УЧПЕДГИЗ

К НОВОЙ ОФИЦИАЛЬНОЙ ДЕМОНСТРАЦИОННОЙ ВЕРСИИ ЕГЭ

И. Н. СЕРГЕЕВ, В. С. ПАНФЕРОВ

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЗАДАНИЯ ЧАСТИ 2

ЕГЭ 2018

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ТРЕНАЖЁР

И. Н. Сергеев, В. С. Панферов

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ТРЕНАЖЁР

ЗАДАНИЯ ЧАСТИ 2

Информация о заданиях части 2
Уравнения, неравенства и системы
Задачи по геометрии
Нестандартные задачи
Ответы

УЧПЕДГИЗ

МОСКВА
2018

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
С32

Сергеев И. Н.

С32 ЕГЭ 2018. Тематический тренажёр. Математика. Профильный уровень: задания части 2 / И. Н. Сергеев, В. С. Панферов. — М. : УЧПЕДГИЗ, 2018. — 94, [2] с. (Серия «ЕГЭ. Тематический тренажёр»)

ISBN 978-5-906976-21-5

Книга посвящена самой сложной части Единого государственного экзамена по математике — заданиям части 2 (с развернутым ответом). Она представляет собой сборник задач по всем разделам школьного курса математики, которые затрагиваются в заданиях ЕГЭ части 2. Предложенная подборка задач позволяет выпускнику полностью, причем самостоятельно, подготовиться к предстоящему экзамену по математике.

Уникальная методика подготовки поможет учащимся акцентировать внимание на формулировках ряда заданий и избегать ошибок, связанных с невнимательностью и рассеянностью на экзамене, а также правильно оформлять работу, выявлять критерии оценивания.

В конце книги приведены ответы.

Книга адресована учащимся старших классов, учителям математики и методистам.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Подписано в печать 23.08.2017. Формат 60x90/8.
Гарнитура «Школьная». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 3,85.
Усл. печ. л. 12. Тираж 5 000 экз. Заказ № 5261.

ISBN 978-5-906976-21-5

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая книга посвящена наиболее трудной части Единого государственного экзамена по математике — заданиям с развернутым ответом.

В настоящее время Единый государственный экзамен по математике происходит по всему курсу элементарной математики в рамках программы средней школы. Новый вариант ЕГЭ состоит из двух частей:

- первая — содержащая задачи с кратким ответом;
- вторая — содержащая задачи с кратким ответом и с развернутым ответом.

Гарантией успешной сдачи экзамена, содержащего как простые, так и сложные (нестандартные) задачи, является не натаскивание на экзаменационные варианты прошлых лет, а систематическое углубленное изучение школьного курса математики. Это изучение включает в себя регулярную работу, решение и обсуждение с учителями, преподавателями курсов и кружков различных математических сюжетов, приемов, идей и подходов к решению задач.

Однако для того, чтобы успешно вести подготовку к экзамену, необходимо иметь достаточно полную и качественную подборку задач — задач, содержащих самые разные математические выражения и функции, использующих для своего решения разнообразные идеи и методы, различающихся как по сложности, так и по постановке. В современной учебно-методической литературе, конечно же, можно обнаружить необходимый материал, но для этого:

- во-первых, придется хорошенько потрудиться над его поиском и анализом;
- во-вторых, потребуется заранее знать, что́ именно необходимо к данному экзамену.

Предлагаемая книга как раз и призвана помочь школьнику (или его наставнику) в указанном отношении. Она задумана прежде всего как сборник задач для самостоятельного решения. Кстати, с этой целью все задачи в ней снабжены ответами. Книга позволяет выпускнику полностью подготовиться к предстоящему Единому государственному экзамену по математике, особенно ко второй его части.

Основной целью этой, так сказать «вузовской», части варианта (в отличие от его первой части, носящей характер «зачета» по курсу математики средней школы) является дифференциация выпускников по их возможностям дальнейшего обучения в вузах с различными требованиями к математической подготовке учащихся.

Задания всей части 2 предназначены для проверки знаний на том уровне требований, который традиционен в вузах с профильным экзаменом по математике. Они позволяют особенно тщательно отбирать выпускников в вузы, где требования к математической подготовке достаточно высоки.

Предлагаемая ниже подборка задач для самостоятельного решения, как нам кажется, способна ликвидировать имеющиеся пробелы в знаниях школьного курса математики, устранить недостатки подготовки к стандартным экзаменационным задачам и развить навыки решения задач, необходимые для *успешного выступления на ЕГЭ* (чего мы от всей души и желаем читателям-выпускникам!).

И.Н. Сергеев, В.С. Панферов

ГЛАВА I. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ

1. Рациональные уравнения и неравенства

Решите уравнения

1.1. $x^2 = 9$.

1.2. $(x^2 - 2x + 1)^2 = 1$.

1.3. $(x+1)^2 = (2x+5)^2$.

1.4. $2x^2 - 7x + 5 = 0$.

1.5. $3x^2 - 7x + 5 = 0$.

1.6. $x^2 - 2011x + 2010 = 0$.

1.7. $x^2 - 2010x - 2011 = 0$.

1.8. $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$.

1.9. $x^4 + x^2 - 12 = 0$.

1.10. $3x^6 + 7x^3 - 6 = 0$.

1.11. $(x-1)^4 - 8(x-1)^2 - 9 = 0$.

1.12. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + x + \dfrac{1}{x} = 0$.

1.13. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 6} = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 6}$.

1.14. $\dfrac{x^2 + x}{2x^2 + 2x} = \dfrac{x^2 + x}{x^2 + 3x}$.

1.15. $\dfrac{2x^2 + x + 2}{4x^2 + 5x - 14} = \dfrac{2x^2 + x + 6}{4x^2 + 5x - 10}$.

1.16. $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 24$.

1.17. $(x+4)(x+5)(x+6)(x+7) = 1680$.

1.18. $\dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{48}{(x-1)^2} = 10\left(\dfrac{x-1}{3} - \dfrac{4}{x-1}\right)$.

Решите неравенства

1.19. $2x^2 - 7x + 5 \le 0$.

1.20. $3x^2 + 7x - 6 > 0$.

1.21. $x^2 - 2011x + 2010 < 0$.

1.22. $x^2 + 2012x + 2011 \ge 0$.

1.23. $2x^2 - 6x + 5 \ge 0$.

1.24. $3x^2 - 9x + 7 \le 0$.

1.25. $4x^2 - 12x + 9 \le 0$.

1.26. $2x^4 - 7x^2 + 5 < 0$.

1.27. $x^4 + x^2 - 12 \le 0$.

1.28. $3x^6 + 7x^3 - 6 > 0$.

1.29. $\frac{5x+4}{3x-1} < 0$.

1.30. $\frac{2x+3}{3x+5} > 0$.

1.31. $(x-1)(3-x)(x-2)^2 > 0$.

1.32. $\frac{(x-2)(x+1)^2}{-x} < 0$.

1.33. $\frac{x}{x^2+3x-4} < 0$.

1.34. $\frac{(x+1)x^2}{5x-x^2} \ge 0$.

1.35. $\frac{x^2+1}{x-1-x^2} < 0$.

1.36. $\frac{x^2-8x+15}{x^2+x+1} \ge 0$.

1.37. $\frac{3x^2+1}{x^2+5x+6} \ge 0$.

1.38. $\frac{2x^2+21x+40}{x^2+3} \ge 0$.

1.39. $\frac{x^2+14x+49}{2x^2-x-1} > 0$.

1.40. $\frac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x-30} > 0$.

1.41. $\frac{x^2+x+1}{x^2-5x-6} < 0$.

1.42. $\frac{x^2-10x+25}{5-4x-x^2} \ge 0$.

1.43. $\frac{5x-x^2-4}{x^2-6x+9} \ge 0$.

1.44. $\frac{(2-(x+1)^2)(x-4)^2}{x(x^2-x-6)}$

1.45. $\frac{1}{2-x} \le 2$.

1.46. $\frac{x-1}{x+3} > 2$.

1.47. $\frac{5x+1}{x^2+3} > -1$.

1.48. $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$.

1.49. $\frac{1-x}{(x+1)^2} < 1$.

1.50. $x + \frac{60}{x} \ge 17$.

1.51. $\frac{x^2+1}{x} < \frac{1}{x} + 1$.

1.52. $\frac{x-1}{x+1} < x$.

1.53. $x \ge \frac{6}{x+5}$.

1.54. $\frac{x+6}{x-6} + \frac{3x-2}{2} \ge 0$.

1.55. $2 + \frac{3}{x} > \frac{2}{x-1}$.

1.56. $\frac{4x}{x+3} > x+1$.

1.57. $\frac{2x^2+3x-459}{x^2+1} > 1$.

1.58. $\frac{3}{2-x^2} \le 1$.

1.59. $\frac{1}{x}<\frac{x^2+1}{x}+1$.

1.60. $\frac{12}{x^2}+\frac{7}{x}+1<0$.

1.61. $\frac{9}{(x+2)^2}\geq 1$.

1.62. $(x-1)^4-15(x-1)^2-16>0.$

1.63. $\frac{x^2+3x+24}{x^2+3x+3}<4$.

1.64. $-2<\frac{x^2+2}{1-x^2}$.

1.65. $\frac{3x-2}{x^2+6x}>\frac{1}{2}$.

1.66. $\frac{5+2x}{3x^2+2x-16}<1$.

1.67. $\frac{1}{x^2+5x+6}\geq\frac{1}{2}$.

1.68. $\frac{1}{x^2-8x-9}\geq\frac{1}{3x^2+5x+2}$.

1.69. $\frac{19+33x}{7x^2+11x+4}>2$.

1.70. $\frac{4}{x}+\frac{2}{2-x}<1$.

1.71. $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}>\frac{1}{x+1}$.

1.72. $\frac{7}{x(x+1)}+\frac{9}{x}+1<0$.

1.73. $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}>1$.

1.74. $(x^2-3x+1)(x^2-3x-3)\geq 5$.

1.75. $(x^2+2x)(2x+2)-9\frac{2x+2}{x^2-2}\geq 0$.

1.76. $\frac{1}{x+9}+\frac{1}{x+1}\geq\frac{1}{x}$.

1.77. $\frac{7}{x^2+5x+6}-\frac{9}{x+3}+1\leq 0$.

1.78. $\frac{\frac{1}{x}-1}{1-\frac{1}{x-6}}\geq 0$.

1.79. $-2<\frac{x^2+2}{1-x^2}\,\frac{3}{x-1}<1$.

1.80. $(\frac{x}{2}+\frac{5}{8}-\frac{15}{88+32x})^2\geq 1$.

2. Иррациональные уравнения и неравенства

Решите уравнения

2.1. $(x^2-1)\sqrt{5x-1}=0$.

2.2. $\sqrt{8-3x^2}=1$.

2.3. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+4}=0$.

2.4. $\sqrt{x^2-9}=\sqrt{x-3}$.

2.5. $\sqrt{12-x}=x$.

2.6. $x-\sqrt{x-1}=3$.

2.7. $\sqrt{7+x}+x+1=0$.

2.8. $\sqrt{4+4x+x^2}+x=4$.

2.9. $\sqrt{2x^2+21x+4}=2+11x$.

2.10. $\sqrt{3x^2+25x+51}=7+2x$.

2.11. $\dfrac{\sqrt{2x+1}+1}{x}=1$.

2.12. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-6=0$.

2.13. $\sqrt{3-x}+\dfrac{4}{\sqrt{3-x}+3}=2$.

2.14. $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=\dfrac{3}{2}$.

2.15. $2x^2-3x-\sqrt{2x^2-3x+9}+3=0$.

2.16. $\sqrt{1-3x}-\sqrt{4-x}=1$.

2.17. $\sqrt{4+x}-\sqrt{5-x}=3$.

2.18. $\sqrt{13-4x}=\sqrt{12-3x}-\sqrt{1-x}$.

2.19. $\sqrt{x^4+2x-5}=1+x$.

2.20. $\sqrt{13-x}-\sqrt{x-3}=\sqrt{x}$.

2.21. $\sqrt{x}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+7}-1}$.

2.22. $\sqrt{x-1}+\sqrt{(x-1)(x+1)}-\sqrt{x^3}=0$.

2.23. $\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}=x-7$.

2.24. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x+33}-\sqrt{x+6}$.

2.25. $\sqrt{3x^2-5x+8}-\sqrt{3x^2-5x+1}=1$.

2.26. $\sqrt{1-x\sqrt{x^2-24}}+x+1=0$.

2.27. $\sqrt[3]{1-x}=1-\sqrt{x}$.

2.28. $6\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-1}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-1)}$.

2.29. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

2.30. $(5x+2)\sqrt{1-x}+(5x-7)\sqrt{x}=0$.

Решите неравенства

2.31. $x \cdot \sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$.

2.32. $\sqrt{\dfrac{x-3}{3-2x}} > -1$.

2.33. $\sqrt{3x-4} > \sqrt{4-x}$.

2.34. $\sqrt{x^2 - 2x - 3} < 1$.

2.35. $\sqrt{x^2} + x < 1$.

2.36. $0 < x + \sqrt{2-x}$.

2.37. $0 < x + \sqrt{x+2}$.

2.38. $x < \sqrt{x+30}$.

2.39. $\sqrt{2x-1} < x - 2$.

2.40. $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1$.

2.41. $3 + x > 3\sqrt{1-x^2}$.

2.42. $\sqrt{(x+1)(x-10)} > x$.

2.43. $\sqrt{(x+5)(3x+4)} > 4(x-1)$.

2.44. $\dfrac{3}{\sqrt{2+x}} < \sqrt{2+x} + 2$.

2.45. $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} < \dfrac{3}{2}$.

2.46. $3\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} > 1$.

2.47. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{4}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} < 0$.

2.48. $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} > \sqrt{x-1}$.

2.49. $\sqrt{7x-6} - \sqrt{3x-16} > \sqrt{5x-22}$.

2.50. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 + x + 1} < 1$.

2.51. $\sqrt{1+x} \leq \sqrt[4]{5-x}$.

2.52. $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} \geq 2$.

2.53. $\sqrt{2 - \sqrt{x}} < \sqrt{x+1}$.

2.54. $x + 4 + \dfrac{x^2}{(1 + \sqrt{x-1})^2} > 0$.

2.55. $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > \dfrac{35}{12}$.

2.56. $\dfrac{1}{\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}} + \dfrac{1}{\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}} > 2$.

2.57. $\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 - 7x} > 3$.

2.58. $x^2 \geq x(2 + \sqrt{12 - 2x - x^2})$.

2.59. $\sqrt{x + \dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{x - \dfrac{1}{x^2}} > \dfrac{2}{x}$.

2.60. $\sqrt{x+3} - \sqrt{-x-1} < 1 + \sqrt{(x+3)(-x-1)}$.

3. Уравнения и неравенства с модулем

Решите уравнения

3.1. $|x+2|=x+2$.

3.2. $|x-2|=2(3+x)$.

3.3. $|3x+2|=x+11$.

3.4. $|1-x^2|=15$.

3.5. $|2x-5|=5-2x$.

3.6. $x^2+|x|-6=0$.

3.7. $(x-5)^2-|x-5|=30$.

3.8. $x^2+6x+8+|x+4|=0$.

3.9. $3|x+2|+x^2+6x+2=0$.

3.10. $|1-5x^2|=4$.

3.11. $|x-4|=|5-2x|$.

3.12. $|x^2+13x+35|=|35-x^2|$.

3.13. $|2x-8|-|x+5|=12$.

3.14. $|x|-|x+2|=2$.

3.15. $|5x+3|+|2x+1=|7x+4|$.

3.16. $|x|-2|x-1|+3|x-2|=0$.

3.17. $2|x-6|-|x|+|x+6|=18$.

3.18. $|x+1|+2|-1|+1|=2$.

3.19. $|2x+15|=22-|2x-7|$.

3.20. $|x^2+2x-1|=\dfrac{1-5x}{3}$.

Решите неравенства

3.21. $|2x+5|<1$.

3.22. $|3x+\dfrac{5}{2}|\geq 2$.

3.23. $|x^2+5x|<6$.

3.24. $2|x-1|\leq 4-x$.

3.25. $|x+1|>\dfrac{1-x}{2}$.

3.26. $|x+2|\leq|4-x|$.

3.27. $|x-1|-|x+4|>7$.

3.28. $|x-2|+x+\dfrac{3}{2}<|x+1|$.

3.29. $x^2-6|x|+8<0$.

3.30. $x^2-|x|-6\leq 0$.

3.31. $|x^2+2x|+x\leq 0$.

3.32. $|x+4|>x^2+7x+12$.

3.33. $x^2+5x+9\leq|x+6|$.

3.34. $3x^2+9x+2\geq|x+3|$.

3.35. $|x+6|>|x^2+5x+9|$.

3.36. $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{|x|}\geq 2$.

3.37. $\frac{3}{|x+1|}\geq 5-2x$.

3.38. $\frac{|x-3|-1}{4-2|x-4|}\geq -1$.

3.39. $\frac{|2+x|+x}{|x+3|-1}\leq 2$.

3.40. $\frac{|1-x|+10}{4|x-1|+3}>2$.

3.41. $\frac{1}{|x+1|-1}\geq\frac{2}{|x+1|-2}$.

3.42. $|2x+4|-|3x-9|>|x+1|-6$.

3.43. $||x+1|-|x-1||<1$.

3.44. $|x^2+2x-3|+3x+3<0$.

3.45. $x^2-|5x+3|+x<2$.

3.46. $x^2+4\geq|3x-2|+7x$.

3.47. $(|x+1|-3)(|x-2|-5)<0$.

3.48. $|x^2-x-2|+|x-4|\leq x^2-2x+6$.

3.49. $|x^2+2x-8|+2x>0$.

3.50. $x^2-x-10<2|x+2|$.

3.51. $2x>\frac{5x+3}{|x+2|}$.

3.52. $\frac{|x-1|+|x+2|}{199-x}<1$.

3.53. $\frac{|x+2|}{|x+1|-1}\geq 1$.

3.54. $\frac{3}{|x-3|-1}\geq|x-2|$.

3.55. $\left|\frac{x^2+3x-1}{x^2-x+1}\right|<3$.

3.56. $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2+6x+9}<0$.

3.57. $\frac{|x+3|}{x^2+5x+6}\geq 2$.

3.58. $\frac{x^2-|x|-12}{x+3}\leq 2x$.

3.59. $|x^3+1|\geq 1+x$.

3.60. $\left|\frac{x^2+5x+4}{x^2-4}\right|\leq 1$.

4. Тригонометрические уравнения и неравенства

Решите уравнения

4.1. $\sqrt{3}\sin x = 2.$

4.2. $\sin x = \frac{\pi}{6}.$

4.3. $\sqrt{2}\cos^2 5x = \cos 5x.$

4.4. $(2\sin 2x - \cos 2x)(1 + \cos 2x) = \sin^2 2$

4.5. $\sqrt{3}\sin x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \cdot \sin x = \sqrt{3}.$

4.6. $2\cos 4x + \cos 2x = 1.$

4.7. $3\cos(\frac{\pi}{2} + x) = 2\cos^2 x.$

4.8. $\dfrac{4\sin x - 2\cos 2x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3}\cos x - 2} = 0.$

4.9. $\dfrac{6\sin x - 2\cos 2x - 4\cos^2 x - 3}{\sqrt{7}\sin x - 3\cos x} = 0.$

4.10. $4\sin^4 \frac{x}{2} + 12\cos^2 \frac{x}{2} = 7.$

4.11. $3\operatorname{tg}^2 x + 7 = \dfrac{2}{\sin^2 x}.$

4.12. $\sin 3x + \sin x = \sin 2x.$

4.13. $\sin 2x + \sin 3x + \cos 5x = 1.$

4.14. $3\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 0.$

4.15. $4\sin x \cdot \cos x - 3\sin^2 x = 1.$

4.16. $\cos x - \sin x - 2\sin x \cdot \cos x = 1.$

4.17. $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x.$

4.18. $6(\sin x + \cos x) - 2\sin x \cdot \cos x + 6 = 0.$

4.19. $(\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x)^2 = 5 + \cos(\frac{\pi}{2} + 2x).$

4.20. $\cos 3x - \sin(9x - 2) = 0.$

4.21. $4\cos x - 3\sin x = 5.$

4.22. $\sin x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{10} \cdot \cos x = 1.$

4.23. $2\cos 3x = \sqrt{3}\cos x + \sin x.$

4.24. $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x.$

4.25. $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi/4) - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}(\pi/4) \cdot \operatorname{tg} x} = 2.$

4.26. $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) + \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) = \operatorname{tg} x.$

4.27. $\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = (\sin x - \cos x)^2.$

5. Показательные уравнения и неравенства

Решите уравнения

5.1. $5^{x^2+6x+8}=1$.

5.2. $(2/5)^{6x-7}=(5/2)^{14x-3}$.

5.3. $0,125\cdot 2^{-4x-16}=\left(\dfrac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^x$.

5.4. $2^{3+2x}=4^{1-x^2-3x}$.

5.5. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4\sqrt{x}}=(2,25)^{2\sqrt{x}-4}$.

5.6. $5\sqrt{5}(0,2)^{x+0,5}=(0,04)^x$.

5.7. $\dfrac{2^{2x-1}\cdot 4^{x+1}}{64}=8^{x-1}$.

5.8. $32^{(x+8)/(x-4)}=0,25\cdot 128^{(x+20)/x}$.

5.9. $5^{x+1}=5^{x-1}+24$.

5.10. $7^{x+1}-\dfrac{1}{7}7^x+2\cdot 7^{x-1}-14\cdot 7^{x-2}=48$.

5.11. $3^{2x-1}-9^x+27^{(2x+2)/3}=675$.

5.12. $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$.

5.13. $4^{-2/x}-5\cdot 2^{-2/x}+4=0$.

5.14. $2^{2+x}+2^{2-x}=17$.

5.15. $2^{x+1}\cdot 5^x=10^{x+1}\cdot 5^{x+2}$.

5.16. $2^x\cdot 5^{x-1}=200$.

5.17. $2^{(x^2-6)}\cdot 3^{(x^2-6)}=\dfrac{(6^{-x-1})^4}{6^5}$.

5.18. $(\log_3 8)\cdot(4/9)^x\cdot(27/8)^{x-1}=\log_3 4$.

5.19. $7^{x+1}+3\cdot 7^x=3^{x+2}+3^x$.

5.20. а) Решите уравнение $8^x-7\cdot 4^x-2^{x+4}+112=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[\log_2 5;\log_2 11]$.

5.21. $9^x-5^x-3^{2x}\cdot 15+5^{x+1}\cdot 3=0$.

5.22. а) Решите уравнение $8^x-3\cdot 4^x-2^x+3=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[3/2;2]$.

5.23. $25^x-7^x-7\cdot 5^{2x+1}+5\cdot 7^{x+1}=0$.

5.24. $9^x+6^x-2\cdot 4^x=0$.

5.25. $4\cdot 2^{2x}-6^x=18\cdot 9^x$.

5.26. $4^x=2\cdot 10^x+3\cdot 25^x$.

5.27. $64\cdot 9^{-x}-84\cdot 12^{-x}+27\cdot 16^{-x}=0$.

5.28. $4^{1/x}+6^{1/x}-9^{1/x}=0$.

5.29. $8^x + 8 = 3 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^{x+1}$.

5.30. $3^{-12x-1} - 9^{-6x-1} - 27^{-4x-1} + 81^{1-3x} = 2192$.

5.31. $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4$.

5.32. $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x + (\sqrt{7-\sqrt{48}})^x = 14$.

Решите неравенства

5.33. $2^{5+10x} > 1$.

5.34. $4^{2x} > 0{,}125$.

5.35. $2^{-x} > \dfrac{1}{128}$.

5.36. $\sqrt{27} \cdot 3^{x+1} < 9^{4x^2}$.

5.37. $3^{x-3} < 3 \cdot 27^{-\frac{1}{x}}$.

5.38. $5^{-2x-x^2/3} < 5^{2+2x}\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x^2} + 24$.

5.39. $(0,2)^{(2x-1)/x} > 5$.

5.40. $(0,1)^{(1-2x)/(x+1)} > 10^3$.

5.41. $(0,25)^{4x^2+2x-2} < 4^{2x+3}$.

5.42. $(0,3)^{2x^2+3x+6} < 0{,}00243$.

5.43. $\sqrt{16^{(2x+2)/x}} < \sqrt[3]{8^{3x-7}}$.

5.44. $2^{-x+2} - 2^{-x+1} + 2^{-x-1} - 2^{-x-2} \le 9$.

5.45. $2^{x+1} + 2^{-x} - 3 < 0$.

5.46. $5^{1-2x} > 5^{-x} + 4$.

5.47. $25^x - 5^{x+1} \ge 50$.

5.48. $4^{-x-0,5} - 7 \cdot 2^{-x-1} - 4 < 0$.

5.49. $4^{x+1} - 16^x < 2 \cdot \log_9 27$.

5.50. $2^{x-0,5} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 1 + 2^{-x}$.

5.51. $4^{3x^2-x} - 8 < 2 \cdot 8^{x^2-x/3}$.

5.52. $\dfrac{4^x + 2x - 4}{x-1} \le 2$.

5.53. $\dfrac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1} < \dfrac{1}{2}$.

5.54. $\dfrac{2^{1+x} - 2^{-x} + 1}{2^{-x} - 1} \le 0$.

5.55. $8 \cdot \dfrac{3^{x-2}-1}{3^x - 2^x} < 1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

5.56. $\dfrac{33 \cdot 3^{x-1} - 93}{12 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^x - 15} \ge 5$.

5.57. $2^{2-x} - 2^{3-x} - 2^{4-x} > 5^{2-x} - 5^{-x}$.

5.58. $5^{x-2} + 5^{x-3} + 5^{x-4} > 7^{\frac{x}{2}+1} + 7^{\frac{x}{2}} + 7^{\frac{x}{2}-1}$.

5.59. $2^{2x} - 2 \cdot 25^x - 10^x > 0$.

5.60. $2 \cdot 4^x - 25 \cdot 5^{2x} - 5 \cdot 10^x > 0$.

5.61. $9 \cdot 4^{1/x} + 5 \cdot 6^{1/x} < 4 \cdot 9^{1/x}$.

5.62. $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 15^x \cdot 10^x$.

4.28. $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4}+x)=7-5\operatorname{tg}2x.$

4.29. $\sin^4\frac{2x}{3}+\cos\frac{2x}{3}=\frac{5}{8}.$

4.30. $\sin^2 x-\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{1}{2}.$

4.31. $\frac{2\sin^4 x-1}{\cos^4 x}=2.$

4.32. $\cos 2x\cdot(2\cos^2 2x-1)=\frac{1}{4}.$

4.33. $2\sin^3 x-\sin^2 x+2\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0.$

4.34. $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x=\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x.$

4.35. $2\sin^8 x-2\cos^8 x=\cos^2 2x-\cos 2x.$

4.36. $(3-\operatorname{ctg}^2 x)\sin 2x=2(1+\cos 2x).$

4.37. $\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}x+4\cos^2 x=0.$

4.38. $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\cos x)+\operatorname{ctg}(\pi\sin x)=0.$

4.39. $\operatorname{tg}3x=(2+\sqrt{3})\operatorname{tg}x.$

4.40. $\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}7x=1.$

4.41. $\operatorname{tg}14x+3\operatorname{ctg}7x+\sin 3x-2\sqrt{2}\sin(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{4})=\frac{4}{\sqrt{3}+1}.$

4.42. $2\cos x-\sqrt{2}\sin 28x=3\sqrt{2}-2\cos 28x\cdot\sin x.$

4.43. $2\sin^2 x+\sin(x^2)=1.$

4.44. $\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x).$

4.45. $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{tg}x)=\operatorname{ctg}(\pi\operatorname{ctg}x).$

4.46. $1+\arcsin x=0.$

4.47. $2\arccos^2 x-3\arccos x-2=0.$

4.48. $\arcsin x=\arccos x.$

4.49. $\arcsin(x^2-x+\frac{1}{\sqrt{2}})=\arccos(x^2-x+\frac{1}{\sqrt{2}}).$

4.50. $\arcsin 2x=\arccos|x|.$

Решите неравенства

4.51. $\sin x>\frac{1}{2}.$

4.52. $\cos x\le-\frac{1}{2}.$

4.53. $\operatorname{tg}x<1.$

4.54. $20\sin^2 x+9\cos x<21.$

4.55. $\operatorname{tg}\frac{1}{1+x^2}\ge 1.$

4.56. а) Решите уравнение $2\sin^2 x + 2 = 3\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[-3\pi; -3\pi/2]$.

4.57. $2\cos^2 2x - (2 + \sqrt{2})\cos 2x + \sqrt{2} > 0$.

4.58. $6\sin x \cdot \cos x > \sin x + \cos x + 1$.

4.59. $\sin(\sin x) + \sin x \cdot \cos(\sin x) > 0$.

4.60. $2\cos(\arcsin x) - \sin(\frac{1}{2}\arccos x) \leq 0$.

4.61. $\arcsin(\sin x) + 3\arccos(\cos x) \geq 3x - 18$.

4.62. а) Решите уравнение $2\cos^2 x + 1 = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[5\pi/2; 4\pi]$.

4.63. а) Решите уравнение $2\cos 2x = 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[-5\pi/2; -\pi]$.

4.64. а) Решите уравнение $\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x - 3\mathrm{tg}\, x - 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[2\pi; 7\pi/2]$.

4.65. а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}$.

б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[-3\pi; -3\pi/2]$.

6. Логарифмические уравнения и неравенства

Решите уравнения

6.1. $2\log_8 2^{4x} = 2^{\log_{\sqrt{2}} 2}$.

6.2. $10^{\lg(\lg\sqrt{x})} - \lg x + \lg x^2 - 3 = 0$.

6.3. $\log_5\left(\frac{x+1}{10}\right) = \log_5\left(\frac{2}{x}\right)$.

6.4. $\log_3(x-1) + \log_3(x+1) = 1$.

6.5. $\frac{\log_2 5}{\log_2 10} + \lg(x+10) = 1 + \lg(21x-20) - \lg(2x-1)$.

6.6. $2\log_4(4+x) = 4 - \log_2(x-2)$.

6.7. $\log_3((x+2)(x-2)) = 4\log_9(2x+3) - \log_{\sqrt{5}} 5$.

6.8. $2\log_8(2x) + \log_8(x^2+1-2x) = \frac{4}{3}$.

6.9. $\frac{1}{2}\lg(x+\frac{1}{8}) - \lg(x+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\lg(x-\frac{1}{2}) - \lg x$.

6.10. $\log_{1/2}(-x-1) + \log_{1/2}(1-x) - \log_{1/\sqrt{2}}(7+x) = 1$.

6.11. $x^{\log_{\sqrt{x}}(x^2+1)} = 25$.

6.12. $\log_{x+1} 2 = 3$.

6.13. $\log_{1-x}(x^2+3x+1) = 1$.

6.14. $\log_{1-x}(x^2-x-6)^2 = 4$.

6.15. $(\lg x)^2 - 4\lg x = \lg x^2 - 5$.

6.16. $(\log_2 x)^2 - 2\log_2\sqrt{x} = 2$.

6.17. $\lg^{-1} x + 4\lg x^2 + 9 = 0$.

6.18. $\log_2\frac{x}{8} = \frac{15}{\log_2\frac{x}{16} - 1}$.

6.19. $\frac{\log_{27}\frac{27}{x^2}}{\log_{27}^2 x} = 3$.

6.20. $\log_2 x - 4\log_{x^2} 4 = 3$.

6.21. $\log_{\sqrt{x}} 2 + 8\log_{16} x^2 + 9 = 0$.

6.22. $3 + 2\log_{x-1} 3 = 2\log_3(x-1)$.

6.23. $1 + 2\log_{(x+5)} 5 = \log_5(x+5)$.

6.24. $\frac{1}{8}(\log_2(x-2)^4)^2 = \frac{\lg(2-x)}{\lg 2}\cdot 2^{2\log_2\sqrt{3}}$.

6.25. $\log_x 9x^2 \cdot \log_9^2 x = 1$.

6.26. $\log_2 \sqrt{x+1} + 3\log_2 \sqrt{1-x} = \log_2 \sqrt{1-x^2}$.

6.27. а) Решите уравнение $2\log_2{}^2(2\cos x) - 5\log_2(2\cos x) + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[\pi; 5\pi/2]$.

6.28. а) Решите уравнение $2\log_2{}^2(2\sin x) - 7\log_2(2\sin x) + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[\pi/2; 2\pi]$.

6.29. $\frac{3}{2}\log_{1/4}(x-2)^2 - 3 = \log_{1/4}(x+4)^3 + \log_{1/4}(6-x)^3$.

6.30. $\log_4 x - \log_{1/2}(13-x) = \log_2(10-x)^2 - 2\log_{1/4}(8-x)$.

6.31. $\log_4(\log_2 x) + 3\log_{1/8}(\log_2(2\sqrt{2}x) = 1$.

6.32. $\log_4(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_3(x-1)))) = \frac{1}{2}$.

Решите неравенства

6.33. $\log_{11}(3x-1) > 1$.

6.34. $\log_{1/3}(7x-1) > 0$.

6.35. $\lg(x^2+5x+7) < 0$.

6.36. $\log_{0,5}(x^2+5x+6) > -1$.

6.37. $\log_8(x^2+4x+3) \le 1$.

6.38. $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1-2x}{x}\right) \le 0$.

6.39. $2\log_{1/9}\left(\frac{2-3x}{x}\right) \ge -1$.

6.40. $\log_{1/5}(3x-4) > \log_{1/5}(x-2)$.

6.41. $\log_{0,1}(x^2-x-2) > \log_{0,1}(3-x)$.

6.42. $1+\log_2(2-x) > \log_2(x^2+3x$

6.43. $\log_{0,1}(4-x) \ge \log_{0,1} 10 - \log_{0,1}(x-1)$.

6.44. $\lg(x+4) \ge -2\lg\frac{1}{2-x}$.

6.45. $\log_{1/5}(x^2+6x+18) + 2\log_5(-x-4) < 0$.

6.46. $2\log_2 x - \log_2(2x-2) > 1$.

6.47. $2\log_3(-x) - \log_{1/3}(4+x) \le \log_3(x+1)^2 + 2\log_9(10+x)$.

6.48. $\log^2_{0,5} x - \log_{0,5} x \le 2$.

6.49. $\log_3 x \le \dfrac{2}{\log_3 x - 1}$.

6.50. $\dfrac{1}{1+\log_2 x} + \dfrac{1}{1-\log_2 x} > 2$.

6.51. $\dfrac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} \le 1$.

6.52. $5 + 2\log_{1/3} x > 2\log_x 3$.

6.53. $\log_x\left(\dfrac{6-5x}{4x+5}\right) > 1$.

6.54. $\log_{(x^{-2})}\left(x+2\right) > -1$.

6.55. $\log_{\left(\frac{16}{25-x^2}\right)}\left(\dfrac{14}{24-2x-x^2}\right) > 1$.

6.56. $\log_{(x/2)} 8 + \log_{(x/4)} 8 < \dfrac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$.

6.57. $\log_5 x + \log_x \dfrac{x}{3} < \dfrac{2-\log_3 x}{\log_3 x}\log_5 x$.

6.58. $\log_2 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 2 > 1$.

6.59. $\log_5 \sqrt{3x+1} \cdot \log_{x-1} 5 > 1$.

6.60. $\log_{1/2}(x+1) \cdot \log_2 x > \log_{(x+1)} x$.

6.61. $\log_2 x - \log_2(x+2) + \log_{(x+2)/x} 2 > 0$.

6.62. $1 + \log_{1/4}(\log_3(x+4)) > 0$.

6.63. $\log_{\sqrt[4]{9}}(\log_{1/3}(x+1)) \ge 2$.

6.64. $\log_{1/2}(\log_2(x^2-2)) > 0$.

6.65. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_8 \dfrac{x^2-1}{x-2}\right) < 0$.

6.66. $\log_{1/2} x^2 + \log_3 x^2 > 1$.

6.67. $\log_2\left(\log_3\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right) < \log_{1/8}\left(\log_{1/9}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}\right)\right)$.

7. Комбинированные уравнения и неравенства

Решите уравнения и неравенства

7.1. $(4\,|\,x+1\,|+1/2)^2 = 11(x+1)^2 + 5/4$.

7.2. $\sqrt{|\,x-1\,|-1} \ge \sqrt{|\,x-1\,|-2011}$.

7.3. $\dfrac{x^3 - 8 + 6x(2-x)}{|\,3-4x\,|} \le \sqrt{4x-3}$.

7.4. $\sqrt{x^2 - x + 4} \le 2x + |\,3x+2\,|$.

7.5. $5^{72} \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^x \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\sqrt{x}} > 1$.

7.6. $2^{|x-2|} - |\,2^{1-x} - 1\,| = 2^{1-x} + 1$.

7.7. $2^x + 2^{|x|} \ge 2\sqrt{2}$.

7.8. $\dfrac{3^x - 2}{x^2 - 6x + 5} \le 0$.

7.9. $\dfrac{\log_2(1-x)}{x+1} < 0$.

7.10. $\dfrac{1 - \log_{0,5} x}{\sqrt{6x+2}} < 0$.

7.11. $\dfrac{(x+0,5)(x+3)}{\log_2 |\,x+1\,|} < 0$.

7.12. $9^{\log_3(1+2x)} = 5x^2 - 5$.

7.13. $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\log_7(x^2-1)} > 1$.

7.14. $2^{\log_5(2/(x+2))} < 1$.

7.15. $(0,3)^{\log_5\left(\log_{1/5}\left(x^2 - \frac{4}{5}\right)\right)} < 1$.

7.16. $\log_{0,1}(101 - 5^x) + 2 < 0$.

7.17. $\log_2 \dfrac{1}{|\,x+1\,|-1} = 1$.

7.18. $\log_2 \left|\,1 - \dfrac{12}{x^2}\,\right| < 1$.

7.19. $|\,\log_3(2-x)\,| > 2$.

7.20. $2 < |\,\log_{1/2}(x+1) - 4\,| \le 3$.

7.21. $\sqrt{\log_{\mathrm{tg}(3\pi/16)}(x-1)} \ge 1$.

7.22. $\sqrt{\log_2\left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right)} < 1$.

7.23. $x^{2\lg x} = 10x^2$.

7.24. $x \cdot x^{\lg x} = 10 \cdot x$.

7.25. $x^{\lg^2 x - 3\lg x + 1} > 1000$.

7.26. $x^{(\lg 10x) - 2} < 100$.

7.27. $\left(\dfrac{x+1}{10}\right)^{\lg(x+1)-2} < 100$.

7.28. $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} \ge 2$.

7.29. $3^{(\log_3 x)^2/4} \le \dfrac{x^{(\log_3 x)/3}}{3}$.

7.30. $5^{\log_x 49} - 7^{\log_x 5} - 2 \ge 0$.

7.31. $3\sqrt{\lg x} + 2\lg\sqrt{x^{-1}} = 2$.

7.32. $\log_{1/3} x - 3 \cdot \sqrt{\log_{1/3} x} + 2 = 0$.

7.33. $\log_{4/3}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) + \log_{4/25}(2/5) \ge 0$.

7.34. $\log_5(5^x - 20) = x - 1$.

7.35. $\log_{1/9}(2^{x+2} - 4^x) \ge -1$.

7.36. $\log_3(2^{-x} - 3) + \log_3(2^{-x} - 1) = 1$.

7.37. $2(\lg 2 - 1) + \lg(5^{\sqrt{x}} + 1) = \lg(5^{1-\sqrt{x}} + 5)$.

7.38. $2\log_{\sqrt{3}} 3 + \log_{\sqrt{3}}(3^{x^2-3} - 1/9) < \log_{\sqrt{3}} 26$.

7.39. $\lg 2^{x+3} - \lg(5^x - 2) = x$.

7.40. $\dfrac{x+1}{3 - \log_3(9 - 3^{-x})} \le 1$.

7.41. Решите неравенство $(5x - 13) \cdot \log_{2x-5}\left(x^2 - 6x + 10\right) \ge 0$.

7.42. Решите неравенство $(20 - 11x) \cdot \log_{5x-9}\left(x^2 - 4x + 5\right) \ge 0$.

7.43. Решите неравенство $\left(4^{x^2-x-6} - 1\right) \cdot \log_{0,25}\left(4^{x^2+2x+2} - 3\right) \le 0$.

7.44. Решите неравенство $\dfrac{9^x - 3^{x+2} + 20}{3^x - 3} + \dfrac{9^x - 3^{x+2} + 1}{3^x - 9} \le 2 \cdot 3^x - 6$.

7.45. Решите неравенство $\dfrac{4^x - 2^{x+3} + 7}{4^x - 5 \cdot 2^x + 4} \le \dfrac{2^x - 9}{2^x - 4} + \dfrac{1}{2^x - 6}$.

7.46. $2 \cdot \log_{(x^2-8x+17)^2}\left(3x^2 + 5\right) \le \log_{(x^2-8x+17)}\left(2x^2 + 7x + 5\right)$.

7.47. $\log_{(x^2-2x-3)} \dfrac{|x| - |x-4|}{x+1} > 0$.

7.48. $\log_3(\log_{1/8}((3/2)^{-x} - 1/2)) \le -1$.

7.49. $\log_{-x}(\log_9((3^{-x} - 9)) < 1$.

7.50. $\log_2(2^x - 1) \cdot \log_{1/2}(2^{x+1} - 2) > -2$.

7.51. $\log_4(\sqrt{3}^x - 1) \cdot \log_{1/4}\left(\dfrac{\sqrt{3}^x - 1}{16}\right) \le \dfrac{3}{4}$.

7.52. $\log_{|x|}(\sqrt{9 - x^2} + x - 1) \ge 1$.

7.53. $\log_{2x} 4x \le \sqrt{\log_{2x}(16x^3)}$.

7.54. $\sqrt{(\log_{1/2} 2x)^2 + 4\log_2 \sqrt{2x}} < \sqrt{2}(4 - \log_{16} 16x^4)$.

7.55. $\left(x + \dfrac{8}{x}\right) \cdot \left| \log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2 - 4x + 4) \right| \ge 9 \cdot \left| \log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2 - 4x + 4) \right|$.

7.56. $| 4\cos^2 x - 1 | + | 4\cos^2 x - 3 | = 2$.

7.57. $\left| 2\sin x + 2\cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} \right| \le 2$.

7.58. $81^{(\sin 2x - 1)\cos 3x} - 9^{(\sin x - \cos x)^2} = 0$.

7.59. $\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} = \dfrac{10}{3}$.

7.60. Решите неравенство $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{(\log_2 3)^{4-x^2}} \le \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{-(\log_3 2)^{2x-1}}$.

7.61. Решите неравенство $\left(2 - \sqrt{3}\right)^{(\log_3 4)^{3-x^2}} \le \left(2 + \sqrt{3}\right)^{-(\log_4 3)^{2-3x}}$.

7.62. Решите неравенство $\dfrac{\log_9(2 - x) - \log_{15}(2 - x)}{\log_{15} x - \log_{25} x} \le \log_{25} 9$.

7.63. $\log_{\frac{6x - x^2}{11}}(-\cos 3x - \cos x) = \log_{\frac{6x - x^2}{11}}(-\cos 2x)$.

7.64. $\sqrt{\sin x} + \cos x = 0$.

7.65. $\sqrt{\operatorname{tg} x + \sin x} + \sqrt{\operatorname{tg} x - \sin x} = 2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cos x$.

7.66. $\sqrt{\cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x - 3\cos^2 x + \cos x + \dfrac{13}{4}} = \sqrt{3}\sin x + \dfrac{1}{2}$.

7.67. $\sqrt{5 - 2\sin x} \ge 6\sin x - 1$.

7.68. $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$.

7.69. $\sqrt{2 - \sin x - \sqrt{3}\cos x} > 1$.

7.70. $2^{\frac{5}{2} + 2\cos 2x} - (2^{\frac{3}{2}} - 1)4^{\cos^2 x} = -(2\sin^2 x)^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}\sin x}(\sqrt{2} - 1)}$.

7.71. $\log_{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin^2 x - \dfrac{5}{12}} < -1.$

7.72. $\log_{(\sin x - \cos x)}(\sin x - 5\cos x) \geq 1.$

7.73. $\sqrt{4\sin^2 x - 1}\cdot \log_{\sin x}\dfrac{x-5}{2x-1} \geq 0.$

7.74. $\sqrt{\arcsin x} + \sqrt{\arccos x} > \sqrt{\dfrac{7\pi}{12}}.$

* * *

7.75. Сколько различных корней имеет уравнение $\sqrt{6}x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = -2x$?

7.76. Сколько различных решений имеет неравенство
$\sqrt{6}(x^2+2) + 2\sqrt{5}x \leq \sqrt[4]{35}(x^2-2) + 2\sqrt{7}x$?

7.77. Найдите наименьший положительный корень уравнения
$\cos\left(\pi x^2\right) = \cos\left(\pi\left(x^2+2x+1\right)\right)$.

7.78. Найдите все корни уравнения $\sqrt{1-\sin 2x} - \sqrt{2}\cos 3x = 0$ на промежутке $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; -\pi\right]$.

7.79. Найдите все корни уравнения $\cos x + \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{2}} = 0$ на промежутке $[3\pi; 4\pi]$.

8. Системы

Решите системы

8.1. $\begin{cases} 4x + 7y = 5, \\ 2x + 3y = -6. \end{cases}$

8.2. $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ |x - y| = 2. \end{cases}$

8.3. $\begin{cases} |x - 1| + |y - 5| = 1, \\ y = 5 - |x - 1|. \end{cases}$

8.4. $\begin{cases} y + |x + 1| = 1, \\ |y - x| = 5. \end{cases}$

8.5. $\begin{cases} \dfrac{2}{2x - y} + \dfrac{3}{x - 2y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{2x - y} - \dfrac{1}{x - 2y} = \dfrac{1}{18}. \end{cases}$

8.6. $\begin{cases} 3x + 4\sin y = -11, \\ -2x + 5\sin y = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$

8.7. $\begin{cases} \sqrt{12}\operatorname{ctg} x + \sqrt{2}y = 4, \\ -\sqrt{27}\operatorname{ctg} x + \sqrt{8}y = 1. \end{cases}$

8.8. $\begin{cases} 6\cos x + 7\log_y 3 = -10, \\ -5\cos x + 2\log_y 3 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

8.9. $\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2, \\ 3 \cdot 2^{x+1} - 5y = 93. \end{cases}$

8.10. $\begin{cases} \dfrac{6}{2^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5 \cdot 2^{x+2} - \dfrac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$

8.11. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \dfrac{1}{9}, \\ y - 2x = 4. \end{cases}$

8.12. $\begin{cases} 2\log_x 8 + 3y = 24, \\ 2\log^3_x 0,5 + y = 8. \end{cases}$

8.13. $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$

8.14. $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 5 - 2\sqrt{6}. \end{cases}$

8.15. $\begin{cases} \dfrac{1}{x + y} + x = -1, \\ \dfrac{x}{x + y} = -2. \end{cases}$

8.16. $\begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 6^x \cdot 3^y = 12. \end{cases}$

8.17. $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4. \end{cases}$

8.18. $\begin{cases} \log_2(2x^2 - y^2) = 2, \\ 6\log_8(-x) + \log_2(y^2) = 4. \end{cases}$

8.19. $\begin{cases} 2 \cdot 5^{1-y} = \log_3 x^{-2}, \\ 5^y + \log_3 x = 4. \end{cases}$

8.20. $\begin{cases} \log_3 x - 2^y + y = 3, \\ y \cdot 2^y + 2^y \cdot \log_3 x = 4. \end{cases}$

8.21. $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$

8.22. $\begin{cases} 3x + y - z = 4, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ x^2 + 2y + z^2 = 6x. \end{cases}$

8.23. $\begin{cases} x + 2y = y^2 - x^2 + 3, \\ 2^{3x+y} = 512. \end{cases}$

8.24. $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + y = 13, \\ 2^{2x+1} + 3y = 35. \end{cases}$

8.25. $\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$

8.26. $\begin{cases} y^2 = 4^x + 8, \\ 2^{x+1} + y + 1 = 0. \end{cases}$

8.27. $\begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1, \\ 5x^6 + 8x^3\sqrt{y} + y = 1. \end{cases}$

8.28. $\begin{cases} 2^{y/x+3x/y} = 16, \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-1}. \end{cases}$

8.29. $\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y} = 30, \\ x^2 + y^2 = 325. \end{cases}$

8.30. $\begin{cases} 3^{\log_2(2x-y)} = 1, \\ 4^{x+y} - 2^{x+y} = 12. \end{cases}$

8.31. $\begin{cases} 3\log_5 x + \log_{\sqrt[3]{5}} y = 3, \\ \log_5(y - x - 2) + \log_{125}(y - x - 2)^3 = \log_5 12. \end{cases}$

8.32. $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$

8.33. $\begin{cases} x^3\sqrt{x - y} = 0, \\ 2y^2 + y = 21 + 2xy. \end{cases}$

8.34. $\begin{cases} \sqrt{x + y - 1} = 1, \\ \sqrt{x - y + 2} = 2y + 2. \end{cases}$

8.35. $\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64, \\ y < x. \end{cases}$

8.36. $\begin{cases} y^x = 3y, \\ 2\log_3 y + \log_y 3 = 3x. \end{cases}$

8.37. $\begin{cases} \sqrt{\sin x}\cos^2 y = 0, \\ 2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$

8.38. $\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y, \\ \cos 2x = 0. \end{cases}$

8.39. $\begin{cases} 2\sin 3x + 2\cos 4x = 1 + \sqrt{2}, \\ 2\sin 7x - 2\sin x = \sqrt{2}, \\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

8.40. $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y = \dfrac{\sqrt{6}}{4}, \\ \cos x \ge 0. \end{cases}$

8.41. $\begin{cases} \sin x \cos y = -\dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1. \end{cases}$

8.42. $\begin{cases} \sin^2(-2x) - (3-\sqrt{2})\operatorname{tg} 5y = \dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 5y + (3-\sqrt{2})\sin(-2x) = \dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}. \end{cases}$

8.43. $\begin{cases} 3\sin x + \cos y = 0, \\ 6\cos x - 2\sin y = 7. \end{cases}$

8.44. $\begin{cases} y - x = 5, \\ xz = (z-4)y + 30, \\ 2xz = (2z-4)y. \end{cases}$

8.45. $\begin{cases} x + 3^y = 2, \\ x^3 + 27^y = 26. \end{cases}$

8.46. $\begin{cases} \dfrac{xy}{2} + \dfrac{5}{2x+y-xy} = 5, \\ 2x + y + \dfrac{10}{xy} = 4 + xy. \end{cases}$

8.47. $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3, \\ 4,5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7. \end{cases}$

8.48. $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 9x - 4y + 6 = 0, \\ 5x^2 + 2xy - 12x - 4y + 4 = 0. \end{cases}$

8.49. $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2. \end{cases}$

8.50. $\begin{cases} 2x^4 + y^2 = 10, \\ x^2 + 2y^4 = 10. \end{cases}$

8.51. $\begin{cases} \sqrt{x}(x+3y) = 36, \\ \sqrt{y}(3x+y) = 28. \end{cases}$

8.52. $\begin{cases} 4^x + 5\cdot 2^x - 2\cdot 3^y = 2, \\ 2\cdot 9^y + 2^x + 2\cdot 3^y = 1. \end{cases}$

8.53. $\begin{cases} (1/4)^{-3x/2} + \log^3_3 y = 504, \\ 4^x - 2^{x-1}\log_{\sqrt{3}} y + \log^2_3 y = 84. \end{cases}$

8.54. $\begin{cases} \left(1 + 2\log_{|xy|} 2\right)\log_{x+y}|xy| = 1, \\ x - y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

8.55. $\begin{cases} x + \log_2 y = y\log_2 3 + \log_2 x, \\ x\log_2 72 + \log_2 x = 2y + \log_2 y. \end{cases}$

8.56. $\begin{cases} \log_2(10-3y) + \log_{1/2}(2y-5x) = 0, \\ \sqrt{x+2y+1} - \sqrt{11-3y} = \sqrt{2x+4y-12}. \end{cases}$

8.57. $\begin{cases} xy + 3y^2 - x + 4y - 7 = 0, \\ 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$

8.58. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 1, \\ \dfrac{xz}{x+z} = 2, \\ \dfrac{yz}{y+z} = 3. \end{cases}$

8.59. $\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$

8.60. $\begin{cases} y + 2 = (3-x)^3, \\ (2z-y)(y+2) = 9 + 4y, \\ x^2 + z^2 = 4x, \\ z \ge 0. \end{cases}$

ГЛАВА II. ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

9. Планиметрические задачи

9.1. Найдите площадь правильного треугольника, сторона которого равна стороне ромба с диагоналями 10 и 12.

9.2. Найдите периметр правильного треугольника, если центр описанной около него окружности удален от хорды, равной 2, на расстояние 3.

9.3. В треугольнике ABC основание D высоты $CD = \sqrt{3}$ лежит на стороне AB. Найдите AC, если $AB = 3$, $AD = BC$.

9.4. Найдите площадь прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен 13, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 12.

9.5. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведены медиана CM и высота CH, причем точка H лежит между A и M. Найдите отношение $AH : AM$, если $CM : CH = 5 : 4$.

9.6. Один из углов треугольника равен разности двух других, наименьшая сторона треугольника равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, вдвое больше площади описанного около треугольника круга. Найдите наибольшую сторону треугольника.

9.7. Окружность радиуса $\sqrt{3}$, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с углом $\angle A = 30^\circ$, касается катета AC в точке K. Найдите BK.

9.8. Окружность радиуса 3, центр O которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника, касается катетов. Найдите площадь треугольника, если $OA = 5$.

9.9. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, касается катетов AC и BC в точках E и D соответственно. Найдите $\angle B$, если $AE = 1$, $BD = 3$.

9.10. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD прямого угла. Из точки D опущен перпендикуляр $DM = \sqrt{3}$ на сторону AC. Найдите BC, если $AD = 2\sqrt{3}$.

9.11. На стороне AB треугольника ABC с углами $\angle A = 30^\circ$ и $\angle B = 130^\circ$ как на диаметре построен круг. Найдите площадь части этого круга, лежащей внутри треугольника.

9.12. Две равные хорды окружности образуют вписанный угол величиной 30°. Найдите отношение площади части круга, лежащей внутри угла, к площади всего круга.

9.13. Точка пересечения двух общих касательных к двум непересекающимся окружностям, меньшая из которых имеет радиус r, лежит на линии их центров на расстоянии $6r$ от центра большей окружности и делит отрезок касательной между точками касания в отношении $1:3$. Найдите площадь фигуры, состоящей из двух частей, ограниченных касательными и большими дугами окружностей.

9.14. Найдите площадь выпуклого четырехугольника с диагоналями 3 и 4, если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, равны.

9.15. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Найдите $AM:CM$, если площадь треугольника MCN вдвое больше площади трапеции $AMNB$.

9.16. Прямая, параллельная стороне $AB = 5$ треугольника ABC и проходящая через центр вписанной в него окружности, пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно. Найдите периметр четырехугольника $ABMN$, если $MN = 3$.

9.17. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки M и N соответственно так, что $AM : MB = 3 : 2$ и $AN : NC = 4 : 5$. В каком отношении прямая, проходящая через точку M параллельно BC, делит отрезок BN?

9.18. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках E и F, причем $EF = 8$. Найдите основания трапеции, если их отношение равно 4.

9.19. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом α и радиусом описанной окружности R.

9.20. Найдите отношение высот треугольника ABC, опущенных из вершин A и B соответственно, если $\cos\angle A = \frac{1}{5}$, $\sin\angle B = \frac{1}{2}$.

9.21. Найдите углы треугольника со сторонами 10, 24 и 26.

9.22. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и B прямые, $AB = BC = 3$ и $BD = 5$. На сторонах AD и CD взяты такие точки E и F соответственно, что $AE = 1$ и $CF = 2$. Найдите площадь пятиугольника $ABCEF$.

9.23. Одно из оснований равнобедренной трапеции равно 4. Найдите расстояние между точками касания с ее боковыми сторонами вписанной в трапецию окружности радиуса 4.

9.24. В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $AD = 5$ биссектриса угла A пересекает биссектрисы углов B и D в точках K и L соответственно, а биссектриса угла C пересекает те же биссектрисы в точках N и M соответственно. Найдите отношение площади четырехугольника $KLMN$ к площади параллелограмма $ABCD$.

9.25. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит биссектрису прямого угла в отношении $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, считая от вершины.

9.26. Найдите высоту, биссектрису и медиану, проведенные из вершины одного угла треугольника, если они делят этот угол на четыре равные части, а радиус описанной около треугольника окружности равен R.

9.27. Найдите площадь треугольника со стороной a, противолежащим углом α и противолежащим углом β.

9.28. Найдите биссектрису прямого угла треугольника с гипотенузой c и острым углом α.

9.29. В окружность радиусом R вписан равнобедренный треугольник с острым углом α при основании. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

9.30. В окружность диаметром 25 вписан равнобедренный треугольник с боковой стороной 20. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

9.31. Около треугольника ABC описана окружность с диаметром $AD = 2$. Найдите BC, если $AB = 1$ и $\angle BAD : \angle CAD = 4 : 3$.

9.32. Окружность радиуса 5 с центром O, лежащим на стороне AB треугольника ABC, касается сторон AC и BC. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AO = 13$ и $BO = 7$.

9.33. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята такая точка D, что $CD = 2$ и биссектриса CL перпендикулярна прямой DL. Найдите AL.

9.34. Две окружности радиусов 2 и 8 касаются друг друга внешним образом в точке A. Общая касательная к ним, проведенная через точку A, пересекает другую общую касательную в точке B. Найдите AB.

9.35. Окружности радиусов 2 и 3 касаются друг друга внешним образом в точке A. Общая касательная к ним в точке A пересекает в точке B другую общую касательную, касающуюся в точке C меньшей окружности с центром O. Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник $OABC$.

9.36. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. Найдите KL, если $AM = 2, MC = 3$ и $\angle C = \dfrac{\pi}{3}$.

9.37. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон $AB = 4$ и $AC = 3$ в точках M и N соответственно. Найдите площадь треугольника AMN, если $BC = 2$.

9.38. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK, если $AC = a, \angle ABC = \alpha$, а периметр треугольника ABC равен $2p$.

9.39. Прямая, касающаяся окружности в точке K, параллельна хорде $AB = 6$. Найдите радиус окружности, если $AK = 5$.

9.40. Диагонали вписанной в окружность трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее периметр равен 18, а основания относятся как 1 : 7.

9.41. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = a$ и $AD = b$ вписана в окружность. Найдите радиус окружности, если $\angle CAD = \alpha$.

9.42. Окружность, проходящая через вершины C и D параллелограмма $ABCD$, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. Найдите AE, если $AD = 4$ и $CE = 5$.

9.43. Через точку K диаметра AB окружности проведена хорда MN. Найдите AB, если $\angle ABM = 30°$, $\angle BMK = 15°$ и $MK = 3$.

9.44. Медианы BM и CN треугольника ABC взаимно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABM, если $BC = a$ и $AC = b$.

9.45. Медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке K. Найдите расстояние от точки K до прямой BC, если $BC = a$, $\angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$.

9.46. В треугольнике ABC проведены высота BH и медиана BM. Найдите угол $\angle MBH$, если $AB = 1$, $BC = 2$ и $AM = BM$.

9.47. Найдите углы треугольника ABC, если его медиана BM равна половине стороны AC, а один из углов, образованных биссектрисой BL и стороной AC, равен $55°$.

9.48. В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и на боковую сторону, равны m и n соответственно. Найдите стороны треугольника.

9.49. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CK. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $HK = 2\sqrt{2}$, а площади треугольников ABC и BHK равны 18 и 2 соответственно.

9.50. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CK. Найдите площадь круга, описанного около треугольника KBH, если $AC = 1$ и $\angle KCH = \alpha$.

9.51. Отрезок, соединяющий основания высот, проведенных к сторонам AB и AC остроугольного треугольника ABC с углом $\angle A = \alpha$, равен l. Найдите BC.

9.52. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AL. Найдите AL, если $BL = b$ и $CL = c$.

9.53. В равнобедренной трапеции с боковой стороной 5 основание высоты, проведенной из вершины верхнего основания, делит нижнее основание на отрезки 12 и 3. Найдите верхнее основание трапеции, ее площадь, высоту и диагональ.

9.54. Найдите площадь треугольника со сторонами a, b и c, его высоту, медиану и биссектрису, проведенные к стороне c, а также радиусы вписанной и описанной окружностей.

9.55. В треугольник со сторонами a, b и c вписана окружность. Найдите расстояние от противолежащей стороне c вершины треугольника до ближайшей точки касания.

9.56. Зная медианы треугольника, найдите его площадь.

9.57. Зная высоты треугольника, найдите его площадь.

9.58. Стороны треугольника равны a, b, c. В каком отношении центр вписанной окружности делит биссектрису, проведенную к стороне a?

9.59. Углы треугольника равны α, β, γ. В каком отношении точка пересечения высот делит высоту, проведенную из вершины угла α?

9.60. Даны две непараллельные стороны a и b параллелограмма. Найдите его диагональ d_1 по известной другой диагонали d_2.

9.61. Какова площадь треугольника со сторонами: а) 5, 9, 12; б) 2, 3, 6; в) $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{13}$?

9.62. Найдите углы треугольника площадью 3, если две его стороны равны 3 и 4.

9.63. В треугольнике ABC со стороной $AB = 5$ и высотой $BD = 3$ найдите $\angle BAC$.

9.64. Две стороны треугольника равны 1 и 2, а синус угла между ними равен $\frac{1}{2}$. Найдите третью сторону и два других угла треугольника.

9.65. Существует ли треугольник с углами $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{7}, \arcsin\frac{\pi}{4}$?

9.66. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите $\angle OHI$, если $\angle ABC = 40°$.

9.67. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите $\angle OIH$, если $\angle ABC = 40°$.

9.68. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что $EH \parallel AC$.

б) Найдите отношение $EH : AC$, если $\angle ABC = 60°$.

9.69. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что $CD \perp CE$.

а) Докажите, что $BH \parallel ED$.

б) Найдите отношение $BH : ED$, если $\angle BCD = 135°$.

9.70. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K.

а) Докажите, что $CK \cdot CE = AB \cdot CD$.

б) Найдите отношение $CK : KE$, если $\angle ECD = 15°$.

9.71. Окружность касается стороны AC остроугольного треугольника ABC и делит каждую из сторон AB и BC на три равные части.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) В каком отношении его высота делит сторону BC?

9.72. В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N — середины катетов AC и BC соответственно, а CH — высота.

а) Докажите, что $MH \perp NH$.

б) Найдите площадь треугольника PQM, где P — точка пересечения прямых AC и NH, а Q — точка пересечения прямых BC и MH, если $AH = 4$ и $BH = 2$.

9.73. В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N — середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L.

а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.

б) Найдите отношение их площадей, если $\cos\angle BAC = 7 / 25$.

10. Стереометрические задачи

10.1. В правильную шестиугольную пирамиду с высотой H вписан один конус, а около нее описан другой конус с радиусом основания R. Найдите разность объемов этих конусов.

10.2. Конус вписан в правильную четырехугольную пирамиду. Их общая высота равна $9/4$, а радиус вписанной в конус сферы равен 1. Найдите разность объемов пирамиды и конуса.

10.3. Через вершину S конуса проходит плоское сечение SAB площадью 42. Точки A и B делят длину окружности основания конуса в отношении $1:5$. Найдите объем конуса, если $\angle SAB = \arccos\frac{3}{\sqrt{58}}$.

10.4. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна d и образует с двумя смежными гранями углы α и β соответственно.

10.5. Найдите сторону основания правильной треугольной призмы объемом V, если угол между диагоналями двух ее боковых граней, проведенными из одной вершины, равен α.

10.6. Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды объемом 36, если ее высота вдвое больше радиуса окружности, описанной около основания.

10.7. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a, и углом φ между боковыми ребрами.

10.8. Найдите двугранный угол при ребре основания правильной треугольной пирамиды, если угол между ее боковыми ребрами равен φ.

10.9. В правильной пирамиде $SABC$ с ребрами $AB = 1$ и $AS = 2$ проведены биссектриса AL боковой грани SAB и медиана BM основания ABC. Найдите LM.

10.10. На высоте правильной треугольной пирамиды взята точка, удаленная от бокового ребра пирамиды на расстояние $4/\sqrt{13}$ и делящая высоту в отношении $1:2$, считая от вершины. Найдите объем пирамиды, если ее боковые грани наклонены к основанию под углом $\pi/6$.

10.11. Найдите высоту пирамиды, основанием которой служит треугольник со сторонами 7, 8 и 9, если ее боковые ребра наклонены к основанию под углом $60°$.

10.12. Найдите объем пирамиды, если ее основанием служит прямоугольный треугольник с гипотенузой 3 и углом $30°$, а боковые ребра наклонены к основанию под углом $60°$.

10.13. Основанием пирамиды $SABC$ с высотой SH служит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, а двугранные углы при ребрах основания равны по $\arcsin\frac{5}{13}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $AH = 1$ и $BH = 3\sqrt{2}$.

10.14. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды объемом $9\sqrt{3}$ и высотой 3.

10.15. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если радиус описанной около нее сферы равен 2, а боковое ребро в $\sqrt{2}$ раз больше ребра основания.

10.16. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше ее высоты. Найдите отношение радиуса вписанной в пирамиду сферы к апофеме пирамиды.

10.17. В правильной пирамиде $SABC$ с высотой SH и ребром основания $AB = a$ угол между боковым ребром и плоскостью основания равен φ. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно ребрам SA и BC.

10.18. Плоскость, параллельная боковому ребру $AS = a\sqrt{2}$ и ребру $BC = a$ основания ABC правильной пирамиды $SABC$, проходит на расстоянии d от ребра AS. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

10.19. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с высотой H и двугранным углом α при боковом ребре.

10.20. В правильной пирамиде $SABCD$ с вершиной S боковое ребро равно a, а двугранный угол при этом ребре равен φ. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки B, D и середину ребра SC.

10.21. Все ребра правильной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны по 2. Плоскость, параллельная прямым AC и SB, пересекает ребра AB и BC в точках M и N. Найдите периметр сечения пирамиды этой плоскостью, если $MN = \sqrt{2}$.

10.22. В правильной пирамиде $SABCD$ с высотой 4 сторона основания $SABC$ равна 6. Точки M и N — середины ребер BC и CD. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду $SMNC$.

10.23. На воздушном шаре, двигавшемся относительно Земли вдоль заданной параллели на постоянной высоте, было совершено кругосветное путешествие. На какой широте совершалось путешествие, если разность расстояний, пройденных верхней и нижней точками шара, оказалась равной удвоенному диаметру шара?

10.24. Какими должны быть радиусы четырех одинаковых шаров, чтобы их можно было разместить внутри данной сферы радиуса R и при этом каждый шар касался сферы и трех других шаров?

10.25. Два шара радиуса r касаются друг друга и боковой поверхности конуса, а также его основания — в точках, симметричных относительно центра. Найдите объем конуса, если его высота в $4/3$ раза больше радиуса основания.

10.26. Площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через вершину ее основания перпендикулярно противоположному ребру, вдвое меньше площади основания пирамиды. Найдите отношение высоты пирамиды к боковому ребру.

10.27. Три параллельные прямые касаются в точках A, B и C сферы с центром O и радиусом 4. Найдите $\angle ABC$, если площадь треугольника AOC равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.

10.28. Вне правильного тетраэдра $ABCD$ взята такая точка M, что $MA = MB = MC = \sqrt{97}$ и $MD = \sqrt{2}$. Найдите объем тетраэдра.

10.29. Стороны $AB = 6$ и CD основания $ABCD$ пирамиды $SABCD$ параллельны, $AD = 4$, $AS = 2\sqrt{14}$ и $\angle BAD = 120°$. Найдите объем пирамиды, если через каждую из прямых AB и CD можно провести по плоскости, которые не содержат основание пирамиды и пересекают ее по равным четырехугольникам.

10.30. Основанием прямой призмы служит ромб $ABCD$ с углом $\angle A = 120°$. На боковых ребрах AA', BB' и CC' взяты такие точки K, L и M соответственно, что угол между прямыми KL и AB равен $45°$, а между прямыми LM и BC — $30°$. Найдите угол между плоскостями KLM и ABC.

10.31. Площадь сечения правильной треугольной пирамиды, проходящего через ее боковое ребро, равное $\sqrt{13}$, и высоту, вдвое больше площади ее основания. Найдите площадь ее боковой грани.

10.32. На ребре AS правильной пирамиды $SABC$ объемом V взята такая точка D, что $SD : DA = m : n$. Расстояние от центра основания ABC до плоскости BCD равно d. Найдите площадь треугольника BCD.

10.33. На боковых ребрах AA' и BB' треугольной призмы $ABCA'B'C'$ объемом V взяты такие точки D и E соответственно, что $AD = DA'$ и $BE : BE' = 1 : 2$. Найдите объем призмы, заключенной между плоскостями ABC и DEC.

10.34. Найдите площадь поверхности параллелепипеда объемом 8, вписанного в сферу радиуса $\sqrt{3}$.

10.35. На каком расстоянии от ребра SA правильной пирамиды $SABC$ с вершиной S должна проходить плоскость, параллельная ребрам $BC = a$ и $AS = b$, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была максимальной?

10.36. Основанием пирамиды $SABCD$ служит квадрат $ABCD$ со стороной 15, а радиус вписанного в пирамиду шара равен 3. Найдите высоту пирамиды, если она совпадает с ребром SA.

10.37. Хорды AA', $BB' = 18$ и CC' сферы радиуса 11 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M, находящейся на расстоянии $\sqrt{59}$ от центра сферы. Найдите AA', если $CM : MC' = (8 + \sqrt{2}) : (8 - \sqrt{2})$.

10.38. На ребрах AB, BC и CD правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром 1 взяты такие точки K, L и M соответственно, что $AK = 1/2$ и $BL = CM = 1/3$. Плоскость KLM пересекает прямую AD в точке N. Найдите угол между прямыми NK и NL.

10.39. Точка M равноудалена от вершин A и D правильного тетраэдра $ABCD$, а от каждой из вершин B и C находится на расстоянии $\sqrt{3/2}$. Прямая MC перпендикулярна высоте DH треугольника ACD. Найдите объем тетраэдра.

10.40. В правильную пирамиду $SABCD$ вписана сфера радиуса 2. Этой сферы, граней BSC, CSD и основания $ABCD$ пирамиды касается другая сфера радиуса 1. Найдите объем пирамиды и двугранный угол при боковом ребре.

10.41. Найдите ребро основания правильной призмы $ABCA'B'C'$ с боковым ребром $AA' = 2$, если угол между скрещивающимися прямыми AC' и $A'B$ равен $\alpha < 60°$.

10.42. На ребре BD тетраэдра $ABCD$ взята такая точка E, что $DE : BE = 3 : 5$. Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через точки A и D параллельно медиане BM треугольника ABC, делит объем тетраэдра.

10.43. На ребрах AD и BD тетраэдра $ABCD$ взяты такие точки E и F соответственно, что $DE : AE = SF : BF = 1 : 2$. Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через точки E и F параллельно ребру CB, делит объем тетраэдра.

10.44. Двугранный угол при ребре AB тетраэдра $ABCD$ равен $\pi/4$. Найдите $\angle DAC$, если $\angle DAB = \pi/2$ и $\angle BAC = 3\pi/4$.

10.45. Двугранный угол при ребре AC тетраэдра $ABCD$ равен $\pi/4$. Найдите BD, если $AB = 2$, $AD = \sqrt{2}$, $\angle BAC = \pi/6$ и $\angle CAD = \pi/2$.

10.46. Найдите радиус сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, если $AB = BC = 2, AC = 1$, а ребро $CD = 4$ перпендикулярно ребрам AB и AC.

10.47. Найдите радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра, две вершины которого лежат на диагонали куба с ребром 2, а две другие вершины – на диагонали грани этого куба.

10.48. Пусть $ABCD$ — прямоугольник, а точка E не лежит в его плоскости. Найдите угол между двумя прямыми, по которым пересекаются две пары плоскостей ABE, CDE и BCE, ADE.

10.49. Дан тетраэдр $ABCD$ с углом $\angle ABC = \beta \le 90°$. Найдите угол между двумя прямыми, проходящими через две пары точек: середины ребер AC, BC и середины ребер BD, CD.

10.50. Точка A находится на расстоянии a от данной плоскости и на расстоянии b от прямой L, лежащей в этой плоскости. Найдите расстояние от проекции точки A на плоскость до прямой L.

10.51. Найдите угол между боковым ребром a правильной треугольной пирамиды и плоскостью ее основания со стороной b.

10.52. В одной из граней двугранного угла величины α взята точка A на расстоянии d от ребра двугранного угла. Найдите расстояние от точки A до плоскости второй грани.

10.53. Пусть A' — проекция точки A на данную плоскость, $AA' = a$. Через точку A проходит другая плоскость, образующая с данной плоскостью угол α и пересекающая ее по прямой L. Найдите расстояние от точки A' до прямой L.

10.54. В пирамиде $SABC$ с углом $\angle ABC = \alpha$ точка B — проекция точки S на плоскость ABC. Найдите величину угла между гранями SAB и SBC.

10.55. На ребре $BC = 4$ куба $ABCDA'B'C'D'$ взята середина M, а на ребре $A'D'$ — такая точка N, что $A'N = 1$. Найдите длину кратчайшего пути из точки M в точку N по поверхности куба.

10.56. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L — середины ребер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

10.57. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{3}$. На ребрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причем $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

10.58. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро SA равно $\sqrt{5}$, а высота SH пирамиды равна $\sqrt{3}$. Точки M и N — середины ребер CD и AB соответственно, NT — высота пирамиды с вершиной N и основанием SCD.

а) Докажите, что точка T — середина отрезка SM.

б) Найдите расстояние между прямыми NT и SC.

10.59. Плоскость пересекает боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L и M соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды, если $\frac{SK}{KA} = \frac{SL}{LB} = 2$, а медиана SN треугольника SBC делится этой плоскостью пополам?

10.60. На ребрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.

10.61. В треугольной пирамиде $ABCD$ двугранные углы при ребрах AD и BC равны, причем $AB = BD = DC = AC = 5$.

а) Докажите, что $AD = BC$.

б) Найдите объем пирамиды, если двугранные углы при AD и BC равны $60°$.

10.62. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 4$, $BC = 3$ и $AA_1 = 2$ точки P и Q — середины ребер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро B_1C_1 в точке T.

а) Докажите, что $B_1T : TC = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью APQ.

10.63. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с боковым ребром $AA_1 = 4\sqrt{2}$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 4$ и $BC = 16$. Точка Q — середина ребра A_1B_1, а точка P делит ребро B_1C_1 в отношении $1:2$, считая от вершины C_1. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M — середина ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости APQ.

10.64. Найдите объем куба $ABCDA'B'C'D'$, если сфера радиуса $\sqrt{41}$ проходит через точки A, B, C и середину ребра $A'D'$.

10.65. Расстояния от концов отрезка до некоторой плоскости равны 1 и 3. Чему может быть равно расстояние от середины этого отрезка до той же плоскости?

10.66. Боковые грани пирамиды $SABC$ одинаково наклонены к основанию ABC, $AC = 3$, $BC = 4$, $SC = \sqrt{38}$ и $\angle ACB = 90°$. В пирамиду вписан цилиндр площадью боковой поверхности $8\pi/3$: нижнее его основание лежит в плоскости ABC, а верхнее имеет по одной общей точке с каждой боковой гранью. Каким может быть радиус основания этого цилиндра?

10.67. Чему может быть равна сумма углов, образуемых произвольной прямой с данной плоскостью и с перпендикуляром к ней?

10.68. Какие значения может принимать величина угла, получаемого в сечении произвольной плоскостью фиксированного двугранного угла величины α?

11. Задачи на доказательство

11.1. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

а) треугольник — правильный;

б) все медианы треугольника равны;

в) все высоты треугольника равны;

г) все биссектрисы треугольника равны.

11.2. Докажите, что из медиан любого треугольника можно сложить треугольник. Верно ли аналогичное утверждение для высот треугольника?

11.3. Докажите, что угол между секущими, выходящими из точки вне круга, измеряется полуразностью двух дуг окружности, расположенных внутри угла.

11.4. Докажите, что вертикальные углы между пересекающимися хордами измеряются полусуммой двух дуг окружности, на которые они опираются.

11.5. Докажите, что угол между касательной к окружности и хордой, выходящей из точки касания, измеряется половиной дуги, заключенной между ними.

11.6. Хорды AB и CD окружности с центром в точке O радиуса R пересекаются в точке E. Докажите, что $AE \cdot BE = CE \cdot DE = R^2 - OE^2$.

11.7. Через точку A, лежащую вне окружности с центром в точке O радиуса R, проведены секущая и касательная. Секущая пересекает окружность в точках B и C, а касательная касается окружности в точке D. Докажите, что $AD^2 = AB \cdot AC = AO^2 - R^2$.

11.8. Пусть AD — биссектриса внутреннего или внешнего (в этом случае точка D лежит на продолжении BC) угла треугольника ABC. Докажите, что $BD : CD = AB : AC$.

11.9. Докажите, что в выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = AD + BC$.

11.10. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

11.11. Докажите, что если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то плоскость, проходящая через середины отрезков AD, BD, CD, параллельна:

а) прямой AB;

б) плоскости ABC.

11.12. Докажите, что в пространстве для любых четырех различных точек A, B, C, D середины K, L, M, N отрезков AB, BC, CD, DA соответственно служат вершинами параллелограмма $KLMN$.

11.13. Докажите, что если три прямые в пространстве не проходят через одну точку и попарно пересекаются, то они лежат в одной плоскости.

11.14. Три прямые проходят через точку A. Точки B, B' — точки одной прямой, C, C' — точки другой прямой, D, D' — точки третьей прямой. Докажите, что отношение объемов пирамид $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равно $(AB \cdot AC \cdot AD):(AB' \cdot AC' \cdot AD')$.

11.15. Докажите, что отношение площади многоугольника, расположенного в одной плоскости, к площади его проекции на другую плоскость равно $1:\cos\varphi$, где φ — угол между плоскостями.

11.16. Докажите, что если S и P — площади двух граней тетраэдра, a — их общее ребро, а α — двугранный угол между ними, то объем этого тетраэдра равен $\dfrac{2SP\sin\alpha}{3a}$.

11.17. Докажите, что если a и b — противоположные ребра тетраэдра, d — расстояние между ними, а α — угол между ними, то объем этого тетраэдра равен $\dfrac{abd\sin\alpha}{6}$.

11.18. Докажите, что плоскость, делящая пополам двугранный угол при ребре тетраэдра, делит противоположное ребро на части, пропорциональные площадям граней, заключающих этот угол.

* * *

11.19. Найдите геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух разных точек этой плоскости.

11.20. Найдите геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух разных прямых этой плоскости.

11.21. Найдите геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от трех попарно пересекающихся прямых этой плоскости.

11.22. Даны две разные точки A и B плоскости и число $\alpha \in [0; \pi]$. Найдите геометрическое место точек $M \neq A, B$ плоскости, для которых $\angle AMB = \alpha$.

11.23. Пусть A — фиксированная точка, не лежащая в данной плоскости, а M — произвольная точка этой плоскости. Найдите геометрическое место середин отрезков AM.

11.24. Найдите геометрическое место середин отрезков, концы которых лежат в двух параллельных плоскостях.

11.25. Даны две разные точки A и B пространства. Найдите геометрическое место точек $M \neq A, B$ пространства, для которых $\angle AMB = 90°$.

ГЛАВА III. НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

12. Подготовительные упражнения

Для каждого значения a решите уравнение или неравенство (относительно x).

12.1. $a \cdot x = 1$.

12.2. $a \cdot x < 1$.

12.3. $(a^2 - 1)x = a - 1$.

12.4. $\dfrac{x-a}{x-1} = 0$.

12.5. $\dfrac{x^2-1}{x-a} = 0$.

12.6. $\dfrac{x-1}{x^2-a^2} = 0$.

12.7. $\dfrac{a(x-1)}{x-a} = 0$.

12.8. $x^2 = a$.

12.9. $x^2 > a$.

12.10. $x^2 < a$.

12.11. $|x| = a$.

12.12. $|a| = x$.

12.13. $|x| < a$.

12.14. $|x| > a$.

12.15. $\sqrt{x} = a$.

12.16. $a\sqrt{x} = 0$.

12.17. $\sqrt{x} > a$.

12.18. $\sqrt{x} < a$.

12.19. $2^x < a$.

12.20. $2^x > a$.

12.21. $\sqrt{a}^{\,x} = 1$.

12.22. $\log_a x < 1$.

12.23. $\log_x a \le 0$.

12.24. $\cos x = a$.

12.25. $\sin x = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$.

* * *

12.26. Докажите, что если p — простое число, большее 3, то число $p^2 - 1$ делится нацело на 24.

12.27. Докажите, что если p и q — простые числа, большие 3, то число $p^2 - q^2$ делится нацело на 24.

12.28. Докажите, что число $2^{10} + 5^{12}$ — составное.

12.29. Докажите, что число $222^{333} + 333^{222}$ — составное.

12.30. Докажите, что число $2010^{2010}-1$ делится на 2009.

12.31. Докажите, что если сумма цифр десятичной записи числа n равна сумме цифр десятичной записи числа $2n$, то число n делится на 9. Верно ли обратное утверждение?

12.32. Найдите все числа вида $\overline{34x5y}$, кратные 36.

12.33. Докажите, что для любого натурального n число n^2+n четное.

12.34. Докажите, что для любого целого n число n^3+2n делится на 3.

12.35. Докажите, что для любого целого n число n^3+5n делится на 6.

12.36. Докажите, что для любого целого n число n^5-n делится на 30.

12.37. Докажите, что в последовательности 11, 111, 1111, 11111, ... нет числа, являющегося квадратом натурального.

12.38. Докажите, что все числа вида 16, 1156, 111556, 11115556, ... являются полными квадратами.

12.39. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 54 и 72.

12.40. Докажите, что при любом натуральном значении n числа $3n+5$ и $5n+8$ взаимно просты.

12.41. Докажите, что для любого натурального n наибольший общий делитель чисел $n^2+10n+21$ и $n^2+9n+18$ равен $n+3$.

12.42. Докажите, что для любого натурального n наименьшее общее кратное чисел n^2+6n+9 и $n+4$ равно $n^3+10n^2+33n+36$.

12.43. Докажите, что ни при каком целом n число $n^2+5n+16$ не делится на 169.

12.44. Запишите число 0,11(7) в виде обыкновенной дроби.

12.45. Докажите, что числа $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ — иррациональные.

12.46. Докажите, что числа $\log_2 3$ и $\log_4 6$ — иррациональные.

12.47. Решите уравнение $3x-4y=1$ в целых числах.

12.48. Докажите, что уравнение $x^2+1=3y$ не имеет решений в целых числах.

12.49. Решите уравнение $xy+x+y=0$ в целых числах.

12.50. Докажите, что если хотя бы одно из рациональных чисел p и q отлично от -2, то ни один из корней уравнения $x^2+px+q=0$ не равен $1+\sqrt{3}$.

13. Задачи с параметрами

13.1. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x + ay = 1, \\ ax + y = 2a \end{cases}$ имеет решения.

13.2. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (a+1)x - y = a + 1, \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$ имеет решения.

13.3. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} ax + y = 1, \\ 4x - 2y = a \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

13.4. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} ax + y = a^2, \\ x + ay = 1 \end{cases}$ не имеет решений.

13.5. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} ax + y = a^3, \\ x + ay = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

13.6. Для каждого значения a решите систему $\begin{cases} (a-4)x + 2y = 4, \\ (a-4)^3 x + 4ay = 16. \end{cases}$

13.7. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ имеет решения и всякое решение удовлетворяет неравенству $x > y$.

13.8. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$\begin{cases} 3x - y = a, \\ 6x - ay = 4, \\ x > 0 > y \end{cases}$ имеет решение.

13.9. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4 - y}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

13.10. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x + 3}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

13.11. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{x^4 - 4x^2 + a^2} = x^2 + 2x - a$ имеет ровно три различных решения.

13.12. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$\begin{cases} x\left(x^2 + y^2 - 2y - 8\right) = |x|(2y - 8), \\ y = x + a \end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

13.13. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a - 2\cos x = x^2$ имеет ровно один корень.

13.14. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$\begin{cases} (x - a)(ax - 2a - 3) \geq 0, \\ ax \geq 4 \end{cases}$ не имеет решений.

13.15. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$\begin{cases} \dfrac{a^2x + 2a}{ax + a^2 - 2} \geq 0, \\ ax + a > \dfrac{5}{4} \end{cases}$ не имеет решений.

13.16. Найдите все значения a и b, при которых система

$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ имеет только одно решение.

13.17. Найдите все значения a, при каждом из которых из неравенств $0 \leq x \leq 1$ следует неравенство $\left(a^2 + a - 2\right)x^2 - (a + 5)x - 2 \leq 0$.

13.18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ имеет ровно два различных корня.

13.19. Найдите наименьшее целое значение a, при котором уравнение $x^2 - 2(a + 2)x + 12 + a^2 = 0$ имеет ровно два различных корня.

13.20. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(a - 2)x^2 + 2(a - 2)x + 2 = 0$ не имеет корней.

13.21. Найдите все целые значения a, при каждом из которых уравнение $(a - 2)x^2 + 2(a - 2)x + 2 = 0$ не имеет корней.

13.22. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax^2 + 2(a + 1)x + (a + 3) = 0$ имеет два корня, расстояние между которыми больше 1.

13.23. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ имеет два корня, сумма которых равна нулю.

13.24. Найдите все значения a, при каждом из которых один корень уравнения $x^2 + (2a-1)x + a^2 + 2 = 0$ вдвое больше другого.

13.25. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма квадратов чисел, составляющих решение системы $\begin{cases} 3x - y = 2 - a, \\ x + 2y = a + 1, \end{cases}$ будет наименьшей.

13.26. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма квадратов корней квадратного трехчлена $f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8$ принимает наименьшее значение.

13.27. Для каждого значения a решите уравнение
$4^x - 2a(a+1)2^{x-1} + a^3 = 0$.

13.28. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$ не имеет корней.

13.29. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\log_{a-6,5}(x^2+1) = \log_{a-6,5}((a-5)x)$ имеет ровно два различных корня.

13.30. Для каждого значения a решите уравнение $\log_{\sqrt{2-x}} \sqrt{2x+a} = 2$.

13.31. Для каждого значения a решите неравенство $3(2x-a) + 5a\sqrt{2x-a} - 2a^2 > 0$.

13.32. Найдите все значения a, при каждом из которых область значений функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 2ax - 4}{x^2 - 2x + 3}$ содержится в интервале $(-3; 2)$.

13.33. Известно, что $x = 1, y = -1$ — одно из решений системы $\begin{cases} 3ax + by = \sqrt{3}g\dfrac{1111\pi}{6}, \\ ax^2 + by^2 = 2. \end{cases}$

Найдите остальные решения системы.

13.34. Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства $\dfrac{a + 2 - 2^{x-2}}{a+3} \geq \dfrac{5a+5}{2(2^x + 3a + 3)}$ содержит какой-нибудь луч на числовой прямой.

13.35. Для каждого значения a решите уравнение $|x+3| - a|x-1| = 4$.

13.36. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2|x-2| + a + x = 4$ имеет хотя бы один корень, причем все его корни лежат на отрезке $[0; 4]$.

13.37. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(x^2 - (a+1)x + 3(a-2))\log_{a-x}(2a - x - 1) = 0$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1; 2]$, а вне этого отрезка корней не имеет.

13.38. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x - a^2 \log_3 y = 1, \\ x + 3a \log_3 y = 1 \end{cases}$ имеет решения и всякое решение удовлетворяет неравенству $y > 1 - x$.

13.39. Найдите все значения a, при каждом из которых для любого b найдется c такое, что система $\begin{cases} 2x + by = ac^2 + c, \\ bx + 2y = c - 1 \end{cases}$ имеет решения.

13.40. Найдите все значения a, при каждом из которых для любого b система $\begin{cases} x - by + az^2 = 0, \\ 2bx + (b-6)y - 8z = 8 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

13.41. Найдите все тройки (a, b, c), при которых уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственный корень $x = -1$, причем $a + b + c = 1$.

13.42. Известно, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней и $a + b + c < 0$. Найдите знак c.

13.43. Числа $a < 0$ и b таковы, что $x = 7$ является корнем уравнения $ax^2 + bx + 2 = 0$. Решите неравенство $ax^4 + bx^2 + 2 > 0$.

13.44. Найдите все значения a, при каждом из которых графики функций $y = \dfrac{3x+1}{x}$ и $y = \dfrac{4x + 3a - 7}{ax - 1}$ разбивают координатную плоскость ровно на пять частей.

13.45. Для каждого значения a решите уравнение $\log_a(x^2 - 3a) = \log_a(ax^2 - 3x)$.

13.46. Найдите все значения a, при каждом из которых все корни уравнения $3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$ удовлетворяют неравенству $|x| < 1$.

13.47. Для данных чисел $a = \log_y x$ и $b = \log_z x$ найдите $\log_{\sqrt[3]{xyz}} \left(\dfrac{yz}{x^3}\right)^2$.

13.48. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\log_{\frac{2a-15}{5}} \left(\dfrac{\sin x + \sqrt{3}\cos x + a - 5}{5}\right) > 0$ выполняется для всех x.

13.49. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} a(x-4) = 3(y+2), \\ y + \sqrt{x} = 0 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

13.50. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} 8xy - 25 = 0, \\ x^2 = y + 2x, \\ x^2 + y^2 \le a \end{cases}$ имеет единственное решение.

13.51. Для каждого значения a определите, сколько решений имеет система $\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

13.52. Найдите все значения a, при каждом из которых из неравенства $x^2+y^2 \le a$ следует неравенство $(|x|+3)(|y|+3)x \le 25$.

13.53. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} y-x^2=\left|x^2-\dfrac{3}{2}x-1\right|, \\ y+4x=a \end{cases}$ имеет единственное решение.

13.54. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(x^2-x+a^2+2)^2=4a^2(2x^2-x+2)$ имеет ровно три различных корня.

13.55. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=a(2\sin x+\cos^2 x+1)$ не принимает значений, больших 3.

13.56. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=\log_{25-a^2}(\cos x+\sqrt{8}\sin x-a)$ определена при всех x.

13.57. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $|3\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a|\le 3$ выполняется при всех x.

13.58. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $5\cos x+\sin x+\cos(x-b)=a$ имеет решение:

а) хотя бы при одном b;

б) при любом b.

13.59. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2\cos^2(2^{2x-x^2})=a+\sqrt{3}\sin(2^{2x-x^2+1})$ имеет хотя бы один корень.

13.60. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+2ax+4a^2-5a+3\le 4\sin y-3\cos y, \\ 0\le y\le 2\pi \end{cases}$ имеет единственное решение.

13.61. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x+y+z=x^2+4y^2, \\ x+2y+3z=a \end{cases}$ имеет единственное решение.

13.62. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} |x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0, \\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

13.63. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} 4x = a + 3 - y^2 + 2y, \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

13.64. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 + (5a + 2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

13.65. Найдите все натуральные n, при каждом из которых арифметическая прогрессия не восстанавливается однозначно по ее семнадцатому члену и сумме первых n членов.

13.66. Для каждого значения a найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\log_5\left(\frac{(x+1)^2}{x} - a\right) = \log_5 \frac{(x+1)^2}{x} - \log_5 a.$$

13.67. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

14. Задачи с целыми числами

14.1. Первый член геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем равен 5, а разность между утроенным вторым членом и половиной третьего — больше 20. Найдите знаменатель прогрессии.

14.2. После деления двузначного числа на сумму его десятичных цифр в частном получилось 7, а в остатке 6. После деления того же числа на произведение его цифр в частном получилось 3, а в остатке 11. Найдите это число.

14.3. Ученик перемножил два данных натуральных числа и допустил ошибку, увеличив произведение на 372. Поделив для проверки полученный результат на меньшее из данных чисел, ученик правильно получил в частном 90 и в остатке 29. Найдите данные числа.

14.4. Мастер делает в час целое число деталей, большее 5, а каждый из его учеников — на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе на 1 ч быстрее. Из какого числа деталей состоит заказ?

14.5. На факультет подано от немедалистов на 600 заявлений больше, чем от медалистов. Девушек среди немедалистов больше, чем среди медалистов, в 5 раз, а юношей среди немедалистов больше, чем среди медалистов, в n раз, где n — натуральное число и $6 \le n \le 13$. Найдите общее число заявлений, если среди медалистов юношей на 20 больше, чем девушек.

14.6. Имеется два проекта застройки микрорайона. По первому проекту предполагается построить несколько одинаковых домов, содержащих в общей сложности 12 096 квартир. По второму проекту предполагается построить на 8 домов больше, причем домов также одинаковых, но с большим числом квартир в каждом и содержащих в общей сложности 23 625 квартир. Сколько домов предполагается построить по первому проекту?

14.7. Авиалинию, связывающую два города, обслуживают самолеты только трех типов. Каждый самолет первого, второго и третьего типа может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолеты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найдите число действующих на линии самолетов каждого типа, если их общее число не превосходит 8.

14.8. На клетчатой бумаге выделен прямоугольник размером $m \times n$ клеток, причем числа m и n взаимно простые и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найдите все возможные значения m и n при данных условиях.

14.9. А, И, Б сидели на трубе в указанном порядке. К ним стали подсаживаться другие буквы так, что порядковый номер очередной буквы в русском алфавите равнялся сумме цифр порядковых номеров двух предыдущих букв. С некоторого момента буквы стали циклически повторяться.

1) Какая буква в циклически повторяющемся наборе встречалась наиболее часто?

2) Может ли циклически повторяющийся набор при каких-либо других начальных буквах состоять из одной буквы? Если да, то из какой?

14.10. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0, \\ x + 2y < 15/2. \end{cases}$$

14.11. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 7875x^2 = 567y^3, \\ |x| \le 25. \end{cases}$$

14.12. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$3(x-3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33\,.$$

14.13. Найдите все целочисленные решения уравнения $3x = 5y^2 + 4y - 1$ и докажите, что для любого такого решения (x, y) число $x^3 + y^3$ — нечетное.

14.14. Найдите наименьшее нечетное натуральное число, кратное 9 и дающее остаток 7 при делении на 13.

14.15. Первая бригада изготовила деталей на 15% больше, чем вторая. Все детали уложили в два ящика: в первый ящик — менее 1000 деталей, а во второй — более 1000. Сколько деталей положили в первый ящик, если в нем оказалось $2/3$ деталей, изготовленных первой бригадой, и $1/7$, изготовленных второй?

14.16. Найдите число студентов, сдавших экзамен, если шестая их часть получила оценку «удовлетворительно», 56% — «хорошо», а 14 человек — «отлично», причем отличники составили более 4%, но менее 9% от общего числа экзаменовавшихся студентов.

14.17. Абитуриенты сдавали экзамены в два потока в нескольких аудиториях. В каждом потоке число абитуриентов, экзаменовавшихся в каждой аудитории, было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их пришлось бы провести в три потока, причем в каждом потоке в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу аудиторий. Какое наименьшее число абитуриентов могло быть проэкзаменовано при этих условиях?

14.18. В двух коробках лежали карандаши: в первой – красные, во второй – синие, причем красных было меньше, чем синих. Сначала 40% карандашей из первой коробки переложили во вторую. Затем 20% карандашей, оказавшихся во второй коробке, переложили в первую, причем половину из переложенных карандашей составляли синие. В итоге красных карандашей в первой коробке оказалось на 46 больше, чем во второй. Найдите общее количество синих карандашей.

14.19. Найдите все пары целых чисел a и b, для каждой из которых уравнение $\arcsin\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} - a\cdot 2^{\sin \pi a x} - \left|\arcsin\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} + a\cdot 2^{\sin \pi a x}\right| = 2ab$ имеет не менее 10 различных корней.

14.20. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $a^3|y| \le \sqrt{2}(a^2 - x^2)$ имеет наименьшее количество целочисленных решений.

14.21. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $x^2 - 3x + 3|x + a| + a \le 0$ имеет наибольшее количество целочисленных решений.

14.22. Найдите все целочисленные решения неравенства $\sqrt{x^3 - 5x - 3} \le 6 - x$.

14.23. Найдите все целочисленные решения уравнения $(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy$.

14.24. Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие системе
$$\begin{cases} 2x + 47 < 22y - 2y^2, \\ 7x + 14 \le 4y. \end{cases}$$

14.25. Найдите все целочисленные решения системы $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16x - 22y - 171, \\ 30x - y^2 > 252 + x^2 + 14y. \end{cases}$

14.26. Найдите все целые a, при каждом из которых графики функций $y = \log_{1/\sqrt{2}}(x - 2a)$ и $y = \log_2(x - 2a^3 - 3a^2)$ пересекаются в точке с целочисленными координатами.

14.27. Найдите все a, при каждом из которых уравнение
$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^{a-x} - \frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^a - \frac{5}{8}\right)\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2a-2x-3} - 4\left(\frac{3}{2}\right)^{2a-5} + 2\right) = 0$$
имеет хотя бы один корень и все его корни – целочисленные.

14.28. Первые 80 км пути из одного пункта в другой автобус идет по шоссе, а оставшиеся 120 км – по грунтовой дороге, на два часа дольше. Совершив более четырех рейсов по маршруту туда и обратно, он затратил менее 168 ч, включая стоянки в конечных пунктах. Найдите скорости движения автобуса по шоссе и по грунтовой дороге, если за время, которое автобус провел в движении, он со скоростью, равной среднему арифметическому этих двух скоростей, проехал бы 2100 км.

14.29. Когда груз разложили в вагоны по 80 т, один вагон оказался недогружен. Если бы груз разложили в вагоны по 60 т, то понадобилось на 8 вагонов больше, причем один вагон опять оказался недогруженным. Если же груз разложили в вагоны по 50 т, то понадобилось еще на 5 вагонов больше, причем все вагоны оказались полными. Найдите вес груза.

14.30. В саду было подготовлено четное число ям для посадки деревьев. После посадки яблонь, груш и слив оказалось, что использовано менее трети ям, груш посажено на 6 больше, чем яблонь, а свободных ям оказалось втрое больше, чем посажено слив. Если бы яблонь посадили втрое больше, то свободных осталось бы 59 ям. Сколько ям для посадки было подготовлено?

14.31. Какое наибольшее число членов может содержать конечная арифметическая прогрессия с разностью 4 при условии, что квадрат ее первого члена в сумме с остальными членами не превосходит 100?

14.32. В двух ящиках содержится в общей сложности более 29 деталей. Число деталей, содержащихся в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем втрое превышает число деталей, содержащихся во втором ящике. Утроенное число деталей, содержащихся в первом ящике, превышает удвоенное число деталей, содержащихся во втором ящике, но менее чем на 60. Сколько деталей содержится в каждом ящике?

14.33. Три мальчика хотели вместе купить две одинаковые игрушки. Сложив все имеющиеся у них деньги, они не смогли купить даже одну игрушку. Если бы у первого мальчика было вдвое больше денег, то им на покупку двух игрушек не хватило бы 34 руб. Когда третьему мальчику добавили вдвое больше денег, чем у него было, после покупки двух игрушек у них еще осталось 6 руб. Сколько стоили игрушки, если первоначально у второго мальчика было на 9 руб. больше, чем у первого?

14.34. Число двухкомнатных квартир в доме вчетверо больше числа однокомнатных, а число трехкомнатных квартир кратно числу однокомнатных. Если число трехкомнатных квартир увеличить впятеро, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если их не меньше 100?

14.35. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$9x^2y^2 + 9xy^2 + 6x^2y + x^2 + 2y^2 + 18xy + 5x + 7y + 6 = 0.$$

14.36. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 - 125x^2 + 82y^2 + 51 = 0.$$

14.37. Найдите все целочисленные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right)\right) = 1.$$

14.38. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 4^{x^2+2xy+1} = 7^{|y|-1}(z+2), \\ \sin\dfrac{3\pi z}{2} = 1. \end{cases}$$

14.39. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0, \\ axy + ayz + azx > xyz \end{cases}$ имеет ровно пять различных решений в натуральных числах.

14.40. Решите уравнение $\cos(\pi(x + 7\sqrt{x}))\sin(\frac{\pi}{2}(4x + \sqrt{x})) = 1$.

14.41. Найдите все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{3x^2 - 2z^2 + 2y^2 + 2z - 6y + \frac{\sqrt{2}}{4}x - 41} + \\ + \sqrt{2x^2 - 4\sqrt{2}(\cos\pi y + \cos\pi z)} = 0.$$

14.42. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^2 + 1953^{100}xy - 1995^{100}y^2 = 0$.

14.43. В ящике находится 13 черных шаров и 17 белых. Разрешается:

а) увеличить на 1 число черных шаров и одновременно увеличить на 4 число белых;

б) увеличить на 2 число черных шаров и одновременно уменьшить на 1 число белых;

в) уменьшить на 4 число черных шаров и одновременно увеличить на 5 число белых;

г) уменьшить на 5 число черных шаров и одновременно уменьшить на 2 число белых.

Можно ли, совершая в каком-либо порядке и количестве описанные действия, добиться, чтобы в ящике оказалось 37 черных шаров и 43 белых?

14.44. Две бригады землекопов одинаковой производительности каждый вырыли по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, то она закончила бы работу на 2 ч раньше. Найдите число землекопов в каждой бригаде.

14.45. Рота солдат прибыла на парад прямоугольным строем по 24 человека в ряд, однако не все прибывшие солдаты смогли участвовать в параде. Оставшийся для парада состав перестроили так, что число рядов уменьшилось на 2, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы построить в виде квадрата. Сколько солдат было в роте?

14.46. Три фермера привели баранов для продажи на ярмарке: первый — 10, второй — 16, третий — 26. В первый день они установили одинаковую цену (в целое число рублей), и каждый продал не менее одного барана, но не всех. Во второй день они продали остальных баранов, опять же по одинаковой, но более низкой цене. По какой цене продавались бараны в первый и во второй день, если каждый фермер выручил от продажи по 3500 руб.?

14.47. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала по 5%, затем по $11\frac{1}{9}\%$, по $7\frac{1}{7}\%$ и, наконец, по 12%. Под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определите срок хранения вклада.

14.48. Пусть $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, где m и n — натуральные числа. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

14.49. В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключен в пределах от 2,9 до $3{,}1\%$. Каково наименьшее число учеников в классе?

14.50. Из строительных деталей двух видов можно собирать дома трех типов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого вида и 100 второго, для сборки 16-квартирного дома — 110 деталей первого типа и 150 второго, а для сборки 21-квартирного дома — 150 деталей первого типа и 200 второго. Всего имеется 900 деталей первого вида и 1300 второго. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

14.51. С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 19 т. Масса маленького блока 0,2 т, большого — 3,6 т, большой блок занимает место 14 маленьких. Найдите наименьшее число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

14.52. Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства $4 \cdot 3^{2x+1} + 3^x < 1$.

14.53. В магазине продаются гвоздики и розы. Гвоздика стоит 1,5 у.е., роза — 2 у.е. На покупку гвоздик и роз можно затратить не более 30,5 у.е. При этом число гвоздик не должно отличаться от числа роз более чем на 6. Необходимо купить максимально возможное суммарное количество цветов, при этом гвоздик нужно купить как можно меньше. Сколько гвоздик и сколько роз можно купить при указанных условиях?

14.54. Множество состоит из более семи различных натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 210, а произведение — делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа, причем наибольший общий делитель любых двух из них больше единицы. Найдите все числа, составляющие это множество.

14.55. Сколько точек с целочисленными координатами находится строго внутри криволинейной трапеции, образованной осью абсцисс, прямыми $x = \frac{3}{2}$, $x = 129$ и графиком функции $y = \log_2 x$?

14.56. Найдите все целые значения n, для каждого из которых число $\log_{2n-1}(n^2+2)$ является рациональным.

14.57. Сократите дробь $\dfrac{1234567\overbrace{88...87}^{2000}7654321}{12345678\underbrace{99...9}_{1999}87654321}$ до несократимой.

14.58. Сколькими способами можно разбить на две команды группу из 7 мальчиков и 8 девочек так, чтобы в одной из команд было ровно 4 мальчика и 3 девочки?

14.59. Билеты имеют номера от 000001 до 999999. Билет считается «счастливым», если первые три его цифры нечетны и различны, а вторые – четны, причем цифры 7 и 8 не стоят рядом. Сколько существует различных номеров «счастливых» билетов?

14.60. Имеются 12 карандашей попарно различной длины. Сколькими способами можно уложить их в коробку в два слоя по шесть карандашей так, чтобы в каждом слое карандаши были упорядочены по возрастанию длины (слева направо), а каждый карандаш верхнего слоя лежал строго над карандашом нижнего слоя и был короче его?

14.61. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно –3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных равно –8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

14.62. Множество чисел назовем «красивым», если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

а) Является ли множество $\{200, 201, 202, \ldots, 299\}$ «красивым»?

б) Является ли множество $\{2, 4, 8, \ldots, 2^{100}\}$ «красивым»?

в) Сколько «красивых» четырехэлементных подмножеств в множестве $\{1, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$?

14.63. Множество чисел назовем «красивым», если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

а) Является ли множество $\{100, 101, 102, \ldots, 199\}$ «красивым»?

б) Является ли множество $\{2, 4, 8, \ldots, 2^{2016}\}$ «красивым»?

в) Сколько «красивых» четырехэлементных подмножеств в множестве $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$?

14.64. На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b, записанные на доске, заменяются двумя числами: или $a+b$ и $2a-1$, или $a+b$ и $2b-1$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить или 3 и 5, или 5 и 5).

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из двух чисел, написанных на доске, окажется числом 19.

б) Может ли после 100 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 200?

в) Сделали 1007 ходов, причем на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

14.65. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n (n \geq 3)$ состоит из натуральных чисел, причем каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из пяти членов, сумма которых равна 60.

б) Может ли такая последовательность состоять из пяти членов и содержать два одинаковых числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 8$?

14.66. На доске пишут несколько двузначных чисел (не обязательно различных, без нулей в десятичной записи) общей суммой 363. Затем в каждом числе переставляют цифры (например, число 17 заменяют числом 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше исходной суммы.

б) Может ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше исходной суммы?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

14.67. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из множества всех нечетных чисел, лежащих между 16 и 2016, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось ни на одно другое?

14.68. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из множества всех нечетных чисел, лежащих между 16 и 2000, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось ни на одно другое?

15. Задачи на сложные проценты

15.1. Цена на товар была повышена на 25%. На сколько процентов надо теперь ее снизить, чтобы получить первоначальную цену товара?

15.2. Цена товара изменяется два раза в год: в апреле она повышается на 20%, а в сентябре снижается на 20%. Какова будет цена товара в декабре 2015 г., если в январе 2014 г. она составляла 6250 руб.?

15.3. Цена товара изменяется два раза в год: в марте она повышается на 25%, а в октябре снижается на 25%. Какова будет цена товара в ноябре 2015 г., если в феврале 2014 г. она составляла 5120 руб.?

15.4. На какое наименьшее число процентов следует увеличить цену товара, чтобы, продавая его затем с 25%-й скидкой от новой цены, не оказаться в убытке, т.е. чтобы цена товара со скидкой была не меньше первоначальной?

15.5. Цену товара сначала снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15%, и наконец, снизили еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

15.6. На сколько процентов нужно увеличить радиус круга, чтобы площадь нового круга стала больше площади исходного на 96%?

15.7. Рабочий день уменьшился с 8 ч до 7 ч. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата возросла на 5%?

15.8. В январе завод выполнил 105% месячного плана выпуска продукции, а в феврале изготовил продукции на 4% больше, чем в январе. На сколько процентов завод перевыполнил двухмесячный план выпуска продукции?

15.9. Фабрика за первую неделю выполнила 20% месячного плана, за вторую изготовила 120% количества продукции, выработанной за первую неделю, а за третью неделю — 60% продукции, выработанной за первые 2 недели вместе. Каков месячный план выпуска, если известно, что для его выполнения необходимо за последнюю неделю месяца изготовить 1480 единиц продукции?

15.10. За первый квартал завод выполнил 25% годового плана выпуска станков. Числа станков, выпущенных за второй, третий и четвертый кварталы, находятся в отношении 11,25 : 12 : 13,5. Найдите процент перевыполнения годового плана в процентах, если во втором квартале завод выдал продукции в 1,08 раза больше, чем в первом.

15.11. При двух последовательных одинаковых процентных повышениях зарплата размером в 100 у.е. обратилась в 125,44 у.е. Определите, на сколько процентов повышалась зарплата.

15.12. Выработка продукции за год работы предприятия возросла на 4%, а за следующий год она увеличилась на 8%. Найдите процент среднегодового прироста продукции.

15.13. После двух последовательных повышений зарплата увеличилась в $1\frac{5}{8}$ раза по сравнению с первоначальной. На сколько процентов повысилась зарплата в первый раз, если второе повышение было в процентном отношении вдвое больше первого?

15.14. Заработная плата рабочего за октябрь и ноябрь относилась как $1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{3}$, а за ноябрь и декабрь — как $2 : 2\frac{2}{3}$. За декабрь рабочий получил на 40 у.е. больше, чем за октябрь, и еще премию в размере 40% трехмесячного заработка. Найдите размер премии, считая, что число рабочих дней в каждом месяце одинаковое.

15.15. Стоимость изготовления n коробок пропорциональна $n^2 + 5n + 17$. Определите количество коробок, при котором стоимость изготовления одной коробки минимальна.

15.16. Предприятие производит телевизоры: при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $\frac{40500}{n} + 270 - \left|90 - \frac{40500}{n}\right|$ руб., а цена реализации каждого телевизора при этом не превосходит $540 - \frac{3}{10}n$ руб. При каком n может быть получена наибольшая ежемесячная прибыль в данных условиях?

15.17. В результате проведенного в школе конкурса юных талантов 58% участников получили призы. Довольными итогами конкурса остались 95% участников, причем 60% из них получили призы. Какая часть недовольных результатами конкурса участников получила призы?

15.18. В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключен в пределах от 2,9% до 3,1%. Каково наименьшее число учеников в таком классе?

15.19. После вырубки нескольких деревьев в парке оказалось, что число оставшихся деревьев равно числу процентов, на которое число деревьев уменьшилось за время вырубки. Какое наименьшее число деревьев могло остаться в парке?

15.20. Свежие грибы содержат по массе 90% влаги, а сухие — 12%. Какова масса сухих грибов, получающихся из 22 кг свежих?

15.21. В свежих грибах содержание воды колеблется от 90% до 99%, а в сушеных — от 30% до 45%. В какое наибольшее число раз при этих ограничениях может уменьшиться вес грибов в результате сушки?

15.22. В свежих грибах содержание воды колеблется от 80% до 99%, а в сушеных — от 20% до 40%. В какое наибольшее число раз при этих ограничениях может уменьшиться вес грибов в результате сушки?

15.23. Сплав меди и олова массой 8 кг содержит p% меди. Какой кусок сплава меди с оловом, содержащий 40% олова, надо сплавить с первым, чтобы получить новый сплав с минимальным содержанием меди, если масса второго куска 2 кг?

15.24. Для заготовки сена фермер 3 раза с интервалом в неделю скашивал на лугу одно и то же количество травы. После 3 покосов масса травы на лугу уменьшилась на 78,3% по сравнению с ее значением до начала покосов. Определите, сколько процентов составляет масса всей скошенной травы от первоначальной массы, если еженедельный прирост травы составляет 10%.

15.25. Две матрешки общей стоимостью 225 у.е. были проданы с общей прибылью в 40%. Какова стоимость каждой матрешки, если от продажи первой прибыль составила 25%, а от продажи второй — 50%?

15.26. Общий процент прибыли за весь товар, проданный в трех разных магазинах, составил 26,8%. Через первый магазин было продано 60% всего товара, через второй — 40% оставшейся части товара. С какой прибылью продан товар через третий магазин, если прибыль от продажи в первом составила 30%, а во втором — 25%?

15.27. Общий процент прибыли за весь товар, проданный в трех разных магазинах, составил 25,4%. Через первый магазин было продано 40% всего товара, через второй — 60% оставшейся части товара. С какой прибылью продан товар через третий магазин, если прибыль от продажи в первом составила 35%, а во втором — 25%?

15.28. Магазин получил мужской обуви на 22 000 руб. больше, чем женской. За неделю магазин продал $\frac{1}{n}$ часть мужской обуви и $\frac{1}{4}$ часть женской, причем женской продали на 4000 руб. меньше, чем мужской. На какую сумму магазин получил женской обуви, если известно, что n — целое число? При каких n задача имеет решение?

15.29. В целях рекламы новой модели автомобиля автосалон установил скидку 10% на каждый седьмой продаваемый автомобиль и 20% на каждый одиннадцатый продаваемый автомобиль новой модели. В случае, если на один автомобиль выпадают обе скидки, то применяется большая из них. Всего было продано 516 автомобилей новой модели. Найдите выручку автосалона от продажи автомобилей новой модели, если базовая цена такого автомобиля составляла 20 000 у.е.

15.30. Каждый из трех брокеров имел в начале дня акции каждого из видов А и Б общим числом 11, 21 и 29 штук соответственно. Цены на акции в течение всего дня не менялись, причем цена одной акции вида А была больше цены одной акции вида Б. К концу торгового дня брокерам удалось продать все свои акции, выручив от продаж по 4402 руб. каждый. Определите цену продажи одной акции видов А и Б.

15.31. Вновь созданное акционерное общество продало населению 1000 своих акций, установив скидку 10% на каждую пятую продаваемую акцию и 25% на каждую тринадцатую продаваемую акцию. В случае, если на одну акцию выпадают обе скидки, то применяется большая из них. Найдите сумму, вырученную от продажи всех акций, если цена акции (без скидок) составляла 1000 рублей.

15.32. Имеются 3 пакета акций. Общее суммарное количество акций первых 2 пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция второго пакета дороже одной акции первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс. руб. до 20 тыс. руб., а цена одной акции третьего пакета не меньше 42 тыс. руб. и не больше 60 тыс. руб. Какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете?

15.33. В банк кладется некоторая сумма денег. В каком случае на счету окажется больше денег: если банк начисляет 6% от имеющейся суммы один раз в год или если вклад через каждые три месяца увеличивается на 1,5?

15.34. Банк планирует вложить на один год 40% имеющихся у него средств клиентов в проект А, а остальные 60% — в проект Б. Проект А может принести прибыль от 19% до 24%, а Б — от 29% до 34%. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке. Укажите все значения уровня этой ставки, при которых чистая прибыль банка будет заключена в пределах от 10% до 15% от имеющихся у него средств.

15.35. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5% в месяц, затем 12%, $11\frac{1}{9}\%$ и, наконец, 12,5% в месяц. Под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}\%$. Сколько месяцев вклад хранился в банке?

15.36. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно: сначала по 5% в месяц, затем по $11\frac{1}{9}\%$, по $7\frac{1}{7}\%$ и, наконец, по 12% в месяц. Под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Сколько месяцев вклад хранился в банке?

15.37. Вкладчик в начале первого квартала кладет на счет в банке некоторую сумму. В конце квартала на нее начисляется $x\%$, после чего он снимает половину исходной суммы. На оставшуюся часть счета в конце второго квартала начисляется $y\%$, где $x+y=150$. При каком значении x счет вкладчика в конце второго квартала окажется максимально возможным?

15.38. В начале года 5/6 некоторой суммы денег вложили в банк А, а то, что осталось — в банк Б. Если вклад находится в банке с начала года, то к концу года он возрастает на определенный процент, величина которого зависит от банка. Известно, что к концу первого года сумма вкладов стала равна 670 у.е., к концу следующего — 749 у.е. Если бы первоначально 5/6 суммы положили в банк Б, а оставшуюся — в банк А, то по истечении одного года сумма выросла бы до 710 у.е. Найдите сумму вкладов по истечении второго года в этом случае.

15.39. В банк помещена сумма 3900 тыс. руб. под 50% годовых. В конце каждого из первых 4 лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

15.40. Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40 процентных пунктов (то есть увеличил ставку $a\%$ до $(a + 40)\%$). К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

15.41. В январе 2014 г. ставка по депозитам в банке А составила x % годовых, тогда как в январе 2015 г. — y % годовых, причем известно, что $x + y = 30$. В январе 2014 г. вкладчик открыл счет в банке А, положив на него некоторую сумму. В январе 2015 г., по прошествии года с того момента, вкладчик снял со счета пятую часть этой суммы. Укажите значение x, при котором сумма на счету вкладчика в январе 2016 г. станет максимально возможной.

15.42. Два брокера купили акции одного достоинства на сумму 3640 руб. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму 3927 руб. Первый брокер продал 75% своих акций, а второй — 80% своих. При этом сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% превысила сумму, полученную первым брокером. На сколько процентов возросла цена одной акции?

15.43. 31 декабря 2015 г. «Садовое товарищество» взяло в банке 6 902 000 руб. в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся к этому моменту сумму долга (долг увеличивается на 12,5%), затем «Садовое товарищество» переводит в банк S руб. Какой должна быть сумма S, чтобы «Садовое товарищество» выплатило долг четырьмя равными платежами?

15.44. Фермер взял кредит в банке 1,1 млн руб. 1 января 2015 г. Схема выплаты кредита следующая — 1-го числа каждого следующего месяца банк увеличивает оставшуюся к этому моменту сумму долга на 2%, затем фермер переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев фермер может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 220 тыс. руб.?

15.45. Клиент 31 декабря взял в банке кредит в размере S руб. под фиксированный процент (годовых). Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк увеличивает имеющийся на этот момент долг на p%, затем клиент переводит в банк фиксированную сумму в a руб. в качестве частичного (или полного) погашения долга. В итоге клиент ровно за 2 года выплатил долг полностью. Если бы он платил каждый год не по a руб., а по b руб., то выплатил бы долг ровно за 4 года. Зная произвольные две из трех величин a, b и p, найдите третью, а также величину S.

15.46. 31 декабря 2013 г. Сергей взял в банке 9 930 000 руб. в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

15.47. 15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы: 1-го числа каждого месяца имеющийся на этот момент долг взявшего кредит возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца; со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15 число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма долговых выплат после полного погашения кредита будет на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

15.48. 15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы: 1-го числа каждого месяца долг возрастет на p% по сравнению с концом предыдущего месяца; со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма долговых выплат после полного погашения кредита будет на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите p.

15.49. Молодым семьям на покупку квартиры банк выдает кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: ровно через год после выдачи кредита банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем эта семья в течение следующего года переводит в банк определенную (фиксированную) сумму ежегодного платежа. Семья Ивановых планирует погашать кредит равными платежами в течение 4 лет. Какую сумму может предоставить им банк, если ежегодно Ивановы имеют возможность выплачивать по кредиту 810 000 руб.?

15.50. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший — не менее 0,6 млн рублей.

15.51. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет нужно взять кредит, чтобы общая сумма выплат после его полного погашения составила 38 млн руб.?

15.52. 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет 10% процентов на оставшуюся сумму долга, затем Сергей переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

15.53. В конце года Игорь взял в банке 100 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: в конце каждого следующего года банк увеличивает оставшуюся сумму долга на определенное количество процентов, затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за 2 транша, переведя сначала 51 000 руб., а потом — 66 600 руб. Под какой процент банк выдал кредит Игорю?

15.54. По вкладу А в конце каждого года банк увеличивает сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, на 10% в течение 3 лет, а по вкладу Б — на 11%, но только в течение первых 2 лет. Найдите наименьшее целое число процентов за 3-й год по вкладу Б, при котором за все 3 года этот вклад все еще останется выгоднее вклада А.

15.55. 15 января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в % от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях оказалась больше суммы самого кредита?

15.56. Вклад в целое число миллионов рублей планируется открыть на 4 года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме того, в начале 3-го и 4-го годов вклад ежегодно пополняется на 1 млн руб. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через 4 года вклад будет больше 10 млн руб.

15.57. Наталья хочет взять в кредит 1 000 000 руб. под 10% годовых. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. На какое минимальное количество лет может Наталья взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 240 000 рублей?

ГЛАВА IV. ОТВЕТЫ

1. Рациональные уравнения и неравенства

1.1. $x = \pm 3$.

1.2. $x = 0,\ x = 2$.

1.3. $x = -4,\ x = -2$.

1.4. $x = 1,\ x = \frac{5}{2}$.

1.5. Решений нет.

1.6. $x = 1$, $x = 2010$.

1.7. $x = -1,\ x = 2011$.

1.8. $x = \pm\frac{\sqrt{10}}{2},\ x = \pm 1$.

1.9. $x = \pm\sqrt{3}$.

1.10. $x = -\sqrt[3]{3},\ x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

1.11. $x = -2$, $x = 4$.

1.12. $x = -1$.

1.13. $x = 0$.

1.14. $x = 1$.

1.15. $x = -4$, $x = 2$.

1.16. $x = 1$, $x = 6$.

1.17. $x = 1$, $x = -12$.

1.18. $x = -1,\ x = 7,\ x = 4 \pm \sqrt{21}$.

1.19. $1 \le x \le \frac{5}{2}$.

1.20. $x < -3,\ x > \frac{2}{3}$.

1.21. $1 < x < 2010$.

1.22. $x \le -2011,\ x \ge -1$.

1.23. x — любое.

1.24. Решений нет.

1.25. $x = 3/2$.

1.26. $-\frac{\sqrt{10}}{2} < x < -1, \quad 1 < x < \frac{\sqrt{10}}{2}$.

1.27. $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$.

1.28. $x < -\sqrt[3]{3},\ x > \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

1.29. $-\frac{4}{5} < x < \frac{1}{3}$.

1.30. $x < -\frac{5}{3},\ x > -\frac{3}{2}$.

1.31. $(1;2) \cup (2;3)$.

1.32. $(-\infty;-1) \cup (-1;0) \cup (2;+\infty)$.

1.33. $x < -4, \quad 0 < x < 1$.

1.34. $(-\infty;-1] \cup (0;5)$.

1.35. x — любое.

1.36. $x \le 3,\ x \ge 5$.

1.37. $(-\infty;-3) \cup (-2;+\infty)$.

1.38. $(-\infty;-8] \cup [-\frac{5}{2};+\infty)$.

1.39. $(-\infty;-7)\cup(-7;-\frac{1}{2})\cup(1;+\infty)$.

1.40. $(-\infty;-5)\cup(1;2)\cup(6;+\infty)$.

1.41. $-1<x<6$.

1.42. $(-5;1)\cup\{5\}$.

1.43. $[1;3)\cup(3;4]$.

1.44. $(-\infty;-1-\sqrt{2}]\cup(-2;0)\cup[-1+\sqrt{2})$.

1.45. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]\cup(2;+\infty)$.

1.46. $-7<x<-3$.

1.47. $(-\infty;-4)\cup(-1;+\infty)$.

1.48. $(-\frac{9}{2};-2)\cup(3;+\infty)$.

1.49. $(-\infty;-3)\cup(0;+\infty)$.

1.50. $0<x\le 5;\ \ x\ge 12$.

1.51. $x<0,\ 0<x<1$.

1.52. $-1<x$.

1.53. $-6\le x<-5,\ x\ge 1$.

1.54. $[2;4]\cup(6;+\infty)$.

1.55. $(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(\frac{3}{2};+\infty)$.

1.56. $x<-3$.

1.57. $(-\infty;-23)\cup(20;+\infty)$.

1.58. $x<-\sqrt{2},\ x>\sqrt{2}$.

1.59. $-1<x<0,\ x>0$.

1.60. $-4<x<-3$.

1.61. $-5\le x<-2,\ -2<x\le 1$.

1.62. $x<-3,\ x>5$.

1.63. $(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$.

1.64. $(-1;0)\cup(0;1)$.

1.65. $(-6;0)$.

1.66. $(-\infty;-\frac{8}{3})\cup(-\sqrt{7};2)\cup(\sqrt{7};+\infty)$.

1.67. $[-4;-3)\cup(-2;1]$.

1.68. $x\le-\frac{11}{2},\ \ -1<x<-\frac{2}{3},\ \ x>9$.

1.69. $(-1;-\frac{\sqrt{737}-11}{28})\cup(-\frac{4}{7};\frac{11+\sqrt{737}}{28})$.

1.70. $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

1.71. $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};-1)\cup(0;\frac{\sqrt{5}-1}{2})\cup(1;+\infty)$.

1.72. $(-8;-2)\cup(-1;0)$.

1.73. $(1;2)\cup(3;+\infty)$.

1.74. $(-\infty;-1]\cup[1;2]\cup[4;+\infty)$.

1.75. $[-3;-2)\cup[-1;0)\cup[1;+\infty)$.

1.76. $-9<x\le-3,\ \ -1<x<0,\ \ x\ge 3$.

1.77. $-3<x<-2,\ \ -1\le x\le 5$.

1.78. $0<x\le 1,\ \ 6<x<7$.

1.79. $(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

1.80. $x\le-4,\ \ -3\le x<-\frac{11}{4},\ \ -\frac{11}{4}<x\le-2,\ \ x\ge 1$.

2. Иррациональные уравнения и неравенства

2.1. $x = \frac{1}{5},\ x = 1.$

2.2. $x = -\sqrt{\frac{7}{3}},\ x = \sqrt{\frac{7}{3}}.$

2.3. $x = 5.$

2.4. $x = 3.$

2.5. $x = 3.$

2.6. $x = 5.$

2.7. $x = -3.$

2.8. $x = 1.$

2.9. $x = 0.$

2.10. $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}.$

2.11. $x = 4.$

2.12. $x = -27,\ x = 8.$

2.13. $x = 2.$

2.14. $x = -\frac{5}{3}.$

2.15. $x = 0,\ x = \frac{3}{2}.$

2.16. $x = -5.$

2.17. $x = 5.$

2.18. $x = 1.$

2.19. $x = \sqrt{3}.$

2.20. $x = 4.$

2.21. $x = 9.$

2.22. $x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$

2.23. $x = 8.$

2.24. $x = 3.$

2.25. $x = -1,\ x = \frac{8}{3}.$

2.26. $x = -7.$

2.27. $x = 0,\ x = 1,\ x = 9.$

2.28. $x = 2\frac{1}{63},\ x = 2\frac{1}{728}.$

2.29. $5 \le x \le 10.$

2.30. $x = \frac{1}{2},\ x = \frac{1}{5},\ x = \frac{4}{5}.$

2.31. $x = -1,\ x \ge 2.$

2.32. $\frac{3}{2} < x \le 3.$

2.33. $2 < x \le 4.$

2.34. $1 - \sqrt{5} < x \le -1,\ \ 3 \le x < 1 + \sqrt{\ }$

2.35. $x < \frac{1}{2}.$

2.36. $-2 < x \le 2.$

2.37. $x > -1.$

2.38. $-30 \le x < 6.$

2.39. $5 < x.$

2.40. $\frac{5}{2} \le x < 3.$

2.41. $-1 \le x < -\frac{3}{5}, 0 < x \le 1$.

2.42. $x \le -1$.

2.43. $x \le -5, -\frac{4}{3} \le x < 4$.

2.43. $x > -1$.

2.45. $x < -\frac{5}{3}, x > 1$.

2.46. $2 < x$.

2.47. $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \le x < -1$.

2.48. $1 \le x < \frac{3}{2}$.

2.49. $\frac{16}{3} \le x < 8$.

2.50. $-\frac{\sqrt{13}-1}{6} < x \le 1, x \ge 2$.

2.51. $-1 \le x \le 1$.

2.52. $1 \le x$.

2.53. $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x \le 4$.

2.54. $x \ge 1$.

2.55. $1 < x < \frac{5}{4}, \frac{5}{3} < x$.

2.56. $1 < x < 2,\ 2 < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

2.57. $-5 \le x \le 0$.

2.58. $-1-\sqrt{13} \le x \le 0, \quad \frac{1+\sqrt{17}}{2} \le x \le \sqrt{13}-1$.

2.59. $x > \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$.

2.60. $-3 \le x < 2\sqrt{\sqrt{5}-2}-2$.

3. Уравнения и неравенства с модулем

3.1. $x \ge -2$.

3.2. $x = -\frac{4}{3}$.

3.3. $x = -\frac{13}{4}, x = \frac{9}{2}$.

3.4. $x = -4, x = 4$.

3.5. $x \le \frac{5}{2}$.

3.6. $x = -2, x = 2$.

3.7. $x = -1, x = 11$.

3.8. $x = -3, x = -4$.

3.9. $x = -4, x = -1$.

3.10. $x = -1, x = 1$.

3.11. $x = 1, x = 3$.

3.12. $x = -\frac{70}{13}, x = -\frac{13}{2}, x = 0$.

3.13. $x = -3, x = 25$.

3.14. $x \le -2$.

3.15. $(-\infty; -\frac{3}{5}] \cup [-\frac{1}{2}; +\infty)$.

3.16. $x = 2$.

3.17. $-6 \le x \le 0, x = 12$.

3.18. $x = -1$.

3.19. $-\frac{15}{2} \le x \le \frac{7}{2}$.

3.20. $x = -4, x = -1$.

3.21. $-3 < x < -2$.

3.22. $x \le -\frac{3}{2}, x \ge -\frac{1}{6}$.

3.23. $-6 < x < -3,\ -2 < x < 1$.

3.24. $-2 \le x \ge 2$.

3.25. $x < -3, x > -\frac{1}{3}$.

3.26. $x \le 1$.

3.27. Решений нет.

3.28. $x < -\frac{9}{2}$.

3.29. $-4 < x < -2,\ 2 < x < 4$.

3.30. $-3 \le x \le 3$.

3.31. $-3 \le x \le -1$.

3.32. $-4 < x < -2$.

3.33. $-3 \le x \le -1$.

3.34. $x \le -\frac{4+\sqrt{19}}{3}, x \ge \frac{\sqrt{19}-4}{3}$.

3.35. $-3 < x < -1$.

3.36. $\frac{1-\sqrt{3}}{2} \le x < 0, 0 < x < 1$.

3.37. $\frac{3-\sqrt{73}}{4} \le x < -1, -1 < x \le -\frac{1}{2}, x \ge 2$.

3.38. $x < 2, 2 < x < 6, x \ge 8$.

3.39. $x < -4, x = -3, x > -2$.

3.40. $\frac{3}{7} < x < \frac{11}{7}$.

3.41. $-3 < x < -2, x = -1, 0 < x < 1$.

3.42. $0 < x < 9$.

3.43. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

3.44. $-5 < x < -2$.

3.45. $-3 - 2\sqrt{2} < x < 5$.

3.46. $x \le 2 - \sqrt{2}, x \ge 5 + \sqrt{19}$.

3.47. $-4 < x < -3, 2 < x < 7$.

3.48. $x \le 0, 1 \le x \le 6$.

3.49. $x < -2 - 2\sqrt{3}, x > -2\sqrt{2}$.

3.50. $-3 < x < \frac{3+\sqrt{65}}{2}$.

3.51. $-\frac{9+\sqrt{57}}{4} < x < -2, -2 < x < -1, x > \frac{3}{2}$.

3.52. $-200 < x < 66, x > 199$.

3.53. $x < -2,\ x > 0$.

3.54. $2-\sqrt{3} \le x < 2,\ 4 < x \le 5$.

3.55. $x < 1,\ x > 2$.

3.56. $-5 < x < -3,\ -3 < x < -2,\ 2 < x < 5$.

3.57. $-2 < x \le -\frac{3}{2}$.

3.58. $x > -3$.

3.59. $x \le 0,\ x \ge 1$.

3.60. $x \le -\frac{5}{2},\ -\frac{8}{5} \le x \le 0$.

4. Тригонометрические уравнения и неравенства

4.1. $x \in \varnothing$.

4.2. $x = (-1)^n \arcsin\frac{\pi}{6} + n\pi; n \in \mathbb{Z}$ $\quad (\arcsin\frac{\pi}{6} \ne \frac{1}{2}!)$.

4.3. $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5},\ x = \pm\frac{\pi}{20} + \frac{2n\pi}{5};\ k,n \in \mathbb{Z}$.

4.4. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2};\ k,n \in \mathbb{Z}$.

4.5. $x = -\frac{\pi}{3} + n\pi;\ k,n \in \mathbb{Z}$.

4.6. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4} + n\pi;\ k,n \in \mathbb{Z}$.

4.7. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$.

4.8. $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

4.9. $x = \pi - \arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

4.10. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

4.11. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

4.12. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \frac{n\pi}{2};\ k,n \in \mathbb{Z}$.

4.13. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\quad x = \frac{2\pi}{5}n,\quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}m;\quad k,n,m \in \mathbb{Z}$.

4.14. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ x = \operatorname{arctg}3 + \pi n;\ k,n \in \mathbb{Z}$.

4.15. $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

4.16. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ x = 2n\pi;\ k,n \in \mathbb{Z}$.

4.17. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ x = 2n\pi;\ k,n \in \mathbb{Z}$.

4.18. $x = (2k+1)\pi,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi;\ k,n \in \mathbb{Z}$.

4.19. Решений нет.

4.20. $x = \frac{1}{3} + \frac{4k+1}{12}\pi,\ x = \frac{1}{6} + \frac{2n+1}{24}\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.21. $x = -\arccos\frac{4}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.22. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \frac{7\pi}{10} + 2n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.23. $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2},\ x = -\frac{\pi}{12} + n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.24. $x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

4.25. $x = -\mathrm{arctg}(2 \pm \sqrt{3}) + k\pi = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2};\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.26. $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

4.27. $x = -\frac{3\pi}{4} + k\pi,\ x = n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.28. $x = \mathrm{arctg}\frac{1}{2} + k\pi,\ x = -\mathrm{arctg}\frac{3}{2} + n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.29. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}.$

4.30. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4};\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.31. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.32. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ x = \pm\frac{\pi}{10} + n\pi,\ x = \pm\frac{3\pi}{10} + m\pi;\ k, n, m \in \mathbb{Z}.$

4.33. $x = -\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.34. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.35. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.36. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ x = -\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + m\pi;\ k, n, m \in \mathbb{Z}.$

4.37. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2};\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.38. $x = -2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ -2\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

4.39. $x = k\pi,\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{n\pi}{3};\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.40. $x = \dfrac{2n+1}{18}\pi;\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 9k+4,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.41. $x = \dfrac{4\pi}{3} + 4k\pi,\ x = \dfrac{\pi}{3} + 4n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.42. $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.43. $x = \pm 1 \pm \sqrt{1 + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi},\ k = 0, 1, 2, \ldots$

4.44. $x = \pm\dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.45. $x = \operatorname{arctg}\dfrac{2k+1 \pm \sqrt{4k^2+4k-15}}{4} + n\pi,$

$x = \pm\operatorname{arctg} 2 + m\pi;\ k = \pm 3, \pm 4, \pm 5, \ldots,\ n,\ m \in \mathbb{Z}.$

4.46. $x = -\sin 1.$

4.47. $x = \cos 2.$

4.48. $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

4.49. $x = 1,\ x = 0.$

4.50. $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

4.51. $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.52. $\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.53. $-\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.54. $2k\pi \le x < \arccos\dfrac{1}{4} + 2k\pi,$

$\arccos\dfrac{1}{5} + 2n\pi < x < -\arccos\dfrac{1}{5} + 2(n+1)\pi,$

$-\arccos\dfrac{1}{4} + 2(m+1)\pi < x \le 2(m+1)\pi;\ k,\ n,\ m \in \mathbb{Z}.$

4.55. $-\sqrt{\dfrac{4-\pi}{\pi}} \le x \le \sqrt{\dfrac{4-\pi}{\pi}}$.

4.56. а) $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{4}+n\pi, n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{9\pi}{4}, -\dfrac{11\pi}{4}$.

4.57. $\dfrac{\pi}{8}+k\pi < x < \dfrac{7\pi}{8}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

4.58. $(2k+1)\pi x < \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,$

$\arccos(\dfrac{2}{3}+\sqrt{2})+2n\pi < x < \arccos(\dfrac{2}{3}-\sqrt{2})+2n\pi;\ k,\ n\in\mathbb{Z}$.

4.59. $2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

4.60. $-1\le x\le -\dfrac{7}{8},\ x=1$.

4.61. $x\le \dfrac{4\pi+18}{5},\ \ 8\pi-18\le x\le 18-3\pi$.

4.62. а) $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{4}+n\pi, n\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{13\pi}{4}, \dfrac{15\pi}{4}$

4.63. а) $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2n\pi, n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{4\pi}{3}$.

4.64. а) $\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\quad -\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{7\pi}{3}, \dfrac{8\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{4}, \dfrac{10\pi}{3}$.

4.65. а) $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\quad x=\pi+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{5\pi}{3}, -3\pi$.

5. Показательные уравнения и неравенства

5.1. $x=-4,\ x=-2$.

5.2. $x=\dfrac{1}{2}$.

5.3. $x=-\dfrac{38}{3}$.

5.4. $x=-2\pm\sqrt{7/2}$.

5.5. $x=1$.

5.6. $x=-1$.

5.7. $x=2$.

5.8. $x=7$.

5.9. $x=1$.

5.10. $x=1$.

5.11. $x=2$.

5.12. $x=2$.

5.13. $x=-1$.

5.14. $x=-2,\ x=2$.

5.15. $x = -3$.

5.16. $x = 3$.

5.17. $x = -3, x = -1$.

5.18. $x = 2$.

5.19. $x = 0$.

5.20. а) $2, \log_2 7$; б) $\log_2 7$.

5.21. $x = 0$.

5.22. а) $0, \log_2 3$; б) $\log_2 3$.

5.23. $x = 0$.

5.24. $x = 0$.

5.25. $x = -2$.

5.26. $x = \log_{2/5} 3$.

5.27. $x = -2, x = -1$.

5.28. $x = \log_{(\sqrt{5}-1)/2}(2/3)$.

5.29. $x = 0, x = 2$.

5.30. $x = -\frac{1}{4}$.

5.31. $x = -1, x = 1$.

5.32. $x = -2, x = 2$.

5.33. $-\frac{1}{2} < x$.

5.34. $x > -\frac{3}{4}$.

5.35. $x < 7$.

5.36. $x < -\frac{1}{2}, x > \frac{5}{8}$.

5.37. $x < 0, 1 < x < 3$.

5.38. $x < -3 - \sqrt{3}, x > -3 + \sqrt{3}$.

5.39. $0 < x < \frac{1}{3}$.

5.40. $-4 < x < -1$.

5.41. $x \neq -\frac{1}{2}$.

5.42. $x < -1, x > -\frac{1}{2}$.

5.43. $x < -\frac{1}{3}, x > 4$.

5.44. $x \geq -2$.

5.45. $-1 < x < 0$.

5.46. $x < 0$.

5.47. $x > -\frac{1}{\lg 5}$.

5.48. $x > -3$.

5.49. $x < 0, x > \log_4 3$.

5.50. $x > \frac{1}{2}$.

5.51. $-\frac{2}{3} < x < 1$.

5.52. $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

5.53. $x \in \mathbb{R}$.

5.54. $x \leq -1, x > 0$.

5.55. $0 < x < \log_{2/3}(1/3)$.

5.56. $x \le \log_3(1/2)$, $\log_3(3/5) \le x < \log_3(5/3)$.

5.57. $x < 0$.

5.58. $x > 4 + \dfrac{\lg 14}{\lg 5 - \lg\sqrt{7}}$.

5.59. $x < \log_{0,4} 2$.

5.60. $x < \log_{2/5} 5$.

5.61. $0 < x < \dfrac{1}{2}$.

5.62. $\dfrac{1}{2}\log_5 6 < x < \log_6 5$.

6. Логарифмические уравнения и неравенства

6.1. $x = 2$.

6.2. $x = 100$.

6.3. $x = 4$.

6.4. $x = 2$.

6.5. $x = \dfrac{3}{2}$, $x = 10$.

6.6. $x = 4$.

6.7. $x = \dfrac{6 + \sqrt{261}}{5}$.

6.8. $x = 2$.

6.9. $x = 1$.

6.10. $x = -3$.

6.11. $x = 2$.

6.12. $x = \sqrt[3]{2} - 1$.

6.13. $x = -4$.

6.14. $x = -1$.

6.15. $x = 10$, $x = 100\,000$.

6.16. $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 4$.

6.17. $x = 10^{-1}$, $x = 10^{-1/8}$.

6.18. $x = 1$, $x = 256$.

6.19. $x = \dfrac{1}{27}$, $x = 3$.

6.20. $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 16$.

6.21. $x = 2^{-2}$, $x = 2^{-1/4}$.

6.22. $x = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{3}$, $x = 10$.

6.23. $x = -\dfrac{24}{5}$, $x = 20$.

6.24. $x = 1$, $x = 2 - 2\sqrt{2}$.

6.25. $x = \dfrac{1}{9}$, $x = 3$.

6.26. $x = 0$.

6.27. а) $\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$.

6.28. а) $(-1)^n\frac{\pi}{4}+n\pi, n\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{3\pi}{4}$.

6.29. $x=-2, x=\sqrt{33}-1$.

6.30. $x=4$.

6.31. $x=8$.

6.32. $x=4$.

6.33. $x>4$.

6.34. $\frac{1}{7}<x<\frac{2}{7}$.

6.35. $-3<x<-2$.

6.36. $-4<x<-3, -2<x<-1$.

6.37. $-5\le x<-3, -1<x\le 1$.

6.38. $\frac{1}{3}\le x<\frac{1}{2}$.

6.39. $\frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3}$.

6.40. $x\in\varnothing$.

6.41. $-\sqrt{5}<x<-1,\ 2<x<\sqrt{5}$.

6.42. $(\frac{-5-\sqrt{33}}{2}; -2)\cup(-1; \frac{-5+\sqrt{33}}{2})$.

6.43. $(1; 4)$.

6.44. $0\le x<2$.

6.45. $x<-4$.

6.46. $1<x<2,\ x>2$.

6.47. $-4<x\le-2, -\frac{5}{8}\le x<0$.

6.48. $\frac{1}{4}\le x\le 2$.

6.49. $0<x\le\frac{1}{3},\ 3<x\le 9$.

6.50. $\frac{1}{2}<x<1,\ 1<x<2$.

6.51. $0<x<10, x=100$.

6.52. $0<x<1, \sqrt{3}<x<9$.

6.53. $\frac{1}{2}\le x<1$.

6.54. $-2<x<-1,\ -1<x<0, 0<x<1, x>2$.

6.55. $-3<x<1,\ 3<x<4$.

6.56. $0<x<2,\ x>4$.

6.57. $0 < x < \frac{1}{\sqrt{5}}$, $1 < x < 3$.

6.58. $1 < x < 4$.

6.59. $2 < x < 5$.

6.60. $0 < x < 1$.

6.61. $x > 2$.

6.62. $-3 < x < 77$.

6.63. $-1 < x \le -\frac{26}{27}$.

6.64. $-2 < x < -\sqrt{3}$, $\sqrt{3} < x < 2$.

6.65. $(2; 3) \cup (5; +\infty)$.

6.66. $-10^{(\lg 0{,}5 \cdot \lg 3)/\lg 1{,}5} < x < 0$, $0 < x < 10^{(\lg 0{,}5 \cdot \lg 3)/\lg 1{,}5}$.

6.67. $x > 2$.

7. Комбинированные уравнения и неравенства

7.1. $x = -\frac{4}{5}$, $x = -\frac{6}{5}$.

7.2. $x \le -2010$, $x \ge 2011$.

7.3. $\frac{3}{4} < x \le 7$.

7.4. $x \ge 0$.

7.5. $0 \le x < 64$.

7.6. $x \le 1$, $x = 3$.

7.7. $x \le \log_2(\sqrt{2} - 1)$, $x \ge \frac{1}{2}$.

7.8. $x \le \log_3 2, 1 < x < 5$.

7.9. $x < -1, 0 < x < 1$.

7.10. $0 < x < \frac{1}{2}$.

7.11. $-3 < x < -2$, $-\frac{1}{2} < x < 0$.

7.12. $x = 2 + \sqrt{10}$.

7.13. $-\sqrt{2} < x < -1, 1 < x < \sqrt{2}$.

7.14. $x > 0$.

7.15. $-1 < x < -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}} < x < 1$.

7.16. $x < 0$.

7.17. $x = -\frac{5}{2}$, $x = \frac{1}{2}$.

7.18. $x < -2$, $x > 2$.

7.19. $x < -7$, $\frac{17}{9} < x < 2$.

7.20. $-\frac{127}{128} \le x < -\frac{63}{64}$, $-\frac{3}{4} < x \le -\frac{1}{2}$.

7.21. $1 < x \le 1 + \mathrm{tg}(3\pi/16)$.

7.22. $x < -2$.

7.23. $x = \sqrt{10^{1-\sqrt{3}}}$, $x = \sqrt{10^{1+\sqrt{3}}}$.

7.24. $x = \dfrac{1}{10}$, $x = 10$.

7.25. $x > 1000$.

7.26. $\dfrac{1}{10} < x < 100$.

7.27. $0 < x < 999$.

7.28. $0 < x \le \dfrac{1}{4}$, $x \ge 4$.

7.29. $0 < x \le 3^{-2\sqrt{3}}$, $x \ge 3^{2\sqrt{3}}$.

7.30. $1 < x \le 5^{\log_2 7} = 7^{\log_2 5}$.

7.31. $x = 10$, $x = 10^4$.

7.32. $x = \dfrac{1}{81}$, $x = \dfrac{1}{3}$.

7.33. $0 \le x \le \dfrac{27}{16}$.

7.34. $x = 2$.

7.35. $x < 2$.

7.36. $x = -2$.

7.37. $x = 9$.

7.38. $-2 < x < -1$, $1 < x < 2$.

7.39. $x = \log_5 4$.

7.40. $-2 < x \le -\log_3 \dfrac{9}{10}$.

7.41. $\dfrac{5}{2} < x \le \dfrac{13}{5}$; $x > 3$.

7.42. $\dfrac{9}{5} < x \le \dfrac{20}{11}$; $x > 2$.

7.43. $x \le -2$, $x = -1$, $x \ge 3$.

7.44. $x < 1$; $\log_3 7 \le x < 2$.

7.45. $x < 0$, $0 < x < 2$, $\log_2 6 < x \le 3$.

7.46. $0 \le x < 4$; $4 < x < 7$.

7.47. $-5 < x < 1 - \sqrt{5}$, $3 < x < \sqrt{5} + 1$.

7.48. $-1 < x \le 0$.

7.49. $x < -\log_3 10$.

7.50. $\log_2(5/4) < x < \log_2 3$.

7.51. $0 < x < 2$, $x \ge 4$.

7.52. $\dfrac{1-\sqrt{41}}{5} \le x < -1$, $1 < x \le 2\sqrt{2}$.

7.53. $0 < x \le \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}$, $x > 1$.

7.54. $0 < x \le \dfrac{1}{8}$, $\dfrac{1}{2} \le x < 2$.

7.55. $x = 3$, $x \ge 8$.

7.56. $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.57. $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.58. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2n\pi}{3}$; $k, n \in \mathbb{Z}$.

7.59. $x = \pm\arcsin\dfrac{\lg 3}{\lg(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.60. $-1 \le x \le 3$.

7.61. $-4 \le x \le 1$.

7.62. $(0;1) \cup (1;2)$.

7.63. $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$.

7.64. $x = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.65. $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$; $k, n \in \mathbb{Z}$.

7.66. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi$; $k, n, m \in \mathbb{Z}$.

7.67. $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{6} + 2(k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.68. $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.69. $-\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.70. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.71. $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.72. $\operatorname{arctg} 5 + 2k\pi < x < (2k+1)\pi$, $x \ne \frac{\pi}{2} + 2n\pi$; $k, n \in \mathbb{Z}$.

7.73. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x \le \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$; $k, n \in \mathbb{Z}$,

$-\frac{11\pi}{6} \le x < -\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2} < x \le -4$, $x = -\frac{7\pi}{6}$.

7.74. $\sin\left(\frac{\pi}{4}(1 - \frac{\sqrt{35}}{6})\right) < x < \sin\left(\frac{\pi}{4}(1 - \frac{\sqrt{35}}{6})\right)$.

7.75. 2.

7.76. 1.

7.77. $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

7.78. $x = -\frac{21\pi}{16}$, $x = -\frac{11\pi}{8}$.

7.79. $x = \frac{19\pi}{6}$.

8. Системы

8.1. $x = -\frac{57}{2}$, $y = 17$.

8.2. $x = 3$, $y = 1$; $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{11}{3}$.

8.3. $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{9}{2}$; $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{9}{2}$.

8.4. $x = \frac{5}{2}$, $y = -\frac{5}{2}$.

8.5. $x = 5$, $y = -2$.

8.6. $x = -3$, $y = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

8.7. $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $y = \sqrt{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

8.8. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $y = \frac{1}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

8.9. $x = 3$, $y = -9$.

8.10. $x = \log_2 3$, $y = \log_3 2$.

8.11. $x = -2$, $y = 0$.

8.12. $x = 2$, $y = 6$; $x = \frac{1}{2}$, $y = 10$.

8.13. $x = \pi n$, $y = \frac{\pi}{4} - \pi n$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $y = -\pi k$; $n, k \in \mathbb{Z}$.

8.14. $x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{12} + \pi n$, $y = \frac{\pi}{8} \mp \frac{\pi}{12} - \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$.

8.15. $x = 1$, $y = -\frac{3}{2}$; $x = -2$, $y = 3$.

8.16. $x = 1$, $y = \log_3 2$.

8.17. $x = 4$, $y = 4$.

8.18. $x = -2$, $y = -2$; $x = -2$, $y = 2$.

8.19. $x = \frac{1}{3}$, $y = 1$.

8.20. $x = 81$, $y = 0$.

8.21. $x = 4$, $y = 1$; $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{10}{3}$.

8.22. $x = 1$, $y = 2$; $x = 1$, $x = \frac{44}{25}$, $y = -\frac{28}{5}$, $z = -\frac{108}{25}$.

8.23. $x = 2$, $y = 3$; $x = \frac{33}{8}$, $y = -\frac{27}{8}$.

8.24. $x = 2$, $y = 1$; $x = -1$, $y = \frac{23}{2}$.

8.25. $x = 1 - \log_2 3$, $y = \frac{1}{6}$.

8.26. $x = 0$, $y = -3$.

8.27. $x = \sqrt[3]{3}$, $y = 4$.

8.28. $x = 1$, $y = 3$.

8.29. $x = 10$, $y = 15$; $x = 15$, $y = 10$.

8.30. $x = 1$, $y = 1$.

8.31. $x = 1$, $y = 5$.

8.32. $x = 4$, $y = 2$; $x = 4/3$, $y = -2/3$.

8.33. $x = 0$, $y = -7/2$; $x = y = 21$.

8.34. $x = 1/2$, $y = 3/2$.

8.35. $x = 32$, $y = 2$.

8.36. $x = -1$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x = \frac{3}{2}$, $y = 9$.

8.37. $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $y = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $n, k \in \mathbb{Z}$.

8.38. $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $y = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$; $n, k \in \mathbb{Z}$.

8.39. $x = \dfrac{\pi}{12},\ y = \dfrac{11\pi}{12}.$

8.40. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ y = (-1)^k \dfrac{\pi}{4} + \pi k;$

$x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi m,\ y = (-1)^k \dfrac{\pi}{3} + \pi l;\ n, m, k, l \in \mathbb{Z}.$

8.41. $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n + \dfrac{\pi}{2}k,\quad y = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n - \dfrac{\pi}{2}k;\quad n, k \in \mathbb{Z}.$

8.42. $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2},\ y = -\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\pi k}{5};\ n, k \in \mathbb{Z}.$

8.43. $x = \arccos\dfrac{27}{28} + 2\pi k, y = \pi + \arcsin\dfrac{17}{28} + 2\pi n;\quad x = -\arccos\dfrac{27}{28} + 2\pi k,$

$y = -\arcsin\dfrac{17}{28} + 2\pi n,\quad k, n \in \mathbb{Z}.$

8.44. $x = 10,\ y = 15,\ z = 6.$

8.45. $x = -1,\ y = 1.$

8.46. $x = 1,\ y = 5;\ x = \dfrac{5}{2},\ y = 2.$

8.47. $x = 2,\ y = -1;\ x = \dfrac{12}{7},\ y = -\dfrac{1}{7}.$

8.48. $x = -\dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{9}{4};\ x = 2,\ y \in \mathbb{R}.$

8.49. $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ y = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

8.50. $x = \sqrt{2},\ y = \pm\sqrt{2};\ x = -\sqrt{2},\ y = \pm\sqrt{2}.$

8.51. $x = 9,\ y = 1.$

8.52. $x = \log_2(\sqrt{6} - 2),\ y = \log_3\dfrac{\sqrt{6} - 2}{2}.$

8.53. $x = 3,\ y = \dfrac{1}{9}.$

8.54. $x = \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{2},\ y = \dfrac{3 - 2\sqrt{3}}{2}.$

8.55. $x = \dfrac{1}{2\log_2 3 - 1},\ y = \dfrac{2}{2\log_2 3 - 1}.$

8.56. $x = 1,\ y = 3.$

8.57. $x = 2,\ y = -3;\ x \in \mathbb{R},\ y = 1.$

8.58. $x = \dfrac{12}{7},\ y = \dfrac{12}{5},\ z = -12.$

8.59. $x = 3,\ y = 3,\ z = 3.$

8.60. $x = 4,\ y = -3,\ z = 0;\quad x = 2,\ y = -1,\ z = 2.$

9. Планиметрические задачи

9.1. $\frac{61\sqrt{3}}{4}$.

9.2. $3\sqrt{30}$.

9.3. $\sqrt{7}$.

9.4. $202{,}8$.

9.5. $2:5$.

9.6. $\sqrt{\frac{2}{4-\pi}}$.

9.7. $\sqrt{15+6\sqrt{3}}$.

9.8. $\frac{147}{8}$.

9.9. $\frac{\pi}{6}$.

9.10. $\sqrt{3}+1$.

9.11. $\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$.

9.12. $\frac{\pi+3}{6\pi}$.

9.13. $10r^2(\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3})$.

9.14. 6.

9.15. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

9.16. 11.

9.17. $18:7$.

9.18. 5, 20.

9.19. $R\sin 2\alpha$.

9.20. $\frac{4\sqrt{6}}{5}$.

9.21. $\frac{\pi}{2}$, $\arcsin\frac{5}{13}$, $\arcsin\frac{12}{13}$.

9.22. $\frac{228}{25}$.

9.23. $\frac{32}{5}$.

9.24. $9:20$.

9.25. $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$.

9.26. $\frac{R\sqrt{2}}{2}, \frac{R\sqrt{2}}{2\cos(\pi/8)}, R$.

9.27. $\frac{a^2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$.

9.28. $\frac{c\sin 2\alpha}{2\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}$.

9.29. $R\cdot\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

9.30. 6.

9.31. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

9.32. $\frac{91}{6+\sqrt{6}}$.

9.33. 1.

9.34. 4.

9.35. $6-2\sqrt{6}$.

9.36. $\frac{5\sqrt{21}}{7}$.

9.37. $\frac{25\sqrt{15}}{64}$.

9.38. $\frac{(p-a)^2}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

9.39. $\frac{25}{8}$.

9.40. 16.

9.41. $\frac{\sqrt{(b-a)^2+(b+a)^2\operatorname{tg}^2\alpha}}{4\sin\alpha}$.

9.42. $\frac{16}{5}$.

9.43. $2\sqrt{6}$.

9.44. $\frac{\sqrt{(4b^2-a^2)(a^2-b^2)}}{4}$.

9.45. $\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{3\sin(\beta+\gamma)}$.

9.46. $\arccos\frac{4}{5}$.

9.47. $90^\circ, 10^\circ, 80^\circ$.

9.48. $\frac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}, \frac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}, \frac{2mn}{\sqrt{4m^2-n^2}}$.

9.49. $\frac{9}{2}$.

9.50. $\pi\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}$.

9.51. $\frac{l}{\cos\alpha}$.

9.52. $\frac{c\sqrt{2b^2+bc}}{b}$.

9.53. $9, 48, 4$ и $4\sqrt{10}$.

9.54. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$,

$$h_c=\frac{2S}{c},\quad m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2},\quad l_c=\sqrt{ab\left(1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right)},$$

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},\quad R=\frac{abc}{4S}.$$

9.55. $\frac{a+b-c}{2}$.

9.56. $S=\frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$, где $m=\frac{m_a+m_b+m_c}{2}$.

9.57. $S=\left(4\sqrt{H(H-h_a^{-1})(H-h_b^{-1})(H-h_c^{-1})}\right)^{-1}$, где $H=\frac{h_a^{-1}+h_b^{-1}+h_c^{-1}}{2}$.

9.58. $\frac{b+c}{a}$.

9.59. $\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}$.

9.60. $d_1^2=2(a^2+b^2)-d_2^2$, если $a-b<d_2<a+b$ (иначе параллелограмма нет).

9.61. а) $4\sqrt{26}$, б) такого треугольника нет, в) $\frac{7}{2}$.

9.62. $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$ или $150^\circ, 15^\circ, 15^\circ$.

9.63. $\arcsin\frac{3}{5}$ или $\pi - \arcsin\frac{3}{5}$.

9.64. $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$, $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$, $\pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$

или $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$, $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$, $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$.

9.65. Нет, так как $\arcsin\frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{4} > \frac{5\pi}{21}$, откуда $\frac{7\pi}{21} + \frac{9\pi}{21} + \arcsin\frac{\pi}{4} > \pi$.

9.66. б) 10°.

9.67. б) 160°.

9.68. $1:4$.

9.69. $1:2$.

9.70. $2:1$.

9.71. $5:4$.

9.72. $18\sqrt{2}$.

9.73. $25:36$.

10. Стереометрические задачи

10.1. $\frac{\pi H R^2}{12}$.

10.2. $\frac{27(4-\pi)}{4}$.

10.3. $48\pi\sqrt{11}$.

10.4. $d^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

10.5. $\sqrt[3]{8V\sin\frac{\alpha}{2} \Big/ \sqrt{3(2\cos\alpha - 1)}}$.

10.6. 6.

10.7. $a \Big/ \left(4\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right)$.

10.8. $\arccos\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}}$.

10.9. $\frac{\sqrt{31}}{6}$.

10.10. 216.

10.11. $\frac{21\sqrt{15}}{10}$.

10.12. $\frac{27}{16}$.

10.13. $\frac{91}{25}$.

10.14. $\frac{7}{2}$.

10.15. 6.

10.16. $\frac{\sqrt{6}(5-\sqrt{15})}{10}$.

10.17. $\dfrac{2a^2}{9\sqrt{3\cos\varphi}}$.

10.18. $\dfrac{4\sqrt{5}ad-8\sqrt{2}d^2}{5}$.

10.19. $\dfrac{2H^3}{3}\left(\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}-1\right)$.

10.20. $\dfrac{a^2}{2}\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)}$.

10.21. $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

10.22. $\dfrac{12}{13+\sqrt{41}}$.

10.23. $\left(\dfrac{180}{\pi}\arccos\dfrac{1}{\pi}\right)^\circ$.

10.24. $\dfrac{\sqrt{2}R}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

10.25. $12\pi r^3$.

10.26. $\left(1+\sqrt{33}\right):8$.

10.27. $\dfrac{5\pi}{12}$.

10.28. $\dfrac{125\sqrt{6}}{4}$.

10.29. $28\sqrt{3}$.

10.30. $\arccos\left(\dfrac{9}{\sqrt{150\pm24\sqrt{3}}}\right)$.

10.31. $\dfrac{7\sqrt{3}}{4}$.

10.32. $\dfrac{n}{n+m}\cdot\dfrac{V}{d}$.

10.33. $\dfrac{5V}{18}$.

10.34. 24.

10.35. $\dfrac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{4b}$.

10.36. 8.

10.37. 20.

10.38. $\arccos\left(46/\sqrt{2641}\right)$.

10.39. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

10.40. $1024/9$, $2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{34}/4\right)$.

10.41. $\dfrac{3\sqrt{41}}{2}$.

10.42. $9:95$.

10.43. $7:20$.

10.44. $\pi/3$.

10.45. 2.

10.46. $\dfrac{2\sqrt{19}}{\sqrt{15}}$.

10.47. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

10.48. 90°.

10.49. β.

10.50. $\sqrt{b^2-a^2}$.

10.51. $\arccos\dfrac{b}{a\sqrt{3}}$.

10.52. $d\sin\alpha$.

10.53. $a\operatorname{ctg}\alpha$.

10.54. α.

10.55. $\sqrt{61}$.

10.56. б) $\frac{3}{4}$.

10.57. 55.

10.58. б) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

10.59. $\frac{8}{37}$.

10.60. $\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$.

10.61. $\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

10.62. $\frac{11\sqrt{3}}{2}$.

10.63. $\frac{32}{\sqrt{57}}$.

10.64. 512.

10.65. 2 или 1.

10.66. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

10.67. 90°.

10.68. Все: от 0° до 180° (не включительно).

11. Задачи на доказательство

11.2. Неверно.

11.19. Это — серединный перпендикуляр к отрезку с концами в этих точках.

11.20. Если данные прямые параллельны, то это — прямая, параллельная им и проходящая между ними на равном расстоянии от них; если же данные прямые пересекаются, образуя две пары вертикальных углов, то это — две прямые, служащие биссектрисами этих углов.

11.21. Это — четыре точки: одна из них есть центр окружности, вписанной в треугольник, образованный данными прямыми, а остальные — центры вневписанных окружностей.

11.22. 1. Если $\alpha = 0$, то это — два луча прямой AB.

2. Если $\alpha = \pi$, то это — интервал AB.

3. Если $0 < \alpha < \pi$, то это — две дуги AB, симметричные относительно прямой AB, каждая — мерой $2\pi - 2\alpha$.

11.23. Это — плоскость, проходящая через середину одного из отрезков AM параллельно данной плоскости.

11.24. Это — плоскость, проходящая через середину одного из указанных отрезков параллельно данным прямым.

11.25. Это — сфера (с выколотыми точками A и B), построенная на отрезке AB как на диаметре.

12. Подготовительные упражнения

12.1. $a = 0, x \in \varnothing; a \neq 0, x = \frac{1}{a}$.

12.2. $a = 0, x \in \mathbb{R}; a > 0, x < \frac{1}{a}; a < 0, x > \frac{1}{a}$.

12.3. $a = 1, x \in \mathbb{R};\ a = -1, x \in \varnothing;\ a \neq \pm 1, x = \frac{1}{a+1}$.

12.4. $a = 1, x \in \varnothing; a \neq 1, x = a$.

12.5. $a = 1, x = -1;\ a = -1, x = 1;\ a \neq \pm 1, x = \pm 1$.

12.6. $a = \pm 1, x \in \varnothing;\ a \neq \pm 1, x = 1$.

12.7. $a = 0, x \neq 0;\ a = 1, x \in \varnothing;\ a \neq 0, 1, x = 1$.

12.8. $a < 0, x \in \varnothing;\ a \geq 0, x = \pm\sqrt{a}$.

12.9. $a < 0, x \in \mathbb{R};\ a \geq 0, x > \sqrt{a}, x < -\sqrt{a}$.

12.10. $a \leq 0, x \in \varnothing;\ a > 0, -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$.

12.11. $a < 0, x \in \varnothing;\ a \geq 0, x = \pm a$.

12.12. $x = |a|$.

12.13. $a \leq 0, x \in \varnothing;\ a > 0, -a < x < a$.

12.14. $a < 0, x \in \mathbb{R};\ a \geq 0, \left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a \end{array}\right.$.

12.15. $a < 0, x \in \varnothing; a \geq 0, x = a^2$.

12.16. $a = 0, x \geq 0;\ a \neq 0, x = 0$.

12.17. $a < 0, x \geq 0;\ a \geq 0, x > a^2$.

12.18. $a \leq 0, x \in \varnothing;\ a > 0, 0 \leq x < a^2$.

12.19. $a \leq 0, x \in \varnothing;\ a > 0, x < \log_2 a$.

12.20. $a \leq 0, x \in \mathbb{R};\ a > 0, x > \log_2 a$.

12.21. $a \leq 0, x \in \varnothing;\ 0 < a \neq 1, x = 0;\ a = 1, x \in \mathbb{R}$.

12.22. $a > 1, 0 < x < a;\ 0 < a < 1, x > a;\ a \leq 0, a = 1, x \in \varnothing$.

12.23. $a \leq 0, x \in \varnothing;\ a = 1, 0 < x \neq 1;$
$0 < a < 1, x > 1;\ a > 1, 0 < x < 1$.

12.24. $|a| > 1, x \in \varnothing; |a| \leq 1, x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

12.25. $a = \pm 1, x = a\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;\ a \neq \pm 1, x \in \varnothing$.

12.26. $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ оба множителя чётные и один из них делится на 3.

12.27. $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1)$.

12.28. $2^{10} + 5^{12} = \left(2^5 + 5^6\right)^2 - \left(2^3 \cdot 5^3\right)^2$.

12.29. $222^{333} + 333^{222} = (222^{111})^3 + (333^{74})^3$.

12.30. $\dfrac{2010^{2010} - 1}{2010 - 1} = 1 + 2010 + 2010^2 + \ldots + 2010^{2009}$.

12.31. Нет: например, $n = 333$.

12.32. 34 452, 34 056, 34 956.

12.33. $n^2 + n = n(n + 1)$ — один из множителей чётный.

12.34. Рассмотреть остатки от деления числа n на 3: $n = 3k + r, r = 0, 1, 2 (r = -1, 0, 1)$.

12.35. $n^3 + 5n = 6n + (n - 1)n(n + 1)$.

12.36. $n^5 - n = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$.

12.37. Каждое число, начиная с третьего, имеет вид: $n = 100k + 11 = 4(25k + 2) + 3$.

12.38. $\overbrace{111\ldots1}^{n}\overbrace{555\ldots5}^{n-1}6 = (\overbrace{333\ldots3}^{n-1}4)^2$.

12.39. 18, 216.

12.40. Любой общий делитель этих чисел является делителем числа $5(3n + 5) - 3(5n + 8) = 1$.

12.41. $n^2 + 10n + 21 = (n + 3)(n + 7)$,

$n^2 + 9n + 18 = (n + 3)(n + 6)$, $n + 6$ и $n + 7$ — взаимно простые.

12.42. $n^2 + 6n + 9 = (n + 3)^2$, $n + 3$ и $n + 4$ — взаимно простые.

12.43. $n^2 + 5n + 16 = (n + 9)(n - 4) + 13 \cdot 4$, $(n + 9) - (n - 4) = 13$.

12.44. $\dfrac{53}{450}$.

12.47. $x = 4n - 1$, $y = 3n - 1, n \in \mathbb{Z}$.

12.48. Рассмотреть остатки от деления левой и правой части на 3.

12.49. $(x + 1)(y + 1) = 1$.

13. Задачи с параметрами

13.1. $a \neq \pm 1$.

13.2. $a \neq 0$.

13.3. $a = -2$.

13.4. $a = -1$.

13.5. $a \neq \pm 1$.

13.6. $a \neq 2, a \neq 4, a \neq 8$ $x = -\dfrac{8}{(a - 4)(a - 8)}, y = \dfrac{2(a - 6)}{a - 8}$;

$a = 2$ $x \in \mathbb{R}, y = x + 2$; $a = 4, a = 8$ — решений нет.

13.7. $a < 6$.

13.8. $a = 2$.

13.9. $0 < a < 1$, $1 < a < 4$.

13.10. $0 < a \leq \dfrac{1}{3}$, $a = 3$.

13.11. $a < -4,\ -4 < a < 0.$

13.12. $a = 2 - 2\sqrt{2}, 0 \le a < 4,\ 4 < a < 4\sqrt{2}.$

13.13. $a = 2.$

13.14. $-2 < a \le 0.$

13.15. $a \le -\dfrac{1}{2}; a = 0.$

13.16. $a = b = -2.$

13.17. $-3 \le a \le 3.$

13.18. $a \ne 1.$

13.19. $a = 3.$

13.20. $2 < a < 4.$

13.21. $a = 13.$

13.22. $-2 - 2\sqrt{2} < a < 0; 0 < a < -2 + 2\sqrt{2}.$

13.23. $a = -2,\ a = 1.$

13.24. $a = -4.$

13.25. $a = \dfrac{1}{17}.$

13.26. $a = 2.$

13.27. $a < 0\ \ x = \log_2 a^2;\ a > 0\ \ x = \log_2 a^2, x = \log_2 a;\ a = 0$ — решений нет.

13.28. $a < -2,\ a > 2.$

13.29. $7 < a \ne 7{,}5.$

13.30. $-4 < a \ne -1\ \ x = 3 - \sqrt{a+5};$ при остальных a корней нет.

13.31. $a < 0\ \ x > \dfrac{4a^2 + a}{2};\ a \ge 0\ \ x > \dfrac{a^2 + 9a}{2}.$

13.32. $3 - 2\sqrt{5} < a < \sqrt{10} - 2.$

13.33. $x = -\dfrac{1}{4},\ y = \dfrac{5}{4}.$

13.34. $a < -3,\ a = -1,\ a \ge 3.$

13.35. $|\,a\,| > 1, x = 1; a = -1, -3 \le x \le 1; |\,a\,| < 1, x = 1, x = \dfrac{a+7}{a-1}; a = 1, x \ge 1.$

13.36. $\dfrac{4}{3} \le a \le 2.$

13.37. $1 \le a \le 3, a = 4.$

13.38. $a \ne 3.$

13.39. $-1 \le a < 0.$

13.40. $-\dfrac{1}{2} \le a \le \dfrac{2}{3}.$

13.41. $a = c = \dfrac{1}{4},\ b = \dfrac{1}{2};\ a = 0,\ b = c = \dfrac{1}{2}.$

13.42. $c < 0.$

13.43. $-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}.$

13.44. $0 \le a \le 1.$

13.45. $0 < a < 1, 1 < a \le 3, x = -a - 3; a > 3, x = a, x = -a - 3;$ при остальных a решений не

13.46. $a = 0,\ \ 2 + \sqrt{3} < a < 2 + \sqrt{5}.$

13.47. $6\dfrac{a+b-3ab}{a+b+ab}$ при $a \neq 0; 6$ при $a = 0$.

13.48. $\dfrac{15}{2} < a < 8, a > 12$.

13.49. $-\dfrac{3}{2} \le a < -\dfrac{3}{4}, -\dfrac{3}{4} < a < 0$.

13.50. $a \le -\dfrac{5\sqrt{5}}{4}, a \ge \dfrac{5\sqrt{5}}{4}$.

13.51. При $a < 1$ и $a > \sqrt{2}$ решений нет; при $a = 1$ и $a = \sqrt{2}$ — четыре решения; при $1 < a < \sqrt{2}$ — восемь решений.

13.52. $0 < a \le 8$.

13.53. $a = -\dfrac{57}{32}, x = -\dfrac{5}{8}$.

13.54. $a = \pm\sqrt{2}, a = \pm\dfrac{\sqrt{15}+1}{4}$.

13.55. $-3 \le a \le 1$.

13.56. $-5 < a < -\sqrt{24},\ -\sqrt{24} < a < -3$.

13.57. $-\dfrac{12}{5} \le a \le 0$.

13.58. а) $-\sqrt{26} - 1 \le a \le \sqrt{26} - 1$; б) $-\sqrt{26} + 1 \le a \le \sqrt{26} - 1$.

13.59. $-1 \le a < 2$.

13.60. $a = -\dfrac{1}{3},\ a = 2$.

13.61. $a = -\dfrac{17}{48}$.

13.62. $a = -1,\ 1 < a < 3,\ 4 < a \le 6$.

13.63. $-8 < a < 0$.

13.64. $-\sqrt{2} < a < -\dfrac{16}{17}, 0 < a < \sqrt{2}$.

13.65. $n = 33$.

13.66. При $1 < a \neq 2$ два различных решения: $x = a - 1, x = \dfrac{1}{a-1}$; при $a = 2$ единственное решение $x = 1$; при $a \le 1$ решений нет.

13.67. $2,\ \sqrt{65} + 3$.

14. Задачи с целыми числами

14.1. 3.

14.2. 83.

14.3. 49, 83.

14.4. 24.

14.5. 832.

14.6. 27.

14.7. $2, 2, 2$.

14.8. $m = 2, n = 117; m = 3, n = 59$.

14.9. 1) И; 2) Р.

14.10. $x = -7, y = 7; x = -6, y = 6$.

14.11. $x = y = 0; x = \pm 3, y = 5; x = \pm 24, y = 20$.

14.12. $x = 6, y = \pm 1, z = 0; x = 0, y = \pm 1, z = 0$.

14.13. $x = 15n^2 - 6n, y = 3n - 1; n \in \mathbb{Z}$.

14.14. 189.

14.15. 764.

14.16. 300.

14.17. 648.

14.18. 160.

14.19. $a = 4, 5, \ldots,\ b = -2;\ a = 3, 4, \ldots,\ b = -1$.

14.20. $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1, \sqrt{2} < a < 2$.

14.21. $a = -4, -\frac{5}{2} \le a \le -\frac{9}{4}$.

14.22. $x = -1, x = 3$.

14.23. $x = y = 0; x = y = 2; x = 0, y = 3; x = 3, y = 0$.

14.24. $x = 1, y = 6; x = 1, y = 7; x = 2, y = 7$.

14.25. $x = 11,\ y = -9$.

14.26. $a = -2, a = 0$.

14.27. $a = 1,\ a = \frac{5}{2}$.

14.28. 40, 30.

14.29. 1750 m.

14.30. 94.

14.31. 8.

14.32. 24, 7.

14.33. 70.

14.34. 132.

14.35. $x = -2,\ y = 0;\ x = 0,\ y = -2;\ x = -3,\ y = 0;\ x = -1,\ y = 2$.

14.36. $x = 2,\ y = \pm 3;\ x = -2,\ y = \pm 3$.

14.37. $x = -31, x = -7$.

14.38. $x = \pm 1,\ y = \pm 1,\ z = -1$.

14.39. $\frac{5}{11} < a \le \frac{6}{13}$.

14.40. $x = (4n - 3)^2, n = 1, 2, \ldots$

14.41. $(2\sqrt{2}, -4, -4); (2\sqrt{2}, -2, 2)$.

14.42. $x = y = 0$.

14.43. Нет.

14.44. 6,25.

14.45. 144.

14.46. 375, 125.

14.47. 12 месяцев.

14.48. 11.

14.49. 33.

14.50. Один 16-квартирный и одиннадцать 12-квартирных.

14.51. 20.

14.52. $x = -2$.

14.53. 11 гвоздик и 7 роз.

14.54. $A = \{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$.

14.55. 642.

14.56. $n = 5$.

14.57. $\frac{11111111}{111111111}$.

14.58. 1960.

14.59. 7200.

14.60. 132.

14.61. а) 44; б) отрицательных; в) 17.

14.62. а) да; б) нет; в) 8.

14.63. а) нет; б) да; в) 2.

14.64. а) например, (2,3); (5,5); (9,10); (17,19); б) нет; в) 2.

14.65. а) например, 4;9;13;16;18; б) да, например, 4;9;13;13;9; в) 36.

14.66. а) 15 чисел, равных 19, и одно число 78; б) нет; в) 1650.

14.67. 672.

14.68. 667.

15. Задачи на сложные проценты

15.1. 20%.

15.2. 5760 руб.

15.3. 4500 руб.

15.4. $33\frac{1}{3}$%.

15.5. 38,8%.

15.6. 40%.

15.7. 20%.

15.8. 7,1%.

15.9. 5000.

15.10. 13,2%.

15.11. 12%.

15.12. $(12\sqrt{78} - 100)$%.

15.13. 25%.

15.14. 166 у.е.

15.15. 4.

15.16. $n = 300$ и $n = 600$.

15.17. 20%.

15.18. 33.

15.19. 20.

15.20. 2,5 кг.

15.21. 70.

15.22. 80.

15.23. Если $60 < p \le 100$, то 2 кг, если $p = 60$, то любой кусок массой m, где $0 \le m \le 2$, если $0 \le p < 60$, то 0 кг.

15.24. 90%.

15.25. 90 и 135 у.е.

15.26. 20%.

15.27. 10%.

15.28. 5000 рублей; $n = 5$.

15.29. 10 002 000

15.30. 426 и 142.

15.31. 962 500 руб.

15.32. 12,5% и 15%.

15.33. Во втором.

15.34. 15%.

15.35. 7.

15.36. 12.

15.37. 100.

15.38. 841.

15.39. 210 тыс. руб.

15.40. 60.

15.41. 25.

15.42. 37,5.

15.43. 2 296 350.

15.44. 6.

15.45. $(a-b)(100+p)^2 = 10\,000b,\ S = \dfrac{100a(200+p)}{(100+p)^2}$.

15.46. 3 993 000 руб.

15.47. 3.

15.48. 3.

15.49. 2 096 875.

15.50. 20.

15.51. 10.

15.52. 3 993 000 рублей.

15.53. 11.

15.54. 9.

15.55. 22,5.

15.56. 6 млн.

15.57. 6.

Справочное издание

Сергеев Игорь Николаевич
Панферов Валерий Семенович

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ТРЕНАЖЁР

ЗАДАНИЯ ЧАСТИ 2

ООО «УЧПЕДГИЗ»

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU.АГ81.Н05246 от 15.06.2017 г.

109428, Россия, Москва, Рязанский проспект, д. 22, кор. 2.
E-mail: по общим вопросам: uchpedgiz@bk.ru.

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО "Красногорская типография".
143405, Московская область, г. Красногорск, Коммунальный квартал, дом 2. www.ktprint.ru

УВАЖАЕМЫЕ ПОКУПАТЕЛИ!

Издательство «УЧПЕДГИЗ»
предлагает вашему вниманию следующие учебные издания:

1. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Биология**
2. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Математика.** Профильный уровень. Задачи с параметром
3. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **История России.** Исторические портреты XIX–XX века
4. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Математика.** Профильный уровень. Планиметрия
5. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Физика**
6. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Физика.** Практическое руководство
7. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Русский язык.** Сочинение
8. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Математика.** Профильный уровень
9. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Математика.** Профильный уровень. Решение задач и уравнений в целых числах
10. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Математика.** Профильный уровень. Планиметрия. Стереометрия
11. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Обществознание**
12. ЕГЭ 2018. *100 баллов.* **Математика.** Профильный уровень. Уравнения и неравенства
13. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Русский язык.** Задание части 2
14. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **История**
15. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **История.** Задания с иллюстративным материалом и история российской культуры
16. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Математика.** Профильный уровень. Задания части 2
17. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Обществознание**
18. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Обществознание.** Политика. Право. Человек и общество. Экономика. Социология
19. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Русский язык.** Задания части 1
20. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Русский язык.** Орфография. Пунктуация. Языковые нормы
21. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Литература.** Часть 2
22. ЕГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Математика.** Профильный уровень. Теория вероятностей и элементы статистики
23. ЕГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Обществознание**
24. ЕГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Биология**
25. ЕГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **История**
26. ЕГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Литература**
27. ЕГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Математика**
28. ЕГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Русский язык**
29. ЕГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Физика**
30. ОГЭ 2018. *100 баллов.* **Обществознание**
31. ОГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **История России.** Задания повышенной сложности
32. ОГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Математика.** Теория вероятностей и элементы статистики
33. ОГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Обществознание.** Задания части 1 и 2
34. ОГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Русский язык**
35. ОГЭ 2018. *Тематический тренажер.* **Русский язык.** Задания части 3. Сочинение
36. ОГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Математика**
37. ОГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Обществознание**
38. ОГЭ 2018. *Экзаменационный тренажер.* 20 вариантов. **Русский язык**