\ln(x+1)-x+$ $\ln(x+1)-\frac{x^2}{4}+1$
24	Fie funcția $f:R\to R, f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x$. Calculați $\int_{-1}^0(2x+1)f(x)dx$.	$-\frac{1}{6}$

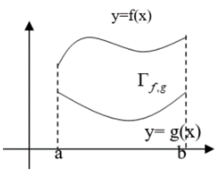
§2 Calcularea ariei și volumului cu ajutorul integralei

Formula de calcul pentru aria subgraficului : $\mathbf{A}=\int_a^b \mathbf{f(x)dx}$.



Formula de calcul a ariei mulțimii delimitate de graficele a două funcții și de dreptele $x=a, x=b$.

$\mathbf{A}=\int_a^b(\mathbf{f(x)}-g(x))\mathbf{dx}$.



Formula de calcul pentru volum este: $\mathbf{V}=\pi\int_a^b \mathbf{f^2(x)dx}$.

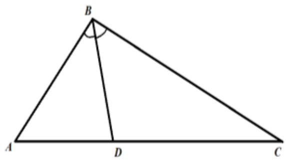
Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Fie funcția $f:\left[\frac{\pi}{18};\frac{\pi}{6}\right]\to R, f(x)=\cos(3x)$. Determinați aria subgraficului funcției *f*.	$\frac{1}{6}$
2	Fie funcția $f:[-2,6]\to R, f(x)=\sqrt{x+3}+2$. Determinați valoarea numerică a volumului corpului obținut prin rotirea subgraficului funcției *f* în jurul axei O_x.	$\frac{424\pi}{3}$
3	Fie funcția $f,g:[0;+\infty)\to R, f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x$. Determinați valoarea numerică a ariei figurii mărginite de graficele funcțiilor f,g.	$\frac{1}{6}$
4	Fie funcția $f:[0;1]\to R, f(x)=\sqrt{x}+1$. Determinați valoarea numerică a volumului corpului obținut prin rotirea subgraficului funcției *f* în jurul axei O_x.	$\frac{17\pi}{6}$
5	Fie funcția $f:R\to R, f(x)=x^2-2x+1$. Să se afle aria figurii mărginite de graficul funcției f și de graficul derivatei acestei funcții.	$\frac{4}{3}$
6	Determinați aria figurii mărginite de graficele funcțiilor $f,g:R\to R$, $f(x)=x^2-4x+4, g(x)=1$.	$\frac{4}{3}$
7	Fie funcția $f:R\to,Rf(x)=e^x-1$. Determinați valoarea numerică a ariei figurii, mărginite de graficele funcțiilor f, dreapta $x=1$ și axa O_x.	$e-2$
8	Fie funcția $f:[0;4]\to R, f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. Determinați valoarea numerică a ariei subgraficului funcției *f*.	2
9	Fie funcțiile $f,g:R\to R, f(x)=x^2, g(x)=2-x$. Determinați valoarea numerică a ariei figurii, mărginite de graficele funcțiilor f,g și de axa absciselor.	$\frac{5}{6}$
10	Fie funcția $f:\left[-\frac{1}{2};12\right]\to R, f(x)=\sqrt{2x+1}$. Determinați valoarea numerică a ariei subgraficului funcției *f*.	$\frac{125}{3}$
11	Fie funcția $f:R\to R, f(x)=(2x-5)e^{2x}$. Determinați aria figurii mărginite de graficul funcției *f*, de axa O_x și de dreptele $x=0, x=1$.	$2e^2-3$
12	Fie funcția $f:R\to,Rf(x)=x^3-3x$. Aflați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției *f*, axa O_x și dreptele de ecuații $x=-1, x=1$.	$\frac{5}{2}$

XIV. Geometria în plan

§1 Triunghiul

- Toate cele trei mediane ale triunghiului se intersectează într-un punct şi-n acest punct se împart în raportul 2:1 începând de la vîrf.
- Fiecare mediană împarte triunghiul în două triunghiuri *echivalente* (cu arii egale).
- Toate cele trei bisectoare ale triunghiului se intersectează în acelaşi punct. Acest punct reprezintă ***centrul cercului înscris în triunghi***.
- **Teorema bisectoarei** $AD:DC = AB:BC$.



$$\boldsymbol{BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC}$$

- Linia mijlocie este paralelă cu latura a treia şi egală cu jumătate din lungimea ei.
- **Teorema sinusurilor.** În orice ΔABC avem:

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \boldsymbol{2R}$, unde *R* este raza cercului circumscris.

- **Teorema cosinusurilor.** În orice ΔABC avem:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$$
$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}$$
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C}$$

- **Teorema:** În orice triunghi poate fi înscris un cerc. Centrul acestui cerc este punctul de intersecție a bisectoarelor triunghiului.

  $$\boldsymbol{r = \frac{2A_\Delta}{a+b+c}}$$

- **Teorema:** Oricărui triunghi i se poate circumscrie un cerc. Centrul acestui cerc este punctul de intersecție a mediatoarelor triunghiului.

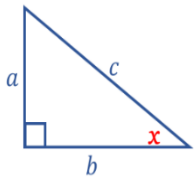
  $$\boldsymbol{R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4A_\Delta}}$$

- **<u>Formulele de calculare a ariilor triunghiului:</u>**
  - $\boldsymbol{A_\Delta = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_C}{2}}$
  - $\boldsymbol{A_\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B}$
  - **Formula lui Heron**
  - $\boldsymbol{A_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ **pentru** $\boldsymbol{p = \frac{a+b+c}{2}}$

Teorema: Lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

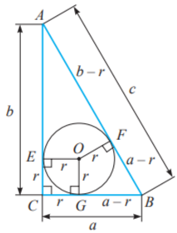
$$\sin x = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}} = \frac{a}{c}$$

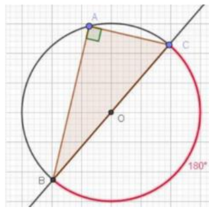
$$\cos x = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}} = \frac{b}{c}$$



$$\text{tg}\, x = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{ctg}\, x = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}} = \frac{b}{a}$$

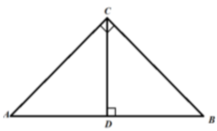




$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

$$R = \frac{BC}{2}$$

- Ipotenuza triunghiului dreptunghic este diametru pentru cercul circumscris.



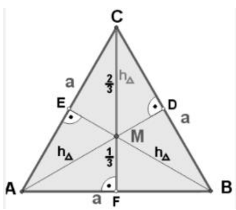
Aria triunghiului dreptunghic

$$A_{ABC} = \frac{BC \cdot AC}{2} \quad ; \quad A_{ABC} = \frac{CD \cdot AB}{2}$$

- Într-un triunghi echilateral, centrul cercului înscris, ortocentrul, centrul cercului circumscris și centrul de greutate, coincid.

$R = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$, raza cercului circumscris triunghiului

$r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$, raza cercului înscris în triunghi.



$$CM = \frac{2}{3} CF$$

$$MF = \frac{1}{3} CF$$

Aria triunghiului echilateral: $A_{\Delta} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Un triunghi are două laturi de lungimi 8cm și $4\sqrt{7}$cm, iar măsura unghiului opus laturii mai mare dintre cele două laturi are măsura de 60°. Să se afle lungimea laturii a treia a triunghiului.	12cm
2	Într-un triunghi dreptunghic, măsura unui unghi ascuțit este egală cu 30°, iar lungimea catetei mai mari este egală cu $5\sqrt{3}cm$. Determinați aria discului mărginit de cercul circumscris triunghiului.	$25\pi cm^2$
3	Determinați aria triunghiului ABC, știind că AC=3cm, BC=4cm, iar medianele AM și BN sunt reciproc perpendiculare.	$\sqrt{11}cm^2$
4	Fie triunghiul ascuțit unghic ABC, în care $m(\sphericalangle BAC) = 45°$. Piciorul K al înălțimii BK împarte latura AC în segmentele AK=4cm și CK=3cm. Determinați perimetrul triunghiului ABC.	$(12 + 4\sqrt{2})cm$
5	Fie triunghiul dreptunghic ABC , în care $m(\sphericalangle C) = 90°$, $m(\sphericalangle A) = 60°$, iar lungimea ipotenuzei AB este egală cu 6cm. Determinați lungimea bisectoarei AK a unghiului A a triunghiului ABC.	$2\sqrt{3}$cm
6	Fie triunghiul isoscel ABC, în care AB = BC = 12cm. Pe laturile AB, BC și AC se consideră punctele M, N și respectiv P, astfel încât AMNP este un romb cu latura de 3cm. Determinați lungimea înălțimii triunghiului, corespunzătoare bazei AC.	$2\sqrt{35}$cm
7	Fie triunghiul dreptunghic ABC, în care $m(\measuredangle B) = 90^{\circ}$ și AB = 6 cm. Lungimea medianei BM este egală cu 5 cm. Determinați aria triunghiului ABC.	$24cm^2$
8	În triunghiul ABC mediana BD are lungimea de 8cm, iar latura AC are lungimea de 14cm. Determinați aria triunghiului ABC, dacă $m(\sphericalangle ABD) = 60°$, iar lungimea laturii AB este mai mare decât 3 cm.	$20\sqrt{3}cm^2$
9	Fie ABC un triunghi isoscel, în care AB=BC=6cm. Pe laturile AB și BC se consideră punctele M și respectiv N, astfel încât $MN \parallel AC$, MN=3cm, BN=2cm. Determinați aria trapezului AMNC	$6\sqrt{7}cm^2$
10	Fie ABC un triunghi ascuțitunghic isoscel, în care AB=BC și înălțimea AK esste de 6cm. Determinați perimetrul triunghiului ABC dacă aria lui este egală cu $30cm^2$.	$(20 + 2\sqrt{10})cm$

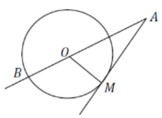
11	Într-un triunghi dreptunghic isoscel, mediana corespunzătoare ipotenuzei este de $2\sqrt{2}cm$. Determinați lungimea medianei corespun-zătoare unei catete.	$2\sqrt{5}cm$
12	Fie ABC un triunghi, în care $m(\measuredangle A) = 60^{\circ}$, $m(\measuredangle C) = 45^{\circ}$, iar înălțimea BH are lungimea de $2\sqrt{3}\ cm$. Determinați aria triunghiului ABC.	$(6 + 2\sqrt{3})cm$
13	Fie triunghiul dreptunghic ABC , în care $m(\measuredangle A) = 90°$, iar bisectoarea BK împarte cateta AC în segmentele AK=8 cm și KC=10 cm. Determinați lungimea razei cercului circumscris triunchiului ABC.	15 cm.
14	În triunghiul dreptunghic ABC, $m(\measuredangle B) = 90^{\circ}$, $m(\measuredangle A) = 60^{\circ}$, iar bisectoarea AK este de 6 cm. Determinați perimetrul triunghiului ABC.	$9(1 + \sqrt{3})cm$
15	Determinați lungimea bisectoarei unghiului drept al unui triunghi dreptunghic cu catetele de 21 cm și 28 cm.	$12\sqrt{2}cm$
16	Vârfurile pătratului MNQP sunt situate pe laturile unui triunghi isoscel ABC, astfel încât $M \in (AB), N \in (BC), P, Q \in (AC)$. Determinați lungimea laturii AB, dacă se cunoaște că baza AC a triunghiului ABC este de 10 cm, iar latura patratului MNQP este de 4 cm.	$\frac{25}{3}cm$
17	Fie triunghiul ABC, în care medianele AM și BN sunt reciproc perpendiculare, AM=9cm, BC=10cm. Determinați cosinusul unghiului ABC.	$-\frac{\sqrt{13}}{65}$
18	Fie triunghiul ABC, în care AB=4cm, BC=5cm, AC=6cm. Determinați lungimea bisectoarei unghiului A.	$3\sqrt{2}cm$
19	În triunghiul ABC, $m(\measuredangle A) = 60^{\circ}$, iar bisectoarea determină pe latura BC segmentele BD=2cm și CD=4cm. Determinați măsura unghiului C.	30°
20	Fie ABC un triunghi dreptunghic, în care, $m(\measuredangle ABC) = 90^{\circ}$, iar BC=36cm. Pe laturile AB, AC și BC se consideră respectiv punctele P,Q și R, astfel încât PQCR este un romb cu latura de 20cm. Determinați aria triunghiului APQ.	$150cm^2$
21	Punctele M și N sunt mijlocurile laturilor AB și BC, respectiv, ale triunghiului ABC, astfel încât MB=3cm, BN=4cm și MN=5cm. Determinați perimetrul triunghiului ABC.	24cm

22	Fie triunghiul ABC, în care AB=11cm, BC= $3\sqrt{3}cm$, $m(\measuredangle ABC) = 30^{\circ}$. Determinați aria discului mărginit de cercul circumscris triunghiului ABC.	$49\pi\ cm^2$
23	Fie triunghiul ABC, în care $MN \parallel AC$, $M \in (AB)$, N$\in (BC)$. Determinați lungimea segmentului BN, dacă MN=4cm, NC=5cm, AC=14cm.	2cm
24	În triunghiul ABC, AB=26cm, iar medianele AN și BM se intersectează în punctul O, astfel încât $m(\measuredangle AOB) = 120^{\circ}$. Determinați lungimea medianei AN, dacă BM= 24cm.	21cm
25	Fie dat triunghiul ABC, în care AB=12cm, AC=6cm, BC=9cm. Punctele M, N și P aparțin laturilor AB, BC și AC respectiv, astfel încât AMNP este romb. Determinați aria rombului AMNP.	$3\sqrt{15}cm^2$
26	Triunghiul isoscel ABC este înscris într-un cerc cu raza de 13cm, iar baza AB a triunghiului este situată la distanța de 5cm de la centrul cercului. Determinați lungimea laturii AC.	$4\sqrt{13}cm$
27	Fie triunghiul ABC, în care AB=8cm, AC=12cm, BC=10cm, iar AD este bisectoare. Determinați lungimea segmentului DC.	6cm
28	Fie triunghiul ABC, în care AB=12cm, AC=15cm, iar AD este bisectoare cu lungimea de 10cm. Determinați lungimea laturei BC.	18cm
29	Fie ABC un triunghi oarecare cu înălțimea AD=$3\sqrt{3}cm$, mediana AM=6cm și $m(\measuredangle B) = 30^{\circ}$. Să se afle perimetrul triunghiului ABC	$6(3 + \sqrt{3})cm$
30	Punctul M împarte ipotenuza inui triunghi dreptunghic în două segmente ale căror lungimi se raportă ca 4:3. Determinați lungimea ipotenuzei, dacă se cunoaște că punctul M este situat la distanța de 12cm de la fiecare dintre catete.	35cm
31	Unghiul B al triunghiului ABC este de 120°, iar bisectoarea BK împarte latura AC în segmente de 21cm și 35cm. Determinați aria triunghiului ABC.	$240\sqrt{3}cm^2$
32	Să se afle aria unui triunghi isoscel în care înălțimea corepunzătoare bazei are lungimea de 10cm, iar înălțimea corepunzătoare laturei laterale are lungimea de 12cm.	$75cm^2$

§2 Cercul

- ***Aria discului:*** $\boldsymbol{A = \pi R^2}$;
- ***Lungimea cercului***: $\boldsymbol{L = 2\pi R}$;

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Fie cercul *C(O;R).* Punctele A și B se află pe cerc, astfel încât $m(< AOB) = 60^{\circ}$, AB = 6cm. Să se afle aria discului mărginit de cerc.	$36\pi\ cm^2$
2	Punctele A, B, C se află pe cercul *C(O;R),* astfel încât $m(< ABC) = 90^{\circ}$ și AC=10cm. Să se afle lungimea cercului.	$10\pi cm$
3	Segmentul AB este diametru al unui cerc. Punctul M aparține cercului, iar punctul N aparține diametrului AB, astfel încât segmentul MN este perpendicular pe AB, MN=8cm și NB = 4cm. Determinați aria discului mărginit de cerc.	$100\pi cm^2$
4	Într-un cerc două coarde au lungimile de 6 cm și sunt reciproc perpendiculare, iar în punctul lor de intersecție fiecare dintre ele se împarte în segmente ale căror lungime se raportă ca 2:1. Determinați lungimea razei cercului.	$\sqrt{10}\ cm$
5	Într-un cerc cu raza de 6cm , unghiul înscris ABC se sprijină pe un arc de 120°. Determinați lungimea coardelor AB și BC, dacă $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$.	6 cm, 12 cm
6	Punctele A,B,C aparțin unui cerc, astfel încât $m(< ABC) = 30^{\circ}$. Determinați lungimea arcului AC, dacă se cunoaște că lungimea cercului este egală cu 12cm.	2cm
7	Din punctul M exterior unui cerc sunt duse două tangente la cerc reciproc perpendiculare, determinați distanța de la punctul M la centrul O al cercului, dacă se cunăaște că distanța de la punctul M la punctele de tangență este egală cu $\sqrt{2}cm$.	2cm
8	În desenul alăturat, punctele M și B aparțin cercului de centrul O astfel, încât AM este tangentă la cerc, iar segmentul AB conține punctul O. Determinați măsura în grade a unghiului OAM, dacă se cunoaște că AB=3cm, iar raza cercului este de 1cm. 	30°

§3 Patrulatere

Patratul: $\boldsymbol{A = a^2, \quad d = a\sqrt{2}.}$

Dreptunghiul: $\boldsymbol{A = ab; \quad A = \frac{d^2}{2}\sin\gamma}$

$$\boldsymbol{d = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad P = 2(a+b)}$$

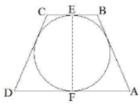
Paralelogramul: $\boldsymbol{A = a \cdot h_a; \quad A = ab \cdot \sin\alpha; \quad A = \frac{d_1 d_2 \cdot \sin\beta}{2}.}$

- Suma pătratelor diagonalelor, într-un paralelogram sunt egale cu suma pătratelor laturilor lui, adică

$$\boldsymbol{d_1^2 + d_2^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)}$$

Rombul: $\boldsymbol{A = ah; \quad A = a^2 \cdot \sin\alpha; \quad A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2};}$

Trapezul: $\boldsymbol{A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}}$



Dacă trapezul este circumscribil atunci: $\boldsymbol{CD + AB = BC + AD}$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Fie dreptunghiul ABCD , în care AD =12cm. Punctul M aparține laturii AB, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{4}{3}$, iar $m(\sphericalangle ADM) = 30°$. Determinați aria patrulaterului MBCD.	$60\sqrt{3}cm^2$
2	Fie rombul ABCD în care $m(< ABC) = 60^{\circ}$ și diagonala AC= 7,5 cm. Să se afle perimetrul rombului.	30cm
3	Fie rombul ABCD în care BD=30cm, iar O este punctul de intersecție a diagonalelor. Distanța de la punctul O la latura AB este egală cu 12cm. Să se afle aria rombului.	$600cm^2$
4	Un romb are latura de 10cm și înălțime de 8cm. Determinați lungimea diagonalei mici a rombului .	$4\sqrt{5}$cm
5	Într-un romb diagonala mică este de 30 cm, iar înălțimea este de 24cm. Determinați perimetrul rombului.	100 cm
6	Fie trapezul dreptunghic ABCD, cu $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle ADC) = 90°$ și $m(\sphericalangle ABC) = 120°$. Se cunoaște că $AD = 2\sqrt{3}cm$, iar CA este bisectoare a unghiului C al trapezului. Să se calculeze aria trapezului.	$10\sqrt{3}cm^2$

7	Fie ABCD un trapez dreptunghic, în care $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle A) = 90°$. Determinați perimetrul trapezului, dacă BD ⊥ BC, $BD = 4\sqrt{2}cm$ și $DC = 8\ cm$.	$(16 + 4\sqrt{2})cm$
8	Unui cerc i se circumscrie trapezul dreptunghic ABCD, în care $AD \parallel BC$, $m(\sphericalangle A) = 90°$, $m(\sphericalangle D) = 30°$ și $BC = 2\sqrt{3}cm$. Determinați lungimea razei cercului.	$(\sqrt{3} + 1)cm$
9	Fie trapezul isoscel ABCD, cu $AD \parallel BC$, AD= 6cm, CD = 2cm și BC= 5cm. Dreptele suport ale laturilor AB și CD se intersectează în punctul M. Determinați lungimea înălțimii triunghiului AMD, corespunzătoare laturii AD.	$3\sqrt{15}$cm
10	Centrul cercului, circumscris unui trapez isoscel, aparține bazei mari a trapezului. Determinați lungimea razei cercului, dacă baza mică a trapezului este de 14 cm, iar laturile neparalele sunt de 30 cm.	25cm
11	Baza mare a unui trapez isoscel este de 4cm, iar celelalte laturi sunt de 2cm. Determinați lungimea razei cercului circumscris trapezului.	2cm
12	Baza mare a unui trapez isoscel este diametrul cercului circumscris trapezului. Latura neparalelă a trapezului este de 15cm, iar înălțimea este de 12 cm. Determinați lungimea razei cercului circumscris trapezului.	12,5 cm
13	Într-un trapez isoscel latura laterală este congruentă cu linia mijlocie, iar măsura unghiului ascuțit este egală cu 60°. Determinați lungimea laturei laterale a trapezului, dacă se cunoaște că raza cercului circumscris este de $\sqrt{21}cm$.	6 cm
14	Într-un trapez isoscel latura laterală este de 30cm, iar diagonala este de 40cm și este perpendiculară pe latura laterală. Determinați lungimea bazei mici a trapezului.	14cm
15	Bazele unui trapez isoscel sunt de $4\sqrt{3}cm$ și $12\sqrt{3}cm$. Determinați lungimea diagonalei trapezului, dacă se cunoaște că unghiul de la baza mare este de 30°.	$4\sqrt{13}cm$
16	Se consideră trapezul circumscris ABCD, în care $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle BAD) = 90°$, BC=3cm, CD=5cm, AD=6cm. Determinați lungimea razei cercului înscris în trapezul ABCD.	2cm

17	Într-un trapez isoscel poate fi înscris un cerc. Baza mică a trapezului este de 3cm, iar unghiul de la baza mare este de 60°. Determinați lungimea razei cercului circumscris trapezului.	$\sqrt{21}cm$
18	Fie ABCD un paralelogram , în care AB=12cm, $m(\sphericalangle BAD) = 60°$ și BK este înălțime. Determinați aria paralelogramului ABCD, dacă $\frac{AK}{KD} = \frac{2}{3}$.	$90\sqrt{3}cm^2$
19	Fie paralelogramul ABCD, în care $m(\sphericalangle A) = 60°$. Bisectoare unghiului A intersectează diagonala BD în punctul K, astfel încât BK =2cm și KD =4cm. Determinați aria paralelogramului ABCD.	$12\sqrt{3}cm^2$
20	Fie paralelogramul ABCD, în care AB=13cm, BD=16cm, iar O este punctul de intersecție a diagonalelor. Determinați perimetrul paralelogramului ABCD, dacă $m(\sphericalangle AOB) = 60°$	$(26 + 2\sqrt{409})cm$
21	Fie paralelogramul ABCD, în care $m(\sphericalangle A) = 60°, AB = 4cm, BD = 2\sqrt{7}cm$. Determinați aria paralelogramului ABCD.	$12\sqrt{3}cm^2$
22	Fie ABC un paralelogram, în care $m(\sphericalangle BAD) = 60°$ și înălțimea BK este de $2\sqrt{3}cm$. Determinați aria paralelogramului ABCD, dacă KD=2AK.	$12\sqrt{3}cm^2$
23	Într-un trapez isoscel lungimile bazelor sunt de 8cm și 14cm, iar aria trapezului este egală cu $44cm^2$. Să se afle lungimea laturei laterale a trapezului.	5cm

XV. Geometria în spațiu

§1 Prisma

$$A_l = P_b \cdot H$$
$$A_t = A_l + 2A_b$$
$$V = A_b \cdot H$$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Muchia laterală a unui paralelipiped drept este egală cu 5cm, laturile bazei sunt egale cu 6cm și 8cm, și una din diagonalele bazei este egală cu 12cm. Să se afle diagonalele paralelipipedului.	13cm, 9cm
2	Fie $ABCA_1B_1C_1$ o prismă triunghiulară regulată . Prin muchia AB și prin vârful C_1 este dus un plan, care formează cu planul ABC un unghi cu măsura de 45°. Lungimea muchiei laterale a prismei este egală cu $2\sqrt{3}cm$. Calculați volumul prismei.	$24cm^3$
3	Baza prismei drepte $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este paralelogramul ABCD, în care AB = 3cm, BC = 2 cm și $m(\sphericalangle ABC) = 120°$. Determinați măsura în grade a unghiului format de diagonala mare a prismei și planul bazei, dacă înălțimea prismei are lungimea de $\sqrt{19}cm$.	45°
4	Diagonala unei prisme patrulatere regulate este de 13 cm , iar diagonala feței laterale este de 12 cm. Determinați aria totală a prismei.	$(50 + 20\sqrt{119})$ cm^2
5	Baza unei prisme drepte este un triunghi dreptunghic cu o catetă de 8cm. Raza cercului înscris în triunghiul din bază este de 3 cm și este congruentă cu înălțimea prismei. Determinați volumul prismei.	$180\ cm^3$
6	Baza unei prisme drepte este un paralelogram cu laturile de 2 cm și 4 cm și un unghi de 60° . Determinați volumul prismei, dacă diagonala cea mai mare a prismei formează cu planul bazei un unghi de 30°.	$8\sqrt{7}cm^3$
7	Într-o prismă triunghiulară regulată fața laterală este un pătrat cu diagonala de $6\sqrt{2}cm$. Determinați volumul prismei.	$54\sqrt{3}cm^3$
8	Ariile a trei fețe ale unui paralelipiped dreptunghic sunt de $2m^2$, $3m^2$ și $6m^2$. Să se afle volumul lui.	$6m^3$

9	Aria laterală a unei prisme patrulatere regulate este egală cu aria bazei, iar volumul prismei este egal cu $16cm^3$. Determinați cosinusul unghiului format de diagonala prismei cu planul bazei.	$\frac{4\sqrt{66}}{33}$
10	Baza unei prisme drepte este un romb, în care diagonala mică este de 12cm. Determinați lungimea diagonalei mari a prismei, dacă se cunoaște că fețele laterale ale prismei sunt pătrate cu aria de 100cm^2.	$2\sqrt{89}cm$
11	Baza unei prisme drepte este un romb cu înălțimea de 24cm și diagonala mică de 30cm. Determinați volumul prismei, dacă se cunoaște că înălțimea prismei este congruentă cu înălțimea rombului din bază.	14400cm^3
12	Într-un paralelipiped drept punctul de intersecție al diagonalelor lui este depărtat de planul bazei cu 3cm iar de fețele laterale cu 2cm și 4cm. Perimetrul bazei este egal cu 30cm. Să se afle aria totală și volumul paralelipipedului.	260cm^2 și 240cm^3
13	Baza unui paralelipiped drept este un paralelogram cu lungimile de 1cm și 4cm și unghiul ascuțit de 60°. Diagonala mai mare a paralelipipedului are lungimea de 5cm. Să se afle volumul paralelipipedului.	$4\sqrt{3}cm^3$
14	Baza prismei drepte $ABCA_1B_1C_1$ este triunghiul ABC, în care $m(\sphericalangle A) = 90°$, AB=15cm, AC=20cm. Determinați distanța de la vârful A_1 la muchia BC, dacă volumul prismei este egal cu 750cm^3.	13cm
15	Baza unui paralelipiped drept este un paralelogram, la care una din diagonale este egală cu 17cm, iar laturile sunt de 9cm și 10cm. Aria totală a acestui paralelipiped este de 334cm^2. Să se afle volumul lui.	360cm^3
16	Într-un paralelipiped drept laturile bazelor sunt egale cu 13dm și 37dm, iar diagonala mai mare a bazei este egală cu 40dm. Raportul dintre muchia laterală și diagonala mai mare a paralelipipedului este 15:17. Să se afle volumul paralelipipedului.	36 m^3
17	Într-un paralelipiped drept laturile bazei sunt egale cu $2\sqrt{2}cm$ și 5cm și formează un unghi de 45°, diagonala mai mică a paralelipipedului este egală cu 7cm. Să se afle volumul lui.	60 cm^3
18	Într-un paralelipiped drept cu baza ABCD muchia AB=50cm, perpendiculara B_1E, coborâtă din vârful B_1 pe muchia AD, este egală cu 41cm și împarte AD în	17280 cm^3

	segmente AE=30cm și ED=18 cm. Să se afle volumul paralelipipedului.	
19	Diagonala unei prisme patrulatere regulate este egală cu 3,5cm, iar diagonala feței laterale cu 2,5 m. Să se afle volumul.	3m^3
20	Baza unui paralelipiped drept este un paralelogram, la care laturile sunt de 3cm și 5cm și formează un unghi de 60^o, aria secțiunii diagonale mai mari este egală cu 63cm^2. Să se afle diagonala mai mică a paralelipipedului, aria laterală și volumul.	10cm, 144cm^2 și $\frac{135\sqrt{3}}{2}$cm^3
21	Baza unei prisme drepte este un triunghi dreptunghic, al cărui catete se raportă ca 24:7, raportul dintre ipotenuza bazei și înălțimea prismei este de 5:2, aria laterală are 140m^2. Să se afle volumul prismei.	105 m^3
22	Înălțimea unei prisme triunghiulare drepte este egală cu 5m, volumul ei este egal cu 24m^3, iar ariile fețelor laterale se raportă ca 17:17:16. Să se afle lungimele laturilor bazei.	3,4m, 3,4m, 3,2m
23	Baza unei prisme drepte este trapezul ABCD, la care laturile paralele AD=39cm și BC=22cm, iar cele neparalele AB=26cm și CD=25cm. Aria secțiunei AA_1C_1C este de 400cm^2. Să se afle volumul acestei prisme.	7320 cm^3
24	Diagonala unui paralelipiped dreptunghic este egală cu 35cm, iar muchiile laterale se raportă ca 2:3:6. Să se afle volumul paralelipipedului.	4500cm^2
25	La o prizmă triunghiulară dreaptă laturile bazei sunt de 10cm, 17cm și 21cm, iar înălțimea este de 18cm. Să se afle aria secțiunei, duse prin muchia laterală și înălțimea mai mică a bazei.	144cm^2
26	Lungimea muchiei laterale a unei prisme patrulatere regulate este de două ori mai mare decît lungimea laturii bazei. Să se afle volumul prismei, știind că aria laterală a ei este egală cu 128cm^2.	128 cm^3
27	Muchiile unui paralelipiped dreptunghic se raportă ca 3:7:8, iar aria totală este de 808cm^2. Să se afle muchiile.	6cm,14cm, 16cm
28	Într-un paralelipiped drept laturile bazei sunt egale cu 6cm și 8cm și formează un unghi de 30^0, iar muchia	188 cm^2

	laterală este egală cu 5cm. Să se afle aria totală a paralelipipedului	
29	Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ unde O este centrul bazei ABC. Știind că $C_1O=5cm$ și $C_1C=3cm$, să se afle aria laterală a prismei.	$36\sqrt{3}cm^3$
30	Lungimile laturilor bazei unui paralelipiped drept sunt egale cu 8*cm* și 15*cm*, iar măsura unghiului dintre ele este egală cu 60°. Diagonala mică a paralelipipedului formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 30°. Să se afle volumul paralelipipedului.	780 cm^3
31	Într-un paralelipiped drept lungimile laturilor bazei sunt 13*cm* și 37*cm*, iar diagonala mare a bazei are lungimea 40*cm*. Raportul dintre lungimea muchiei laterale și lungimea diagonalei mari a paralelipipedului este de 15:17. Să se afle volumul paralelipipedului.	36000 cm^3
32	Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ unde M este mijlocul lui AB. Știind că $C_1M=10cm$ și $C_1C=8cm$, să se afle aria laterală a prismei.	$96\sqrt{3}cm^2$
33	Baza unui paralelipiped drept este un romb cu aria de $1cm^2$. Ariile secțiunii diagonale în paralelipiped sunt egale cu $3cm^2$ și $6cm^2$. Să se afle volumul paralelipipedului.	$3cm^2$
34	Baza unei prisme drepte este un romb, diagonalele prismei sunt de 8cm și 5cm, înălțimea este de 2cm. Să se afle latura bazei.	4,5cm
35	Într-o prismă triunghiulară dreaptă lungimile laturilor bazei se raportă ca 17:10:9, iar muchia laterală are lungimea de 16*cm*. Știind ca aria totală a prismei este egală cu $1440cm^2$, să se afle lungimile laturilor bazei prismei.	34cm, 20cm,18cm
36	Baza unei prisme drepte este un triunghi isoscel, în care raportul lungimilor laturii laterale și ale bazei este 5:6. Înălțimea prismei are aceeaș lungime ca și înălțimea corespunzătoare laturii laterale în triunghiul din bază. Știind că aria totală a prismei este egală cu $2520cm^2$, să se afle lungimile muchiilor prismei.	25cm, 24cm, 30cm
37	Să se afle aria totală a unei prisme patrulatere regulate, dacă dagonala ei este egală cu 14cm, iar diagonala feței laterale este egală cu 10cm.	$(192+32\sqrt{6})cm^2$
38	Diagonala unei prisme patrulatere regulate este egală cu 9cm, iar aria ei totală este egală cu $144cm^2$. Să se afle latura bazei și muchia laterală.	6cm și 3cm sau 4cm și 7cm

39	Să se afle aria totală a unei prisme triunghiulare drepte, dacă înălimea ei este egală cu 50cm, iar laturile bazei sunt 40cm, 13cm și 37cm.	4980 cm^2
40	Într-o prismă triunghiulară dreaptă laturile bazei sunt egale cu 25dm, 29dm și 36dm, iar aria totală este de $1620dm^2$. Să se afle aria laterală și înălțimea prismei.	$9m^2$ și 1m
41	Baza unei prisme drepte este un trapez isoscel ABCD cu laturile AB=CD=13cm, BC=11cm și AD=21cm, aria secțiunii diagonale este egală cu $180cm^2$. Să se afle aria totală a prismei și aria secțiunii AB_1C_1D.	$906cm^2$ și $240cm^2$
42	Într-un paralelipiped drept laturile bazei de 3cm și 4cm formează un unghi de 60^o, iar muchia laterală este media proporțională între laturile bazei. Să se afle diagonalele acestui paralelipiped.	5m și 7cm
43	Într-un paralelipiped drept laturile bazei sunt de 17cm și 28cm, una din diagonalele bazei este egală cu 25cm, suma ariilor secțiunilor diagonale se raportă la aria bazei ca 16:15. Să se afle ariile secțiunilor diagonale.	$273cm^2$ și $175cm^2$
44	Laturile bazei unui paralelipiped drept au lungimile de $3cm$ și $8cm$,iar măsura unghiului dintre ele este de 60°. Aria laterală a paralelipipedului este egală cu $220cm^2$. Să se afle aria totală și aria secțiunii diagonale mai mici a paralelipipedului.	$(220+24\sqrt{3})cm^2$
45	Laturile bazei unui paralelipiped drept au lungimele de 10cm și 17cm , iar una dintre diagonalele bazei are 21cm. Diagonala mai mare a paralelipipedului are lungimea 29cm. Să se afle aria totală a paralelipipedului	1416 cm^2
46	Să se afle lungimea diagonalei unei prisme patrulatere regulate, știind că diagonala bazei este de $8cm$, iar diagonala unei fețe laterală este de $7cm$.	9cm
47	Într-un paralelipiped drept muchia laterală este egală cu 1m, laturile bazei sunt egale cu 23dm și 11dm, iar diagonalele bazei se raportă ca 2:3. Să se afle ariile secțiunilor diagonale.	$2m^2$ și $3m^2$
48	Într-un paralelipiped dreptunghic laturile bazei au lungimile de 7cm și 24cm, iar înălțimea paralelipipedului este de 8cm. Să se afle aria secțiunii diagonale a paralelipipedului.	200 cm^2
49	Baza unui paralelipiped drept este un romb cu diagonalele de 6cm și 8cm. Diagonala feței laterale a paralelipipedului are lungimea de 13cm . Să se afle aria suprafeței totale a paralelipipedului.	288 cm^2

50	Într-un paralelipiped dreptunghic muchia laterală este de 5cm, aria secțiunii diagonale de $205cm^2$ și aria bazei de $360cm^2$. Să se afle laturile bazei.	40cm și 9cm
51	Baza unui paralelipiped drept este un paralelogram cu un unghi de 120° și laturile de $3cm$ și $4cm$. Diagonala mai mica a paralelipipedul este egală cu diagonala mare a bazei. Să se afle volumul paralelipedului.	$36\sqrt{2}cm^3$
52	Latura bazei unei prisme triunghiulare regulate $ABCA_1B_1C_1$ este de 2cm, iar diagonala feței laterale are $\sqrt{5}$cm. Să se afle măsura unghiului format de planul (A_1BC) și planul bazei prismei.	30^0
53	Ari bazei unei prisme triunchiulară drepte este egală cu $4cm^2$, iar ariile fețelor laterale sunt egale cu $9cm^2$, $10cm^2$ și respectiv $17cm^2$. Să se afle volumul prismei.	$12cm^3$
54	Baza unui paralelipiped drept este un paralerogram cu un unghi de 30° și aria de $4cm^2$. Ariile fețelor laterale ale paralelipipedului sunt egale cu $6cm^2$ și $12cm^2$. Să se afle volumul paralelipipedului.	$12cm^3$
55	Baza unei prisme drepte este trapezul isoscel $ABCD$ cu laturile $AB=CD=13cm$, $BC=11$cm, $AD=21cm$. Aria scțiunii diagonale a prismei este egală cu $180cm^2$. Să se afle aria totală a prismei.	$906cm^2$
56	Aflați lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic care are aria totală de $292cm^2$, iar suma lungimilor tuturor muchiilor de $84cm$.	$\sqrt{149}cm$
57	Într-un paralelipiped drept muchiile care pleacă din acelaș vârf sunt egale cu 1m, 2m și 3m. Cele două muchii mai mici formează un unghi de 60°. Să se afle diagonalele acestui paralelipiped.	4m și $\sqrt{12}$ m

§2 Piramida

$$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$$
$$A_t = A_l + A_b$$
$$V = \frac{A_b \cdot H}{3}$$

Teoremă: Dacă muchiile laterale ale piramidei sunt congruente, atunci poligonul de la bază este inscriptibil și înălțimea piramidei trece prin centrul cercului circumscris bazei.

Teoremă: Dacă fețele laterale ale piramidei formează cu planul bazei unghiuri diedre congruente, atunci în poligonul de la bază poate fi înscris un cerc, iar înălțimea piramidei trece prin centrul acestui cerc.

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Într-o piramidă patrulateră regulată muchia laterală formează cu planul bazei un unghi de 60°, iar apotema piramidei are lungimea $3\sqrt{7}$cm. Să se afle aria laterală șli volumul piramidei.	$36\sqrt{7}cm^2$ și $36\sqrt{6}cm^3$
2	Înălțimea unei piramide triunghiulare regulate este de $2cm$, măsura unghiului diedru de la baza piramidei este de 30°. Să se afle aria laterală a piramidei.	$72cm^2$
3	O piramidă patrulateră regulată are latura bazei de 12cm și volumul de $384cm^3$. Să se afle lungimea înălțimii și aria laterală a piramidei.	8cm și $240cm^2$
4	Baza piramidei VABC este triunghiul ABC, cu AB =BC = 10cm, AC = 12 cm. Se cunoaște că lungimea înălțimii piramidei ete egală cu $6\frac{1}{4}cm$, iar muchiile laterale sunt congruente. Să se afle lungimea muchiei laterale	$\frac{25\sqrt{2}}{4}cm$
5	Într-o piramidă patrulateră regulată muchia laterală are lungimea de $2\sqrt{6}cm$ și formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 30°. Determinați aria laterală a piramidei.	$12\sqrt{15}cm$
6	Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic cu catetele de 6 cm și 8cm. Unghiurile diedre de la baza piramidei sunt congruente și au măsura de 60°. Să se determine aria laterală a piramidei.	$48cm^2$

7	Fie VABC o piramidă triunghiulară , în care $m(\measuredangle ABC) = 90°$, AB = 15cm și BC=20cm, iar VB⊥(ABC). Distanța de la puctul V la dreapta AC este egală cu 13cm. Determinați volumul piramidei VABC.	$250cm^3$
8	Baza piramidei VABC este triunghiul isoscel ABC, în care AB=AC=10cm, BC=12cm. Muchiile laterale ale piramidei sânt congruente. Determinați măsura unghiului format de muchia laterală și planul bazei, dacă volumul piramidei este egal cu $100\sqrt{3}cm^3$.	60^0
9	Muchia laterală a unei piramide triunghiulare regulate este de 5cm, iar latura bazei este de $4\sqrt{3}cm$. Determinați volumul piramidei.	$12\sqrt{3}cm^3$
10	Baza piramidei VABC este triunghiul ABC, cu AB =BC = 10cm, AC = 12 cm. Unghiurile diedre de la baza piramidei sânt de 45°. Determinați lungimea muchiei VA a piramidei.	$3\sqrt{6}cm$
11	Fie piramida patrulateră regulată VABCD, în care VAC este un triunghi cu catetele de 6cm. Determinați volumul piramidei.	$36\sqrt{2}\,cm^3$
12	Rombul ABCD cu aria de $18\sqrt{3}cm^2$ și $m(\measuredangle ABC) = 60^{\circ}$ este baza piramidei VABCD. Muchia VB este perpendiculară pe planul bazei și are lungimea de $6\sqrt{3}$ cm. Determinați măsura unghiului format de muchia VD cu planul bazei piramidei.	45°
13	Muchia laterală a unei piramide patrulatere regulate este congruentă cu diagonala bazei și are lungimea de 6cm. Determinați volumul piramidei.	$18\sqrt{3}cm^3$
14	Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic cu catetele de 6 cm și 8cm. Toate muchiile laterale formează cu planul bazei unghiuri cu măsurile de câte 30°. Să se afle volumul piramidei.	$\frac{40\sqrt{3}}{3}cm^3$
15	Baza unei piramide este un trapez isoscel cu un unghi de 60°. Înălțimea piramidei este de $\sqrt{3}\,cm$ și este congruentă cu raza cercului înscris în trapezul din bază. Determinați volumul piramidei.	$8cm^3$
16	Baza piramidei VABCD este rombul ABCD cu diagonalele de 40cm și 30cm. Determinați volumul piramidei VABCD, dacă se cunoaște că muchia VA este perpendiculară pe planul bazei, iar distanța de la vârful V la dreapta BC este de 26cm.	$2000cm^3$
17	Baza piramidei VABCD este trapezul isoscel ABCD , în care $AB \parallel CD$, AB = 4 cm, CD = 2cm, iar diagonalele sunt	2 cm

	reciproc perpendiculare. Muchiile laterale ale piramidei sunt de 3 cm. Determinați lungimea înălțimii piramidei.	
18	Într-o piramidă patrulateră regulată aria bazei este de $64cm^2$, iar muchia laterală este de $\sqrt{41}cm$. Determinați volumul piramidei.	64 cm^3
19	Baza piramidei VABC este triunghiul echilateral ABC. Fața VAB, unde VA=VB, este perpendiculară pe planul bazei iar celelalte două fețe laterale formează cu planul bazei unghiuri de 45°. Înălțimea piramidei este de $2\sqrt{3}cm$. Determinați lungimea muchiei bazei piramidei.	8 cm
20	Baza unei piramide este un triunghi cu laturile de 13 cm, 12 cm, 5cm. Toate muchiile laterale formează cu planul bazei unghiuri cu măsurile de câte 45^o. Să se afle volumul piramidei.	$65cm^3$
21	Fie o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de 8cm și înălțimea de $4\sqrt{3}$cm . Să se afle măsura unghiului format de o față laterală și planul bazei, aria laterală și volumul.	$128cm^2$, 60°, $\frac{256\sqrt{3}}{3}cm^3$
22	Baza unei piramide este un romb cu diagonalele de 30cm și 40cm, iar înălțimea piramidei este de 12cm și trece prin punctul de intersecție a diagonalelor rombului . Determinați măsura unghiului diedru de la baza piramidei.	45°
23	Aria bazei unei piramide patrulatere regulate este egală cu $36cm^2$. Determinați lungimea înălțimii piramidei, dacă se cunoaște că aria laterală este egală cu $60cm^2$.	4cm
24	Laturile bazei unei piramide triunghiulare au lungimile de 7cm, 8cm și 9cm, iar unghiurile diedre de la baza piramidei sunt congruente. Știind că volumul piramidei este egal cu $40cm^3$, să se afle aria laterală a piramidei.	$60cm^2$
25	Volumul unei piramide triunghiulare regulate este $\frac{2}{\sqrt{3}}cm^3$, iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi de 60^o. Să se afle lungimea înălțimii piramidei.	2cm
26	Baza unei piramide este un romb cu latura de 12cm și un unghi de 60^o. Determinați volumul piramidei, dacă unghiurile diedre de la baza piramidei sunt de 30°.	$72\sqrt{3}cm^3$
27	Baza unei piramide este un romb cu latura de 25dm și cu diagonala mică de 30dm. Înălțimea piramidei trece prin vârful unghiului obtuz al bazei și este egal cu 32dm. Să se afle aria totală a acestei piuramide.	$24m^2$
28	Baza unei piramide este un triunghi cu laturile de 39cm,17cm și 28cm, muchiile laterale sunt egale fiecare cu 22,9cm. Să se afle volumul acestei piramide.	$420cm^3$

29	Baza unei piramide este un triunghi isoscel la care laturile congruente sunt egale cu 39cm iar baza cu 30cm. Unghiurile diedre de la bază sunt egale și fiecare este de 45°. Să se afle volumul acestei piramide.	$1800cm^3$
30	Baza unei piramide este un triunghi isoscel la care laturile congruente sunt egale cu 7cm iar baza cu 6cm. Vârful piramidei este egal depărtat de toate laturile bazei. Raportul dintre distanța de la vârf până la una din laturile bazei și înălțimea piramidei este de 5:4. Să se afle volumul acestei piramide.	$16cm^3$
31	Un romb cu latura de 15cm este baza unei piramide , în care fiecare față este înclinată sub un unghi de 45°. Aria laterală este de $3dm^2$. Să se afle volumul acestei piramide.	$500cm^3$
32	Să se afle latura bazei și apotema unei piramide triunghiulare regulate, dacă muchia laterală și aria laterală sunt respectiv egale cu 10cm și $144cm^2$.	16cm și 6cm sau 12cm și 8cm
33	Baza piramidei VABC este triunghiul ABC, în care AB=BC=5cm, AC=6cm. Distanța de la vârful V la latura BC este egală cu 5,2cm. Determinați lungimea muchiei VA, dacă se cunoaște că este perpendiculară pe pllanul bazei.	2cm
34	Baza piramidei VABC este triungiul ABC, în care $m(\sphericalangle A) = 90°$, AB=6cm, AC=8cm. Muchia VA este perpendiculară pe planul bazei piramidei și este congruentă cu mediana triunghiului ABC dusă din vârful A. Determinați volumul piramidei VABC.	$40cm^3$
35	Fie o piramidă triunghiulară cu laturile bazei de 9cm , 12cm și 15cm. Toate muchiile laterale ale piramidei formează cu planul bazei unghiuri cu măsura de 45°. Să se afle volumul piramidei.	$135cm^3$
36	Aria secțiunii diagonale a unei piramide patrulatere regulate este egală cu aria bazei. Determinați volumul piramidei, știind că lungimea muchiei laterale a piramidei este egală cu 5cm.	$\frac{20\sqrt{5}}{3}cm^3$
37	Aria laterală a unei piramide patrulatere regulate este egală cu $14{,}76m^2$, iar aria ei totală cu $18m^2$. Să se afle latura bazei și înălțimea piramidei.	1,8m și 4m
38	Determinați volumul unei piramide patrulatere regulate cu toate muchiile de 6cm.	$36\sqrt{2}cm^3$
39	Baza unei piramide este un romb cu diagonalele de 6m și 8m, înălțimea piramidei trece prin punctul de intersecție al diagonalelor rombului, care se găsește pe baza piramidei și este egal cu 1m. Să se afle aria laterală a acestei piramidei.	$26m^2$

40	Baza unei piramide este un paralelogram, la care laturile sunt de 20cm și 36cm, iar aria este egală cu 360cm^2. Înălțimea piramidei trece prin punctul de intersecție a diagonalelor bazei și este egală cu 12cm. Să se afle aria laterală a acestei piramide.	768cm^2
41	Baza unei piramide este un paralelogram, la care laturile sunt de 5m și 4m, iar una din diagonale cu 3m. Înălțimea piramidei trece prin punctul de intersecție al diagonalelor bazei și este egală cu 2m. Să se afle aria totală a acestei piramide.	$(22+\sqrt{136})$m^2
42	Baza unei piramide este un triunghi isoscel , la care o latură este egală cu 40cm, iar celelalte două au câte 25cm. Înălțimea piramidei trece prin vârful unghiului, format de laturile egale ale bazei și este egală cu 8cm.Să se afle aria laterală a acestei piramide.	540cm^2
43	Baza unei piramide este un triunghi cu laturile de 13cm,14cm și 15cm. Muchia laterală opusă laturii medii ca mărime a bazei e perpendiculară pe planul bazei și este egală cu 16cm. Să se afle aria totală a acestei piramide.	488cm^2
44	Baza piramidei SABC este triunghiul dreptunghic ABC, în care ipotenuza AB=26cm și cateta AC=24cm, muchia SA este perpendiculară pe planul bazei ABC și este egală cu 18cm. Să se afle aria laterală a acestei piramide.	6dm^2
45	Să se afle latura bazei unei piramide patrulater regulate dacă muchia laterală este egală cu 5cm, iar aria totală cu 16cm^2.	$\sqrt{2}$cm
46	Baza unei piramide este un patrat, înălțimea piramidei trece prin unul din vârfurile bazei . Să se afle aria laterală a acestei piramid, dacă latura bazei este egală cu 20dm, iar înălțimea este egală cu 21dm.	10m^2
47	Muchia laterală a unei piramide triunghiulară regulate are lungimea 6cm,iar volumul piramidei este egal cu 18cm^3.Să se afle măsura unghiului dintre muchia laterală și planul bazei.	45°
48	În piramida patrulateră regulată $SABCD$ latura bazei are lungimea 2cm, iar înălțimea piramidei are lungimea $\sqrt{2}cm$. Să se afle distanța dintre muchia laterală SA și diagonala BD a bazei piramidei.	1cm
49	Aria laterală a unei piramide patrulatere regulate este egală cu 48cm^2. Unghiul format de o față laterală cu planul bazei este egal cu 60°. Calculați volumul piramidei.	$24\sqrt{2}$cm^3.
50	Baza unei piramide este un triunghi isoscel cu baza de 6cm și înălțimea corespunzătoare bazei de 9cm.Toate muchiile	12cm

	laterale au lungimile de cîte 13cm. Să se afle lungimea înălțimei piramidei.	
51	Baza unei piramide este un triunghi isoscel cu baza de 12cm și latura laterală de 10cm. Toate fețele laterale formează cu planul bazei unghiuri cu măsura de 45°. Să se afle lungimea înălțimii piramidei.	3cm
52	Un plan paralel cu planul bazei unei piramide împarte înăltimea piramidei în raportul 3:4, socotind de la vîrf.Aria secțiunii obținute este cu 200cm^2 mai mică decît aria bazei. Să se afle aria bazei piramidei.	245cm^2
53	Fie piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu baza ABC și M mijlocul lui AB.Știind că BC= $3\sqrt{3}cm$ și VC=5cm, să se afle aria triunghiulară MVC.	9cm^2
54	Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei 2cm și înălțimea de $\sqrt{2}cm$. Să se afle distanța dintre muchia laterală VA și diagonala BD a baza piramidei.	1cm
55	Într-o piramidă patrulateră regulată lungimea înălțimii este egală cu 4cm, iar lungimea muchiei laterale este egală cu $\sqrt{34}cm$. Să se afle volumul piramidei.	48cm^3
56	Volumul unei piramide triunghiulare regulate este egal cu $\frac{2\sqrt{3}}{3}$cm^3, iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 60°. Determinați înălțimea piramidei.	2cm
57	Să se afle volumul piramidei triunghiulare regulate care are înălțimea $\sqrt{3}cm$, dacă se știe că unghiurile plane de la vârf sunt drepte.	4,5cm^3
58	Baza unuei piramide patrulatere este un pătrat cu diagonala de $4\sqrt{2}$cm.Una din muchiile laterale ale piramidei are lungimea de 3cm și este perpendiculară pe planul bazei. Să se afle aria totală a piramidei.	48 cm^2
59	Baza unei piramide patrulatere este un pătrat cu latura de 2cm. Una din muchiile laterale ale piramidei este perpendiculară pe planul bazei, iar două muchii laterale formează cu planul bazei unghiuri cu măsura de 60°. Să se afle aria totală a piramidei.	$4(3+\sqrt{3})cm^2$
60	Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic cu lungimile catetelor egale cu 12cm și 16cm.Detrminați volumul piramidei, dacă muchiile laterale sunt congruiente și au lungimea egală cu $10\sqrt{5}$cm.	$640cm^3$
61	Baza unei piramide patrulatere este un romb cu unghiul ascuțit de 30^0. Aria laterală a piramidei este egală cu 4cm^2.	$\sqrt{2}cm$

	Măsura unghiului diedru de la baza piramidei este egal cu 60°. Să se afle lungimea laturii bazei piramidei.	
62	Baza unei piramide triunghiulare este triunghi isoscel culatura laterală de $10cm$ și baza de $12cm$. Toate muchiile lateral ale piramidei formează cu planul bazei unghiuricu măsurile de 45°. Să se afle volumul piramidei.	100cm^3
63	Baza piramidei $VABC$ este triunghiul dreptunghic ABC cu catetele AB=$20cm$ și BC=$21cm$.Fețele laterale VAB și VAC sunt perpendiculare pe planul bazei,iar fața VBC formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 60°. Să se afle volumul piramidei.	$1400\sqrt{3}cm^3$
64	În piramida triunghiulară regulată VABC latura bazei are lungimea $6\sqrt{3}$cm, iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi, tangenta căruia este agală cu $\frac{4}{3}$. Să se afle aria triunghiului MVC unde M este mijlocul laturei AB.	36 cm^2
65	Într-o piramida triunghiulară regulată aria bazei este de două ori mai mare decît aria secțiunii duse printr-o muchie laterală și înălțimea piramidei. Să se afle măsura unghiului format de o față laterală cu planul bazei piramidei.	60°
66	Aria totală a unei piramide triunghiulare regulate este egală cu $9\sqrt{3}cm^2$. Cosinusul unghiului diedru de la baza piramidei este egal cu $\frac{1}{3}$. Să se afle lungimea apotemei bazei piramidei.	$\frac{\sqrt{3}}{2}$cm
67	Baza unei piramide este un triunghi isoscel cu baza $12cm$ și latura laterală de $10cm$. Toate fețele laterale ale piramidei formează cu planul bazei unghiuri cu măsura de 45°. Să se afle lungimea înălțimii piramidei.	3cm
68	O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de $6\sqrt{3}$cm și înălțimea de $3\sqrt{3}$cm . Să se afle măsura unghiului diedru format de planul bazei cu o față laterală și aria totală a piramidei.	$81\sqrt{3}\text{cm}^2$ și 60°
69	Baza unei piramide este un dreptunghi cu aria de 12cm^2. Două fețe laterale ale piramidei sunt perpendiculare pe planul bazei, iar celecalte două fețe laterale formează cu planul bazei unghiuri cu măsurile de 30° și 60°. Să se afle aria totală a piramidei.	$12(2+\sqrt{3})\text{cm}^2$
70	Baza unei piramide este un trapez isoscel circumscribil cu bazele de 4cm și 16cm. Toate unghiurile diedre de la baza piramidei sunt de 60°. Determinași lungimea înălțimii piramidei.	$4\sqrt{3}cm$

71	Baza unei piramide este un triunghi cu lungimea laturilor de $6cm$, $5cm$, $5cm$.Toate fețele laterale ale piramidei formează cu planul bazei unghiuri diedre cu măsura de 45°. Să se afle volumul piramidei.	6cm^3
72	Baza unei piramide este un triunghi cu lungimea laturilor de $13cm$, $14cm$ și $5cm$. Toate fețele laterale ale piramidei formează cu planul bazei unghiuri diedre cu măsura de 45°. Să se afle aria laterală a piramidei.	$84\sqrt{2}\text{cm}^2$
73	Lungimea înălțimii unei piramide patrulatere regulate este de trei ori mai mică decât lungimea muchiei laterale, iar lungimea apotemei este de $3\sqrt{5}$cm. Să se afle volumul piramidei.	144cm^3
74	Baza unei piramude este un paralelogram cu laturile de $10cm$ și $18cm$ și aria de $90cm^2$. Piciorul înălțimii piramidei coincide cu punctul de intersecție al diagonalelor bazei și are înălțimea lungimea de $6cm$. Să se afle aria laterală a piramidei.	192cm^2
75	Să se afle aria totală a unei piramide triunghiulare regulate care are latura bazei de 6cm, iar unghiul diedru de la bază are măsura de 60°.	$27\sqrt{3}\text{cm}^2$
76	Baza unei piramide este un paralelogram cu laturile de $10cm$ și $8cm$, iar una dintre diagonalele lui are $6cm$. Înălțimea piramidei are lungimea $4cm$ și piciorul înălțimea piramidei coincide cu punctul de intersecție al diagonalelor bazei. Să se afle aria totală a piramidei.	$8(11+\sqrt{34})\text{cm}^2$
77	Baza unei piramide este triunghi cu laturile de lungimea $13cm$, $12cm$, $5cm$.Toate mucgiile laterale ale piramidei formează cu planul bazei unghiuri cu măsura de 45°. Să se afle volumul piramidei.	65cm^3
78	Fie o piramidă patrulateră regulată cu latura de $10cm$ și înălțimea de $12cm$. Să se afle distanța de la centrul bazei piramidei la o muchie laterală.	$\frac{60\sqrt{97}}{97}\text{cm}$
79	Fie piramida triunghiulară regulată cu raza cercului circumscris bazei de $4cm$ și măsura unghiului format de planul bazei și feței laterale de 60°. Să se afle volumul piramidei.	$24\ \text{cm}^3$
80	Volumul unei piramide patrulatere regulate este de 64cm^3, iar aria bazei de 64cm^2. Determinați aria laterală a piramidei.	80cm^2

§3 Trunchiul de piramidă

$$A_l = \frac{(P_B + P_b)a_t}{2}$$
$$A_t = A_l + A_B + A_b$$
$$V = \frac{1}{3}h\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)$$

Nr	Conținutul itemilor	răspuns
1	Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, laturile bazelor sunt de 6cm și 3cm, iar înălțimea este de 1cm. Determinați măsura în grade a unghiului, format de muchia laterală cu planul bazei mari.	30°
2	Laturile bazelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sunt de 3cm și 1cm, iar unghiul diedru de la baza mare este de 60°. Determinați aria secțiunii diagonale a trunchiului de piramidă.	$2\sqrt{6}\ cm^2$
3	Laturile bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sunt de $6\sqrt{3}cm$ și $4\sqrt{3}cm,$ iar muchia laterală este de 4 cm. Determinați măsura unghiului format de muchia laterală cu planul bazei mari a trunchiului.	60°
4	Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată ,raportul dintre apotemă și laturile bazelor este de 5:8:2 , iar volumul este egal cu $\frac{7}{4}$ m^3. Să se afle aria totală a trunchiului de piramidă.	$\frac{21}{2}$ m^2
5	Să se afle volumul unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată, la care laturile bazelor sunt de 30m și 20m, iar aria laterală este echivalentă cu suma bazelor.	*1900m²*
6	Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată înălțimea este egală cu 12cm, diferența laturilor bazelor este de 10cm și aria totală egală cu 512cm². Să se afle laturile bazelor.	*2cm și 12cm*
7	Volumul unui trunchi de piramidă este egal cu 1720m³, înălțimea lui cu 20m, raportul dintre laturile omoloage ale celor două baze este de 5:8. Să se afle ariile bazelor.	*128m² și 50m²*
8	Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată , apotema este egală cu 12cm, muchia laterală este egală cu 13cm și aria laterală cu 720cm². Să se afle laturile bazelor.	*20cm și 10cm*
9	Într-un trunchi de piramidă triunghiulară înălțimea este de 10cm, laturile unei baze sunt de 27m, 29m și 52m. Perimetrul celeilalte baze este de 72m. Să se afle volumul trunchiului de piramidă.	*1900m³*
10	Diagonalele unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sunt perpendiculare pe muchiile laterale, latura bazei de jos este egală	$\frac{17}{9}$ *cm,*

	cu 9cm și muchia laterală cu 8cm. Să se afle latura bazei de sus, înălțimea trunchiului de piramidă și distanța dintre dintre punctul de intersecție al diagonalelor lui și planul bazei de jos.	$\frac{56}{9}cm$ $\frac{36}{7}cm$
11	Înălțimea unui trunchi de piramidă patrulateră regulată este agală cu 4m. Laturile bazelor sunt egale cu 2m și 8m. Să se afle ariile secțiunelor diagonale.	$20\sqrt{2}cm$
12	Într-un trunchi de piramidă triunghiulară înălțimea are 10*cm*, iar lungimile laturilor unei baze sunt de 27*cm*, 29*cm, 52cm*. Știind că perimetrul celeilalte baze este de 72*cm*, să se afle volumul trunchiului.	*1900 cm³*
13	Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are înălțimea de 3*cm* și volumul de 38cm^3. Știind că raportul areiilor bazelor este $\frac{4}{9}$, să se afle aria laterală a trunchiului.	$10\sqrt{19}cm^2$
14	Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are ariile bazelor de 100cm^2 și 36cm^2 , iar lungimele muchiilor laterale de câte $10\sqrt{2}$cm . Să se afle volumul trunchiului.	$\frac{1568\sqrt{3}}{3}cm^3$
15	Să se afle volumul unui trunchi de piramidă patrulateră regulată care are diagonala de 18cm și laturele bazelor de 14cm și 10cm.	$872cm^3$

§4 Corpuri rotunde

Cilindru: $A_l = 2\pi RH, \quad A_t = 2\pi R(H+R), \quad V = \pi R^2 H$

Conul: $A_l = \pi RG,\ A_t = \pi R(G+R),\ V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

Trunchiul de con: $A_l = \pi g(R+r)$

$A_t = \pi g(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2,\ V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + R\cdot r)$

Sfera: $A = 4\pi R^2,\ V = \frac{4\pi R^3}{3}$

Exerciții

Nr	Conținutul itemilor	Răspuns
1	Generatoarea unui con circular drept formează cu planul bazei un unghi de 30° . Determinați aria laterală a conului, dacă se știe că volumul lui este egal cu $8\pi\ cm^3$.	$8\sqrt{3}\pi\ cm^2$
2	Fie un con circular drept cu vârful V și raza bazei de $2\sqrt{6}cm$. Coarda AB din baza conului are lungimea de $5\sqrt{3}cm$, iar $m(\sphericalangle AVB) = 120°$. Determinați volumul conului.	$8\pi cm^3$

3	Aria laterală a unui cilindru circular drept este egală cu $32\sqrt{2}\pi cm^2$. Lungimea diagonalei secțiunii axiale a cilindrului este de 3 ori mai mare decât lungimea înălțimii cilindrului. Determinați lungimea înălțimii cilindrului.	4 cm
4	Diagonala secțiunei axiale a unui cilindru circular drept are lungimea egală cu 8cm și formează cu planul bazei cilindru-lui un unghi de 60^o. Determinați aria laterală a cilindrului.	$16\sqrt{3}\pi cm^2$
5	Aria laterală a unui con circular drept este egală cu $16\sqrt{10}\pi cm^2$. Lungimea înălțimii conului este de 3 ori mai mare decât lungimea razei bazei conului. Determinați volumul conului.	$64\pi\ cm^3$
6	Generatoarea unui con circular drept este de 11 cm. Punctele A,B și C aparțin cercului din baza conului, astfel încât AB = $3\sqrt{3}\ cm$, BC = $5\sqrt{3}\ cm$ și $m(\measuredangle ABC) = 120^0$. Determinați volumul conului.	$\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$
7	Generatoarea unui con circular drept formează cu planul bazei un unghi de 30^o. Determinați volumul conului, dacă aria laterală este egală cu $8\sqrt{3}\pi cm^2$	$8\pi cm^3$
8	Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este un trapez cu bazele de 12 cm și 6 cm și unghiul de la baza mare de 30^0. Determinați aria laterală a trunchiului de con.	$18\sqrt{3}\pi cm^2$
9	Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi dreptunghic cu catetele de $\sqrt{2}\ cm$. Determinați aria laterală a conului.	$\sqrt{2}\pi cm^2$
10	În baza unui con circular drept este înscris un triunghi cu laturile de 15cm, 21cm și 24cm. Determinați volumul conului, dacă se cunoaște că generatoarea este de 14cm.	$343\pi cm^3$
11	Într-un trunchi de con circular drept, ariile bazelor sunt egale cu πcm^2 și $16\pi cm^2$, iar volumul este egal cu $28\pi cm^3$. Determinați aria laterală a trunchiului de con.	$25\pi cm^2$
12	Aria bazei unui cilindru circular drept este egală cu aria laterală și este egală cu $16\pi cm^2$. Determinați volumul cilindrului.	$32\pi cm^3$

Observații