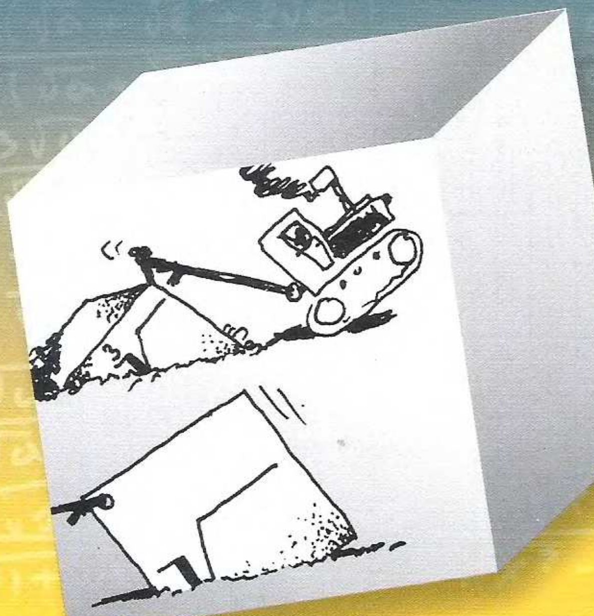
МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ

А. Х. Шахмейстер

Корни



Практикум
Тренинг
Контроль

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Редактор:
Кандидат пед. наук, доцент кафедры
математики МИОО А. В. Семенов.

Рецензенты:
Доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ Г. Ю. Ризниченко,
Заслуженный учитель РФ Т. И. Курсиш,
Заслуженный учитель РФ Е. Б. Лившиц.

Рекомендовано
Московским институтом открытого образования (МИОО)
и Московским центром непрерывного математического
образования (МЦНМО) в качестве пособия для школьников,
абитуриентов и преподавателей.

Шахмейстер А. Х.
Ш 32 Корни. — 4-е изд. — СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс» :
М.: Издательство МЦНМО, 2011. — 184 с.: илл. — ISBN 978-5-98712-019-4,
ISBN 978-5-91281-043-5, ISBN 978-5-94057-794-2

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов, преподавателей.

ISBN 978-5-94057-794-2 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-98712-019-4 (ООО «Петроглиф»)
ISBN 978-5-91281-043-5 (ООО «Виктория плюс»)

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович

КОРНИ

Научный редактор серии *А. В. Семенов*
Художник *Ю. Н. Куликов*
Компьютерная Верстка *С. С. Афонин*
Корректоры *Е. Г. Никитина, И. Б. Смирнов, А. Б. Смирнов*

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО
119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.
Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.
E-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»
В Санкт-Петербурге: (812) 516-5811, (812) 516-5805,
В Москве (филиал): (495) 488-3005.
E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; www.victory.sp.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»
193171, С.-Петербург, Фарфоровская 18, кв 1.
Тел.: (812) 943-8076; факс: (812) 560-0598.
E-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru.

Посвящается памяти
Заслуженных учителей России:

Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Владимира Леонидовича Ильина

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Программа элективного курса для учащихся 8-10 классов (20 – 25 уроков).

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1 – 6 (+1)	**Квадратные корни (стр. 5 – 41)** Практикум 1, 2 (примеры по выбору учителя, с учётом возможностей учащихся). Тренировочная работа 1 (1, 3, 7, 9). Практикум 3. Тренировочная работа 2 (3, 5, 8, 10). Тренировочная работа 3 (2, 3, 5). Практикум 5. Практикум 6. Проверочная работа 2 (1, 7, 8, 10).
7 – 12 (+2)	**Степени с натуральными показателями (стр. 42 – 44)** Практикум 7. **Степени с дробными показателями (стр. 45 – 72)** Практикум 8. Упражнения: 1 (2, 5, 7, 10); 2 (2, 3, 8); 3 (3, 8, 10); 4 (5, 8). Тренировочная работа 5: раздел 1 (четные); раздел 2 (нечетные); раздел 3 (1, 4); раздел 4 (4, 5, 6). Проверочная работа 4 (3, 4, 6, 10, 12, 14, 19, 24, 28, 30). Практикум 9. Тренировочная работа 6 (2, 3, 7, 10, 12). Практикум 10.
13 – 20 (+2)	**Решение более сложных примеров (стр. 73 – 89)** Практикум 11. Тренировочная работа 7 (1, 4, 7, 11, 12, 14). **Подготовительные карточки (стр. 90 – 113)** Карточка 1 (1, 2, 4). Карточка 2 (2, 4). Карточка 3 (3, 4). Карточка 4 (2, 3). Карточка 5 (4). Карточка 6 (2). Карточка 8 (2, 4). Карточка 11 (1, 3). **Тренировочные карточки (стр. 114 – 140)** Карточка 1 (3). Карточка 2 (2, 3). Карточка 5 (3). Карточка 6 (1, 3).

Программа подготовлена, составлена и апробирована на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

Введение

Напомним определение корня n-й степени из числа a. Корнем n-й степени из числа a называется такое число b, n-я степень которого равна a. То есть $\sqrt[n]{a}=b$ при $b^n=a$. Если $n=2k-1$, то есть нечетная степень, то никаких проблем нет. А вот если $n=2k$, то есть четная степень, то возникают проблемы.

Например:

$\sqrt{25}=5$, так как $5^2=25$; $\quad \sqrt{25}=-5$, так как $(-5)^2=25$.

Ну и что в этом плохого? На первый взгляд все нормально, но как в таком случае складывать и вычитать корни?

$$\sqrt{4}+\sqrt{9}=\left[\begin{aligned} 2+3&=5,\\ 2-3&=-1,\\ -2+3&=1,\\ -2-3&=-5.\end{aligned}\right.$$

Никакой однозначности. Ну, и какой случай выбрать? Вот, чтобы такой неразберихи не было, вводится понятие арифметического корня четной степени из числа a, как неотрицательного числа b, четная степень которого равна a. То есть

$$\sqrt[2k]{a}=b, \quad \text{если} \quad \begin{cases} b\geqslant 0,\\ b^{2k}=a.\end{cases}$$

Тогда $\sqrt{9}=3$ (и только), $\sqrt[4]{16}=2$ и т.д.

<u>Пример 1.</u> При каких a справедливо $\sqrt{a^3}=-a$?

По определению $\begin{cases} -a\geqslant 0,\\ a^3=a^2\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a\leqslant 0,\\ a^3\geqslant 0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a\leqslant 0,\\ a\geqslant 0,\end{cases}$

то есть при $a=0$.

<u>Пример 2.</u> $\sqrt{a^2}=a \Longleftrightarrow \begin{cases} a\geqslant 0,\\ a^2=a^2.\end{cases}$ Следовательно $a\in[0;+\infty)$.

1

Квадратные корни

Некоторые свойства квадратных корней

1) $$\sqrt{a\cdot b} = \begin{cases} \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}, & a \geqslant 0;\ b \geqslant 0, \\ \sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}, & a < 0;\ b < 0. \end{cases}$$

2) $$\sqrt{\frac{a}{b}} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, & a \geqslant 0;\ b > 0, \\ \dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}, & a < 0;\ b < 0. \end{cases}$$

3) $$b\sqrt{a} = \begin{cases} \sqrt{a\cdot b^2} & a \geqslant 0;\ b \geqslant 0, \\ -\sqrt{a\cdot b^2} & a \geqslant 0;\ b < 0. \end{cases}$$

4) $$a = \begin{cases} (\sqrt{a})^2, & a \geqslant 0, \\ -(\sqrt{-a})^2, & a < 0. \end{cases}$$

5) $$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Рассмотрите вычисления и действия с квадратными корнями

Практикум 1

Вычислите:

1. $2\sqrt{36} = 2 \cdot 6 = 12.$

2. $3\sqrt{0{,}81} = 3 \cdot 0{,}9 = 2{,}7.$

3. $4\sqrt{0{,}3^2} = 4 \cdot 0{,}3 = 1{,}2.$

4. $\sqrt{400} - \sqrt{256} = 20 - 16 = 4.$

5. $2\sqrt{100} - \sqrt{196} = 2 \cdot 10 - 14 = 6.$

6. $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} - \sqrt{0{,}6^2} = \dfrac{3}{2} - 0{,}6 = 0{,}9.$

7. $\dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt{324}} = \dfrac{15}{18} = \dfrac{5}{6}.$

8. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} - \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} - \sqrt{9} = \dfrac{1}{2} - 3 = -2{,}5.$

9. $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6.$

10. $\sqrt{0{,}75} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{0{,}25 \cdot 3 \cdot 3} = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5.$

Упражнения

Вычислите:

	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
1	$3\sqrt{25}$	$2\sqrt{0{,}49}$	$5\sqrt{2{,}56}$	$2{,}4\sqrt{0{,}25}$
2	$4\sqrt{0{,}36}$	$3\sqrt{64}$	$4\sqrt{961}$	$5\sqrt{5{,}29}$
3	$5\sqrt{0{,}5^2}$	$6\sqrt{0{,}3^2}$	$5\sqrt{0{,}7^2}$	$4\sqrt{0{,}0196}$
4	$\sqrt{121}-\sqrt{144}$	$\sqrt{169}-\sqrt{225}$	$\sqrt{4{,}84}-\sqrt{5{,}29}$	$\sqrt{3{,}61}+\sqrt{4{,}41}$
5	$2\sqrt{484}-3\sqrt{169}$	$2\sqrt{576}-4\sqrt{121}$	$3\sqrt{676}-2\sqrt{841}$	$2\sqrt{1024}-\sqrt{2601}$
6	$\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}}+\sqrt{0{,}75^2}$	$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}+\sqrt{0{,}36}$	$\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}-\sqrt{0{,}49}$	$\frac{\sqrt{3{,}43}}{\sqrt{0{,}07}}-\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{27}}$
7	$\frac{\sqrt{576}}{\sqrt{256}}$	$\frac{\sqrt{676}}{\sqrt{169}}$	$\frac{\sqrt{729}}{\sqrt{324}}$	$\frac{\sqrt{784}}{\sqrt{1296}}$
8	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{125}}-\frac{\sqrt{343}}{\sqrt{7}}$	$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}}-\frac{\sqrt{841}}{\sqrt{256}}$	$\frac{\sqrt{0{,}96}}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{1{,}96}}{\sqrt{2{,}25}}$	$\frac{\sqrt{0{,}72}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2{,}89}}{\sqrt{2{,}56}}$
9	$\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$	$\sqrt{20}\cdot\sqrt{1{,}8}$	$\sqrt{2{,}7}\cdot\sqrt{1{,}2}$	$\sqrt{12{,}8}\cdot\sqrt{1{,}8}$
10	$\sqrt{0{,}24}\cdot\sqrt{6}$	$\sqrt{60}\cdot\sqrt{2{,}4}$	$\sqrt{0{,}125}\cdot\sqrt{0{,}98}$	$\sqrt{2{,}88}\cdot\sqrt{1{,}62}$

Ответы

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ 1	15	2,4	2,5	-1	5	2,5	1,5	$-6{,}8$	6	1,2
№ 2	1,4	24	1,8	-2	4	4,6	2	$-\frac{5}{16}$	6	12
№ 3	8	124	3,5	$-0{,}1$	20	3,3	1,5	$-\frac{8}{15}$	1,8	0,35
№ 4	1,2	11,5	0,56	4	13	4	$\frac{7}{9}$	$-\frac{37}{80}$	4,8	2,16

Практикум 2

Вычислите наиболее рациональным способом:

1. $\sqrt{1{,}845^2 - 0{,}405^2} = \sqrt{(1{,}845 + 0{,}405)(1{,}845 - 0{,}405)} =$
$= \sqrt{2{,}25 \cdot 1{,}44} = 1{,}5 \cdot 1{,}2 = 1{,}8.$

2. $\sqrt{0{,}16 \cdot 6{,}41 \cdot 1{,}25 - 0{,}16 \cdot 1{,}25^2 - 0{,}16^2 \cdot 1{,}25} =$
$= \sqrt{0{,}16 \cdot 1{,}25(6{,}41 - 1{,}25 - 0{,}16)} =$
$$= \sqrt{0{,}4^2 \cdot \frac{5}{4} \cdot 5} = \frac{0{,}4 \cdot 5}{2} = 1.$$

3. $$\sqrt{\frac{73^2 - 2 \cdot 73 \cdot 23 + 23^2}{26^2 - 24^2}} = \sqrt{\frac{(73-23)^2}{(26+24)(26-24)}} =$$
$$= \sqrt{\frac{50^2}{50 \cdot 2}} = \sqrt{25} = 5.$$

4. $$\sqrt{\left(\frac{97^3 - 53^3}{44} + 97 \cdot 53\right) : (152{,}5^2 - 27{,}5^2)}.$$
Так как $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, где $a = 97$, $b = 53$,
$$\sqrt{\left(\frac{97^3 - 53^3}{44} + 97 \cdot 53\right) : (152{,}5^2 - 27{,}5^2)} =$$
$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{97-53}{44}\right)\left(97^2 + 97 \cdot 53 + 53^2\right) + 97 \cdot 53}{(152{,}5 + 27{,}5)(152{,}5 - 27{,}5)}} =$$
$$= \sqrt{\frac{97^2 + 97 \cdot 53 + 53^2 + 97 \cdot 53}{180 \cdot 125}} = \sqrt{\frac{(97+53)^2}{5 \cdot 36 \cdot 5^3}} = \frac{150}{5^2 \cdot 6} = 1.$$

5. $$2\sqrt{245} + \frac{1}{6}\sqrt{58^2 - 22^2} - 30\sqrt{1{,}8} =$$
$$= 2\sqrt{5 \cdot 49} + \frac{1}{6}\sqrt{(58+22)(58-22)} - 3\sqrt{100 \cdot 1{,}8} =$$
$$= 2 \cdot 7\sqrt{5} + \frac{1}{6}\sqrt{80 \cdot 36} - 3\sqrt{180} = 14\sqrt{5} + \frac{6}{6}\sqrt{5 \cdot 16} - 3\sqrt{5 \cdot 36} =$$
$$= 14\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 18\sqrt{5} = 0.$$

6. $$\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)^3\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^3}{0{,}125}=\frac{\left(\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\right)^3}{\frac{1}{8}}=$$
$$=\frac{(7-6)^3}{\frac{1}{8}}=8.$$

7. $$\sqrt{\frac{13{,}75\cdot 1{,}2}{\left(\sqrt{69}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{69}+\sqrt{3}\right)}}=\sqrt{\frac{13\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}}{69-3}}=\sqrt{\frac{\frac{55}{4}\cdot\frac{6}{5}}{66}}=$$
$$=\sqrt{\frac{11}{4}\cdot\frac{6}{6\cdot 11}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

8. $$\left(\frac{\sqrt{12}-\sqrt{27}}{\sqrt{18}-\sqrt{2}}\right)^2=\frac{12-2\sqrt{12}\cdot\sqrt{27}+27}{18-2\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}+2}=$$
$$=\frac{39-2\sqrt{4\cdot 3\cdot 3^3}}{20-2\sqrt{3^2\cdot 2\cdot 2}}=\frac{39-2\cdot 2\cdot 9}{20-2\cdot 2\cdot 3}=\frac{3}{8}.$$

9. $$\frac{\left(4+\sqrt{40}\right)\left(\sqrt{4{,}5}+\sqrt{1{,}125}\right)}{\sqrt{18}+\sqrt{45}}=\frac{\left(4+2\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{9}{8}}\right)}{3\sqrt{2}+3\sqrt{5}}=$$
$$=\frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\frac{3}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{2}\right)}{3\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}=2\cdot\frac{3}{2}=3.$$

10. $$\frac{\left(\sqrt{14}+1\right)\left(\sqrt{98}-\sqrt{7}+2\sqrt{14}-2\right)}{\sqrt{28}+4}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{14}+1\right)\left(7\sqrt{2}-\sqrt{7}+2\sqrt{14}-2\right)}{2\sqrt{7}+4}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{14}+1\right)\left(\left(7\sqrt{2}+2\sqrt{14}\right)-\left(\sqrt{7}+2\right)\right)}{2\left(\sqrt{7}+2\right)}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{14}+1\right)\left(\sqrt{14}\left(\sqrt{7}+2\right)-\left(\sqrt{7}+2\right)\right)}{2\left(\sqrt{7}+2\right)}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{14}+1\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{14}-1\right)}{2\left(\sqrt{7}+2\right)}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{14}+1\right)\left(\sqrt{14}-1\right)}{2}=\frac{14-1}{2}=6{,}5.$$

Тренировочная работа 1

Вычислите:

1. $\sqrt{\dfrac{9}{32}} - \dfrac{1}{35}\sqrt{392} + \dfrac{1}{2400}\sqrt{97^2 - 47^2}.$

2. $\sqrt{(36{,}5^2 - 27{,}5^2) : \left(\dfrac{57^3 + 33^3}{90} - 57 \cdot 33\right)}.$

3. $\sqrt{74{,}5^3 - 74{,}5^2 \cdot 69{,}5 - 74{,}5 \cdot 69{,}5^2 + 69{,}5^3}.$

4. $\sqrt{2 + \sqrt{\dfrac{68\left(32^2 - 15^2\right)}{47}}}.$

5. $\sqrt{\sqrt{63} - 7\sqrt{1{,}75} - 0{,}5\sqrt{343} + \sqrt{112}}.$

6. $\dfrac{\left(7\sqrt{27} - 7\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{27} + \sqrt{8}\right)}{27^2 - 64}.$

7. $\sqrt{\dfrac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \sqrt{10}} \cdot \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right).$

8. $\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{18} + \sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{12} + \sqrt{28}}}.$

9. $\dfrac{\left(4\sqrt{7} + \sqrt{32}\right)^2}{18 + 2\sqrt{56}}.$

10. $\dfrac{\left(\sqrt{17} - 2\right)\left(\sqrt{34} + \sqrt{8} + \sqrt{17} + 2\right)}{\sqrt{2} + 1}.$

Решение тренировочной работы 1

Вычислите:

1. $\sqrt{\frac{9}{32}} - \frac{1}{35}\sqrt{392} + \frac{1}{2400}\sqrt{97^2 - 47^2} =$

$= \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{35}\sqrt{2\cdot 196} + \frac{1}{2400}\sqrt{(97+47)(97-47)} =$

$= \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{14}{35}\sqrt{2} + \frac{1}{2400}\sqrt{50\cdot 144} =$

$= \frac{3}{8}\sqrt{2} - \frac{14}{35}\sqrt{2} + \frac{12\cdot 5\sqrt{2}}{2400} = \frac{3}{8}\sqrt{2} - \frac{2}{5}\sqrt{2} + \frac{1}{40}\sqrt{2} =$

$= \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{5} + \frac{1}{40}\right)\sqrt{2} = 0.$

2. $\sqrt{(36{,}5^2 - 27{,}5^2) : \left(\frac{57^3+33^3}{90} - 57\cdot 33\right)} =$

$= \sqrt{(36{,}5-27{,}5)(36{,}5+27{,}5)} \div$

$\div \sqrt{\frac{(57+33)(57^2 - 57\cdot 33 + 33^2)}{90} - 57\cdot 33} =$

$= \sqrt{9\cdot 64 : (57^2 - 57\cdot 33 + 33^2 - 57\cdot 33)} =$

$= 3\cdot 8\sqrt{\frac{1}{(57-33)^2}} = \frac{3\cdot 8}{24} = 1.$

3. $\sqrt{74{,}5^3 - 74{,}5^2\cdot 69{,}5 - 74{,}5\cdot 69{,}5^2 + 69{,}5^3} =$

$= \sqrt{74{,}5^2(74{,}5-69{,}5) - 69{,}5^2(74{,}5-69{,}5)} =$

$= \sqrt{(74{,}5^2 - 69{,}5^2)(74{,}5-69{,}5)} = (74{,}5-69{,}5)\sqrt{74{,}5+69{,}5} =$

$= 5\sqrt{144} = 5\cdot 12 = 60.$

4. $\sqrt{2 + \sqrt{\frac{68(32^2-15^2)}{47}}} = \sqrt{2+\sqrt{\frac{68(32-15)(32+15)}{47}}} =$

$= \sqrt{2+\sqrt{68\cdot 17}} = \sqrt{2+17\cdot 2} = \sqrt{36} = 6.$

5. $\sqrt{\sqrt{63}-7\sqrt{1{,}75}-0{,}5\sqrt{343}+\sqrt{112}}=$

$=\sqrt{\sqrt{9\cdot 7}-7\sqrt{\frac{7}{4}}-\frac{1}{2}\sqrt{7\cdot 49}+\sqrt{7\cdot 16}}=$

$=\sqrt{3\sqrt{7}-\frac{7}{2}\sqrt{7}-\frac{7}{2}\sqrt{7}+4\sqrt{7}}=\sqrt{0}=0.$

6. $\dfrac{\left(7\sqrt{27}-7\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{27}+\sqrt{8}\right)}{27^2-64}=$

$=\dfrac{7\left(\sqrt{27}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{27}+\sqrt{8}\right)}{(27+8)(27-8)}=$

$=\dfrac{7(27-8)}{35(27-8)}=\dfrac{7}{35}=\dfrac{1}{5}.$

7. $\sqrt{\dfrac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\sqrt{10}}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=$

$=\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^3-\left(\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\sqrt{10}}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=$

$=\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\left(\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{5\cdot 2}+\left(\sqrt{2}\right)^2\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\sqrt{10}}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{10}+\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{10}}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=$

$=5-2=3.$

8. $\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{18}+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{12}+\sqrt{28}}}=\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{4\cdot 3}+\sqrt{4\cdot 7}}}=$

$=\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)\left(4\sqrt{2}\right)^2}{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}}=\sqrt{\dfrac{16\cdot 2}{2}}=4.$

9. $$\frac{\left(4\sqrt{7}+\sqrt{32}\right)^2}{18+2\sqrt{56}} = \frac{\left(4\sqrt{7}+4\sqrt{2}\right)^2}{18+2\cdot 2\sqrt{14}} =$$

$$= \frac{4^2\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)^2}{14+2\cdot 2\sqrt{14}+4} = \frac{16\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{14}+2\right)^2} =$$

$$= \frac{16\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)^2} = 8.$$

10. $$\frac{\left(\sqrt{17}-2\right)\left(\sqrt{34}+\sqrt{8}+\sqrt{17}+2\right)}{\sqrt{2}+1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{17}-2\right)\left(\left(\sqrt{34}+\sqrt{8}\right)+\left(\sqrt{17}+2\right)\right)}{\sqrt{2}+1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{17}-2\right)\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{17}+2\right)+\left(\sqrt{17}+2\right)\right)}{\sqrt{2}+1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{17}-2\right)\left(\sqrt{17}+2\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}+1} =$$

$$= (\sqrt{17}-2)(\sqrt{17}+2) = 17-4 = 13.$$

Попробуйте теперь решить еще раз самостоятельно.

Проверочная работа 1

Вычислите наиболее рациональным способом:

1. $\sqrt{1{,}25} + 1{,}5\sqrt{80} - \dfrac{1}{14}\sqrt{245} - \sqrt{180}.$

2. $\sqrt{51{,}5^3 + 51{,}5^2 \cdot 26{,}5 - 51{,}5 \cdot 26{,}5^2 - 26{,}5^3}.$

3. $\sqrt{\left(\dfrac{79^3 - 41^3}{38} + 79 \cdot 41\right) : (133{,}5^2 - 58{,}5^2)}.$

4. $\sqrt{90 + \sqrt{\dfrac{31\left(57^2 - 26^2\right)}{83}}}.$

5. $\sqrt{\sqrt{1\dfrac{1}{48}} + \dfrac{1}{66}\sqrt{363} - \dfrac{1}{68}\sqrt{158^2 - 131^2}}.$

6. $\dfrac{\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)\left(7 - \sqrt{10}\right)\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right)}{\dfrac{36^2 - 28^2}{27^2 + 2 \cdot 27 \cdot 5 + 5^2}}.$

7. $\dfrac{11\left(\sqrt{6} - \sqrt{3}\right)^2}{12\left(3 - 2\sqrt{2}\right)}.$

8. $\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{8} + \sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{\sqrt{24} - \sqrt{8}}}.$

9. $\dfrac{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\sqrt{72}}{3\left(2\sqrt{6} - \sqrt{16}\right)\left(\sqrt{16} + 1\right)}.$

10. $\dfrac{\left(\sqrt{15} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{60} - \sqrt{12} - \sqrt{45} + 3\right)}{2 - \sqrt{3}}.$

Практикум 3

Теперь рассмотрим примеры других видов.
Упростить и вычислить:

1. $$(4\sqrt{7}-\sqrt{119}-4\sqrt{3}+\sqrt{51})(4\sqrt{7}+\sqrt{119}+4\sqrt{3}+\sqrt{51}) =$$
$$= (4\sqrt{7}-\sqrt{7\cdot 17}-4\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{17})\times$$
$$\times\,(4\sqrt{7}+\sqrt{7\cdot 17}+4\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{17}) =$$
$$= \left(\sqrt{7}(4-\sqrt{17})-\sqrt{3}(4-\sqrt{17})\right)\times$$
$$\times\,\left(\sqrt{7}(4+\sqrt{17})+\sqrt{3}(4+\sqrt{17})\right) =$$
$$= (4-\sqrt{17})(\sqrt{7}-\sqrt{3})(4+\sqrt{17})(\sqrt{7}+\sqrt{3}) =$$
$$= (4-\sqrt{17})(4+\sqrt{17})(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3}) =$$
$$= (16-17)\,(7-3) = -4.$$

2. $(\sqrt{21}-2)\sqrt{25+2\sqrt{84}}$.

Известно, что $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b} & \text{при } a \geqslant 0; \quad b \geqslant 0, \\ -\sqrt{a^2b} & \text{при } a < 0; \quad b \geqslant 0. \end{cases}$

Учтем, что $\sqrt{21} > 2$. Тогда

$$(\sqrt{21}-2)\sqrt{25+2\sqrt{84}} = \sqrt{(\sqrt{21}-2)^2(25+2\sqrt{84})} =$$
$$= \sqrt{(21-4\sqrt{21}+4)(25+2\sqrt{4\cdot 21})} =$$
$$= \sqrt{(25-4\sqrt{21})(25+4\sqrt{21})} = \sqrt{25^2-(4\sqrt{21})^2} =$$
$$= \sqrt{625-16\cdot 21} = \sqrt{625-336} = \sqrt{289} = 17.$$

3. $$\frac{1}{\sqrt{3}+2}+2+\sqrt{3} = \frac{1+\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{3}+2} = \frac{1+4+4\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2} =$$
$$\frac{4\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}+2} = 4.$$

Можно поступить иначе. Выражения $\sqrt{3}+2$ и $\sqrt{3}-2$ — взаимно сопряженные[1].

[1] Выражения $a+b$ и $a-b$ называются взаимно сопряженными. $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$. Выражения $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ — также взаимно сопряженные, и $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$.

$\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)=3-4=-1$, тогда

$$\frac{1}{\sqrt{3}+2}=\frac{\sqrt{3}-2}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)}=\frac{\sqrt{3}-2}{3-4}=\frac{\sqrt{3}-2}{-1}=2-\sqrt{3};$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+2}+2+\sqrt{3}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4.$$

4. $\dfrac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}-(11-5\sqrt{5})(2+\sqrt{5}).$

В первой дроби домножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{50}=5\sqrt{2};\qquad \sqrt{10}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

Имеем

$$\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}-(11-5\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=$$

$$=\frac{\left(1-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}-\left(22-10\sqrt{5}+11\sqrt{5}-5\cdot 5\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{5}-5\sqrt{2}-\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{5-2}-(-3+\sqrt{5})=\frac{3\sqrt{5}-6\sqrt{2}}{3}+3-\sqrt{5}=$$

$$=\sqrt{5}-2\sqrt{2}+3-\sqrt{5}=3-2\sqrt{2}.$$

5. $\dfrac{7}{\sqrt{11}-2}+\dfrac{5}{4+\sqrt{11}}.$

Домножим числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряженное знаменателю данной дроби:

$$\frac{7}{\sqrt{11}-2}+\frac{5}{4+\sqrt{11}}=\frac{7\left(\sqrt{11}+2\right)}{\left(\sqrt{11}\right)^2-2^2}+\frac{5\left(4-\sqrt{11}\right)}{4^2-\left(\sqrt{11}\right)^2}=$$

$$=\frac{7\left(\sqrt{11}+2\right)}{11-4}+\frac{5\left(4-\sqrt{11}\right)}{16-11}=\frac{7}{7}(\sqrt{11}+2)+\frac{5}{5}(4-\sqrt{11})=$$

$$=\sqrt{11}+2+4-\sqrt{11}=6.$$

6. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}.$

Попытаемся представить подкоренное выражение в виде полного квадрата разности или суммы. Напоминаем, что

$\sqrt{a^2}=|a|$, так как $|a|=\begin{cases} a & \text{при } a\geqslant 0,\\ -a & \text{при } a<0,\end{cases}$ а это совпадает с определением арифметического корня четной степени.

$3-2\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}\cdot 1+1=(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\cdot 1+1^2=(\sqrt{2}-1)^2;$

$3+2\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}\cdot 1+1=(\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot 1+1^2=(\sqrt{2}+1)^2,$

значит,

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}-\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}.$$

Поскольку $\sqrt{2}+1>0$ и $\sqrt{2}-1>0$, последнее выражение преобразуется к виду

$$|\sqrt{2}-1|-|\sqrt{2}+1|=(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}+1)=$$
$$=\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1=-2.$$

7. $\sqrt{6}+\sqrt{5}-\dfrac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$.

Попытаемся в этом примере также представить подкоренное выражение в виде полного квадрата разности:

$$\sqrt{6}+\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}=\sqrt{6}+\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)^2}}=$$
$$=\sqrt{6}+\sqrt{5}-\frac{1}{\left|\sqrt{5}-\sqrt{6}\right|}=\sqrt{6}+\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}},$$

поскольку $\sqrt{5}<\sqrt{6}$, получим

$$\sqrt{6}+\sqrt{5}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}=$$
$$=\sqrt{6}+\sqrt{5}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{6-5}=\sqrt{6}+\sqrt{5}-(\sqrt{6}+\sqrt{5})=0.$$

8. Расположите числа в порядке возрастания:

$$\frac{2}{3}\sqrt{72};\qquad \sqrt{29};\qquad 7\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Так как $\dfrac{2}{3}\sqrt{72}=\sqrt{\dfrac{4}{9}\cdot 72}=\sqrt{4\cdot 8}=\sqrt{32};$

$$7\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{49 \cdot 2}{3}} = \sqrt{\frac{98}{3}} = \sqrt{32\frac{2}{3}},$$

то расположение чисел в порядке возрастания будет таким:

$$\sqrt{29}; \qquad \frac{2}{3}\sqrt{72}; \qquad 7\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

9. Что больше: $(\sqrt{6}-1)$ или $\sqrt{2}$?

а) Пусть $\sqrt{6}-1>\sqrt{2} \iff \sqrt{6}>\sqrt{2}+1 \iff 6>(\sqrt{2}+1)^2 \iff 6 > 2+2\sqrt{2}+1 \iff 3 > 2\sqrt{2} \iff 9 > 8$ — истинно, значит действительно $\sqrt{6}-1>\sqrt{2}$.

б) Можно и по-другому:

$a = \sqrt{6}-1 > 0 \Rightarrow a^2 = 6 - 2\sqrt{6}+1 = 7-2\sqrt{6}$;

$b = \sqrt{2} > 0; \qquad b^2 = 2.$

Рассмотрим

$$a^2-b^2=7-2\sqrt{6}-2=5-2\sqrt{6}=\sqrt{25}-\sqrt{24}>0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 > b^2, \\ a > 0, \\ b > 0. \end{cases}$$

Значит $a > b$, тогда $\sqrt{6}-1>\sqrt{2}$.

10. Что больше: $\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{10}}$ или $\dfrac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{11}}$?

а) Предположим, что

$$\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{10}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{11}} \iff$$

$$\frac{\sqrt{13}+\sqrt{10}}{(\sqrt{13}-\sqrt{10})(\sqrt{13}+\sqrt{10})} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{14}+\sqrt{11}}{(\sqrt{14}-\sqrt{11})(\sqrt{14}+\sqrt{11})} \iff$$

$$\frac{\sqrt{13}+\sqrt{10}}{13-10} \geqslant \frac{\sqrt{14}+\sqrt{11}}{14-11} \iff$$

$$\sqrt{13}+\sqrt{10} \geqslant \sqrt{14}+\sqrt{11}.$$

Но $\sqrt{13} < \sqrt{14}$, $\sqrt{10} < \sqrt{11}$.

Напомним, что если $\begin{cases} a > b, \\ m > n, \end{cases}$ то $a + m > b + n$,

то есть неравенства одинакового смысла можно почленно складывать, получится неравенство того же смысла.[2]

Получаем $\sqrt{13} + \sqrt{10} < \sqrt{14} + \sqrt{11}$.

Мы, полагая, что $\dfrac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{10}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{11}}$,

получили $\sqrt{13} + \sqrt{10} \geqslant \sqrt{14} + \sqrt{11}$,

значит наше предположение ложное,

тогда $\dfrac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{10}} < \dfrac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{11}}$,

что и требовалось выяснить.

б) Можно иначе:

$$a = \frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{13} + \sqrt{10}}{13 - 10} = \frac{\sqrt{13} + \sqrt{10}}{3};$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{11}}{14 - 11} = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{11}}{3};$$

$$b - a = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{11}}{3} - \frac{\sqrt{13} + \sqrt{10}}{3} =$$

$$= \frac{(\sqrt{14} - \sqrt{13}) + (\sqrt{11} - \sqrt{10})}{3} > 0,$$

так как $\sqrt{14} > \sqrt{13}$, $\sqrt{11} > \sqrt{10}$.

Следовательно, $b > a$, то есть

$$\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{10}} < \frac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{11}}.$$

[2] В школьной практике неравенства вида $a > b$ и $k > m$ или $a < b$ и $k < m$ называются неравенствами одинакового знака.

Тренировочная работа 2

Вычислите:

1. $(3\sqrt{3}+2\sqrt{7}+\sqrt{21}+6)(3\sqrt{3}+2\sqrt{7}-\sqrt{21}-6)$.

2. $(9-\sqrt{83})\sqrt{18\sqrt{83}+164}$.

3. $\dfrac{4}{\sqrt{5}-3}+3+\sqrt{5}$.

4. $\dfrac{2\sqrt{7}-4}{1+\sqrt{3}}+6\sqrt{3}+0{,}5(\sqrt{21}-5)(\sqrt{7}+3\sqrt{3})-2$.

5. $\dfrac{9}{\sqrt{13}-2}+\dfrac{3}{4+\sqrt{13}}$.

6. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

7. $\sqrt{7}-\sqrt{2}-\dfrac{5}{\sqrt{9+2\sqrt{14}}}$.

8. Расположите числа в порядке убывания:

$5\sqrt{\dfrac{7}{11}}$; $\quad\sqrt{17}$; $\quad\dfrac{1}{2}\sqrt{62}$.

9. Что меньше: $\left(\sqrt{7}-1\right)$ или $\sqrt{3}$?

10. Что больше: $\dfrac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}$ или $\dfrac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{10}}$?

Решение тренировочной работы 2

Вычислите

1. $(3\sqrt{3}+2\sqrt{7}+\sqrt{21}+6)(3\sqrt{3}+2\sqrt{7}-\sqrt{21}-6)=$

$=((3\sqrt{3}+\sqrt{21})+2\sqrt{7}+6)((3\sqrt{3}-\sqrt{21})-(6-2\sqrt{7}))=$

$=(\sqrt{3}(3+\sqrt{7})+2(\sqrt{7}+3))(\sqrt{3}(3-\sqrt{7})-2(3-\sqrt{7}))=$

$=(3+\sqrt{7})(\sqrt{3}+2)(3-\sqrt{7})(\sqrt{3}-2)=$

$=(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)=$

$=(9-7)(3-4)=-2.$

2. С учетом того, что $9<\sqrt{83}$ и

$$a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b}, & b\geqslant 0;\ a\geqslant 0\\ -\sqrt{a^2b}, & b\geqslant 0;\ a<0\end{cases}$$

получаем

$(9-\sqrt{83})\sqrt{18\sqrt{83}+164}=-\sqrt{(9-\sqrt{83})^2(18\sqrt{83}+164)}=$

$=-\sqrt{(81-18\sqrt{83}+83)(18\sqrt{83}+164)}=$

$=-\sqrt{(164-18\sqrt{83})(18\sqrt{83}+164)}=-\sqrt{164^2-18^2\cdot 83}=$

$=-\sqrt{26896-26892}=-\sqrt{4}=-2.$

Можно проще, если увидеть, что

$164+18\sqrt{83}=81+2\cdot 9\sqrt{83}+83=(9+\sqrt{83})^2,$

тогда

$(9-\sqrt{83})\sqrt{(9+\sqrt{83})^2}=(9-\sqrt{83})|9+\sqrt{83}|=$

$=(9-\sqrt{83})(9+\sqrt{83})=9^2-83=81-83=-2.$

3. $\dfrac{4}{\sqrt{5}-3}+3+\sqrt{5}=\dfrac{4\left(\sqrt{5}+3\right)}{\left(\sqrt{5}-3\right)\left(\sqrt{5}+3\right)}+3+\sqrt{5}=$

$=\dfrac{4\left(\sqrt{5}+3\right)}{5-9}+3+\sqrt{5}=-(\sqrt{5}+3)+3+\sqrt{5}=0.$

4. $\dfrac{2\sqrt{7}-4}{1+\sqrt{3}}+6\sqrt{3}+0{,}5(\sqrt{21}-5)(\sqrt{7}+3\sqrt{3})-2=$

$=\dfrac{\left(2\sqrt{7}-4\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}+6\sqrt{3}+$

$+0{,}5\left(\sqrt{21}\cdot\sqrt{7}-5\sqrt{7}+3\sqrt{3}\cdot\sqrt{21}-15\sqrt{3}\right)-2=$

$=\dfrac{2\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1}+6\sqrt{3}+$

$+0{,}5\left(7\sqrt{3}-5\sqrt{7}+9\sqrt{7}-15\sqrt{3}\right)-2=$

$=\sqrt{21}-2\sqrt{3}-\sqrt{7}+2+6\sqrt{3}-4\sqrt{3}+2\sqrt{7}-2=\sqrt{21}+\sqrt{7}.$

5. $\dfrac{9}{\sqrt{13}-2}+\dfrac{3}{4+\sqrt{13}}=$

$=\dfrac{9\left(\sqrt{13}+2\right)}{\left(\sqrt{13}-2\right)\left(\sqrt{13}+2\right)}+\dfrac{3\left(4-\sqrt{13}\right)}{\left(4+\sqrt{13}\right)\left(4-\sqrt{13}\right)}=$

$=\dfrac{9\left(\sqrt{13}+2\right)}{13-4}+\dfrac{3\left(4-\sqrt{13}\right)}{16-13}=\dfrac{9\left(\sqrt{13}+2\right)}{9}+\dfrac{3\left(4-\sqrt{13}\right)}{3}=$

$=\sqrt{13}+2+4-\sqrt{13}=6.$

6. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}=$

$=\sqrt{3+2\sqrt{3}\cdot1+1}+\sqrt{3-2\sqrt{3}\cdot1+1}=$

$=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=|\sqrt{3}+1|+|\sqrt{3}-1|=$

$=\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1=2\sqrt{3}\quad(\sqrt{3}>1).$

7. $\sqrt{7}-\sqrt{2}-\dfrac{5}{\sqrt{9+2\sqrt{14}}}=$

$=\sqrt{7}-\sqrt{2}-\dfrac{5}{\sqrt{7+2\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}+2}}=$

$=\sqrt{7}-\sqrt{2}-\dfrac{5}{\sqrt{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)^2}}=\sqrt{7}-\sqrt{2}-\dfrac{5}{|\sqrt{7}+\sqrt{2}|}=$

$$= \sqrt{7}-\sqrt{2}-\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \sqrt{7}-\sqrt{2}-\frac{5\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)} =$$
$$= \sqrt{7}-\sqrt{2}-\frac{5\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{7-2} = \sqrt{7}-\sqrt{2}-(\sqrt{7}-\sqrt{2}) = 0.$$

8. Расположите числа в порядке убывания:

$$5\sqrt{\frac{7}{11}}, \qquad \sqrt{17}, \qquad \frac{1}{2}\sqrt{62}.$$

$$5\sqrt{\frac{7}{11}} = \sqrt{\frac{25\cdot 7}{11}} = \sqrt{\frac{175}{11}} = \sqrt{15\frac{10}{11}};$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{62} = \sqrt{\frac{62}{4}} = \sqrt{15\frac{1}{2}}.$$

Итак, теперь ясно, как расположить числа в порядке убывания:

$$\sqrt{17}, \qquad 5\sqrt{\frac{7}{11}}, \qquad \frac{1}{2}\sqrt{62}.$$

9. Что меньше: $\left(\sqrt{7}-1\right)$ или $\sqrt{3}$?

Допустим, что $\sqrt{7}-1<\sqrt{3} \iff \sqrt{7}<\sqrt{3}+1 \iff$
$7<\left(\sqrt{3}+1\right)^2 \iff 7<3+2\sqrt{3}+1 \iff 3<2\sqrt{3} \iff$
$9<12$ — это истинное утверждение.

Значит, поскольку все преобразования были равносильны, наше предположение верно, то есть $\sqrt{7}-1<\sqrt{3}$, что и требовалось выяснить.

10. Что больше: $\dfrac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}$ или $\dfrac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{10}}$?

Допустим, что $\dfrac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{11}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{10}}$. Используя известное свойство неравенств:

$$\begin{cases} a>b, \\ a>0, \\ b>0, \end{cases} \iff \frac{1}{a}<\frac{1}{b},$$

получаем

$\sqrt{13}+\sqrt{11}\leqslant\sqrt{14}+\sqrt{10}\Longleftrightarrow(\sqrt{13}+\sqrt{11})^2\leqslant(\sqrt{14}+\sqrt{10})^2\Longleftrightarrow$

$13+2\sqrt{13}\cdot\sqrt{11}+11\leqslant 14+2\sqrt{14}\cdot\sqrt{10}+10\Longleftrightarrow$

$2\sqrt{13}\cdot\sqrt{11}\leqslant 2\sqrt{14}\cdot\sqrt{10}\Longleftrightarrow 13\cdot 11\leqslant 14\cdot 10\Longleftrightarrow$

$143\leqslant 140$ — увы, это ложь.

Значит, наше предположение о том, что

$\dfrac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{10}}$ — ложное.

Так как возможны только три случая $a<b$, $a=b$ или $a<b$, то остается только

$\dfrac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}<\dfrac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{10}}$, что и требовалось выяснить.

Прийти к доказательству наших предположений можно иначе. Действительно,

$$\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{\left(\sqrt{13}+\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{13}-\sqrt{11}\right)}=$$
$$=\frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{13-11}=\frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{2};$$
$$\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{\left(\sqrt{14}+\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{14}-\sqrt{10}\right)}=$$
$$=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{14-10}=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{4}.$$

Тогда пусть

$\dfrac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{10}}\Longleftrightarrow\dfrac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{2}\geqslant\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{4}\Longleftrightarrow$

$2\sqrt{13}-2\sqrt{11}\geqslant\sqrt{14}-\sqrt{10}\Longleftrightarrow 2\sqrt{13}+\sqrt{10}\geqslant\sqrt{14}+2\sqrt{11}\Longleftrightarrow$

$\left(2\sqrt{13}+\sqrt{10}\right)^2\geqslant\left(\sqrt{14}+2\sqrt{11}\right)^2\Longleftrightarrow$

$4\cdot 13+4\sqrt{13}\cdot\sqrt{10}+10\geqslant 14+4\sqrt{14}\cdot\sqrt{11}+4\cdot 11\Longleftrightarrow$

$1+\sqrt{13}\cdot\sqrt{10}\geqslant\sqrt{14}\cdot\sqrt{11}\Longleftrightarrow 1+2\sqrt{13}\cdot\sqrt{10}+13\cdot 10\geqslant 14\cdot 11\Longleftrightarrow$

$2\sqrt{13}\cdot\sqrt{10}\geqslant 23\Longleftrightarrow 4\cdot 130\geqslant 23^2\Longleftrightarrow$

$520\geqslant 529$ — это ложно и т. д. Ясно, что этот способ технически сложнее, но вполне возможен.

Практикум 4

Рассмотрим преобразования корней, включающих алгебраические выражения.

Сократите дроби (1–5):

1. $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}.$

2. $\dfrac{a-b}{\sqrt{a-b}} = \dfrac{\left(\sqrt{a-b}\right)^2}{\sqrt{a-b}} = \sqrt{a-b}.$

3. $\dfrac{a\sqrt{a}+8}{\sqrt{a}+2} = \dfrac{(\sqrt{a})^3+2^3}{\sqrt{a}+2}.$

Поскольку

$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right),$

последнее выражение преобразуется к виду

$\dfrac{(\sqrt{a}+2)\left(a-\sqrt{a}\cdot 2+2^2\right)}{\sqrt{a}+2} = a-2\sqrt{a}+4.$

4. $\dfrac{\sqrt{b^3}-\sqrt{a^3}}{a+\sqrt{ab}+b} = \dfrac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}{a+\sqrt{ab}+b} = \sqrt{b}-\sqrt{a},$

так как $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right).$

5. $\dfrac{a-3\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}.$

Положим $\sqrt{a}=t$. Тогда

$a-3\sqrt{a}+2=t^2-3t+2=\left(t^2-2t\right)-t+2=$

$=t(t-2)-(t-2)=(t-2)(t-1)=(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1),$

то есть $\dfrac{a-3\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} = \dfrac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}-1} = \sqrt{a}-2.$

Если учесть, что $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни, тогда $t^2-3t+2=(t-1)(t-2)$, что значительно проще разложения числителя на множители.

Вычислите (6–10):

6. $$\frac{\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}}{\sqrt{4\sqrt{2}-2\sqrt{6}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}(4+2\sqrt{3})}}{\sqrt{\sqrt{2}(4-2\sqrt{3})}}=$$
$$=\frac{\sqrt{\sqrt{2}(3+2\sqrt{3}\cdot 1+1)}}{\sqrt{\sqrt{2}(3-2\sqrt{3}\cdot 1+1)}}=$$
$$=\sqrt{\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}=\frac{|\sqrt{3}+1|}{|\sqrt{3}-1|}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{3-1}=\frac{3+2\sqrt{3}+1}{2}=2+\sqrt{3}.$$

7. $$\left(\frac{16}{\sqrt{5}-1}-\frac{5}{\sqrt{3}+2}-\frac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}+6)=$$
$$=\left(\frac{16\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}-\right.$$
$$\left.-\frac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}-\frac{8\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}\right)(\sqrt{3}+6)=$$
$$=\left(\frac{16(\sqrt{5}+1)}{5-1}-\frac{5(2-\sqrt{3})}{4-3}-\frac{8(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}\right)(\sqrt{3}+6)=$$
$$=\left(4(\sqrt{5}+1)-5(2-\sqrt{3})-4(\sqrt{5}+\sqrt{3})\right)(\sqrt{3}+6)=$$
$$=\left(4\sqrt{5}+4-10+5\sqrt{3}-4\sqrt{5}-4\sqrt{3}\right)(\sqrt{3}+6)=$$
$$=(\sqrt{3}-6)(\sqrt{3}+6)=(\sqrt{3})^2-6^2=3-36=-33.$$

8. $$(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}=$$
$$=(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{(4+\sqrt{15})^2(4-\sqrt{15})}=$$
$$=(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{(4+\sqrt{15})(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})}=$$
$$=(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{(4+\sqrt{15})(16-15)}=$$
$$=(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4+\sqrt{15}}=$$

$$= \sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{6})^2(4+\sqrt{15})} =$$
$$= \sqrt{(10-2\sqrt{10}\sqrt{6}+6)(4+\sqrt{15})} =$$
$$= \sqrt{(16-4\sqrt{15})(4+\sqrt{15})} = 2\sqrt{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})} =$$
$$= 2\sqrt{16-15} = 2.$$

9. $$\frac{8+5\sqrt{5}}{\sqrt{9+4\sqrt{5}}} = \frac{2^3+\left(\sqrt{5}\right)^3}{\sqrt{5+2\cdot 2\cdot\sqrt{5}+4}} = \frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(4-2\sqrt{5}+5\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}} =$$
$$= \frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(9-2\sqrt{5}\right)}{\left|\sqrt{5}+2\right|} = \frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(9-2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{5}+2} = 9-2\sqrt{5}.$$

10. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}.$

$9-4\sqrt{5} = 5-2\cdot 2\sqrt{5}+4 = (\sqrt{5}-2)^2;$

$14-6\sqrt{5} = 5-2\cdot 3\sqrt{5}+9 = (\sqrt{5}-3)^2.$

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} =$$
$$= |\sqrt{5}-2|+|\sqrt{5}-3| = \sqrt{5}-2-\sqrt{5}+3 = 1,$$

так как $2 < \sqrt{5} < 3$.

Тренировочная работа 3

Сократите дробь:

1. $\dfrac{a-4}{\sqrt{a}+2}$.

2. $\dfrac{b-9}{\sqrt{b}-3}$.

3. $\dfrac{x\sqrt{x}+27}{\sqrt{x}+3}$.

4. $\dfrac{\sqrt{y^3}-\sqrt{x^3}}{x+\sqrt{xy}+y}$.

5. $\dfrac{x+5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+3}$.

Вычислите:

1. $\dfrac{\sqrt{9\sqrt{2}+4\sqrt{7}}}{2+\sqrt{14}}$.

2. $\left(\dfrac{12}{\sqrt{15}-3}-\dfrac{28}{\sqrt{15}-1}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)(6-\sqrt{3})$.

3. $\sqrt{3-\sqrt{5}}(\sqrt{10}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+3)$.

4. $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$.

5. $\sqrt{11-4\sqrt{7}}+\sqrt{16-6\sqrt{7}}$.

Решение тренировочной работы 3

Сократите дробь:

1. $\dfrac{a-4}{\sqrt{a}+2}=\dfrac{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)}{\sqrt{a}+2}=\sqrt{a}-2.$

2. $\dfrac{b-9}{\sqrt{b}-3}=\dfrac{(\sqrt{b}-3)(\sqrt{b}+3)}{\sqrt{b}-3}=\sqrt{b}+3.$

3. $\dfrac{x\sqrt{x}+27}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{(\sqrt{x})^3+3^3}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{(\sqrt{x}+3)(x-3\sqrt{x}+9)}{\sqrt{x}+3}=$
$=x-3\sqrt{x}+9.$

4. $\dfrac{\sqrt{y^3}-\sqrt{x^3}}{x+\sqrt{xy}+y}=\dfrac{(\sqrt{y}-\sqrt{x})(x+\sqrt{xy}+y)}{x+\sqrt{xy}+y}=\sqrt{y}-\sqrt{x}.$

5. $\dfrac{x+5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{x+3\sqrt{x}+2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+3}=$
$=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)+2(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+3}=\sqrt{x}+2.$

Вычислите:

1. $\dfrac{\sqrt{9\sqrt{2}+4\sqrt{7}}}{2+\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}(9+2\sqrt{14})}}{2+\sqrt{14}}=$
$=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}(7+2\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}+2)}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{7})}=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{7})}=$
$=\dfrac{|\sqrt{7}+\sqrt{2}|\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{7})}=\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{2}}}{(\sqrt{2}+\sqrt{7})\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}.$

2. $\left(\dfrac{12}{\sqrt{15}-3}-\dfrac{28}{\sqrt{15}-1}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)(6-\sqrt{3})=$
$\left(\dfrac{12(\sqrt{15}+3)}{(\sqrt{15}-3)(\sqrt{15}+3)}-\dfrac{28(\sqrt{15}+1)}{(\sqrt{15}-1)(\sqrt{15}+1)}+\right.$
$\left.+\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\right)(6-\sqrt{3})=$

$$= \left(\frac{12\left(\sqrt{15}+3\right)}{15-9} - \frac{28\left(\sqrt{15}+1\right)}{15-1} + \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} \right)(6-\sqrt{3}) =$$

$$= \left(\frac{12}{6}(\sqrt{15}+3) - \frac{28}{14}(\sqrt{15}+1) + 2 + \sqrt{3} \right)(6-\sqrt{3}) =$$

$$= (2\sqrt{15}+6-2\sqrt{15}-2+2+\sqrt{3})(6-\sqrt{3}) =$$

$$= (6+\sqrt{3})(6-\sqrt{3}) = 36-3 = 33.$$

3. $\sqrt{3-\sqrt{5}}(\sqrt{10}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+3) =$

$$= \sqrt{(\sqrt{5}+3)^2(3-\sqrt{5})}(\sqrt{10}-\sqrt{2}) =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5}+3)(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}(\sqrt{10}-\sqrt{2}) =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5}+3)(9-5)}(\sqrt{10}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2} =$$

$$= 2\sqrt{(\sqrt{5}+3)(10-2\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}+2)} =$$

$$= 2\sqrt{(\sqrt{5}+3)(12-2\cdot 2\sqrt{5})} = 2\sqrt{4(\sqrt{5}+3)(3-\sqrt{5})} =$$

$$= 2\cdot 2\sqrt{9-5} = 8.$$

4. $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \dfrac{1+\left(\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{2+2\sqrt{2}\cdot 1+1}} =$

$$= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}+2\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)}{|\sqrt{2}+1|} = 3-\sqrt{2}.$$

5. $\sqrt{11-4\sqrt{7}} + \sqrt{16-6\sqrt{7}} =$

$$= \sqrt{7-2\cdot 2\sqrt{7}+4} + \sqrt{7-2\cdot 3\sqrt{7}+9} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{7}-3)^2} =$$

$$= |\sqrt{7}-2| + |\sqrt{7}-3| = \sqrt{7}-2+3-\sqrt{7} = 1,$$

так как $2 < \sqrt{7} < 3$.

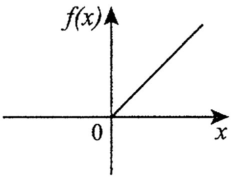
Практикум 5

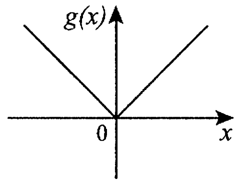
Рассмотрим некоторые особенности работы с квадратными корнями, включающими алгебраические выражения.

Примеры:

1. $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$; $g(x) = \sqrt{x^2}$.

При каких x возможно $f(x) = g(x)$? Поскольку



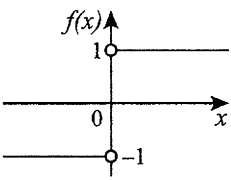


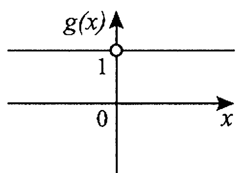
$f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ на $[0;\infty)$; $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$;

очевидно, что $f(x) = g(x)$ только на $[0;\infty)$.

2. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}$; $g(x) = x^2\sqrt{\dfrac{1}{x^4}}$.

При каких x возможно $f(x) = g(x)$?



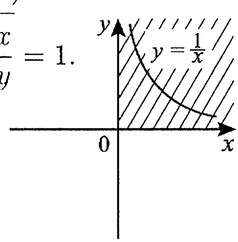


Если $x > 0$, то $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}} = 1$. $g(x) = \sqrt{\dfrac{x^4}{x^4}} = 1$ для $x \neq 0$.

Если $x < 0$, то $f(x) = -\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}} = -1$.

Очевидно, что $f(x) = g(x)$ на $(0;\infty)$.

3. Постройте график уравнения: $y\sqrt{\dfrac{x}{y}} = 1$.

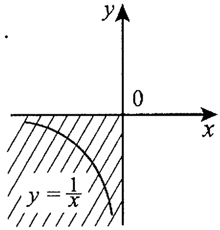


$y\sqrt{\dfrac{x}{y}} = 1 \Rightarrow y > 0;\ x > 0.$

Тогда $y^2 \cdot \dfrac{x}{y} = 1$; $xy = 1$, то

есть $y = 1/x$ при $x > 0$, $y > 0$.

4. Постройте график уравнения: $y\sqrt{\dfrac{x}{y}}=-1$.



$y\sqrt{\dfrac{x}{y}}=-1 \Rightarrow y<0;\ x<0.$

Тогда $y^2\cdot\dfrac{x}{y}=1;\ xy=1$, то есть $y=1/x$ при $x<0$, $y<0$.

5. Упростить: $A=\dfrac{\sqrt{ab}-b}{b}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Напомним, что:

1) $b=\begin{cases}(\sqrt{b})^2, & b\geqslant 0,\\ -\left(\sqrt{-b}\right)^2, & b<0;\end{cases}$

2) $\sqrt{b^2}=|b|$;

3) $\sqrt{a\cdot b}=\begin{cases}\sqrt{a}\sqrt{b}, & a\geqslant 0;\quad b\geqslant 0,\\ \sqrt{-a}\sqrt{-b}, & a<0;\quad b<0;\end{cases}$

4) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, & a\geqslant 0;\quad b>0,\\ \dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}, & a<0;\quad b<0.\end{cases}$

а) Пусть $a\geqslant 0,\quad b>0$.

Тогда $A=\dfrac{\sqrt{ab}-b}{b}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}-b}{b}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=$

$$=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}-b}{\left(\sqrt{b}\right)^2}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}-b+\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{b}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}-b}{\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2}-\frac{b}{\sqrt{b^2}}=$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-\frac{b}{b}=2\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-1=2\sqrt{\frac{a}{b}}-1.$$

б) Пусть $a \leqslant 0$, $\quad b < 0$. Тогда

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}; \qquad |b| = -b; \qquad b = -(\sqrt{-b})^2,$$

то есть

$$A = \frac{\sqrt{ab} - b}{b} + \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} - b}{b} + \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} =$$

$$= \frac{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} - b}{-\left(\sqrt{-b}\right)^2} + \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} - b - \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}}{-\left(\sqrt{-b}\right)^2} =$$

$$= \frac{-b}{-\left(\sqrt{-b}\right)^2} = \frac{-b}{b} = -1.$$

Итак,

$$A = \begin{cases} 2\sqrt{\dfrac{a}{b}} - 1, & a \geqslant 0; \quad b > 0, \\ \\ -1, & a \leqslant 0; \quad b < 0. \end{cases}$$

Но можно решить проще, если представить

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a \cdot b}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{|b|}.$$

Тогда

а) $a \geqslant 0$; $\ b > 0$.

$$A = \frac{\sqrt{ab} - b}{b} + \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab} - b}{b} + \frac{\sqrt{ab}}{|b|} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab} - b}{b} + \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{2\sqrt{ab} - b}{b} = 2\sqrt{\frac{a}{b}} - 1;$$

б) $a < 0$; $\ b < 0$.

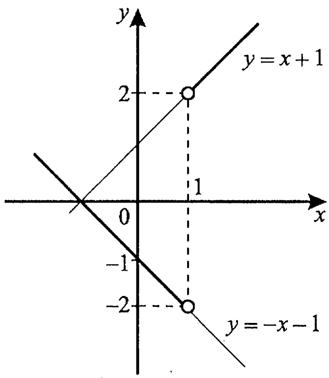
$$A = \frac{\sqrt{ab} - b}{b} + \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab} - b}{b} + \frac{\sqrt{ab}}{|b|} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab} - b}{b} - \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{\sqrt{ab} - b - \sqrt{ab}}{b} = \frac{-b}{b} = -1.$$

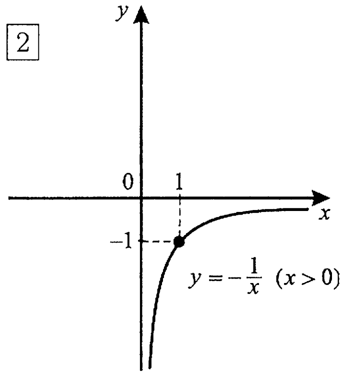
Тренировочная работа 4

Даны графики уравнений и функций.

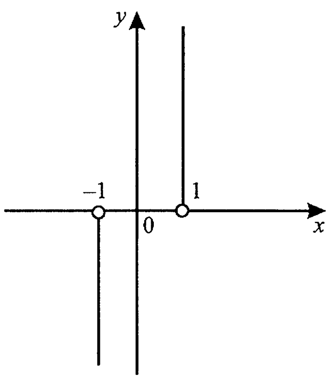
1



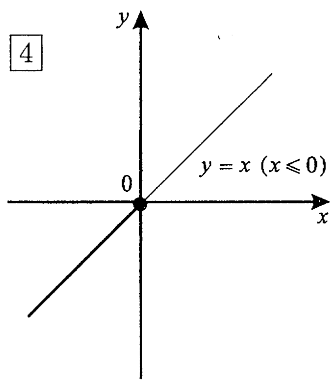
2



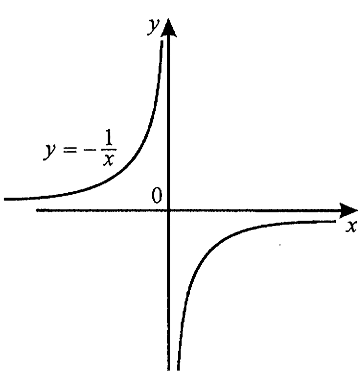
3



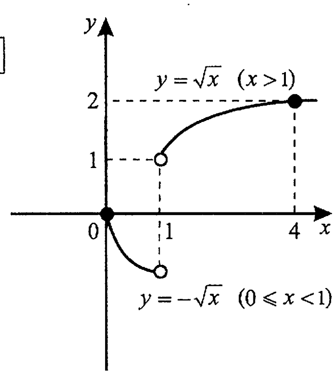
4



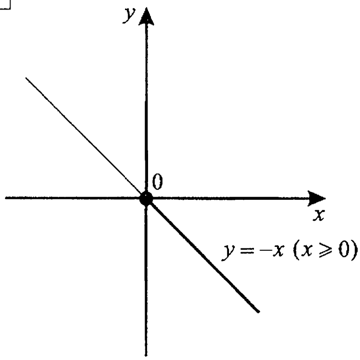
5



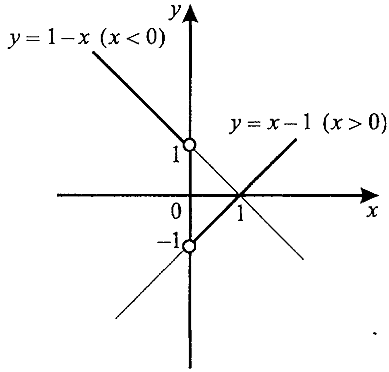
6



7



8



Найдите их аналитический вид из предложенных.

1. $\sqrt{-xy} = 1$

2. $xy\sqrt{\dfrac{1}{y^2}} = 1$

3. $y\sqrt{-\dfrac{x}{y}} = -1$

4. $y = \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x^2}}$

5. $y = \dfrac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1}$

6. $-x = \sqrt{xy}$

7. $y = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$

8. $\sqrt{-xy} = -y$

Ответ: **1.** — $\boxed{5}$; **2.** — $\boxed{3}$; **3.** — $\boxed{2}$; **4.** — $\boxed{8}$; **5.** — $\boxed{6}$; **6.** — $\boxed{4}$; **7.** — $\boxed{1}$; **8.** — $\boxed{7}$.

Практикум 6

Выполните действия:

1. $$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\frac{a-b}{a}= \qquad \text{при} \begin{cases} a>0,\\ b\geqslant 0,\\ a\neq b.\end{cases}$$

$$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\cdot\frac{a-b}{a}=$$

$$=\frac{a+\sqrt{ab}-\sqrt{ab}+b}{a-b}\cdot\frac{a-b}{a}=\frac{a+b}{a}.$$

2. $$\frac{a}{\sqrt{ab}+a}+\frac{b}{\sqrt{ab}-b}-\frac{a}{a-b}= \qquad \text{при} \begin{cases} a>0,\\ b>0,\\ a\neq b.\end{cases}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}+\frac{b}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}-\frac{a}{a-b}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{a}{a-b}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a})-a}{a-b}=$$

$$=\frac{a-\sqrt{ab}+b+\sqrt{ab}-a}{a-b}=\frac{b}{a-b}.$$

3. $$\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right)=$$

$$=\frac{(\sqrt{x})^2+\sqrt{xy}-\sqrt{xy}-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\times \qquad \text{при} \begin{cases} x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ x\neq y.\end{cases}$$

$$\times\frac{(\sqrt{x})^2-\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+\left(\sqrt{y}\right)^2+2\sqrt{yx}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}=$$

$$=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{(\sqrt{x})^2+2\sqrt{xy}+\left(\sqrt{y}\right)^2}{x-y}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

4. $$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}-\frac{3}{a-b}= \qquad \text{при } \begin{cases} a>0, \\ b>0, \\ a\neq b. \end{cases}$$

$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}-\frac{3}{a-b}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-3\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}\,(a-b)}=$$

$$=\frac{a+2\sqrt{ab}+b-a+2\sqrt{ab}-b-3\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}\,(a-b)}=$$

$$=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}\,(a-b)}=\frac{1}{a-b}.$$

5. $$\left(\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-(a+b)\right):\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}= \qquad \text{при } \begin{cases} a>0, \\ b>0, \\ a\neq b. \end{cases}$$

$$=\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\left((\sqrt{a})^2-\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-a-b\right)\times$$

$$\times\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}=(a-\sqrt{ab}+b-a-b)\cdot\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}=$$

$$=\frac{-\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}=\frac{ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

6. $$\frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}= \qquad \text{при } \begin{cases} a>0, \\ b\geqslant 0, \\ a\neq b. \end{cases}$$

$$=\frac{\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3\sqrt{a}(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})}+\frac{\sqrt{ab}-a}{(a-b)\sqrt{a}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}+\frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{a}}=$$

$$=\frac{a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}+3\sqrt{a}\cdot b-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}-$$

$$-\frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a}}=\frac{3a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}+3\sqrt{a}\cdot b}{3\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$
$$=\frac{3\sqrt{a}(a-\sqrt{ab}+b)}{3\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=0.$$

7. $$\frac{(a-b)^2}{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}+\frac{a^2-b^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)}= \quad \text{при} \begin{cases} a\geqslant 0, \\ b\geqslant 0, \\ a\neq b. \end{cases}$$

$$=(a-b)\left(\frac{a-b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)}+\frac{a+b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)}\right)=$$
$$=\frac{a-b}{a+\sqrt{ab}+b}\cdot\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$$
$$=\frac{a-b}{a+\sqrt{ab}+b}\cdot\frac{(a-b)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+(a+b)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=$$
$$=\frac{a-b}{a+\sqrt{ab}+b}\times$$
$$\times\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}+a\sqrt{b}-b\sqrt{b}+a\sqrt{a}+b\sqrt{a}-a\sqrt{b}-b\sqrt{b}}{a-b}=$$
$$=\frac{(a-b)\left(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}\right)\cdot 2}{(a+\sqrt{ab}+b)\,(a-b)}=\frac{\left((\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3\right)\cdot 2}{a+\sqrt{ab}+b}=$$
$$=\frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)}{a+\sqrt{ab}+b}=2(\sqrt{a}-\sqrt{b}).$$

8. $$\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)= \quad \text{при } a>1.$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{a-1}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)}\right):\frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{a+1-a}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{a-(a-1)}\right)\cdot\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}=$$

$$=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt{a-1})\cdot\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}\cdot\sqrt{a-1}=\sqrt{a-1}.$$

9. $$\frac{x^2+4}{x\sqrt{4+\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2}}=\frac{x^2+4}{x\sqrt{4+\frac{x^4-8x^2+16}{4x^2}}}=\frac{x^2+4}{x\sqrt{\frac{16x^2+x^4-8x^2+16}{4x^2}}}=$$

$$=\frac{x^2+4}{x\sqrt{\frac{x^4+8x^2+16}{4x^2}}}=\frac{x^2+4}{x\sqrt{\left(\frac{x^2+4}{2x}\right)^2}}=\frac{x^2+4}{x\left|\frac{x^2+4}{2x}\right|}=A,\text{ где } A=\begin{cases}2, & x>0,\\ -2, & x<0.\end{cases}$$

10. $$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1}=\frac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}}{\sqrt{x-1}-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}}{\sqrt{x-1}-1}=\frac{|\sqrt{x-1}-1|}{\sqrt{x-1}-1}=A,\text{ где } A=\begin{cases}1, & x>2,\\ -1, & 1\leqslant x<2,\end{cases}$$

так как $\sqrt{x-1}>1 \iff x>2$,

а $\sqrt{x-1}<1 \iff \begin{cases}x-1\geqslant 0\\ x-1<1\end{cases}\quad\begin{cases}x\geqslant 1\\ x<2,\end{cases}$

Важно помнить, что

I. $\sqrt{a}<b \iff \begin{cases}b>0,\\ a\geqslant 0,\\ a<b^2.\end{cases}$ **II.** $\sqrt{a}>b \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b\geqslant 0\\ a>b^2\end{cases}\\ \begin{cases}b<0\\ a\geqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$.

Но можно не надеяться на сообразительность, а обозначить $\sqrt{x-1}=t$ $(t\geqslant 0)$.

Тогда $x=t^2+1$, и выражение приобретает вид:

$$\frac{\sqrt{t^2+1-2t}}{t-1}=\frac{\sqrt{(t-1)^2}}{t-1}=\frac{|t-1|}{t-1}=A,\text{ где } A=\begin{cases}1, & t>1\\ -1, & 0\leqslant t<1\end{cases}$$

и т. д.

Проверочная работа 2

Выполните действия и упростите:

1. $\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+4\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right).$

2. $\left(\dfrac{\sqrt{x^2-4}-x}{\sqrt{x^2-4}+x}-\dfrac{\sqrt{x^2-4}+x}{\sqrt{x^2-4}-x}\right):\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x}}.$

3. $\left(\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-(x+y)\right)\cdot\sqrt{xy}.$

4. $\left(\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{a})^2}{a-b}-(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-1}\right):\dfrac{4(\sqrt{a})^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$

5. $\left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}-\dfrac{1}{x}\right).$

6. $\left(\dfrac{4a-\dfrac{9}{a}}{2\sqrt{a}-\dfrac{3}{\sqrt{a}}}+\dfrac{a-4+\dfrac{3}{a}}{\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}}\right)^2.$

7. $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}.$

8. $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}.$

9. $\left(\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}\right):\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}$

при $x>a>0$.

10. $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}+\dfrac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2(ab^{-1}+1)^2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{1-ba^{-1}}{1+ba^{-1}}}.$

2

Степени с натуральными показателями

Свойства действий со степенями.
Пусть $a, b \in \mathbb{R}$; $n, m \in \mathbb{N}$. Тогда

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; 2) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$;

3) $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$; 4) $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$;

5) $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$ $(a \neq 0)$; 6) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; 7) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$.

Практикум 7

Вычислите:

1. $$\frac{(2^3)^4 \cdot (2^3)^5}{16^2 \cdot 32^3} = \frac{2^{12} \cdot 2^{15}}{(2^4)^2 \cdot (2^5)^3} = \frac{2^{27}}{2^8 \cdot 2^{15}} = \frac{2^{27}}{2^{8+15}} = 2^{27-23} = 2^4 = 16.$$

2. $$\left(\frac{5^3}{6^2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^7 = \frac{5^{12}}{6^8} \cdot \frac{2^5}{5^5} \cdot \frac{3^7}{5^7} = \frac{5^{12}}{5^{5+7}} \cdot \frac{2^5 \cdot 3^7}{2^8 \cdot 3^8} = 1 \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 3^1} = \frac{1}{24}.$$

3. $$\frac{(4^n)^2 \cdot 8^{n+1}}{(2^4)^n \cdot 2^{3n+2} \cdot 20} = \frac{4^{2n} \cdot 8^{n+1}}{2^{4n} \cdot 2^{3n+2} \cdot 20} = \frac{(2^2)^{2n} \cdot (2^3)^{n+1}}{2^{7n+2} \cdot 2^2 \cdot 5} = \frac{2^{4n} \cdot 2^{3n+3}}{2^{7n+4} \cdot 5} = \frac{2^{7n+3}}{2^{7n+4} \cdot 5} = \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}.$$

4. $\dfrac{2\cdot 3^{20}-5\cdot 3^{19}}{9^9}=\dfrac{3^{19}\left(2\cdot 3^1-5\right)}{\left(3^2\right)^9}=\dfrac{3^{19}\cdot 1}{3^{18}}=3.$

5. $\dfrac{52\left(3\cdot 2^{20}+7\cdot 2^{19}\right)}{\left(13\cdot 8^4\right)^2}=\dfrac{52\cdot 2^{19}\left(3\cdot 2+7\right)}{13^2\cdot 8^8}=\dfrac{4\cdot 13\cdot 2^{19}\cdot 13}{13^2\left(2^3\right)^8}=$
$=\dfrac{2^2\cdot 2^{19}}{2^{24}}=\dfrac{2^{21}}{2^{24}}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}.$

6. $\dfrac{25\left(180\cdot 6^7-108\cdot 6^6\right)}{216^3-36^4}=\dfrac{5^2\cdot 6^6\left(180\cdot 6-108\right)}{\left(6^3\right)^3-\left(6^2\right)^4}=$
$=\dfrac{5^2\cdot 6^6\left(36\cdot 5\cdot 6-3\cdot 36\right)}{6^9-6^8}=\dfrac{5^2\cdot 6^8\left(6\cdot 5-3\right)}{6^8\left(6-1\right)}=$
$=\dfrac{5^2\cdot 27}{5}=135.$

7. $\dfrac{\left(3^{15}+3^{13}\right)\cdot 2^9}{\left(3^{14}+3^{12}\right)\cdot 1024}=\dfrac{3^{13}\left(3^2+1\right)\cdot 2^9}{3^{12}\left(3^2+1\right)\cdot 2^{10}}=\dfrac{3}{2}=1{,}5.$

8. $\dfrac{\left(9^{n+1}-9^{n-1}\right)^3}{\left(27^n+13\cdot 27^{n-1}\right)^2}=\dfrac{\left(9^{n-1}\left(9^2-1\right)\right)^3}{\left(27^{n-1}\left(27+13\right)\right)^2}=\dfrac{9^{3n-3}\cdot 80^3}{27^{2n-2}\cdot 40^2}=$
$=\dfrac{\left(3^2\right)^{3n-3}\cdot\left(2\cdot 40\right)^3}{\left(3^3\right)^{2n-2}\cdot 40^2}=\dfrac{3^{6n-6}\cdot 2^3\cdot 40^3}{3^{6n-6}\cdot 40^2}=8\cdot 40=320.$

9. $\left(5^{n+1}-5^{n-1}\right):\left(5^{n-2}\right)-49^{n+1}:7^{2n+1}=$
$=5^{n+1-n+2}-5^{n-1-n+2}-7^{2n+2}:7^{2n+1}=$
$=5^3-5-7^{2n+2-2n-1}=120-7=113.$

10. Сравните числа:

а) 216^3 и 54^4.

$216^3-54^4=\left(6^3\right)^3-\left(6\cdot 9\right)^4=6^9-6^4\cdot 9^4=$
$=6^4\left(6^5-9^4\right)=6^4\left(2^5\cdot 3^5-\left(3^2\right)^4\right)=$
$=6^4\left(2^5\cdot 3^5-3^8\right)=6^4\cdot 3^5\left(2^5-3^3\right)>0,$
то есть $216^3>54^4$.

б) 101^6 и 10^{12}.

Поскольку $10^{12}=\left(10^2\right)^6=100^6$ и $101>100$, $101^6>100^6$, значит, $101^6>10^{12}$.

Проверочная работа 3

Вычислите:

1. $\dfrac{18^2 \cdot 12^3 \cdot 8^2}{24^3 \cdot 6^2}$.

2. $\dfrac{72^3 \cdot 48^3}{36^5 \cdot 16^3}$.

3. $\dfrac{\left(9 \cdot 16^{n-1} + 16^n\right)^2}{\left(4^{n-1} + 4^{n-2}\right)^4}$.

4. $\left(\dfrac{7^4}{15^2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{5}{7}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{3}{7}\right)^5$.

5. $\dfrac{\left(4 \cdot 3^{22} + 7 \cdot 3^{21}\right) \cdot 57}{\left(19 \cdot 27^4\right)^2}$.

6. $\dfrac{5\left(3 \cdot 7^{15} - 19 \cdot 7^{14}\right)}{7^{16} + 3 \cdot 7^{15}}$.

7. $\dfrac{6 \cdot 2^8 - 9 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^{12}}{4 \cdot 2^{10} + 4 \cdot 2^{12} - 8 \cdot 2^{11}}$.

8. $\dfrac{3^{n+2} - 2 \cdot 3^n}{3^{n-1}} - \dfrac{36^{n+1}}{6^{2n-1}}$.

9. Упростите $\dfrac{a^{3n} - a^{n-2}}{a^{2n-2} - a^{n-3}}$.

10. Сравните числа:

а) 75^{10} и 15^{15};

б) 200^6 и 14^{12}.

3

Степени с дробными показателями

Рассмотрим еще ряд необходимых свойств.

1) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}; \quad a > 0;\ m \in \mathbb{N};\ n \in \mathbb{Z};\ a \in \mathbb{R}.$

2) $\sqrt[2k-1]{a \cdot b} = \sqrt[2k-1]{a} \cdot \sqrt[2k-1]{b}; \quad k \in \mathbb{N};\ a, b \in \mathbb{R}.$

3) $\sqrt[2k]{a \cdot b} = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt[2k]{a} \cdot \sqrt[2k]{b}; & a \geqslant 0; b \geqslant 0 \\ \sqrt[2k]{-a} \cdot \sqrt[2k]{-b}; & a \leqslant 0; b \leqslant 0 \end{array} \right| \quad k \in \mathbb{N};\ a, b \in \mathbb{R}.$

4) $\sqrt[2k-1]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2k-1]{a}}{\sqrt[2k-1]{b}}; \quad k \in \mathbb{N};\ a, b \in \mathbb{R};\ b \neq 0.$

5) $\sqrt[2k]{\dfrac{a}{b}} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\sqrt[2k]{a}}{\sqrt[2k]{b}}; & a \geqslant 0;\ b > 0 \\ \dfrac{\sqrt[2k]{-a}}{\sqrt[2k]{-b}}; & a \leqslant 0;\ b < 0 \end{array} \right| \quad k \in \mathbb{N};\ a, b \in \mathbb{R}.$

6) $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}; \quad a > 0;\ n, p \in \mathbb{N};\ m \in \mathbb{Z};\ a \in \mathbb{R}.$

7) $\sqrt[2k]{a^{2m}} = \sqrt[k]{|a|^m}; \quad a \in \mathbb{R};\ m, k \in \mathbb{N}$ при $k = m \quad \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$

8) $b \sqrt[2k-1]{a} = \sqrt[2k-1]{a \cdot b^{2k-1}}; \quad a, b \in \mathbb{R};\ k \in \mathbb{N}.$

9) $b \sqrt[2k]{a} = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt[2k]{a \cdot b^{2k}}; & a \geqslant 0;\ b \geqslant 0 \\ -\sqrt[2k]{a \cdot b^{2k}}; & a \geqslant 0;\ b < 0 \end{array} \right| \quad k \in \mathbb{N};\ a, b \in \mathbb{R}.$

10) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}, \qquad ab \neq 0.$

Практикум 8

Вычислите (1–14):

1. $8^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{1}{4}} + 9^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} - (2^4)^{\frac{1}{4}} + (3^2)^{\frac{1}{2}} = 4 - 2 + 3 = 5.$

2. $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 1{,}5^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{3^{-2}}{5^{-2}} \cdot \frac{3^{-2}}{2^{-2}} = \frac{3^{-4}}{10^{-2}} =$

$= \left(\frac{3^4}{10^2}\right)^{-1} = \frac{10^2}{3^4} = \frac{100}{81}.$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}, \quad ab \neq 0}$$

3. $125^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} + 343^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} + (2^4)^{\frac{1}{2}} + (7^3)^{\frac{1}{3}} = 25 + 4 + 7 = 36.$

4. $\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 0{,}6^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-3}\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{3^3}{5^3} \cdot \frac{5^2}{3^2} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$

5. $9^{-0{,}5} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} + (0{,}25)^{-1{,}5} =$

$= (3^2)^{-0{,}5} - (2^{-3})^{-\frac{4}{3}} + (2^{-2})^{-1{,}5} = 3^{-1} - 2^4 + 2^3 =$

$= \frac{1}{3} - 16 + 8 = -7\frac{2}{3}.$

6. $\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[3]{9} = (3^2)^{\frac{1}{4}}(3^2)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = 3^{\frac{7}{6}}.$

7. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{4} = (2^2)^{\frac{1}{3}}(2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{6}}.$

8. $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (0{,}81)^{-0{,}5} =$

$= (2^{-4})^{-\frac{3}{4}} + (2^{-3})^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\left(\frac{9}{10}\right)^{2}\right)^{-0{,}5} =$

$= 2^3 + 2^2 \cdot \frac{10}{9} = 8 + \frac{40}{9} = 12\frac{4}{9}.$

9. $0{,}0016^{-\frac{3}{4}} + 0{,}04^{-\frac{1}{2}} - 0{,}216^{-\frac{2}{3}} \cdot 9 =$

$= \left((0{,}2)^4\right)^{-\frac{3}{4}} + \left((0{,}2)^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left((0{,}6)^3\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 9 =$

$$= 5^3 + 5^1 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot 9 = 125 + 5 - 25 = 105,$$

так как $0{,}2 = 5^{-1}$.

10. $0{,}125^{-\frac{1}{3}} + 0{,}81^{-\frac{1}{2}} - 0{,}027^{-\frac{2}{3}} =$

$$= \left((0{,}5)^3\right)^{-\frac{1}{3}} + \left((0{,}9)^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left((0{,}3)^3\right)^{-\frac{2}{3}} = 2 + \frac{10}{9} - \frac{100}{9} = -8,$$

так как $0{,}5 = 2^{-1}$.

11. $\sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x^{-3}}} : x^{-\frac{1}{6}} = (x \cdot x^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} : x^{-\frac{1}{6}} = x^{-\frac{1}{6}} : x^{-\frac{1}{6}} = 1.$

12. $\sqrt[5]{x^{-2} \cdot \sqrt[3]{x^2}} \cdot x^{\frac{4}{15}} = (x^{-2} \cdot x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{4}{15}} = x^{-\frac{4}{15}} \cdot x^{\frac{4}{15}} = x^0 = 1.$

13. $\sqrt[3]{a^{-\frac{3}{2}} \cdot b^{-1} \cdot \sqrt{a^3 b^{-2}}} = (a^{-\frac{3}{2}} \cdot b^{-1} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-1})^{\frac{1}{3}} =$

$$= (a^0 \cdot b^{-2})^{\frac{1}{3}} = b^{-\frac{2}{3}}.$$

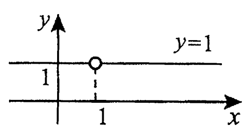
14. $\dfrac{a^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{b}}{a^{-1}} \cdot (16 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}} = a^{-\frac{1}{2}+1} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot (2^4)^{\frac{1}{4}} (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}} (b^{-\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}} =$

$$= a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot 2 \cdot a^{\frac{1}{8}} \cdot b^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}} \cdot b^0 \cdot 2 = 2a^{\frac{5}{8}}.$$

Постройте график (15, 16):

15. $y = (x-1)^0$.

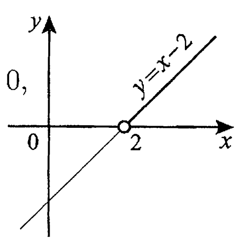
Так как $\begin{cases} a^0 = 1 \\ a \neq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} (x-1)^0 = 1 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases}$.



16. $y = \dfrac{(x-2)^{\frac{1}{2}}}{(x-2)^{-\frac{1}{2}}}$.

Так как $a^{\frac{p}{q}}$ определена только при $a > 0$,

$$\begin{cases} y = (x-2)^{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = x - 2 \\ x - 2 > 0 \end{cases}.$$



Упражнения

Вычислите:

	№ 1	№ 2
1	$4 \cdot 36^{-\frac{1}{2}}$	$2 \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$
2	$3 \cdot 216^{-\frac{1}{3}}$	$4 \cdot 5,76^{-\frac{1}{2}}$
3	$4^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{3}}$	$16^{\frac{1}{4}} - 36^{\frac{1}{2}}$
4	$\sqrt[3]{8^2} + \sqrt[4]{16} - \sqrt[3]{125}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{64}} + \sqrt[4]{\frac{81}{16}} - \sqrt[5]{\frac{1}{32}}$
5	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} - \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{125}} + \frac{\sqrt{343}}{\sqrt{7}}$
6	$\sqrt[3]{343} - \sqrt[4]{0{,}0625}$	$\sqrt{36^3} - \sqrt[3]{27^2} + \sqrt[4]{625}$
7	$\sqrt[5]{0{,}00032} + \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$	$\sqrt[4]{1296} - \sqrt[5]{1024}$
8	$(0{,}0016)^{\frac{1}{2}} \cdot (0{,}0016)^{-\frac{1}{4}}$	$(0{,}216)^{-\frac{1}{3}} \cdot (0{,}36)^{\frac{1}{2}}$
9	$\sqrt[3]{3{,}7^4} \cdot \sqrt[4]{3{,}7^3} : \sqrt[12]{3{,}7}$	$\sqrt[4]{2{,}5^3} : \sqrt[12]{2{,}5} \cdot \sqrt[3]{2{,}5^4}$
10	$\sqrt[3]{1{,}8} \cdot \sqrt[3]{0{,}12}$	$\sqrt[4]{0{,}54} \cdot \sqrt[4]{0{,}24}$

	№ 3	№ 4
1	$7 \cdot 343^{-\frac{1}{3}}$	$9 \cdot 7{,}29^{-\frac{1}{2}}$
2	$14 \cdot 784^{-\frac{1}{2}}$	$22 \cdot 1331^{-\frac{1}{3}}$
3	$(0{,}008)^{-\frac{1}{3}} + (6{,}76)^{\frac{1}{2}}$	$(0{,}216)^{-\frac{1}{3}} - (2{,}25)^{-\frac{1}{2}}$
4	$\sqrt[5]{243} - \sqrt[4]{256} + \sqrt[3]{0{,}027}$	$\sqrt[3]{343} - \sqrt{4{,}84} + \sqrt[5]{0{,}00032}$
5	$\frac{\sqrt{0{,}032}}{\sqrt{0{,}2}} - \frac{\sqrt{1331}}{\sqrt{11}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$
6	$\sqrt[3]{729} - \sqrt[4]{1296} + \sqrt{961}$	$\sqrt[4]{256} + \sqrt[6]{9^3} - \sqrt[10]{32^2}$
7	$\sqrt[6]{729} + \sqrt[10]{1024}$	$\sqrt[6]{0{,}000064} - \sqrt{8{,}41}$
8	$(0{,}0625)^{\frac{1}{4}} \cdot (0{,}0625)^{-\frac{3}{4}}$	$(0{,}96)^{\frac{1}{4}} \cdot (2{,}16)^{\frac{1}{4}}$
9	$\sqrt[4]{6^5} \cdot \sqrt[5]{6^4} : \sqrt[20]{6}$	$\sqrt[20]{0{,}25} : \sqrt[4]{0{,}25^5} : \sqrt[5]{0{,}25^4}$
10	$\sqrt[3]{0{,}27} \cdot \sqrt[3]{0{,}8}$	$\sqrt[4]{2{,}16} \cdot \sqrt[4]{0{,}06}$

Ответы

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ 1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	-1	1	$-4\frac{2}{3}$	6,5	0,7	$\frac{1}{5}$	13,69	0,6
№ 2	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{3}$	-4	$\frac{5}{4}$	7,2	212	2	1	6,25	0,6
№ 3	1	$\frac{1}{2}$	7,6	$-0,7$	$-10,6$	34	5	4	36	0,6
№ 4	$3\frac{1}{3}$	2	1	5	$-2,5$	5	$-2,7$	1,2	16	0,6

Тренировочная работа 5

1. Вычислите:

1) $2 \cdot 27^{\frac{1}{3}}$.

2) $36^{-\frac{1}{2}}$.

3) $5 \cdot 64^{-\frac{1}{6}}$.

4) $8^{\frac{2}{3}} - 16^{-\frac{1}{4}} + 9^{\frac{1}{2}}$.

5) $\sqrt[3]{90 \cdot 75 \cdot 108}$.

6) $\left(3\sqrt{7{,}5}\right)^2 - \sqrt{3}\sqrt{0{,}12} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$.

2. Упростите:

1) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{6}}$.

2) $\dfrac{x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}$.

3) $\dfrac{\left(y^{-\frac{3}{4}}\right)^4 \cdot y^{\frac{5}{2}}}{y^{-1}}$.

4) $\dfrac{\left(y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{3}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}}$.

3. Выполните действия:

1) $c^{\frac{7}{4}} \cdot \sqrt[4]{c}$.

2) $a^{\frac{7}{2}} \cdot \sqrt{a}$.

3) $\sqrt[3]{x\sqrt{x^{-3}}} : x^{-\frac{1}{6}}$.

4) $\left(\sqrt{5} - 3\right)\sqrt{\left(\sqrt{5} - 3\right)^{-2}}$.

4. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-2a^{\frac{1}{2}}}$.

2) $\dfrac{a-4}{a-2a^{\frac{1}{2}}}$.

3) $\dfrac{3a^{\frac{1}{2}}-a}{9-a}$.

4) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}$.

5) $\dfrac{6-\sqrt{6}}{\sqrt{18}-\sqrt{3}}$.

6) $\dfrac{x+9}{\sqrt{-x}+3}$.

Решение тренировочной работы 5

1. Вычислите:

1) $2\cdot 27^{\frac{1}{3}} = 2\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2\cdot 3 = \boxed{6}$.[3]

2) $36^{-\frac{1}{2}} = \left(6^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 6^{-1} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$.

3) $5\cdot 64^{-\frac{1}{6}} = 5\cdot\left(2^6\right)^{-\frac{1}{6}} = 5\cdot 2^{-1} = \boxed{2,5}$.

4) $8^{\frac{2}{3}} - 16^{-\frac{1}{4}} + 9^{\frac{1}{2}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} - \left(2^4\right)^{-\frac{1}{4}} + \left(3^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2^2 - \dfrac{1}{2} + 3 = \boxed{6,5}$.

5) $\sqrt[3]{90\cdot 75\cdot 108} = \sqrt[3]{3^2\cdot 2\cdot 5\cdot 5^2\cdot 3\cdot 3^3\cdot 2^2} =$
$= \sqrt[3]{3^6\cdot 5^3\cdot 2^3} = 3^2\cdot 5\cdot 2 = \boxed{90}$.

6) $\left(3\sqrt{7{,}5}\right)^2 - \sqrt{3}\sqrt{0{,}12} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = 9\cdot 7{,}5 - \sqrt{3\cdot 3\cdot 0{,}04} + \sqrt{\dfrac{2}{8}} =$

$= 67{,}5 - 3\cdot 0{,}2 + \dfrac{1}{2} = 68 - 0{,}6 = \boxed{67{,}4}$.

2. Упростите:

1) $a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = \boxed{a^{\frac{1}{6}}}$.

2) $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = \boxed{x}$.

3) $\dfrac{\left(y^{-\frac{3}{4}}\right)^4\cdot y^{\frac{5}{2}}}{y^{-1}} = y^{-\frac{3}{4}\cdot 4}\cdot y^{\frac{5}{2}}\cdot y^1 = y^{-3+\frac{5}{2}+1} = \boxed{y^{\frac{1}{2}}}$.

4) $\dfrac{\left(y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{3}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}} = y^{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot y^{\frac{3}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}} = y^{-1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = \boxed{y}$.

[3] Для удобства будем ответ помещать в прямоугольник.

3. Выполните действия:

1) $c^{\frac{7}{4}} \cdot \sqrt[4]{c} = c^{\frac{7}{4}} \cdot c^{\frac{1}{4}} = c^{\frac{7}{4}+\frac{1}{4}} = \boxed{c^2}$.

2) $a^{\frac{7}{2}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{7}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{2}+\frac{1}{2}} = \boxed{a^4}$.

3) $\sqrt[3]{x\sqrt{x^{-3}}} : x^{-\frac{1}{6}} = \left(x \cdot x^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} : x^{-\frac{1}{6}} = x^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} : x^{-\frac{1}{6}} =$

$= x^{-\frac{1}{6}} : x^{-\frac{1}{6}} = \boxed{1}$.

4) $(\sqrt{5}-3)\sqrt{(\sqrt{5}-3)^{-2}} = -\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2(\sqrt{5}-3)^{-2}} =$

$= -\sqrt{(\sqrt{5}-3)^0} = \boxed{-1}$.

4. Сократите дробь:

1) $$\frac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-2a^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-2\right)} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \boxed{a^{-\frac{1}{2}}}.$$

2) $$\frac{a-4}{a-2a^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-2\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+2\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-2\right)} =$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a^{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{2}{a^{\frac{1}{2}}} = \boxed{1+2a^{-\frac{1}{2}}}.$$

3) $$\frac{3a^{\frac{1}{2}}-a}{9-a} = \frac{a^{\frac{1}{2}}\left(3-a^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(3+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(3-a^{\frac{1}{2}}\right)} = \boxed{\frac{a^{\frac{1}{2}}}{3+a^{\frac{1}{2}}}}.$$

4) $$\frac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}=$$
$$=\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}=\boxed{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}.$$

5) $$\frac{6-\sqrt{6}}{\sqrt{18}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-1\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-1\right)}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\boxed{\sqrt{2}}.$$

6) $$\frac{x+9}{\sqrt{-x}+3}=\frac{-\left(\sqrt{-x}\right)^2+3^2}{\sqrt{-x}+3}=$$
$$=\frac{\left(3+\sqrt{-x}\right)\left(3-\sqrt{-x}\right)}{3+\sqrt{-x}}=\boxed{3-\sqrt{-x}}.$$

Проверочная работа 4

Вычислите (1–12):

1. $3 \cdot 8^{\frac{1}{3}}$.

2. $64^{-\frac{1}{2}}$.

3. $2 \cdot 243^{-\frac{1}{5}}$.

4. $\sqrt[3]{200 \cdot 45 \cdot 24}$.

5. $\left(5\sqrt{2{,}7}\right)^2 - \sqrt{2{,}4} \cdot \sqrt{0{,}15} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$.

6. $36^{\frac{3}{2}} + 64^{\frac{2}{3}} - 625^{\frac{1}{2}}$.

7. $(0{,}04)^{-1{,}5} \cdot (0{,}125)^{-\frac{1}{3}} - \left(\dfrac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

8. $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{27}$.

9. $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[10]{4}$.

10. $16^{0{,}5} + \left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0{,}75} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{0}$.

11. $0{,}008^{-\frac{2}{3}} + 0{,}064^{-\frac{1}{3}} - 0{,}0625^{-\frac{3}{4}}$.

12. $0{,}25^{-\frac{3}{2}} + 3 \cdot 0{,}0081^{-0{,}25} + \left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0{,}75}$.

Упростите (13–16):

13. $b^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{4}}$.

14. $\dfrac{c^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{3}{4}}}{c^{\frac{1}{6}}}$.

15. $\dfrac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} \cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{2}{3}}}$.

16. $\dfrac{\left(c^{\frac{3}{2}}\right)^{2} \cdot c^{-\frac{7}{3}}}{c^{-\frac{4}{3}}}$.

Выполните действия (17–24):

17. $x^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{x}$.

18. $y^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{y}$.

19. $(\sqrt{3}-2)\sqrt{(\sqrt{3}-2)^{-2}}$.

20. $\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a^{-1}}} \cdot a^{\frac{5}{16}}$.

21. $\sqrt{a\sqrt[3]{a^{-2}}} : a^{-\frac{1}{6}}$.

22. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} : \sqrt[8]{a^{-1}}$.

23. $\sqrt{\dfrac{x^{-2}\sqrt{x^3}}{a^{-1}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x}{a^{-3}}}}$.

24. $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x}$.

Сократите дробь (25–30)

25. $\dfrac{5x^{\frac{1}{2}}+x}{5+x^{\frac{1}{2}}}$.

26. $\dfrac{1-a}{1+a^{\frac{1}{2}}}$.

27. $\dfrac{2y^{\frac{1}{2}}-y}{4-y}$.

28. $\dfrac{m+n}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}$.

29. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.

30. $\dfrac{36+x}{6-\sqrt{-x}}$.

Практикум 9

Вычислите:

1. $\sqrt{\dfrac{27^{-1}\cdot 9^5}{16^0\cdot 3^{-3}}}$.

2. $\dfrac{\sqrt{2{,}8}\cdot\sqrt{4{,}2}}{\sqrt{0{,}24}}$.

3. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)$.

4. $\dfrac{\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}}{\sqrt[8]{7^{-1}}}$.

5. $\sqrt{\sqrt{55}\cdot\sqrt{275}\cdot\sqrt{605}}$.

6. $\left(\dfrac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^{-2}$.

7. $\dfrac{17+2\sqrt{30}}{\sqrt{15}+\sqrt{2}}\sqrt{17-2\sqrt{30}}$.

8. $\sqrt{4-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}$.

9. $\dfrac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{108}}-\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{48}}$.

10. $\dfrac{\left(24^{\frac{2}{3}}-40^{\frac{2}{3}}\right)\left(5^{\frac{1}{3}}+7^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(40^{\frac{1}{3}}+56^{\frac{1}{3}}\right)\left(3^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{2}{3}}\right)}$.

11. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{2^{-1}}}{2^{-1}\cdot\sqrt{\frac{1}{2^{-1}}}}\cdot\sqrt[3]{2^{-8}}\right)^{-0,4}.$

12. $\left(2^2\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3^{\frac{7}{6}}\cdot 32^{-1}\cdot\sqrt[3]{3^{-2}}}\right)^{-8}.$

13. $\left(3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}\right):\dfrac{48^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{5}{4}}}{3}.$

14. $\sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}.$

Решение практикума 9

Вычислите:

1. $\sqrt{\dfrac{27^{-1}\cdot 9^5}{16^0\cdot 3^{-3}}}=\sqrt{\dfrac{3^{-3}\cdot\left(3^2\right)^5}{1\cdot 3^{-3}}}=\sqrt{3^{10}}=3^5=\boxed{243}.$

2. $\dfrac{\sqrt{2{,}8}\cdot\sqrt{4{,}2}}{\sqrt{0{,}24}}=\sqrt{\dfrac{2{,}8\cdot 4{,}2}{0{,}24}}=\sqrt{\dfrac{28\cdot 42}{24}}=\sqrt{\dfrac{2^2\cdot 7\cdot 7\cdot 2\cdot 3}{2^3\cdot 3}}=\boxed{7}.$

3. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)=$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(3+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=$$

$$=\frac{(3-1)\sqrt{3}\left(\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2\right)}{3\cdot\sqrt{3}\,(3-1)}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(3-2\sqrt{3}+1+3+2\sqrt{3}+1\right)=\frac{8}{3}=\boxed{2\frac{2}{3}}.$$

4. $\dfrac{\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}}{\sqrt[8]{7^{-1}}}=\dfrac{7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}{7^{-\frac{1}{8}}}=7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}=\boxed{7}.$

5. $\sqrt{\sqrt{55}\cdot\sqrt{275}\cdot\sqrt{605}}=\sqrt{\sqrt{5\cdot 11\cdot 25\cdot 11\cdot 121\cdot 5}}=$

$=\sqrt{\sqrt{5^4\cdot 11^4}}=\sqrt{5^2\cdot 11^2}=5\cdot 11=\boxed{55}.$

6. $\left(\dfrac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}\right)^{-2}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^{-2}=$

$=\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2=\boxed{\dfrac{2}{3}}.$

7. $$\frac{17+2\sqrt{30}}{\sqrt{15}+\sqrt{2}}\sqrt{17-2\sqrt{30}}=$$

$$=\frac{15+2\sqrt{15\cdot 2}+2}{\sqrt{15}+\sqrt{2}}\sqrt{15-2\sqrt{15\cdot 2}+2}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{15}+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{15}+\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sqrt{15}-\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\left(\sqrt{15}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{15}-\sqrt{2}\right)=15-2=\boxed{13}.$$

8. $$\sqrt{4-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}=\sqrt[4]{\left(4-2\sqrt{2}\right)^2\left(6+4\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\sqrt[4]{\left(16-16\sqrt{2}+8\right)\left(6+4\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\sqrt[4]{8\left(3-2\sqrt{2}\right)\cdot 2\left(3+2\sqrt{2}\right)}=\sqrt[4]{16\,(9-8)}=\boxed{2}.$$

9. $$\frac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{108}}-\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{48}}=\sqrt[3]{\frac{256}{108}}-\sqrt[4]{\frac{243}{48}}=\sqrt[3]{\frac{2^8}{27\cdot 4}}-\sqrt[4]{\frac{3^5}{16\cdot 3}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{2^6}{3^3}}-\sqrt[4]{\frac{3^4}{2^4}}=\frac{4}{3}-\frac{3}{2}=\boxed{-\frac{1}{6}}.$$

10. $$\frac{\left(24^{\frac{2}{3}}-40^{\frac{2}{3}}\right)\left(5^{\frac{1}{3}}+7^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(40^{\frac{1}{3}}+56^{\frac{1}{3}}\right)\left(3^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{2}{3}}\right)}=\frac{8^{\frac{2}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{2}{3}}\right)\left(5^{\frac{1}{3}}+7^{\frac{1}{3}}\right)}{8^{\frac{1}{3}}\left(5^{\frac{1}{3}}+7^{\frac{1}{3}}\right)\left(3^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{2}{3}}\right)}=$$

$$=8^{\frac{1}{3}}=\boxed{2}.$$

11. $$\left(\frac{\sqrt[3]{2^{-1}}}{2^{-1}\cdot\sqrt{\frac{1}{2^{-1}}}}\cdot\sqrt[3]{2^{-8}}\right)^{-0{,}4}=\left(\frac{2^{-\frac{1}{3}}}{2^{-1}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}\cdot 2^{-\frac{8}{3}}\right)^{-0{,}4}=$$

$$=\left(2^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{8}{3}}\right)^{-0{,}4}=2^{-2{,}5(-0{,}4)}=\boxed{2}.$$

12. $$\left(2^2\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3^{\frac{7}{6}}\cdot 32^{-1}\cdot\sqrt[3]{3^{-2}}}\right)^{-8}=$$

$$=\left(2^2\cdot 3^{\frac{1}{4}}\cdot\left(3^{\frac{7}{6}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}\cdot 2^{-5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-8}=$$

$$=2^{-16}\cdot 3^{-2}\left(3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-5}\right)^{-4}=2^{-16}\cdot 3^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 2^{20}=$$

$$=2^4\cdot 3^{-4}=\boxed{\frac{16}{81}}.$$

13. $$\left(3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}\right):\frac{48^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{5}{4}}}{3}=$$

$$=\left(3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}\right)\frac{3}{16^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{5}{4}}}=\left(3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}\right)\frac{3}{2\cdot 3^{\frac{1}{4}}-2\cdot 2^{\frac{1}{4}}}=$$

$$=\left(3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}\right)\frac{3}{2\left(3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}\right)}=\boxed{1{,}5}.$$

14. $$\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}+\sqrt{6}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3-\left(\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}+\sqrt{6}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{3\cdot 2}+2}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\boxed{1}.$$

Тренировочная работа 6

Вычислите:

1. $\sqrt[6]{\dfrac{9^{-3}\cdot 27^4}{12^0\cdot 3^{-6}}}$. **2.** $\dfrac{\sqrt{1{,}8}\cdot\sqrt{6{,}3}}{\sqrt{0{,}14}}$.

3. $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}-\dfrac{1}{5\sqrt{5}}\right)\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}+\dfrac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\right)$.

4. $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}{\sqrt[8]{3^{-1}}}$.

5. $\sqrt{\sqrt{39}\cdot\sqrt{117}\cdot\sqrt{507}}$.

6. $\left(\dfrac{7-\sqrt{7}}{\sqrt{21}-\sqrt{3}}\right)^{-2}$.

7. $\dfrac{16+2\sqrt{39}}{\sqrt{13}+\sqrt{3}}\sqrt{16-2\sqrt{39}}$.

8. $\sqrt{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{6-4\sqrt{2}}$.

9. $\sqrt{\dfrac{81^{-2}\sqrt{81^3}}{5^{-2}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{27^4}{5^{-3}}}$.

10. $\left(3\cdot\sqrt[4]{2^3}:\sqrt[3]{2^{\frac{1}{4}}\cdot 81\cdot\sqrt{2^{-3}}}\right)^{-6}$.

11. $\left(5^{-\frac{1}{4}}-\dfrac{1-5^{-\frac{3}{4}}}{5^{-\frac{1}{4}}-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{\left(\left(5^{-\frac{3}{4}}+1\right):\left(5^{-\frac{1}{4}}+1\right)-\sqrt[4]{5^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(5^{-1}-\sqrt{5^{-3}}\right)^{-1}}$.

12. $\left(\dfrac{\sqrt[6]{125}}{\sqrt[4]{9}}-1\right)\dfrac{\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}\right)^2-2\sqrt[4]{15}}{\sqrt{3}}$.

13. $\dfrac{\left(7^{\frac{1}{3}}+6^{\frac{1}{3}}\right)\left(7^{\frac{1}{6}}\cdot 6^{-\frac{1}{3}}+6^{\frac{1}{6}}\cdot 7^{-\frac{1}{3}}\right)^2}{7^{-1}+6^{-1}-\left(7^{-\frac{2}{3}}-6^{-\frac{2}{3}}\right)\left(7^{-\frac{1}{3}}-6^{-\frac{1}{3}}\right)}-2\sqrt{42}$.

Решение тренировочной работы 6

Вычислите:

1. $\sqrt[6]{\dfrac{9^{-3}\cdot 27^4}{12^0\cdot 3^{-6}}}=\sqrt[6]{\dfrac{\left(3^2\right)^{-3}\cdot\left(3^3\right)^4}{1\cdot 3^{-6}}}=\sqrt[6]{\dfrac{3^{-6}\cdot 3^{12}}{3^{-6}}}=\sqrt[6]{3^{12}}=\boxed{9}.$

2. $\dfrac{\sqrt{1{,}8}\cdot\sqrt{6{,}3}}{\sqrt{0{,}14}}=\sqrt{\dfrac{18\cdot 63}{14}}=\sqrt{\dfrac{3^2\cdot 2\cdot 3^2\cdot 7}{2\cdot 7}}=\sqrt{3^4}=\boxed{9}.$

3. $$\left(\frac{\sqrt5}{5}-\frac{1}{5\sqrt5}\right)\left(\frac{5-\sqrt5}{1+\sqrt5}+\frac{5+\sqrt5}{\sqrt5-1}\right)=$$
$$=\frac{\left(\sqrt5\right)^2-1}{5\sqrt5}\cdot\frac{\left(5-\sqrt5\right)\left(\sqrt5-1\right)+\left(5+\sqrt5\right)\left(\sqrt5+1\right)}{\left(\sqrt5+1\right)\left(\sqrt5-1\right)}=$$
$$=\frac{(5-1)\sqrt5\left(\left(\sqrt5-1\right)^2+\left(\sqrt5+1\right)^2\right)}{5\sqrt5\,(5-1)}=$$
$$=\frac{1}{5}\left(5-2\sqrt5+1+5+2\sqrt5+1\right)=\frac{12}{5}=\boxed{2{,}4}.$$

4. $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt3}}}{\sqrt[8]{3^{-1}}}=\dfrac{3^{\frac12}\cdot 3^{\frac12\cdot\frac12}\cdot 3^{\frac12\cdot\frac12\cdot\frac12}}{3^{-\frac18}}=3^{\frac12+\frac14+\frac18+\frac18}=\boxed{3}.$

5. $$\sqrt{\sqrt{39}\cdot\sqrt{117}\cdot\sqrt{507}}=$$
$$=\sqrt{\sqrt{3\cdot 13\cdot 9\cdot 13\cdot 3\cdot 169}}=$$
$$=\sqrt{\sqrt{3^4\cdot 13^4}}=\sqrt{3^2\cdot 13^2}=3\cdot 13=\boxed{39}.$$

6. $$\left(\frac{7-\sqrt7}{\sqrt{21}-\sqrt3}\right)^{-2}=\left(\frac{\sqrt7\left(\sqrt7-1\right)}{\sqrt3\left(\sqrt7-1\right)}\right)^{-2}=$$
$$=\left(\sqrt{\frac73}\right)^{-2}=\left(\sqrt{\frac37}\right)^{2}=\boxed{\frac37}.$$

7. $$\frac{16+2\sqrt{39}}{\sqrt{13}+\sqrt{3}}\sqrt{16-2\sqrt{39}}=$$
$$=\frac{13+2\sqrt{13\cdot 3}+3}{\sqrt{13}+\sqrt{3}}\sqrt{13-2\sqrt{13\cdot 3}+3}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{13}+\sqrt{3}\right)^2\sqrt{\left(\sqrt{13}-\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{13}+\sqrt{3}}=$$
$$=\left(\sqrt{13}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{13}-\sqrt{3}\right)=13-3=\boxed{10}.$$

8. $$\sqrt{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{6-4\sqrt{2}}=\sqrt[4]{\left(4+2\sqrt{2}\right)^2\left(6-4\sqrt{2}\right)}=$$
$$=\sqrt[4]{\left(16+16\sqrt{2}+8\right)\left(6-4\sqrt{2}\right)}=$$
$$=\sqrt[4]{8\left(3+2\sqrt{2}\right)2\left(3-2\sqrt{2}\right)}=\sqrt[4]{16\left(9-8\right)}=\boxed{2}.$$

9. $$\sqrt{\frac{81^{-2}\sqrt{81^3}}{5^{-2}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{27^4}{5^{-3}}}=\sqrt{\frac{\left(3^4\right)^{-2}\cdot\left(\left(3^4\right)^3\right)^{\frac{1}{2}}}{5^{-2}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\left(3^3\right)^4}{5^{-3}}}=$$
$$=\sqrt{\frac{3^{-8}\cdot 3^6}{5^{-2}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3^{12}}{5^{-3}}}=\frac{3^{-1}}{5^{-1}}\cdot\frac{3^4}{5^{-1}}=27\cdot 25=\boxed{675}.$$

10. $$\left(3\cdot\sqrt[4]{2^3}:\sqrt[3]{2^{\frac{1}{4}}\cdot 81\cdot\sqrt{2^{-3}}}\right)^{-6}=$$
$$=\left(3\cdot 2^{\frac{3}{4}}\right)^{-6}:\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^4\cdot 2^{-\frac{3}{2}}\right)^{-2}=$$
$$=3^{-6}\cdot 2^{-\frac{9}{2}}:\left(2^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{-8}\cdot 3^3\right)=$$
$$=3^{-6}\cdot 2^{-\frac{9}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^5=3^{-1}\cdot 2^{-4}=\boxed{\frac{1}{48}}.$$

11. $$\left(5^{-\frac{1}{4}}-\frac{1-5^{-\frac{3}{4}}}{5^{-\frac{1}{4}}-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(\left(5^{-\frac{3}{4}}+1\right):\left(5^{-\frac{1}{4}}+1\right)-\sqrt[4]{5^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(5^{-1}-\sqrt{5^{-3}}\right)^{-1}}=$$

$$=\left(5^{-\frac{1}{4}}+\left(5^{-\frac{1}{4}}\right)^2+5^{-\frac{1}{4}}+1\right)^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\frac{\left(\left(5^{-\frac{1}{4}}\right)^2-5^{-\frac{1}{4}}+1-5^{-\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(5^{-1}-5^{-\frac{3}{2}}\right)^{-1}}=$$

$$=\left(\left(5^{-\frac{1}{4}}+1\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(\left(5^{-\frac{1}{4}}-1\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{(5^{-1})^{-1}\cdot\left(1-5^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}}=$$

$$=\left(5^{-\frac{1}{4}}+1\right)^{-1}\cdot\frac{\left|5^{-\frac{1}{4}}-1\right|^{-1}}{5\left(1-5^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}}= \qquad \left(5^{-\frac{1}{4}}<1\right)$$

$$=\frac{\left(\left(5^{-\frac{1}{4}}+1\right)\left(5^{-\frac{1}{4}}-1\right)\right)^{-1}}{5\left(5^{-\frac{1}{2}}-1\right)^{-1}}=\frac{\left(5^{-\frac{1}{2}}-1\right)^{-1}}{5\left(5^{-\frac{1}{2}}-1\right)^{-1}}=\frac{1}{5}=\boxed{0{,}2}.$$

12. $$\left(\frac{\sqrt[6]{125}}{\sqrt[4]{9}}-1\right)\frac{(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3})^2-2\sqrt[4]{15}}{\sqrt{3}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}-1\right)\frac{\sqrt{5}+2\sqrt[4]{15}+\sqrt{3}-2\sqrt[4]{15}}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{5-3}{3}=\boxed{\frac{2}{3}}.$$

13. $$\frac{\left(7^{\frac{1}{3}}+6^{\frac{1}{3}}\right)\left(7^{\frac{1}{6}}\cdot 6^{-\frac{1}{3}}+6^{\frac{1}{6}}\cdot 7^{-\frac{1}{3}}\right)^2}{7^{-1}+6^{-1}-\left(7^{-\frac{2}{3}}-6^{-\frac{2}{3}}\right)\left(7^{-\frac{1}{3}}-6^{-\frac{1}{3}}\right)}-2\sqrt{42}=$$

$$=\frac{\left(7^{\frac{1}{3}}+6^{\frac{1}{3}}\right)\left(7^{-\frac{1}{3}}\cdot 6^{-\frac{1}{3}}\left(7^{\frac{1}{2}}+6^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2}{\left(7^{-\frac{1}{3}}\right)^3+\left(6^{-\frac{1}{3}}\right)^3-\left(7^{-\frac{1}{3}}+6^{-\frac{1}{3}}\right)\left(7^{-\frac{1}{3}}-6^{-\frac{1}{3}}\right)^2}-2\sqrt{42}=$$

$$=\frac{7^{\frac{1}{3}}6^{\frac{1}{3}}\left(7^{-\frac{1}{3}}+6^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot 7^{-\frac{2}{3}}\cdot 6^{-\frac{2}{3}}\left(7^{\frac{1}{2}}+6^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(7^{-\frac{1}{3}}+6^{-\frac{1}{3}}\right)\left(7^{-\frac{2}{3}}-7^{-\frac{1}{3}}\cdot 6^{-\frac{1}{3}}+6^{-\frac{2}{3}}-7^{-\frac{2}{3}}+2\cdot 7^{-\frac{1}{3}}\cdot 6^{-\frac{1}{3}}-6^{-\frac{2}{3}}\right)}-$$

$$-2\sqrt{42}=\frac{7^{-\frac{1}{3}}\cdot 6^{-\frac{1}{3}}\left(7^{\frac{1}{2}}+6^{\frac{1}{2}}\right)^2}{7^{-\frac{1}{3}}\cdot 6^{-\frac{1}{3}}}-2\sqrt{42}=$$

$$=7+2\cdot 7^{\frac{1}{2}}\cdot 6^{\frac{1}{2}}+6-2\cdot 7^{\frac{1}{2}}\cdot 6^{\frac{1}{2}}=\boxed{13}.$$

Практикум 10

Вычислите (1–2):

1. $$-0{,}3^0\left(\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}\right)^{-0{,}25}\cdot 0{,}36^{-0{,}5}\cdot\sqrt{0{,}0001^{-1}}=$$

$$=-1\cdot\frac{6}{5}\cdot 0{,}6^{-1}\cdot 0{,}1^{-2}=-1\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{6}\cdot 10^2=-200.$$

2. $$\sqrt{0{,}1^{-4}}\cdot\left(\frac{2}{13}\right)^0\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right)^{-0{,}5}:0{,}81^{-0{,}5}=$$

$$=0{,}1^{-2}\cdot 1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2:0{,}9^{-1}=100\cdot\frac{4}{9}:\frac{10}{9}=40.$$

Выполните действия и упростите (3–12):

3. $$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}+2}{x^{\frac{1}{2}}-2}+\frac{x^{\frac{1}{2}}-2}{x^{\frac{1}{2}}+2}-\frac{16}{x-4}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{(x^{\frac{1}{2}}+2)^2+(x^{\frac{1}{2}}-2)^2-16}{(x^{\frac{1}{2}}+2)(x^{\frac{1}{2}}-2)}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{x+4\cdot x^{\frac{1}{2}}+4+x-4\cdot x^{\frac{1}{2}}+4-16}{x-4}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{2\,(x-4)}{x-4}\right)^{-2}=\frac{1}{4}.$$

4. $$(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}):\left(\frac{b}{a^{\frac{3}{4}}}-\frac{b^{\frac{5}{4}}}{a}\right)=$$

$$=(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}):\frac{b\cdot a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{5}{4}}}{a}=$$

$$=(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})\cdot\frac{a}{b\cdot(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})}=\frac{a}{b}.$$

5. $$\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}+4}{a^{\frac{1}{4}}-4}+\frac{a^{\frac{1}{4}}-4}{a^{\frac{1}{4}}+4}-\frac{64}{a^{\frac{1}{2}}-16}\right)^{-3}=$$
$$=\left(\frac{(a^{\frac{1}{4}}+4)^2+(a^{\frac{1}{4}}-4)^2-64}{(a^{\frac{1}{4}}-4)(a^{\frac{1}{4}}+4)}\right)^{-3}=$$
$$=\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+8a^{\frac{1}{4}}+16+a^{\frac{1}{2}}-8a^{\frac{1}{4}}+16-64}{a^{\frac{1}{2}}-16}\right)^{-3}=$$
$$=\left(\frac{2(a^{\frac{1}{2}}-16)}{a^{\frac{1}{2}}-16}\right)^{-3}=\frac{1}{8}.$$

6. $$\left(\frac{1}{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^{-2}}-\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right)^2\cdot(ab)^{-\frac{1}{2}}=$$
$$=\left((a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2-(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b)\right)^2\cdot(ab)^{-\frac{1}{2}}=$$
$$=(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})^2\cdot a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}.$$

7. $$\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}-(a+b)\right):\frac{b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}}=$$
$$=\left(a-a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}+b-a-b\right)\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}=\frac{ab}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}.$$

8. $$\left(\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{4}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$
$$=\left(\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$= \frac{(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \cdot \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}.$$

9. $$\left(9^{-0,25} + (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}} \right) \cdot \left(\frac{1}{9^{\frac{1}{4}}} - (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}} \right) =$$

$$= \left(9^{-0,25} + (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}} \right) \cdot \left(9^{-0,25} - (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}} \right) =$$

$$= 9^{-\frac{1}{2}} - (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} - (8^{\frac{1}{2}})^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

10. $$\left(\frac{x^2 + y^2}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}} - \frac{x + y}{y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot xy^{-1} =$$

$$= \left(\frac{x^2 + y^2}{x(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})} - \frac{x + y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \frac{x}{y} = \frac{x^2 + y^2 - x^2 - xy}{x(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})} \cdot \frac{x}{y} =$$

$$= \frac{y\,(y - x)}{x(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})} \cdot \frac{x}{y} = \frac{(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})(y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})}{y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}} = y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}.$$

11. $$\frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{(a^2 - ab)^{\frac{2}{3}}} : \frac{\sqrt[3]{a^{-1} - ba^{-2}}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} - ab =$$

$$= \frac{(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)}{(a\,(a - b))^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)}{\left(\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} \right)^{\frac{1}{3}}} - ab =$$

$$= \frac{(a - b)\,(a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)}{a^{\frac{2}{3}} \cdot (a - b)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{(a-b)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}} - ab =$$

$$= \frac{(a-b)\,(a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)}{(a-b)} - ab =$$

$$= (a + b - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})(a + b + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}) - ab =$$

$$= (a+b)^2 - (a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})^2 - ab = a^2 + 2ab + b^2 - ab - ab = a^2 + b^2.$$

12. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} - \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3} =$

$= \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2,$ так как

$(\sqrt{2}+1)^3 = (\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})^2 \cdot 1 + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 1^2 + 1^3 =$

$= 2\sqrt{2} + 3 \cdot 2 + 3\sqrt{2} + 1 = 5\sqrt{2} + 7$ и

$(\sqrt{2}-1)^3 = (\sqrt{2})^3 - 3(\sqrt{2})^2 \cdot 1 + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 1^2 - 1^3 =$

$= 2\sqrt{2} - 3 \cdot 2 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7.$

Но если не догадаться, как тогда решать? Попробуем иначе. Допустим,

$a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}, \qquad b = \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7},$ тогда получим

$a^3 = 5\sqrt{2} + 7, \qquad b^3 = 5\sqrt{2} - 7,$

$a^3 - b^3 = 14.$

$a \cdot b = \sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)} =$

$= \sqrt[3]{(5\sqrt{2})^2 - 7^2} = \sqrt[3]{50-49} = 1.$

С другой стороны,

$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = (a-b)\left((a-b)^2 + 3ab\right);$

$(a-b)\left((a-b)^2 + 3 \cdot 1\right) = 14, \quad a - b = t, \quad t\left(t^2+3\right) = 14;$

$t^3 + 3t - 14 = 0, \qquad t^3 - 4t + 7t - 14 = 0,$

$t\left(t^2 - 4\right) + 7\left(t - 2\right) = 0;$

$(t-2)\left(t\left(t+2\right)+7\right) = 0, \qquad (t-2)\left(t^2 + 2t + 7\right) = 0;$

$$\left[\begin{aligned} &t - 2 = 0 \\ &(t+1)^2 + 6 = 0 \end{aligned}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad t = 2.$$

Итак, $a - b = 2,$ то есть $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2.$

Проверочная работа 5

Вычислите (1–6):

1. $(-0{,}2)^0 \cdot \left(\left(\dfrac{5}{6}\right)^4\right)^{-0{,}25} \cdot 1{,}2^{-1} \cdot \sqrt{0{,}01^{-3}}$.

2. $\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-4}\right)^{-0{,}75} \cdot 0{,}09^{-0{,}5} \cdot (-3)^0 \cdot \sqrt{0{,}1^{-8}}$.

3. $\left((3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}} - \dfrac{1}{0{,}5^{-1}}\right) \cdot \left((3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}} + \dfrac{1}{0{,}5^{-1}}\right)$.

4. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{81}\right)\left(\sqrt{18} - \sqrt{2}\right)^2}{5\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{3}}$.

5. $\dfrac{\left(3\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9}\right)}{\left(\sqrt{15} - \sqrt{10}\right)^2\left(2\sqrt{15} + 2\sqrt{10}\right)^2}$.

6. $\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7}\right)\left(\sqrt{18} + \sqrt{2}\right)^2}{\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{56}}}$.

Упростите (7–15):

7. $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + 1}{a^{\frac{1}{2}} - 1} + \dfrac{a^{\frac{1}{2}} - 1}{a^{\frac{1}{2}} + 1} - \dfrac{4}{a - 1}\right)^{-3}$

8. $\left(\dfrac{a}{b^{\frac{5}{4}}} - \dfrac{a^{\frac{3}{4}}}{b}\right)\left(b^{-\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}}\right)^{-1}$.

9. $\left(\dfrac{2 + x^{\frac{1}{4}}}{2 - x^{\frac{1}{4}}} - \dfrac{2 - x^{\frac{1}{4}}}{2 + x^{\frac{1}{4}}}\right) \cdot \dfrac{4 - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}$.

10. $\left(\dfrac{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}} - (x + y)\right) \cdot \sqrt{xy}$.

11. $\left(\dfrac{p^{\frac{3}{2}}+q^{\frac{3}{2}}}{p-q}-\dfrac{p-q}{p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot(\sqrt{pq})^{-1}.$

12. $\left((m+n)(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}})^{-1}+(m\cdot n)^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\dfrac{1}{(m^{\frac{2}{3}}-n^{\frac{2}{3}})^{-1}}.$

13. $\left(\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}+(xy)^{\frac{1}{2}}\right):(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}).$

14. $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^{\frac{3}{2}}+ab^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right):\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}.$

15. $(a+1)^{0{,}25}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{(1-2a+a^2)(1-a^2)(1-a)}}{a^2+2a-3}-a+\dfrac{\sqrt{a+1}}{a+3}$

при $-1<a<1$.

4

Решение более сложных примеров

Практикум 11

Упростите (1–10):

1. $$\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{3}{2}}+\frac{a^3-b^3}{a\cdot b^{\frac{3}{2}}-2a^{\frac{1}{2}}\cdot b^2}\left(\frac{b}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a+a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}+b}\right)=$$

$$=\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{3}{2}}+\frac{a^3-b^3}{a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}})}\cdot\frac{b-(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^2}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{3}{2}}+\frac{(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})(a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}})(b-a+2a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}-b)}{a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}})}=$$

$$=\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{3}{2}}+\frac{(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})\cdot a^{\frac{1}{2}}(2b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}})}=$$

$$=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}-\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}=-\frac{b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}=-1.$$

2. $$\frac{8a}{3}-\left(\frac{3a^{-\frac{1}{3}}+2}{3a^{-\frac{1}{3}}-2}\right)^2:\left[\frac{4}{(2a^{\frac{1}{3}}-3)^3}-\frac{1}{8a-27}\right]=$$

$$=\frac{8a}{3}-\left[\frac{a^{-\frac{1}{3}}(3+2a^{\frac{1}{3}})}{a^{-\frac{1}{3}}(3-2a^{\frac{1}{3}})}\right]^2:\left[\frac{4(4a^{\frac{2}{3}}+6a^{\frac{1}{3}}+9)-(2a^{\frac{1}{3}}-3)^2}{(2a^{\frac{1}{3}}-3)^3(4a^{\frac{2}{3}}+6a^{\frac{1}{3}}+9)}\right]=$$

$$= \frac{8a}{3} - \frac{(3+2a^{\frac{1}{3}})^2 \cdot (2a^{\frac{1}{3}}-3)^2 \cdot (8a-27)}{(3-2a^{\frac{1}{3}})^2 \cdot 3 \cdot (2a^{\frac{1}{3}}+3)^2} =$$

$$= \frac{8a}{3} - \frac{8a-27}{3} = 9.$$

3. $$\frac{3^{1,5}}{3^{1,5}a^{\frac{1}{6}} - a^{\frac{2}{3}}} + \frac{a^{\frac{5}{6}} + 3^{1,5} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{1}{3}}+3)^2}\left(\frac{3a^{\frac{1}{3}}}{a-27} + \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}-3}\right) =$$

$$= \frac{3^{1,5}}{a^{\frac{1}{6}}(3^{1,5} - a^{\frac{1}{2}})} + \frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{2}} + 3^{1,5})}{(a^{\frac{1}{3}}+3)^2} \cdot \frac{3a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}} + 9}{a-27} =$$

$$= \frac{3^{1,5}}{a^{\frac{1}{6}}(3^{1,5} - a^{\frac{1}{2}})} + \frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{2}} + 3^{1,5})}{(a^{\frac{1}{3}}+3)^2} \cdot \frac{(a^{\frac{1}{3}}+3)^2}{(a^{\frac{1}{2}} + 3^{1,5})(a^{\frac{1}{2}} - 3^{1,5})} =$$

$$= \frac{3^{1,5}}{a^{\frac{1}{6}}(3^{1,5} - a^{\frac{1}{2}})} + \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} - 3^{1,5}} = \frac{3^{1,5} - a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}(3^{1,5} - a^{\frac{1}{2}})} =$$

$$= \frac{3^{1,5} - a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}(3^{1,5} - a^{\frac{1}{2}})} = a^{-\frac{1}{6}}.$$

4. $$\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 4} + \frac{2}{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}}}\right) \cdot \frac{1 + 2a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - 8a^{-\frac{2}{3}}} =$$

$$= \left[\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 4} + \frac{2}{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} - 2)}\right] \cdot \frac{a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} + 2)}{a^{-\frac{2}{3}}(a-8)} =$$

$$= \frac{a^{\frac{2}{3}} + 2(a^{\frac{1}{3}} + 2)}{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} - 2)(a^{\frac{1}{3}} + 2)} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} + 2)}{a-8} =$$

$$= \frac{a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} + 4}{(a^{\frac{1}{3}} - 2)(a^{\frac{1}{3}} - 2)(a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} + 4)} = (a^{\frac{1}{3}} - 2)^{-2}.$$

5. $$\frac{a^{\frac16}}{a^{\frac16}-b^{\frac13}}+\frac{a^{\frac13}+a^{\frac16}\cdot b^{\frac13}+b^{\frac23}}{a^{-\frac14}\cdot b^{\frac16}}\cdot\left(\frac{1}{a^{\frac12}-b}-\frac{1}{a^{\frac12}-a^{\frac14}\cdot b^{\frac12}}\right)=$$

$$=\frac{a^{\frac16}}{a^{\frac16}-b^{\frac13}}+\frac{a^{\frac13}+a^{\frac16}\cdot b^{\frac13}+b^{\frac23}}{a^{-\frac14}\cdot b^{\frac16}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(a^{\frac14}-b^{\frac12})(a^{\frac14}+b^{\frac12})}-\frac{1}{a^{\frac14}(a^{\frac14}-b^{\frac12})}\right)=$$

$$=\frac{a^{\frac16}}{a^{\frac16}-b^{\frac13}}+\frac{a^{\frac13}+a^{\frac16}\cdot b^{\frac13}+b^{\frac23}}{a^{-\frac14}\cdot b^{\frac16}}\cdot\left(\frac{a^{\frac14}-a^{\frac14}-b^{\frac12}}{a^{\frac14}(a^{\frac14}-b^{\frac12})(a^{\frac14}+b^{\frac12})}\right)=$$

$$=\frac{a^{\frac16}}{a^{\frac16}-b^{\frac13}}+\frac{a^{\frac13}+a^{\frac16}\cdot b^{\frac13}+b^{\frac23}}{a^{-\frac14}\cdot b^{\frac16}}\cdot\frac{-b^{\frac12}}{a^{\frac14}(a^{\frac12}-b)}=$$

$$=\frac{a^{\frac16}}{a^{\frac16}-b^{\frac13}}-\frac{(a^{\frac13}+a^{\frac16}\cdot b^{\frac13}+b^{\frac23})\cdot b^{\frac13}}{(a^{\frac16}-b^{\frac13})(a^{\frac13}+a^{\frac16}\cdot b^{\frac13}+b^{\frac23})}=$$

$$=\frac{a^{\frac16}}{a^{\frac16}-b^{\frac13}}-\frac{b^{\frac13}}{a^{\frac16}-b^{\frac13}}=\frac{a^{\frac16}-b^{\frac13}}{a^{\frac16}-b^{\frac13}}=1.$$

6. $$\left(\frac{2+\sqrt3}{\sqrt2+\sqrt{2+\sqrt3}}+\frac{2-\sqrt3}{\sqrt2-\sqrt{2-\sqrt3}}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{(2+\sqrt3)\left(\sqrt2-\sqrt{2+\sqrt3}\right)}{2-2-\sqrt3}+\frac{(2-\sqrt3)\left(\sqrt2+\sqrt{2-\sqrt3}\right)}{2-2+\sqrt3}\right)^4=$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{а) }(2+\sqrt3)\left(\sqrt2-\sqrt{2+\sqrt3}\right)=\\ \quad=\sqrt2(2+\sqrt3)-\left(\sqrt{2+\sqrt3}\right)^3,\ \text{т. к. }2+\sqrt3=\left(\sqrt{2+\sqrt3}\right)^2;\\ \text{б) }(2-\sqrt3)\left(\sqrt2+\sqrt{2-\sqrt3}\right)=\\ \quad=\sqrt2(2-\sqrt3)+\left(\sqrt{2-\sqrt3}\right)^3\ \text{т. к. }2-\sqrt3=\left(\sqrt{2-\sqrt3}\right)^2\end{array}\right]$$

$$=\left(\frac{-\left(\sqrt{2}(2+\sqrt{3})-\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^3\right)+\sqrt{2}(2-\sqrt{3})+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^3}{\sqrt{3}}\right)^4=$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{а) } \sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{3}+1}{2}}=\sqrt{\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}};\\ \text{б) } \sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{3}+1}{2}}=\sqrt{\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\end{array}\right]$$

$$=\left(\frac{-\sqrt{2}\cdot 2-\sqrt{6}+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^3+2\sqrt{2}-\sqrt{6}+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^3}{\sqrt{3}}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{-2\sqrt{6}+\frac{3\sqrt{3}+3\cdot 3+3\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{3}-3\cdot 3+3\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{-2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+9+1+3\sqrt{3}+3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}\sqrt{3}}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{-8\sqrt{3}+12\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}\right)^4=\left(\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sqrt{3}}\right)^4=(\sqrt{2})^4=4.$$

7. $A=\dfrac{a^2-a-2+(a-1)\sqrt{a^2-4}}{a^2+a-2+(a+1)\sqrt{a^2-4}}$ при $a\geqslant 2$.

$$A=\frac{(a-2)(a+1)+(a-1)\sqrt{(a-2)(a+2)}}{(a+2)(a-1)+(a+1)\sqrt{(a-2)(a+2)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a-2}\left((a+1)\sqrt{a-2}+(a-1)\sqrt{a+2}\right)}{\sqrt{a+2}\left((a-1)\sqrt{a+2}+(a+1)\sqrt{a-2}\right)}=\sqrt{\frac{a-2}{a+2}}.$$

8. $A=\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ при $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, $\begin{cases}a>0\\ b>0\end{cases}$.

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2-1}=$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{a}{b}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{b}{a}-1} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2} = \frac{1}{2}\left|\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{a-b}{\sqrt{ab}}\right|.$$

а) При $a \geqslant b \quad \sqrt{x^2-1} = \dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$,

$$A = \frac{2b\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}-\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}} = \frac{2b\,(a-b)}{a+b-a+b} = a-b,$$

б) При $a < b \quad \sqrt{x^2-1} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}$,

$$A = \frac{2b\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}+\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}} = \frac{2b\,(b-a)}{a+b+a-b} = \frac{b}{a}\,(b-a)\,.$$

Итак, $A = \begin{cases} a-b & \text{при } a \geqslant b, \\ \dfrac{b}{a}(b-a) & \text{при } a < b. \end{cases}$

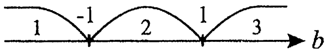
9. $A = \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$.

Упростите и вычислите при $x = \dfrac{2ab}{b^2+1}$, где $a > 0$, при всех значениях b.

$$\sqrt{a+x} = \sqrt{a+\frac{2ab}{b^2+1}} = \sqrt{\frac{a}{b^2+1}\,(b+1)^2} = |b+1|\cdot\sqrt{\frac{a}{b^2+1}},$$

$$\sqrt{a-x} = \sqrt{a-\frac{2ab}{b^2+1}} = \sqrt{\frac{a}{b^2+1}\,(b-1)^2} = |b-1|\cdot\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}.$$

$$A = \frac{|b+1|\cdot\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}-|b-1|\cdot\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}}{|b+1|\cdot\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}+|b-1|\cdot\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}} = \frac{|b+1|-|b-1|}{|b+1|+|b-1|}.$$



1) При $b<-1$ $\quad A=\dfrac{-b-1+b-1}{-b-1-b+1}=\dfrac{1}{b}$;

2) При $-1\leqslant b\leqslant 1$ $\quad A=\dfrac{b+1+b-1}{b+1-b+1}=b$;

3) При $b>1$ $\quad A=\dfrac{b+1-b+1}{b+1+b-1}=\dfrac{1}{b}$.

Итак, $A=\begin{cases} b & \text{при } |b|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{b} & \text{при } |b|>1.\end{cases}$

10. $A(z)=\dfrac{z+z^2}{1+\sqrt{1+z}}-\dfrac{z-z^2}{1-\sqrt{1-z}}$.

Упростите и вычислите при $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$A(z)=\frac{z(1+z)\left(\sqrt{1+z}-1\right)}{\left(1+\sqrt{1+z}\right)\left(\sqrt{1+z}-1\right)}-\frac{z(1-z)\left(1+\sqrt{1-z}\right)}{\left(1-\sqrt{1-z}\right)\left(1+\sqrt{1-z}\right)}=$$
$$=\frac{z(1+z)\left(\sqrt{1+z}-1\right)}{1+z-1}-\frac{z(1-z)\left(1+\sqrt{1-z}\right)}{1-1+z}=$$
$$=(1+z)\left(\sqrt{1+z}-1\right)-(1-z)\left(1+\sqrt{1-z}\right)=$$
$$=\left(\sqrt{1+z}\right)^3-1-z-1+z-\left(\sqrt{1-z}\right)^3=$$
$$=\left(\sqrt{1+z}\right)^3-\left(\sqrt{1-z}\right)^3-2.$$
$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^3-\left(\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^3-2.$$

Необходимо учесть, что

$$\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}}{2}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{2}=$$
$$=\frac{\left|\sqrt{3}+1\right|}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2};$$

$$\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}}{2}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{2}=$$

$$=\frac{\left|\sqrt{3}-1\right|}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Итак,

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^3-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^3-2=$$

$$=\frac{1}{8}\left((\sqrt{3}+1)^3-(\sqrt{3}-1)^3\right)-2=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3+3\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot1+3\sqrt{3}\cdot1^2+1^3-\left(\sqrt{3}\right)^3+3\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot1-3\sqrt{3}\cdot1^2+1^3}{8}-$$

$$-2=\frac{2+9+9}{8}-2=2{,}5-2=0{,}5.$$

Можно воспользоваться формулой

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b).$

Тогда

$$\left(\sqrt{3}+1\right)^3-\left(\sqrt{3}-1\right)^3=$$

$$=\left(\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1\right)^3+$$

$$+3\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1\right)=$$

$$=8+12=20.$$

Тренировочная работа 7

Упростите:

1. $\left(\dfrac{y^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}}{y-y^{\frac{1}{2}}\cdot z^{\frac{1}{2}}+z}-\dfrac{1-z}{y^{\frac{3}{2}}+z^{\frac{3}{2}}}\right):\dfrac{y^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{5}{2}}}{y^3-z^3}-\left(\dfrac{y}{z}\right)^{-\frac{3}{2}}.$

2. $\left(\dfrac{b}{b+8}-\dfrac{4b}{(b^{\frac{1}{3}}+2)^3}\right)\cdot\left(\dfrac{1+2b^{-\frac{1}{3}}}{1-2b^{-\frac{1}{3}}}\right)^2-\dfrac{24}{b+8}.$

3. $\dfrac{1}{3}c^{-1}-\left(\dfrac{1-2c^{\frac{1}{3}}}{1+2c^{\frac{1}{3}}}\right):\left(\dfrac{4c}{(1+2c^{\frac{1}{3}})^3}-\dfrac{c}{1+8c}\right).$

4. $\left(\dfrac{1}{2b^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{6}{8b^2-1}\right):\dfrac{(2b^{\frac{2}{3}}-1)^2}{8b^{\frac{8}{3}}-2^{1,5}\cdot b^{\frac{5}{3}}}+\dfrac{1}{2^{1,5}\cdot b+1}.$

5. $\left(\dfrac{4a}{(a^{\frac{1}{3}}-1)^3}-\dfrac{a}{a-1}\right)\cdot\left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-1}{a^{\frac{1}{3}}+1}\right)^2-\dfrac{3}{a-1}.$

6. $\dfrac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{-\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}:\left(\dfrac{1}{1-b}-\dfrac{1-b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+1}\right).$

7. $\left(\dfrac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}-y}+\dfrac{x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}\cdot y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}\right):\dfrac{x^{\frac{1}{12}}\cdot y^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{y^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}}.$

8. $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}{(y^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^{-1}}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[6]{y}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{3(3+x^{\frac{1}{2}})\sqrt[3]{x^{-1}}}\cdot\dfrac{1-9x^{-1}}{x^{-\frac{1}{2}}-3^{-1}}.$

9. $A=\dfrac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}$ при $x=\dfrac{2am}{b(1+m^2)}$, $|m|<1$.

10. $A=\dfrac{xy-\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{y^2-1}}{xy+\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{y^2-1}}$ при $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right),\\ y=\dfrac{1}{2}\left(b+\dfrac{1}{b}\right).\end{cases}$

Вычислите:

11. $\dfrac{21+8\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}}\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{5}.$

12. $\dfrac{11-6\sqrt{2}}{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}}+\sqrt{2}.$

13. $(\sqrt{3}-1)\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}.$

14. $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}.$

Решение тренировочной работы 7

Упростите:

1. $$\left(\frac{y^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}}{y-y^{\frac{1}{2}}\cdot z^{\frac{1}{2}}+z}-\frac{1-z}{y^{\frac{3}{2}}+z^{\frac{3}{2}}}\right):\frac{y^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{5}{2}}}{y^3-z^3}-\left(\frac{y}{z}\right)^{-\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{\left((y^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}})(y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}})-(1-z)\right)(y^{\frac{3}{2}}-z^{\frac{3}{2}})(y^{\frac{3}{2}}+z^{\frac{3}{2}})}{(y^{\frac{3}{2}}+z^{\frac{3}{2}})\cdot y^{\frac{3}{2}}(1-y)}-$$

$$-\left(\frac{y}{z}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{(y-1)(y^{\frac{3}{2}}-z^{\frac{3}{2}})}{y^{\frac{3}{2}}(1-y)}-\frac{z^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{3}{2}}}=\frac{z^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}-z^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{3}{2}}}=-1.$$

2. $$\left(\frac{b}{b+8}-\frac{4b}{(b^{\frac{1}{3}}+2)^3}\right)\cdot\left(\frac{1+2b^{-\frac{1}{3}}}{1-2b^{-\frac{1}{3}}}\right)^2-\frac{24}{b+8}=$$

$$=\frac{b(b^{\frac{1}{3}}+2)^2-4b(b^{\frac{2}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}+4)}{(b+8)(b^{\frac{1}{3}}+2)^2}\left(\frac{b^{-\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}}+2)}{b^{-\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}}-2)}\right)^2-\frac{24}{b+8}=$$

$$=\frac{b[b^{\frac{2}{3}}+4b^{\frac{1}{3}}+4-4b^{\frac{2}{3}}+8b^{\frac{1}{3}}-16]}{(b+8)(b^{\frac{1}{3}}+2)^2}\cdot\frac{(b^{\frac{1}{3}}+2)^2}{(b^{\frac{1}{3}}-2)^2}-\frac{24}{b+8}=$$

$$=\frac{-3b(b^{\frac{1}{3}}-2)^2(b^{\frac{1}{3}}+2)^2}{(b+8)(b^{\frac{1}{3}}+2)^2(b^{\frac{1}{3}}-2)^2}-\frac{24}{b+8}=\frac{-3b}{b+8}-\frac{24}{b+8}=$$

$$=\frac{-3(b+8)}{b+8}=-3.$$

3. $$\frac{1}{3}c^{-1}-\left(\frac{1-2c^{\frac{1}{3}}}{1+2c^{\frac{1}{3}}}\right):\left(\frac{4c}{(1+2c^{\frac{1}{3}})^3}-\frac{c}{1+8c}\right)=$$

$$=\frac{1}{3c}-\left(\frac{1-2c^{\frac{1}{3}}}{1+2c^{\frac{1}{3}}}\right)^2:\frac{4c(1-2c^{\frac{1}{3}}+4c^{\frac{2}{3}})-c(1+2c^{\frac{1}{3}})^2}{(1+8c)(1+2c^{\frac{1}{3}})^2}=$$

$$=\frac{1}{3c}-\left(\frac{1-2c^{\frac{1}{3}}}{1+2c^{\frac{1}{3}}}\right)^2:\frac{3c(1-4c^{\frac{1}{3}}+4c^{\frac{2}{3}})}{(1+8c)(1+2c^{\frac{1}{3}})^2}=$$

$$= \frac{1}{3c} - \left(\frac{1-2c^{\frac{1}{3}}}{1+2c^{\frac{1}{3}}}\right)^2 \cdot \frac{(1+8c)\,(1+2c^{\frac{1}{3}})^2}{3c(1-2c^{\frac{1}{3}})^2} =$$

$$= \frac{1}{3c} - \frac{1+8c}{3c} = -\frac{8c}{3c} = -2\frac{2}{3}.$$

4. $$\left(\frac{1}{2b^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{2}{3}}} - \frac{6}{8b^2-1}\right) : \frac{(2b^{\frac{2}{3}}-1)^2}{8b^{\frac{8}{3}} - 2^{1,5}\cdot b^{\frac{5}{3}}} + \frac{1}{2^{1,5}\cdot b+1} =$$

$$= \frac{[4b^{\frac{4}{3}} + 2b^{\frac{2}{3}} + 1 - 6b^{\frac{2}{3}}]}{b^{\frac{2}{3}}(2b^{\frac{2}{3}}-1)(4b^{\frac{4}{3}}+2b^{\frac{2}{3}}+1)} \times$$

$$\times \frac{2^{1,5}\cdot b^{\frac{5}{3}}\left(2^{1,5}\cdot b-1\right)}{(2b^{\frac{2}{3}}-1)^2} + \frac{1}{2^{1,5}\cdot b+1} =$$

$$= \frac{2^{1,5}\cdot b\left(2^{1,5}\cdot b-1\right)}{8b^2-1} + \frac{1}{2^{1,5}\cdot b+1} =$$

$$= \frac{2^{1,5}\cdot b\left(2^{1,5}\cdot b-1\right) + \left(2^{1,5}\cdot b-1\right)}{\left(2^{1,5}\cdot b-1\right)\left(2^{1,5}\cdot b+1\right)} =$$

$$= \frac{\left(2^{1,5}\cdot b-1\right)\left(2^{1,5}\cdot b+1\right)}{\left(2^{1,5}\cdot b-1\right)\left(2^{1,5}\cdot b+1\right)} = 1.$$

5. $$\left(\frac{4a}{(a^{\frac{1}{3}}-1)^3} - \frac{a}{a-1}\right) \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}-1}{a^{\frac{1}{3}}+1}\right)^2 - \frac{3}{a-1} =$$

$$= \frac{4a(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1) - a(a^{\frac{1}{3}}-1)^2}{(a^{\frac{1}{3}}-1)^3\cdot(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1)} \cdot \frac{(a^{\frac{1}{3}}-1)^2}{(a^{\frac{1}{3}}+1)^2} - \frac{3}{a-1} =$$

$$= \frac{a(4a^{\frac{2}{3}}+4a^{\frac{1}{3}}+4-a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}-1)}{(a^{\frac{1}{3}}-1)^3\cdot(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1)} \cdot \frac{(a^{\frac{1}{3}}-1)^2}{(a^{\frac{1}{3}}+1)^2} - \frac{3}{a-1}$$

$$= \frac{3a(a^{\frac{1}{3}}+1)^2(a^{\frac{1}{3}}-1)^2}{(a^{\frac{1}{3}}-1)^3(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1)(a^{\frac{1}{3}}+1)^2} - \frac{3}{a-1} =$$

$$= \frac{3a}{a-1} - \frac{3}{a-1} = \frac{3(a-1)}{a-1} = 3.$$

6. $$\frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{-\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}:\left(\frac{1}{1-b}-\frac{1-b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+1}\right)=$$
$$=\frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{-\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}:\frac{1-(1-b^{\frac{1}{3}})^2}{(1-b^{\frac{1}{3}})(b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+1)}=\frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{-\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1-b}{b^{\frac{1}{3}}(2-b^{\frac{1}{3}})}=$$
$$=\frac{1-b}{(b^{-\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}})b^{\frac{1}{6}}(2-b^{\frac{1}{3}})}=\frac{1-b}{(1+b^{\frac{1}{2}})(2-b^{\frac{1}{3}})}=$$
$$=\frac{(1-b^{\frac{1}{2}})(1+b^{\frac{1}{2}})}{(1+b^{\frac{1}{2}})(2-b^{\frac{1}{3}})}=\frac{1-b^{\frac{1}{2}}}{2-b^{\frac{1}{3}}}.$$

7. $$\left(\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}-y}+\frac{x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}\cdot y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}\right):\frac{x^{\frac{1}{12}}\cdot y^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{2}}}+\frac{y^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}}=$$
$$=\frac{y^{\frac{2}{3}}+(x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{3}})}{(x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}\cdot y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})}\cdot\frac{(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{2}})y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{12}}}+\frac{y^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}}=$$
$$=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}-y}\cdot\frac{(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{2}})y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{12}}}+\frac{y^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}}=\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}}+\frac{y^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}}=$$
$$=\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}}=\frac{y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}}=y^{\frac{1}{3}}.$$

8. $$\frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}{(y^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^{-1}}+\frac{\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[6]{y}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{3(3+x^{\frac{1}{2}})\sqrt[3]{x^{-1}}}\cdot\frac{1-9x^{-1}}{x^{-\frac{1}{2}}-3^{-1}}=$$
$$=x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}(y^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})+\frac{x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-1}\cdot y^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\cdot(x-9)}{3(3+x^{\frac{1}{2}})\cdot(x^{-\frac{1}{2}}-3^{-1})}=$$
$$=(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})+\frac{y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-3)}{(-3^{-1}+x^{-\frac{1}{2}})3x^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+\frac{y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-3)}{3-x^{\frac{1}{2}}}=$$
$$=x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}-\frac{y^{\frac{1}{2}}(3-x^{\frac{1}{2}})}{3-x^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}.$$

9. $A = \dfrac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}$; $\quad x = \dfrac{2am}{b\,(1+m^2)}$; $\quad |m| < 1$.

$$\sqrt{a+bx} = \sqrt{a+\frac{2abm}{b\,(1+m^2)}} = \sqrt{a+\frac{2am}{1+m^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a+am^2+2am}{1+m^2}} = \sqrt{\frac{a\,(1+m)^2}{1+m^2}} = |1+m|\sqrt{\frac{a}{1+m^2}} =$$

$$= (1+m)\sqrt{\frac{a}{1+m^2}},$$

аналогично $\sqrt{a-bx} = (1-m)\sqrt{\dfrac{a}{1+m^2}}$,

так как $-1 < m < 1$.

$$A = \frac{(1+m)\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}+(1-m)\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}}{(1+m)\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}-(1-m)\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}} =$$

$$= \frac{(1+m)+(1-m)}{(1+m)-(1-m)} = \frac{2}{2m} = \frac{1}{m}.$$

10. $A = \dfrac{xy-\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{y^2-1}}{xy+\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{y^2-1}}$;

$x = \dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$; $\quad y = \dfrac{1}{2}\left(b+\dfrac{1}{b}\right)$.

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-1} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(a^2+2+\frac{1}{a^2}\right)-1} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4a^2}-1} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4a^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2} = \frac{1}{2}\left|a-\frac{1}{a}\right|;$$

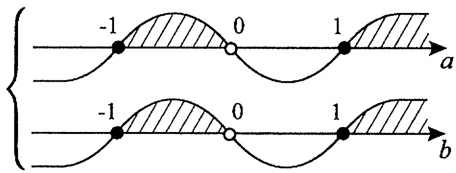
$$\sqrt{y^2-1} = \frac{1}{2}\left|b-\frac{1}{b}\right|.$$

$$A=\frac{\frac14\left(a+\frac1a\right)\left(b+\frac1b\right)-\frac14\left|a-\frac1a\right|\cdot\left|b-\frac1b\right|}{\frac14\left(a+\frac1a\right)\left(b+\frac1b\right)+\frac14\left|a-\frac1a\right|\cdot\left|b-\frac1b\right|}=$$

$$=\frac{\left(a+\frac1a\right)\left(b+\frac1b\right)-\left|a-\frac1a\right|\cdot\left|b-\frac1b\right|}{\left(a+\frac1a\right)\left(b+\frac1b\right)+\left|a-\frac1a\right|\cdot\left|b-\frac1b\right|}=$$

$$=\frac{\left(a+\frac1a\right)\left(b+\frac1b\right)-\left|\frac{a^2-1}{a}\right|\cdot\left|\frac{b^2-1}{b}\right|}{\left(a+\frac1a\right)\left(b+\frac1b\right)+\left|\frac{a^2-1}{a}\right|\cdot\left|\frac{b^2-1}{b}\right|}.$$

а) $\begin{cases}\dfrac{a^2-1}{a}\geqslant 0,\\[2mm] \dfrac{b^2-1}{b}\geqslant 0;\end{cases}$ [4]



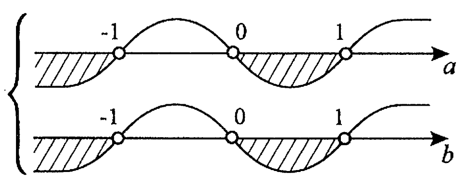
$$A=\frac{\left(a+\frac1a\right)\left(b+\frac1b\right)-\left(\frac{a^2-1}{a}\right)\cdot\left(\frac{b^2-1}{b}\right)}{\left(a+\frac1a\right)\left(b+\frac1b\right)+\left(\frac{a^2-1}{a}\right)\cdot\left(\frac{b^2-1}{b}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{ab}-\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{ab}}{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{ab}+\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{ab}}=$$

$$=\frac{(a^2b^2+a^2+b^2+1)-(a^2b^2-a^2-b^2+1)}{(a^2b^2+a^2+b^2+1)+(a^2b^2-a^2-b^2+1)}=$$

$$=\frac{2a^2+2b^2}{2a^2b^2+2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2+1},$$

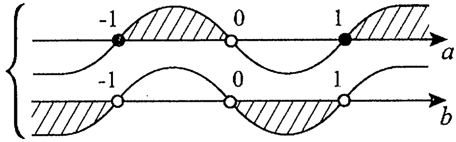
б) $\begin{cases}\dfrac{a^2-1}{a}<0,\\[2mm] \dfrac{b^2-1}{b}<0;\end{cases}$



$$A=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2+1};$$

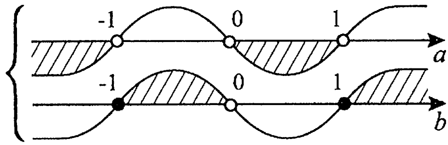
[4] В данном случае и далее символ $\{$ нужно понимать как пересечение решений.

в) $\begin{cases} \dfrac{a^2-1}{a} \geqslant 0, \\ \dfrac{b^2-1}{b} < 0; \end{cases}$



$$A = \frac{a^2b^2+1}{a^2+b^2};$$

г) $\begin{cases} \dfrac{a^2-1}{a} < 0, \\ \dfrac{b^2-1}{b} \geqslant 0; \end{cases}$



$$A = \frac{a^2b^2+1}{a^2+b^2}.$$

Ответ:

1) $A = \dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2+1}$, если

$\begin{cases} a \in [-1;0) \cup [1;\infty), \\ b \in [-1;0) \cup [1;\infty) \end{cases}$ или $\begin{cases} a \in (-\infty;-1) \cup (0;1), \\ b \in (-\infty;-1) \cup (0;1). \end{cases}$

2) $A = \dfrac{a^2b^2+1}{a^2+b^2}$, если

$\begin{cases} a \in [-1;0) \cup [1;\infty), \\ b \in (-\infty;-1) \cup (0;1) \end{cases}$ или $\begin{cases} a \in (-\infty;-1) \cup (0;1), \\ b \in [-1;0) \cup [1;\infty). \end{cases}$

Вычислите:

11. $\dfrac{21+8\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}}\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{5} =$

$$= \frac{(4+\sqrt{5})^2}{4+\sqrt{5}}\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{5} = (4+\sqrt{5}) \cdot |2-\sqrt{5}| - \sqrt{5} =$$

$$= (4+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2) - \sqrt{5} =$$

$$= 4\sqrt{5} - 8 + 5 - 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 3.$$

12. $\dfrac{11-6\sqrt{2}}{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}}+\sqrt{2}=\dfrac{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt[3]{\left(3-\sqrt{2}\right)^3}}+\sqrt{2}=$

$=\dfrac{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}{\left(3-\sqrt{2}\right)}+\sqrt{2}=3-\sqrt{2}+\sqrt{2}=3.$

13. $(\sqrt{3}-1)\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=$

$=(\sqrt{3}-1)\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}}=$

$=(\sqrt{3}-1)\sqrt{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}+1)}=$

$=(\sqrt{3}-1)\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=(\sqrt{3}-1)|\sqrt{3}+1|=$

$=(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=3-1=2,$

так как

$(\sqrt{3}+1)^3=(\sqrt{3})^3+3(\sqrt{3})^2\cdot 1+3\cdot\sqrt{3}\cdot 1^2+1^3=$
$=3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}+1=10+6\sqrt{3}.$

А если не предвидеть? Попробуем иначе.

$$a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b} & \text{при } a\geqslant 0;\ b\geqslant 0,\\ -\sqrt{a^2b} & \text{при } a<0;\ b\geqslant 0.\end{cases}$$

$\sqrt{3}-1>0.$

$(\sqrt{3}-1)\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=$

$=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2\left(\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\right)}=$

$=\sqrt{(\sqrt{3}-1)\left(\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\right)}=$

$=\sqrt{(\sqrt{3}-1)\left(\sqrt{3}(3-1)+\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^3(10+6\sqrt{3})}\right)},$

так как

$\left(\sqrt{3}-1\right)^3=3\sqrt{3}-3\left(\sqrt{3}\right)^2+3\sqrt{3}\cdot 1-1=6\sqrt{3}-10;$

$$\sqrt{(\sqrt{3}-1)\left(2\sqrt{3}+\sqrt[3]{(6\sqrt{3}-10)(10+6\sqrt{3})}\right)}=$$
$$=\sqrt{(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+\sqrt[3]{-100+36\cdot 3})}=$$
$$=\sqrt{(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+\sqrt[3]{8})}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+2)}=$$
$$=\sqrt{2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{2\,(3-1)}=2.$$

14. $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}=$
$$=\sqrt[3]{(\sqrt{3}+3)^3}+\sqrt[3]{(3-\sqrt{3})^3}=\sqrt{3}+3+3-\sqrt{3}=6,$$
так как $(\sqrt{3}+3)^3=3^3+3\cdot 3^2\sqrt{3}+3\cdot 3(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^3=$
$=27+27\sqrt{3}+27+3\sqrt{3}=54+30\sqrt{3};$
$(3-\sqrt{3})^3=3^3-3\cdot 3^2\sqrt{3}+3\cdot 3(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^3=$
$=27-27\sqrt{3}+27-3\sqrt{3}=54-30\sqrt{3}.$

Но ведь этого можно и не увидеть, как же быть тогда? Попробуем другим способом.

Пусть $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}=a;\quad \sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}=b.$

Тогда $54+30\sqrt{3}=a^3,\quad 54-30\sqrt{3}=b^3,\quad a^3+b^3=108.$

При этом
$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right),$$
$$a\cdot b=\sqrt[3]{(54+30\sqrt{3})\cdot(54-30\sqrt{3})}=$$
$$=\sqrt[3]{54^2-900\cdot 3}=\sqrt[3]{2916-2700}=\sqrt[3]{216}=6.$$

Тогда $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=(a+b)\left((a+b)^2-18\right)=108.$

Если положить $a+b=t$, то имеем $t^3-18t-108=0$. Сгруппировав, разложим на множители:

$t^3-36t+18t-108=0,\qquad t\left(t^2-36\right)+18\,(t-6)=0;$

$(t-6)\,(t\,(t+6)+18)=0,\qquad (t-6)\left(t^2+6t+18\right)=0;$

$$\left[\begin{array}{l} t-6=0 \\ (t+3)^2+9=0 \end{array}\right. \iff t=6.$$

Итак, $a+b=6$, то есть $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}=6.$

5

Карточки заданий

Подготовительные карточки

Карточка 1

1. Представьте в виде степени $\dfrac{\sqrt[5]{x^2\sqrt[3]{x^4}}}{x^{-\frac{7}{30}}}$.

2. Вычислите $\sqrt[3]{54\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}} - 81^{\frac{1}{4}}\,(0{,}3)^0 + \sqrt[3]{42\dfrac{7}{8}} - 0{,}5^2 : 2$

3. Упростите $\dfrac{a^{-1} - x^{-1}}{a^{-3} + x^{-3}} : \left(\dfrac{xa^{-2} + ax^{-2}}{x - a}\right)^{-1}$.

4. Вычислите $\left(5 \cdot 2^{n-3} - 2^{n-2}\right) : 2^{n-5} + 5^{2n+1} : 25^{n-1}$.

Карточка 2

1. Представьте в виде степени $\dfrac{\sqrt[7]{x^2\sqrt{x^{\frac{1}{3}}}}}{x^{-\frac{4}{21}}}$.

2. Вычислите

$$\sqrt[3]{256\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot 2}+16^{\frac{3}{2}}\,(0{,}8)^0-0{,}2^3\cdot 0{,}2^{-4}-\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}.$$

3. Упростите $\dfrac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left(1-\dfrac{1-\left(a^2+x^2\right)}{2ax}\right)(a+x+1)^{-2}$.

4. Вычислите $\dfrac{52\left(3\cdot 4^{10}+7\cdot 2^{19}\right)}{\left(13\cdot 16^3\right)^2}$.

Карточка 3

1. Представьте в виде степени $\dfrac{\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x^2}}\cdot\sqrt[4]{x\sqrt{x}}}{x^{-\frac{5}{24}}}$.

2. Вычислите

$$(-1)^{21}-\sqrt[4]{81^3}+\left(2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^6-16^{\frac{5}{4}}\,(0{,}5)^0+\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}.$$

3. Упростите $\dfrac{a^{\frac{5}{4}}-a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}:\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}+1$.

4. Вычислите $\left(2\cdot 5^{2n-1}-3\cdot 25^{n-1}\right):5^{2n-2}+16^{10}:8^{13}$.

Карточка 4

1. Представьте в виде степени $\dfrac{\sqrt[5]{x^2\sqrt{x^{\frac{2}{3}}}}}{x^{-\frac{8}{15}}}$.

2. Вычислите

$$(0{,}04)^{-1{,}5}\cdot\sqrt[3]{(0{,}125)^{-1}}-\left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}}(-0{,}4)^0+\left(\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}\right)^{-0{,}25}.$$

3. Вычислите $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

4. Вычислите $\left(\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+a^{-\frac{2}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{-\frac{2}{3}}}\right)^{-1}$

при $a=0{,}125$; $b=0{,}008$.

Карточка 5

1. Представьте в виде степени $\dfrac{\sqrt[3]{x^2\sqrt[5]{x}}}{x^{-\frac{4}{15}}}$.

2. Вычислите $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}-125^{\frac{2}{3}}(0{,}4)^0+\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}:\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$.

3. Вычислите $\left(\dfrac{a^{-1}+2a^{-\frac{1}{2}}+1}{a^{-\frac{3}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}+1\right)^{-1}\cdot\left(1-a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$

при $a=9$.

4. Вычислите $\dfrac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}$.

Карточка 6

1. Представьте в виде степени $\dfrac{\sqrt[7]{x\sqrt{x^{-0,5}}}}{x^{\frac{5}{14}} \cdot \sqrt[4]{x^{-1}}}$.

2. Вычислите $(0,5)^{-4} + 16^{0,5} - \sqrt[4]{(0,0625)^{-3}} \cdot \left(\dfrac{4}{9}\right)^{-0,5} + 0,3^0$.

3. Вычислите $\left(\dfrac{b^{-\frac{3}{2}} + b^{-\frac{1}{2}} - 2}{b^{-1} - 1} - 2\right)^{-1} \left(1 + b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$

при $b = 0,04$.

4. Вычислите $\dfrac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54} + 15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}} + \sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}$.

Карточка 7

1. Представьте в виде степени $\dfrac{\sqrt[5]{x^2\sqrt{x^{\frac{2}{3}}}}}{x^{-\frac{1}{15}}}$.

2. Вычислите $(0,04)^{-1,5} \cdot \sqrt[3]{(0,125)^{-1}} - \left(\dfrac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

3. Вычислите $\left(\dfrac{\sqrt[6]{8}}{\sqrt[4]{9}} - 1\right) \dfrac{\left(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}\right)^2 - 2\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3}}$.

4. Вычислите $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{3}} + a^{-1}}{a^{-\frac{4}{3}} - 1}\right)^{-1} + a^{\frac{1}{3}}$ при $a = 0,008$.

Карточка 8

1. Представьте в виде степени $\dfrac{\sqrt[6]{y^5\sqrt[3]{y}}}{y^{-\frac{1}{9}}}$.

2. Вычислите $\sqrt[4]{81^3}\cdot 32^{-0{,}4}-8^{-\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}+144^{0{,}5}\,(-10)^0$.

3. Вычислите $\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{4+2\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}\right)\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$.

4. Вычислите $\left(\dfrac{c^{-\frac{1}{2}}-c^{-\frac{3}{4}}}{1-c^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-1}-c^{\frac{1}{4}}$ при $c=\dfrac{4}{9}$.

Карточка 9

1. Представьте в виде степени $\dfrac{\sqrt[4]{a^5\sqrt[3]{a^{-2}}}}{a^{-\frac{5}{24}}}$.

2. Вычислите

$$(0{,}36)^{-0{,}5}\sqrt[4]{(0{,}0001)^{-1}}+(-1)^{12}\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}(0{,}75)^{-4}-0{,}5^0.$$

3. Вычислите $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}}-3\sqrt[3]{9\sqrt{162}}-11\sqrt[6]{18}+2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$.

4. Вычислите $\dfrac{y^{\frac{3}{2}}+z^{\frac{3}{2}}}{(y^2-yz)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{\sqrt[3]{y^{-1}-zy^{-2}}}{y\sqrt{y}-z\sqrt{z}}-yz$

при $y=\dfrac{12}{13}$; $z=\dfrac{5}{13}$.

Карточка 10

1. Представьте в виде степени $\dfrac{z^{\frac{1}{9}}\sqrt[3]{z\sqrt[4]{z}}}{z^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{z\sqrt[4]{z}}}$.

2. Вычислите $\dfrac{6\cdot 2^8-9\cdot 2^{10}+3\cdot 2^{12}}{4\cdot 2^{10}+4\cdot 2^{12}-8\cdot 2^{11}}$.

3. Вычислите $\sqrt[6]{17\sqrt{5}+38}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

4. Вычислите $\dfrac{1-z^{-2}}{z^{\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{z-z^{-2}}{z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{2}{z^{\frac{3}{2}}}$ при $z=2{,}25$.

Карточка 11

1. Представьте в виде степени $\dfrac{\sqrt[6]{a^2\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a^2\sqrt[3]{a^5}}}{\sqrt{a\sqrt[9]{a^2}}}$.

2. Вычислите $\left(\dfrac{16}{\sqrt{5}-1}-\dfrac{5}{\sqrt{3}+2}-\dfrac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}+6)$.

3. Вычислите $\sqrt{10-4\sqrt{6}}+\sqrt{15-6\sqrt{6}}$.

4. Вычислите $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{b^{-1}}}-\dfrac{\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{b^{-1}}}{a^{-\frac{2}{3}}-\left(\sqrt[3]{ab}\right)^{-1}+b^{-\frac{2}{3}}}$

при $a=-0{,}125;\quad b=-8$.

Карточка 12

1. Представьте в виде степени $\dfrac{\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a^{-1}}}\cdot a^{\frac{5}{16}}}{\sqrt{a\sqrt[3]{a^{-2}}}:a^{-\frac{1}{6}}}$.

2. Вычислите $\dfrac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\dfrac{7}{2\sqrt{2}+1}-\left(11-5\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$.

3. Вычислите $\sqrt{98\sqrt{48}}-11\sqrt[4]{12}-3\sqrt{10\sqrt{75}}+2\sqrt{12\sqrt{108}}$.

4. Вычислите $\left((x^2+y^2)\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}+(x^2y^2)^{\frac{1}{3}}\right)\dfrac{1}{\left(x^{\frac{4}{3}}-y^{\frac{4}{3}}\right)^{-1}}$

при $x=\sqrt[4]{27};\quad y=\sqrt[4]{125}$.

Решение подготовительных карточек

Решение подготовительной карточки 1

1. Представьте в виде степени

$$\frac{\sqrt[5]{x^2\sqrt[3]{x^4}}}{x^{-\frac{7}{30}}} = \left(x^2 \cdot x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{7}{30}} = x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{\frac{4}{15}} \cdot x^{\frac{7}{30}} =$$

$$= x^{\frac{2}{5} + \frac{4}{15} + \frac{7}{30}} = \boxed{x^{0,9}}.$$

2. Вычислите $\sqrt[3]{54\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}} - 81^{\frac{1}{4}}(0,3)^0 + \sqrt[3]{42\frac{7}{8}} - 0,5^2 : 2 =$

$$= \sqrt[3]{2 \cdot 27 \cdot 2^5} - \left(3^4\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 1 + \sqrt[3]{\frac{343}{8}} - 0,5^2 \cdot 2^{-1} =$$

$$= \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3} - 3 + \sqrt[3]{\left(\frac{7}{2}\right)^3} - \left(2^{-1}\right)^2 \cdot 2^{-1} =$$

$$= 2^2 \cdot 3 - 3 + \frac{7}{2} - \frac{1}{8} = \boxed{12,375} \qquad \left(\frac{1}{8} = 0,125\right).$$

3. Упростите $\dfrac{a^{-1} - x^{-1}}{a^{-3} + x^{-3}} : \left(\dfrac{xa^{-2} + ax^{-2}}{x - a}\right)^{-1} =$

$$= \frac{\left(a^{-1} - x^{-1}\right)(x - a)^{-1}}{\left(a^{-3} + x^{-3}\right)\left(xa\left(a^{-3} + x^{-3}\right)\right)^{-1}} =$$

$$= \frac{\left(a^{-1} - x^{-1}\right) xa \left(x^{-3} + a^{-3}\right)}{\left(a^{-3} + x^{-3}\right)(x - a)} = \frac{x^{-1}a^{-1}xa(x - a)}{x - a} = \boxed{1}.$$

4. $\left(5 \cdot 2^{n-3} - 2^{n-2}\right) : 2^{n-5} + 5^{2n+1} : 25^{n-1} =$

$$= 5 \cdot 2^{n-3} : 2^{n-5} - 2^{n-2} : 2^{n-5} + 5^{2n+1} : \left(5^2\right)^{n-1} =$$

$$= 5 \cdot 2^{n-3-n+5} - 2^{n-2-n+5} + 5^{2n+1-2n+2} =$$

$$= 5 \cdot 2^2 - 2^3 + 5^3 = 20 - 8 + 125 = \boxed{137}.$$

Решение подготовительной карточки 2

1. Представьте в виде степени $\dfrac{\sqrt[7]{x^2\sqrt{x^{\frac{1}{3}}}}}{x^{-\frac{4}{21}}} =$

$$= x^{\frac{2}{7}}\left(\left(\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{7}} \cdot x^{-\left(-\frac{4}{21}\right)} = x^{\frac{2}{7}+\frac{1}{42}+\frac{4}{21}} = \boxed{x^{\frac{1}{2}}}.$$

2. Вычислите

$$\sqrt[3]{256\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot 2} + 16^{\frac{3}{2}}(0{,}8)^0 - \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot 0{,}2^{-4} - \sqrt[5]{7\frac{19}{32}} =$$

$$= \sqrt[3]{2^8\cdot 2\cdot 3^3} + \left(2^4\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 1 - \left(5^{-1}\right)^3\cdot\left(5^{-1}\right)^{-4} - \sqrt[5]{\frac{243}{32}} =$$

$$= \sqrt[3]{2^9\cdot 3^3} + 2^6 - 5^{-3+4} - \sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^5} = 2^3\cdot 3 + 2^6 - 5 - \frac{3}{2} = \boxed{81{,}5}.$$

3. Упростите

$$\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left(1-\frac{1-\left(a^2+x^2\right)}{2ax}\right)(a+x+1)^{-2} =$$

$$= \frac{1+\frac{1}{a+x}}{1-\frac{1}{a+x}}\cdot\frac{2ax-1+a^2+x^2}{2ax}\cdot\frac{1}{(a+x+1)^2} =$$

$$= \frac{a+x+1}{a+x-1}\cdot\frac{(a+x)^2-1}{2ax}\cdot\frac{1}{(a+x+1)^2} =$$

$$= \frac{(a+x+1)(a+x+1)(a+x-1)}{(a+x-1)\cdot 2ax\,(a+x+1)^2} = \boxed{\frac{1}{2ax}}.$$

4. $$\frac{52\left(3\cdot 4^{10}+7\cdot 2^{19}\right)}{\left(16^3\cdot 13\right)^2} = \frac{52\left(3\cdot 2^{20}+7\cdot 2^{19}\right)}{\left(\left(2^4\right)^3\cdot 13\right)^2} =$$

$$= \frac{13\cdot 2^2\cdot 2^{19}(3\cdot 2+7)}{2^{24}\cdot 13^2} = \frac{13^2\cdot 2^2\cdot 2^{19}}{2^{24}\cdot 13^2} = \frac{1}{2^3} = \boxed{\frac{1}{8}}.$$

Решение подготовительной карточки 3

1. Представьте в виде степени

$$\frac{\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x^2}}\cdot\sqrt[4]{x\sqrt{x}}}{x^{-\frac{5}{24}}}=\left(x\cdot x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{5}{24}}=$$

$$=x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{5}{24}}=\boxed{x}.$$

2. Вычислите

$$(-1)^{21}-\sqrt[4]{81^3}+\left(2^{\frac{2}{3}}\cdot2^{\frac{1}{2}}\right)^6-16^{\frac{5}{4}}\,(0{,}5)^0+\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}=$$

$$=-1-\left(\left(3^4\right)^3\right)^{\frac{1}{4}}+\left(2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}\right)^6-\left(2^4\right)^{\frac{5}{4}}\cdot1+\left(-2^{-2}\right)^{-3}=$$

$$=-1-3^3+2^{4+3}-2^5-2^6=-1-27+128-32-64=\boxed{4}.$$

3. Упростите $\dfrac{a^{\frac{5}{4}}-a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}:\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}+1=$

$$=\frac{a^{\frac{1}{4}}\,(a-1)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)}\cdot\frac{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}+1}+1=$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)}+1=$$

$$=a^{\frac{1}{2}}-1+1=\boxed{a^{\frac{1}{2}}}.$$

4. $\left(2\cdot5^{2n-1}-3\cdot25^{n-1}\right):5^{2n-2}+16^{10}:8^{13}=$

$$=2\cdot5^{2n-1}:5^{2n-2}-3\cdot25^{n-1}:5^{2n-2}+\left(2^4\right)^{10}:\left(2^3\right)^{13}=$$

$$=2\cdot5^{2n-1-2n+2}-3\cdot5^{2(n-1)-2n+2}+2^{40}:2^{39}=2\cdot5-3\cdot5^0+2=\boxed{9}.$$

Решение подготовительной карточки 4

1. Представьте в виде степени

$$\frac{\sqrt[5]{x^2\sqrt{x^{\frac{2}{3}}}}}{x^{-\frac{8}{15}}} = \left(x^2 \cdot x^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot x^{-\left(-\frac{8}{15}\right)} = x^{\frac{2}{5}+\frac{1}{15}+\frac{8}{15}} = \boxed{x}.$$

2. Вычислите

$$(0{,}04)^{-1{,}5}\cdot\sqrt[3]{(0{,}125)^{-1}}-\left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}}(-0{,}4)^0+\left(\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}\right)^{-0{,}25} =$$

$$= (0{,}2)^{2(-1{,}5)}\cdot\sqrt[3]{(0{,}5)^{3(-1)}}-\left(11^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1+\left(\frac{6}{5}\right)^{-4(-0{,}25)} =$$

$$= \left(5^{-1}\right)^{-3}\cdot\sqrt[3]{\left(2^{-1}\right)^{-3}}-11+\left(\frac{6}{5}\right)^1 =$$

$$= 5^3\cdot 2-11+1{,}2 = \boxed{240{,}2}.$$

3. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}} =$

$\left[\text{Допустим, что } 5\sqrt{2}\leqslant 7;\quad 50\leqslant 49 \text{ — ложь, значит } 5\sqrt{2}>7.\right]$

$$= \sqrt[6]{\left(5\sqrt{2}-7\right)^2}\cdot\sqrt[6]{\left(3+2\sqrt{2}\right)^3} =$$

$$= \sqrt[6]{\left(25\cdot 2-70\sqrt{2}+49\right)\left(3^3+3\cdot 3^2\cdot 2\sqrt{2}+3\cdot 3\cdot 2^2\cdot 2+\left(2\sqrt{2}\right)^3\right)} =$$

$$= \sqrt[6]{\left(99-70\sqrt{2}\right)\left(27+54\sqrt{2}+72+16\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \sqrt[6]{\left(99-70\sqrt{2}\right)\left(99+70\sqrt{2}\right)} = \sqrt[6]{99^2-\left(70\sqrt{2}\right)^2} = \boxed{1}.$$

Можно несколько проще, если увидеть, что

$3+2\sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}\cdot 1+1 = \left(\sqrt{2}+1\right)^2,$

тогда $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = \sqrt{2}+1,$

значит $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}} =$

$$= \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right) = \sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}-7\right)\left(\sqrt{2}+1\right)^3} =$$

$$= \sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}-7\right)\left(\left(\sqrt{2}\right)^3+3\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot 1+3\sqrt{2}\cdot 1^2+1^3\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}-7\right)\left(5\sqrt{2}+7\right)} = \sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}\right)^2-7^2} = \boxed{1}.$$

Еще проще, если догадаться, что $5\sqrt{2}-7=\left(\sqrt{2}-1\right)^3$, тогда $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^3}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} =$ $= \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right) = \boxed{1}$.

4. $$\left(\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+a^{-\frac{2}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{-\frac{2}{3}}}\right)^{-1}$$

при $a=0{,}125$; $b=0{,}008$.

$$\left(\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+a^{-\frac{2}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{-\frac{2}{3}}}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{a^{-\frac{1}{3}}\left(a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}\right)}{\left(a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}\right)\left(a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}\right)} =$$

$$= \frac{a^{-\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}} = A\,(a;b)$$

$$A\,(0{,}125;0{,}008) = \frac{(0{,}125)^{-\frac{1}{3}}}{(0{,}125)^{-\frac{1}{3}}-(0{,}008)^{-\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{\left(2^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}}{\left(2^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(5^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}} = \frac{2}{2-5} = \boxed{-\frac{2}{3}}.$$

Решение подготовительной карточки 5

1. Представьте в виде степени

$$\frac{\sqrt[3]{x^2\sqrt[5]{x}}}{x^{-\frac{4}{15}}}=\frac{\left(x^2\cdot x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{4}{15}}}=$$

$$=x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{15}}\cdot x^{-\left(-\frac{4}{15}\right)}=x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{15}+\frac{4}{15}}=\boxed{x}.$$

2. Вычислите

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}-125^{\frac{2}{3}}(0{,}4)^0+\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}:\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=$$

$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}-\left(5^3\right)^{\frac{2}{3}}\cdot 1+\left(5^{-1}\right)^{-2}:\left(5^{-1}\right)^{-1}=$$

$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}-5^2+5^2:5^1=2-25+5=\boxed{-18}.$$

3. $\left(\dfrac{a^{-1}+2a^{-\frac{1}{2}}+1}{a^{-\frac{3}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}+1\right)^{-1}\cdot\left(1-a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$

при $a=9$.

$$\left(\frac{a^{-1}+2a^{-\frac{1}{2}}+1}{a^{-\frac{3}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}+1\right)^{-1}\cdot\left(1-a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\left(a^{-\frac{1}{2}}+1\right)^2}{a^{-\frac{1}{2}}\left(a^{-1}-1\right)}+1\right)^{-1}\cdot\frac{1}{1-a^{-\frac{1}{2}}}=$$

$$=\left(\frac{\left(a^{-\frac{1}{2}}+1\right)^2a^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{-\frac{1}{2}}+1\right)\left(a^{-\frac{1}{2}}-1\right)}+1\right)^{-1}\cdot\frac{1}{1-a^{-\frac{1}{2}}}=$$

$$=\left(\frac{\left(a^{-\frac{1}{2}}+1\right)a^{\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}-1}+1\right)^{-1}\cdot\frac{1}{1-a^{-\frac{1}{2}}}=$$

$$=\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}-1}{a^{-\frac{1}{2}}-1}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{1-a^{-\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{a^{-\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{1-a^{-\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{a^{-\frac{1}{2}}(a+1)}=\frac{-a^{\frac{1}{2}}}{1+a}=A(a);$$

$$A(9)=\frac{-9^{\frac{1}{2}}}{1+9}=-\frac{3}{10}=\boxed{-0{,}3}.$$

4. $$\frac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}=\frac{5\sqrt[3]{2^2\sqrt[3]{3\cdot 64}}+7\sqrt[3]{2\cdot 3^2\sqrt[3]{3^4}}}{\sqrt[3]{2^2\cdot 3\sqrt[3]{2^3\cdot 3}+6\sqrt[3]{5^3\cdot 3}}}=$$

$$=\frac{5\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\left(2^6\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}+7\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot\left(3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(2^2\cdot 2\cdot 3\cdot 3^{\frac{1}{3}}+6\cdot 5\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{5\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{9}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}+7\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{4}{9}}}{\left(3^{\frac{1}{3}}(24+30)\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{5\cdot 2^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{9}}+7\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{10}{9}}}{3^{\frac{1}{9}}(2\cdot 27)^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{9}}(5\cdot 2+7\cdot 3)}{3^{\frac{1}{9}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 3}=\frac{31}{3}=\boxed{10\frac{1}{3}}.$$

Решение подготовительной карточки 6

1. Представьте в виде степени

$$\frac{\sqrt[7]{x\sqrt{x^{-0,5}}}}{x^{\frac{5}{14}}\cdot\sqrt[4]{x^{-1}}}=\frac{x^{\frac{1}{7}}\cdot x^{-0,5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}}}{x^{\frac{5}{14}}\cdot x^{-\frac{1}{4}}}=x^{\frac{1}{7}-\frac{1}{28}-\frac{5}{14}+\frac{1}{4}}=x^0=\boxed{1}.$$

2. Вычислите

$$(0,5)^{-4}+16^{0,5}-\sqrt[4]{(0,0625)^{-3}}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{-0,5}+0,3^0=$$

$$=\left(2^{-1}\right)^{-4}+\left(2^4\right)^{0,5}-\left(\left((0,5)^4\right)^{-3}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{-0,5}+1=$$

$$=2^4+2^2-\left(2^{-1}\right)^{-3}\cdot\frac{3}{2}+1=16+4-2^2\cdot3+1=\boxed{9}.$$

3. $\left(\dfrac{b^{-\frac{3}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}-2}{b^{-1}-1}-2\right)^{-1}\left(1+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ при $b=0,04$.

$$\left(\frac{b^{-\frac{3}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}-2}{b^{-1}-1}-2\right)^{-1}\left(1+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{b^{-\frac{3}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}-2-2b^{-1}+2}{b^{-1}-1}\right)^{-1}\left(1+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{b^{-\frac{3}{2}}-2b^{-1}+b^{-\frac{1}{2}}}{b^{-1}-1}\right)^{-1}\left(1+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{b^{-\frac{1}{2}}\left(b^{-1}-2b^{-\frac{1}{2}}+1\right)}{b^{-1}-1}\right)^{-1}\left(1+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}=$$

$$= \left(\frac{b^{-\frac{1}{2}} \left(b^{-\frac{1}{2}} - 1 \right)^2}{\left(b^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \left(b^{-\frac{1}{2}} + 1 \right)} \right)^{-1} \left(1 + b^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{b^{-\frac{1}{2}} \left(b^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \left(1 + b^{-\frac{1}{2}} \right)}{b^{-\frac{1}{2}} + 1} \right)^{-1} =$$

$$= \left(b^{-\frac{1}{2}} \left(b^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \right)^{-1} = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{1}{2}} - 1} =$$

$$= \frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{1}{2}} \left(1 - b^{\frac{1}{2}} \right)} = \frac{b}{1 - b^{\frac{1}{2}}} = A(b);$$

$$A(0{,}04) = \frac{0{,}04}{1 - (0{,}04)^{\frac{1}{2}}} = \frac{0{,}04}{1 - 0{,}2} = \frac{0{,}04}{0{,}8} = \frac{4}{80} = \boxed{0{,}05}.$$

4. $$\frac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54} + 15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}} + \sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}} = \frac{\left(7(2 \cdot 27)^{\frac{1}{3}} + 15 \cdot \left(2^7\right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}} \cdot \left(2 \cdot 3^4\right)^{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{\left(7 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{3 \cdot \frac{1}{3}} + 15 \cdot 2^{\frac{7}{3}} \right)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{12}} + 2^{\frac{1}{12}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left(2^{\frac{1}{3}} \left(7 \cdot 3 + 15 \cdot 2^2 \right) \right)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{12}} \left(2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 3 \right)} =$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{12}} \left(7 \cdot 3 + 15 \cdot 4 \right)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{12}} (2 + 3)} = \frac{81^{\frac{1}{4}}}{5} = \frac{3}{5} = \boxed{0{,}6}.$$

Решение подготовительной карточки 7

1. Представьте в виде степени

$$\frac{\sqrt[5]{x^2\sqrt{x^{\frac{2}{3}}}}}{x^{-\frac{1}{15}}}=x^{\frac{2}{5}}\cdot x^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}\cdot x^{-\left(-\frac{1}{15}\right)}=x^{\frac{2}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}}=\boxed{x^{\frac{8}{15}}}.$$

2. Вычислите $(0{,}04)^{-1{,}5}\cdot\sqrt[3]{(0{,}125)^{-1}}-\left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}}=$

$$=(0{,}2)^{2(-1{,}5)}\cdot\left(\left(2^{-3}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(11^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(5^{-1}\right)^{-3}\cdot 2-11=250-11=\boxed{239}.$$

3. $\left(\frac{\sqrt[6]{8}}{\sqrt[4]{9}}-1\right)\frac{\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}\right)^2-2\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3}}=$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-1\right)\frac{\sqrt{2}+2\sqrt[4]{6}+\sqrt{3}-2\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2-3}{3}=\boxed{-\frac{1}{3}}.$$

4. $\left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}+a^{-1}}{a^{-\frac{4}{3}}-1}\right)^{-1}+a^{\frac{1}{3}}$ при $a=0{,}008$.

$$\left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}+a^{-1}}{a^{-\frac{4}{3}}-1}\right)^{-1}+a^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}\left(1+a^{-\frac{2}{3}}\right)}{\left(a^{-\frac{2}{3}}+1\right)\left(a^{-\frac{2}{3}}-1\right)}\right)^{-1}+a^{\frac{1}{3}}=$$

$$=\left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}-1}\right)^{-1}+a^{\frac{1}{3}}=\frac{a^{-\frac{2}{3}}-1}{a^{-\frac{1}{3}}}+a^{\frac{1}{3}}=$$

$$=a^{\frac{1}{3}}\left(a^{-\frac{2}{3}}-1\right)+a^{\frac{1}{3}}=a^{-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}=a^{-\frac{1}{3}}=A(a);$$

$$A(0{,}008)=(0{,}008)^{-\frac{1}{3}}=\left(0{,}2^3\right)^{-\frac{1}{3}}=0{,}2^{-1}=\boxed{5}.$$

Решение подготовительной карточки 8

1. Представьте в виде степени

$$\frac{\sqrt[6]{y^5\sqrt[3]{y}}}{y^{-\frac{1}{9}}}=\left(y^5\cdot y^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{6}}\cdot y^{-\left(-\frac{1}{9}\right)}=y^{\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{6}}\cdot y^{\frac{1}{9}}=y^{\frac{8}{9}+\frac{1}{9}}=\boxed{y}.$$

2. Вычислите

$$\sqrt[4]{81^3}\cdot 32^{-0,4}-8^{-\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}+144^{0,5}\,(-10)^0=$$

$$=\left(3^{4\cdot 3}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(2^5\right)^{-0,4}-\left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}+\left(12^2\right)^{0,5}\cdot 1=$$

$$=3^3\cdot 2^{-2}-2^{-2}\cdot 3+12=2^{-2}(27-3)+12=2^{-2}\cdot 2^3\cdot 3+12=\boxed{18}.$$

3. $$\left(\frac{\sqrt{3}+2}{4+2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2\left(2+\sqrt{3}\right)}-\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}+2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{3}}=\frac{3-1}{2}=\boxed{1}.$$

4. $$\left(\frac{c^{-\frac{1}{2}}-c^{-\frac{3}{4}}}{1-c^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-1}-c^{\frac{1}{4}}\ \text{ при } c=\frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{c^{-\frac{1}{2}}-c^{-\frac{3}{4}}}{1-c^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-1}-c^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{c^{-\frac{1}{2}}\left(1-c^{-\frac{1}{4}}\right)}{\left(1-c^{-\frac{1}{4}}\right)\left(1+c^{-\frac{1}{4}}\right)}\right)^{-1}-c^{\frac{1}{4}}=$$

$$=\left(\frac{c^{-\frac{1}{2}}}{1+c^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-1}-c^{\frac{1}{4}}=\frac{1+c^{-\frac{1}{4}}}{c^{-\frac{1}{2}}}-c^{-\frac{1}{4}}=c^{\frac{1}{2}}\left(1+c^{-\frac{1}{4}}\right)-c^{\frac{1}{4}}=$$

$$=c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}-c^{\frac{1}{4}}=c^{\frac{1}{2}}=A\left(c\right);$$

$$A\left(\frac{4}{9}\right)=\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{2}{3}}.$$

Решение подготовительной карточки 9

1. Представьте в виде степени

$$\frac{\sqrt[4]{a^5\sqrt[3]{a^{-2}}}}{a^{-\frac{5}{24}}} = \frac{\left(a^5\cdot a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}}{a^{-\frac{5}{24}}} = a^{\frac{5}{4}}\cdot a^{-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}}\cdot a^{-\left(-\frac{5}{24}\right)} =$$

$$= a^{\frac{5}{4}-\frac{1}{6}+\frac{5}{24}} = \boxed{a^{1\frac{7}{24}}}.$$

2. Вычислите

$$(0{,}36)^{-0{,}5}\sqrt[4]{(0{,}0001)^{-1}} + (-1)^{12}\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}(0{,}75)^{-4} - 0{,}5^0 =$$

$$= \left((0{,}6)^2\right)^{-0{,}5}\left(\left((0{,}1)^4\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} - 1 =$$

$$= \frac{10}{6}\left(10^{-1}\right)^{-1} + \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - 1 =$$

$$= \frac{50}{3} + \frac{4}{3} - 1 = 18 - 1 = \boxed{17}.$$

3. $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}} - 3\sqrt[3]{9\sqrt{162}} - 11\sqrt[6]{18} + 2\sqrt[3]{75\sqrt{50}} =$

$$= 5\cdot 6^{\frac{1}{3}}\cdot 32^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} - 3\cdot 9^{\frac{1}{3}}(2\cdot 81)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} -$$

$$- 11\cdot 18^{\frac{1}{6}} + 2(3\cdot 25)^{\frac{1}{3}}\cdot 50^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} =$$

$$= 5\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{6}} - 3\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{4}{6}} - 11\cdot 3^{\frac{2}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{6}} + 2\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}\cdot 5^{\frac{2}{6}} =$$

$$= 5\cdot 2^{\frac{7}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{3}} - 3^{1+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}} - 11\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}} + 2\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}} =$$

$$= 5\cdot 2\cdot 2^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{3}} - 3^2\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}} - 11\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}} + 10\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}} = \boxed{0}.$$

4. $\dfrac{y^{\frac{3}{2}}+z^{\frac{3}{2}}}{\left(y^2-yz\right)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{\sqrt[3]{y^{-1}-zy^{-2}}}{y\sqrt{y}-z\sqrt{z}}-yz$ при $y=\dfrac{12}{13};\ \ z=\dfrac{5}{13}$.

$$\frac{y^{\frac{3}{2}}+z^{\frac{3}{2}}}{\left(y^2-yz\right)^{\frac{2}{3}}}:\frac{\sqrt[3]{y^{-1}-zy^{-2}}}{y\sqrt{y}-z\sqrt{z}}-yz=$$

$$=\frac{y^{\frac{3}{2}}+z^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{2}{3}}\left(y-z\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{y^{\frac{3}{2}}-z^{\frac{3}{2}}}{\left(y^{-2}\left(y-z\right)\right)^{\frac{1}{3}}}-yz=$$

$$=\frac{y^3-z^3}{y^{\frac{2}{3}}\left(y-z\right)^{\frac{2}{3}}\cdot y^{-\frac{2}{3}}\left(y-z\right)^{\frac{1}{3}}}-yz=$$

$$=\frac{y^3-z^3}{\left(y-z\right)}-yz=y^2+zy+z^2-zy=y^2+z^2=A\left(y;z\right);$$

$$A\left(\frac{12}{13};\frac{5}{13}\right)=\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144+25}{169}=\boxed{1}.$$

Решение подготовительной карточки 10

1. Представьте в виде степени

$$\frac{z^{\frac{1}{9}}\sqrt[3]{z\sqrt[4]{z}}}{z^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{z\sqrt[4]{z}}}=\frac{z^{\frac{1}{9}}\left(z\cdot z^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{3}}\left(z\cdot z^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{6}}}=z^{\frac{1}{9}-\frac{1}{3}}\cdot\left(z\cdot z^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=$$

$$=z^{-\frac{2}{9}}\cdot\left(z^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{6}}=z^{-\frac{2}{9}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{6}}=z^{\frac{-16+15}{72}}=\boxed{z^{-\frac{1}{72}}}.$$

2. Вычислите $\dfrac{6\cdot 2^8-9\cdot 2^{10}+3\cdot 2^{12}}{4\cdot 2^{10}+4\cdot 2^{12}-8\cdot 2^{11}}=$

$$=\frac{2^9\left(3-9\cdot 2+3\cdot 2^3\right)}{2^{12}\left(1+2^2-2^2\right)}=\frac{3-18+24}{2^3}=\boxed{\frac{9}{8}}.$$

3. $\sqrt[6]{17\sqrt{5}+38}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-2}=\sqrt[6]{\left(17\sqrt{5}+38\right)\left(\sqrt{5}-2\right)^3}=$

$$=\sqrt[6]{\left(17\sqrt{5}+38\right)\left(5\sqrt{5}-3\cdot 5\cdot 2+3\sqrt{5}\cdot 4-8\right)}=$$

$$=\sqrt[6]{\left(17\sqrt{5}+38\right)\left(17\sqrt{5}-38\right)}=\sqrt[6]{\left(17\sqrt{5}\right)^2-(38)^2}=$$

$$=\sqrt[6]{1445-1444}=\sqrt[6]{1}=\boxed{1}.$$

4. $\dfrac{1-z^{-2}}{z^{\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{z-z^{-2}}{z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{2}{z^{\frac{3}{2}}}$ при $z=2{,}25$.

$$\frac{1-z^{-2}}{z^{\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}}-\frac{z-z^{-2}}{z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}}+\frac{2}{z^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{1-z^{-2}}{z^{\frac{1}{2}}\left(1+z^{-1}\right)}-\frac{z\left(1-z^{-3}\right)}{z^{\frac{1}{2}}\left(1-z^{-1}\right)}+2\cdot z^{-\frac{3}{2}}=$$

$$=z^{-\frac{1}{2}}\left(1-z^{-1}\right)-z^{\frac{1}{2}}\left(1+z^{-1}+z^{-2}\right)+2z^{-\frac{3}{2}}=$$

$$=z^{-\frac{1}{2}}-z^{-\frac{3}{2}}-z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}-z^{-\frac{3}{2}}+2z^{-\frac{3}{2}}=-z^{\frac{1}{2}}=A\left(z\right);$$

$$A\left(2{,}25\right)=-2{,}25^{\frac{1}{2}}=\boxed{-1{,}5}.$$

Решение подготовительной карточки 11

1. Представьте в виде степени

$$\frac{\sqrt[6]{a^2\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a^2\sqrt[3]{a^5}}}{\sqrt{a\sqrt[9]{a^2}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{18}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{5}{9}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{18}}}=$$

$$=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{18}+\frac{5}{9}-\frac{1}{2}-\frac{2}{18}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=\boxed{a}.$$

2. Вычислите

$$\left(\frac{16}{\sqrt{5}-1}-\frac{5}{\sqrt{3}+2}-\frac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}+6\right)=$$

$$=\left(\frac{16\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}-\frac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{4-3}-\frac{8\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}\right)\left(\sqrt{3}+6\right)=$$

$$=\left(4\left(\sqrt{5}+1\right)-5\left(2-\sqrt{3}\right)-4\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\right)\left(\sqrt{3}+6\right)=$$

$$=\left(4\sqrt{5}+4-10+5\sqrt{3}-4\sqrt{5}-4\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+6\right)=$$

$$=\left(\sqrt{3}-6\right)\left(\sqrt{3}+6\right)=3-36=\boxed{-33}.$$

3. $\sqrt{10-4\sqrt{6}}+\sqrt{15-6\sqrt{6}}.$

$10-4\sqrt{6}=4-2\cdot2\sqrt{6}+6=\left(2-\sqrt{6}\right)^2,$

$15-6\sqrt{6}=9-2\cdot3\sqrt{6}+6=\left(3-\sqrt{6}\right)^2.$

$$\sqrt{10-4\sqrt{6}}+\sqrt{15-6\sqrt{6}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{6}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{6}\right)^2}=$$

$$=\left|2-\sqrt{6}\right|+\left|3-\sqrt{6}\right|= \qquad \left(2<\sqrt{6};\ \ 3>\sqrt{6}\right)$$

$$=\sqrt{6}-2+3-\sqrt{6}=\boxed{1}.$$

4. $$\frac{1}{\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{b^{-1}}}-\frac{\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{b^{-1}}}{a^{-\frac{2}{3}}-\left(\sqrt[3]{ab}\right)^{-1}+b^{-\frac{2}{3}}}$$

при $a=-0{,}125;\quad b=-8.$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{b^{-1}}}-\frac{\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{b^{-1}}}{a^{-\frac{2}{3}}-\left(\sqrt[3]{ab}\right)^{-1}+b^{-\frac{2}{3}}}=$$

$$= \frac{a^{-\frac{2}{3}} - \left(\sqrt[3]{ab}\right)^{-1} + b^{-\frac{2}{3}} - \left(\sqrt[3]{a^{-1}} + \sqrt[3]{b^{-1}}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}} + \sqrt[3]{b^{-1}}\right)\left(a^{-\frac{2}{3}} - \left(\sqrt[3]{ab}\right)^{-1} + b^{-\frac{2}{3}}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a^{-1}} \cdot \sqrt[3]{b^{-1}} + \sqrt[3]{b^{-2}} - \sqrt[3]{a^{-2}} - 2\sqrt[3]{a^{-1}} \cdot \sqrt[3]{b^{-1}} - \sqrt[3]{b^{-2}}}{a^{-1} + b^{-1}} =$$

$$= -\frac{3\sqrt[3]{a^{-1}} \cdot \sqrt[3]{b^{-1}}}{a^{-1} + b^{-1}} = A\,(a; b)\,;$$

$$A\,(-0{,}125; -8) = \frac{-3\sqrt[3]{(-0{,}125)^{-1}} \cdot \sqrt[3]{(-8)^{-1}}}{(-0{,}125)^{-1} + (-8)^{-1}} =$$

$$= \frac{-3\sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{-0{,}125}}{-8 - 0{,}125} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 0{,}5}{8 + \frac{1}{8}} = \boxed{\frac{24}{65}}.$$

Решение подготовительной карточки 12

1. Представьте в виде степени $\dfrac{\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a^{-1}}}\cdot a^{\frac{5}{16}}}{\sqrt{a\sqrt[3]{a^{-2}}}:a^{-\frac{1}{6}}}=$

$$\frac{a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{-\frac{1}{16}}\cdot a^{\frac{5}{16}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}:a^{-\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{5}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=\boxed{a^{\frac{1}{6}}}.$$

2. Вычислите

$$\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\frac{7}{2\sqrt{2}+1}-\left(11-5\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)=$$

$$=\frac{\left(1-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{5-2}+\frac{7\left(2\sqrt{2}-1\right)}{8-1}-$$

$$-\left(22-10\sqrt{5}+11\sqrt{5}-25\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{50}-\sqrt{2}+\sqrt{20}\right)+2\sqrt{2}-1-\left(\sqrt{5}-3\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{5}-5\sqrt{2}-\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)+2\sqrt{2}-1-\sqrt{5}+3=$$

$$=\sqrt{5}-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1-\sqrt{5}+3=\boxed{2}.$$

3. $\sqrt{98\sqrt{48}}-11\sqrt[4]{12}-3\sqrt{10\sqrt{75}}+2\sqrt{12\sqrt{108}}=$

$$=\sqrt{7^2\cdot 2\sqrt{4^2\cdot 3}}-11\sqrt[4]{2^2\cdot 3}-3\sqrt{2\cdot 5\cdot\sqrt{5^2\cdot 3}}+$$

$$+2\sqrt{2^2\cdot 3\sqrt{3^3\cdot 2^2}}=$$

$$=7\sqrt{2\cdot 4\sqrt{3}}-11\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}-3\sqrt{2\cdot 5\cdot 5\sqrt{3}}+2\cdot 2\sqrt{3\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}}=$$

$$=7\cdot 2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}-11\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}-3\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 5\cdot 3^{\frac{1}{4}}+4\cdot 3\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}=$$

$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}(14-11)+2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}(-15+12)=\boxed{0}.$$

4. $$\left(\left(x^2+y^2\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}+\left(x^2y^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)\frac{1}{\left(x^{\frac{4}{3}}-y^{\frac{4}{3}}\right)^{-1}}$$

при $x=\sqrt[4]{27}$; $\quad y=\sqrt[4]{125}$.

$$\left(\left(x^2+y^2\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}+\left(x^2y^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)\frac{1}{\left(x^{\frac{4}{3}}-y^{\frac{4}{3}}\right)^{-1}}=$$

$$=\left(\frac{x^2+y^2}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{4}{3}}-y^{\frac{4}{3}}\right)=$$

$$=\left(\frac{\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3+\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^3}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{4}{3}}-y^{\frac{4}{3}}\right)=$$

$$=\left(x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{4}{3}}-y^{\frac{4}{3}}\right)=$$

$$=\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)\left(x^{\frac{4}{3}}-y^{\frac{4}{3}}\right)=x^{\frac{8}{3}}-y^{\frac{8}{3}}=A\,(x;y)\,;$$

$$A\left(\sqrt[4]{27};\sqrt[4]{125}\right)=\left(\sqrt[4]{27}\right)^{\frac{8}{3}}-\left(\sqrt[4]{125}\right)^{\frac{8}{3}}=3^{\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{3}}-5^{\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{3}}=$$
$$=3^2-5^2=\boxed{-16}.$$

Тренировочные карточки

Карточка 1

1. Упростите и вычислите при $b = 4$:

$$\frac{9b^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-2}}{(a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-2} + 6 \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{b^2}{a^{\frac{3}{4}} - 3b^{\frac{5}{3}}}.$$

Упростите (2–4):

2. $$\frac{1 - \sqrt{2t}}{\frac{1+\sqrt[4]{2t}}{1-\sqrt[4]{8t^3}}} \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2t}} + \sqrt[4]{4t^2}}{1 + \sqrt[4]{\frac{1}{2t}}} - \sqrt{2t} \right)^{-1}.$$

3. $$\left(\left(\frac{1}{a + \sqrt{2}} - \frac{a^2 + 4}{a^3 + 2\sqrt{2}} \right) : \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{a} \right)^{-1} \right)^2.$$

4. $$A = \frac{(m + x)^{\frac{1}{2}} + (m - x)^{\frac{1}{2}}}{(m + x)^{\frac{1}{2}} - (m - x)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{где} \quad x = \frac{2mn}{n^2 + 1}; \quad \begin{cases} m > 0, \\ n \neq 0. \end{cases}$$

Карточка 2

Упростите (1–4):

1. $$A = \frac{x^2 + 2x - 3 + (x + 1)\sqrt{x^2 - 9}}{x^2 - 2x - 3 + (x - 1)\sqrt{x^2 - 9}}.$$

2. $$A = \frac{x^2 - 4}{x\sqrt{\left(\frac{x^2+4}{2x}\right)^2 - 4}}.$$

3. $$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} \right)^2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

4. $$\frac{2^{1,5}}{2^{1,5} \cdot a^{\frac{1}{6}} - a^{\frac{2}{3}}} + \frac{a^{\frac{5}{6}} + 2^{1,5} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{1}{3}} + 2)^2} \cdot \left(\frac{2a^{\frac{1}{3}}}{a - 8} + \frac{1}{a^{\frac{1}{3}} - 2} \right).$$

Карточка 3

Упростите (1–4):

1. $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$

2. $\dfrac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}:\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}.$

3. $A=\dfrac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}.$

4. $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}+27\sqrt[3]{a}}{16-a^{\frac{2}{3}}}\left(\dfrac{49}{27+a}-\dfrac{a^{\frac{1}{3}}+3}{a^{\frac{2}{3}}-3a^{\frac{1}{3}}+9}\right)+\dfrac{40-a^{\frac{2}{3}}}{4+\sqrt[3]{a}}.$

Карточка 4

Упростите (1–2):

1. $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}.$

2. $$\left(\frac{a+a^{\frac{3}{4}}\sqrt{b}+\sqrt[4]{a}\cdot b^{\frac{3}{2}}+b^2}{\sqrt{a}+2a^{0,25}\cdot\sqrt{b}+b}\cdot(a^{\frac{1}{4}}+\sqrt{b})+\right.$$
$$\left.+\frac{3b^{0,5}(\sqrt{a}-b)}{\sqrt{a^{-0,5}}}(\sqrt[4]{a}-\sqrt{b})^{-1}\right)^{-0,(3)}:(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b})^{-1}.$$

3. Вычислите $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}.$

4. Упростите $A=\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ при $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right),$

если $\begin{cases} a>0, \\ b>0. \end{cases}$

Карточка 5

Упростите (1–4):

1. $$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}\cdot t^{\frac{1}{2}}+t}-\frac{1-t}{x^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{3}{2}}}\right)\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{5}{2}}}{x^3-t^3}\right)^{-1}-\left(\frac{x}{t}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

2. $$\frac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}-\frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}-\frac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}.$$

3. $$\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right).$$

4. $$A=\frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}\cdot\left(1-\frac{1}{x-1}\right).$$

Карточка 6

Упростите (1–4):

1. $$\left(\frac{1-x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}-\frac{2}{x\sqrt{x}}+\frac{x^{-2}-x}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{-1}.$$

2. $$\frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right)+\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}.$$

3. $$\frac{x^2-3}{\sqrt{\left(\frac{x^2+3}{2x}\right)^2-3}}.$$

4. $$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+8}-\frac{4a}{(a^{\frac{1}{3}}+2)^3}\right)\left(\frac{1+2a^{-\frac{1}{3}}}{1-2a^{-\frac{1}{3}}}\right)^2-\frac{12}{a+8}.$$

Карточка 7

1. Вычислите $\dfrac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}$.

2. Упростите и вычислите при $a=9,\ b=4$:

$$\left(\frac{2\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}{ab^{-\frac{1}{6}}-b^{\frac{5}{6}}}\right)^{-1}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}\right).$$

3. Упростите и вычислите при $a=\sqrt{2},\ b=\sqrt[3]{3}$:

$$\sqrt{10a+2\sqrt{25a^2-b^2}}-\sqrt{10a-2\sqrt{25a^2-b^2}}-2\sqrt{5a-b}.$$

4. Вычислите при $x=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$:

$$f(x)=\frac{4x+x^2}{2+\sqrt{4+x}}-\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{4-x}}.$$

Карточка 8

1. Упростите и вычислите при $b=8{,}5$:

$$\frac{\sqrt[3]{b+4\sqrt{b-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{b-4}+2}}{\sqrt[3]{b-4\sqrt{b-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{b-4}-2}}\cdot\frac{b-4\sqrt{b-4}}{2}.$$

2. Вычислите при $x=1{,}01$:

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}+\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{(1+3x)+\sqrt{x}(3+x)}-\sqrt[3]{\sqrt{x}(3+x)-(3x+1)}}.$$

3. Вычислите: $\sqrt[3]{5+\dfrac{11\sqrt{13}}{8}}+\sqrt[3]{5-\dfrac{11\sqrt{13}}{8}}$.

4. Вычислите при $t=\dfrac{5\sqrt{11}}{2}$:

$$f(t)=\frac{9t+t^2}{3+\sqrt{9+t}}+\frac{9t-t^2}{3-\sqrt{9-t}}+6t.$$

Решение тренировочных карточек

Решение тренировочной карточки 1

1. Упростите и вычислите при $b = 4$:

$$\frac{9b^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-2}}{(a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-2} + 6 \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{b^2}{a^{\frac{3}{4}} - 3b^{\frac{5}{3}}} =$$

$$= \frac{b^{-2}(9b^{\frac{10}{3}} - a^{\frac{3}{2}})}{(b^{-2})^{\frac{1}{2}} \cdot (a^{\frac{3}{2}} + 6 \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{5}{3}} + 9b^{\frac{10}{3}})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{b^2}{a^{\frac{3}{4}} - 3b^{\frac{5}{3}}} =$$

$$= \frac{b^{-2}(3b^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{3}{4}})(3b^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{3}{4}})}{b^{-1}\left((a^{\frac{3}{4}} + 3b^{\frac{5}{3}})^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{b^2}{a^{\frac{3}{4}} - 3b^{\frac{5}{3}}} =$$

$$= \frac{b^{-2} \cdot b^2(3b^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{3}{4}})(3b^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{3}{4}})}{b^{-1}|a^{\frac{3}{4}} + 3b^{\frac{5}{3}}|(a^{\frac{3}{4}} - 3b^{\frac{5}{3}})} = \frac{(-1)(3b^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{3}{4}})}{b^{-1}(a^{\frac{3}{4}} + 3b^{\frac{5}{3}})} = -b,$$

так как $\begin{cases} a^{\frac{3}{4}} > 0 \\ b^{\frac{5}{3}} > 0 \end{cases} \Rightarrow a^{\frac{3}{4}} + 3b^{\frac{5}{3}} > 0.$

при $b = 4$ выражение, после упрощения, равно -4.

2. Упростите:

$$\frac{1 - \sqrt{2t}}{\frac{1+\sqrt[4]{2t}}{1-\sqrt[4]{8t^3}}} \left(\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2t}} + \sqrt[4]{4t^2}}{1 + \sqrt[4]{\frac{1}{2t}}} - \sqrt{2t}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{(1 - \sqrt{2t})(1 - \sqrt[4]{8t^3})}{1 + \sqrt[4]{2t}} \left(\frac{\frac{1+\sqrt[4]{8t^3}}{\sqrt[4]{2t}}}{\frac{\sqrt[4]{2t}+1}{\sqrt[4]{2t}}} - \sqrt{2t}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{(1 + \sqrt[4]{2t})(1 - \sqrt[4]{2t})(1 - \sqrt[4]{8t^3})}{1 + \sqrt[4]{2t}} \left(\frac{1 + \sqrt[4]{8t^3}}{1 + \sqrt[4]{2t}} - \sqrt{2t}\right)^{-1} =$$

$$= (1-\sqrt[4]{2t})(1-\sqrt[4]{8t^3}) \left(\frac{(1+\sqrt[4]{2t})(1-\sqrt[4]{2t}+\sqrt[4]{4t^2})}{1+\sqrt[4]{2t}} - \sqrt{2t}\right)^{-1} =$$

$$= (1-\sqrt[4]{2t})(1-\sqrt[4]{8t^3})(1-\sqrt[4]{2t}+\sqrt{2t}-\sqrt{2t})^{-1} =$$
$$= \frac{(1-\sqrt[4]{2t})(1-\sqrt[4]{8t^3})}{1-\sqrt[4]{2t}} = 1-\sqrt[4]{8t^3}.$$

3. Упростите:

$$\left(\left(\frac{1}{a+\sqrt{2}}-\frac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right):\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{a}\right)^{-1}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{a^2-a\sqrt{2}+2-a^2-4}{(a+\sqrt{2})(a^2-a\sqrt{2}+2)}:\left(\frac{a^2\sqrt{2}-2a+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot a}\right)^{-1}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{-\sqrt{2}(a+\sqrt{2})}{(a+\sqrt{2})(a^2-a\sqrt{2}+2)}\cdot\frac{\sqrt{2}(a^2-a\sqrt{2}+2)}{2\sqrt{2}\cdot a}\right)^2 =$$
$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}a}\right)^2 = \frac{1}{2a^2}.$$

4. Упростите:

$$A = \frac{(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}}} \text{ при } x = \frac{2mn}{n^2+1}; \quad \begin{cases} m > 0 \\ n \neq 0 \end{cases}.$$

$$A = \frac{((m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}})((m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}})}{((m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}})((m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}})} =$$
$$= \frac{m+x+2\sqrt{m+x}\cdot\sqrt{m-x}+m-x}{m+x-m+x} =$$
$$= \frac{m+\sqrt{m+x}\cdot\sqrt{m-x}}{x}.$$

Рассмотрим

$$\sqrt{m+x} = \sqrt{m+\frac{2mn}{n^2+1}} = \sqrt{\frac{mn^2+m+2mn}{n^2+1}} =$$
$$= \sqrt{\frac{m(n^2+2n+1)}{n^2+1}} = |n+1|\sqrt{\frac{m}{n^2+1}},$$

$$\sqrt{m-x}=\sqrt{m-\frac{2mn}{n^2+1}}=\sqrt{\frac{mn^2+m-2mn}{n^2+1}}=$$

$$=\sqrt{\frac{m(n^2-2n+1)}{n^2+1}}=|n-1|\sqrt{\frac{m}{n^2+1}}.$$

Тогда

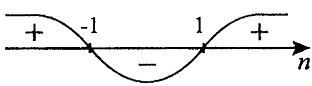
$$A=\frac{m+|n+1|\sqrt{\frac{m}{n^2+1}}|n-1|\sqrt{\frac{m}{n^2+1}}}{\frac{2mn}{n^2+1}}=$$

$$=\frac{m+\frac{m}{n^2+1}|n+1|\cdot|n-1|}{\frac{2mn}{n^2+1}}=\frac{m(n^2+1)+m|n+1|\cdot|n-1|}{2mn}=$$

$$=\frac{n^2+1+|n^2-1|}{2n}.$$

$t(n)=n^2-1.$

Распределение знаков для $t(n)=n^2-1$:



а) $|n^2-1|=1-n^2$ при $\left[\begin{array}{l}-1\leqslant n<0,\\ 0<n\leqslant 1,\end{array}\right.$ тогда

$$A=\frac{n^2+1+1-n^2}{2n}=\frac{1}{n}.$$

б) $|n^2-1|=n^2-1$ при $n<-1$, тогда

$$A=\frac{n^2+1+n^2-1}{2n}=n.$$

в) $|n^2-1|=n^2-1$ при $n>1$, тогда

$$A=\frac{n^2+1+n^2-1}{2n}=n.$$

$$A=\begin{cases} n & \text{при } |n|>1;\ m>0,\\ \dfrac{1}{n} & \text{при } |n|\leqslant 1;\ n\neq 0;\ m>0.\end{cases}$$

Решение тренировочной карточки 2

1. Упростите:

$$A = \frac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}} =$$

$$= \frac{(x+3)(x-1)+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{(x-3)(x+1)+(x-1)\sqrt{x^2-9}}.$$

Область определения выражения:

$D(A) = (-\infty; -3] \cup (3; +\infty)$.

а) $x+3 = \begin{cases} (\sqrt{x+3})^2 & \text{при } x \geqslant -3, \\ -(\sqrt{-x-3})^2 & \text{при } x < -3; \end{cases}$

б) $x-3 = \begin{cases} (\sqrt{x-3})^2 & \text{при } x \geqslant 3, \\ -(\sqrt{3-x})^2 & \text{при } x < 3; \end{cases}$

в) $\sqrt{(x+3)(x-3)} = \begin{cases} \sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-3} & \text{при } x \geqslant 3, \\ \sqrt{-x-3}\cdot\sqrt{3-x} & \text{при } x < -3. \end{cases}$

1) При $x \leqslant -3$

$$A = \frac{-(\sqrt{-x-3})^2(x-1)+(x+1)\sqrt{-x-3}\cdot\sqrt{3-x}}{-(\sqrt{3-x})^2(x+1)+(x-1)\sqrt{-x-3}\cdot\sqrt{3-x}} =$$

$$= \frac{-\sqrt{-x-3}(\sqrt{-x-3}(x-1)-(x+1)\sqrt{3-x})}{\sqrt{3-x}(-\sqrt{3-x}(x+1)+(x-1)\sqrt{-x-3})} =$$

$$= -\frac{\sqrt{-x-3}}{\sqrt{3-x}} = -\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}.$$

2) При $x > 3$

$$A = \frac{(\sqrt{x+3})^2(x-1)+(x+1)\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-3}}{(\sqrt{x-3})^2(x+1)+(x-1)\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x+3}((x-1)\sqrt{x+3}+(x+1)\sqrt{x-3})}{\sqrt{x-3}((x+1)\sqrt{x-3}+(x-1)\sqrt{x+3})} =$$

$$= \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}.$$

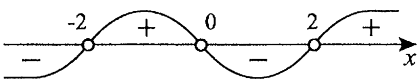
$$A = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}} & \text{при } x > 3, \\ -\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}} & \text{при } x \leqslant -3. \end{cases}$$

2. Упростите и вычислите:

$$A = \frac{x^2-4}{x \cdot \sqrt{\left(\frac{x^2+4}{2x}\right)^2 - 4}} = \frac{x^2-4}{x\sqrt{\frac{x^4+8x^2+16-16x^2}{4x^2}}} =$$

$$= \frac{x^2-4}{x\sqrt{\frac{x^4-8x^2+16}{4x^2}}} = \frac{x^2-4}{x\sqrt{\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2}} = \frac{x^2-4}{x\left|\frac{x^2-4}{2x}\right|}.$$

$$t(x) = \frac{x^2-4}{2x}.$$



Итак, $A = \begin{cases} 2 & \text{при } x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty), \\ -2 & \text{при } x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2). \end{cases}$

3. Упростите:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt[4]{x}(\sqrt{x}-1)}{1-\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \left(\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(-\sqrt[4]{x} + \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \left(\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right| =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{1+\sqrt{x}}.$$

4. Упростите:

$$\frac{2^{1,5}}{2^{1,5}\cdot a^{\frac{1}{6}}-a^{\frac{2}{3}}}+\frac{a^{\frac{5}{6}}+2^{1,5}\cdot a^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{1}{3}}+2)^2}\left(\frac{2a^{\frac{1}{3}}}{a-8}+\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}-2}\right)=$$

$$=\frac{2^{1,5}}{a^{\frac{1}{6}}(2^{1,5}-a^{\frac{1}{2}})}+\frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{2}}+2^{1,5})}{(a^{\frac{1}{3}}+2)^2}\cdot\frac{2a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}+4}{(a^{\frac{1}{3}}-2)(a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}+4)}=$$

$$=\frac{2^{1,5}}{a^{\frac{1}{6}}(2^{1,5}-a^{\frac{1}{2}})}+\frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{2}}+2^{1,5})}{(a^{\frac{1}{3}}+2)^2}\cdot\frac{(a^{\frac{1}{3}}+2)^2}{(a^{\frac{1}{3}}-2)(a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}+4)}=$$

$$=\frac{2^{1,5}}{a^{\frac{1}{6}}(2^{1,5}-a^{\frac{1}{2}})}+\frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{2}}+2^{1,5})(a^{\frac{1}{3}}+2)^2}{(a^{\frac{1}{3}}+2)^2(a-8)}=$$

$$=\frac{2^{1,5}}{a^{\frac{1}{6}}(2^{1,5}-a^{\frac{1}{2}})}+\frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{2}}+2^{1,5})}{(a^{\frac{1}{2}}-2^{1,5})(a^{\frac{1}{2}}+2^{1,5})}=$$

$$=\frac{2^{1,5}}{a^{\frac{1}{6}}(2^{1,5}-a^{\frac{1}{2}})}-\frac{a^{\frac{1}{3}}}{2^{1,5}-a^{\frac{1}{2}}}=\frac{2^{1,5}-a^{\frac{1}{6}}\cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}(2^{1,5}-a^{\frac{1}{2}})}=$$

$$=\frac{2^{1,5}-a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}(2^{1,5}-a^{\frac{1}{2}})}=\frac{1}{a^{\frac{1}{6}}}=a^{-\frac{1}{6}}.$$

Решение тренировочной карточки 3

1. $$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\frac{1}{a-b}+$$

$$+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=(a-\sqrt{ab}+b-\sqrt{ab})\cdot\frac{1}{a-b}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\cdot\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}+$$

$$+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=1.$$

2. $$\frac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}:\frac{a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{a-b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}:\frac{a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}})}{a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}})}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\cdot\frac{(b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}})}{b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(\sqrt{b}-\sqrt{a})}=-1.$$

3. $A = \dfrac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b} - \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{ab}-|b|}{b} - \sqrt{\dfrac{a}{b}}.$

$$\sqrt{ab} = \begin{cases} \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} & \text{при } \begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0, \end{cases} \\ \sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b} & \text{при } \begin{cases} a < 0, \\ b < 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} & \text{при } \begin{cases} a \geqslant 0, \\ b > 0, \end{cases} \\ \dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} & \text{при } \begin{cases} a < 0, \\ b < 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} (\sqrt{b})^2 & \text{при } b \geqslant 0, \\ -(\sqrt{-b})^2 & \text{при } b < 0; \end{cases}$$

$$|b| = \begin{cases} b & \text{при } b \geqslant 0, \\ -b & \text{при } b < 0. \end{cases}$$

а) При $b > 0 \quad (a \geqslant 0)$

$$A = \frac{\sqrt{ab}-b}{b} - \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}-(\sqrt{b})^2}{(\sqrt{b})^2} - \sqrt{\frac{a}{b}} =$$

$$= \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{b})^2} - \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = -1.$$

б) При $b < 0 \quad (a \leqslant 0)$

$$A = \frac{\sqrt{ab}+b}{b} - \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}+(-(\sqrt{-b})^2)}{-(\sqrt{-b})^2} - \sqrt{\frac{-a}{-b}} =$$

$$= \frac{\sqrt{-b}(\sqrt{-a}-\sqrt{-b})}{-(\sqrt{-b})^2} - \sqrt{\frac{-a}{-b}} = \frac{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}{-\sqrt{-b}} - \sqrt{\frac{-a}{-b}} =$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}+\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}\right) = -\frac{2\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}}.$$

$$A=\begin{cases}-1 & \text{при } \begin{cases}a\geqslant 0,\\ b>0,\end{cases}\\ -\dfrac{2\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}} & \text{при } \begin{cases}a\leqslant 0,\\ b<0.\end{cases}\end{cases}$$

Можно решить проще, если догадаться, что

$$A=\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}-\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}-\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}-|b|}{b}-\frac{\sqrt{ab}}{|b|}.$$

а) При $b>0, \quad a\geqslant 0$

$$A=\frac{\sqrt{ab}-b}{b}-\frac{\sqrt{ab}}{b}=\frac{\sqrt{ab}-b-\sqrt{ab}}{b}=-1.$$

б) При $b<0, \quad a\leqslant 0$

$$A=\frac{\sqrt{ab}+b}{b}+\frac{\sqrt{ab}}{b}=\frac{2\sqrt{ab}+b}{b}=2\frac{\sqrt{ab}}{b}+1=-2\sqrt{\frac{a}{b}}+1.$$

4. $$\frac{a^{\frac{4}{3}}+27\sqrt[3]{a}}{16-a^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{49}{27+a}-\frac{a^{\frac{1}{3}}+3}{a^{\frac{2}{3}}-3a^{\frac{1}{3}}+9}\right)+\frac{40-a^{\frac{2}{3}}}{4+\sqrt[3]{a}}=$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{3}}(a+27)}{16-a^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{49}{(3+a^{\frac{1}{3}})(9-3a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}})}-\frac{a^{\frac{1}{3}}+3}{a^{\frac{2}{3}}-3a^{\frac{1}{3}}+9}\right)+$$

$$+\frac{40-a^{\frac{2}{3}}}{4+\sqrt[3]{a}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}+3)(a^{\frac{2}{3}}-3a^{\frac{1}{3}}+9)}{(4-a^{\frac{1}{3}})(4+a^{\frac{1}{3}})}\times$$

$$\times\frac{49-(a^{\frac{1}{3}}+3)^2}{(3+a^{\frac{1}{3}})(9-3a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}})}+\frac{40-a^{\frac{2}{3}}}{4+a^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}+3)(a^{\frac{2}{3}}-3a^{\frac{1}{3}}+9)(7+a^{\frac{1}{3}}+3)(7-a^{\frac{1}{3}}-3)}{(4-a^{\frac{1}{3}})(4+a^{\frac{1}{3}})(3+a^{\frac{1}{3}})(9-3a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}})}+$$

$$+\frac{40-a^{\frac{2}{3}}}{4+a^{\frac{1}{3}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}(10+a^{\frac{1}{3}})(4-a^{\frac{1}{3}})}{(4-a^{\frac{1}{3}})(4+a^{\frac{1}{3}})}+\frac{40-a^{\frac{2}{3}}}{4+a^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{10a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}+40-a^{\frac{2}{3}}}{4+a^{\frac{1}{3}}}=\frac{10a^{\frac{1}{3}}+40}{4+a^{\frac{1}{3}}}=\frac{10(a^{\frac{1}{3}}+4)}{4+a^{\frac{1}{3}}}=10.$$

Решение тренировочной карточки 4

1. Упростите: $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$.

Так как

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)=$$
$$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=a^4+a^2b^2+b^4,$$

то

$$\frac{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}.$$

2. Упростите:

$$\left(\frac{a+a^{\frac{3}{4}}\sqrt{b}+\sqrt[4]{a}\cdot b^{\frac{3}{2}}+b^2}{\sqrt{a}+2a^{0,25}\cdot\sqrt{b}+b}(a^{\frac{1}{4}}+\sqrt{b})+\right.$$
$$\left.+\frac{3b^{0,5}(\sqrt{a}-b)}{\sqrt{a^{-0,5}}}(\sqrt[4]{a}-\sqrt{b})^{-1}\right)^{-0,(3)}:(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b})^{-1}=$$
$$=\left(\frac{a^{\frac{3}{4}}(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})+b^{\frac{3}{2}}(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{4}}\cdot b^{\frac{1}{2}}+b}\cdot(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})+\right.$$
$$\left.+\frac{3b^{0,5}(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}})}{a^{-\frac{0,5}{2}}(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}})}\right)^{-0,(3)}:(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})^{-1}=$$
$$=\left(\frac{(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{2}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})}{(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})^2}+\frac{3b^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})}{a^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-0,(3)}\times$$
$$\times(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})=$$
$$=\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{2}}+3a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})\right)^{-\frac{1}{3}}\times$$
$$\times(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})=$$

$$\boxed{\begin{array}{rrcr} - & 0,(3) & = & x \\ & 3,(3) & = & 10x \\ \hline - & 3,0 & = & -9x \\ & x & = & \dfrac{1}{3} \end{array}}$$

$$= \left((a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b) + 3a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}) \right)^{-\frac{1}{3}} \times$$

$$\times (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}) = \left((a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b + 3a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}}) \right)^{-\frac{1}{3}} \times$$

$$\times (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}) = \left((a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b) \right)^{-\frac{1}{3}} (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= \left((a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})^3 \right)^{-\frac{1}{3}} \cdot (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}) = (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})^{-1} (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}) = 1.$$

3. Вычислите: $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$.

Пусть

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} = a \\ \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = b \end{array} \right| \quad \text{тогда} \quad \begin{array}{l} a^3 = 9 + \sqrt{80} \\ b^3 = 9 - \sqrt{80} \end{array} \quad a^3 + b^3 = 18.$$

Так как

$a \cdot b = \sqrt[3]{(9 + \sqrt{80})(9 - \sqrt{80})} = \sqrt[3]{81 - 80} = 1,$

то $18 = (a+b)((a+b)^2 - 3 \cdot 1)$. Положим $a + b = t$, тогда

$18 = t(t^2 - 3) \Rightarrow t^3 - 3t - 18 = 0;$

$t^3 - 9t + 6t - 18 = 0;$

$t(t^2 - 9) + 6(t - 3) = 0;$

$(t - 3)(t^2 + 3t + 6) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} t - 3 = 0 \\ (t + 1{,}5)^2 + 3{,}75 = 0 \end{array} \right. \iff t = 3.$$

Итак, $a + b = 3$, значит,

$\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = 3$, что и требовалось вычислить.

4. Упростите:

$$A = \frac{2b\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{при } x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right), \text{ если } \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}.$$

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right)^2 - 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b} + 2\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) - 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 - 2 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}} + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2} = \frac{1}{2}\left|\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{a-b}{\sqrt{ab}}\right|.$$

Итак, $\sqrt{x^2-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a-b}{\sqrt{ab}} & \text{при } a \geqslant b > 0, \\ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}} & \text{при } b \geqslant a > 0. \end{cases}$

а) При $a \geqslant b > 0$

$$A = \frac{2b\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a-b}{\sqrt{ab}}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} - \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}} = \frac{2b(a-b)}{a+b-a+b} = a-b.$$

б) При $b > a > 0$

$$A = \frac{2b\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{b-a}{\sqrt{ab}}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} + \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}} = \frac{2b(b-a)}{a+b+a-b} = \frac{b}{a}(b-a).$$

$$A = \begin{cases} a-b & \text{при } a \geqslant b > 0, \\ \dfrac{b}{a}(b-a) & \text{при } b > a > 0. \end{cases}$$

Решение тренировочной карточки 5

1. Упростите:

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}\cdot t^{\frac{1}{2}}+t}-\frac{1-t}{x^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{3}{2}}}\right)\cdot\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{5}{2}}}{x^3-t^3}\right)^{-1}-\left(\frac{x}{t}\right)^{-\frac{3}{2}}=$$

$$=\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}\cdot t^{\frac{1}{2}}+t}-\frac{1-t}{(x^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}})(x-x^{\frac{1}{2}}\cdot t^{\frac{1}{2}}+t)}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}(1-x)}{x^3-t^3}\right)^{-1}-\left(\frac{x}{t}\right)^{-\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{(x^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}})-(1-t)}{(x^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}})(x-x^{\frac{1}{2}}\cdot t^{\frac{1}{2}}+t)}\cdot\frac{x^3-t^3}{x^{\frac{3}{2}}(1-x)}-\left(\frac{x}{t}\right)^{-\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{x-t-1+t}{x^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{(x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}})(x^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{3}{2}})}{x^{\frac{3}{2}}(1-x)}-\left(\frac{x}{t}\right)^{-\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{(x-1)(x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}})(x^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{3}{2}})}{(x^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{3}{2}})\cdot x^{\frac{3}{2}}(1-x)}-\left(\frac{x}{t}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{t^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{t^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{t^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}=\frac{-x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}=-1.$$

2. Упростите: $\dfrac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{2}{a^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}=$

$$=\frac{a^{-2}(a^{1-(-2)}-1)}{a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})}-1)}-\frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}-\frac{a^{-2}(a^2-1)}{a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})}+1)}=$$

$$=\frac{a^{-\frac{3}{2}}(a^3-1)}{a-1}-\frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}-\frac{a^{-\frac{3}{2}}(a^2-1)}{a+1}=$$

$$=a^{-\frac{3}{2}}(a^2+a+1)-2a^{-\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}(a-1)=$$

$$=a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}-2a^{-\frac{3}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=a^{\frac{1}{2}}.$$

3. Упростите: $\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)=$

$$=\left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right)^2\left(\frac{(\sqrt{a}-1)^2-(\sqrt{a}+1)^2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}\right)=$$

$$=\frac{(a-1)^2}{4a}\cdot\frac{(\sqrt{a}-1+\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1-\sqrt{a}-1)}{a-1}=$$

$$=\frac{(a-1)^2\cdot 2\sqrt{a}\cdot(-2)}{4a\cdot(a-1)}=-\frac{a-1}{\sqrt{a}}=a^{-\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}.$$

4. Упростите:

$$A=\frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}\cdot\left(1-\frac{1}{x-1}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\cdot\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}\cdot\frac{x-1-1}{x-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}}{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}\cdot\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}}\cdot\frac{x-2}{x-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}}\cdot\frac{x-2}{x-1}=$$

$$(|\sqrt{x-1}+1|=\sqrt{x-1}+1)$$

$$=\frac{|\sqrt{x-1}-1|+|\sqrt{x-1}+1|}{|\sqrt{x-1}-1|\cdot|\sqrt{x-1}+1|}\cdot\frac{x-2}{x-1}=$$

$$=\frac{|\sqrt{x-1}-1|+\sqrt{x-1}+1}{|x-1-1|}\cdot\frac{x-2}{x-1}=$$

$$=\frac{|\sqrt{x-1}-1|+\sqrt{x-1}+1}{|x-2|}\cdot\frac{x-2}{x-1},$$

$$|\sqrt{x-1}-1|=\begin{cases}\sqrt{x-1}-1 & \text{при } \sqrt{x-1}\geqslant 1,\\ 1-\sqrt{x-1} & \text{при } \sqrt{x-1}<1,\end{cases}$$

т. е.

$$|\sqrt{x-1}-1|=\begin{cases}\sqrt{x-1}-1 & \text{при } x\geqslant 2,\\ 1-\sqrt{x-1} & \text{при } 1\leqslant x<2.\end{cases}$$

Так как

$$1)\ \sqrt{a} < b \Longleftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0, \\ a \geqslant 0, \\ a < b^2. \end{cases} \qquad 2)\ \sqrt{a} > b \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \geqslant 0, \\ a > b^2 \end{cases} \\ \begin{cases} b < 0, \\ a \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

а) При $x > 2$

$$A_1 = \frac{|\sqrt{x-1} - 1| + \sqrt{x-1} + 1}{|x-2|} =$$

$$= \frac{\sqrt{x-1} - 1 + \sqrt{x-1} + 1}{x-2} = \frac{2\sqrt{x-1}}{x-2}.$$

б) При $1 \leqslant x < 2$

$$A_2 = \frac{|\sqrt{x-1} - 1| + \sqrt{x-1} + 1}{|x-2|} =$$

$$= \frac{1 - \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} + 1}{2-x} = \frac{2}{2-x}.$$

Итак, при $x > 2$

$$A = A_1 \cdot \frac{x-2}{x-1} = \frac{2\sqrt{x-1}}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x-1} = 2(x-1)^{-\frac{1}{2}},$$

а при $1 < x < 2$

$$A = A_2 \cdot \frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{2-x} \cdot \frac{x-2}{x-1} = -\frac{2}{x-1}.$$

$$A = \begin{cases} 2(x-1)^{-\frac{1}{2}} & \text{при } x > 2, \\ -2(x-1)^{-1} & \text{при } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Решение тренировочной карточки 6

1. Упростите:

$$\left(\frac{1-x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}-\frac{2}{x\cdot\sqrt{x}}+\frac{x^{-2}-x}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{x^{-2}(x^2-1)}{x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})}-1)}-\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^{-2}(1-x^{1+2})}{x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})}-1)}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{x^{-\frac{3}{2}}(x^2-1)}{x-1}-\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^{-\frac{3}{2}}(1-x^3)}{x-1}\right)\frac{x^2}{x^2+2}=$$

$$=(x^{-\frac{3}{2}}(x+1)-2x^{-\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}(x^2+x+1))\cdot\frac{x^2}{x^2+2}=$$

$$=(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}-2x^{-\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}})\cdot\frac{x^2}{x^2+2}=$$

$$=(-2x^{-\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}})\cdot\frac{x^2}{x^2+2}=-x^{-\frac{3}{2}}(2+x^2)\cdot\frac{x^2}{x^2+2}=-x^{\frac{1}{2}}.$$

2. Упростите:

$$\frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right)+\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}=$$

$$=\frac{(2-\sqrt[3]{x})(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{2+\sqrt[3]{x}}:\frac{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}+$$

$$+\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\cdot\frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x}+2)}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+2)}=$$

$$=\frac{(2-\sqrt[3]{x})(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{2+\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{2+\sqrt[3]{x}}{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}+$$

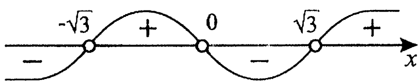
$$+\frac{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}-2)}{(\sqrt[3]{x}-2)\sqrt[3]{x}}=2-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}=2.$$

3. Упростите:

$$\frac{x^2-3}{\sqrt{\left(\frac{x^2+3}{2x}\right)^2-3}}=\frac{x^2-3}{\sqrt{\frac{x^4+6x^2+9-12x^2}{4x^2}}}=\frac{x^2-3}{\sqrt{\left(\frac{x^2-3}{2x}\right)^2}}=$$

$$=\frac{x^2-3}{\left|\frac{x^2-3}{2x}\right|}=A,\quad \text{где}\quad A=\begin{cases}2x; & (-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};+\infty)\\ -2x; & (-\infty;-\sqrt{3})\cup(0;\sqrt{3})\end{cases}.$$

Так как $t(x)=\dfrac{x^2-3}{2x}\ \left(x\neq\pm\sqrt{3}\right)$



, тогда

$$\frac{x^2-3}{\left|\frac{x^2-3}{2x}\right|}=2x\qquad \text{при}\quad x\in(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};+\infty);$$

$$\frac{x^2-3}{\left|\frac{x^2-3}{2x}\right|}=-2x\quad \text{при}\quad x\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(0;\sqrt{3}).$$

4. Упростите:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+8}-\frac{4a}{(a^{\frac{1}{3}}+2)^3}\right)\left(\frac{1+2a^{-\frac{1}{3}}}{1-2a^{-\frac{1}{3}}}\right)^2-\frac{12}{a+8}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\left((a^{\frac{1}{3}}+2)^2-4(a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4)\right)}{(a^{\frac{1}{3}}+2)^3(a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4)}\cdot\left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}+2)}{a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}-2)}\right)^2-\frac{12}{a+8}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a(a^{\frac{2}{3}}+4a^{\frac{1}{3}}+4-4a^{\frac{2}{3}}+8a^{\frac{1}{3}}-16)}{(a^{\frac{1}{3}}+2)^2(a+8)}\cdot\frac{(a^{\frac{1}{3}}+2)^2}{(a^{\frac{1}{3}}-2)^2}-\frac{12}{a+8}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\cdot(-3)(a^{\frac{1}{3}}-2)^2(a^{\frac{1}{3}}+2)^2}{(a^{\frac{1}{3}}+2)^2(a+8)(a^{\frac{1}{3}}-2)^2}-\frac{12}{a+8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-3a}{a+8}-\frac{12}{a+8}=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{a}{a+8}+\frac{8}{a+8}\right)=-\frac{3}{2}\cdot\frac{a+8}{a+8}=-1{,}5.$$

Решение тренировочной карточки 7

1. Вычислите

$$\frac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}=\frac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{64\cdot 3}}+7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{27\cdot 3}}}{\sqrt[3]{2^2\cdot 3\sqrt[3]{2^3\cdot 3}+6\sqrt[3]{125\cdot 3}}}=$$

$$=\frac{5\sqrt[3]{16\sqrt[3]{3}}+7\sqrt[3]{27\cdot 2\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[3]{2^3\cdot 3\sqrt[3]{3}+30\sqrt[3]{3}}}=\frac{10\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}+21\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[3]{27\cdot 2\sqrt[3]{3}}}=$$

$$=\frac{31\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}}{3\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}}=\frac{31}{3}=10\frac{1}{3}.$$

2. Упростите и вычислите при $a=9,\ b=4$:

$$\left(\frac{2\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}{ab^{-\frac{1}{6}}-b^{\frac{5}{6}}}\right)^{-1}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}\right)=$$

$$=\left(\frac{2\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}{b^{-\frac{1}{6}}(a-b)}\right)^{-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{a}-(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}})^2}{(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{a\cdot b}+\sqrt[6]{b})}=$$

$$=\frac{b^{-\frac{1}{6}}(a-b)}{2\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}\cdot\frac{(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{b^{-\frac{1}{6}}(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})(2\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})(-\sqrt[6]{b})}{(2\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=$$

$$=\sqrt{b}-\sqrt{a}=f(a,b).$$

При $a=9,\ b=4$ имеем $f(9;4)=\sqrt{4}-\sqrt{9}=2-3=-1$.

3. Упростите и вычислите при $a=\sqrt{2},\ b=\sqrt[3]{3}$:

$$\sqrt{10a+2\sqrt{25a^2-b^2}}-\sqrt{10a-2\sqrt{25a^2-b^2}}-2\sqrt{5a-b}=$$

$$=\sqrt{5a+b+2\sqrt{(5a+b)(5a-b)}+5a-b}-$$

$$-\sqrt{5a+b-2\sqrt{(5a+b)(5a-b)}+5a-b}-2\sqrt{5a-b}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{5a+b}+\sqrt{5a-b})^2}-\sqrt{(\sqrt{5a+b}-\sqrt{5a-b})^2}-2\sqrt{5a-b}=$$

$$=\left|\sqrt{5a+b}+\sqrt{5a-b}\right|-\left|\sqrt{5a+b}-\sqrt{5a-b}\right|-2\sqrt{5a-b}=$$

$$=\sqrt{5a+b}+\sqrt{5a-b}-\sqrt{5a+b}+\sqrt{5a-b}-2\sqrt{5a-b}=0$$

$(5a+b\geqslant 5a-b,\ \ b\geqslant 0)$.

4. Вычислите при $x=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$: $\quad f(x)=\dfrac{4x+x^2}{2+\sqrt{4+x}}-\dfrac{4x-x^2}{2-\sqrt{4-x}}$.

$$f(x)=x\left(\frac{4+x}{2+\sqrt{4+x}}-\frac{4-x}{2-\sqrt{4-x}}\right)=$$
$$=x\left(\frac{(4+x)\left(2-\sqrt{4+x}\right)}{4-4-x}-\frac{(4-x)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{4-4+x}\right)=$$
$$=-\left(8+2x-\left(\sqrt{4+x}\right)^3+8-2x+\left(\sqrt{4-x}\right)^3\right)=$$
$$=\left(\sqrt{4+x}\right)^3-\left(\sqrt{4-x}\right)^3-16.$$

При $x=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$$\sqrt{4+\frac{\sqrt{15}}{2}}=\sqrt{\frac{16+2\sqrt{15}}{4}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{15}+1\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{15}+1}{2};$$
$$\sqrt{4-\frac{\sqrt{15}}{2}}=\sqrt{\frac{16-2\sqrt{15}}{4}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{15}-1\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{15}-1}{2}.$$
$$f\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{15}+1}{2}-\frac{\sqrt{15}-1}{2}\right)\times$$
$$\times\left(\left(\frac{\sqrt{15}+1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{15}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}-1}{2}+\left(\frac{\sqrt{15}-1}{2}\right)^2\right)-16=$$
$$=1\cdot\left(\frac{15+2\sqrt{15}+1}{4}+\frac{15-1}{4}+\frac{15-2\sqrt{15}+1}{4}\right)-16=$$
$$=8+\frac{14}{4}-16=11{,}5-16=-4{,}5.$$

Возможно другое решение. Так как
$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$, то

$$\left(\frac{\sqrt{15}+1}{2}\right)^3-\left(\frac{\sqrt{15}-1}{2}\right)^3-16=\left(\frac{\sqrt{15}+1}{2}-\frac{\sqrt{15}-1}{2}\right)^3+$$
$$+3\cdot\frac{\sqrt{15}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}-1}{2}\left(\frac{\sqrt{15}+1}{2}-\frac{\sqrt{15}-1}{2}\right)-16=$$
$$=1+3\cdot\frac{7}{2}-16=-4{,}5.$$

Решение тренировочной карточки 8

1. Упростите и вычислите при $b = 8{,}5$:

$$f(b) = \frac{\sqrt[3]{b + 4\sqrt{b-4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{b-4} + 2}}{\sqrt[3]{b - 4\sqrt{b-4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{b-4} - 2}} \cdot \frac{b - 4\sqrt{b-4}}{2}.$$

Так как

$$b + 4\sqrt{b-4} = b - 4 + 2 \cdot 2\sqrt{b-4} + 4 = \left(\sqrt{b-4} + 2\right)^2,$$
$$b - 4\sqrt{b-4} = b - 4 - 2 \cdot 2\sqrt{b-4} + 4 = \left(\sqrt{b-4} - 2\right)^2,$$

то

$$f(b) = \frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{b-4} + 2\right)^2} \sqrt[3]{\sqrt{b-4} + 2}}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{b-4} - 2\right)^2} \sqrt[3]{\sqrt{b-4} - 2}} \cdot \frac{b - 4\sqrt{b-4}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{b-4} + 2\right)^3}}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{b-4} - 2\right)^3}} \frac{b - 4\sqrt{b-4}}{2} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{b-4} + 2\right)\left(\sqrt{b-4} - 2\right)^2}{2\left(\sqrt{b-4} - 2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{b-4} + 2)(\sqrt{b-4} - 2) = \frac{1}{2}(b - 4 - 4) = \frac{1}{2}(b - 8).$$

$$f(8{,}5) = \frac{1}{2}(8{,}5 - 8) = \frac{1}{4}.$$

2. Вычислите при $x = 1{,}01$:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{(1 + 3x) + \sqrt{x}(3 + x)} - \sqrt[3]{\sqrt{x}(3 + x) - (3x + 1)}}.$$

Вычислим $\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}$.

Пусть $\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} = a$, $\sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}} = b$, тогда

$$\left.\begin{aligned} 38 + 17\sqrt{5} &= a^3 \\ 38 - 17\sqrt{5} &= b^3 \end{aligned}\right| \quad a^3 + b^3 = 76;$$

$$a \cdot b = \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}} = \sqrt[3]{38^2 - (17\sqrt{5})^2} =$$

$$= \sqrt[3]{1444 - 1445} = -1;$$

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)=$$
$$=(a+b)\left((a+b)^2+3\right)=76.$$

Пусть $a+b=t$; $\quad t^3+3t-76=0$; $\quad t=4$.

Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} t^3+3t-76 & t-4 \\ \cline{2-2} -\underline{t^3-4t^2} & t^2+4t+19 \\ 4t^2+3t-76 & \\ -\underline{4t^2-16t} & \\ 19t-76 & \\ -\underline{19t-76} & \end{array} \qquad \mathcal{D}<0$$

Значит, $t=4$, то есть $a+b=4$.

Рассмотрим

$$\sqrt[3]{(1+3x)+\sqrt{x}(3+x)}-\sqrt[3]{\sqrt{x}(3+x)-(1+3x)}=$$
$$=\sqrt[3]{x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1}-\sqrt[3]{x\sqrt{x}-3x+3\sqrt{x}-1}=$$
$$=\sqrt[3]{(\sqrt{x}+1)^3}-\sqrt[3]{(\sqrt{x}-1)^3}=\sqrt{x}+1-(\sqrt{x}-1)=2.$$

Тогда $f(x)=\dfrac{4}{2}=2$, следовательно $f(1{,}01)=2$.

3. Вычислите: $\sqrt[3]{5+\dfrac{11\sqrt{13}}{8}}+\sqrt[3]{5-\dfrac{11\sqrt{13}}{8}}$.

$$\left.\begin{array}{l} a=\sqrt[3]{5+\dfrac{11\sqrt{13}}{8}} \\ b=\sqrt[3]{5-\dfrac{11\sqrt{13}}{8}} \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l} a^3=5+\dfrac{11\sqrt{13}}{8} \\ b^3=5-\dfrac{11\sqrt{13}}{8} \end{array}\right| \quad a^3+b^3=10.$$

$$a\cdot b=\sqrt[3]{\left(5+\frac{11\sqrt{13}}{8}\right)\left(5-\frac{11\sqrt{13}}{8}\right)}=\sqrt[3]{25-\frac{121\cdot 13}{8^2}}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{25\cdot 64-121\cdot 13}}{4}=\frac{\sqrt[3]{1600-1573}}{4}=\frac{\sqrt[3]{27}}{4}=\frac{3}{4}.$$
$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)=$$
$$=(a+b)\left((a+b)^2-3\cdot\frac{3}{4}\right)=10.$$

$$a+b=t; \quad t\left(t^2-\frac{9}{4}\right)=10; \quad 4t^3-9t-40=0$$

$$f(t)=4t^3-9t-40; \quad d=\frac{d_1}{d_2}.$$

Так как $\begin{aligned} d_1 &= \pm1; \pm2; \pm4; \pm5; \pm8; \pm10; \pm20; \pm40; \\ d_2 &= \pm1; \pm2; \pm4, \end{aligned}$

$$f(2{,}5)=\frac{4\cdot5^3}{2^3}-\frac{9\cdot5}{2}-40=\frac{125}{2}-22{,}5-40=62{,}5-22{,}5-40=0.$$

Тогда

$$\begin{array}{l|l} \;\;4t^3-9t-40 & 2t-5 \\ \cline{2-2} -\underline{4t^3-10t^2} & 2t^2+5t+8 \\ \qquad 10t^2-9t-40 & \\ \quad -\underline{10t^2-25t} & \qquad\qquad \mathcal{D}<0 \\ \qquad\quad 16t-40 & \\ \qquad -\underline{16t-40} & \end{array}$$

Значит, $a+b=2{,}5$.

4. Вычислите при $t=\dfrac{5\sqrt{11}}{2}$:

$$f(t)=\frac{9t+t^2}{3+\sqrt{9+t}}+\frac{9t-t^2}{3-\sqrt{9-t}}+6t.$$

$$f(t)=t\left(\frac{9+t}{3+\sqrt{9+t}}+\frac{9-t}{3-\sqrt{9-t}}+6\right)=$$

$$=t\left(\frac{(9+t)\left(3-\sqrt{9+t}\right)}{9-9-t}+\frac{(9-t)\left(3+\sqrt{9-t}\right)}{9-9+t}+6\right)=$$

$$=(9-t)\left(3+\sqrt{9-t}\right)-(9+t)\left(3-\sqrt{9+t}\right)+6t=$$

$$=27-3t+\left(\sqrt{9-t}\right)^3-27-3t+\left(\sqrt{9+t}\right)^3+6t=$$

$$=\left(\sqrt{9-t}\right)^3+\left(\sqrt{9+t}\right)^3.$$

$$\sqrt{9-\frac{5\sqrt{11}}{2}}=\sqrt{\frac{18-5\sqrt{11}}{2}}=\sqrt{\frac{36-10\sqrt{11}}{4}}=$$

$$=\sqrt{\frac{5^2-2\cdot5\sqrt{11}+11}{4}}=\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{11}}{2}\right)^2}=\frac{5-\sqrt{11}}{2};$$

$$\sqrt{9+\frac{5\sqrt{11}}{2}}=\sqrt{\frac{18+5\sqrt{11}}{2}}=\sqrt{\frac{36+10\sqrt{11}}{4}}=$$

$$=\sqrt{\frac{5^2+2\cdot 5\sqrt{11}+11}{4}}=\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{11}}{2}\right)^2}=\frac{5+\sqrt{11}}{2}$$

$$f\left(\frac{5\sqrt{11}}{2}\right)=\left(\frac{5-\sqrt{11}}{2}\right)^3+\left(\frac{5+\sqrt{11}}{2}\right)^3=$$

$$=\left(\frac{5-\sqrt{11}}{2}+\frac{5+\sqrt{11}}{2}\right)\times$$

$$\times\left(\left(\frac{5-\sqrt{11}}{2}\right)^2-\frac{5-\sqrt{11}}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{11}}{2}+\left(\frac{5+\sqrt{11}}{2}\right)^2\right)=$$

$$=5\left(\frac{25-10\sqrt{11}+11}{4}-\frac{25-11}{4}+\frac{25+10\sqrt{11}+11}{4}\right)=$$

$$=5\left(9-\frac{7}{2}+9\right)=5\cdot 14{,}5=72{,}5.$$

Возможно другое решение. Так как
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, то

$$f\left(\frac{5\sqrt{11}}{2}\right)=\left(\frac{5-\sqrt{11}}{2}\right)^3+\left(\frac{5+\sqrt{11}}{2}\right)^3=$$

$$=\left(\frac{5-\sqrt{11}}{2}+\frac{5+\sqrt{11}}{2}\right)^3-$$

$$-3\cdot\frac{5-\sqrt{11}}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{11}}{2}\cdot\left(\frac{5-\sqrt{11}}{2}+\frac{5+\sqrt{11}}{2}\right)=$$

$$=125-3\cdot\frac{7}{2}\cdot 5=125-52{,}5=72{,}5$$

Зачетные карточки

Карточка 1

Упростите (1–4):

1. $$\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}-\frac{x+1}{x^2-4x+3}.$$

2. $$\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right).$$

3. $$A=\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} \quad \text{при} \quad x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right).$$

4. $$\frac{3}{y-1}+\left(\frac{y^{-\frac{1}{3}}-1}{y^{-\frac{1}{3}}+1}\right)^2\left(\frac{y}{y-1}+\frac{4y}{(1-y^{\frac{1}{3}})^3}\right).$$

Карточка 2

1. Упростите: $$\frac{\sqrt{(2p+1)^3}+\sqrt{8p^3-12p^2+6p-1}}{\sqrt{4p+2\sqrt{4p^2-1}}}.$$

2. Проверьте: $$\sqrt[3]{\frac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

3. Упростите:

$$\left(\frac{b-1}{\sqrt{1-b^2}-1+b}+\frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{1+b}-\sqrt{1-b}}\right)\left(\frac{1-b}{b}+\sqrt{\frac{1}{b^2}-1}\right)\times$$
$$\times\frac{b}{1-b+\sqrt{1-b^2}}.$$

4. Упростите:

$$\frac{1}{2\sqrt{2b}+1}+$$
$$+\left(\frac{(2\sqrt[3]{b^2}-1)^2}{8b^2\cdot\sqrt[3]{b^2}-2\sqrt{2b}\cdot\sqrt[3]{b^2}}\right)^{-1}\left(\frac{6}{1-8b^2}+\frac{1}{2b\cdot\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^2}}\right).$$

Карточка 3

1. Упростите:

$$\frac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\cdot\frac{\sqrt{b+2}}{\sqrt{b-2}}.$$

2. Упростите:

$$\left(\frac{1+\sqrt{y}}{\sqrt{1+y}}-\frac{\sqrt{1+y}}{1+\sqrt{y}}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{y}}{\sqrt{1+y}}+\frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{y}-1}\right)^2.$$

3. Вычислите: $\sqrt[3]{15\sqrt{3}+26}\cdot\left(\sqrt{3}-2\right).$

4. Упростите: $\dfrac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}.$

Карточка 4

1. Упростите:

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{t}}\right)\left(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}+2\right).$$

2. Вычислите: $\sqrt{\left(\dfrac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}+3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}:(3+\sqrt[6]{108}).$

3. Упростите: $\dfrac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}$ при $b\geqslant 2$.

4. Упростите:

$$\left(\frac{9}{a+8}-\frac{a^{\frac{1}{3}}+2}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4}\right)\cdot\frac{a^{\frac{4}{3}}+8a^{\frac{1}{3}}}{1-a^{\frac{2}{3}}}+\frac{5-a^{\frac{2}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}}.$$

Карточка 5

1. Вычислите: $\left(\dfrac{\sqrt[4]{8}+2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}}-\sqrt[3]{4}\right):\left(\dfrac{\sqrt[4]{8}-2}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{2}}-3\sqrt[12]{128}\right)^{\frac{1}{2}}.$

2. Вычислите: $(7-4\sqrt{3})(2+\sqrt{3})(26-15\sqrt{3})^{-\frac{1}{3}}.$

3. Упростите:

$$\sqrt{\frac{2a+2\sqrt{a^2-9}}{2a-2\sqrt{a^2-9}}}.$$

4. Упростите:

$$\left(\sqrt[3]{a}-\left(\frac{b^2-a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt[3]{a}}+b\sqrt[3]{a}\right):(b+\sqrt[6]{b^3\cdot a^2})\right)^{-2} \quad \text{при} \begin{cases} a>0, \\ b>0. \end{cases}$$

Карточка 6

1. Упростите:

$$\left(\frac{(1-ab)(\sqrt[3]{ab}-1)}{1+\sqrt{ab}}-(1-\sqrt[3]{ab})\sqrt{ab}\right)^{-1}\left(\frac{1+ab}{1+\sqrt[3]{ab}}-1\right).$$

2. Вычислите:

$$\left(\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}}-\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}\right)\cdot\sqrt[3]{1-2\sqrt{6}}.$$

3. Упростите: $A=(a+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}+(a-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$ при $x=4(a-1)$.

4. Упростите:

$$\left(\frac{a\sqrt{a}-a}{\left(\frac{a^{0,75}-1}{a^{0,25}-1}-\sqrt{a}\right)\left(\frac{a^{0,75}+1}{a^{0,25}+1}-\sqrt{a}\right)}\right)^3+$$

$$+\left(\frac{(1+\sqrt[3]{a}):(a+\sqrt[3]{a^2})-1}{1-\sqrt[3]{a}}-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-4,5}.$$

Карточка 7

1. Упростите при $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, если $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0: \end{cases}$

$$A = \frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}}.$$

2. Упростите:

$$\frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}} + \frac{a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{6}}} \cdot \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}} - b} - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}}}\right).$$

3. Вычислите:

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^4.$$

4. Вычислите: $\sqrt[3]{37+30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{37-30\sqrt{3}}$.

Карточка 8

1. Вычислите:

$$\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}} + \frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^4.$$

2. Упростите:

$$\left(\frac{a\sqrt{a} - 3\sqrt{a} + (a-1)\cdot\sqrt{a-4} + 2}{a\sqrt{a} - 3\sqrt{a} + (a-1)\cdot\sqrt{a-4} - 2}\right)^{-2} \cdot \frac{a + \sqrt{a} - 2}{a - \sqrt{a} - 2}.$$

3. Упростите:

$$\frac{8a}{3} - \left(\frac{3a^{-\frac{1}{3}} + 2}{3a^{-\frac{1}{3}} - 2}\right)^2 : \left(\frac{4}{(2a^{\frac{1}{3}} - 3)^3} - \frac{1}{8a - 27}\right).$$

4. Вычислите:

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}}.$$

6

Решения

Решение проверочной работы 1

Вычислите:

1. $\sqrt{1{,}25}+1{,}5\sqrt{80}-\dfrac{1}{14}\sqrt{245}-\sqrt{180}=$

$=\sqrt{\dfrac{5}{4}}+1{,}5\sqrt{16\cdot5}-\dfrac{1}{14}\sqrt{5\cdot49}-\sqrt{5\cdot36}=$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{5}+1{,}5\cdot4\cdot\sqrt{5}-\dfrac{7}{14}\cdot\sqrt{5}-6\sqrt{5}=$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{5}+6\sqrt{5}-\dfrac{1}{2}\sqrt{5}-6\sqrt{5}=0.$

2. $\sqrt{51{,}5^3+51{,}5^2\cdot26{,}5-51{,}5\cdot26{,}5^2-26{,}5^3}=$

$=\sqrt{51{,}5^2(51{,}5+26{,}5)-26{,}5^2(51{,}5+26{,}5)}=$

$=\sqrt{(51{,}5+26{,}5)(51{,}5^2-26{,}5^2)}=\sqrt{(51{,}5+26{,}5)^2(51{,}5-26{,}5)}=$

$=(51{,}5+26{,}5)\sqrt{51{,}5-26{,}5}=78\cdot\sqrt{25}=5\cdot78=390.$

3. $\sqrt{\left(\dfrac{79^3-41^3}{38}+79\cdot41\right):(133{,}5^2-58{,}5^2)}=$

$=\sqrt{\dfrac{(79-41)(79^2+79\cdot41+41^2)}{38}+79\cdot41}\times$

$\times\sqrt{\dfrac{1}{(133{,}5+58{,}5)(133{,}5-58{,}5)}}=$

$$= \sqrt{(79^2 + 2 \cdot 79 \cdot 41 + 41^2)\frac{1}{192 \cdot 75}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(79+41)^2}{64 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 25}} = \frac{120}{8 \cdot 3 \cdot 5} = 1.$$

4. $$\sqrt{90 + \sqrt{\frac{31\left(57^2-26^2\right)}{83}}} = \sqrt{90 + \sqrt{\frac{31\,(57+26)\,(57-26)}{83}}} =$$

$$= \sqrt{90 + \sqrt{31 \cdot 31}} = \sqrt{90 + 31} = \sqrt{121} = 11.$$

5. $$\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{48}} + \frac{1}{66}\sqrt{363} - \frac{1}{68}\sqrt{158^2 - 131^2}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt{\frac{49}{48}} + \frac{1}{66}\sqrt{3 \cdot 121} - \frac{1}{68}\sqrt{(158+131)\,(158-131)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{11}{66}\sqrt{3} - \frac{1}{68}\sqrt{289 \cdot 27}} =$$

$$= \sqrt{\frac{7\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{17 \cdot 3}{68}\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt{3}\left(\frac{7}{12} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\sqrt{3} \cdot 0} = 0.$$

6. $$\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(7-\sqrt{10}\right)\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)}{\dfrac{36^2-28^2}{27^2+2 \cdot 27 \cdot 5+5^2}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(5 - \sqrt{5 \cdot 2} + 2\right)\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)}{(36-28)\,(36+28)} \cdot (27+5)^2 =$$

$$= \frac{\left(\left(\sqrt{5}\right)^3 + \left(\sqrt{2}\right)^3\right)\left(\left(\sqrt{5}\right)^3 - \left(\sqrt{2}\right)^3\right)}{8 \cdot 64} \cdot 32^2 = \frac{\left(5^3 - 2^3\right) \cdot 32}{8 \cdot 2} =$$

$$= (125 - 8) \cdot 2 = 234.$$

7. $$\frac{11\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2}{12\left(3-2\sqrt{2}\right)}=\frac{11(\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right))^2}{12\left(2-2\sqrt{2}+1\right)}=$$
$$=\frac{11\cdot 3\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{12\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\frac{11}{4}=2{,}75.$$

8. $$\sqrt{\frac{\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{24}-\sqrt{8}}}=$$
$$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}\,(2+1)\right)^2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}=$$
$$=\sqrt{\frac{2\cdot 3^2\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}}=\sqrt{3^2}=3.$$

9. $$\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{72}}{3\left(2\sqrt{6}-\sqrt{16}\right)\left(\sqrt{16}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)6\sqrt{2}}{3\left(2\sqrt{6}-4\right)(4+1)}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{6}-2\right)\cdot 6}{6\left(\sqrt{6}-2\right)\cdot 5}=\frac{1}{5}.$$

10. $$\frac{\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{60}-\sqrt{12}-\sqrt{45}+3\right)}{2-\sqrt{3}}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{15}-2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+3\right)}{2-\sqrt{3}}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)\left(2\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)\right)}{2-\sqrt{3}}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{2-\sqrt{3}}=$$
$$=(\sqrt{15}+\sqrt{3})(\sqrt{15}-\sqrt{3})=15-3=12.$$

Решение проверочной работы 2

Упростите:

1. $$\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+4\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=$$
$$=\frac{(\sqrt{x}+1)^2-(\sqrt{x}-1)^2+4\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)\,(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)\,(\sqrt{x}-1)}\cdot\frac{x-1}{\sqrt{x}}=$$
$$=\frac{x+2\sqrt{x}+1-x+2\sqrt{x}-1+4\sqrt{x}\,(x-1)}{x-1}\cdot\frac{x-1}{\sqrt{x}}=$$
$$=\frac{4\sqrt{x}\,(1+x-1)\,(x-1)}{(x-1)\,\sqrt{x}}=$$
$$=4x \quad \text{при} \quad \begin{cases} x>0,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

2. $$\left(\frac{\sqrt{x^2-4}-x}{\sqrt{x^2-4}+x}-\frac{\sqrt{x^2-4}+x}{\sqrt{x^2-4}-x}\right):\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)^2-\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)^2}{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)}\cdot\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}=$$
$$=\frac{x^2-4-2x\sqrt{x^2-4}+x^2-x^2+4-2x\sqrt{x^2-4}-x^2}{x^2-4-x^2}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}=\frac{-4x\sqrt{x^2-4}}{-4}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4}}=x\sqrt{x} \quad \text{при} \quad x>2.$$

3. $$\left(\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-(x+y)\right)\cdot\sqrt{xy}=$$
$$=\left(\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})\,(x+\sqrt{xy}+y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-(x+y)\right)\cdot\sqrt{xy}=$$
$$=(x+\sqrt{xy}+y-x-y)\cdot\sqrt{xy}=\sqrt{xy}\cdot\sqrt{xy}=xy \quad \text{при} \quad \begin{cases} x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ x\neq y.\end{cases}$$

4. $$\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{a})^2}{a-b}-(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-1}\right):\frac{4\left(\sqrt{a}\right)^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-2\sqrt{a})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{4\left(\sqrt{a}\right)^3}=$$

$$=\left(\frac{(3\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{4\left(\sqrt{a}\right)^3}=$$

$$=-\left(\frac{3\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{4a\sqrt{a}}=$$

$$=-\frac{3\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{4a\sqrt{a}}=$$

$$=-\frac{4\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)4a\sqrt{a}}=-\frac{1}{a}\quad\text{при}\quad\begin{cases}a>0\\ b\geqslant 0\\ a\neq b\end{cases}$$

5. $$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}\right)\times$$

$$\times\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}-\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\cdot\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}-\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\cdot\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}-\frac{1}{x}\right)=$$

$$= \frac{1+x+2\sqrt{1-x^2}+1-x}{1+x-1+x} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{2x} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \frac{1}{x}\right) = A, \text{ где}$$

$$A = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 < x < 1, \\ \dfrac{x^2 - 2\sqrt{1-x^2} - 2}{x^2} & \text{при } -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

а) При $0 < x \leqslant x$ $\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \dfrac{1}{x}\right) =$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \frac{1-x^2-1}{x^2} = -1.$$

б) При $-1 \leqslant x < 0$ $\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \dfrac{1}{x}\right) =$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x} \cdot \left(-\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}\right) =$$

$$= -\frac{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}+1}{x^2} = \frac{x^2-2\sqrt{1-x^2}-2}{x^2}.$$

6. $\left(\dfrac{4a - \frac{9}{a}}{2\sqrt{a} - \frac{3}{\sqrt{a}}} + \dfrac{a - 4 + \frac{3}{a}}{\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}}\right)^2 =$

$$= \left(\frac{\frac{4a^2-9}{a}}{\frac{2a-3}{\sqrt{a}}} + \frac{\frac{a^2-4a+3}{a}}{\frac{a-1}{\sqrt{a}}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(2a+3)(2a-3)}{a} \cdot \frac{\sqrt{a}}{2a-3} + \frac{(a-1)(a-3)}{a} \cdot \frac{\sqrt{a}}{a-1}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{2a+3}{\sqrt{a}} + \frac{a-3}{\sqrt{a}}\right)^2 = \left(\frac{2a+3+a-3}{\sqrt{a}}\right)^2 = \left(\frac{3a}{\sqrt{a}}\right)^2 =$$

$$= (3\sqrt{a})^2 = 9a \quad \text{при} \quad \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ a \neq 1{,}5. \end{cases}$$

7. $$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\,(a-b)}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{ab}}{a-b}=$$
$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\,(a-b)}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{ab}}{a-b}=$$
$$=\frac{a-\sqrt{ab}+b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{ab}}{a-b}=$$
$$=\frac{a-\sqrt{ab}+b+2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})-\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=$$
$$=\frac{a-\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ba}-2b-\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=$$
$$=\frac{a-b}{a-b}=1\quad\text{при}\quad\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0,\\ a\neq b.\end{cases}$$

8. $$\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{x^2+4x+4-8x}}{\frac{x-2}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}\cdot\sqrt{x}=$$
$$=\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}\cdot\sqrt{x}=\frac{|x-2|\cdot\sqrt{x}}{x-2}=\begin{cases}\sqrt{x}, & x>2\\ -\sqrt{x}, & 0<x<2\end{cases}.$$

9. При $x>a>0$ имеем:
$$\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}\right):\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=$$
$$=\sqrt{x-a}\left(\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}\right):\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}=$$
$$=\frac{\sqrt{x-a}\,(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a})}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a})\,(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a})}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{x^2-a^2}}=$$
$$=\frac{\sqrt{x-a}\cdot 2\sqrt{x+a}}{x+a-x+a}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{x^2-a^2}}=$$
$$=\frac{2\sqrt{x^2-a^2}\cdot|a|}{2a\sqrt{x^2-a^2}}=A,\ \text{где}\ A=\begin{cases}1, & a>0,\\ -1, & a<0.\end{cases}$$

10. $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}+\dfrac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2\left(ab^{-1}+1\right)^2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1-ba^{-1}}{1+ba^{-1}}}=$

$$=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\frac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2\left(\frac{a+b}{b}\right)^2}\cdot\frac{1+ba^{-1}}{1+ba^{-1}+1-ba^{-1}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\frac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{(a+b)^2}\cdot\frac{\frac{a+b}{a}}{2}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\frac{2a\sqrt{a^2-b^2}\,(a+b)}{(a+b)^2\cdot 2a}=$$

$$=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}=\sqrt{\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}}+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{|a+b|}+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}=A,$$

где $A=\begin{cases}2\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}, & a\geqslant b>-a,\\ 0, & a\leqslant b<-a.\end{cases}$

Можно записать по другому.

Если $\begin{cases}a^2-b^2\geqslant 0,\\ a+b>0,\end{cases}$ то $a\geqslant |b|,\quad a\neq -b,$

тогда $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{|a+b|}+\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}=2\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}.$

Если $\begin{cases}a^2-b^2\geqslant 0,\\ a+b<0,\end{cases}$ то $a\leqslant -|b|,\quad a\neq -b,$

тогда $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{|a+b|}+\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}=0.$

Решение проверочной работы 3

Вычислите:

1. $$\frac{18^2\cdot 12^3\cdot 8^2}{24^3\cdot 6^2}=\frac{\left(2\cdot 3^2\right)^2\left(2^2\cdot 3\right)^3\left(2^3\right)^2}{\left(2^3\cdot 3\right)^3\left(2\cdot 3\right)^2}=\frac{2^2\cdot 3^4\cdot 2^6\cdot 3^3\cdot 2^6}{2^9\cdot 3^3\cdot 2^2\cdot 3^2}=$$
$$=\frac{2^{14}\cdot 3^7}{2^{11}\cdot 3^5}=2^3\cdot 3^2=72.$$

2. $$\frac{72^3\cdot 48^3}{36^5\cdot 16^3}=\frac{\left(2^3\cdot 3^2\right)^3\left(2^4\cdot 3\right)^3}{\left(2^2\cdot 3^2\right)^5\left(2^4\right)^3}=\frac{2^9\cdot 3^6\cdot 2^{12}\cdot 3^3}{2^{10}\cdot 3^{10}\cdot 2^{12}}=$$
$$=\frac{2^{21}\cdot 3^9}{2^{22}\cdot 3^{10}}=\frac{1}{6}.$$

3. $$\frac{\left(9\cdot 16^{n-1}+16^n\right)^2}{\left(4^{n-1}+4^{n-2}\right)^4}=\frac{\left(16^{n-1}\left(9+16\right)\right)^2}{\left(4^{n-2}\left(4^{n-1-n+2}+1\right)\right)^4}=\frac{16^{2n-2}\cdot 25^2}{4^{4n-8}\cdot 5^4}=$$
$$=\frac{\left(4^2\right)^{2n-2}\cdot\left(5^2\right)^2}{4^{4n-8}\cdot 5^4}=\frac{4^{4n-4}\cdot 5^4}{4^{4n-8}\cdot 5^4}=4^{4n-4-4n+8}=4^4=256.$$

4. $$\left(\frac{7^4}{15^2}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^6\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^5=\frac{7^{12}}{15^6}\cdot\frac{5^6}{7^6}\cdot\frac{3^5}{7^5}=\frac{7^{12}}{7^{11}}\cdot\frac{5^6\cdot 3^5}{5^6\cdot 3^6}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}.$$

5. $$\frac{\left(4\cdot 3^{22}+7\cdot 3^{21}\right)\cdot 57}{\left(19\cdot 27^4\right)^2}=\frac{3^{21}\left(4\cdot 3+7\right)\cdot 3\cdot 19}{19^2\cdot 27^8}=$$
$$=\frac{3^{22}}{\left(3^3\right)^8}=\frac{3^{22}}{3^{24}}=\frac{1}{9}.$$

6. $$\frac{5\left(3\cdot 7^{15}-19\cdot 7^{14}\right)}{7^{16}+3\cdot 7^{15}}=\frac{5\cdot 7^{14}\left(3\cdot 7-19\right)}{7^{15}\left(7+3\right)}=\frac{5\cdot 2}{7\cdot 10}=\frac{1}{7}.$$

7. $$\frac{6\cdot 2^8-9\cdot 2^{10}+3\cdot 2^{12}}{4\cdot 2^{10}+4\cdot 2^{12}-8\cdot 2^{11}}=$$
$$=\frac{2^8\left(6-9\cdot 2^2+3\cdot 2^4\right)}{4\cdot 2^{10}\left(1+2^2-2\cdot 2\right)}=\frac{6-36+48}{4\cdot 2^2}=$$
$$=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}.$$

8. $\left(3^{n+2} - 2\cdot 3^{n}\right) : 3^{n-1} - 36^{n+1} : 6^{2n-1} =$
$= 3^{n+2-n+1} - 2\cdot 3^{n-n+1} - 6^{2n+2} : 6^{2n-1} = 3^{3} - 2\cdot 3 - 6^{2n+2-2n+1} =$
$= 27 - 6 - 6^{3} = 21 - 216 = -195.$

9. Упростите $\dfrac{a^{3n} - a^{n-2}}{a^{2n-2} - a^{n-3}} =$

$$= \frac{a^{n-2}\left(a^{3n-n+2} - 1\right)}{a^{n-3}\left(a^{2n-2-n+3} - 1\right)} = a\cdot\frac{a^{2n+2} - 1}{a^{n+1} - 1} =$$

$$= a\cdot\frac{\left(a^{n+1} + 1\right)\left(a^{n+1} - 1\right)}{a^{n+1} - 1} = a\left(a^{n+1} + 1\right) = a^{n+2} + a.$$

10. Сравните числа:

а) 75^{10} и 15^{15}.
$75^{10} - 15^{15} = 5^{10}\cdot 15^{10} - 15^{15} = 15^{10}\left(5^{10} - 15^{5}\right) =$
$= 15^{10}\cdot 5^{5}\left(5^{5} - 3^{5}\right) > 0,$
то есть $75^{10} > 15^{15}$.

б) 200^{6} и 14^{12}.
$200^{6} - 14^{12} = 200^{6} - 196^{6} > 0,$
так как $200 > 196$, то есть $200^{6} > 14^{12}$.

Решение проверочной работы 4

Вычислите:

1. $3 \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 3\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 3 = \boxed{6}$.

2. $64^{-\frac{1}{2}} = \left(8^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 8^{-1} = \boxed{\frac{1}{8}}$.

3. $2 \cdot 243^{-\frac{1}{5}} = 2 \cdot \left(3^5\right)^{-\frac{1}{5}} = \boxed{\frac{2}{3}}$

4. $\sqrt[3]{200 \cdot 45 \cdot 24} = \sqrt[3]{10^2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8} = \sqrt[3]{10^3 \cdot 3^3 \cdot 2^3} =$
$= 10 \cdot 3 \cdot 2 = \boxed{60}$.

5. $\left(5\sqrt{2{,}7}\right)^2 - \sqrt{2{,}4} \cdot \sqrt{0{,}15} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} = 25 \cdot 2{,}7 - \sqrt{2{,}4 \cdot 0{,}15} + \sqrt{\dfrac{3}{27}} =$

$= 67{,}5 - \sqrt{3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3} + \sqrt{\dfrac{1}{9}} = 67{,}5 - 3 \cdot 0{,}2 + \dfrac{1}{3} = \boxed{67\dfrac{7}{30}}$.

6. $36^{\frac{3}{2}} + 64^{\frac{2}{3}} - 625^{\frac{1}{2}} = \left(6^2\right)^{\frac{3}{2}} + \left(4^3\right)^{\frac{2}{3}} - \left(25^2\right)^{\frac{1}{2}} = 6^3 + 4^2 - 25 =$
$= 216 + 16 - 25 = \boxed{207}$.

7. $(0{,}04)^{-1{,}5} \cdot (0{,}125)^{-\frac{1}{3}} - \left(\dfrac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} - (121)^{\frac{1}{2}} =$

$= \left(5^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(2^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}} - 11 = 5^3 \cdot 2 - 11 = 239.$

8. $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{27} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot \left(3^3\right)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = \sqrt[6]{3^7}.$

9. $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[10]{4} = 2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} = 2.$

10. $16^{0{,}5} + \left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0{,}75} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 4 + \left(2^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}} - 1 = 3 + 2^3 = 3 + 8 = 11.$

11. $0{,}008^{-\frac{2}{3}} + 0{,}064^{-\frac{1}{3}} - 0{,}0625^{-\frac{3}{4}} = \left((0{,}2)^3\right)^{-\frac{2}{3}} + \left((0{,}4)^3\right)^{-\frac{1}{3}} - \left((0{,}5)^4\right)^{-\frac{3}{4}} =$

$= 0{,}2^{-2} + 0{,}4^{-1} - 0{,}5^{-3} = 5^2 + \dfrac{5}{2} - 2^3 = 25 + 2{,}5 - 8 = 19{,}5.$

12. $0{,}25^{-\frac{3}{2}} + 3\cdot 0{,}0081^{-0,25} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} =$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + 3\cdot[(0{,}3)^4]^{-0,25} + (2^{-4})^{-0,75} =$

$= 8 + 3\cdot(0{,}3)^{-1} + 2^3 = 16 + 3\cdot\frac{10}{3} = 26.$

Упростите:

13. $b^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{4}} = b^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = \boxed{b^{\frac{1}{4}}}.$

14. $\dfrac{c^{\frac{2}{3}}\cdot c^{\frac{3}{4}}}{c^{\frac{1}{6}}} = c^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}} = \boxed{c^{\frac{5}{4}}}.$

15. $\dfrac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}\cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = \boxed{x}.$

16. $\dfrac{\left(c^{\frac{3}{2}}\right)^{2}\cdot c^{-\frac{7}{3}}}{c^{-\frac{4}{3}}} = c^{3-\frac{7}{3}+\frac{4}{3}} = \boxed{c^2}.$

Выполните действия:

17. $x^{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{x} = x^{\frac{5}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}} = \boxed{x^3}; \quad x > 0.$

18. $y^{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt[3]{y} = y^{\frac{5}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}} = \boxed{y^2}.$

19. $(\sqrt{3}-2)\sqrt{(\sqrt{3}-2)^{-2}} = -\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2(\sqrt{3}-2)^{-2}} =$

$= -\sqrt{(\sqrt{3}-2)^0} = -\sqrt{1} = \boxed{-1}.$

20. $\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a^{-1}}}\cdot a^{\frac{5}{16}} = (a\cdot(a)^{-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{5}{16}} = a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{5}{16}} = a^{\frac{1}{2}}; \quad a>0.$

21. $\sqrt{a\sqrt[3]{a^{-2}}} : a^{-\frac{1}{6}} = (a\cdot(a)^{-\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} : a^{-\frac{1}{6}} =$

$= a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{3}} : a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}; \quad a > 0.$

22. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}:\sqrt[8]{a^{-1}}=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{8}}:a^{-\frac{1}{8}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}=a;\ a>0.$

23. $\sqrt{\dfrac{x^{-2}\sqrt{x^3}}{a^{-1}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x}{a^{-3}}}}=\sqrt{ax^{-2}\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot a}=\sqrt{a^2x^{-2+1\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}=$

$=ax^{-1+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}}=ax^{-\frac{1}{12}};\quad a>0,\quad x>0.$

24. $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x}=\left(\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{4}}=x^{-\frac{1}{12}}\cdot x^{\frac{7}{12}}=x^{\frac{1}{2}}$

$(x>0)$.

Сократите дробь:

25. $\dfrac{5x^{\frac{1}{2}}+x}{5+x^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\left(5+x^{\frac{1}{2}}\right)}{5+x^{\frac{1}{2}}}=\boxed{x^{\frac{1}{2}}}.$

26. $\dfrac{1-a}{1+a^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{\left(1-a^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{2}}\right)}{1+a^{\frac{1}{2}}}=\boxed{1-a^{\frac{1}{2}}}.$

27. $\dfrac{2y^{\frac{1}{2}}-y}{4-y}=\dfrac{y^{\frac{1}{2}}\left(2-y^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(2-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(2+y^{\frac{1}{2}}\right)}=\boxed{\dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{2+y^{\frac{1}{2}}}}.$

28. $\dfrac{m+n}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{\left(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}\right)\left(m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}\right)}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}=$

$=\boxed{m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}}.$

29. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\boxed{\dfrac{1}{2}\sqrt{6}}.$

30. $\dfrac{36+x}{6-\sqrt{-x}}=\dfrac{36-\left(\sqrt{-x}\right)^2}{6-\sqrt{-x}}=\dfrac{\left(6+\sqrt{-x}\right)\left(6-\sqrt{-x}\right)}{6-\sqrt{-x}}=$

$=\boxed{6+\sqrt{-x}}.$

Решение проверочной работы 5

Вычислите:

1. $(-0{,}2)^0 \cdot \left(\left(\dfrac{5}{6}\right)^4\right)^{-0{,}25} \cdot 1{,}2^{-1} \cdot \sqrt{0{,}01^{-3}} =$

$= 1 \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^{-1} \left(\dfrac{6}{5}\right)^{-1} \left(\dfrac{1}{10}\right)^{-3} = \left(\dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{6}{5}\right)^{-1} \cdot 10^3 = 1000.$

2. $\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-4}\right)^{-0{,}75} \cdot 0{,}09^{-0{,}5} \cdot (-3)^0 \cdot \sqrt{0{,}1^{-8}} =$

$= \left(\dfrac{3}{5}\right)^3 \cdot (0{,}3^2)^{-0{,}5} \cdot 1 \cdot \left(\dfrac{1}{10}\right)^{-4} = \dfrac{27}{125} \cdot \left(\dfrac{3}{10}\right)^{-1} \cdot 10^4 =$

$= \dfrac{27}{125} \cdot \dfrac{10}{3} \cdot 10^4 = 8 \cdot 9 \cdot 100 = 7200.$

3. $\left((3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}} - \dfrac{1}{0{,}5^{-1}}\right) \cdot \left((3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}} + \dfrac{1}{0{,}5^{-1}}\right) =$

$= (3\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}} - \dfrac{1}{0{,}5^{-2}} = 3^{-2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{5}{36}.$

4. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{81}\right)\left(\sqrt{18} - \sqrt{2}\right)^2}{5\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{3}} =$

$= \dfrac{\left(\sqrt[3]{27 \cdot 2} + \sqrt[3]{27 \cdot 3}\right)\left(3\sqrt{2} - \sqrt{2}\right)^2}{5\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}\right)} =$

$= \dfrac{3\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}\right)\left(2\sqrt{2}\right)^2}{5\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}\right)} = \dfrac{3}{5} \cdot 8 = 4{,}8.$

5. $\dfrac{\left(3\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9}\right)}{\left(\sqrt{15} - \sqrt{10}\right)^2\left(2\sqrt{15} + 2\sqrt{10}\right)^2} =$

$= \dfrac{3\left(\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{7^2} - \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(\sqrt{15} - \sqrt{10}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot \left(\sqrt{15} + \sqrt{10}\right)^2}.$

Следует помнить, что $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$, где в данном случае $a = \sqrt[3]{7}$, $b = \sqrt[3]{3}$. Последнее выражение преобразуется к виду

$$\frac{3\left(\left(\sqrt[3]{7}\right)^3+\left(\sqrt[3]{3}\right)^3\right)}{\left(\left(\sqrt{15}-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{15}+\sqrt{10}\right)\right)^2\cdot 4}=\frac{3\cdot(7+3)}{(15-10)^2\cdot 4}=$$
$$=\frac{30}{25\cdot 4}=\frac{3}{10}.$$

6. $$\sqrt{\frac{\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}\right)\left(\sqrt{18}+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{56}}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}\right)\left(3\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt[3]{8\cdot 3}+\sqrt[3]{8\cdot 7}}}=$$
$$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}\right)\left(4\sqrt{2}\right)^2}{2\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}\right)}}=\sqrt{\frac{16\cdot 2}{2}}=4.$$

Выполните действия:

7. $$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}-1}+\frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1}-\frac{4}{a-1}\right)^{-3}=\left(\frac{(\sqrt{a}+1)^2+(\sqrt{a}-1)^2-4}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}\right)^{-3}=$$
$$=\left(\frac{2a+2-4}{a-1}\right)^{-3}=\left(\frac{2(a-1)}{a-1}\right)^{-3}=\frac{1}{8}.$$

8. $$\left(\frac{a}{b^{\frac{5}{4}}}-\frac{a^{\frac{3}{4}}}{b}\right)\cdot\left(b^{-\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}}\right)^{-1}=\frac{a-a^{\frac{3}{4}}\cdot b^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{5}{4}}}\cdot\left(\frac{1}{b^{\frac{1}{4}}}-\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}}\right)^{-1}=$$
$$=\frac{a^{\frac{3}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)}{b^{\frac{5}{4}}}\cdot\frac{b^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}=\frac{a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{1}{4}}}{b}=\frac{a}{b}.$$

9. $$\left(\frac{2+x^{\frac{1}{4}}}{2-x^{\frac{1}{4}}}-\frac{2-x^{\frac{1}{4}}}{2+x^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{\left(2+x^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(2-x^{\frac{1}{4}}\right)^2}{\left(2-x^{\frac{1}{4}}\right)\left(2+x^{\frac{1}{4}}\right)}\cdot\frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}=$$
$$=\frac{8x^{\frac{1}{4}}}{4-\sqrt{x}}\cdot\frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{8}{\sqrt[4]{x^2}}=\frac{8}{\sqrt{x}}=\frac{8\sqrt{x}}{x}.$$

10. $$\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}-(x+y)\right)\cdot\sqrt{xy}=$$
$$=\left(\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x+x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}+y\right)}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}-x-y\right)\cdot\sqrt{xy}=$$
$$=\left(x+\sqrt{xy}+y-x-y\right)\cdot\sqrt{xy}=\sqrt{xy}\cdot\sqrt{xy}=xy.$$

11. $$\left(\frac{p^{\frac{3}{2}}+q^{\frac{3}{2}}}{p-q}-\frac{p-q}{p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\left(\sqrt{pq}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)\left(p-\sqrt{pq}+q\right)}{\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)}-\frac{\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}{\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{pq}}=$$

$$=\left(\frac{p-\sqrt{pq}+q}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{pq}}=$$

$$=\frac{p-\sqrt{pq}+q-\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)^2}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}\cdot\frac{1}{\sqrt{pq}}=$$

$$=\frac{p-\sqrt{pq}+q-p+2\sqrt{pq}-q}{\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)\cdot\sqrt{pq}}=$$

$$=\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}\cdot\frac{1}{\sqrt{pq}}=\frac{1}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}.$$

12. $$\left((m+n)\left(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}+(m\cdot n)^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{1}{\left(m^{\frac{2}{3}}-n^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}}=$$

$$=\left(\frac{m+n}{m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}}+(mn)^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(m^{\frac{2}{3}}-n^{\frac{2}{3}}\right)=$$

$$=\left(m^{\frac{2}{3}}-(mn)^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}+(mn)^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(m^{\frac{2}{3}}-n^{\frac{2}{3}}\right)=$$

$$=\left(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(m^{\frac{2}{3}}-n^{\frac{2}{3}}\right)=m^{\frac{4}{3}}-n^{\frac{4}{3}}.$$

13. $$\left(\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}+(xy)^{\frac{1}{2}}\right):\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(x+\sqrt{xy}+y\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right):\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=$$

$$=\left(x+\sqrt{xy}+y+\sqrt{xy}\right):\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=$$

$$=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2:\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

14. $$\left(\frac{a^2-b^2}{a^{\frac{3}{2}}+ab^{\frac{1}{2}}}-\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right):\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{a^2-b^2-a\,(a-b)}{a(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})}:\frac{b}{a}=$$

$$=\frac{-b^2+ab}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{b}=\frac{b\,(a-b)}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{b}=$$

$$=\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}=\frac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

15. При $-1<a<1$ имеем

$$(a+1)^{0,25}\cdot\frac{\sqrt[4]{(1-2a+a^2)\,(1-a^2)\,(1-a)}}{a^2+2a-3}-a+\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}=$$

$$=\sqrt[4]{a+1}\cdot\frac{\sqrt[4]{(1-a)^2\,(1-a^2)\,(1-a)}}{(a-1)\,(a+3)}-a+\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}=$$

$$=\sqrt[4]{a+1}\cdot\frac{\sqrt[4]{(1-a)^4\,(1+a)}}{(a-1)\,(a+3)}-a+\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}=$$

$$=\frac{|1-a|\sqrt[4]{a+1}\sqrt[4]{1+a}}{(a-1)\,(a+3)}-a+\frac{\sqrt{a+1}}{a+3};$$

$$|1-a|=\begin{cases}a-1 & \text{при} \quad a>1,\\ 1-a & \text{при} \quad a<1,\end{cases}$$

тогда

$$\frac{\sqrt{a+1}\cdot(1-a)}{(a-1)\,(a+3)}-a+\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}=-\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}-a+\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}=-a.$$

Решение зачетных карточек

Решение зачетной карточки 1

1. Упростите:

$$\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}-\frac{x+1}{x^2-4x+3}=$$

$$=\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)}-3\right)}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)}-\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}=$$

$$=\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}=$$

$$=\frac{2(x-1)-x+3-x-1}{(x-1)(x-3)}=$$

$$=\frac{2x-2-x+3-x-1}{(x-1)(x-3)}=0.$$

2. $$\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-x+1}+\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=$$

$$=\sqrt{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}\ \text{ при }\ x>1.$$

3. $A = \dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ при $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$;

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} & \text{при } \begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \end{cases} \\ \dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} & \text{при } \begin{cases} a < 0, \\ b < 0. \end{cases} \end{cases}$$

а) При $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0 \end{cases}$

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}} = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}.$$

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4ab + (a-b)^2}{4ab}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4ab}} = \frac{|a+b|}{2\sqrt{ab}} = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}.$$

$$A = \frac{2a \cdot \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}}{\frac{a-b}{2\sqrt{ab}} + \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}} = \frac{2a(a+b)}{a-b+a+b} = a+b.$$

б) При $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0 \end{cases}$

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} - \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{-a})^2 - (\sqrt{-b})^2}{\sqrt{ab}} = \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}.$$

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4ab + (b-a)^2}{4ab}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4ab}} = \frac{|a+b|}{2\sqrt{ab}} = -\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}.$$

$$A=\frac{2a\cdot\frac{-a-b}{2\sqrt{ab}}}{\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}+\frac{-a-b}{2\sqrt{ab}}}=\frac{-2a(a+b)}{b-a-a-b}=a+b.$$

$A=a+b$ при $ab>0$.

4. $$\frac{3}{y-1}+\left(\frac{y^{-\frac{1}{3}}-1}{y^{-\frac{1}{3}}+1}\right)^2\left(\frac{y}{y-1}+\frac{4y}{(1-y^{\frac{1}{3}})^3}\right)=$$

$$=\frac{3}{y-1}+\left(\frac{y^{-\frac{1}{3}}(1-y^{\frac{1}{3}})}{y^{-\frac{1}{3}}(1+y^{\frac{1}{3}})}\right)^2\cdot y\cdot\frac{-(1-y^{\frac{1}{3}})^2+4(y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+1)}{(1-y^{\frac{1}{3}})^3(y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+1)}=$$

$$=\frac{3}{y-1}+\frac{(1-y^{\frac{1}{3}})^2\cdot y}{(1+y^{\frac{1}{3}})^2}\cdot\frac{-1+2y^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{2}{3}}+4y^{\frac{2}{3}}+4y^{\frac{1}{3}}+4}{(1-y^{\frac{1}{3}})^2(1-y)}=$$

$$=\frac{3}{y-1}+\frac{(1-y^{\frac{1}{3}})^2\cdot y}{(1+y^{\frac{1}{3}})^2}\cdot\frac{3y^{\frac{2}{3}}+6y^{\frac{1}{3}}+3}{(1-y)(1-y^{\frac{1}{3}})^2}=$$

$$=\frac{3}{y-1}+\frac{(1-y^{\frac{1}{3}})^2\cdot y\cdot 3(y^{\frac{1}{3}}+1)^2}{(1+y^{\frac{1}{3}})^2(1-y)(1-y^{\frac{1}{3}})^2}=\frac{3}{y-1}-\frac{3y}{y-1}=$$

$$=\frac{3-3y}{y-1}=\frac{3(1-y)}{y-1}=-3.$$

Решение зачетной карточки 2

1. Упростите при $p \geqslant \dfrac{1}{2}$:

$$\frac{\sqrt{(2p+1)^3}+\sqrt{8p^3-12p^2+6p-1}}{\sqrt{4p+2\sqrt{4p^2-1}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(2p+1)^3}+\sqrt{(2p-1)^3}}{\sqrt{2p+1+2\sqrt{(2p+1)(2p-1)}+2p-1}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{2p+1})^3+(\sqrt{2p-1})^3}{\sqrt{(\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p-1})^2}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p-1})\left(2p+1-\sqrt{(2p+1)(2p-1)}+2p-1\right)}{|\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p-1}|}=$$

$$=\frac{(\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p-1})(4p-\sqrt{4p^2-1})}{(\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p-1})}=4p-\sqrt{4p^2-1}.$$

2. Проверьте: $\sqrt[3]{\dfrac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

По утверждению должно быть $\dfrac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}=\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3$.

$$L=\frac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}};$$

$$M=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3=\frac{(\sqrt{2})^3-3(\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}\cdot 1-1}{(\sqrt{2})^3+3(\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}\cdot 1+1}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}-3\cdot 2+3\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+3\cdot 2+3\sqrt{2}+1}=\frac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}=$$

$$=\frac{(5\sqrt{2}-7)(5\sqrt{2}-7)}{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)}=\frac{50-70\sqrt{2}+49}{50-49}=$$

$$=99-70\sqrt{2}.$$

$$L=\frac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}=\frac{(10-7\sqrt{2})(10-7\sqrt{2})}{(10+7\sqrt{2})(10-7\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{100-140\sqrt{2}+98}{100-98}=99-70\sqrt{2}.$$

Итак, $\begin{array}{l} L\ =99-70\sqrt{2}, \\ M\ =99-70\sqrt{2}, \end{array}$ т. е. $L=M$,

что и требовалось доказать.

3. $$A=\left(\frac{b-1}{\sqrt{1-b^2}-1+b}+\frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{1+b}-\sqrt{1-b}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1-b}{b}+\sqrt{\frac{1}{b^2}-1}\right)\cdot\frac{b}{1-b+\sqrt{1-b^2}}=$$

$$=\left(\frac{-(\sqrt{1-b})^2}{\sqrt{1-b}\cdot\sqrt{1+b}-(\sqrt{1-b})^2}+\frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{1+b}-\sqrt{1-b}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1-b}{b}+\sqrt{\frac{1-b^2}{b^2}}\right)\cdot\frac{b}{(\sqrt{1-b})^2+\sqrt{1-b}\cdot\sqrt{1+b}}=$$

$$=\left(\frac{-\sqrt{1-b}}{\sqrt{1+b}-\sqrt{1-b}}+\frac{\sqrt{1+b}}{\sqrt{1+b}-\sqrt{1-b}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1-b}{b}+\frac{\sqrt{1-b}\cdot\sqrt{1+b}}{|b|}\right)\cdot\frac{b}{\sqrt{1-b}(\sqrt{1-b}+\sqrt{1+b})}=$$

$$\left(\frac{-\sqrt{1-b}}{\sqrt{1+b}-\sqrt{1-b}}+\frac{\sqrt{1+b}}{\sqrt{1+b}-\sqrt{1-b}}=\frac{\sqrt{1+b}-\sqrt{1-b}}{\sqrt{1+b}-\sqrt{1-b}}=1\right)$$

$$=\left(\frac{1-b}{b}+\frac{\sqrt{1-b}\cdot\sqrt{1+b}}{|b|}\right)\cdot\frac{b}{\sqrt{1-b}\,(\sqrt{1-b}+\sqrt{1+b})}=A.$$

а) При $\begin{cases} b>0, \\ b<1 \end{cases}$

$$A=\frac{\sqrt{1-b}(\sqrt{1-b}+\sqrt{1+b})}{b}\cdot\frac{b}{\sqrt{1-b}(\sqrt{1-b}+\sqrt{1+b})}=1.$$

б) При $\begin{cases} b < 0, \\ b \geqslant -1 \end{cases}$

$$A = \frac{\sqrt{1-b}(\sqrt{1-b} - \sqrt{1+b})}{b} \cdot \frac{b}{\sqrt{1-b}(\sqrt{1-b} + \sqrt{1+b})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{1-b} - \sqrt{1+b})(\sqrt{1-b} - \sqrt{1+b})}{1-b-1-b} =$$

$$= \frac{1-b-2\sqrt{1-b^2}+1+b}{-2b} = \frac{\sqrt{1-b^2}-1}{b}.$$

$$A = \begin{cases} 1 & \text{при } \ 0 < b < 1, \\ \dfrac{\sqrt{1-b^2}-1}{b} & \text{при } \ -1 \leqslant b < 0. \end{cases}$$

4. $$\frac{1}{2\sqrt{2b}+1} + \left(\frac{(2\sqrt[3]{b^2}-1)^2}{8b^2\cdot\sqrt[3]{b^2} - 2\sqrt{2b}\cdot\sqrt[3]{b^2}}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\frac{6}{1-8b^2} + \frac{1}{2b\cdot\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2}b^{\frac{1}{3}})^3+1} + \frac{2\sqrt{2}\cdot b\cdot\sqrt[3]{b^2}(2\sqrt{2b}-1)}{(2\sqrt[3]{b^2}-1)^2} \times$$

$$\times \left(\frac{6}{(1-2b^{\frac{2}{3}})(1+2b^{\frac{2}{3}}+4b^{\frac{4}{3}})} + \frac{1}{b^{\frac{2}{3}}(2b^{\frac{2}{3}}-1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}})^3+1} + \frac{2^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{5}{3}}(2^{\frac{3}{2}}b-1)}{(2b^{\frac{2}{3}}-1)^2} \cdot \frac{6\cdot b^{\frac{2}{3}}-1-2b^{\frac{2}{3}}-4b^{\frac{4}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}(1-2b^{\frac{2}{3}})(1+2b^{\frac{2}{3}}+4b^{\frac{4}{3}})} =$$

$$= \frac{1}{(2^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}})^3+1} + \frac{2^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{5}{3}}(2^{\frac{3}{2}}b-1)\cdot(-1)(1-2b^{\frac{2}{3}})^2}{(2b^{\frac{2}{3}}-1)^2\cdot b^{\frac{2}{3}}(1-8b^2)} =$$

$$= \frac{1}{2^{1,5}\cdot b+1} + \frac{2^{1,5}\cdot b(1-2^{1,5}b)}{(1-2^{1,5}b)(1+2^{1,5}b)} = \frac{1+2^{1,5}b}{1+2^{1,5}b} = 1.$$

Решение зачетной карточки 3

Упростите:

1. При $b > 2$ имеем

$$\frac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\cdot\frac{\sqrt{b+2}}{\sqrt{b-2}}=$$

$$=\frac{(b-1)(b-2)-(b-1)\cdot\sqrt{b-2}\cdot\sqrt{b+2}}{(b+1)(b+2)-(b+1)\cdot\sqrt{b-2}\cdot\sqrt{b+2}}\cdot\frac{\sqrt{b+2}}{\sqrt{b-2}}=$$

$$=\frac{(b-1)}{b+1}\cdot\frac{(\sqrt{b-2})^2-\sqrt{b-2}\cdot\sqrt{b+2}}{(\sqrt{b+2})^2-\sqrt{b-2}\cdot\sqrt{b+2}}\cdot\frac{\sqrt{b+2}}{\sqrt{b-2}}=$$

$$=\frac{b-1}{b+1}\cdot\frac{\sqrt{b-2}}{\sqrt{b+2}}\cdot\frac{\sqrt{b-2}-\sqrt{b+2}}{\sqrt{b+2}-\sqrt{b-2}}\cdot\frac{\sqrt{b+2}}{\sqrt{b-2}}=-\frac{b-1}{b+1}=\frac{1-b}{1+b}.$$

2. При $\begin{cases} y \geqslant 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$ имеем

$$\left(\frac{1+\sqrt{y}}{\sqrt{1+y}}-\frac{\sqrt{1+y}}{1+\sqrt{y}}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{y}}{\sqrt{1+y}}+\frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{y}-1}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{(1+\sqrt{y})^2-(\sqrt{1+y})^2}{\sqrt{1+y}\cdot(1+\sqrt{y})}\right)^2-\left(\frac{(\sqrt{1+y})^2-(\sqrt{y}-1)^2}{\sqrt{1+y}\cdot(\sqrt{y}-1)}\right)^2=$$

$$=\frac{(1+2\sqrt{y}+y-1-y)^2}{(1+y)(1+\sqrt{y})^2}-\frac{(1+y-y+2\sqrt{y}-1)^2}{(1+y)(\sqrt{y}-1)^2}=$$

$$=\frac{4y}{(1+y)(1+\sqrt{y})^2}-\frac{4y}{(1+y)(\sqrt{y}-1)^2}=$$

$$=\frac{4y}{1+y}\left(\frac{1}{(1+\sqrt{y})^2}-\frac{1}{(\sqrt{y}-1)^2}\right)=$$

$$=\frac{4y}{1+y}\cdot\frac{(\sqrt{y}-1)^2-(1+\sqrt{y})^2}{((1+\sqrt{y})(\sqrt{y}-1))^2}=$$

$$=\frac{4y}{1+y}\cdot\frac{(\sqrt{y}-1+1+\sqrt{y})(\sqrt{y}-1-1-\sqrt{y})}{(y-1)^2}=$$

$$=\frac{4y}{1+y}\cdot\frac{2\sqrt{y}\cdot(-2)}{(y-1)^2}=-\frac{16y\sqrt{y}}{(y+1)(y-1)^2}.$$

3. $\sqrt[3]{15\sqrt{3}+26}\cdot(\sqrt{3}-2)=\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3\cdot(15\sqrt{3}+26)}=$

$$=\sqrt[3]{((\sqrt{3})^3-3(\sqrt{3})^2\cdot 2+3\sqrt{3}\cdot 2^2-2^3)(15\sqrt{3}+26)}=$$

$$=\sqrt[3]{(3\sqrt{3}-18+12\sqrt{3}-8)(15\sqrt{3}+26)}=$$

$$=\sqrt[3]{(15\sqrt{3}-26)(15\sqrt{3}+26)}=$$

$$=+\sqrt[3]{(15\sqrt{3})^2-26^2}=\sqrt[3]{225\cdot 3-676}=$$

$$=\sqrt[3]{675-676}=\sqrt[3]{-1}=-1.$$

4. $A=\dfrac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}=\dfrac{\sqrt{x-4-2\cdot 2\sqrt{x-4}+4}+2}{\sqrt{x-4+2\cdot 2\sqrt{x-4}+4}-2}=$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}+2}{\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2}-2}=$$

$$=\frac{|\sqrt{x-4}-2|+2}{|\sqrt{x-4}+2|-2}=\frac{|\sqrt{x-4}-2|+2}{\sqrt{x-4}}.$$

$$|\sqrt{x-4}-2|=\begin{cases}\sqrt{x-4}-2 & \text{при } \sqrt{x-4}\geqslant 2,\\ 2-\sqrt{x-4} & \text{при } \sqrt{x-4}<2\end{cases}$$

то есть

$$|\sqrt{x-4}-2|=\begin{cases}\sqrt{x-4}-2 & \text{при } x\geqslant 8,\\ 2-\sqrt{x-4} & \text{при } 4\leqslant x<8.\end{cases}$$

$$A=\begin{cases}1 & \text{при } x\geqslant 8,\\ \dfrac{4-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}} & \text{при } 4<x<8;\end{cases}\quad \text{или}$$

$$A=\begin{cases}1 & \text{при } x\geqslant 8,\\ \dfrac{4}{\sqrt{x-4}}-1 & \text{при } 4<x<8.\end{cases}$$

Решение зачетной карточки 4

Упростите:

1. $$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{t}}\right)\left(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}+2\right)=$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)(1-\sqrt{3}+\sqrt{t})+(\sqrt{3}-1)(1+\sqrt{3}+\sqrt{t})}{(1-\sqrt{3}+\sqrt{t})(1+\sqrt{3}+\sqrt{t})}\cdot\frac{t-2+2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1-3-\sqrt{3}+\sqrt{3t}+\sqrt{t}+\sqrt{3}-1+3-\sqrt{3}+\sqrt{3t}-\sqrt{t}}{(1+\sqrt{t})^2-(\sqrt{3})^2}\times$$

$$\times\frac{t+2\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3t}}{1+2\sqrt{t}+t-3}\cdot\frac{t+2\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}(t+2\sqrt{t}-2)}{(t+2\sqrt{t}-2)}=2\sqrt{3}.$$

2. $$\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}+3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}:(3+\sqrt[6]{108})=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}(3^{\frac{3}{2}}-2)}{3^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{3}}}+3\cdot2^{\frac{1}{3}}\right)\sqrt{3}}:\left(3+(3^3\cdot2^2)^{\frac{1}{6}}\right)=$$

$$=\sqrt{\left(3^{\frac{1}{2}}(3+3^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}})+3^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{3}}\right)\cdot3^{\frac{1}{2}}}:(3+3^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{3}})=$$

$$=\sqrt{3(3+3^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{3}})}:\left(3^{\frac{1}{2}}\cdot(3^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{3}})\right)=$$

$$=\sqrt{3(3^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{3}})^2}:\left(3^{\frac{1}{2}}\cdot(3^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{3}})\right)=$$

$$=\frac{3^{\frac{1}{2}}\cdot(3^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{3}})}{3^{\frac{1}{2}}\cdot(3^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{3}})}=1.$$

3. $b \geqslant 2$.

$$\frac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}=\frac{\sqrt{b+2+2\sqrt{(b+2)(b-2)}+b-2}}{\sqrt{(b+2)(b-2)}+(\sqrt{b+2})^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{(b+2)}+\sqrt{b-2})^2}}{\sqrt{b+2}(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2})}=\frac{|\sqrt{b+2}+\sqrt{b-2}|}{\sqrt{b+2}(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2})}=$$

$$=\frac{\sqrt{b+2}+\sqrt{b-2}}{\sqrt{b+2}(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2})}=\frac{1}{\sqrt{b+2}}.$$

4. $$\left(\frac{9}{a+8}-\frac{a^{\frac{1}{3}}+2}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4}\right)\cdot\frac{a^{\frac{4}{3}}+8a^{\frac{1}{3}}}{1-a^{\frac{2}{3}}}+\frac{5-a^{\frac{2}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\left(\frac{9}{(a^{\frac{1}{3}}+2)(a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4)}-\frac{a^{\frac{1}{3}}+2}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4}\right)\cdot\frac{a^{\frac{1}{3}}(a+8)}{1-a^{\frac{2}{3}}}+\frac{5-a^{\frac{2}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{\left(9-(a^{\frac{1}{3}}+2)^2\right)\cdot a^{\frac{1}{3}}(a+8)}{(a+8)\cdot(1-a^{\frac{1}{3}})(1+a^{\frac{1}{3}})}+\frac{5-a^{\frac{2}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{(3+a^{\frac{1}{3}}+2)(3-a^{\frac{1}{3}}-2)a^{\frac{1}{3}}(a+8)}{(a+8)(1-a^{\frac{1}{3}})(1+a^{\frac{1}{3}})}+\frac{5-a^{\frac{2}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{(5+a^{\frac{1}{3}})(1-a^{\frac{1}{3}})a^{\frac{1}{3}}}{(1-a^{\frac{1}{3}})(1+a^{\frac{1}{3}})}+\frac{5-a^{\frac{2}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{5a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}+5-a^{\frac{2}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}}=\frac{5(a^{\frac{1}{3}}+1)}{1+a^{\frac{1}{3}}}=5.$$

Решение зачетной карточки 5

1. $$\left(\frac{\sqrt[4]{8}+2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}}-\sqrt[3]{4}\right):\left(\frac{\sqrt[4]{8}-2}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{2}}-3\sqrt[12]{128}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\frac{2^{\frac{3}{4}}+(2^{\frac{1}{3}})^3}{2^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{3}}}-2^{\frac{2}{3}}\right):\left(\frac{2^{\frac{3}{4}}-(2^{\frac{1}{3}})^3}{2^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{3}}}-3\cdot 2^{\frac{7}{12}}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=(2^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{2}{3}}):(2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}-3\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=$$

$$=(2^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}):(2^{\frac{1}{2}}-2\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=$$

$$=2^{\frac{1}{4}}(2^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{3}}):\left((2^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{3}})^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{4}}(2^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{3}})}{|2^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{3}}|}=\frac{2^{\frac{1}{4}}(2^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{3}})}{-(2^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{3}})}=-2^{\frac{1}{4}}=-\sqrt[4]{2}.$$

2. $$(7-4\sqrt{3})(2+\sqrt{3})(26-15\sqrt{3})^{-\frac{1}{3}}=\frac{(7-4\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{(7-4\sqrt{3})(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})}=\frac{(7-4\sqrt{3})(4+4\sqrt{3}+3)}{\sqrt[3]{(26-15\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^3}}=$$

$$=\frac{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}{\sqrt[3]{(26-15\sqrt{3})(8+3\cdot 2^2\sqrt{3}+3\cdot 2\cdot 3+3\sqrt{3})}}=$$

$$=\frac{49-48}{\sqrt[3]{(26-15\sqrt{3})\cdot(26+15\sqrt{3})}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{26^2-(15\sqrt{3})^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{676-225\cdot 3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{676-675}}=1.$$

3. $$A=\sqrt{\frac{2a+2\sqrt{a^2-9}}{2a-2\sqrt{a^2-9}}}=\sqrt{\frac{a+3+2\sqrt{(a+3)(a-3)}+a-3}{a+3-2\sqrt{(a+3)(a-3)}+a-3}}.$$

$$a+3=\begin{cases}(\sqrt{a+3})^2 & \text{при } a\geqslant -3,\\ -(\sqrt{-a-3})^2 & \text{при } a<-3;\end{cases}$$

$$a-3=\begin{cases}(\sqrt{a-3})^2 & \text{при } a\geqslant 3,\\ -(\sqrt{3-a})^2 & \text{при } a<3.\end{cases}$$

$\sqrt{a+3}\geqslant\sqrt{a-3}$ при $a\geqslant 3$,

$\sqrt{a+3}<\sqrt{a-3}$ решений нет.

1) При $a\geqslant 3$

$$A=\sqrt{\frac{(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})^2}{(\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3})^2}}=\frac{|\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3}|}{|\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3}|}=$$

$$=\frac{\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3}}=\frac{(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})^2}{a+3-a+3}=$$

$$=\frac{a+\sqrt{a^2-9}}{3}.$$

2) При $a\leqslant -3$

$\sqrt{-a-3}<\sqrt{3-a}$ при $a\leqslant -3$,

$\sqrt{-a-3}\geqslant\sqrt{3-a}$ решений нет.

$$A=\sqrt{\frac{-(\sqrt{-a-3})^2+2\sqrt{-a-3}\cdot\sqrt{3-a}-(\sqrt{3-a})^2}{-(\sqrt{-a-3})^2-2\sqrt{-a-3}\cdot\sqrt{3-a}-(\sqrt{3-a})^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{-a-3})^2-2\sqrt{-a-3}\cdot\sqrt{3-a}+(\sqrt{3-a})^2}{(\sqrt{-a-3})^2+2\sqrt{-a-3}\cdot\sqrt{3-a}+(\sqrt{3-a})^2}}=$$

$$=\frac{|\sqrt{-a-3}-\sqrt{3-a}|}{|\sqrt{-a-3}+\sqrt{3-a}|}=\frac{\sqrt{3-a}-\sqrt{-a-3}}{\sqrt{-a-3}+\sqrt{3-a}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3-a}-\sqrt{-a-3})^2}{-a+3+3+a}=\frac{3-a-2\sqrt{a^2-9}-a-3}{6}=$$

$$=-\frac{a+\sqrt{a^2-9}}{3}.$$

$$A=\begin{cases}\dfrac{a+\sqrt{a^2-9}}{3} & \text{при } a\in[3;+\infty),\\[2mm] -\dfrac{a+\sqrt{a^2-9}}{3} & \text{при } a\in(-\infty;-3].\end{cases}$$

4. При $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0 \end{cases}$ имеем

$$\left(\sqrt[3]{a} - \left(\frac{b^2 - a\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt[3]{a}} + b\sqrt[3]{a}\right) : (b + \sqrt[6]{b^3 \cdot a^2})\right)^{-2} =$$

$$= \left(\sqrt[3]{a} - \left(\frac{b^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{3}{2}} - a)}{b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{3}}} + b \cdot \sqrt[3]{a}\right) : (b + b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}})\right)^{-2} =$$

$$= \left(\sqrt[3]{a} - b^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{3}})(b + b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}})}{b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{3}}} + b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}\right) \div\right.$$

$$\left.\div \left(b^{\frac{1}{2}} \cdot (b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}})\right)\right)^{-2} =$$

$$= \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{2}} \cdot (b + b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}) \div\right.$$

$$\left.\div \left(b^{\frac{1}{2}} \cdot (b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}})\right)\right)^{-2} =$$

$$= \left(a^{\frac{1}{3}} - \frac{b^{\frac{1}{2}} \cdot (b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}})^2}{b^{\frac{1}{2}} \cdot (b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}})}\right)^{-2} =$$

$$= \left(a^{\frac{1}{3}} - (b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}})\right)^{-2} = (-b^{\frac{1}{2}})^{-2} = \frac{1}{b}.$$

Решение зачетной карточки 6

1. $$\left(\frac{(1-ab)(\sqrt[3]{ab}-1)}{1+\sqrt{ab}}-(1-\sqrt[3]{ab})\sqrt{ab}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1+ab}{1+\sqrt[3]{ab}}-1\right)=$$

$$=\left(\frac{(\sqrt[3]{ab}-1)(1-\sqrt{ab})(1+\sqrt{ab})}{1+\sqrt{ab}}+(\sqrt[3]{ab}-1)\sqrt{ab}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(\frac{1+(\sqrt[3]{ab})^3}{1+\sqrt[3]{ab}}-1\right)=$$

$$=\Big((\sqrt[3]{ab}-1)(1-\sqrt{ab}+\sqrt{ab})\Big)^{-1}\cdot(1-\sqrt[3]{ab}+(\sqrt[3]{ab})^2-1)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{ab}-1}\Big((\sqrt[3]{ab})^2-\sqrt[3]{ab}\Big)=\frac{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{ab}-1)}{\sqrt[3]{ab}-1}=\sqrt[3]{ab}.$$

2. $$a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{ba^2} & \text{при } \begin{cases}b\geqslant 0,\\ a\geqslant 0;\end{cases}\\ -\sqrt{ba^2} & \text{при } \begin{cases}b\geqslant 0,\\ a<0.\end{cases}\end{cases}$$

$$\left(\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}}-\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}\right)\cdot\sqrt[3]{1-2\sqrt{6}}=$$

$$=\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{1-2\sqrt{6}}-\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{1-2\sqrt{6}}=$$

$$=-\sqrt[6]{(25+4\sqrt{6})(1-2\sqrt{6})^2}-\sqrt[3]{(1+2\sqrt{6})\cdot(1-2\sqrt{6})}=$$

$$=-\sqrt[6]{(25+4\sqrt{6})(25-4\sqrt{6})}-\sqrt[3]{1-24}=$$

$$=-\sqrt[6]{625-96}-\sqrt[3]{-23}=-\sqrt[6]{529}+\sqrt[3]{23}=-\sqrt[3]{23}+\sqrt[3]{23}=0.$$

3. При $x=4(a-1)$ имеем

$$A=(a+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}+(a-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}.$$

1) $a\geqslant 1$,

$$a+x^{\frac{1}{2}}=a+\sqrt{4(a-1)}=a+2\sqrt{a-1}=$$

$$=a-1+2\sqrt{a-1}+1=(\sqrt{a-1}+1)^2;$$

$$a - x^{\frac{1}{2}} = a - \sqrt{4(a-1)} = a - 2\sqrt{a-1} =$$
$$= a - 1 - 2\sqrt{a-1} + 1 = (\sqrt{a-1} - 1)^2;$$
$$\sqrt{a + x^{\frac{1}{2}}} = |\sqrt{a-1} + 1| = \sqrt{a-1} + 1;$$
$$\sqrt{a - x^{\frac{1}{2}}} = |\sqrt{a-1} - 1| = \begin{cases} \sqrt{a-1} - 1 & \text{при } a \geqslant 2, \\ 1 - \sqrt{a-1} & \text{при } \begin{cases} a < 2, \\ a \geqslant 1. \end{cases} \end{cases}$$

а) При $a \geqslant 2$

$$A = \frac{1}{\sqrt{a-1}+1} + \frac{1}{\sqrt{a-1}-1} =$$
$$= \frac{\sqrt{a-1} - 1 + \sqrt{a-1} + 1}{a-1-1} = \frac{2\sqrt{a-1}}{a-2}, \quad a \neq 2.$$

б) $1 \leqslant a < 2$,

$$A = \frac{1}{\sqrt{a-1}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{a-1}} =$$
$$= \frac{1 - \sqrt{a-1} + \sqrt{a-1} + 1}{1-(a-1)} = \frac{2}{2-a}.$$

2) При $a < 1$ не существует $\sqrt{x}$.

$$A = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{a-1}}{a-2} & \text{при } a > 2, \\ \dfrac{2}{2-a} & \text{при } 1 \leqslant a < 2. \end{cases}$$

4. $$\left(\frac{a\sqrt{a} - a}{\left(\frac{a^{0,75}-1}{a^{0,25}-1} - \sqrt{a}\right)\left(\frac{a^{0,75}+1}{a^{0,25}+1} - \sqrt{a}\right)}\right)^3 +$$
$$+ \left(\frac{(1+\sqrt[3]{a}) : (a + \sqrt[3]{a^2}) - 1}{1 - \sqrt[3]{a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-4,5} =$$

$$= \left(\frac{a(\sqrt{a}-1)}{(a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}} + 1 - a^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}} + 1 - a^{\frac{1}{2}})} \right)^3 +$$

$$+ \left(\frac{(1+\sqrt[3]{a}) : \left(\sqrt[3]{a^2}(\sqrt[3]{a}+1)\right) - 1}{1-\sqrt[3]{a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \right)^{-4,5} =$$

$$= \left(\frac{a(\sqrt{a}-1)}{(a^{\frac{1}{4}}+1)(1-a^{\frac{1}{4}})} \right)^3 + \left(\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} - 1}{1-\sqrt[3]{a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \right)^{-4,5} =$$

$$= \left(\frac{a(\sqrt{a}-1)}{1-a^{\frac{1}{2}}} \right)^3 + \left(\frac{(1-\sqrt[3]{a^2})}{\sqrt[3]{a^2}(1-\sqrt[3]{a})} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \right)^{-4,5} =$$

$$= (-a)^3 + \left(\frac{1+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \right)^{-4,5} =$$

$$= -a^3 + \left(\frac{1+\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}} \right)^{-4,5} =$$

$$= -a^3 + (a^{-\frac{2}{3}})^{-4,5} = -a^3 + a^3 = 0.$$

Решение зачетной карточки 7

1. $A = \dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ при $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$.

При $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0 \end{cases}$ имеем $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \sqrt{\dfrac{-a}{-b}}$,

значит

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} + \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{-a})^2 + (\sqrt{-b})^2}{\sqrt{ab}} = -\frac{a+b}{2\sqrt{ab}};$$

$$x^2 - 1 = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} + \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}}\right)\right)^2 - 1 = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2;$$

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2} = \frac{1}{2}\left|\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} - \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{(\sqrt{-a})^2 - (\sqrt{-b})^2}{\sqrt{ab}}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{b-a}{\sqrt{ab}}\right| =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}} & \text{при } 0 > b \geqslant a, \\[2mm] \dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}} & \text{при } b < a < 0. \end{cases}$$

а) При $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ b \geqslant a \end{cases}$ $A = \dfrac{2b\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{\sqrt{ab}} - \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}} = \dfrac{2b(b-a)}{-a-b-b+a} = a-b.$

б) При $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ a > b \end{cases}$ $A = \dfrac{2b\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{\sqrt{ab}} - \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}} = \dfrac{2b(a-b)}{-a-b-a+b} = \dfrac{b}{a}(b-a).$

$$A = \begin{cases} a - b & \text{при } 0 > b \geqslant a, \\ \dfrac{b}{a}(b-a) & \text{при } 0 > a > b. \end{cases}$$

2. Упростите:

$$\frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}}+\frac{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{4}}\cdot b^{\frac{1}{6}}}\cdot\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}-b}-\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}\cdot b^{\frac{1}{2}}}\right)=$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}}+\frac{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{4}}\cdot b^{\frac{1}{6}}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{4}}-(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})}=$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}}+\frac{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{6}}}\cdot\frac{-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b}=$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}}-\frac{(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})\cdot b^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})}=\frac{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}}=1.$$

3. Вычислите:

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}})}{2-2-\sqrt{3}}+\frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}})}{2-2+\sqrt{3}}\right)^4=$$

$$=\frac{1}{9}\left((2+\sqrt{3})\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2}\right)+(2-\sqrt{3})\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\right)^4=$$

$$\left[\begin{array}{ll} 2+\sqrt{3}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}; & \sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}};\\ 2-\sqrt{3}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}; & \sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{9}\left(\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)\right)^4=$$

$$=\frac{1}{9}\left(\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^4=$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)^2(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}\right)^4 =$$

$$= \frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\Big((\sqrt{3}+1)(3-1)+(\sqrt{3}-1)(3-1)\Big)^4 =$$

$$= \frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot 2^4\cdot(\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1)^4 = \frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot(2\sqrt{3})^4 =$$

$$= \frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot 2^4\cdot 3^2 = 4.$$

4. Вычислите: $\sqrt[3]{37+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{37-30\sqrt{3}}$.

Положим

$$\left.\begin{array}{ll} \sqrt[3]{37+30\sqrt{3}} = a; & 37+30\sqrt{3} = a^3 \\ \sqrt[3]{37-30\sqrt{3}} = b; & 37-30\sqrt{3} = b^3 \end{array}\right| \quad \text{тогда } a^3+b^3 = 74.$$

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) = (a+b)((a+b)^2-3ab) = 74,$$

но $a\cdot b = \sqrt[3]{37+30\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{37-30\sqrt{3}} = \sqrt[3]{37^2-30^2\cdot 3} =$

$= \sqrt[3]{1369-2700} = \sqrt[3]{-1331} = -\sqrt[3]{11^3} = -11$

$(11^2 = 121, 121\cdot 11 = 1331)$.

$(a+b)((a+b)^2+33) = 74.$

Положим $a+b=t$.

$$\begin{aligned} t^3+33t-74 &= 0; \\ t^3-4t+37t-74 &= 0; \\ t(t^2-4)+37(t-2) &= 0; \\ (t-2)(t(t+2)+37) &= 0; \\ (t-2)(t^2+2t+37) &= 0; \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} t-2=0 \\ (t+1)^2+36=0 \end{array}\right. \iff t=2.$$

$a+b=2$,

то есть $\sqrt[3]{37+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{37-30\sqrt{3}} = 2$.

Решение зачетной карточки 8

1. $$\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{(6+4\sqrt{2})(\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}})(\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{2})}+\right.$$

$$\left.+\frac{(6-4\sqrt{2})(\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}})(\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\sqrt{2})}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{(6+4\sqrt{2})(\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{2})}{6+4\sqrt{2}-2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(6-4\sqrt{2})(\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\sqrt{2})}{2-6+4\sqrt{2}}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{(6+4\sqrt{2})(\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{2})}{4(\sqrt{2}+1)}+\frac{(6-4\sqrt{2})(\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\sqrt{2})}{4(\sqrt{2}-1)}\right)^4=$$

$$\left[\begin{aligned}
6+4\sqrt{2}&=2(3+2\sqrt{2})=2(2+2\sqrt{2}+1)=2(\sqrt{2}+1)^2;\\
\sqrt{6+4\sqrt{2}}&=\sqrt{2(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}|\sqrt{2}+1|=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1);\\
6-4\sqrt{2}&=2(3-2\sqrt{2})=2(2-2\sqrt{2}+1)=2(\sqrt{2}-1)^2;\\
\sqrt{6-4\sqrt{2}}&=\sqrt{2(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1).
\end{aligned}\right]$$

$$=\left(\frac{2(\sqrt{2}+1)^2(\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2})}{4(\sqrt{2}+1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2})}{4(\sqrt{2}-1)}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2}-\sqrt{2})}{2}+\frac{(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2}+\sqrt{2})}{2}\right)^4=$$

$$=(\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1)^4=(2\sqrt{2})^4=2^4\cdot 2^2=64.$$

2. $$\left(\frac{a\sqrt{a}-3\sqrt{a}+(a-1)\cdot\sqrt{a-4}+2}{a\sqrt{a}-3\sqrt{a}+(a-1)\cdot\sqrt{a-4}-2}\right)^{-2}\cdot\frac{a+\sqrt{a}-2}{a-\sqrt{a}-2}=$$

$$\left[\begin{array}{l} a\sqrt{a}\ -3\sqrt{a}+2 = a\sqrt{a}-\sqrt{a}-2(\sqrt{a}-1) = \sqrt{a}(a-1)-2(\sqrt{a}-1) = \\ \qquad = \sqrt{a}(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1) - 2(\sqrt{a}-1) = \\ \qquad = (\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}-2) = (\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1) = \\ \qquad = (\sqrt{a}-1)^2(\sqrt{a}+2); \\ a\sqrt{a}\ -3\sqrt{a}-2 = a\sqrt{a}-\sqrt{a}-2(\sqrt{a}+1) = \\ \qquad = \sqrt{a}(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1) - 2(\sqrt{a}+1) = \\ \qquad = (\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}-2) = (\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+1) = \\ \qquad = (\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-2); \\ \qquad \sqrt{a-4} = \sqrt{\sqrt{a}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-2}. \end{array}\right]$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{a}-1)^2(\sqrt{a}+2)+(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)\sqrt{\sqrt{a}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-2}}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-2)+(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)\sqrt{\sqrt{a}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-2}}\right)^{-2}\times$$

$$\times\frac{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+1)} =$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{a}-1)\sqrt{\sqrt{a}+2}\cdot\left((\sqrt{a}-1)\sqrt{\sqrt{a}+2}+(\sqrt{a}+1)\sqrt{\sqrt{a}-2}\right)}{(\sqrt{a}+1)\sqrt{\sqrt{a}-2}\left((\sqrt{a}+1)\sqrt{\sqrt{a}-2}+(\sqrt{a}-1)\sqrt{\sqrt{a}+2}\right)}\right)^{-2}\times$$

$$\times\frac{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+1)} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}-1)^2(\sqrt{a}+2)}\cdot\frac{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} = \frac{(\sqrt{a}+1)^2}{a-1} = \frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1}.$$

3. Упростите:

$$\frac{8a}{3} - \left(\frac{3a^{-\frac{1}{3}}+2}{3a^{-\frac{1}{3}}-2}\right)^2 : \left(\frac{4}{(2a^{\frac{1}{3}}-3)^3} - \frac{1}{8a-27}\right) =$$

$$= \frac{8a}{3} - \left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}(3+2a^{\frac{1}{3}})}{a^{-\frac{1}{3}}(3-2a^{\frac{1}{3}})}\right)^2 : \frac{4(4a^{\frac{2}{3}}+6a^{\frac{1}{3}}+9)-(2a^{\frac{1}{3}}-3)^2}{(2a^{\frac{1}{3}}-3)^2(2a^{\frac{1}{3}}-3)(4a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}\cdot 3+9)} =$$

$$= \frac{8a}{3} - \left(\frac{3+2a^{\frac{1}{3}}}{3-2a^{\frac{1}{3}}}\right)^2 : \frac{16a^{\frac{2}{3}}+24a^{\frac{1}{3}}+36-4a^{\frac{2}{3}}+12a^{\frac{1}{3}}-9}{(2a^{\frac{1}{3}}-3)^2(8a-27)} =$$

$$= \frac{8a}{3} - \left(\frac{2a^{\frac{1}{3}}+3}{2a^{\frac{1}{3}}-3}\right)^2 : \frac{12a^{\frac{2}{3}}+36a^{\frac{1}{3}}+27}{(2a^{\frac{1}{3}}-3)^2(8a-27)} =$$

$$= \frac{8a}{3} - \left(\frac{2a^{\frac{1}{3}}+3}{2a^{\frac{1}{3}}-3}\right)^2 \cdot \frac{(2a^{\frac{1}{3}}-3)^2(8a-27)}{3(2a^{\frac{1}{3}}+3)^2} =$$

$$= \frac{8a}{3} - \frac{8a-27}{3} = \frac{27}{3} = 9.$$

4. $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$,

$a = \sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}$; $\quad a^3 = 6+\sqrt{\frac{847}{27}}$;

$b = \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$; $\quad b^3 = 6-\sqrt{\frac{847}{27}}$.

тогда $a^3+b^3 = 12$.

$$a \cdot b = \sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} \cdot \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}} = \sqrt[3]{6^2-\frac{847}{27}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{972-847}{27}} = \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{5}{3}.$$

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) = (a+b)((a+b)^2-3ab) =$$

$$= (a+b)\left((a+b)^2 - 3\cdot\frac{5}{3}\right) = (a+b)^3 - 5(a+b) = 12.$$

Пусть $a+b=t$;

$$\begin{aligned} t^3-5t-12 &= 0 \\ t^3-9t+4t-12 &= 0 \\ t(t^2-9)+4(t-3) &= 0 \\ (t-3)(t^2+3t+4) &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned} &t-3=0 \\ &(t+1{,}5)^2+1{,}75=0 \end{aligned}\right. \iff t=3.$$

Итак, $a+b=3$, то есть $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}} = 3.$

Содержание

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Подписано к печати 15.08.2011 г. Формат 60х90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 11,5 печ. л. Тираж 2500 экз. Заказ № 339.

Отпечатано с диапозитивов в ГППО «Псковская областная типография».
180004, г. Псков, ул. Ротная, 34