В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

А.Н. РУРУКИН, С.А. ПОЛЯКОВА

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ

по АЛГЕБРЕ

к учебнику Ю.Н. Макарычева

9 КЛАСС

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

А. Н. РУРУКИН
С. А. ПОЛЯКОВА

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО АЛГЕБРЕ

к учебнику
Ю.Н. Макарычева и др.
(*М.: Просвещение*)

9 класс

МОСКВА • «ВАКО» • 2010

УДК 373:167.1:51
ББК 74.262.21
Р87

Рурукин А.Н., Полякова С.А.

Р87 Поурочные разработки по алгебре: 9 класс. – М.: ВАКО, 2010. – 336 с. – (В помощь школьному учителю).

ISBN 978-5-408-00197-2

Издание представляет собой поурочные разработки по алгебре для 9 класса к учебнику Ю.Н. Макарычева и др. (М. : Просвещение) и содержит все, что необходимо педагогу для полноценной подготовки к урокам: поурочные планы, методические советы и рекомендации, творческие задания, самостоятельные, контрольные и зачетные работы с подробным разбором. Изучаемый материал представлен в расширенном объеме, что позволит учителю подробно разобрать с девятиклассниками наиболее сложные темы и качественно подготовить учащихся к Государственной итоговой аттестации.

Пособие будет полезно как начинающим педагогам, так и преподавателям со стажем.

УДК 373:167.1:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-408-00197-2

Предисловие

Напомним особенности 9 класса. К окончанию этого класса учащиеся, занимающиеся по различным программам, должны получить равноценный объем и качество знаний и сдавать экзамены в одинаковых условиях (или в традиционной форме, или в форме государственной итоговой аттестации). Поэтому 9 класс – этап **систематизации и уточнения знаний, подведения определенных итогов.**

В этом классе рассматриваются и уточняются понятия, связанные с функцией и графиком функции, уравнениями и системами уравнений, неравенствами, арифметической и геометрической прогрессиями, основами комбинаторики и теории вероятности. В первую очередь необходимо уделять внимание развитию навыков решения задач по указанным темам.

Поэтому данное пособие преследует **три основные цели**: изучить материал по алгебре для 9 класса, подготовиться по этим разделам к успешной сдаче ГИА (а в дальнейшем и ЕГЭ) и быть готовым использовать полученные знания при обучении в вузе. Пособие составлено для учебника Ю.Н. Макарычева и др. (М.: Просвещение). Нумерация задач в поурочном планировании дана для этого учебника.

В пособии подробно рассмотрено содержание каждого урока. Несколько расширен изучаемый материал: подробнее рассмотрены основные свойства функции и построение графиков функции, даны дополнительные типы уравнений и неравенств, детальнее изучены прогрессии. Такое расширение материала вполне доступно для девятиклассников, дает более цельное представление о рассматриваемых темах и подготавливает к сдаче ГИА. Особое внимание уделено задачам, содержащим модули или параметры. Практика показывает, что именно они вызывают наибольшие трудности у учащихся (и не только 9 класса). Предусмотрены различные формы контроля успеваемости.

В целом пособие составлено таким образом, чтобы оптимизировать подготовку учителя к уроку, повысить ее качество и при этом сэкономить время учителя.

Рекомендации к проведению уроков

Данное пособие позволяет проводить занятия с использованием базового УМК Ю.Н. Макарычева и др. (М.: Просвещение) и рассчитано на 102 урока в год. Содержание уроков является избыточным (в расчете на сильный, подготовленный класс). При необходимости часть материала опускается или излагается достаточно поверхностно. При подробном, детальном изложении материала его вполне хватает для максимального варианта (136 часов в год). Учитывая сложность курса, проведение контрольных работ и тематических зачетов, желательно иметь в расписании сдвоенные уроки математики.

Поурочное планирование включает четыре вида занятий:

1. Урок на изучение нового материала.
2. Урок на отработку и закрепление пройденного материала.
3. Контрольная работа.
4. Тематический зачет.

Рассмотрим эти виды занятий.

Урок на изучение нового материала включает в себя семь этапов.

I. Сообщение темы и цели урока делает учитель (~1–2 мин). Требуется донести до учащихся необходимость изучения данной темы (области применения этих знаний) и цель урока (навыки и приемы, которые должны быть усвоены).

II. Изучение нового материала (~15 мин) возможно двумя путями.

1. С помощью подсказок, примеров и наводящих вопросов учителя школьники самостоятельно (при фронтальной работе) приходят к формулировке основных понятий и правил рассматриваемого раздела алгебры. Затем учитель уточняет и корректирует эти результаты. Однако, учитывая сложность курса, этот подход можно рекомендовать лишь для самых простых тем или отдельных фрагментов урока.

2. Учитель формулирует основные понятия и правила, иллюстрируя их примерами. Такой подход требует меньше времени, но менее эффективен (всегда полезнее самостоятельно решить задачу, если услышать объяснение ее решения).

III. Контрольные вопросы по изучаемому материалу задает учитель для проверки усвоения и понимания возникающих понятий, терминов и т. д. (~5 мин). Вопросы могут задаваться как индивидуально, так и фронтально. Следует обратить внимание именно на понимание понятий, а не на их механическое запоминание. Для этого рекомендуется попросить ученика дать определения и привести соответствующие примеры. В случае затруднения такие примеры могут привести другие школьники или учитель.

IV. Задание на уроке дает учитель из числа наиболее характерных, типовых задач (~15 мин). Задание может выполняться:

1. Самостоятельно учащимися всего класса в тетрадях с последующим разбором кем-то из школьников (например, первым выполнившим задание) у доски. При этом желательна активная работа всех учащихся: поиск ошибок в решении на доске, вопросы по решению, другие способы решения и т. д.

2. В виде диалога учащихся за одной партой: решение задания, обмен тетрадями и взаимная проверка решения.

3. Работа у доски одного или нескольких школьников. После выполнения задания возможен как взаимоконтроль школьников у доски, так и подключение к проверке всего класса. Разумеется, при этом происходит и диалог учителя с отвечающим у доски.

V. Задание на дом дается учителем из числа типовых задач, аналогичных рассмотренным в классе. Задание должно быть рассчитано на 60–80 мин. Если возможно, то желательно, чтобы учащимися были рассмотрены разные способы решения задачи. Это приводит к активизации мышления школьников, творческому восприятию материала и т. д.

При выполнении домашнего задания необходимо приучить учеников фиксировать непонятый материал: теоретические сведения, нерешенные задачи и т.п. Полезно научить школьников формулировать, что именно им непонятно. Четко сформулированный вопрос – это половина ответа на этот вопрос. Особенно такие навыки понадобятся учащимся при обучении в старших классах и вузе, подготовке к сдаче зачетов и экзаменов. Разумеется, все возникающие вопросы и нерешенные задачи необходимо разобрать на ближайшем занятии.

VI. Во многих уроках предусмотрены **творческие задания**. Эти задания отличаются от приводимых в учебнике или непривычностью условия, или большей сложностью, или новым способом решения. Поэтому рассмотрение подобных задач очень полезно. В зависимости от подготовленности класса эти задания могут быть рассмотрены:

1) на внеклассных занятиях (факультативы, кружки, дополнительные занятия и т. д.);

2) со всеми учащимися как в качестве задания в классе, так и в качестве домашнего задания;

3) дифференцированно с наиболее подготовленными школьниками или на уроке, или в виде домашнего задания;

4) во время проведения математических турниров, олимпиад, боев, недель математики и т. д.

VII. Подведение итогов урока (~1–2 мин) проводится учителем с учетом самостоятельной работы школьников, ответов у доски, отдельных дополнений, вопросов, комментариев учеников. За все эти виды деятельности выставляются оценки с их кратким обоснованием.

Урок на обработку и закрепление пройденного материала отличается этапом II. Теперь на этом этапе предусмотрено повторение материала и отработка навыков решения задач (~20 мин). Прежде всего оно включает ответы на вопросы по домашнему заданию. Желательно, чтобы такие ответы давались самими учащимися. Вопросы могут включать в себя непонятые определения, термины, правила и другой теоретический материал. По-видимому, возникнет необходимость разбора нерешенных задач.

В этой части урока желательна максимальная активность всего класса. Школьник, объясняя и комментируя свое решение задачи, лучше усваивает изучаемый материал. Кроме того, его объяснения могут оказаться более понятными и доступными для понимания ровесниками, чем пояснения учителя.

Ориентировочное время на такую стадию этапа II ~ 5–10 мин.

На второй стадии этого этапа предусмотрен контроль усвоения материала (тест, письменный опрос или самостоятельная работа), на который отводится ~ 10–15 мин.

В материалах уроков тесты используются в небольшом количестве для наиболее простых тем. Это связано с тем, что тестирование не дает возможности выявить причину ошибки: непонимание темы, пробелы в предыдущих темах, невнимательность, арифметические ошибки и т. д.

Письменный опрос содержит теоретический вопрос и 1–2 задачи, аналогичные заданию в классе и домашнему заданию. При проверке ответа на теоретический вопрос следует в первую очередь обращать внимание на его понимание, а не на строгость и четкость формулировок.

Самостоятельная работа включает 2–3 типовые характерные задачи. При проведении работы обращайте внимание на рациональный подход к решению задач.

По каждой изучаемой теме приводится **контрольная работа.** Она составлена в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее, 5, 6 – самые сложные). Вариант содержит 6 задач, из которых две последние чуть сложнее предыдущих. Как правило, задачи вариантов подобны задачам, решаемым в классе и дома. Выбор вариантов может быть сделан или самими учащимися (с учетом их самооценки), или учителем (с учетом успехов школьника).

Оцениваться контрольная работа может следующим образом: в вариантах 1, 2 за любые пять решенных задач ставится оценка «5», за четыре задачи – оценка «4», за три задачи – оценка «3». Шестая задача дает учащимся некоторую свободу выбора и определенный резерв. При таких же критериях за решение заданий вариантов 3,4 добавляется 0,5 балла, заданий вариантов 5, 6 – добавляется 1 балл (учитывая большую сложность их задач).

Контрольная работа рассчитана на два урока (на наш взгляд, это оптимальное время для написания работы). Изучаемый в 9 классе материал достаточно сложен. Для решения предлагаемых задач требуется время на размышление. Поэтому одного урока на проведение контрольной работы недостаточно. При необходимости за счет уменьшения количества задач или за счет некоторого либерализма при проверке работа может быть проведена и за один урок.

После каждой контрольной работы проводится ее **анализ и разбор** наиболее сложных задач. Ко всем заданиям вариантов 1–4 приведены ответы, задания вариантов 5, 6 разобраны. Полезно после контрольной работы вывешивать на стенде в классе разбор заданий всех вариантов. Заметим, что за счет дифференциации самих вариантов и заданий в них возможна некоторая необъективность оценок за контрольную работу.

Чтобы устранить подобную необъективность, дать возможность повышения оценок у школьников, еще раз **повторить и закрепить** пройденную тему, на последних занятиях проводится письменный **тематический зачет**. Зачет составлен в двух равноценных вариантах. Задания каждого варианта по сложности разделяются на три группы (группа А – самые простые задачи, группа В – более сложные задачи, группа С – самые сложные задачи). Каждая задача из А оценивается в 1 балл, из В – в 2 балла, из С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Заметим, что в зависимости от сложности и трудоемкости изучаемой темы количество задач в контрольной и зачетной работах может варьироваться.

Разумеется, все изложенное носит исключительно рекомендательный характер. Определяющими факторами являются подготовленность класса, его работоспособность, интерес к изучению алгебры. Поэтому ни одно планирование не может являться догмой. Весь ход урока должен способствовать обучению школьников. Пусть каждый отдельный школьник лучше усвоит тот материал, который в состоянии понять, чем не поймет ничего.

Причина, по которой нельзя создать универсальное пособие, – наличие нескольких различных вариантов обучения (с соответствующим тематическим планированием и разным количеством часов на обучение: 102 или 136 часов в год).

Очень смущает последняя тема 9 класса «Элементы комбинаторики и теории вероятностей». Она представляет собой достаточно изолированный раздел математики со своеобразными понятиями, логикой, методикой решения задач. На наш взгляд, изучение такой темы в средней школе, а особенно в 9 классе, нецелесообразно. Практика показывает, что изучение ее даже в 11 классах физико-математических лицеев вызывает значительные трудности.

Тематическое планирование учебного материала

I вариант: 3 часа в неделю, всего 102 часа.
II вариант: 4 часа в неделю, всего 136 часов.

Глава I. Квадратичная функция
(I вариант – 22 ч, II вариант – 29 ч)

§ 1. Функции и их свойства (5 ч; 7 ч)
§ 2. Квадратный трехчлен (4 ч; 5 ч)
Контрольная работа № 1 (1 ч; 1 ч)
§ 3. Квадратичная функция и ее график (8 ч; 11 ч)
§ 4. Степенная функция. Корень n-й степени (3 ч; 4 ч)
Контрольная работа № 2 (1 ч; 1 ч)

Глава II. Уравнения и неравенства с одной переменной
(14 ч; 20 ч)

§ 5. Уравнения с одной переменной (8 ч; 12 ч)
§ 6. Неравенства с одной переменной (5 ч; 7 ч)
Контрольная работа № 3 (1 ч; 1 ч)

Глава III. Уравнения и неравенства с двумя переменными
(17 ч; 24 ч)

§ 7. Уравнения с двумя переменными и их системы (12 ч; 16 ч)
§ 8. Неравенства с двумя переменными и их системы (4 ч; 7 ч)
Контрольная работа № 4 (1 ч; 1 ч)

Глава IV. Арифметическая и геометрическая прогрессии
(15 ч; 17 ч)

§ 9. Арифметическая прогрессия (7 ч; 8 ч)
Контрольная работа № 5 (1 ч; 1 ч)
§ 10. Геометрическая прогрессия (6 ч; 7 ч)
Контрольная работа № 6 (1 ч; 1 ч)

Глава V. Элементы комбинаторики и теории вероятностей
(13 ч; 17 ч)

§ 11. Элементы комбинаторики (9 ч; 11 ч)
§ 12. Начальные сведения из теории вероятностей (3 ч; 5 ч)
Контрольная работа № 7 (1 ч; 1 ч)

Повторение (21 ч; 29 ч)

Итоговая контрольная работа (2 ч; 2 ч)

Глава I. Квадратичная функция

§ 1. Функции и их свойства

Уроки 1–2. Функция. Область определения и область значений функции

***Цель*:** рассмотреть понятие функции и способы ее задания.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

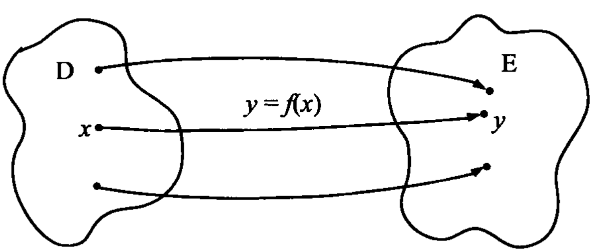
II. Изучение нового материала

Эта тема является одной из *важнейших* для всего курса математики. Различные функции будут изучаться вплоть до окончания школы и далее в высших учебных заведениях. Пока же вы познакомитесь с самыми простыми функциями – линейными, квадратичными, дробно-линейными и другими функциями и их графиками. Также вы получите первое представление о графиках уравнений и неравенств.

Данная тема вплотную связана с решением уравнений, неравенств, текстовыми задачами и т. д. Поэтому обратите самое серьезное внимание на ее изучение. Особое внимание следует уделить развитию навыков построения графиков функций, уравнений, неравенств.

1. Понятие функции

Пусть даны два множества действительных чисел D и E и указан закон f, по которому *каждому числу* $x \in D$ ставится в соответствие единственное число $y \in E$ (см. рис.). Тогда говорят, что задана функция $y = f(x)$ с областью определения (О.О.) D и областью значений (О.З.) E. При этом величину x называют *независимой переменной* (или *аргументом* функции), величину y – *зависимой переменной* (или *значением* функции).



Область определения $y = f(x)$ обозначают $D(f)$, область значений $E(f)$.

Другими словами, ***функцией называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.***

Пример 1

Рассмотрим функцию $y=\sqrt{x-2}+3$. Для нахождения y для каждого значения x необходимо выполнить следующие операции: от величины x вычесть число 2 ($x - 2$), извлечь квадратный корень из этого выражения ($\sqrt{x-2}$) и, наконец, прибавить число 3 ($\sqrt{x-2}+3$). Совокупность этих операций (или закон, по которому для каждого значения x ищется величина y) и *называется функцией* $y(x)$. Например, для $x = 6$ находим $y(6)=\sqrt{6-2}+3=\sqrt{4}+3=$ $=2+3=5$. То есть для вычисления функции y в данной точке x необходимо подставить эту величину x в данную функцию $y(x)$.

Очевидно, что для данной функции *для любого* допустимого числа x можно найти только *одно* значение y (т. е. каждому значению x соответствует *одно* значение y).

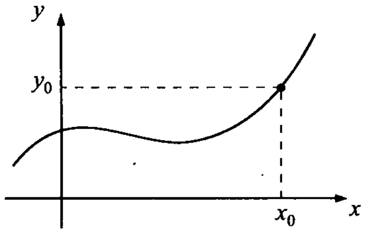
Рассмотрим теперь область определения и область значений этой функции. Извлечь квадратный корень из выражения ($x - 2$) можно только, если эта величина неотрицательная, т. е. $x - 2 \geq 0$, или $x \geq 2$. Поэтому О.О. функции $D(y) = [2; +\infty)$. Так как по определению арифметического корня $0\leq\sqrt{x-2}<+\infty$, то прибавив ко всем частям этого неравенства число 3, получим $3\leq\sqrt{x-2}+3<+\infty$, или $3\leq y < +\infty$. Поэтому О.З. функции $E(y) = [3; +\infty)$.

Пример 2

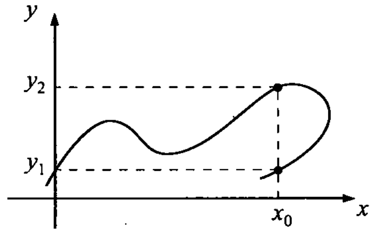
Зависимость $y(x)=\begin{cases}2x-3,\\ x^2+1\end{cases}$ уже не является функцией. Действительно, если мы хотим вычислить значение y, например, для $x = 1$, то, пользуясь верхней формулой, найдем $y = 2\cdot1 - 3 = -1$, а пользуясь нижней формулой, получим $y = 1^2 + 1 = 2$. Таким образом, одному значению x ($x = 1$) соответствуют два значения y ($y = -1$ и $y = 2$). Поэтому эта зависимость (по определению) не является функцией.

Пример 3

Приведены графики двух зависимостей $y(x)$. Определить, какая из них является функцией.



а



б

На рис. *а* приведен график функции, т. к. любой точке x_0 соответствует только одно значение y_0. На рис. *б* приведен график какой-то зависимости (но не функции), т. к. существуют такие точки (например, x_0), которым отвечает более одного значения y (например, значения y_1 и y_2).

2. Способы задания функций

1) *Аналитический* (с помощью формулы или формул)

Пример 4

Рассмотрим функции:

а) $y = x^2 + 3\sqrt{x}$;

б) $y = \begin{cases} x, \text{ если } x < 0, \\ x^2, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$ Несмотря на непривычную форму, это соотношение также задает функцию. Для любого значения x легко найти величину y. Например, для $x = -0{,}37$. Так как $x < 0$, то, пользуясь верхним выражением, получаем: $y(-0{,}37) = -0{,}37$. Для $x = \dfrac{2}{3}$ (т. к. $x > 0$, то пользуемся нижним выражением) имеем: $y\left(\dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$. Из способа нахождения y понятно, что любой величине x отвечает только одно значение y.

в) $3x + y = 2y - x^2$. Выразим из этого соотношения величину y: $3x + x^2 = 2y - y$, или $x^2 + 3x = y$. Таким образом, это соотношение также задает функцию $y = x^2 + 3x$.

2) *Табличный*

Пример 5

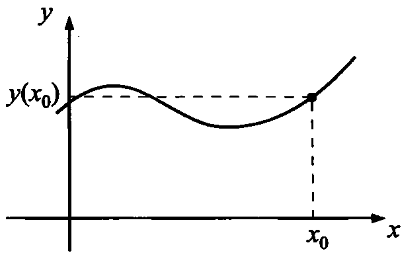
Выпишем таблицу квадратов y для чисел x.

x	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7
y	1	2,25	4	6,25	9	16	25	36	49

Такая таблица также задает функцию: для каждого (приведенного в таблице) значения x можно найти единственное значение y. Например, $y(1,5) = 2,25$, $y(5) = 25$ и т. д.

3) *Графический*

В прямоугольной системе координат для изображения функциональной зависимости $y(x)$ удобно пользоваться *специальным рисунком – графиком функции.*



Графиком функции $y(x)$ называют *множество* всех *точек* системы координат, *абсциссы* которых равны значениям *независимой переменной* x, а *ординаты* – соответствующим значениям *зависимой переменной* y.

В силу такого определения все пары точек (x_0, y_0), которые удовлетворяют функциональной зависимости $y(x)$, расположены на графике функции. Любые другие пары точек, не удовлетворяющие зависимости $y(x)$, на графике функции не лежат.

Пример 6

Дана функция $y = 2x - 3|x| + 4$. Принадлежит ли графику этой функции точка с координатами: а) $(-2; -6)$; б) $(-3; -10)$?

а) Найдем значение функции y при $x = -2$: $y(-2) = 2\cdot(-2) - 3|-2| + 4 = -4 - 3\cdot 2 + 4 = -6$. Так как $y(-2) = -6$, то точка $A(-2; -6)$ принадлежит графику данной функции.

б) Определим значение функции y при $x = -3$: $y(-3) = 2\cdot(-3) - 3|-3| + 4 = -6 - 3\cdot 3 + 4 = -11$. Так как $y(-3) = -11$, то точка $B(-3; -10)$ не принадлежит графику этой функции.

Сравним различные способы задания функции. Наиболее полным следует считать аналитический способ. Этот способ позволяет составить таблицу значений функции для некоторых значений аргументов, построить график функции, провести необходимое исследование функции. Вместе с тем табличный способ позволяет быстро и легко найти значение функции для некоторых значений аргумента. График функции наглядно показывает ее поведение. Поэтому противопоставлять различные способы задания функции не следует: каждый из них имеет свои преимущества и свои недостатки. На практике используются все три способа задания функции.

В дальнейшем будем считать основным аналитический способ задания функции и рассмотрим еще несколько задач.

Пример 7

Дана функция $y = 2x^2 - 3x + 1$. Найти: а) $y(2)$; б) $y(-3x)$; в) $y(x + 1)$.

Для того чтобы найти значение функции при каком-то значении аргумента, необходимо подставить это значение аргумента в аналитический вид функции. Поэтому получим:

а) $y(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$;

б) $y(-3x) = 2(-3x)^2 - 3(-3x) + 1 = 18x^2 + 9x + 1$;

в) $y(x + 1) = 2(x + 1)^2 - 3(x + 1) + 1 = 2(x^2 + 2x + 1) - 3x - 3 + 1 = 2x^2 + x$.

Пример 8

Известно, что $y(3 - x) = 2x^2 - 4$. Найти: а) $y(x)$; б) $y(-2)$.

а) Обозначим буквой $z = 3 - x$, тогда $x = 3 - z$. Подставим это значение x в аналитический вид данной функции $y(3 - x) = 2x^2 - 4$ и получим: $y(3 - (3 - z))^2 - 4$, или $y(z) = 2\cdot(3 - z)^2 - 4$, или $y(z) = 2\cdot(9 - 6z + z^2) - 4$, или $y(z) = 2z^2 - 12z + 14$. Так как безразлично, какой буквой обозначен аргумент функции: z, x, t или любой другой, то сразу получаем: $y(x) = 2x^2 - 12x + 14$.

б) Теперь легко найти $y(-2) = 2\cdot(-2)^2 - 12\cdot(-2) + 14 = 8 + 24 + 14 = 46$.

III. Контрольные вопросы

1. Дайте определение функции и поясните примером.
2. Что такое область определения и область значений функции? Приведите примеры.
3. Перечислите основные способы задания функций.

IV. Задание на уроке

№ 1; 4; 5(а); 6(б); 7; 9(а, в, е); 10; 12; 14(а); 15.

V. Задание на дом

№ 2; 3; 5(б); 6(а); 8; 9(б, г, д); 11; 13; 14(б); 16.

VI. Творческие задания

1. Найдите область определения функции.

а) $y = \dfrac{3 - x}{|x| - 5}$;   д) $y = \dfrac{5x^2 - 3x - 2}{7 - \dfrac{|x - 3|}{x + 3}}$;

б) $y=\dfrac{6x^2-3x+1}{|x-2|-1}$;

в) $y=\dfrac{3-x}{2-\dfrac{x}{x+5}}$;

г) $y=\dfrac{7x^2-14}{3-\dfrac{|x|}{x+2}}$;

е) $y=\dfrac{\sqrt{3-|x+1|}}{x+2}$;

ж) $y=\dfrac{\sqrt{|5x+2|-3}}{(x+2)(x-1)}$;

з) $y=\dfrac{\sqrt{|x+1|-2}}{\sqrt{5-|x-1|}}$.

Ответы: а) $x\neq\pm5$; б) $x\neq1$ и $x\neq3$; в) $x\neq-5$ и $x\neq-10$; г) $x\neq-2$ и $x\neq-1{,}5$; д) $x\neq-3$ и $x\neq-\dfrac{9}{4}$; е) $-4\le x\le2$ и $x\neq-2$; ж) $x\le-1$ $(x\neq-2)$ и $x\ge\dfrac{1}{5}(x\neq1)$; з) $x\in(-4;\,-3]\cup[1;\,6)$.

2. Известно значение функции $y(6-x)$. Найдите функцию $y(x)$.

а) $y(6-x)=5+x$;

б) $y(6-x)=\dfrac{2x+1}{3x-2}$;

в) $y(6-x)=2x^2-3x+4$;

г) $y(6-x)=2-|x+3|$;

д) $y(6-x)=\dfrac{3|x-1|+2}{2x-1}$.

Ответы: а) $y(x)=11-x$; б) $y(x)=\dfrac{13-2x}{16-3x}$; в) $y(x)=2x^2-21x+58$; г) $y(x)=2-|x-9|$; д) $y(x)=\dfrac{3|x-5|+2}{11-2x}$.

3. Известно значение функции $y(2x-4)$. Найдите функцию $y(x)$.

а) $y(2x-4)=3-2x$;

б) $y(2x-4)=\dfrac{2x-1}{4x+2}$;

в) $y(2x-4)=4x^2+2x-5$;

г) $y(2x-4)=4x-2|x+1|$;

д) $y(2x-4)=\dfrac{2|x+1|+3}{4|x|-8}$.

Ответы: а) $y(x)=-x-1$; б) $y(x)=\dfrac{x+3}{2x+10}$; в) $y(x)=x^2+9x+13$; г) $y(x)=2x+8-|x+6|$; д) $y(x)=\dfrac{|x+6|+3}{2|x+4|-8}$.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 3–6. Свойства и графики основных функций

Цель: вспомнить изученные ранее функции и их свойства.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найдите значения функции $y(-2) \cdot y(1)$.

а) $y = 3x - 2$;

б) $y = 2x + 3 - |3x - 1|$;

в) $y = \dfrac{3x-7}{2x+3}$.

2. Найдите область определения функции.

а) $y = 5x - 7$;

б) $y = 3x^2 - |5x + 2|$;

в) $y = \dfrac{7x-3|x+1|}{3x^2-2x-1}$.

Вариант 2

1. Найдите значения функции $y(-3) \cdot y(2)$.

а) $y = 5x - 3$;

б) $y = 3x - 2 + |2x - 3|$;

в) $y = \dfrac{4x-3}{3x+2}$.

2. Найдите область определения функции.

а) $y = 3x - 8$;

б) $y = 2x^2 - |3x + 4|$;

в) $y = 4\dfrac{5x-2|x-3|}{3x^2-3x-1}$.

III. Изучение нового материала

1. Свойства функции

Как уже известно из курса 7–8 классов, любая функция характеризуется определенными свойствами. Часть этих свойств была рассмотрена ранее. Теперь необходимо систематизировать эти свойства и рассматривать их при исследовании любых функций и построении их графиков.

Остановимся теперь на *свойствах функции*. С двумя свойствами функции вы уже знакомы – это *область определения* и *область значений* функции. Рассмотрим следующее свойство функции – *точка пересечения графика функции с осями координат.*

Так как ось Oy характерна тем, что любая точка на ней имеет координату $x = 0$, а для оси Ox – любая точка на ней имеет координату $y = 0$, то точки пересечения графика с осями координат ищутся очень просто. *Точка пересечения с осью Oy* равна *значению* функции $y(x)$ *при* $x = 0$, т. е. $y(0)$. *Точки пересечения с осью Ox* являются *корнями уравнения* $y(x) = 0$ и называются *нулями функции.*

Пример 1

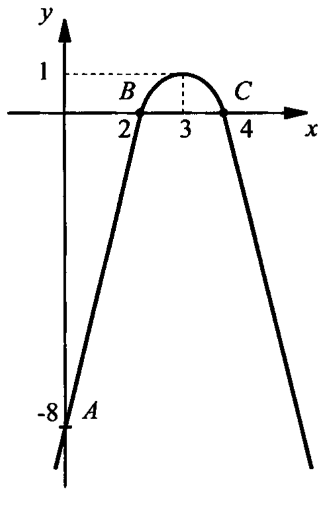
Рассмотрим функцию $y(x) = -x^2 + 6x - 8$.

Найдем точки пересечения графика этой функции с осями координат. Чтобы определить точку пересечения графика с осью ординат, вычислим значение функции $y(x)$ при $x = 0$: $y(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 - 8 = -8$. Получаем координаты этой точки $A(0; -8)$.

Теперь определим точки пересечения графика данной функции с осью абсцисс. Для этого в функцию $y = -x^2 + 6x - 8$ подставим значение $y = 0$ и получим квадратное уравнение $0 = -x^2 + 6x - 8$, или $0 = x^2 - 6x + 8$.

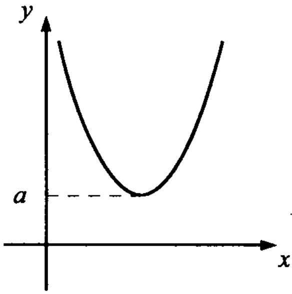
Решим его: $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2}$, т. е. $x_1 = 2, x_2 = 4$.

Поэтому график функции пересекает ось абсцисс в двух точках: $B(2; 0)$ и $C(4; 0)$. Для наглядности на рисунке приведен график данной функции (здесь мы несколько забежали вперед).

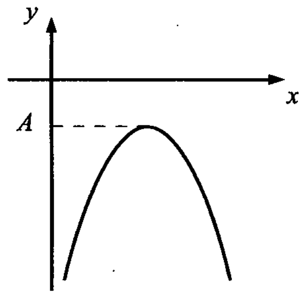


Следующее свойство – *ограниченность функции*. Функция называется *ограниченной снизу*, если все значения функции *не меньше* некоторого *числа a* (т. е. $y(x) \geq a$). Функция называется *ограниченной сверху*, если все значения функции *не больше* некоторого *числа A* (т. е. $y(x) \leq A$). Если функция ограничена *снизу* и *сверху*, то она называется *ограниченной*. На рисунке приведены графики ограниченных и неограниченных функций.

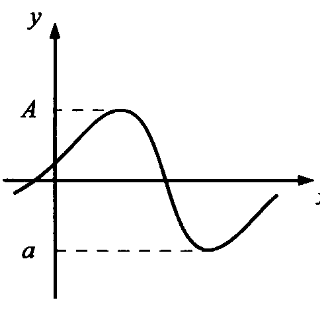
Для выяснения ограниченности функции очень часто используются алгебраические преобразования.



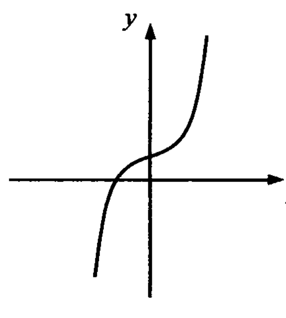
Ограничена снизу



Ограничена сверху



Ограниченная



Неограниченная

Пример 2

Докажем, что функция $y(x) = -x^2 + 6x - 8$ ограничена сверху.

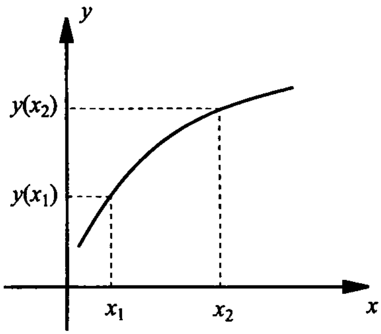
Выделим в функции $y(x) = -(x^2 - 6x + 8)$ полный квадрат разности. Для этого в скобках прибавим и вычтем единицу.

Получаем: $y(x) = -(x^2 - 6x + 8) = -((x^2 - 6x + 9) - 1) = -((x-3)^2 - 1) = 1 - (x-3)^2$.

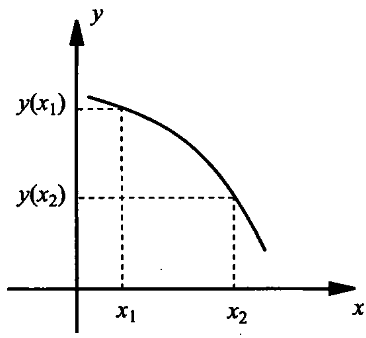
Так как при всех значениях x величина $(x - 3)^2 \geq 0$, величина $-(x-3)^2 \leq 0$, то $1 - (x-3)^2 \leq 1$, т. е. $y(x) \leq 1$. Тогда по определению данная функция ограничена сверху (при этом число A, входящее в определение, равно 1). Из графика примера 1 наглядно видно, что при всех значениях x значения $y(x) \le 1$.

Рассмотрим еще одно свойство функции – монотонность (т. е. *возрастание* или *убывание* функции). Функция называется *возрастающей*, если *бóльшему значению аргумента* соответствует *бóльшее значение функции* (т. е. если $x_2 > x_1$, то $y(x_2) > y(x_1)$). Функция называется *убывающей*, если *бóльшему значению аргумента* соответствует *меньшее значение функции* (т. е. если $x_2 > x_1$, то $y(x_2) < y(x_1)$).

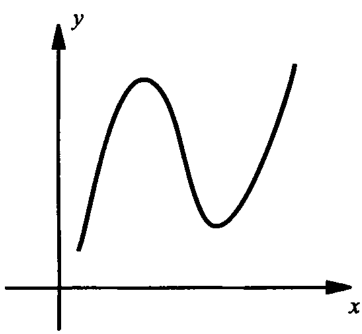
На рисунке приведены графики монотонных (возрастающей и убывающей) и немонотонной функций.



Возрастающая функция
$y(x_2) > y(x_1)$



Убывающая функция
$y(x_2) < y(x_1)$



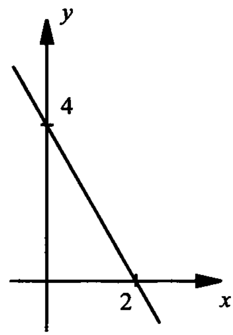
Немонотонная функция

Пример 3

Определить монотонность функции $y(x) = -2x + 4$.

Область определения этой функции – все значения x, т. е. $x \in (-\infty; +\infty)$. Возьмем два значения x из области определения этой функции x_1 и x_2 и пусть $x_2 > x_1$. Найдем значения функции в этих точках: $y(x_1) = -2x_1 + 4$ и $y(x_2) = -2x_2 + 4$. Теперь необходимо сравнить эти значения и определить, какое из них больше. Для этого рассмотрим разницу этих величин: $y(x_2) - y(x_1) = (-2x_2 + 4) - (-2x_1 + 4) = -2x_2 + 4 + 2x_1 - 4 = -2(x_2 - x_1)$.

Так как $x_2 > x_1$, то разность $x_2 - x_1 > 0$ и величина $-2(x_2 - x_1) < 0$. Поэтому получаем: $y(x_2) - y(x_1) < 0$, или $y(x_2) < y(x_1)$. Это неравенство означает, что большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Поэтому данная функция (по определению) является убывающей. Это же видно из приведенного графика функции.



Функция во всей области определения может быть немонотонной, но на отдельных промежутках функция может быть монотонной. Например, в примере 1 функция в целом немонотонная, но на промежутке $x \in [3; +\infty)$ функция убывает, а на промежутке $x \in (-\infty; 3]$ – возрастает (докажите самостоятельно).

И наконец, рассмотрим еще одно свойство функции – *четность*. Предварительно введем еще одно понятие – *симметричность области определения*. Область определения называется *симметричной*, если *функция определена и в точке* x_0, *и в точке* $(-x_0)$ (т. е. в точке, симметричной x_0 относительно начала числовой оси).

Пример 4

а) Областью определения функции $y = \dfrac{2-3x}{x^2-4}$ являются все значения x, кроме тех, для которых $x^2 - 4 = 0$ (т. е. $x = \pm 2$). Поэтому эта функция определена, например, как при $x = -1$, так и при $x = -(-1) = 1$.

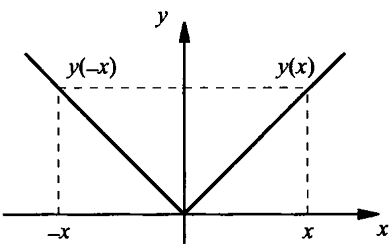
И наоборот, эта функция не определена и при $x = -2$, и при $x = -(-2) = 2$. Следовательно, область определения данной функции $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ симметричная.

б) Областью определения функции $y = \dfrac{2-3x}{x-4}$ являются все значения x, кроме тех, для которых $x - 4 = 0$ (т. е. $x = 4$). Поэтому эта функция определена в точке $x = -4$, но не определена в симметричной точке $x = -(-4) = 4$. Поэтому область определения данной функции $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$ не является симметричной.

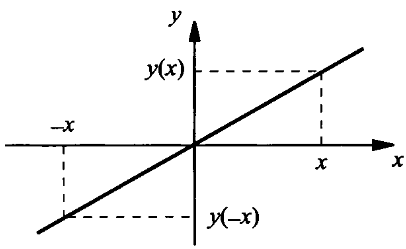
Понятие *четности* функции вводится *только* для функции *с симметричной областью определения*. Функция называется *четной*, если *при изменении знака аргумента, значение функции не меняется*, т. е. $y(-x) = y(x)$. График четной функции всегда *симметричен относительно оси ординат*.

Функция называется *нечетной*, *если при изменении знака аргумента, значение функции* также *меняется на противоположное*, т. е. $y(-x) = -y(x)$. График нечетной функции всегда *симметричен относительно начала координат*.

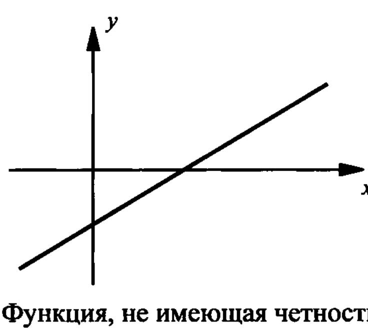
На рисунке приведены (для наглядности) графики четной, нечетной функции и функции, не имеющей никакой четности.



Четная функция $y(-x) = y(x)$



Нечетная функция $y(-x) = -y(x)$



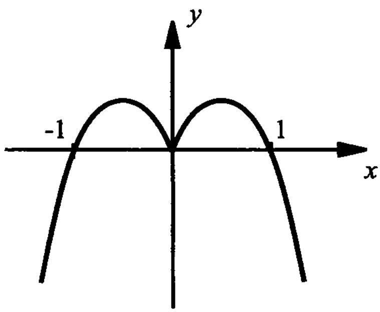
Функция, не имеющая четности

Пример 5

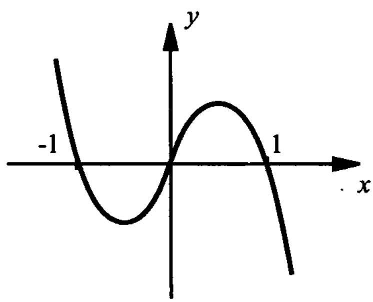
Выяснить четность функций: а) $y = |x| - x^2$; б) $y = x - x^3$; в) $y = x - 2$.

Прежде всего отметим, что области определения всех трех функций $x \in (-\infty; +\infty)$ симметричны. Для выяснения четности этих функций $y(x)$ надо найти значение $y(-x)$ и сравнить значения $y(x)$ и $y(-x)$.

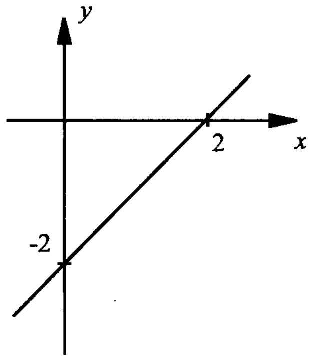
а) $y(-x) = |-x| - (-x)^2 = |x| - x^2$ (здесь учтено, что $|-x| = |x|$ и $(-x)^2 = x^2$). Теперь легко видеть, что $y(-x)$ совпадает с данной функцией $y(x)$, т. е. $y(-x) = y(x)$. Поэтому данная функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат.



б) $y(-x) = -x - (-x)^3 = -x - (-x)^3 = -x + x^3 = -(x - x^3) = -y(x)$. Видно, что значения функции в точках x и $-x$ противоположны по знаку, т. е. $y(-x) = -y(x)$. Поэтому данная функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.



в) $y(-x) = -x - 2$. Сравнивая значение $-y(x) = -x - 2$ со значением $y(x) = x - 2$, видим, что равенство $y(-x) = y(x)$ не выполняется. Поэтому эта функция не является четной. Найдем теперь величину $-y(x) = -(x - 2) = 2 - x$. Сравнивая значение $y(-x) = -x - 2$ со значением $-y(x) = 2 - x$, видим, что равенство $y(-x) = -y(x)$ также не выполняется. Поэтому эта функция не является нечетной.



Итак, данная функция никакой четности не имеет и ее график не обладает никакой симметрией.

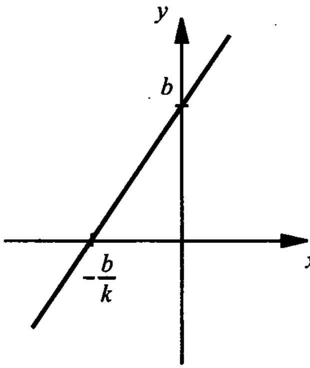
В заключение отметим, что исследование основных свойств функции облегчает *анализ ее поведения* и построение ее графика. В старших классах будут рассмотрены и другие свойства функции.

2. Свойства и графики некоторых функций

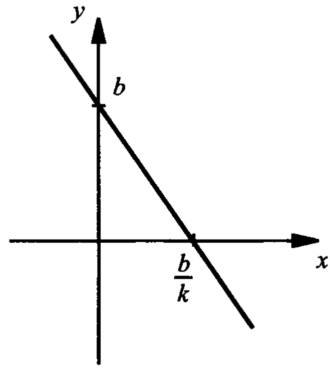
Теперь необходимо вспомнить основные свойства и графики некоторых ранее изученных функций (свойства надо представлять, но запоминать не стоит).

Линейная функция $y = kx + b$

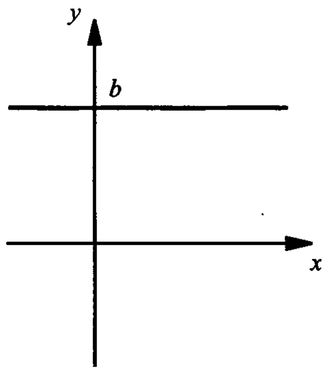
1. Область определения – множество всех чисел.
2. Графиком функции является прямая линия.
3. График функции пересекает ось абсцисс в точке $x = -\frac{b}{k}$ (при $k \neq 0$) и параллелен оси абсцисс при $k = 0$. График функции пересекает ось ординат в точке $y = b$.
4. Функция возрастает при $k > 0$, убывает при $k < 0$ и постоянна при $k = 0$.
5. Функция неограниченная при $k \neq 0$ и ограниченная при $k = 0$.
6. Функция определенной четности не имеет при $b \neq 0$, нечетная при $b = 0$ и четная при $k = 0$.
7. Область значений – множество всех чисел при $k \neq 0$ и $y = b$ при $k = 0$.
8. При $b = 0$ функцию $y = kx$ называют прямой пропорциональностью.



$k > 0$



$k < 0$



$k = 0$

Пример 6

Найти условие, при котором линейная функция $y = kx + b$ является: а) нечетной; б) четной.

Область определения функции $x \in (-\infty; +\infty)$ – симметричная. Найдем значение $y(-x) = k \cdot (-x) + b = -kx + b$.

а) Если функция нечетная, то $y(-x) = -y(x)$. Получаем: $-kx + b = -(kx + b)$, или $b = -b$, или $2b = 0$, откуда $b = 0$.

б) Если функция четная, то $y(-x) = y(x)$. Получаем: $-kx + b = kx + b$, или $0 = 2kx$, откуда $k = 0$ (т. к. x – любое число, не равное нулю).

Обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x}$

1. Область определения – множество всех чисел, кроме нуля.

2. Графиком функции является гипербола.

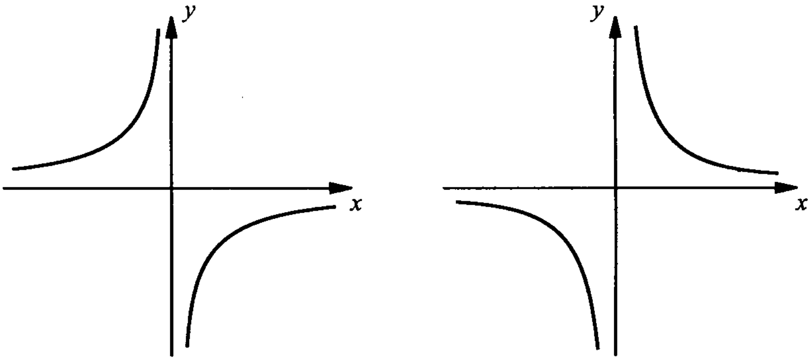
3. График функции осей координат не пересекает.

4. Функция возрастает при $k < 0$ и убывает при $k > 0$ в области определения.

5. Функция неограниченная.

6. Функция нечетная.

7. Область значений – множество всех чисел, кроме нуля.



$k < 0$ $\qquad$ $k > 0$

Пример 7

Выясним монотонность обратной пропорциональности $y = \dfrac{k}{x}$.

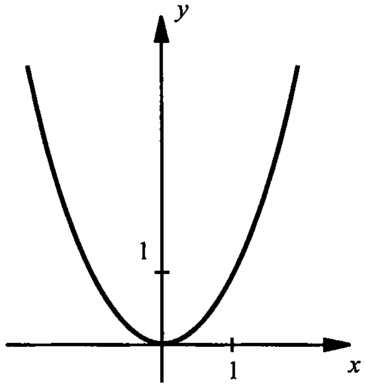
Область определения данной функции $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Рассмотрим два произвольных значения x_1 и x_2 (где $x_1 > x_2$) из области определения функции. Найдем значения функции в этих точках $y(x_1) = \dfrac{k}{x_1}$ и $y(x_2) = \dfrac{k}{x_2}$ и сравним их. Для этого рассмотрим разность $y(x_2) - y(x_1) = \dfrac{k}{x_2} - \dfrac{k}{x_1} = \dfrac{k(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}$. Так как $x_2 > x_1$, то разность $x_1 - x_2$ отрицательна. Поэтому знак разности $y(x_2) - y(x_1)$ противоположен знаку дроби $\dfrac{k}{x_1 x_2}$.

Функция $y = \dfrac{k}{x}$ не определена в точке $x = 0$. Рассмотрим два промежутка области определения. При $x_1, x_2 \in (-\infty;\ 0)$ и при $x_1, x_2 \in (0;\ +\infty;)$ произведение $x_1 x_2$ положительно. Поэтому знак разности $y(x_2) - y(x_1)$ противоположен знаку коэффициента k. Следовательно, при $k < 0$ величина $y(x_2) - y(x_1) > 0$, т. е. $y(x_2) > y(x_1)$ и функция возрастает; при $k > 0$ величина $y(x_2) - y(x_1) < 0$, т. е. $y(x_2) < y(x_1)$ и функция убывает.

Квадратная функция $y = x^2$

Заметим, что функция $y = x^2$ является частным случаем квадратичной функции, которая детально будет изучаться позднее.

1. Область определения – множество всех чисел.
2. Графиком функции является парабола.
3. График функции проходит через начало координат.
4. Функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.
5. Функция ограничена снизу, т. е. $y \geq 0$.
6. Функция четная.
7. Область значений – промежуток $[0; +\infty)$.



Пример 8

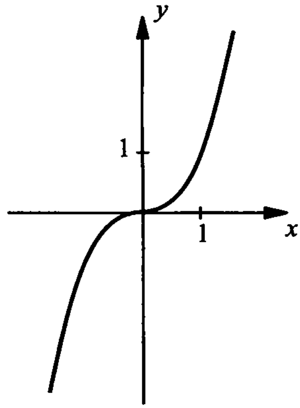
Докажем ограниченность квадратичной функции $y = x^2$.

Очевидно, что при всех значениях x величина $y = x^2$ принимает только неотрицательные значения, т. е. $y \geq 0$. По определению функция ограничена снизу, т. е. $y \geq a$ (где a может быть любым неположительным числом: $a = -103$, $a = -5$, $a = -0{,}1$, $a = 0$).

Кубическая функция $y = x^3$

1. Область определения – множество всех чисел.
2. График специального названия не имеет.
3. График функции проходит через начало координат.
4. Функция возрастает.
5. Функция неограниченная.
6. Функция нечетная.

7. Область значений – множество всех чисел.



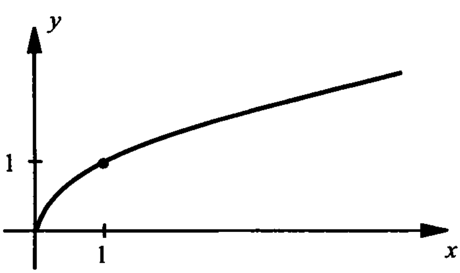
Пример 9

Докажем нечетность кубической функции $y = x^3$.

Область определения функции $x \in (-\infty; \infty)$ – симметричная. Найдем значение функции $y(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3 = -y(x)$. Так как выполнено равенство $y(-x) = -y(x)$, то по определению данная функция нечетная.

Функция $y = \sqrt{x}$

1. Область определения – множество неотрицательных чисел.
2. График специального названия не имеет.
3. График выходит из начала координат.
4. Функция возрастает.
5. Функция ограничена снизу, т. е. $y \geq 0$.
6. Функция определенной четности не имеет.
7. Область значений – множество неотрицательных чисел.



Функция $y = |x|$

1. Область определения – множество всех чисел.

2. График специального названия не имеет.

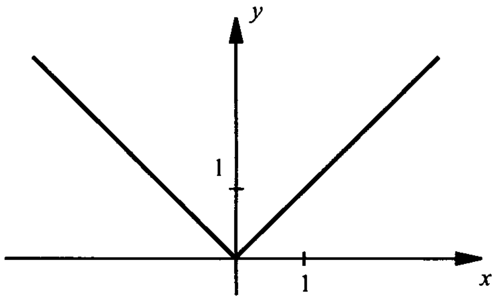
3. График проходит через начало координат.

4. Функция убывает на промежутке $(-\infty;\ 0]$ и возрастает на промежутке $[0;\ +\infty)$.

5. Функция ограничена снизу, т. е. $y \geq 0$.

6. Функция четная.

7. Область значений – множество неотрицательных чисел.



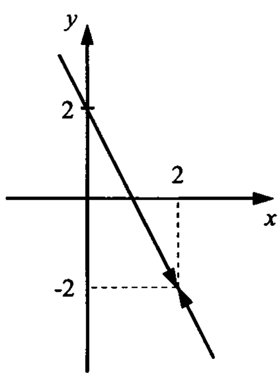
Рассмотренные свойства функций используются и при построении графиков более сложных функций.

Пример 10

Построим график функции $y = \dfrac{4 - x^2}{2 - x} - 3x$.

Область определения функции – множество всех чисел, кроме $x = 2$.

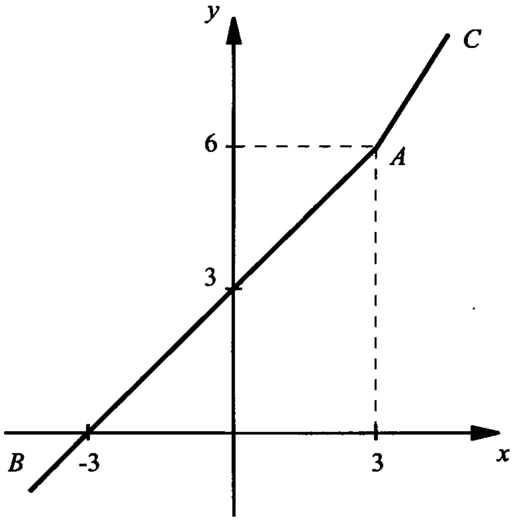
Сократим дробь и запишем функцию в виде $y = \dfrac{(2 - x)(2 + x)}{2 - x} - 3x =$ $= 2 + x - 3x = 2 - 2x$. Поэтому надо построить график линейной функции $y = 2 - 2x$ и удалить из него точку с абсциссой $x = 2$ (показана стрелками).



Пример 11

Построим график функции $y = 2x + |x - 3|$.

Раскроем знак модуля, рассмотрев два случая. При $x - 3 < 0$ получаем: $y = 2x - (x - 3) = x + 3$, при $x - 3 \ge 0$ имеем: $y = 2x + (x - 3) = 3x - 3$. Таким образом, надо построить график функции $y = \begin{cases} x + 3 \text{ при } x < 3, \\ 3x - 3 \text{ при } x \ge 3 \end{cases}$. Строим при $x < 3$ график прямой $y = x + 3$ (луч AB) и при $x \ge 3$ график прямой $y = 3x - 3$ (луч AC). Поэтому графиком данной функции будет ломаная BAC.



IV. Контрольные вопросы

1. Как найти точки пересечения графика функции с осями координат?
2. Понятие ограниченности функции.
3. Возрастающая и убывающая на промежутке функция.
4. Нечетная и четная функции и их свойства.
5. Свойства и график линейной функции $y = kx + b$.
6. Свойства и график обратной пропорциональности $y = \dfrac{k}{x}$
7. Свойства и график квадратичной функции $y = x^2$.
8. Свойства и график кубической функции $y = x^3$.

9. Свойства и график функции $y = \sqrt{x}$.

10. Свойства и график функции $y = |x|$.

V. Задание на уроке

№ 17 (а, в); 18 (а); 20; 23; 25 (а); 27; 29 (а); 30 (а, в, д); 31 (а, г); 32; 37; 41 (б); 42 (а); 45; 51 (а); 53 (б); 54 (а).

VI. Задание на дом

№ 17 (б, г); 18 (б); 21; 22; 25 (б); 28; 29 (б); 30 (б, г, е); 31 (б, в); 33; 38; 41 (в); 42 (б); 46 (а); 51 (б); 53 (в); 54 (б, в).

VII. Творческие задания

1. Постройте график функции:

а) $y = x + |x - 2|$;

б) $y = 2x - |x - 3|$;

в) $y = |x - 1| + |x + 2|$;

г) $y = |x - 1| - |x + 2|$;

д) $y = \dfrac{x^2 - 9}{3 - x} + 2x + 1$;

е) $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$;

ж) $\dfrac{y + x - 1}{x + 2} = 1$;

з) $\dfrac{2y - x - 2}{y + x} = 1$.

2. Постройте множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $|y| = x - 3$;

б) $y + \dfrac{1}{y} = x + \dfrac{1}{x}$;

в) $(y - x)\left(y - \dfrac{1}{x}\right) = 0$;

г) $|y - 3| = 1$;

д) $|y - 2x| = 4$;

е) $|x| + |y| = 2$;

ж) $y \geq x + 1$;

з) $y < 2x - 4$;

и) $|y - 1| \leq 2$;

к) $|y| < 2x + 2$;

л) $|x| + 2|y| \geq 2$.

VIII. Подведение итогов урока

§ 2. Квадратный трехчлен

Уроки 7–8. Корни квадратного трехчлена

***Цель*:** рассмотреть понятие квадратного трехчлена, его корни, выделение квадрата двучлена.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Функция, возрастающая на промежутке.
2. Понятие нечетной функции и ее свойство.
3. Постройте график функции.

а) $y = 2x - 3$;

б) $y = -\dfrac{3}{x}$;

в) $y = |x - 2| + x$.

Вариант 2

1. Функция, убывающая на промежутке.
2. Понятие четной функции и ее свойство.
3. Постройте график функции.

а) $y = 3 - x$;

б) $y = \dfrac{2}{x}$;

в) $y = |x + 1| - x$.

III. Изучение нового материала

Выражение $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ (где x – переменная; a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 – коэффициенты, при этом $a_n \neq 0$) называют *многочленом n-й степени*. Коэффициент a_n называют *старшим коэффициентом*, коэффициент a_0 – *свободным членом*.

Пример 1

а) $P_5(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x - 5$ – многочлен пятой степени, $a_5 = 2$ – старший коэффициент, $a_0 = -5$ – свободный член.

б) $P_3(x) = 7x^3 - 4x^2 + 2x$ – многочлен третьей степени, $a_3 = 7$ – старший коэффициент, $a_0 = 0$ – свободный член.

Значение переменной x_0, при котором многочлен $P_n(x)$ равен нулю, называют *корнем многочлена*, т. е. $P_n(x_0) = 0$.

Пример 2

Найдем корни многочлена $P_3(x) = 2x^3 - 8x$.

Для этого необходимо решить кубическое уравнение $2x^3 - 8x = 0$. Разложим левую часть уравнения на множители: $2x(x^2 - 4) = 0$, или $2x(x+2)(x-2) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю.

Получаем три линейных уравнения: $x = 0$, $x + 2 = 0$, $x - 2 = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ и $x_3 = 2$.

Итак, данный многочлен имеет три корня.

Наиболее изучен и наиболее часто встречается в школьном курсе математики многочлен второй степени – квадратный трехчлен. *Квадратным трехчленом* называют многочлен $ax^2 + bx + c$, где x – переменная, a, b и c – коэффициенты ($a \neq 0$). Коэффициент a называют старшим коэффициентом, b – вторым коэффициентом, c – свободным членом.

Пример 3

а) $P_2(x) = 3x^2 - 7x - 2$ – квадратный трехчлен, у которого $a = 3$, $b = -7$ и $c = -2$.

б) $P_2(x) = 3x^2 - 7x$ – квадратный трехчлен, у которого $a = 3$, $b = -7$ и $c = 0$.

в) $P_2(x) = 3x^2$ – квадратный трехчлен, у которого $a = 3$, $b = c = 0$.

Таким образом, может оказаться, что в квадратном трехчлене коэффициенты $b = 0$, или $c = 0$, или даже $b = c = 0$.

Естественно, чтобы найти корни квадратного трехчлена $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, надо решить квадратное уравнение $P_2(x) = 0$. *Дискриминант* $D = b^2 - 4ac$ квадратного уравнения $P_2(x) = 0$ также считают дискриминантом квадратного трехчлена $P_2(x)$. Если $D > 0$, то квадратный трехчлен имеет два различных корня: если $D = 0$ – один корень (точнее, два одинаковых корня); если $D < 0$ – не имеет корней.

Пример 4

Найдем корни квадратного трехчлена $3x^2 - 5x - 2$.

Решим квадратное уравнение $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

Для этого уравнения $a = 3$, $b = -5$ и $c = -2$. Найдем дискриминант $D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49$ и корни $x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$, т. е. $x_1 = \frac{12}{6} = 2$ и $x_2 = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$.

Итак, данный трехчлен имеет два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Подобным же образом можно находить и корни квадратных *трехчленов с параметром* (в основном *однородных трехчленов*).

Пример 5

Найдем корни квадратного трехчлена $4x^2 - 3nx - 7n^2$ (где n – параметр).

Данный трехчлен является однородным, т. к. каждый из его членов: $4x^2$, $-3nx$ и $-7n^2$ – имеет одну и ту же (вторую) степень. Решим однородное квадратное уравнение $4x^2 - 3nx - 7n^2 = 0$. Для этого уравнения $a = 4$, $b = -3n$ и $c = -7n^2$. Найдем дискриминант $D = (-3n)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-7n^2) = 9n^2 + 112n^2 = 121n^2 = (11n)^2$ и корни $x = \frac{3n \pm 11n}{8}$, т. е. $x_1 = \frac{14n}{8} = \frac{7}{4}n$ и $x_2 = \frac{-8n}{8} = -n$. Таким образом, данный трехчлен имеет два корня: $x_1 = \frac{7n}{4}$ и $x_2 = -n$.

При решении задач удобно бывает квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ представить в виде $a(x - m)^2 + n$, где m и n – некоторые числа. Такое преобразование называют *выделением квадрата двучлена из квадратного трехчлена*.

Пример 6

Выделим из трехчлена $2x^2 - 16x + 7$ квадрат двучлена.

Сначала вынесем за скобки коэффициент 2 и получим: $2x^2 - 16x + 7 = 2\left(x^2 - 8x + \frac{7}{2}\right)$. Теперь в скобках выделим квадрат двучлена. Для этого представим член $-8x$ в виде удвоенного произведения: $-8x = -2 \cdot x \cdot 4$. Затем прибавим и вычтем квадрат второго члена 4^2. Получаем: $2x^2 - 16x + 7 = 2\left(x^2 - 8x + \frac{7}{2}\right) =$

$$= 2\left(x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 - 4^2 + \frac{7}{2}\right) = 2\left(\left(x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2\right) - 4^2 + \frac{7}{2}\right) =$$

$$= 2\left((x-4)^2 - 16 + \frac{7}{2}\right) = 2\left((x-4)^2 - \frac{25}{2}\right) = 2(x-4)^2 - 25.$$

Таким образом, из квадратного трехчлена $2x^2 - 16x + 7$ выделили квадрат двучлена $2(x-4)^2 - 25$, т. е. представили в заданном виде (где $a = 2$, $m = 4$ и $n = -25$).

В частности, такое представление позволяет утверждать, что наименьшее значение трехчлена равно -25 и достигается при $x = 4$. Действительно, в выражении $2(x-4)^2 - 25$ при всех x величина $2(x-4)^2 \geq 0$. Поэтому наименьшее значение выражения будет при $x - 4 = 0$, т. е. $x = 4$.

Аналогичный прием может быть использован и при исследовании *многочленов второй степени с двумя переменными.*

Пример 7

Найдем наименьшее значение многочлена $P(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 5$.

В данном многочлене представим члены в виде: $2x^2 = x^2 + x^2$ и $5 = 1 + 4$ и выделим квадраты двучленов. Получаем: $P(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 5 = x^2 + x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 1 + 4 =$

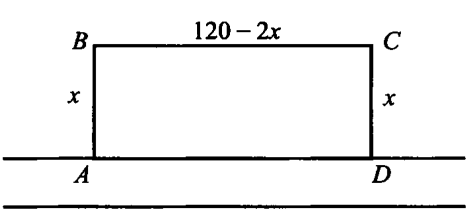
$$= (x^2 + y^2 + 2xy) + (x^2 - 2x + 1) + 4 = (x+y)^2 + (x-1)^2 + 4.$$

Учтем, что при всех значениях x и y величины $(x+y)^2 \geq 0$ и $(x-1)^2 \geq 0$. Поэтому наименьшее значение данного многочлена достигается при условии $x + y = 0$ и $x - 1 = 0$, т. е. при $x = 1$ и $y = -1$. Это наименьшее значение равно 4.

Выделение квадрата двучлена полезно использовать и при решении прикладных задач.

Пример 8

На берегу канала надо огородить с трех сторон участок прямоугольной формы (со стороны канала участок не загораживают) наибольшей площади. Длина забора 120 м. Каковы будут размеры участка и его площадь?



Пусть забор имеет форму ломаной $ABCD$ со сторонами $AB = CD = x$ (м) и $BC = 120 - 2x$ (м). Найдем площадь участка $S = AB \cdot BC = x(120 - 2x) = -2x^2 + 120x$ (м^2). Выделим в этом квадратном трехчлене квадрат двучлена: $S = -2x^2 + 120x =$ $= -2(x^2 - 60x) = -2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 30 + 30^2 - 30^2) = -2(x - 30)^2 + 2 \cdot 900 =$ $= 1800 - 2(x - 30)^2$. При всех значениях x выражение $-2(x - 30)^2 \le 0$. Поэтому величина S имеет наибольшую величину при $x = 30$, и эта величина $S = 1800$. Таким образом, размеры забора равны: $AB = 30$ м, $BC = 60$ м и $CD = 30$ м. При этом площадь участка составляет 1800 м^2 (18 соток).

IV. Контрольные вопросы

1. Какое выражение называют многочленом n-й степени с одной переменной?
2. Корень многочлена n-й степени.
3. Какой многочлен называют квадратным трехчленом?
4. Как найти корни квадратного трехчлена?
5. Сколько корней имеет квадратный трехчлен?
6. Какое преобразование называют выделением квадрата двучлена из квадратного трехчлена?

V. Задание на уроке

№ 55; 56 (а, г); 59 (а, б, д, е); 61 (а, г); 63; 64 (а, в); 66 (б, г); 68; 70; 72; 74 (а); 75 (б).

VI. Задание на дом

№ 56 (б, в); 58; 59 (в, г); 61 (б, в); 64 (б, г); 66 (а, в); 69; 71; 73; 74 (б); 75 (а).

VII. Творческие задания

1. Найдите связь между переменными x и y, если выполнено равенство.

а) $2x^2 + 3xy - 20y^2 = 0$; в) $\dfrac{10x^2 - 13xy + 3y^2}{2x^2 - 3y^2} = 4$;

б) $3x^2 - 13xy + 4y^2 = 0$; г) $\dfrac{9x^2 - 8xy - 3y^2}{2x^2 - 3y^2} = 2$.

Ответы: а) $x = 2{,}5y$ и $x = -4y$; б) $x = 4y$ и $x = \dfrac{1}{3}y$; в) $x = 5y$ и $x = 1{,}5y$; г) $x = y$ и $x = 0{,}6y$.

2. Найдите наибольшее значение выражения. При каких значениях x и y оно достигается?

а) $6y-4x-x^2-y^2$; в) $4x+5-3x^2-y^2-2xy$;

б) $10x-2y-x^2-y^2+3$; г) $6+4y+2xy-x^2-2y^2$.

Ответы: а) 13 при $x=-2$ и $y=3$; б) 29 при $x=5$ и $y=-1$; в) 7 при $x=1$ и $y=-1$; г) 10 при $x=2$ и $y=2$.

3. Найдите наибольшее значение выражения. При каких значениях x и y оно достигается?

а) $\dfrac{7}{(x-2)^2+(y+3)^2+1}$; в) $\dfrac{10}{x^2+y^2+4x-6y+14}$;

б) $\dfrac{5}{2(x-1)^2+3(y+2)^2+5}$; г) $\dfrac{8}{x^2+y^2-2x-10y+30}$.

Ответы: а) 7 при $x=2$ и $y=-3$; б) 1 при $x=1$ и $y=-2$; в) 10 при $x=-2$ и $y=3$; г) 2 при $x=1$ и $y=5$.

VIII. Подведение итогов урока

Уроки 9–10. Разложение квадратного трехчлена на множители

Цель: обсудить разложение многочленов на линейные множители.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определение многочлена n-й степени.
2. Найдите корни квадратного трехчлена $3x^2-5x-2$.
3. Найдите наименьшее значение выражения $x^2+y^2-6x+8y$.

Вариант 2

1. Дайте определение квадратного трехчлена.
2. Найдите корни квадратного трехчлена $7x^2-4x-3$.
3. Найдите наименьшее значение выражения $x^2+y^2+4x-8y$.

III. Изучение нового материала

При решении уравнений, действиях с алгебраическими дробями и т. д. необходимо *раскладывать многочлены на множители.* Особенно часто приходится раскладывать квадратные трехчлены на линейные множители. При этом необходимо учитывать две следующие теоремы.

Теорема 1. Если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Докажем это утверждение. В многочлене ax^2+bx+c вынесем за скобки множитель a и получим: $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$. Учтем, что x_1 и x_2 корни и квадратного трехчлена ax^2+bx+c, и квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Поэтому по теореме Виета $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=\frac{c}{a}$, тогда $\frac{b}{a}=-(x_1+x_2)$ и $\frac{c}{a}=x_1x_2$.

Подставив эти соотношения, получим: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=$ $=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$.

В таком равенстве раскроем скобки, сгруппируем слагаемые и разложим выражение на множители: $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=$ $=x^2-x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1x_2=(x^2-x_1x)-(x_2x-x_1x_2)=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=$ $=(x-x_1)(x-x_2)$.

Итак, получили: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-x_1)(x-x_2)$, и тогда $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Заметим, что в этом выражении многочлены $x-x_1$ и $x-x_2$ имеют первую степень, т. е. линейные многочлены. Поэтому равенство $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ является разложением квадратного трехчлена ax^2+bx+c на линейные множители $x-x_1$ и $x-x_2$ (с точностью до коэффициента a).

Пример 1

Разложим на линейные множители квадратный трехчлен $4x^2-3x-10$.

Найдем корни этого трехчлена, решив квадратное уравнение $4x^2-3x-10=0$. Такими корнями являются числа $x_1=-\frac{5}{4}$ и $x_2=2$.

Тогда по доказанной теореме получаем: $4x^2-3x-10=$ $=4\left(x-\left(-\frac{5}{4}\right)\right)(x-2)=4\left(x+\frac{5}{4}\right)(x-2)$.

Такое разложение можно записать и в другом виде, внеся множитель 4 в первую скобку: $4x^2-3x-10=(4x+5)(x-2)$.

Пример 2

Разложим на множители квадратный трехчлен $-3x^2+12x-12$.

Решив квадратное уравнение $-3x^2+12x-12$, найдем два равных корня трехчлена: $x_1=x_2=2$.

Тогда получаем разложение данного квадратного трехчлена на множители: $-3x^2+12x-12=-3(x-2)(x-2)$, или $-3x^2+12x-12=$ $=-3(x-2)^2$.

Таким образом, теорема 1 выполняется, если квадратный трехчлен имеет *два различных или одинаковых корня*, т. е. при дискриминанте трехчлена $D\geq 0$.

Пример 3

Сократим дробь $\frac{6x^2-13x+5}{8x^2-2x-1}$.

Разложим на множители числитель и знаменатель дроби.

Корни числителя $x_1=\frac{1}{2}$ и $x_2=\frac{5}{3}$. Поэтому получаем: $6x^2-13x+5=$ $=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 3\left(x-\frac{5}{3}\right)=(2x-1)(3x-5)$.

Корни знаменателя $x_1=\frac{1}{2}$ и $x_2=-\frac{1}{4}$. Имеем разложение: $8x^2-2x-1=$ $=8\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 4\left(x+\frac{1}{4}\right)=(2x-1)(4x+1)$. Теперь легко сократить дробь: $\frac{6x^2-13x+5}{8x^2-2x-1}=\frac{(2x-1)(3x-5)}{(2x-1)(4x+1)}=\frac{3x-5}{4x+1}$.

Обсудим теперь ситуацию, при которой квадратный трехчлен *не имеет корней*, т. е. его дискриминант $D<0$.

Теорема 2. Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет корней, то его нельзя разложить на множители, являющиеся многочленами первой степени.

Докажем способом от противного. Предположим, что квадратный трехчлен можно разложить на линейные множители, т. е.

$ax^2+bx+c=(kx+m)(px+q)$, где k, m, p, q – некоторые числа и $k\neq 0, p\neq 0$.

Очевидно, что произведение $(kx+m)(px+q)$ обращается в нуль при $x=-\frac{m}{k}$ и $x=-\frac{q}{p}$. Следовательно, при таких значениях обращается в нуль и трехчлен ax^2+bx+c. Поэтому числа $x=-\frac{m}{k}$ и $x=-\frac{q}{p}$ являются корнями трехчлена ax^2+bx+c. Но это противоречит условию теоремы: трехчлен ax^2+bx+c корней не имеет.

Пример 4

Дискриминант квадратного трехчлена $3x^2 - 5x + 4$ равен: $D = (5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 25 - 48 = -23$. Так как дискриминант отрицательный, то квадратный трехчлен $3x^2 - 5x + 4$ корней не имеет и не может быть разложен на линейные множители.

Заметим, что способ разложения на линейные множители, изложенный в примерах 1–3, может быть использован и в случае *многочленов второй степени с параметром.*

Пример 5

Разложим на множители многочлен $x^2-3nx+2n^2+n-1$ (где n – параметр).

Найдем корни данного трехчлена. Для этого решим квадратное уравнение $x^2-3nx+2n^2+n-1=0$. В этом уравнении коэффициенты: $a = 1$, $b = -3n$ и $c = 2n^2 + n - 1$.

Найдем дискриминант $D=b^2-4ac=(-3n)^2-4\cdot(2n^2+n-1)=$ $=9n^2-8n^2-4n+4=n^2-4n+4=(n-2)^2$ и его корни $x=\frac{3n\pm(n-2)}{2}$, т. е. $x_1=\frac{3n+n-2}{2}=2n-1$ и $x_2=\frac{3n-(n-2)}{2}=n+1$.

Теперь разложим многочлен на множители: $x^2-3nx+2n^2+n-1=$ $=(x-2n+1)(x-n-1)$.

Теорема 1 может быть *обобщена* и на случай многочлена n-й степени: если x_1, x_2, ..., x_n – корни многочлена $P_n(x)=a_nx^n+$ $+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, то его можно разложить на линейные множители: $P_n(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$.

Пример 6

Рассмотрим кубический многочлен $P_3(x)=3x^3+4x^2-5x-2$.

Проверкой можно убедиться, что он имеет корни $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=1$ и $x_3=-2$ (как найти эти корни – другой вопрос). Тогда многочлен можно разложить на линейные множители: $P_3(x)=3x^3+4x^2-5x-2=$ $=3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)(x+2)=(3x+1)(x-1)(x+2)$.

Заметим, что многочлен может *не иметь корней*, но тем не менее *раскладываться на множители.*

Пример 7

Разложим на множители многочлен четвертой степени $P_4(x)=x^4+x^2+1$.

Очевидно, что такой многочлен корней не имеет. Действительно, при всех значениях x выражения $x^4\geq 0$ и $x^2\geq 0$. Поэтому значения многочлена $P_4(x)\geq 1$ и не равны нулю.

Тем не менее его удается разложить на множители. Для этого к нему прибавим и вычтем x^2, получим разность квадратов и разложим ее на множители. Имеем: $P_4(x)=x^4+x^2+1=x^4+x^2+1-x^2=$ $=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1-x)(x^2+1+x)=$ $=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

Таким образом, многочлен четвертой степени разложили на произведение двух *квадратных трехчленов*. Очевидно, что разложить данный многочлен *на линейные множители* изначально было *невозможно.*

IV. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и докажите теорему о разложении на линейные множители квадратного трехчлена с неотрицательным дискриминантом.

2. Сформулируйте и докажите теорему о невозможности разложения на множители квадратного трехчлена с отрицательным дискриминантом.

V. Задание на уроке

№ 76 (а, б, г); 79 (а); 80 (б, г); 82; 83 (а, в, д); 85 (а); 87 (а); 88 (б).

VI. Задание на дом

№ 76 (в, д, и); 79 (б); 80 (а, в); 81; 83 (б, г, е); 85 (б); 87 (б); 88 (а).

VII. Творческие задания

1. Разложите на множители квадратный трехчлен.

а) $5x^2 - 2ax - 3a^2$;

б) $7x^2 + 3ax - 10a^2$;

в) $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a - 2$;

г) $x^2 - 2ax - 3a^2 + 4a - 1$.

Ответы: а) $(x - a)(5x + 3a)$; б) $(x - a)(7x + 10a)$; в) $(x - a + 1)(x - a - 2)$; г) $(x - 3a + 1)(x + a - 1)$.

2. Разложите на множители многочлен.

а) $x^9 - 5x^8 + 6x^7$;

б) $x^7 + 9x^6 + 20x^5$;

в) $x^4 - 5x^2 + 4$;

г) $x^4 - 13x^2 + 36$.

Ответы: а) $x^7(x - 2)(x - 3)$; б) $x^5(x + 4)(x + 5)$; в) $(x - 1)(x + 1) \cdot \cdot (x - 2)(x + 2)$; г) $(x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$.

3. Найдите значение выражения.

а) $16a^2 - 24ab + 9b^2 - 4a + 3b$, если $a = \dfrac{3}{4}b$;

б) $9a^2 + 30ab + 25b^2 + 3a + 5b$, если $a = -\dfrac{5}{3}b$;

в) $25a^2 - 40ab + 16b^2 + 5a - 4b$, если $a = \dfrac{4b - 1}{5}$;

г) $9a^2 + 12ab + 4b^2 + 9a + 6b$, если $a = -\dfrac{2b + 3}{3}$.

Ответы: а–г) 0.

4. Разложите выражение на множители.

а) $2a^2 - x^2 - ax - a + x$;

б) $x^2 - 2a^2 - ax - x - a$;

в) $x^2 + 3ax + 4x - 6a - 12$;

г) $x^2 - 2ax - 2x - 6a - 15$;

д) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) - 15$;

е) $(x + 3)(x - 2)(x + 1)x + 8$;

ж) $x^4 + 4$;

з) $4x^4 + 1$.

Ответы: а) $(a - x)(2a + x - 1)$; б) $(x + a)(x - 2a - 1)$; в) $(x - 2)(x + 3a + 6)$; г) $(x + 3)(x - 2a - 15)$; д) $(x^2 + 3x - 3)(x^2 + 3x + 5)$; е) $(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 4)$; ж) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$; з) $(2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)$.

VIII. Подведение итогов урока

§ 3. Квадратичная функция и ее график

Урок 11. Функция $y = ax^2$, ее график и свойства

Цель: рассмотреть свойства и график простейшей квадратичной функции $y = ax^2$.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Разложите многочлен на множители.

а) $3x^2 + 2x - 5$;

б) $2x^2 + 5xy - 7y^2$;

в) $x^2 - (5a+1)x + 6a^2 + a - 2$.

2. Сократите дробь.

а) $\dfrac{x^2 - 49}{x^2 + 5x - 14}$;

б) $\dfrac{x^2 - 18x + 80}{7x - 70}$.

Вариант 2

1. Разложите многочлен на множители.

а) $7x^2 - 5x - 2$;

б) $3x^2 + 5xy - 8y^2$;

в) $x^2 - (5a+1)x + 6a^2 + 5a - 6$.

2. Сократите дробь.

а) $\dfrac{x^2 - 16x + 63}{x^2 - 81}$;

б) $\dfrac{x^2 - 8x - 33}{5x + 15}$.

III. Изучение нового материала

Одной из наиболее распространенных и изученных функций является *квадратичная функция* $y = ax^2 + bx + c$, где x – независимая переменная; a, b и c – некоторые числа (причем $a \neq 0$).

Например, перемещение x тела при движении с ускорением a описывается квадратичной функций $x = \frac{at^2}{2} + V_0 t + x_0$, где x_0 и V_0 – положение и скорость тела в начальный момент времени $t = 0$.

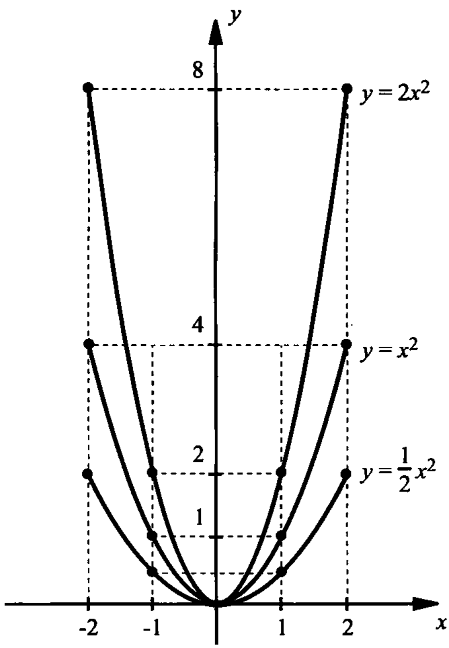
С частным случаем квадратичной функции $y = x^2$ (где $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$) школьники уже знакомы. Графиком этой функции является парабола. Продолжим изучение квадратичных функций. Сначала ограничимся изучением функции $y = ax^2$.

Пример 1

Составим таблицу значений и в одной системе координат построим графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = x^2$ и $y = 2x^2$.

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	1,12	0,5	0,12	0	0,12	0,5	1,12	2
$y = x^2$	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4
$y = 2x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

Отметив на координатной плоскости точки, приведенные в таблице, построим графики данных функций. Видно, что при каждом значении x значения функции $y = \frac{1}{2}x^2$ в два раза *меньше* значений функции $y = x^2$, а значения функции $y = 2x^2$ в два раза *больше* значений функции $y = x^2$. Другими словами, график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ можно получить *сжатием* в два раза *вдоль оси ординат* графика функции $y = x^2$. График функции $y = 2x^2$ можно получить *растяжением* в два раза *вдоль оси ординат* графика функции $y = x^2$.



Вообще говоря, график функции $y = ax^2$ можно получить из параболы $y = x^2$ растяжением вдоль оси ординат в a раз при $a > 1$ и сжатием вдоль оси ординат в $\frac{1}{a}$ раз при $0 < a < 1$. График функции $y = ax^2$ так же, как и график функции $y = x^2$, называют *параболой.*

Приведем *свойства функции* $y = ax^2$ *при* $a > 0$:

1. Область определения функции – промежуток $(-\infty; \infty)$.

2. Если $x = 0$, то $y = 0$. Следовательно, график проходит через начало координат.

3. Если $x \neq 0$, то $y > 0$. Поэтому график расположен в верхней полуплоскости.

4. Функция четная, т. е. противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции $y(-x) = y(x)$. График функции симметричен относительно оси ординат.

5. Функция убывает в промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает в промежутке $[0; \infty)$.

6. Функция ограничена снизу, $y \geq 0$. Наименьшее значение $y = 0$ функция принимает при $x = 0$, наибольшего значения функция не имеет.

7. Область значений функции – промежуток $[0; +\infty)$.

Обсудим теперь свойства и график квадратичной функции $y = ax^2$ при $a < 0$.

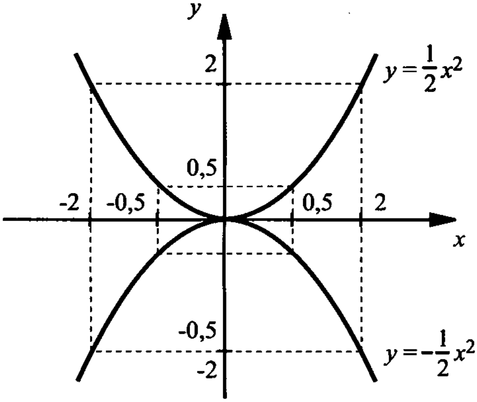
Пример 2

Составим таблицу значений и в одной системе координат построим графики функций $y=\frac{1}{2}x^2$ и $y=-\frac{1}{2}x^2$.

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
$y=\frac{1}{2}x^2$	2	1,12	0,5	0,12	0	0,12	0,5	1,12	2
$y=-\frac{1}{2}x^2$	−2	−1,12	−0,5	−0,12	0	−0,12	−0,5	−1,12	−2

Отметим точки, приведенные в таблице, и построим графики данных функций. Видно, что при каждом значении x значения функции $y=-\frac{1}{2}x^2$ *противоположны по знаку* значениям функции $y=\frac{1}{2}x^2$.

Поэтому график функции $y=-\frac{1}{2}x^2$ получается из графика функции $y=\frac{1}{2}x^2$ с помощью симметрии относительно оси абсцисс.



Теперь легко сформулировать *свойства функции* $y = ax^2$ *при* $a < 0$:

1. Область определения функции – промежуток $(-\infty; \infty)$.
2. Если $x = 0$, то $y = 0$. Следовательно, график проходит через начало координат.

3. Если $x \neq 0$, то $y < 0$. Поэтому график расположен в нижней полуплоскости.

4. Функция четная, $y(-x) = y(x)$. График функции симметричен относительно оси ординат.

5. Функция возрастает в промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает в промежутке $[0; \infty)$.

6. Функция ограничена сверху, $y \leq 0$. Наибольшее значение $y = 0$ функция принимает при $x = 0$, наименьшего значения функция не имеет.

7. Область значений функции – промежуток $(-\infty; 0]$.

Пример 3

Обсудим монотонность функции $y(x) = ax^2$.

Область определения такой функции – все значения x. Рассмотрим два произвольных значения x_2 и x_1, такие, что $x_2 > x_1$. Найдем значения функции в этих точках: $y(x_2) = ax_2^2$ и $y(x_1) = ax_1^2$ и сравним их. Для этого определим знак разности $y(x_2) - y(x_1) = = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$.

Так как $x_2 > x_1$, то разность $x_2 - x_1$ положительна. Поэтому разность $y(x_2) - y(x_1)$ определяется знаком произведения $a(x_2 + x_1)$. Так как сумма $x_2 + x_1$ может иметь различный знак, то в области определения выделим два промежутка.

а) Для промежутка $x \in [0; +\infty)$ сумма $x_2 + x_1 > 0$. Поэтому знак разности $y(x_2) - y(x_1)$ совпадает со знаком коэффициента a.

При $a > 0$ разность $y(x_2) - y(x_1) > 0$, т. е. $y(x_2) > y(x_1)$ и функция возрастает.

При $a < 0$ разность $y(x_2) - y(x_1) < 0$, т. е. $y(x_2) < y(x_1)$ и функция убывает.

б) Для промежутка $x \in (-\infty; 0]$ сумма $x_2 + x_1 < 0$. Поэтому знак разности $y(x_2) - y(x_1)$ противоположен знаку коэффициента a.

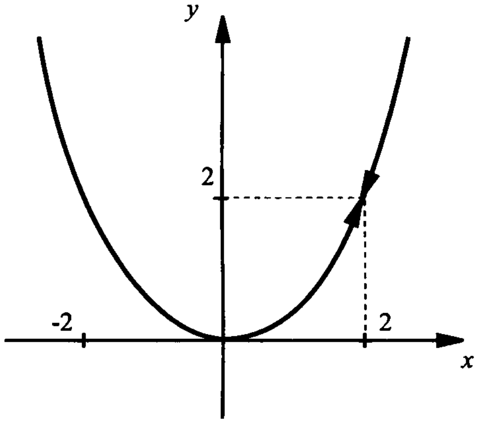
При $a > 0$ разность $y(x_2) - y(x_1) < 0$, т. е. $y(x_2) < y(x_1)$ и функция убывает.

При $a > 0$ разность $y(x_2) - y(x_1) > 0$, т. е. $y(x_2) > y(x_1)$ и функция возрастает.

Пример 4

Построим график функции $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{2x - 4}$.

Область определения функции задается условием $2x - 4 \neq 0$, т. е. $x \neq 2$. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее. Получаем: $y = \dfrac{x^2(x-2)}{2(x-2)} = \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1}{2}x^2$.



Построим параболу $y = \dfrac{1}{2}x^2$ и удалим из нее точку с абсциссой $x = 2$ (показана стрелками).

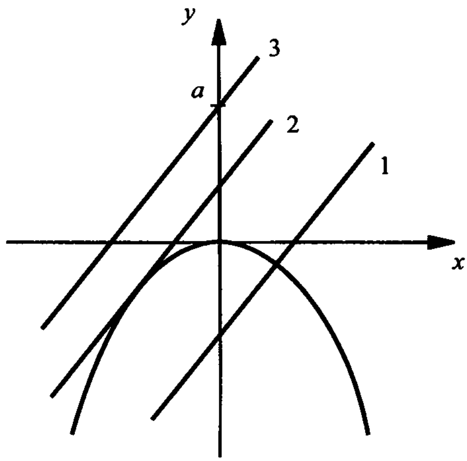
Пример 5

При каких значениях a парабола $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ и прямая $y = 3x + a$ не имеют общих точек?

Предположим, что данные линии имеют общую точку. Тогда ее координаты удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x^2, \\ y = 3x + a. \end{cases}$

Попробуем решить эту систему. Так как в уравнениях левые части одинаковы, то равны и правые.

Получаем уравнение $-\dfrac{1}{2}x^2 = 3x + a$, или $0 = x^2 + 6x + 2a$. На самом деле данные линии общих точек не имеют. Это означает, что полученное квадратное уравнение решений не имеет. Поэтому его дискриминант $D = 36 - 8a < 0$, откуда $a > \dfrac{36}{8} = 4,5$.



На рисунке приведена иллюстрация задачи. Очевидно, прямая $y = 3x + a$ пересекает ось ординат в точке $y = a$. При увеличении a прямая смещается вверх параллельно самой себе. Выполненные расчеты показывают, что прямая при $a < 4{,}5$ пересекает параболу в двух точках (линия 1), при $a = 4{,}5$ касается параболы в одной точке (линия 2), при $a > 4{,}5$ не имеет общих точек с параболой (линия 3).

IV. Контрольные вопросы

1. Какая функция называется квадратичной?
2. Как называют график квадратичной функции?
3. Приведите основные свойства и график функции $y = ax^2$ при $a > 0$.
4. Приведите основные свойства и график функции $y = ax^2$ при $a < 0$.
5. Как из графика функции $y = x^2$ получить график функции $y = ax^2$ при $a > 0$.

V. Задание на уроке

№ 90; 92; 94; 96 (а, в); 97; 99; 101; 103 (а); 104 (а); 105.

VI. Задание на дом

№ 91; 93; 95; 96 (б, г); 98; 100; 102; 103 (б, в); 104 (б).

VII. Творческие задания

1. Постройте график функции.

а) $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x+1}$; в) $y = \dfrac{x^4 + x^3 - 2x^2}{(x-1)(x+2)}$;

б) $y = \dfrac{2x^2 - x^3}{x-2}$; г) $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 - x^4}{(x+1)(x-2)}$.

2. Постройте график уравнения или неравенства.

а) $y \le -0{,}5x^2$; г) $(y + 0{,}5x^2)(y - 2x) = 0$;

б) $y > 2x^2$; д) $\dfrac{(y-x^2)(x+1)}{y-1} = 0$;

в) $(y - 2x^2)(y - |x|) = 0$; е) $\dfrac{(y+x^2)(y+2)}{x-1} = 0$.

VIII. Подведение итогов урока

Урок 12. Графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$

Цель: рассмотреть параллельный перенос графика функции.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Приведите основные свойства и график функции $y = ax^2$ при $a > 0$.

2. Постройте график функции.

а) $y = -2x^2$;

б) $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x+1}$.

3. При каком значении a прямая $y = x + a$ касается параболы $y = 0{,}5x^2$?

Вариант 2

1. Приведите основные свойства и график функции $y = ax^2$ при $a < 0$.

2. Постройте график функции.

а) $y = \frac{1}{3}x^2$;

б) $y = \frac{x^2 - x^3}{x - 1}$.

3. При каком значении a прямая $y = x - a$ касается параболы $y = -2x^2$?

III. Изучение нового материала

На предыдущем уроке были рассмотрены два важнейших преобразования графика функции $y = f(x)$.

1. График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью *симметрии относительно оси абсцисс.*

2. График функции $y = af(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ *растяжением вдоль оси ординат* в a раз *при* $a > 1$ и *сжатием* в $\frac{1}{a}$ раз *при* $0 < a < 1$.

Эти преобразования *пригодны для любых функций* (как изученных, так и еще не рассмотренных). Поэтому необходимо знать такие преобразования и уметь ими пользоваться.

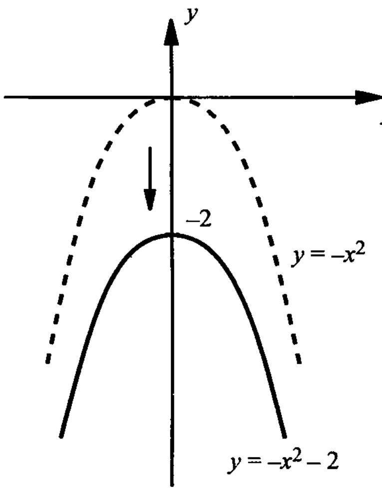
Рассмотрим *еще два важнейших преобразования* графика функции $y = f(x)$ – построение графиков функции $y = f(x) + n$ и $y = f(x - m)$.

3. График функции $y = f(x) + n$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью *параллельного переноса вдоль оси ординат* на $|n|$ единиц: *вверх при* $n > 0$ и *вниз при* $n < 0$.

Пример 1

Построим график функции $y = -x^2 - 2$.

В соответствии с приведенным алгоритмом график функции $y = -x^2 - 2$ получается из графика функции $y = -x^2$ параллельным переносом вдоль оси ординат на 2 единицы вниз, т. к. $n = -2 < 0$ (см. рисунок).

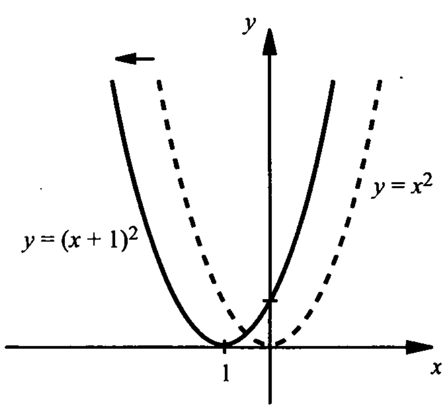


4. График функции $y = f(x - m)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью *параллельного переноса вдоль оси абсцисс* на $|m|$ единиц: *вправо при* $m > 0$ и *влево при* $m < 0$.

Пример 2

Построим график функции $y = (x + 1)^2$.

Запишем функцию в виде $y = (x -(-1))^2$. Тогда в соответствии с изложенным алгоритмом график функции $y = (x + 1)^2$ получается из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси абсцисс на 1 единицу влево, т. к. $m = -1 < 0$ (см. рисунок).

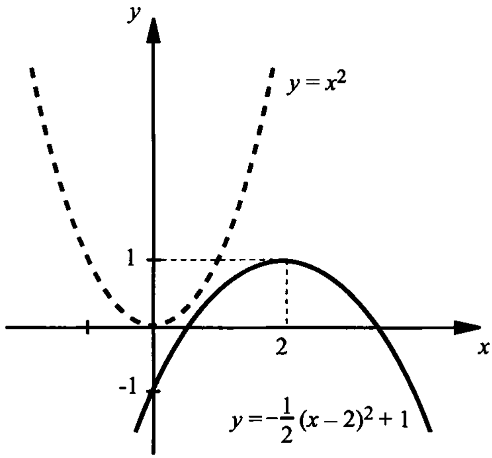


Из преобразований 3–4 следует, что график функции $y = f(x - m) + n$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига вдоль оси абсцисс на $|m|$ единиц: вправо при $m > 0$ и влево при $m < 0$ и сдвига вдоль оси ординат на $|n|$ единиц: вверх при $n > 0$ и вниз при $n < 0$. Эти сдвиги можно выполнять в любом порядке: сначала вдоль оси абсцисс, а затем вдоль оси ординат или наоборот. Заметим, что все преобразования 1–4 можно выполнять в любой последовательности (разумеется, при условии правильности их применения).

Пример 3

Построим график функции $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$.

Очевидна следующая последовательность преобразований графика (алгоритм построения):



1. Строим график функции $y = x^2$.

2. Получаем из него график функции $y = -x^2$ (преобразование 1 – симметрия относительно оси абсцисс).

3. Строим график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ (преобразование 2 – сжатие предыдущего графика в два раза вдоль оси ординат).

4. Получаем из него график функции $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ (преобразование 3 – сдвиг на одну единицу вверх).

5. Строим график функции $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ (преобразование 4 – сдвиг предыдущего графика на две единицы вправо).

После выполнения этих построений получаем окончательный график (на рисунке приведены: начальный этап построения – график функции $y = x^2$ и конечный этап – график $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1$).

IV. Контрольные вопросы

1. Алгоритм построения графика функции $y = -f(x)$.
2. Как построить график функции $y = af(x)$ при $a > 0$?
3. Построение графика функции $y = f(x) + n$.
4. Алгоритм построения графика функции $y = f(x - m)$.

V. Задание на уроке

№ 106 (а, в); 107 (а); 109 (а, в, д); 110 (б, в); 114; 116 (а, в); 117 (а); 118 (а, б).

VI. Задание на дом

№ 106 (б, г); 107 (б); 109 (б, г, е); 110 (а, г); 115; 116 (б, г); 117 (б); 118 (в, г).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 13–14. Построения графика квадратичной функции

***Цель*:** рассмотреть построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Как построить график функции $y = f(x) + n$?

2. Постройте график функции.
   а) $y = -0{,}5x^2 + 2$;
   б) $y = 2(x-1)^2$;
   в) $y = -|x-2| + 1$.

Вариант 2

1. Как построить график функции $y = f(x-m)$?
2. Постройте график функции.
   а) $y = 2x^2 - 1$;
   б) $y = -0{,}5(x+2)^2$;
   в) $y = |x+1| - 2$.

III. Изучение нового материала

На предыдущем уроке были обобщены четыре основных преобразования графика. В результате получены алгоритмы построения графиков квадратичных функций $y = ax^2 + n$, $y = a(x-m)^2$ и $y = a(x-m)^2 + n$. Естественный дальнейший шаг – привести функцию $y = ax^2 + bx + c$ к виду $y = a(x-m)^2 + n$.

Выделим из трехчлена $ax^2 + bx + c$ квадрат двучлена: $ax^2 + bx + c =$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x^2 + 2x\cdot\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Таким образом, функция $y = ax^2 + bx + c$ приведена к виду $y = a(x-m)^2 + n$, где $m = -\dfrac{b}{2a}$ и $n = \dfrac{4ac - b^4}{4a}$.

Значит, *графиком функции* $y = ax^2 + bx + c$ *является парабола,* которая получается из графика функции $y = ax^2$ *с помощью двух параллельных переносов* – сдвига вдоль оси абсцисс и сдвига вдоль оси ординат. Вершина этой параболы – точка $(m;\ n)$. Ось симметрии параболы – вертикальная прямая $x = m$. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ – вниз.

На примере рассмотрим *алгоритм построения графика квадратичной функции.*

Пример 1

Построим график функции $y = x^2 - 2x - 3$.

1. Найдем координаты вершины параболы:

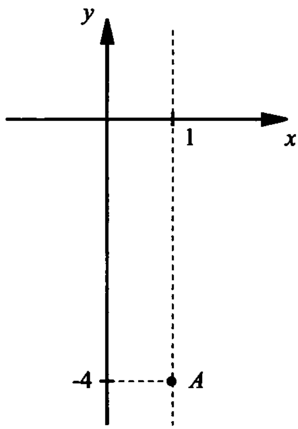
$m = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2} = 1$, $n = y(m) = 1^2 - 2 - 3 = -4$. Построим вершину – точку $(1; -4)$.

2. Проведем через эту точку $A(1; -4)$ прямую $x = 1$, параллельную оси ординат, – ось симметрии параболы (рис. *а*).

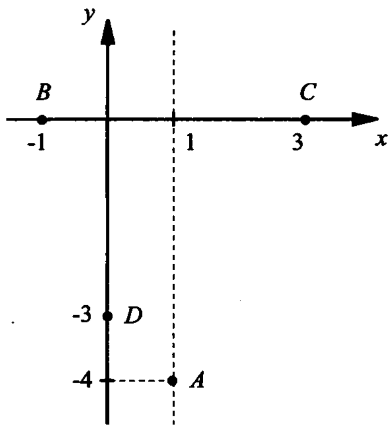
3. Найдем точки пересечения параболы с осью абсцисс. Для этого решим уравнение $0 = y(x)$, или $0 = x^2 - 2x - 3$. Получаем корни этого квадратного уравнения $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Построим эти точки пересечения с осью абсцисс $B(-1; 0)$ и $C(3; 0)$ (рис. *б*).

4. Найдем точку пересечения параболы с осью ординат. Для этого в уравнении параболы положим $x = 0$ и найдем $y(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$. Построим точку $D(0; -3)$ (рис. *б*).

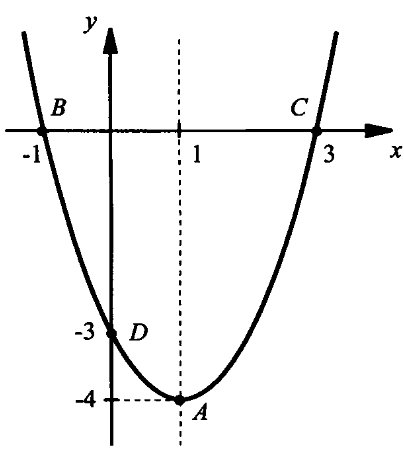
5. Через характерные точки A, B, C и D квадратичной функции проведем параболу (рис. *в*).



а



б



в

Заметим, что всегда рисуется только *эскиз графика*. Поэтому для построения эскиза параболы перечисленных *четырех точек достаточно*. Для более точного построения параболы можно взять еще несколько пар точек, симметричных относительно оси симметрии параболы.

Аналогично рассмотренному примеру можно построить график любой квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.

1. Найдем координаты вершины параболы (m; n) по формулам $m = -\dfrac{b}{2a}$ и $n = y(m)$. Построим вершину параболы (m; n).

2. Проведем через вершину параболы (m; n) прямую $x = m$, параллельную оси ординат, – ось симметрии параболы.

3. Найдем точки пересечения параболы с осью абсцисс. Для этого определим нули функции $y(x)$, решив квадратное уравнение $y(x) = 0$. Отметим эти точки на оси абсцисс.

4. Найдем точку пересечения параболы с осью ординат. Для этого в уравнении параболы положим $x = 0$ и найдем $y(0)$. Отметим эту точку на оси ординат.

5. Проведем через построенные точки параболу.

6. Заметим, что для более точного построения графика полезно найти еще несколько точек параболы. Для этого надо взять две точки на оси Ox, симметричные относительно точки m, и вычислить соответствующие значения функции (такие значения равны). Например, можно взять пары точек: $\dfrac{1}{2}m$ и $\dfrac{3}{2}m$; 0 и $2m$; $-\dfrac{1}{2}m$ и $\dfrac{5}{2}m$ и т. д. (если $m \neq 0$).

Пример 2

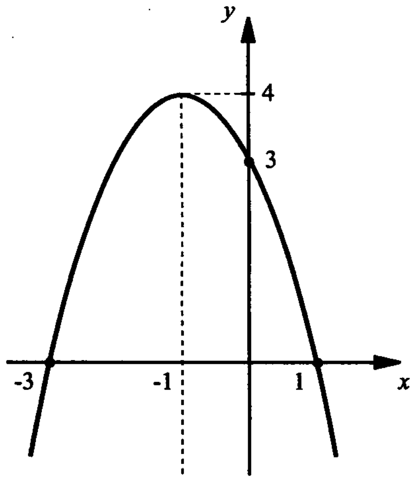
Построим график функции $y = -x^2 - 2x + 3$ и обсудим свойства этой функции.

1. Найдем координаты вершины параболы: $m = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{-2} = -1$ и $n = y(m) = -(-1)^2 - 2(-1) + 3 = 4$. Построим ось симметрии параболы – прямую $x = -1$.

2. Найдем точки пересечения параболы с осью абсцисс, решив квадратное уравнение $y(x) = 0$, или $-x^2 - 2x + 3 = 0$. Его корни $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$. Отметим эти точки на оси абсцисс.

3. Найдем точку пересечения параболы с осью ординат. В уравнении параболы положим $x = 0$ и найдем $y(0) = 3$. Отметим эту точку на оси ординат.

4. Через отмеченные точки проведем параболу. График функции построен.



Обсудим теперь *свойства* этой квадратичной функции.

1. Значения функции положительны при $-3 < x < 1$ и отрицательны при $x < -3$ и $x > 1$. Значение функции равно нулю при $x = -3$ и $x = 1$.

2. Функция возрастает на промежутке $x \le -1$ и убывает на промежутке $x \ge -1$. При $x = -1$ функция принимает наибольшее значение $y = 4$. При любых значениях x значения функции меньше или равны 4.

3. График функции симметричен относительно прямой $x = -1$.

Функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает *наименьшее* или *наибольшее значение в точке* $m = -\dfrac{b}{2a}$, которая является абсциссой вершины параболы. Это значение (значение функции в точке m) можно найти по формуле $n = y(m)$.

Если $a > 0$, то функция имеет *наименьшее значение.*

Если $a < 0$, то функция имеет *наибольшее значение.*

Например, в примере 1 функция $y = x^2 - 2x - 3$ при $x = 1$ принимала наименьшее значение $y = -4$. В примере 2 функция $y = -x^2 - 2x + 3$ при $x = -1$ принимала наибольшее значение $y = 4$.

Пример 3

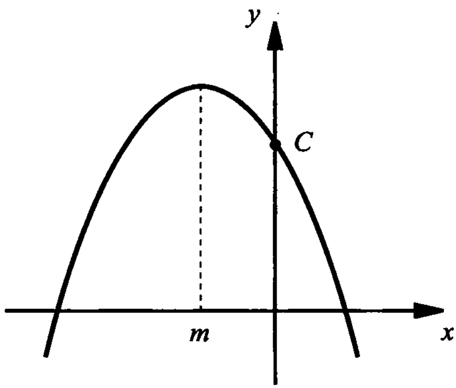
Сумма двух чисел равна 8. Сумма кубов этих чисел наименьшая. Найти эти числа и сумму их кубов.

Пусть первое из этих чисел x, тогда второе число равно $8 - x$.

Найдем сумму кубов этих чисел: $y = x^3 + (8 - x)^3 = x^3 + 8^3 - 3 \cdot 8^2 \cdot x + 3 \cdot 8 \cdot x^2 - x^3 = 24x^2 - 192x + 512$. Для параболы $y = 24x^2 - 192x + 512$ коэффициент $a = 24 > 0$. Поэтому такая функция принимает наименьшее значение. Найдем координаты вершины этой параболы: $m = -\frac{b}{2a} = -\frac{-192}{2 \cdot 24} = 4$ и $n = y(4) = 24 \cdot 4^2 - 192 \cdot 4 + 512 = 128$. Итак, при $m = 4$ функция принимает наименьшее значение, равное 128. Таким образом, если оба данных числа равны 4, то сумма кубов этих чисел равна 128 и является наименьшей.

Пример 4

На рисунке приведен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a, b и c.



1. Так как ветви параболы направлены вниз, то коэффициент $a < 0$.

2. Абсцисса m вершины параболы отрицательна (как видно из рисунка.) Получаем неравенство $-\frac{b}{2a} < 0$. Умножим обе его части на отрицательное число $2a$, при этом знак неравенства меняется на противоположный. Получаем: $-b > 0$. Вновь умножим обе части этого неравенства на отрицательное число -1. Опять знак неравенства меняется на противоположный. Имеем: $b < 0$. Значит, коэффициент $b < 0$.

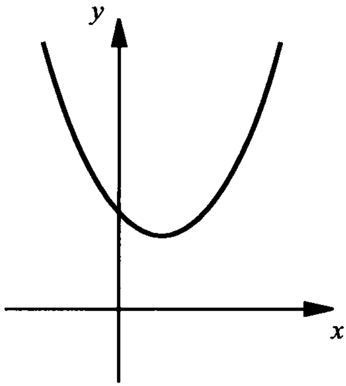
3. При $x = 0$ значение функции $y(x)$ равно $y(0) = c$. Из рисунка видно, что $c > 0$.

Итак, были определены знаки коэффициентов: $a < 0$, $b < 0$ и $c > 0$.

Пример 5

На рисунке приведен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знак выражения.

а) $a + b + c$; б) $4a - 2b + c$.



Видно, что при всех значениях x функция $y(x)$ принимает только положительные значения. Осталось понять смысл данных выражений. Найдем значение функции $y = ax^2 + bx + c$.

а) при $x = 1$ $y(1) = a + b + c$;

б) при $x = -2$ $y(-2) = a(-2)^2 + b(-2) + c = 4a - 2b + c$.

Напомним, что при всех значениях x (в том числе и при $x = 1$ и при $x = -2$) значения функции положительны. Поэтому $a + b + c > 0$ и $4a - 2b + c > 0$.

Пример 6

График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точку $A(-1;\ 10)$ и имеет вершину в точке $B(1;\ -2)$. Напишите уравнение параболы.

Запишем условия прохождения параболы через точки A и B. Кроме того, учтем, что точка B – вершина параболы. Запишем выражение для абсциссы вершины. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a(-1)^2 + b(-1) + c = 10, \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -2, \\ -\dfrac{b}{2a} = 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a - b + c = 10, \\ a + b + c = -2, \\ b = -2a. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе и получим: $-2b = 12$, откуда $b = -6$. Тогда из третьего уравнения имеем: $-6 = -2a$, откуда $a = 3$.

Подставим значения $a = 3$ и $b = -6$ в первое уравнение и получим: $3 + 6 + c = 10$, откуда $c = 1$.

Таким образом, напишем уравнение данной параболы: $y = 3x^2 - 6x + 1$.

Пример 7

Найти значение параметра k, при котором прямая $y = 2x - 5$ касается параболы $y = x^2 + kx + 4$. Найти координаты точки касания.

Если графики двух функций пересекаются в точке с координатами $(x_0; y_0)$, то величины x_0 и y_0 являются решением системы уравнений $\begin{cases} y = x^2 + kx + 4, \\ y = 2x - 5. \end{cases}$ Если $(x_0; y_0)$ – точка касания двух графиков, то приведенная система имеет единственное решение $(x_0; y_0)$.

Приравняем правые части уравнений системы: $y = x^2 + kx + 4 = 2x - 5$ и получим квадратное уравнение с параметром $x^2 + (k - 2)x + 9 = 0$. Это уравнение (а следовательно, и приведенная система) имеет единственное решение, если дискриминант $D = (k - 1)^2 - 4 \cdot 9 = k^2 - 4k - 32 = 0$.

Корни этого уравнения $k_1 = -4$ и $k_2 = 8$.

а) При $k = -4$ уравнение $x^2 + (k - 2)x + 9 = 0$ имеет вид $x^2 - 6x + 9 = 0$, или $(x - 3)^2 = 0$. Корень этого уравнения $x = 3$, тогда $y = 2x - 5 = 2 \cdot 3 - 5 = 1$.

Итак, при $k = -4$ данные парабола и прямая касаются в точке $(3; 1)$.

б) При $k = 8$ уравнение $x^2 + (k - 2)x + 9 = 0$ имеет вид $x^2 + 6x + 9 = 0$, или $(x + 3)^2 = 0$. Корень этого уравнения $x = -3$, тогда $y = 2x - 5 = 2\cdot(-3) - 5 = -11$.

Итак, при $k = 8$ данные парабола и прямая касаются в точке $(-3; -11)$.

IV. Контрольные вопросы

При построении графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$:

1. По каким формулам можно найти координаты вершины параболы?

2. Как найти точки пересечения параболы: а) с осью абсцисс; б) с осью ординат?

3. Какое уравнение имеет ось симметрии параболы?

V. Задание на уроке

№ 120 (а, в); 121 (а); 122; 124 (а); 125; 127 (а); 128; 129; 133 (а); 134.

VI. Задание на дом

№ 120 (б, г); 121 (б); 123; 124 (б); 126; 127 (б); 130; 133 (б); 135.

VII. Творческие задания

1. Напишите уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, которая проходит через точку A и имеет вершину в точке B.

а) $A(0; 1)$ и $B(1; -2)$;
б) $A(0; -5)$ и $B(3; 4)$;
в) $A(1; 2)$ и $B(-1; -10)$;
г) $A(-1; 9)$ и $B(-2; 11)$.

Ответы: а) $y = 2x^2 - 4x + 1$; б) $y = -x^2 + 6x - 5$; в) $y = 3x^2 + 6x - 7$; г) $y = -2x^2 - 8x + 3$.

2. Найдите значение параметра k, при котором прямая y_1 касается параболы y_2. Найдите координаты точки касания.

а) $y_1 = x - 3$ и $y_2 = x^2 + kx + 1$;
б) $y_1 = x + 5$ и $y_2 = -x^2 + (k - 2)x + 4$;
в) $y_1 = -2kx + 1$ и $y_2 = 2x^2 - 10x + 19$;
г) $y_1 = (1 - k)x - 2$ и $y_2 = 3x^2 + (2k + 1)x + 1$.

Ответы: а) при $k = -3$ $(2; -1)$, при $k = 5$ $(-2; -5)$; б) при $k = 1$ $(-1; 4)$, при $k = 5$ $(1; 6)$; в) при $k = -1$ $(3; 7)$, при $k = 11$ $(-3; 67)$; г) при $k = -2$ $(1; 1)$, при $k = 2$ $(-1; -1)$.

3. Напишите уравнение параболы $y = x^2 + px + q$, если вершина ее находится в точке A.

а) $A(1; -4)$;
б) $A(-1; 5)$;
в) $A(2; -3)$;
г) $A(-4; -1)$.

Ответы: а) $y = x^2 - 2x - 3$; б) $y = x^2 + 2x + 6$; в) $y = x^2 - 4x + 1$; г) $y = -x^2 - 8x - 17$.

VIII. Подведение итогов урока

§ 4. Степенная функция. Корень n-й степени

Урок 15. Степенная функция $y = x^n$

Цель: рассмотреть свойства и график функции $y = x^n$.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Постройте график функции.

а) $y = x^2 + 2x - 3$;

б) $y = |x^2 + 2x - 3|$;

в) $y = -2x^2 + \dfrac{|x|}{x}$.

2. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $A(-1; 0)$, $B(0; 3)$ и $C(2; -3)$. Найдите коэффициенты a, b, c.

Вариант 2

1. Постройте график функции.

а) $y = -x^2 - x + 2$;

б) $y = |-x^2 - x + 2|$;

в) $y = 2x^2 - \dfrac{|x|}{x}$.

2. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $A(-1; 4)$, $B(0; 1)$ и $C(2; 7)$. Найдите коэффициенты a, b, c.

III. Изучение нового материала

Функцию $y = x^n$ (где x – независимая переменная, n – натуральное число) называют *степенной функцией* с натуральным показателем. Частные случаи такой функции для $n = 1, 2, 3$ (т. е. $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$) мы уже рассматривали. Известны свойства и графики этих функций. Теперь необходимо обсудить свойства и график степенной функции при любом натуральном n. Эти характеристики существенно *различаются в зависимости от четности или нечетности числа n.*

Приведем *свойства* функции $y = x^n$ *при четном n* (они аналогичны свойствам функции $y = x^2$):

1. Область определения функции – промежуток $(-\infty; \infty)$.

2. Если $x = 0$, то $y = 0$. Поэтому график функции проходит через начало координат.

3. Если $x \neq 0$, то $y > 0$. Следовательно, график функции расположен в первой и второй координатных четвертях.

4. Функция четная: $y(-x) = y(x)$. Поэтому график функции симметричен относительно оси ординат.

5. Функция возрастает в промежутке $[0; +\infty)$ и убывает в промежутке $(-\infty; 0]$. Наименьшее значение $y = 0$ функция принимает при $x = 0$, наибольшего значения функция не имеет.

6. Функция ограничена снизу, $y \geq 0$.

7. Область значений функции – промежуток $[0; +\infty)$.

8. График функции представлен на рис. *а*.

Рассмотрим также *свойства* функции $y = x^n$ *при нечетном n* (они аналогичны свойствам функции $y = x^3$):

1. Область определения функции – промежуток $(-\infty; +\infty)$.

2. Если $x = 0$, то $y = 0$. Поэтому график функции проходит через начало координат.

3. Если $x < 0$, то $y < 0$ и если $x > 0$, то $y > 0$. Следовательно, график функции расположен в первой и третьей координатных четвертях.

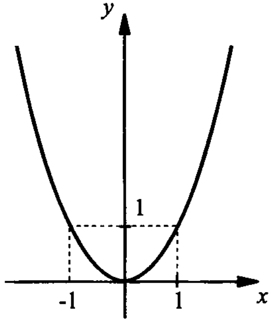
4. Функция нечетная, $y(-x) = -y(x)$. Поэтому график функции симметричен относительно начала координат.

5. Функция возрастает на всей области определения.

6. Функция неограниченная.

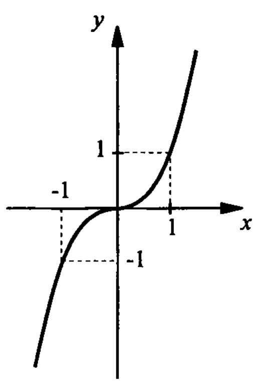
7. Область значений функции – промежуток $(-\infty; +\infty)$.

8. График функции представлен на рис. *б*.



а

n – четное



б

n – нечетное

Пример 1

Дана функция $f(x) = x^3$. Вычислим выражение $f(3) - 4f(2) + 7f(1)$.

Чтобы найти значение функции при данном значении аргумента, надо подставить этот аргумент в формулу, задающую функцию, и выполнить действия.

Получаем: $f(3) - 4f(2) + 7f(1) = 3^3 - 4 \cdot 2^3 + 7 \cdot 1^3 = 27 - 4 \cdot 8 + 7 \cdot 1 = 27 - 32 + 7 = 2$.

Пример 2

Сравните числа.

а) $(-3,2)^4$ и $(-1,8)^4$; б) $2,4^4$ и $2,7^4$; в) $(-6,5)^3$ и $(-4,8)^3$; г) $2,8^3$ и $4,1^3$.

При решении подобных задач учитывают монотонность соответствующей функции.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^4$. Эта функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

Так как $-3,2 < -1,8$, то $f(-3,2) > f(-1,8)$, или $(-3,2)^4 > (-1,8)^4$. На промежутке $[0; +\infty)$ эта функция возрастает. Так как $2,4 < 2,7$, то и $f(2,4) < f(2,7)$, или $2,4^4 < 2,7^4$.

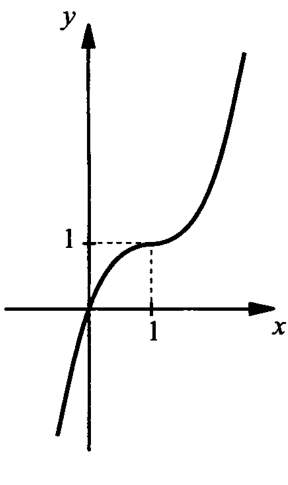
Теперь рассмотрим функцию $g(x) = x^3$. Такая функция возрастает на всей области определения.

Так как $-6,5 < -4,8$ и $2,8 < 4,1$, то и $g(-6,5) < g(-4,8)$ и $g(2,8) < g(4,1)$, или $(-6,5)^3 < (-4,8)^3$ и $2,8^3 < 4,1^3$.

Пример 3

Построим график функции $y = (x - 1)^3 + 1$.

Учтем ранее изученные способы преобразования графиков. График функции $y = (x - 1)^3 + 1$ получается сдвигом графика функции $y = x^3$ на одну единицу вправо и на одну единицу вверх.



IV. Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства и приведите график функции $y = x^n$ для четных n.

2. Приведите свойства и график степенной функции для нечетных n.

V. Задание на уроке

№ 136; 138 (а, в); 139 (а, б); 140 (а, г, е); 142; 145 (а, б); 148 (а); 152; 154 (а).

VI. Задание на дом

№ 137; 138 (б, г); 139 (в, г); 140 (б, в, д); 143; 145 (в, г); 148 (в); 153; 154 (б).

VII. Подведение итогов урока

Урок 16. Корень *n*-й степени

***Цель*:** рассмотреть понятие корня натуральной степени n.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = 2(x - 1)^4$. Вычислите $2f(0) - 3f(1) + 4f(2)$.
2. Сравните числа.
   а) $(-7{,}2)^6$ и $(6{,}1)^6$;
   б) $(-4{,}8)^3$ и $2{,}7^3$.
3. Постройте график функции $y = (x + 1)^4 - 2$.

Вариант 2

1. Дана функция $f(x) = -2(x + 1)^3$. Вычислите $6f(-1) + 4f(0) - 3f(1)$.
2. Сравните числа.
   а) $(-9{,}3)^4$ и $(7{,}3)^4$;
   б) $(-7{,}8)^5$ и $4{,}7^5$.
3. Постройте график функции $y = (x + 1)^3 - 2$.

III. Изучение нового материала

Вы уже знаете, что понятие квадратного корня возникло при решении простейшего квадратного уравнения $x^2 = a$. При этом квадратным корнем из числа a называют такое число, квадрат которого равен a. Разумеется, кроме уравнения $x^2 = a$ необходимо решать уравнения $x^3 = a$, $x^4 = a$, ..., $x^n = a$. Поэтому надо ввести понятие корня любой натуральной степени n (аналогичное понятию квадратного корня).

Корнем n-й степени из числа a называют такое *число, n-я степень которого равна a*. Этот корень обозначают символом $\sqrt[n]{a}$. Причем n называют *показателем корня*, *a – подкоренным выражением*.

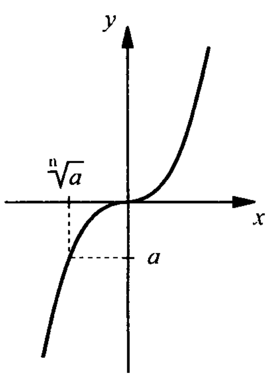
Пример 1

а) $\sqrt[4]{81} = 3$, т. к. $3^4 = 81$; б) $\sqrt[3]{-8} = -2$, т. к. $(-2)^3 = -8$; в) $\sqrt[5]{0} = 0$, т. к. $0^5 = 0$.

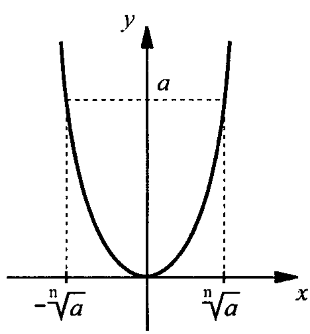
Принято корень *второй степени* называть *квадратным корнем*, корень *третьей степени – кубическим корнем*.

Теперь необходимо уточнить понятие корня. Сначала рассмотрим степенную функцию $y = x^n$ с нечетным показателем n. Из рис. *а* видно, что для любого значения a уравнение $x^n = a$ имеет единственное решение $x = \sqrt[n]{a}$. Обратимся теперь к степенной функции $y = x^n$ с четным показателем n (рис. *б*).

Тогда уравнение $x^n = a$ при $a < 0$ решений не имеет, при $a = 0$ имеет единственное решение $x = 0$, при $a > 0$ имеет два противоположных по знаку решения. В этом случае положительное решение обозначают символом $\sqrt[n]{a}$.



а
n – нечетное



б
n – четное

Пример 2

Рассмотрим уравнение $x^4 = 81$. Очевидно, что такое уравнение имеет два решения: $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$, т. к. при подстановке этих чисел в уравнение получаем верное равенство. Учитывая, что $\sqrt[4]{81} = 3$, такие решения можно записать в виде $x_1 = -\sqrt[4]{81} = -3$ и $x_2 = \sqrt[4]{81} = 3$.

Таким образом, выражение $\sqrt[n]{a}$ при $a \geq 0$ имеет смысл при четном и нечетном n, и значение этого выражения является *неотрицательным числом.* Его называют арифметическим корнем n-й степени из a. *Арифметическим корнем n-й* степени из неотрицательного числа a называют такое *неотрицательное число, n-я степень которого равна a.*

Корень нечетной степени из отрицательного числа можно выразить через арифметический корень из положительного числа.

Пример 3

Получаем $\sqrt[3]{-64} = -\sqrt[3]{64}$, т. к. $\sqrt[3]{-64} = -4$ и $-\sqrt[3]{64} = -4$.

Ранее изученные *свойства* квадратного корня можно обобщить на случай *корня n-й степени*:

1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$;

2) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$;

3) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

4) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

5) $\sqrt[2m]{a^{2m}} = |a|$.

В равенствах 1–5 числа m и n – натуральные, в равенствах 1–4 числа a, $b \geq 0$ и в равенстве 4 число $b \neq 0$.

Пример 4

Используя приведенные свойства, вычислим.

а) $(\sqrt[7]{3})^7 = 3$;

б) $\sqrt[5]{3^{10}} = (\sqrt[5]{3})^{10} = (\sqrt[5]{3})^{5\cdot2} = ((\sqrt[5]{3})^5)^2 = 3^2 = 9$;

в) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{4 \cdot 8} = \sqrt[5]{2^2 \cdot 2^3} = \sqrt[5]{2^5} = 2$;

г) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{108}}=\sqrt[3]{\dfrac{4}{108}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}=\dfrac{1}{3}$;

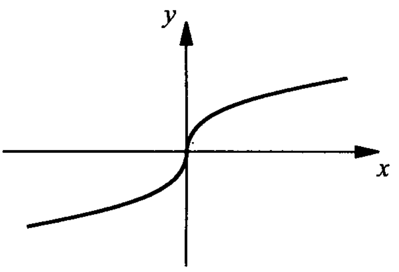
д) $\sqrt[6]{(-7)^6}=|-7|=7$;

е) $\sqrt[3]{2\dfrac{10}{27}}=\sqrt[3]{\dfrac{64}{27}}=\dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}}=\dfrac{4}{3}$;

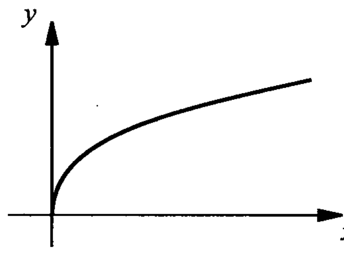
ж) $\sqrt[3]{\sqrt{31}-2}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{31}}=\sqrt[3]{(\sqrt{31}-2)(2+\sqrt{31})}=$

$=\sqrt[3]{(\sqrt{31}-2)(\sqrt{31}+2)}=\sqrt[3]{(\sqrt{31})^2-2^2}=\sqrt[3]{31-4}=\sqrt[3]{27}=3.$

В заключение приведем графики функций $y=\sqrt[n]{x}$ для нечетных (рис. *а*) и четных (рис. *б*) значений *n*.



а
n – нечетное



б
n – четное

IV. Контрольные вопросы

1. Определение корня *n*-й степени.
2. Основные свойства корня *n*-й степени.
3. Графики функции $y=\sqrt[n]{x}$ для нечетных и четных значений *n*.

V. Задание на уроке

№ 159 (а, г, ж); 160 (д); 162; 164; 168 (д); 171 (в); 173; 177 (а); 178 (б); 179.

VI. Задание на дом

№ 159 (б, в, з); 160 (е); 163; 165; 168 (е); 171 (г); 174; 177 (в); 178 (а).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 17–18. Дробно-линейная функция и ее график (факультативное занятие)

Цель: рассмотреть свойства дробно-линейной функции и ее график.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Определение корня n-й степени из числа a.

2. Найдите значение выражения $10\sqrt[4]{\dfrac{16}{625}}-(2\sqrt[3]{3})^3+(\sqrt{7})^0$.

3. Постройте график функции $y=\sqrt{x+1}-2$.

Вариант 2

1. Определение арифметического корня n-й степени из числа a.

2. Найдите значение выражения $10\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}-(2\sqrt[4]{3})^4+(3\sqrt{5})^0$.

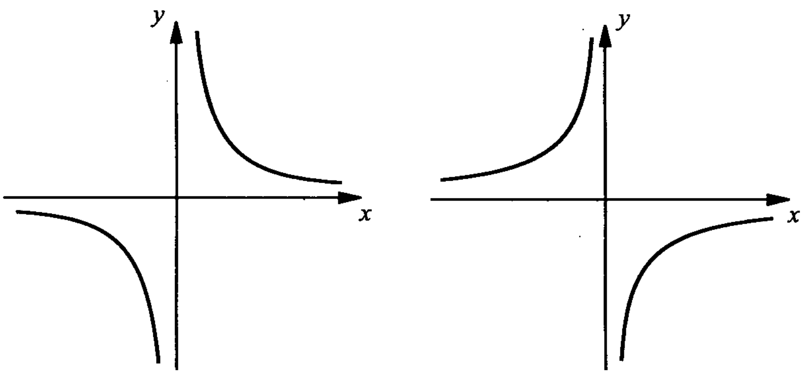
3. Постройте график функции $y=\sqrt{x-1}+2$.

III. Изучение нового материала

Ранее были рассмотрены свойства и график функции $y=\dfrac{k}{x}$ при $k>0$. Графиком функции является *гипербола*. Функция убывающая, и ее график не пересекает осей координат. Особенностью этого графика является наличие вертикальной и горизонтальной асимптот. *Асимптотой графика функции* $y(x)$ называют прямую, к которой неограниченно близко приближается (при определенных условиях) график функции $y(x)$. По внешнему виду асимптоты разделяются на вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Значения функции $y=\dfrac{k}{x}$ при малых значениях x ($x \to 0$) неограниченно возрастают или убывают ($y \to \infty$ или $y \to -\infty$). Поэтому при малых x график функции неограниченно близко приближается к оси ординат (прямой $x = 0$). Такая прямая является *вертикальной асимптотой* графика функции $y=\frac{k}{x}$.

При больших значениях $|x|$ ($|x| \to \infty$) значения функции стремятся к нулю ($y \to 0$). Поэтому при больших значениях $|x|$ график функции $y=\frac{k}{x}$ неограниченно близко приближается к оси абсцисс (прямой $y = 0$). Такая прямая является *горизонтальной асимптотой* графика функции $y=\frac{k}{x}$. Графики функции $y=\frac{k}{x}$ приведены на рисунке.



$k>0$ $\qquad\qquad$ $k<0$

Теперь обобщим функцию $y=\frac{k}{x}$ и рассмотрим функцию $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, где x – переменная; a, b, c, d – некоторые числа, причем $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$. Такую функцию называют *дробно-линейной*, т. е. формула, задающая функцию, представляет собой дробь, числитель и знаменатель которой линейные функции. Очевидно, что при $a = d = 0$ и $\frac{b}{c} = k$ дробно-линейная функция $y=\frac{ax+b}{cx+d}$. является обратно пропорциональной зависимостью $y=\frac{k}{x}$.

Пример 1

Следующие функции являются дробно-линейными:

1) $y=\dfrac{3x+1}{2x-5}$, $a=3$, $b=1$, $c=2$, $d=-5$;

2) $y=\dfrac{7}{5x-3}$, $a=0$, $b=7$, $c=5$, $d=-3$;

3) $y=\dfrac{4x}{3x+2}$, $a=4$, $b=0$, $c=3$, $d=2$;

4) $y=\dfrac{2x-7}{5x}$, $a=2$, $b=-7$, $c=5$, $d=0$.

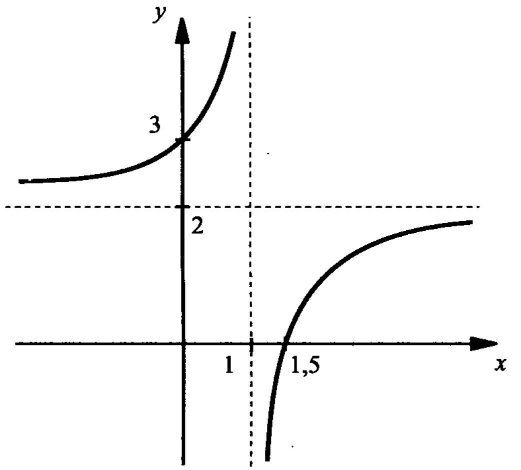
Заметим, что приведенные ограничения важны. При $c=0$ дробно-линейная функция $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ является линейной: $y=\dfrac{a}{d}x+\dfrac{b}{d}$, при $ad-bc=0$ – константной: $y=\dfrac{b}{d}$.

Можно показать, что графиком дробно-линейной функции $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ является *гипербола*, которую можно получить с помощью параллельных переносов вдоль координатных осей графика $y=\dfrac{k}{x}$. Для этого в дробно-линейной функции надо выделить целую часть, т. е. представить ее в виде $y=n+\dfrac{k}{x-m}$ (где n, k, m – некоторые числа).

Пример 2

Построим график функции $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$.

В дроби $\dfrac{2x-3}{x-1}$ выделим целую часть и представим функцию в виде $y=\dfrac{2x-2-1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)-1}{x-1}=2-\dfrac{1}{x-1}$. Здесь $n=2$, $k=-1$, $m=1$. Таким образом, надо построить график функции $y=2-\dfrac{1}{x-1}$. Он получается смещением гиперболы $y=-\dfrac{1}{x}$ на одну единицу вправо и на две единицы вверх. График данной функции имеет вертикальную асимптоту $x=1$ и горизонтальную асимптоту $y=2$.



Пример 3

Рассмотрим еще один способ построения графика дробно-линейной функции $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Для этого найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Положим, $x = 0$ и определим точку пересечения с осью ординат $y=\dfrac{-3}{-1}=3$. Теперь положим, $y = 0$, получим уравнение $0=\dfrac{2x-3}{x-1}$ или $0 = 2x - 3$ и найдем точку пересечения с осью абсцисс $x = 1{,}5$. Построим точки $A(0;\ 3)$ и $B(1{,}5;\ 0)$.

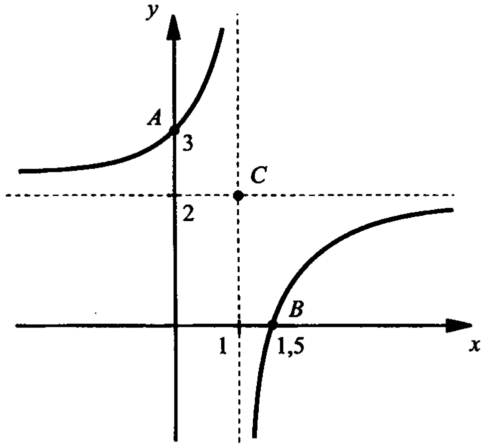
Определим *асимптоты* графика функции. Вертикальную асимптоту находим из условия, что функция не определена, т. е. $x - 1 = 0$, откуда $x = 1$. Поведение функции при больших значениях $|x|$ ($|x| \to \infty$) определяет горизонтальную асимптоту. При таких значениях x в числителе дроби $\dfrac{2x-3}{x-1}$ можно пренебречь числом (-3), в знаменателе – числом (-1). Тогда получаем *горизонтальную асимптоту* $y=\dfrac{2x}{x}=2$. Построим асимптоты графика $x = 1$ и $y = 2$.

При построении графика функции учтем:

1) ветви графика (гиперболы) симметричны относительно точки C пересечения асимптот;

2) график функции не пересекает асимптот.

После этих замечаний легко построить график данной функции.

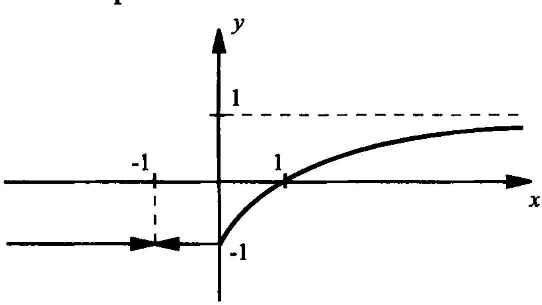


Пример 4

Построим график функции $y=\frac{|x|-1}{x+1}$.

Раскроем знак модуля и получим: $y=\begin{cases}-1, \text{ если } x<0 \text{ и } x\neq -1,\\ \frac{x-1}{x+1}, \text{ если } x\geq 0.\end{cases}$

При отрицательных значениях $x \neq -1$ построим горизонтальную прямую $y=-1$. При $x \geq 0$ строим график дробно-линейной функции $y=\frac{x-1}{x+1}$. Этот график пересекает ось ординат в точке $y=-1$ и ось абсцисс в точке $x = 1$. График имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$. График также имеет вертикальную асимптоту $x = -1$, но она в рассматриваемый промежуток $x \geq 0$ не входит. Таким образом, график данной функции состоит из прямой с удаленной точкой $(-1; -1)$ и части гиперболы.

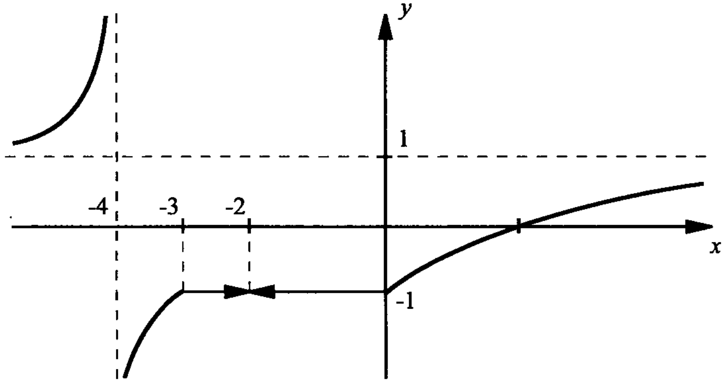


Пример 5

Построим график функции $y = \dfrac{|x|-2}{|x+3|-1}$.

Раскрыв знаки модуля, получим: $y = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+4}, \text{ если } x < -3, \\ -\dfrac{x+2}{x+2}, \text{ если } -3 \le x \le 0, \\ \dfrac{x-2}{x+2}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

Построим полученные зависимости. На промежутке $x \in (-\infty; -3)$ гипербола $y = \dfrac{x+2}{x+4}$ имеет вертикальную асимптоту $x = -4$ и горизонтальную асимптоту $y = 1$, ось Ox не пересекает. На промежутке $x \in [-3;\ 0]$ функция $y = -\dfrac{x+2}{x+2}$ определена всюду, за исключением точки $x = -2$. При этом $y = -1$. На промежутке $x \in (0;\ +\infty)$ гипербола $y = \dfrac{x-2}{x+2}$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$ и пересекает ось Ox в точке $x = 2$. Учитывая вышесказанное, нетрудно получить график исходной функции.



Пример 6

При каком значении параметра a прямая $y = ax + 1$ касается гиперболы $y = \dfrac{x-1}{x+1}$? Найти координаты точки касания.

Очевидно, что координаты точки касания удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} y = ax+1, \\ y = \dfrac{x-1}{x+1}. \end{cases}$ При этом система должна иметь единственное решение.

Приравняем правые части и получим уравнение $ax+1 = \dfrac{x-1}{x+1}$, или $ax^2+x+ax+1 = x-1$, или $ax^2+ax+2=0$ (очевидно, что $a \neq 0$). Чтобы это квадратное уравнение имело один корень, его дискриминант $D = a^2 - 8a = 0$, откуда $a = 8$. Найдем координаты точки касания. Подставим значение $a = 8$ в уравнение $ax^2 + ax + 2 = 0$ и получим: $8x^2 + 8x + 2 = 0$, или $2(2x + 1)^2 = 0$, откуда $x = -\dfrac{1}{2}$. Найдем соответствующее значение $y = ax+1 = 8\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1 = -3$. Итак, координаты точки касания графиков $\left(-\dfrac{1}{2}; -3\right)$.

IV. Контрольные вопросы

1. Приведите графики функции $y = \dfrac{k}{x}$ для $k > 0$ и для $k < 0$.
2. Понятие асимптоты графика функции.
3. Определение дробно-линейной функции.
4. Способы построения графика дробно-линейной функции.
5. Нахождение асимптот графика дробно-линейной функции.

V. Задание на уроке

№ 180 (а); 181 (в, г); 182 (а); 183 (б); 184; 187; 189.

VI. Задание на дом

№ 180 (б); 181 (а, б); 182 (б); 183 (а); 186; 188.

VII. Творческие задания

1. Постройте график функции.

а) $y = \dfrac{x-1}{x-3}$; в) $y = \dfrac{x-1}{|x|-3}$;

б) $y = \dfrac{|x|-1}{x-3}$; г) $y = \dfrac{|x|-1}{|x|-3}$;

д) $y = \dfrac{|x-1|}{x-3}$; ж) $y = \left|\dfrac{x-1}{x-3}\right|$.

е) $y = \dfrac{x-1}{|x-3|}$;

2. Постройте график уравнения.

а) $|y| = \dfrac{x-1}{x-3}$; в) $|y| = \dfrac{x-1}{|x|-3}$;

б) $|y| = \dfrac{|x|-1}{|x|-3}$; г) $y = \dfrac{x-1}{|x-3|}$.

3. Постройте график функции $y(x)$. При каких значениях параметра a уравнение $a = y(x)$ не имеет решений?

а) $y(x) = \dfrac{x+2}{x - \dfrac{4}{x}}$;

б) $y(x) = \dfrac{x-3}{\dfrac{9}{x} - x}$?

Ответы: а) $a = 0$, $a = \dfrac{1}{2}$, $a = 1$; б) $a = -1$, $a = -\dfrac{1}{2}$, $a = 0$.

VIII. Подведение итогов урока

Урок 19. Степень с рациональным показателем (факультативное занятие)

Цель: рассмотреть определение и свойства степени с рациональным показателем.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Постройте график функции.

а) $y=\dfrac{4}{x-2}$;

б) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$;

в) $y=\dfrac{x-2}{|x|-2}$.

Вариант 2

Постройте график функции.

а) $y=\dfrac{4}{x}-2$;

б) $y=\dfrac{x-2}{x+1}$;

в) $y=\dfrac{2-x}{|x|-2}$.

III. Изучение нового материала

Разумно считать, что выражение $a^{\frac{1}{n}}$ (где $a > 0$ и n – натуральное число) обозначает $\sqrt[n]{a}$, т. к. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$ и $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Это соображение позволяет определить *степень с рациональным показателем*: если a – положительное число, $\dfrac{m}{n}$ – дробное число (где m – целое, n – натуральное число), то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Пример 1

По определению степени с рациональным показателем имеем:

а) $0{,}3^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{0{,}3^3}$;

б) $7{,}3^{1{,}2} = 7{,}3^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{7{,}3^6}$;

в) $\left(\dfrac{8}{3}\right)^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\left(\dfrac{8}{3}\right)^{-1}} = \sqrt[4]{\dfrac{3}{8}}$.

Степень с основанием, равным нулю, определена только для положительного дробного показателя и равна нулю, т. е. если $\frac{m}{n}$ – положительное дробное число (m и n – натуральные числа), то $0^{\frac{m}{n}} = 0$. *Для отрицательных оснований степень с дробным показателем не определена* (не имеет смысла).

Пример 2

а) Выражения $0^{\frac{3}{4}}$, $0^{1,25}$, $0^{\frac{5}{4}}$, $0^{\frac{9}{7}}$ равны нулю.

б) Выражения $(-3)^{\frac{1}{3}}$, $(-0,8)^{-\frac{3}{5}}$, 0^0 не имеют смысла.

Свойства степени с целым показателем справедливы и для *степени с рациональным показателем*.

Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел p и q справедливы равенства:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q};\ a^p : a^q = a^{p-q};\ (a^p)^q = a^{pq}.$$

Для любых $a > 0$ и $b > 0$ и любого рационального числа p выполнены равенства:

$$(ab)^p = a^p \cdot b^p;\ \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

Пример 3

Найдем значение выражения $A = \frac{x^{0.5}}{x^{0.5}-5} - \frac{5}{x^{0.5}+5} + \frac{x}{25-x}$ при $x = 30$.

Предварительно упростим это выражение. Получаем: $A = \frac{x^{0.5}}{x^{0.5}-5} -$

$$-\frac{5}{x^{0.5}+5} - \frac{x}{(x^{0.5}-5)(x^{0.5}+5)} = \frac{x^{0.5}(x^{0.5}+5) - 5(x^{0.5}-5) - x}{(x^{0.5}-5)(x^{0.5}+5)} =$$

$$= \frac{x + 5x^{0.5} - 5x^{0.5} + 25 - x}{x-25} = \frac{25}{x-25}.$$

Подставим в полученное выражение $A = \frac{25}{x-25}$ значение $x = 30$ и найдем $A = \frac{25}{30-25} = \frac{25}{5} = 5$.

Заметим, что можно избавиться от рациональных показателей степени. Для этого достаточно ввести новую переменную $y = x^{0.5}$.

Тогда данное выражение имеет вид: $A=\frac{y}{y-5}-\frac{5}{y+5}+$

$$+\frac{y^2}{25-y^2}=\frac{y}{y-5}-\frac{5}{y+5}-\frac{y^2}{(y-5)(y+5)}=\frac{y(y+5)-5(y-5)-y^2}{(y-5)(y+5)}=$$

$$=\frac{y^2+5y-5y+25-y^2}{y^2-25}=\frac{25}{y^2-25}.$$

Так как $x=y^2=30$, то сразу найдем $A=\frac{25}{30-25}=\frac{25}{5}=5.$

IV. Контрольные вопросы

1. Определение степени с рациональным показателем.
2. Свойства степени с рациональным показателем.

V. Задание на уроке

№ 190 (г); 191 (а, б, ж); 192 (в, д, ж); 193 (г, д, е); 194 (а, б); 195 (в, г); 196 (а); 197 (а, в, д); 198 (а); 199.

VI. Задание на дом

№ 190 (в); 191 (в, г, е, з); 192 (г, з); 193 (в, ж, и); 194 (в, г); 195 (а, б); 196 (б); 196 (б); 197 (б, г, е); 198 (б).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 20–21. Контрольная работа по теме «Квадратичная функция»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Найдите область определения и область значений функции $y=2\sqrt{3x-6}+4$.

2. Разложите на множители квадратный трехчлен $5x^2-7x+2$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y=-3x^2-6x+5$.

4. Постройте график функции.

а) $y = x^2 + 4x$;

б) $y = \dfrac{x+1}{x}$.

5. Найдите значение выражения $6\sqrt[4]{7\frac{58}{81}} + 4\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$.

Вариант 2

1. Найдите область определения и область значений функции $y = 3\sqrt{2x-4} + 1$.

2. Разложите на множители квадратный трехчлен $7x^2 - 12x + 5$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y = -2x^2 + 4x - 7$.

4. Постройте график функции.

а) $y = x^2 - 6x$;

б) $y = \dfrac{x-1}{x}$.

5. Найдите значение выражения $4\sqrt[4]{5\frac{1}{16}} + 6\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$.

Вариант 3

1. Найдите область определения и область значений функции $y = 3\sqrt{2x-4} + 4x - 2$.

2. Напишите квадратный трехчлен, который имеет корни $\frac{2}{3}$ и $-\frac{1}{2}$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{4}{x^2 - 6x + 11} + 7$.

4. Постройте график функции.

а) $y = -|x + 1| + 2$;

б) $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$.

5. Упростите выражение $2\sqrt{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-5} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+5}\right) + \dfrac{100}{25-x}$.

Вариант 4

1. Найдите область определения и область значений функции $y = 2\sqrt{3x-6} + 2x - 5$.

2. Напишите квадратный трехчлен, который имеет корни $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{3}$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y=\frac{8}{x^2-4x+6}+1$.

4. Постройте график функции.

а) $y=-|x-2|+1$;

б) $y=\frac{2x-4}{x+1}$.

5. Упростите выражение $3\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-4}+\frac{1}{\sqrt{x}+4}4\right)+\frac{96}{16-x}$.

Вариант 5

1. Найдите область определения и область значений функции $y=4\sqrt{3x-6}+2x^2+4x-5$.

2. Напишите квадратный трехчлен, корни которого на единицу больше корней трехчлена $2x^2-3x-1$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y=\frac{3x^2-6x+23}{x^2-2x+5}$. При каком значении x оно достигается?

4. Постройте график функции.

а) $y=x^2-5|x|+4$;

б) $y=\frac{x-3}{|x-2|-1}$.

5. Упростите выражение $\frac{x-15}{\sqrt{x+1}-4}-\frac{x-3}{2+\sqrt{x+1}}$.

Вариант 6

1. Найдите область определения и область значений функции $y=3\sqrt{2x-4}+4x^2-8x+5$.

2. Напишите квадратный трехчлен, корни которого на единицу меньше корней трехчлена $3x^2-5x+1$.

3. Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{5x^2+10x+14}{x^2+2x+4}$. При каком значении x оно достигается?

4. Постройте график функции.

а) $y = x^2 - 4|x| + 3$;

б) $y = \dfrac{x-3}{|x-1|-2}$.

5. Упростите выражение $\dfrac{x-4}{\sqrt{x-3}+1} - \dfrac{x-12}{3+\sqrt{x-3}}$.

Урок 22. Итоги контрольной работы

Цель: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Итоги контрольной работы

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: $D(y) = [2; +\infty)$, $E(y) = [4; +\infty)$.
2. *Ответ*: $(x - 1)(5x - 2)$.
3. *Ответ*: $y_{\max} = 8$ при $x = -1$.
4. *Ответ*: график построен.
5. *Ответ*: 4.

Вариант 2

1. *Ответ*: $D(y) = [2; +\infty)$, $E(y) = [1; +\infty)$.
2. *Ответ*: $(x - 1)(7x - 5)$.
3. *Ответ*: $y_{\max} = -5$ при $x = 1$.
4. *Ответ*: график построен.
5. *Ответ*: -2.

Вариант 3

1. *Ответ*: $D(y) = [2; +\infty)$, $E(y) = [6; +\infty)$.
2. *Ответ*: $a(6x^2 - x - 2)$, где $a \neq 0$.
3. *Ответ*: $y_{\max} = 9$ при $x = 3$.
4. *Ответ*: график построен.
5. *Ответ*: 4.

Вариант 4

1. *Ответ*: $D(y) = [2; +\infty)$, $E(y) = [-1; +\infty)$.
2. *Ответ*: $a(6x^2 - x - 1)$, где $a \neq 0$.
3. *Ответ*: $y_{\max} = 5$ при $x = 2$.
4. *Ответ*: график построен.
5. *Ответ*: 6.

Решения

Вариант 5

1. Область определения функции $y = 4\sqrt{3x-6} + 2x^2 + 4x - 5$ задается неравенством $3x - 6 \geq 0$, откуда $x \geq 2$ и $D(y) = [2; +\infty)$. Функции $y_1 = 4\sqrt{3x-6}$ и $y_2 = 2x^2 + 4x - 5$ на промежутке $[2; +\infty)$ возрастают. Найдем $y(2) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 5 = 11$. Поэтому область значений данной функции $E(y) = [11; +\infty)$.

Ответ: $D(y) = [2; +\infty)$, $E(y) = [11; +\infty)$.

2. Для квадратного трехчлена $2x^2 - 3x - 1$ запишем формулы Виета: $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$ и $x_1x_2 = -\frac{1}{2}$. Пусть искомый трехчлен имеет вид: $ay^2 + by + c$ и корни y_1 и y_2. Запишем для них формулы Виета: $-\frac{b}{a} = y_1 + y_2 = (x_1+1) + (x_2+1) = (x_1+x_2) + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$ (откуда $b = -\frac{7}{2}a$) и $\frac{c}{a} = y_1y_2 = (x_1+1)\cdot(x_2+1) = x_1x_2 + (x_1+x_2) + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 2$ (откуда $c = 2a$). Тогда искомый трехчлен имеет вид: $ay^2 - \frac{7}{2}ay + 2a = \frac{a}{2}(2y^2 - 7y + 4)$, где $a \neq 0$.

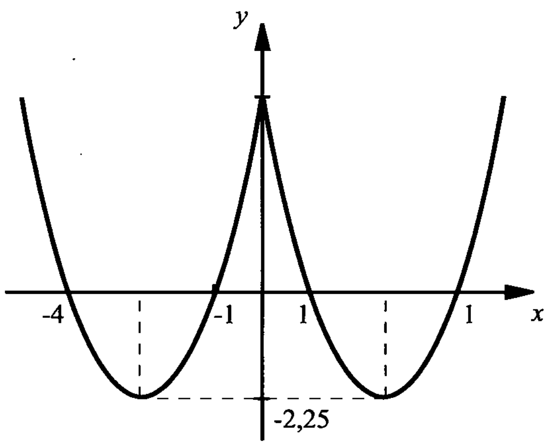
Ответ: $\frac{a}{2}(2y^2 - 7y + 4)$, где $a \neq 0$.

3. В данной функции $y = \frac{3x^2 - 6x + 23}{x^2 - 2x + 5}$ выделим целую часть и запишем ее в виде $y = \frac{3x^2 - 6x + 15 + 8}{x^2 - 2x + 5} = \frac{3(x^2 - 2x + 5) + 8}{x^2 - 2x + 5} = 3 + \frac{8}{(x-1)^2 + 4}$. Наибольшее значение функция y достигает, если

второе слагаемое максимально, т. е. знаменатель дроби минимальный. Это имеет место при $x = 1$ и $y_{max} = 3 + \dfrac{8}{4} = 5$.

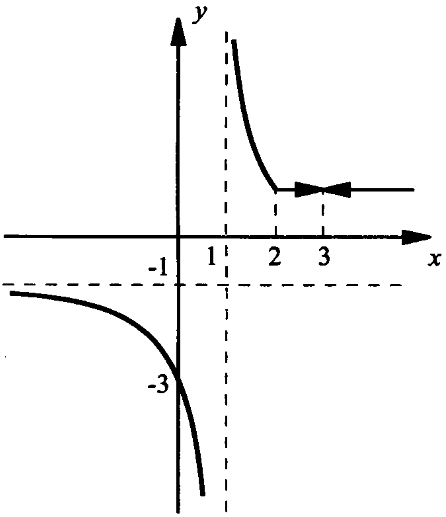
Ответ: $y_{max} = 5$ при $x = 1$.

4(а) Очевидно, что функция $y = x^2 - 5|x| + 4$ четная и ее график симметричен относительно оси ординат. При $x \ge 0$ функция имеет вид: $y = x^2 - 5x + 4$. График пересекает ось ординат в точке $y = 4$ и ось абсцисс в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Вершина параболы имеет координаты (2,5; −2,25). Строим этот график при $x \ge 0$ и симметрично отражаем его влево.



Ответ: график построен.

4(б) Раскроем знак модуля и запишем функцию $y = \dfrac{x-3}{|x-2|-1}$ в виде $y = \begin{cases} \dfrac{x-3}{1-x}, \text{ если } x < 2, \\ 1, \text{ если } x \ge 2 \text{ и } x \ne 3. \end{cases}$ При $x < 2$ строим гиперболу $y = \dfrac{x-3}{1-x}$. Она пересекает ось ординат в точке $y = -3$, имеет вертикальную асимптоту $x = 1$ и горизонтальную асимптоту $y = -1$. При $x \ge 2$ и $x \ne 3$ строим прямую $y = 1$.



Ответ: график построен.

5. Чтобы упростить выражение $A=\dfrac{x-15}{\sqrt{x+1}-4}-\dfrac{x-3}{2+\sqrt{x+1}}$, удобно ввести новую переменную $y=\sqrt{x+1}$, тогда $y^2 = x + 1$ и $x = y^2 - 1$. Выражение имеет вид: $A=\dfrac{y^2-16}{y-4}-\dfrac{y^2-4}{y+2}=(y+4)-(y-2)=6.$

Ответ: 6.

Вариант 6

1. Область определения функции $y=3\sqrt{2x-4}+4x^2-8x+5$ задается неравенством $2x-4\geq 0$, откуда $x\geq 2$ и $D(y) = [2; +\infty)$. Функции $y_1=3\sqrt{2x-4}$ и $y_2=4x^2-8x+5$ на промежутке $[2; +\infty)$ возрастают. Найдем $y(2) = 3\cdot 0 + 4\cdot 4 - 8\cdot 2 + 5 = 5$. Поэтому область значений данной функции $E(y) = [5; +\infty)$.

Ответ: $D(y) = [2; +\infty)$, $E(y) = [5; +\infty)$.

2. Для квадратного трехчлена $3x^2 - 5x + 1$ запишем формулы Виета: $x_1+x_2=\dfrac{5}{3}$ и $x_1x_2=\dfrac{1}{3}$. Пусть искомый трехчлен имеет вид: ay^2+by+c и корни y_1 и y_2. Запишем для них формулы Виета:

$-\dfrac{b}{a}=y_1+y_2=(x_1-1)+(x_2-1)=(x_1+x_2)-2=\dfrac{5}{3}-2=-\dfrac{1}{3}$ (откуда $b=\dfrac{1}{3}a$)

и $\dfrac{c}{a}=y_1y_2=(x_1-1)(x_2-1)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1=\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{3}+1=-\dfrac{1}{3}$ (откуда $c=-\dfrac{1}{3}a$). Тогда искомый трехчлен имеет вид: $ay^2+\dfrac{1}{3}ay-\dfrac{1}{3}a=$

$=\dfrac{a}{3}(3y^2+y-1)$, где $a\neq 0$.

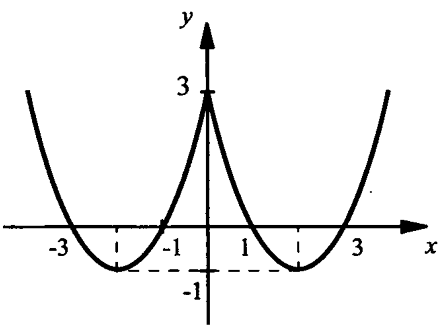
Ответ: $\dfrac{a}{3}(3y^2+y-1)$.

3. В данной функции $y=\dfrac{5x^2+10x+14}{x^2+2x+4}$ выделим целую часть и запишем ее в виде $y=\dfrac{5x^2+10x+20-6}{x^2+2x+4}=\dfrac{5(x^2+2x+4)-6}{x^2+2x+4}=$

$=5-\dfrac{6}{(x+1)^2+3}$. Наименьшее значение функция y достигает, если вычитаемое максимально, т. е. знаменатель дроби минимальный. Это имеет место при $x=-1$ и $y_{max}=5-\dfrac{6}{3}=3$.

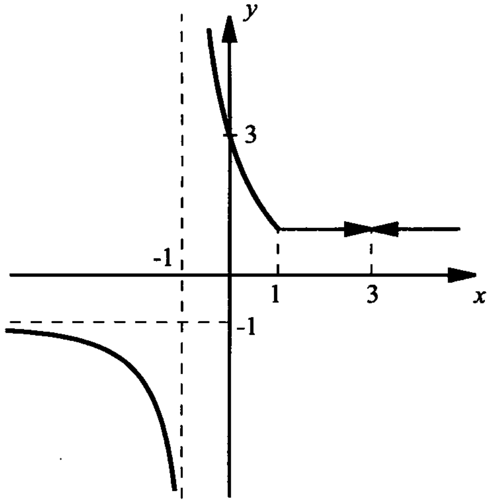
Ответ: $y_{max}=3$ при $x=-1$.

4(а) Очевидно, что функция $y=x^2-4|x|+3$ четная и ее график симметричен относительно оси ординат. При $x\geq 0$ функция имеет вид: $y=x^2-4x+3$. График пересекает ось ординат в точке $y=3$ и ось абсцисс в точках $x_1=1$ и $x_2=3$. Вершина параболы имеет координаты $(2;-1)$. Строим этот график при $x\geq 0$ и симметрично отражаем его влево.



Ответ: график построен.

4(б) Раскроем знак модуля и запишем функцию $y=\dfrac{x-3}{|x-1|-2}$ в виде $y=\begin{cases}\dfrac{3-x}{x+1}, \text{ если } x<1,\\ 1, \text{ если } x\ge 1 \text{ и } x\ne 3.\end{cases}$ При $x<1$ строим гиперболу $y=\dfrac{3-x}{x+1}$. Она пересекает ось ординат в точке $y = 3$, имеет вертикальную асимптоту $x=-1$ и горизонтальную асимптоту $y=-1$. При $x\ge 1$ и $x\ne 3$ строим прямую $y=1$.



Ответ: график построен.

5. Чтобы упростить выражение $A=\dfrac{x-4}{\sqrt{x-3}+1}-\dfrac{x-12}{3+\sqrt{x-3}}$, удобно ввести новую переменную $y=\sqrt{x-3}$, тогда $y^2=x-3$ и $x=y^2+3$.

Выражение имеет вид: $A=\dfrac{y^2-1}{y+1}-\dfrac{y^2-9}{y+3}=(y-1)-(y-3)=2.$

Ответ: 2.

Уроки 23–24. Зачетная работа по теме «Квадратичная функция»

Цель: проверка знаний учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Найдите область определения функции $y = 2\sqrt{4-2x} + \dfrac{3x-5}{\sqrt{x+1}}$.

2. Найдите область значений функции $y = 2x^2 - 8x$.

3. Сократите дробь $\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-9}$.

4. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{8}}{\sqrt{10}-\sqrt{8}} + \dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{8}}{\sqrt{10}+\sqrt{8}}$.

5. Пусть x_1 и x_2 – корни трехчлена $2x^2 - 5x + 1$. Найдите значение выражения $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$.

6. Постройте график функции.

а) $y = (x + 1)(3 - x)$;

б) $y = \sqrt{x-1} - 2$.

В

7. Упростите выражение $\dfrac{5^{n-1} + 2\cdot 5^{n+1} - 3\cdot 5^n}{2\cdot 5^n}$.

8. Найдите наименьшее значение функции $y = 6 + \sqrt{4x^2 - 4x - 3}$. При каких значениях x оно достигается?

9. Найдите координаты точек прямой $y = 6x - 35$, равноудаленных от осей координат.

10. Постройте график функции $y = \sqrt[4]{x^2 + 4x + 4}$.

С

11. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = 3x + 2|x-2| - |x+1| - 2$.

12. Упростите выражение $\sqrt{a^2-13a+45+\sqrt{a^2-8a+16}}$ при $a \le 4$.

13. Прямая проходит через точку (0; −1) и касается гиперболы $y=\frac{1}{x}$. В какой точке эта прямая пересекает ось абсцисс?

Вариант 2

А

1. Найдите область определения функции $y=3\sqrt{x-1}-\frac{5x+1}{\sqrt{8-2x}}$.

2. Найдите область значений функции $y = 4x - 2x^2$.

3. Сократите дробь $\frac{3x^2-5x-2}{x^2-4}$.

4. Упростите выражение $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

5. Пусть x_1 и x_2 – корни трехчлена $3x^2 - 2x - 4$. Найдите значение выражения $x_1^2x_2+x_1x_2^2$.

6. Постройте график функции.

а) $y = (x - 1)(x + 3)$;

б) $y=\sqrt{x+2}-1$

В

7. Упростите выражение $\frac{2\cdot 3^{n-1}+4\cdot 3^{n+1}-3^n}{4\cdot 3^n}$.

8. Найдите наименьшее значение функции $y=7-\sqrt{3x^2+4x-4}$. При каких значениях x оно достигается?

9. Найдите координаты точек прямой $y = -5x - 24$, равноудаленных от осей координат.

10. Постройте график функции $y=\sqrt[4]{x^2-6x+9}$.

С

11. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y=2x+3|x-1|-4|x+2|-1$.

12. Упростите выражение $\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{a^2-6a+9}}$ при $a \ge 3$.

13. Прямая проходит через точку (0; 3) и касается гиперболы $y=\frac{3}{x}$. В какой точке эта прямая пересекает ось абсцисс?

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. *Ответ*: $D(y) = (-1; 2]$.
2. *Ответ*: $E(y) = [-8; +\infty)$.
3. *Ответ*: $\dfrac{2x+1}{x+3}$.
4. *Ответ*: 18.
5. *Ответ*: $\dfrac{5}{4}$.
6. *Ответ*: график построен.
7. *Ответ*: $\dfrac{18}{5}$.
8. $y_{\min} = 6$ при $x = -0{,}5$ и $x = 1{,}5$.
9. *Ответ*: $(5; -5)$ и $(7; 7)$.
10. *Ответ*: график построен.
11. Раскроем знаки модуля и найдем вид функции $y = 3x + 2|x-2| - |x+1| - 2$ в каждом промежутке:

а) при $x \le -1$ получаем: $y = 3x - 2(x - 2) + (x + 1) - 2 = 2x + 3$ – функция возрастает;

б) при $-1 \le x \le 2$ имеем: $y = 3x - 2(x - 2) - (x + 1) - 2 = 1$ – функция постоянна;

в) при $x \ge 2$ получаем: $y = 3x + 2(x - 2) - (x + 1) - 2 = 4x - 7$ – функция возрастает.

Ответ: промежутки возрастания $(-\infty; -1]$ и $[2; +\infty)$, промежутков убывания нет.

12. Упростим выражение $\sqrt{a^2 - 13a + 45 + |a - 4|} = \sqrt{a^2 - 13a + 45 - (a-4)} = \sqrt{a^2 - 14a + 49} = |a-7| = -(a-7) = 7 - a$.

Учтено, что $a \le 4$ и $|a - 4| = -(a - 4)$ и $|a - 7| = -(a - 7)$.

Ответ: $7 - a$.

13. Так как прямая проходит через точку $(0; -1)$, то ее вид: $y = ax - 1$. Если прямая $y = ax - 1$ и гипербола $y = \dfrac{1}{x}$ касаются, то уравнение $ax - 1 = \dfrac{1}{x}$, или $ax^2 - x - 1 = 0$, имеет единственный ко-

рень. Поэтому дискриминант $D = 1 + 4a = 0$, откуда $a = -\frac{1}{4}$. Прямая $y = -\frac{1}{4}x - 1$ пересекает ось абсцисс в точке $x = -4$.

Ответ: $x = -4$.

Вариант 2

1. *Ответ*: $D(y) = [1; 4)$.
2. *Ответ*: $E(y) = (-\infty; 2]$.
3. *Ответ*: $\frac{3x+1}{x+2}$.
4. *Ответ*: 8.
5. *Ответ*: $-\frac{10}{9}$.
6. *Ответ*: график построен.
7. *Ответ*: $\frac{35}{12}$.
8. $y_{max} = 7$ при $x = -2$ и $x = \frac{2}{3}$.
9. *Ответ*: $(-4; -4)$ и $(-6; 6)$.
10. *Ответ*: график построен.
11. Раскроем знаки модуля и найдем вид функции $y = 2x + 3|x-1| - 4|x+2| - 1$ в каждом промежутке:

а) при $x \le -2$ получаем: $y = 2x - 3(x - 1) + 4(x + 2) - 1 = 3x + 10$ – функция возрастает;

б) при $-2 \le x \le 1$ имеем: $y = 2x - 3(x - 1) - 4(x + 2) - 1 = -5x - 6$ – функция убывает;

в) при $x \ge 1$ получаем: $y = 2x + 3(x - 1) - 4(x + 2) - 1 = x - 12$ – функция возрастает.

Ответ: промежутки возрастания $(-\infty; -2]$ и $[1; +\infty)$, промежуток убывания $[-2; 1]$.

12. Упростим выражение $\sqrt{a^2 + a + 4 + |a - 3|} = \sqrt{a^2 + a + 4 + (a-3)} = \sqrt{a^2 + 2a + 1} = |a+1| = a + 1$. Учтено, что $a \ge 3$ и $|a - 3| = a - 3$ и $|a + 1| = a + 1$.

Ответ: $a - 1$.

13. Так как прямая проходит через точку (0; 3), то ее вид: $y = ax + 3$. Если прямая $y = ax + 3$ и гипербола $y = \frac{3}{x}$ касаются, то уравнение $ax + 3 = \frac{3}{x}$, или $ax^2 + 3x - 3 = 0$, имеет единственный корень. Поэтому дискриминант $D = 9 + 12a = 0$, откуда $a = -\frac{3}{4}$. Прямая $y = -\frac{3}{4}x + 3$ пересекает ось абсцисс в точке $x = 4$.

Ответ: $x = 4$.

Глава II. Уравнения и неравенства с одной переменной

§ 5. Уравнения с одной переменной

Уроки 25–27. Целое уравнение и его корни

***Цель*:** решение уравнений высоких степеней.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Уравнение называют *целым*, если обе части его являются целыми выражениями (т. е. не содержат деления на выражения с переменными). С помощью равносильных преобразований целое уравнение можно привести к виду $P_n(x) = 0$, где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени.

Пример 1

а) Преобразуем целое уравнение $(2x^2+1)^2 - x^5 = 1 - 3(x^2-2)$. Для этого раскроем скобки, перенесем все члены в одну часть и приведем подобные члены. Получаем: $4x^4+4x^2+1-x^5 = 1-3x^2+6$, или $0 = -4x^4-4x^2-1+x^5+1-3x^2+6$, или $0 = x^5-4x^4-7x^2+6$. Таким образом, имеем уравнение пятой степени $0 = P_5(x)$, где $P_5(x) = x^5-4x^4-7x^2+6$ – многочлен пятой степени.

б) Преобразуем целое уравнение $\dfrac{(x^2-1)^2}{4} + \dfrac{3x^2+5}{12} = (x+1)^2$.

Сначала умножим все члены уравнения на наименьший общий знаменатель дробей – число 12 и получим: $3(x^2-1)^2+3x^2+5 = 12(x+1)^2$. Затем выполним преобразования, аналогичные использованным в предыдущей задаче. Получаем: $3x^4-6x^2+3+3x^2+5 = 12x^2+24x+12$, или $3x^4-3x^2+8-12x^2-24x-12=0$, или $3x^4-15x^2-24x-4=0$. Таким образом, имеем уравнение четвертой степени $P_4(x) = 0$, где $P_4(x) = 3x^4-15x^2-24x-4$ – многочлен четвертой степени.

Мы видим, что необходимо *научиться решать уравнения n-й степени* $P_n(x) = 0$. При $n = 1$ такое уравнение является линейным ($ax + b = 0$, где $a \neq 0$ по определению) и имеет единственный корень

$x=-\dfrac{b}{a}$. При $n = 2$ получаем квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$). Количество корней и сами корни определяются дискриминантом уравнения $D = b^2 - 4ac$. Для $D < 0$ уравнение корней не имеет, для $D = 0$ имеет один корень (два одинаковых корня) $x=-\dfrac{b}{2a}$, для $D > 0$ имеет два различных корня $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. Из рассмотренных линейных и квадратных уравнений (разумеется, со старшим коэффициентом, не равным нулю) видим, что количество корней уравнения не более его степени.

В курсе высшей алгебры доказывается, что уравнение n-й степени $P_n(x) = 0$ имеет *не более n корней*. Что касается самих корней, то ситуация *намного сложнее*. Для уравнений третьей и четвертой степеней известны формулы для нахождения корней. Однако эти формулы очень сложны и громоздки и практического применения не имеют. Для уравнений пятой и более высоких степеней общих формул не существует и существовать не может (как было доказано в XIX в. Н. Абелем и Э. Галуа).

Будем называть уравнения третьей, четвертой и т. д. степеней *уравнениями высоких степеней*. Некоторые уравнения высоких степеней удается решить с помощью двух основных приемов: разложением многочлена $P_n(x)$ на множители или с использованием замены неизвестной.

Пример 2

Решим уравнение $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

Сгруппируем члены многочлена и разложим его на множители. Получаем: $(x^3 + 2x^2) - (x + 2) = 0$, или $x^2(x + 2) - (x + 2) = 0$, или $(x + 2)(x^2 - 1) = 0$, или $(x + 2)(x - 1)(x + 1) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем три линейных уравнения: $x + 2 = 0$ (корень $x = -2$), $x - 1 = 0$ (корень $x = 1$) и $x + 1 = 0$ (корень $x = -1$). Итак, данное кубическое уравнение имеет три корня: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ и $x_3 = -1$.

Пример 3

В этом уравнении мы также будем раскладывать многочлен на множители. Но в данном случае разложение очень неочевидно. Один корень легко *угадать* (подобрать): $x_1 = 1$. Тогда многочлен должен иметь множитель $x - 1$. Именно такой *множитель* мы и будем *выделять в многочлене*. Получаем:

$(6x^3-6x^2)-x^2-x+2=0$, или $6x^2(x-1)-(x^2-x)-2x+2=0$, или $6x^2(x-1)-x(x-1)-2(x-1)=0$, или $(x-1)(6x^2-x-2)=0$. Случай $x-1=0$ мы уже рассмотрели (с него начинали). Теперь решим квадратное уравнение $6x^2-x-2=0$ и найдем его корни $x_2=\frac{2}{3}$ и $x_3=-\frac{1}{2}$.

В более сложных случаях используют *замену неизвестной*. Очень распространены *биквадратные уравнения* $ax^4+bx^2+c=0$ (т. е. уравнения, квадратные относительно x^2). Для их решения вводят новую переменную $y=x^2$.

Пример 4

Решим биквадратное уравнение $4x^4-5x^2+1=0$.

Введем новую переменную $y=x^2$ и получим квадратное уравнение $4y^2-5y+1=0$, корни которого $y=1$ и $y=\frac{1}{4}$. Вернемся к старой переменной x и получим два простейших квадратных уравнения: $x^2=1$ (корни $x_1=1$ и $x_2=-1$) и $x^2=\frac{1}{4}$ (корни $x_3=\frac{1}{2}$ и $x_4=-\frac{1}{2}$).

Пример 5

Решим уравнение $(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)+3=0$.

Так как и в это уравнение неизвестная x входит только в виде комбинации x^2-2x, то удобно ввести замену $y=x^2-2x$. Тогда приходим к квадратному уравнению $y^2-4y+3=0$, корни которого $y_1=1$ и $y_2=3$. Возвращаясь к неизвестной x, для y_1 получаем: $x^2-2x=1$ (корни $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$); для y_2: $x^2-2x=3$ (корни $x_3=-1$, $x_4=3$). Так найдены все четыре корня исходного уравнения.

Пример 6

Решим уравнение $(x^2+4x+3)(x^2+4x+1)=48$.

Легко сообразить, что уравнение может быть решено так же, как и предыдущее, если ввести замену $y=x^2+4x+1$. Тогда получим уравнение $(y+2)y=48$, или $y^2+2y-48=0$, корни которого $y_1=-8$, $y_2=6$. Приходим к совокупности двух уравнений: $x^2+4x+1=6$ (корни $x_1=-5$, $x_2=1$) и $x^2+4x+1=-8$ (корней нет).

Пример 7

Решим уравнение $(x-1)(x+1)(x+3)(x+5) = 105$.

При решении этой задачи важно сообразить, что $(x-1)(x+5) = x^2 + 4x - 5$, $(x+1)(x+3) = x^2 + 4x + 3$. Поэтому, изменив порядок умножения сомножителей в исходном уравнении, получим: $[(x-1)(x+5)][(x+1)(x+3)] = 105$, или $(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) = 105$. Далее эта задача решается аналогично предыдущей. Введем замену $y = x^2 + 4x - 5$ и получим уравнение $y(y+8) = 105$, корни которого $y_1 = -15$ и $y_2 = 7$. Решим уравнения $x^2 + 4x - 5 = -15$ (корней не имеет) и $x^2 + 4x - 5 = 7$ (корни $x_1 = -6$ и $x_2 = 2$).

Пример 8

Решим уравнение $(x^2 + 3x - 8)^2 + 2x(x^2 + 3x - 8) - 3x^2 = 0$.

Многочлен, который стоит в левой части уравнения, легко свести к однородному многочлену двух переменных, если ввести замену $y = x^2 + 3x - 8$. Тогда уравнение примет вид: $y^2 + 2xy - 3x^2 = 0$. Решив его как квадратное уравнение по переменной y, получим: $y = -x \pm 2x$, т. е. $y = -3x$ и $y = x$. Возвращаясь к переменной x, имеем два уравнения: $x^2 + 3x - 8 = -3x$ (корни $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{17}$) и $x^2 + 3x - 8 = x$ (корни $x_3 = -4$ и $x_4 = 2$).

Достаточно часто встречаются целые уравнения, требующие *исследования корней.*

Пример 9

Докажите, что уравнение $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 4x + 5) = 1$ не имеет корней.

Рассмотрим функции $y_1 = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$ и $y_2 = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$. Очевидно, что $y_1 \geq 1$ и $y_2 \geq 1$. Поэтому произведение $y_1 y_2 \geq 1$. Уточним это неравенство. Функция y_1 имеет наименьшее значение (равное 1) при $x = -1$. Но тогда $y_2(-1) = (-3)^2 + 1 = 10$ и произведение $y_1 y_2 > 1$. Аналогично функция y_2 имеет наименьшее значение (равное 1) при $x = 2$. Тогда $y_1(1) = 2^2 + 1 = 5$ и вновь произведение $y_1 y_2 > 1$. Поэтому при всех значениях x произведение $y_1 y_2 > 1$ и данное уравнение корней не имеет.

Пример 10

При каких значениях a корни уравнения $x^2 - 2ax + (a+1)(a-1) = 0$ принадлежат промежутку $[-2; 1]$?

Прежде всего решим это квадратное уравнение: $x = a \pm \sqrt{a^2 - (a^2 - 1)} = a \pm 1$. По условию задачи получаем систему двойных линейных неравенств $\begin{cases} -2 \le a+1 \le 1, \\ -2 \le a-1 \le 1, \end{cases}$ или $\begin{cases} -3 \le a \le 0, \\ -1 \le a \le 2, \end{cases}$ откуда $-1 \le a \le 0$.

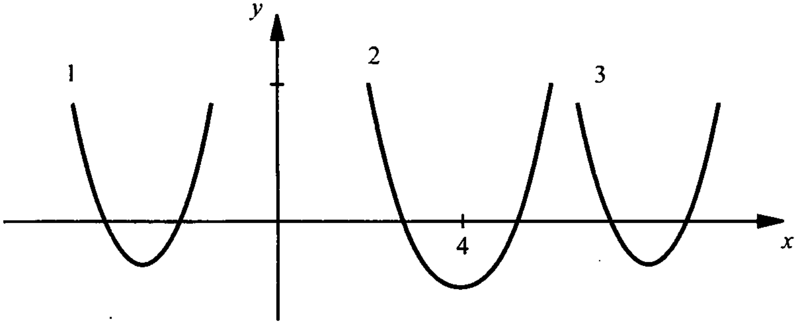
В ряде случаев корни уравнения могут иметь достаточно громоздкий вид и для решения задачи приходится использовать *графическое представление* уравнения.

Пример 11

При каких значениях a один из корней уравнения $x^2 + 3x + a - 2 = 0$ больше 4, а другой меньше 4?

Найдем дискриминант уравнения $D = 9 - 4(a - 2) = 17 - 4a$ и корни $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17-4a}}{2}$. Понятно, что аналитическое решение задачи вызывает трудности, т. к. сводится к решению иррациональных неравенств. Поэтому рассмотрим функцию $y = x^2 + 3x + a - 2$. При всех значениях параметра a ее графиком является парабола, направленная ветвями вверх. Обсудим такие параболы, пересекающие ось абсцисс. При этом точки пересечения являются корнями уравнения $x^2 - 3x + a - 2 = 0$.

На рисунке представлены парабола 1, у которой обе точки пересечения x меньше 4; парабола 2, у которой одна из точек меньше 4, а другая больше 4; парабола 3, у которой обе точки больше 4.



Условию задачи удовлетворяет парабола 2, для которой (в отличие от парабол 1 и 3) $y(4) < 0$. При таком условии парабола обязательно пересекает ось абсцисс (т. е. данное уравнение обязательно имеет корни).

Найдем $y(4) = 4^2 + 3 \cdot 4 + a - 2 = a + 26$ и решим неравенство $a + 26 < 0$, откуда $a < -26$. Именно при таких значениях a условия задачи выполнены.

Часто встречаются целые уравнения, содержащие *модули.*

Пример 12

Решим уравнение $x^3 - 2x^2 + |x| = 0.$

Для решения уравнения раскроем знак модуля, рассмотрев два случая.

а) При $x \geq 0$ уравнение имеет вид: $x^3 - 2x^2 + x = 0$, или $x(x - 1)^2 = 0$. Корни этого уравнения $x = 0$ и $x = 1$ удовлетворяют условию $x \geq 0$ и являются решениями данного уравнения.

б) При $x < 0$ уравнение имеет вид: $x^3 - 2x^2 - x = 0$. Так как $x \neq 0$, то разделим все члены на x и получим квадратное уравнение $x^2 - 2x - 1 = 0$. Его корни $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Условию $x < 0$ удовлетворяет только корень $x = 1 - \sqrt{2}$, он и является решением данного уравнения.

Итак, данное уравнение имеет три корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 1 - \sqrt{2}$.

Пример 13

Решим уравнение $|3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15|$.

Очевидно, что если модули двух выражений равны, то они либо равны, либо противоположны по знаку. Рассмотрим эти случаи.

а) $3x^2 + 5x - 9 = 6x + 15$, или $3x^2 - x - 24 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 3$ и $x_2 = -\frac{8}{3}$.

б) $3x^2 + 5x - 9 = -(6x + 15)$, или $3x^2 + 11x + 6 = 0$. Корни этого уравнения $x_3 = -\frac{2}{3}$ и $x_4 = -3$.

Таким образом, данное уравнение имеет четыре корня: $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{8}{3}$, $x_3 = -\frac{2}{3}$ и $x_4 = -3$.

В ряде случаев при решении уравнений высоких степеней с параметрами удобно решать уравнение *относительно параметра.*

Пример 14

Решим уравнение $x^3-2x^2-(m^2-m-1)x+m^2-m=0$.

Имеем *кубическое* уравнение с параметром. При этом параметр m входит в уравнение в степени не выше второй. Удобно считать *переменную m неизвестной*, а *переменную x параметром*. Получаем уравнение $x^3-2x^2-m^2x+mx+x+m^2-m=0$, или $(1-x)m^2+(x-1)m+x^3-2x^2+x=0$. Относительно переменной m это уравнение уже является *квадратным* при $m \neq 1$, где $a = 1 - x$, $b = x - 1$ и $c = x^3-2x^2+x = x(x-1)^2$. Найдем дискриминант $D=b^2-4ac=(x-1)^2-4(1-x)x(x-1)^2=(x-1)^2(1-4x+4x^2)=$ $=(x-1)^2(2x-1)^2$, его корни $m=\dfrac{-(x-1)\pm(x-1)(2x-1)}{2(1-x)}=$

$$=\frac{(1-x)\mp(1-x)(2x-1)}{2(1-x)}=\frac{(1-x)(1\mp(2x-1))}{2(1-x)}=\frac{1\mp(2x-1)}{2} \text{ (где } x\neq 1\text{)},$$

откуда $m=\dfrac{1-2x+1}{2}=1-x$ и $m=\dfrac{1+2x-1}{2}=x$. Решив линейное уравнение $m = 1 - x$, найдем $x = 1 - m$. Итак, нашли два корня: $x = 1 - m$ и $x = m$.

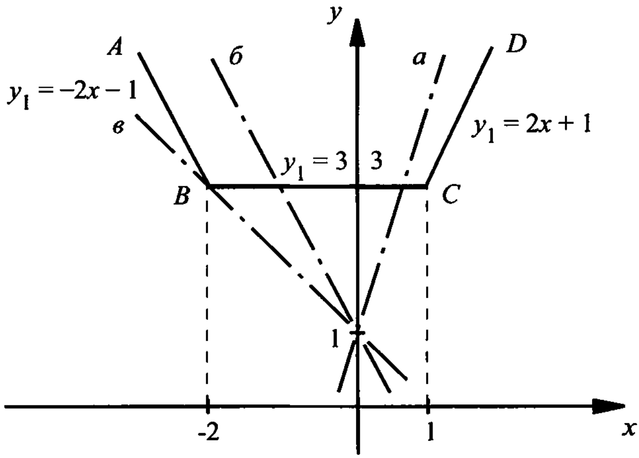
Кроме того, для уравнения $(1-x)m^2+(x-1)m+x^3-2x^2+x=0$ необходимо проверить значение $x = 1$. Видим, что $x = 1$ также является корнем данного уравнения. Итак, данное кубическое уравнение имеет три корня: $x_1 = 1 - m$, $x_2 = m$ и $x_3 = 1$.

Большие трудности связаны с уравнениями, одновременно содержащими *модули и параметры*.

Пример 15

При каких значениях параметра a уравнение $|x-1|+|x+2|=ax+1$ имеет единственный корень?

Удобно решить задачу графически. Рассмотрим функцию $y_1=|x-1|+|x+2|$ и, раскрыв модули, построим ее график. На участке AB функция имеет вид: $y_1=-2x-1$, на участке BC – $y_1=3$ и на участке CD –$y_1=2x+1$. При всех значениях a рассмотрим график функции $y_2=ax+1$ (прямые *а*, *б*, *в*).



Очевидно, что если график y_2 находится ниже участка CD (т. е. $0 \le a < 2$), то данное уравнение корней не имеет. Если график y_2 совпадает с участком CD (т. е. $a = 2$), то уравнение имеет бесконечное множество решений. Если y_2 пересекает участок BC (прямая a), то уравнение имеет единственный корень (т. е. при $a > 2$). Очевидно, что если график y_2 находится не ниже прямой *б* (параллельной участку AB), то уравнение также имеет один корень (т. е. при $a \le -2$). Кроме того, уравнение имеет единственное решение, если прямая y_2 проходит через точку $B(-2;\ 3)$. Получаем уравнение $a(-2) + 1 = 3$, откуда $a = -1$.

Итак, при $a > 2$, $a \le -2$ и $a = -1$ данное уравнение имеет единственный корень.

III. Контрольные вопросы

1. Определение целого уравнения.
2. Биквадратное уравнение и его решение.

IV. Задание на уроке

№ 265 (а, в, д); 266 (а, б); 268; 270; 272 (а, в, д); 274 (б); 276 (а, в); 278 (а, г); 281 (б); 282 (а); 283 (б); 284 (а).

V. Задание на дом

№ 265 (б, г, е); 266 (в, г); 269; 271; 272 (б, е); 274 (а); 276 (б, г); 278 (б, д); 281 (а); 282 (б); 283 (а); 284 (б).

VI. Творческие задания

1. Линейные уравнения

Решите линейное уравнение.

1) $|x| + 3 = 5x - 1$;
2) $|x| - 2 = 2x + 1$;
3) $|x-1| = \frac{1}{2}x$;
4) $|x+1| = -\frac{1}{3}x$;
5) $|x - 2| + x = 2$;
6) $|x + 3| - x = 3$;
7) $|5x - 3| = |3x - 5|$;
8) $|7x - 4| = |2x + 1|$;
9) $|2x - 3| + 3|x + 1| = 7$;
10) $|3x - 2| + 2|x + 2| = 7$;
11) $|3x + 1| + 5x - 7 = |4x - 2|$;
12) $|2x + 3| - 3x - 1 = |4x + 2|$;
13) $|x - 1| + |x + 2| = 3$;
14) $|x - 3| - |x - 1| = 2$;
15) $(a - 1)x = a^2 - 1$;
16) $(a + 2)x = a^2 - 4$;
17) $(a^2 - 9)x = a + 3$;
18) $(16 - a^2)x = a + 4$.

Определите количество корней уравнения.

19) $|x - 2| + |x + 3| = a$;
20) $|x + 4| - |x - 3| = a$.

При каких значениях a уравнение имеет не менее трех корней?

21) $|x + 5| - |x - 2| = ax + 3$;
22) $|x - 4| + |x + 2| = -2x + a$.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет два различных корня, равноудаленных от точки $x = 5$.

23) $|4x+9a+5| = |10x+8a-3|$;
24) $|10x+7a-5| = |3x+2a-1|$.

Ответы: 1) 1; 2) −1; 3) $\frac{2}{3}$ и 2; 4) $-\frac{3}{4}$ и −1,5; 5) $(-\infty; 2]$; 6) $[-3; \infty)$; 7) −1 и 1; 8) $\frac{1}{3}$ и 1; 9) −1; 4 и 1; 10) −1 и 1; 11) 1; 12) −2; $-\frac{4}{3}$ и 0; 13) $[-2; 1]$; 14) $(-\infty; 1]$; 15) при $a \neq 1$ $x = a + 1$; при $a = 1$ $x \in (-\infty; \infty)$; 16) при $a \neq -2$ $x = a - 2$; при $a = -2$ $x \in (-\infty; \infty)$; 17) при $a \neq \pm 3$ $x = \frac{1}{a-3}$; при $a = -3$ $x \in (-\infty; \infty)$; при $a = 3$ $x \in \varnothing$; 18) при $a \neq \pm 4$ $x = \frac{1}{4-a}$; при $a = -4$ $x \in (-\infty; \infty)$; при $a = 4$ $x \in \varnothing$; 19) при $a \in (-\infty; 5)$ – 0; при $a = 5$ – ∞; при $a \in (5; \infty)$ – 2; 20) при

$a \in (-\infty; -7) \cup (7; \infty) - 0$; при $a = \pm 7 - \infty$; при $a \in (-7; 7) - 1$; 21) $a = 2$; 22) $a = -2$; 23) $a = -\frac{185}{22}$; 24) $a = -\frac{51}{8}$.

2. Квадратные уравнения

Решите квадратное уравнение.

1) $(x^2 + 27x - 57)^2 = (x^2 - 3x + 1)^2$;

2) $(x^2 - 12x + 20)^2 = (x^2 + 2x - 12)^2$;

3) $(3x + 7)^3 = (2x)^6$;

4) $(5x + 4)^3 = (3x)^6$;

5) $(x - 2)^3 + (x - 4)^3 = 2(x - 3)^3$;

6) $(x - 3)^3 + (x - 5)^3 = 2(x - 4)^3$;

7) $x^2 + 2x\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = -4x$;

8) $x^2 + 2x\sqrt{5} + 8\sqrt{5} = -4x$;

9) $|x^2 + 11x + 28| = |x^2 - 14|$;

10) $|x^2 - 11x + 24| = |x^2 - 12|$;

11) $|5x - 24| = x^2 + 2x + 6$;

12) $|3x - 19| = x^2 - x + 4$;

13) $|5x^2 - 7x + 3| = 2x - 1$;

14) $|8x^2 - 10x + 3| = 2 - x$;

15) $|x^2 - 4| + |x^2 - 9| = 2x^2 - 13$;

16) $|x^2 - 1| + |x^2 - 16| = 2x^2 - 17$;

17) $x^2 - (14a - 9)x + 49a^2 - 63a + 20 = 0$;

18) $x^2 - (14a - 3)x + 49a^2 - 21a + 2 = 0$;

19) $x^2 - (3a + 2)x + 2a^2 + 7a - 15 = 0$;

20) $x^2 + (a + 2)x - 2a^2 + 7a - 3 = 0$.

Найдите все значения a, при которых уравнение имеет два корня.

21) $ax^2 - 6x + a = 0$;

22) $ax^2 - 5x + \frac{a}{4} = 0$.

При каких значениях a уравнение имеет корни?

23) $x^2 - 18x + 100 = a$;

24) $-x^2 + 12x - 21 = a$.

Найдите пары (x; y) целых чисел x и y, для которых выполнено равенство.

25) $4x + 6xy - 9y = 11$;

26) $3x + 6xy - 10y = 12$;

27) $(2x - y)^2 + 27(3x - y)^2 = 25$;

28) $(2x + y)^2 + 18(x + y)^2 = 16$;

29) $3(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 7$;

30) $2(x - 3)^2 + 3(y - 2)^2 = 5$.

31) Уравнение $3x^2 + ax - 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите:

а) $x_1 + x_2$; г) $x_1^2 + x_2^2$;

б) x_1x_2; д) $|x_1 - x_2|$.

в) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$;

32) Найдите значения параметра a, при которых корни уравнения $(x - 6a)^2 + (x - 2a)^2 = 128$ симметричны относительно точки $x = 12$.

33) Найдите значения параметра a, при которых больший корень уравнения $x^2 - (20a - 3)x + 100a^2 - 30a = 0$ в 6 раз больше, чем его меньший корень.

34) Корни уравнения $x^2 - (a+3)x + a + 5 = 0$ отличаются в 2 раза. Найдите значение параметра a и корни уравнения $x^2 - (a+3)x + a + 5 = 0$.

35) При каждом значении параметра a найдите число решений уравнения $9(3x - 1)a^2 - (21x - 19)a + 2(x - 1) = 0$.

36) Найдите значения параметра a, при которых уравнения $x^2 + 3x + 7a - 21 = 0$ и $x^2 + 6x + 5a - 6 = 0$ имеют хотя бы один общий корень.

37) При каких значениях a корни уравнения $x^2 - 2ax + (a+1)(a-1) = 0$ принадлежат промежутку $[-5; 5]$?

38) При каких значениях a один корень уравнения $x^2 - (a+1)x + 2a^2 = 0$ больше 0,5, а другой меньше 0,5?

39) При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ минимальная?

Ответы: 1) -14; $\dfrac{29}{15}$; 2; 2) 1; $\dfrac{16}{7}$; 4; 3) -1; $\dfrac{7}{4}$; 4) $-\dfrac{4}{9}$; 1; 5) 3; 6) 4; 7) $-2\sqrt{3}$; -4; 8) $-2\sqrt{5}$; -4; 9) $-3{,}5$; -2; $-\dfrac{42}{11}$; 10) 1,5; 4; $\dfrac{36}{11}$;

11) –9; 2; 12) –5; 3; 13) 1; 14) $\frac{1}{8}$; 1; 15) $(-\infty; -3]\cup[3; \infty)$; 16) $(-\infty; -4]\cup[4; \infty)$; 17) $x = 7a - 4$ и $x = 7a - 5$; 18) $x = 7a - 1$ и $x = 7a - 2$; 19) $x = 2a - 3$ и $x = a + 5$; 20) $x = a - 3$ и $x = 1 - 2a$; 21) (–3; 3); 22) (–5; 5); 23) [19; ∞); 24) (–∞;15]; 25) (–1; –1); 26) (4; 0); 27) (5; 15), (–5; –15); 28 (4; –4), (–4; 4); 29) (0; –1), (0; –3), (2; –1), (2; –3); 30) (2; 3), (2; 1), (4; 3), (4; 1); 31(а) $-\frac{a}{3}$, (б) $-\frac{1}{3}$, (в) a, (г) $\frac{a^2+6}{9}$, (д) $\frac{\sqrt{a^2+12}}{3}$; 32) 3; 33) $\frac{9}{25}$; 34) при $a = 3$ $x = 2$ и $x = 4$, при $a = -4{,}5$ $x = 0{,}5$ и $x = 1$; 35) при $a \neq \frac{1}{9}$ и $a \neq \frac{2}{3}$ –1, при $a = \frac{1}{9}$ – ∞, при $a = \frac{2}{3}$ – 0; 36) 3; 37) [–4; 4]; 38) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$; 39) 1.

3. Уравнения высоких степеней

Решите уравнение.

1) $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$;
2) $x^4 - 16x^2 + 24x - 9 = 0$;
3) $x^5 - 9x^3 + 20x = 0$;
4) $x^5 - 7x^3 + 12x = 0$;
5) $(x^2 + 4x)(x^2 + 4x - 17) = -60$;
6) $(x^2 - 5x)(x^2 - 5x + 10) + 24 = 0$;
7) $(x^2 + 10x + 16)^2 + (x^2 + 11x + 24)^2 = 0$;
8) $(x^2 + 6x - 72)^2 + (x^2 + 15x + 36)^2 = 0$;
9) $(3x + y - 4)^2 + (x + y - 2)^2 = 0$;
10) $(x - 2y + 1)^2 + (2x + y - 3)^2 = 0$;
11) $(x - 4)(x - 3)^3 = (x - 3)(x - 4)^3$;
12) $(x + 4)(x + 5)^3 = (x + 5)(x + 4)^3$.

При каком значении a уравнение имеет два корня? Найдите эти корни.

13) $x^3 + 6x^2 + ax = 0$;
14) $4x^3 + 4x^2 + ax = 0$;
15) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$;

16) $x^4+x^3-3x^2-5x-2=0$;

17) $(2x^2-x+1)^2+6x=1+9x^2$;

18) $x^2+1=2x+(3x^2-x-2)^2$;

19) $(x-2)^2(x^2-4x+3)=12$;

20) $(x^2+6x)^2-2(x+3)^2-17=0$;

21) $(x^2-7x+13)^2-(x-3)(x-4)=1$;

22) $(x^2-5x+7)^2-(x-3)(x-2)=1$;

23) $(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)=60$;

24) $x(x+1)(x+2)(x+3)=120$;

25) $2x^4-x^2(x+2)-(x+2)^2=0$;

26) $3x^4+2x^2(x-2)-(x-2)^2=0$;

27) $(x^2-4x-12)^2+(x^2+4x-12)^2=2(x^2-4)(x^2-36)$;

28) $(x^2-2x-15)^2+(x^2+2x-15)^2=2(x^2-9)(x^2-25)$;

29) $x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0$;

30) $2x^4+3x^3-4x^2-3x+2=0$.

31) Докажите, что уравнение $(x^2+2x+2)(x^2-4x+5)=1$ не имеет корней.

32) Докажите, что уравнение $(2x^2-4x+3)(x^2-2x+2)=1$ имеет единственный корень $x=1$.

Ответы: 1) −6; 1; 2; 3; 2) $-2\pm\sqrt{7}$; 1; 3; 3) 0; ±2; $\pm\sqrt{5}$; 4) 0; $\pm\sqrt{3}$; ±2; 5) −6; 6; −5; 1; 2; 6) 1; 2; 3; 4; 7) −8; 8) −12; 9) (1; 1); 10) (1; 1); 11) 3; 3,5; 4; 12) −5; −4,5; −4; 13) при $a=0$ $x=-6$ и $x=0$; при $a=9$ $x=-3$ и $x=0$; 14) при $a=0$ $x=-1$ и $x=0$; при $a=1$ $x=-\frac{1}{2}$ и $x=0$; 15) −2; −1; 1; 3; 16) −1; 2; 17) 0; −1; 1; 18) $-\frac{1}{3}$; −1; 1; 19) 0; 4; 20) −7; 1; −5; −1; 21) 3; 4; 22) 2; 3; 23) −4; 3; 24) −5; 2; 25) 2; −1; 26) 1; −2; 27) 0; 28) 0; 29) $\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$; 30) 2; −1; 1; $\frac{1}{2}$.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 28–29. Дробные рациональные уравнения

Цель: решение рациональных уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Решите уравнение.

1) $(3x-2)x^2-2x(3x-2)+8(2-3x)=0$;

2) $(x+2)(x^2+x+1)(x-1)=28$.

3) При всех значениях параметра a определите число решений уравнения $\left|x^2-2|x|-3\right|=a$.

Вариант 2

Решите уравнение.

1) $(5x-3)x^2-2x(5x-3)+3(3-5x)=0$;

2) $(x+3)(x^2+2x-1)(x-1)=35$.

3) При всех значениях параметра a определите число решений уравнения $\left|x^2+2|x|-8\right|=a$.

III. Изучение нового материала

Уравнение $y(x)=0$ называют *дробным рациональным* уравнением, если *выражение* $y(x)$ является *дробным* (т. е. содержит деление на выражения с переменными).

Для решения рационального уравнения его необходимо *преобразовать в линейное или квадратное уравнение, решить это уравнение и отбросить те корни, которые не входят в ОДЗ (область допустимых значений) исходного рационального уравнения.*

Пример 1

Решить уравнение $x^2+\frac{1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1}-x$.

Так как в данное уравнение входит выражение $\frac{1}{x-1}$, то $x-1\neq 0$, или $x\neq 1$ (что является ОДЗ).

Уравнение принимает вид: $x^2 = 2 - x$ или $x^2 + x - 2 = 0$, корни которого $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$. Однако x_1 не является корнем исходного уравнения, поэтому данное уравнение имеет только один корень: $x = -2$.

Пример 2

Решить уравнение $\dfrac{1}{x} = \dfrac{a-1}{a+x}$.

ОДЗ уравнения определятся условиями: $x \neq 0$ и $x \neq -a$. Избавившись от знаменателей в уравнении, например за счет умножения членов уравнения на $x(a + x)$, получим: $a + x = x(a - 1)$. Это уравнение является линейным относительно x и имеет вид: $a = x(a - 2)$. При $a - 2 \neq 0$ (т. е. $a \neq 2$) корень уравнения $x = \dfrac{a}{a-2}$, при $a - 2 = 0$ (т. е. $a = 2$) уравнение имеет вид: $2 = x \cdot 0$ и корней не имеет. Однако для найденного (при $a \neq 2$) корня уравнения $x = \dfrac{a}{a-2}$ могут существовать такие a, что $x = 0$ или $x = -a$, и тогда для таких a исходное уравнение корней иметь не будет. Так как $x = \dfrac{a}{a-2}$, то для отбора таких a решим уравнения $\dfrac{a}{a-2} = 0$ и $\dfrac{a}{a-2} = -a$. Первое уравнение имеет корень $a = 0$, второе – корни $a = 0$ и $a = 1$. Итак, при $a = 0$ или $a = 1$ исходное уравнение также корней не имеет. Учитывая все вышесказанное, можно записать ответ: при $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$ $x = \dfrac{a}{a-2}$; при $a \in \{0; 1; 2\}$ $x \in \varnothing$.

При решении рациональных уравнений в основном используются те же приемы, что и при решении алгебраических уравнений, например замена неизвестной.

Пример 3

Решить уравнение $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \dfrac{7}{6}$.

Легко проверить, что знаменатели дробей не обращаются в ноль. Так как неизвестная x входит в уравнение только в виде комбинации $x^2 + 2x$, то введем замену неизвестной: $y = x^2 + 2x$ и получим уравнение $\frac{y+1}{y+2}+\frac{y+2}{y+3}=\frac{7}{6}$, или $5y^2 + 13y = 0$. Корни этого уравнения $y_1 = 0$, $y_2=-\frac{13}{5}$. Вернувшись к старой неизвестной x, решим уравнения $x^2 + 2x = 0$ (корни $x_1 = 0$, $x_2 = -2$) и $x^2+2x=-\frac{13}{5}$ (корней не имеет).

Пример 4

Решить уравнение $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{3x}{x^2-8x+15}$.

В данном уравнении замена неизвестной не столь очевидна, как в предыдущем. Однако можно заметить, что повторяется комбинация $x^2 + 15$, которую и обозначим y. Тогда получим уравнение $\frac{y-10x}{y-6x}=\frac{3x}{y-8x}$, или $y^2-21xy+98x^2=0$.

Заметим также, что должны быть выполнены условия: $y \neq 6x$ и $y \neq 8x$ (ОДЗ). Решим теперь уравнение $y^2-21xy+98x^2=0$ относительно неизвестной y и получим: $y = 7x$ и $y = 14x$ (оба корня удовлетворяют ОДЗ). Возвращаясь к переменной x, имеем уравнения $x^2 + 15 = 7x$ (корней не имеет) и $x^2 + 15 = 14x$ (корни $x_1=7-\sqrt{34}$, $x_2=7+\sqrt{34}$).

Во многих случаях перед заменой неизвестной в уравнении его *необходимо преобразовать*.

Пример 5

Решить уравнение $x^2+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=11$.

Совершенно не очевидно, какую новую неизвестную можно ввести. Исходя из структуры уравнения, выделим в левой части полный квадрат разности. Для этого вычтем и прибавим выражение $\frac{10x^2}{x+5}$. Получаем: $\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{5x}{x+5}+\left(\frac{5x}{x+5}\right)^2\right)+\frac{10x^2}{x+5}=11$, или

$\left(x-\frac{5x}{x+5}\right)+\frac{10x^2}{x+5}=11$, или $\left(\frac{x^2}{x+5}\right)^2+10\frac{x^2}{x+5}-11=0$. Введем новую переменную $y = \dfrac{x^2}{x+5}$ и получим квадратное уравнение $y^2 + 10y - 11 = 0$, корни которого $y_1 = 1$ и $y_2 = -11$. Вернемся к старой переменной. Получаем уравнения:

а) $\dfrac{x^2}{x+5} = 1$, или $x^2 - x - 5 = 0$. Корни $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

б) $\dfrac{x^2}{x+5} = -11$, или $x^2 + 11x + 55 = 0$. Уравнение корней не имеет.

Предварительные *преобразования* уравнения позволяют значительно *упростить* его *решение*.

Пример 6

Решить уравнение $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1} + \dfrac{x^2+8x+20}{x+4} = \dfrac{x^2+4x+6}{x+2} + \dfrac{x^2+6x+12}{x+3}$.

Сначала в обеих частях уравнения *выделим целую часть*. Для этого в числителе каждой дроби выделим квадрат знаменателя и выполним почленное деление. Получаем: $\dfrac{(x+1)^2+1}{x+1} + \dfrac{(x+4)^2+4}{x+4} = \dfrac{(x+2)^2+2}{x+2} + \dfrac{(x+3)^2+3}{x+3}$, или $x+1+\dfrac{1}{x+1}+x+4+\dfrac{4}{x+4} = x+2+\dfrac{2}{x+2}+x+3+\dfrac{3}{x+3}$, или $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{4}{x+4} = \dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x+3}$. Дальнейшие преобразования состоят в получении в каждой части *дроби с одинаковыми числителями*. Для этого запишем уравнение в виде $\dfrac{4}{x+4} - \dfrac{3}{x+3} = \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x+1}$ или $\dfrac{x}{x^2+7x+12} = \dfrac{x}{x^2+3x+2}$. Используем свойство пропорции и получим: $x(x^2+3x+2) = x(x^2+7x+12)$ или $0 = x(4x + 10)$. Корни этого неполного квадратного уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = -2{,}5$ являются также решениями и данного уравнения.

Достаточно часто встречаются рациональные уравнения, содержащие *модули*.

Пример 7

Решить уравнение $\frac{|x|-3}{|x-2|-1}=1.$

Раскроем знаки модулей, рассмотрев три случая.

а) Если $x \le 0$, получаем уравнение $\frac{-x-3}{-(x-2)-1}=1$, или $-x-3=$ $=-x+1$. Это уравнение корней не имеет.

б) Если $0 < x < 2$, получаем уравнение $\frac{x-3}{-(x-2)-1}=1$, или $\frac{x-3}{1-x}=1$ (при этом $x \ne 1$), или $x-3=1-x$. Корень этого уравнения $x=2$ не входит в рассматриваемый промежуток и не является решением данного уравнения.

в) Если $x \ge 2$, получаем уравнение $\frac{x-3}{x-2-1}=1$, или $\frac{x-3}{x-3}=1$ (при этом $x \ne 3$). Имеем тождество. Поэтому решением этого уравнения являются промежутки $x \in [2;\,3) \cup (3;\,+\infty)$.

IV. Задание на уроке

№ 288 (а); 289 (б); 290; 292 (а); 293 (б); 294 (а); 295 (б); 297 (в); 298 (а); 299 (б); 300.

V. Задание на дом

№ 288 (в); 289 (а); 291 (б, в); 292 (б); 293 (а); 294 (б); 295 (а); 297 (б); 298 (б); 299 (а).

VI. Творческие задания

Решите дробно-рациональное уравнение.

1) $\frac{8}{|x+2|}=-x;$

2) $\frac{9}{|x+8|}=-x;$

3) $\frac{1}{|x^2-2x|}+\frac{5}{(x^2-2x)^2}=6;$

4) $\frac{4}{(x^2+2x)^2}-\frac{1}{|x^2+2x|}=3.$

Найдите все значения a, при которых уравнения имеют хотя бы один общий корень. Найдите этот корень.

5) $\frac{6}{x}=\frac{1}{6}ax$ и $\frac{7}{x-a}=\frac{1}{6}ax;$

6) $\frac{7}{x}=-\frac{3}{7}ax$ и $\frac{8}{x+3a}=-\frac{3}{7}ax.$

Решите дробно-рациональное уравнение.

7) $\dfrac{a+2}{x-2}=a-1;$

8) $\dfrac{a-3}{x+1}=2a+1;$

9) $\dfrac{a+1}{x-a}-\dfrac{2a}{a+2}=0;$

10) $\dfrac{a-1}{x+a}-\dfrac{2a}{a+2}=0;$

11) $\left(\dfrac{x^2+12}{9-x^2}\right)^2-\left(\dfrac{7x}{x^2-9}\right)^2=0;$

12) $\left(\dfrac{x^2+10}{4-x^2}\right)^2-\left(\dfrac{7x}{x^2-4}\right)^2=0;$

13) $\left(x-\dfrac{2x}{x+2}\right)^2+\dfrac{4x^2}{x+2}=5;$

14) $\left(x+\dfrac{3x}{x-3}\right)^2=4-\dfrac{3x^2}{x-3};$

15) $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=9;$

16) $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-11\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+8=0;$

17) $\dfrac{12}{(x+1)(x+5)}+\dfrac{15}{(x+2)(x+4)}=2;$

18) $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}+\dfrac{9}{(x-1)(x+5)}=-1;$

19) $x^2+\dfrac{25x^2}{(x+5)^2}=11;$

20) $x^2+\dfrac{4x^2}{(x-2)^2}=12;$

21) $\left(\dfrac{3x-2}{4x+3}\right)^2+\left(\dfrac{3x+2}{4x-3}\right)^2=2\dfrac{9x^2-4}{16x^2-9};$

22) $\left(\dfrac{2x-3}{3x+4}\right)^2+\left(\dfrac{2x+3}{3x-4}\right)^2=2\dfrac{4x^2-9}{9x^2-16};$

23) $\dfrac{2x+1}{x-3}+\dfrac{5}{x+4}=\dfrac{7}{x-3}+\dfrac{x+9}{x+4}+\dfrac{12}{x^3+x^2-12x+12};$

24) $\dfrac{2x-1}{x+3}+\dfrac{5}{x-4}=-\dfrac{7}{x+3}+\dfrac{x+1}{x-4}+\dfrac{11}{x^3-x^2-12x+11};$

25) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{3x}{x^2+2x+1}=1;$

26) $\dfrac{x^2-4x+2}{x^2-2x+2}-\dfrac{3x}{x^2+2x+2}=1.$

27) Найдите значения параметра a, при которых уравнение $\dfrac{x^2+4x+9}{x^2+5x+9}=a$ имеет хотя бы одно решение.

28) При каких значениях параметров a и b равенство $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{x}{x^2-1}$ выполняется для всех допустимых значений x?

Ответы: 1) −4; 2) −9; 3) $1 \pm \sqrt{2}$; 1; 4) $-1 \pm \sqrt{2}; -1$; 5) при $a = 1$ $x = -6$; 6) при $a = -\frac{1}{3}$ $x = -7$; 7) при $a \neq -2$ и $a \neq 1$ $x = \frac{3a}{a-1}$; при $a = -2$ или $a = 1$ $x \in \varnothing$; 8) при $a \neq -0{,}5$ и $a \neq 3$ $x = -\frac{a+4}{2a+1}$; при $a = -0{,}5$ или $a = 3$ $x \in \varnothing$; 9) при $a \neq -2$ и $a \neq 0$ $x = \frac{3a^2+3a+2}{2a}$, при $a = -2$ или $a = 0$ $x \in \varnothing$; 10) при $a \neq -2$, $a \neq 1$ и $a \neq 0$ $x = \frac{-a^2+a-2}{2a}$, при $a = -2$ или $a = 1$ или $a = 0$ $x \in \varnothing$; 11) −4; 4; 12) −5; 5; 13) −1; 2; 14) −6; 2; 15) $\frac{1}{2}$; 2; 16) $-\frac{1}{2}$; 2; $2 \pm \sqrt{5}$; 17) −7; 1; $\frac{-6 \pm \sqrt{10}}{2}$; 18) $-2 \pm \sqrt{3}$; 19) $\frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$; 20) $1 \pm \sqrt{5}$; 21) 0; 22) 0; 23) 0; 24) 0; 25) 0; 26) 0; 27) $a \in \left[\frac{10}{11}; 2\right]$; 28) $a = b = 1$.

VII. Подведение итогов урока

§ 6. Неравенства с одной переменной

Урок 30. Решение неравенств второй степени с одной переменной

Цель: решение квадратных неравенств.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Решите уравнение $\frac{x^2-5x-6}{x^2-2x-3} = 0$.

2. Решите уравнение $\frac{3x+2}{2x+3}+\frac{2x+3}{3x+2}=-2.$

3. При всех значениях параметра a решите уравнение $\frac{x^2-2ax-3a^2}{x+3}=0.$

Вариант 2

1. Решите уравнение $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}=0.$

2. Решите уравнение $\frac{4x-3}{3x-4}+\frac{3x-4}{4x-3}=2.$

3. При всех значениях параметра a решите уравнение $\frac{x^2-2ax-8a^2}{x-4}=0.$

III. Изучение нового материала

Неравенство вида $ax^2+bx+c\vee 0$ (где x – переменная; a, b и c – некоторые числа и $a \neq 0$) называют *неравенством второй степени с одной переменной*, или *квадратным неравенством* (по аналогии с квадратным уравнением). Подобные неравенства наглядно и удобно решать графически.

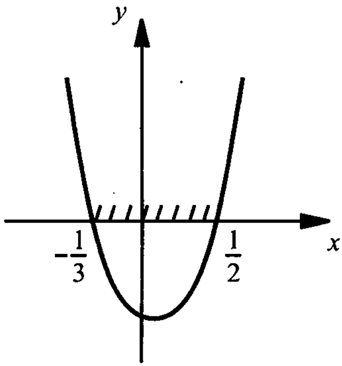
Решение сводится к нахождению промежутков x, в которых функция $y=ax^2+bx+c$ имеет положительные или отрицательные значения. Для этого надо определить, *как расположен график* функции $y=ax^2+bx+c$ *в координатной плоскости*: направление ветвей параболы (вверх или вниз), и найти точки пересечения ее с осью x (если они имеются). Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 1

Решим неравенство $6x^2-x-1\leq 0$.

Рассмотрим $y=6x^2-x-1$. Ее графиком является парабола с ветвями, направленными вверх. Найдем точки пересечения параболы с осью абсцисс. Для этого решим уравнение $6x^2-x-1=0$. Его корни $x_1=-\frac{1}{3}$ и $x_2=\frac{1}{2}$. Нарисуем эскиз графика. Видно, что функция принимает неположительные значения на промежутке $x\in\left[-\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right]$.

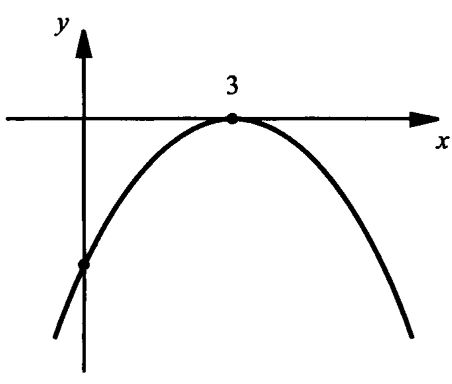
Этот промежуток и является решением данного неравенства.



Пример 2

Решим неравенство $-\frac{1}{3}x^2+2x-3\geq 0$.

Рассмотрим функцию $y=-\frac{1}{3}x^2+2x-3$. Ее графиком является парабола с ветвями, направленными вниз. Найдем точки пересечения параболы с осью абсцисс. Для этого решим уравнение $-\frac{1}{3}x^2+2x-3=0$. Оно имеет единственный корень $x = 3$. Поэтому парабола касается оси абсцисс в точке $x = 3$. Нарисуем эскиз графика. Видно, что функция принимает неотрицательные значения (а именно $y = 0$) только в единственной точке $x = 3$. Поэтому данное неравенство имеет решение $x = 3$.



Из рассмотренных примеров уже можно сформулировать *алгоритм решения неравенства* $ax^2+bx+c\vee 0$:

1. Определяют *направление ветвей* параболы: при $a > 0$ – вверх, при $a < 0$ – вниз.

2. Находят *дискриминант* $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ и определяют, *имеет ли трехчлен корни.*

3. Если трехчлен *имеет корни*, то отмечают их на оси абсцисс. С учетом направления ветвей строят *эскиз параболы*, проходящий *через построенные на оси x точки.*

4. Если трехчлен *не имеет корней*, строят *эскиз параболы*, расположенный *в верхней полуплоскости при a* > 0 и *в нижней полуплоскости при a* < 0.

5. *Находят* на оси *x промежутки*, для которых выполнено данное неравенство.

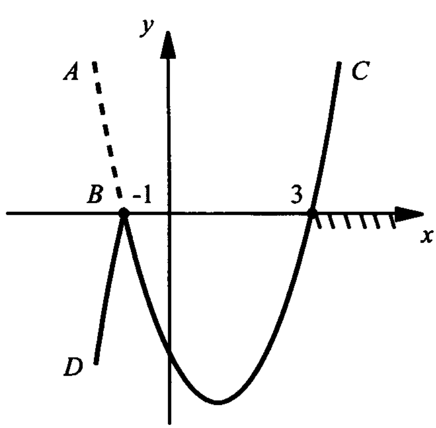
Разумеется, графический способ может быть использован и для решения более сложных неравенств.

Пример 3

Решим неравенство $|x+1|(x-3) \geq 0$.

Рассмотрим функцию $y = |x+1|(x-3)$ и построим ее график. Для этого раскроем знак модуля, рассмотрев два случая. При $x \geq -1$ получаем функцию $y = (x+1)(x-3)$. Ее графиком является парабола, направленная ветвями вверх и проходящая через точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Из этой параболы сохраним участок BC, для которого $x \geq -1$.

При $x < -1$ получаем функцию $y = -(x+1)(x-3)$, которая отличается от предыдущей только знаком. Поэтому участок AB (для $x < -1$) предыдущей параболы отражаем зеркально вниз и получаем часть BD требуемого графика. Построен график данной функции.



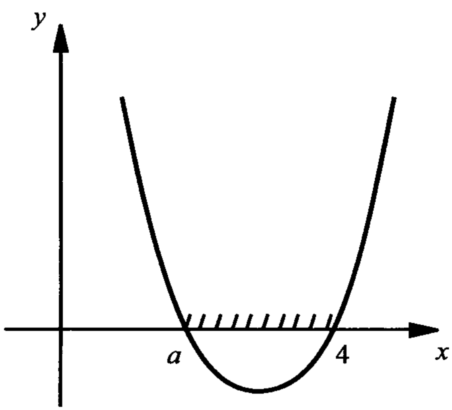
Видно, что данное неравенство ($y \geq 0$) выполняется для отдельной точки $x = -1$ и в промежутке $[3; +\infty)$. Поэтому решение неравенства $x \in \{-1\} \cup [3; +\infty)$.

Пример 4

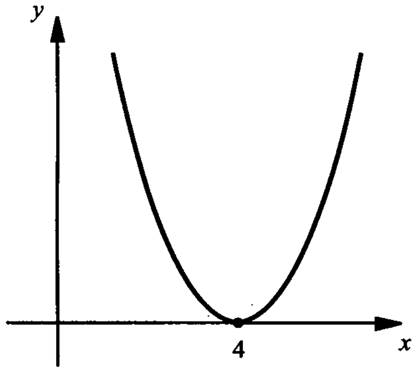
Решим неравенство $x^2 - (a+4)x + 4a \leq 0$.

Найдем дискриминант квадратного трехчлена $D = (a+4)^2 - 4 \cdot 4a = a^2 + 8a + 16 - 16a = (a-4)^2$ и его корни $x = \dfrac{a+4 \pm (a-4)}{2}$, т. е. $x_1 = a$ и $x_2 = 4$. Поэтому графиком квадратичной функции $y = x^2 - (a+4)x + 4a$ является парабола, направленная ветвями вверх и имеющая с осью абсцисс две или одну общие точки. Значит, необходимо рассмотреть три случая.

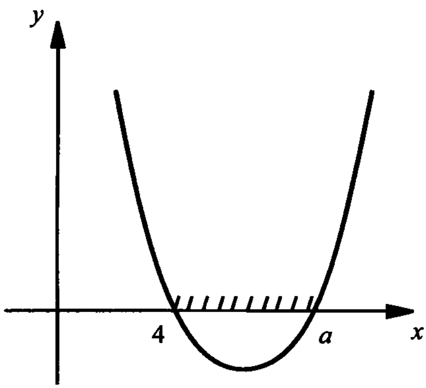
а) Пусть $x_1 < x_2$, т. е. $a < 4$. Соответствующий график приведен на рисунке. Видно, что значения функции $y \leq 0$ на промежутке $[a; 4]$. Этот промежуток является решением неравенства в данном случае.



б) Пусть $x_1 = x_2$, т. е. $a = 4$. В этом случае парабола касается оси абсцисс в точке $x = 4$. Соответствующий график приведен на рисунке. Видно, что значения функции либо положительные, либо их значение равно нулю. Последнее имеет место только в точке $x = 4$. Эта точка и является решением неравенства в этом случае.



в) Пусть $x_1 > x_2$, т. е. $a > 4$. График приведен на рисунке. Видно, что значения функции $y(x)$ неположительные на промежутке $[4; a]$. Этот промежуток является решением неравенства для данного случая.



Учитывая три рассмотренные ситуации, запишем окончательный ответ задачи: при $a \in (-\infty; 4)$ $x \in [a; 4]$; при $a = 4$ $x = 4$; при $a \in (4; +\infty)$ $x \in [4; a]$.

IV. Задание на уроке

№ 304 (а, г); 306 (а, б); 308 (б, г); 310 (а); 311 (б); 312 (а, б); 314 (а); 315 (б, в); 318; 320 (а, б); 321 (а).

V. Задание на дом

№ 304 (б, в); 306 (в, г); 308 (а, д); 310 (б); 31 (а); 312 (в, г); 314 (б); 315 (а, д); 319; 320 (в, г); 321 (б).

VI. Подведение итогов урока

Уроки 31–32. Решение неравенств методом интервалов

Цель: рассмотреть наиболее удобный и универсальной способ решения неравенств.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Решите неравенство $6x^2-13x+6\le 0$.

Ответы: а) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$; в) $\left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]$; г) $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

2. Решите неравенство $-25x^2+20x-4\ge 0$.

Ответы: а) $(-\infty; 0{,}4]$; б) $[0{,}4; +\infty)$; в) $\varnothing$; г) $0{,}4$.

3. Решите неравенство $x^2-3|x|+2\ge 0$.

Ответы: а) $(-\infty; -2]\cup[-1; 1]\cup[2; +\infty)$; б) $[1; 2]$; в) $[2; +\infty)$; г) $[-1; 1]$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $15x^2-34x+15\ge 0$.

Ответы: а) $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right]\cup\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$; в) $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$; г) $\left[\frac{3}{5}; \frac{5}{3}\right]$.

2. Решите неравенство $9x^2-12x+4\le 0$.

Ответы: а) $\frac{2}{3}$; б) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$; в) $\varnothing$; г) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

3. Решите неравенство $x^2-5|x|+6\ge 0$.

Ответы: а) $(-\infty; -3]$; б) $[-2; 2]$; в) $[3; +\infty)$; г) $(-\infty; -3]\cup[-2; 2]\cup[3; +\infty)$.

III. Изучение нового материала

Рассмотрим наиболее *удобный и универсальный способ* решения любых неравенств – *метод интервалов.* Он с успехом может быть использован при решении всех типов неравенств, изучаемых в школе. Пока мы рассмотрим применение этого способа для целых и рациональных неравенств. *Суть метода интервалов* будет понятна из следующего примера.

Пример 1

Решим неравенство $x^2 + 2x - 3 \le 0$.

На числовой оси отметим корни уравнения $x^2 + 2x - 3 = 0$. Это $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$. Эти точки разбили числовую ось на три промежутка: $x \in (-\infty; -3)$; $x \in [-3; 1]$ и $x \in (1; +\infty)$.

При $x \in (-\infty; -3)$ в многочлене $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ оба сомножителя отрицательные. Поэтому многочлен $x^2 + 2x - 3 > 0$ (отмечено знаком «+»), и неравенство не выполнено.

Для $x \in [-3; 1]$ множитель $(x + 3)$ становится неотрицательным, множитель $(x - 1)$ по-прежнему отрицательный. Поэтому произведение $(x + 3)(x - 1) \le 0$ (отмечено знаком «–»), и неравенство выполнено. Следовательно, интервал $x \in [-3; 1]$ удовлетворяет неравенству.

При $x \in (1; +\infty)$ сомножители $(x + 3)$ и $(x - 1)$ положительные, произведение $(x + 3)(x - 1) > 0$ (отмечено знаком «+»), и неравенство не выполнено.

Заметим, что столь детальный анализ знаков при решении квадратных неравенств является излишним. Достаточно определить *знак* выражения $x^2 + 2x - 3$ *в одной точке*, не совпадающей с границами интервалов (например, при $x = -10$ выражение $x^2 + 2x - 3 = (-10)^2 + 2(-10) - 3 = 77 > 0$). Кроме того, надо учесть, что *при переходе к каждому следующему промежутку знак выражения* $x^2 + 2x - 3$ *меняется на противоположный.* Поэтому диаграмма знаков, приведенная на рисунке, может быть получена сразу (решение неравенства отмечено штриховкой).

Пример 2

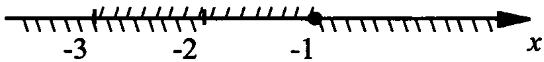
Решим систему неравенств $\begin{cases} x^2+4x+3\le 0, \\ x^2+3x+2\ge 0. \end{cases}$

Для решения используем аналитический (метод интервалов) и графический способы.

а) Решим сначала первое неравенство $x^2 + 4x + 3 \le 0$. Найдем корни соответствующего уравнения $x^2 + 4x + 3 = 0$. Это $x_1 = -3$ и $x_2 = -1$. Нанесем эти точки на числовую ось, которые разбивают ее на три интервала. Определим знак выражения $x^2 + 4x + 3$, например, при $x = 0$: $0^2 + 4 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$. После этого легко нарисовать диаграмму знаков рассматриваемого выражения. Видно, что неравенство выполняется при $x \in [-3; -1]$.

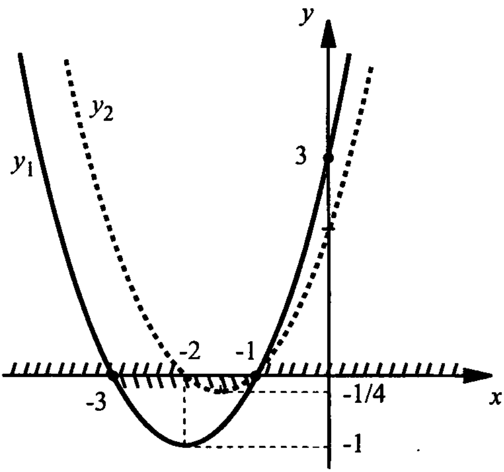
Теперь рассмотрим второе неравенство $x^2 + 3x + 2 \ge 0$. Корни этого выражения $x_1 = -2$ и $x_2 = -1$. Наносим эти точки на числовую ось. Определяем знак выражения $x^2 + 3x + 2$, например, при $x = 5$: $5^2 + 3 \cdot 5 + 2 = 42 > 0$. Рисуем диаграмму знаков для этого выражения. Видно, что неравенство выполняется для $x \in (-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$.

Найдем те значения x, при которых выполнены оба неравенства. Для этого еще раз нанесем решения первого (штриховка сверху) и второго (штриховка снизу) неравенств на числовую ось. Видно, что оба неравенства выполнены для промежутка $x \in [-3; -2]$ и в отдельной точке $x = -1$.



Итак, решение данной системы неравенств $x \in [-3; -2] \cup \{-1\}$.

б) Построим графики функций $y_1 = x^2 + 4x + 3$ и $y_2 = x^2 + 3x + 2$.



Видно, что неравенство $x^2 + 4x + 3 \le 0$ (график y_1 находится не выше оси абсцисс) выполнено для $x \in [-3; -1]$. Неравенство $x^2 + 3x + 2 \ge 0$ (график y_2 находится не ниже оси абсцисс) выполнено при $x \in (-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$. Оба неравенства выполнены для $x \in [-3; -2] \cup \{-1\}$.

Рассмотрим более сложные задачи по этой теме.

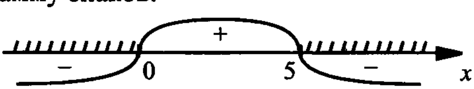
Пример 3

Решим неравенство $|5 - x|(x-1) + 5 < x$.

Решим это неравенство аналитически и графически.

а) Перенесем все члены неравенства в левую часть: $|5-x|(x-1)+5-x<0$ и раскроем знак модуля.

Если $5 - x \ge 0$ (т. е. $x \le 5$), то получаем неравенство $(5 - x)(x - 1) + (5 - x) < 0$, или $(5 - x)(x - 1 + 1) < 0$, или $(5 - x)x < 0$. Решаем это неравенство методом интервалов. Наносим корни соответствующего уравнения: $x_1 = 0$ и $x_2 = 5$. Определяем знак выражения $(5 - x)x$, например, для $x = 2$: $(5 - 2)\cdot 2 = 6 > 0$. После этого рисуем диаграмму знаков.



Решением неравенства является $x \in (-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$. Так как рассматривается область $x \le 5$, то решением является промежуток $x \in (-\infty; 0)$.

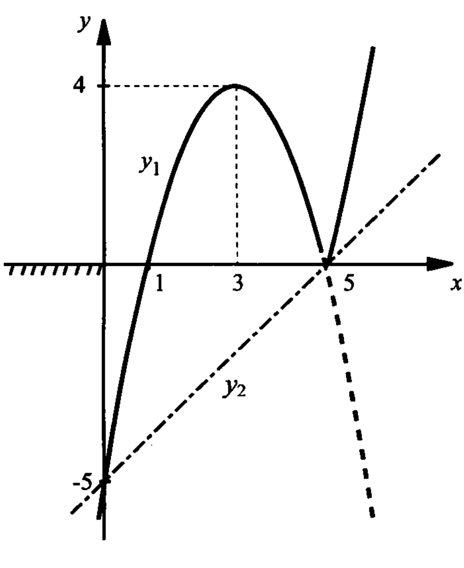
Если $5 - x < 0$ (т. е. $x > 5$), то имеем неравенство $-(5 - x)(x - 1) + (5 - x) < 0$, или $(5 - x)(-x + 1 + 1) < 0$, или $(5 - x)(2 - x) < 0$. На числовой оси отмечаем корни соответствующего уравнения: $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$. Находим знак выражения $(5 - x)(2 - x)$, например, при $x = 3$: $(5 - 3)(2 - 3) = -2 < 0$ и рисуем диаграмму знаков.

Решением неравенства будет интервал $x \in (2; 5)$. Так как рассматривается область $x > 5$, то этот промежуток решением данного неравенства не является.

Итак, решение неравенства $x \in (-\infty; 0)$.

б) Запишем данное неравенство в виде $|5 - x|(x - 1) < x - 5$. Построим график функции $y_1 = |5 - x|(x - 1)$. Для этого раскроем знак модуля. При $x \le 5$ получаем: $y_1 = (5 - x)(x - 1)$. В этой области построим график такой функции. Для $x > 5$ имеем: $y_1 = -(5 - x)(x - 1)$. Видно, что эта функция отличается от предыдущей только знаком минус. Поэтому этот график легко получить из предыдущего, если отразить пунктирную часть параболы относительно оси абсцисс зеркально вверх.

Построим также график функции $y_2 = x - 5$. Теперь необходимо определить, при каких значениях x значение функции y_2 больше значения функции y_1 (т. е. график y_2 находится выше y_1). Из рисунка видно, что это происходит при $x \in (-\infty; 0)$.



Пример 4

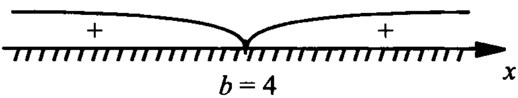
Решим неравенство $x^2-(b+4)x+4b\ge 0$.

Найдем дискриминант соответствующего уравнения: $D=(b+4)^2-4\cdot 4b=b^2+8b+16-16b=b^2-8b+16=(b-4)^2$. Теперь легко определить и корни: $x_{1,2}=\dfrac{b+4\pm(b-4)}{2}$, или $x_1=b$ и $x_2=4$.

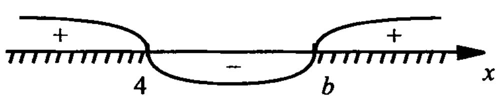
Параметр b может быть меньше числа 4, совпасть с ним или оказаться больше числа 4. Рассмотрим эти случаи.

а) Если $b<4$, то диаграмма знаков изображена на рисунке. Неравенству удовлетворяют промежутки, расположенные за корнями, т. е. $x\in(-\infty;\ b]\cup[4;\ +\infty)$.

б) Если $b=4$, то неравенство имеет вид: $x^2-8x+16\ge 0$, или $(x-4)^2\ge 0$. Это неравенство выполнено при всех $x\in(-\infty;\ +\infty)$.



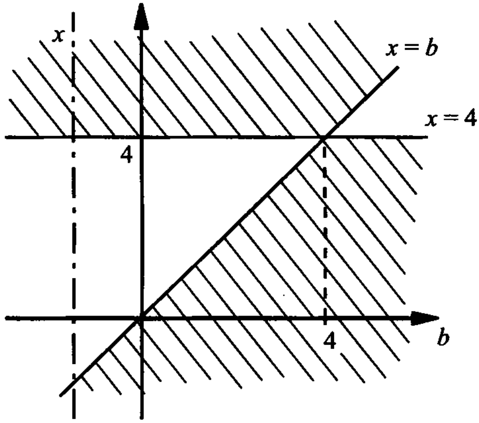
в) Если $b>4$, то неравенству удовлетворяют интервалы, расположенные за корнями, т. е. $x\in(-\infty;\ 4]\cup[b;\ +\infty)$.



Итак, получаем ответ: для $b\in(-\infty;\ 4)$ $x\in(-\infty;\ b]\cup[4;\ +\infty)$; для $b=4$ $x\in(-\infty;\ +\infty)$; для $b\in(4;\ +\infty)$ $x\in(-\infty;\ 4]\cup[b;\ +\infty)$.

Заметим, что эти три случая можно объединить, если использовать *метод интервалов на координатной плоскости* (а не на координатной прямой, как ранее). Такой подход особенно удобен при решении сложных задач.

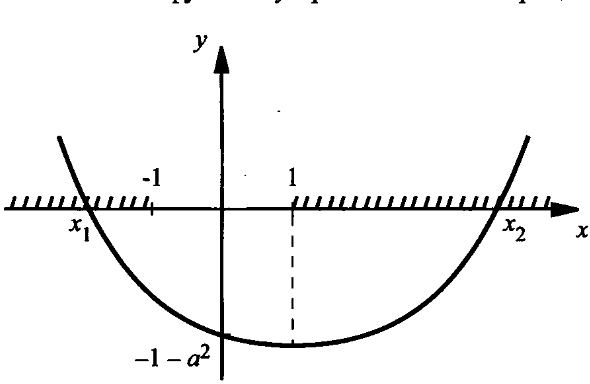
На координатной плоскости bOx построим корни $x_1=b$ и $x_2=4$ квадратного трехчлена. Очевидно, что данное неравенство $x^2-(b+4)x+4b\ge 0$ выполняется на промежутках x, расположенных за корнями x_1 и x_2 квадратного трехчлена. Множество таких точек $(b;\ x)$ заштриховано. Если зафиксировать значение b и провести вертикальную прямую $x=b$, то видно, что штрихпунктирная линия попадает в заштрихованную область на промежутках $x \in (-\infty;\ b] \cup [4;\ +\infty)$. Эти промежутки являются решением неравенства при $b < 4$. Аналогично получаем решения неравенства при $b = 4$ и $b > 4$.



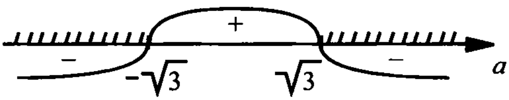
Пример 5

Найти все значения a, при которых один из корней уравнения $x^2 - 2x - a^2 = 0$ меньше (-1), а другой – больше 1.

Найдем дискриминант этого уравнения: $D = 2^2 - 4\cdot(-a^2) = 4 + 4a^2$. При всех значениях a величина $D > 0$, поэтому уравнение имеет два различных корня. Схематично изобразим график функции $y = x^2 - 2x - a^2$. Вершина этой параболы находится в точке $(1;\ -1 - a^2)$. Тогда больший корень x_2 всегда больше 1. Для того чтобы меньший корень x_1 был меньше (-1), необходимо и достаточно, чтобы значение функции y при $x = -1$ было отрицательным.



Запишем это условие: $(-1)^2 - 2(-1) - a^2 < 0$ или $3 - a^2 < 0$. Решим это неравенство методом интервалов. Находим корни соответствующего уравнения: $a_1 = -\sqrt{3}$ и $a_2 = \sqrt{3}$. При $a = 0$ определяем знак этого выражения: $3 - 0^2 = 3 > 0$ и рисуем диаграмму знаков. Теперь можно записать ответ: при $a \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ условия задачи выполнены.



IV. Задание на уроке

№ 325 (а, г); 326 (б, в); 330 (а, б); 331 (а, в); 332 (а).

V. Задание на уроке

№ 325 (б, в); 326 (а, г); 330 (в, г); 331 (б, г); 333 (а).

VI. Подведение итогов урока

Уроки 33–34. Применение метода интервалов для решения неравенств

Цель: рассмотреть использование метода интервалов для решения неравенств других типов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Методом интервалов решите неравенство.

а) $(2x - 3)(x + 1) \geq 0$;

б) $4x^2 + 4x - 3 \leq 0$.

2. Найдите область определения функции $y = \sqrt{6x - x^2} + 3\sqrt[4]{2x - 5}$.

Вариант 2

1. Методом интервалов решите неравенство.

а) $(5x-2)(x+3)\le 0$;

б) $9x^2+3x-2\ge 0$.

2. Найдите область определения функции $y=2\sqrt{7x-x^2}-5\sqrt[4]{3x-4}$.

III. Изучение нового материала

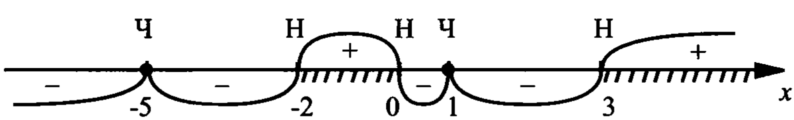
Уже рассматривался метод интервалов. Применим тот же метод к решению *неравенств высоких степеней*. Рассмотрим схему решения на следующем примере.

Пример 1

Решим неравенство $(x+5)^8(x+2)^3x(x-1)^2(x-3)^7\ge 0$.

Прежде всего отметим, что если в разложение многочлена на множители входит сомножитель $(x-x_0)^k$, то говорят, что x_0 – корень многочлена кратности k. Для решения неравенства важно знать, является ли k четным или нечетным числом, т. к. при четном k многочлен справа и слева от x_0 имеет один и тот же знак (т. е. знак многочлена не меняется), а при нечетном k многочлен справа и слева от x_0 имеет противоположные знаки (т. е. знак многочлена изменяется).

Вернувшись к данному неравенству, отметим, что многочлен имеет корни: $x_1=-5$ (кратности 8 – четная кратность), $x_2=-2$ (кратности 3 – нечетная), $x_3=0$ (кратности 1 – нечетная), $x_4=1$ (кратности 2 – четная), $x_5=3$ (кратности 7 – нечетная). Нанесем эти корни на числовую ось и буквами «Н» и «Ч» отметим четность кратности этих корней.



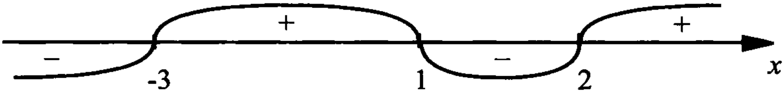
Определим знак многочлена, стоящего в левой части неравенства при любом x, не совпадающем с корнями (например, при $x=-3$ многочлен отрицательный). Рассмотрим теперь знаки многочлена, двигаясь в положительном направлении оси $0x$. Так как $x=-2$ – корень нечетной кратности, то при этом значении x происходит изменение знака многочлена на противоположный и многочлен на промежутке $(-2;\ 0)$ положительный. При $x=0$ (корень нечетной кратности) опять происходит изменение знака многочлена и он на промежутке (0; 1) становится отрицательным. Так как $x = 1$ – корень четной кратности, то многочлен знака не меняет и на промежутке (1; 3) он по-прежнему отрицательный. Рассуждая подобным образом, нетрудно получить полную диаграмму знаков многочлена на всей числовой оси, приведенную на рисунке. После этого легко ответить на вопрос задачи: при каких x знак многочлена неотрицательный. Из рисунка видно, что такими x являются $x \in \{-5\} \cup [-2; 0] \cup \{1\} \cup [3; +\infty)$.

Разумеется, в тех случаях, когда неравенство не имеет вида, приведенного в примере 1, необходимо, используя те или иные приемы, ***привести это неравенство к указанному виду.***

Пример 2

Решим неравенство $x^3 + 6 > 7x$.

Запишем неравенство в виде $x^3 + 6 - 7x > 0$ и разложим многочлен в левой части на множители. Для этого член $-7x$ представим как сумму двух слагаемых: $-6x$ и $-x$ и сгруппируем члены многочлена: $x^3 - x + (6 - 6x) > 0$, или $x(x^2 - 1) - 6(x - 1) > 0$, или $x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1) > 0$, или $(x - 1)(x^2 + x - 6) > 0$. Разложение $x^2 + x - 6$ на множители проводим стандартным путем, зная его корни ($x = -3$, $x = 2$), и окончательно получаем: $(x - 1)(x + 3)(x - 2) > 0$. Все корни этого многочлена первой кратности, и дальнейшее решение не вызывает трудностей. Построив диаграмму знаков многочлена, найдем $x \in (-3; 1) \cup (2; +\infty)$.



Остановимся теперь на решении *рациональных неравенств* методом интервалов.

Рациональные неравенства легко ***сводятся к решению неравенств высоких степеней.*** Действительно, после преобразований левая часть рационального неравенства может быть представлена в виде отношения многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, т. е. $\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0$. Умножим обе части такого неравенства на многочлен $[Q(x)]^2$, который *положителен* при всех допустимых значениях x (т. к. $Q(x) \neq 0$). Тогда знак неравенства *не меняется* и получаем *неравенство* $P(x) \cdot Q(x) \vee 0$, *эквивалентное данному.* То есть исходное неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0$ эквивалентно системе неравенств $\begin{cases} P(x)\cdot Q(x) \vee 0, \\ Q(x) \neq 0, \end{cases}$

которая далее решается методом интервалов.

Пример 3

Решим неравенство $\frac{(x^2+1)(x^2-2x-3)}{(5x-x^2)(x+2)} \geq 0.$

Отметим прежде всего, что $(5x - x^2)(x + 2) \neq 0$, или $x(5 - x)(x + 2) \neq 0$, т. е. $x \neq -2$, $x \neq 0$, $x \neq 5$ (ОДЗ неравенства). Сведем данное рациональное неравенство к алгебраическому (аналогичному примеру 1). Для этого умножим обе части неравенства на положительное выражение – квадрат знаменателя $(5x - x^2)^2(x + 2)^2$. При этом знак неравенства не меняется и получаем: $(x^2+1)(x^2-2x-3)(5x-x^2)(x+2) \geq 0$. Разложив квадратные трехчлены на множители, имеем: $(x^2+1)(x-3)(x+1)x(5-x)(x+2) \geq 0$. Решаем это неравенство методом интервалов, учитывая, что все корни многочлена имеют первую кратность: $x \in (-\infty; -2] \cup [-1; 0] \cup [3; 5)$.

Теперь учтем ОДЗ исходного неравенства и окончательно найдем: $x \in (-\infty; -2) \cup [-1; 0) \cup [3; 5)$.

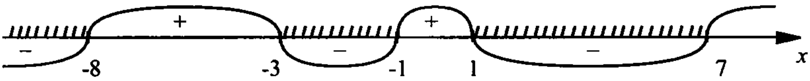
В более сложных случаях *рациональные неравенства сначала сводятся к неравенствам, аналогичным примеру 3, а затем решаются методом интервалов.*

Пример 4

Решим неравенство $\frac{2x-5}{x^2-6x-7} \leq \frac{1}{x+3}.$

Чтобы свести пример к аналогичному предыдущему примеру, перенесем все члены неравенства в его левую часть: $\frac{2x-5}{x^2-6x-7} - \frac{1}{x+3} \leq 0.$ Приведя дроби к общему знаменателю, получим: $\frac{x^2+7x-8}{(x-7)(x+1)(x+3)} \leq 0,$ т. е. неравенство предыдущего типа.

Решая его аналогично, найдем: $x \in (-\infty; -8] \cup (-3; -1) \cup [1; 7)$.

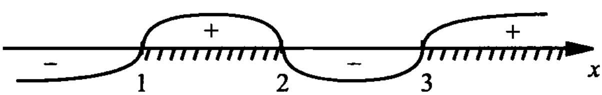


Для диаграммы знаков учтены корни числителя $x^2 + 7x - 8$ ($x = -8$ и $x = 1$), первая кратность всех корней и ограничения на x ($x \neq -3$, $x \neq -1, x \neq 7$).

Пример 5

Решить неравенство $\dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} + \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 3} \geq 2x.$

ОДЗ неравенства определяется условиями: $x - 1 \neq 0$, $x - 3 \neq 0$ (т. е. $x \neq 1$, $x \neq 3$). Почленно разделим дроби в левой части неравенства на знаменатели, сгруппировав слагаемые в числителях дробей: $\dfrac{(x^2 - x) + 1}{x - 1} + \dfrac{(x^2 - 3x) + 1}{x - 3} \geq 2x$, или $\dfrac{x(x-1)}{x-1} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{x(x-3)}{x-3} + \dfrac{1}{x-3} \geq 2x$, или $x + \dfrac{1}{x-1} + x + \dfrac{1}{x-3} \geq 2x$, или $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-3} \geq 0$. Приводим дроби к общему знаменателю и получаем: $\dfrac{2x-4}{(x-1)(x-3)} \geq 0$. Далее решаем это неравенство по обычной схеме и находим: $x \in (1;\ 2] \cup (3;\ +\infty)$.

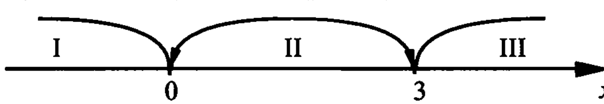


При наличии в рациональных неравенствах *знаков модуля* их надо *раскрыть*.

Пример 6

Решить неравенство $\dfrac{|x| - 4}{|x - 3| - 1} \geq 1.$

Используя метод интервалов, в данном неравенстве раскроем знаки модуля. Рассматриваемые промежутки показаны на рисунке.



а) Если $x \in (-\infty;\ 0]$ (интервал I), то данное неравенство имеет вид: $\dfrac{-x-4}{-(x-3)-1} \geq 1$, или $\dfrac{x+4}{x-3+1} \geq 1$, или $\dfrac{x+4}{x-2} - 1 \geq 0$, или $\dfrac{6}{x-2} \geq 0$.

Так как дробь неотрицательная и ее числитель положительный, то знаменатель также должен быть положительным, т. е. $x - 2 > 0$. Решая это неравенство, получаем: $x \in (2; +\infty)$. Но это решение в рассматриваемый промежуток $x \in (-\infty; 0]$ не входит и решением не является (т. е. $x \in \varnothing$).

б) Если $x \in (0; 3)$ (интервал II), то получаем неравенство $\frac{x-4}{-(x-3)-1} \geq 1$, или $\frac{x-4}{2-x} - 1 \geq 0$, или $\frac{2x-6}{2-x} \geq 0$. Решая это неравенство, находим $x \in (2; 3]$. Это решение (за исключением точки $x = 3$) входит в рассматриваемый промежуток, поэтому $x \in (2; 3)$ (учтено, что $x \neq 2$).

в) Если $x \in [3; +\infty)$ (интервал III), то имеем неравенство $\frac{x-4}{x-3-1} \geq 1$, или $\frac{x-4}{x-4} \geq 1$ $(x \neq 4)$, или $1 \geq 1$. Так как получено верное неравенство, то рассматриваемый промежуток (за исключением точки $x = 4$) является решением неравенства, т. е. $x \in [3; 4) \cup (4; +\infty)$.

Объединяя случаи б) и в), получаем окончательный ответ: $x \in (2; 4) \cup (4; +\infty)$.

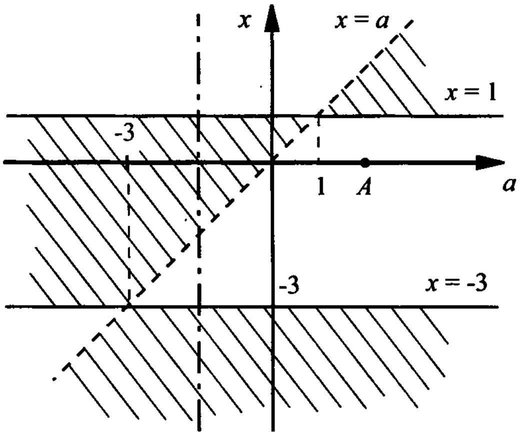
Метод интервалов также эффективен при решении *неравенств с параметрами.*

Пример 7

Решим неравенство $\frac{x^2+2x-3}{x-a} \leq 0$.

ОДЗ неравенства $x \neq a$. Найдем корни числителя $x_1 = 1$ и $x_2 = -3$. Далее удобно использовать метод интервалов. Однако если применять его для координатной прямой, то придется рассматривать пять случаев: а) $a < -3$, б) $a = -3$, в) $-3 < a < 1$, г) $a = 1$, в) $a > 1$ и для каждого случая рисовать соответствующие диаграммы знаков дроби. Поэтому удобнее и нагляднее использовать метод интервалов *для координатной плоскости.*

В плоскости aOx построим прямые $x = -3$, $x = 1$ (сплошные линии) и $x = a$ (пунктирная прямая). При пересечении этих прямых происходит изменение знака дроби $\frac{x^2+2x-3}{x-a}$.



Для любой точки A (с координатами $a = 2$, $x = 0$) определим знак такой дроби: $\dfrac{0^2+2\cdot 0-3}{0-2}=\dfrac{-3}{-2}>0$, т. е. данное неравенство не выполняется. Теперь легко заштриховать множество точек $(a;\ x)$, для которых неравенство выполнено.

Фиксируем значение a и строим семейство вертикальных прямых $x = a$ (одна из них для $-3 < a < 1$ показана штрихпунктирной линией). Выписываем промежутки x, при которых прямая попадает в заштрихованные области. Теперь записываем ответ: при $a\in(-\infty;\ -3)$ $x\in(-\infty;\ a)\cup[-3;\ 1]$, при $a = -3$ $x\in(-\infty;\ -3)\cup(-3;\ 1]$, при $a\in(-3;\ 1)$ $x\in(-\infty;\ -3]\cup(a;\ 1]$, при $a = 1$ $x\in(-\infty;-3]$, при $a\in(1;\ +\infty)$ $x\in(-\infty;\ -3]\cup[1;\ a)$.

IV. Задание на уроке

№ 327 (а); 328 (б); 329 (а); 332 (б); 334 (в, г); 335 (а, г); 336 (а, б); 337 (в, г); 338 (а, г).

V. Задание на дом

№ 327 (б); 328 (а); 329 (б, в); 333 (а); 334 (а, б); 335 (б, в); 36 (в, г); 337 (а, б); 338 (б, в).

VI. Творческие задания

Решите неравенство.

1) $(2x-3)(5x+2)\geq(2x-3)(3x-8)$;

2) $(3x-1)(4x+3)\leq(3x-1)(2x-5)$;

3) $(3x-7)^2\geq(7x-3)^2$;

4) $(5x-4)^2 \geq (4x-5)^2$;

5) $x^2(x^2-16) \leq 9(x^2-16)$;

6) $x^2(x^2-4) \geq 25(x^2-4)$;

7) $(x+1)(x-2)(x-1)^2 \geq 0$;

8) $(x+3)(x-6)(x+2)^2 \geq 0$;

9) $(5x-2)(3x^2-x-4)^2 \geq (4x+1)(3x^2-x-4)^2$;

10) $(4x-1)(2x^2-x-3)^2 \geq (3x+4)(2x^2-x-3)^2$;

11) $\dfrac{4}{x^2-4x} < \dfrac{1}{x-4}$;

12) $\dfrac{6}{x^2-6x} < \dfrac{1}{x-6}$;

13) $\dfrac{x-2}{x+7} > \dfrac{x-5}{x+4}$;

14) $\dfrac{x-3}{x+6} < \dfrac{x-4}{x+5}$;

15) $(3x^2+1)(x^2-6x+8)^2 \cdot (2x-3)^3 \cdot (5x-4)^8 \geq 0$;

16) $(3x^2-4x+1)^4 \geq (2x^2-3x+3)^4$;

17) $(9x^4-9x-10)^3 \leq (8x^4-9x-9)^3$;

18) $|3x^2-11x+6|(6x^2-11x+3) \geq 0$;

19) $(x^2+6x+11)(x^2+6x+13) \leq 8$;

20) $|x^2-4| < |x+2|$;

21) $|x^2-1| > |x-1|$;

22) $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7} \leq \dfrac{1}{x-3}$;

23) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} \geq -3$.

Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y, для которых выпол но неравенство.

24) $(x^2-4x+7)(y^2+2y+10) \leq 27$;

25) $7(x-5)^2+5(y-7)^2 \leq 6$;

26) $x^2+4x+6 \leq \dfrac{2}{y^2-6y+10}$;

27) $\dfrac{1}{2(x+5)^2}+\dfrac{2}{5(y-3)^2}\geq 0,9;$

28) $\dfrac{1}{9(x-7)^2+7(y-9)^2}\geq\dfrac{1}{8};$

29) $\sqrt{x^2-6x+13}\cdot\sqrt{y^2+10y+34}\leq 6.$

При всех значениях параметра a решите неравенство.

30) $(a+1)x-3a+1\leq 0;$

31) $(a^2-1)x-2a+1>0;$

32) $ax+3(a-x)<8a-13x+1;$

33) $a^2(x+1)+a\leq x+2;$

34) $(a+1)x^2-2\geq 0;$

35) $ax>\dfrac{1}{x};$

36) $ax^2+(a+1)x+1>0;$

37) $(a+2)x^2-(2a+1)x+a\geq 0.$

Ответы: 1) $x\in(-\infty;\,-5]\cup[1,5;\,+\infty)$; 2) $x\in\left[-4;\,\dfrac{1}{3}\right]$; 3) $x\in[-1;\,1]$; 4) $x\in(-\infty;\,-1]\cup[1;\,+\infty)$; 5) $x\in[-4;\,-3]\cup[3;\,4]$; 6) $x\in(-\infty;\,-5]\cup[-2;\,2]\cup[5;\,\infty)$; 7) $x\in(-\infty;\,-1]\cup\{1\}\cup[2;\,\infty)$; 8) $x\in(-\infty;\,-3]\cup\{-2\}\cup[6;\,\infty)$; 9) $x\in\{-1\}\cup\left\{\dfrac{4}{3}\right\}\cup[3;\,\infty)$; 10) $x\in\{-1\}\cup\{1,5\}\cup[5;\,\infty)$; 11) $x\in(0;\,4)\cup(4;\,\infty)$; 12) $x\in(0;\,6)\cup(6;\,\infty)$; 13) $x\in(-\infty;-7)\cup(-4;\infty)$; 14) $x\in(-\infty;-6)\cup(-5;\infty)$; 15) $x\in\left\{\dfrac{4}{5}\right\}\cup\left[\dfrac{3}{2};\infty\right)$; 16) $x\in(-\infty;-1]\cup[2;\infty)$; 17) $x\in[-1;\,1]$; 18) $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right]\cup\left\{\dfrac{2}{3}\right\}\cup\left[\dfrac{3}{2};\infty\right)$; 19) $x=-3$; 20) $x\in(1;\,3)$; 21) $x\in(-\infty;\,-2)\cup(0;\,1)\cup(1;\,\infty)$; 22) $x\in(-1;\,2]\cup[3,5;\,7)$; 23) $x\in(-\infty;\,1)\cup\left[\dfrac{3}{2};\,2\right]\cup(3;\,\infty)$; 24) $(2;\,-1)$; 25) $(5;\,6)$, $(5;\,7)$, $(5;\,8)$; 26) $(-2;\,3)$; 27) $(-4;\,4)$, $(-4;\,2)$, $(-6;\,4)$, $(-6;\,2)$;

28) (7; 8); (7; 10); 29) (3; −5); 30) при $a\in(-\infty;-1)$ $x\in\left[\frac{3a-1}{a+1};\infty\right)$, при $a=-1$ $x\in\varnothing$, при $a\in(-1;\infty)$ $x\in\left(-\infty;\frac{3a-1}{a+1}\right]$; 31) при $a\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$ $x\in\left(\frac{2a-1}{a^2-1};\infty\right)$, при $a=-1$ $x\in(-\infty;\infty)$, при $a=1$ $x\in\varnothing$, при $a\in(-1;1)$ $x\in\left(-\infty;\frac{2a-1}{a^2-1}\right)$; 32) при $a\in(-\infty;-10)$ $x\in\left(\frac{5a+1}{a+10};\infty\right)$, при $a=-10$ $x\in\varnothing$, при $a\in(-10;\infty)$ $x\in\left(-\infty;\frac{5a+1}{a+10}\right)$; 33) при $a\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$ $x\in\left(-\infty;-\frac{a+2}{a+1}\right]$, при $a=\pm1$ $x\in(-\infty;\infty)$, при $a\in(-1;1)$ $x\in\left[-\frac{a+2}{a+1};\infty\right)$; 34) при $a\in(-\infty;-1]$ $x\in\varnothing$, при $a\in(-1;\infty)$ $x\in\left(-\infty;-\sqrt{\frac{2}{a+1}}\right]\cup\left[\sqrt{\frac{2}{a+1}};\infty\right)$; 35) при $a\in(-\infty;0]$ $x\in(-\infty;0)$, при $a\in(0;\infty)$ $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{a}};0\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{a}};\infty\right)$; 36) при $a\in(-\infty;0)$ $x\in\left(-1;-\frac{1}{a}\right)$, при $a=0$ $x\in(-1;\infty)$, при $a\in(0;1)$ $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{a}\right)\cup(-1;\infty)$, при $a\in[1;\infty)$ $x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{a};\infty\right)$; 37) при $a\in(-\infty;-2)$ $x\in\left(\frac{2a+1+\sqrt{1-4a}}{2a+4};\frac{2a+1-\sqrt{1-4a}}{2a+4}\right)$, при $a=-2$ $x\in\left[\frac{2}{3};\infty\right)$, при $a\in\left(-2;\frac{1}{4}\right)$ $x\in\left(-\infty;\frac{2a+1-\sqrt{1-4a}}{2a+4}\right)\cup\left(\frac{2a+1+\sqrt{1-4a}}{2a+4};\infty\right)$, при $a\in\left[\frac{1}{4};\infty\right)$ $x\in(-\infty;-\infty)$.

VII. Подведение итогов урока

Урок 35. Некоторые приемы решения целых уравнений (факультативное занятие)

Цель: рассмотреть приемы решения уравнений высоких степеней.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Решите неравенство.

1) $(5x-2)^2 \geq (3x+1)^2$;

2) $(2x-3)(x-1)(3x+5)^2 \leq 0$;

3) $\dfrac{x-7}{x+2} < \dfrac{x+5}{x-1}$.

Вариант 2

Решите неравенство.

1) $(7x+3)^2 \leq (5x-4)^2$;

2) $(3x-4)(x+1)(2x+7)^2 \geq 0$;

3) $\dfrac{x+3}{x-1} > \dfrac{x+7}{x-5}$.

III. Изучение нового материала

В начале § 5 мы рассмотрели два основных способа решения уравнений высоких степеней: 1) разложение многочлена на множители и 2) использование замены неизвестной. На этом уроке обсудим другие способы решения уравнений вида $P_n(x) = 0$, где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + ax + a_0$, $a_n \neq 0$.

Приведем некоторые утверждения о корнях многочлена $P_n(x)$:

1. Многочлен n-й степени *имеет не более n корней* (с учетом их кратностей). Например, многочлен третьей степени не может иметь четыре корня.

2. *Многочлен нечетной степени имеет хотя бы один корень.* Например, многочлены первой, третьей, пятой и т. д. степени имеют хотя бы один корень. *Многочлены четной степени корней могут и не иметь.*

3. Если *на концах отрезка* $[a; b]$ *значения многочлена имеют разные знаки* (т. е. $P_n(a)\cdot P_n(b)<0$), то на интервале $(a; b)$ находится *хотя бы один корень.* Это утверждение широко используется для приближенного вычисления корней многочлена.

4. Если *число c является корнем многочлена* $P_n(x)$, то этот многочлен можно представить *в виде произведения* $P_n(x)=(x-c)P_{n-1}(x)$, где $P_{n-1}(x)$ – многочлен $(n-1)$-й степени. Другими словами, *многочлен $P_n(x)$ можно разделить без остатка на двучлен $(x-c)$.* Это позволяет уравнение n-й степени сводить к уравнению $(n-1)$-й степени (понижать степень уравнения).

5. Если *многочлен со всеми целыми коэффициентами* (причем свободный член $a_0\neq 0$) *имеет целый корень c*, то этот *корень является делителем свободного члена a_0.* Такое утверждение позволяет *подобрать целый корень* многочлена (если он есть).

Пример 1

Решим уравнение $x^3+5x^2-4x-2=0$.

Если это уравнение имеет целый корень, то согласно пункту 5 он является делителем свободного члена (–2), т. е. равняется одному из чисел: ±1, ±2. Проверка показывает, что корнем уравнения является число 1. Тогда согласно пункту 4 многочлен $P_3(x)=x^3+5x^2-4x-2$ можно представить в виде произведения $P_3(x)=(x-1)P_2(x)$, т. е. многочлен $P_3(x)$ можно без остатка разделить на двучлен $(x-1)$. Выполним такое деление «уголком»:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3+4x^2-4x-2 & x-1 \\ \cline{2-2}
x^3-x^2 & x^2+6x+2 \\ \cline{1-1}
-\,6x^2-4x & \\
6x^2-6x & \\ \cline{1-1}
-\,2x-2 & \\
2x-2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Напомним, что деление «уголком» осуществлялось таким образом, чтобы на каждом промежуточном этапе деления исчезала старшая степень промежуточного делимого.

Таким образом, мы фактически разложили левую часть уравнения на множители: $(x-1)(x^2+6x+2)=0$ (т. е. $P_2(x)=x^2+6x+2$). Случай $x-1=0$ дает угаданный корень $x_1=1$. Случай $x^2+6x+2=0$ дает еще два корня $x_{2,3}=-3\pm\sqrt{7}$.

На этом примере поясним приведенные утверждения:

1, 2) Уравнение третьей степени имело три корня (т. е. не более трех). При этом оно заведомо имело хотя бы один корень.

3) Найдем, например, $P(0)=-2$ и $P(2)=8+20-8-2=18$. На концах отрезка [0; 2] значения многочлена имели разные знаки. Поэтому на интервале (0; 2) уравнение имело корень, а именно $x=1$.

Пример 2

Решим уравнение $24x^3-10x^2-3x+1=0$.

Проверка показывает, что данное уравнение с целыми коэффициентами не имеет целых корней ±1 (делители свободного члена). Поэтому уравнение вообще не имеет целых корней. Предположим, что корни являются рациональными числами. Введем новую переменную $y=\frac{1}{x}$, откуда $x=\frac{1}{y}$. Тогда уравнение имеет вид: $\frac{24}{y^3}-\frac{10}{y^2}-\frac{3}{y}+1=0$, или $y^3-3y^2-10y+24=0$. Попробуем подобрать корень этого уравнения среди делителей числа 24 (свободный член). Проверка показывает, что $y=2$ – корень этого уравнения. Далее понижаем степень этого уравнения:

$$\begin{array}{r|l}
-\,y^3-3y^2-10y+24 & y-2 \\ \cline{2-2}
\underline{y^3-2y^2} & y^2-y-12 \\
-\,-y^2-10y & \\
\underline{-y^2+2y} & \\
-12y+24 & \\
\underline{-12y+24} & \\
0 &
\end{array}$$

Корнями квадратного уравнения $y^2-y-12=0$ являются числа $y=-3$ и $y=4$. Вернемся теперь к старой неизвестной $x=\frac{1}{y}$ и найдем три корня данного уравнения: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{3}$, $x_3=\frac{1}{4}$.

Фактически в примерах 1–2 мы использовали *разложение* многочлена *на множители* (первый прием). Обсудим детальнее второй прием – *замена неизвестной*. Далеко не всегда такая замена является очевидной, что видно из следующих примеров.

Пример 3

Решим уравнение $2x^4+3x^3-4x^2-3x+2=0$.

Отличительной особенностью этого уравнения является попарное равенство коэффициентов относительно среднего члена уравнения (коэффициент при x^4 и свободный член равны 2; коэффициенты при x^3 и x равны +3 и −3 соответственно). Для решения уравнений такого типа существует следующий прием. Прежде всего убедимся, что $x = 0$ не является корнем уравнения (действительно, если подставить $x = 0$ в уравнение, то получим $2 = 0$). Разделим все члены уравнения на x^2: $2x^2+3x-4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0$. Сгруппируем члены с коэффициентами, равенство которых отмечалось выше: $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{1}{x}\right)-4=0$. Теперь можно ввести замену переменной: $y=x-\frac{1}{x}$. Чтобы выразить соотношение $x^2+\frac{1}{x^2}$ через y, возведем в квадрат замену: $y^2=x^2-2+\frac{1}{x^2}$, откуда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$. Подставив выражения для $x-\frac{1}{x}$, $x^2+\frac{1}{x^2}$ в уравнение, получим: $2(y^2+2)+3y-4=0$, или $2y^2+3y=0$ (корни $y_1=0$ и $y_2=-\frac{3}{2}$). Таким образом, для y_1 имеем уравнение $x-\frac{1}{x}=0$, или $x^2-1=0$ (корни $x_1=-1$, $x_2=1$), для y_2: $x-\frac{1}{x}=-\frac{3}{2}$, или $2x^2+3x-2=0$ (корни $x_3=-2$, $x_4=\frac{1}{2}$).

Учитывая закономерности в коэффициентах этого уравнения, подобные уравнения называют *возвратными*, или *симметричными*.

Пример 4

Решим уравнение $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$.

Попробуем аналогичный подход. Введем новую переменную $y=\frac{x}{3}-\frac{4}{x}$. Возведем эту замену в квадрат: $y^2=\frac{x^2}{9}-\frac{8}{3}+\frac{16}{x^2}$ и умножим на 3: $3y^2=\frac{x^2}{3}-8+\frac{48}{x^2}$, тогда $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=3y^2+8$. Уравнение имеет вид: $3y^2+8=10y$, или $3y^2-10y+8=0$. Корни этого уравнения $y=2$ и $y=\frac{4}{3}$. Вернемся к старой неизвестной.

а) Уравнение $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=2$, или $x^2-6x-12=0$, имеет корни $x_{1,2}=3\pm\sqrt{21}$.

б) Уравнение $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=\frac{4}{3}$, или $x^2-4x-12=0$, имеет корни $x_3=-2$ и $x_4=6$.

Пример 5

Решим уравнение $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8$.

Учитывая, что в уравнении уже есть сумма квадратов двух выражений, выделим квадрат суммы. Запишем уравнение в виде $\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{x}{x-1}+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2\right)-2\frac{x^2}{x-1}=8$, или $\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}=8$, или $\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}-8=0$. Введем новую неизвестную $y=\frac{x^2}{x-1}$ и получим квадратное уравнение $y^2-2y-8=0$. Его корни $y=4$ и $y=-2$. Вернемся к старой неизвестной.

а) Уравнение $\frac{x^2}{x-1}=4$, или $x^2-4x+4=0$, имеет корни $x_{1,2}=2$.

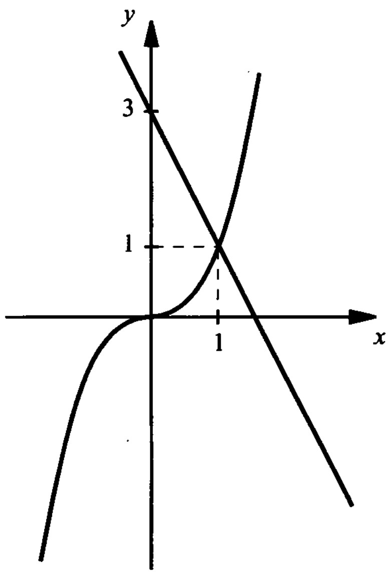
б) Уравнение $\frac{x^2}{x-1}=-2$, или $x^2+2x-2=0$, имеет корни $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{3}$.

Часто при решении уравнений используют *монотонность функций* и *графическую иллюстрацию* решения.

Пример 6

Решим уравнение $x^7 + 2x - 3 = 0$.

Ищем корень среди делителей числа. Проверка показывает, что корнем является число $x = 1$. Докажем, что других корней нет. Запишем уравнение в виде $x^7 = 3 - 2x$. Функция $y = x^7$ – возрастающая, а функция $y = 3 - 2x$ – убывающая. Значит, уравнение $x^7 = 3 - 2x$ (и уравнение $x^7 + 2x - 3 = 0$) имеет единственный корень. Это хорошо видно из приведенного рисунка.



При использовании способа разложения многочлена на множители до сих пор возникал хотя бы один множитель, являющийся многочленом первой степени. В ряде случаев этого сделать не удается: множители являются *многочленами второй степени* (квадратными трехчленами). Посмотрим, как можно выполнить разложение в этом случае.

Пример 7

Решим уравнение $x^4 - x^3 - 12x^2 + 7x - 1 = 0$.

Учитывая, что старший коэффициент уравнения равен 1 и свободный член равен (-1), предположим, что многочлен четвертой степени может быть представлен в виде произведения квадратных трехчленов $(x^2 + ax + 1)(x^2 + bx - 1)$. Перемножим эти выражения: $x^4 + bx^3 - x^2 + ax^3 + abx^2 - ax + x^2 + bx - 1 = x^4 + (a+b)x^3 +$

$+abx^2+(b-a)x-1$. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x данного и полученного многочленов. Имеем систему уравнений $\begin{cases} -1=a+b, \\ -12=ab, \\ 7=b-a. \end{cases}$ Из первого и третьего уравнений системы найдем $a=-4$ и $b=3$. Проверим, что эти значения удовлетворяют и второму уравнению.

Тогда данное уравнение будет иметь вид: $(x^2-4x+1)(x^2+3x-1)=0$. Уравнение $x^2-4x+1=0$ имеет корни $x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$, уравнение $x^2+3x-1=0$ – корни $x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$. Заметим, что никаким другим способом такое уравнение решить невозможно.

В конце остановимся на решении уравнений высоких степеней *с параметрами*. Часто удобно неизвестную и параметр поменять местами.

Пример 8

Решим уравнение $x^3-2x-(x^2+2)a-2a^2x=0$.

Отметим, что в это уравнение переменная x входит в третьей степени (и ниже), переменная a – во второй степени (и ниже). Поэтому удобно рассматривать такое уравнение как квадратное по переменной a. Запишем его в виде $2xa^2+(x^2+2)a-(x^3-2x)=0$. Найдем дискриминант $D=(x^2+2)^2+8x(x^3-2x)=x^4+4x^2+4+8x^4-16x^2=$ $=9x^4-12x^2+4=(3x^2-2)^2$ и корни $a=\dfrac{-(x^2+2)\pm(3x^2-2)}{4x}$, т. е. $a=\dfrac{x^2-2}{2x}$ и $a=-x$. Вернемся к старой неизвестной x.

а) Уравнение $a=\dfrac{x^2-2}{2x}$, или $0=x^2-2ax-2$, имеет корни $x_{1,2}=a\pm\sqrt{a^2+2}$.

б) Уравнение $a=-x$ имеет корень $x_3=-a$.

IV. Задание на уроке

№ 341; 342 (а); 343 (б); 345; 346 (а); 347 (б); 348 (а); 349; 351.

V. Задание на дом

№ 342 (б); 343 (а); 344; 346 (б); 347 (а); 348 (а); 350.

VI. Творческие задания

Рекомендуем использовать творческие заданиям к урокам 25–26 (там количество задач избыточно).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 36–37. Иррациональные уравнения и неравенства (факультативное занятие)

Цель: рассмотреть решение типичных иррациональных уравнений и неравенств.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Решите уравнение.

1) $2x^3-7x^2+6x-1=0$;

2) $5x^4+x^3-16x^2-x+5=0$.

Вариант 2

Решите уравнение.

1) $3x^3-2x^2-4x+1=0$;

2) $3x^4-x^3-8x^2+x+3=0$.

III. Изучение нового материала

Рассматриваемая тема в школе изучается очень поверхностно, особенно иррациональные неравенства. В результате школьники или не в состоянии решить даже простейшие задачи, или допускают принципиальные ошибки при их решении. Поэтому необходимо рассмотреть решение типичных задач по этой теме.

Уравнение $y(x) = 0$ является иррациональным, если функция $y(x)$ содержит корни из неизвестной величины x или выражений, зависящих от x.

Многие иррациональные уравнения могут быть решены, основываясь только на понятиях корня и ОДЗ уравнения и их свойствах.

Пример 1

Решить уравнение $\sqrt[4]{3x^6+2x-5}+\sqrt{x-1}+\sqrt[8]{x^5-3x+2}=0$.

Левая часть уравнения представляет собой сумму трех корней (радикалов) четной степени, каждый из которых неотрицательный. Поэтому эта сумма будет также неотрицательная. По условию задачи сумма должна равняться нулю. Это возможно только тогда, когда все три радикала одновременно равны нулю, а для этого необходимо, чтобы подкоренные выражения одновременно равнялись нулю $\begin{cases}3x^6+2x-5=0,\\ x-1=0,\\ x^5-3x+2=0.\end{cases}$ Так как первое и третье уравнения имеют соответственные степени 6 и 5, то решение этих уравнений представляет значительные сложности. В то же время второе уравнение является линейным, и его решение: $x = 1$. Теперь осталось проверить, удовлетворяет ли это решение первому и третьему уравнениям. Это действительно так, и $x = 1$ – решение исходного уравнения.

Основным приемом решения иррациональных уравнений считается *уединение в одной части уравнения радикала и последующее возведение обоих частей уравнения в соответствующую степень.* Однако при возведении в четную степень могут возникнуть посторонние корни, т. е. корни, не являющиеся решением исходного уравнения. Поэтому при использовании такого приема решения *корни должны быть проверены и посторонние обязательно отброшены.*

Пример 2

Решить уравнение $\sqrt{x-1}+3=x$.

ОДЗ уравнения определяется условием $x-1\geq 0$, откуда $x\geq 1$. Уединим радикал в левой части: $\sqrt{x-1}=x-3$ и возведем обе части этого уравнения в квадрат: $x-1=x^2-6x+9$, или $0 = x^2 - 7x + 10$. Корни этого квадратного уравнения: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$. Легко проверить, что исходному уравнению удовлетворяет только корень x_2, что и является ответом.

Заметим, что оба корня, x_1 и x_2, входили в ОДЗ. Однако на x можно установить еще одно ограничение. Рассматривая уравнение $\sqrt{x-1}=x-3$, видим, что левая часть этого уравнения неотрицательная. Поэтому его правая часть также должна быть неотрицательной, т. е. $x - 3 \geq 0$, или $x \geq 3$. Этому ограничению удовлетворяет только корень x_2.

Достаточно часто и с успехом при решении иррациональных уравнений используются *замены переменных*.

Пример 3

Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\dfrac{2+x}{3-x}}=4$.

Введем новую неизвестную $y=\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}$ и получим уравнение $y+\dfrac{3}{y}=4$, или $y^2 - 4y + 3 = 0$, корни которого $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. Возвращаясь к переменной x, получим уравнения $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}=1$, или $\dfrac{3-x}{2+x}=1$, или $3 - x = 2 + x$ (откуда $x=\dfrac{1}{2}$) и $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}=3$, или $\dfrac{3-x}{2+x}=9$, или $3 - x = 18 + 9x$ (откуда $x=-\dfrac{3}{2}$). Легко проверить, что оба корня, $x_1=\dfrac{1}{2}$ и $x_2=-\dfrac{3}{2}$, удовлетворяют данному уравнению.

Пример 4

Решить уравнение $\sqrt{3x-4-2\sqrt{3x-5}}+\sqrt{3x-5}=1$.

Введем замену переменной $y=\sqrt{3x-5}$ (отметим, что $3x - 5 \geq 0$, т. е. $x\geq\dfrac{5}{3}$), тогда $y^2 = 3x - 5$ и $x=\dfrac{y^2+5}{3}$. Уравнение имеет вид:

$\sqrt{3\frac{y^2+5}{3}-4-2y}+y=1$, или $\sqrt{y^2-2y+1}+y=1$, или $|y-1|+y=1$.

Решая это уравнение методом интервалов, получим: $y \le 1$. Возвращаясь к переменной x, имеем простое иррациональное неравенство $\sqrt{3x-5} \le 1$, откуда $x \le 2$. Учитывая ОДЗ неравенства $x \ge \frac{5}{3}$, находим ответ: $x \in \left[\frac{5}{3}; 2\right]$.

Пример 5

Решить уравнение $4x^2+12x\sqrt{1+x}=27(1+x)$.

Введем новую неизвестную $y=\sqrt{1+x}$ и получим однородное уравнение относительно переменных x и y: $4x^2 + 12xy = 27y^2$, или $27y^2 - 12yx - 4x^2 = 0$. Решая это уравнение относительно y, получаем: $y=-\frac{2}{9}x$, $y=\frac{2}{3}x$. Возвращаясь к переменной x, имеем: $\sqrt{1+x}=-\frac{2}{9}x$; $\sqrt{1+x}=\frac{2}{3}x$. Очевидно, что в первом случае $x \le 0$ (т. к. левая часть уравнения положительная) и $x \ge -1$. Возведя обе части уравнения в квадрат, придем к квадратному уравнению $0 = 4x^2-81x-81$. Корни этого уравнения $x_{1,2}=\frac{9(9\pm\sqrt{97})}{8}$. Из этих корней только корень $x=\frac{9(9-\sqrt{97})}{8}$ удовлетворяет условию $-1 \le x \le 0$. В случае уравнения $\sqrt{1+x}=\frac{2}{3}x$ должно быть выполнено условие $x \ge 0$. Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим квадратное уравнение $0 = 4x^2 - 9x - 9$, корни которого $x_1=-\frac{3}{4}$, $x_2=3$. Из этих корней только $x = 3$ удовлетворяет условию $x \ge 0$. Таким образом, корни исходного уравнения: $x=\frac{9(9-\sqrt{97})}{8}$ и $x = 3$.

В случае радикалов высокой степени иррациональное уравнение удобно *свести к системе алгебраических уравнений* введением соответствующих замен.

Пример 6

Решить уравнение $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{-1}=1$.

ОДЗ уравнения $x \geq 1$. Введем две новые переменные: $y=\sqrt[3]{2-x}$, $z=\sqrt{x-1}$. Тогда записать одно уравнение очень просто: $y + z = 1$. Но т. к. неизвестных две: y и z, то необходимо еще одно уравнение. Получим его, возведя соотношение для y в куб: $y^3 = 2 - x$, а для z – в квадрат: $z^2 = x - 1$, и, чтобы исключить переменную x, сложим почленно эти соотношения: $y^3+z^2=(2-x)+(x-1)$, или $y^3+z^2=1$. Итак, имеем систему уравнений $\begin{cases} y+z=1, \\ y^3+z^2=1. \end{cases}$ Из первого уравнения найдем $z = 1 - y$ и подставим это выражение во второе уравнение $y^3+(1-y)^2=1$, или $y(y^2 + y - 2) = 0$. Корни этого уравнения $y_1 = 0$, $y_2 = -2$, $y_3 = 1$. Возвращаясь к неизвестной x, получаем: $y^3 = 2 - x$, или $x = 2 - y^3$. Находим, соответственно, три корня данного уравнения: $x_1 = 2 - 0^3 = 0$, $x_2 = 2 -(-2)^3 = 10$, $x_3 = 2 - 1^3 = 1$. Легко проверить, что все три корня являются решениями исходного уравнения.

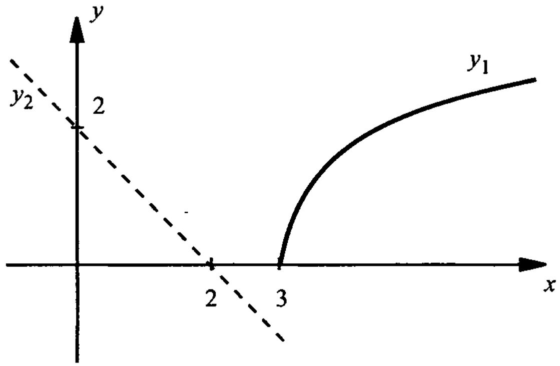
Иррациональные неравенства в школе практически не изучаются, поэтому ограничимся рассмотрением самых типичных задач этой темы. Необходимо помнить, что *возводить в четную степень* обе части неравенства можно только, *если они неотрицательные* (иначе такая операция приведет к ошибкам).

Пример 7

Решить неравенство $\sqrt{x-3} \leq 2-x$.

ОДЗ неравенства найдем из условия $x - 3 \geq 0$, т. е. $x \geq 3$. Но при таких значениях x правая часть неравенства отрицательная, т. е. $2 - x < 0$. Так как арифметический квадратный корень $\sqrt{x-3} \geq 0$, то получаем противоречие: неотрицательное выражение не превосходит отрицательную величину. Поэтому данное неравенство решений не имеет, т. е. $x \in \varnothing$.

Отсутствие решения легко продемонстрировать графически. Построим графики функций $y_1 = \sqrt{x-3}$ и $y_2 = 2 - x$. Из условия задачи следует, что график линейной функции y_2 должен располагаться не ниже корневой зависимости y_1. Видно, что ни для каких x это не выполняется.



Пример 8

Решить неравенство $\sqrt{x-3} \ge 2 - x$.

ОДЗ неравенства определяется условием $x - 3 \ge 0$ и $x \ge 3$. При этих значениях x величина $2 - x < 0$. Так как $\sqrt{x-3} \ge 0$, а $2 - x < 0$, то неравенство выполнено при всех x из ОДЗ. Итак, решение неравенства: $x \in [3; +\infty)$.

Заметим, что такой же ответ следует из рассмотрения рисунка предыдущего примера.

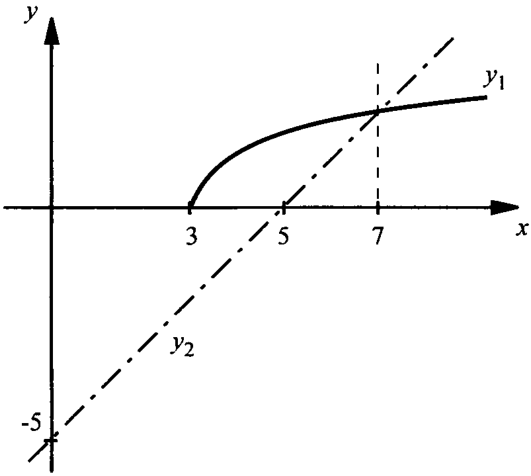
Пример 9

Решить неравенство $\sqrt{x-3} \le x - 5$.

ОДЗ неравенства $x \ge 3$. По виду неравенства можно установить еще одно ограничение на x: т. к. $\sqrt{x-3} \ge 0$, а $x - 5 \ge \sqrt{x-3}$, то $x - 5 \ge 0$, откуда $x \ge 5$.

При $x \ge 5$ обе части неравенства неотрицательные и их можно возвести в квадрат (знак неравенства при этом не меняется): $x - 3 \le x^2 - 10x + 25$, или $0 \le x^2 - 11x + 28$. Решение этого неравенства: $x \in (-\infty; 4] \cup [7; +\infty)$. Учитывая ограничение на x ($x \ge 5$), окончательно получим: $x \in [7; +\infty)$.

Можно также дать графическую иллюстрацию полученного решения. Построим графики функций $y_1 = \sqrt{x-3}$ и $y_2 = x - 5$. Из рисунка видно, что график линейной функции y_2 располагается не ниже графика корневой зависимости y_1 при $x \in [7; +\infty)$.



Пример 10

Решить неравенство $\sqrt{x-3} \geq x-5$.

ОДЗ неравенства $x \geq 3$. Так как выражение $x - 5$ меняет знак при $x = 5$, то рассмотрим два промежутка из ОДЗ: $x \in [3; 5)$ и $x \in [5; +\infty)$.

При $x \leq [3; 5)$ левая часть исходного неравенства неотрицательная, а правая – отрицательная, следовательно, неравенство выполнено при всех x из рассматриваемого промежутка.

Для $x \in [5; +\infty)$ обе части исходного неравенства неотрицательные, их можно возвести в квадрат, знак неравенства при этом не меняется: $x - 3 \geq x^2 - 10x + 25$, или $0 \geq x^2 - 11x + 28$. Решая это неравенство, найдем: $x \in [4; 7]$. Учитывая рассматриваемый промежуток, получим: $x \in [5; 7]$.

Объединяя результаты решения на двух промежутках ОДЗ, окончательно имеем: $x \in [3; 7]$. Этот жё ответ получается при рассмотрении предыдущего рисунка.

IV. Творческие задания (задания на уроке и дома)

Решите уравнение.

1) $\sqrt{x-5}=3$;

2) $\sqrt{x+2}=4$;

3) $\sqrt{\frac{5}{x-5}}=5$;

4) $\sqrt{\frac{3}{x-3}}=3$;

5) $\sqrt{\frac{x+6}{x-6}}=2$;

6) $\sqrt{\frac{x-4}{x+4}}=3$;

7) $\sqrt{6x^2-7x+2}=1$;

8) $\sqrt{3x^2+2x-1}=2$;

9) $\sqrt{3x-2}=4x-3$;

10) $\sqrt{2x-1}=3x-2$;

11) $(x^2-16)\sqrt{x+2}=0$;

12) $(x^2-25)\sqrt{x+3}=0$;

13) $\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{x-4}$;

14) $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+4}}=\sqrt{x+2}$;

15) $(x+6)\sqrt{2x-9}=3(x+6)$;

16) $(x+4)\sqrt{3x-5}=2(x+4)$;

17) $\left|\sqrt{3x+4}-1\right|=3$;

18) $\left|\sqrt{4x-3}-1\right|=2$;

19) $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2-4}=0$;

20) $\sqrt{x^2+4x+3}+\sqrt{x^2-9}=0$;

21) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$;

22) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$;

23) $(4x^2-4x-3)\sqrt{4x^2-12x+5}=0$;

24) $x^2+x-2\sqrt{x^2+x+4}=4$;

25) $\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}+9\sqrt{\frac{x+1}{2x-1}}=6$;

26) $x(2x+1)+2x\sqrt{\frac{2x+1}{x}}+1=0$;

27) $\sqrt{x^2-5x+4}-\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{-x^2+6x-5}-\sqrt{3x}$;

28) $\sqrt{x+7-4\sqrt{x+3}}+\sqrt{x+12+6\sqrt{+3}}=5$;

29) $\sqrt[3]{10-x}-\sqrt[3]{3-x}=1$;

30) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$;

31) $\sqrt{6x-5}=|x|-|3x-2|+1$;

32) $\sqrt{x+2}=2a+3$;

33) $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=\sqrt{2x}$;

34) $\sqrt{1-x^2}=a-x$.

При каких значениях параметра a уравнение имеет два различных корня?

35) $\sqrt{x+a}=x$;

36) $\sqrt{x^2-2a}=a-1$;

37) $\sqrt{ax}=x+2$.

При каких значениях параметра a уравнение имеет единственное решение?

38) $\sqrt{x-a}=1-x$;

39) $\sqrt{x-a}=x-2$;

40) $\sqrt{2x+3}=ax-2$.

При каких значениях параметра a уравнение не имеет решений?

41) $\sqrt{2x-1}=x-a$;

42) $\sqrt{1-2x}=x-a$.

Найдите все пары (x; y) чисел x и y, для которых выполнено равенство.

43) $\sqrt{x^2-y+1}+\sqrt{x+3y-5}=0$;

44) $\sqrt{(x-2y+1)^2+1}+\sqrt{(3x-y-2)^2+25}=6$.

Ответы: 1) 14; 2) 14; 3) $5\frac{1}{5}$; 4) $3\frac{1}{3}$; 5) 10; 6) −5; 7) $x=\frac{1}{6}$ и $x=1$; 8) $x=-\frac{5}{3}$ и $x=1$; 9) 1; 10) 1; 11) $x=-2$ и $x=4$; 12) $x=-3$ и $x=5$; 13) 4; 14) −2; 15) 9; 16) 3; 17) 4; 18) 3; 19) −2; 20) −3; 21) 6; 22) 5; 23) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{2}$; 24) −4; 3; 25) $-\frac{10}{7}$; 26) −1; 27) 1; 28) $x\in[-3;1]$; 29) 2; 11; 30) 1; 10; 31) 1; 32) при $a\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$ $x\in\varnothing$, при $a\in\left[-\frac{3}{2};\infty\right)$ $x=4a^2+12a+7$; 33) при $a\in(-\infty;0)$ $x=-a$, при $a=0$ $x=0$, при $a\in(0;\infty)$ $x=a$; 34) при $a\in(-\infty;-1)\cup(\sqrt{2};\infty)$ $x\in\varnothing$, при $a=-1$ $x=-1$, при $a\in(-1;1)$ $x=\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}$, при $a=1$ $x\in\{0;1\}$, при $a\in(1;\sqrt{2})$ $x=\frac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}$, при $a=\sqrt{2}$ $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 35) $a\in\left(-\frac{1}{4};0\right]$; 36) $a\in[1;\infty)$; 37) $a\in(8;\infty)$; 38) $a\in(-\infty;1]$;

39) $a \in (-\infty;\ 2) \cup \left\{\frac{9}{4}\right\}$; 40) $a \in \left(-\infty;\ -\frac{4}{3}\right] \cup (0;\ \infty)$; 41) $a \in (-\infty;\ 0)$;

42) $a \in \left(\frac{1}{2};\ \infty\right)$; 43) $(-1;\ 2)$, $\left(\frac{2}{3};\ \frac{13}{9}\right)$; 44) $(1;\ 1)$.

Решите неравенство.

1) $8\sqrt{2x-9} > 0$;

2) $5\sqrt{8-3x} > 0$;

3) $(x^2+11)\sqrt{x+3} \ge 0$;

4) $(2x^2+7)\sqrt{6-x} \ge 0$;

5) $\dfrac{\sqrt{4x^2+9}}{2x-5} \ge \dfrac{3}{5-2x}$;

6) $\dfrac{\sqrt{5x^2+11}}{3x-7} \le \dfrac{2}{7-3x}$;

7) $\sqrt{\dfrac{x-2}{5+3x}} \ge -7$;

8) $\sqrt{\dfrac{x+3}{7-2x}} \ge -4$;

9) $\sqrt{x+3} < 3-x$;

10) $\sqrt{4-x} < x+8$;

11) $\sqrt{x+32} > x+2$;

12) $\sqrt{10-x} > x-4$;

13) $(3x-4)\sqrt{4x-3} \le 0$;

14) $(3x-5)\sqrt{5x-3} \le 0$;

15) $\dfrac{\sqrt{4x^2-12x+5}}{2x^2-3x-2} \le 0$;

16) $(2x^2+3x-20)\sqrt{25-x^2} \le 0$;

17) $\dfrac{4}{\sqrt{x-5}+3} > \dfrac{3}{\sqrt{x-5}+4}$;

18) $x+3+\sqrt{-3x-2} \ge \dfrac{\sqrt{9x^2-4}}{\sqrt{2-3x}}$.

Ответы: 1) $x \in (4{,}5;\ \infty)$; 2) $x \in \left(-\infty;\ \frac{8}{3}\right)$; 3) $x \in [-3;\ \infty)$; 4) $x \in (-\infty;\ 6]$;

5) $x \in (2{,}5;\ \infty)$; 6) $x \in \left(-\infty;\ \frac{7}{3}\right)$; 7) $x \in \left(-\infty;\ -\frac{5}{3}\right) \cup [2;\ \infty)$; 8) $x \in [-3;\ 3{,}5)$;

9) $x \in [-3;\ 1)$; 10) $x \in (-5;\ 4]$; 11) $[-32;\ 4)$; 12) $x \in (-\infty;\ 6)$;

13) $x \in \left[\frac{3}{4};\ \frac{4}{3}\right]$; 14) $x \in \left[\frac{3}{4};\ \frac{5}{3}\right]$; 15) $x \in \left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{5}{2}\right\}$;

16) $x \in \{-5\} \cup \left[-4;\ \frac{5}{2}\right] \cup \{5\}$; 17) $x \in [5;\ \infty)$; 18) $x \in \left[-3;\ -\frac{2}{3}\right]$.

V. Подведение итогов урока

Уроки 38–39. Контрольная работа по теме «Уравнения и неравенства с одной переменной»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Решите уравнение.

а) $x^2(x+1)=9(x+1)$;

б) $\dfrac{16}{x^2+x}-\dfrac{6}{x^2-x}=\dfrac{1}{x}$;

в) $\sqrt{\dfrac{3}{x-4}}=2$.

2. Решите неравенство.

а) $(x+3)(2x-6)(3x+4)\geq 0$;

б) $\dfrac{3}{x+1}\leq\dfrac{5}{x+2}$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $25x^2-3ax+1=0$ не имеет корней?

Вариант 2

1. Решите уравнение.

а) $4x^2(1-x)=1-x$;

б) $\dfrac{3}{x^2+4x}-\dfrac{15}{x^2-4x}=\dfrac{4}{x}$;

в) $\sqrt{\dfrac{2}{x+5}}=3$.

2. Решите неравенство.

а) $(x+2)(3x-6)(2x+9)\leq 0$;

б) $\dfrac{4}{x-2}\geq\dfrac{7}{x-3}$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $4x^2+3ax+1=0$ имеет два различных корня?

Вариант 3

1. Решите уравнение.

а) $(x^2+27x-57)^2=(x^2-3x+1)^2$;

б) $\dfrac{3x+2}{2x+3}+\dfrac{2x+3}{3x+2}+2=0$;

в) $(x^2-16)\sqrt{x+2}=0$.

2. Решите неравенство.

а) $(x-2)(3x^2-5x-2)(x+4)\ge 0$;

б) $\sqrt{x+3}<3-x$.

3. Определите значения a, при которых уравнение $x^3+6x^2+ax=0$ имеет два корня. Найдите эти корни.

Вариант 4

1. Решите уравнение.

а) $(x^2-12x+20)^2=(x^2+2x-12)^2$;

б) $\dfrac{4x-3}{3x-4}+\dfrac{3x-4}{4x-3}-2=0$;

в) $(x^2-25)\sqrt{x+3}=0$.

2. Решите неравенство.

а) $(x-1)(2x^2-3x+1)(x+5)\ge 0$;

б) $\sqrt{4-x}<x+8$.

3. Определите значения a, при которых уравнение $4x^3+4x^2+ax=0$ имеет два корня. Найдите эти корни.

Вариант 5

1. Решите уравнение.

а) $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$;

б) $\left(x-\dfrac{2x}{x+2}\right)^2=5-\dfrac{4x^2}{x+2}$;

в) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{4x-7}=1$.

2. Решите неравенство.

а) $x^2-3|x+1|+2x\le -1$;

б) $\dfrac{\sqrt{x+1}-x-1}{\sqrt{4x+25}-5}\ge 0$.

3. Докажите, что уравнение $(x^2+2x+2)(x^2-4x+5)=1$ не имеет корней.

Вариант 6

1. Решите уравнение.

а) $x^4+x^3-3x^2-5x-2=0$;

б) $\left(x+\dfrac{3x}{x-3}\right)^2=4-\dfrac{3x^2}{x-3}$;

в) $\sqrt{4x-11}-\sqrt{3x+1}=-1$.

2. Решите неравенство.

а) $x^2-5|x-5|-10x\le -25$;

б) $\dfrac{\sqrt{2x+1}-2x-1}{\sqrt{3x+4}-2}\ge 0$.

3. Докажите, что уравнение $(x^2-2x+3)(x^2-6x+10)=2$ не имеет корней.

Урок 40. Итоги контрольной работы

Цель: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Итоги контрольной работы

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: а) -1; ± 3; б) 3; 7; в) $\dfrac{19}{4}$.

2. *Ответ*: а) $\left[-3;\ -\dfrac{4}{3}\right]\cup[3;\ +\infty)$; б) $(-2;\ -1)\cup\left[\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$.

3. *Ответ*: $\left(-\dfrac{10}{3};\ \dfrac{10}{3}\right)$.

Вариант 2

1. *Ответ*: а) 1; $\pm\dfrac{1}{2}$; б) -2; -1; в) $-\dfrac{43}{9}$.

2. *Ответ*: а) $\left[-\infty; -\frac{9}{2}\right) \cup [-2; 2]$; б) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup (2; 3)$.

3. *Ответ*: $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Вариант 3

1. *Ответ*: а) $2; \frac{29}{15}; -14$; б) -1; в) $-2; 4$.

2. *Ответ*: а) $(-\infty; -4] \cup \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) $[-3; 1)$.

3. *Ответ*: при $a = 0$ $x = -6$ и $x = 0$; при $a = 9$ $x = -3$ и $x = 0$.

Вариант 4

1. *Ответ*: а) $1; 4; \frac{16}{7}$. б) -1; в) $-3; 5$.

2. *Ответ*: а) $(-\infty; -5] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$; б) $(-5; 4]$.

3. *Ответ*: при $a = 0$ $x = -1$ и $x = 0$; при $a = 1$ $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 0$.

Решения

Вариант 5

1(а) Подберем корень $x = 1$ уравнения $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$. Разделив многочлен на $x - 1$, получим кубическое уравнение $x^3 - 7x - 6 = 0$. Еще раз угадаем корень $x = -1$. Разделим этот многочлен на $x + 1$ и получим квадратное уравнение $x^2 - x - 6 = 0$, корни которого $x = -2$ и $x = 3$. Таким образом, данное уравнение имеет четыре корня: $1; -1; -2; 3$.

Ответ: $1; -1; -2; 3$.

1(б) В уравнении $\left(x - \frac{2x}{x+2}\right)^2 = 5 - \frac{4x^2}{x+2}$ выполним вычитание в скобках и получим: $\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2 = 5 - 4\frac{x^2}{x+2}$. Введем новую переменную $y = \frac{x^2}{x+2}$. Получим квадратное уравнение $y^2 = 5 - 4y$, или $y^2 + 4y - 5 = 0$, корни которого $y = 1$ и $y = -5$. Вернемся к старой переменой x.

а) Уравнение $\dfrac{x^2}{x+2}=1$, или $x^2-x-2=0$, имеет корни $x_1=-1$ и $x_2=2$.

б) Уравнение $\dfrac{x^2}{x+2}=-5$, или $x^2+5x+10=0$, корней не имеет.

Ответ: -1; 2.

1(в) В уравнении $\sqrt{3x+4}-\sqrt{4x-7}=1$ уединим первый радикал $\sqrt{3x+4}=\sqrt{4x-7}+1$. Возведем обе части уравнения в квадрат: $3x+4=4x-7+2\sqrt{4x-7}+1$, или $10-x=2\sqrt{4x-7}$. Вновь возведем в квадрат обе части уравнения: $100-20x+x^2=16x-28$, или $x^2-36x+128=0$. Корни этого квадратного уравнения $x=32$ и $x=4$. Проверка показывает, что корень $x=32$ посторонний. Итак, данное уравнение имеет единственное решение $x=4$.

Ответ: 4.

2(а) Для решения неравенства $x^2-3|x+1|+2x\le-1$ запишем его в виде $x^2+2x+1\le3|x+1|$, или $(x+1)^2\le3|x+1|$. Введем новую переменную $y=|x+1|$ и получим квадратное неравенство $y^2\le3y$, или $y^2-3y\le0$, решение которого $0\le y\le3$. Вернемся к старой переменной. Имеем неравенство $0\le|x+1|\le3$. Очевидно, что неравенство $0\le|x+1|$ выполнено при всех x. Неравенство $|x+1|\le3$ равносильно неравенству $-3\le x+1\le3$. Вычтем из всех частей 1 и найдем решение неравенства $-4\le x\le2$, или $x\in[-4;2]$.

Ответ: $x\in[-4;2]$.

2(б) Проще всего решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x+1}-x-1}{\sqrt{4x+25}-5}\ge0$ методом интервалов. Найдем корни числителя: $\sqrt{x+1}-x-1=0$, или $\sqrt{x+1}=x+1$, или $x+1=(x+1)^2$, или $0=(x+1)x$, откуда $x=-1$ и $x=0$.

Также найдем корень знаменателя: $\sqrt{4x+25}-5=0$, или $\sqrt{4x+25}=5$, или $4x+25=25$, откуда $x=0$.

Отметим корни числителя и знаменателя на координатной оси (при этом $x=0$ – корень второй кратности) и учтем ОДЗ неравенства $x\ge-1$.

Определим знак дроби, например, при $x=100$: $\dfrac{\sqrt{100+1}-100-1}{\sqrt{400+25}-5}<0$.

Строим диаграмму знаков дроби. Выписываем ответ: $x=-1$.

Ответ: -1.

3. Рассмотрим уравнение $(x^2+2x+2)(x^2-4x+5)=1$. В множителях выделим полные квадраты: $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geq 1$ (равенство достигается при $x=-1$) и $x^2-4x+5=(x-2)^2+1\geq 1$ (равенство достигается при $x = 2$). Тогда произведение $(x^2+2x+2)(x^2-4x+5)>1$, учитывая, что равенства достигались при разных значениях x. Поэтому данное равенство не выполняется и уравнение не имеет корней.

Ответ: доказано.

Вариант 6

1(а) Подберем корень $x=-1$ уравнения $x^4+x^3-3x^2-5x-2=0$. Разделив многочлен на $x+1$, получим кубическое уравнение $x^3-3x-2=0$. Еще раз угадаем корень $x=2$. Разделим этот многочлен на $x-2$ и получим квадратное уравнение $x^2+2x+1=0$, или $(x+1)^2=0$, корни которого $x=-1$ и $x=-1$. Таким образом, данное уравнение имеет четыре корня: -1; -1; -1; 2.

Ответ: -1; -1; -1; 2.

1(б) В уравнении $\left(x+\dfrac{3x}{x-3}\right)^2=4-\dfrac{3x^2}{x-3}$ выполним сложение в скобках и получим: $\left(\dfrac{x^2}{x-3}\right)^2=4-\dfrac{3x^2}{x-3}$. Введем новую переменную $y=\dfrac{x^2}{x-3}$. Получаем квадратное уравнение $y^2=4-3y$, или $y^2+3y-4=0$, корни которого $y=-4$ и $y=1$. Вернемся к старой переменой x.

а) Уравнение $\dfrac{x^2}{x-3}=-4$, или $x^2+4x-12=0$, имеет корни $x_1=-6$ и $x_2=2$.

б) Уравнение $\dfrac{x^2}{x-3}=1$, или $x^2-x+3=0$, корней не имеет.

Ответ: -6; 2.

1(в) В уравнении $\sqrt{4x-11}-\sqrt{3x+1}=-1$ уединим первый радикал $\sqrt{4x-11}=\sqrt{3x+1}-1$. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$4x-11=3x+1-2\sqrt{3x+1}+1$, или $2\sqrt{3x+1}=13-x$. Вновь возведем в квадрат обе части уравнения: $12x + 4 = 169 - 26x + x^2$, или $0 = x^2 - 38x + 165$. Корни этого квадратного уравнения $x = 33$ и $x = 5$. Проверка показывает, что корень $x = 33$ посторонний. Итак, данное уравнение имеет единственное решение $x = 5$.

Ответ: 5.

2(а) Для решения неравенства $x^2-5|x-5|-10x\le-25$ запишем его в виде: $x^2-10x+25\le5|x-5|$ или $(x-5)^2\le5|x-5|$. Введем новую переменную $y = |x - 5|$ и получим квадратное неравенство $y^2 \le 5y$, или $y^2 - 5y \le 0$, решение которого $0 \le y \le 5$. Вернемся к старой переменной. Имеем неравенство $0 \le |x - 5| \le 5$. Очевидно, что неравенство $0 \le |x - 5|$ выполнено при всех x. Неравенство $|x - 5| \le 5$ равносильно неравенству $-5 \le x - 5 \le 5$. Прибавим ко всем частям 5 и найдем решение неравенства $0 \le x \le 10$, или $x \in [0; 10]$.

Ответ: $x \in [0; 10]$.

2(б) Проще всего решить неравенство $\dfrac{\sqrt{2x+1}-2x-1}{\sqrt{3x+4}-2}\ge0$ методом интервалов. Найдем корни числителя: $\sqrt{2x+1}-2x-1=0$, или $\sqrt{2x+1}=2x+1$, или $2x + 1 = (2x + 1)^2$, или $0 = 2x(2x + 1)x$, откуда $x=0$ и $x=-\dfrac{1}{2}$.

Также найдем корень знаменателя: $\sqrt{3x+4}-2=0$, или $\sqrt{3x+4}=2$, или $3x + 4 = 4$, откуда $x = 0$.

Отметим корни числителя и знаменателя на координатной оси (при этом $x = 0$ – корень второй кратности) и учтем ОДЗ неравенства $x\ge-\dfrac{1}{2}$.

Определим знак дроби, например, при $x = 100$: $\dfrac{\sqrt{200+1}-200-1}{\sqrt{300+4}-2}<0$.

Строим диаграмму знаков дроби. Выписываем ответ: $x=-\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$.

3. Рассмотрим уравнение $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 6x + 10) = 2$. В множителях выделим полные квадраты: $x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2 \geq 2$ (равенство достигается при $x = 1$) и $x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 \geq 1$ (равенство достигается при $x = 3$). Тогда произведение $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 6x + 10) > 2$, учитывая, что равенства достигались при разных значениях x. Поэтому данное равенство не выполняется и уравнение не имеет корней.

Ответ: доказано.

Уроки 41–42. Зачетная работа по теме «Уравнения и неравенства с одной переменной»

Цель: проверка знаний учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Решите уравнение.

а) $\dfrac{(2x+3)(x^2-7x+12)}{x-3} = 0$;

б) $\dfrac{6x+5}{x-2} = \dfrac{x-5}{3x+2}$;

в) $\sqrt{\dfrac{2x+5}{x-1}} = 3$.

2. Решите неравенство.

а) $5x^3 + 3x^2 - 8x \geq 0$;

б) $\dfrac{7x+3}{2x-5} \leq 2$;

в) $\sqrt{5x - x^2} > -3$.

3. Найдите область определения функции $y=\sqrt{3-2x-x^2}-\dfrac{2x+5}{x+2}$.

В

4. Решите уравнение.

а) $|x^2+11x+28|=|x^2-14|$;

б) $\dfrac{\sqrt{16x+25}-4x-7}{\sqrt{x+2}-1}=0.$

5. Решите неравенство $\dfrac{x+3}{x+5}\sqrt{28-9x-4x^2}\geq 0.$

6. При каких значениях параметра a один корень уравнения $x^2-6x+2a-3=0$ больше 2, а другой – меньше (-1)?

С

7. Решите уравнение $(x^2+4x+3)^2+(x^2-2x-15)^2=36(x+3)^2$.

8. Решите неравенство $(x^2-2x+9)(y^2+4y+7)\leq 24.$

9. Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y, для которых выполнено неравенство $\dfrac{1}{2(x+5)^2}+\dfrac{2}{5(y-3)^2}\geq 0{,}9.$

Вариант 2

А

1. Решите уравнение.

а) $\dfrac{(3x+2)(x^2+6x+8)}{x+4}=0;$

б) $\dfrac{5x+4}{x-2}=\dfrac{x-4}{3x+2};$

в) $\sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}}=2.$

2. Решите неравенство.

а) $3x^3+2x^2-5x\leq 0;$

б) $\dfrac{5x-2}{3x+1}\geq 1;$

в) $\sqrt{3x-x^2}>-7.$

3. Найдите область определения функции $y=\sqrt{5-4x-x^2}+\dfrac{3x-4}{x+1}$.

B

4. Решите уравнение.

а) $\left|x^2-11x+24\right|=\left|x^2-12\right|$;

б) $\dfrac{\sqrt{22x-13}-5x+2}{\sqrt{x+24}-5}=0.$

5. Решите неравенство $\dfrac{x+4}{x+8}\sqrt{-35-19x-2x^2}\geq 0.$

6. При каких значениях параметра a один корень уравнения $x^2-4x+3a+7=0$ больше 1, а другой – меньше (-2)?

C

7. Решите уравнение $(x^2+x-20)^2+(x^2+8x+15)^2=25(x+5)^2.$

8. Решите неравенство $(x^2-4x+7)(y^2+2y+10)\leq 27.$

9. Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y, для которых выполнено неравенство $\dfrac{3}{5(x+2)^2}+\dfrac{1}{2(y-4)^2}\geq 1{,}1.$

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. *Ответ*: а) $-1{,}5$; 4; б) 0; -2; в) 2.

2. *Ответ*: а) $\left[-\dfrac{8}{5};\ 0\right]\cup[1;\ +\infty)$; б) $\left[-\dfrac{13}{3};\ \dfrac{5}{2}\right)$; в) $[0;\ 5]$.

3. *Ответ*: $[-3;\ -2)\cup(-2;\ 1]$.

4. *Ответ*: а) -2; $-\dfrac{7}{2}$; $-\dfrac{42}{11}$; б) $-1{,}5$.

5. *Ответ*: $\{-4\}\cup\left[-3;\ \dfrac{7}{4}\right]$.

6. *Ответ*: $(-\infty;\ -2)$.

7. Для решения уравнения $(x^2+4x+3)^2+(x^2-2x-15)^2=36(x+3)^2$ разложим квадратные трехчлены на множители и запишем уравнение в виде $(x+1)^2(x+3)^2+(x-5)^2(x+3)^2=36(x+3)^2$. Очевидно, что корень такого уравнения $x=-3$. Найдем остальные корни. Поделим все члены уравнения на $(x+3)^2$ и получим квадратное уравнение $(x+1)^2+(x-5)^2=36$, или $x^2-4x-5=0$. Его корни: $x=-1$ и $x=5$.

Ответ: -3; -1; 5.

8. В данном неравенстве оценим каждый множитель: $x^2 - 2x + 9 = (x-1)^2 + 8 \geq 8$ (равенство достигается при $x = 1$) и $y^2 + 4y + 7 = (y+2)^2 + 3 \geq 3$ (равенство достигается при $y = -2$). Поэтому произведение $(x^2 - 2x + 9)(y^2 + 4y + 7) \geq 24$. Следовательно, неравенство $(x^2 - 2x + 9)(y^2 + 4y + 7) \leq 24$ выполняется только при $x = 1$ и $y = -2$. При этом неравенство становится равенством.

Ответ: $x = 1, y = -2$.

9. Для целых чисел x и y рассмотрим слагаемые в неравенстве $\dfrac{1}{2(x+5)^2} + \dfrac{2}{5(y-3)^2} \geq 0,9$. Для таких x и y справедливы оценки: $\dfrac{1}{2(x+5)^2} \leq \dfrac{1}{2} = 0,5$ (равенство достигается при $x = -4$ и $x = -6$) и $\dfrac{2}{5(y-3)^2} \leq \dfrac{2}{5} = 0,4$ (равенство достигается при $y = 4$ и $y = 2$). Сложив эти неравенства одного знака, получим: $\dfrac{1}{2(x+5)^2} + \dfrac{2}{5(y-3)^2} \leq 0,9$. Поэтому данное неравенство выполняется только при $x = -4$ и $y = 4$, $x = -4$ и $y = 2$, $x = -6$ и $y = 4$, $x = -6$ и $y = 2$.

Ответ: $x = -4, y = 4$; $x = -4, y = 2$; $x = -6, y = 4$; $x = -6, y = 2$.

Вариант 2

1. *Ответ*: а) $-\dfrac{2}{3}; -2$; б) $0; -2$; в) -6.

2. *Ответ*: а) $\left(-\infty; -\dfrac{5}{3}\right] \cup [0; 1]$; б) $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left[\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$; в) $[0; 3]$.

3. *Ответ*: $[-5; -1) \cup (-1; 1]$.

4. *Ответ*: а) $4; \dfrac{3}{2}; \dfrac{36}{11}$; б) $\dfrac{17}{25}$.

5. *Ответ*: $\{-7\} \cup [-4; -2,5]$.

6. *Ответ*: $\left(-\infty; -\dfrac{5}{3}\right)$.

7. Для решения уравнения $(x^2 + x - 20)^2 + (x^2 + 8x + 15)^2 = 25(x+5)^2$ разложим квадратные трехчлены на множители и запишем уравнение в виде $(x-4)^2(x+5)^2 + (x+3)^2(x+5)^2 = 25(x+5)^2$. Очевидно, что корень такого уравнения $x = -5$. Найдем остальные корни. По-

делим все члены уравнения на $(x+5)^2$ и получим квадратное уравнение $(x-4)^2+(x+3)^2=25$, или $x^2-x=0$. Его корни: $x=0$ и $x=1$.

Ответ: -5; 0; 1.

8. В данном неравенстве оценим каждый множитель: $x^2-4x+7=$ $=(x-2)^2+3\geq 3$ (равенство достигается при $x=2$) и $y^2+2y+10=$ $=(y+1)^2+9\geq 9$ (равенство достигается при $y=-1$). Поэтому произведение $(x^2-4x+7)(y^2+2y+10)\geq 27$. Следовательно, неравенство $(x^2-4x+7)(y^2+2y+10)\leq 27$ выполняется только при $x=2$ и $y=-1$. При этом неравенство становится равенством.

Ответ: $x=2, y=-1$.

9. Для целых чисел x и y рассмотрим слагаемые в неравенстве $\frac{3}{5(x+2)^2}+\frac{1}{2(y-4)^2}\geq 1{,}1$. Для таких x и y справедливы оценки: $\frac{3}{5(x+2)^2}\leq\frac{3}{5}=0{,}6$ (равенство достигается при $x=-3$ и $x=-1$) и $\frac{1}{2(y-4)^2}\leq\frac{1}{2}=0{,}5$ (равенство достигается при $y=3$ и $y=5$). Сложив эти неравенства одного знака, получим: $\frac{3}{5(x+2)^2}+\frac{1}{2(y-4)^2}\leq 1{,}1$. Поэтому данное неравенство выполняется только при $x=-3$ и $y=3$, $x=-3$ и $y=5$, $x=-1$ и $y=3$, $x=-1$ и $y=5$.

Ответ: $x=-3, y=3$; $x=-3, y=5$; $x=-1, y=3$; $x=-1, y=5$.

Глава III. Уравнения и неравенства с двумя переменными

§ 7. Уравнения с двумя переменными и их системы

Уроки 43–44. Уравнение с двумя переменными и его график

Цель: ввести основные понятия и термины темы.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Равенство, содержащее две переменные, называют *уравнением с двумя переменными* (или неизвестными). *Решением уравнения с двумя переменными* называют пару значений неизвестных, которые обращают это уравнение в верное равенство. Уравнение с двумя переменными может иметь: бесконечное множество решений или ограниченное число решений, а также не иметь решений.

Пример 1

Рассмотрим следующие уравнения с двумя переменными:

а) Уравнение $3x + 7y = 10$ (уравнение прямой) имеет бесконечное множество решений.

б) Уравнение $|x - 1| + y^2 = 0$ имеет единственное решение: $x = 1$, $y = 0$.

в) Уравнение $(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 4)^2 = 0$ имеет четыре решения: $x = 1$, $y = 2$; $x = 1$, $y = -2$; $x = -1$, $y = 2$; $x = -1$, $y = -2$.

г) Уравнение $|x - 1| + (y - 2)^2 = -5$ не имеет решений.

Два уравнения, имеющие *одно и то же множество решений*, называют *равносильными*.

Пример 2

а) Уравнения $|x| + (y - 1)^2 = 0$ и $x^2 + |y - 1| = 0$ равносильны, т. к. имеют одно и то же решение: $x = 0$ и $y = 1$.

б) Уравнение $|x| + (y - 1)^2 = 0$ и $x^2 + |y^2 - 1| = 0$ неравносильны, т. к. первое имеет одно решение: $x = 0$, $y = 1$, а второе – два решения: $x = 0$, $y = 1$ и $x = 0$, $y = -1$.

Степень целого уравнения с двумя переменными определяется так же, как и степень целого уравнения с одной переменной. Если одна часть уравнения представляет собой многочлен стандартного вида, а другая – число 0, то степень уравнения считают равной степени этого многочлена. Для определения степени уравнения его заменяют равносильным, одна часть которого – многочлен стандартного вида, а другая – нуль.

Пример 3

Уравнение $(x^3 + 2y^2)^2 = x^6 - 2x^2y$ равносильно уравнению $x^6 + 4x^3y^2 + 4y^4 = x^6 - 2x^2y$ и равносильно уравнению $2x^3y^2 + 2y^4 + x^2y = 0$. Поэтому данное уравнение является уравнением пятой степени.

Графиком уравнения с двумя переменными называют множество точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.

Пример 4

а) Графиком уравнения $ax + by = c$ (где $a \neq 0$ или $b \neq 0$) является прямая.

б) Графиком уравнения $y = ax^2 + bx + c$ (где $a \neq 0$) является парабола.

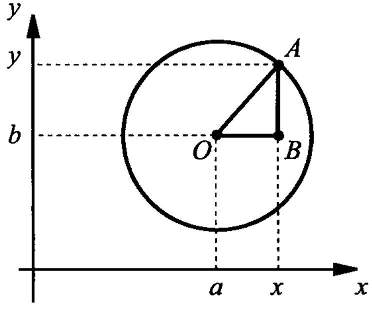
в) Графиком уравнения $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (где $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$) является гипербола.

Рассмотрим еще одно *важнейшее* и *часто встречающееся* уравнение – уравнение окружности с центром в точке $(a;\ b)$ и радиусом R: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

Пример 5

Выведем уравнение окружности.

Рассмотрим окружность с центром в точке $O(a;\ b)$ и радиусом R. Выберем произвольную точку $A(x;\ y)$ на окружности. Проведем отрезки OB и AB параллельно оси абсцисс и оси ординат соответственно.



Рассмотрим прямоугольный треугольник OAB, в котором катеты $OB = |x - a|$ и $AB = |y - b|$ и гипотенуза $OA = R$. Запишем для этого треугольника теорему Пифагора:

$OB^2 = AB^2 = OA^2$, или $|x - a|^2 + |y - b|^2 = R^2$, или $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

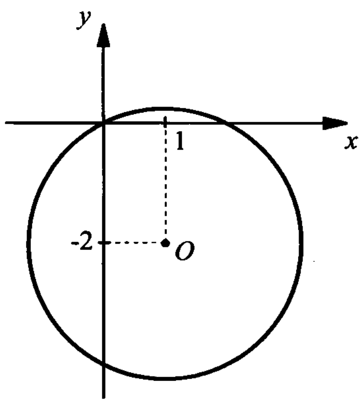
Это и есть уравнение окружности. В частности, уравнение окружности *с центром в начале координат* имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

Пример 6

Построим график уравнения $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$.

Так как в уравнение переменные x и y входят во второй степени (и ниже), то это уравнение окружности. Выделим в уравнении полные квадраты по переменным x и y. Для этого запишем уравнение в виде $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 5$ или $(x-1)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{5})^2$.

Видно, что это уравнение окружности с центром в точке $O(1; -2)$ и радиусом $R = \sqrt{5} \approx 2,2$. Теперь легко построить и сам график.

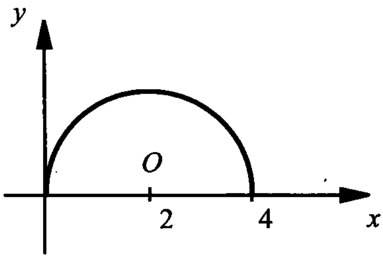


Пример 7

Построим график уравнения $y = \sqrt{4x - x^2}$.

Прежде всего отметим, что $y \geq 0$. Возведем обе части уравнения в квадрат: $y^2 = 4x - x^2$, или $y^2 - x^2 - 4x = 0$. Выделим квадрат разности по переменной x: $y^2 + (x^2 - 4x + 4) = 4$, или $(x - 2)^2 + y^2 = 2^2$. Получили уравнение окружности с центром в точке $O(2; 0)$ и радиусом $R = 2$.

Учитывая ограничение $y \geq 0$, имеем верхнюю полуокружность. Теперь можно строить график.



Заметим, что графики уравнений с двумя переменными могут иметь самый разнообразный и даже необычный вид.

III. Контрольные вопросы

1. Определение уравнения с двумя переменными.
2. Что называют решением уравнения с двумя переменными?
3. Какие уравнения называют равносильными?
4. Как определить степень целого уравнения с двумя переменными?
5. Уравнение окружности с центром в точке $O(a;\ b)$ и радиусом R.

IV. Задание на уроке

№ 395 (а, г); 396 (а, в); 397 (г); 399 (а, д, ж); 402 (а, г); 404 (б); 405 (а); 408; 410; 411 (а).

V. Задание на дом

№ 395 (б, в); 396 (б, г); 397 (в); 399 (б, е, з); 402 (б, в); 404 (а); 405 (в); 406; 409; 411 (б).

VI. Творческие задания

Постройте график уравнения.

1) $x^2+4x=6y-y^2$;
2) $x^2+y^2+1=2x+4y$;
3) $y=\sqrt{4x-x^2}$;
4) $y=\sqrt{-6x-x^2}$;
5) $y+1=\sqrt{4x-x^2}$;
6) $y=\sqrt{6x-x^2}+2$;
7) $|y-1|=\sqrt{4x-x^2}$.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 45–46. Графический способ решения систем уравнений

Цель: использовать графики для решения систем уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Определение решения уравнения с двумя переменными.
2. Постройте график уравнения.

а) $(xy-1)(x+1)=0$;

б) $(x-2)^2+(y+1)^2=4$;

в) $y-1=\sqrt{4x-x^2}$.

Вариант 2

1. Определение уравнения с двумя переменными.
2. Постройте график уравнения.

а) $(xy+1)(y-1)=0$;

б) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$;

в) $y+1=\sqrt{6x-x^2}$.

III. Изучение нового материала

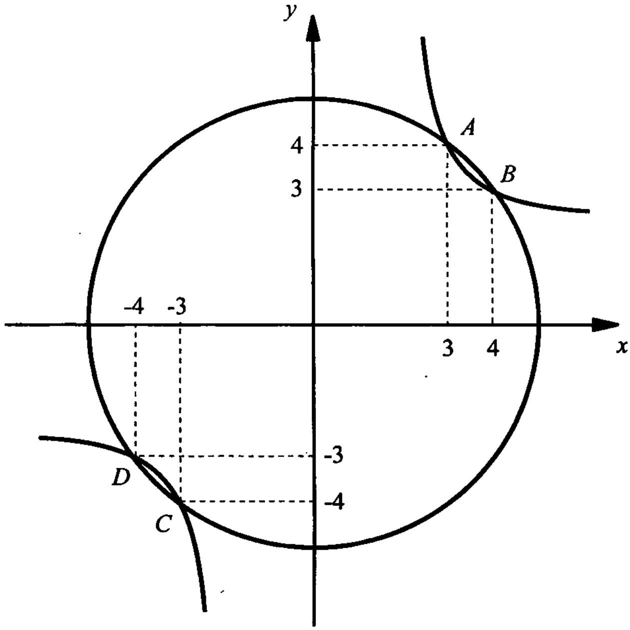
Рассмотрим *систему двух уравнений с двумя неизвестными. Решением* системы уравнений называют *пару значений переменных*, которые обращают *каждое уравнение системы в верное равенство.* Решить систему уравнений означает, найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Одним из эффективных и наглядных способов решения и исследования уравнений и систем уравнений является *графический способ.*

Пример 1

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12. \end{cases}$

Построим в одной системе координат графики первого $x^2 + y^2 = 25$ (окружность) и второго $xy = 12$ (гипербола) уравнений. Видно, что графики уравнений пересекаются в четырех точках $A(3;\ 4)$, $B(4;\ 3)$, $C(-3;\ -4)$ и $D(-4;\ 3)$, координаты которых являются решениями одной системы.

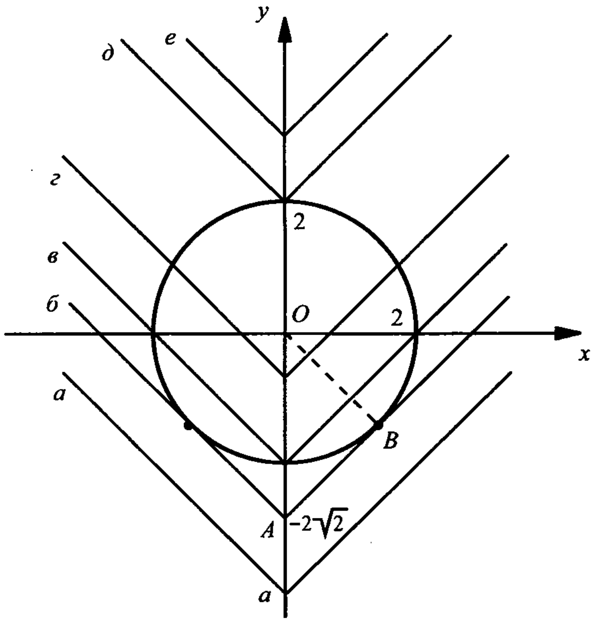


Так как при графическом способе решения могут быть найдены с некоторой точностью, то их необходимо проверить подстановкой. Проверка показывает, что система действительно имеет четыре решения: (3; 4), (4; 3), (−3; −4), (−4; −3).

Пример 2

При всех значениях параметра a определим число решений системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = |x| + a. \end{cases}$

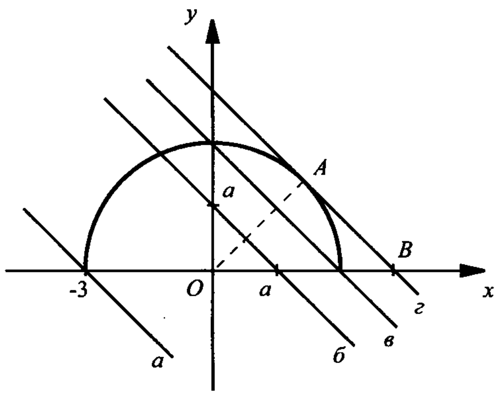
Построим график первого уравнения $x^2 + y^2 = 2^2$ (окружность) и второго уравнения $y = |x| + a$ для различных значений параметра a. Этот график пересекает ось ординат в точке $y = a$. Из прямоугольного равнобедренного треугольника OAB найдем гипотенузу $OA = 2\sqrt{2}$. Тогда сразу получаем ответ задачи: при $a \in (-\infty;\ -2\sqrt{2}) \cup (2;\ +\infty)$ система не имеет решений (графики a, e), при $a \in \{-2\sqrt{2}\} \cup (-2;\ 2)$ система имеет два решения (графики *б*, *г*), при $a = -2$ – три решения (график *в*) и при $a = 2$ – одно решение (график *д*).



Пример 3

При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} y = \sqrt{9 - x^2}, \\ y = a - x \end{cases}$ имеет единственное решение?

Построим график первого уравнения $y = \sqrt{9 - x^2}$ (верхняя полуокружность, т. к. $y \geq 0$). Также в этой системе координат строим график второго уравнения $y = a - x$ для различных значений параметра a (прямая). Эта прямая пересекает оси координат в точках $x = a$ и $y = a$. Очевидно, что система уравнений имеет единственное решение, если прямая $y = a - x$ находится между положениями a и b, а также в случае касания $г$. Для этого случая из прямоугольного равнобедренного треугольника OAB найдем гипотенузу $OB = 3\sqrt{2}$ (соответственно $a = 3\sqrt{2}$). Следовательно, при $a \in [-3;\ 3) \cup \{3\sqrt{2}\}$ система уравнений имеет единственное решение.



IV. Задание на уроке

№ 415 (б); 416; 419 (а); 420 (б); 421 (а, б); 422 (а); 424 (б); 426.

V. Задание на дом

№ 415 (б); 417; 418; 419 (б); 420 (а); 421 (б, г); 422 (б); 424 (а); 425; 427.

VI. Творческие задания

1. Найдите значения параметра a, при которых система уравнений имеет ровно два решения.

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ |x| + y = a; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ xy = a - \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Ответы: а) $(-1; 1) \cup \{\sqrt{2}\}$; б) $\dfrac{1}{4}$.

2. Найдите значения параметра a, при которых система уравнений имеет ровно три решения.

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ y = |x - a|; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |y| - x = a. \end{cases}$

Ответы: а) $-1+\sqrt{2}$; $1-\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}$.

3. Для каждого значения параметра a определите число решений системы уравнений.

а) $\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=a. \end{cases}$

Ответы: а) при $a \in (-\infty;\ 1) \cup (\sqrt{2};\ +\infty)$ – нет решений, при $a \in \{1;\ \sqrt{2}\}$ – четыре решения, при $a \in (1;\ \sqrt{2})$ – восемь решений;

б) при $|a| \in \left[0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1;\ \infty)$ – нет решений, при $|a| \in \left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right\}$ – четыре решения, при $|a| \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right)$ – восемь решений.

VII. Подведение итогов урока

Урок 47. Решение систем уравнений второй степени

Цель: рассмотреть способ подстановки для решения систем уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Графически решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=4, \\ y=x^2-2. \end{cases}$

2. Для каждого значения параметра a найдите число решений системы уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y+|x|=a. \end{cases}$

Вариант 2

1. Графически решите систему уравнений $\begin{cases} y = 2x - 2, \\ y = x^2 + 1. \end{cases}$

2. Для каждого значения параметра a найдите число решений системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = |x| + a. \end{cases}$

III. Изучение нового материала

Рассмотрим теперь аналитическое решение систем уравнений с двумя переменными. Наиболее распространенный способ решения систем – *способ подстановки*. Для этого необходимо:

1) выразить из более простого уравнения одну переменную через другую;

2) подставить это выражение в другое уравнение и получить уравнение с одной неизвестной;

3) решить полученное уравнение с одной переменной;

4) найти соответствующие значения второй неизвестной.

Пример 1

Решим систему уравнений $\begin{cases} 3y^2 - 2x^2 + xy + 5x + y = 8, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$

Второе уравнение системы является *линейным* (первой степени) и, соответственно, более простым. Выразим из него переменную y через переменную x: $y = 2x - 3$. Подставим это выражение в первое уравнение и получим уравнение с переменной x: $3(2x - 3)^2 - 2x^2 + x(2x - 3) + 5x + (2x - 3) = 8$, или (после преобразований) $3x^2 - 8x + 4 = 0$. Корни этого квадратного уравнения: $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{2}{3}$. Используя формулу $y = 2x - 3$, найдем соответствующие значения переменной y: $y_1 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$ и $y_2 = 2 \cdot \frac{2}{3} - 3 = -\frac{5}{3}$.

Итак, система имеет два решения: (2; 1) и $\left(\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

Во многих случаях *оба уравнения* системы являются *нелинейными*. Иногда *способ подстановки* пригоден и для таких систем.

Пример 2

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2+5xy-2y^2=-2, \\ xy=3. \end{cases}$

Очевидно, что $x \neq 0$. Из второго уравнения выразим переменную y через x: $y=\dfrac{3}{x}$ и подставим в первое. Получаем уравнение $x^2+5\cdot3-2\cdot\left(\dfrac{3}{x}\right)^2=-2$, или (после преобразований) $x^4+17x^2-18=0$. Корни этого биквадратного уравнения: $x_1=1$ и $x_2=-1$. По формуле $y=\dfrac{3}{x}$ найдем соответствующие значения y: $y_1=\dfrac{3}{1}=3$ и $y_2=\dfrac{3}{-1}=-3$. Итак, система уравнений имеет два решения: $(1; 3)$ и $(-1; -3)$.

Способ подстановки полезен и при решении систем уравнений с параметрами.

Пример 3

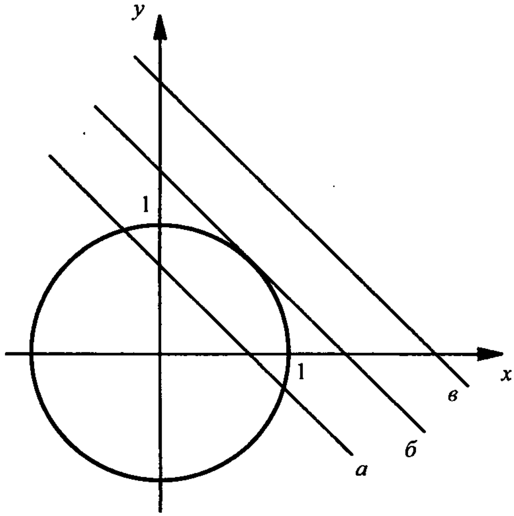
При всех значениях параметра a определите число решений системы уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=a. \end{cases}$

Из второго уравнения выразим переменную y через x: $y=a+x$. Подставим это выражение в первое уравнение и получим: $x^2+(a-x)^2=1$, или $2x^2-2ax+a^2-1=0$. Дискриминант этого квадратного уравнения $D=4(2-a^2)$. Число решений уравнения (а следовательно, и системы уравнений) определяется знаком дискриминанта.

Если $D>0$, или $a\in(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, система имеет два решения (пересечение прямой и окружности – случай *а*).

Если $D=0$, или $a\in\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$, система имеет одно решение (касание прямой и окружности – случай *б*).

Если $D<0$, или $a\in(-\infty; -\sqrt{2})\cup(\sqrt{2}; +\infty)$, система не имеет решений (прямая не пересекает окружность – случай *в*).



Заметим, что в ряде случаев при решении используют *способ сложения* (как частный случай способа подстановки).

Пример 4

Решим систему уравнений $\begin{cases} 3(x+1)^2 - 2(y+3)^3 = 10, \\ 5(x+1)^2 + 2(y+3)^3 = 22. \end{cases}$

Сложим уравнения системы и получим: $8(x + 1)^2 = 32$, или $(x + 1)^2 = 4$, откуда $x + 1 = \pm 2$ и $x_1 = 1$ и $x_2 = -3$. Подставим выражение $(x + 1)^2 = 4$, например, в первое уравнение системы. Получим: $3 \cdot 4 - 2(y + 3)^3 = 10$, откуда $(y + 3)^3 = 1$, или $y + 3 = 1$ и $y = -2$.

Итак, система уравнений имеет два решения: (1; −2) и (−3; −2).

Остальные способы решения систем уравнений будут рассмотрены в конце главы.

IV. Задание на уроке

№ 429 (а); 431 (а, в); 433 (а, б, в); 435 (а); 436 (б); 437 (а); 440 (б); 441 (а); 443 (а, б); 444 (а); 445; 448 (а); 449 (б).

V. Задание на дом

№ 429 (б); 431 (б, г); 433 (г, д, е); 435 (б); 436 (а); 437 (б); 440 (а); 441 (б); 443 (в, г); 444 (б); 446; 448 (в); 449 (а).

VI. Подведение итогов урока

Уроки 48–49. Решение задач с помощью систем уравнений второй степени

Цель: использовать системы уравнений для решения текстовых задач.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Способом подстановки решите систему уравнений.

$$\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x^2+3xy-5y^2+7x+4y=3. \end{cases}$$

Ответы: а) (1; 2); б) (1; 2), (32; −13,5); в) (1; 2), $\left(32\frac{1}{3}; -13\frac{2}{3}\right)$; г) (1; 2), (23; −9).

2. Способом сложения решите систему уравнений.

$$\begin{cases} 3(x-2)^2+7(y+3)^3=5, \\ 2(x-2)^2-7(y+3)^3=15. \end{cases}$$

Ответы: а) (0; −4), (4; −4); б) (4; −4); в) (2; −4); г) (4; −6).

Вариант 2

1. Способом подстановки решите систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x+y=3, \\ 3x^2+4xy+7y^2+x+8y=5. \end{cases}$$

Ответы: а) (2; −1); б) (2; −1), $\left(\frac{41}{23}; -\frac{13}{23}\right)$; в) (2; −1), (34; −65); г) (2; −1), (18; −33).

2. Способом сложения решите систему уравнений.

$$\begin{cases} 7(x+2)^3+2(y+1)^2=1, \\ 3(x+2)^3-2(y+1)^2=-11. \end{cases}$$

Ответы: а) (−3; 1); б) (−3; 2); в) (−3; −3); г) (−3; 1), (−3; −3).

III. Изучение нового материала

Системы уравнений с двумя неизвестными часто используются при решении текстовых задач.

Пример 1

Произведение двух чисел равно 168, а сумма их квадратов равна 340. Найдите эти числа.

Пусть одно из чисел x, другое y. Запишем условия задачи и получим систему уравнений $\begin{cases} xy = 168, \\ x^2 + y^2 = 340. \end{cases}$

Решим эту систему двумя способами.

1-й способ – способ подстановки.

Из первого уравнения выразим $y = \dfrac{168}{x}$ и подставим во второе уравнение.

Получим: $x^2 + \left(\dfrac{168}{x}\right)^2 = 340$, или $x^4 - 340x^2 + 28\,224 = 0$.

Корни этого биквадратного уравнения: $x_{1,2} = \pm 12$ и $x_{3,4} = \pm 14$.

По формуле $y = \dfrac{168}{x}$ найдем соответствующие значения y: $y_{1,2} = \pm 14$ и $y_{3,4} = \pm 12$.

Итак, задача имеет четыре решения: (12; 14), (–12; –14), (14; 12), (–14; –12).

2-й способ – способ сложения.

Умножим первое уравнение на 2 и запишем систему уравнений в виде $\begin{cases} x^2 + y^2 = 340, \\ 2xy = 336. \end{cases}$ Сложим и вычтем уравнения системы. Получим: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 676, \\ x^2 + y^2 - 2xy = 4, \end{cases}$ или $\begin{cases} (x + y)^2 = 676, \\ (x - y)^2 = 4, \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = \pm 26, \\ x - y = \pm 2. \end{cases}$

Таким образом, данная система сводится к четырем системам линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 26, \\ x - y = -2 \end{cases}$ – решение (12; 14);

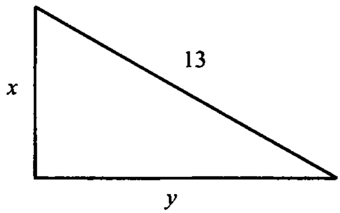
б) $\begin{cases} x+y=-26, \\ x-y=2 \end{cases}$ – решение $(-12; -14)$;

в) $\begin{cases} x+y=26, \\ x-y=2 \end{cases}$ – решение $(14; 12)$;

г) $\begin{cases} x+y=-26, \\ x-y=-2 \end{cases}$ – решение $(-14; -12)$.

Пример 2

Периметр прямоугольного треугольника равен 30 см, а его гипотенуза равна 13 см. Найдите стороны треугольника.



Пусть катеты треугольника равны x см и y см. Используя теорему Пифагора, запишем условия задачи:

$$\begin{cases} x+y+13=30, \\ x^2+y^2=13^2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y=17, \\ x^2+y^2=169. \end{cases}$$

Решим эту систему способом подстановки. Из первого уравнения выразим $y = 17 - x$ и подставим во второе уравнение. Получим квадратное уравнение $x^2 + (17 - x)^2 = 169$, или $x^2 - 17x + 60 = 0$, корни которого: $x_1 = 5$ и $x_2 = 12$. По формуле $y = 17 - x$ найдем соответствующие значения y: $y_1 = 12$ и $y_2 = 5$.

Итак, длины катетов равны 5 и 12 см.

IV. Задание на уроке

№ 455; 457; 460; 461; 463; 467; 469; 476.

V. Задание на дом

№ 456; 458; 459; 462; 464; 468; 470; 473; 477.

VI. Подведение итогов урока

§ 8. Неравенства с двумя переменными и их системы

Уроки 50–51. Графическое решение неравенства с двумя переменными

Цель: рассмотреть графики неравенств с двумя переменными.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Сумма двух чисел равна 30, а их произведение равно 216. Найдите эти числа.

2. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 20 см, а его периметр равен 48 см. Найдите катеты треугольника.

Вариант 2

1. Сумма двух чисел равна 40, а их произведение равно 364. Найдите эти числа.

2. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, а его периметр равен 60 см. Найдите катеты треугольника.

III. Изучение нового материала

Часто приходится изображать на координатной плоскости *множество решений неравенства с двумя переменными*. Напомним, что решением неравенства с двумя переменными называют пару значений этих переменных, которая обращает данное неравенство в верное числовое неравенство.

Пример 1

Рассмотрим неравенство $3x^2 - \frac{1}{y} \le 8$.

Пара значений переменных $(-1; 1)$ обращает это неравенство в верное числовое неравенство $3\cdot(-1)^2 - \frac{1}{1} \le 8$, или $2 \le 8$, и является решением неравенства. Пара значений $(2; 1)$ приводит к неверному числовому неравенству $3 \cdot 2^2 - \frac{1}{1} \le 8$, или $11 \le 8$, и не является решением данного неравенства.

На примерах рассмотрим, как изображается множество решений неравенства с двумя переменными на координатной плоскости.

Пример 2

Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства $2y + 3x \le 6$.

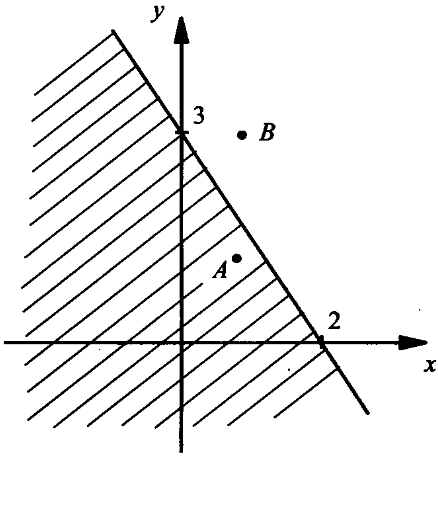
Сначала построим прямую $2y + 3x = 6$, или $y = 3 - \frac{3}{2}x$. Она разбивает множество всех точек координатной плоскости на точки, расположенные выше ее, и точки, расположенные ниже ее. Возьмем из каждой области по *контрольной точке*, например $A(1; 1)$ и $B(1; 3)$.

Координаты точки A удовлетворяют данному неравенству $2y + 3x \le 6$, т. е. $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \le 6$.

Координаты точки B не удовлетворяют данному неравенству $2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \le 6$.

Так как данное неравенство может изменить знак на прямой $2y + 3x = 6$, то неравенству удовлетворяет множество точек той области, где расположена точка A. Заштрихуем эту область.

Таким образом, мы изобразили множество решений неравенства $2y + 3x \le 6$.

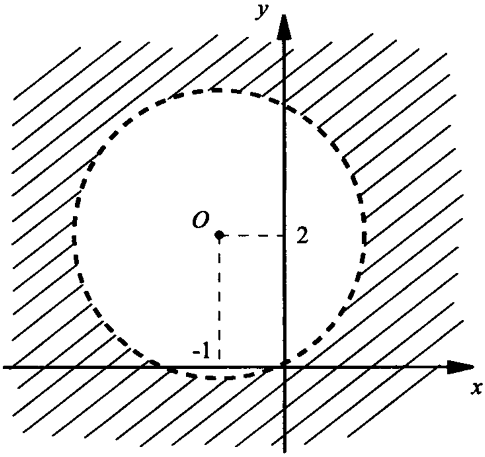


Пример 3

Изобразим множество решений неравенства $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1 > 0$ на координатной плоскости.

Построим сначала график уравнения $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$. Выделим в этом уравнении уравнение окружности: $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 4$, или $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$.

Это уравнение окружности с центром в точке $O(-1; 2)$ и радиусом $R = 2$. Построим эту окружности.



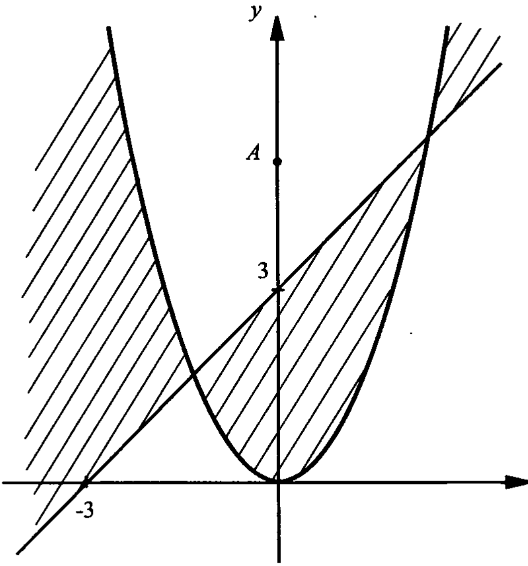
Так как данное неравенство строгое и точки, лежащие на самой окружности, неравенству не удовлетворяют, то строим окружность.

Легко проверить, что координаты центра O окружности данному неравенству не удовлетворяют. Выражение $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1$ меняет свой знак на построенной окружности. Тогда неравенству удовлетворяют точки, расположенные вне окружности. Эти точки заштрихованы.

Пример 4

Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства $(y - x^2)(y - x - 3) \leq 3$.

Сначала построим график уравнения $(y - x^2)(y - x - 3) = 0$. Им является парабола $y = x^2$ и прямая $y = x + 3$. Построим эти линии и отметим, что изменение знака выражения $(y - x^2)(y - x - 3)$ происходит только на этих линиях. Для точки $A(0; 5)$ определим знак этого выражения: $(5 - 0^2)(5 - 0 - 3) > 0$ (т. е. данное неравенство не выполняется). Теперь легко отметить множество точек, для которых данное неравенство выполнено (эти области заштрихованы).



Как видно из рассмотренных примеров, для построения множества решений неравенства с двумя переменными используется *метод интервалов* на координатной плоскости.

IV. Задание на уроке

№ 482 (а, б); 483 (б, в); 484 (г); 485 (а); 486 (в); 487 (а, в); 488 (б); 489 (а); 490 (б); 491 (а); 492 (б).

V. Задание на дом

№ 482 (в); 483 (а, г); 484 (в); 485 (б); 486 (г); 487 (б, г); 488 (а); 489 (б); 490 (а); 491 (б); 492 (а).

VI. Творческие задания

Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства.

1) $(x-1)(y+2) \le 0$;
2) $(2x+3)(3y-2) \ge 0$;
3) $(y-x^2)(y-2) > 0$;
4) $(y+x^2)(y+3) < 0$;
5) $(x^2-4)(y+1) \le 0$;
6) $(y^2-1)(x+2) \ge 0$;
7) $(x^2+y^2-4)(x+1) > 0$;
8) $(x^2+y^2-9)(y-2) < 0$;
9) $\dfrac{(x-1)^2+(y+2)^2-4}{x-1} \le 0$;
10) $\dfrac{(x+2)^2+(y-4)^2-9}{y-4} \ge 0$.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 52–53. Системы неравенств с двумя переменными

Цель: построение решения системы неравенств с двумя переменными на координатной плоскости.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Изобразите на координатной плоскости множество точек, задаваемых неравенством.

1) $x^2 + (y + 1)^2 \leq 4$;
2) $xy \geq 4$;
3) $|x - y - 1| < 2$.

Вариант 2

Изобразите на координатной плоскости множество точек, задаваемых неравенством.

1) $(x - 1)^2 + y^2 \geq 4$;
2) $xy \leq 8$;
3) $|y + x + 2| > 1$.

III. Изучение нового материала

В ряде случаев на координатной плоскости приходится изображать *множество решений системы неравенств с двумя переменными.* Напомним, что пара значений неизвестных, которая одновременно является решением и первого и второго неравенства, называется решением системы двух неравенств с двумя переменными.

Пример 1

Рассмотрим систему неравенств с двумя переменными $\begin{cases} y \geq x^2 + 2, \\ x + y < 6. \end{cases}$

Пара значений переменных (1; 4) является решением системы неравенств, т. к. является решением каждого неравенства: $\begin{cases} 4 \geq 1^2 + 2, \\ 1 + 4 < 6, \end{cases}$

или $\begin{cases} 4 \geq 3, \\ 5 < 6. \end{cases}$

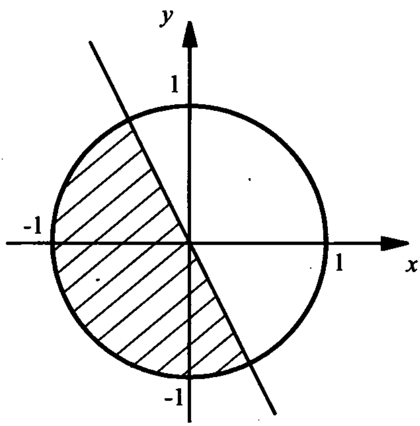
Пара значений переменных (1; 1) не является решением системы неравенств, т. к. не является решением первого неравенства: $\begin{cases} 1 \geq 1^2 + 2, \\ 1 + 1 < 6, \end{cases}$ или $\begin{cases} 1 \geq 3, \\ 2 < 6. \end{cases}$

Множеством решений системы неравенств с двумя переменными является *пересечение множеств решений всех неравенств*, входящих в систему. На координатной плоскости множество решений системы неравенств изображается множеством точек, являющихся общей частью множеств, представляющих собой решения каждого неравенства системы.

Пример 2

Изобразим на координатной плоскости множество решений системы неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ 2x + y \leq 0. \end{cases}$

Первое неравенство системы задает на координатной плоскости круг с центром в начале координат и радиусом, равным 1. Второе неравенство задает полуплоскость, расположенную ниже прямой $2x + y = 0$.

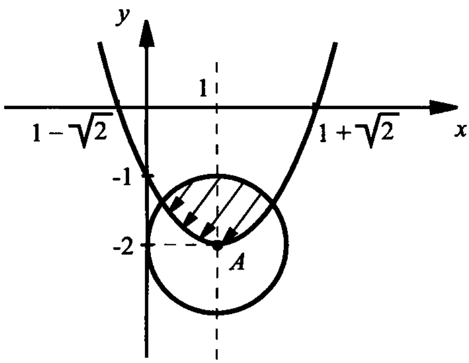


Итак, решениями данной системы неравенств являются точки полукруга (они заштрихованы).

Пример 3

На плоскости $x0y$ изобразим точки, удовлетворяющие системе неравенств $\begin{cases} y > x^2 - 2x - 1, \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 1. \end{cases}$

Изобразим сначала точки, удовлетворяющие первому неравенству. Построим график границы – график функции $y = x^2 - 2x - 1$. Эта парабола пересекает ось $0y$ в точке $y = -1$, ось $0x$ в точках $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Вершина параболы находится в точке $(1; -2)$, ветви параболы направлены вверх. Эта кривая разбила координатную плоскость на часть, заключенную между ветвями параболы, и часть, находящуюся за ветвями параболы. Взяв любую точку, например $(1; -1)$, из первой части плоскости, видим, что она удовлетворяет неравенству $y > x^2 - 2x - 1$. Поэтому все точки этой части также удовлетворяют неравенству (за исключением границы, т. к. неравенство строгое).



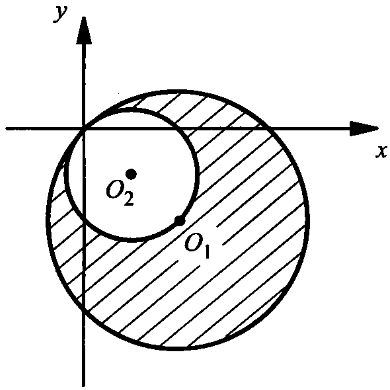
Аналогично, построив границу $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$, видим, что неравенству $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 \le 1$ удовлетворяют внутренние и граничные точки окружности.

Штриховкой показаны те точки, которые удовлетворяют системе неравенств. Причем стрелки показывают, что данная граница (часть параболы) не входит в множество решений системы неравенств.

Пример 4

Изобразим множество точек, которые являются решениями системы неравенств $\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 + 8y \le 0, \\ x^2 - 4x + y^2 + 4y \ge 0, \end{cases}$ и вычислим площадь этой фигуры.

Запишем систему неравенств в следующем виде:
$\begin{cases}(x^2-8x+16)+(y^2+8y+16)\le 32,\\(x^2-4x+4)+(y^2+4y+4)\ge 8,\end{cases}$ или $\begin{cases}(x-4)^2+(y+4)^2\le(4\sqrt{2})^2,\\(x-2)^2+(y+2)^2\ge(2\sqrt{2})^2.\end{cases}$



Графиком первого неравенства является круг с центром в точке $O_1(4; -4)$ и радиусом $R_1=4\sqrt{2}$. Графиком второго неравенства являются точки, расположенные за окружностью с центром в точке $O_2(2; -2)$ и радиусом $R_2=2\sqrt{2}$. Итак, решениями данной системы неравенств являются точки, расположенные между двумя касающимися в начале системы координат окружностями (эти точки заштрихованы).

Найдем площадь этой фигуры. Она равна разности площадей окружностей: $S=\pi R_1^2-\pi R_2^2=\pi(4\sqrt{2})^2-\pi(2\sqrt{2})^2=32\pi-8\pi=24\pi$. Таким образом, площадь заштрихованной фигуры ровно в 3 раза больше площади малого круга.

IV. Задание на уроке

№ 496 (а, б); 497 (б, г); 498 (а); 499 (б); 500 (а, в); 501 (а); 502 (б); 503.

V. Задание на дом

№ 496 (в, г); 497 (а, в); 498 (в); 499 (а); 500 (б, г); 501 (б); 502 (а).

VI. Подведение итогов урока

Уроки 54–56. Некоторые приемы решения систем уравнений второй степени с двумя переменными (факультативное занятие)

Цель: рассмотреть и систематизировать основные способы решения систем нелинейных уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств.

а) $\begin{cases} x+2y \ge 4, \\ 2x+y \le 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2 \ge 4, \\ y < x-2. \end{cases}$

Вариант 2

Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств.

а) $\begin{cases} x-2y \ge 4, \\ 2x-y \le 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+1)^2+(y-2)^2 \ge 4, \\ y < x+2. \end{cases}$

III. Изучение нового материала

Система уравнений, в которой *хотя бы одно из уравнений не является линейным*, называется *системой нелинейных уравнений*. Как вы видели, существуют способы решения любой системы линейных уравнений. Для систем нелинейных уравнений таких универсальных способов не существует, и многие системы до сих пор не решены.

Основной подход к решению систем линейных уравнений состоит в том, что с помощью тех или иных преобразований получают линейное уравнение, содержащее неизвестные. Это уравнение позволяет выразить одну неизвестную через другие и затем использовать для решения способ подстановки.

Остановимся на самых распространенных системах нелинейных уравнений.

а) **Системы, содержащие одно линейное уравнение**

Как правило, такие системы решаются *способом подстановки*. Из линейного уравнения одна из неизвестных выражается через другую и подставляется в оставшееся уравнение. Затем это уравнение с одной неизвестной решается, потом определяется и вторая неизвестная.

Пример 1

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0, \\ x+y+8=0. \end{cases}$

Так как в системе второе уравнение является линейным, то выразим из него, например, неизвестную $y = -(x + 8)$ и подставим ее в первое уравнение: $x^2 + (x + 8)^2 + 6x - 2(x + 8) = 0$, или $x^2 + 10x + 24 = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = -6$ (и тогда $y_1 = -2$) и $x_2 = -4$ ($y_2 = -4$). Итак, система имеет два решения: $(-6; -2)$, $(-4; -4)$.

Пример 2

Решим систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+6\dfrac{x-y}{x+y}=5, \\ xy=2. \end{cases}$

В данной системе линейного уравнения нет, но оно легко может быть получено из первого уравнения. Введем замену: $t=\dfrac{x+y}{x-y}$ и получим уравнение $t+\dfrac{6}{t}=5$, корни которого $t_1 = 2$, $t_2 = 3$. В первом случае имеем: $2=\dfrac{x+y}{x-2}$, или $x = 3y$. Тогда получаем систему: $\begin{cases} x=3y, \\ xy=2, \end{cases}$ которая имеет решения: $\left(-3\sqrt{\dfrac{2}{3}}; -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$, $\left(3\sqrt{\dfrac{2}{3}}; \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$. Во втором случае: $4=\dfrac{x+y}{x-2}$, или $x = 2y$. Тогда получаем систему:

$\begin{cases} x = 2y, \\ xy = 2, \end{cases}$ которая имеет решения: (–2; –1), (2; 1). Таким образом, исходная система имеет четыре решения.

б) **Системы, которые с помощью замен сводятся к линейным**

Пример 3

Решим систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y-1} + \dfrac{1}{x-y+1} = 2, \\ \dfrac{3}{x+y-1} + \dfrac{4}{x-y+1} = 7. \end{cases}$

Введем замены неизвестных: $u = \dfrac{1}{x+y-1}$, $v = \dfrac{1}{x-y+1}$ и получим систему линейных уравнений $\begin{cases} u + v = 2, \\ 3u + 4v = 7. \end{cases}$ Эта система имеет единственное решение: $u = 1$, $v = 1$. Возвращаясь к неизвестным x и y, опять получим систему линейных уравнений: $\begin{cases} x + y - 1 = 1, \\ x - y + 1 = 1, \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 0. \end{cases}$ Эта система имеет единственное решение: $x = 1, y = 1$.

Пример 4

Решим систему уравнений $\begin{cases} 3xy = 2x + 2y, \\ \dfrac{4xz}{x+z} = 3, \\ \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}. \end{cases}$

Подсказкой в данном примере служит третье уравнение. Легко сообразить, что первое и второе уравнения могут быть приведены к аналогичному виду. Например, для второго уравнения необходимо сделать следующие преобразования: $\dfrac{4xz}{x+z} = 3$, $4xz = 3(x+z)$, $\dfrac{4}{3} = \dfrac{x+z}{xz}$, $\dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}$. Таким образом, имеем систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}, \\ \dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}. \end{cases}$ Теперь замена неизвестных очевидна: $u=\dfrac{1}{x}$, $v=\dfrac{1}{y}$, $w=\dfrac{1}{z}$. В результате получаем систему линейных уравнений $\begin{cases} \dfrac{3}{2}=u+v, \\ \dfrac{4}{3}=u+w, \\ \dfrac{5}{6}=v+w. \end{cases}$ Характерной особенностью полученной системы является то, что в ней неизвестные u, v, w входят по два раза. Поэтому удобно сложить все три уравнения системы: $\dfrac{22}{6}=2\cdot(u+v+w)$, откуда $\dfrac{11}{6}=u+v+w$. Вычитая из этого соотношения каждое из уравнений системы, соответственно, получим: $\dfrac{1}{3}=w$, $\dfrac{1}{2}=v$, $1=u$. После этого легко найти исходные неизвестные: $x=\dfrac{1}{u}=1$; $y=\dfrac{1}{v}=2$; $z=\dfrac{1}{w}=3$. Таким образом, система имеет единственное решение: (1; 2; 3).

в) **Однородные системы**

Системы уравнений, у которых *левая часть одного из уравнений* является *однородным многочленом*, а *правая часть* равна *нулю*, или, у которых *левые части двух уравнений* являются *однородными многочленами*, а *правые части* равны *числам*, *не равным нулю*, называются *однородными системами* уравнений.

Пример 5

Решим систему уравнений $\begin{cases} 2y^2+xy-x^2=0, \\ x^2-xy-y^2+3x+7y+3=0. \end{cases}$

Первое уравнение этой системы является однородным (слева стоит однородный многочлен второй степени по переменным x и y, справа – ноль). Решим его относительно неизвестной y, считая x постоянной величиной, и получим: $y = -x$ и $y = \frac{x}{2}$. Подставим полученное соотношение во второе уравнение. В случае $y = -x$ имеем: $x^2 - x(-x) - (-x)^2 + 3x + 7(-x) + 3 = 0$, или $x^2 - 4x + 3 = 0$. Тогда: $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, $x_2 = 3$, $y_2 = -3$. В случае $y = \frac{x}{2}$ получаем: $x^2 - x\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3x + 7\frac{x}{2} + 3 = 0$, или $x^2 + 26x + 12 = 0$. Тогда: $x_{3,4} = -13 \pm \sqrt{57}$; $y_{3,4} = \frac{-13 \pm \sqrt{157}}{2}$. Итак, система уравнений имеет четыре решения.

Пример 6

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ 2xy - y^2 = 15. \end{cases}$

Левые части уравнения представляют собой однородные многочлены второй степени, что позволяет свести задачу к предыдущей. Необходимо только избавиться от чисел в правой части. Для этого умножим первое уравнение на 5, получим: $5x^2 - 5xy + 5y^2 = 105$, второе – на (–7), получим: $-14xy + 7y^2 = -105$. Полученные уравнения сложим: $12y^2 - 19xy + 5x^2 = 0$. Решая это уравнение, найдем: $y = \frac{5}{4}x$ и $y = \frac{x}{3}$. Для нахождения x можно использовать любое из уравнений исходной системы, например второе. В случае $y = \frac{5}{4}x$ имеем: $2x\frac{5}{4}x - \left(\frac{5}{4}x\right)^2 = 15$, или $x^2 = 16$. Тогда: $x_1 = -4, y_1 = -5$; $x_2 = 4$, $y_2 = 5$. В случае $y = \frac{x}{3}$ получаем: $2x\frac{x}{3} - \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 15$, или $x^2 = 27$. Тогда: $x_3 = -3\sqrt{3}$, $y_3 = -\sqrt{3}$, $x_4 = 3\sqrt{3}$, $y_4 = \sqrt{3}$. Даная система уравнений также имеет четыре решения.

г) **Симметричные системы**

Система уравнений называется *симметричной*, если *при замене x на y*, а y на *x уравнения* системы *не меняются*. Для решения симметричных систем в качестве новых переменных используют простейшие симметричные выражения: $u = x + y$, $v = xy$ (способ замены неизвестных).

Пример 7

Решим систему уравнений $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x^2+y^2+xy=7. \end{cases}$

Система уравнений $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x^2+y^2+xy=7 \end{cases}$ является симметричной, т. к. при замене x на y, а y на x получаем систему $\begin{cases} y+x+yx=5, \\ y^2+x^2+yx=7, \end{cases}$ которая с точностью до перестановки слагаемых и сомножителей совпадает с исходной.

Введем новые неизвестные: $u = x + y$, $v = xy$. Учтем, что $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$. Тогда исходная система будет иметь вид: $\begin{cases} u+v=5, \\ u^2-v=7. \end{cases}$ Сложив уравнения системы, получим квадратное уравнение для определения u: $u^2 + u - 12 = 0$, откуда $u_1 = -4$, $u_2 = 3$. Тогда $v_1 = 9$, $v_2 = 2$. Возвращаясь к старым неизвестным, получаем системы: $\begin{cases} x+y=-4, \\ xy=9 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2. \end{cases}$ Решение этих систем труда не вызывает, т. к. первое уравнение в них линейное. Решая их, получим для первой системы – отсутствие решений, для второй – (1; 2), (2; 1).

Заметим, что *симметричность системы* сказалась и *на симметричности ответов*: если симметричная система имеет решение (a; b), то она имеет и решение (b; a). В нашем случае были получены симметричные ответы (1; 2) и (2; 1).

Во многих случаях система, не являющаяся симметричной, с помощью соответствующих замен неизвестных может быть сведена к таковой.

Пример 8

Решим систему уравнений $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Введем новые неизвестные $u = x + y$, $v=\dfrac{x}{y}$ и получим симметричную систему уравнений $\begin{cases} u+v=\frac{1}{2}, \\ uv=-\frac{1}{2}. \end{cases}$ Решения этой системы:

$u_1 = 1$, $v_1 = -\frac{1}{2}$; $u_2 = -\frac{1}{2}$, $v_2 = 1$. Получаем системы уравнений:

$\begin{cases} x+y=1, \\ \frac{x}{y}=-\frac{1}{2} \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=-\frac{1}{2}, \\ \frac{x}{y}=1, \end{cases}$ которые являются линейными. Решение

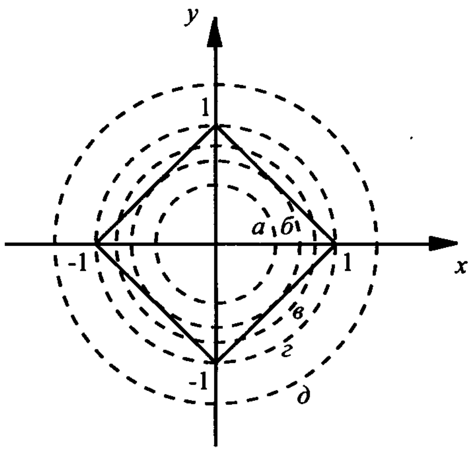
первой системы: $(-1; 2)$, второй: $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right)$.

В заключение этой темы заметим, что при анализе или решении линейных или нелинейных систем уравнений полезно использовать *графические методы*.

Пример 9

Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=a^2\ ? \end{cases}$

Записав первое уравнение в виде $|y| = 1 - |x|$, нетрудно построить его график. Им будет квадрат, отсекающий на осях координат единичные отрезки (сплошные линии). Графиком второго уравнения является окружность радиуса $|a|$ с центром в начале координат (штрихпунктирные линии).



Из рисунка видны следующие возможные случаи: окружности *а* и *д* не имеют точек пересечения с квадратом, т. е. система не имеет решений: окружности *б* и *г* имеют с квадратом четыре общие точки, т. е. система имеет четыре решения; окружность *в* пересекает квадрат в восьми точках, т. е. система имеет восемь решений.

Установим, при каких значениях $|a|$ имеют место эти случаи. Прежде всего отметим, что диагональ квадрата равна 2, а его сторона равна $\sqrt{2}$. Из рисунка видно, что радиус окружности *б* равен половине стороны квадрата, т. е. $|a|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Радиус окружности *г* равен половине диагонали квадрата, т. е. $|a| = 1$. Теперь можно записать ответ: при $|a|\in\left[0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup(1;\ +\infty)$ система решений не имеет, при $|a|\in\left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right\}$ система имеет четыре решения, при $|a|\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right)$ система имеет восемь решений.

Отметим, что иногда встречаются и системы двух уравнений с тремя неизвестными. Рассмотрим подход к таким задачам.

Пример 10

Дана система уравнений $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{12}-\frac{z}{4}=1,\\ \frac{x}{10}+\frac{y}{5}+\frac{z}{3}=1.\end{cases}$ Найдем сумму неизвестных $x + y + z$.

Умножим первое уравнение на 12, второе на 30. Получим систему уравнений $\begin{cases}4x+y-3z=12,\\ 3x+6y+10z=30.\end{cases}$ Сложим уравнения системы, получим: $7x + 7y + 7z = 42$, откуда $x + y + z = 6$. Сумма неизвестных найдена: $x + y + z = 6$. При этом сами неизвестные (по отдельности) найти невозможно.

Пример 11

Решим систему уравнений $\begin{cases}x^2+y^2-8x-2y=-17,\\ 3z-x+5y=-8.\end{cases}$

В первом уравнении системы выделим квадраты разности по переменным x и y: $(x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 2y + 1) = -17 + 17$, или $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 0$. Каждое слагаемое в этой сумме неотрицательное. Поэтому равенство выполняется только при $x - 4 = 0$ и $y - 1 = 0$, откуда $x = 4$ и $y = 1$. Подставим эти значения во второе уравнение системы: $3z - 4 + 5 \cdot 1 = -8$, или $3z = -9$, откуда $z = -3$. Итак, данная система имеет единственное решение: $x = 4$, $y = 1$, $z = -3$.

Заметим, что во многих случаях решение системы уравнений вызывает очень большие трудности и требует значительной наблюдательности и навыков решения самых различных задач.

Пример 12

Решим систему уравнений $\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0. \end{cases}$

Умножим второе уравнение системы на 2 и получим: $\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 6x^2 - 4y^2 + 10xy - 34x - 12y + 40 = 0. \end{cases}$ Сложим и вычтем уравнения и получим равносильную систему уравнений: $\begin{cases} (16x^2 + y^2 + 8xy) - 72x - 18y + 81 = 0, \\ (4x^2 + 9y^2 - 12xy) - 4x + 6y + 1 = 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} (4x + y)^2 - 18(4x + y) + 81 = 0, \\ (2x - 3y)^2 - 2(2x - 3y) + 1 = 0, \end{cases}$,

или $\begin{cases} (4x + y - 9)^2 = 0, \\ (2x - 3y - 1)^2 = 0. \end{cases}$ Такая система равносильна системе линейных уравнений $\begin{cases} 4x + y - 9 = 0, \\ 2x - 3y - 1 = 0, \end{cases}$ которая имеет единственное решение: $x = 2$, $y = 1$.

IV. Контрольные вопросы

1. Как решаются системы, содержащие линейное уравнение?
2. Дайте определение однородной системы уравнений.
3. Решение однородных систем уравнений.
4. Определение симметричной системы уравнений.
5. Как решаются симметричные системы уравнений?

V. Задание на уроке

№ 507 (а); 508 (б); 509 (а); 510 (б); 511 (а); 512 (б); 513 (а); 514 (б); 515 (а).

VI. Задание на дом

№ 507 (б); 508 (а); 509 (б); 510 (а); 511 (б); 512 (а); 513 (б); 514 (а); 515 (б).

VII. Творческие задания

Решите системы рациональных уравнений.

1) $\begin{cases} \dfrac{5x+6}{5y+6} = \dfrac{6x+5}{6y+5}, \\ \dfrac{5}{x} = \dfrac{1}{6-y}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{4x+5}{4y+5} = \dfrac{5x+4}{5y+4}, \\ \dfrac{4}{x} = \dfrac{1}{5-y}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3x+2y}{3y-2y} = \dfrac{25}{3x+2y}, \\ 3x+2y=5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{2x-3y}{2y+3y} = \dfrac{49}{2x-3y}, \\ 2x-3y=7; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 32, \\ \dfrac{x^2}{32y} + \dfrac{32y^2}{x} = 33; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 33, \\ \dfrac{x^2}{33y} + \dfrac{33y^2}{x} = 34; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{y}{x+5} = -5, \\ y^2 + \dfrac{y^2}{x+5} = 6; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{y}{x+6} = -6, \\ y^2 + \dfrac{y^2}{x+6} = 7; \end{cases}$

9) $\begin{cases} (x-y)^2 + 4(x+y)^2 = 5, \\ \dfrac{1}{x^2-2xy+9y^2} = \dfrac{1}{9}; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 24x + \dfrac{121}{y} = y, \\ 24y + \dfrac{121}{x} = x; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{x}{2y-3} + \dfrac{2y}{2x-3} = -3, \\ \dfrac{3x}{2y-x} - \dfrac{2y}{2x-3} = -1; \end{cases}$

12) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 1, \\ \dfrac{x^2+5y^2+3x-2}{4y^2+3x+11} = 1; \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{x}{1-\dfrac{5}{x+5}} = \dfrac{y}{1-\dfrac{6}{y+6}}, \\ 5x-y=xy+5; \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dfrac{8}{\left|x^2-9x\right|+4} = y^2+2, \\ \dfrac{x+19y}{x+y-8} = 9; \end{cases}$

15) $\begin{cases} 4(x^3+y^3)=x^2y^2, \\ \dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{5}{2}; \end{cases}$

18) $\begin{cases} 1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{xy}, \\ 1+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{yz}, \\ 1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{xz}; \end{cases}$

16) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{7}{12}, \\ \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{8}{15}, \\ \dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{9}{20}; \end{cases}$

19) $\begin{cases} \dfrac{2}{(2x-3z)^2+1}+\dfrac{3}{(3y-4z)^2+1}=5, \\ 2x+3y+4z=66. \end{cases}$

17) $\begin{cases} \dfrac{3xy}{x+y}=2, \\ \dfrac{4xz}{x+z}=3, \\ \dfrac{5yz}{y+z}=6; \end{cases}$

Найдите все пары $(x;\ y)$ целых чисел x и y, которые являются решениями системы уравнений.

20) $\begin{cases} x=\dfrac{7y-34}{y-5}, \\ x^2+y^2=52; \end{cases}$

21) $\begin{cases} y=3x+\dfrac{5}{3x+1}, \\ x^3=y-1. \end{cases}$

Решите системы иррациональных уравнений.

22) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+6=5\sqrt{\dfrac{x}{y}}, \\ x+y=40; \end{cases}$

25) $\begin{cases} x\sqrt{\dfrac{x}{y}}=-\sqrt{10}, \\ x^2+y^2=29; \end{cases}$

23) $\begin{cases} x+2y-24\sqrt{x+2y}+144=0, \\ x-2y=44; \end{cases}$

26) $\begin{cases} \sqrt{x-5}+\sqrt{y+4}=8, \\ (x-5)\sqrt{y+4}+(y+4)\sqrt{x-5}=96; \end{cases}$

24) $\begin{cases} 3x-y-18\sqrt{3x-y}+81=0, \\ 3x+y-6\sqrt{3x+y}+9=0; \end{cases}$

27) $\begin{cases} |2x-5z|+\sqrt{3y-4z}=0, \\ 2x+3y+z=10; \end{cases}$

28) $\begin{cases}\sqrt{(x-2y)^2+4}+\sqrt{(z-11y)^2+121}=13,\\ x+y+z=14;\end{cases}$

29) $\begin{cases}x+y-\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{12}{x-y},\\ xy=15;\end{cases}$ 30) $\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=0,\\ \sqrt{x^2-y}+\sqrt{x^2+y}=4.\end{cases}$

Ответы: 1) (5; 5); 2) (5;5); 3) (1; 1); 4) (2; –1); 5) (32; 1); 6) (33; 1); 7) $\left(-\frac{31}{5}; 6\right)$, $\left(-\frac{24}{5}; -1\right)$; 8) $\left(-\frac{43}{6}; 7\right)$, $\left(-\frac{35}{6}; -1\right)$; 9) $(0; 1)$, $(0; -1)$, $\left(-\frac{8}{\sqrt{41}}; \frac{5}{\sqrt{41}}\right)$, $\left(\frac{8}{\sqrt{41}}; -\frac{5}{\sqrt{41}}\right)$; 10) $\left(\frac{11}{5}; -\frac{11}{5}\right)$, $\left(-\frac{11}{5}; \frac{11}{5}\right)$; 11) (1; 1); 12) (2; 3), (3; 2); 13) (4; 3); 14) (9; 0); 15) (9; 18), (18; 9); 16) (1; 2; 3); 17) (1; 2; 3); 18) (–3; –4; –2); 19) (9; 8; 6); 20) (6; 4); 21) (–2; –7); 22) (32; 4), (36; 4); 23) (94; 25); 24) (15; –36); 25) (–2; –5); 26) (9; 32), (41; 0); 27) $\left(\frac{5}{2}; \frac{4}{3}; 1\right)$; 28) (2; 1; 11); 29) (5; 3), $\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{981}+9}{2}}; -\sqrt{\frac{\sqrt{981}-9}{2}}\right)$; 30) $\left(\frac{5}{6}; 6\right)$.

VIII. Подведение итогов урока

Уроки 57–58. Контрольная работа по теме «Уравнения и неравенства с двумя переменными»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Варианты контрольной работы
Вариант 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases}3x+y=7,\\ 2x^2-y=7\end{cases}$ способом сложения.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x - y = 2, \\ x^2 + y^2 - xy = 3 \end{cases}$ способом подстановки.

3. Периметр прямоугольника равен 28 см, а его площадь равна 40 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений:

а) уравнения $2|x| + |y| = 4$;

б) системы неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4, \\ y \ge x + 1. \end{cases}$

5. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства $(y - 2x)(y + x + 1) < 0$.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x - y = 9, \\ 3x^2 + y = 11 \end{cases}$ способом сложения.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$ способом подстановки.

3. Периметр прямоугольника равен 26 см, а его площадь равна 42 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений:

а) уравнения $|x| + 2|y| = 4$;

б) системы неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4, \\ y \ge x - 1. \end{cases}$

5. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства $(y + 2x)(y - x - 1) < 0$.

Вариант 3

1. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = 0, \\ 2x^2 + y^2 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

2. Произведение двух натуральных чисел равно 154, а сумма их квадратов равна 317. Найдите эти числа.

3. Изобразите на координатной плоскости множество решений:

а) уравнения $x^2 - 6x + y^2 + 4y = 3$;

б) системы неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9, \\ y \ge |x| + 1. \end{cases}$

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений уравнения $\dfrac{x^2 + y^2 - 4y}{y - 1} = 0$.

Вариант 4

1. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 + 2y^2 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

2. Произведение двух натуральных чисел равно 187, а сумма их квадратов равна 410. Найдите эти числа.

3. Изобразите на координатной плоскости множество решений:

а) уравнения $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 1$;

б) системы неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4, \\ y \ge 1 - |x|. \end{cases}$

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений уравнения $\dfrac{x^2 + 6x + y^2}{x + 2} = 0$.

Вариант 5

1. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3(x + y), \\ \dfrac{1}{4x - 3y} = \dfrac{1}{7}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} = 5, \\ 4\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10. \end{cases}$

2. Найдите все пары $(x;\ y)$ целых чисел x и y, являющиеся решениями системы уравнений $\begin{cases} x = \dfrac{7y-34}{y-5}, \\ x^2+y^2=52. \end{cases}$

3. Если велосипедист увеличит скорость на 5 км/ч, то получит выигрыш во времени 12 мин при прохождении некоторого пути. Если же он уменьшит скорость на 8 км/ч, то потеряет 40 мин на том же пути. Найти скорость велосипедиста и длину пути.

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений:

а) уравнения $|y^2 - x^2| = y + x$;

б) неравенства $|3x - y + 1| \le 2$.

Вариант 6

1. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases} x^2-y^2=4(x+y), \\ 5\dfrac{1}{5x-4y}=\dfrac{1}{9}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4\sqrt{\dfrac{x}{y}}+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}=9, \\ 7\sqrt{x}+2\sqrt{y}=48. \end{cases}$

2. Найдите все пары $(x;\ y)$ целых чисел x и y, являющиеся решениями системы уравнений $\begin{cases} x = \dfrac{6y-23}{y-4}, \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$

3. Если велосипедист увеличит скорость на 9 км/ч, то получит выигрыш во времени 27 мин при прохождении некоторого пути. Если же он уменьшит скорость на 5 км/ч, то потеряет 29 мин на том же пути. Найти скорость велосипедиста и длину пути.

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений:

а) уравнения $|y^2 - x^2| = y - x$;

б) неравенства $|2x + y - 2| \le 1$.

Урок 59. Итоги контрольной работы

Цель: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Итоги контрольной работы

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ:* (2; 1), (–3,5; 17,5).
2. *Ответ:* (1; 2), $\left(\frac{1}{13}; -\frac{22}{13}\right)$.
3. *Ответ:* 4 и 10 см.
4. *Ответ:* а, б) построено.
5. *Ответ:* построено.

Вариант 2

1. *Ответ:* (2; –1), $\left(-\frac{10}{3}; -\frac{67}{3}\right)$.
2. *Ответ:* (1; –2), $\left(-\frac{2}{7}; \frac{13}{7}\right)$.
3. *Ответ:* 6 и 7 см.
4. *Ответ:* а, б) построено.
5. *Ответ:* построено.

Вариант 3

1. *Ответ:* а) (1; 1), (–1; –1), $\left(-\frac{3\sqrt{57}}{19}; \frac{\sqrt{57}}{19}\right)$, $\left(\frac{3\sqrt{57}}{19}; -\frac{\sqrt{57}}{19}\right)$;
б) (1; 2), (2; 1).
2. *Ответ:* 14 и 11.
3. *Ответ:* а, б) построено.
4. *Ответ:* построено.

Вариант 4

1. *Ответ:* а) (1; –1), (–1; 1), $\left(\frac{3\sqrt{33}}{11}; \frac{\sqrt{33}}{11}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{33}}{11}; -\frac{\sqrt{33}}{11}\right)$;
б) (1; 3), (3; 1).

2. *Ответ:* 17 и 11.
3. *Ответ:* а, б) построено.
4. *Ответ:* построено.

Решения

Вариант 5

1(а) Для решения системы уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3(x+y), \\ \dfrac{1}{4x-3y} = \dfrac{1}{7} \end{cases}$ запишем ее в виде $\begin{cases} (x+y)(x-y-3) = 0, \\ 4x-3y = 7. \end{cases}$ В первом уравнении произведение двух множителей равно нулю. Поэтому один из этих множителей равен нулю. Получаем две системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=0, \\ 4x-3y=7, \end{cases}$ ее решение $x = 1, y = -1$;

б) $\begin{cases} x-y=3, \\ 4x-3y=7, \end{cases}$ ее решение $x = -2, y = -5$.

Ответ: (1; −1), (−2; −5).

1(б) Для решения системы уравнений $\begin{cases} 3\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} = 5, \\ 4\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$ в первом уравнении введем новую переменную $t = \sqrt{\dfrac{x}{y}} > 0$. Получаем уравнение $3t + 2 \cdot \dfrac{1}{t} = 5$, или $3t^2 - 5t + 2 = 0$, корни которого $t = 1$ и $t = \dfrac{2}{3}$. Вернемся к старым неизвестным. Получаем две системы уравнений:

а) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} = 1, \\ 4\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10, \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y}, \\ 4\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10, \end{cases}$ откуда $\sqrt{x} = \sqrt{y} = 2$ и $x = y = 4$;

б) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{2}{3},\\ 4\sqrt{x}+\sqrt{y}=10,\end{cases}$ или $\begin{cases}\sqrt{x}=\dfrac{2}{3}\sqrt{y},\\ 4\sqrt{x}+\sqrt{y}=10,\end{cases}$ откуда $\sqrt{x}=\dfrac{20}{11}$, $\sqrt{y}=\dfrac{30}{11}$

и $x=\dfrac{400}{121}$, $y=\dfrac{900}{121}$.

Ответ: (4; 4), $\left(\dfrac{400}{121}; \dfrac{900}{121}\right)$.

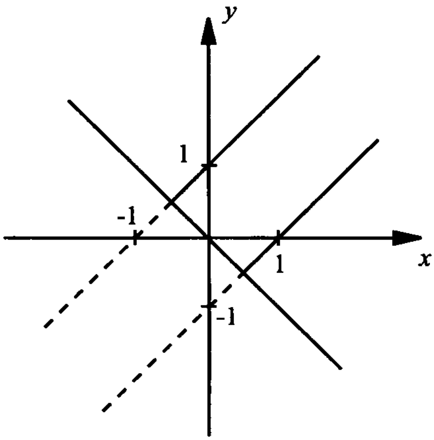
2. В первом уравнении системы $\begin{cases}x=\dfrac{7y-34}{y-5},\\ x^2+y^2=52\end{cases}$ выделим целую часть и запишем ее в виде $x=\dfrac{7y-35+1}{y-5}=7+\dfrac{1}{y-5}$. Так как x и y целые числа, то $y-5=1$, тогда $y=6$ и $x=8$ или $y-5=-1$ (тогда $y=4$ и $x=6$). Легко проверить, что второму уравнению системы удовлетворяет только решение (6; 4).

Ответ: (6; 4).

3. Пусть скорость велосипедиста x км/ч и длина пути y км. Запишем условия задачи: $\begin{cases}\dfrac{y}{x}-\dfrac{y}{x+5}=\dfrac{12}{60},\\ \dfrac{y}{x-8}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{40}{60},\end{cases}$ или $\begin{cases}25y=x(x+5),\\ 12y=x(x-8).\end{cases}$ Разделим уравнения друг на друга: $\dfrac{25}{12}=\dfrac{x+5}{x-8}$ и найдем $x=20$. Например, из первого уравнения определим $y=\dfrac{x(x+5)}{25}=20$.

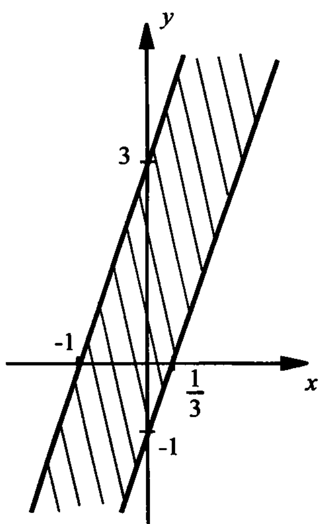
Ответ: 20 км/ч и 20 км.

4(а) В уравнении $|y^2-x^2|=y+x$ учтем, что $y+x\ge 0$, т. е. $y\ge -x$. Запишем уравнение в виде $(y+x)|y-x|=y-x$, или $(y+x)(|y-x|-1)=0$, откуда $y+x=0$ (т. е. $y=-x$) и $|y-x|-1=0$, или $|y-x|=1$, или $y-x=\pm 1$ (т. е. $y=x\pm 1$). Построим прямую $y=-x$ и две параллельные прямые $y=x\pm 1$ для $y>-x$. Получаем график данного уравнения.



Ответ: построено.

4(б) Неравенство $|3x - y + 1| \le 2$ запишем в виде $-2 \le 3x - y + 1 \le 2$, или $-3 \le 3x - y \le 1$, или $3 \ge y - 3x \ge -1$, или $3x - 1 \le y \le 3x + 3$. Построим две параллельные прямые $y = 3x - 1$ и $y = 3x + 3$. Легко проверить, что данному неравенству удовлетворяет множество точек, расположенных между этими прямыми. Получаем график данного неравенства.



Ответ: построено.

Вариант 6

1(а) Для решения системы уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4(x+y), \\ \dfrac{1}{5x-4y} = \dfrac{1}{9} \end{cases}$ запишем ее в виде $\begin{cases} (x+y)(x-y-4) = 0, \\ 5x - 4y = 9. \end{cases}$ В первом уравнении произведение двух множителей равно нулю. Поэтому один из этих множителей равен нулю. Получаем две системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 5x - 4y = 9, \end{cases}$ ее решение $x = 1, y = -1$;

б) $\begin{cases} x - y = 4, \\ 5x - 4y = 9, \end{cases}$ ее решение $x = -7, y = -11$.

Ответ: (1; −1), (−7; −11).

1(б) Для решения системы уравнений $\begin{cases} 4\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} = 9, \\ 7\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 48 \end{cases}$ в первом уравнении введем новую переменную $t = \sqrt{\dfrac{x}{y}} > 0$. Получаем уравнение $4t + \dfrac{2}{t} = 9$, или $4t^2 - 9t + 2 = 0$, корни которого $t = 2$ и $t = \dfrac{1}{4}$.

Вернемся к старым неизвестным. Получаем две системы уравнений:

а) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} = 2, \\ 7\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 48, \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt{x} = 2\sqrt{y}, \\ 7\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 48, \end{cases}$ откуда $\sqrt{x} = 6$, $\sqrt{y} = 3$ и $x = 36, y = 9$;

б) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{1}{4}, \\ 7\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 48, \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt{x} = \dfrac{1}{4}\sqrt{y}, \\ 7\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 48, \end{cases}$ откуда $\sqrt{x} = \dfrac{16}{5}$, $\sqrt{y} = \dfrac{4}{5}$ и $x = \dfrac{256}{25}$, $y = \dfrac{16}{25}$.

Ответ: (36; 9), $\left(\dfrac{256}{25}; \dfrac{16}{25}\right)$.

2. В первом уравнении системы $\begin{cases} x = \dfrac{6y-23}{y-5}, \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$ выделим целую часть и запишем ее в виде $x = \dfrac{6y-24+1}{y-4} = 6 + \dfrac{1}{y-4}$. Так как x и y целые числа, то $y - 4 = 1$, тогда $y = 5$ и $x = 7$ или $y - 4 = -1$ (тогда $y = 3$ и $x = 5$). Легко проверить, что второму уравнению системы удовлетворяет только решение (5; 3).

Ответ: (5; 3).

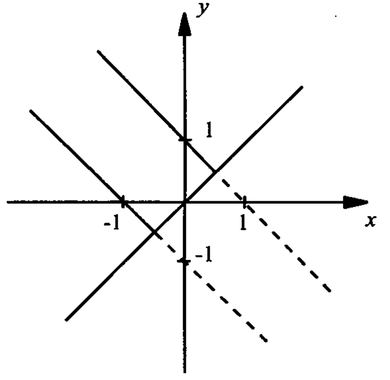
3. Пусть скорость велосипедиста x км/ч и длина пути y км. Запишем условия задачи: $\begin{cases} \dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x+9} = \dfrac{27}{60}, \\ \dfrac{y}{x-5} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{29}{60}, \end{cases}$ или $\begin{cases} 9 \cdot 60y = 27x(x+9), \\ 5 \cdot 60y = 29x(x-5). \end{cases}$

Разделим уравнения друг на друга: $\dfrac{9}{5} = \dfrac{27(x+9)}{29(x-5)}$ и найдем $x = 20$.

Например, из первого уравнения определим $y = \dfrac{x(x+9)}{20} = 29$.

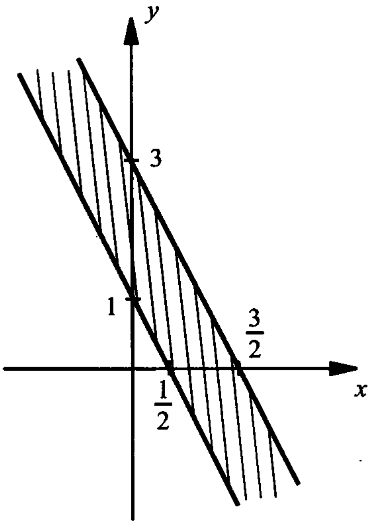
Ответ: 20 км/ч и 29 км.

4(а) В уравнении $|y^2 - x^2| = y - x$ учтем, что $y - x \geq 0$, т. е. $y \geq x$. Запишем уравнение в виде $(y - x)|y + x| = y - x$, или $(y - x)(|y + x| - 1) = 0$, откуда $y - x = 0$ (т. е. $y = x$) и $|y + x| - 1 = 0$, или $|y + x| = 1$, или $y + x = \pm 1$ (т. е. $y = -x \pm 1$). Построим прямую $y = x$ и две параллельные прямые $y = -x \pm 1$ для $y > x$. Получаем график данного уравнения.



Ответ: построено.

4(б) Неравенство $|2x + y - 2| \le 1$ запишем в виде $-1 \le 2x + y - 2 \le 1$, или $-2x + 1 \le y \le -2x + 3$. Построим две параллельные прямые $y = -2x + 1$ и $y = -2x + 3$. Легко проверить, что данному неравенству удовлетворяет множество точек, расположенных между этими прямыми. Получаем график данного неравенства.



Ответ: построено.

Уроки 60–61. Зачетная работа по теме «Уравнения и неравенства с двумя переменными»

Цель: проверка знаний учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases}(x-1)(y+4)=0,\\ y^2+xy-2=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=4,\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}=9.\end{cases}$

2. Даша и Таня пропалывают грядку за 12 мин, а одна Даша – за 20 мин. За сколько минут пропалывает грядку одна Таня?

3. Изобразите на координатной плоскости множество решений:

а) уравнения $\dfrac{4y^2-x^2}{y+2}=0;$

б) неравенства $(y-1)(y-x)\le 0;$

в) системы неравенств $\begin{cases}x^2+y^2\le 4,\\ y\le x.\end{cases}$

4. Решите систему уравнений $\begin{cases}(x+2)\sqrt{y-3}=0,\\ x+y=4.\end{cases}$

B

5. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases}25x^2+5x-y^2=x^4+16,\\ 5x-y^2=16;\end{cases}$

б) $\begin{cases}4\sqrt{3x^2-8x-2}+3\sqrt{y+3}=7,\\ 4\sqrt{y+3}-3\sqrt{3x^2-8x-2}=1.\end{cases}$

6. Семья состоит из двух человек: мужа и жены. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 60%. На сколько процентов вырос бы общий доход семьи, если бы вдвое увеличилась зарплата жены?

7. На координатной плоскости изобразите множество решений неравенства $\dfrac{x^2-x-2}{y-x}\ge 0.$

C

8. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases}x^2-2xy-3y^2=0,\\ |x+y|+|x-3y|=16;\end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x^2+5x-6}=y, \\ \sqrt{y^2+5y-6}=x. \end{cases}$

9. Найдите значение параметра, при котором система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a), \\ (x+y)^2=16 \end{cases}$ имеет ровно два решения. Найдите эти решения.

Вариант 2

А

1. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases} (x+2)(y-1)=0, \\ x^2-xy-12=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=4, \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x}=9. \end{cases}$

2. Олег и Витя вскапывают грядку за 10 мин, а один Олег – за 15 мин. За сколько минут вскапывает грядку один Витя?

3. Изобразите на координатной плоскости множество решений:

а) уравнения $\dfrac{y^2-4x^2}{x+1}=0$;

б) неравенства $(x+1)(y+x)\le 0$;

в) системы неравенств $\begin{cases} x^2+y^2\le 9, \\ y\ge 2x. \end{cases}$

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} (x-4)\sqrt{y-6}=0, \\ x+y=8. \end{cases}$

В

5. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases} 16x^2+3x-y^2=x^4+8, \\ 3x-y^2=8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2\sqrt{3x^2-10x+9}+3\sqrt{y-2}=5, \\ 2\sqrt{y-2}-3\sqrt{3x^2-10x+9}=-1. \end{cases}$

6. Семья состоит из двух человек: мужа и жены. Если бы зарплата жены увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 45%. На сколько процентов вырос бы общий доход семьи, если бы вдвое увеличилась зарплата мужа?

7. На координатной плоскости изобразите множество решений неравенства $\dfrac{y^2+y-2}{y+x} \le 0$.

С

8. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases} x^2+5xy+6y^2=0, \\ |x+2y|+|x+3y|=12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x^2+4x-7}=y, \\ \sqrt{y^2+4y-7}=x. \end{cases}$

9. Найдите значение параметра, при котором система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2(1-a), \\ (x-y)^2=4 \end{cases}$ имеет ровно два решения. Найдите эти решения.

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. *Ответ:* а) (1; 1), (1; –2), (3,5; 4); б) $\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

2. *Ответ:* 30 мин.

3. *Ответ:* а–в) построено.

4. *Ответ:* (1; 3).

5. *Ответ:* а) (5; 3), (5; –3); б) (3; –2), $\left(-\dfrac{1}{3}; -2\right)$.

6. *Ответ:* на 40%.

7. *Ответ:* построено.

8(а) Для решения системы уравнений $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0, \\ |x+y|+|x-3y|=16 \end{cases}$ запишем ее в виде $\begin{cases} (x+y)(x-3y)=0, \\ |x+y|+|x-3y|=16. \end{cases}$ Так как в первом уравнении произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем две системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=0, \\ |x+y|+|x-3y|=16, \end{cases}$ или $\begin{cases} y=-x, \\ |4x|=16, \end{cases}$ откуда $x = 4$, $y = -4$ и $x=-4, y=4$;

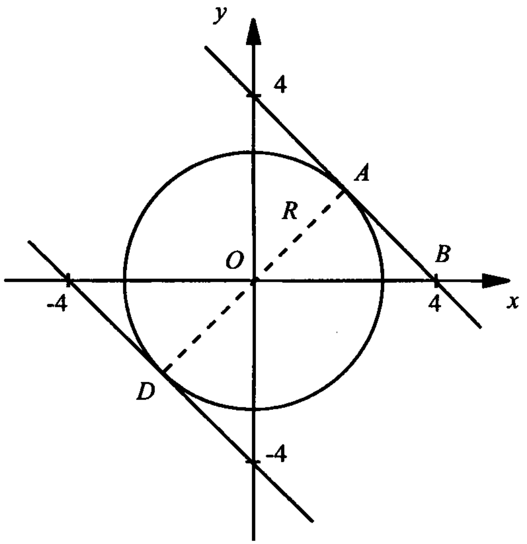
б) $\begin{cases} x-3y=0, \\ |x+y|+|x-3y|=16, \end{cases}$ или $\begin{cases} x=3y, \\ |4y|=16, \end{cases}$ откуда $x = 12$, $y = 4$ и $x=-12, y=-4$.

Ответ: (4; –4), (–4; 4), (12; 4), (–12; –4).

8(б) Для системы уравнений $\begin{cases} \sqrt{x^2+5x-6}=y, \\ \sqrt{y^2+5y-6}=x \end{cases}$ учтем, что $x, y \geq 0$, и возведем в квадрат уравнения $\begin{cases} x^2+5x-6=y^2, \\ y^2+5y-6=x^2. \end{cases}$ Вычтем уравнения системы и получим: $x^2 - y^2 + 5x - 5y = y^2 - x^2$, или $2(x-y)(x+y) + 5(x-y) = 0$, или $(x-y)(2x+2y+5) = 0$. Так как $x, y \geq 0$, то в произведении только первый множитель равен нулю, т. е. $y = x$. Подставим это значение в первое уравнение: $x^2 + 5x - 6 = x^2$, откуда $5x - 6 = 0$ и $x = 1{,}2$, $y = 1{,}2$.

Ответ: (1,2; 1,2).

9. Удобнее всего исследовать систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a), \\ (x+y)^2=16 \end{cases}$ графически. Графиком первого уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом $R=\sqrt{2(1+a)}$. Графиком второго уравнения будут две параллельные прямые: $x + y = \pm 4$ или $y = -x \pm 4$. Очевидно, что данная система будет иметь ровно два решения, если построенные прямые будут касаться окружности. Из прямоугольного равнобедренного треугольника OAB получаем условие: $OB = OA\sqrt{2}$, или $4=\sqrt{2(1+a)}\cdot\sqrt{2}$, или $4 = 1 + a$, откуда $a = 3$. Легко найти решения системы, т. е. координаты точек касания A и $Д$: (2; 2) и (–2; –2).



Ответ: при $a = 3$ $(2; 2)$ и $(-2; -2)$.

Вариант 2

1. *Ответ:* а) $(-2; 4)$, $(-3; 1)$, $(4; 1)$; б) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

2. *Ответ:* 30 мин.
3. *Ответ:* а–в) построено.
4. *Ответ:* $(2; 6)$.

5. *Ответ:* а) $(4; 2)$, $(4; -2)$; б) $(2; 3)$, $\left(\frac{4}{3}; 3\right)$.

6. *Ответ:* на 55%.
7. *Ответ:* построено.

8(а) Для решения системы уравнений $\begin{cases} x^2+5xy+6y^2=0, \\ |x+2y|+|x+3y|=12 \end{cases}$ запишем ее в виде $\begin{cases} (x+2y)(x+3y)=0, \\ |x+2y|+|x+3y|=12. \end{cases}$ Так как в первом уравнении произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем две системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+2y=0, \\ |x+2y|+|x+3y|=12, \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-2y, \\ |y|=12, \end{cases}$ откуда $x = 24$, $y = -12$ и $x = -24$, $y = 12$;

б) $\begin{cases} x+3y=0, \\ |x+2y|+|x+3y|=12, \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-3y, \\ |y|=12, \end{cases}$ откуда $x = 36$, $y = -12$ и $x = -36$, $y = 12$.

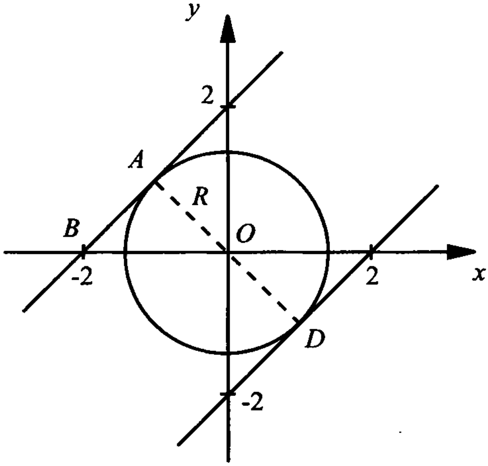
Ответ: (24; −12), (−24; 12), (36; −12), (−36; 12).

8(б) Для системы уравнений $\begin{cases} \sqrt{x^2+4x-7}=y, \\ \sqrt{y^2+4y-7}=x \end{cases}$ учтем, что $x, y \geq 0$, и возведем в квадрат уравнения $\begin{cases} x^2+4x-7=y^2, \\ y^2+4y-7=x^2. \end{cases}$ Вычтем уравнения системы и получим: $x^2 - y^2 + 4x - 4y = y^2 - x^2$, или $2(x - y)(x + y) + 4(x - y) = 0$, или $(x - y)(x + y + 2) = 0$. Так как $x, y \geq 0$, то в произведении только первый множитель равен нулю, т. е. $y = x$. Подставим это значение в первое уравнение: $x^2 + 4x - 7 = x^2$, откуда $4x - 7 = 0$ и $x = \frac{7}{4}$, $y = \frac{7}{4}$.

Ответ: $\left(\frac{7}{4}; \frac{7}{4}\right)$.

9. Удобнее всего исследовать систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2(1-a), \\ (x-y)^2=4 \end{cases}$ графически. Графиком первого уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом $R=\sqrt{2(1-a)}$. Графиком второго уравнения будут две параллельные прямые: $y - x = \pm 2$ или $y = x \pm 2$. Очевидно, что данная система будет иметь ровно два решения, если построенные прямые будут касаться окружности. Из прямоугольного равнобедренного треугольника OAB получаем условие: $OB = OA\sqrt{2}$ или $2=\sqrt{2(1-a)}\cdot\sqrt{2}$, или $1 = 1 - a$, откуда $a = 0$. Легко найти

решения системы, т. е. координаты точек касания *А* и *Д*: (−1; 1) и (1; −1).



Ответ: при $a = 0$ (−1; 1) и (1; −1).

Глава IV. Арифметическая и геометрическая прогрессии

§ 9. Арифметическая прогрессия

Уроки 62–63. Последовательности

Цель: рассмотреть основные понятия, связанные с последовательностями.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Множество чисел, для каждого из которых известен его порядковый номер, называют *последовательностью.*

Пример 1

а) В последовательности положительных нечетных чисел: 1, 3, 5, 7, ... известно, что первое число равно 1, второе число равно 3, третье число равно 5 и т. д.

б) В последовательности правильных дробей с числителем 1: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ известно, что первое число равно $\frac{1}{2}$, второе число равно $\frac{1}{3}$, третье число равно $\frac{1}{4}$ и т. д.

Числа, образующие последовательность, называют *членами последовательности.* Члены последовательности обычно обозначают буквами с индексами, указывающими порядковый номер члена: a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... Соответственно, член последовательности с номером n (или n-й член последовательности) обозначают a_n, а саму последовательность – (a_n).

Пример 2

Рассмотрим последовательность натуральных трехзначных чисел: 100; 101; 102; ...; 999. В ней: $a_1 = 100$, $a_2 = 101$, $a_3 = 102$, ..., $a_{900} = 999$. Член этой последовательности с номером n (n-й член последовательности) можно вычислить по формуле $a_n = 99 + n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots, 900$.

Последовательность может содержать бесконечно много членов (пример 1). Такую последовательность называют *бесконечной.* Последовательность может содержать и конечное число членов (пример 2). Такую последовательность называют *конечной.*

Последовательность необходимо задать, т. е. указать способ, с помощью которого можно найти каждый ее член. Рассмотрим *основные способы задания* последовательностей.

1. Аналитический способ (формула *n*-го члена)

Последовательность задается формулой, которая позволяет найти по номеру n ее член a_n.

Пример 3

а) Пусть последовательность задана формулой $a_n = 3n - 2$. Подставляя вместо n натуральные числа, находим члены последовательности: $a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$, $a_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$, $a_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$ и т. д.

Имеем последовательность: 1, 4, 7, … .

б) Пусть последовательность задана формулой $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

Подставляя вместо n натуральные числа, находим члены последовательности: $a_1 = \dfrac{1+(-1)^1}{2} = 0$, $a_2 = \dfrac{1+(-1)^2}{2} = 1$, $a_3 = \dfrac{1+(-1)^3}{2} = 0$, $a_4 = \dfrac{1+(-1)^4}{2} = 1$ и т. д. Имеем последовательность: 0, 1, 0, 1, … .

2. Аналитический способ (рекуррентная формула)

Последовательность задается формулой, которая позволяет найти следующие члены последовательности, если известны один или несколько предыдущих членов.

Пример 4

а) Пусть последовательность задана формулой $a_{n+1} = 2a_n + 3$, где $a_1 = 5$ и $n \geq 1$. Запишем рекуррентную формулу для $n = 1$: $a_{1+1} = 2a_1 + 3$, или $a_2 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$.

Пишем формулу для $n = 2$: $a_{2+1} = 2a_2 + 3$, или $a_3 = 2 \cdot 13 + 3 = 29$.

Запишем формулу для $n = 3$: $a_{3+1} = 2a_3 + 3$, или $a_4 = 2 \cdot 29 + 3 = 61$ и т. д.

Имеем последовательность: 5, 13, 29, 61, … .

б) Пусть последовательность задана формулой $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$, где $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $n \geq 1$. Запишем рекуррентную формулу для $n = 1$: $a_{1+2} = 2a_{1+1} + 3a_1$, или $a_3 = 2a_2 + 3a_1$, или $a_3 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$.

Пишем формулу для $n = 2$: $a_{2+2} = 2a_{2+1} + 3a_2$, или $a_4 = 2a_3 + 3a_2 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 20$.

Запишем формулу для $n = 3$: $a_{3+2} = 2a_{3+1} + 3a_3$, или $a_5 = 2a_4 + 3a_3$, или $a_5 = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 7 = 61$ и т. д.

Имеем последовательность: 1, 2, 7, 20, 61, … .

3. Описательный способ

Описывается способ получения членов последовательности.

Пример 5

а) Рассмотрим последовательность натуральных четных чисел. Из описания последовательности легко выписать ее члены: 2, 4, 6, 8, ...

б) Рассмотрим последовательность приближений по недостатку с точностью до n цифр иррационального числа π. Из описания последовательности выписываем ее члены: 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; ...

Теперь рассмотрим *два основных свойства* последовательностей.

1. Ограниченность последовательности

Последовательность (a_n) называют ограниченной, если существуют два таких числа a и A, что для любого натурального номера n выполнено неравенство: $a \le a_n \le A$.

Пример 6

Докажем ограниченность последовательности $a_n = \dfrac{n-1}{n+2}$.

Найдем первый член последовательности $a_1 = \dfrac{1-1}{1+2} = 0$ и член последовательности с очень большим номером n, например: $a_{100} = \dfrac{100-1}{100+2} = \dfrac{99}{102} \approx 1$.

Возникает гипотеза, что последовательность ограничена и $a = 0$, и $A = 1$. Поэтому надо доказать, что при всех натуральных значениях n выполнено неравенство $0 \le \dfrac{n-1}{n+2} \le 1$.

Очевидно, что левая часть неравенства $0 \le \dfrac{n-1}{n+2}$ выполняется.

Рассмотрим правую часть неравенства $\dfrac{n-1}{n+2} \le 1$. Так как выражение $n + 2$ положительно, то получаем неравенство $n - 1 \le n + 2$, или $-1 \le 2$, которое является верным.

2. Монотонность последовательности

Последовательность (a_n) называют *возрастающей,* если каждый ее член (начиная со второго) больше предыдущего, т. е. $a_{n+1} > a_n$ для $n \ge 1$.

Последовательность (a_n) называют *убывающей,* если каждый ее член (начиная со второго) меньше предыдущего, т. е. $a_{n+1} < a_n$ для $n \ge 1$.

Пример 7

Определим монотонность последовательности $a_n = \dfrac{n-1}{n+2}$.

Запишем $(n+1)$-й член последовательности $a_n = \dfrac{(n+1)-1}{(n+1)+2} = \dfrac{n}{n+3}$.

Найдем разность двух соседних членов: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n}{n+3} - \dfrac{n-1}{n+2} =$

$= \dfrac{n(n+2)-(n+3)(n-1)}{(n+3)(n+2)} = \dfrac{3}{(n+3)(n+2)}$.

Так как n – натуральное число, то при всех n дробь $\dfrac{3}{(n+3)(n+2)}$ положительна. Поэтому $a_{n+1} - a_n > 0$, или $a_{n+1} > a_n$, при всех n. Тогда по определению данная последовательность (a_n) возрастающая.

Как видно из этого урока, понятия последовательности и функции, их способы задания и свойства очень похожи. Поэтому последовательность (a_n) можно рассматривать как функцию a_n натурального аргумента n.

III. Контрольные вопросы

1. Определение последовательности.
2. Основные способы задания последовательности.
3. Ограниченность последовательности.
4. Монотонность последовательности.

IV. Задание на уроке

№ 560; 562; 564 (а, в); 565 (б, г, е); 57; 568 (а); 569 (а, г); 570 (б).

V. Задание на дом

№ 561; 563; 564 (б, г); 565 (а, в, д); 566; 568 (б); 569 (б, в); 570 (а).

VI.Творческие задания

1. Найдите четыре первых члена последовательности (a_n), если:

а) $a_{n+1} = 3a_n - 1$, $a_1 = 1$;
б) $a_{n+1} = 4a_n + 3$, $a_1 = 2$;
в) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$;
г) $a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$;
д) $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$;
е) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$;

Ответы: а) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$, $a_4 = 14$; б) $a_1 = 2$, $a_2 = 11$, $a_3 = 47$, $a_4 = 191$; в) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$; г) $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = -3$, $a_4 = -5$; д) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$; е) $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 9$.

2. Докажите ограниченность последовательности (a_n).

а) $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$; в) $a_n = \frac{n+5}{n}$;

б) $a_n = \frac{1-3n}{n+2}$; г) $a_n = \frac{3-2n}{n+1}$.

3. Определите монотонность последовательности (a_n).

а) $a_n = \frac{3n+2}{n+1}$; д) $a_n = \frac{3n-4}{n+3}$;

б) $a_n = (-1)^n \cdot n$; е) $a_n = \frac{3-n}{n+1}$;

в) $a_n = \frac{5-2n}{n+2}$; ж) $a_n = n^2 + 4n + 10$;

г) $a_n \frac{(-1)^n}{n}$; з) $a_n = n^2 - 8n + 20$.

Ответы: а, д, ж) возрастающая; в, е) убывающая; б, г, з) немонотонная.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 64–65. Определение арифметической прогрессии. Формула *n*-го члена арифметической прогрессии

Цель: рассмотреть частный вид последовательности – арифметическую прогрессию.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Определение возрастающей последовательности.

2. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$. Найдите a_1, a_5, a_{10}.

3. Последовательность (a_n) задана формулой $a_{n+1} = 3 - 2a_n$, где $a_1 = 2$ и $n \geq 1$. Найдите первые четыре члена последовательности.

Вариант 2

1. Определение убывающей последовательности.

2. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = \dfrac{3-2n}{n+2}$. Найдите a_1, a_5, a_{10}.

3. Последовательность (a_n) задана формулой $a_{n+1} = 3a_n - 2$, где $a_1 = 2$ и $n \geq 1$. Найдите первые четыре члена последовательности.

III. Изучение нового материала

Из всех последовательностей наиболее изучены две: арифметическая и геометрическая прогрессии, которые будут рассмотрены в этой главе. Сначала рассмотрим арифметическую прогрессию.

Последовательность чисел a_n, *каждый член* которой (начиная со второго) *равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом* d (разностью прогрессии), называется *арифметической прогрессией*: $a_{n+1} = a_n + d$ ($n \geq 1$). При $d > 0$ арифметическая прогрессия *возрастает,* при $d < 0$ – *убывает.*

Пример 1

Найти первые пять членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 5$, $d = 2$.

Из определения арифметической прогрессии $a_{n+1} = a_n + d$ получаем: при $n = 1$ $a_2 = a_1 + d = 5 + 2 = 7$, при $n = 2$ $a_3 = a_2 + d = 7 + 2 = 9$, при $n = 3$ $a_4 = a_2 + d = 9 + 2 = 11$, при $n = 4$ $a_5 = a_4 + d = 11 + 2 = 13$.

Итак, эти члены: 5, 7, 11, 13.

В определении арифметической прогрессии использована рекуррентная формула $a_{n+1} = a_n + d$. Удобнее получить формулу n-го члена.

Пример 2

Получим формулу n-го члена арифметической прогрессии.

Из определения арифметической прогрессии $a_{k+1} = a_k + d$ запишем $(n-1)$ равенство:
$$\left.\begin{aligned} &a_2 = a_1 + d\\ &a_3 = a_2 + d\\ &a_4 = a_3 + d\\ &\ldots\\ &a_{n-1} = a_{n-2} + d\\ &a_n = a_{n-1} + d \end{aligned}\right\} n-1.$$

Сложим эти равенства, тогда в левой и правой части сокращаются одинаковые члены a_2, a_3, ..., a_{n-1} и получаем: $a_n = a_1 + \underbrace{d + d + \ldots + d}_{n-1} = a_1 + d(n-1)$.

Таким образом, получена важнейшая формула – *формула n-го члена* арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Как правило, задачи на эту тему достаточно простые. Наиболее распространенный прием решения таких задач – записать условие задачи, используя *в качестве неизвестной первый член и разность прогрессии.*

Пример 3

В арифметической прогрессии сумма второго и пятого членов равна 8, а третьего и седьмого равна 14. Найти прогрессию.

Выразим все члены прогрессии через ее первый член и разность: $a_2 = a_1 + d$, $a_5 = a_1 + 4d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_7 = a_1 + 6d$ и запишем условия задачи: $8 = a_1 + a_5 = (a_1 + d) + (a_1 + 4d) = 2a_1 + 5d$, $14 = a_3 + a_7 = 2a_1 + 8d$.

Для определения a_1 и d получаем линейную систему уравнений $\begin{cases} 8 = 2a_1 + 5d, \\ 14 = 2a_1 + 8d. \end{cases}$ Вычитая из второго уравнения первое, найдем $6 = 3d$, или $d = 2$, и из любого из уравнений: $a_1 = -1$.

Пример 4

Первый член арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, ... равен единице. При каком значении разности прогрессии d величина $S = a_1a_3 + a_2a_3$ имеет минимальное значение?

Как и в предыдущей задаче, выразим члены прогрессии a_2 и a_3 через первый член $(a_1 = 1)$ и разность d: $a_2 = a_1 + d = 1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d = 1 + 2d$.

Тогда $S = 1(1+2d) + 1(1+d)(1+2d) = 2d^2 + 5d + 2$. Функция S в зависимости от d является квадратичной функцией (параболой) и достигает минимального значения при $d = -\frac{5}{2\cdot 2} = -\frac{5}{4}$.

Пример 5

Найти сумму чисел $\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}} + \frac{1}{\sqrt{101}+\sqrt{102}} + \frac{1}{\sqrt{102}+\sqrt{103}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{399}+\sqrt{400}}$.

Обратим внимание на то, что числа, стоящие под радикалами, образуют арифметическую прогрессию: 100, 101, 102, 103, ..., 399, 400.

Умножим числители и знаменатели дробей на разность чисел, стоящих в знаменателях: $S = \frac{\sqrt{101}-\sqrt{100}}{(\sqrt{101}+\sqrt{100})(\sqrt{101}-\sqrt{100})} + \ldots + \frac{\sqrt{400}-\sqrt{399}}{(\sqrt{400}+\sqrt{399})(\sqrt{400}-\sqrt{399})} = \frac{\sqrt{101}-\sqrt{100}}{101-100} + \frac{\sqrt{102}-\sqrt{101}}{102-100} + \ldots + \frac{\sqrt{400}-\sqrt{399}}{400-399}$.

За счет того что числа образовали арифметическую прогрессию, знаменатели дробей оказались равными разности прогрессии, т. е. 1. Тогда имеем: $S = \sqrt{101}-\sqrt{100}+\sqrt{102}-\sqrt{101}+\sqrt{103}-\sqrt{102}+\ldots+\sqrt{400}-\sqrt{399}$. Легко заметить, что в данной сумме сокращаются все числа, кроме $-\sqrt{100}$ и $\sqrt{400}$, и тогда сумма $S = -\sqrt{100}+\sqrt{400} = -10+20 = 10$.

Достаточно часто арифметическая прогрессия встречается в *текстовых* и *геометрических* задачах.

Пример 6

Четыре целых различных числа образуют арифметическую прогрессию. Одно из этих чисел равно сумме квадратов остальных трех чисел. Найти эти числа.

Пусть эти числа имеют вид: a; $a + d$; $a + 2d$; $a + 3d$ (очевидно, что a и d – целые числа). Запишем условие задачи: $a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 = a + 3d$, или $3a^2 + 6ad + 5d^2 = a + 3d$. Будем рассматривать это уравнение как квадратное, считая a неизвестной и d параметром.

Запишем уравнение в виде $3a^2 + a(6d - 1) + (5d^2 - 3d) = 0$.

Чтобы это уравнение имело решение, необходима неотрицательность его дискриминанта D. Найдем $D = (6d-1)^2 - 4\cdot 3\cdot(5d^2 - 3d) =$ $= 36d^2 - 12d + 1 - 60d^2 + 36d = -24d^2 + 24d + 1 \geq 0$.

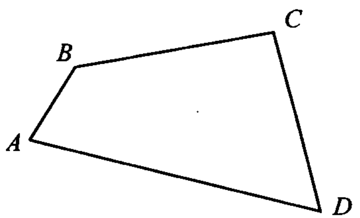
Решим это квадратное неравенство. Корни соответствующего уравнения $d = \frac{6 \pm \sqrt{42}}{12} \approx \frac{6 \pm 6,5}{12}$, т. е. $d_1 \approx -0,04$ и $d_2 \approx 1,04$. Тогда решение неравенства: $-0,04 \leq d \leq 1,04$. В этом промежутке есть два целых значения $d = 1$ и $d = 0$ (не подходит, т. к. даны различные числа).

Для $d = 1$ уравнение $3a^2 + a(6d - 1) + (5d^2 - 3d) = 0$ принимает вид: $3a^2 + 5a + 2 = 0$. Корни его: $a_1 = -1$, $a_2 = -\frac{2}{3}$ (не подходит).

Итак, искомые числа: -1; 0; 1; 2.

Пример 7

Стороны четырехугольника образуют арифметическую прогрессию. Можно ли в него вписать окружность?



Пусть стороны четырехугольника AB, BC, AD, CD в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию с первым членом a и разностью d: $AB = a$, $BC = a + d$, $AD = a + 2d$, $CD = a + 3d$.

В четырехугольник можно вписать окружность, если суммы его противоположных сторон равны, т. е. $AB + CD = BC + AD$. Проверим это условие: $a + (a + 3d) = (a + d) + (a + 2d)$.

Так как равенство верное, то в такой четырехугольник можно вписать окружность. Но это возможно только в том случае, когда стороны четырехугольника образуют арифметическую прогрессию именно в следующем порядке: AB, BC, AD, CD.

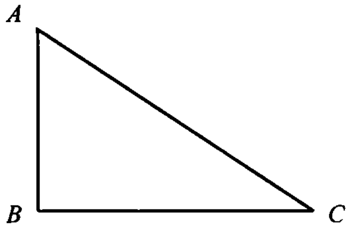
Пример 8

Стороны прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию. Найти стороны треугольника.

Пусть наименьший катет ΔABC: $AB = a$, тогда второй катет $BC = a + d$ и гипотенуза $AC = a + 2d$ (где d – разность прогрессии, $d > 0$).

Запишем теорему Пифагора: $AC^2 = AB^2 + BC^2$, или $(a + 2d)^2 = a^2 + (a + d)^2$, или $a^2 - 2ad - 3d^2 = 0$.

Решая это однородное уравнение, получим: $a = 3d$ и $a = -d$ (не подходит). Имеем: $AB = 3d$, $BC = 4d$, $AC = 5d$ (где d – любое число). Значит, условию задачи удовлетворяют прямоугольные треугольники, подобные египетскому.



Отметим еще одно важное *свойство* членов арифметической прогрессии. Любой член прогрессии (начиная со второго) равен полусумме соседних членов: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ $(n \geq 2)$ (характеристическое свойство).

Пример 9

Докажем характеристическое свойство арифметической прогрессии.

Используя определение арифметической прогрессии, получим: $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_n - d) + (a_n + d)}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$.

Достаточно часто при решении задач рассматриваемой темы используется *характеристическое свойство* арифметической прогрессии.

Пример 10

При каких значениях x числа 6, x^2, x образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию? Найти эти числа.

Запишем свойство арифметической прогрессии: $2x^2 = 6 + x$. Получаем квадратное уравнение, корни которого $x = -\frac{3}{2}$ и $x = 2$. Тогда искомыми числами будут: 6; $\frac{9}{4}$; $-\frac{3}{2}$ или 6; 4; 2.

IV. Контрольные вопросы

1. Определение арифметической прогрессии.
2. Формула n-го члена арифметической прогрессии.
3. Характеристическое свойство арифметической прогрессии.

V. Задание на уроке

№ 575 (а, б); 576 (а, в, д); 577 (б); 580 (а); 581; 583; 584 (б); 587; 589 (а); 591; 593; 595; 597 (а, б, г).

VI. Задание на дом

№ 575 (в, г); 576 (б, г, е); 577 (а); 580 (б); 582; 584 (а); 588; 589 (б); 590; 592; 594; 596; 597 (в, д, е); 598.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 66–67. Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии

Цель: найти сумму членов арифметической прогрессии.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Рекуррентная формула члена арифметической прогрессии.
2. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 3n - 5$. Найдите a_5 и a_{25}.
3. В арифметической прогрессии $a_3 = 7$ и $a_5 = 1$. Найдите a_{17}.

Вариант 2

1. Формула n-го члена арифметической прогрессии.
2. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 7 - 4n$. Найдите a_{10} и a_{30}.
3. В арифметической прогрессии $a_7 = 2$ и $a_{10} = 11$. Найдите a_{19}.

III. Изучение нового материала

Сумму первых n членов арифметической прогрессии можно найти по формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}2$, или $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n.$

Пример 1

Получим формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Обозначим сумму первых n членов арифметической прогрессии (a_n) через S_n. Запишем эту сумму дважды, расположив в первом случае члены в порядке возрастания их номеров, во втором случае – в порядке убывания номеров: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$; $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1$.

Сложим эти равенства: $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + {} + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$.

Покажем, что все суммы в скобках равны друг другу. Получаем:

$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$,

$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$ и т. д.

Тогда имеем $2S_n = (a_1 + a_n)n$, откуда $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$ (первая формула получена).

Используем формулу n-го члена $a_n = a_1 + d\,(n - 1)$. Тогда имеем: $S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2}n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n$ (вторая формула получена).

Пример 2

В арифметической прогрессии $a_3 = 7$ и $a_8 = 27$. Найдем сумму первых сорока членов прогрессии.

Сначала найдем первый член a_1 и разность d прогрессии. Запишем условия задачи: $\begin{cases} a_1 + 2d = 7, \\ a_1 + 7d = 27. \end{cases}$

Из этой линейной системы уравнений находим $a_1 = -1$ и $d = 4$. Теперь найдем сумму первых сорока членов прогрессии: $S_{40} = \frac{2\cdot(-1) + 4\cdot(40-1)}{2}40 = \frac{-2 + 4\cdot 39}{2}40 = 154\cdot 20 = 3080.$

Пример 3

Найти сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 4 дают остаток 3.

Первое число легко угадать: $a_1 = 103$. Легко также угадать несколько последующих таких чисел: $a_2 = 107$, $a_3 = 111$, $a_4 = 115$. Видно, что искомые числа образуют арифметическую прогрессию с первым членом 103 и разностью 4. Общий член этой прогрессии можно записать в виде $a_n = 103 + 4(n - 1) = 99 + 4n$.

Определим теперь число членов в сумме.

Так как последнее трехзначное число 999, то получаем условие $a_n \leq 999$, или $99 + 4n \leq 999$. Решив это неравенство, найдем $n \leq 225$.

Итак, в искомую сумму войдет 225 слагаемых. Найдем сумму 225 членов арифметической прогрессии с первым членом 103 и разностью 4: $S = \frac{2\cdot 103 + 4(225-1)}{2} 225 = 551\cdot 225 = 123\,975$.

Пример 4

Известно, что при любом n сумма S_n членов в некоторой последовательности (a_n) определяется по формуле $S_n = (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n) = 4n^2 - 3n$. Докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией, и напишите первые три члена этой прогрессии.

Для доказательства используем определение арифметической прогрессии. Сначала получим формулу общего члена последовательности (a_n). Очевидно, что $S_n = (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}) + a_n = S_{n-1} + a_n$. Отсюда: $a_n = S_n - S_{n-1} = (4n^2 - 3n) - [4(n-1)^2 - 3(n-1)] = 8n - 7$.

Рассмотрим разность двух соседних членов последовательности: $a_n - a_{n-1} = (8n - 7) - [8(n-2) - 7] = 8$. Отсюда получим: $a_n = a_{n-1} + 8$, т. е. каждый член последовательности равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом 8. Итак, данная последовательность по определению является арифметической прогрессией.

Так как в процессе доказательства была получена формула общего члена этой арифметической прогрессии $a_n = 8n - 7$, то легко находим: $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_3 = 17$.

Пример 5

Решить уравнение $2 + 5 + 8 + 11 + ... + x = 155$.

В левой части уравнения находится сумма членов арифметической прогрессии: 2; 5; 8; 11; ..., первый член которой 2 и разность 3. Пусть в эту сумму входит n слагаемых. Тогда, используя формулулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии, получаем: $\frac{2+x}{2}n=155$. Второе уравнение получим, записав последний член этой суммы: $x = 2 + 3(n - 1) = 3n - 1$. Подставив второе уравнение в первое, придем к квадратному уравнению относительно n: $\frac{2+(3n-1)}{2}n=155$, или $3n^2 + n - 310 = 0$, корни которого $n = 10$ и $n=-\frac{31}{3}$ (не подходит, т. к. n – число натуральное).

После этого находим: $x = 3\cdot10 - 1 = 29$. Итак, $x = 29$ – единственный корень данного уравнения.

Пример 6

Два велосипедиста, расстояние между которыми 99 м, одновременно начинают движение навстречу друг другу. Первый велосипедист за каждую секунду проезжал по 5 м. Второй велосипедист за первую секунду проехал 1,5 м, а за каждую последующую – на 0,5 м больше, чем за предыдущую. Через какое время велосипедисты встретились?

Пусть велосипедисты встретились через n сек. Тогда первый из них проехал до встречи $5n$ (м). Для второго велосипедиста расстояния, проезжаемые в каждую секунду, образуют арифметическую прогрессию: 1,5; 2; 2,5; 3; ... Тогда за n сек он проедет расстояние: $\frac{2\cdot1{,}5+0{,}5(n-1)}{2}n=\frac{2{,}5+0{,}5n}{2}n.$

Сума расстояний, пройденных велосипедистами, равна 99 м. Получаем уравнение $5n+\frac{2{,}5+0{,}5n}{2}n=99$, или $n^2 + 25n - 396 = 0$, корни которого $n_1 = 11$ и $n_2 = -36$ (не подходит). Итак, встреча произошла через 11 сек.

IV. Задание на уроке

№ 603 (а); 604 (б); 606 (а); 608 (б); 609 (а, в); 610; 612; 615 (а); 617.

V. Задание на дом

№ 603 (б); 604 (а); 606 (б); 608 (а); 609 (б, г); 611; 613; 615 (б); 618.

VI. Подведение итогов урока

§ 10. Геометрическая прогрессия

Уроки 68–69. Определение геометрической прогрессии. Формула n-го члена геометрической прогрессии

Цель: рассмотреть последовательность – геометрическую прогрессию.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найдите сумму тридцати первых членов арифметической прогрессии, заданной формулой $a_n = 3n + 2$.

2. В арифметической прогрессии $a_6 = 1$ и $a_{10} = 13$. Найдите сумму первых двадцати членов.

3. Найдите сумму всех трехзначных чисел, кратных 4.

Вариант 2

1. Найдите сумму сорока первых членов арифметической прогрессии, заданной формулой $a_n = 4n - 3$.

2. В арифметической прогрессии $a_5 = 3$ и $a_9 = 15$. Найдите сумму первых тридцати членов.

3. Найдите сумму всех трехзначных чисел, кратных 3.

III. Изучение нового материала

Рассмотрим еще одну наиболее изученную последовательность – геометрическую прогрессию.

Последовательность чисел b_n, первый член которой отличен от нуля и *каждый член,* начиная со второго, *равен предыдущему, умноженному на одно и то же* отличное от нуля *число* q, называется *геометрической прогрессией* (q – знаменатель прогрессии): $b_{n+1} = b_n q$ ($n \geq 1$, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$).

Пример 1

Найти первые четыре члена геометрической прогрессии, если $b_1 = 2$, $q = 3$.

Из определения геометрической прогрессии $b_{n+1} = b_n q$ имеем: при $n = 1$ $b_2 = b_1q = 2 \cdot 3 = 6$, при $n = 2$ $b_3 = b_2q = 6 \cdot 3 = 18$, при $n = 3$ $b_4 = b_3q = 18 \cdot 3 = 54$. Итак, эти члены: 2, 6, 18, 54.

Геометрическая прогрессия задается *рекуррентной формулой*. При решении задач более удобна *формула n-го члена*.

Пример 2

Получим формулу n-го члена геометрической прогрессии.

Используем рекуррентную формулу $b_{k+1} = b_n q$ и выпишем $(n-1)$ равенство:

$$\left.\begin{aligned} &b_2 = b_1 q\\ &b_3 = b_2 q\\ &b_4 = b_3 q\\ &\dots\\ &b_n = b_{n-1} q \end{aligned}\right\} n-1.$$

Перемножим почленно эти равенства. При этом в обеих частях равенства сократится произведение $b_2 b_3 b_4 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}$. Получаем $b_n = b_1 q^{n-1}$ – формулу n-го члена геометрической прогрессии.

При решении задач, связанных с геометрической прогрессией, удобно выразить члены прогрессии через *ее первый член и знаменатель*.

Пример 3

Четвертый член геометрической прогрессии больше второго члена на 24, а сумма второго и третьего членов равна 6. Найти эту прогрессию.

Выразим второй, третий, четвертый члены прогрессии через ее первый член: $b_2 = b_1q$, $b_3 = b_1q^2$, $b_4 = b_1q^3$ и запишем условия задачи: $24 = b_4 - b_2 = b_1q^3 - b_1q = b_1q(q^2-1)$; $6 = b_2 + b_3 = b_1q + b_1q^2 = b_1q(1+q)$.

Получим систему нелинейных уравнений $\begin{cases} 24 = b_1q(q^2-1), \\ 6 = b_1q(q+1). \end{cases}$

Разделив первое уравнение на второе, найдем: $4 = q - 1$, откуда $q = 5$. Тогда из второго уравнения $b_1 = \dfrac{1}{5}$.

Пример 4

Первый член геометрической прогрессии $b_1, b_2, b_3, \ldots$ равен единице. При каком значении знаменателя прогрессии величина $4b_2 + 5b_3$ имеет минимальное значение?

Выразив второй и третий члены прогрессии через ее первый член и знаменатель: $b_2 = b_1q = q$; $b_3 = b_1q^2 = q^2$, получим: $S = 4b_2 + 5b_3 = 5q^2 + 4q$.

Квадратичная функция $S(q)$ достигает минимального значения при $q = -\frac{4}{2\cdot 5} = -\frac{2}{5}$.

Пример 5

Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - x + a = 0$ и x_3, x_4 – корни уравнения $x^2 - 4x + b = 0$. Известно, что числа x_1, x_2, x_3, x_4 (в указанном порядке) составляют возрастающую геометрическую прогрессию. Решить уравнения и найти числа a, b.

Для данных квадратных уравнений запишем формулы Виета:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1x_2 = a, \\ x_3 + x_4 = 4, \\ x_3x_4 = b. \end{cases}$$

Рассмотрим сначала первое и третье уравнения этой системы и учтем, что $x_2 = x_1q$, $x_3 = x_1q^2$, $x_4 = x_1q^3$. Тогда получим: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$

или $\begin{cases} x_1(1+q) = 1, \\ x_1q^2(1+q) = 4. \end{cases}$ Разделив второе уравнение на первое, найдем $q^2 = 4$, откуда $q = 2$ и $q = -2$ (не подходит, т. к. прогрессия возрастающая, т. е. $q > 0$).

Из первого уравнения получаем: $x_1 = \frac{1}{1+q} = \frac{1}{3}$, тогда $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{4}{3}$ и $x_4 = \frac{8}{3}$.

Из второго и четвертого уравнений исходной системы находим: $a = x_1x_2 = \frac{2}{9}$ и $b = x_3x_4 = \frac{32}{9}$. Итак: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{4}{3}$, $x_4 = \frac{8}{3}$, $a = \frac{2}{9}$, $b = \frac{32}{9}$.

Отметим еще одно важное свойство членов геометрической прогрессии. Квадрат любого члена прогрессии (начиная со второго) равен произведению соседних членов: $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$ $(n \geq 2)$.

Пример 6

Докажем характеристическое свойство членов геометрической прогрессии.

Используя определение геометрической прогрессии, запишем: $b_{n-1}b_{n+1} = \left(\dfrac{b_n}{q}\right)\cdot(b_n q) = b_n^2.$

При решении задач часто используется *характеристическое свойство* геометрической прогрессии.

Пример 7

При каких значениях x числа $(x-2)$; x; $(x+3)$ образуют геометрическую прогрессию?

Для решения этой задачи воспользуемся свойством геометрической прогрессии: квадрат члена прогрессии равен произведению членов с ним соседних. Так как ничего не сказано о порядке следования чисел, то в качестве среднего числа необходимо рассмотреть каждое из данных чисел.

а) Пусть $(x-2)$ – среднее по порядку число. Запишем свойство прогрессии: $(x-2)^2 = x(x+3)$, откуда $x=\dfrac{4}{7}$, и имеем прогрессии: $\dfrac{4}{7}$; $-\dfrac{10}{7}$; $\dfrac{25}{7}$ (знаменатель равен $-\dfrac{5}{2}$) или $\dfrac{5}{7}$; $-\dfrac{10}{7}$; $\dfrac{4}{7}$ (знаменатель равен $-\dfrac{2}{5}$).

б) Пусть x – среднее из чисел. Тогда $x^2 = (x-2)(x+3)$, откуда $x=6$.

Получаем прогрессии: 4; 6; 9 (знаменатель $\dfrac{3}{2}$) или 9; 6; 4 (знаменатель $\dfrac{2}{3}$).

в) Пусть $(x+3)$ – среднее из чисел. Тогда $(x+3)^2 = x(x-2)$, откуда $x=-\dfrac{9}{8}$. Находим прогрессии: $-\dfrac{9}{8}$; $\dfrac{15}{8}$; $-\dfrac{25}{8}$ (знаменатель $-\dfrac{5}{3}$) или $-\dfrac{25}{8}$; $\dfrac{15}{8}$; $-\dfrac{9}{8}$ (знаменатель $-\dfrac{3}{5}$).

Итак, при $x=-\dfrac{9}{8}$; $x=\dfrac{4}{7}$; $x=6$ данные числа образуют геометрическую прогрессию.

IV. Контрольные вопросы

1. Определение геометрической прогрессии.
2. Формула n-го члена геометрической прогрессии.
3. Характеристическое свойство геометрической прогрессии.

V. Задание на уроке

№ 623 (а, г); 624 (а, д); 625 (б, в); 627 (а, б); 630 (а); 631 (б); 633 (а); 634; 637; 639; 641; 643.

VI. Задание на дом

№ 623 (б, в); 624 (б, е); 625 (а, г); 627 (в, г); 630 (б); 631 (а); 633 (б, в); 635; 638; 640; 642; 644.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 70–71. Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии

Цель: получить формулу для суммы членов геометрической прогрессии.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Рекуррентная формула члена геометрической прогрессии.
2. Для геометрической прогрессии $2;\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{9};\ \ldots$ найдите: а) пятый член; б) n-й член.
3. В геометрической прогрессии $b_3 = \frac{7}{2}$ и $b_6 = \frac{7}{16}$. Найдите b_1 и q.

Вариант 2

1. Формула n-го члена геометрической прогрессии.

2. Для геометрической прогрессии 3; $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; ... найдите: а) пятый член; б) n-й член.

3. В геометрической прогрессии $b_2 = \frac{5}{3}$ и $b_5 = \frac{5}{81}$. Найдите b_1 и q.

III. Изучение нового материала

Сумма n первых членов вычисляется по формуле $S_n = \frac{b_{n+1} - b_1}{q-1}$,

или $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$ $(q \neq 1)$ и $S_n = nb_1$ $(q = 1)$.

Пример 1

Получим формулу для вычисления суммы n первых членов геометрической прогрессии.

Рассмотрим сумму n первых членов прогрессии:

$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{n-1} + b_n$. [1]

Умножим эту величину на q и получим: $qS_n = b_1q + b_2q + b_3q + ... + b_{n-1}q + b_nq$.

Учитывая определение геометрической прогрессии ($b_n = b_{n-1}q$: $b_1q = b_2$, $b_2q = b_3$, ..., $b_nq = b_{n+1}$), запишем это же равенство: $qS_n = b_2 + b_3 + b_4 + ... + b_n + b_{n+1}$. [2]

Вычтем из соотношения [2] выражение [1], тогда в правой части сокращаются члены b_2, b_3, ..., b_n и получаем: $S_n(q-1) = b_{n+1} - b_1$,

откуда $S_n = \frac{b_{n+1} - b_1}{q-1}$ (разумеется, для $q \neq 1$).

Учитывая, что $b_{n+1} = b_1q^n$, из этого уравнения находим: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$.

Итак, $S_n = \frac{b_{n+1} - b_1}{q-1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$.

Если знаменатель $q = 1$, то геометрическая прогрессия состоит из одинаковых членов b_1. Тогда сумма первых n членов такой прогрессии равна $S_n = nb_1$.

Пример 2

Найдем сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, второй член которой равен 6, а четвертый равен 24.

Сначала определим характеристики геометрической прогрессии. Используя формулу n-го члена, запишем условия задачи: $\begin{cases} b_1q = 6, \\ b_1q^3 = 24. \end{cases}$ Разделив второе уравнение на первое, получим $q^2 = 4$, откуда $q = \pm 2$.

Для $q = 2$ найдем: $b_1 = \frac{6}{q} = 3$ и сумму $S_8 = \frac{3\cdot(2^8 - 1)}{2-1} = 3\cdot 255 = 765$.

Для $q = -2$ получим: $b_1 = -3$ и сумму $S_8 = \frac{-3\cdot((-2)^8 - 1)}{-2-1} = 255$.

Пример 3

Сумма первого и пятого членов геометрической прогрессии равна 51, а сумма второго и шестого членов равна 102. Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, нужно сложить, чтобы их сумма была равна 3069?

Найдем характеристики геометрической прогрессии. Используя формулу n-го члена, запишем условия задачи: $\begin{cases} b_1 + b_1q^4 = 51, \\ b_1q + b_1q^5 = 102, \end{cases}$ или

$$\begin{cases} b_1(+q^4) = 51, \\ b_1q(1+q^4) = 102. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим: $q = \frac{102}{51} = 2$.

Из первого уравнения найдем: $b_1 = \frac{51}{1+q^4} = \frac{51}{17} = 3$.

Предположим, что сложили n членов прогрессии и получили сумму $S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2-1} = 3(2^n - 1)$.

По условию такая сумма равна 3069. Имеем уравнение: $3(2^n - 1) = 3069$, или $2^n - 1 = 1023$, или $2^n = 1024 = 2^{10}$, откуда $n = 10$. Итак, нужно сложить десять первых членов прогрессии.

Пример 4

Решить уравнение $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + x = 255$.

В левой части уравнения находится сумма геометрической прогрессии с первым членом 1, знаменателем 2. Пусть число слагаемых равно n. Тогда эта сумма равна: $\frac{1(2^n-1)}{2-1}=2^n-1=255$, отсюда: $2^n=256=2^8$. Так как x является n-м членом прогрессии, то $x=1\cdot 2^{n-1}=2^{8-1}=2^7=128$.

Очень распространен круг задач, где для *суммирования чисел и алгебраических выражений* используется сумма геометрической прогрессии.

Пример 5

Найти сумму $S=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\ldots+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)$, $x\neq\pm 1$.

Возведем в квадрат слагаемые этой суммы и получим: $S=\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\left(x^4+2+\frac{1}{x^4}\right)+\ldots+\left(x^{2n}+2+\frac{1}{x^{2n}}\right)$. Перейдем к отрицательным показателям степени и сгруппируем слагаемые, входящие в S: $S=(x^2+x^4+\ldots+x^{2n})+(x^{-2}+x^{-4}+x^{-6}+\ldots+x^{-2n})+(2+2+\ldots+2)$. Каждая из трех скобок содержит по n слагаемых. Причем первая скобка содержит сумму геометрической прогрессии с первым членом x^2 и знаменателем x^2; вторая – сумму геометрической прогрессии с первым членом x^{-2} и знаменателем x^{-2}; третья – сумму чисел 2. Учитывая это, получим: $S=\frac{x^2[(x^2)^n-1]}{x^2-1}+\frac{x^{-2}[(x^{-2})^n-1]}{x^{-2}-1}+2n=$

$$=\frac{x^{2n+2}-x^2}{x^2-1}+\frac{\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^{2n}}-1\right)}{\frac{1}{x^2}-1}+2n=\frac{x^{2n+2}-x^2}{x^2-1}+\frac{x^{2n}-1}{(x^2-1)x^{2n}}+2n=$$

$$=\frac{x^{4n+2}-1-x^{2n}(x^2-1)}{(x^2-1)x^{2n}}+2n=\frac{x^{4n+2}-1}{(x^2-1)x^{2n}}-1+2n=$$

$$=\frac{x^{4n+2}-1}{(x^2-1)x^{2n}}+(2n-1).$$

Пример 6

Найти сумму: $1+11+111+\ldots+\underbrace{111\ldots1}_{n}$.

Умножим и разделим искомую сумму на 9: $S=\frac{1}{9}\left(9+99+999+\ldots+\underbrace{999\ldots9}_{n}\right)=\frac{1}{9}[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+$

$+\ldots+(10^n-1)]$. Затем сгруппируем слагаемые суммы: $S=\frac{1}{9}\left[\left(10+10^2+10^3+\ldots+10^n\right)-\left(\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n}\right)\right]$.

Первая скобка представляет собой сумму геометрической прогрессии с первым членом 10 и знаменателем 10. Учитывая это, получим: $S=\frac{1}{9}\left[\frac{10\cdot(10^n-1)}{10-1}-n\right]=\frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$.

Пример 7

При любом n сумма S_n членов некоторой последовательности (b_n) находится по формуле $S_n = 6\cdot3^n - 2$. Докажите, что эта последовательность не является геометрической прогрессией, и найдите пять первых членов этой последовательности.

Как в примере 3, воспользуемся определением геометрической прогрессии. Найдем сначала формулу n-го члена данной последовательности (b_n). Очевидно, что $b_n = S_n - S_{n-1} = (6\cdot3^n-2)-$ $-(6\cdot3^{n-1}-2)=6\cdot3^{n-1}(3-1)=12\cdot3^{n-1}$.

Найдем отношение двух соседних членов этой последовательности: $\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{12\cdot3^{n-1}}{12\cdot3^{n-2}}=3$, откуда $b_n = b_{n-1}\cdot3$. Казалось бы, данная последовательность является геометрической прогрессией со знаменателем 3. Однако выражение для $b_n = S_n - S_{n-1}$ справедливо только для $n \geq 2$ (т. к. при $n = 1$ величина S_{n-1} не существует). Поэтому выражение для $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ будет справедливо уже при $n \geq 3$ (т. к. при $n = 2$ величина b_{n-1} не описывается полученной формулой).

Итак, из приведенных рассуждений видно, что при $n \geq 2$ члены последовательности описываются соотношением $b_n = 12\cdot3^{n-1}$, и по этой формуле находим: $b_2 = 36$, $b_3 = 108$, $b_4 = 324$, $a_5 = 972$. Легко проверить, что $\frac{b_3}{b_2}=\frac{b_4}{b_3}=\frac{b_5}{b_4}=3$. Для нахождения b_1 учтем, что при $n = 1$ сумма S_n состоит всего из одного члена b_1 и $b_1 = S_1 =$ $= 6\cdot3-2 = 16$. Видно, что $\frac{b_2}{b_1}=\frac{36}{16}\neq3$.

Таким образом, последовательность не является геометрической прогрессией. Первые пять ее членов, соответственно, равны: 16; 36; 108; 324; 972.

Если $|q| < 1$, то прогрессия называется *бесконечно убывающей геометрической прогрессией*. Для нее, разумеется, как и для любой геометрической прогрессии, справедливы свойства и формулы, приведенные выше. Кроме того, можно вычислить сумму бесконечного числа членов такой прогрессии по формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Пример 8

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти эту прогрессию.

Пусть дана прогрессия b_1; b_1q; b_1q^2; ...; $|q| < 1$. Тогда ее сумма $S = \dfrac{b_1}{1-q}$. Кубы членов данной прогрессии: b_1^3; $b_1^3q^3$; $b_1^3q^6$; ... также образуют геометрическую прогрессию с первым членом b_1^3 и знаменателем q^3. Так как при $|q| < 1$ величина $|q^3| = |q|^3 < 1$, то эта прогрессия также бесконечно убывающая и ее сумма: $192 = \dfrac{b_1^3}{1-q^3}$.

Получаем систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} 4 = \dfrac{b_1}{1-q}, \\ 192 = \dfrac{b_1^3}{1-q^3}. \end{cases}$$

Для решения этой системы возведем первое уравнение в куб: $64 = \dfrac{b_1^3}{(1-q)^3}$ и разделим второе уравнение системы на полученное уравнение: $3 = \dfrac{(1-q)^3}{1-q^3} = \dfrac{(1-q)^2}{1+q+q^2}$ или $2q^2 + 5q + 2 = 0$.

Корни этого уравнения $q = -\dfrac{1}{2}$ и $q = -2$ (не подходит, т. к. прогрессия бесконечно убывающая и $|q| < 1$). Теперь из первого уравнения находим $b_1 = 4(1-q) = 4 \cdot \dfrac{3}{2} = 6$.

Понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии позволяет обращать десятичные бесконечные периодические дроби в обыкновенные.

Пример 9

Обратить десятичную дробь 0,(17) в обыкновенную.

Запишем дробь в виде $0,(17) = 0,171717... = \dfrac{17}{100} + \dfrac{7}{10000} + ...$. Таким образом, число 0,(17) является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_1 = \dfrac{7}{100}$ и $q = \dfrac{1}{100}$.

Эта сумма равна: $\dfrac{17/100}{1-1/100} = \dfrac{17}{99}$. Итак, $0,(17) = \dfrac{17}{99}$.

Заметим, что возможно и другое решение. Пусть дробь $0,(17) = x$, т. е. $x = 0,1717...$. Учитывая, что период этой дроби содержит две цифры, умножим величину x на 100: $100x = 17,1717...$.

Вычтем из $100x$ величину x и получим: $100x - x = 17,1717 - 0,1717 = 17$.

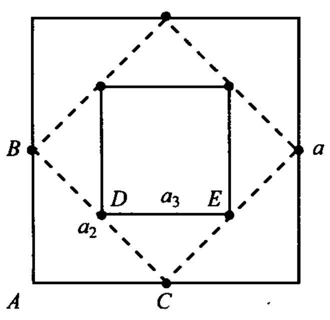
Для нахождения x имеем линейное уравнение $99x = 17$, откуда $x = \dfrac{17}{99}$.

Пример 10

Сторона квадрата равна a. Середины сторон этого квадрата соединим отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с данным, и т. д. Найти суммы сторон, периметров и площадей всех этих квадратов.

Обозначим стороны этих квадратов (начиная с данного): a, a_2, a_3, ... Рассмотрим прямоугольный равнобедренный ΔABC: $AB = AC = \dfrac{a}{2}$, $BC = a_2$.

Запишем для него теорему Пифагора: $BC^2 = AB^2 + AC^2$, или $a_2^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{2a^2}{4}$, откуда $a_2 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Аналогично из прямоугольного ΔDEC находим: $a_3 = \dfrac{a_2\sqrt{2}}{2}$ и т. д.



Таким образом, стороны квадратов образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию: $a,\ \frac{a\sqrt{2}}{2},\ \frac{a}{2}, \ldots,$ у которой первый член a и знаменатель $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Найдем ее сумму: $\frac{a}{1-\sqrt{2}/2} = \frac{2a}{2-\sqrt{2}} = \frac{2a(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} =$ $= a(2+\sqrt{2}) \approx 3{,}4a.$

Так как периметр квадрата $4a$, то периметры приведенных квадратов также образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $4a$ и знаменателем $\frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому ее сумма $4a(2+\sqrt{2})$.

Площадь квадрата a^2 и площади квадратов: $a^2;\ \frac{a^2}{2};\ \frac{a^2}{4}, \ldots$ образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом a^2 и знаменателем $\frac{1}{2}$, поэтому сумма площадей равна $\frac{a^2}{1-1/2} = 2a^2.$

Итак, сумма сторон: $a(2+\sqrt{2})$, периметров: $4a(2+\sqrt{2})$, площадей: $2a^2$.

IV. Контрольные вопросы

1. Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии.
2. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

V. Задание на уроке

№ 648 (а); 649 (б, в); 650 (а); 651 (б); 652 (а, г); 653; 655.

VI. Задание на дом

№ 648 (б); 649 (а, г); 650 (б); 651 (а); 652 (в, д); 654; 657.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 72–73. Смешанные задачи на прогрессии (факультативное занятие)

Цель: рассмотреть задачи, в которые входят две прогрессии – арифметическая и геометрическая.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 40, знаменатель прогрессии равен 3. Найдите сумму первых восьми членов этой прогрессии.

2. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, третий член которой равен 54, а пятый равен 6.

Вариант 2

1. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 39, знаменатель прогрессии равен –4. Найдите сумму первых четырех членов этой прогрессии.

2. Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, второй член которой равен 6, а четвертый равен 24.

III. Изучение нового материала

Широко распространены задачи, в условиях которых говорится о *двух прогрессиях*: *арифметической и геометрической*. Как правило, для решения таких задач достаточно учесть *характеристические свойства* этих прогрессий.

Пример 1

Три числа образуют арифметическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 8, получится геометрическая прогрессия с суммой членов 26. Найти эти числа.

Пусть эти числа a, b, c. Так как они образуют арифметическую прогрессию, то выполнено соотношение (свойство арифметической прогрессии): $2b = a + c$.

После сложения первого числа с числом 8 получаем числа $(a + 8)$, b, c, которые образуют геометрическую прогрессию. Запишем ее свойство: $b^2 = (a + 8)c$.

Кроме того, известно, что сумма членов геометрической прогрессии равна 26, т. е. $(a + 8) + b + c = 26$. Получаем для определения a, b, c систему уравнений $\begin{cases} 2b = a + c, \\ b^2 = (a+8)c, \\ (a+8) + b + c = 26. \end{cases}$

Запишем третье уравнение системы в виде $(a + c) + b = 18$. Учитывая первое уравнение системы, получим: $b + 2b = 18$, $b = 6$.

Тогда из первого и второго уравнений получаем систему для определения a и c: $\begin{cases} 12 = a + c, \\ 36 = (a+8)c. \end{cases}$

Выразив из первого уравнения $c = 12 - a$ и подставив во второе, получим уравнение $36 = (a + 8)\cdot(12 - a)$, или $a^2 - 4a - 60 = 0$. Корни этого уравнения $a = -6$ и $a = 10$. Соответствующие им числа: $c = 18$ и $c = 2$.

Таким образом, искомые числа: -6, 6, 18 и 10, 6, 2.

Рассмотрим *еще два способа* решения этой задачи, которые позволяют *уменьшить число неизвестных и сразу учесть свойство той или иной прогрессии.*

Так как числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то можно записать: $b = a + d$, $c = a + 2d$ (где d – разность этой прогрессии). При этом учтено свойство арифметической прогрессии $2b = a + c$ (действительно, $2(a + d) = a + (a + 2d)$).

После прибавления к первому числу числа 8 получаем числа $(a + 8)$, $(a + d)$, $(a + 2d)$. Сумма этих чисел равна 26, т. е. $(a + 8) + (a + d) + (a + 2d)$.

Имеем систему уравнений для определения a, d: $\begin{cases} (a+d)^2 = (a+8)(a+2d), \\ (a+8) + (a+d) + (a+2d) = 26. \end{cases}$

Из второго уравнения $a + d = 6$, откуда $d = 6 - a$.

Тогда из первого уравнения имеем: $36 = (a + 8)(12 - a)$, $a^2 - 4a - 60 = 0$. Решив это уравнение, найдем: $a = -6$ и $a = 10$.

Тогда соответствующие значения d: $d = 12$ и $d = -4$.

После этого находим числа: $a = -6$, $b = 6$, $c = 18$ и $a = 10$, $b = 6$, $c = 2$.

И наконец, третий способ решения позволяет учесть свойства геометрической прогрессии.

Так как числа $(a + 8)$, b, c образуют геометрическую прогрессию, то можно записать: $b = (a + 8)q$, $c = (a + 8)q^2$. При этом выполнено свойство геометрической прогрессии $b^2 = (a + 8)\ c$ (действительно, $[(a+8)q]^2 = (a+8)[(a+8)q^2]$).

Сумма этих чисел: $(a+8)+(a+8)q+(a+8)q^2 = (a+8)(1+q+q^2) = 26$.

Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, и можно записать ее свойство: $2(a+8)q = a+(a+8)q^2$.

Прибавив к обеим частям уравнения 8 и перенеся слагаемое $2(a + 8)q$ из левой части в правую, получим: $8 = (a+8) - 2(a+8)q + (a+8)q^2$, или $8 = (a+8)(1-2q+q^2)$.

Для нахождения a и d имеем систему уравнений
$$\begin{cases}(a+8)(1+q+q^2) = 26,\\(a+8)(1-2q+q^2) = 8.\end{cases}$$

Разделив уравнения друг на друга, получим: $\dfrac{1+q+q^2}{1-2q+q^2} = \dfrac{13}{4}$, или

$3q^2 - 10q + 3 = 0$, откуда $q = \dfrac{1}{3}$, $q = 3$. Тогда, соответственно, находим из любого уравнения системы: $a = 10$ и $a = -6$. Далее определяем b и c: $b = 6$, $c = 2$ и $b = 6$, $c = 18$.

Пример 2

Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если из третьего числа вычесть 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же из второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии вычесть по единице, то снова получим геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

Разумеется, эту задачу можно решить любым из способов, разобранных в примере 1, например последним. Так как три числа образуют геометрическую прогрессию, то их можно записать в виде a; aq; aq^2. После вычитания из последнего числа 4 получаем числа a; aq; $(aq^2 - 4)$, образующие арифметическую прогрессию. На основании свойства арифметической прогрессии имеем: $2aq = a + (aq^2 - 4)$, или $4 = a(1 - q)^2$.

Если из второго и третьего членов этой арифметической прогрессии вычесть по единице, то получим числа a; $(aq - 1)$; $(aq^2 - 5)$, образующие геометрическую прогрессию.

Запишем ее свойство: $(aq-1)^2 = a(aq^2-5)$, или $1 = a(2q - 5)$.

Для определения a и q имеем систему уравнений $\begin{cases} 4 = a(1-q)^2, \\ 1 = a(2q-5). \end{cases}$

Разделив уравнения друг на друга, получим: $4 = \dfrac{(1-q)^2}{2q-5}$, или $q^2 - 10q + 21 = 0$. Корни этого уравнения $q = 3$ и $q = 7$, тогда соответствующие значения: $a = 1$ и $a = \dfrac{1}{9}$. Теперь находим сами числа: $1; 3; 9$ и $\dfrac{1}{9}; \dfrac{7}{9}; \dfrac{49}{9}$.

Пример 3

Три числа, сумма которых 93, составляют геометрическую прогрессию. Эти числа можно также рассматривать как первый, второй и седьмой члены арифметической прогрессии. Найти данные три числа.

Так как числа образуют геометрическую прогрессию, то их можно записать в виде b; bq; bq^2. Их сумма равна 93, имеем первое уравнение: $b + bq + bq^2 = 93$.

Первые два числа образуют арифметическую прогрессию, и ее разность $d = bq - b$. Тогда легко записать седьмой член арифметической прогрессии: $b + 6(bq - b) = 6bq - 5b$. По условию задачи этот член равен третьему члену геометрической прогрессии bq^2. Получаем второе уравнение: $6bq - 5b = bq^2$, или $0 = q^2 - 6q + 5$, откуда $q = 1$ и $q = 5$.

Тогда из первого уравнения находим b: $b = \dfrac{93}{1 + q + q^2}$.

При $q = 1$ $b = 31$ и данные числа: 31, 31; 31; при $q = 5$ $b = \dfrac{93}{1+5+5^2} = 3$ и числа: 3, 15, 75. Итак, данные числа: 31, 31, 31 и 3, 15, 75.

IV. Задание на уроке и дома

1. Найти четыре числа, первые три из которых составляют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних равна 18.

2. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим числам прибавить, соответственно, 25, 27 и 1, то получатся три числа, образующие арифметическую прогрессию. Найти седьмой член геометрической прогрессии.

3. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если после этого увеличить последнее число на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

4. Три числа, из которых третье равно 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то три числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

5. Разность арифметической прогрессии отлична от нуля. Числа, равные произведениям первого члена этой прогрессии на второй, второго члена на третий и третьего на первый в указанном порядке, составляют геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

6. Сумма трех чисел, образующих убывающую арифметическую прогрессию, равна 60. Если от первого числа отнять 10, от второго отнять 8, а третье оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

7. Три числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию, а их квадраты составляют геометрическую прогрессию. Найдите эти числа, если их сумма равна 42.

8. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если среднее из них удвоить, то получится арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель этой прогрессии, если известно, что $|q| < 1$.

9. Три различных числа a, b и c образуют геометрическую прогрессию, а числа $a + b$, $b + c$, $a + c$ составляют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответы: 1) 3; 6; 12; 18 и 18,75; 11,25; 6,75; 2,25; 2) 5103 и $\frac{7}{81}$; 3) 4; 8; 16 и $\frac{4}{25}$; $-\frac{16}{25}$; $\frac{64}{25}$; 4) 3; 6; 12 и 27; 18; 12; 5) –2; 6) 34; 20; 6; 7) $14-14\sqrt{2}$; 14; $14+14\sqrt{2}$; 8) $2-\sqrt{3}$; 9) –2.

V. Подведение итогов урока

Уроки 74–75. Метод математической индукции (факультативное занятие)

Цель: рассмотреть новый способ доказательства утверждений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Ответы на вопросы по домашнему заданию

III. Изучение нового материала

Для доказательства утверждений, зависящих от натурального числа n, используют *метод математической индукции. Для доказательства* применяется следующая *схема*:

1. Проверяют справедливость утверждения при $n = 1$ (или при первом допустимом по условию задачи значении n).

2. Предполагают, что при произвольном значении $n = k$ утверждение верно.

3. Доказывают, что при следующем значении $n = k + 1$ утверждение верно, используя предыдущий пункт 2.

Метод математической индукции *аксиоматический и принимается без доказательства.* Несмотря на его непривычность, нетрудно понять, как он «работает». Мы проверили доказываемое утверждение при некотором конкретном n (например, при $n = 1$). Так как было доказано, что если утверждение верно при $n = k$, то оно верно и при $n = k + 1$. Это означает, что утверждение будет верно и при $n = 1 + 1 = 2$. Так как оно верно при $n = 2$ и было доказано, что утверждение справедливо для $n = k + 1$, то оно верно при $n = 2 + 1 = 3$ и т. д. Таким образом, утверждение справедливо при всех натуральных значениях n.

Основная идея метода математической индукции состоит в доказательстве перехода: $n = k \to n = k + 1$. Этот переход позволяет «зациклить» процесс: при $n = 1$ легко проверить утверждение, в силу перехода $n = k \to n = k + 1$ оно верно и при $n = 1 + 1 = 2$. Так как оно верно при $n = 2$, в силу того же перехода оно верно и для $n = 2 + 1 = 3$ и т. д.

Пример 1

Докажем, что при всех натуральных n выражение $A(n) = n(n^2 + 5)$ без остатка делится на 6.

Используем приведенную схему доказательства:

1. При $n = 1$ выражение $A(1) = 1\cdot(1^2 + 5) = 6$ и делится на 6.

2. Предположим, что при $n = k$ выражение $A(k) = k(k^2+5) = k^3+5k$ делится без остатка на 6, т. е. $k^3+5k = 6p$ (где p – натуральное число).

3. При $n = k + 1$ получаем выражение $A(k+1) = (k+1)^3 + 5(k+1) = k^3+3k^2+8k+6$. Выделим в этом выражении часть, которая согласно пункту 2 делится на 6: $A(k+1) = (k^3+5k)+(3k^2+3k+6) = 6p+(3k^2+3k+6)$. Нужно доказать, что выражение $3k^2+3k+6$ делится на 6. Для этого достаточно, чтобы выражение $3k^2+3k = 3k(k+1)$ делилось на 6 или $k(k + 1)$ делилось на 2. Но величина $k(k + 1)$ является произведением двух соседних натуральных чисел k и $k + 1$. Разумеется, одно из них будет четным.

Пример 2

Докажем, что при любом натуральном n выражение $A(n) = 4^n + 15n - 1$ кратно 9.

Используем стандартную схему доказательства:

1. При $n = 1$ выражение $A(1) = 4^1 + 15\cdot 1 - 1 = 18$ кратно 9.

2. Предположим, что при $n = k$ выражение $A(k) = 4^k + 15k - 1$ кратно 9, т. е. $4^k + 15k - 1 = 9p$ (где p – натуральное число).

3. При $n = k + 1$ надо доказать, что выражение $A(k+1) = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1$ делится на 9. Для доказательства можно использовать два способа.

1-й способ. Поступим, как и в примере 1, т. е. выделим в выражении $A(k + 1)$ часть $A(k)$, которая делится на 9. Для этого преобразуем выражение $A(k + 1)$ к виду $A(k+1) = 4^{k+1} + 15k + 14 = 4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18 = 4A(k) + 9(2 - 5k)$.

Видно, что выражение $A(k + 1)$ является суммой двух слагаемых, каждое из которых делится на 9.

Сложность этого способа состоит в умении в выражении $A(k + 1)$ выделить часть $A(k)$, т. е. догадаться до преобразования $4^{k+1} + 15k + 14 = 4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18$.

Поэтому рассмотрим другой способ, лишенный такого недостатка.

2-й способ. Из выражения $4^k + 15k - 1 = 9p$ (пункт 2) найдем $4^k = 9p + 1 - 15k$ и подставим в выражение $A(k+1) = 4^{k+1} + 15k + 14 = 4(9p + 1 - 15k) + 15k + 14 = 36p + 18 - 45k$. Видно, что выражение

$A(k+1)$ состоит из трех слагаемых, каждое из которых делится на 9.

Связь между пунктами 2 и 3 была обеспечена за счет того, что в пункте 2 была найдена величина 4^k и подставлена в выражение пункта 3.

Заметим, что если на число n накладываются по условию задачи ограничения, то необходимо ввести новое натуральное число m и свести задачу к старой схеме.

Пример 3

Докажем, что при четных неотрицательных числах n выражение $A(n)=5^{2n+1}+3^{n+1}$ кратно 8.

Так как n четное и неотрицательное число, то его можно записать в виде $n=2m-2$ (где m – любое натуральное число). Заменив в $A(n)$ число на $2m-2$, переформулируем задачу: докажем, что при любом натуральном значении m выражение $A(m)=5^{2(2m-2)+1(2m-2)+1}+3^{(2m-2)+1}=5^{4m-3}+3^{2m-1}$ кратно 8. Далее применима стандартная схема доказательства:

1. При $m=1$ выражение $A(1)=5^1+3^1=8$ кратно 8.

2. Предположим, что при $m=k$ выражение $A(k)=5^{4k-3}+3^{2k-1}$ кратно 8, т. е. $5^{4k-3}+3^{2k-1}=8p$ (где p – натуральное число). Выразим из этого равенства $5^{4k-3}=8p-3^{2k-1}$.

3. При $m=k+1$ получаем выражение $A(k+1)=5^{4(k+1)-3}+$ $+3^{2(k+1)-1}=5^{4k+1}+3^{2k+1}=5^4\cdot5^{4k-3}+3^{2k+1}=625(8p-3^{2k-1})+$ $+3^{2k+1}=625\cdot8p-625\cdot3^{2k-1}+3^2\cdot3^{2k-1}=625\cdot8p-616\cdot3^{2k-1}=$ $=8(625p-77\cdot3^{2k-1})$.

Видно, что это выражение делится на 8.

Заметим, что при попытке доказать ложное утверждение метод математической индукции приведет к *противоречию*.

Пример 4

Докажем, что при всех натуральных n выражение $A(n)=n^2+7$ кратно 4.

Разумеется, это утверждение ложное, т. к., например, при $n=2$ получаем: $A(2)=2^2+7=11$ – число, которое не делится на 4. Тем не менее попробуем применить метод математической индукции:

1. При $n=1$ получаем число $A(1)=1^2+7=8$, которое кратно 4.

2. Предположим, что при $n=k$ число $A(k)=k^2+7$ делится на 4.

3. При $n=k+1$ получаем выражение $A(k+1)=(k+1)^2+7=$ $=k^2+2k+1+7=(k^2+7)+(2k+1)$.

Согласно пункту 2 выражение $k^2 + 7$ кратно 4. Выражение $2k + 1$ при всех натуральных числах k является нечетным числом и не делится на 4. Таким образом, получаем противоречие с условием задачи.

Метод математической индукции пригоден не только для доказательства утверждений, связанных с делимостью выражений, но и при доказательстве теорем, тождеств, неравенств, в геометрических задачах и т. д. Поэтому рассмотрим еще некоторые случаи применения метода математической индукции.

Пример 5

Докажем, что при любом натуральном n сумма $A(n)=\frac{1}{1\cdot 2}+$ $+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$ равна $\frac{1}{n+1}$.

Заметим, что в сумму входит n дробей. Используем метод математической индукции:

1. При $n = 1$ сумма состоит из одной дроби. Получаем верное равенство $A(1)=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$.

2. Предположим, что при $n = k$ равенство выполняется: $A(k)=\frac{1}{1\cdot 2}+$ $+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$.

3. При $n = k + 1$ получаем выражение $A(k+1)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+$ $+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=A(k)+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$ $=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$.

Видно, что полученное выражение описывается формулой $A(n)=\frac{n}{n+1}$ при $n = k + 1$.

Пример 6

При $a > -1$ и любом натуральном n докажем неравенство $(1+a)^n \geq 1+na$.

1. При $n = 1$ имеем верное неравенство $(1 + a)^1 \geq 1na$.

2. Предположим, что при $n = k$ неравенство выполнено, т. е. $(1+a)^k \geq 1+ka$.

3. При $n = k + 1$ надо доказать неравенство $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$.

Для этого обе части неравенства (пункт 2) $(1+a)^k \geq 1+ka$ умножим на положительное число $1 + a$. Получаем неравенство того же знака: $(1+a)^k(1+a) \geq (1+ka)(1+a)$, или $(1+a)^{k+1} \geq 1+(1+k)a+ka^2$.

Так как число ka^2 неотрицательное, то справедливо неравенство $1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$.

Тогда верно неравенство $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$.

Пример 7

Докажем, что n-угольник имеет $A(n) = \dfrac{n(n-3)}{2}$ диагоналей.

Очевидно, что $n \geq 3$. Используем стандартную схему:

1. При $n = 3$ получаем $A(3) = 0$, т. е. треугольник не имеет диагоналей, и это верно.

2. Предположим, что при $n = k$ многоугольник имеет $A(k) = \dfrac{k(k-3)}{2}$ диагоналей.

3. При $n = k + 1$ получаем $(k + 1)$-угольник. Очевидно, что вершину с номером $k + 1$ можно соединить с остальными вершинами k отрезками. Из этих отрезков один отрезок является стороной многоугольника, а $k - 1$ отрезок – его диагоналями. Таким образом, к $\dfrac{k(k-3)}{2}$ диагоналям k-угольника добавляются еще $k - 1$ диагонали. Всего получаем: $\dfrac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \dfrac{k^2-k-2}{2} = \dfrac{(k+1)(k-2)}{2} =$

$$= \frac{(k+1)((k+1)-3)}{2}.$$

Имеем значение выражения $A(n)$ при $n = k + 1$.

Подчеркнем еще раз универсальность и удобство метода математической индукции.

IV. Контрольные вопросы

1. Схема доказательства методом математической индукции.
2. Основной смысл метода математической индукции.

V. Задание на уроке

№ 662; 665; 667; 669 (а).

VI. Задание на дом

№ 663; 666; 668; 669 (б).

VII. Творческие задания

Методом математической индукции докажите, что при любом натуральном n справедливо утверждение.

1) $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

2) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3) $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

4) $1\cdot 2+2\cdot 3+...+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

5) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$;

6) $1^2-2^2+3^2-...+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$;

7) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot...\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

8) $2^n>n^2$ (для $n\geq 5$);

9) $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ (для $n\geq 2$);

10) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{n+n}>\dfrac{13}{24}$ (для $n\geq 2$);

11) $4^n+15n-7$ делится на 9;

12) n^3+3n^2+5n делится на 3;

13) $10^n+18n-28$ делится на 27;

14) n^7-n делится на 42;

15) $7^{2n}-4^{2n}$ делится на 33;

16) $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133.

VIII. Подведение итогов урока

Уроки 76–77. Контрольная работа по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Найдите пятнадцатый член арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -18$ и $d = 4$.

2. Найдите сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии: 32, 29, 26, ...

3. Найдите сумму тридцати первых членов последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = 3n + 2$.

4. Найдите пятый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = -64$ и $q = -\frac{1}{2}$.

5. Первый член геометрической прогрессии (b_n) равен 2, знаменатель равен 3. Найдите сумму пяти первых членов этой прогрессии.

6. Представьте в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь 0,(24).

Вариант 2

1. Найдите семнадцатый член арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -17$ и $d = 5$.

2. Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии: 37, 33, 29, ...

3. Найдите сумму сорока первых членов последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = 3n - 4$.

4. Найдите шестой член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = -81$ и $q = -\frac{1}{3}$.

5. Первый член геометрической прогрессии (b_n) равен 3, знаменатель равен 2. Найдите сумму четырех первых членов этой прогрессии.

6. Представьте в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь 0,(36).

Вариант 3

1. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -21$ и $a_{12} = 1$.

2. В арифметической прогрессии второй член равен 7, а сумма 22 первых членов равна 2035. Найдите первый член и разность прогрессии.

3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если ее восемнадцатый член в 27 раз больше ее двадцать первого члена.

4. Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, второй член которой равен 6, а четвертый равен 24.

5. Представьте в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь 0,2(18).

6. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = 7a_{n-1} + 2$, где $n \geq 2$ и $a_1 = 3$. Найдите третий член последовательности.

Вариант 4

1. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -37$ и $a_{20} = 1$.

2. В арифметической прогрессии второй член равен 3, а сумма 18 первых членов равна 1539. Найдите первый член и разность прогрессии.

3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если ее десятый член в 8 раз больше ее тринадцатого члена.

4. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, третий член которой равен 54, а пятый равен 6.

5. Представьте в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь 0,5(27).

6. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = 6a_{n-1} + 1$, где $n \geq 2$ и $a_1 = 2$. Найдите четвертый член последовательности.

Вариант 5

1. Вычислите сумму $50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + \ldots + 2^2 - 1^2$.

2. Решите уравнение $(x + 1) + (x + 5) + (x + 9) + \ldots + (x + 157) = 3200$.

3. Найдите шестой и десятый члены геометрической прогрессии, если их сумма равна 16, а произведение четырнадцатого и второго членов этой прогрессии равна 60.

4. Сумма четырнадцатого и второго членов геометрической прогрессии равна 16, а сумма их квадратов равна 200. Найдите восьмой член прогрессии.

5. Три различных числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, а числа $a + b$, $b + c$, $a + c$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

6. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, где $n \geq 3$ и $a_1 = 2$ и $a_2 = 1$. Найдите пятый член последовательности.

Вариант 6

1. Вычислите сумму $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + 99^2 - 100^2$.

2. Решите уравнение $(x + 3) + (x + 8) + (x + 13) + \ldots + (x + 248) = 6225$.

3. Найдите седьмой и четырнадцатый члены геометрической прогрессии, если их сумма равна 21, а произведение десятого и одиннадцатого членов этой прогрессии равно 98.

4. Сумма одиннадцатого и третьего членов геометрической прогрессии равна 14, а сумма их квадратов равна 130. Найдите седьмой член прогрессии.

5. Три различных числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, а числа $a - b$, $b + c$, $b - c$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

6. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = 2a_{n-1} - 3a_{n-2}$, где $n \geq 3$ и $a_1 = 2$ и $a_2 = 1$. Найдите пятый член последовательности.

Урок 78. Итоги контрольной работы

Цель: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Итоги контрольной работы

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ:* 38.
2. *Ответ:* 186.
3. *Ответ:* 1455.
4. *Ответ:* –4.
5. *Ответ:* 242.
6. *Ответ:* $\frac{8}{33}$.

Вариант 2

1. *Ответ:* 63.
2. *Ответ:* –20.
3. *Ответ:* 2300.
4. *Ответ:* $\frac{1}{3}$.
5. *Ответ:* 45.
6. *Ответ:* $\frac{4}{11}$.

Вариант 3

1. *Ответ:* 2.
2. *Ответ:* $a_1 = -2$ и $d = 9$.
3. *Ответ:* $\frac{1}{3}$.
4. *Ответ:* 189 и 63.
5. *Ответ:* $\frac{12}{55}$.
6. *Ответ:* 163.

Вариант 4

1. *Ответ:* 2.

2. *Ответ:* $a_1 = -8$ и $d = 11$.

3. *Ответ:* $\frac{1}{2}$.

4. *Ответ:* 728 и 364.

5. *Ответ:* $\frac{29}{55}$.

6. *Ответ:* 475.

Решения

Вариант 5

1. Сгруппируем слагаемые и используем формулу разности квадратов. Получаем:

$(50^2 - 49^2) + (48^2 - 47^2) + \ldots + (2^2 - 1^2) = (50 + 49)\cdot(50 - 49) + (48 + 47)(48 - 47) + \ldots + (2 + 1)(2 - 1) = 99 + 95 + \ldots + 3 = \frac{(99+3)\cdot 25}{2} = 1275.$

Учтено, что 25 слагаемых 99, 95, …, 3 являются членами арифметической прогрессии.

Ответ: 1275.

2. Данные числа образуют арифметическую прогрессию (a_n), в которой $a_1 = x + 1$ и $d = 4$. Тогда n-й член прогрессии $a_n = x + 1 + 4(n-1) = x + 4n - 3$.

Найдем число слагаемых в сумме. Получаем уравнение $x + 157 = x + 4n - 3$, откуда $n = 40$. Запишем данную сумму: $\frac{2(x+1)+4\cdot 39}{2}\cdot 40 = 3200$, или $40 + x = 80$, откуда $x = 40$.

Ответ: 40.

3. Запишем условия задачи: $\begin{cases} b_6 + b_{10} = 16, \\ b_{14}\cdot b_2 = 60, \end{cases}$ или $\begin{cases} b_6 + b_{10} = 16, \\ (b_6 q^8)\cdot\frac{b_{10}}{q^8} = 60, \end{cases}$

или $\begin{cases} b_6 + b_{10} = 16, \\ b_6 \cdot b_{10} = 60. \end{cases}$

Решения этой симметричной системы уравнений: $b_6 = 6$, $b_{10} = 10$ и $b_6 = 10$, $b_{10} = 6$.

Ответ: $b_6 = 6$, $b_{10} = 10$ и $b_6 = 10$, $b_{10} = 6$.

4. По условиям задачи получаем симметричную систему уравнений $\begin{cases} b_{14}+b_2=16, \\ b_{14}^2+b_2^2=200, \end{cases}$ или $\begin{cases} b_{14}^2+2b_{14}b_2+b_2^2=256, \\ b_{14}^2+b_2^2=200, \end{cases}$ откуда $b_{14}b_2=28$.

Запишем это равенство в виде $b_8q^6\cdot\dfrac{b_8}{q^6}=28$ или $b_8^2=28$ и $b_8=\pm\sqrt{28}=\pm2\sqrt{7}$.

Ответ: $\pm2\sqrt{7}$.

5. Так как числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, то $b=aq$ и $c=aq^2$.

Тогда числа $a+b$, $b+c$ и $a+c$ образуют арифметическую прогрессию.

Запишем ее характеристическое свойство: $2(b+c)=(a+b)+$ $+(a+c)$, или $0=2a-b-c$, или $0=2a-aq-aq^2$, или $0=q^2+q-2$, откуда $q=-2$ и $q=1$ (не подходит, т. к. числа a, b, c – разные.).

Ответ: –2.

6. Запишем рекуррентную формулу $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$ (где $a_1=2$ и $a_2=1$) для: $n=3$: $a_3=3a_2-2a_1=3\cdot1-2\cdot2=-1$; $n=4$: $a_4=$ $=3a_3-2a_2=3\cdot(-1)-2\cdot1=-5$ и $n=5$: $a_5=3a_4-2a_3=3\cdot(-5)-$ $-2\cdot(-1)=-13$.

Ответ: –13.

Вариант 6

1. Сгруппируем слагаемые и используем формулу разности квадратов. Получаем:

$(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\ldots+(99^2-100^2)=(1-2)\cdot(1+2)+$ $+(3-4)(3+4)+\ldots+(99-100)(99+100)=-3-7-\ldots-199=$ $=\dfrac{(-3-199)\cdot50}{2}=-5050$.

Учтено, что 50 слагаемых –3, –7, ..., –199 являются членами арифметической прогрессии.

Ответ: –5050.

2. Данные числа образуют арифметическую прогрессию (a_n), в которой $a_1=x+3$ и $d=5$. Тогда n-й член прогрессии $a_n=x+3+5(n-1)=x+5n-2$.

Найдем число слагаемых в сумме. Получаем уравнение $x+248=$ $=x+5n-2$, откуда $n=50$.

Запишем данную сумму: $\dfrac{2(x+3)+5\cdot 49}{2}50 = 6225$, или $2x + 251 =$ $= 249$, откуда $x = -1$.

Ответ: -1.

3. Запишем условия задачи: $\begin{cases} b_7 + b_{14} = 21, \\ b_{10}\cdot b_{11} = 98, \end{cases}$ или $\begin{cases} b_7 + b_{14} = 21, \\ (b_7 q^3)\cdot \dfrac{b_{14}}{q^3} = 98, \end{cases}$

или $\begin{cases} b_7 + b_{14} = 21, \\ b_7 \cdot b_{14} = 98. \end{cases}$

Решения этой симметричной системы уравнений: $b_7 = 7$, $b_{14} = 14$ и $b_7 = 14$, $b_{14} = 7$.

Ответ: $b_7 = 7$, $b_{14} = 14$ и $b_7 = 14$, $b_{15} = 7$.

4. По условиям задачи получаем симметричную систему уравнений $\begin{cases} b_{11} + b_3 = 14, \\ b_{11}^2 + b_3^2 = 130, \end{cases}$ или $\begin{cases} b_{11}^2 + 2b_{11}b_3 + b_3^2 = 196, \\ b_{11}^2 + b_3^2 = 130, \end{cases}$ откуда $b_{11}b_3 = 33$.

Запишем это равенство в виде $b_7 q^4 \cdot \dfrac{b_7}{q^4} = 33$ или $b_7^2 = 33$ и $b_7 = \pm\sqrt{33}$.

Ответ: $\pm\sqrt{33}$.

5. Так как числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, то $b = aq$ и $c = aq^2$. Тогда числа $a - b$, $b + c$ и $b - c$ образуют арифметическую прогрессию.

Запишем ее характеристическое свойство: $2(b + c) =$ $= (a-b)+(b-c)$, или $0 = a - 2b - c$, или $0 = a - 2aq - 3aq^2$, или $0 = 3q^2 + 2q - 1$, откуда $q = -1$ (не подходит, т. к. числа a, b, c – положительные) и $q = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

6. Запишем рекуррентную формулу $a_n = 2a_{n-1} - 3a_{n-2}$ (где $a_1 = 2$ и $a_2 = 1$) для: $n = 3$: $a_3 = 2a_2 - 3a_1 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4$; $n = 4$: $a_4 = 2a_3 -$ $- 3a_2 = 2\cdot(-4) - 3 \cdot 1 = -11$ и $n = 5$: $a_5 = 2a_4 - 3a_3 = 2\cdot(-11) - 3\cdot(-4) =$ $= -10$.

Ответ: -10.

Уроки 79–80. Зачетная работа по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии»

Цель: проверка знаний учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Является ли число 54,5 членом арифметической прогрессии (a_n), в которой $a_1 = 25{,}5$ и $a_9 = 5{,}5$?

2. Найдите девятый член арифметической прогрессии, разность которой равна ее десятому члену.

3. Найдите сумму всех последовательных натуральных чисел с 60 до 110 включительно.

4. В геометрической прогрессии $b_8 = 2^{-12}$ и $b_{10} = 2^{-14}$. Найдите b_1.

5. Пятый член геометрической прогрессии в 5 раз большее ее первого члена. Во сколько раз тринадцатый член этой прогрессии больше ее пятого члена?

6. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 39, знаменатель прогрессии равен –4. Найдите сумму первых четырех членов этой прогрессии.

7. Найдите сумму чисел 5; 3; $\frac{9}{5}$; …

В

8. Докажите, что не существует арифметической прогрессии с разностью 19, состоящей только из простых чисел.

9. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с тридцатого по сороковой включительно, если $a_n = 3n + 5$.

10. Между числами 3 и 12 вставьте три числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

11. Найдите x, если известно, что числа $x - 3$, $\sqrt{5x}$, $x + 16$ в указанном порядке являются последовательными членами геометрической прогрессии.

C

12. Между первым и вторым членами арифметической прогрессии, разность которой равна 36, поместили 11 чисел так, что эти 13 чисел стали последовательными членами новой арифметической прогрессии. Найдите разность этой новой прогрессии.

13. Найдите произведение двенадцатого, семнадцатого, двадцать второго и двадцать седьмого членов геометрической прогрессии, если известно, что произведение десятого и двадцать девятого ее членов равно 22.

14. Три числа образуют убывающую арифметическую прогрессию, а их квадраты составляют геометрическую прогрессию. Найдите эти числа, если их сумма равна 36.

Вариант 2

A

1. Является ли число 30,4 членом арифметической прогрессии (a_n), в которой $a_1 = 11{,}6$ и $a_{15} = 17{,}2$?

2. Найдите седьмой член арифметической прогрессии, разность которой равна ее восьмому члену.

3. Найдите сумму всех последовательных натуральных чисел с 50 до 120 включительно.

4. В геометрической прогрессии $b_{12} = 3^{15}$ и $b_{14} = 3^{17}$. Найдите b_1.

5. Четвертый член геометрической прогрессии в 4 раза больше ее первого члена. Во сколько раз десятый член этой прогрессии больше ее четвертого члена?

6. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 40, знаменатель прогрессии равен 3. Найдите сумму первых восьми членов этой прогрессии.

7. Найдите сумму чисел 10; 4; $\frac{8}{5}$; ...

B

8. Докажите, что не существует арифметической прогрессии с разностью 17, состоящей только из простых чисел.

9. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с сорокового по пятидесятый включительно, если $a_n = 4n + 2$.

10. Между числами 2 и 18 вставьте три числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

11. Найдите x, если известно, что числа $x-2$, $\sqrt{6x}$, $x+5$ в указанном порядке являются последовательными членами геометрической прогрессии.

С

12. Между первым и вторым членами арифметической прогрессии, разность которой равна 42, поместили 5 чисел так, что эти 7 чисел стали последовательными членами новой арифметической прогрессии. Найдите разность этой новой прогрессии.

13. Найдите произведение одиннадцатого, двадцатого, двадцать девятого и тридцать восьмого членов геометрической прогрессии, если известно, что произведение восемнадцатого и тридцать первого ее членов равно 29.

14. Три числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию, а их квадраты составляют геометрическую прогрессию. Найдите эти числа, если их сумма равна 42.

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. *Ответ:* нет.
2. *Ответ:* 0.
3. *Ответ:* 4335.
4. *Ответ:* $\pm 1/32$.
5. *Ответ:* в 25 раз.
6. *Ответ:* -153.
7. *Ответ:* 12,5.
8. *Ответ:* доказано.
9. *Ответ:* 1210.
10. *Ответ:* $3;\ 3\sqrt{2};\ 6;\ 6\sqrt{2};\ 12$ и $3;\ -3\sqrt{2};\ 6;\ -6\sqrt{2};\ 12$.
11. *Ответ:* 4.
12. Пусть первый член данной прогрессии a, тогда второй член $(a+36)$. Этот член является тринадцатым членом новой прогрессии с разностью d. Получаем уравнение $a+36=a+12d$, откуда $d=3$.

Ответ: 3.

13. Произведение десятого и двадцать девятого членов геометрической прогрессии равно: $(b_1q^9)\cdot(b_1q^{28})=b_1^2q^{37}=22$. Запишем

произведение требуемых членов: $(b_1q^{11})\cdot(b_1q^{16})\cdot(b_1q^{21})\cdot(b_1q^{26}) =$ $= b_1^4q^{74} = (b_1^2q^{37})^2 = 22^2 = 484.$

Ответ: 484.

14. Пусть даны числа a, $a + d$, $a + 2d$ (где a – первое число, d – разность арифметической прогрессии). Их сумма $a + (a + d) +$ $+ (a + 2d) = 36$, или $a + d = 12$.

Учтем, что квадраты чисел составляют геометрическую прогрессию. Запишем ее характеристическое свойство: $(a + d)^4 =$ $= a^2(a + 2d)^2$.

Выразим $a = 12 - d$ и подставим в это уравнение: $12^4 =$ $= (12 - d)^2(12 + d)^2$, или $144^2 = (144 - d^2)^2$.

Так как арифметическая прогрессия убывающая, то $d < 0$.

Получаем уравнение $-144 = 144 - d^2$, $d^2 = 288$, откуда $d = -12\sqrt{2}$ и $a = 12 + 12\sqrt{2}$.

Найдем данные числа: $12 + 12\sqrt{2}$; 12; $12 - 12\sqrt{2}$.

Ответ: $12 + 12\sqrt{2}$; 12; $12 - 12\sqrt{2}$.

Вариант 2

1. *Ответ:* да.
2. *Ответ:* 0.
3. *Ответ:* 6745.
4. *Ответ:* 3.
5. *Ответ:* в 16 раз.
6. *Ответ:* 3280.
7. *Ответ:* 50/3.
8. *Ответ:* доказано.
9. *Ответ:* 2002.
10. *Ответ:* 2; $2\sqrt{3}$; 6; $6\sqrt{3}$; 18 и 2; $-2\sqrt{3}$; 6; $-6\sqrt{3}$; 18.
11. *Ответ:* 5.
12. Пусть первый член данной прогрессии a, тогда второй член $(a + 42)$. Этот член является седьмым членом новой прогрессии с разностью d. Получаем уравнение $a + 42 = a + 6d$, откуда $d = 7$.

Ответ: 7.

13. Произведение восемнадцатого и тридцать первого членов геометрической прогрессии равно: $(b_1q^{17})\cdot(b_1q^{30}) = b_1^2q^{47} = 29$. Запишем

произведение требуемых членов: $(b_1q^{10})\cdot(b_1q^{19})\cdot(b_1q^{28})\cdot(b_1q^{37})=$ $=b_1^4q^{94}=(b_1^2q^{47})^2=29^2=841.$

Ответ: 841.

14. Пусть даны числа a, $a+d$, $a+2d$ (где a – первое число, d – разность арифметической прогрессии). Их сумма $a+(a+d)+$ $+(a+2d)=42$, или $a+d=14$.

Учтем, что квадраты чисел составляют геометрическую прогрессию.

Запишем ее характеристическое свойство: $(a+d)^4=a^2(a+2d)^2$.

Выразим $a=14-d$ и подставим в это уравнение: $14^4=$ $=(14-d)^2(14+d)^2$, или $196^2=(196-d^2)^2$.

Так как арифметическая прогрессия убывающая, то $d>0$.

Получаем уравнение $-196=196-d^2$, $d^2=392$, откуда $d=14\sqrt{2}$ и $a=14-14\sqrt{2}$.

Найдем данные числа: $14-14\sqrt{2}$; 14; $14+14\sqrt{2}$.

Ответ: $14-14\sqrt{2}$; 14; $14+14\sqrt{2}$.

Глава V. Элементы комбинаторики и теории вероятностей

§ 11. Элементы комбинаторики

Урок 81. Примеры комбинаторных задач

Цель: рассмотреть некоторые задачи комбинаторики.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

С точки зрения авторов, изучение этой темы в средней школе (а тем более в 9 классе) *не оправданно* по следующим причинам:

1. Комбинаторика и теория вероятностей являются изолированными разделами математики, имеют своеобразную логику и методику решения задач.

2. Эти разделы практически не связаны с изучаемым курсом алгебры, не подкреплены повседневной практикой и будут очень быстро забыты.

3. Даже далеко не в каждом техническом вузе необходимо изучение таких дисциплин.

4. Вряд ли средний девятиклассник в состоянии освоить эти разделы математики. Разумнее потратить время, отведенное на такие темы, для более детального изучения основных разделов алгебры 9 класса.

Тем не менее необходимо рассмотреть эти темы.

Комбинаторикой называют область математики, изучающую вопросы о числе различных комбинаций (удовлетворяющих тем или иным условиям), которые можно составить из данных элементов. Первоначально комбинаторика (и теория вероятностей) возникла в XVI в. в связи с распространением различных азартных игр. В настоящее время комбинаторика используется в теории информации (кодировка и декодировка), линейном программировании (составление расписаний уроков, грузоперевозок) и т. д.

Сначала рассмотрим некоторые задачи комбинаторики.

Пример 1

Сколько существует двузначных чисел?

При образовании чисел используются десять цифр: 0, 1, 2, ..., 9. Так как число двузначное, то число десятков может принимать одно из девяти значений: 1, 2, 3, ..., 9. Число единиц принимает те же значения и еще 0 (10 вариантов).

Если цифра десятков 1, то цифра единиц может быть любой из десяти: 0, 1, 2, ..., 9. Если цифра десятков 2, то цифра единиц вновь может быть любой из десяти: 0, 1, 2, ..., 9 и т.д.

Тогда получаем, что возможно $9 \cdot 10 = 90$ вариантов (чисел).

Разумеется, их легко выписать: 10, 11, 12, ..., 99.

Пример 2

Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

Очевидно, что на первом (соответственно, и на последнем) месте может стоять любая цифра (кроме нуля) – 9 вариантов. На втором (соответственно, и на предпоследнем) месте может стоять любая цифра – 10 вариантов. На третьем месте (в середине) также может стоять любая цифра – 10 вариантов.

Тогда получаем, что возможно $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ вариантов (чисел).

Из рассмотренных примеров можно сформулировать *комбинаторное правило умножения*. Пусть имеем n элементов и надо выбрать из них один за другим k элементов. Если первый элемент можно выбрать n_1 способами, после чего второй элемент можно выбрать n_2 способами из оставшихся, затем третий элемент можно выбрать n_3 способами из оставшихся и т.д., то число способов, которыми могут быть выбраны все k элементов, равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Пример 3

В спортивных соревнованиях участвуют 10 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовые медали, если каждая команда может получить только одну медаль?

Начнем распределять медали с наименее ценной. Бронзовую медаль может получить одна из 10 команд (10 вариантов). После этого серебряную медаль получит одна из оставшихся 9 команд (9 вариантов). Наконец, золотую медаль получает одна из оставшихся 8 команд (8 вариантов).

Следовательно, общее число способов, которыми могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали, равно $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Пример 4

В 9 классе изучаются 10 предметов. Во вторник должны быть проведены 6 различных уроков. Сколькими способами можно составить расписание занятий на вторник?

По аналогии с примерами 1–4 на первом уроке изучается любой из 10 предметов, на втором уроке – любой из оставшихся 9 предметов, на третьем уроке – любой из оставшихся 8 предметов и т.д.

Таким образом, расписание можно составить $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200$ способами.

III. Контрольные вопросы

1. Какие вопросы изучает комбинаторика?
2. Области применения комбинаторики.
3. Комбинаторное правило умножения.

IV. Задание на уроке

№ 714; 716; 718 (а); 719 (б); 721; 724; 725; 728.

V. Задание на дом

№ 715; 717; 718 (б); 719 (а); 720; 722; 723; 726; 727.

VI. Подведение итогов урока

Уроки 82–83. Перестановки

Цель: рассмотреть простейший вид соединений – перестановки.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. В школьной столовой имеется три первых блюда, четыре вторых блюда и три третьих блюда. Сколькими способами можно выбрать обед, состоящий из первого, второго и третьего блюд?

2. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7?

Вариант 2

1. В школьной столовой имеется четыре первых блюда, два вторых блюда и два третьих блюда. Сколькими способами можно выбрать обед, состоящий из первого, второго и третьего блюд?

2. Сколько трехзначных нечетных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9?

III. Изучение нового материала

Введем некоторые необходимые понятия.

Соединением из n элементов по k назовем выборку k элементов из различных элементов ($k \le n$).

Пример 1

Пусть даны три различных элемента ($n = 3$): a, b и c. Перечислим соединения из трех элементов по одному ($k = 1$): a, b, c:

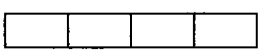
– соединения из трех элементов по два ($k = 2$): ab, ba, ac, ca, bc, cb;

– соединения из трех элементов по три ($k = 3$): abc, acb, bac, bca, cab, cba.

В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов или нет, а также от того, входят ли в соединение все n элементов или только k (при условии, что $k < n$), различают три вида соединений: *перестановки, размещения, сочетания.*

Комбинаторика изучает *число* таких *соединений* (но не сами соединения).

Сначала рассмотрим простейший вид соединений – перестановку. Соединения, каждое из которых содержит n различных элементов, взятых в определенном порядке, называются *перестановками* из n элементов. Другими словами, имеется n позиций (мест), которые надо заполнить n различными элементами:



n мест

Пример 2

Рассмотрим перестановки из трех элементов: a, b, c.

Необходимо расположить на три позиции три элемента.

Если на первую позицию поставить элемент a, то возможны перестановки: abc, acb.

Если на первую позицию поставить элемент b, то возможны перестановки: bac, bca.

Если на первую позицию поставить элемент c, то возможны перестановки: cab, cba,

Видно, что число перестановок из трех элементов равно 6. Вообще, *число перестановок* из n элементов обозначают символом P_n (читается: P из n). В данном примере $P_3 = 6$.

Выведем формулу *числа* P_n *перестановок* из n элементов. Используем комбинаторное правило умножения. На первую позицию можно поместить любой из n элементов, на вторую позицию – любой из оставшихся $(n-1)$ элементов, на третью позицию – любой из оставшихся $(n-2)$ элементов и т.д.

В результат получим: $P_n = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$.

Расположим множители в порядке возрастания. Имеем: $P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n$.

Для произведения первых n натуральных чисел используют символ $n!$ (читается: n факториал), т. е. $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n$.

При этом: $1! = 1$ (и $0! = 1$). Тогда число всевозможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле $P_n = n!$

Пример 3

Вычислим:

а) $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ (см. пример 2);

б) $\dfrac{9!}{2!7!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 7!} = \dfrac{7!\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 7!} = \dfrac{8\cdot 9}{2} = 4\cdot 9 = 36$;

в) $\dfrac{5!}{m(m+1)}\cdot\dfrac{(m+1)!}{(m-1)!\cdot 3!} = \dfrac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot (m+1)!}{(m-1)!m(m+1)\cdot 3!} = \dfrac{4\cdot 5\cdot (m+1)!}{(m+1)!} = 4\cdot 5 = 20$ (где $m\in N$).

Пример 4

Решим уравнение $\dfrac{n!-(n-1)!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{6}$ (где $n\in N$).

Упростим левую часть уравнения, пользуясь определением факториала: $\dfrac{n(n-1)!-(n-1)!}{(n-1)!\cdot n(n+1)} = \dfrac{1}{6}$, или $\dfrac{(n-1)!(n-1)}{(n-1)!\cdot n(n+1)} = \dfrac{1}{6}$, или $\dfrac{n-1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{6}$, или $0 = n^2 - 5n + 6$.

Корни этого квадратного уравнения $n = 2$ и $n = 3$ действительно являются натуральными числами и решениями данного уравнения.

Пример 5

Сколькими способами можно расставить на полке 7 различных книг?

Число таких способов равно числу перестановок из 7 элементов, т. е. $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7 = 5040$.

Пример 6

Имеется десять различных книг, три из которых – справочники. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все справочники стояли рядом?

Так как справочники должны стоять рядом, то будем рассматривать их как одну книгу. Тогда на полке надо расставить $10 - 3 + 1 = 8$ книг. Это можно сделать P_8 способами. Для каждой из полученных комбинаций можно сделать P_3 перестановок справочников. Поэтому число способов расположения книг на полке равно произведению: $P_8 \cdot P_3 = 8! \cdot 3! = 40\,320 \cdot 6 = 241\,920$.

Пример 7

Сколько различных пятизначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 1, 3, 6, 9?

Из пяти цифр можно получить P_5 перестановок. Из них надо исключить те перестановки, которые начинаются с нуля (т.к. первая цифра в числе не может быть нулем). Число таких перестановок P_4.

Тогда получаем: $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 4! \cdot 5 - 4! = 4! \cdot (5 - 1) = 4! \cdot 4 = 24 \cdot 4 = 96$ пятизначных чисел.

IV. Контрольные вопросы

1. Соединение из n элементов по k.
2. Перечислите три вида соединений.
3. Дайте определение перестановок из n элементов.
4. Понятие факториала ($n!$).
5. Число перестановок из n элементов.

V. Задание на уроке

№ 732; 734; 737 (а); 738 (б); 739; 740 (а); 741 (а, в); 742; 745; 746 (а, г); 747 (б, в); 748 (а, г); 750 (б).

VI. Задание на дом

№ 733; 735; 736; 737 (б); 738 (а); 740 (б); 741 (б); 743; 744; 746 (б, в); 747 (а, г); 748 (б, д); 750 (а).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 84–85. Размещения

Цель: рассмотреть следующий вид соединений – размещение.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Определение соединения из n элементов по k.

2. Вычислите:

а) $\dfrac{100!}{99!}-\dfrac{47!}{46!}$;

б) $3P_2+2P_4-P_3$.

3. Сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 3, 4, 8?

Вариант 2

1. Определение перестановки из n элементов.

2. Вычислите:

а) $\dfrac{97!}{96!}-\dfrac{50!}{49!}$;

б) $4P_2+3P_4-2P_3$.

3. Сколько различных трехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 4, 5?

III. Изучение нового материала

Соединения, отличающиеся друг от друга составом элементов или их порядком, каждое из которых содержит k элементов, взятых из n различных элементов, называют *размещениями из n элементов по k* ($k<n$).

Другими словами, из n элементов выбирают k элементов и размещают их на k позиций. Число размещений из n элементов по k обозначают символом A_n^k (читается: A из n по k).

Пример 1

Рассмотрим три элемента a, b, c и выделим две позиции (два места). Будем размещать эти элементы на два места, учитывая порядок следования элементов.

Получаем размещения: ab, ba, ac, ca, bc, cb. Число этих размещений $A_3^2 = 6$.

Получим формулу для вычисления *числа размещений n элементов по k* ($k < n$), т. е. A_n^k.

Опять учтем комбинаторное правило умножения. На первое место можно поставить любой из n элементов, на второе место – любой из оставшихся (n – 1) элементов и т.д. Тогда на k-е место можно поставить любой из $n-(k-1)=n-k+1$ оставшихся элементов.

Получаем: $A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$. Удобнее записать эту формулу в другом виде. Для этого умножим и разделим правую часть равенства на $(n - k)!$ Получаем: $A_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)!}{(n-k)!} =$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-k)(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)n}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Итак, имеем $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Очевидно, что при $k = n$ размещения можно рассматривать как перестановки и $A_n^n = P_n = n!$ (учтено, что $0! = 1$).

Пример 2

Сколько существует трехзначных чисел, в которых цифры различные и нечетные?

Нечетных цифр пять: 1, 3, 5, 7, 9. Их надо разместить на три позиции. Поэтому количество искомых чисел равно числу размещений: $A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = 3\cdot 4\cdot 5 = 60$.

Пример 3

Сколько трехзначных чисел с различными цифрами можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?

Из шести данных цифр можно составить A_6^3 чисел, но среди них будут и трехзначные числа, начинающиеся с нуля (чего, естественно, быть не может). Посчитаем количество таких чисел. В них на первом месте стоит нуль. Значит, на оставшиеся две позиции размещают оставшиеся пять цифр. Поэтому таких чисел будет A_5^2. Следовательно, искомых чисел можно получить: $A_6^3 - A_5^2 = \dfrac{6!}{(6-3)!} - \dfrac{5!}{(5-2)!} =$

$= \dfrac{6!}{3!} - \dfrac{5!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 120 - 20 = 100.$

Пример 4

Сколько чисел с разными цифрами можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?

Учтем предыдущий пример. Из пяти цифр можно составить A_5^5 пятизначных чисел, в том числе и тех, которые начинаются с нуля (их число A_4^4). Поэтому истинно пятизначных чисел будет: $A_5^5 - A_4^4 = 5! - 4! = 4 \cdot 4! = 96.$

Из пяти цифр можно составить A_5^4 четырехзначных чисел, из них начинаются с нуля A_4^3 чисел. Поэтому истинно четырехзначных чисел будет: $A_5^4 - A_4^3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 120 - 24 = 96.$

Аналогично находим количество истинно трехзначных чисел: $A_5^3 - A_4^2 = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 60 - 12 = 48,$ истинно двузначных чисел: $A_5^2 - A_4^1 = 4 \cdot 5 - 4 = 16$ и однозначных чисел: 5.

Всего можно составить: 96 + 96 + 48 + 16 + 5 = 261 пятизначных, четырехзначных, трехзначных, двузначных и однозначных чисел.

Пример 5

Вычислим $\dfrac{A_{12}^4 - A_{11}^4}{A_{10}^3}.$

Используя формулу для числа размещений, получим: $\dfrac{A_{12}^4 - A_{11}^4}{A_{10}^3} =$

$= \left(\dfrac{12!}{8!} - \dfrac{11!}{7!}\right) : \dfrac{10!}{7!} = (9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 - 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11) : (8 \cdot 9 \cdot 10) =$

$= \dfrac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot (12-8)}{8 \cdot 9 \cdot 10} = \dfrac{11 \cdot 4}{8} = \dfrac{11}{2} = 5{,}5.$

Пример 6

Найдем натуральное значение *n*, для которого выполнено условие $A_n^3 + 3A^2 = \dfrac{1}{2} P_{n+1}.$

Используем формулы для числа размещений и числа перестановок и запишем условие: $\frac{n!}{(n-3)!}+3\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{1}{2}(n+1)!$, или $(n-2)(n-1)n+$ $+3(n-1)n=\frac{1}{2}(n+1)!$, или $(n-1)n(n-2+3)=\frac{1}{2}(n+1)!$, или $2(n-1)n(n+1)=(n+1)!!$, или $2=(n-2)!$

Очевидно, что $n-2=2$ и $n=4$.

IV. Контрольные вопросы

1. Дайте определение размещений.
2. Приведите формулу для вычисления числа размещений.

V. Задание на уроке

№ 754; 757; 759; 761; 762 (а); 763; 764 (б).

VI. Задание на дом

№ 755; 758; 760; 762 (б); 764 (а).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 86–87. Сочетания

***Цель*:** обсудить последний вид соединений – сочетания.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Приведите формулу для вычисления числа P_n перестановок из n элементов.
2. Найдите натуральные n, удовлетворяющие условию $A_n^2=6$.
3. Из 24 участников собрания надо выбрать председателя, его заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

Вариант 2

1. Приведите формулу для вычисления числа A_n^k размещений k элементов из n.

2. Найдите натуральные n, удовлетворяющие условию $A_n^2 = 12$.

3. Из 28 спортсменов надо выбрать капитана команды и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

III. Изучение нового материала

Соединения, отличающиеся друг от друга, по крайней мере, одним элементом, каждое из которых содержит k элементов, выбранных из n различных элементов, называют *сочетаниями из n элементов по k. Порядок* следования элементов *не важен.*

Число сочетаний из n элементов по k обозначают символом C_n^k (читается: C из n по k).

Пример 1

Рассмотрим три элемента a, b, c и выделим две позиции (два места). Будем расставлять эти элементы на два места независимо от порядка их следования. Получаем сочетания: ab, ac, bc. Число этих сочетаний $C_3^2 = 3$.

Получим формулу для вычисления числа сочетаний n элементов по k ($k \le n$), т. е. C_n^k.

Допустим, имеется множество, содержащее n элементов, и из его элементов составлены все возможные сочетания по k элементов. Число таких сочетаний равно C_n^k. В каждом таком сочетании можно выполнить P_k перестановок. В результате получим все размещения, которые можно составить из n элементов по k (их число равно A_n^k). Получили равенство $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$, откуда $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}$.

Используя формулу для A_n^k и P_k, имеем: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Пример 2

Сколькими способами можно составить расписание на вторник, если изучается 10 предметов и должно быть 6 уроков (порядок уроков не важен)?

Используем формулу для числа C_n^k сочетаний из n элементов по k и получим: $C_{10}^6 = \dfrac{10!}{6!4!} = \dfrac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6!1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 7\cdot 3\cdot 10 = 210$ способов.

Пример 3

Найти число диагоналей n-угольника.

Имеем n точек плоскости, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Соединим эти точки попарно всеми возможными способами. Будем иметь $C_n^2 = \dfrac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ отрезков.

Из этих отрезков n отрезков являются сторонами многоугольника. Тогда диагоналей будет: $\dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$. В соответствии с полученной формулой имеем: у треугольника 0 диагоналей, у четырехугольника 2 диагонали, у пятиугольника 5 диагоналей, у шестиугольника 9 диагоналей и т. д.

Пример 4

В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого n-угольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

Одна точка пересечения диагоналей возникает за счет двух диагоналей, т. е. четырех вершин.

Их можно выбрать: $C_n^4 = \dfrac{n!}{4!(n-4)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} =$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Таким образом, нашли число точек пересечения диагоналей. По этой формуле получаем: у четырехугольника 1 точка пересечения диагоналей, у пятиугольника 5 точек, у шестиугольника 15 точек и т. д.

Пример 5

У Кати есть 7 разных книг по математике, у Коли – 9 книг по физике. Сколькими способами они могут обменяться пятью книгами?

Катя может выбрать пять книг из семи $C_7^5 = \dfrac{7!}{5!2!} = 21$ способом, Коля (независимо от Кати) может выбрать пять книг из девяти $C_9^5 = \dfrac{9!}{5!4!} = \dfrac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126$ способами.

Итого возможных вариантов обмена: $C_7^5 \cdot C_9^5 = 21\cdot 126 = 2646.$

Пример 6

Из двух математиков и десяти физиков надо составить комитет из восьми человек. В комитет должен входить хотя бы один математик. Сколькими способами это можно сделать?

В таком комитете могут быть:

а) 1 математик и 7 физиков или б) 2 математика и 6 физиков.

Обсудим эти ситуации.

а) Одного математика из двух можно выбрать $C_2^1 = \frac{2!}{1!\cdot 1!} = 2$ способами; 7 физиков из 10 можно выбрать $C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$ способами.

Всего можно выбрать этот состав комитета $C_2^1 \cdot C_{10}^7 = 2\cdot 120 = 240$ способами.

б) Двух математиков из двух можно выбрать $C_2^2 = \frac{2!}{2!\cdot 0!} = 1$ способом; 6 физиков из 10 – $C_{10}^6 = \frac{10!}{6!4!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210$ способами.

Общее число выборов такого комитета $C_2^1 \cdot C_{10}^7 + C_2^2 \cdot C_{10}^6 = 240 + 210 = 450$ способов.

Так как случаи а) и б) происходят независимо (т.е. вместе не могут быть реализованы), то использовалось еще одно правило комбинаторики – *правило сложения*. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие – n_2 способами, ..., k-е действие – n_k способами, то действие, состоящее в том, что *выполняется одно любое из действий*, можно выполнить $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ способами.

На это правило рассмотрим еще пример.

***Пример** 7*

Сколько существует делителей числа 210?

Разложим число 210 на простые множители: $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Число делителей, состоящих из произведения двух простых множителей, равно $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ (числа 6, 10, 14, 15, 21, 35), из произведения трех простых множителей $C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$ (числа 30, 42, 70, 105). Кроме того, 4 простых делителя (числа 2, 3, 5, 7), а также само число 210 и 1.

Всего получаем: 6 + 4 + 4 + 1 + 1 = 16 делителей числа 210.

Пример 8

Найдите натуральные значения n, удовлетворяющие условию $\frac{C_{n+1}^3}{C_n^4}=\frac{6}{5}$.

Используем формулу для нахождения числа сочетаний из n элементов по k. Получим уравнение $\frac{(n+1)4!(n-4)!}{3!(n-2)!n!}=\frac{6}{5}$, или $\frac{(n+1)4}{(n-3)(n-2)}=\frac{6}{5}$, или $10(n+1)=3(n^2-5n+6)$, или $0=3n^2-25n+8$.

Корни этого квадратного уравнения $n=\frac{1}{3}$ (не натуральное число) и $n=8$.

Заметим, что до сих пор рассматривались виды соединений с *различными n элементами*. Но некоторые из этих элементов могут быть и одинаковыми. Тогда все приведенные *формулы* для числа перестановок P_n, числа размещений A_n^k и числа сочетаний C_n^k *меняются*.

Не будем углубляться в рассмотрение соединений с одинаковыми элементами, но для иллюстрации рассмотрим, например, перестановки с одинаковыми элементами.

Перестановки из n элементов, в каждую из которых входят n_1 одинаковых элементов одного типа, n_2 одинаковых элементов другого типа, ..., n_k одинаковых элементов k-го типа (при этом $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$) называют *перестановками из n элементов с повторениями*.

Их число определяется по формуле $C_n(n_1,n_2,\ldots,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$.

Пример 9

Сколькими способами можно расположить в ряд две зеленые, четыре красные и шесть желтых лампочек?

Всего имеется 2 + 4 + 6 = 12 лампочек.

Число способов их расположения: $C_{12}(2;4;6)=\frac{12!}{2!4!6!}=$
$=\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=13860$.

IV. Контрольные вопросы

1. Определение сочетаний из n элементов по k.

2. Число C_n^k сочетаний из n элементов по k.

3. Перестановки из n элементов с повторениями.

4. Число $C_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ перестановок из n элементов с повторениями.

V. Задание на уроке

№ 768; 770; 772; 774; 776 (а); 777; 779; 781.

VI. Задание на дом

№ 769; 771; 773; 775; 776 (б); 778; 780; 782.

VII. Подведение итогов урока

§ 12. Начальные сведения из теории вероятностей

Урок 88. Относительная частота случайного события

Цель: рассмотреть основные понятия теории вероятностей.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Решите уравнение $C_n^{n-2} = 21$ (где $n \in N$).

2. На полке стоит десять разных книг. Сколькими способами из них можно выбрать семь книг?

3. У Миши восемь, а у Вити семь различных конфет. Сколькими способами мальчики могут поменяться пятью конфетами?

Вариант 2

1. Решите уравнение $C_{n+1}^{n-1} = 28$ (где $n \in N$).

2. На полке стоит двенадцать разных книг. Сколькими способами из них можно выбрать девять книг?

3. У Коли девять, а у Леши восемь различных конфет. Сколькими способами мальчики могут поменяться шестью конфетами?

III. Изучение нового материала

В повседневной жизни, в научных или технических экспериментах встречаются *случайные события*, т. е. такие события, которые могут произойти, а могут и не произойти. Например, выпадение шести очков при бросании кости, попадание или промах при стрельбе, выигрыш или проигрыш спортивной команды. Подобные закономерности случайных событий изучает *теория вероятностей*. Методы теории вероятностей применяются в науке и технике.

Один из основных вопросов теории вероятностей: *как часто наступает* то или иное *событие* в большой серии происходящих в одинаковых условиях испытаний со случайными исходами.

Пример 1

При бросании 600 раз игральной кости пять очков выпало 97 раз. Каждое из шести событий: выпадение одного, двух, ..., шести очков, соответственно, является случайным.

Число 97 показывает, сколько раз в этом испытании произошло рассматриваемое событие (выпадение пяти очков), и называется *частотой* этого события.

Отношение частоты к общему числу испытаний $\left(\dfrac{97}{600}\right)$ называют *относительной частотой* этого события.

Пусть определенное испытание проводится многократно в одних и тех же условиях и при этом каждый раз фиксируется, произошло или нет интересующее нас событие A. Предположим, что было проведено n испытаний и в m из них произошло событие A. Тогда *число m* называют *частотой события A, а отношение* $\dfrac{m}{n}$ *– относительной частотой этого события*. Другими словами, *относительной частотой* случайного события в серии испытаний называют отношение числа испытаний, в которых это событие наступило, к числу всех испытаний.

В ходе статистических исследований установлено, что при многократном повторении некоторых опытов в одних и тех же условиях *относительная частота* определенного события остается *практически одинаковой*, незначительно отличаясь от некоторого числа p. Число p зависит от рассматриваемого случайного события.

Пример 2

а) При подбрасывании однородной игральной кости, имеющей форму куба, шансы выпадения любого числа очков из шести возможных одинаковы. При небольшом числе испытаний выпадение, например, пяти очков может произойти чаще, чем выпадение шести очков. Однако если эти испытания проводятся большое число раз, то относительные частоты выпадения одного, двух, ..., шести очков практически равны $\frac{1}{6}$.

б) При выборе одной карты (например, туз червей) из колоды (52 карты), при ее идеальном перемешивании после каждого испытания (при их большом числе), относительная частота этого события близка к числу $\frac{1}{52}$.

Если в длинной серии одинаковых испытаний со случайными исходами значения относительных частот появления одного и того же события близки к некоторому определенному числу, то это число считают *вероятностью* данного случайного *события.*

Такой подход к вычислению вероятностей называют *статистическим подходом.*

IV. Контрольные вопросы

1. Какие события называют случайными?
2. Вопросы, изучаемые теорией вероятностей.
3. Частота и относительная частота события.
4. Вероятность случайного события.

V. Задание на уроке

№ 787, 789 (а, г); 791 (а); 792; 794.

VI. Задание на дом

№ 788; 790 (б, в); 791 (б); 793; 795.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 89–90. Вероятность равновозможных событий

Цель: рассмотреть понятие вероятности события.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Разумеется, проведение реальных испытаний для нахождения вероятности событий очень трудоемко. Например, было проведено 80 640 подбрасываний монеты и экспериментально определена вероятность 0,4923 выпадения орла. Если на одно подбрасывание тратить только одну секунду, то на такие опыты потребуется более суток. Поэтому необходимо определять вероятность события путем рассуждений. Обсудим этот способ.

Подбрасывая монету, мы понимаем, что шансы выпадения орла и решки одинаковы. Тогда вероятность выпадения орла равна $\frac{1}{2}$.

Точно так же одинаковы шансы выпадения любой из граней на игральной кости. Вероятность такого выпадения равна $\frac{1}{6}$. В подобных случаях считают, что события *равновозможны*.

Пусть нас интересует результат бросания кубика, при котором число очков кратно 3 (т. е. три очка или шесть очков). Исходы бросаний, при которых появляется интересующий нас результат, называют *благоприятными*.

Вероятностью P появления некоторого события называют отношение числа m случаев, благоприятствующих появлению этого события, к общему числу n равновозможных в данном опыте случаев, т. е. $P = \frac{m}{n}$.

Приведем примеры вычисления вероятностей.

Пример 1

В мешке 18 шаров: 5 белых, 3 зеленых и 10 красных. Найдем вероятность того, что вытащенный наугад шар будет заданного цвета.

Мы можем вытащить любой из 18 шаров, т. е. $n = 18$.

Благоприятные исходы: появление белого шара ($m_б = 5$), зеленого шара ($m_з = 3$), красного шара ($m_к = 10$).

Находим вероятность появления белого шара: $P_б = \frac{m_б}{n} = \frac{5}{18}$, зеленого шара: $P_з = \frac{m_з}{n} = \frac{3}{18}$, красного шара: $P_к = \frac{m_к}{n} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$.

Пример 2

Найдем вероятность того, что при подбрасывании двух костей суммарное число очков окажется равным 5.

Возможно следующее сочетание очков на первой и второй костях: 1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1 – четыре благоприятных случая ($m = 4$).

Всего возможных исходов: $n = 6 \cdot 6 = 36$ (по шесть для каждой кости).

Тогда вероятность рассматриваемого события равна: $P = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Пример 3

Из класса, в котором 15 девочек и 10 мальчиков, жеребьевкой выбирают команду численностью 15 человек для игры в КВН. Какова вероятность того, что будут выбраны 10 девочек и 5 мальчиков?

Из 25 человек команду численностью 15 человек можно выбрать $n = C_{25}^{15}$ способами.

Выбрать 10 девочек из 15 можно C_{15}^{10} способами, выбрать 5 мальчиков из 10 можно C_{10}^{5} способами.

Всего скомплектовать команду можно $m = C_{15}^{10} \cdot C_{10}^{5}$ способами.

Поэтому вероятность рассматриваемого события $P = \frac{m}{n} = \frac{C_{15}^{10} \cdot C_{10}^{5}}{C_{25}^{15}} = \frac{15!10!15!10!}{10!5!5!5!25!} = \frac{91}{356592000} \approx 2,5 \cdot 10^{-7}$.

Видно, что вероятность такого события чрезвычайно мала – один шанс из четырех миллионов.

Событие, которое происходит всегда, называют *достоверным* событием. Например, событие, состоящее в том, что при бросании игральной кости выпадет натуральное число очков. *Вероятность* достоверного события *равна 1.*

Событие, которое не может произойти, называют *невозможным*. Например, выпадение 9 очков на игральной кости. *Вероятность* невозможного события *равна 0*.

Таким образом, вероятность P некоторого события $0 \le P \le 1$.

Заметим, что понятие вероятности позволяет решать практические задачи.

Пример 4

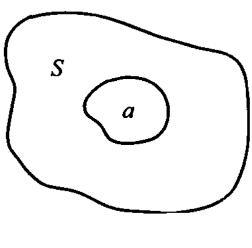
Как приближенно посчитать число рыб в озере?

Пусть в озере плавает x рыб. Бросаем сеть и отлавливаем n рыб. Вероятность поймать одну рыбу $P = \frac{n}{x}$. Пометим этих рыб и выпустим в озеро. Через несколько дней в ту же погоду, в том же месте ставим ту же сеть. Предположим, что поймали m рыб, из них k – меченых x. Меченая рыба поймалась с вероятностью $P = \frac{k}{m}$. Получаем равенство $\frac{n}{x} = \frac{k}{m}$, откуда $x = \frac{nm}{k}$.

Разумеется, точность такого эксперимента будет невысокой, но для оценки числа рыб в озере вполне допустима.

Вероятность случайного события иногда можно найти, используя геометрические соображения.

Предположим, что точку бросают в фигуру площади S. Пусть эта фигура содержит фигуру площади a. Будем считать вероятностью P попадания точки в меньшую фигуру отношение $\frac{a}{S}$, т. е. $P = \frac{a}{S}$.

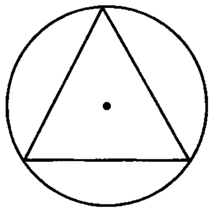


Пример 5

В окружность вписан правильный треугольник. Найдем вероятность того, что точка, брошенная в круг, попадет в треугольник.

Пусть радиус окружности равен R, а сторона треугольника равна c. Свяжем между собой эти переменные. Используем теорему синусов: $\frac{c}{\sin 60^\circ} = 2R$, откуда $c = 2R\sin 60^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

Найдем вероятность попадания точки в треугольник: $P = \frac{a}{S} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} : \pi R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,41.$

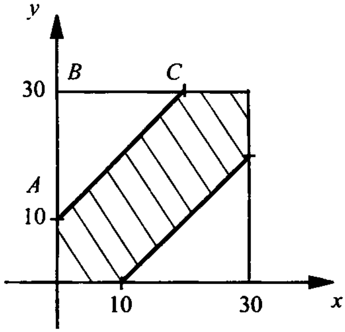


Пример 6

Коля и Миша договорились встретиться в условленном месте с 10 ч до 10 ч 30 мин, причем каждый пришедший ждет другого 10 мин, после чего уходит. Найдите вероятность того, что встреча состоится, если каждый выбирает момент своего прихода наудачу в указанном интервале.

Пусть x – момент прихода на место встречи Коли, y – момент прихода Миши. Так как время ожидания составляет 10 мин, то для встречи необходимо выполнение неравенства $|y - x| \leq 10$, или $-10 \leq y - x \leq 10$, или $x - 10 \leq y \leq x + 10$.

На координатной плоскости построим квадрат со стороной 30. Каждая точка этого квадрата соответствует времени прихода мальчиков. Построим также множество точек, удовлетворяющих неравенству $x - 10 \leq y \leq x + 10$ (эта область заштрихована). Тогда вероятность встречи мальчиков равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади квадрата.



Площадь квадрата равна $30^2 = 900$. Найдем площадь треугольника ABC и получим: $\frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 20^2 = 200.$

Тогда площадь заштрихованной фигуры: $900 - 2 \cdot 200 = 500$.

Вероятность встречи мальчиков $\frac{500}{900} = \frac{5}{9}$.

III. Контрольные вопросы

1. Равновозможные события.
2. Благоприятные исходы события.
3. Понятие вероятности события.
4. Достоверное событие и невозможное событие.
5. Понятие геометрической вероятности.

IV. Задание на уроке

№ 799; 801; 803; 805; 807; 809; 811; 814.

V. Задание на дом

№ 798; 800; 802; 804; 808; 810; 812; 815; 816.

VI. Подведение итогов урока

Уроки 91–92. Сложение и умножение вероятностей (факультативное занятие)

Цель: рассмотреть более сложные понятия теории вероятностей.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Достоверное событие и его вероятность.

2. Найти вероятность того, что при подбрасывании двух костей суммарное число очков окажется равным восьми.

3. Внутри окружности радиуса R находится окружность радиуса $\frac{R}{3}$. Найти вероятность того, что точка, брошенная в большой круг, попадет в малый круг.

Вариант 2

1. Невозможное событие и его вероятность.

2. Найти вероятность того, что при подбрасывании двух костей суммарное число очков окажется равным девяти.

3. Внутри окружности радиуса R находится окружность радиуса $\frac{R}{4}$. Найти вероятность того, что точка, брошенная в большой круг, попадет в малый круг.

III. Изучение нового материала

Два события называют *несовместными,* если в одном и том же испытании они не могут произойти одновременно, т.е. наступление одного из них исключает наступление другого.

Пример 1

Пусть в мешке находится 15 шаров: 7 белых, 5 красных и 3 зеленых. Из мешка наугад вынимают один шар. Рассмотрим следующие события: событие A – шар оказался красным; событие B – шар оказался зеленым (очевидно, что события A и B несовместны); событие C – шар оказался не белым (красным или зеленым). Выясним, как вероятность события C связана с вероятностями каждого из событий A и B.

Найдем вероятности событий A, B, C. Для каждого испытания (извлечение из мешка одного шара) равновозможными являются 15 исходов. Из них для события A благоприятны 5 исходов, для события B – 3 исхода, для события C – 8 исходов.

Находим вероятности этих событий: $P(A)=\frac{5}{15}$, $P(B)=\frac{3}{15}$, $P(C)=\frac{8}{15}$.

Видно, что $P(C) = P(A) + P(B)$.

Имеем *правило сложения вероятностей*: если событие C означает, что наступает одно из двух несовместных событий A или B, то вероятность события C равна сумме вероятностей событий A и B.

Пример 2

На учениях летчик получил задание «уничтожить» три рядом расположенных склада боеприпасов. На борту самолета одна бомба. Вероятность попадания в первый склад равна 0,1, во второй – 0,15, в третий – 0,2. Любое попадание в результате детонации вызывает взрыв остальных складов. Найдем вероятность того, что склады будут уничтожены.

Обозначим события: A – попадание в первый склад, B – попадание во второй склад, C – попадание в третий склад (эти события несовместны), $Д$ – уничтожение складов.

По правилу сложения вероятностей: $P(Д) = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}2 = 0{,}45$.

При решении некоторых задач удобно использовать *свойство вероятностей противоположных событий*. События A и B называют *противоположными*, если всякое наступление события A означает ненаступление события B, а ненаступление события A – наступление события B. Событие, противоположное событию A, обозначают символом $\overline{A}$. Сумма вероятностей противоположных событий *равна 1*, т. е. $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Пример 3

Пусть бросают игральную кость. Обозначим события: A – выпадения четного числа очков, B – выпадение нечетного числа очков. Очевидно, что A и B – противоположные события, т. е. $B=\overline{A}$. При этом $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Пример 4

Бросают 2 игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух кубиках, меньше 10?

Общее число равновозможных исходов этого испытания равно 36. Пусть событие A означает, что сумма выпавших на 2 кубиках очков меньше 10. Так как благоприятным для события A является большое число исходов, то удобно сначала найти вероятность противоположного ему события $\overline{A}$, которое означает, что сумма выпавших очков больше или равна 10. Благоприятными для события $\overline{A}$ являются: 6 + 4; 6 + 5; 6 + 6; 5 + 6; 4 + 6. Поэтому вероятность $P(\overline{A})=\dfrac{5}{36}$ и $P(A)=1-P(A)=\dfrac{31}{36}$.

Два события называют *независимыми*, если наступление одного из них не влияет на вероятность наступления другого события.

Пример 5

Пусть в одном мешке находится 10 шариков, из которых 3 белых; а в другом – 15 шариков, из которых 7 белых. Из каждого мешка наугад вытаскивают по одному шарику. Какова вероятность того, что оба шарика окажутся белыми?

Рассмотрим события: A – из первого мешка вынимают белый шарик, B – из второго мешка вынимают белый шарик (события независимы).

Для события A благоприятными являются 3 исхода из 10 и $P(A)=\frac{3}{10}$, для события B – 7 исходов из 15 и $P(B)=\frac{7}{15}$.

Рассмотрим событие C, состоящее в совместном появлении событий A и B. Общее число равновозможных исходов испытания, в которых событие C наступает или не наступает, равно $10\cdot15$. Действительно, каждому из 10 извлечений шарика из первого мешка соответствует 15 возможностей извлечения шарика из второго мешка. Благоприятными для события C являются те исходы, при которых оба вынутых шарика оказываются белыми. Каждому из 3 возможных извлечений белого шарика из первого мешка соответствуют 7 возможностей извлечения белого шарика из второго мешка, т. е. число исходов, благоприятных для события C, равно $3\cdot7$. Поэтому получаем: $P(C)=\frac{3\cdot7}{10\cdot15}=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{15}$, или $P(C)=$ $=P(A)\cdot P(B)$.

Имеем *правило умножения вероятностей*: если событие C означает совместное наступление двух независимых событий A и B, то вероятность события C равна произведению вероятностей событий A и B, т. е. $P(C)=P(A)\cdot P(B)$.

Пример 6

Бросают две игральные кости. Какова вероятность появления на первой кости четного числа очков и на второй трех очков?

Обозначим события: A – появление на первой кости четного числа очков, B – появление на второй кости трех очков, C – появление на первой кости четного числа очков и на второй кости трех очков (т. е. событие C состоит в совместном появлении событий A и B).

События A и B независимы, тогда $P(C)=P(A)\cdot P(B)=$ $=\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$.

IV. Контрольные вопросы

1. Какие события называют несовместными?
2. Правило сложения вероятностей.
3. Свойство вероятностей противоположных событий.

4. Какие события называют независимыми?

5. Правило умножения вероятностей.

V. Задание на уроке

№ 820; 822; 824; 826; 828; 830.

VI. Задание на дом

№ 821; 823; 825; 827; 829.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 93–94. Контрольная работа по теме «Элементы комбинаторики и теории вероятностей»

Цель: проверка знаний учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика контрольной работы

Учитывая специфику изученной темы, контрольную работу целесообразно провести по вариантам *одинаковой сложности.* Зачетная работа по теме проводиться не будет.

III. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Сколькими способами можно разместить пять различных книг на полке?

2. Сколько трехзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр 0, 1, 3, 6, 7, 9?

3. Из десяти членов команды надо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

4. Вычислите $3P_3 + 2A_{10}^2 - C_7^2$.

5. Выпускники экономического института работают в трех различных компаниях: 17 человек – в банке, 23 – в фирме и 19 – в налоговой инспекции. Найдите вероятность того, что случайно встреченный выпускник работает в фирме.

6. Мишень представляет собой три круга (один внутри другого), радиусы которых равны 3, 7 и 8 см. Стрелок выстрелил, не целясь,

и попал в мишень. Найдите вероятность того, что он попал в средний круг, но не попал в маленький круг.

Вариант 2

1. Сколькими способами можно разместить шесть различных книг на полке?

2. Сколько трехзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр 0, 3, 4, 5, 8?

3. Из восьми членов команды надо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

4. Вычислите $P_4 - 2A_9^2 + 3C_8^2$.

5. Выпускники экономического института работают в трех различных компаниях: 19 человек – в банке, 31 – в фирме и 15 – в налоговой инспекции. Найдите вероятность того, что случайно встреченный выпускник работает в банке.

6. Мишень представляет собой три круга (один внутри другого), радиусы которых равны 4, 5 и 9 см. Стрелок выстрелил, не целясь, и попал в мишень. Найдите вероятность того, что он попал в средний круг, но не попал в маленький круг.

IV. Ответы

Вариант 1

1. *Ответ:* 120.
2. *Ответ:* 100.
3. *Ответ:* 36.
4. *Ответ:* 177.
5. *Ответ:* $\frac{23}{59}$.
6. *Ответ:* $\frac{5}{8}$.

Вариант 2

1. *Ответ:* 720.
2. *Ответ:* 48.
3. *Ответ:* 28.
4. *Ответ:* –36.
5. *Ответ:* $\frac{19}{65}$.
6. *Ответ:* $\frac{1}{9}$.

Повторение курса 7–9 классов

Урок 95. Вычисления. Тождественные преобразования

Цель: вспомнить основные вычислительные навыки.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение пройденного материала

Выражения, составленные из чисел и переменных с помощью скобок и действий сложения, вычитания и умножения, называют *целыми*. Также целыми выражениями считают те, в которых используется деление на число, отличное от нуля. Например, следующие выражения являются целыми: a^2-3ab, $(x+2y)\left(3x-\frac{y}{4}\right)$, $\frac{n^2+2m}{5}$.

Выражения, в которых используется деление на выражение с переменными, называют *дробными*. Например, выражения $a-3b+\frac{b}{a-b}$, $\frac{a-3}{a+1}$ – дробные.

Целые и дробные выражения называют *рациональными*.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют *допустимыми значениями переменных*.

Целое выражение имеет смысл при любых значениях переменных, *дробное* выражение – при тех значениях переменных, для которых делители не равны нулю. Например, для выражения $3a^2-6ab+\frac{b}{2}$ допустимыми являются любые значения a и b. Для выражения $\frac{3x-5y}{(x+3)(y-1)}$ допустимыми являются любые значения x и y, кроме $x=-3$ и $y=1$.

Одночленами называют произведение чисел, переменных и их степеней, а также сами числа, переменные и их степени. Например, $3a^5b^2$, $-2xy^2$, 5, a, b^5 – одночлены.

Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех входящих в него переменных. Например, одночлен $7x^5y^2z$ имеет восьмую степень.

Многочленом называют алгебраическую сумму одночленов. Например, x^3-6x^2+3x+1, $5a^2b-2ab+b^4$ – многочлены.

Одночлен можно рассматривать как многочлен, состоящий из одного члена.

Степенью многочлена называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов. Например, степень многочлена $6a^3b-5a^4b^5+3a^2-7b^4$ равна степени одночлена $-5a^4b^5$, т. е. равна 9.

Формулы сокращенного умножения

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

3) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

4) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

5) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;

6) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

7) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Свойства степени с целым показателем

1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;

2) $a^m:a^n=a^{m-n}$;

3) $(a^m)^n=a^{mn}$;

4) $(ab)^n=a^nb^n$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$, где $a\neq 0$, $b\neq 0$.

Арифметическим *квадратным корнем* из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Свойства арифметического квадратного корня

1) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$;

2) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; 3) $\sqrt{a^2}=|a|$.

Модулем числа a называют само число a, если оно неотрицательное, и противоположное число, если число a отрицательное, т. е.
$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

III. Задание на уроке

№ 875 (а, б); 877 (а); 879 (б); 882 (г); 885 (а); 887 (б); 888; 890; 902 (а, д); 905 (а, в); 907 (д); 910 (а, б); 913 (г); 921 (а, б); 922 (а, д).

IV. Задание на дом

№ 875 (в, г); 877 (б); 879 (А); 882 (б); 885 (б); 887 (а); 889; 891; 902 (б, е); 905 (б, г); 907 (е); 910 (в, г); 913 (б); 921 (в, г); 922 (б, г).

V. Подведение итогов урока

Уроки 96–97. Уравнения и системы уравнений

***Цель*:** повторить основные способы решения уравнений и систем уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)
Вариант 1

1. Найдите значение выражения.

а) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-6} - 3^{-11} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-9}$;

б) $\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} + \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$.

2. Упростите выражение.

а) $3b(2a-b)^2 - (a+3b)(b^2-3a^2)$;

б) $\left(x+2-\frac{x^2}{x+2}\right)\frac{x+2}{4x-4}$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения.

а) $2^{-12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-10}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$;

б) $\frac{4-\sqrt{6}}{4+\sqrt{6}}+\frac{4+\sqrt{6}}{4-\sqrt{6}}$.

2. Упростите выражение.

а) $2a(a+3b)^2-(2a-b)(a^2+2b^2)$;

б) $\left(x+1-\frac{x^2}{x+1}\right)\frac{x^2-1}{2x^2+x}$.

III. Повторение пройденного материала

Уравнения

Корнем уравнения с одной переменной называют такое значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Уравнения с одной переменной, имеющие одни и те же корни, называют *равносильными*.

Уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.

Уравнения будут равносильными, если:

1) в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак;

2) обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число.

Уравнением n-й степени ($n \geq 1$) называют уравнение вида $P_n(x) = 0$, где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени.

При $n = 1$ имеем *линейное уравнение* $ax - b = 0$.

Для $a \neq 0$ такое уравнение имеет единственный корень $x = \frac{b}{a}$.

Для $a = 0$ и $b \neq 0$ уравнение не имеет корней.

Для $a = 0$ и $b = 0$ корнем уравнения является любое число x.

При $n = 2$ имеем *квадратное уравнение* $ax^2+bx+c=0$, где $a \neq 0$.

Если хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют *неполным квадратным уравнением* и решают разложением его левой части на множители.

Дискриминантом квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ называют выражение $D=b^2-4ac$.

Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$; если $D = 0$ – один корень (или два равных корня) $x=-\dfrac{b}{2a}$; если $D<0$ уравнение корней не имеет.

Для квадратного уравнения выполняется *теорема Виета*: если x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, то сумма корней $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ и произведение корней $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

При $n\geq 3$ имеем *уравнение высокой степени*. Такие уравнения решают или разложением левой части на множители, или введением новой переменной.

При решении *дробных рациональных уравнений* используют следующий алгоритм:

1) находят общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;

2) умножают обе части уравнения на общий знаменатель;

3) решают получившееся целое уравнение;

4) исключают из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Системы уравнений

Решением уравнения с двумя переменными называют пару значений переменных, которые обращают это уравнение в верное равенство.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют *равносильными*. Уравнения, не имеющие решений, также считают равносильными.

Каждое решение $(x; y)$ уравнения с двумя переменными можно изобразить точкой с координатами x и y на координатной плоскости. Все такие точки образуют *график уравнения*.

Линейным уравнением с двумя переменными x и y называют уравнение вида $ax+by=c$. Графиком такого уравнения является прямая линия.

Системой двух *линейных уравнений* с двумя переменными x и y называют систему вида $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$ Такая система имеет единственное решение при $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$; не имеет решения при $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ и имеет бесконечное множество решений при $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Для решения систем уравнений с двумя переменными используют:

а) способ подстановки;

б) способ сложения;

в) способ замены переменной;

г) графический способ.

При решении систем *двух нелинейных уравнений* тем или иным способом получают *линейное уравнение* и далее используют способ подстановки.

IV. Задание на уроке

№ 925 (а, в); 926; 935 (а, в, е); 937; 940 (б, е); 943; 957 (а, г); 958 (б); 967; 972 (а, б); 973 (в); 974 (а, в); 981; 985; 993.

V. Задание на дом

№ 925 (б, г); 927; 935 (б, г, д); 938; 940 (в, д); 944; 957 (б, в); 958 (а); 969; 972 (в, г); 973 (д); 974 (б, г); 982; 986; 994.

VI. Подведение итогов урока

Урок 98. Неравенства

Цель: повторить способы решения неравенств и систем неравенств.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)

Вариант 1

1. Решите уравнение.

а) $\frac{3x^2+4x+2}{3} = \frac{5x^2-x+1}{5}$;

б) $(3x-2)(x-1) = 4(x-1)^2$.

2. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases} 10y - x = -21, \\ 3x + 5y = -7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4|x| + 3y = 9, \\ 4x - y = 1. \end{cases}$

Вариант 2

1. Решите уравнение.

а) $\dfrac{2x^2 + 5x + 1}{2} = \dfrac{7x^2 - 2x - 3}{7}$;

б) $(2x-1)(x-2) = 5(x-2)^2$.

2. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases} 15y + x = 29, \\ 2x - 3y = -8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3|x| + 2y = 2, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$

III. Повторение пройденного материала

Решением неравенства с одной переменной называют значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство. Решить неравенство – значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Неравенства, имеющие одни и те же решения, называют *равносильными*. Неравенства, не имеющие решений, также считают равносильными.

Неравенства будут *равносильными*, если:

1) из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком;

2) обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число;

3) обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный.

Если ставится задача найти общие решения нескольких неравенств, то говорят, что надо решить *систему неравенств*. *Решением системы неравенств с одной переменной* называют значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы. Решить систему неравенств – значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Метод интервалов – наиболее универсальный и эффективный способ решения неравенств. Находят значения переменной, при которых данное выражение равно нулю или не имеет смысла, и отмечают их на числовой прямой. Строят диаграмму знаков выражения.

Необходимо помнить, что при проходе через корень нечетной кратности знак выражения меняется на противоположный, через корень четной кратности – сохраняется. На основании построенной диаграммы записывают решение неравенства.

IV. Задание на уроке

№ 1001 (а, г); 1002 (б, д); 1003 (а); 1004 (а, в); 1007 (а, г); 1008 (б); 1009 (а, в); 1011 (а, д); 1014 (а, б); 1015 (а).

V. Задание на дом

№ 1001 (б, в); 1002 (а, е); 1003 (б); 1004 (б, г); 1007 (б, в); 1008 (а); 1009 (б, г); 1011 (б, е); 1014 (в, г); 1015 (б).

VI. Подведение итогов урока

Урок 99. Функции

Цель: повторить основные свойства функции и построение графиков функций.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)
Вариант 1

1. Решите неравенство.

а) $(3x-7)^2 \ge (7x-3)^2$;

б) $\dfrac{3}{x-1} \le \dfrac{2}{x+2}$.

2. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2+9x+8 \le 0, \\ -0{,}3x \ge 2{,}4. \end{cases}$

3. Решите двойное неравенство $9x^2-2 < (3x+2)^2 < 9x^2+2$.

Вариант 2

1. Решите неравенство.

а) $(5x-4)^2 \geq (4x-5)^2$;

б) $\frac{5}{x+1} \leq \frac{3}{x-2}$.

2. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2+7x+6 \leq 0, \\ -0{,}7x \geq 4{,}2. \end{cases}$

3. Решите двойное неравенство $4x^2-3 < (2x+3)^2 < 4x^2+3$.

III. Повторение пройденного материала

Зависимость переменной y от переменной x называют *функцией*, если каждому значению x соответствует единственное значение y. При этом величину x называют *независимой переменной* (или аргументом функции), величину y – *зависимой переменной* (или значением функции).

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

Точка пересечения графика функции с осью ординат равна значению функции $y = f(x)$ при $x = 0$, т. е. $y = f(0)$. Точки пересечения графика функции с осью абсцисс (их еще называют нулями функции) являются корнями уравнения $f(x) = 0$.

Промежутки знакопостоянства функции – это те значения переменных x, при которых функция принимает положительные ($y > 0$) и отрицательные ($y < 0$) значения.

Монотонность – возрастание или убывание функции. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей*, если бóльшему значению аргумента соответствует бóльшее значение функции (т. е. если $x_2 > x_1$, то и $f(x_2) > f(x_1)$). Функция называется *убывающей*, если бóльшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$).

Область определения функции называется *симметричной*, если в нее входит и точка x_0, и точка $(-x_0)$ (т. е. точка, симметричная точке x_0 относительно начала координатной оси).

Функцию называют *четной*, если при изменении знака аргумента значение функции не меняется, т. е. $f(-x) = f(x)$. График четной функции *симметричен относительно оси ординат*.

Функцию называют *нечетной*, если при изменении знака аргумента значение функции также меняется на противоположное, т. е. $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции *симметричен относительно начала координат*.

Основные виды рациональных функций

1. *Линейная* функция $y = ax + b$ (где a и b – некоторые числа). График функции – прямая линия. Частные случаи:

а) $y = ax$ – прямая пропорциональность, график проходит через начало координат;

б) $y = b$ – прямая, параллельная оси абсцисс;

в) $x = c$ – прямая, параллельная оси ординат.

2. *Квадратичная* функция $y = ax^2 + bx + c$ (где a, b, c – некоторые числа). График функции – парабола. Частный случай $y = ax^2$. График этой функции – парабола с вершиной в начале координат.

3. *Дробно-линейная* функция $y = \dfrac{ac+b}{cx+d}$ (где a, b, c, d – некоторые числа). График функции – гипербола. Частный случай $y = \dfrac{k}{x}$ – обратная пропорциональность. График этой функции – гипербола, симметричная относительно начала координат.

IV. Задание на уроке

№ 1018; 1021 (а, б, в); 1023 (а); 1025; 1028 (а, в, д); 1029 (а, г); 1030 (б); 1032 (а, в); 1033; 1034 (в); 1035 (а, в).

V. Задание на дом

№ 1019; 1021 (г, д, е); 1023 (б); 1026; 1028 (б, г, е); 1029 (б, в); 1030 (а); 1032 (б, г); 1034 (а); 1035 (б, г).

VI. Подведение итогов урока

Уроки 100–101. Итоговая контрольная работа

Цель: проконтролировать знания по всем темам курса по однотипным вариантам.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика контрольной работы

В заключение обучения проводится итоговая контрольная работа. Предлагаются *два одинаковых по сложности варианта.* На наш взгляд, использование при подведении итогов вариантов разной сложности нецелесообразно и некорректно. В одинаковых условиях проще и этичнее сопоставить результаты и успехи учащихся. При окончательном подведении итогов, разумеется, необходимо учитывать все результаты обучения (оценки за контрольные мероприятия, сложность решаемых задач, активность на уроках и т.д.).

III. Критерии оценки работы

Вариант традиционно содержит шесть задач примерно одинаковой сложности. Поэтому рекомендуем использовать *те же критерии* при оценке, *что и для вариантов 1 и 2 контрольных работ* при текущем обучении.

Оценка «5» ставится за пять решенных задач, оценка «4» – за четыре задачи, оценка «3» – за три задачи. Одна задача является резервной и дает некоторую свободу выбора.

IV. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Упростите выражение $\left(4x^2-25y^2\right)\left(\dfrac{1}{2x+5y}+\dfrac{1}{2x-5y}\right)$.

2. Решите уравнение $\dfrac{2x-3}{x}=\dfrac{x+6}{x+4}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}(x-3y)(x+4)=0,\\ x-5y=1.\end{cases}$

4. Решите двойное неравенство $2<3-\dfrac{2}{3}x<4$.

5. Постройте график функции $y=x^2-3x$. При каких значениях x функция принимает положительные значения?

6. Сын младше отца в 6 раз, а через год он станет младше отца в 5 раз. Через сколько лет сын будет младше отца в 3 раза?

Вариант 2

1. Упростите выражение $\left(9x^2-16y^2\right)\left(\dfrac{1}{3x-4y}-\dfrac{1}{3x+4y}\right)$.

2. Решите уравнение $\dfrac{5x+2}{x}=\dfrac{4x+13}{x+4}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}(x+4y)(x-3)=0,\\ x+3y=1.\end{cases}$

4. Решите двойное неравенство $3 < 4 - \frac{3}{4}x < 5$.

5. Постройте график функции $y = 2x - x^2$. При каких значениях x функция принимает отрицательные значения?

6. Отец старше сына в 9 раз, а через год он станет старше сына в 7 раз. Через сколько лет отец будет старше сына в 5 раз?

Урок 102. Подведение итогов обучения

Цель: ознакомить учащихся с результатами обучения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Результаты итоговой контрольной работы

1. Оглашение оценок за контрольную работу.
2. Типичные ошибки в задачах.
3. Разбор задач контрольной работы (вывешен на стенде).

III. Итоги учебного года

1. Сообщение годовых оценок по алгебре (похвалить отлично и хорошо успевающих школьников, обратить внимание на слабые места менее успевающих учеников и дать рекомендации по их преодолению).

2. Особенности прошедшего учебного года (отметить темы, усвоенные хорошо, и темы, вызвавшие трудности; обратить внимание на необходимость дальнейшего развития навыков построения графиков функций, решения уравнения, неравенств и систем уравнений, неравенств).

3. Поздравить с окончанием учебного года.

IV. Сориентировать учащихся на ГИА по математике (детальная беседа о ГИА будет проведена на следующих уроках).

Государственная итоговая аттестация по алгебре (ГИА)

Уроки 103–104. Государственная итоговая аттестация по алгебре (факультативное занятие)

Цель: сообщить основные положения о ГИА и дать рекомендации по написанию экзамена.

Основные положения

В настоящее время возникла и развивается новая форма государственной (итоговой) аттестации по алгебре в 9 классе – аналог Единого государственного экзамена по математике в 11 классе. Такая система уже использовалась при проведении экзамена в 9 классе в десяти регионах России: Московской области, Краснодарском крае, Челябинской, Псковской, Новгородской, Кемеровской, Калининградской и других областях.

Основное назначение новой формы экзамена – введение открытой объективной независимой процедуры оценки знаний учащихся. Результаты такой оценки способствуют осознанному выбору дальнейшего пути получения образования, учитываются при формировании профильных 10 классов.

Характеристика экзаменационной работы

Работа состоит из двух частей, каждая из которых направлена на проверку определенных понятий, знаний, навыков, имеет свою систему оценок в баллах и разное оформление на экзамене.

Часть 1 направлена на проверку базовой подготовки учащихся. Этой частью проверяются: усвоение смысла важнейших понятий, знание важнейших фактов, умение применять известные способы решения несложных задач, применять знания в простейших практических ситуациях.

В части 1 представлены задачи по темам: числа, буквенные выражения, преобразования выражений, уравнения и текстовые задачи, неравенства, функции и графики, последовательности и прогрессии.

В эту часть работы включены 16 заданий с выбором ответа (из четырех приведенных), с кратким ответом и на соотнесение условий задачи и приведенных ответов.

В экзаменационный бланк вписывается только ответ, никаких решений не приводится.

За каждое верно выполненное задание части 1 начисляется 0,5 балла.

Часть 2 направлена на проверку профилированной (повышенного уровня) подготовки учащихся. Проверяются: умение решать достаточно сложные задачи с использованием различных фактов и способов, владение исследовательскими навыками, умение найти и применить нестандартные приемы.

В части 2 представлены задачи по темам: выражения и их преобразования; уравнение и системы уравнений; неравенства; функции; координаты и графики; арифметическая и геометрическая прогрессии; текстовые задачи.

В эту часть работы включены 5 заданий из различных разделов курса. Задания расположены по нарастанию сложности – от относительно простых до достаточно сложных.

Для заданий части 2 предусматривается полная запись хода решения.

Каждое задание оценивается (в зависимости от сложности) в 2, 4 или 6 баллов (даны одна задача в 2 балла, две задачи по 4 балла и две задачи по 6 баллов).

На проведение экзамена отводится 240 мин (4 ч). При этом на выполнение части 1 отводится 60 мин.

Экзаменационная работа предлагается в четырех вариантах. Каждому учащемуся в начале экзамена выдается бланк с полным текстом работы. Ответы к заданиям части 1 учащиеся отмечают в бланке с заданиями, часть 2 выполняется на отдельных листах.

Для оценки результатов выполнения работы используются два количественных показателя: рейтинг (сумма баллов за верно выполненные задания) и оценка «2», «3», «4» или «5». Если за часть 1 работы получено менее 3,5 баллов, то этот результат не компенсируется выполнением заданий части 2, и ученику ставится оценка «2». Если общий рейтинг по работе выражается дробным числом, то он округляется с избытком до ближайшего целого числа. За часть 1 работы можно максимально получить 8 баллов, за часть 2 – 22 балла, за всю работу – 30 баллов.

Соответствие между рейтингом и оценкой: 4–7 баллов – оценка «3», 8–15 баллов – оценка «4», 16–30 баллов – оценка «5».

Общие рекомендации по выполнению экзаменационной работы

1. Математику надо знать. Чем лучше вы ее знаете, тем больше баллов сможете набрать, а значит, получите более высокую отметку и возможность поступить в профильный класс или школу. Наше пособие позволяет эффективно и успешно подготовиться по всем темам, входящим в экзамен (первые шесть тем).

2. Выполняйте задания экзамена в том порядке, в котором они даны. Задания части 1 существенно проще заданий части 2 и не требуют много времени. Кроме того, к этим заданиям приведены варианты ответов, и можно либо определить правильный ответ, либо исключить явно неверные ответы (см. далее).

3. При решении заданий части 1 не тратьте время на аккуратную запись и обоснование решений. Ваша задача – определить правильный ответ, который обводится в тексте задания или вписывается на специальном месте.

4. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удается выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения заданий у вас еще останется время, вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

5. Контролируйте время на выполнение заданий (на первую часть дается не более 60 мин). Не зацикливайтесь на нерешенной задаче – лучше ее пропустить.

6. В оставшееся время переходите к решению более сложных заданий части 2. Здесь вам понадобятся все умения и навыки, творческий нестандартный подход к задаче. Даже если вы до конца не решите задачу, то сделанные этапы задания будут оценены. Пугаться этих заданий не следует – они базируются на более простых и известных задачах. Обращайте внимание на обоснованность решений в этих заданиях. Задания части 2 выполняются на отдельных листах.

7. Как правило, в вычислительных задачах ответом является целое число. Если у вас получился другой ответ, быстро проверьте ход решения и математические расчеты.

Советы по выполнению заданий части 1

В части 1 ГИА есть **задания с выбором правильного ответа** из четырех предложенных вариантов. Рассмотрим приемы, которые позволяют либо определить правильный ответ, либо исключить явно неверные ответы. Проиллюстрируем эти приемы примерами из вариантов ГИА.

Способ контрольных точек

Ответ проверяется для нескольких (наиболее простых) значений переменных. Способ применяется в преобразованиях выражений, при решении неравенств и т. д.

Пример 1

Упростите выражение $(a-4)^2 - 2a(3a-4)$.

1) $-5a^2 + 16$
2) $-5a^2 + 8a - 16$
3) $-5a^2 + 8$
4) $-5a^2 + 8a - 4$

Приведенные ответы отличаются свободным членом. Поэтому подставим, например, значение $a = 0$ в данное выражение и в варианты ответов. При подстановке в выражение получим $(-4)^2 = 16$. При подстановке в варианты ответов только вариант 1 дает тот же результат. Таким образом сразу определяется правильный вариант.

Ответ: 1.

Пример 2

Известно, что a – число нечетное. Какое из приведенных чисел является четным?

1) $3a$
2) $a + 2$
3) $2a + 1$
4) $a^2 + 1$

Возьмем любое нечетное число, например 5, и подставим вместо a в варианты ответов. Соответственно получаем: 15, 7, 11 и 26. Видим, что только для варианта ответа 4 получается четное число.

Ответ: 4.

Пример 3

Сравните a^2 и a^3, если известно, что $0 < a < 1$.

1) $a^2 < a^3$
2) $a^2 > a^3$
3) $a^2 = a^3$
4) для сравнения не хватает данных

Даже не зная свойств числовых неравенств, можно взять любое число a, удовлетворяющее неравенству $0 < a < 1$, например число

$\frac{1}{2}$. Найдем $a^2 = \frac{1}{4}$ и $a^3 = \frac{1}{8}$. Так как $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$, то $a^2 > a^3$ и правильный будет ответ варианта 2.

Ответ: 2.

Способ граничных точек

При решении неравенств (или задач, связанных с неравенствами) ответы могут различаться граничными точками промежутков. Поэтому проверку надо начинать именно с этих точек. Способ решения похож на предыдущий.

Пример 4

Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x + 4 \geq 0, \\ 15 - 3x \leq 0. \end{cases}$

1) $x \geq -2$
2) $x \geq 5$
3) $-2 \leq x \leq 5$
4) $x \leq -5$ и $x \geq 2$

Варианты ответов 1 и 3 отличаются от ответов 2 и 4 тем, что в них входит точка $x = -2$. Подставим это значение в данную систему уравнений и получим: $\begin{cases} 2 \cdot (-2) + 4 \geq 4, \\ 15 - 3 \cdot (-2) \leq 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 \geq 0, \\ 21 \leq 0. \end{cases}$ Так как второе неравенство системы не верно, то и варианты ответов 1 и 3 не могут быть верными.

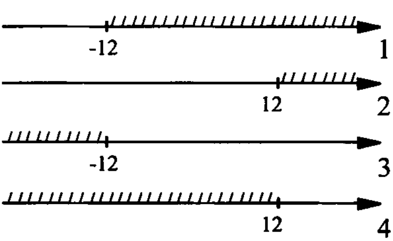
Проверим теперь варианты ответов 2 и 4. Возьмем точку $x = -5$, входящую в ответ 4 и получим: $\begin{cases} 2 \cdot (-5) + 4 \geq 0, \\ 15 - 3 \cdot (-5) \leq 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} -6 \geq 0, \\ 30 \leq 0. \end{cases}$ Оба неравенства не верны. Поэтому правильным будет вариант 2.

Ответ: 2.

Пример 5

Решите неравенство $2x - 3(x + 4) \leq x + 12$.

1) $x \geq -12$
2) $x \geq 12$
3) $x \leq -12$
4) $x \leq 12$



Проверим предлагаемые варианты ответов. Для удобства изобразим их на координатных осях. Проверим сначала варианты ответов 3 и 4. Возьмем точку $x = -14$, входящую только в эти ответы. Подставив в неравенство, получим: $2(-14) - 3(-14 + 4) \le -14 + 12$, или $2 \le -2$. Так как неравенство неверное, то ответы 3 и 4 отпадают.

Теперь разберемся с вариантами ответов 1 и 2. Возьмем точку $x = 0$, которая входит только в ответ 1. Подставив в неравенство, получим: $2 \cdot 0 - 3(0 + 4) \le 0 + 2$, или $12 \le 12$. Так как неравенство верное, то правильным будет ответ 1.

Ответ: 1.

Способ оценки величин

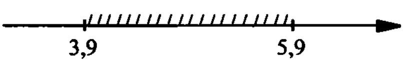
В ряде случаев удается оценить величины, входящие в задачу, и выбрать правильный ответ.

Пример 6

Какие целые числа заключены между числами $\sqrt{15}$ и $\sqrt{35}$?

1) 16, 17, …, 34
2) 3, 4 и 5
3) 4, 5 и 6
4) 4 и 5

Так как $15 \approx 16$, то $\sqrt{15}$ чуть меньше 4, для оценок будем считать, что это $\approx 3{,}9$. Число $35 \approx 36$ и $\sqrt{35}$ чуть меньше 6, для оценок будем считать, что это $\approx 5{,}9$. Отметим числа 3,9 и 5,9 на координатной оси. Видно, что в промежуток $3{,}9 \div 5{,}9$ попадают только два целых числа: 4 и 5. Поэтому правильным будет вариант ответа 4.



Ответ: 4.

Пример 7

Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны $\sqrt{5}+1$ и $\sqrt{5}-1$.

1) 24
2) 6
3) 4
4) $6-2\sqrt{5}$

Очевидно, что $\sqrt{5}$ чуть больше 2 (для оценок $\sqrt{5} \approx 2{,}2$). Тогда стороны прямоугольника $\sqrt{5}+1 \approx 2{,}2+1 \approx 3{,}2$ и $\sqrt{5}-1 \approx 2{,}2-1 \approx 1{,}2$. А его площадь примерно равна $3{,}2 \cdot 1{,}2 \approx 3{,}8$. Учитывая, что в ответе 4 величина $6-2\sqrt{5}\approx 6-2\cdot 2,2\approx 1,6$, видим, что наиболее подходящий ответ 3 (который действительно является правильным).

Ответ: 3.

Пример 8

Укажите наименьшее из указанных чисел: $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{4}$; 0,67; 0,7.

1) $\frac{4}{5}$
2) $\frac{5}{4}$
3) 0,67
4) 0,7

Легко точно или приблизительно записать обыкновенные дроби в виде десятичных: $\frac{4}{5}=0,8$ и $\frac{5}{4}=1,25$. Теперь, сравнив числа 0,8; 1,25; 0,67 и 0,7, видим, что наименьшим является число 0,67.

Ответ: 3.

Способ проверки размерности ответа

В задачах с текстовым содержанием и в задачах, связанных с физикой или геометрией, полезно проверить размерность ответа. Это позволяет сразу отбросить явно неправильные варианты ответов.

Пример 9

Выразите из формулы скорости равноускоренного движения $v = v_0 + at$ время t.

1) $t=\frac{v-v_0}{a}$
2) $t=\frac{v_0-v}{a}$
3) $t=a(v-v_0)$
4) $t=\frac{a}{v-v_0}$

Вспомним размерности величин, входящих в данную формулу. Скорости v и v_0 измеряются в м/с, ускорение a – в м/с^2, время t – в с. Проверим размерность правых частей приведенных ответов и получим: 1) $\frac{\text{м}}{\text{с}}:\frac{\text{м}}{\text{с}^2}=\text{с}$; 2) $\frac{\text{м}}{\text{с}}:\frac{\text{м}}{\text{с}^2}=\text{с}$; 3) $\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2}=\frac{\text{м}^3}{\text{с}^3}$; 4) $\frac{\text{м}}{\text{с}}:\frac{\text{м}}{\text{с}^2}=\frac{1}{\text{с}}$.

Варианты ответов 3 и 4 сразу отпадают. Варианты 1 и 2 имеют одинаковую размерность, поэтому приходится использовать здравый смысл. При $a > 0$ тело ускоряется и $v > v_0$, т. е. разность $v - v_0 > 0$. Тогда в случае ответа 1 получаем: $t > 0$, в случае ответа 2, наоборот: $t < 0$. Так как никто не знает, что такое отрицательное время, то правильным будет ответ 1.

Ответ: 1.

Пример 10

От города до поселка автомобиль доехал за 3 ч. Если бы он увеличил скорость на 25 км/ч, то затратил бы на этот путь на 1 ч меньше. Чему равно расстояние от города до поселка?

Пусть x км – расстояние от города до поселка. Какое уравнение соответствует условию задачи?

1) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=25$

2) $\frac{x}{3}-\frac{x}{2}=25$

3) $\frac{2}{x}-\frac{3}{x}=25$

4) $\frac{3}{x}-\frac{2}{x}=25$

В правой части всех уравнений стоит величина увеличения скорости, она измеряется в км/ч. В левой части числа 2 и 3 соответствуют времени движения автомобиля с увеличенной скоростью и реальной скоростью. Эти числа (время) имеют размерность ч. Определим размерность левых частей каждого варианта ответа: 1) км : ч = км/ч; 2) км : ч = км/ч; 3) ч : км = ч/км; 4) ч : км = ч/км. По несоответствию размерностей левой и правой частей уравнения варианты ответов 3 и 4 отпадают. Разберемся с вариантами ответов 1 и 2. Так как x – положительная величина (расстояние), то $\frac{x}{2}>\frac{x}{3}$.

Значит, выражение $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}>0$, а выражение $\frac{x}{3}-\frac{x}{2}<0$. Так как в правой части уравнений в ответах 1 и 2 стоит положительное число 25, то правильным будет ответ 1.

Ответ: 1.

Способ проверки ответов по условию

Иногда, используя условие задачи, можно сразу проверить ответ.

Пример 11

Решите уравнение $\frac{1}{3}x^2 - 12 = 0$.

1) $x_1 = 2, x_2 = -2$
2) $x = 2$
3) $x_1 = 6, x_2 = -6$
4) $x = 6$

Так как в данном квадратном уравнении нет линейного члена, то его корни являются симметричными числами, т. е. если уравнение имеет корень x_0, то число $-x_0$ также будет корнем этого уравнения. Поэтому варианты ответов 2 и 4 (которые содержат только один корень) явно не подходят.

Проверим ответ 1. Подставим в уравнение, например, значение $x = 2$ и получим: $\frac{1}{3}2^2 - 12 = -10\frac{2}{3} \neq 0$. Значит, ответ 1 тоже не подходит. Итак, правильный ответ 3.

Ответ: 3.

Пример 12

Решите уравнение $\frac{x+9}{3} - \frac{x-1}{5} = 2$.

1) -23
2) -20
3) -6
4) -9

Проверим приведенные ответы, подставляя их в левую часть уравнения. Получим:

1) $\frac{-23+9}{3} - \frac{-23-1}{5} = -\frac{14}{3} + \frac{4}{5} \approx -5 + 5 \neq 2;$

2) $\frac{-20+9}{3} - \frac{-20-1}{5} = -\frac{11}{3} + \frac{21}{5} \approx -4 + 4 \neq 2;$

3) $\frac{-6+9}{3} - \frac{-6-1}{5} = 1 + \frac{7}{5} \approx 2\frac{2}{5} \neq 2;$

4) $\frac{-9+9}{3} - \frac{-9-1}{5} = 0 + 2 = 2$. Правильный ответ.

Ответ: 4.

Способ обратной задачи

Достаточно часто в задачах, связанных с преобразованиями выражений, проще решить обратную задачу и тем самым проверить приведенные ответы.

Пример 13

Укажите выражение, тождественно равное многочлену $4x^2 - 6xy$.

1) $-2x(-3y - 2x)$
2) $-2x(3y - 2x)$
3) $-2x(3y + 2x)$
4) $-2x(2x - 3y)$

Ответы представляют собой разложение некоторого многочлена на множители. Если при раскрытии скобок в вариантах ответов получится данный многочлен, то разложение на множители сделано правильно. Так как в данном многочлене коэффициенты членов противоположны по знаку, то в ответах в скобках коэффициенты слагаемых также будут противоположны по знаку. Поэтому ответы 1 и 3 сразу можно отбросить. Раскроем скобки в ответах 2 и 4 и получим:

2) $-2x(3y - 2x) = -6xy + 4x^2$ (данный многочлен);
4) $-2x(2x - 3y) = -4x^2 + 6xy$.

Ответ: 2.

Пример 14

Известно, что верно неравенство $x > y - z$. Какое из приведенных неравенств также является верным?

1) $x - y > z$
2) $y > x + z$
3) $z - x > y$
4) $z > y - x$

Запишем неравенства в ответах в виде, аналогичном виду данного неравенства: слева – переменная x, справа – переменные y и z. Получаем: 1) $x > y + z$; 2) $x < y - z$; 3) $x < z - y$; 4) $x > y - z$. Видно, что только в последнем случае неравенство в ответе и данное неравенство совпадают.

Ответ: 4.

Другие способы

В простейших случаях можно использовать соображения, основанные на здравом смысле и очень поверхностном знании математики.

Пример 15

Средний вес девочек того же возраста, что и Маша, равен 36 кг. Вес Маши составляет 110% среднего веса. Сколько весит Маша?

1) 32,4 кг
2) 39,6 кг
3) 36 кг
4) 3,6 кг

Так как вес Маши составляет 110% среднего веса (т.е. несколько больше среднего веса), значит, она весит больше 36 кг. Из имеющихся вариантов ответа подходит только ответ 2.

Ответ: 2.

Пример 16

Из полного бака, вместимость которого 100 л, через открытый кран вытекает вода со скоростью 5 л/мин. Количество воды y, остающейся в баке, является функцией времени x, в течение которого вытекает вода. Задайте эту функцию формулой.

1) $y = 100 - 5x$
2) $y = 5x$
3) $y = 5x - 100$
4) $y = 100 - \frac{5}{x}$

Из здравого смысла понятно, что с течением времени x в баке остается все меньше и меньше воды y. Поэтому $y(x)$ должна быть убывающей функцией. Из приведенных функций только функция 1) $y = 100 - 5x$ является убывающей. Если вам трудно установить монотонность функции, то достаточно сравнить значения приведенных функций, например, при $x = 1$ и при $x = 20$.

Из приведенных примеров видно, что простые приемы позволяют найти правильные ответы многих заданий, фактически не решая их.

Уроки 105–106. Демонстрационный вариант ГИА (факультативное занятие)

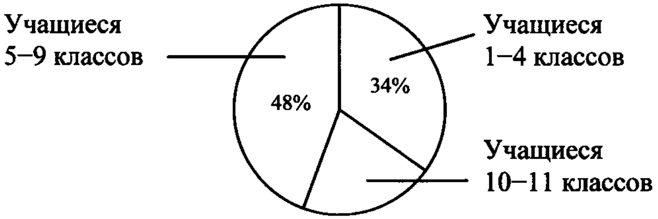
Цель: дать представление о структуре и сложности варианта, разобрать его и отметить его особенности.

Далее приведем варианты экзаменационной работы с решениями, по которым можно судить об уровне сложности заданий и их распределении по темам. В части 2 после номера задания в скобках указано число баллов за это задание. Рекомендуем вам самостоятельно выполнить варианты. В случае затруднений можно обратиться к разбору варианта.

Вариант № 1

Часть 1

1. Диаграмма иллюстрирует распределение учащихся школы между начальными, средними и старшими классами. Сколько процентов всех учащихся учится в 10–11 классах этой школы?



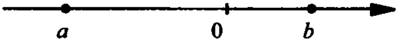
Ответ: ______________

2. Найдите сумму, значение которой больше 1.

1) $0{,}45+\frac{1}{3}$ 3) $\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

2) $0{,}54+\frac{2}{3}$ 4) $0{,}27 + 0{,}28 + 0{,}29$

3. На координатной прямой точками изображены числа a и b. Определите, какое из чисел является наибольшим: $2a$, $2b$ или $a + b$.



1) $a+b$ 3) $2b$
2) $2a$ 4) для ответа не хватает данных

4. Найдите значение выражения $\frac{1}{9}xy$ при $x=\sqrt{12},\ y=\sqrt{3}$.

Ответ: ______________

5. Принтер печатает одну страницу за 6 с. Сколько страниц можно распечатать на этом принтере за t мин?

1) $6t$ с 3) $0{,}1t$ с

2) $10t$ с 4) $\frac{t}{6}$ с

6. Упростите выражение $\frac{m-n}{m+n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$.

Ответ: ______________

7. Найдите значение выражения $(27 \cdot 3^{-4})^2$.

1) $\frac{1}{9}$
2) 3
3) -9
4) $-\frac{1}{9}$

8. Упростите выражение $3\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{2}$.
Ответ: ______________

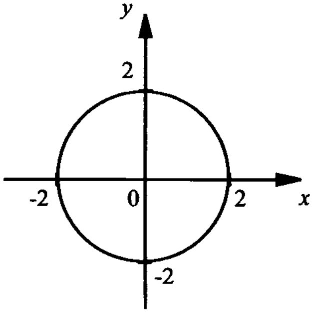
9. Решите уравнение $\frac{x}{3} + \frac{x-1}{2} = 4$.

1) 1
2) 1,4
3) 5
4) 5,4

10. Какое из уравнений не имеет корней?

1) $2x^2 - 3x + 1 = 0$
2) $2x^2 + 4x - 1 = 0$
3) $3x^2 + 4x + 1 = 0$
4) $3x^2 - 2x + 1 = 0$

11. Для каждой системы уравнений укажите число ее решений. (Для ответа используйте графики; график уравнения $x^2 + y^2 = 4$ изображен на рисунке.)



1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + 2; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + 3. \end{cases}$

а) нет решений
б) одно решение
в) два решения
г) три решения

12. Какое из следующих чисел не является решением неравенства $9x - 3 > 10x - 2$?

1) $-4{,}9$
2) $-1{,}7$
3) $-1{,}1$
4) $-0{,}7$

13. Сравните, если возможно, числа a и c при условии, что $a > b$ и $b \le c$.

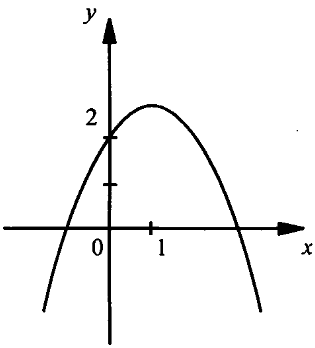
1) $a > c$ 3) $a \le c$
2) $a < c$ 4) сравнить невозможно

14. В зрительном зале 15 рядов. В первом ряду 10 мест, а в каждом следующем на одно место больше, чем в предыдущем. Сколько мест в зрительном зале?

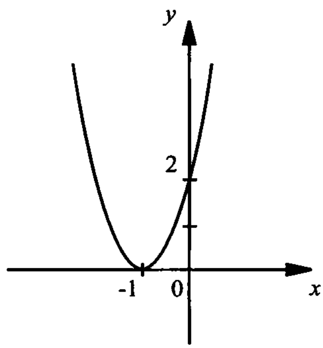
1) 255 мест 3) 120 мест
2) 165 мест 4) 75 мест

15. На каком рисунке изображен график функции $y = f(x)$, обладающей свойствами $f(0) = 2$ и функция возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$?

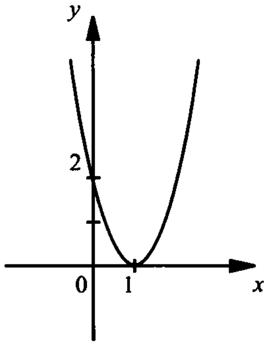
1)



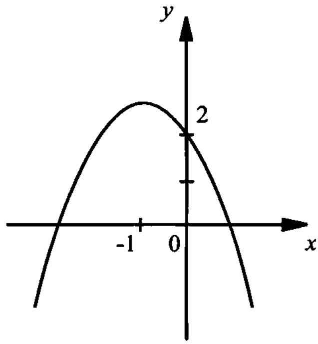
2)



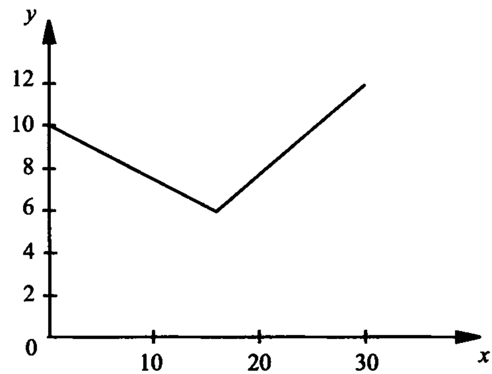
3)



4)



16. График показывает, как менялась цена бензина в течение месяца. Определите, на сколько процентов выросла его цена за месяц.



1) на 100%
2) на 60%
3) на 20%
4) на 2%

Часть 2

17. (2 балла.) Сократите дробь $\dfrac{3a^2-4a+1}{1-3a+b-3ab}$.

18. (4 балла.) Постройте график функции $y=\begin{cases} x(x-2), \text{ если } x\geq 0, \\ x(2-x), \text{ если } x<0. \end{cases}$

При каких значениях x функция принимает отрицательные значения?

19. (4 балла.) На двух копировальных машинах, работающих одновременно, можно сделать копию пакета документов за 10 мин. За какое время можно выполнить эту работу на каждой машине в отдельности, если известно, что на первой машине ее можно сделать на 15 мин быстрее, чем на второй?

20. (6 баллов.) Найдите значение m, при котором точки $A(3;\ 15)$, $B(9;\ 5)$ и $C(24;\ m)$ лежат на одной прямой.

21. (6 баллов.) При каких значениях k число 0 находится между корнями уравнения $x^2-4x+(2-k)(2+k)=0$?

Решение заданий работы

Часть 1

1. Число всех учащихся в школе примем за 100%, тогда число учащихся в 10–11 классах в соответствии с диаграммой:

$100 - 48 - 34 = 18$ (%).

Ответ: 18%.

2. Переведем обыкновенные дроби в десятичные и оценим приведенные суммы:

1) $0,45+\frac{1}{3}\approx 0,45+0,33<1;$

2) $0,54+\frac{2}{3}\approx 0,54+0,66>1;$

3) $\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\approx 0,22+0,33+0,17<1;$

4) $0,27 + 0,28 + 0,29 < 1$.

Видно, что только сумма второго ответа больше 1.

Ответ: 2.

3. Из приведенного рисунка видно, что $a < 0$ и $b > 0$.

Поэтому легко оценить числа: $2a < a < 0$, $a < a + b < b$ и $2b > b > 0$. Итак, наибольшее число $2b$.

Ответ: 3.

4. Подставим в выражение $\frac{1}{9}xy$ величины $x=\sqrt{12}$ и $y=\sqrt{3}$ и получим: $\frac{1}{9}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{36}}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

5. За 1 мин принтер распечатает $\frac{60}{6}=10$ страниц. Поэтому за t мин принтер распечатает $10t$ страниц.

Ответ: 2.

6. Разложим знаменатель второй дроби на множители, приведем дроби к общему знаменателю и вычтем их. Получим: $\frac{m-n}{m+n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}=$

$$=\frac{m-n}{m+n}-\frac{m^2+n^2}{(m-n)(m+n)}=\frac{(m-n)^2-m^2-n^2}{m^2-n^2}=\frac{m^2-2mn+n^2-m^2-n^2}{m^2-n^2}=$$

$$=-\frac{2mn}{m^2-n^2}.$$

Ответ: $-\frac{2mn}{m^2-n^2}$.

7. Используя свойства действий со степенями, найдем значение выражения $(27\cdot3^{-4})^2=(3^3\cdot3^{-4})^2=3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$.

Ответ: 1.

8. Во втором выражении вынесем множитель из-под корня и упростим выражение: $3\sqrt{3}-\sqrt{12}+\sqrt{2}=3\sqrt{3}-\sqrt{4\cdot3}+\sqrt{2}=$ $=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

9. Все члены уравнения $\frac{x}{3}+\frac{x-1}{2}=4$ умножим на 6 и получим: $2x+3(x-1)=24\Rightarrow 2x+3x-3=24\Rightarrow 5x=27$, откуда $x=5{,}4$.

Ответ: 4.

10. Для приведенных квадратных уравнений найдем дискриминанты и получим:

1) $2x^2-3x+1=0$, $D=9-4\cdot2\cdot1=1>0$ (имеет 2 корня);
2) $2x^2+4x-1=0$, $D=16-4\cdot2\cdot(-1)=24>0$ (имеет 2 корня);
3) $3x^2+4x+1=0$, $D=16-4\cdot3\cdot1=4>0$ (имеет 2 корня);
4) $3x^2-2x+1=0$, $D=4-4\cdot3\cdot1=-8<0$ (не имеет корней).

Видно, что только уравнение 4 не имеет корней.

Ответ: 4.

11. Учтем, что второе уравнение системы задает параболу, направленную ветвями вверх. Рассмотрим три приведенные системы и получим:

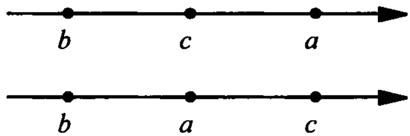
1) парабола $y=x^2$ выходит из начала координат и пересекает окружность $x^2+y^2=4$ в двух точках. Поэтому такая система уравнений имеет два решения, т. е. 1 → в;
2) парабола $y=x^2+2$ выходит из точки (0; 2) и имеет с окружностью $x^2+y^2=4$ только эту одну общую точку. Поэтому такая система уравнений имеет одно решение, т. е. 2 → б;
3) парабола $y=x^2+3$ выходит из точки (0; 3) и располагается выше окружности $x^2+y^2=4$, т. е. не имеет с ней общих точек. Поэтому такая система уравнений не имеет решений, т. е. 3 → а.

Ответ: 1 → в; 2 → б; 3 → а.

12. Решим приведенное линейное неравенство $9x-3>10x-2$ и получим: $-3+2>10x-9x$, или $-1>x$, т. е. $x<-1$. Видно, что число $-0{,}7$ (ответ 4) не входит в этот промежуток.

Ответ: 4.

13. Так как $a > b$ и $b \le c$, то сравнить числа a и c невозможно. Например, на верхней шкале $a > c$, а на нижней, наоборот, $a < c$.



Ответ: 4.

14. Посчитаем число мест в рядах: 10, 11, 12, ... Видно, что эти числа образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 10$ и разностью $d = 1$. Найдем сумму $n = 15$ первых членов прогрессии. Получаем: $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, или $S_{15} = \frac{2\cdot 10 + 1\cdot(15-1)}{2}\cdot 15 =$ $= 17\cdot 15 = 255$ (мест).

Ответ: 1.

15. Если функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$, то эта функция имеет наибольшее значение при $x = 1$. При этом при $x = 0$ значение функции равно $f(0) = 2$. Этим условиям удовлетворяет только функция, график которой изображен на рис. 1.

Ответ: 1.

16. Из графика видно, что в начале месяца бензин стоил 10 руб., в конце месяца – 12 руб. Поэтому цена бензина увеличилась на 12 – 10 = 2 руб., что составляет $\frac{2}{10}\cdot 100 = 20\%$ первоначальной цены бензина.

Ответ: 2.

Часть 2

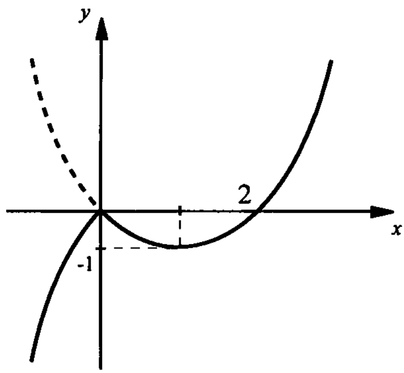
17. (2 балла.) Разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее. В числителе найдем корни квадратного трехчлена, в знаменателе используем группировку членов и вынесение общего множителя за скобки.

Получаем: $$\frac{3a^2 - 4a + 1}{1 - 3a + b - 3ab} = \frac{3\left(a - \frac{1}{3}\right)(a-1)}{(1-3a) + b(1-3a)} = \frac{(3a-1)(a-1)}{(1-3a)(1+b)} = \frac{1-a}{1+b}.$$

Ответ: $\frac{1-a}{1+b}$.

18. (4 балла.) Построим сначала график функции $y = x(x - 2)$ – пунктирная парабола. Оставим тот участок кривой, для которого

$x \geq 0$. Теперь построим график функции $y = x(2 - x)$. Так как $x(2 - x) = -x(x - 2)$, то при $x < 0$ надо отразить пунктирную часть параболы вниз. Поэтому графиком данной функции является сплошная кривая. Видно, что значения функции $f(x) < 0$ при $x < 0$ и $0 < x < 2$.



Ответ: $f(x) < 0$ при $x < 0$ и $0 < x < 2$.

19. (4 балла.) Пусть на первой машине можно сделать копию пакета документов за t мин, тогда на второй – за $t + 15$ мин. Производительность машин $\frac{1}{t}$ и $\frac{1}{t+15}$ соответственно (при этом весь объем работы принят за единицу). Так как при одновременной работе двух машин копию можно сделать за 10 мин, то получаем уравнение $10\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+15}\right)=1 \Rightarrow 20t+150=t^2+15t \Rightarrow 0=t^2-5t-150$. Корни этого уравнения $t = 15$ и $t = -10$ (не подходит). Итак, работа будет сделана на первой машине – за 15 мин, на второй – за 30 мин.

Ответ: на первой машине – за 15 мин, на второй – за 30 мин.

20. (6 баллов.) Пусть уравнение прямой $y = kx + b$. Так как ее график проходит через точки $A(3;\ 15)$ и $B(9;\ 5)$, то их координаты удовлетворяют уравнению прямой. Получаем систему линейных уравнений $\begin{cases} 15 = 3k + b, \\ 5 = 9k + b. \end{cases}$ Вычтем из первого уравнения второе: $10 = -6k$, откуда $k = -\frac{5}{3}$. Подставим это значение в первое уравнение: $15=3\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)+b$, откуда $b = 20$. Итак, уравнение прямой

$y=-\dfrac{5}{3}x+20$. Эта прямая также проходит через точку $C(24;\ m)$. Получаем $m=-\dfrac{5}{3}\cdot 24+20=-20$.

Ответ: $m=-20$.

21. (6 баллов.) Так как число 0 находится между корнями уравнения $x^2-4x+(2-k)(2+k)=0$, то произведение корней уравнения (по формуле Виета) $(2-k)(2+k)<0$. Решение этого неравенства: $k<-2$ и $k>2$. Проверим, что уравнение имеет корни. Найдем $D/4=4-(2-k)(2+k)=4+(k-2)(k+2)=4+k^2-4=k^2\geq 0$, т. е. при всех значениях k данное уравнение имеет решения.

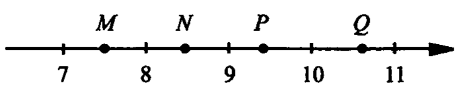
Ответ: при $k<-2$ и $k>2$.

Вариант № 2

Часть 1

1. Одна из точек M, N, P, Q, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{91}$. Какая эта точка?

1) M
2) N
3) P
4) Q



2. Что больше: 26% учащихся школы или ¼ учащихся этой школы?

1) 26% учащихся
2) 1/4 учащихся
3) эти числа равны
4) данных для ответа недостаточно

3. Известно, что a – число нечетное. Какое из чисел также является нечетным?

1) $2a$
2) $a+2$
3) $a-1$
4) a^2+1

4. За n одинаковых тетрадей и m одинаковых блокнотов заплатили c руб. Тетрадь стоит a руб. Сколько стоит блокнот?

1) $\dfrac{c-n}{am}$

2) $\dfrac{c-am}{n}$

3) $\dfrac{c}{m+n}-a$

4) $\dfrac{c-an}{m}$

5. Для каждого выражения укажите множество значений переменной x, при которых это выражение имеет смысл.

1) $(x+1)(x-1)$

2) $\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}$

3) $\dfrac{x+1}{x-1}$

4) $\dfrac{x-1}{x+1}$

а) $x \neq -1$; б) $x \neq 1$; в) $x \neq \pm 1$; г) x – любое число

6. Сократите дробь $\dfrac{p^2-2p}{p^2-4p+4}$.

Ответ: ____________________

7. Найдите значение выражения $(c^6c^{-3})^{-1}$ при $c=\dfrac{1}{3}$.

1) 27

2) –27

3) $\dfrac{1}{27}$

4) $-\dfrac{1}{27}$

8. Укажите выражение, тождественно равное произведению $(x-2)(x-3)$.

1) $(2-x)(3-x)$

2) $(2-x)(x-3)$

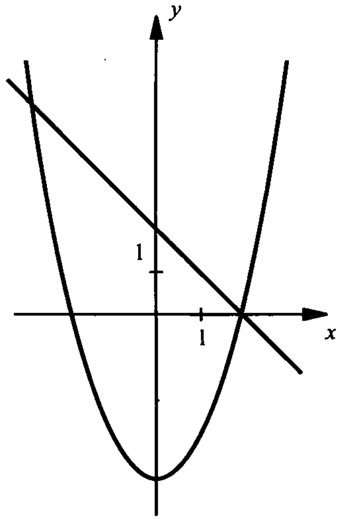
3) $(x-2)(3-x)$

4) $-(2-x)(3-x)$

9. Решите уравнение $x^2+2x-3=0$.

Ответ: ____________________

10. Используя графики, решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 - y = 4. \end{cases}$



Ответ: ________________

11. Бабушка прополола 15 грядок, после чего ее сменил внук, который прополол 14 грядок. Всего они работали 5 ч, причем внук за час пропалывал на 2 грядки больше, чем бабушка. Сколько грядок за 1 ч пропалывал каждый?

Пусть за 1 ч внук пропалывал x грядок. Какое уравнение соответствует условию задачи?

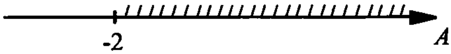
1) $\dfrac{x}{14} + \dfrac{x-2}{15} = 5$

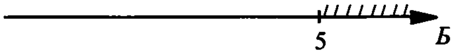
2) $\dfrac{14}{x+2} + \dfrac{15}{x} = 5$

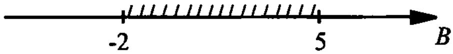
3) $\dfrac{14}{x} + \dfrac{15}{x-2} = 5$

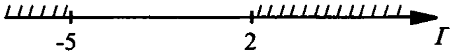
4) $\dfrac{14}{x-2} + \dfrac{15}{x} = 5$

12. На каком рисунке изображено множество решений системы неравенств $\begin{cases} 2x + 4 \ge 0, \\ 15 - 3x \le 0? \end{cases}$

1) 

2) 

3) 

4) 

13. Известно, что $0 < a < 1$. Сравните a и $\frac{1}{a}$.

1) $a > \frac{1}{a}$

2) $a < \frac{1}{a}$

3) $a = \frac{1}{a}$

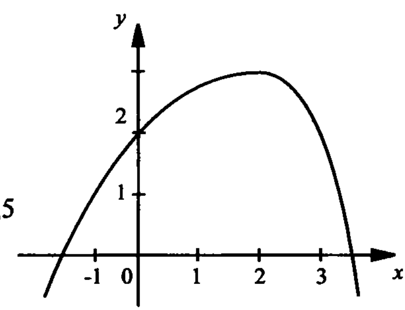
4) сравнить невозможно

14. Разность d арифметической прогрессии равна 3. Какой формулой может быть задана эта арифметическая прогрессия?

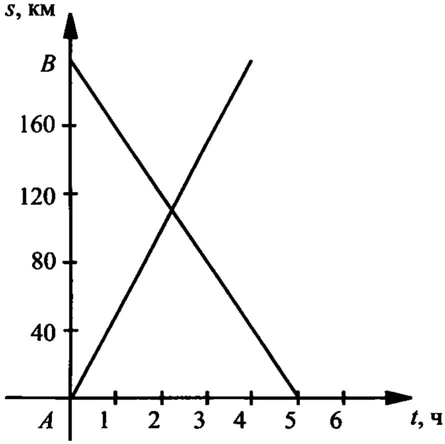
1) $a_n = 5n - 3$
2) $a_n = 5n + 3$
3) $a_n = 3n - 5$
4) $a_n = 5 - 3n$

15. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Какое из следующих утверждений неверно?

1) $f(0) = 2$
2) $f(-2) < 0$
3) функция возрастает на промежутке $(-\infty; 2]$
4) нулями функции являются числа $-1{,}5$; 2; 3,5



16. На рисунке изображен график движения автомобиля из пункта A в пункт B и автобуса из пункта B в пункт A. На сколько километров в час скорость автомобиля больше скорости автобуса?



Ответ: ________________

Часть 2

17. (2 балла.) Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y-2x}{5}=1\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{y}{2}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{x+y}{3}. \end{cases}$

18. (4 балла.) Найдите область определения выражения $\dfrac{\sqrt{3x^2-x-14}}{x^2-9}$.

19. (4 балла.) Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 200, которые делятся на 3.

20. (6 баллов.) Прямая $3x+2y=c$, где c – некоторое число, касается гиперболы $y=\dfrac{6}{x}$ в точке с положительными координатами. Найдите координаты точки касания.

21. (6 баллов.). Четыре бригады должны разгрузить вагон с продуктами. Вторая, третья и четвертая бригады вместе могут выполнить эту работу за 4 ч, первая, третья и четвертая – за 3 ч. Если же будут работать только первая и вторая бригады, то вагон будет разгружен за 6 ч. За какое время могут разгрузить вагон все четыре бригады, работая вместе?

Решение заданий работы

Часть 1

1. Оценим число $\sqrt{91}$. Так как $81 < 91 < 100$, то $9 < \sqrt{91} < 10$. Поэтому числу $\sqrt{91}$ соответствует точка P.

Ответ: 3.

2. Учтем, что $\frac{1}{4}$ учащихся школы составляет $\frac{1}{4} \cdot 100 = 25\%$ учащихся школы. Поэтому 26% учащихся школы больше, чем $\frac{1}{4}$.

Ответ: 1.

3. Число a – нечетное. Поэтому число $2a$ – четное, т. к. кратно 2. Число $a + 2$ – нечетное, т. к. после a число $a + 1$ – четное, значит, следующее $a + 2$ – нечетное. Число $a - 1$ – четное, т. к. предшествует нечетному числу a. Число $a^2 + 1$ – четное, т. к. следует после нечетного числа a^2.

Итак, только число $a + 2$ – нечетное.

Ответ: 2.

4. Так как тетрадь стоит a руб., то n тетрадей стоят an руб. Пусть блокнот стоит x руб., тогда m блокнотов стоят xm руб. Общая стоимость покупки c руб. Получаем уравнение $an + xm = c$.

Отсюда $xm = c - an$ и $x = \dfrac{c - an}{m}$.

Ответ: 4.

5. Дробное выражение имеет смысл, если его знаменатель не равен нулю. Найдем, при каких значениях переменной x данное выражение имеет смысл:

1) выражение $(x + 1)(x - 1)$ имеет смысл при любых значениях x, т. е. $1 \to$ г;

2) выражение $\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}$ имеет смысл при $x \neq \pm 1$, т. к. при таких x знаменатель дроби не равен нулю, т. е. $2 \to$ в;

3) выражение $\dfrac{x+1}{x-1}$ имеет смысл при $x \neq 1$, т. к. при таких x знаменатель дроби не равен нулю, т. е. $3 \to$ б;

4) выражение $\dfrac{x-1}{x+1}$ имеет смысл при $x \neq -1$, т. к. при таких x знаменатель дроби не равен нулю, т. е. $4 \to$ а.

Ответ: $1 \to$ г; $2 \to$ в; $3 \to$ б; $4 \to$ а.

6. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее. В числителе дроби вынесем общий множитель за скобки, в знаменателе используем формулу квадрата разности и получим: $\dfrac{p^2-2p}{p^2-4p+4}=\dfrac{p(p-2)}{(p-2)^2}=\dfrac{p}{p-2}$.

Ответ: $\dfrac{p}{p-2}$.

7. Используя свойства степеней, упростим выражение $(c^6c^{-3})^{-1}=(c^3)^{-1}=c^{-3}$. Подставим величину $c=\dfrac{1}{3}=3^{-1}$ и получим: $(3^{-1})^{-3}=3^3=27$.

Ответ: 1.

8. Если в выражении $(x-2)(x-3)$ одновременно изменить знаки каждого множителя, то результат умножения не изменится. Поэтому $(x-2)(x-3)=(2-x)(3-x)$.

Ответ: 1.

9. Для квадратного уравнения $x^2+2x-3=0$ найдем $D/4=1+3=4$ и корни $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{4}=-1\pm 2$, т. е. $x_1=1$ и $x_2=-3$.

Ответ: $x_1=1$ и $x_2=-3$.

10. Из рисунка видно, что парабола и прямая пересекаются в двух точках, координаты которых $(-3;\ 5)$ и $(2;\ 0)$, что и является решениями данной системы уравнений.

Ответ: $(-3;\ 5)$, $(2;\ 0)$.

11. Пусть за 1 ч внук пропалывал x грядок, тогда бабушка пропалывала $x-2$ грядки. Внук прополет 14 грядок за $\dfrac{14}{x}$ ч, а бабушка прополет 15 грядок за $\dfrac{15}{x-2}$ ч. Всего на работу было затрачено 5 ч. Получаем уравнение $\dfrac{14}{x}+\dfrac{15}{x-2}=5$.

Ответ: 3.

12. Решим каждое неравенство отдельно и найдем решение системы линейных неравенств. Получим: $\begin{cases}2x+4\ge 0,\\ 15-3x\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x\ge -4,\\ 15\le 3x,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x\ge -2,\\ x\ge 5.\end{cases}$ Поэтому решение системы неравенств $x\ge 5$.

Ответ: 2.

13. Так как $0 < a < 1$ (т. е. a – положительное число), то по свойству числовых неравенств $\frac{1}{a} > \frac{1}{1}$, или $\frac{1}{a} > 1$. Поэтому $a < \frac{1}{a}$.

Ответ: 2.

14. Так как разность d арифметической прогрессии равна 3, то в формулу n-го члена a_n будет входить слагаемое $3n$.

Ответ: 3.

15. Проверим все данные утверждения. Неверно утверждение 4, что нулями функции являются числа –1,5; 2; 3,5, т. к. из графика видно, что функция имеет только два нуля.

Ответ: 4.

16. Из рисунка видно, что автомобиль проехал 200 км за 4 ч. Поэтому скорость его 200 : 4 = 50 км/ч. Автобус проехал 200 км за 5 ч и его скорость 200 : 5 = 40 км/ч. Поэтому скорость автомобиля на (50 – 40) = 10 км/ч больше скорости автобуса.

Ответ: на 10 км/ч.

Часть 2

17. (2). В системе уравнений $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y-2x}{5} = 1\frac{1}{3}, \\ \frac{y}{2} + \frac{5}{6} = \frac{x+y}{3} \end{cases}$ все члены первого уравнения умножим на 15, второго – на 6 и получим: $\begin{cases} 5x - 3y + 6x = 20, \\ 3y + 5 = 2x + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x - 3y = 20, \\ 2x - y = 5. \end{cases}$ Умножим второе уравнение на (–3): $\begin{cases} 11x - 3y = 20, \\ -6x + 3y = -15 \end{cases}$ и, сложив уравнения, получим $5x = 5$, откуда $x = 1$. Подставим это значение в первое уравнение $11 - 3y = 20$, откуда $y = -3$.

Ответ: (1; –3).

18. (4). Область определения выражения $\frac{\sqrt{3x^2 - x - 14}}{x^2 - 9}$ задается условиями $\begin{cases} 3x^2 - x - 14 \geq 0, \\ x^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -2;\ x \geq 2\frac{1}{3}, \\ x \neq \pm 3, \end{cases}$ поэтому $x \leq -2$ и $x \neq -3$; $x \geq 2\frac{1}{3}$ и $x \neq 3$.

Ответ: $x \le -2$ и $x \ne -3$; $x \ge 2\frac{1}{3}$ и $x \ne 3$.

19. (4). Выпишем натуральные числа, кратные 3: 3, 6, 9, 12, … Эти числа образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 3$ и разностью $d = 3$. Найдем число членов, не превосходящих 200. Используя формулу n-го члена $a_n = a_1 + d(n-1)$, получим неравенство $3 + 3(n - 1) \le 200$, или $3n \le 200$, откуда $n \le 66\frac{2}{3}$. Поэтому таких чисел 66.

Используя формулу суммы n первых членов прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, найдем сумму таких чисел: $S_{66} = \frac{2 \cdot 3 + 3(66-1)}{2} \cdot 66 = 201 \cdot 33 = 6633$.

Ответ: 6633.

20. (6). Так как прямая $3x + 2y = c$ касается гиперболы $y = 6/x$ в точке с положительными координатами, то система уравнений $\begin{cases} 3x + 2y = c, \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases}$ должна иметь единственное положительное решение.

Из первого уравнения выразим $y = \frac{c-3x}{2}$ и подставим во второе: $\frac{c-3x}{2} = \frac{6}{x}$, или $cx - 3x^2 = 12$, или $0 = 3x^2 - cx + 12$. Чтобы это уравнение имело единственное решение, его дискриминант $D = c^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = c^2 - 12^2 = 0$, откуда $c = \pm 12$. Найдем величину x. Подставим значения $c = \pm 12$ в уравнение $0 = 3x^2 - cx + 12$ и получим: $0 = 3x^2 \mp 12x + 12 \Rightarrow 0 = x^2 \mp 4x + 4 \Rightarrow 0 = (x \mp 2)^2$. Положительное значение $x = 2$ получается при $c = 12$. Теперь найдем $y = \frac{6}{x}$ и получим $y = 3$.

Ответ: (2; 3).

21. (6). Примем всю работу за единицу. Введем производительность труда четырех бригад x, y, z и t соответственно.

По условиям задачи составим систему уравнений:
$\begin{cases} 4(y+z+t)=1, \\ 3(x+z+t)=1, \\ 6(x+y)=1, \end{cases}$ или $\begin{cases} y+z+t=\dfrac{1}{4}, \\ x+z+t=\dfrac{1}{3}, \\ x+y=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

Сложим три уравнения системы: $2x+2y+2z+2t=\dfrac{3}{4}$, откуда $x+y+z+t=\dfrac{3}{8}$.

Тогда все четыре бригады, работая вместе, могут разгрузить вагон за время $\dfrac{1}{x+y+z+t}=\dfrac{1}{3/8}=\dfrac{8}{3}=2\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $2\dfrac{2}{3}$ ч.

Литература

1. *Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др.* Алгебра: Учебник для 9 класса. – М.: Просвещение, 2004.

2. *Бунимович Е.А., Булычев В.А.* Основы вероятности и статистика для 5–9 классов. – М.: Дрофа, 2004.

3. *Бурмистрова Т.А.* Программы общеобразовательных учреждений: Алгебра. 7–9 классы. – М.: Просвещение, 2009.

4. *Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н. и др.* Задачи по математике. Алгебра. – М.: Наука, 1987.

5. *Галицкий М.П., Гольдман А.М., Звавич Л.И.* Сборник задач по алгебре для 8–9 классов. – М.: Просвещение, 1998.

6. *Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1988.

7. *Кострикина Н.П.* Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7–9 классов. – М.: Просвещение, 1991.

8. *Кочагина М.Н., Кочагин В.В.* Малое ЕГЭ по математике. 9 класс. – М.: ЭКСМО, 2007.

9. *Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и др.* Алгебра: Сборник заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 классе. – М.: Просвещение, 2006.

10. *Лютикас В.С.* Теория вероятностей. 9–11 классы. – М.: Просвещение, 1990.

11. *Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков Н.Г. и др.* Алгебра. 9 класс. – М.: Просвещение, 2009.

12. *Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Короткова Л.М.* Дидактические материалы по алгебре для 9 класса. – М.: Просвещение, 2008.

13. *Мочалов В.В., Сильвестров В.В.* Уравнения и неравенства с параметрами. – Чебоксары: Изд-во Чувашского университета, 2000.

14. *Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др.* Алгебра. 9 класс. – М.: Просвещение, 2008.

15. *Рурукин А.Н.* Решение задач по алгебре и геометрии. 9 класс. – М.: МИФИ, 2003.

16. *Рурукин А.Н.* Пособие для интенсивной подготовки к экзамену по математике. Выпускной, вступительные, ЕГЭ на 5+. – М.: ВАКО, 2006.

17. *Севрюков П.Ф.* Школа решения задач с параметрами. – М.: Илекса, 2007.

18. *Цыпкин А.Г.* Справочник по математике для средних учебных заведений. – М.: Наука, 1988.

19. *Цыпкин А.Г., Пинский А.И.* Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. – М.: Наука, 1983.

20. *Шестаков С.А., Высоцкий И.Р., Звавич Л.И.* Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы: 9 класс. – М.: Астрель, 2006.

Оглавление

Учебно-методическое пособие

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

Рурукин Александр Николаевич
Полякова Светлана Анатольевна

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО АЛГЕБРЕ

к учебнику Ю.Н. Макарычева и др. (*М.: Просвещение*)

9 класс

Выпускающий редактор *Анастасия Сорокина*
Дизайн обложки *Анны Новиковой*

По вопросам приобретения книг издательства «ВАКО» обращаться в ООО «Образовательный проект» по телефонам: 8 (495) 778-58-27, 746-15-04. Сайт: www.obrazpro.ru

Приглашаем к сотрудничеству авторов.
Телефон: 8 (495) 507-33-42. Сайт: www.vaco.ru

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»

Подписано к печати с диапозитивов 18.05.2010.
Формат 84×108/32. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. листов 17,64. Тираж 10 000 экз. Заказ № 2687.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных материалов в ОАО «Дом печати – ВЯТКА»
610033, г. Киров, ул. Московская, 122
Факс: (8332) 53-53-80, 62-10-36
http://www.gipp.kirov.ru, e-mail: pto@gipp.kirov.ru