

TRIGONOMETRIE

Clasa a-VI-a

E. Abason
A. Andronic
G. Dumitrescu
(1935)

IN LOC DE PREFAȚĂ.

Extras din Referatul comisiunii pentru cercetarea manualelor didactice, asupra: 1. Algebrei pentru clasa VI-a, 2. Trigonometriei pentru clasa VI-a de d-nii Prof. E. Abason, A. Andronic și Gh. Dumitrescu.

„Manualele prezentate spre aprobare, rezultate din colaborarea dintre un profesor universitar și doi profesori secundari, prezintă toate calitățile bune pe care le poate avea un manual: expunere clară, intuitivă; gradație progresivă; rigurozitate matematică, care însă nu e greoaie; insistări cu reveniri asupra părților esențiale; dozare justă și pedagogică a cunoștințelor prezentate spre asimilare, precum și aprofundare prin numeroase exerciții sau tratarea din nou și din alt punct de vedere a aceluiași chestiuni.

D-nii autori s'au conformat din plin cerințelor programei analitice în ceea ce privește umanizarea cursurilor. Toate numele matematicienilor întâlnite în curs sunt însoțite de scurte biografii și note istorice. Capitolul dela sfârșitul trigonometriei cu biografiile celor mai iluștri matematicieni ai țării noastre, deși în afara programei, îl considerăm un adaus fericit, pentru care felicităm chiar pe d-nii autori.

Ceea ce constituie însă valoarea deosebită a manualelor prezentate, sunt exercițiile și aplicațiile luate din toate domeniile vieții practice.

În special Trigonometria este o trigonometrie vie, aplicată la rezolvarea variatelor și multiplelor probleme ce se ivesc în viața de toate zilele, în mod natural.

Aplicațiile la Agrimensură și Statică — numeroase, variate și de practică curentă — nu au nimic din artificialitatea unor exerciții, care să fie complicate numai din plăcerea de a prezenta elevului dificultăți de învins.

Suntem de părere să se aplice art. 11 al. 1 adică să se dea aprobarea de tipărire fără modificări”. °

(ss) E. Stoenescu

Prof. la liceul Matei Basarab
București

(ss) Ion I. Balanțof

Prof. la liceul Mihail Eminescu
București

TRIGONOMETRIE

CAP. I.

GENERALITĂȚI.

INTRODUCERE.

Triunghiul este o figură geometrică plană, care are trei laturi:

$$BC = a, CA = b, AB = c$$

și trei unghiuri:

A, B, C

adică în total șase elemente; laturile sunt elementele *liniare*, iar unghiurile, elementele *unghiulare* ale triunghiului (fig. 1).

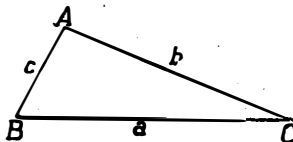


Fig. 1

Vom însemna vârfurile unui triunghi oarecare cu litere mari, A, B, C, unghiurile cu aceleași litere mari A, B, C, precedate de cuvântul *unghi* sau de semnul \sphericalangle , sau vom scrie \hat{A} ; laturile le vom însemna cu literile mici corespunzătoare literilor mari ale unghiurilor opuse.

Dacă unul din unghiurile triunghiului este drept, triunghiul se cheamă *dreptunghi*; vârful unghiului drept îl vom nota cu litera A, iar vârfurile ascuțite cu B, C (fig. 1 și 2); rezultă după convențiunea făcută că *a* este lungimea ipotenuzei iar *b* și *c* lungimile catetelor.

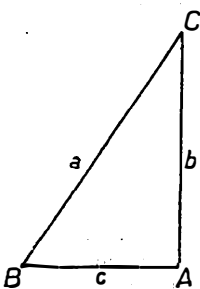


Fig. 2

CONSTRUCȚIA SAU REZOLVAREA UNUI TRIUNGIU.

Pentru a *construi* un triunghi după voie putem proceda astfel:

1. Unim trei puncte oarecari A, B, C, dintr'un plan, două câte două.

Sau:

2. Desenăm trei drepte oarecari, cari să nu fie *toate* paralele între ele ¹⁾.

Astfel de triunghiuri, desenate *după voie*, putem construi oricât de multe vom.

Uneori însă, se cere ca triunghiul desenat să îndeplinească anumite condițiuni, spre ex.: să aibă ca laturi niște lungimi *date dinainte*, sau: una din laturi să fie egală cu o lungime *dată dinainte* iar două din unghiurile lui să fie deasemeni egale cu două unghiuri *cunoscute*, etc.

Din Geometrie se știe că putem construi un triunghi când se dau o parte din elementele lui.

Odată construit triunghiul, putem prin *măsurare pe desen*, cu ajutorul dubludecimetrului pentru lungimi, și cu ajutorul raportorului pentru unghiuri, să aflăm celelalte elemente care nu ni s'au dat (elemente necunoscute):

Astfel, în cazul unui *triunghi oarecare*, se pot prezenta cu deosebire următoarele cazuri ²⁾:

Să se construiască un triunghi:

Elemente date (cunoscute):

Elemente de aflat (necunoscute):

Cazul I. O latură (spre exemplu *a*) și două unghiuri alăturate (B, C).

Laturile *b*, *c*, unghiul A.

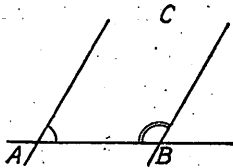


Fig. 3

¹⁾ Este util să ne obișnuim a privi și figura ABC, formată din două drepte paralele, întretăiate de o a treia, tot ca un triunghi, în care unul din unghiuri (C) este zero, iar suma celorlalte două, A, și B formează 180° (fig. 3).

²⁾ Se recomandă ca în clasă, să se reamintească la tablă, cu elevii, cum se construiește un triunghi în fiecare din aceste cazuri, insistându-se asupra faptului că oricât de exact am desena, aflarea laturilor sau unghiurilor necunoscute este susceptibilă de erori, fie datorite instrumentelor, cu ajutorul cărora lucrăm, fie imperfecțiunii cu care citim diviziunile dubludecimetrului sau raportorului, etc.

Cazul II. Două laturi (spre exemplu b și c) și unghiul cuprins A .

Latura a ,
unghiurile B și C .

Cazul III. Trei laturi a, b, c .

Unghiurile A, B, C .

Cazul IV. Două laturi a, b și unghiul opus uneia din aceste laturi, spre ex. \hat{A} .

Latura c ,
unghiurile B și C .

În fiecare din cazurile de mai sus, obținem un singur triunghi (cazul I, II, III) sau cel mult două triunghiuri (cazul IV) care să aibă elementele ce ni s'au impus mai dinainte ¹⁾, adică un număr hotărât de triunghiuri.

Totdeauna observăm că în fiecare din cazurile examinate, ni s'au dat *trei elemente* (laturi și unghiuri, sau numai laturi), dar *niciodată nu ni s'au dat numai unghiuri* ²⁾.

Tot astfel, pentru a construi un triunghi dreptunghi se pot prezenta cazurile ce urmează:

Să se construiască un triunghi dreptunghi:

Elemente cunoscute:

*Elemente necunoscute
(de aflat):*

Cazul I. O catetă (spre ex. b) și un unghi ascuțit B .

Ipotenuza a , cateta c , unghiul C .

Cazul II. 2 catete: b și c .

Unghiurile B și C ; ipotenuza a .

¹⁾ Să se observe că: cu trei elemente date (nu toate unghiuri) se pot construi oricâte triunghiuri voim, dar toate egale între ele. Triunghiurile egale nu le socotim ca diferite, după cum și o fotografie, chiar dacă o reproducem (la aceeași mărime) ori de câte ori voim, copile tot o singură fotografie reprezentă.

²⁾ Se reamintește că dacă se dau numai unghiurile A, B, C de fapt nu ni se dau decât două elemente, adică două unghiuri, întrucât al treilea unghi este diferența dintre 180° și suma celor două unghiuri date. Cu două unghiuri date, putem deci afla pe al treilea, iar triunghiurile ce putem construi cu ele sunt în număr oricât de mare voim, toate aceste triunghiuri fiind asemenea.

Cazul III. O catetă (spre ex. b) și un unghi ascuțit (spre ex. \hat{C}). Ipotenuza a , cateta c , unghiul ascuțit B .

Cazul IV. Ipotenuza a și o catetă (spre ex. b). Cateta c , unghiurile B și C .

În toate aceste cazuri, ni se dă *două elemente* (o latură și un unghi, sau două laturi, însă niciodată nu ni se dă numai unghiurile ascuțite); cu aceste elemente putem construi un singur triunghi.

Observare importantă. De fapt și în cazul construcției triunghiului dreptunghi, ni se dă tot trei elemente, deoarece pe lângă cele două elemente cunoscute, mai cunoaștem unghiul A , care este drept.

Rezultă de aci că pentru a putea construi un triunghi (un număr hotărît de triunghiuri), trebuie să cunoaștem (să ni se dea) trei din elementele lui, care pot fi alese astfel:

a) dintre laturi și unghiuri;

b) numai laturi.

Numai cu unghiurile unui triunghi nu putem construi un singur triunghi.

Definiție. Operațiunea, care constă în a construi un triunghi când se cunosc o parte din elementele lui și a afla apoi elementele necunoscute, se cheamă și *rezolvarea triunghiului*.

Geometria ne învață să rezolvăm triunghiurile, cu ajutorul *desenului*, adică în mod *grafic*.

Acest mod de rezolvare nu este totdeauna exact, fie din cauza instrumentelor de desen de care ne servim (hârtie, dublu decimetru, raportor), fie din cauza cetirii neexacte a diviziunilor dubludecimetrului și raportorului, etc.

Când nu se cere o precizie prea mare, rezolvarea grafică a triunghiurilor reprezintă un mijloc destul de bun pentru a afla elementele necunoscute ale unui triunghi.

Adesea, în practică chiar, este necesar ca această operațiune să se facă cât mai exact.

Să presupunem, de exemplu, că voim să întocmim planul unei moșii (pe care să o presupunem, pentru simplificare, situată pe un teren perfect plan), fie pentru a servi la un act de vânzare-cumpărare, fie pentru a o împărți în mai multe părți (a o parcela) și a o distribui țăranilor din partea locului.

Dacă aflarea diferitelor dimensiuni ale moșiei și a parcelelor prin despărțirea în triunghiuri (fig. 4) nu s'ar face *cât mai exact*, ar putea rezulta numeroase procese. Exemple ca acesta sunt foarte numeroase.

Este deci nevoie să cunoaștem o metodă de rezolvare a triunghiurilor mai exactă decât aceea grafică. Partea din Matematici, care ne pune la îndemână o astfel de metodă mai exactă, este *Trigonometria*.

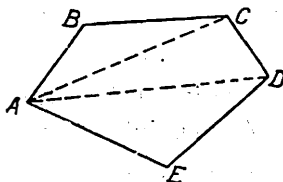


Fig. 4

OBIECTUL TRIGONOMETRIEI.

Trigonometria are ca obiect rezolvarea triunghiurilor cu ajutorul calculului; ea folosește calculul aritmetic și algebric pentru aflarea elementelor necunoscute ale unui triunghi, căruia i se cunosc o parte din elemente.

Când calculăm, nu folosim instrumente de desen și prin urmare ocolim cauzele de erori ale rezolvării grafice.

După cum vom vedea, și în Trigonometrie se pot face anumite erori¹⁾ (aproximații); exactitatea calculului trigonometric este însă suficientă pentru necesitățile practice, aproximația putând fi făcută oricât de mică voim.

Astfel pe desen nu putem aprecia cu ochiul liber o lungime mai mică de o jumătate de milimetru, nici un unghi mai mic de 30

¹⁾ Nu este vorba aci de erori de neatentie.

minute, pe când prin calcul putem afla lungimile cu fracțiuni de milimetri, și unghiurile în minute și secunde¹⁾.

Scrierea și citirea unghiurilor.

În cele ce urmează vom citi un unghi, format din semidreptele OA, OB, după împrejurări (fig. 5):

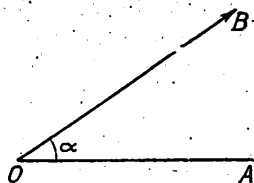


Fig. 5

1) unghiul AOB și vom scrie $\sphericalangle AOB$ sau \widehat{AOB} .

2) unghiul O și vom scrie $\sphericalangle O$ sau \widehat{O} .

3) unghiul semidreptelor OA, OB și vom scrie $\sphericalangle(OA, OB)$ sau $\widehat{(OA, OB)}$ sau încă: $\sphericalangle(A, B)$ sau $\widehat{(A, B)}$.

4) unghiul α , și vom scrie $\sphericalangle \alpha$ sau $\widehat{\alpha}$.

RADIANUL.

O unitate de măsură pentru unghiuri²⁾ este radianul. Din vârful O al unui unghi ca centru, descriem arcele AB, A'B', A''B''... cuprinse între laturile unghiului (fig. 6).

Din cauza asemănării figurilor OAB, OA'B', OA''B''... rezultă că rapoartele:

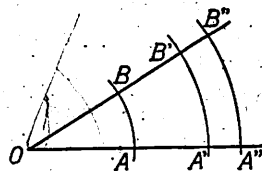


Fig. 6

¹⁾ Se crede că Trigonometria a fost cunoscută de Egipteni, care s'au ocupat cu probleme practice, de agrimensură și astronomie.

Lui *Hiparc* i se datorește strângerea la un loc a metodelor trigonometrice întrebuințate de cei vechi; lucrarea sa « *Tratat asupra corzilor corespunzătoare arcelor* » și care cuprinde 12 cărți, este de fapt un tratat de *Trigonometrie* (vezi și nota dela pag. 28).

Hiparc a fost cel mai mare astronom al antichității. S'a născut la Nicea (Bitinia) și a desfășurat o mare activitate de cercetător între 160 și 125 înainte de Cristos. Este cel dintâi astronom care a determinat cu oarecare precizie mișcările soarelui.

Cel dintâi tratat de *Trigonometrie rectilie* se datorește lui *Ptolomeu*.

Ptolomeu (Claudiu) s'a născut în Egipt (125 a. Chr.); a fost un mare astronom; după concepția sa, pământul era fix și se găsea în centrul universului. Această concepțiune a fost combătută și înlăturată mai târziu de către *Copernic* (astronom polonez 1473—1543).

²⁾ Vezi și pag. 323.

$\frac{\text{lung. arc. AB}}{\text{raza OA}}$, $\frac{\text{lung. arc. A'B'}}$, $\frac{\text{lung. arc. A''B''}}{\text{raza OA''}}$
sunt egale.

Definiție. *Unghiul, care se bucură de proprietatea că lungimea arcului AB este egală cu lungimea razei care l-a descris, se numește radian.*

Pentru un unghi de un radian, rapoartele:

$$\frac{\text{arc AB}}{\text{raza OA}} \quad \frac{\text{arc A'B'}}{\text{raza OA'}} \quad \frac{\text{arc A''B''}}{\text{raza OA''}} \dots\dots$$

sunt egale deci cu unitatea.

Unghiurile pentru cari lungimea arcului AB este de 2, 3, 4, ori mai mare decât raza care l-a descris, vor avea 2, 3, 4, radiani. Astfel dacă un unghi are 3 radiani, aceasta înseamnă că lungimea razei OA se cuprinde de trei ori în lungimea arcului AB; dacă un unghi are 0,5 radiani, aceasta înseamnă că raza se cuprinde în lungimea arcului de 0,5 ori, adică raza este de două ori mai lungă decât arcul pe care l-a descris, etc.

Regulă practică. Din cele de mai sus rezultă că spre a afla valoarea unui unghi în radiani, trebuie să procedăm astfel:

Din vârful O al unghiului ca centru, descriem un arc AB; măsurăm lungimea razei OA și lungimea arcului AB; câtul (raportul) dintre lungimea arcului și lungimea razei (măsurate cu aceeași unitate de măsură) este valoarea în radiani a acestui unghi.

Dacă însemnăm cu l lungimea arcului AB, cu r lungimea razei OA, iar cu α valoarea în radiani a unghiului AOB, vom avea:

$$\alpha_{\text{radiani}} = \frac{l}{r}$$

adică:

$$\alpha_{\text{radiani}} = \frac{\text{lungimea arcului}}{\text{lungimea razei}}$$

Observare. Numărul de radiani al unui unghi arată deci de câte ori raza se cuprinde în arc pe care l-a descris; acest număr este câtul a două lungimi, adică a două cantități de același fel.

Astfel de numere, care nu exprimă nici metri, nici kilograme, nici rezultatul măsurării vreunei mărimi, ci arată *de câte ori* o mărime se cuprinde într'alta de acelaș fel cu prima, se numesc *numere abstracte*, spre deosebire de celelalte numere, care sunt *numere concrete* (spre exemplu 5 metri, 3 dm³, 8 kg., etc.).

Radianii sunt deci numere abstracte.

Transformarea radianilor în grade sexagesimale și invers.

Aplicație : Valoarea în grade sexagesimale a unui unghi de un radian.

Răspuns: Să aflăm mai întâiu valoarea în radiani a unui unghi de 90°. Lungimea arcului AB corespunzător unghiului de 90° este a patra parte din lungimea cercului, adică:

$$\frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}$$

pentru a afla valoarea în radiani a unghiului de 90°, împărțim lungimea arcului $\frac{\pi R}{2}$ prin raza R:

$$\frac{\pi R}{2} : R = \frac{\pi}{2}$$

deci unghiul de 90° are $\frac{\pi}{2}$ radiani.

Rezultă de aci că:

unghiul de 180° are π radiani

» » 270° » $\frac{3\pi}{2}$ »

» » 360° » 2π » , etc.

Putem face acum următoarea regulă de trei simplă:

dacă la π radiani corespund 180°

» 1 » » x°

$$x^\circ = \frac{180}{\pi} = 57^\circ 17' 44'',8$$

Un unghi de un radian valorează deci în grade sexagesimale $57^{\circ} 17' 44'',8$.

Dacă unghiul de un radian corespunde cu $\frac{180}{\pi}$ grade sexagesimale rezultă că un unghi de α radiani, va fi exprimat prin $\frac{\alpha \times 180}{\pi}$ grade sexagesimale.

Invers: unghiul de un grad sexagesimal corespunde cu $\frac{\pi}{180}$ rad, un unghi de n° sexagesimale corespunde deci cu $\frac{n^{\circ}}{180} \times \pi$ radiani, adică:

$$(1) \quad n \text{ grade} = \frac{\alpha}{\pi} \times 180$$

și

$$\alpha \text{ rad.} = \frac{n^{\circ}}{180^{\circ}} \times \pi \quad (2)$$

Observarea 1-a. Dacă unghiul (sau arcul) e dat în grade centesimale îl transformăm mai întâiu în grade sexagesimale și apoi aplicăm formula (2).

Observarea 2-a. Pentru ușurarea calculelor s'au întocmit tabele care permit aflarea unui unghi în grade când îl cunoaștem în radiani și invers. În fig. 7 se arată unghiurile mai importante (remarcabile) în grade și radiani.

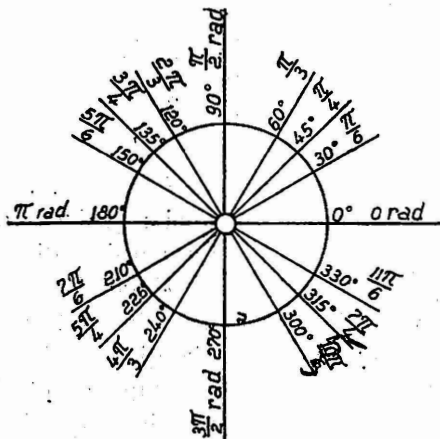


Fig. 7

Tablou de unghiurile mai importante în grade și radiani.

Nr. cor.	Unghiul în grade	Unghiul în radiani	Nr. cor.	Unghiul în grade	Unghiul în radiani
1	0°	0 = 0,000000	10	210°	$7\frac{\pi}{6} = 3,665192$
2	30°	$\frac{\pi}{6} = 0,523599$	11	225°	$5\frac{\pi}{4} = 3,926990$
3	45°	$\frac{\pi}{4} = 0,785398$	12	240°	$4\frac{\pi}{3} = 4,188791$
4	60°	$\frac{\pi}{3} = 1,047198$	13	270°	$3\frac{\pi}{2} = 4,712388$
5	90°	$\frac{\pi}{2} = 1,570796$	14	300°	$10\frac{\pi}{6} = 5,235997$
6	120°	$2\frac{\pi}{3} = 2,094395$	15	315°	$7\frac{\pi}{4} = 5,487786$
7	135°	$3\frac{\pi}{4} = 2,356194$	16	330°	$11\frac{\pi}{6} = 5,759587$
8	150°	$5\frac{\pi}{6} = 2,617994$	17	360°	$2\pi = 6,283185$
9	180°	$\pi = 3,141592$			

→ 3, 14 05 31 16 18 01

Unghiuri mai mari de 360°. Să presupunem că OM este spița unei roți și că roata se mișcă în sensul săgeții (s), pornind din poziția OA (fig. 8).

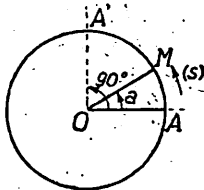


Fig. 8

Unghiul a este unghiul dintre direcția dela început a spiței (direcția inițială) și direcția OM (direcția finală).

După o rotație completă, spița revine în poziția OA, adică unghiul a este de 360 grade; dar spița se poate roti mai departe și unghiul a poate crește peste 360° oricât de mult.

Astfel, dacă spița a făcut trei învârtituri complete și s'a mai rotit spre exemplu până în OA' , devenind perpendiculară pe OA , zicem că ea a descris un unghi:

$$a = 3 \times 360^\circ + 90^\circ = 1170^\circ$$

CERCUL. LUNGIMEA CERCULUI¹⁾.

Se știe din Geometrie (și s'a reamintit și mai sus) că *dacă luăm ca unitate de unghi, unghiul MON al cărui arc MN este luat ca unitate de arc, avem relațiunea (fig. 9):*

$$\text{măsura } \widehat{AOB} = \text{măsura } \widehat{AB}$$

adică măsura unui unghi AB , și măsura arcului corespunzător AB se exprimă prin acelaș număr

de grade. Spre exemplu, dacă $\widehat{AOB} = 16$ grade de unghi, atunci arc $AB = 16$ grade de arc; sau dacă arc $AB = 27$ grade de arc, atunci $\widehat{AOB} = 27$ grade de unghi.

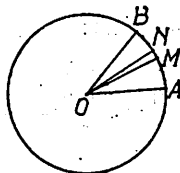


Fig. 9

Din această cauză, în vorbirea obișnuită se spune *când unghi, când arc*, și se obișnuiește a se înlocui adeseori unghiul prin arc corespunzător; în loc de a spune un unghi de n grade, sau a radiani, se spune arc de n grade sau arc de a radiani.

Să nu confundăm însă lungimea unui arc, cu valoarea sa în grade, radiani, etc. Astfel lungimea arcului AB depinde de raza

cu care a fost descris, pe când valoarea în grade, radiani, etc. este aceeași pentru arcele AB , $A'B'$, $A''B''$ cari corespund la acelaș unghi la centru (fig. 10).

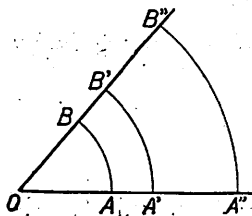


Fig. 10

Observare. În cele ce urmează pentru a înlătura confuzia ce s'ar putea naște prin înlocuirea unghiului prin arc cuprins între laturile sale, vom întrebuința mai mult noțiunea de *unghi*.

¹⁾ Înainte de tratarea chestiunilor ce urmează, se recomandă să se reamintească „Unitățile de măsură” pentru lungimi, unghiuri și suprafețe (vezi „Apendice” pag. 322).

Lungimea l a unui arc, descris cu raza R , unghiul la centru fiind de n° grade sexagesimale sau de α radiani. Se știe din Geometrie că:

$$(1) \quad l = \frac{n^\circ \pi R}{180^\circ} \quad (l \text{ se exprimă în unități de lungime),$$

și am stabilit mai sus relația:

$$(2) \quad l = \alpha \cdot R \quad (\alpha \text{ este un număr abstract; } l \text{ se exprimă în unități de lungime).$$

Observare. Dacă raza R a cercului este egală cu *unitatea de lungime*:

$$l = \alpha \text{ unități de lungime}$$

spre exemplu dacă $R = 1$ cm, iar unghiul α este spre exemplu de

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \text{ radiani,}$$

avem respectiv:

$$l = \frac{\pi}{6} \text{ cm.}, \quad l = \frac{\pi}{3} \text{ cm.}, \quad l = \frac{\pi}{2} \text{ cm.}$$

adică *lungimile* arcelor se exprimă, cum era și de așteptat, în *unități de lungime*.

Când se spune: arc de $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{\pi}{3}$ rad, $\frac{\pi}{2}$ rad, etc. se înțelege

arcul care corespunde unui unghi la centru de $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{\pi}{3}$ rad,

$\frac{\pi}{2}$ rad, etc. *Să nu uităm că radianul este o unitate de unghi nu de arc.*

Lungimea L a cercului are expresiunea:

$$(1) \quad L = 2\pi R$$

Observare. Dacă raza R a cercului este egală cu *unitatea de lungime*:

$$L = 2\pi \text{ unități de lungime}$$

Spre ex.: dacă $R = 1$ dm., $L = 2\pi$ decimetri

dacă $R = 1$ m., $L = 2\pi$ metri, etc.

CONSTRUCȚIA GRAFICĂ A UNUI UNGHIU CÂND SE CUNOAȘTE RAPORTUL A DOUĂ DIN LATURILE UNUI TRIUNGHIU DREPTUNGHIU, FORMAT CU ACEL UNGHIU.

Fie unghiul $\alpha = \widehat{AOB}$ (fig. 11); dintr'un punct M al laturii OB , ducem perpendiculara MN . Se formează astfel triunghiul dreptunghiu OMN .

Exemple: 1. Să se construiască unghiul, când se dă raportul

$$\frac{MN}{OM} = \frac{\text{cateta opusă unghiului}}{\text{ipotenusă}} = \frac{1}{3}$$

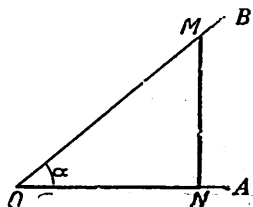


Fig. 11

Răspuns: Pe o dreaptă nedefinită ON (fig. 12), luăm $MN \perp ON$ și anume $MN = 1$ cm. (spre ex.); din M ca centru cu o rază $MO = 3$ cm tăiem dreapta ON în O ; unghiul

$NOM = \alpha$ este unghiul căutat. Acelaș unghiul α îl obținem, dacă luăm

$$M'N' = 2 \text{ cm}$$

și $M'O' = 6$ cm,

$$\text{sau } M''N'' = \frac{1}{2} \text{ cm}$$

$$\text{și } M''O'' = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ cm.}$$

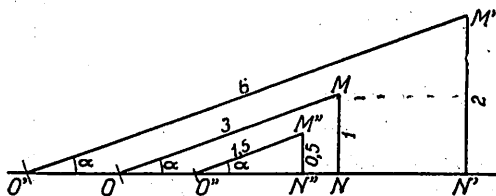


Fig. 12

etc.; deoarece toate triunghiurile OMN , $O'N'M'$, $O''N''M''$ sunt asemenea fiind triunghiuri dreptunghice (în N , N' , N'') și având două perechi de laturi proporționale.

$$\frac{1 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = \frac{2 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = \frac{\frac{1}{2} \text{ cm}}{\frac{3}{2} \text{ cm}} = \dots$$

2. Să se construiască unghiul α când se dă raportul

$$\frac{ON}{OM} = \frac{\text{cateta adiac. ungh.}}{\text{ipotenusă}} = \frac{2}{3}$$

Răspuns: Luăm $ON = 2$ cm (fig. 13); ridicăm în N o perpendiculară MN pe ON , iar din O ca centru cu o rază de 3 cm, tăiem perpendiculara MN în M ; $\widehat{NOM} = \alpha$ este unghiul căutat.

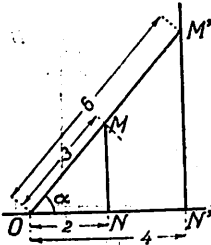


Fig. 13

Dacă luăm $ON' = 4$ cm și raza $OM' = 6$ cm sau $ON'' = 1$ și $OM'' = 1,5$, etc., găseam același unghi deoarecetriunghiurile OMN , $OM'N'$, $OM''N''$ sunt asemenea.

3. Să se construiască unghiul α când se cunoaște raportul

$$\frac{NM}{ON} = \frac{\text{cateta opusă ungh.}}{\text{cateta adiacentă}} = \frac{4}{3}$$

Răspuns: Luăm $ON = 3$ (fig. 14); pe $NM \perp ON$ luăm o lungime $NM = 4$; găsim astfel unghiul $\widehat{NOM} = \alpha$.

Același unghi îl găseam, dacă luăm $ON' = 6$, $NM' = 8$ cm; sau $ON'' = 1,5$ cm, $N''M'' = 2$ cm, etc. deoarece toate triunghiurile ONM , $ON'M'$, $ON''M''$, etc. sunt asemenea.

Aplicație. Să se determine unghiul din fig. 12, 13, 14 în cazurile:

$$\frac{OM}{NM} = \frac{3}{2}; \quad \frac{OM}{ON} = 5; \quad \frac{ON}{NM} = \frac{3}{5}$$

Se va proceda ca mai sus.

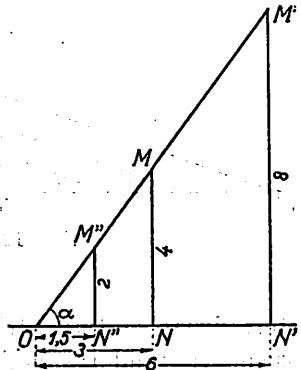


Fig. 14

R E Z U M A T.

CAP. I. — GENERALITĂȚI.

* *Triunghiul* este o figură plană cu trei laturi a, b, c și trei unghiuri A, B, C ; a, b, c , sunt elementele liniare, iar A, B, C , elementele unghiulare ale triunghiului.

* *Triunghiul dreptunghiu* este un triunghi cu unul din unghiuri drepte; latura opusă unghiului drept A , se cheamă *ipotenusă*, celelalte două laturi se numesc *catete*.

* Un triunghi este *determinat*, când se dă (se cunosc) trei elemente (care să nu fie însă toate unghiuri).

Cazurile mai obișnuite sunt, când se dau:

α) la un triunghi oarecare:

(a, B, C); (A, b, c); (a, b, c); (a, b, A)

β) la un triunghi dreptunghiu

(b, B); (b, c); (b, C); (a, b)

* Operația prin care aflăm o parte din elementele triunghiului (elementele necunoscute), când cunoaștem pe celelalte (elemente date), se numește *rezolvare*.

* Rezolvarea unui triunghi se poate face *grafic* sau prin calcul; cu rezolvarea grafică se ocupă *Geometria*; rezolvarea prin calcul formează obiectul *Trigonometriei*.

* Orice cantitate ce se poate măsura, se numește *mărime*¹⁾.

A măsura o mărime, înseamnă a o compara cu altă mărime de acelaș fel, numită *unitate de măsură*.

¹⁾ Vezi „Apendice” pag. 322.

*) *Radianul* este o unitate pentru unghiuri; el este unghiul care are proprietatea că descriind din vârful lui ca centru un arc, *lungimea arcului cuprins între laturi este egal cu raza care l-a descris.*

Un unghi de un radian are $57^{\circ}17'44'',8$ grade sexagesimale.

Fie α valoarea unui unghi în radiani, l lungimea arcului descris din vârful lui ca centru și cuprins între laturi; r raza cercului; avem relația:

$$\alpha_{rad} = \frac{l}{r}$$

* Formule practice pentru transformarea unui unghi din grade sexagesimale în radiani și invers:

$$n \text{ grade sexag.} = \frac{\alpha}{\pi} 180 \text{ radiani}$$

$$\alpha \text{ radiani} = \frac{n^{\circ}}{180^{\circ}} \times \pi \text{ radiani}$$

* Lungimea l a unui arc de n° sau α radiani descris cu raza R are expresiunea:

$$l = \frac{n^{\circ} \pi R}{180^{\circ}} \quad \text{sau} \quad l = \alpha \cdot R.$$

Dacă $R =$ unitatea de lungime, $l = \alpha$ unități de lungime.

* Radianul este o *unitate de unghi*, nu de arc. Când se spune totuși: un arc de α radiani, se înțelege mărimea în radiani a unghiului la centru, corespunzător.

Lungimea cercului de rază R este:

$$L = 2\pi \cdot R$$

când $R =$ unitatea de lungime; $l = 2\pi$ unități de lungime.

E X E R C I Ţ I I.

1. Care este valoarea în grade sexagesimale a unui unghi de 0,8 radiani ($\pi=3,14$)?

R: $45^{\circ}51'35''$.

2. Câți radiani are unghiul de 15° sexagesimale?

R: 0,26 rad.

3. Câți radiani are unghiul de $28^{\circ}13'4''$ sexagesimale?

R: 0,4922433 rad. (Se exprimă întâi unghiul dat sub formă zecimală).

4. Un arc AB , este descris cu o rază $R = 6,28$ m. și corespunde unui unghi la centru de $n^{\circ} = 48^{\circ}39'$ sexagesimale; să se afle lungimea l a arcului.

R: $l = \frac{\pi n^{\circ}}{180^{\circ}} R = 5,3295$ m.

5. Care este lungimea l a unui arc, care corespunde unui unghi la centru a de 1,37 radiani, dacă raza $R = 63,2$ cm.

R: $l = R \cdot \alpha = 86,584$ cm.

6. Să se construiască grafic unghiul $NOM = \alpha$ (fig. 15) în fiecare din cazurile următoare:

se dă: $\frac{MN}{OM} = \frac{1}{6}$; $\frac{ON}{OM} = \frac{2}{7}$;

$\frac{MN}{ON} = 5$; $\frac{OM}{ON} = 2$.

R: Se va proceda ca la pag. 17.

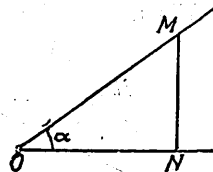


Fig. 15

CAP. II.

LINII TRIGONOMETRICE ALE UNGHIURILOR CUPRINSE ÎNTR-UN UNghiUR DE 0° ȘI 90°.

S'a arătat mai sus că obiectul Trigonometriei este rezolvarea prin calcul a triunghiurilor, adică aflarea elementelor lor necunoscute cu ajutorul elementelor date.

Este deci necesar să stabilim relațiuni care să înrudească laturile cu unghiurile, astfel ca să putem afla elementele necunoscute ale triunghiului, folosind elementele date.

Aceste relațiuni se pot stabili ușor dacă folosim pentru a exprima valoarea unui unghi, rapoartele dintre laturile unui triunghi dreptunghi în care unul dintre unghiurile ascuțite este unghiul considerat; aceste rapoarte se cheamă și *linii trigonometrice*, ele vor fi studiate în cele ce urmează.

SINUS. COSINUS. TANGENTĂ.

Fie un unghi oarecare AOB cuprins între 0° și 90° (fig. 16); dintr'un punct oarecare M al uneia din laturi, spre exemplu OB, coborâm perpendiculara MM' pe cealaltă latură OA a unghiului.

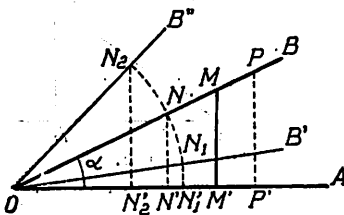


Fig. 16

Se formează un triunghi dreptunghi OMM' cu laturile căruia putem forma următoarele rapoarte:

$$(1) \quad \frac{\text{cateta opusă lui } \hat{O}}{\text{ipotenusă}} = \frac{MM'}{OM}$$

$$(2) \quad \frac{\text{cateta adiacentă lui } \hat{O}}{\text{ipotenusă}} = \frac{OM'}{OM}$$

$$(3) \quad \frac{\text{cateta opusă lui } \hat{O}}{\text{cateta adiacentă lui } \hat{O}} = \frac{MM'}{OM'}$$

Să observăm că:

1) pentru un unghi anume \hat{O} , oriunde am fi ales punctul M , rapoartele de mai sus păstrează aceleași valori, deoarece triunghiurile:

OMN , OMM' , OMP' , etc.

sunt asemenea și deci laturile omoloage sunt proporționale. Spre exemplu în triunghiurile OMM' , OMN , OMP' , avem:

$$\frac{MM'}{OM} = \frac{NN'}{ON} = \frac{PP'}{OP}$$

2) dacă în loc de unghiul \hat{O} , am avea un unghi mai mic, \hat{O}' , sau un unghi mai mare, \hat{O}'' , rapoartele de mai sus nu mai au aceleași valori ca în cazul unghiului \hat{O} .

Astfel, dacă din O ca centru descriem un arc de cerc, care taie latura OB' în N_1 , în triunghiul dreptunghiu ON_1N_1' , raportul:

$$\frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenusă}} = \frac{N_1N_1'}{ON_1}$$

este mai mic decât raportul analog corespunzător unghiului \hat{O} : $\frac{NN'}{ON}$, deoarece el are numitorul $ON_1 = ON$, iar numărătorul N_1N_1' este mai mic decât NN' ; tot astfel se poate arăta că pentru

unghiul mai mare \hat{O}'' raportul $\frac{N_2N_2'}{ON_2}$ este mai mare decât $\frac{NN'}{ON}$.

În mod analog se poate dovedi că rapoartele (2) și (3) au alte valori, când unghiul este mai mic sau mai mare decât $\hat{O} = \alpha$.

Rezultă de aci că pentru un unghi hotărît, rapoartele (1), (2) și (3) au valori bine hotărîte, și reciproc: dacă cunoaștem valoarea unuia din aceste rapoarte, putem cunoaște unghiul ascuțit \hat{O} , deoarece s'a arătat că putem construi un unghi al unui triunghi

dreptunghiu când cunoaștem raportul dintre catetele lui, sau raportul dintre o catetă și ipotenușa triunghiului (vezi pag. 17).

Prin urmare, putem reprezenta valoarea unui unghiu ascuțit prin raportul a două lungimi, care sunt două din laturile unui triunghiu dreptunghiu format cu acel unghiu.

Definiție. Intr'un triunghiu dreptunghiu:

1) raportul dintre cateta opusă unui unghiu ascuțit și ipotenușa se chiamă *sinusul* unghiului și se scrie *sinus* \hat{O} sau prescurtat *sin* \hat{O} :

$$\sin \hat{O} = \frac{\text{cateta opusă lui } \hat{O}}{\text{ipotenușă}} = \frac{MM'}{OM} \quad ^1)$$

2) raportul dintre cateta adiacentă unui unghiu ascuțit și ipotenușă, se chiamă *cosinusul* unghiului și se scrie *cosinus* \hat{O} sau prescurtat *cos* \hat{O} :

$$\cos \hat{O} = \frac{\text{cateta adiacentă lui } \hat{O}}{\text{ipotenușă}} = \frac{OM'}{OM}$$

3) raportul dintre cateta opusă unui unghiu ascuțit și cateta adiacentă, se chiamă *tangenta* unghiului și se scrie *tang* \hat{O} sau prescurtat *tg* \hat{O} :

$$\text{tg } \hat{O} = \frac{\text{cateta opusă lui } \hat{O}}{\text{cateta adiacentă lui } \hat{O}} = \frac{MM'}{OM'}$$

Proprietăți. 1. Sinusul unui unghiu fiind egal cu raportul dintre cateta opusă unghiului și ipotenușă este totdeauna mai mic decât unitatea.

Pentru un motiv analog cosinusul unui unghiu este și el totdeauna mai mic decât unitatea.

2. Tangenta unui unghiu ascuțit poate însă avea orice valoare, cât de mică sau cât de mare, deoarece ea fiind egală cu raportul dintre cateta opusă și cateta adiacentă, poate primi valori între 0 și $+\infty$; într'adevăr dacă păstrăm lungimea catetei adiacente

¹⁾ Sau $\sin \widehat{AOB}$, sau încă $\sin \angle AOB$. Dacă însemnăm unghiuul AOB cu o literă a , se mai poate nota: $\sin a$.

constantă și micșorăm din ce în ce mai mult lungimea catetei opuse unghiului, valoarea tangentei unghiului scade și se apropie de zero; iar dacă procedăm invers, păstrând constantă lungimea catetei opuse și micșorăm lungimea catetei adiacente până aproape de zero, valoarea tangentei crește și poate deveni oricât de mare.

Observare importantă. Sinusul, cosinusul și tangenta unui unghi, fiind prin definiție rapoarte a două lungimi, adică a două mărimi de acelaș fel, sunt *numere abstracte*; aceste numere nu reprezintă nici metri, nici altfel de mărimi concrete, ci ele arată de câte ori lungimea dela numitorul raportului se cuprinde în lungimea dela numărător.

Spre exemplu:

$$1) \operatorname{tg} \alpha = 3; \text{ prin definiție: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta adiacentă}} = 3;$$

urmează că α este un unghi ascuțit, într'un triunghi dreptunghi OAB , în care cateta adiacentă OA se cuprinde de trei ori în cateta opusă AB (fig. 17).



$$2) \sin \alpha = \frac{1}{2}; \text{ avem } \sin \alpha = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenusă}} = \frac{1}{2},$$

aceasta înseamnă că α este un unghi ascuțit într'un triunghi dreptunghi, în care cateta opusă OA este jumătate cât ipotenusa OB (sau că ipotenusa se cuprinde în cateta opusă de 0,5 ori) (fig. 18).

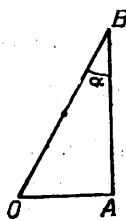


Fig. 18

$$3) \cos \alpha = \frac{3}{2} = 0,666; \text{ prin definiție:}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateta adiacentă}}{\text{ipotenusă}} = \frac{2}{3}$$

aceasta înseamnă că α este un unghi ascuțit într'un triunghi dreptunghi, în care cateta adiacentă OA are două unități iar ipotenusa OB , trei unități, adică $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$ (fig. 19).

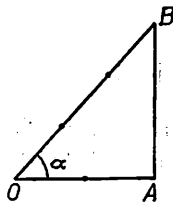


Fig. 19

Aplicații: 1. Să se construiască un unghi α cărui α îi cunoaștem sinusul.

Fie: $\sin \alpha = \frac{1}{5} = 0,2$. Chestiunea revine la a construi un triunghi dreptunghi OAB în care raportul dintre cateta opusă unghiului α , AB , și ipotenușa OA , să fie egal cu $\frac{1}{5}$.

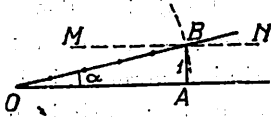


Fig. 20

În acest scop (fig. 20) ducem o dreaptă OA ; la o distanță de ea egală cu o unitate arbitrar aleasă, ducem o paralelă MN la dreapta OA și apoi descriem un arc de cerc cu centrul în O și cu o rază egală cu cinci unități (dintre acelea alese), care taie paralela MN în punctul B ; unghiul AOB este unghiul căutat α deoarece în triunghiul dreptunghi OAB :

$$\sin \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{1}{5}$$

2. Să se construiască un unghi α cărui α îi cunoaștem cosinusul. Fie: $\cos \alpha = \frac{3}{4} = 0,75$. Pe

o dreaptă nedefinită (fig. 21), luăm OA egal cu trei unități de lungime (alese după voie), ridicăm în A o perpendiculară pe OA , iar din O ca centru cu o rază egală cu patru unități de acelaș fel, descriem un arc de cerc, care taie pe AB în punctul B ; unghiul AOB este unghiul căutat, fiindcă:

$$\cos \alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{4}$$

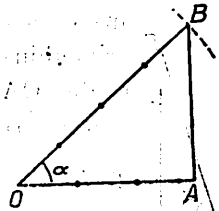


Fig. 21

3. Să se construiască un unghi α cărui α îi cunoaștem tangenta.

Fie: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$. Este suficient să purtăm pe o dreaptă OA (fig. 22), trei unități, iar pe perpendiculara AB , cinci unități de acelaș fel; unghiul AOB este unghiul căutat, deoarece:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{5}{3}$$

Observare. Dacă ni s'ar da $\operatorname{tg} \alpha = 1$, aceasta înseamnă că raportul dintre catetele triunghiului OAB este egal cu unitatea; adică cele două catete sunt egale între ele; în acest caz triunghiul dreptunghiu este isoscel și deci $\alpha = 45^\circ$.

Concluzie. Unei tangente trigonometrice egală cu unitatea îi corespunde un unghi ascuțit de 45° .

Exercițiu. Să se arate că dacă $\operatorname{tg} \alpha > 1$, unghiul α este cuprins între 45° și 90° , iar dacă $\operatorname{tg} \alpha < 1$, unghiul α este mai mic de 45° .



Fig. 22

Reciproc. Dacă ni se dă un unghi, putem afla sinusul, cosinusul și tangenta lui.

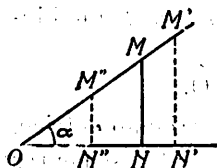


Fig. 23

Să distingem două cazuri:

a) *Unghiul este dat grafic.* În acest caz luăm un punct M (fig. 23) oarecare pe una din laturi și coborâm perpendiculara MN pe cealaltă latură. Măsurând lungimile catetelor ON, MN și a ipotenuzei OM, vom putea calcula rapoartele:

$$\frac{MN}{OM} = \sin \alpha; \quad \frac{ON}{OM} = \cos \alpha; \quad \frac{MN}{ON} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Acest procedeu este însă *aproximativ*, deoarece la măsurarea lungimilor se pot face erori; apoi se pot face erori și la împărțirea numerelor rezultate din aceste măsurători.

Se poate obține un rezultat mai exact, repetând operația în triunghiurile dreptunghice $OM'N'$, $OM''N''$ și luând o *medie* a rezultatelor.

b) *Unghiul este dat în grade (sau în radiani).*

În acest caz am putea construi unghiul, și proceda ca mai sus, dar metoda nu este exactă, deoarece nu putem desena exact un unghi dat în grade, minute și uneori și în secunde. S'au calculat însă prin alte mijloace de matematici mai înalte, valorile sinusului, cosinusului și tangentei pentru toate unghiurile cuprinse între

0° și 90° din minut în minut (și chiar din secundă în secundă) și s'au înscris în tabele, numite *tabele de valori naturale*¹⁾. Când ne este dat un unghi în grade, aflăm în aceste tabele de valori naturale, liniile trigonometrice ale lui. Tabelele de valori naturale ne permit să efectuăm totdeodată și operația inversă: să aflăm unghiul când avem sinusul, cosinusul și tangenta²⁾.

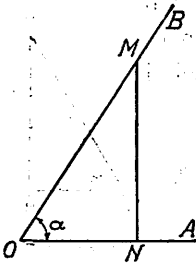


Fig. 24

COTANGENTA.

În afară de rapoartele (1), (2), (3) ce se pot forma cu laturile unui triunghi dreptunghiu mai putem scrie și raportul (fig. 24): $\frac{\text{cateta adiac. lui } \hat{O}}{\text{cateta opusă lui } \hat{O}}$ numit *cotangenta* unghiului O și care este inversul raportului numit $tg \hat{O}$.

Se scrie: $cotg \hat{O}$ sau $cot a$. Ca și primele trei linii trigonometrice, și cotangenta este un număr abstract; ca și tangenta (și pentru

¹⁾ Vezi pag. 30.

²⁾ Prima *tabelă trigonometrică* pentru sinusuri, se atribuie lui *Purbach* (născut în Bavaria în 1421).

Cei vechi întrebuințau în loc de sinusuri, *corzile* arcelor corespunzătoare unghiurilor; *Purbach* este acela care a introdus *sinusurile* în locul corzilor (vezi și pag. 10).

Tabelele lui *Purbach* au fost perfecționate de *Regiomontanus* (1533). În secolul următor *Ioachim Rheticus* calculează liniile trigonometrice cu 11 zecimale, din minut în minut pentru primul cadran și din 10 secunde în 10 secunde pentru primul și ultimul grad.

În 1616 *Barthelemi Pitiscus* a dat o nouă ediție a tabelor trigonometrice conținând valorile liniilor din $10''$ în $10''$ cu 16 zecimale.

³⁾ Se mai pot scrie și rapoartele:

$$(5) \quad \frac{\text{ipotenusa}}{\text{cateta opusă lui } \hat{O}} = \text{cosec } \hat{O} \text{ (citește cosecantă de } \hat{O} \text{)}$$

$$(6) \quad \frac{\text{ipotenusa}}{\text{cateta adiac. lui } \hat{O}} = \text{sec } \hat{O} \text{ (citește secantă de } \hat{O} \text{)}$$

Avem:

$$\text{cosec } \hat{O} = \frac{1}{\sin \hat{O}} \text{ și } \text{sec } \hat{O} = \frac{1}{\cos \hat{O}} \text{ (Vezi « Apendice », pag. 329).}$$

un motiv analog), ea poate primi orice valoare cuprinsă între 0 și ∞ .

Din însăși definiția cotangentei rezultă relația:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

care ne dă valoarea cotangentei când cunoaștem valoarea tangentei.

Fiind dată cotangenta putem construi grafic unghiul α ; spre exemplu:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{2}{5}$$

Luând pe o dreaptă nedefinită OA, două unități de lungime, iar pe perpendiculara AB, cinci unități de acelaș fel (fig. 25), obținem unghiul $\alpha = \widehat{AOB}$, deoarece în triunghiul dreptunghiu OAB:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{cateta adiac. } \widehat{O}}{\text{cateta opusă } \widehat{O}} = \frac{2}{5}.$$

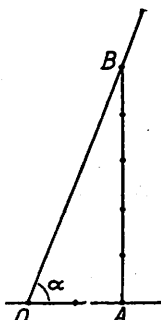


Fig. 25

Având dată cotangenta unui unghi, acesta poate fi aflat și cu tabelele de valori naturale, așa cum se va arăta la pag. 33.

Aplicații. 1. Să se deducă din relația:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

că $\operatorname{cotg} \alpha$ poate primi orice valoare între 0 și $+\infty$.

2. Să se construiască grafic unghiurile α , β , γ , dacă:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{7}, \quad \operatorname{cotg} \beta = \frac{5}{2}, \quad \operatorname{cotg} \gamma = 3.$$

INTREBUINȚAREA TABELELOR DE VALORI NATURALE.

Din cele spuse la pag. 28 rezultă că: *având valoarea unei linii trigonometrice putem afla unghiul și invers.*

Se dă pe pagina următoare o pagină din tabela de valori naturale a unghiurilor cuprinse între 0° și 90° ; valori calculate cu trei zecimale exacte (din Tabela Dupuis).

XXIV. Lignes trigonométriques naturelles.

°	'	Sin.	D	Tang.	D	Cotg.	D	Cos.	D	'	°
30	0	0,500		0,577		1,732		0,866		0	60
	30	508	8	589	12	698	34	862	4	30	
31	0	515	7	601	12	664	34	857	5	0	59
	30	522	7	613	12	632	32	853	4	30	
32	0	530	8	625	12	600	32	848	5	0	58
	30	537	7	637	12	570	30	843	5	30	
		—	8	—	12	—	30	—	4		
33	0	545		649		540		839		0	57
	30	552	7	662	13	511	29	834	5	30	
34	0	559	7	675	13	483	28	829	5	0	56
	30	566	7	687	12	455	28	824	5	30	
35	0	574	8	700	13	428	27	819	5	0	55
	30	581	7	713	13	402	26	814	5	30	
		—	7	—	14	—	26	—	5		
36	0	588		727		376		809		0	54
	30	595	7	740	13	351	25	804	5	30	
37	0	602	7	754	14	327	24	799	5	0	53
	30	609	7	767	13	303	24	793	6	30	
38	0	616	7	781	14	280	23	788	5	0	52
	30	623	7	795	14	257	23	783	5	30	
		—	6	—	15	—	22	—	6		
39	0	629		810		235		777		0	51
	30	636	7	824	14	213	22	772	5	30	
40	0	643	7	839	15	192	21	766	6	0	50
	30	649	6	854	15	171	21	760	6	30	
41	0	656	7	869	15	150	21	755	5	0	49
	30	663	7	885	16	130	20	749	6	30	
		—	6	—	15	—	19	—	6		
42	0	669		900		111		743		0	48
	30	676	7	916	16	091	20	737	6	30	
43	0	682	6	933	17	072	19	731	6	0	47
	30	688	6	949	16	054	18	725	6	30	
44	0	695	7	966	17	036	18	719	6	0	46
	30	701	6	0,983	17	018	18	713	6	30	
		—	6	—	17	—	18	—	6		
45	0	0,707		1,000		1,000		0,707		0	45
°		Cos.		Cotg.		Tang.		Sin.			°

În tabela *Dupuis* (pag. 149, 150, 151) se dau valorile naturale (numerice) a sinusului, cosinusului, tangentei și cotangentei, cu *trei zecimale exacte*. Pentru calcule care nu cer prea mare exactitate, precum și pentru verificarea aproximativă a unui rezultat, întrebuințarea lor este foarte utilă.

Valorile numerice ale acestor linii trigonometrice sunt date din 30' în 30'; pentru unghiuri mai mari de 45°, se va observa că liniile trigonometrice trebuiesc citite pe ultima linie de jos; pe aceleași coloane, corespund astfel sinusul cu cosinusul, și tangenta cu cotangenta ¹⁾.

Exemple.

I. *Se dă un unghi ce se găsește în table și se cere valoarea naturală a liniilor trigonometrice.* Spre exemplu: pentru unghiurile a) 9°30'; b) 27°; c) 48°30'; d) 84°, găsim:

$$a) \sin 9^{\circ}30' = 0,165 \quad \text{tg } 9^{\circ}30' = 0,167$$

$$\text{cotg } 9^{\circ}30' = 5,976 \quad \text{cos } 9^{\circ}30' = 0,986$$

$$b) \sin 27^{\circ} = 0,454 \quad \text{tg } 27^{\circ} = 0,510$$

$$\text{cotg } 27^{\circ} = 1,963 \quad \text{cos } 27^{\circ} = 0,891$$

$$c), \sin 48^{\circ}30' = 0,749 \quad \text{tg } 48^{\circ}30' = 0,130$$

$$\text{cotg } 48^{\circ}30' = 0,885 \quad \text{cos } 48^{\circ}30' = 0,663$$

$$d) \sin 84^{\circ} = 0,995 \quad \text{tg } 84^{\circ} = 9,514$$

$$\text{cotg } 84^{\circ} = 0,105 \quad \text{cos } 84^{\circ} = 0,105$$

II. *Unghiul nu se găsește în tabelă.* Dacă privim tablele de valori naturale se observă că atunci când unghiul crește din minut în minut, sinusul nu crește cu cantități egale; tot astfel și tangenta. Deasemeni cosinusul nu descrește cu cantități egale; tot astfel și cotangenta. *Rezultă de aci că creșterile unghiului nu sunt propor-*

¹⁾ Această alcătuire a tabelelor rezultă din proprietatea că sinusul și tangenta unui unghi sunt respectiv egale cu cosinusul și cotangenta unghiului complementar (vezi pag. 35).

ționale cu creșterile sau descreșterile respective ale liniilor trigonometrice. Totuși, pentru că dela un minut la altul creșterile sau descreșterile, atât ale unghiului cât și ale liniilor trigonometrice sunt mici, vom admite că ele sunt proporționale, eroarea ce se face fiind neglijabilă.

1. Spre exemplu se cere: $\sin 14^{\circ}40'$; procedăm astfel:

$$14^{\circ}30' < 14^{\circ}40' < 15^{\circ}$$

dar $\sin 14^{\circ}30' = 0,250$ $\sin 15^{\circ} = 0,259$

admițând că creșterile sinusului sunt proporționale cu ale unghiului putem judeca astfel: dacă unghiul crește dela $14^{\circ}30'$ la 15° adică cu $30'$, sinusul crește dela $0,250$ la $0,259$ adică cu $0,009$ (sau cu nouă unități de al treilea ordin zecimal); dacă unghiul ar crește dela $14^{\circ}30'$ la $14^{\circ}40'$ adică cu $10'$, cu cât ar crește sinusul? In baza aproximației de mai sus că creșterile mici ale unghiului sunt proporționale cu creșterile (sau descreșterile) liniilor trigonometrice, obținem regula de trei:

$$\begin{array}{r} 30' \dots \nearrow \dots 0,009 \\ 10' \dots \nearrow \dots x \\ \hline x = \frac{10 \times 0,009}{30} = 0,003 \end{array}$$

deci adăogând la $0,250$ pe $0,003$, găsim:

$$\sin 14^{\circ}40' = 0,253$$

2. Fie să calculăm $\cos 28^{\circ}25'$; observând că:

$$28^{\circ} < 28^{\circ}25' < 28^{\circ}30'$$

iar:

$$\cos 28^{\circ} = 0,883 \quad \cos 28^{\circ}30' = 0,879$$

și că atunci când unghiul crește, cosinusul descrește, obținem regula de trei:

$$\begin{array}{r} 30' \dots \searrow \dots 0,004 \\ 25' \dots \searrow \dots x \\ \hline x = \frac{25 \times 0,004}{30} = 0,003 \end{array} \quad (0,883 - 0,879 = 0,004)$$

Din valoarea 0,883 a cosinusului de 28° trebuie deci să scădem 0,003 și găsim:

$$\cos 28^\circ 25' = 0,880$$

III. Se dă valoarea naturală a unei linii trigonometrice care se află în tabele și se cere să se afle unghiul.

1) $\sin x = 0,663$; pe coloana sinusului găsim că 0,663 corespunde la unghiul de $41^\circ 30'$; deci: $x = 41^\circ 30'$.

2) $\cos x = 0,566$; această valoare o găsim pe coloana cosinusului înscris în rândul de jos al tablei; aceasta înseamnă că unghiul este mai mare de 45° și trebuie deci citit pe coloana cea mai din dreapta. Se găsește $x = 55^\circ 30'$.

3) $\operatorname{tg} x = 2,605$; găsim această valoare citind tangenta pe rândul cel mai de jos; prin urmare $x = 69^\circ$.

4) $\operatorname{cotg} x = 1,327$; găsim $x = 37^\circ$.

IV. Valoarea naturală a liniei trigonometrice nu se găsește în tabelă.

1) $\sin x = 0,186$; această valoare este cuprinsă între valoarea 0,182 ce corespunde unghiului de $10^\circ 30'$ și valoarea 0,191 ce corespunde unghiului de 11° ; unghiul x se află deci între $10^\circ 30'$ și 11° ; deoarece am admis că creșterile unghiului sunt proporționale cu ale sinusului, judecăm astfel: dacă sinusul crește de la 0,182 la 0,191 adică cu 0,009, unghiul crește de la $10^\circ 30'$ la 11° adică cu $30'$; dar dacă sinusul ar crește de la 0,182 la 0,186 adică cu 0,004 cu cât ar crește unghiul?

Obținem regula de trei:

$$\begin{array}{r} 9 \dots\dots \nearrow \dots\dots 30' \\ 4 \dots\dots \nearrow \dots\dots x \\ \hline x = \frac{4 \times 30}{9} = 13',3 \sim 13 \end{array}$$

unghiul x va fi deci: $10^\circ 30' + 13' = 10^\circ 43'$.

2) Fie $\operatorname{cotg} x = 1,311$; găsim în tabelă:

$$1,327 > 1,311 > 1,303$$

iar:

$$37^{\circ} < x < 37^{\circ}30'$$

Observând că

$$1,327 - 1,303 = 0,024$$

$$1,327 - 1,311 = 0,016$$

și că atunci când unghiul *crește*, cotangenta *scade*, obținem regula de trei:

pentru o *scădere* a logaritmului cu: 0,024 unghiul *crește* cu: 30'

» » » » » » » 0,016 » » » x

$$x = \frac{0,016 \times 30}{0,024} = 20'$$

deci:

$$x = 37^{\circ} + 20' = 37^{\circ}20'.$$

Observare. Din cele ce preced s'a văzut că valorile sinusului și cosinusului unui unghi ascuțit sunt totdeauna mai mici decât unitatea, iar valorile tangentei și cotangentei pot fi oricât de mici sau oricât de mari.

Din tabela valorilor naturale se vede că dacă unghiul α trece treptat dela 0° spre 90° :

a) $\sin \alpha$ crește treptat dela 0 (valoare pe care o ia pentru $\alpha = 0$) spre valoarea 1 (pe care o ia când $\alpha = 90^{\circ}$);

b) $\cos \alpha$ scade treptat dela 1 (valoare pe care o ia pentru $\alpha = 0$) până la 0 (pentru $\alpha = 90^{\circ}$);

c) $\operatorname{tg} \alpha =$ crește treptat dela valoarea zero (ce corespunde la $\alpha = 0$) spre $+\infty$ (valoare pe care o ia când $\alpha = 90^{\circ}$).

Reciproc, la orice valoare dată, cuprinsă între 0 și 1 pentru $\sin \alpha$ sau $\cos \alpha$, putem afla din tabele unghiul corespunzător α ; tot astfel la orice valoare dată, cuprinsă între 0 și $+\infty$, pentru $\operatorname{tg} \alpha$, putem afla unghiul α .

Aplicație. Să se demonstreze că dacă α variază între 0° și 90° $\sin \alpha$ și $\cos \alpha$ variază respectiv între 0 și 1, și 1 și 0, iar $\operatorname{tg} \alpha$ între 0 și $+\infty$.

Se vor folosi construcțiile grafice prin care putem afla $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ când se cunoaște α , și acelea prin care putem afla pe α când se dă $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ sau $\operatorname{tg} \alpha$.

RELATIUNI INTRE LINILE TRIGONOMETRICE A DOUĂ UNGHURI COMPLIMENTARE. Două unghiuri α și β sunt complementare când suma lor este de 90° :

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Fie unghiul $\widehat{AOB} = \alpha$ (fig. 26); să formăm triunghiul dreptunghiu în N: ONM, în care, după definiție, avem:

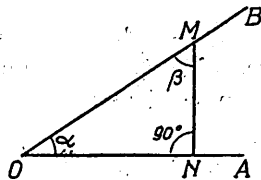


Fig. 26

$$(1) \quad \sin \alpha = \frac{MN}{OM}, \quad \cos \alpha = \frac{ON}{OM}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{MN}{ON}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{ON}{MN}$$

Unghiul $\widehat{OMN} = \beta$ este complementar unghiului α ; tot după definiție avem:

$$\sin \beta = \frac{\text{cateta opusă lui } \beta}{\text{ipotenusă}} = \frac{ON}{OM}; \quad \cos \beta = \frac{\text{cateta adiac. lui } \beta}{\text{ipotenusă}} = \frac{MN}{OM}$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\text{cateta opusă lui } \beta}{\text{cateta adiac. lui } \beta} = \frac{ON}{MN}; \quad \operatorname{cotg} \beta = \frac{\text{cateta adiac. lui } \beta}{\text{cateta opusă lui } \beta} = \frac{MN}{ON}$$

Din compararea relațiilor (1) și (2) găsim:

$$(3) \quad \sin \alpha = \cos \beta \quad \text{și} \quad \cos \alpha = \sin \beta$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta \quad \text{și} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$$

adică:

Sinusul unui unghi este egal cu cosinusul unghiului complementar și tangenta unui unghi este egală cu cotangenta unghiului complementar.

Aceste proprietăți se pot scrie și astfel:

$$(4) \quad \boxed{\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)} \quad \text{și} \quad \boxed{\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} (90^\circ - \alpha)}$$

Valorile liniilor trigonometrice pentru unghiurile de 0° , 30° , 45° , 60° și 90° .

1) $\alpha = 0^\circ$. Dacă în fig. 24 ne închipuim că unghiul α se micșorează și că în triunghiul dreptunghiu OMN păstrăm lungimea ipotenusei OM constantă, cateta MN se micșorează iar raportul:

$$\sin \alpha = \frac{MN}{OM}$$

scade *treptat* deoarece numărătorul scade treptat, iar numitorul rămâne constant; pentru $\alpha = 0^\circ$, găsim:

(1)

$$\sin 0^\circ = 0$$

Când unghiul α scade treptat cateta ON crește *treptat* și devine egală cu ipotenusa OM când $\alpha = 0^\circ$; în acest timp raportul $\cos \alpha = \frac{ON}{OM}$ crește și ia pentru $\alpha = 0^\circ$ valoarea 1:

(2)

$$\cos 0^\circ = 1$$

În același mod găsim că raportul $\operatorname{tg} \alpha = \frac{NM}{ON}$ scade, deoarece numărătorul se micșorează și numitorul crește; pentru $\alpha = 0^\circ$ găsim:

(3)

$$\operatorname{tg} 0^\circ = 0$$

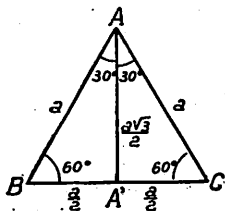


Fig. 27

2) $\alpha = 30^\circ$ și $\alpha = 60^\circ$. Fie un triunghi echilateral ABC, de latură a (fig. 27) și AA' înălțimea triunghiului coborâtă din vârful A pe latura BC; ea este și o bisectoare a triunghiului.

Din teorema lui *Pitagora* aplicată în triunghiul dreptunghiu ($AA'C$) găsim:

$$A'A^2 = AC^2 - A'C^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

prin urmare:

$$AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Din triunghiul $AA'C$ avem:

$$\sin 30^\circ = \frac{A'C}{AC} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}; \quad \cos 30^\circ = \frac{AA'}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{A'C}{AA'} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \operatorname{cotg} 30^\circ = \frac{AA'}{A'C} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

apoi:

$$\sin 60^\circ = \frac{AA'}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^\circ = \frac{A'C}{AC} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{AA'}{A'C} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}; \quad \operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{A'C}{AA'} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Observare. Valorile lui $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\operatorname{tg} 60^\circ$, $\operatorname{cotg} 60^\circ$ le putem afla și cu ajutorul relațiilor (4) (pag. 35):

$$\begin{aligned} \sin 60^\circ &= \cos 30^\circ & \cos 60^\circ &= \sin 30^\circ \\ \operatorname{tg} 60^\circ &= \operatorname{cotg} 30^\circ & \operatorname{cotg} 60^\circ &= \operatorname{tg} 30^\circ \end{aligned}$$

Deci:

(4)	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$
-----	---	--

(5)	$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{cotg} 60^\circ$	$\operatorname{cotg} 30^\circ = \sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ$
-----	--	--

3) $\alpha = 45^\circ$. Fie un pătrat ABCD de latură a (fig. 28); diagonala AC împarte pătratul în două triunghiuri egale și este în același timp bisectoarea unghiurilor A și C; avem:

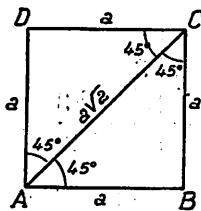


Fig. 28

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$AC = a\sqrt{2}$$

În triunghiul dreptunghiu ABC putem scrie:

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

deci:

(6)

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

apoi:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1; \quad \operatorname{cotg} 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

deci:

(7)

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = 1$$

4) $\alpha = 90^\circ$. Referindu-ne la fig. 24, dacă unghiul α crește și presupunem ipotenusa OM constantă ca mărime, cateta MN crește, raportul $\sin \alpha = \frac{MN}{OM}$ crește iar pentru $\alpha = 90^\circ$, el devine egal cu 1:

(8)

$$\sin 90^\circ = 1$$

tot astfel, când α crește, cateta ON scade, raportul $\frac{ON}{OM}$ scade (și se apropie de zero așa încât:

(9)

$$\cos 90^\circ = 0$$

Pentru a găsi valoarea tangentei de 90° să presupunem cateta ON constantă; atunci când unghiul α crește, cateta NM crește spre ∞ , raportul $\operatorname{tg} \alpha = \frac{NM}{ON}$ crește și el spre ∞ , așa încât:

(10)

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \infty.$$

Printr'un raționament analog (sau observând că $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha}$), găsim:

(11)

$$\operatorname{cotg} 90^\circ = 0$$

Observare. Valoarea $\cos 90^\circ = 0$ rezultă și din proprietatea: $\cos 90^\circ = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$; tot astfel: $\operatorname{cotg} 90^\circ = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$.

RELAȚII ÎNTRE ELEMENTELE LINIARE ȘI UNGHIULARE ALE UNUI TRIUNGHIU DREPTUNGHIU.

Fie un triunghi dreptunghi ABC, cu unghiurile A, B, C și având laturile a, b, c (fig. 29); reamintim că vârful unghiului drept se notează cu A, prin urmare a este lungimea ipotenusei; din definițiile liniilor trigonometrice putem scri:

$$(1) \quad \sin B = \frac{b}{a}; \quad (2) \quad \cos B = \frac{c}{a}$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}; \quad (4) \quad \operatorname{cotg} B = \frac{c}{b}$$

Din relația (1) rezultă:

(I)

$$b = a \sin B$$

adică:

Regula I. O catetă este egală cu ipotenusa înmulțită cu sinusul unghiului opus.

Din relația (2) rezultă:

(II)

$$c = a \cos B$$

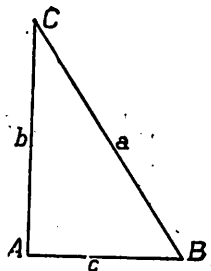


Fig. 29

adică:

Regula II. *O catetă este egală cu ipotenusa înmulțită cu cosinusul unghiului alăturat.*

Din relația (3) avem:

(III)

$$b = c \operatorname{tg} B$$

adică:

Regula III. *O catetă este egală cu cealaltă catetă înmulțită cu tangenta unghiului opus.*

Din relația (4) obținem:

(IV)

$$c = b \operatorname{cotg} B$$

adică:

Regula IV. *O catetă este egală cu cealaltă catetă înmulțită cu cotangenta unghiului alăturat.*

Aceste patru reguli sunt foarte utile în aplicațiuni.

R E Z U M A T.

CAP. II. — LINII TRIGONOMETRICE.

* Intr'un triunghi dreptunghi, α fiind unul din unghiurile ascuțite:

$$(1) \quad \sin \alpha = \frac{\text{cateta opusă lui } \alpha}{\text{ipotenusă}}$$

$$(2) \quad \cos \alpha = \frac{\text{cateta adiac. lui } \alpha}{\text{ipotenusă}}$$

$$(3) \quad \text{tg } \alpha = \frac{\text{cateta opusă lui } \alpha}{\text{cateta adiac. lui } \alpha}$$

$$(4) \quad \text{cotg } \alpha = \frac{\text{cateta adiac. lui } \alpha}{\text{cateta opusă lui } \alpha}$$

Aceste rapoarte se numesc linii trigonometrice ale unghiului α .

* Unui unghi α hotărît, îi corespunde câte o singură valoare pentru $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\text{tg } \alpha$, $\text{cotg } \alpha$ și reciproc: dacă cunoaștem una din aceste linii trigonometrice putem determina grafic sau prin tabele de valori naturale un singur unghi *ascuțit* α .

* Liniile trigonometrice sunt numere abstracte.

* Intre liniile trigonometrice a două unghiuri *complimentare* ($\alpha + \beta = 90^\circ$) există relațiile:

$$\sin \alpha = \cos \beta \qquad \text{tg } \alpha = \text{cotg } \beta$$

* Valorile liniilor trigonometrice a câtorva unghiuri remarcabile:

$$\begin{array}{cccc} \sin 0^\circ = 0 & \cos 0^\circ = 1 & \text{tg } 0^\circ = 0 & \text{cotg } 0^\circ = \infty \\ \sin 30^\circ = \frac{1}{2} & \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} & \text{cotg } 30^\circ = \sqrt{3} \end{array}$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = 1$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \quad \operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 90^\circ = 1 \quad \cos 90^\circ = 0 \quad \operatorname{tg} 90^\circ = \infty \quad \operatorname{cotg} 90^\circ = 0$$

* Intre elementele liniare și unghiulare ale unui triunghi dreptunghiu există relațiunile:

Regula I. O catetă este egală cu ipotenusa înmulțită cu sinusul unghiului opus.

Regula II. O catetă este egală cu ipotenusa înmulțită cu cosinusul unghiului alăturat.

Regula III. O catetă este egală cu cealaltă catetă înmulțită cu tangenta unghiului opus.

Regula IV. O catetă este egală cu cealaltă catetă înmulțită cu cotangenta unghiului alăturat.

E X E R C I Ţ I I.

1. Intr'un triunghi dreptunghi ABC, laturile $a = 5$ m., $b = 4$ m., $c = 3$ m.; să se calculeze liniile trigonometrice ale unghiului C.

R: Se verifică mai întâiu că $5^2 = 4^2 + 3^2$; $\sin C = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$; $\cos C = \frac{b}{a} = \frac{4}{5}$;
 $\operatorname{tg} C = \frac{c}{b} = \frac{3}{4}$; $\operatorname{cotg} C = \frac{b}{c} = \frac{4}{3}$.

2. Intr'un triunghi dreptunghi, raportul dintre catete este $\frac{5}{8}$; care este valoarea tangentei unghiului α , opus laturii mai mari?

R: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{5} = 1,6$.

3. Se dă: $\sin \alpha = 0,6$; $\cos \beta = \frac{1}{4}$; $\operatorname{tg} \gamma = \frac{4}{5}$; $\operatorname{cotg} \delta = \frac{3}{4}$ și se cere să se construiască grafic unghiurile.

Indicație: Se va proceda, cum s'a arătat la pag. 25.

4. Se dă unghiurile: $\alpha = 17^\circ$, $\beta = 49^\circ$, $\gamma = 68^\circ$ și se cere:

a) Să se construiască grafic aceste unghiuri și să se afle liniile lor trigonometrice prin măsurarea elementelor liniare ale unui triunghi dreptunghi.

b) Să se afle valorile acelorași linii trigonometrice cu ajutorul tabelor de valori naturale și să se compare cu rezultatele de la a).

5. Să se calculeze cu ajutorul tabelor de valori naturale:

a) $\sin 19^\circ 34'$ b) $\cos 71^\circ 28'$ c) $\operatorname{tg} 7^\circ 3'$ d) $\operatorname{cotg} 39^\circ 27'$

R: a) 0,335 b) 0,318 c) 0,124 d) 1,215

6. Intr'un triunghi dreptunghi ABC, se cunoaște:

1) $a = 309,27$ m., $B = 15^\circ 39'$; se cere b.

2) $a = 4502$ m., $B = 27^\circ 4'$; se cere c.

3) $c = 72,84$ m., $B = 19^\circ 34'$; se cere b.

4) $b = 903,2$ m.; $B = 73^\circ 20'$; se cere c.

R: Se vor aplica relațiile dintre elementele liniare și unghiulare ale unui triunghi dreptunghi; folosind tabellele de valori naturale, se găsește:

1) $b = 83,4101$ m., 2) $c = 4009,03$ m., 3) $b = 25,880$ m., 4) $c = 270,4180$ m.

CAP. III.

REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR
DREPTUNGHICE.

S'a arătat la pag. 7 că, pentru a putea rezolva un triunghi dreptunghi, trebuie să cunoaștem două din elementele lui; se pot deci prezenta următoarele patru cazuri:

Cazul 1.

Intr'un triunghi dreptunghi ABC se dă (fig. 30): o catetă (spre ex.: b) și ipotenusa a ; se cere: cateta c , unghiurile ascuțite B și C și suprafața S .

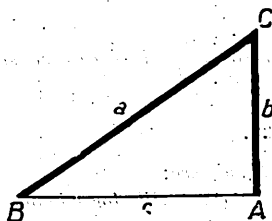


Fig. 30

Răspuns: Cateta c o aflăm din relația lui Pitagora:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

din care deducem:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Calculul lui c se face, prin logaritmi, astfel:

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

$$\log c = \frac{\log(a+b) + \log(a-b)}{2}$$

Pentru a afla unghiul B , judecăm astfel: cunoaștem cateta opusă unghiului și ipotenusa; linia trigonometrică în definiția căreia intră aceste elemente, este *sinusul*; scriem deci:

$$\sin \hat{B} = \frac{b}{a}$$

din care putem afla pe \hat{B} , cu ajutorul tabelor de valori naturale.

Unghiul C fiind complimentul lui \hat{B} , avem:

$$\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$$

Putem însă afla pe \hat{C} chiar din datele problemei, observând că b este cateta adiacentă lui \hat{C} :

$$\cos \hat{C} = \frac{b}{a}$$

relație care ne dă unghiul C .

Observare. Rezolvarea este totdeauna posibilă deoarece cateta b este mai mică decât ipotenușa a .

Suprafața triunghiului ABC , se exprimă, cu ajutorul elementelor date b și a , astfel:

$$S = \frac{b \cdot c}{2}$$

sau:

$$S = \frac{b \sqrt{a^2 - b^2}}{2}$$

Calculul lui S se face, prin logaritmi, astfel:
avem:

$$S = \frac{b \sqrt{(a+b)(a-b)}}{2}$$

deci:

$$\log S = \log b + \frac{1}{2} \left[\log(a+b) + \log(a-b) \right] + \text{colog } 2$$

Aplicație. Un stâlp AB de înălțime dată h , este ancorat cu o sârmă BC de lungime cunoscută l (fig. 31); se cere să se afle unghiul a pe care sârma BC îl face cu linia orizontală AC .

(Calcul numeric: $h = 150$ metri, $BC = 225$ metri).

Răspuns: Cunoaștem cateta opusă unghiului a pe care-l căutăm și ipotenușa; vom scrie deci sinusul acestui unghi C :

$$\sin C = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenușă}} = \frac{h}{l}$$

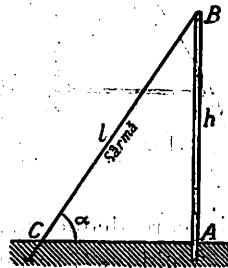


Fig. 31

sau:

$$\sin C = \frac{150 \text{ metri}}{225 \text{ metri}} = 0,666$$

In tabelele de valori naturale găsim:

$$a = \hat{C} = 41^{\circ}45'$$

Cazul II.

Intr'un triunghi dreptunghi ABC (fig. 32) se dau catetele b și c ; se cere ipotenușa a , unghiurile B , C și suprafața S a triunghiului.

Răspuns: Ipotenușa a se poate afla din relația:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Pentru a afla unghiul B , observăm că ni s'a dat cateta opusă b și cateta adiacentă c ; este deci cazul să folosim *tangenta* unghiului:

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$$

din care deducem, cu tabela de valori naturale, unghiul B .

Unghiul C se poate deduce din relația:

$$\hat{C} = 90^{\circ} - \hat{B}$$

sau se poate calcula direct cu ajutorul *cotangentei*:

$$\operatorname{cotg} C = \frac{b}{c}$$

Observare. Rezolvarea este totdeauna posibilă, catetele b și c putând avea orice valori.

Suprafața triunghiului, exprimată cu *elementele date*, are expresiunea:

$$(2) \quad S = \frac{b \cdot c}{2}$$

Pentru calculul prin logaritmi scriem:

$$\log S = \log b + \log c - \log 2$$

Aplicație. Un drum în linie dreaptă BC (fig. 33), este înclinat față cu orizontala BA cu unghiul α ; se cere să se calculeze lungimea L a acestui drum și înclinarea sa α deasupra orizontalei, când se cunoaște înălțimea $h = CA$, și proiecția $l = BA$, a drumului BC pe orizontală.

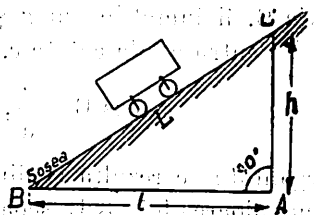


Fig. 33

(Calcul numeric: $AB = 589$ metri, $h = 121,5$ metri).

Avem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta adiac.}} = \frac{h}{l} = \frac{121,5 \text{ m}}{589 \text{ m}}$$

deci:

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,206$$

$$\alpha = 11^{\circ}39'$$

iar:

$$L = \sqrt{h^2 + l^2} = \sqrt{(121,5)^2 + 589^2} = 601,4 \text{ m}$$

deci:

$$L = 601,4 \text{ m}$$

Ca verificare se poate calcula L și astfel:

$$h = L \sin \alpha \quad ; \quad L = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{121,5}{0,202} = 601,4 \text{ m}$$

Cazul III.

Intr'un triunghi dreptunghiu ABC (fig. 34) se dă un unghi ascuțit (spre ex. \hat{B}), ipotenușa a și se cere: unghiul C , catetele b și c și suprafața S .

Răspuns: Unghiul $C = 90^{\circ} - \hat{B}$; pentru a afla cateta b , observăm că ni s'a dat ipotenușa a și unghiul B , opus catetei b ; este cazul deci să scriem sinusul lui \hat{B} :

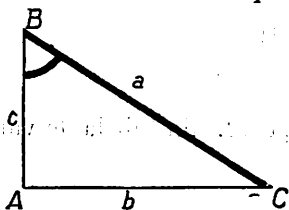


Fig. 34

$$\sin B = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenușă}} = \frac{b}{a}$$

din care deducem:

$$b = a \sin B$$

relație care se putea scri, de altfel, aplicând și Regula I, pag. 39.

Este suficient deci să aflăm din tabelele de valori naturale pe $\sin B$, îl înmulțim cu a și găsim cateta b .

Pentru a afla cateta c , care este adiacentă unghiului B , scriem:

$$\cos B = \frac{c}{a}, \quad \text{de unde: } c = a \cos B$$

egalitate ce rezultă și din Regula II (pag. 40); înmulțind pe a cu valoarea lui $\cos B$, scoasă din tabela de valori naturale, obținem cateta c .

Verificare. Valorile b și c astfel calculate trebuie să verifice relația lui *Pitagora*:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Făcând această verificare, se va observa că valoarea membrului I va diferi de aceea a membrului II, din cauza aproximației valorilor din tabele.

Observare. Rezolvarea este totdeauna posibilă, unghiul B fiind mai mic de 90° .

Suprafața triunghiului se exprimă cu ajutorul *elementelor date*: a , \hat{B} , astfel:

$$S = \frac{b \cdot c}{2}$$

trebuie acum să exprimăm pe b și c cu ajutorul ipotenusei a și unghiului B ; deci:

$$b = a \sin B \quad c = a \cos B$$

obținem formula:

$$S = \frac{a^2 \sin B \cos B}{2}$$

care ne dă pe S , deoarece aflăm pe $\sin B$, $\cos B$ din tabela de valori naturale, iar a este dat.

Prin logaritmi găsim:

$$\log S = 2 \log a + \log \sin B + \log \cos B + \text{colog } 2$$

Aplicație. O scară BC de lungime dată L (fig. 35) este rezimată de o podea orizontală AB și de un perete vertical AC .

Se cunoaște și unghiul α , pe care scara BC îl face cu orizontala AB .

Se cere să se afle înălțimea $AC = h$, pe care o putem atinge cu această scară, precum și distanța $BA = k$, a extremității B a scării, de piciorul A al zidului. (Calcul numeric: $L = 5,20$ m; $\hat{B} = 68^{\circ}30'$).

Răspuns: În triunghiul dreptunghiu ABC , cunoaștem ipotenușa $BC = L$ și unghiul ascuțit B .

Aplicând regulele (I) și (II), găsim:

$$h = AC = BC \sin B = L \sin B$$

$$k = AB = BC \cos B = L \cos B$$

deci:

$$h = 5,20 \text{ m.} \times \sin 68^{\circ}30' = 5,20 \text{ m.} \times 0,930 = 4,836 \text{ metri}$$

$$k = 5,20 \text{ m.} \times \cos 68^{\circ}30' = 5,20 \text{ m.} \times 0,367 = 1,908 \text{ metri}$$

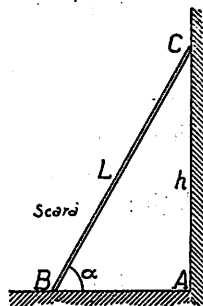


Fig. 35

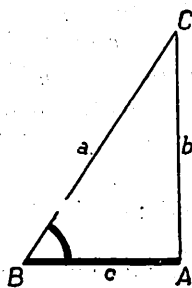


Fig. 36

Cazul IV.

Intr'un triunghi dreptunghiu se dă (fig. 36): o catetă (spre ex. c) și un unghi ascuțit (spre ex. \hat{B}). Se cere să se afle unghiul C , ipotenușa a și cateta b.

Răspuns: Avem:

$$\hat{C} = 90^{\circ} - \hat{B}$$

Spre a afla cateta b , observăm că avem dată cateta cealaltă c și unghiul B opus catetei b ; e locul să scriem expresia tangentei unghiului B (sau să aplicăm Regula III):

$$b = c \operatorname{tg} B$$

adică înmulțind pe c (dat) cu valoarea lui $\operatorname{tg} B$ scoasă din tabele, aflăm pe b .

Pentru ipotenușa a , scriem cosinusul lui B :

$$\cos B = \frac{c}{a} \quad \text{de unde:} \quad a = \frac{c}{\cos B}$$

adică împărțim pe c (dat) prin $\cos B$ aflat din tabele.

Verificare. Valorile b și a calculate ca mai sus, trebuie să verifice relația:

$$a^2 - b^2 = c^2$$

Suprafața triunghiului:

$$S = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{c^2 \operatorname{tg} B}{2}$$

Observare. Rezolvarea este posibilă atâta timp cât se dă unghiul B mai mic de 90° .

Aplicație. Umbra, pe planul orizontal, a unui pom AB de înălțime

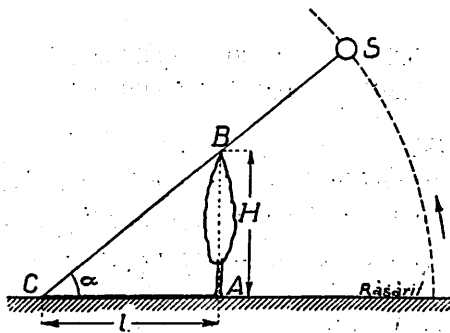


Fig. 37

dată H (fig. 37), este reprezentată prin segmentul de dreaptă AC ; cunoscând valoarea unghiului α pe care raza de lumină BC îl face cu umbra AC , se cere să se calculeze lungimea l a umbrei (se presupune că atât pomul cât și umbra sa sunt linii drepte).

(Calcul numeric: $H=48,50$ m, $\alpha = 34^\circ 15'$).

Răspuns: Cunoaștem un unghi (C) și cateta opusă lui ($AB = H$), prin urmare: $H = l \operatorname{tg} \alpha$, deci:

$$l = \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{48,5 \text{ metri}}{\operatorname{tg} 34^\circ 15'} = \frac{48,5}{0,681} = 71,24 \text{ m.}$$

R E Z U M A T .

CAP. III. — REZOLVAREA TRIUNGHIIURILOR DREPTUNGHICE.

* *Cazul I.* Se dă: ipotenusa a și o catetă b . Formule de rezolvare:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad ; \quad \sin B = \frac{b}{a} \quad ; \quad \cos C = \frac{b}{a} \quad ; \quad S = \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{2}$$

* *Cazul II.* Se dă catetele b , c . Formule de rezolvare:

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \quad ; \quad \operatorname{cotg} C = \frac{b}{c} \quad ; \quad S = \frac{bc}{2}$$

* *Cazul III.* Se dă ipotenusa a și unghiul ascuțit B . Formule de rezolvare:

$$C = 90^\circ - B \quad ; \quad b = a \sin B \quad ; \quad c = a \cos B \quad ; \quad S = \frac{a^2 \sin B \cos B}{2}$$

* *Cazul IV.* Se dă: cateta c și unghiul ascuțit B . Formule de rezolvare:

$$C = 90^\circ - B \quad ; \quad b = c \operatorname{tg} B \quad ; \quad a = \frac{c}{\cos B} \quad ; \quad S = \frac{c^2 \operatorname{tg} B}{2}$$



EXERCITII.

1. Să se rezolve un triunghi dreptunghi și să se afle și suprafața în următoarele cazuri:

I) Se dă: $a = 305 \text{ m}$, $b = 170 \text{ m}$; II) Se dă: $b = 15,3 \text{ dm}$, $c = 3,2 \text{ dm}$

III) Se dă: $a = 101 \text{ cm}$, $B = 18^\circ$; IV) Se dă: $c = 37,5 \text{ m}$, $B = 70^\circ$

R: I. $c = 253,2 \text{ m}$ $B = 21^\circ 26'$ $S = 21522 \text{ m}^2$
 II. $a = 15,6 \text{ dm}$ $B = 78^\circ 10' 51''$ $S = 24,48 \text{ dm}^2$
 III. $b = 31,209 \text{ cm}$ $c = 96,051 \text{ cm}$ $S = 1498,8278 \text{ cm}^2$
 IV. $b = 103,03 \text{ m}$ $a = 109,6425 \text{ m}$ $S = 1931,8125 \text{ m}^2$.

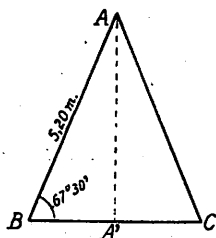


Fig. 38

2. Într'un triunghi isoscel ABC (fig. 38), se cunoaște latura: $AB = AC = 5,20 \text{ m}$ și $B = C = 67^\circ 30'$;

să se calculeze înălțimea $AA' = h$.

R: $h = AB \sin B = 5,20 \text{ m} \times \sin 67^\circ 30' = 4,804 \text{ m}$.

3. În triunghiul isoscel ABC (fig. 39), se cunoaște: $AB = AC = 9,10 \text{ m}$ și unghiul dela vârf $A = 17^\circ$; se cere lungimea bazei BC .

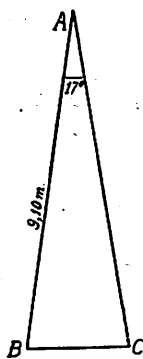


Fig. 39

R: $BC = 2 AB \sin \frac{17^\circ}{2} = 2 \times 9,10 \text{ m} \times \sin 8^\circ 30' = 2,6901 \text{ m}$.

4. Într'un romb (fig. 40), se dă latura $a = 3,25 \text{ m}$ și $\widehat{ABC} = 130^\circ$ și se cere lungimile diagonalelor și suprafața.

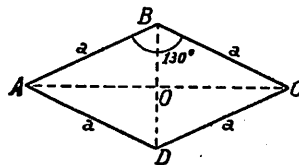


Fig. 40

$$R: AC = 2a \sin \frac{130^\circ}{2} = 2 \times 3,25 \text{ m} \times \sin 65^\circ = 5,891 \text{ m.}$$

$$BD = 2 \times 3,25 \text{ m} \times \cos 65^\circ = 2,747; S = 8,0912 \text{ m}^2.$$

5. Un basin în formă de trapez isoscel $ABCD$ (fig. 41), are înălțimea $h = 1,80 \text{ m}$,

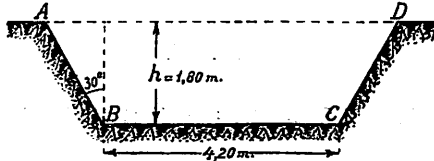


Fig. 41

baza mică $BC = 4,20 \text{ m}$, iar $\widehat{ABC} = 120^\circ$; să se calculeze suprafața secțiunii $ABCD$.

$$R: S = \frac{BC + AD}{2} h = \frac{4,20 + (4,20 + 2 \times 1,80 \operatorname{tg} 30^\circ)}{2} \times 1,80.$$

$$= 9,4302 \text{ m}$$

CAP. IV.

+ CERCUL TRIGONOMETRIC.

În cele ce preced s'au definit liniile trigonometrice ale unghiurilor ascuțite (cuprinse între 0° și 90°); în aplicații întâlnim însă și unghiuri obtuze (cuprinse între 90° și 180°) precum și unghiuri mai mari ca 180° și chiar decât 360° (vezi pag. 14).

Unghiuri și arce pozitive și negative.

Exemplul 1. Spița OA a unei roți de bicicletă se poate roti în două sensuri (fig. 42):

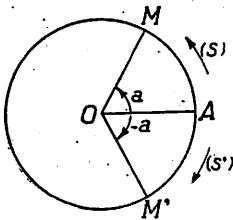


Fig. 42

1) în sensul contrar cu acela al mișcării acelor unui ceasornic, adică în sensul arătat de săgeata (s) ;

2) în sensul mișcării acelor unui ceasornic (săgeata s').

Dacă raza OA se rotește de același număr de grade, într'un sens până în OM , sau în sens contrar până în OM' , pentru a putea distinge între ele unghiurile \widehat{AOM} și $\widehat{AOM'}$,

convenim să zicem că primul unghi \widehat{AOM} este pozitiv iar al doilea $\widehat{AOM'}$, este negativ.

Se scrie :

$$\widehat{AOM} = a \quad \widehat{AOM'} = -a \quad (a > 0)$$

Tot astfel convenim să privim arcul AM , descris în sensul săgeții (s) ca pozitiv, iar arcul AM' ca negativ.

Exemplul 2. Fie un unghi oarecare AOB , pe care-l presupunem rezultat din rotirea laturii OA până se așterne peste latura OB . Care este valoarea acestui unghi (fig. 43)?

Răspuns. Latura OA se poate roti în două sensuri: când se rotește în sensul săgeții (s) , adică în sens pozitiv, ea descrie unghiul $\widehat{AOB} = a$, care este, după convențiunea de mai sus, pozitiv; dacă latura OA se rotește în sensul săgeții (s') , ea descrie unghiul $\widehat{AOB} = b$, care este negativ.

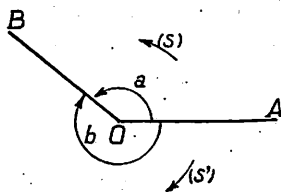


Fig. 43

Unghiul negativ b , are ca valoare absolută: $360^\circ - a$.

Sensul de rotație pozitiv în Trigonometrie. Se alege ca sens pozitiv pentru unghiuri și arce, sensul de rotație contrar cu acela în care se învârtesc acele unui ceasornic; acest sens se cheamă și *sens trigonometric*. În cele ce urmează vom lucra în general cu valorile pozitive ale unghiurilor, adică cu valorile lor ce rezultă din rotirea uneia din laturile unghiului în sensul trigonometric, până ce se așterne peste cealaltă latură.

Exerciții. Se cere să se spună ce valori au unghiurile din figurile

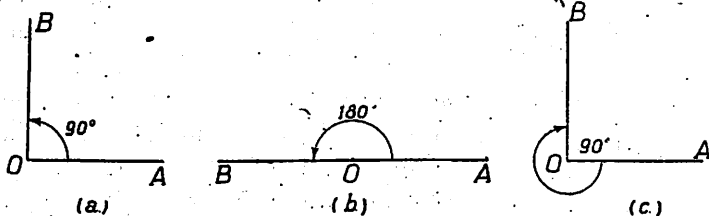


Fig. 44

44 și 45, care au rezultat din rotirea laturii OA , în sensul indicat de săgeți, până s'a așternut peste latura OB .

Răspuns: Unghiul AOB este de:

+ 90° (fig. 51 a); + 180° (fig. 51 b); - 270° (fig. 51 c).
 - 60° (fig. 52 a); + 270° (fig. 52 b); + 330° (fig. 52 c).

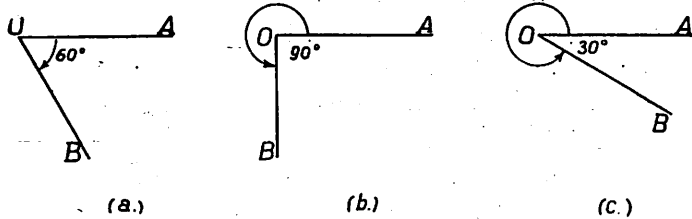


Fig. 45

Cercul trigonometric. Fie un unghi ascuțit $\widehat{AOM}_1 = a_1$ (fig. 46); pentru a afla liniile lui trigonometrice, trebuie să calculăm, după cum s'a arătat (pag. 24), rapoartele dintre laturile unui triunghi dreptunghiu în care a_1 este unul din unghiurile sale ascuțite; am văzut că triunghiul dreptunghiu a fost format luând după voie un punct M , pe o latură a triunghiului și coborînd din el o perpendiculară MN , pe cealaltă latură (fig. 16).

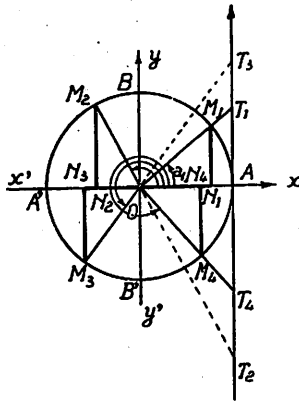


Fig. 46

Pentru a simplifica calculul liniilor trigonometrice, luăm punctul M_1 pe una din laturile unghiului astfel ca distanța OM_1 să fie egală cu unitatea de lungime, pe care am ales-o, și cu ajutorul căreia măsurăm toate lungimile din figură.

Coborînd din M_1 perpendiculara M_1N_1 pe cealaltă latură a unghiului, avem în triunghiul dreptunghiu OM_1N_1 :

$$(1) \quad \sin a_1 = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenusă}} = \frac{M_1N_1}{OM_1} = \frac{M_1N_1}{1}$$

$$(2) \quad \cos a_1 = \frac{\text{cateta adiacentă}}{\text{ipotenusă}} = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{ON_1}{1}$$

Rezultă de aci, că prin această alegere a ipotenuzei ($OM_1 = 1$) nu mai este necesar pentru calculul lui $\sin a$ și $\cos a$ să facem o împărțire, deoarece numitorii rapoartelor (1) și (2) sunt egali cu unitatea.

Exemple. Să presupunem că pe figura 46, am adoptat ca unitate pentru lungimi dm., adică $OM_1 = 1$ dm. și că măsurând lungimile catetelor M_1N_1 și ON_1 găsim :

$$M_1N_1 = 5 \text{ cm}, \quad ON_1 = 8,65 \text{ cm}.$$

Spre a afla $\cos a$ și $\sin a$, exprimăm mai întâiu toate lungimile în dm. (unitatea aleasă), și scriem :

$$\sin a = \frac{M_1N_1}{OM_1} = \frac{0,5 \text{ dm}}{1 \text{ dm}} = 0,5$$

$$\cos a = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{0,865 \text{ dm}}{1 \text{ dm}} = 0,865.$$

Pentru a putea afla nu numai sinusul și cosinusul unghiurilor ascuțite ci și a unui unghi oarecare, să descriem din O ca centru cu $OM_1 = 1$ ca rază, un cerc numit *cerc trigonometric* sau *cerc unitar*.

În acest cerc să ducem doi diametri: $x'Ox$, confundat cu latura OA a unghiului și $y'Oy$ perpendicular pe acesta (fig. 47); acești diametri împart cercul în patru *cadre*, care se numerotează în sensul pozitiv (sau trigonometric), începând din A . Raza

OA se ia ca origină pentru unghiuri, adică orice unghi căruia vom să-i aflăm liniile trigonometrice, îl aducem spre ușurință astfel ca vârful lui să coincidă cu centrul cercului trigonometric, iar una din laturile lui să coincidă cu *latura-origină* OA ; cea de a doua latură va cădea în OM_1 (primul cadran), dacă \widehat{AOM} este ascuțit; în OM_2 (cadranul II) dacă unghiul \widehat{AOM}_2 este obtus; în OM_3 (cadranul III)

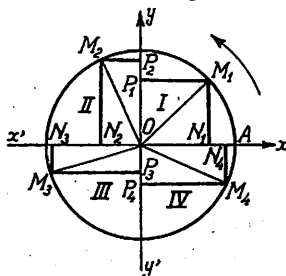


Fig. 47

dacă unghiul \widehat{AOM}_3 este cuprins între 180° și 270° , sau în OM_4 (cadranul IV) dacă unghiul \widehat{AOM}_4 este cuprins între 270° și 360° .

Tot astfel, extremitatea A a razei OA , se consideră ca *origină pentru arce*; se vede astfel că arcele AM_1, AM_2, AM_3, AM_4 au respectiv extremitățile în cadranul I, II, III sau IV ¹⁾.

Dacă din M_1 ducem perpendiculara M_1P_1 pe diametrul Oy , se formează un dreptunghi $ON_1M_1P_1$ și se vede că *sinusul și cosinusul* unghiului AOM_1 , sunt de fapt *ordonata și abscisa* punctului M_1 de pe cercul unitar (fig. 47).

Sinusul se poate deci măsura în OP_1 pe axa Oy , care din această cauză se cheamă și *axa sinusurilor*, iar cosinusul se măsoară pe axa Ox , care se numește și *axa cosinusurilor*.

Tot astfel pentru unghiul $a_2 = \widehat{AOM}_2$ din cadranul II:

$$\sin a_2 = M_2N_2 \text{ (sau } OP_2)$$

$$\cos a_2 = ON_2$$

pentru unghiul $a_3 = \widehat{AOM}_3$ din cadranul III:

$$\sin a_3 = M_3N_3 \text{ (sau } OP_3)$$

$$\cos a_3 = ON_3$$

iar pentru unghiul $a_4 = \widehat{AOM}_4$ din cadranul IV:

$$\sin a_4 = M_4N_4 \text{ (sau } OP_4)$$

$$\cos a_4 = ON_4$$

Rezultă de aci că indiferent de cadranul în care cade un unghi AOM :

a) sinusul este *numărul* care exprimă lungimea perpendicularei MN , coborită din punctul M , unde cercul întâlnește una din laturile lui, pe cealaltă latură OA (pe latura origină) sau pe Ox ; de remarcat că $MN = OP$, OP fiind proiecția razei OM pe diametrul OB .

b) cosinusul este *numericeste* egal cu lungimea ON adică cu proiecția razei OM pe diametrul OA .

¹⁾ Se obișnuiește să se spună că unghiul AOM_1 este cuprins (sau cade) în cadranul I; unghiul AOM_2 este cuprins (sau cade) în cadranul II, etc.

Observare importantă. S'a spus mai sus că sinusul și cosinusul sunt numai numericește egali cu două lungimi, respectiv cu M_1N_1 și ON_1 , adică nu sunt exprimați în unități de lungime ceeace de altfel știm deoarece sinusul și cosinusul sunt numere abstracte.

Astfel, în exemplul de mai sus (pag. 57):

$$(1) \quad M_1N_1 = 0,5 \text{ dm}$$

iar: $\sin a = 0,5$ (număr abstract care arată că ipotenușa $OM_1 = 1 \text{ dm}$ se cuprinde de 0,5 ori în cateta opusă $M_1N_1 = 0,5 \text{ dm}$.)

$$(2) \quad ON_1 = 0,865 \text{ dm}$$

iar: $\cos a = 0,865$ (număr abstract care arată de câte ori ipotenușa $OM_1 = 1 \text{ dm}$ se cuprinde în cateta adiacentă $ON_1 = 0,865 \text{ dm}$).

Regula semnelor pentru sinus și cosinus. Din cele ce preced se vede că:

1) sinusul unui unghi se măsoară pe porțiunea pozitivă Oy , când unghiul a este situat în cadranele I și II și pe porțiunea negativă a axei Oy pentru unghiurile din cadranele III și IV.

2) cosinusul unui unghi se măsoară pe porțiunea pozitivă a axei Ox când unghiul a cade în cadranele I sau IV și pe porțiunea negativă a axei Ox pentru unghiurile din cadranele II și III.

Din această cauză: 1) sinusul este pozitiv pentru unghiurile din cadranele I și II și negativ pentru cele din cadranele III și IV,

2) cosinusul este pozitiv în cadranele I și IV și negativ în cadranele II și III.

Exerciții. 1. In ce cadrane cad unghiurile următoare și ce semne au sinusul și cosinusul?

a) $\sin 15^\circ$ b) $\cos 108^\circ$ c) $\sin 308^\circ$ d) $\cos 285^\circ$.

R: a) în cadranul I; semnul +; b) în cadranul II; semnul —; c) în cadranul IV; semnul —; d) în cadranul IV; semnul +.

2. In ce cadrane cad unghiurile și ce semne au sinusul și cosinusul:

a) $\cos 27^\circ$ b) $\sin 171^\circ$ c) $\cos 213^\circ$ d) $\sin 280^\circ$.

R: a) cadranul I, semnul +; b) cadranul II, semnul +; c) cadranul III, semnul —; d) cadranul IV, semnul —.

Tangenta unui unghi oarecare. Fie cercul trigonometric și unghiul $a_1 = \widehat{AOM_1}$ (fig. 48); să ducem în extremitatea A (care este origina arcelor), tangenta AT la cerc; se formează triunghiul dreptunghiu AOT₁ în care putem scrie:

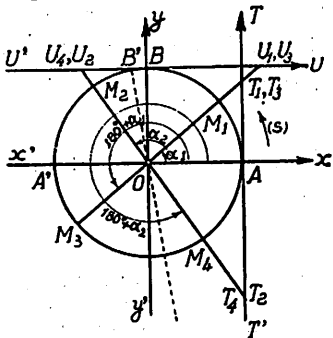


Fig. 48

$$\operatorname{tg} a_1 = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta adiac.}} = \frac{AT_1}{OA}$$

și deoarece $OA = 1$:

$$\operatorname{tg} a_1 = \frac{AT_1}{1}$$

adică tangenta trigonometrică a unghiului a_1 este *numericeste* egală cu segmentul AT_1 din tangenta geometrică în A la cercul trigonometric; acest segment este cuprins între origina A și punctul T_1 în care cealaltă latură OM_1 a unghiului întâlnește această tangentă.

Procedând astfel, se vede că pentru a afla tangenta trigonometrică a unui unghi, în loc să calculăm raportul dintre două catete, este suficient să aflăm lungimea unei porțiuni din tangenta geometrică dusă la cercul unitar în punctul A.

Exemplu. Fie raza cercului trigonometric egală cu 1 metru, iar unghiul a_1 astfel ales, încât lungimea $AT_1 = 8,5$ dm.; exprimăm lungimile laturilor triunghiului OAT_1 în aceleași unități, spre ex. în metri, căci metrul a fost ales ca unitate pentru raza cercului.

Avem:

$$\operatorname{tg} a_1 = \frac{AT_1}{OA} = \frac{0,85 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 0,85$$

adică $\operatorname{tg} a_1$ este egală cu *numărul abstract* 0,85; putem proceda și astfel:

$$\operatorname{tg} a_1 = \frac{8,5 \text{ dm}}{10 \text{ dm}} = \frac{85 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} = 0,85$$

și rezultatul este acelaș.

În mod analog se definește tangenta trigonometrică a unui unghi oarecare, indiferent de cadranul în care cade; astfel pentru unghiul $\alpha_2 = \widehat{AOM}_2$ din cadranul II, prelungim raza OM_2 până întâlnește tangenta geometrică AT în T_2 ; vom avea:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = AT_2$$

tot astfel pentru unghiurile α_3 și α_4 din cadranele III și IV avem:

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = AT_3 \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \alpha_4 = AT_4.$$

Regula semnelor pentru tangentă.

Se convine să se ia ca pozitivă porțiunea AT din tangenta geometrică care are acelaș sens ca și axa pozitivă Oy a sinusului și ca negativă porțiunea AT' .

Tangenta trigonometrică a unui unghi α , va fi deci pozitivă în cadranele I și III, deoarece segmentele AT_1 și AT_3 cad deasupra punctului A (adică pe tangenta pozitivă AT) și negativă în cadranele II și IV, deoarece segmentele AT_2 și AT_4 cad dedesubtul punctului A (pe tangenta negativă AT').

Exercițiu. Să se arate în ce cadran cad unghiurile și ce semn au tangentele:

a) $\operatorname{tg} 137^\circ$; b) $\operatorname{tg} 48^\circ$; c) $\operatorname{tg} 347^\circ$; d) $\operatorname{tg} 129^\circ$.

R: a) în cadranul II, semnul —; b) în cadranul I, semnul +; c) în cadranul IV, semnul —; d) în cadranul II, semnul —.

Cotangenta unui unghi oarecare. Se duce tangenta la cerc în punctul B , în care axa pozitivă Oy taie cercul, și se convine a se lua ca pozitivă porțiunea BU care are acelaș sens cu axa pozitivă Ox a cosinusului și ca negativă porțiunea BU' (fig. 48).

Dacă însemnăm cu U_1 punctul în care raza OM_1 întâlnește tangenta $U'BU$, avem din triunghiul dreptunghi OBU_1 în care $\widehat{BU_1O} = \widehat{AOM}_1 = \alpha_1$:

$$\operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{\text{cateta adiacentă}}{\text{cateta opusă}} = \frac{BU_1}{OB}$$

și deoarece $OB = 1$:

$$\operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{BU_1}{1}$$

adică cotangenta unui unghi este *numericeste* egală cu porțiunea BU_1 din tangenta geometrică dusă la cerc în punctul B; acest segment este cuprins între punctul B și punctul U_1 în care tangenta $U'BU$ este întâlnită de latura OM_1 a unghiului.

Pentru unghiurile cuprinse în cadranele III și IV, punctele U_3 și U_4 se obțin prelungind razele OM_3 și OM_4 până întâlnesc tangenta $U'BU$.

Cotangenta unui unghi va fi pozitivă pentru unghiurile din cadranele I și III, deoarece segmentele BU_1 și BU_3 se măsoară pe porțiunea pozitivă a tangentei geometrice $U'BU$ și negativă pentru unghiurile din cadranele II și IV, pentru care segmentele BU_2 și BU_4 se găsesc pe porțiunea negativă a acelei tangente.

Exercițiu. Care sunt semnele cotanțentelor:

a) $\cotg 15^\circ$; b) $\cotg 100^\circ$; c) $\cotg 330^\circ$; d) $\cotg 200^\circ$.

Răspuns: a) +; b) —; c) —; d) +.

Regula semnelor pentru sinus, cosinus, tangență și cotangență este rezumată în tabloul:

Cadrantul	I	II	III	IV
Sinus	+	+	—	—
Cosinus	+	—	—	+
Tangență	+	—	+	—
Cotanțenta	+	—	+	—

din care reiese că în cadranul I, aceste patru linii trigonometrice sunt pozitive; sinusul mai este pozitiv în cadranul II; iar cosinusul în cadranul IV; tangența și cotangența sunt negative în cadranele II și IV.

→ O aplicațiune a cercului trigonometric, în Fizică (optică).

Se știe din optică următoarele: dacă două medii (1) și (2), spre exemplu aerul și apa, sunt despărțite de o suprafață AB, o rază de lumină SI (rază incidentă) venită din mediul (1), în loc să

urmeze în mediul (2) drumul IS' se refractă (se frânge) și ia drumul IR (care este raza refractată) (fig. 49).

Prima lege a refracției constă în faptul că raza incidentă SI , normala NIN' la suprafața despărțitoare și raza refractată RI , sunt situate în același plan.

A doua lege este următoarea :

Dacă însemnăm cu i unghiul de incidență SIN și cu r unghiul de refracție RIN' , se dovedește *experimental* că oricare este unghiul i , unghiul r rezultă astfel încât raportul :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \text{constant} = n$$

pentru două medii anumite.

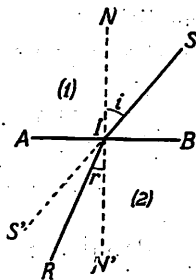


Fig. 49

Numărul n se numește indicele de refracție al mediului (1) în raport cu mediul (2).

Legile refracției se datoresc lui *Descartes*¹⁾.

Pentru a măsura *experimental* indicele de refracție al aerului în raport cu un corp (C) oarecare, se întrebuintează un cerc gradat situat într'un plan vertical (fig. 50); corpul (C) se așează în cupa (a b); o rază incidentă SI pătrunde prin luneta l și trecând prin corpul (C) se refractă; raza refractată este văzută prin mijlocirea unei a doua lunete l' , pe care o rotim în mod convenabil.

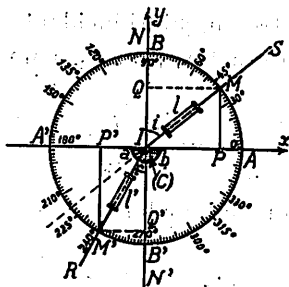


Fig. 50

¹⁾ *Descartes* (René), născut la Haye la 1596, mort la Stockholm în 1650. A fost un mare matematician, fizician și filosof francez. În afară de importante descoperiri în matematici și fizică, *Descartes* a fondat un nou sistem filosofic, cunoscut sub numele de *Cartesianism* (numele latin al lui *Descartes* era *Cartesius*). Lucrarea sa fundamentală este « *Discours sur la méthode* » (1635). În Matematică el a introdus axele de coordonate Ox , Oy sau axele cartesiene.

În această poziție se fixează lunetele și se pot citi unghiurile de incidență i și refracție r și calcula deci indicele $n = \frac{\sin i}{\sin r}$.

Cercul gradat poate servi însă chiar ca *cerc trigonometric* (cu condițiunea ca raza sa R să fie luată ca *unitate de măsură*). În acest caz avem de pe figură :

$$\sin i = \frac{MQ}{R} \quad \sin r = \frac{M'Q'}{R} \quad \text{iar : } n = \frac{\frac{MQ}{R}}{\frac{M'Q'}{R}} = \frac{MQ}{M'Q'}$$

Practic, este deci suficient să măsurăm lungimile MQ și $M'Q'$ și să calculăm raportul $\frac{MQ}{M'Q'}$.

Făcând această operație pentru două sau trei unghiuri incidente i_1, i_2, i_3 , cărora le corespund unghiurile de refracție r_1, r_2, r_3 , vom găsi :

$$n_1 = \frac{\sin i_1}{\sin r_1} \quad n_2 = \frac{\sin i_2}{\sin r_2} \quad n_3 = \frac{\sin i_3}{\sin r_3}$$

O valoare mai exactă a indicelui n se află luând media :

$$n = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{3}$$

Aparatul de mai sus se cheamă aparatul lui *Silbermann*.

REZUMAT.

CAP. IV. — CERCUL TRIGONOMETRIC.

*Un unghi u ia naștere din rotirea în jurul vârfului lui, a unei drepte, numită *latură-origină* până se așterne peste o altă dreaptă numită *latură-extremitate*.

*În Trigonometrie, sensul pozitiv de rotație este sensul contrar rotației acelor unui ceasornic.

*Un unghi u este pozitiv dacă se obține prin rotația laturii origină în sensul pozitiv; el este negativ în caz contrar.

*Un cerc cu raza egală cu unitatea de lungime, se numește *cerc trigonometric* sau *cerc unitar*.

*Doi diametri perpendiculari, despart cercul unitar în patru cadrane; unul din diametri, $y'Oy$, se cheamă *axa sinusurilor*; celălalt diametru, $x'Ox$, se cheamă și *axa cosinusurilor*.

*Axa Ox taie cercul trigonometric în punctul A. OA este latura origină pentru unghiuri; în aceste condițiuni, cealaltă latură a unghiului taie cercul unitar în M.

a) *Sinusul* unghiului AOM este *numericeste* egal cu lungimea perpendiculararei MN coborită din M pe OA.

b) *Cosinusul* este *numericeste* egal cu lungimea ON.

Sinusul este pozitiv în cadranele I și II; cosinusul este pozitiv în cadranele I și IV.

*Tangenta la cercul unitar în A, este întâlnită de latura OM în T; *tangenta trigonometrică* a unghiului AOM este *numericeste* egală cu lungimea segmentului AT.

*Axa Oy taie cercul unitar în B, tangenta la cercul unitar în B este întâlnită de latura OM în U.

Cotangenta unghiului AOM este *numericeste* egală cu lungimea segmentului BU.

**Tangenta trigonometrică și cotangenta* sunt pozitive în cadrantul I și III.

EXERCITII.

1. Ce unghi descrie în $10'$, minutarul unui ceas? Se va exprima acest unghi în grade și radiani.

Este acest unghi pozitiv sau negativ?

R: Unghiul este de $60''$; $1,047 \text{ rad}$ (negativ).

2. Roata unei mașini face 180 încãrãturi complete pe minut, în sens contrar cu rotirea acelor unui ceasornic.

Ce unghi (în grade și radiani) descrie o spișã a roãii în 14 secunde?

R: $15120''$; $263,76 \text{ rad}$.

3. Ce valori (în grade și radiani) și ce semne au unghiurile din figura 51, rezultãte din rotirea lãtãrei OA , în sensul indicat de sãgealã, pãnã se așterne peste latura OB ?

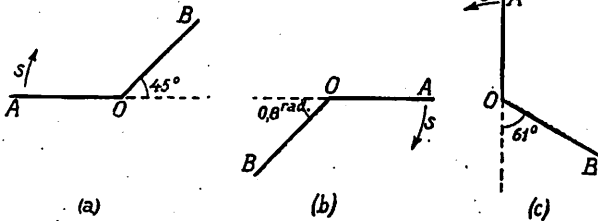


Fig. 51

R: a) $-135''$; b) $-(\pi - 0,8) \text{ rad}$; c) $+241''$.

4. Dacă cercul trigonometric are raza egalã cu 1 cm , ce lungimi au segmentele, care reprezintã sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unor unghiuri a, b, c, d, dacã:

$$\sin a = 0,450 \quad , \quad \cos b = 0,732 \quad , \quad \operatorname{tg} c = 1,2 \quad , \quad \operatorname{cotg} d = 3,5.$$

R: $4,5 \text{ mm}$; $7,32 \text{ mm}$; $1,2 \text{ cm}$; $3,5 \text{ cm}$.

5. Intr'un cerc trigonometric, a cărui rază este 1 metru, lungimile segmentelor care reprezintă sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta, au respectiv valorile:

$$0,63 \text{ dm} , 43,8 \text{ cm} , 12 \text{ m} , 1067 \text{ mm}.$$

Să se afle valorile acestor linii trigonometrice.

$$R: \sin a = \frac{0,63 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 0,63; \quad \cos b = \frac{0,438 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 0,438$$

$$\operatorname{tg} c = \frac{12 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 12; \quad \operatorname{cotg} d = \frac{0,1067 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 0,1067$$

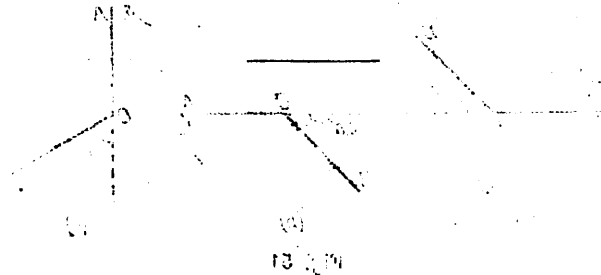
6. Să se deducă regula semnelor pentru $\operatorname{cotg} a$, din relația: $\operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$.

R: Se va observa că $\operatorname{tg} a$ și $\operatorname{cotg} a$, trebuie să aibă același semn.

7. Dacă se ia ca cerc trigonometric un cerc cu rază $R = 3 \text{ dm}$, care sunt lungimile, care reprezintă în acest cerc liniile trigonometrice ale unghiurilor de 30° , 45° și 60° .

$$R: \sin 30^\circ = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{rază}} = \frac{1}{2}, \text{ deci cateta opusă} = \frac{\text{rază}}{2} = 1,5 \text{ dm}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{cateta adiac.}}{\text{rază}} = \frac{3}{2}, \text{ deci cateta adiac.} = \frac{\text{rază} \times 3}{2} = 1,5 \times 3 \text{ dm, etc.}$$



$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1; \quad \operatorname{cotg} 45^\circ = 1$$

... (faint text) ...

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}; \quad \operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \operatorname{cotg} 30^\circ = \sqrt{3}$$

... ..

... ..

CAP. V. 200

RELAȚIUNI ÎNTRE LINIILE TRIGONOMETRICE ALE ACELUIAȘ UNGHIU.

Fie un unghi ascuțit $a = \widehat{AOB}$ (fig. 52); din triunghiul drept-unghi AOB avem:

$$(1) \quad \sin a = \frac{AB}{OB}; \quad (3) \quad \operatorname{tg} a = \frac{AB}{OA}$$

$$(2) \quad \cos a = \frac{OA}{OB}; \quad (4) \quad \operatorname{cotg} a = \frac{OA}{AB}$$

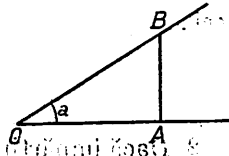


Fig. 52

Dacă unghiul a este dat, s'a arătat mai sus (pag. 27), că liniile lui trigonometrice se pot calcula prin relațiile (1), (2), (3), (4) și reciproc: dacă cunoaștem *una oarecare* din aceste linii, putem afla unghiul a .

1. Să ridicăm ambii membri ai relațiilor (1) și (2) la pătrat și să le adunăm, obținem:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = \frac{AB^2}{OB^2} + \frac{OA^2}{OB^2} = \frac{AB^2 + OA^2}{OB^2} \quad (1)$$

Însă potrivit teoremei lui *Pitagora*,

$$AB^2 + OA^2 = OB^2$$

deci:

$$(1) \quad \sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

relație care ne permite să aflăm $\cos a$, când cunoaștem $\sin a$ și invers.

Exemple. 1. Se dă: $\sin a = \frac{1}{3}$ ($a < 90^\circ$); avem:

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9}$$

deci:

$$\cos a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

2. Se dă: $\cos a = \frac{4}{5}$ ($a < 90^\circ$); avem:

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

deci:

$$\sin a = \frac{3}{5}$$

2. Dacă împărțim relațiile (1) și (2) membru cu membru, găsim:

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\frac{AB}{OB}}{\frac{OA}{OB}} = \frac{AB}{OA}$$

și ținând seama de relația (3):

(II)

$$\boxed{\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}}$$

relațiune care ne dă $\operatorname{tg} a$ când cunoaștem $\sin a$ (și deci și $\cos a$) sau invers.

Exemplu. 1. Se dă: $\sin a = \frac{1}{4}$ ($a < 90^\circ$); din relația (I) găsim:

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \frac{1}{4^2} = \frac{15}{16}; \quad \cos a = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

iar din relația (II):

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

3. Comparând relațiile (3) și (4) obținem:

$$(III) \quad \boxed{\operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}}$$

Relația (III), ne permite să aflăm $\operatorname{cotg} a$, când cunoaștem $\operatorname{tg} a$.
Formulele (I), (II), (III), se numesc și *formulele fundamentale* ale *Trigonometriei*; ele sunt în număr de *trei*.

Ele servesc, ca atunci când cunoaștem una oarecare din liniile trigonometrice, să le aflăm pe toate celelalte.

Observare: Formulele fundamentale sunt adevărate nu numai pentru unghiurile ascuțite ci *pentru orice unghi*. Într'adevăr dacă considerăm cercul trigonometric (fig. 53), pentru unghiurile din primul cadran, obținem din triunghiul dreptunghiu OM_1N_1 :

$$ON_1^2 + N_1M_1^2 = OM_1^2 = 1$$

sau

$$\sin^2 a_1 + \cos^2 a_1 = 1$$

din același triunghiu găsim:

$$\operatorname{tg} a_1 = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{catetă adiac}} = \frac{N_1M_1}{ON_1} = \frac{\sin a_1}{\cos a_1}$$

apoi din triunghiul OAT_1 :

$$\operatorname{cotg} a_1 = \frac{OA}{AT_1} = \frac{1}{\operatorname{tg} a_1}$$

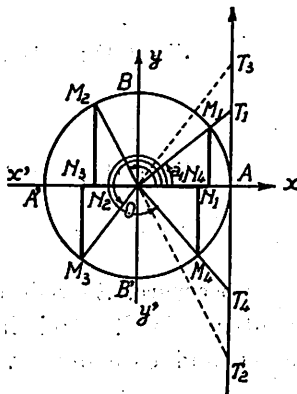


Fig. 53

Am găsit astfel cu ajutorul cercului trigonometric relațiile fundamentale, pentru un *unghi din primul cadran*.

Pentru unghiurile din cadranul II se obțin aceleași relațiuni folosind triunghiurile dreptunghice OM_2N_2 și OAT_2 , care sunt asemenea; tot astfel pentru unghiurile din cadranele III și IV formulele fundamentale rezultă din asemănarea triunghiurilor OM_3N_3 și OAT_3 , și triunghiurile asemenea OM_4N_4 și OAT_4 ¹⁾.

Observare. Am văzut că dacă se dă una din liniile trigonometrice ale unui unghi, se poate afla unghiul și deci se pot calcula și celelalte linii trigonometrice; rezultă de aci că se putea prevedea dela început că între liniile trigonometrice ale aceluiași unghi, trebuie să existe anumite relațiuni, care să permită să aflăm trei dintre aceste linii când cunoaștem pe a patra.

Aplicația 1. Se dă $\sin x = \frac{1}{5}$; să aflăm celelalte linii trigonometrice ale unghiului x .

$$\text{Avem din (I): } \cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{5^2}} = \pm \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{din (II): } \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{5}}{\pm \frac{2\sqrt{6}}{5}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{6}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$\text{din (III): } \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\pm \frac{1}{2\sqrt{6}}} = \pm 2\sqrt{6}$$

Observare. Se vede de aci, că fiind dat *sinusul* unui unghi x , pentru celelalte trei linii trigonometrice ($\cos x$, $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{cotg} x$) corespund câte două valori egale și de semn contrar.

¹⁾ Se recomandă elevilor să facă calculele necesare, pentru fiecare din aceste cazuri, și să deducă că *formulele fundamentale sunt generale, adică sunt adevărate oricare ar fi unghiul.*

Explicație: Fiind dată valoarea $\sin x$, să o purtăm în OP pe axa sinusului (fig. 54) (s'ă presupus $\sin x$ pozitiv, în caz contrar P ar fi venit dedesubtul diametrului $A'A$); prin P ducem o paralelă la diametrul $A'A$, care taie cercul în punctele M_1 și M_2 ; dreptele OM_1 , OM_2 , întâlnesc tangenta dusă la cercul trigonometric în punctul A , în T_1 și T_2 .

Se vede lesne că triunghiurile dreptunghice ON_1M_1 și ON_2M_2 de o parte, și triunghiurile OAT_1 și OAT_2 de altă parte, sunt egale, deci avem în valoare absolută: $ON_1 = ON_2$, $AT_1 = AT_2$.

Unghiurile, care au sinusul egal cu *valoarea dată* $OP = \sin x$, au una din laturi pe OA , iar cealaltă este sau OM_1 sau OM_2 ; aceste unghiuri sunt din cauza periodicității:

x_1 , sau $x_1 + 360^\circ$, sau $x_1 + 2 \times 360^\circ$,
sau în general:

$$x = x_1 + k \cdot 360^\circ$$

(k întreg, pozitiv sau negativ) și:

x_2 sau $x_2 + 360^\circ$ sau $x_2 + 2 \times 360^\circ$

sau în general:

$$x' = x_2 + k' \cdot 360^\circ$$

iar

$$x_1 + x_2 = 180^\circ$$

adică la un *sinus dat*, corespunde un număr oricât de mare de unghiuri; toate au însă o latură OA , și cealaltă OM_1 sau OM_2 ; putem grupa valorile, de mai sus astfel:

$$x_1 + x_2 = 180^\circ$$

$$(x_1 + 360^\circ) + (x_2 + 360^\circ) = 180^\circ + 2 \times 360^\circ = 5 \times 180^\circ$$

$$(x_1 + 2 \times 360^\circ) + (x_2 + 2 \times 360^\circ) = 180^\circ + 4 \times 360^\circ = 9 \times 180^\circ$$

$$(x_1 + k \cdot 360^\circ) + (x_2 + k' \cdot 360^\circ) = 180^\circ + (k + k') \cdot 360^\circ \\ = [2(k + k') + 1] \cdot 180^\circ$$

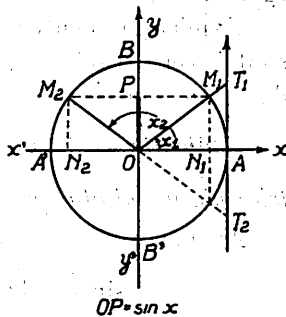


Fig. 54

adică unghiurile care răspund la un sinus dat, *au două câte două o sumă egală cu un unghi de 180° înmulțit cu un număr nepereche* (sau mai scurt: au o sumă egală cu un număr nepereche de semicercuri),

Acum reiese lesne rezultatul căutat; avem:

$$\cos x_1 = ON_1, \quad \cos x_2 = ON_2$$

dar segmentele ON_1 și ON_2 sunt egale și de semne contrare; tot astfel:

$$\operatorname{tg} x_1 = AT_1, \quad \operatorname{tg} x_2 = AT_2$$

dar segmentele AT_1 și AT_2 sunt egale și de semne contrare; deci la un $\sin x$ dat corespund două cosinusuri și două tangente, egale și de semne contrare.

Explicația pentru valorile lui $\cot x$ rezultă din faptul că ele sunt inversele lui $\operatorname{tg} x$, care am văzut că are două valori egale și de semn contrar.

Aplicația 2. Se dă $\cos x = \frac{2}{3}$; să aflăm celelalte linii trigonometrice ale unghiului x ($x < 90^\circ$).

Avem:

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Exercițiu. Urmând raționamentul dela pag. 73, se va arăta mai întâi cu ajutorul cercului trigonometric, că la valoarea dată a lui $\cos x$ răspund o infinitate de unghiuri; dar toate sunt cuprinse în formulele:

$$x = k \cdot 360^\circ + x_1$$

și

$$x' = k \cdot 360^\circ - x_1$$

în care k este un număr întreg pozitiv sau negativ; pentru aceste unghiuri x și x' , sinusurile, tangentele și cotangentele sunt egale și, de semn contrar.

Aplicația 3. Se dă $\operatorname{tg} x = 4$ ($a < 90^\circ$); se cere celelalte linii trigonometrice.

Pornim de la relația fundamentală (II):

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pe care o ridicăm la pătrat și îi adunăm în ambii membri câte o unitate; găsim:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

și ținând seama de relația (I), obținem:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

sau:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 16}} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

avem apoi:

$$\sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{4}{\sqrt{1 + 16}} = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

rezultă imediat:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{4}$$

Exercițiu. Să se arate că fiind dată valoarea $\operatorname{tg} x$, ei îi corespund o infinitate de unghiuri x , dar toate sunt cuprinse în formulele:

$$x = k \cdot 360^\circ + x_1 \quad \text{și} \quad x' = k \cdot 360^\circ + 180^\circ - x_1 = (2k + 1) 180^\circ - x_1$$

care se pot strânge într-o singură formulă

$$x = n \cdot 180^\circ + x_1$$

(când n este par, se găsesc valorile x , iar când n este impar, valorile x').

Se va explica apoi geometric de ce când se dă $\operatorname{tg} x$, x putând avea orice valoare, se obțin câte două valori egale și de semne contrare pentru $\sin x$, $\cos x$ și o singură valoare pentru $\operatorname{cotg} x$.

Aplicația 4. Se dă $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{2}$ ($a < 90^\circ$); se cere celelalte linii trigonometrice.

Procedând în mod analog ca la III găsim:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} = 2. \quad \sin x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cot}^2 x}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos x = \operatorname{cotg} x \sin x = \frac{\operatorname{cotg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{cot}^2 x}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Exercițiu. Se va dovedi ca la III, că la o $\operatorname{cotg} x$ dată, răspund o infinitate de unghiuri x , date de formula:

$$x = n \cdot 180^\circ + x_1$$

în care x_1 este cel mai mic unghi care are cotangenta egală cu valoarea dată; se va deduce apoi că la $\operatorname{cotg} x$ dată, răspund câte două valori egale și de semne contrare pentru $\sin x$, $\cos x$, și una singură pentru $\operatorname{tg} x$.

Formule corelative. S'a arătat mai sus că formulele fundamentale care leagă liniile trigonometrice ale unui unghi x , sunt în număr de trei, și am văzut că ele servesc la aflarea a trei din liniile trigonometrice când se cunoaște a patra linie trigonometrică.

Formulele care exprimă fiecare linie trigonometrică cu ajutorul celorlalte, se numesc *formule corelative*; astfel relațiile:

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} \quad \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

$$\cos x = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \text{ etc.}$$

sunt formule corelative. În tabloul de mai jos, se arată în dreptul fiecărei coloane verticale formulele prin care se pot afla aceste linii, când se dă linia trigonometrică înscrisă pe fiecare din șirurile orizontale.

Tabloul de formule corelative¹⁾:

	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
$\sin x$	$\sin x$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\frac{\sin x}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$
$\cos x$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\cos x$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	$\pm \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$
$\operatorname{cotg} x$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}}$	$\frac{\operatorname{cotg} x}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}}$	$\frac{1}{\operatorname{cotg} x}$	$\operatorname{cotg} x$

1) Acest tablou este corelativ și simetric.

(1)

(2)

(3)

¹⁾ Acest tablou nu se va memora; prin exerciții, elevii pot ajunge să poată aceste formule.

REZUMAT:

**CAP. V. — RELAȚIUNI ÎNTRE LINIILE TRIGONOMETRICE
ALE ACELUIAȘ UNGHIU.**

* Fiind dată o linie trigonometrică a unui unghi a , se pot afla și celelalte linii trigonometrice, ceea ce dovedește că: *între liniile trigonometrice ale aceluiaș unghi există un număr de relațiuni.*

* Din relațiile

$$(1) \quad \sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$(3) \quad \operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{\cos a}{\sin a}$$

se pot deduce trei din liniile trigonometrice: $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$, când se cunoaște a patra.

EXERCITII

1. Se dă $\sin a = \frac{4}{7}$; se cere să se calculeze celelalte linii trigonometrice ale unghiului a .

$$\text{R: } \cos a = \frac{\sqrt{33}}{7}, \quad \text{tg } a = \frac{4}{\sqrt{33}}, \quad \text{cotg } a = \frac{\sqrt{33}}{4}$$

2. Se dă $\text{tg } a = \frac{3}{8}$; să se calculeze celelalte linii trigonometrice.

$$\text{R: } \text{cotg } a = \frac{8}{3}, \quad \sin a = \frac{3}{\sqrt{73}}, \quad \cos a = \frac{8}{\sqrt{73}}$$

3. Să se afle liniile trigonometrice ale unui unghi a , a cărui cotangentă este egală cu 3,5.

$$\text{R: } \text{tg } a = 0,285; \quad \sin a = 0,274; \quad \cos a = 0,961$$

4. Se cunosc $\cos a = 0,35$; să se afle celelalte linii trigonometrice.

$$\text{R: } \sin a = 0,937; \quad \text{tg } a = 2,675; \quad \text{cotg } a = 0,374$$

5. Să se verifice relația:

$$\sin a \cdot \cos a = \frac{\text{tg } a}{1 + \text{tg}^2 a}$$

R: Se va exprima $\sin a$ și $\cos a$ în funcțiune de $\text{tg } a$.

CAP. VI.

FUNCTIUNI TRIGONOMETRICE.

Fie cercul trigonometric O și unghiul $AOM_1 = x_1$, în cadrantul I (fig. 55), dacă unghiul x_1 crește, se vede pe figură că segmentele N_1M_1 , AT_1 cresc, deci sinusul și tangenta lui x_1 , cresc; dimpotrivă, când x_1 crește segmentul ON_1 scade, adică cosinusul lui x_1 scade.

Rezultă de aci că valoarea sinusului, cosinusului, tangentei unui unghi $x_1 = \widehat{AOM_1}$, depind de mărimea unghiului (sau arcului AM_1); liniile trigonometrice principale ale unui unghi x , sunt deci funcțiuni de unghiul x (sau de arcul x). Putem deci scrie:

$$y = \sin x, \quad u = \cos x, \quad v = \operatorname{tg} x$$

Tot astfel, cotangenta lui x , care este inversa tangentei, este și ea o funcțiune de x .

Liniile trigonometrice ale unui unghi (sau arc) x se numesc și funcțiuni trigonometrice.

VARIAȚIA LINIILOR TRIGONOMETRICE ÎN CELE PATRU CADRANE.

Sinusul și cosinusul. 1. Dacă unghiul x_1 este egal cu zero raza OM_1 este confundată cu raza-origină OA iar punctele M_1 și N_1 cad în A ; în acest caz: $N_1M_1 = 0$, iar $ON_1 = 1$ deci:

$$\sin 0^\circ = 0 \quad ; \quad \cos 0^\circ = 1$$

(ceea ce s'a stabilit direct și pe altă cale; vezi pag. 36).

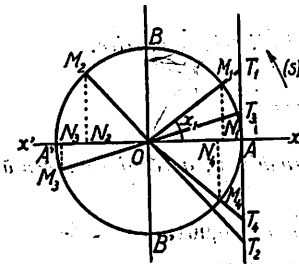


Fig. 55

Dacă unghiul x_1 crește treptat dar rămâne în primul cadran, adică raza OM se rotește în sensul săgeții (s) în spre poziția OB, în timp ce segmentul N_1M_1 crește și se apropie de lungimea razei OB, adică de *unitate*, segmentul ON_1 scade de la valoarea $OA = 1$, spre zero; în cazul când unghiul x_1 este de 90° , $N_1M_1 = OB = 1$, iar $ON_1 = 0$, deci

$$\sin 90^\circ = 1 \quad ; \quad \cos 90^\circ = 0$$

Reiese de aci :

Regula I. Când unghiul x crește treptat de la 0° la 90° (cadranul I), sinusul este pozitiv și crește treptat de la zero către unu, iar cosinusul este pozitiv și scade treptat de la unu spre zero.

Observare. Când $x = 45^\circ$, triunghiul dreptunghiu OM_1N_1 este isoscel, deci $N_1M_1 = ON_1$ și aplicând teorema lui Pitagora găsim :

$$2 N_1M_1^2 = OM_1^2 = 1 \quad , \quad M_1N_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

deci :

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercițiu. Să se arate pe cale geometrică, că dintre unghiurile x cuprinse între 0° și 90° , numai pentru unghiul de 45° , sinusul este egal cu cosinusul.

2. Dacă unghiul x crește treptat de la 90° spre 180° , se observă că sinusul N_2M_2 este pozitiv și scade de la unu spre zero, valoare pe care o atinge la 180° ; cosinusul ON_2 măsurându-se pe axa negativă Ox' , este negativ; el crește în valoare absolută de la zero spre unu, însă în valoare relativă, scade de la 0 la -1 , valoare pe care o ia când $x = 180^\circ$, căci atunci $ON_2 = OA' = -1$; putem scrie deci :

$$\sin 180^\circ = 0 \quad ; \quad \cos 180^\circ = -1$$

De aci :

Regula II. În cadranul II când unghiul x crește treptat de la 90° la 180° , sinusul este pozitiv și scade treptat de la unu la zero iar cosinusul este negativ și scade treptat (în valoare relativă) de la zero la -1 .

Când $x = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ sinusul și cosinusul sunt egali în valoare absolută, însă diferă ca semn:

$$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \quad \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

deci:

$$\sin 135^\circ = -\cos 135^\circ$$

Să reținem că sinusul de 135° este egal și de același semn cu sinusul de 45° , iar cosinusul de 135° este egal și de semn contrar cu cosinusul de 45° și că unghiurile 135° și 45° fac împreună 180° adică sunt suplimentare: $135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$.

Exercițiu. Să se dovedească pe cale geometrică:

- a) $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$, b) $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$
 c) $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$, d) $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$.

R: Se va observa în cazul a) și c) că perpendicularele N_1M_1 și N_2M_2 sunt egale și au același semn fiind deasupra lui Ox ; iar în cazul b) și d) segmentele ON_1 și ON_2 sunt egale și de semn contrar, primul fiind pe axa pozitivă Ox , celălalt pe axa negativă Ox' .

Să reținem că suma unghiurilor 120° și 60° de o parte și 150° și 30° de altă parte face 180° , adică unghiurile sunt suplimentare:

$$120^\circ + 60^\circ = 180^\circ \quad \text{și} \quad 150^\circ + 30^\circ = 180^\circ.$$

3. Când unghiul crește treptat de la 180° la 270° , sinusul N_3M_3 este negativ și scade (în valoare relativă) de la zero la -1 , iar cosinusul ON_3 este tot negativ și crește (în valoare relativă) de la -1 la zero.

Avem:

$$\sin 270^\circ = -1 , \quad \cos 270^\circ = 0$$

de aci:

Regula III. În cadrantul III, când unghiul x crește treptat de la 180° la 270° , sinusul este negativ și scade treptat de la 0 la -1 , iar cosinusul este negativ și crește treptat de la -1 la 0 .

Când $x = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$ se observă lesne că:

$$\sin 225^\circ = \cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Să reținem că sinusul de 225° este egal și de semn contrar cu sinusul de 45° , iar cosinusul de 225° este egal și de semn contrar cu cosinusul de 45° și că unghiurile 225° și 45° diferă prin 180° :

$$225^\circ - 45^\circ = 180^\circ.$$

Exercițiu. Să se dovedească pe cale geometrică:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sin 210^\circ = -\sin 30^\circ, & \text{b) } \cos 210^\circ = -\cos 30^\circ, \\ \text{c) } \sin 240^\circ = -\sin 60^\circ, & \text{d) } \cos 240^\circ = -\cos 60^\circ. \end{array}$$

R: Se va observa că în cazul a) și c) $N_3M_3 = N_1M_1$ (în valoare absolută) dar diferă ca semne, primul segment fiind *negativ* iar al doilea *pozitiv*; concluzii analoge pentru segmentele ON_3 și ON_1 .

Să reținem, că unghiurile 210° și 30° de o parte și 240° și 60° de altă parte, diferă cu 180° :

$$210^\circ - 30^\circ = 180^\circ, \quad 240^\circ - 60^\circ = 180^\circ$$

4. Când unghiul x crește treptat de la 270° la 360° sinusul N_4M_4 este *negativ* și crește (în valoare relativă) de la -1 la zero, iar cosinusul ON_4 este *pozitiv* și crește de la zero la 1 ; avem:

$$\sin 360^\circ = \sin 0^\circ = 0, \quad \cos 360^\circ = \cos 0^\circ = 1.$$

Regula IV. În cadranul IV, când unghiul x crește treptat de la 270° la 360° , sinusul este *negativ* și crește treptat de la -1 la 0 , iar cosinusul este *pozitiv* și crește treptat de la 0 la 1 .

Pentru unghiul $270^\circ + 45^\circ = 315^\circ$, triunghiul ON_4M_4 este isoscel, deci $N_4M_4 = ON_4$ (în valoare absolută) ON_4 este *pozitiv* iar N_4M_4 *negativ*; avem:

$$\sin 315^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

deci:

$$\sin 315^\circ = -\cos 315^\circ.$$

Să reținem, că sinusul de 315° este egal și de semn contrar cu sinusul de 45° , iar cosinusul de 315° este egal și de același semn cu cosinusul de 45° și că unghiurile 315° și 45° fac împreună 360° :

$$315^\circ + 45^\circ = 360^\circ.$$

Exercițiu. Să se dovedească pe cale geometrică :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sin 300^\circ = -\sin 60^\circ & \text{b) } \cos 300^\circ = \cos 60^\circ; \\ \text{c) } \sin 330^\circ = -\sin 30^\circ, & \text{d) } \cos 330^\circ = \cos 30^\circ. \end{array}$$

Se va observa că în cazurile a) și c) perpendicularele N_1M_1 și N_4M_4 sunt egale și de semn contrar pe când în cazurile b) și d) segmentele ON_1 și ON_4 coincid (sunt egale și de acelaș semn).

Să reținem că $300^\circ + 60^\circ = 360^\circ$ și că $330^\circ + 30^\circ = 360^\circ$.

Periodicitatea sinusului și cosinusului. Dacă unghiul x ar crește treptat peste 360° (fig. 55), astfel ca unghiul AOM să primească valorile $360^\circ + x$, se observă că lucrurile se petrec ca la început : ca și cum x ar fi început să varieze dela 0° ; într'adevăr, avem spre ex. :

$$\begin{array}{l} \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ; \quad \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ \\ \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cos(360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ; \quad \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ \\ \cos(360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ \end{array}$$

și într'un mod general (dacă x este în primul cadran).

$$(1) \quad \begin{array}{l} \sin(360^\circ + x) = M_1M_1 = \sin x, \\ \cos(360^\circ + x) = ON_1 = \cos x; \end{array}$$

tot astfel dacă examinăm cazurile când x ar primi o valoare cuprinsă în unul oarecare din celelalte trei cadrane, relațiile (1) sunt *adevărate*.

Rezultă de aci că, *dacă* unghiul x crește peste 360° , și primește valori între 360° și $2 \times 360^\circ = 720^\circ$, *sinusul și cosinusul își recapătă valorile pe care le-au avut când unghiul x a variat între 0° și 360° .*

La aceeași concluzie se ajunge, dacă x ar varia între 720° și $3 \times 360^\circ = 1080^\circ$, între 1080° și $4 \times 360^\circ = 1440^\circ$ și în general între $k \times 360^\circ$ și $(k+1)360^\circ$, k fiind un număr întreg și pozitiv; putem scrie deci relațiile :

$$\begin{array}{l} \sin(2 \times 360^\circ + x) = \sin(3 \times 360^\circ + x) = \dots = \sin x \\ \cos(2 \times 360^\circ + x) = \cos(3 \times 360^\circ + x) = \dots = \cos x \end{array}$$

și într'un mod general:

(2)

$$\begin{aligned}\sin(k \cdot 360^\circ + x) &= \sin x \\ \cos(k \cdot 360^\circ + x) &= \cos x\end{aligned}$$

în care numărul k este un număr *întreg și pozitiv*.

Aceste relații sunt adevărate și când numărul k este întreg și negativ.

Să observăm în acest scop că dacă raza OM ar descrie cercul trigonometric de un număr *întreg* de ori în sens *negativ* și apoi s'ar întoarce în sens *pozitiv* până în OM_1 , unghiul descris ar fi:

la o singură rotație completă, plus \widehat{AOM}_1 : $-360^\circ + x$

la două rotații complete, plus \widehat{AOM}_1 : $-2 \times 360^\circ + x$

la trei rotații complete, plus \widehat{AOM}_1 : $-4 \times 360^\circ + x$

și în general la k rotații complete, plus \widehat{AOM}_1 : $-k \cdot 360^\circ + x$.

În toate aceste cazuri *sinusul și cosinusul acestor unghiuri* sunt totdeauna egali cu *sinusul și cosinusul lui x* , adică:

$$\sin(-360^\circ + x) = \sin x; \quad \sin(-2 \times 360^\circ + x) = \sin x, \dots$$

$$\sin(-k \cdot 360^\circ + x) = \sin x.$$

$$\cos(-360^\circ + x) = \cos x; \quad \cos(-2 \times 360^\circ + x) = \cos x, \dots$$

$$\cos(-k \cdot 360^\circ + x) = \cos x$$

astfel că relațiile (2) sunt adevărate pentru k *întreg, pozitiv sau negativ*.

Proprietatea de mai sus, pe care o au sinusul și cosinusul, de a relua, când unghiul x crește peste 360° , valorile pe care le-au avut când x a variat între 0° și 360° se cheamă *periodicitate*.

Se zice că sinusul și cosinusul sunt *funcțiuni periodice*.

Reprezentarea grafică a variației sinusului. Am văzut că *sin x* este o funcțiune de x , adică putem scrie:

$$y = \sin x;$$

pentru a-i studia variația, y fiind o funcțiune periodică, este

suficient să-i dăm lui x valori între 0° și 360° ; din studiul variației sinusului, rezultă *tabloul de variație*:

x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
y	0	$\uparrow \frac{1}{2}$	$\uparrow \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\uparrow \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\uparrow 1$	$\downarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\downarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\downarrow \frac{1}{2}$	0	$\downarrow -\frac{1}{2}$	$\downarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\downarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\uparrow -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\uparrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\uparrow -\frac{1}{2}$	0

Dacă purtăm pe axa Ox gradele, la o scară convenabil aleasă în raport cu dimensiunile desenului (spre exemplu $1 \text{ mm} = 5^\circ$) iar pe axa Oy , valorile sinusului (reprezentând spre exemplu numărul abstract 1, prin 1 cm.), obținem curba din fig. 56, numită și *sinusoidă*.

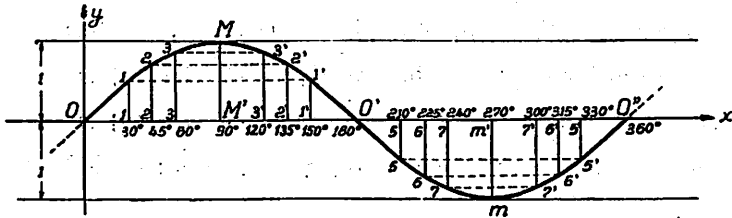


Fig. 56

Sinusoida are între 0° și 360° forma a două bucle:

1. O buclă OMO' cu ordonate pozitive, care reprezintă valorile sinusului când unghiul x variază între 0° și 180° ; cea mai mare ordonată este $MM' = +1$ și corespunde cu $x = 90^\circ$ (se zice că MM' este maximul lui $\sin x$ sau maximul pozitiv a lui $\sin x$).

2. O buclă $O'mO''$ cu ordonate negative care reprezintă valorile sinusului când unghiul x variază între 180° și 360° ; cea mai mică ordonată (în valoare relativă) este $mm' = -1$ și corespunde la $x = 270^\circ$ (se zice că mm' este minimul lui $\sin x$, sau *maximul negativ* a lui $\sin x$).

Deoarece $y = \sin x$ este o funcțiune periodică, forma curbei, pentru $x < 0^\circ$ sau pentru $x > 360^\circ$, se poate obține dând curbei $OMO'mO''$ o translație egală cu 360° în lungul lui Ox , spre stânga sau spre dreapta.

Punctele O, O', O'', \dots unde sinusoida întâlnește axa Ox se numesc și *nodurile* sinusoidelor.

Observări. 1. Tot din forma sinusoidelor să reținem că :

a) deoarece :

$$\sin 30^\circ = \sin 150^\circ; \quad \sin 45^\circ = \sin 135^\circ; \quad \sin 60^\circ = \sin 120^\circ$$

ordonatele (1 1) și (1' 1'), (2 2) și (2' 2'), (3 3) și (3' 3') sunt egale și simetrice față de ordonata maximă MM' ; pentru un motiv analog sunt egale și simetrice față de ordonata minimă mm' , ordonatele (5 5) și (5' 5'), (6 6) și (6' 6'), (7 7) și (7' 7').

b) deoarece :

$$\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ = -\sin 150^\circ$$

$$\sin 225^\circ = -\sin 45^\circ = -\sin 135^\circ$$

$$\sin 240^\circ = -\sin 60^\circ = -\sin 120^\circ$$

ordonatele (1' 1') și (5 5), (2' 2') și (6 6'), (3' 3') și (7 7), etc. sunt egale, de semne contrare și simetrice în raport cu punctul O' .

2. Pentru reprezentarea sinusoidelor, putem lua pe axa absciselor, valorile unghiului x în radiani, sau ale arcelor corespunzătoare de pe cercul trigonometric; ceea ce este tot una din punct de vedere numeric, deoarece :

$$\text{arcu} = \text{raza} \times \text{unghiul radiani} \quad (\text{raza} = 1)$$

Obținem în acest caz sinusoida din figura 57 care nu diferă

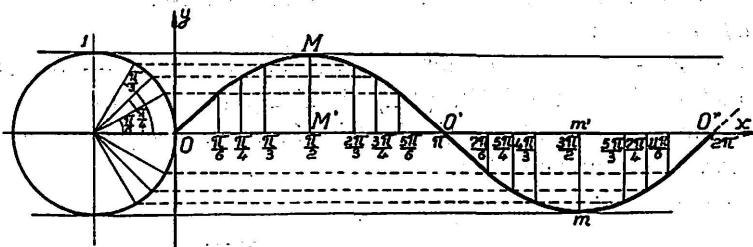


Fig. 57

de aceea din fig. 56 decât prin modul de alegere al scărilor; în fig. 57 scărilor alese pe axele ox și oy sunt astfel că numărul abstract

1 este reprezentat prin 1 cm., iar unghiul $\frac{\pi}{6}$ prin 6 mm.

Reprezentarea grafică a variației cosinusului. Tabloul de variație al funcțiunii :

$$y = \cos x$$

care este periodică (perioada = 360°) este următorul :

x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
y	1	$\downarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\downarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\downarrow \frac{1}{2}$	0	$\downarrow -\frac{1}{2}$	$\downarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\downarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\uparrow -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\uparrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\uparrow -\frac{1}{2}$	0	$\uparrow \frac{1}{2}$	$\uparrow \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\uparrow \frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Curba reprezentativă este arătată în fig. 58 și se cheamă cosinoidă.

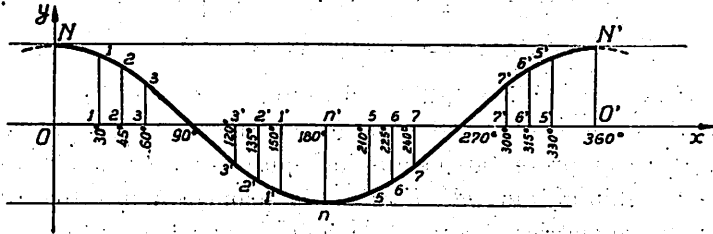


Fig. 58

Funcțiunea $y = \cos x$ este maximă pentru $x = 0$ și $x = 360^\circ$ ($ON = O'N' = 1$), și minimă pentru $x = 180^\circ$ ($nn' = -1$).

Observări. 1. Din forma sinusoidei să reținem că :

a) deoarece :

$\cos 30^\circ = -\cos 150^\circ$; $\cos 45^\circ = -\cos 135^\circ$; $\cos 60^\circ = -\cos 120^\circ$,
ordonatele (1 1) și (1' 1'), (2 2) și (2' 2'), (3 3) și (3' 3') sunt
egale, de semne contrare și simetrice în raport cu punctul de pe
axa Ox , care reprezintă 90° .

b) deoarece :

$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = \cos 240^\circ$; $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = \cos 225^\circ$
 $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = \cos 210^\circ$,

ordonatele (3' 3') și (7 7), (2' 2') și (6 6), (1' 1') și (5 5) sunt
egale, de acelaș semn și simetrice în raport cu dreapta nn' .

c) O concluzie analogă cu aceea dela a) se poate trage pentru
ordonatele (5 5) și (5' 5'), (6 6) și (6' 6'), (7 7) și (7' 7').

2. Dacă facem să alunecă cosinusoida, printr'o translație, spre dreapta, de 90° (sau $\frac{\pi}{2}$), ea coincide cu sinusoida, deoarece:

$$\sin x = \cos (90^\circ - x).$$

Rezultă de aci că sinusoida și cosinusoida sunt de fapt una și

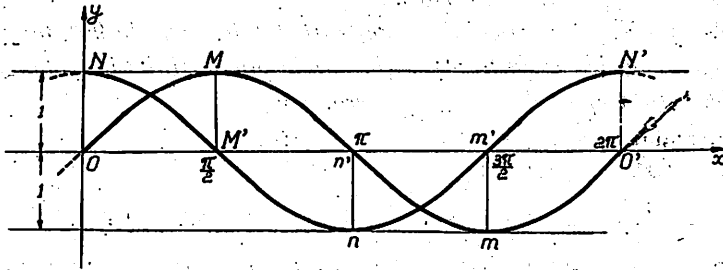


Fig. 59

aceeași curbă, situate însă în poziții diferite față de axele Ox , Oy .

În fig. 59 s'au figurat aceste două curbe pe același desen.

+ Variația tangentei și cotangentei.

1. Dacă unghiul $x_1 = \widehat{AOM}_1$ este egal cu zero, punctul T_1 în care raza OM_1 întâlnește tangenta $T'AT$ la cerc, coincide cu A , deci $AT_1 = 0$ (fig. 60), iar punctul U_1 în care raza OM_1 întâlnește tangenta $U'BU$ se află la infinit spre dreapta lui B , adică:

$$BU_1 = +\infty;$$

deci:

$$\operatorname{tg} 0^\circ = 0; \quad \operatorname{cotg} 0^\circ = +\infty$$

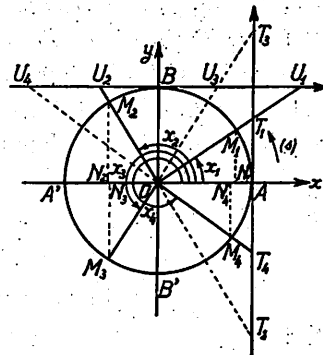


Fig. 60

! Dacă unghiul x_1 crește treptat, dar rămâne în cadranul I, raza OM_1 se rotește în sensul săgeții (s) până coincide cu B ; în acest timp punctul T_1 se depărtează de A pe tangenta AT în sus astfel că segmentul AT_1 crește treptat, iar când raza OM_1 se așterne peste

raza OB, ea devine paralelă cu tangenta în A la cerc, T_1 va fi la infinit (deci $AT_1 = +\infty$). În același timp punctul U_1 de pe tangenta în B la cerc se apropie de B, astfel că segmentul BU_1 , scade treptat până la valoarea zero, pe care o ia când M_1 vine în B.

Avem deci: $\operatorname{tg} 90^\circ = +\infty$ și $\operatorname{cotg} 90^\circ = 0$.

Din cele de mai sus, rezultă:

Regula V. Când unghiul x_1 crește treptat dela zero la 90° , tangenta sa trigonometrică crește treptat, dela zero la plus infinit; iar cotangenta sa descrește treptat dela $+\infty$ la zero.

Exercițiu. Să se arate pe cale geometrică:

$$1) \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = 1$$

$$2) \operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{cotg} 30^\circ = \sqrt{3}.$$

2. Când unghiul x_2 depășește cu foarte puțin unghiul de 90° adică raza OM_2 se rotește din poziția OB foarte puțin, spre stânga, prelungirea razei OM_2 întâlnește tangenta în punctul A la cerc, foarte departe dedesubtul lui A, adică pe porțiunea negativă a acestei tangente; rezultă de aci că atunci când un unghiul obtus este foarte puțin diferit de unghiul drept, tangenta sa trigonometrică este negativă și foarte mare în valoare absolută¹⁾.

Dacă unghiul x crește, se vede pe figură că punctul T se apropie de A iar punctul U se depărtează de B pe tangenta în acest punct la cerc, astfel că pentru un unghi oarecare $x_2 = \widehat{AOM_2}$ din cadranul II; avem:

$$\operatorname{tg} x_2 = AT_2 \text{ (segment negativ)}$$

și:

$$\operatorname{cotg} x_2 = BU_2 \text{ (segment negativ)}$$

adică tangenta crește în valoare relativă (dar scade în valoare absolută), iar cotangenta scade în valoare relativă (dar crește în valoare absolută).

¹⁾ Deoarece când unghiul x este în cadranul I dar foarte aproape de 90° tangenta sa trigonometrică e foarte mare și pozitivă, iar când unghiul x este în cadranul II depășind cu puțin acest unghi, tangenta sa trigonometrică e foarte mare dar negativă, se zice că pentru $x = 90^\circ$, tangenta este discontinuă: sare dela $+\infty$ la $-\infty$.

Când unghiul x_2 devine egal cu 180° , punctul T_2 coincide cu A , segmentul $AT_2 = 0$, iar punctul U_2 se află la infinit pe tangenta BU (spre stânga), deci $BU_2 = -\infty$, astfel că :

$$\operatorname{tg} 180^\circ = 0^\circ, \quad \operatorname{cotg} 180^\circ = -\infty$$

De aci :

Regula VI. Când unghiul x_2 crește treptat dela 90° la 180° , $\operatorname{tg} x_2$ crește treptat în valoare relativă dela $-\infty$ la zero, iar $\operatorname{cotg} x_2$ scade treptat, în valoare relativă dela zero la $-\infty$.

Exercițiu. Să se arate pe cale geometrică :

1) $\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{cotg} 135^\circ = -1$

2) $\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ$; $\operatorname{tg} 150^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ$

3) $\operatorname{cotg} 120^\circ = -\operatorname{cotg} 60^\circ$; $\operatorname{cotg} 150^\circ = -\operatorname{cotg} 30^\circ$.

Să reținem că unghiurile 120° și 60° de o parte și 150° și 30° de altă parte sunt suplimentare.

Periodicitatea lui $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{cotg} x$. Dacă unghiul x crește peste 180° , dar rămâne în cadranul III, atât tangenta cât și cotangenta lui reiau valorile pe care le-au avut pentru unghiurile din cadranul I; astfel pentru unghiul $\widehat{AOM}_3 = 180^\circ + x_1$ avem :

$$\operatorname{tg} x_3 = \operatorname{tg} (180^\circ + x_1) = OT_1 = \operatorname{tg} x_1$$

$$\operatorname{cotg} x_3 = \operatorname{cotg} (180^\circ + x_1) = OM_1 = \operatorname{cotg} x_1$$

Tot astfel, pentru unghiurile din cadranul IV, tangenta și cotangenta reiau valorile pe care le-au avut pentru unghiurile din cadranul II; fie unghiul $\widehat{AOM}_4 = 180^\circ + x_2$, avem :

$$\operatorname{tg} x_4 = \operatorname{tg} (180^\circ + x_2) = OT_2 = \operatorname{tg} x_2$$

$$\operatorname{cotg} x_4 = \operatorname{cotg} (180^\circ + x_2) = OU_2 = \operatorname{cotg} x_2$$

Din cauza acestei proprietăți de a-și recăpăta valorile, când unghiul x crește peste 180° , se zice că $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{cotg} x$ sunt funcțiuni periodice, iar perioada este egală cu 180° .

Mai general, dacă unui unghi x , i se adaugă un multiplu nepereche de 180° (sau cum se mai zice : un număr nepereche de semicircuri), tangenta și cotangenta unghiului astfel rezultat sunt egale respectiv cu $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{cotg} x$, adică :

$$(3) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} [(2k + 1)180^\circ + x] = \operatorname{tg} x \\ \operatorname{cotg} [(2k + 1)180^\circ + x] = \operatorname{cotg} x \end{cases}$$

Reprezentarea grafică a funcției $y = \operatorname{tg} x$ și $u = \operatorname{cotg} x$. Aceste funcțiuni având perioada 180° , este suficient să dăm lui x valori între 0° și 180° ; obținem tablourile de mai jos și reprezentările grafice din figurile 61 și 62.

		<i>Tangenta</i>								
x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	
y	0	$\nearrow \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\nearrow 1$	$\nearrow \sqrt{3}$	$\nearrow +\infty$	$-\infty$	$\nearrow -\sqrt{3}$	$\nearrow -1$	$\nearrow -\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

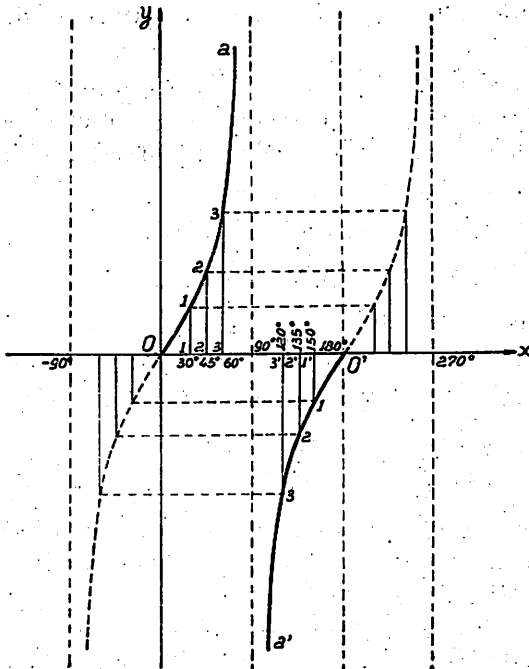


Fig. 61.

Curba reprezentativă este formată, între 0° și 180° , din două arce Oa și $a'O'$, care ating dreapta aa' paralelă cu Oy la infinit¹⁾.

Să reținem că de oarece:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = -\operatorname{tg} 150^\circ$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = -\operatorname{tg} 135^\circ$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = -\operatorname{tg} 120^\circ$$

ordonatele (1 1) și (1' 1'), (2 2) și (2' 2'), (3 3) și (3' 3') sunt două câte două egale, de

¹⁾ Dreapta aa' se numește din această cauză, *asimptotă* la curbă.

semne contrare și sunt *simetrice* în raport cu punctul de pe axa Ox , de abscisă $x = 90^\circ$ ¹⁾.

Cotangenta

x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
y	$+\infty$	$\searrow \sqrt{3}$	$\searrow 1$	$\searrow \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow 0$	$\searrow -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow -1$	$\searrow -\sqrt{3}$	$\searrow -\infty$

Concluzii analoge ca în cazul tangentei ²⁾ (fig. 62).

Perioadă. Funcțiuni periodice. S'a arătat mai sus că dacă unui unghi x i se adaugă un unghi de 360° (sau un unghi $k \times 360^\circ$, k fiind un întreg oărecare pozitiv sau negativ), *sinusul și cosinusul* unghiului astfel rezultat, sunt egali cu sinusul și cosinusul lui x , adică *valorile acestor linii trigonometrice se repetă.*

Tot astfel dacă unghiului x i se adaugă 180° , sau un unghi $(2k + 1)180^\circ$, k fiind un întreg pozitiv sau negativ, valorile lui $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{cotg} x$ se repetă.

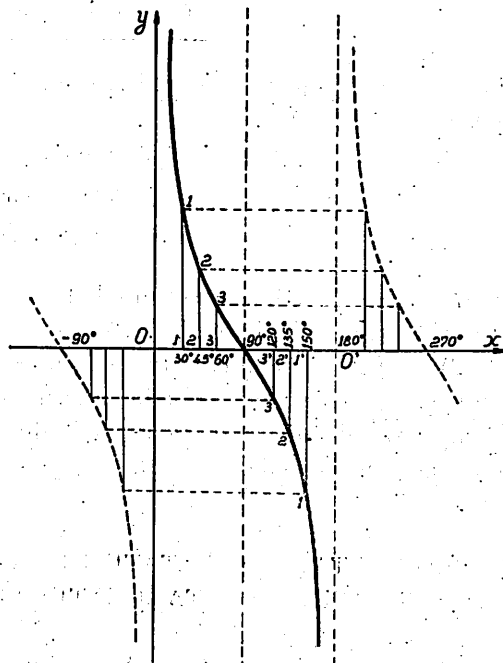


Fig. 62

¹⁾ Punctul $x = 90^\circ$, care are proprietatea că imediat înaintea sa, funcțiunea $y = \operatorname{tg} x$ are o valoare pozitivă foarte mare ($+\infty$), iar imediat în urma sa, are o valoare negativă foarte mare ($-\infty$) se cheamă punct de discontinuitate; despre $y = \operatorname{tg} x$ se spune că este o funcțiune discontinuă pentru $x = 90^\circ$ (vezi și pag. 90).

²⁾ Cotangenta este discontinuă pentru $x = 0$, $x = 180^\circ$.

Din această cauză, *unghiul de 360° se cheamă perioada funcțiilor $\sin x$ și $\cos x$; iar unghiul de 180° , perioada funcțiilor $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{cotg} x$; funcțiunile $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, se mai numesc și funcțiuni periodice.*

Observare. Intr'un mod general se numește funcțiune periodică, o funcțiune $f(x)$ care are proprietatea că :

$$f(x + k.T) = f(x)$$

în care T este o cantitate pozitivă numită perioadă iar k un întreg pozitiv sau negativ.

În cazul lui $\sin x$ și $\cos x$ avem :

$$\sin(x + k.360^\circ) = \sin x$$

$$\cos(x + k.360^\circ) = \cos x$$

Exemple: 1) Orice funcțiuni de forma : $y = A.\sin x$, $u = B.\cos x$, $v = C.\operatorname{tg} x$, $w = D.\operatorname{cotg} x \dots$ sunt funcțiuni periodice.

2) Să presupunem că într'o stațiune, sosește la fiecare 3 minute un vagon de tramvai; perioada acestui fenomen este $T = 3$ minute.

3) Fazele lunii, care se repetă din lună în lună, constituiesc un fenomen periodic.

PROPRIETĂȚI REZULTATE DIN VARIAȚIA SINUSULUI, COSINUSULUI, TANGENTEI ȘI COTANGENTEI.

Unghiuri suplimentare. S'a văzut mai sus (pag. 82) că :

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ; \sin 135^\circ = \sin 45^\circ; \sin 150^\circ = \sin 30^\circ$$

iar :

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ; \cos 135^\circ = -\cos 45^\circ; \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$$

iar în toate aceste cazuri, unghiurile din cei doi membri ai egalităților, fac împreună 180° :

$$120^\circ + 60^\circ = 180^\circ \quad ; \quad 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ \quad ; \quad 150^\circ + 30^\circ = 180^\circ.$$

Fie acum un unghi *oarecare* în primul cadran (fig. 63): $x = \widehat{AOM}_1$ și unghiul suplimentar: $\widehat{AOM}_2 = 180^\circ - x$, situat în cadranul II; rezultă lesne din figură că $\widehat{M_2ON_2} = x$, iar dreapta M_1M_2 este paralelă cu diametrul AA' .

Din triunghiurile dreptunghice ON_1M_1 și ON_2M_2 care sunt egale deoarece au: ipotenusele egale ($OM_1 = ON_1 = 1$) și câte un unghi ascuțit egal ($\widehat{N_1OM_1} = \widehat{N_2OM_2}$) rezultă:

$N_1M_1 = N_2M_2$ (în valoare absolută și semn, deoarece amândouă segmentele sunt pozitive).

$ON_1 = ON_2$ (în valoare absolută; semnul lui ON_1 este pozitiv iar semnul lui ON_2 negativ).
prin urmare:

(I)

$$\sin x = \sin (180^\circ - x)$$

$$\cos x = -\cos (180^\circ - x)$$

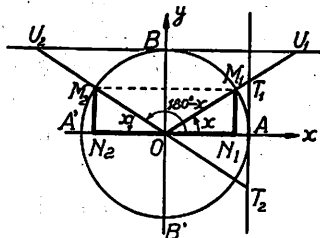


Fig. 63

Tot astfel în studiul variației tangentei și cotangentei (pag. 91) s'au obținut rezultatele:

$\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ$; $\operatorname{tg} 135^\circ = -\operatorname{tg} 45^\circ$; $\operatorname{tg} 150^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ$.
și:

$\operatorname{cotg} 120^\circ = -\operatorname{cotg} 60^\circ$; $\operatorname{cotg} 135^\circ = -\operatorname{cotg} 45^\circ$; $\operatorname{cotg} 150^\circ = -\operatorname{cotg} 30^\circ$;

unghiurile 120° și 60° , 135° și 45° , 150° și 30° sunt suplimentare.

Din triunghiurile dreptunghice OAT_1 , OAT_2 care sunt egale (deoarece OA este bisectoare și înălțime în triunghiul isoscel T_1OT_2) rezultă că $AT_1 = AT_2$ (numai în valoare absolută) iar din triunghiurile dreptunghice OBU_1 și OBU_2 care de asemeni sunt egale, avem că: $BU_1 = BU_2$ (numai în valoare absolută); prin urmare:

$$(I') \quad \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} (180^\circ - x) \\ \operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg} (180^\circ - x) \end{array}$$

Din (I) și (I') rezultă:

Proprietatea I. *Dacă două unghiuri sunt suplimentare, sinusurile lor sunt egale și de același semn, iar cosinusurile, tangentele și cotangentele sunt egale și de semne contrare *).*

Observare. 1) Relațiile (I) se mai pot scrie și astfel, dacă $x + x' = 180^\circ$:

$$\sin x = \sin x' \quad \text{și} \quad \cos x = -\cos x'$$

2) Relațiile (I) ne permit să aflăm sinusul și cosinusul unui unghi din cadranul (II), cu ajutorul sinusului și cosinusului unui unghi din cadranul I.

Exemplu. Să aflăm: $\sin 170^\circ$, $\cos 170^\circ$; suplimentul lui 170° este unghiul de 10° , deci:

$$\sin 170^\circ = \sin 10^\circ, \quad \cos 170^\circ = -\cos 10^\circ$$

și căutând în tabela de valori naturale, găsim:

$$\sin 10^\circ = 0,174 \quad \cos 10^\circ = 0,985$$

$$\text{deci:} \quad \sin 170^\circ = 0,174 \quad \cos 170^\circ = -0,985$$

Unghiuri cari diferă cu 180° . Când s'au studiat variațiile sinusului și cosinusului în cadranul III, s'au găsit rezultatele:

$$\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ; \quad \sin 225^\circ = -\sin 45^\circ; \quad \sin 240^\circ = -\sin 60^\circ$$

și:

$$\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ; \quad \cos 225^\circ = -\cos 45^\circ; \quad \cos 240^\circ = -\cos 60^\circ$$

și se vede că în toate aceste cazuri, diferența unghiurilor din cei doi membri ai egalităților, este egală cu 180° :

$$210^\circ - 30^\circ = 180^\circ; \quad 225^\circ - 45^\circ = 180^\circ; \quad 240^\circ - 60^\circ = 180^\circ$$

Să cercetăm dacă proprietățile acestea sunt generale, adică adevărate pentru două unghiuri diferind cu 180° ; fie în acest

*) Mai general; dacă $x' + x'' = (2k \pm 1) 180^\circ$, avem:
 $\sin x = \sin x'$; $\cos x = -\cos x'$; $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} x'$; $\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg} x'$.

scop un unghi *oărecare* în primul cadran : $x = \widehat{AOM}_1$ (fig. 64) ; să prelungim raza OM_1 până în M_3 unde întâlnește a doua oară cercul trigonometric ; unghiul \widehat{AOM}_3 are valoarea $180^\circ + x$. Din triunghiurile dreptunghice ON_1M_1 și ON_3M_3 care sunt egale, deoarece au ipotenușele egale ($OM_1 = OM_3 = 1$) și câte un unghi ascuțit egal ($\widehat{N_1OM_1}$ și $\widehat{N_3OM_3}$ ca opuse la vârf), obținem :

$N_1M_1 = N_3M_3$ (numai în valoare absolută), și

$ON_1 = ON_3$ (numai în valoare absolută), deoarece segmentele N_1M_1 și ON_1 sunt pozitive iar N_3M_3 și ON_3 sunt negative ; prin urmare :

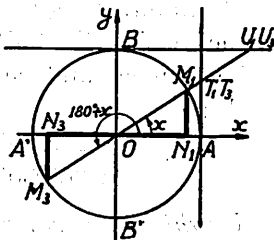


Fig. 64

(II)

$$\begin{aligned} \sin x &= -\sin(180^\circ + x) \\ \cos x &= -\cos(180^\circ + x) \end{aligned}$$

Să observăm că atât unghiul $x_1 = \widehat{AOM}_1$ cât și unghiul $x_3 = \widehat{AOM}_3$ care diferă de primul prin 180° , au aceeași tangentă $AT_1 = AT_3$ și aceeași cotangentă : $BU_1 = BU_3$.
deci :

(II)'

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg}(180^\circ + x) \\ \operatorname{cotg} x &= \operatorname{cotg}(180^\circ + x) \end{aligned}$$

de aci rezultă :

Proprietatea II. Dacă două unghiuri au o diferență egală cu 180° , sinusurile și cosinusurile lor sunt egale și de semne contrare, iar tangentele și cotangentele sunt egale și de acelaș semn.

Observări. 1) Relațiile (II) se mai pot scrie și astfel ; dacă :

$$x' - x = 180^\circ$$

avem :

$$\sin x = -\sin x' ; \cos x = -\cos x' ; \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x' ; \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} x'^1)$$

¹⁾ Mai general ; dacă $x - x' = (2k + 1) 180^\circ$, avem :

$$\begin{aligned} \sin x &= -\sin x' & \cos x &= -\cos x' \\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} x' & \operatorname{cotg} x &= \operatorname{cotg} x' \end{aligned}$$

2) Relațiile (II) ne folosesc să aflăm sinusul și cosinusul unui unghi din cadranul III, cu ajutorul sinusului și cosinusului unui unghi din cadranul I.

Exemplu: Să aflăm: $\sin 265^\circ 30'$ și $\cos 265^\circ 30'$. Unghiul care trebuie scăzut din $265^\circ 30'$ pentru a obține 180° este de $85^\circ 30'$, deci găsim cu ajutorul relațiilor (II) și a tabelelor de valori naturale:

$$\sin 265^\circ 30' = -\sin 85^\circ 30' = -0,997$$

$$\cos 265^\circ 30' = -\cos 85^\circ 30' = -0,078$$

Unghiuri a căror sumă este de 360° . Din cercetarea variației sinusului și cosinusului unui unghi cuprins în cadranul IV, am găsit:

$\sin 300^\circ = -\sin 60^\circ$; $\sin 315^\circ = -\sin 45^\circ$; $\sin 330^\circ = -\sin 30^\circ$
și

$$\cos 300^\circ = \cos 60^\circ$$
; $\cos 315^\circ = \cos 45^\circ$; $\cos 330^\circ = \cos 30^\circ$

și se vede că în toate aceste cazuri, *suma* unghiurilor din cei doi membri ai egalităților este egală cu 360° :

$$300^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$
; $315^\circ + 45^\circ = 360^\circ$; $330^\circ + 30^\circ = 360^\circ$

Să cercetăm dacă această proprietate este generală, adică dacă ea este adevărată pentru două unghiuri oarecare, dar care au o sumă egală cu 360° .

Fie în acest scop unghiul $\widehat{AOM}_1 = x$ și $\widehat{AOM}_4 = 360^\circ - x$ (fig. 65); rezultă că unghiul ascuțit \widehat{AOM}_4 este în valoare absolută egal cu x iar în valoare relativă cu $-x$,

deoarece raza origină OA trebuie rotită în sens negativ de unghiul x pentru ca să coincidă cu raza OM_4 ; mai rezultă lesne că: coarda M_1M_4 este perpendiculară pe raza OA și este împărțită de aceasta în două părți egale, deoarece triunghiul OM_1M_4 este isoscel iar OA este bisectoarea unghiului M_1OM_4 . Există deci relația: $N_1M_1 = N_4M_4$ (numai în valoare absolută)

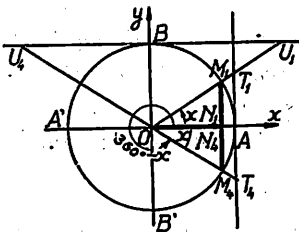


Fig. 65

N_1M_1 fiind pozitiv iar N_4M_4 negativ; tot de pe figură reiese că

segmentul $ON_1 = ON_4$ (și în valoare și în semn) deoarece proiecțiile punctelor M_1 și M_4 pe diametrul $A'A$ coincid.

De aci relațiile:

(III)

$$\begin{aligned} \sin x &= -\sin(360^\circ - x) \\ \cos x &= \cos(360^\circ - x) \end{aligned}$$

Din triunghiurile dreptunghice egale OAT_1 și OAT_4 de o parte și OBU_1 și OBU_4 de alta, avem egalitățile de segmente:

$$\begin{aligned} AT_1 &= AT_4 \text{ (numai în valoare absolută)} \\ BU_1 &= BU_4 \end{aligned}$$

deci:

(III)'

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= -\operatorname{tg}(360^\circ - x) \\ \operatorname{cotg} x &= -\operatorname{cotg}(360^\circ - x) \end{aligned}$$

de aci rezultă:

Proprietatea III. Dacă două unghiuri au o sumă egală cu 360° , sinusurile, tangentele și cotangentele lor sunt egale și de semn contrar, iar cosinusurile sunt egale și de același semn.

Observări. 1) Relațiile (III) se mai pot scrie și astfel:

dacă: $x + x' = 360^\circ$

avem: $\sin x = -\sin x'$ și $\cos x = \cos x'$
 $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} x'$ și $\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg} x'$ ¹⁾.

2) Cu ajutorul relațiilor (III) putem afla sinusul și cosinusul unui unghi din cadrantul IV, folosind sinusul și cosinusul unui unghi din cadrantul I.

Exemplu. Să aflăm $\sin 320^\circ$ și $\cos 320^\circ$. Judecăm astfel: unghiul care trebuie adăugat unghiului de 320° pentru a obține 360° , este 40° ; deci cu ajutorul relațiilor (III) și a tabelor de valori naturale, aflăm:

$$\begin{aligned} \sin 320^\circ &= -\sin 40^\circ = -0,643 \\ \cos 320^\circ &= \cos 40^\circ = 0,766 \end{aligned}$$

¹⁾ Mai general, dacă $x + x' = k \times 360^\circ$, avem:

$$\begin{aligned} \sin x &= -\sin x', \quad \cos x = \cos x' \\ \operatorname{tg} x &= -\operatorname{tg} x', \quad \operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg} x'. \end{aligned}$$

Linii trigonometrice a două unghiuri egale și de semne contrare. Fie un unghi oarecare $\widehat{AOM} = x$, și unghiul $\widehat{AOM'} = -x$ egale și de sens contrar (fig. 66); în triunghiurile isoscele MOM' , TOT' , raza OA este deci bisectoare și înălțime; triunghiul UOU' este de asemenea isoscel și are raza OB ca bisectoare și înălțime.

Avem deci:

$$\sin x = NM, \quad \operatorname{tg} x = AT, \quad \operatorname{cotg} x = BU$$

$$\sin(-x) = NM',$$

$$\operatorname{tg}(-x) = AT', \quad \operatorname{cotg}(-x) = BU'$$

Din triunghiurile isoscele MOM' , TOT' , UOU' rezultă că segmentele MN și NM' , AT și AT' , BU și BU' sunt două câte două egale (dar au semne contrare).

Pe de altă parte:

$$\cos x = ON \quad \text{și} \quad \cos(-x) = ON$$

prin urmare:

(IV)

$$\begin{aligned} \sin x &= -\sin(-x); \\ \cos x &= \cos(-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= -\operatorname{tg}(-x); \\ \operatorname{cotg} x &= -\operatorname{cotg}(-x) \end{aligned}$$

adică:

Proprietatea IV. Dacă două unghiuri sunt egale și de semne contrare, sinusurile, tangentele și cotangentele lor sunt egale și de semn contrar, iar cosinusurile lor sunt egale și de același semn.

Observare. 1) Proprietatea (IV) rezultă de altfel din proprietatea III, dacă observăm că origina și extremitatea unghiului $-x$ sunt aceleași cu origina și extremitatea unghiului $360^\circ - x$.

2) Cu ajutorul relațiilor (IV) aflarea sinusului, cosinusului, tangentei și cotangentei unui unghi negativ se reduce la aflarea aceluiași linii trigonometrice pentru un unghi egal cu unghiul considerat, dar luat pozitiv.

Aplicație. În fig. 66 unghiul x , a fost figurat în primul cadran; să se arate pe cale geometrică că rezultatele (IV) sunt adevărate în orice cadran ș'ar afla unghiul x .

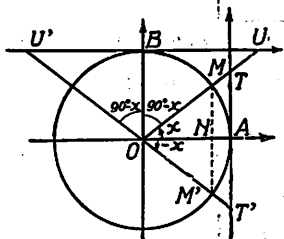


Fig. 66

Exemplu. Să aflăm liniile trigonometrice ale unghiului $x = -35^\circ$; în baza proprietății IV avem:

$$\begin{aligned}\sin (-35^\circ) &= -\sin 35^\circ = -0,574 \\ \cos (-35^\circ) &= \cos 35^\circ = 0,819 \\ \operatorname{tg} (-35^\circ) &= -\operatorname{tg} 35^\circ = -0,700 \\ \operatorname{cotg} (-35^\circ) &= -\operatorname{cotg} 35^\circ = -0,428\end{aligned}$$

REDUCEREA UNGHIURILOR LA PRIMUL CADRAN.

Aplicația I¹⁾. Să aflăm liniile trigonometrice ale unghiului $a = 1469^\circ$; procedăm astfel:

$$a = 1469^\circ = 4 \times 360^\circ + 29^\circ$$

origina acestui unghi fiind raza OA extremitatea unghiului a cade deci în primul cadran.

În baza periodicității putem scrie (vezi pag. 84 și pag. 91)

$$\begin{aligned}\sin a &= \sin (4 \times 360^\circ + 29^\circ) = \sin 29^\circ = 0,485 \\ \cos a &= \cos (4 \times 360^\circ + 29^\circ) = \cos 29^\circ = 0,875 \\ \operatorname{tg} a &= \operatorname{tg} (8 \times 180^\circ + 29^\circ) = \operatorname{tg} 29^\circ = 0,554 \\ \operatorname{cotg} a &= \operatorname{cotg} (8 \times 180^\circ + 29^\circ) = \operatorname{cotg} 29^\circ = 1,804\end{aligned}$$

adică am aflat liniile trigonometrice ale unghiului 1469° cu ajutorul unui unghi cuprins între 0° și 90° .

Aplicația II. Să aflăm liniile trigonometrice ale unghiului $a = 837^\circ$; avem:

$$a = 837^\circ = 2 \times 360^\circ + 117^\circ,$$

unghiul cade deci în cadranul II.

În baza periodicității liniilor trigonometrice avem:

$$\begin{aligned}\sin 837^\circ &= \sin (2 \times 360^\circ + 117^\circ) = \sin 117^\circ \\ \cos 837^\circ &= \cos (2 \times 360^\circ + 117^\circ) = \cos 117^\circ \\ \operatorname{tg} 837^\circ &= \operatorname{tg} (4 \times 180^\circ + 117^\circ) = \operatorname{tg} 117^\circ \\ \operatorname{cotg} 837^\circ &= \operatorname{cotg} (4 \times 180^\circ + 117^\circ) = \operatorname{cotg} 117^\circ\end{aligned}$$

¹⁾ Executarea acestor aplicații va fi însoțită și de figurile respective.

Unghiul 117° are ca supliment unghiul de 63° ; deci în baza proprietăților (I) și (I') avem :

$$\begin{aligned}\sin 117^\circ &= \sin (180^\circ - 117^\circ) = \sin 63^\circ = 0,891 \\ \cos 117^\circ &= -\cos (180^\circ - 117^\circ) = -\cos 63^\circ = -0,454 \\ \operatorname{tg} 117^\circ &= -\operatorname{tg} (180^\circ - 117^\circ) = -\operatorname{tg} 63^\circ = -1,963 \\ \operatorname{cotg} 117^\circ &= -\operatorname{cotg} (180^\circ - 117^\circ) = -\operatorname{cotg} 63^\circ = -0,510\end{aligned}$$

adică am aflat liniile trigonometrice ale unghiului de 837° (care are extremitatea în cadranul II) cu ajutorul unui unghi cuprins în primul cadran.

Aplicația III. Să aflăm liniile trigonometrice ale unui unghi $\alpha = 5946^\circ$. Avem: $5946^\circ = 16 \times 360^\circ + 186^\circ$ care are ca origină raza OA iar extremitatea lui cade în cadranul III.

Avem în baza periodicității :

$$\begin{aligned}\sin 5946^\circ &= \sin (16 \times 360^\circ + 186^\circ) = \sin 186^\circ \\ \cos 5946^\circ &= \cos (16 \times 360^\circ + 186^\circ) = \cos 186^\circ \\ \operatorname{tg} 5946^\circ &= \operatorname{tg} (32 \times 180^\circ + 186^\circ) = \operatorname{tg} 186^\circ \\ \operatorname{cotg} 5946^\circ &= \operatorname{cotg} (32 \times 180^\circ + 186^\circ) = \operatorname{cotg} 186^\circ\end{aligned}$$

Unghiul 186° întrece pe 180° cu 6° ; deci în baza proprietăților (II) și (II') avem :

$$\begin{aligned}\sin 186^\circ &= -\sin 6^\circ = -0,105 \\ \cos 186^\circ &= -\cos 6^\circ = -0,995 \\ \operatorname{tg} 186^\circ &= \operatorname{tg} 6^\circ = 0,105 \\ \operatorname{cotg} 186^\circ &= \operatorname{cotg} 6^\circ = 9,514\end{aligned}$$

adică am aflat liniile trigonometrice ale unghiului $\alpha = 5946^\circ$ (cu extremitatea în cadranul III) cu ajutorul unui unghi cuprins între 0° și 90° .

Aplicația IV. Să aflăm liniile trigonometrice ale unghiului $\alpha = 710^\circ$.

Unghiul $\alpha = 710^\circ = 360^\circ + 350^\circ$ are extremitatea în cadranul IV; avem în baza periodicității :

$$\sin 710^\circ = \sin (360^\circ + 350^\circ) = \sin 350^\circ$$

$$\cos 710^\circ = \cos (360^\circ + 350^\circ) = \cos 350^\circ$$

$$\operatorname{tg} 710^\circ = \operatorname{tg} (360^\circ + 350^\circ) = \operatorname{tg} 350^\circ$$

$$\operatorname{cotg} 710^\circ = \operatorname{cotg} (360^\circ + 350^\circ) = \operatorname{cotg} 350^\circ$$

Unghiului de 350° trebuie să-i mai adăugăm 10° pentru a obține 360° ; ținând deci seama de proprietățile (III) și (III'), sau de proprietatea (IV) observarea (1) găsim :

$$\sin 350^\circ = -\sin 10^\circ = -0,174$$

$$\cos 350^\circ = \cos 10^\circ = 0,985$$

$$\operatorname{tg} 350^\circ = -\operatorname{tg} 10^\circ = -0,176$$

$$\operatorname{cotg} 350^\circ = -\operatorname{cotg} 10^\circ = -5,671$$

adică am aflat liniile trigonometrice ale unghiului 710° (care are extremitatea în cadranul IV), cu ajutorul unui unghi cuprins între 0° și 90° .

Aplicația V. Să aflăm liniile trigonometrice ale unghiurilor $a = -757^\circ$, $b = -471^\circ$, $c = -2360^\circ$, $d = -3878^\circ$.

Să observăm că :

$$a = -757^\circ = -2 \times 360^\circ - 37^\circ; \quad b = -360^\circ - 111^\circ$$

$$c = -6 \times 360^\circ - 200^\circ \quad d = -10 \times 360^\circ - 278^\circ$$

avem, în baza periodicității :

$$\sin (-757^\circ) = \sin (-2 \times 360^\circ - 37^\circ) = \sin (-37^\circ)$$

și în baza proprietății IV :

$$\sin (-37^\circ) = -\sin 37^\circ = -0,602$$

Tot astfel folosind proprietățile de periodicitate și proprietățile (I), (II), (III), (IV), găsim :

$$\sin (-471^\circ) = \sin (-360^\circ - 111^\circ) = \sin (-111^\circ)$$

însă :

$$\sin (-111^\circ) = -\sin 111^\circ = -\sin 69^\circ = -0,934$$

$$\sin 2360^\circ = \sin (-6 \times 360^\circ - 200^\circ) = \sin (-200^\circ)$$

dar :

$$\sin (-200^\circ) = -\sin 200^\circ = +\sin 20^\circ = 0,342$$

apoi: $\sin -3878^\circ = \sin (-10 \times 360^\circ - 278^\circ) = \sin (-278^\circ)$
 dar: $\sin (-278^\circ) = -\sin 278^\circ = \sin 82^\circ = 0,139$

In mod analog găsim:

$\cos (-757^\circ) = 0,799$; $\operatorname{tg} (-757^\circ) = -0,754$; $\operatorname{cotg} (-757^\circ) = -0,327$
 $\cos (-471^\circ) = -0,358$; $\operatorname{tg} (-471^\circ) = 0,605$; $\operatorname{cotg} (-471^\circ) = 0,384$
 $\cos (-2360^\circ) = -0,940$; $\operatorname{tg} (-2360^\circ) = -0,364$; $\operatorname{cotg} (-2360^\circ) = -2,747$
 $\cos (-3878^\circ) = 0,990$; $\operatorname{tg} (-3878^\circ) = 0,141$; $\operatorname{cotg} (-3878^\circ) = 7,115$

Observare. Din cele ce preced rezultă că:

Proprietățile stabilite mai sus, precum și periodicitatea liniilor trigonometrice ne dau deci posibilitatea să aflăm liniile trigonometrice ale unui unghi oricât de mare și situat în orice cadran, cu ajutorul liniilor trigonometrice ale unghiurilor din primul cadran.

Această operațiune se cheamă reducerea unghiurilor (sau arcelor) la primul cadran.

R E Z U M A T.

CAP. VI. — FUNCȚIUNI TRIGONOMETRICE.

*Sinusul unui unghi este pozitiv în cadranele I și II, și negativ în cadranele III și IV; sinusul variază între 1 și -1 .

*Cosinusul unui unghi este pozitiv în cadranele I și IV și negativ în cadranele II și III; cosinusul variază între 1 și -1 .

*Tangenta și cotangenta unui unghi sunt pozitive în cadranele I și III, și negative în cadranele II și IV; tangenta și cotangenta variază între $+\infty$ și ∞ .

*Pentru unghiurile de 45° și 225° , sinusul și cosinusul sunt egale și de același semn; tot astfel tangenta și cotangenta.

*Pentru unghiurile de 135° și 315° sinusul, cosinusul, sunt egale și de semn contrar; la fel, tangenta și cotangenta.

*Perioada sinusului și cosinului este 360° (sau 2π) adică:

$$\sin x = \sin (k \cdot 360 + x)$$

,

$$\cos x = \cos (k \cdot 360 + x)$$

în care k este un număr întreg.

*Perioada tangentei și cotangentei este 180° (sau π), adică:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (k \cdot 180 + x)$$

,

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} (k \cdot 180 + x)$$

*Pentru două unghiuri x' , x'' , astfel că: $x' + x'' = 180^\circ$, există relațiile:

$$\sin x' = \sin x''$$

,

$$\cos x' = -\cos x''$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x' = -\operatorname{tg} x''}$$

$$\boxed{\operatorname{cotg} x' = -\operatorname{cotg} x''}$$

*Pentru două unghiuri x' , x'' astfel că: $x'' - x' = 180^\circ$, există relațiile:

$$\boxed{\sin x' = -\sin x''}$$

$$\boxed{\cos x' = -\cos x''}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x' = \operatorname{tg} x''}$$

$$\boxed{\operatorname{cotg} x' = \operatorname{cotg} x''}$$

*Pentru două unghiuri x' , x'' astfel că: $x' + x'' = 360^\circ$ (sau $x' = -x''$) există relațiile:

$$\boxed{\sin x' = -\sin x''}$$

$$\boxed{\cos x' = \cos x''}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x' = -\operatorname{tg} x''}$$

$$\boxed{\operatorname{cotg} x' = -\operatorname{cotg} x''}$$

*A reduce un unghi x' la primul cadran înseamnă a-l pune sub forma: $x' = k \cdot 360 + x''$ și apoi a-i calcula liniile lui trigonometrice, servindu-ne de proprietățile rezumate în relațiile ce preced.

E X E R C I Ţ I I.

1. Care sunt semnele următoarelor linii trigonometrice:

$$\sin 1030^\circ, \cos 737^\circ, \operatorname{tg} 498^\circ, \operatorname{cotg} 2036^\circ.$$

R: —; +; —; +.

2. Să se dovedească pe cale geometrică (cu ajutorul cercului trigonometric) relațiunile:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sin 210^\circ = -\sin 30^\circ & \text{b) } \cos 285^\circ = \cos 75^\circ \\ \text{c) } \sin 350^\circ = -\sin 10^\circ & \text{d) } \cos 345^\circ = \cos 15^\circ \end{array}$$

R: Se va proceda ca la pag. 97 și 98.

3. Care este perioada lui:

$$\sin 2x, \sin 3x, \cos 2x, \cos 3x?$$

R: Se va observa că $\sin 2x, \cos 2x$ au perioada

$$\frac{2\pi}{2} = 180^\circ, \text{ iar } \sin 3x, \cos 3x, \text{ perioada } \frac{2\pi}{3} = 120^\circ.$$

4. Să se reprezinte grafic funcțiunile:

$$y = 2 \sin 2x, \quad y = 2 \cos 2x$$

R: Perioada fiind $\pi = 180^\circ$, o buclă completă de sinusoidă sau cosinusoidă va fi între 0 și 180° (în loc de 0° și 360°).

5. Care este perioada lui $\operatorname{tg} 2x$ și $\operatorname{cotg} 2x$?

R: $\frac{\pi}{2}$.

6. Să se dovedească pe cale geometrică, relațiunile:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \operatorname{tg} 160^\circ = -\operatorname{tg} 20^\circ & \text{b) } \operatorname{cotg} 160^\circ = -\operatorname{cotg} 20^\circ \\ \text{c) } \operatorname{tg} 255^\circ = \operatorname{tg} 75^\circ & \text{d) } \operatorname{cotg} 255^\circ = \operatorname{cotg} 75^\circ \end{array}$$

7. Să se reducă la primul cadran, unghiurile:

$$178^\circ 30', 247^\circ, 351^\circ$$

8. În ce relații sunt liniile trigonometrice următoare:

$$\begin{array}{l} \sin 18^\circ \text{ și } \sin (720^\circ + 18^\circ)? \\ \cos 37^\circ \text{ și } \cos (1080^\circ + 37^\circ)? \end{array}$$

9. Aceeași chestiune pentru :

$$\sin 130^\circ \text{ și } \sin (5 \times 180^\circ + 130^\circ) \\ \cos 130^\circ \text{ și } \cos (5 \times 180^\circ + 130^\circ)$$

10. Ce relații există între :

$$\operatorname{tg} 368^\circ \text{ și } \operatorname{tg} 8^\circ, \quad \operatorname{cotg} 368^\circ \text{ și } \operatorname{cotg} 8^\circ$$

11. Ce relație există între :

$$\operatorname{tg} 190^\circ \text{ și } \operatorname{tg} 10^\circ, \quad \operatorname{cotg} 190^\circ \text{ și } \operatorname{cotg} 10^\circ?$$

12. Aceeași chestiune pentru liniile trigonometrice :

$$\operatorname{tg} 17^\circ \text{ și } \operatorname{tg} (3 \times 180^\circ + 17^\circ) \\ \operatorname{cotg} 19^\circ \text{ și } \operatorname{cotg} (7 \times 180^\circ + 19^\circ)?$$

13. Să se calculeze (cu tabela de valori naturale) :

$$\sin (-73^\circ), \quad \cos (-73^\circ) \\ \operatorname{tg} (-440^\circ), \quad \operatorname{cotg} (-440^\circ)$$

R: Se va observa că $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(-x) = \cos x$
 $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$.

14. Ce relații există între liniile trigonometrice ale unghiurilor a și b , dacă

$$1) a + b = 180^\circ \quad 2) a + b = 360^\circ?$$

R: Se va observa că $\sin x = \sin(180^\circ - x)$, etc.

15. Aceeași chestiune pentru liniile trigonometrice ale unghiurilor a și b , dacă :

$$1) a + b = 90^\circ \quad 2) a + b = 270^\circ?$$

R: Se va observa că $\sin x = \cos(90^\circ - x)$, $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}(90^\circ - x)$, etc.

16. Să se calculeze :

$$\sin 3270^\circ; \cos 4371^\circ; \operatorname{tg} 1934^\circ; \operatorname{cotg} 593^\circ.$$

R: $0,5; 0,629; -0,966; 1,072.$

CAP. VII.

**FUNȚIUNILE TRIGONOMETRICE ALE SUMEI ȘI
 DIFERENȚEI A DOUĂ ARCE; ALE ÎNDOITULUI
 ȘI JUMĂTĂȚII UNUI ARC.**

PROIECȚIUNI.

Fie o dreaptă $D'D$ pe care se fixează un sens *pozitiv* (spre exemplu spre dreapta) indicat prin săgeata (s); sensul contrar este negativ. Să luăm această dreaptă $D'D$ ca *axă de proiecțiune* (fig. 67).

Piciorul a al perpendicularei Aa , pe axa de proiecțiune, se cheamă *proiecția punctului A*; perpendiculara Aa este *proiectanta punctului A*.

Dacă proiectăm extremitățile A, B ale unui segment oarecare AB , în a și b , segmentul ab , care unește aceste proiecțiuni, se cheamă *proiecția segmentului AB* ; și se scrie:

$$(1) \quad (\text{pr. } AB)_{DD'} = \overline{ab}$$

sau mai scurt:

$$(1_1) \quad (AB)_{DD'} = \overline{ab}$$

Primul capăt al unui segment (când se citește sau se scrie) este *originea* segmentului, iar celălalt capăt al segmentului, *extremitatea segmentului*. Astfel segmentul \overline{AB} , are pe A ca origină și pe B ca extremitate; dimpotrivă segmentul \overline{BA} are pe B ca origină și pe A ca extremitate.

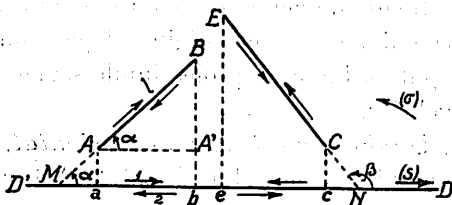


Fig. 67

Segmentele, în care se deosebește o *origină* și o *extremitate*, se numesc *segmente orientate* și se scriu cu o bară deasupra.

Astfel proiecția \overline{ab} a segmentului \overline{AB} , are pe a ca origină și pe b ca extremitate și se vede pe fig. 67, că atunci când un mobil ar merge pe segmentul AB *dela origina A spre extremitatea B*, un alt mobil ar parcurge proiecțiunea sa ab , *dela origina a spre extremitatea b* în sensul săgeții (1); deoarece acest al doilea mobil ar merge în sens pozitiv pe axa $D'D$, *convenim* să spunem că proiecția lui \overline{AB} pe $D'D$ este *pozitivă*; se înțelege atunci că proiecția segmentului \overline{BA} pe aceeași axă este negativă, deoarece *dela origina proiecțiunii b spre extremitatea sa a*, trebuie să mergem în sensul săgeții (2) adică în sens negativ.

Tot pe figura 67 se vede că proiecția segmentului \overline{CE} , este *negativă* căci *dela c la e* mergem în sens negativ; deci proiecția segmentului \overline{EC} este pozitivă, etc.

Reiese de aci că deosebirea făcută între capetele unui segment, alegând pe unul ca origină și pe celălalt ca extremitate, servește să putem lucra cu proiecțiunile segmentelor ca și cu niște cantități algebrice.

Unghiul unui segment orientat, cu o axă de proiecțiune.
Unghiul segmentului orientat \overline{AB} cu axa de proiecțiune este unghiul $\alpha = \widehat{DMA}$, cu care trebuie să *rotim* axa MD în sensul săgeții (σ) ca să se aștearnă pe segmentul \overline{AB} ; tot așa unghiul segmentului orientat \overline{CE} , cu axa de proiecțiune, este unghiul $\beta = \widehat{DNC}$, etc.

Teorema I. *Proiecțiunea unui segment orientat pe o axă, este egală cu lungimea (valoarea absolută) acelu segment, înmulțită cu cosinusul unghiului dintre segment și axa de proiecțiune.*

Fie mai întâiu, segmentul $AB = l$ (fig. 67); ducând AA' paralel cu $D'D$, obținem un triunghi dreptunghi $AA'B$, în care:

$$\overline{AA'} = AB \cdot \cos \alpha$$

și cum $\overline{AA'} = ab$

(I)

$$ab = l \cdot \cos \alpha$$

Observare. Se constată că această relație este adevărată și în valoare absolută și în semn, oricare ar fi poziția segmentului \overline{AB} față de axa DD' , deoarece când ab este o proiecțiune pozitivă, l este pozitiv (fiind o valoare absolută), iar a este ascuțit, deci $\cos a > 0$. Când ab este o proiecțiune negativă, unghiul a este obtus, deci $\cos a < 0$.

Linie poligonală. Fie linia frântă deschisă ABCDE, formată din segmentele:

$$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$$

numite și *laturile* liniei poligonale (fig. 68).

Se vede de aci că extremitatea B a primei laturi este origină la latura a doua \overline{BC} ; extremitatea C a acestei a doua laturi este origină la latura a treia \overline{CD} , ș. a. m. d.

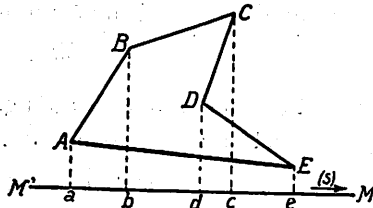


Fig. 68

Linia frântă poate fi încă definită deci ca o succesiune de segmente, în care origina fiecărui segment este extremitatea segmentului care-l precede; segmentul \overline{AE} , care unește origina A a primului segment \overline{AB} al liniei poligonale (ABCDE), cu extremitatea E a celui din urmă segment (\overline{DE}), se cheamă *linia de închidere* a liniei frânte ABCDE sau *rezultanta* ei; se înțelege că dacă linia frântă are o rezultantă egală cu zero (adică în cazul când A ar coincide cu E), linia poligonală ar fi închisă, și reciproc:

Fie a, b, c, d, e , proiecțiunile vârfurilor A, B, C, D, E ale acestei linii poligonale, pe axa $M'M$; după convențiunea făcută mai sus, se vede că proiecțiunile \overline{ab} , \overline{bc} și \overline{de} sunt pozitive iar proiecția \overline{cd} este negativă; totdeodată să observăm că origina fiecărei proiecțiuni (spre ex. origina b a proiecției \overline{bc}) este extremitatea proiecțiunii care o precede (a proiecțiunii \overline{ab}) și că proiecțiunea \overline{ae} formată cu origina a a primei proiecțiuni (a lui \overline{ab}) și cu extremitatea e a celei din urmă proiecțiuni (a lui \overline{de}) este tocmai proiecțiunea liniei de închidere \overline{AE} , deoarece:

$$\text{pr. } (\overline{AE})_{M'M} = ae.$$

Din cele ce preced rezultă :

Teorema II. *Suma algebrică a proiecțiilor laturilor unei linii poligonale pe o axă, este egală cu proiecțiunea liniei ei de închidere pe aceeași axă.*

Intr'adevăr avem relația :

$(pr AB)_{M'M} + (pr BC)_{M'M} + (pr CD)_{M'M} + (pr DE)_{M'M} = (pr AE)_{M'M}$
sau :

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} = \overline{ae}$$

deoarece de pe figură se vede că segmentele ab și cd sunt pozitive și se adună deci ca și două numere aritmetice și obținem :

$$\overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ac}$$

la această sumă trebuie să adăugăm pe \overline{cd} ; însă \overline{cd} este un segment negativ, astfel că această adunare algebrică, are ca rezultat :

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} = \overline{ac} + \overline{cd} = \overline{ad}$$

adică din segmentul \overline{ac} am scăzut de fapt valoarea absolută a segmentului \overline{cd} ; avem apoi :

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} = \overline{ad} + \overline{de}$$

segmentele \overline{ad} și \overline{de} au același semn (plus) și deci suma totală este segmentul \overline{ae} , adică proiecțiunea liniei de închidere AE.

Observare. Reiese de aci cât de util este să deosebim capetele unui segment prin *origină* și *extremitate* și să privim proiecțiunea

lui ca o *mărime algebrică* (cu valoare absolută și semn).

Intr'adevăr, dacă o linie poligonală ABCDE ar fi ca aceea din fig. 69 toate proiecțiunile laturilor : \overline{ab} , \overline{bc} , \overline{cd} , \overline{de} ar avea același semn (plus) iar suma lor ar fi o sumă aritmetică. Convențiunea

de mai sus ne-a permis deci să obținem un rezultat *mai general* aplicabil și la linii poligonale ca acelea din fig. 68.

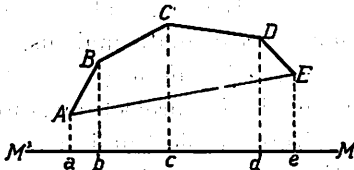


Fig. 69.

FORMULE PENTRU ADUNAREA ȘI SCĂDEREA UNGHIURILOR
(SAU ARCELOR)¹⁾

Problema se pune astfel: a și b fiind două unghiuri oarecare, se presupun cunoscute $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, (sau $\operatorname{cotg} a$) și $\sin b$, $\cos b$, $\operatorname{tg} b$ (sau $\operatorname{cotg} b$).

Se cere să se afle:

$$\sin(a+b), \quad \cos(a+b), \quad \operatorname{tg}(a+b), \quad \operatorname{cotg}(a+b)$$

$$\sin(a-b), \quad \cos(a-b), \quad \operatorname{tg}(a-b), \quad \operatorname{cotg}(a-b)$$

adică sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta sumei sau diferenței unghiurilor a și b .

I. *Formula lui sin* ($a+b$).

Fie cercul trigonometric (fig. 70) și unghiurile $\widehat{AOM} = a$, $\widehat{MON} = b$; spre deosebire de cele de până acum, unghiul a are ca latură-origină pe OA și extremitatea OM , iar unghiul b are ca latură-origină OM și ca extremitate ON , astfel că $\widehat{AON} = a+b$. Prin această așezare a unghiurilor, perpendiculara NP pe OM , este sinusul lui b , iar segmentul OP , cosinusul lui b , adică:

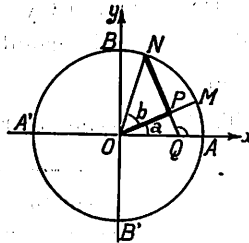


Fig. 70

$$\sin b = \overline{NP}, \quad \cos b = \overline{OP}$$

Conturul poligonal (OPN) are ca linie de închidere raza $ON = 1$.

Să proiectăm acest contur pe axa Oy (axa sinusurilor) obținem:

$$(1) \quad \operatorname{pr}(ON) = \operatorname{pr}(OP) + \operatorname{pr}(PN)$$

însă proiecția unui segment pe o axă este egală cu lungimea

¹⁾ Formulele relative la adunarea, înmulțirea și împărțirea unghiurilor se datoresc lui Lambert (*Jean Henri*), savant francez, născut la Mulhouse în 1728, mort la Berlin în 1777, care a lăsat lucrări importante de Matematici și Filosofie.

segmentului înmulțită cu cosinusul unghiului format de acel segment cu axa de proiecție (Teorema I, pag. 110), avem:

$$\text{pr}(\text{ON}) = \overline{\text{ON}} \cdot \cos \widehat{\text{NOB}} = \overline{\text{ON}} \cdot \cos \widehat{\text{NOB}}$$

însă unghiul NOB este complementul unghiului AON = $a + b$ așa încât $\cos \widehat{\text{NOB}} = \sin(a + b)$ și deci:

$$(a) \quad \text{pr}(\text{ON}) = \overline{\text{ON}} \cdot \sin(a + b)$$

pe de altă parte:

$$\text{pr}(\text{OP}) = \overline{\text{OP}} \cdot \cos \widehat{\text{MOB}} = \overline{\text{OP}} \cdot \sin \widehat{\text{AOM}}$$

sau:

$$(b) \quad \text{pr}(\text{OP}) = \overline{\text{OP}} \cdot \cos b \cdot \sin a$$

iar:

$$\text{pr}(\text{PN}) = \overline{\text{PN}} \cdot \cos(\widehat{\text{PN}}, \text{Oy}) = \overline{\text{PN}} \cdot \sin b \cdot \cos(\widehat{\text{PN}}, \text{Oy})$$

însă $\text{PN} \perp \text{OM}$ și $\text{Oy} \perp \text{OA}$, deci unghiul format de PN și Oy este egal cu unghiul format de OA și OM, adică cu a ; deci:

$$(c) \quad \text{pr}(\text{PN}) = \overline{\text{PN}} \cdot \sin b \cdot \cos a$$

Ținând seama de rezultatele (a), (b), (c), formula (1) devine:

(2)

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

adică am obținut formula care dă $\sin(a + b)$ când cunoaștem sinusurile și cosinusurile unghiurilor a și b .

Aplicație. Să se aleagă unghiurile a și b astfel ca latura ON a unghiului $a + b$ să cadă pe rând în fiecare din celelalte cadrane, și să se dovedească că formula (2) este adevărată, oricare ar fi unghiurile a și b .

II. Formula lui sin ($a - b$).

Să lăsăm unghiul a neschimbat, iar în loc de unghiul b să luăm unghiul $-b$; formula (2) ia următoarea înfățișare:

$$\sin(a - b) = \sin a \cos(-b) + \sin(-b) \cos a$$

însă potrivit proprietății IV (pag. 100):

$$\cos(-b) = \cos b, \quad \sin(-b) = -\sin b$$

deci :

$$(2_1) \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

III. Formula lui cos $(a + b)$.

Să proiectăm acum conturul OPN pe axa Ox (axa cosinusurilor), găsim :

$$(3) \quad \text{pr}(\text{ON}) = \text{pr}(\text{OP}) + \text{pr}(\text{PN})$$

însă :

$$\text{pr}(\text{ON}) = \overline{\text{ON}} \cos \widehat{\text{AON}} = 1 \cdot \cos(a + b)$$

$$\text{pr}(\text{OP}) = \overline{\text{OP}} \cos \widehat{\text{AOM}} = \cos b \cos a$$

$$\text{pr}(\text{PN}) = \overline{\text{PN}} \cos(\widehat{\text{PN}}, \widehat{\text{Ox}}) = \sin b \cos(\widehat{\text{PN}}, \widehat{\text{Ox}})$$

Fie Q punctul în care PN întâlnește pe Ox; din figură reiese că :

$$(\widehat{\text{PN}}, \widehat{\text{Ox}}) = 180^\circ - \widehat{\text{OQN}}$$

deci :

$$\cos(\widehat{\text{PN}}, \widehat{\text{Ox}}) = \cos(180^\circ - \widehat{\text{OQN}}) = -\cos \widehat{\text{OQN}}$$

dar în triunghiul OPQ, unghiul OQN este complimentul unghiului a ; deci în baza proprietății dela pag. 35 :

$$\cos \widehat{\text{OQN}} = \sin a$$

și deci :

$$\text{pr}(\text{PN}) = -\sin b \cos \widehat{\text{OQN}} = -\sin b \sin a$$

Formula (3) devine :

$$(4) \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

care ne dă $\cos(a + b)$ când cunoaștem sinusurile și cosinusurile unghiurilor a și b .

Aplicație. Să se ia unghiurile a și b astfel ca extremitatea OM a unghiului $a + b$ să cadă, pe rând în fiecare din celelalte trei cadrane și să se dovedească că formula (4) este adevărată oricare ar fi unghiurile a și b .

IV. *Formula lui cos* ($a - b$).

Să lăsăm unghiul a neschimbat și în loc de unghiul b să luăm unghiul $(-b)$; formula (4) devine:

$$\cos(a - b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b)$$

însă:

$$\cos(-b) = \cos b, \quad \sin(-b) = -\sin b$$

deci:

$$(4_1) \quad \boxed{\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

Observare. Formulele (2), (2)₁, și (4), (4)₁, care dau sinusul și cosinusul sumei sau diferenței a două unghiuri a și b , nu trebuiesc memorate; este util însă să observăm că în toate aceste formule $\sin(a + b)$, $\cos(a + b)$ sunt date de o sumă de doi termeni, legați prin semnul + pentru $\sin(a + b)$, prin semnul - pentru $\cos(a + b)$; prin - pentru $\sin(a - b)$ și prin + pentru $\cos(a - b)$.

Din aceste formule se mai vede că $\sin(a + b)$ nu este egal cu $\sin a + \sin b$, iar $\cos(a + b)$ nu este egal cu $\cos a + \cos b$.

Aplicațiuni. 1. Se cunoaște $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și se cere să se afle:

$$\sin 75^\circ, \quad \cos 75^\circ, \quad \sin 15^\circ \text{ și } \cos 15^\circ$$

R: Să observăm că:

$$75^\circ = 30^\circ + 45^\circ; \quad 15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$$

este deci cazul să aplicăm formulele stabilite mai sus.

Trebue să aflăm mai întâiu $\cos 30^\circ$ și $\sin 45^\circ$; ori (pag. 37 și 38):

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{și} \quad \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

deci, în baza formulei (2):

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3})$$

apoi în baza formulei (4):

$$\cos 75^\circ = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ$$

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

Tot astfel, aplicând formule (2)₁ și (4)₁ găsim:

$$\sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

$$\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$$

Este util să observăm că am obținut:

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ; \cos 75^\circ = \sin 15^\circ$$

cece era de așteptat, deoarece unghiurile 75° și 15° sunt complementare (vezi pag. 35).

Deasemeni să observăm că valoarea lui $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$ este mai mare decât a lui $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$, cece este natural deoarece un unghi mai mic (din primul cadran) are cosinusul mai mare decât un unghi mai mare (situat tot în cadranul I).

2. Să se afle $\sin 165^\circ$, $\cos 165^\circ$ cu ajutorul sinusurilor și cosinusurilor unghiurilor de 120° și 45° .

R: Avem: $120^\circ + 45^\circ = 165^\circ$; e locul deci să aplicăm formula (2):
 $\sin 165^\circ = \sin (120^\circ + 45^\circ) = \sin 120^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 120^\circ$
 însă:

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

prin urmare:

$$\sin 165^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

Apoi:

$$\cos 165^\circ = \cos (120^\circ + 45^\circ) = \cos 120^\circ \cos 45^\circ - \sin 120^\circ \sin 45^\circ$$

$$\cos 165^\circ = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$$

Observare. Aceste rezultate se puteau obține și astfel:

$$165^\circ = 180^\circ - 15^\circ$$

deci în baza proprietății I (pag. 96):

$$\sin 165^\circ = \sin (180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

și

$$\cos 165^\circ = \cos (180^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

Din aplicațiunile, cari preced, reiese că formulele $\sin(a + b)$, $\cos(a + b)$ servesc între altele la aflarea valorii sinusului și cosinusului și a altor unghiuri decât unghiurile remarcabile (vezi pag. 36).

Formule pentru $\operatorname{tg}(a + b)$ și $\operatorname{tg}(a - b)$.

Din formulele (2) și (4):

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

obținem prin împărțire membru cu membru:

$$\frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

și împărțind ambii termeni ai fracției din membrul II cu $\cos a \cos b$:

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}}$$

sau :

(5)

$$\boxed{\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}}$$

formulă care dă valoarea lui $\operatorname{tg}(a+b)$ când cunoaștem $\operatorname{tg} a$ și $\operatorname{tg} b$.

Formulele (2) și (4) fiind adevărate, oricare este a și b , rezultă că și formula (5) este generală.

Prin urmare dacă în această formulă păstrăm pe a neschimbat și înlocuim b prin $-b$, obținem :

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg}(-b)}$$

înșă : (proprietatea IV pag. 100)

$$\operatorname{tg}(-b) = -\operatorname{tg} b$$

deci :

(5)₁

$$\boxed{\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}}$$

Aplicație. Să se stabilească această formulă, împărțind membru cu membru formulele (2)₁ prin (4)₁ și procedând ca mai sus.

Formule pentru $\operatorname{cotg}(a+b)$ și $\operatorname{cotg}(a-b)$.

În mod analog, împărțind membru cu membru formula (4) prin (2) găsim :

$$\frac{\cos(a+b)}{\sin(a+b)} = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\sin a \cos b + \sin b \cos a}$$

și împărțind ambii termeni ai fracției din membrul al doilea cu $\sin a \sin b$:

$$\operatorname{cotg}(a+b) = \frac{\frac{\cos a \cos b}{\sin a \sin b} - \frac{\sin a \sin b}{\sin a \sin b}}{\frac{\sin a \cos b}{\sin a \sin b} + \frac{\sin b \cos a}{\sin a \sin b}}$$

sau :

$$(6) \quad \cotg(a+b) = \frac{\cotg a \cotg b - 1}{\cotg b + \cotg a}$$

care dă $\cotg(a+b)$ când cunoaștem $\cotg a$ și $\cotg b$.

Inlocuind, în formula (6), b prin $-b$, și observând că avem:
 $\cotg(-b) = -\cotg b$, obținem :

$$(6)_1 \quad \cotg(a-b) = \frac{1 + \cotg a \cotg b}{\cotg a - \cotg b}$$

Aplicație. Să se stabilească formula (6)₁ împărțind membru cu membru formula (4)₁ prin (2)₁ și procedând ca mai sus.

Observare. Formulele (6) și (6)₁ se pot obține și din formulele (5) și (5)₁, astfel :

$$\begin{aligned} \cotg(a+b) &= \frac{1}{\operatorname{tg}(a+b)} = \frac{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b} = \frac{1 - \frac{1}{\cotg a} \cdot \frac{1}{\cotg b}}{\frac{1}{\cotg a} + \frac{1}{\cotg b}} \\ &= \frac{\cotg a \cdot \cotg b - 1}{\cotg a \cotg b} = \frac{\cotg a \cotg b - 1}{\cotg a + \cotg b} \end{aligned}$$

Tot astfel se poate afla $\cotg(a-b) = \frac{1}{\operatorname{tg}(a-b)}$, etc.

Aplicațiuni. 1. Se cunoaște: $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$; să se afle :

$$\operatorname{tg} 75^\circ, \cotg 75^\circ, \operatorname{tg} 15^\circ, \cotg 15^\circ$$

R: Avem: $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$ și $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, deci:

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1}$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = 2 + \sqrt{3}.$$

Apoi avem: $\operatorname{cotg} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3}$ $\operatorname{cotg} 45^\circ = 1$, deci:

$$\operatorname{cotg} 75^\circ = \operatorname{cotg} (30^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{cotg} 30^\circ \operatorname{cotg} 45^\circ - 1}{\operatorname{cotg} 30^\circ + \operatorname{cotg} 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$$

acest rezultat se poate obține și observând că: $\operatorname{cotg} 75^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 75^\circ}$.

Pentru unghiul de 15° găsim:

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} (45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

ceea ce era de așteptat, deoarece $\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{cotg} (90^\circ - 15^\circ)$.

Tot astfel găsim:

$$\operatorname{cotg} 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

2. Să se afle $\operatorname{tg} 210^\circ$, $\operatorname{cotg} 210^\circ$, observând că:

$$210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$$

R: Avem:

$$\operatorname{tg} 210^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ + 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 180^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 180^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{0 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

rezultat ce se putea obține și cu ajutorul proprietății II pag. 97 deoarece:

$$\operatorname{tg} 210^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\operatorname{cotg} 210^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 210^\circ} = \sqrt{3}$; dacă am voi să aplicăm formula:

$$\operatorname{cotg} (a + b) = \frac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b - 1}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b}$$

să împărțim mai întâiu ambii termeni ai fracției din membrul al 2-lea prin $\cotg a$ ¹⁾; găsim:

$$\cotg(a+b) = \frac{\cotg b + \frac{1}{\cotg a}}{1 + \frac{\cotg b}{\cotg a}}$$

și aplicând la cazul nostru: ($a = 180^\circ$, $b = 30^\circ$)

$$\cotg 210^\circ = \frac{\cotg 30^\circ + \frac{1}{\cotg 180^\circ}}{1 + \frac{\cotg 30^\circ}{\cotg 180^\circ}} = \frac{\cotg 30^\circ + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{\cotg 30^\circ}{\infty}} = \cotg 30^\circ$$

sau:

$$\cotg 210^\circ = \sqrt{3}$$

ceea ce se putea obține și direct, aplicând proprietatea II mai sus amintită.

FUNȚIUNI TRIGONOMETRICE ALE INDOITULUI UNUI UNGHIU (SAU ARC).

Problema se pune astfel: se cunoaște $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\cotg a$, și se cere $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\operatorname{tg} 2a$, $\cotg 2a$.

I. $\sin 2a$.

In formula:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

unghiurile a și b putând avea orice valori, să luăm $a = b$; obținem:

$$\sin(a+a) = \sin a \cos a + \sin a \cos a$$

sau:

(I)

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

formulă care dă $\sin 2a$ în funcțiune de $\sin a$ și $\cos a$.

¹⁾ Dacă nu procedam astfel, găseam: $\cotg(a+b) = \frac{\infty}{\infty}$ care nu are o valoare determinată.

Observare. Această formulă trebuie citită astfel: *sinusul unui unghi este egal cu de două ori sinusul unghiului pe jumătate, înmulțit cu cosinusul unghiului pe jumătate.*

Așa fiind putem scrie:

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2};$$

$$\sin \frac{a}{2} = 2 \sin \frac{a}{4} \cos \frac{a}{4}, \text{ etc.}$$

Aplicații. 1) Se dă: $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; să aflăm $\sin 90^\circ$;

$$\text{Avem: } \sin 90^\circ = 2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

2) Se dă: $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$, se cere $\sin 30^\circ$.

$$\text{Avem: } \sin 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

însă (pag. 117):

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$$

$$\sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1) = \frac{1}{2}$$

3) Se dă: $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$; se cere $\sin 150^\circ$.

Avem:

$$\sin 150^\circ = 2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ.$$

însă $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$; deci

$$\sin 150^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1) = \frac{1}{2}$$

ceea ce era de așteptat, deoarece:

$$150^\circ + 30^\circ = 180^\circ \quad \text{și} \quad \sin 150^\circ = \sin 30^\circ.$$

II. $\cos 2a$.

Pornim de la formula:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

în care facem $a = b$; găsim:

$$\cos(a + a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a$$

sau:

(II)₁

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

formulă, care dă pe $\cos 2a$ în funcțiune de $\sin a$ și $\cos a$.

Observare. Această formulă trebuie citită astfel: *cosinusul unui unghi este egal cu pătratul cosinusului unghiului pe jumătate, mai puțin pătratul sinusului unghiului pe jumătate.*

Astfel că:

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}; \quad \cos \frac{a}{2} = \cos^2 \frac{a}{4} - \sin^2 \frac{a}{4}, \quad \text{etc.}$$

Pentru a obține expresiunea lui $\cos 2a$ numai în funcțiune de $\cos a$ sau numai de $\sin a$, să observăm că:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

deci:

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$$

valoare, pe care ducând-o în (II)₁ obținem:

$$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = \cos^2 a - 1 + \cos^2 a$$

sau:

(II)₂

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

formulă, care dă pe $\cos 2a$ în funcțiune numai de $\cos a$.

Tot astfel putem scrie:

$$\cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1$$

$$\cos \frac{a}{2} = 2 \cos^2 \frac{a}{4} - 1, \quad \text{etc.}$$

Dacă în (II)₁ înlocuim însă pe $\cos^2 a$ prin $1 - \sin^2 a$, găsim:

$$\cos 2a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a$$

sau:

(II)₃

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$$

relație care permite aflarea lui $\cos 2a$ numai în funcțiune de $\sin a$.

Tot astfel putem scrie:

$$\cos a = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2}, \quad \cos \frac{a}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{4}, \quad \text{etc.}$$

Aplicații. 1) Se dă: $\sin a = \frac{1}{4}$, $\cos a = \frac{\sqrt{15}}{4}$; să se afle $\cos 2a$.

R: Din formula (II)₁ avem:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \frac{15}{16} - \frac{1}{16} = \frac{14}{16}$$

2) Se dă: $\cos a = \frac{1}{3}$; se cere cosinusul unghiului dublu $2a$.

R: Avem potrivit formulei (II)₂:

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 2 \frac{1}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$$

Observare. Faptul că pentru $\cos 2a$ s'a obținut o valoare negativă se explică astfel: la $\cos a = \frac{1}{3}$, corespunde un unghi în primul cadran; dublul acestui unghi cade în cadranul II, deci cosinusul este negativ. (Să se verifice aceasta folosind tablele naturale).

3) Se dă: $\sin a = 0,2$; să se afle $\cos 2a$.

R: Cu ajutorul formulei (II)₃ găsim:

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a = 1 - 2 (0,2)^2 = 0,92$$

III) **tg 2a:** Tangenta unghiului dublu (II) ni s-a dat:

Dacă facem $a = b$, în formula (5):

$$\boxed{\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}} \quad (11)$$

găsim:

$$\text{tg}(a+a) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } a}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } a}$$

sau:

$$(III) \quad \boxed{\text{tg } 2a = \frac{2 \cdot \text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}}$$

formulă care dă tangenta unghiului $2a$ când cunoaștem tangenta unghiului a .

Aplicații. 1) Se dă: $\text{tg } a = \frac{1}{2}$; să se afle $\text{tg } 2a$.

$$R: \quad \text{tg } 2a = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

2) Se dă: $\text{tg } a = 1$; să se afle $\text{tg } 2a$.

$$R: \quad \text{tg } 2a = \frac{2 \times 1}{1 - 1} = \infty$$

ceea ce era de așteptat, deoarece la $\text{tg } a = 1$, corespunde între 0° și 360° , unghiul de 45° și unghiul $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$; prin urmare dublul lui va fi sau 90° sau $450^\circ = 360^\circ + 90^\circ$, care au tangenta egală cu infinit.

IV. **cotg 2a.**

Din formula (6):

$$\text{cotg}(a+b) = \frac{\text{cotg } a \cdot \text{cotg } b - 1}{\text{cotg } a + \text{cotg } b}$$

obținem, făcând $a = b$:

$$(I) \quad \cotg 2a = \frac{\cotg^2 a - 1}{2 \cotg a}$$

Aplicații. 1) Se dă: $\cotg a = 3$; să se afle $\cotg 2a$.

$$R: \quad \cotg 2a = \frac{3^2 - 1}{2 \times 3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

La $\cotg a = 3$, corespunde un unghi a în primul cadran mai mic de 45° ; unghiul $2a$ situat tot în primul cadran, va avea o cotangentă mai mică, deoarece când unghiul crește, cotangentă scade (vezi pag. 90); ori $\frac{4}{3} < 3$.

2) Se dă: $\cotg a = -1$; să se afle $\cotg 2a$.

$$R: \text{ Avem: } \cotg 2a = \frac{1^2 - 1}{2 \times 1} = 0$$

ceea ce era de așteptat, deoarece la valoarea -1 pentru cotangentă, corespunde între 0° și 360° un unghi $a = 135^\circ$ sau $360 - 45^\circ = 315^\circ$; unghiul dublu va fi deci: 270° sau $630^\circ = 360^\circ + 270^\circ$, cărora le corespunde o cotangentă egală cu zero.

FUNȚIUNI TRIGONOMETRICE ALE JUMĂTĂȚII UNUI UNGHIU (SAU ARC).

Se dă $\sin a$, $\cos a$, $\tg a$, $\cotg a$ și se cere:

$$\sin \frac{a}{2}, \cos \frac{a}{2}, \tg \frac{a}{2}, \cotg \frac{a}{2}$$

Pentru stabilirea formulelor lui $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$, $\tg \frac{a}{2}$, $\cotg \frac{a}{2}$, ne

vom servi de formulele, care dau liniile trigonometrice ale unghiului dublu în funcțiune de unghiul simplu.

I. $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ și $\operatorname{cotg} \frac{a}{2}$ în funcțiune de $\cos a$.

a) Pornind dela formula (II)₃:

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$$

care fiind adevărată oricare este a , putem înlocui în ea pe a , prin $\frac{a}{2}$; obținem:

$$\cos 2 \frac{a}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

sau:

$$2 \sin^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a$$

sau:

(I)₁

$$\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

formulă, care dă $\sin \frac{a}{2}$ în funcțiune de $\cos a$.

b) Dacă în formula (II)₂:

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

facem:

$$a = \frac{a}{2}$$

aflăm:

$$\cos 2 \frac{a}{2} = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1$$

sau:

$$2 \cos^2 \frac{a}{2} = 1 + \cos a$$

sau :

(I)₂

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

care dă pe $\cos \frac{a}{2}$ în funcțiune de $\cos a$.

c) Impărțind relația (I)₁ prin (I)₂, găsim :

$$\frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$$

sau :

(I)₃

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$$

d) Impărțind relația (I)₂ prin (I)₁, obținem :

(I)₄

$$\operatorname{cotg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}}$$

rezultat care poate reieși și din formula (I)₃, observând că :

$$\operatorname{cotg} \frac{a}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}$$

Observare. Din formulele (I)₁ — (I)₄ se vede că la o valoare dată a lui $\cos a$, corespund pentru $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ și $\operatorname{cotg} \frac{a}{2}$ câte două valori egale și de semne contrare.

Iată explicația pentru formula :

$$\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

Dacă însemnăm cu a cel mai mic unghi pozitiv, ce corespunde la $\cos a$ (care este cunoscut), formula generală a unghiurilor care au acelaș cosinus este (vezi pag. 74):

$$a = k \cdot 360^\circ \pm a \quad (k \text{ întreg, pozitiv sau negativ})$$

Unghiurile pe jumătate vor fi:

$$\frac{a}{2} = k \cdot 180^\circ \pm \frac{a}{2}$$

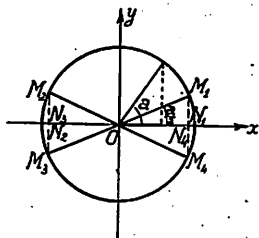


Fig. 71

când k este pereche, extremitățile acestor unghiuri sunt OM_1 sau OM_4 (fig. 71) iar când k este nepereche unghiurile $\frac{a}{2}$ au

extremitățile M_2 sau M_3 . Oricare ar fi deci aceste unghiuri, fie cu extremitatea în OM_1 , OM_2 , OM_3 sau OM_4 sinusurile lor au numai două valori deosebite: $M_1N_1 = M_2N_2$ și $M_4N_4 = M_3N_3$, care sunt egale și de semne contrare.

Exercițiul. 1) Să se explice în mod analog, pentru ce la un $\cos a$ dat, corespund pentru $\cos \frac{a}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ și $\operatorname{cotg} \frac{a}{2}$ câte două valori egale și de semne contrare?

Aplicație: Se dă $\cos a = \frac{1}{5}$, să se afle $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$, $\operatorname{cotg} \frac{a}{2}$.

R: Avem:

$$\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{5}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{5}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{5}}} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

II. $\sin \frac{a}{2}, \cos \frac{a}{2}, \operatorname{tg} \frac{a}{2}$ și $\operatorname{cotg} \frac{a}{2}$, în funcțiune de $\sin \frac{a}{2}$.

Să folosim relațiunile:

$$\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} = 1$$

$$2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \sin a$$

pe care să le adunăm membru cu membru:

$$\sin^2 \frac{a}{2} + 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} = 1 + \sin a$$

sau:

$$\left(\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} \right)^2 = 1 + \sin a$$

sau:

$$(1) \quad \sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin a}$$

Scăzând apoi, membru cu membru relațiile de mai sus, găsim:

$$\sin^2 \frac{a}{2} - 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} = 1 - \sin a$$

sau:

$$\left(\sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2} \right)^2 = 1 - \sin a$$

deci:

$$(2) \quad \sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{1 - \sin a}$$

Adunând relațiile (1) și (2) găsim:

$$2 \sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a}$$

deci:

$$(II)_1 \quad \sin \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \left[\pm \sqrt{1 + \sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a} \right]$$

formulă care dă $\sin \frac{a}{2}$ în funcțiune de $\sin a$.

Scăzând relațiile (1) și (2) găsim :

$$(II)_2 \quad \cos \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \left[\pm \sqrt{1 + \sin a} \mp \sqrt{1 - \sin a} \right]$$

relație care dă pe $\cos \frac{a}{2}$ în funcțiune de $\sin a$.

Din (II)₁ și (II)₂ obținem prin împărțire :

$$(II)_3 \quad \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\pm \sqrt{1 + \sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a}}{\pm \sqrt{1 + \sin a} \mp \sqrt{1 - \sin a}}$$

și :

$$(II)_4 \quad \operatorname{cotg} \frac{a}{2} = \frac{\pm \sqrt{1 + \sin a} \mp \sqrt{1 - \sin a}}{\pm \sqrt{1 + \sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a}}$$

formule care dau $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ și $\operatorname{cotg} \frac{a}{2}$ în funcțiune de $\sin a$.

Aplicații. 1) Să se explice, după cum s'a făcut și la observarea dela pag. 129 pentru ce, când se dă $\sin a$, corespund pentru $\sin \frac{a}{2}$ și $\cos \frac{a}{2}$ patru valori, dintre care două câte două egale și de semne contrare.

Chestiune analoagă pentru $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ și $\operatorname{cotg} \frac{a}{2}$.

2) Se dă: $\sin a = \frac{2\sqrt{6}}{5}$; să se afle $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ și $\operatorname{cotg} \frac{a}{2}$.

R: Se va aplica formulele (II)₁ — (II)₄.

REZUMAT.

CAP. VII. — FUNCȚIUNILE TRIGONOMETRICE ALE SUMEI A DOUĂ ARCE; ALE INDOITULUI ȘI JUMĂTĂȚII UNUI ARC.

*Segmentele de dreaptă pe care se deosebește o *origină* și o *extremitate*, se numesc *segmente orientate*.

*Unghiul unui segment orientat, cu o axă, este unghiul cu care trebuie să *rotim* în sens trigonometric axa, pentru ca să se aștearnă peste segmentul considerat.

*Proiecțiunea unui segment orientat pe o axă, este egală cu lungimea (valoarea absolută) acelu segment, înmulțită cu cosinusul unghiului dintre segment și axa de proiecțiune.

*Suma algebrică a proiecțiilor unei linii poligonale pe o axă, este egală cu proiecțiunea liniei ei de închidere pe acea axă.

*Formule pentru adunarea arcelor :

1)

$$\sin (a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$$

2)

$$\cos (a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

3)

$$\operatorname{tg} (a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

4)

$$\operatorname{cotg} (a \pm b) = \frac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b \mp 1}{\operatorname{cotg} a \pm \operatorname{cotg} b}$$

*Formule pentru înmulțirea arcelor:

5)

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

6)

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

7)

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

8)

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$$

9)

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

10)

$$\operatorname{cotg} 2a = \frac{\operatorname{cotg}^2 a - 1}{2 \operatorname{cotg} a}$$

*Formule pentru împărțirea arcelor:

11)

$$\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

12)

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

13)

$$\sin \frac{a}{2} = \frac{1}{2} [\pm \sqrt{1 + \sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a}]$$

14)

$$\cos \frac{a}{2} = \frac{1}{2} [\pm \sqrt{1 + \sin a} \mp \sqrt{1 - \sin a}]$$

15)

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\pm \sqrt{1 + \sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a}}{\pm \sqrt{1 + \sin a} \mp \sqrt{1 - \sin a}}$$

16)

$$\operatorname{cotg} \frac{a}{2} = \frac{\pm \sqrt{1 + \sin a} \mp \sqrt{1 - \sin a}}{\pm \sqrt{1 + \sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a}}$$

EXERCITII:

Adunare și scădere.

1. Să se calculeze $\sin 90^\circ$ și $\cos 90^\circ$, folosind observarea că:

a) $90^\circ = 60^\circ + 30^\circ$; b) $90^\circ = 45^\circ + 45^\circ$.

2. Să se calculeze $\sin 135^\circ$ și $\cos 135^\circ$, folosind observarea că:

a) $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$; b) $135^\circ = 120^\circ + 15^\circ$; c) $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$.

3. Să se calculeze $\sin 240^\circ$, $\cos 240^\circ$, observând că:

a) $240^\circ = 270^\circ - 30^\circ$; b) $240^\circ = 180^\circ + 60^\circ$; c) $240^\circ = 300^\circ - 60^\circ$.

4. Să se calculeze $\sin 195^\circ$, $\cos 195^\circ$ folosind observarea:

a) $195^\circ = 180^\circ + 15^\circ$; b) $195^\circ = 150^\circ + 45^\circ$; c) $195^\circ = 210^\circ - 15^\circ$.

5. Se dă: $\sin 18^\circ = 0,309$; $\sin 27^\circ = 0,454$.Să se calculeze: $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\sin 9^\circ$, $\cos 9^\circ$ și să se explice pentru cenu obținem valorile: $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$?

Indicație: Se va calcula mai întâiu $\cos 18^\circ$, $\cos 27^\circ$ cu ajutorul primei formule fundamentale sau se vor lua aceste valori din tabelă; valorile $\sin 18^\circ = 0,309$, $\cos 27^\circ = 0,891$ sunt valori aproximative, date de tabela valorilor naturale, pe când valoarea $\frac{\sqrt{2}}{2}$ este o valoare exactă, obținută printr'un raționament geometric (vezi pag. 38).

6. Să se calculeze $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\sin 8^\circ$, $\cos 8^\circ$ când se cunoaște:

$$\sin 11^\circ = 0,191 \qquad \cos 19^\circ = 0,946$$

și să se explice pentru ce nu obținem $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

Indicație: Se va afla mai întâiu:

$$\cos 11^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 11^\circ} \quad \text{și} \quad \sin 19^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 19^\circ}$$

sau se vor lua aceste valori din tabela valorilor naturale.

7. Să se calculeze $\sin 303^\circ$, $\cos 303^\circ$ cu ajutorul lui $\sin 300^\circ$, $\sin 3^\circ$ (luat din tabelă) $\cos 300^\circ$, $\cos 3^\circ$ (luat din tabelă).8. Se dă: $\sin a = \frac{1}{4}$, $\cos b = \frac{1}{5}$; se cere să se calculeze $\sin(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\cos(a + b)$, $\cos(a - b)$.

Indicație: Se va calcula întâiu:

$$\cos a = \pm \sqrt{1 - \sin^2 a}, \quad \sin b = \pm \sqrt{1 - \cos^2 b}$$

și se va observa că pentru $\sin(a + b)$, $\sin(a - b)$ rezultă câte două valori, deoarece unghiul a nefiind precizat, $\cos a$ și $\sin b$ au două valori egale și de semne contrare: fiecare din valorile găsite pentru $\sin(a + b)$ sunt egale cu câte una din valorile aflate pentru $\sin(a - b)$.

Rezultat analog pentru $\cos(a + b)$ și $\cos(a - b)$.

9. Să se calculeze $\operatorname{tg} 135^\circ$ și $\operatorname{cotg} 135^\circ$, folosind observarea că:

$$a) 135^\circ = 120^\circ + 15^\circ \quad b) 135^\circ = 150^\circ - 15^\circ$$

10. Să se afle $\operatorname{tg} 300^\circ$, $\operatorname{cotg} 300^\circ$, observând că:

$$a) 300^\circ = 240^\circ + 60^\circ \quad b) 300^\circ = 330^\circ - 30^\circ$$

11. Să se calculeze $\operatorname{tg} 285^\circ$ și $\operatorname{cotg} 285^\circ$, folosind observarea:

$$a) 285^\circ = 255^\circ + 30^\circ \quad b) 285^\circ = 330^\circ - 45^\circ$$

12. Să se afle valoarea $\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$ folosind una din formulele:

$$a) \operatorname{tg} 90^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 45^\circ); \quad b) \operatorname{tg} 90^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ + 30^\circ)$$

$$c) \operatorname{tg} 90^\circ = \operatorname{tg}(75^\circ + 15^\circ)$$

13. Să se afle valoarea $\operatorname{cotg} 180^\circ = \infty$, folosind una din formulele:

$$a) \operatorname{cotg} 180^\circ = \operatorname{cotg}(135^\circ + 45^\circ), \quad \operatorname{cotg} 180^\circ = \operatorname{cotg}(120^\circ + 60^\circ),$$

$$c) \operatorname{cotg} 180^\circ = \operatorname{cotg}(210^\circ - 30^\circ)$$

14. Să se afle valoarea $\operatorname{tg} 270^\circ = \infty$ și $\operatorname{cotg} 270^\circ = 0$, folosind formulele:

$$a) \operatorname{tg} 270^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 90^\circ) \quad b) \operatorname{cotg} 270^\circ = \operatorname{cotg}(180^\circ + 90^\circ)$$

15. Se dă: $\operatorname{tg} a = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} b = 2$; se cere: $\operatorname{tg}(a + b)$.

$$\text{R: } \operatorname{tg}(a + b) = \frac{\frac{1}{5} + 2}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{11}{3}$$

16. Se dă: $\operatorname{cotg} a = 4$, $\operatorname{cotg} b = \frac{2}{3}$; se cere $\operatorname{cotg}(a + b)$.

$$\text{R: } \operatorname{cotg}(a + b) = \frac{4 \cdot \frac{2}{3} - 1}{4 + \frac{2}{3}} = \frac{5}{14}$$

17. Să se arate că dacă produsul $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b$ diferă foarte puțin de 1, $\operatorname{tg}(a + b)$ are o valoare foarte mare.

R: Se va observa că fracția $\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$ are în acest caz numitorul foarte mic.

18. Se dă $\operatorname{tg} a = 2$, $\operatorname{tg} b = \frac{2}{3}$; să se afle $\operatorname{tg}(a - b)$.

$$\text{R: } \operatorname{tg}(a - b) = \frac{2 - \frac{2}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{4}{7}$$

19. Se dă $\operatorname{cotg} a = 3$, $\operatorname{cotg} b = 2$; se cere $\operatorname{cotg}(a - b)$.

$$\text{R: } \operatorname{cotg}(a - b) = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2 - 3} = -7$$

Inmulțire.

20. Se dă $\sin a = \frac{1}{7}$; să se afle $\sin 2a$, $\cos 2a$.

$$\text{R: } \sin 2a = \frac{8\sqrt{3}}{49}; \quad \cos 2a = \frac{47}{49}$$

21. Se dă $\cos a = \frac{1}{5}$; să se afle $\sin 2a$, $\cos 2a$.

$$\text{R: } \sin 2a = \frac{4\sqrt{6}}{25}; \quad \cos 2a = \frac{23}{25}$$

22. Se cunoaște $\operatorname{tg} a = 3,5$; să se afle $\operatorname{tg} 2a$.

$$\text{R: } \operatorname{tg} 2a = -0,62.$$

23. Să se afle $\operatorname{cotg} 2a$, când se dă $\operatorname{cotg} a = \frac{1}{4}$.

$$\text{R: } \operatorname{cotg} 2a = -\frac{15}{8}$$

24. Se dă $\sin a = \frac{1}{10}$; să se afle $\operatorname{tg} 2a$.

$$\text{R: } \operatorname{tg} 2a = \frac{3\sqrt{11}}{46}$$

Indicație: Se va afla mai întâiu $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\sqrt{1 - \sin^2 a}}$, etc.

25. Se dă $\cos a = \frac{2}{3}$; să se calculeze $\operatorname{tg} 2a$, $\operatorname{cotg} 2a$.

$$\text{R: } \operatorname{cotg} 2a = -\frac{\sqrt{5}}{20}; \quad \operatorname{tg} 2a = -4\sqrt{5}$$

Indicație: Se va afla mai întâiu $\operatorname{tg} a = \frac{1 - \cos^2 a}{\cos a}$, etc.

26. Să se afle :

$$\sin 60^\circ, \cos 60^\circ, \operatorname{tg} 60^\circ, \operatorname{cotg} 60^\circ$$

știind că $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

27. Să se regăsească rezultatele :

$$\operatorname{tg} 270^\circ = \infty, \quad \operatorname{cotg} 270^\circ = 0$$

folosind formulele care dau $\operatorname{tg} 2a$ și $\operatorname{cotg} 2a$ în funcțiune de unghiul a .

28. Să se exprime $\sin 2a$ în funcțiune de $\sin a$, sau numai de $\cos a$.

29. Să se demonstreze formulele :

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{cotg} a}{\operatorname{cotg}^2 a - 1}$$

$$\operatorname{cotg} 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{2 \operatorname{tg} a}$$

Indicație: Se va înlocui în formula (III), $\operatorname{tg} a$ prin $\frac{1}{\operatorname{cotg} a}$, iar în formula (IV) se va înlocui $\operatorname{cotg} a$ prin $\frac{1}{\operatorname{tg} a}$.

30. Să se stabilească formula (III) (pag. 126), folosind relațiile (I), (II).

$$\text{Indicație: se va scrie: } \operatorname{tg} 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{2 \sin a \cos a}{\cos^2 a - \sin^2 a} \text{ și se va împărți}$$

și numărătorul și numitorul fracției cu $\cos^2 a$.

31. Să se afle $\sin 30^\circ$, folosind formula $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$. (Chestiune propusă de d-l Prof. Ion Ionescu la probele orale ale concursurilor « Gazetei Matematice »).

$$\text{R: } \sin 60^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ; \text{ dar } \sin 60^\circ = \cos 30^\circ$$

$$\text{deci: } \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

32. Se dă $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; să se afle $\sin 270^\circ$, observând că $270^\circ = 2 \times 135^\circ$.

$$\text{R: } \sin 270^\circ = 2 \sin 135^\circ \cos 135^\circ = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1$$

33. Se cunoaște $\cos 300^\circ$; se cere să se calculeze valoarea numerică a lui $\cos 600^\circ$.

$$\text{R: } \cos 600^\circ = \cos 2 \times 300^\circ = 2 \cos^2 300^\circ - 1, \text{ etc.}$$

34. Se dă $\operatorname{tg} a = 0,649$, $\operatorname{cotg} b = 1,192$, se cere să se calculeze $\operatorname{tg} 2a$ și $\operatorname{cotg} 2b$. Să se afle unghiurile a și b cuprinse între 0° și 180° care corespund valorilor date.

R: Se vor aplica formulele $\operatorname{tg} 2a$ și $\operatorname{cotg} 2a$ în funcțiune de $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$.

35. Se consideră unghiul $xoy = 2a$ și bisectoarea sa OB ; se coboară perpendiculara MN pe OB (fig. 72), iar dintr'un punct oarecare P al laturii Oy , se coboară o perpendiculară PQ pe Ox . Se cunoaște

raportul $\frac{ON}{NM} = 5$ și se cere să se calculeze ra-

portul $\frac{PQ}{OQ}$.

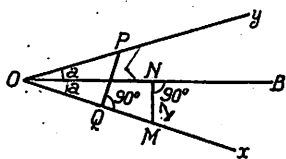


Fig. 72

Indicație: $\frac{NM}{ON} = \operatorname{tg} a = \frac{1}{5}$; avem de cal-

culat $\frac{PQ}{OQ} = \operatorname{tg} 2a$, etc.

36. Să se stabilească formula care dă $\sin 2a$ și $\cos 2a$ în funcțiune de $\operatorname{tg} a$.

R: $\sin 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$; $\cos 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$

CAP. VIII.

TABELE TRIGONOMETRICE DE LOGARITMI
CU CINCI ZECIMALE.

S'a arătat mai sus (Cap. I) că rezolvarea unui triunghi se poate face : *grafic* și prin *calcul*.

Rezolvarea prin calcul este mai exactă decât aceea grafică.

Prin calcul, rezolvarea triunghiurilor se poate face servindu-ne :

1) *de tabelele de valori naturale ale liniilor trigonometrice* (vezi Cap. II, pag. 29 și urm.), care sunt foarte utile când nu urmărim o exactitate prea mare, sau atunci când voim să facem o verificare aproximativă a unui rezultat.

2) *de tabele trigonometrice de logaritmi* cu 5 sau 7 zecimale exacte, care sunt întrebunțate pentru calcule cât mai precise.

Din cele arătate până aci rezultă că din punct de vedere al exactității, rezolvarea grafică este mai puțin exactă decât rezolvarea cu tabelele de valori naturale, iar cea mai precisă este rezolvarea cu tabelele trigonometrice de logaritmi.

După gradul de aproximație ce se urmărește, se aplică unul oarecare din aceste procedee; pentru verificarea rezultatelor este uneori util să aplicăm ultimele două procedee.

TABELE TRIGONOMETRICE DE LOGARITMI ¹⁾.

După cum s'a arătat (pag. 25), liniile trigonometrice sunt numere; putem deci afla logaritmul unei linii trigonometrice. Spre exemplu :

¹⁾ Introducerea logaritmilor se datorește lui *Neper* (Jean), matematician scoțian (1560—1617).

1) $\log \sin 10^\circ$ înseamnă logaritmul numărului: $\sin 10^\circ = 0,174$ adică $\log 0,174$.

2) $\log \operatorname{tg} 45^\circ$ înseamnă logaritmul numărului $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$; deci $\log \operatorname{tg} 45^\circ = 0$, etc.

Pentru a afla logaritmul liniei trigonometrice a unui unghi, am putea deci calcula mai întâiu valoarea numerică a acelei linii trigonometrice cu tabelele de valori naturale și apoi să luăm logaritmul numărului astfel aflat cu Tabela numerelor (Dupuis pag. 1—27).

Exemplu. 1) Să aflăm $\log \sin 30^\circ$; avem: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; deci:

$$\begin{aligned}\log \sin 30^\circ &= \log \frac{1}{2} = \operatorname{colog} 2 \\ &= \bar{1},69897\end{aligned}$$

2) Să aflăm $\log \operatorname{cotg} 60^\circ$; avem $\operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$; deci:

$$\log \operatorname{cotg} 60^\circ = \log \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{colog} \sqrt{3} = \frac{1}{2} \operatorname{colog} 3 = \bar{1},76144$$

Reciproc, dacă se dă logaritmul liniei trigonometrice a unui unghi necunoscut x , s'ar putea afla întâiu valoarea numerică a acelei linii, cu ajutorul tablei numerelor (Dupuis pag. 1—27) și apoi unghiul, cu ajutorul tablei de valori naturale.

Exemplu. Se dă: $\log \sin x = \bar{1},70586$ și se cere unghiul x ; căutând valoarea lui $\sin x$, la tabela numerelor găsim: $\sin x = 0,508$, căruia îi corespunde (vezi tabela valorilor naturale) $x = 30^\circ 30'$.

În multe aplicațiuni, când se dă un unghi, nu avem neapărat nevoie să aflăm și valoarea numerică a uneia din liniile sale trigonometrice, ci numai logaritmul ei; tot astfel când cunoaștem logaritmul unei linii trigonometrice a unui unghi necunoscut x , nu avem totdeauna nevoie și de valoarea numerică a acelei linii trigonometrice, ci numai de unghiul x .

Pe de altă parte a lucra cu două tabele (aceea a numerelor și aceea a valorilor naturale), înseamnă pierdere de timp, iar din cauză că tabela valorilor naturale (Dupuis pag. 149—151) este

întocmită cu 3 zecimale exacte; întrebuițând-o, nu putem avea o precizieune prea mare.

Pentru toate aceste motive, s'a întocmit o *tabelă trigonometrică de logaritmi* (Dupuis pag. 38—127) în care se dau *direct*, cu *cinci* zecimale exacte, logaritmi sinusului, cosinusului, tangentei și cotangentei unui unghi cunoscut, din minut în minut și reciproc: cunoscând valoarea logaritmului uneia din aceste patru linii trigonometrice, se obține *direct* unghiul, fără a mai afla valoarea numerică a acelei linii.

: Din cauza relațiilor (pag. 35):

$$\sin x = \cos (90^\circ - x); \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} (90^\circ - x)$$

a fost suficient să se întocmească tabela dela 0° la 45° ; pentru unghiuri cuprinse între 45° și 90° , se pot citi logaritmi pe aceeași tabelă și aceleași coloane, însă linia trigonometrică este înscrisă jos iar valoarea în grade a unghiului se citește în josul paginii și minutele în dreapta.

La pag. 143 se arată o pagină din tabela trigonometrică de logaritmi Dupuis.

INTREBUIȚAREA TABELELOR TRIGONOMETRICE.

I. Se cunoaște unghiul și se cere logaritmul. Distingem două cazuri:

A. *Unghiul se găsește în tabele. Exemple:* 1) $\log \sin 9^\circ 44'$; la pag. 57 găsim pe coloana sinusului:

$$\log \sin 9^\circ 44' = \bar{1},22805$$

2) $\log \cos 19^\circ 21'$; la pag. 76, pe coloana sinusului găsim:

$$\log \cos 19^\circ 21' = \bar{1},97475$$

3) $\log \operatorname{tg} 64^\circ 34'$; unghiul fiind mai mare de 45° , îl găsim la pag. 88, citind pe coloana în josul căreia este înscrisă tangenta:

$$\log \operatorname{tg} 64^\circ 34' = 0,32281$$

4) $\log \operatorname{cotg} 41^\circ 50'$; la pag. 121 se găsește pe coloana cotangentei:

$$\log \operatorname{cotg} 41^\circ 50' = 0,04810$$

	Sin.	D.	Tang.	D.	Cotg.	Cos.	
30	1,21761	75	1,22361	77	0,77639	1,99400	30
31	1836	76	2438	78	7562	9398	29
32	1912	75	2516	77	7484	9396	28
33	1987	75	2593	77	7407	9394	27
34	2062	75	2670	77	7330	9392	26
		75		77			
35	2137	74	2747	77	7253	9390	25
36	2211	75	2824	77	7176	9388	24
37	2286	75	2901	77	7099	9385	23
38	2361	74	2977	77	7023	9383	22
39	2435	74	3054	77	6946	9381	21
		74		76			
40	2509	74	3130	76	6870	9379	20
41	2583	74	3206	77	6794	9377	19
42	2657	74	3283	76	6717	9375	18
43	2731	74	3359	76	6641	9372	17
44	2805	74	3435	76	6565	9370	16
		73		75			
45	2878	74	3510	76	6490	9368	15
46	2952	73	3586	75	6414	9366	14
47	3025	73	3661	76	6339	9364	13
48	3098	73	3737	76	6263	9362	12
49	3171	73	3812	75	6188	9359	11
		73		75			
50	3244	73	3887	75	6113	9357	10
51	3317	73	3962	75	6038	9355	9
52	3390	72	4037	75	5963	9353	8
53	3462	73	4112	74	5888	9351	7
54	3535	72	4186	75	5814	9348	6
		72		75			
55	3607	72	4261	74	5739	9346	5
56	3679	73	4335	75	5665	9344	4
57	3752	71	4410	74	5590	9342	3
58	3823	72	4484	74	5516	9340	2
59	3895	72	4558	74	5442	9337	1
		72		74			
60	1,23967		1,24632		0,75368	1,99335	0
	Cos.		Cotg.		Tang.	Sin.	

77

1''	1,28
2	2,57
3	3,85
4	5,13
5	6,42
6	7,70
7	8,98
8	10,27
9	11,55

76

1''	1,27
2	2,53
3	3,80
4	5,07
5	6,33
6	7,60
7	8,87
8	10,13
9	11,40

75

1''	1,25
2	2,50
3	3,75
4	5,00
5	6,25
6	7,50
7	8,75
8	10,00
9	11,25

74

1''	1,23
2	2,47
3	3,70
4	4,93
5	6,17
6	7,40
7	8,63
8	9,87
9	11,10

B. *Unghiul nu se află în tabele. Exemple:* 1) Să se afle:
 $\log \sin 43^{\circ}15'10''$.

Observăm că:

$$43^{\circ}15' < 43^{\circ}15'10'' < 43^{\circ}16'$$

deci:

$$\log \sin 43^{\circ}15' < \log \sin 43^{\circ}15'10'' < \log \sin 43^{\circ}16'$$

Din tabele citim:

$$\log \sin 43^{\circ}15' = \bar{1},83581 \text{ și } \log \sin 43^{\circ}16' = \bar{1},83594$$

Admițând că creșterile unghiurilor sunt proporționale cu creșterile logaritmilor putem judeca astfel: dacă unghiul crește dela $43^{\circ}15'$ la $43^{\circ}16'$ adică cu $60''$, logaritmul sinusului crește dela $\bar{1},83581$ la $\bar{1},83594$ adică cu $0,00013$ (sau cu 13 unități de al 5-lea ordin zecimal); dacă unghiul ar crește dela $43^{\circ}15'$ la $43^{\circ}15'10''$, adică cu $10''$, cu cât va crește logaritmul?

Obținem astfel următoarea regulă de trei:

$$\begin{array}{r} 60'' \dots \nearrow \dots 13 \\ 10'' \dots \nearrow \dots x \\ \hline x = \frac{13 \times 10''}{60''} = 2,1 \sim 2 \end{array}$$

adăugând deci la $\bar{1},83581$ două unități de al 5-lea ordin zecimal, găsim:

$$\begin{aligned} \log \sin 43^{\circ}15'10'' &= \bar{1},83581 + 0,00002 \\ &= \bar{1},83583 \end{aligned}$$

2) Să aflăm $\log \cos 35^{\circ}40'18''$.

$$\log \cos 35^{\circ}40' > \log \cos 35^{\circ}40'18'' > \log \cos 35^{\circ}41'$$

Avem din tabele:

$$\log \cos 35^{\circ}40' = \bar{1},90978 \quad ; \quad \log \cos 35^{\circ}41' = \bar{1},90969$$

Să observăm că atunci când unghiul crește, logaritmul cosinului scade; dacă unghiul crește dela: $35^{\circ}40'$ la $35^{\circ}41'$ adică cu $60''$, logaritmul scade cu: $\bar{1},90978 - \bar{1},90969 = 0,00009$ (adică cu 9 unități de al cincilea ordin zecimal); dacă unghiul ar crește dela $35^{\circ}40'$ la $35^{\circ}40'18''$, cu cât ar scade logaritmul?

Obținem regula de trei :

$$\begin{array}{r} 60'' \dots\dots \searrow \dots 9 \\ 18'' \dots\dots \searrow \dots x \\ \hline x = \frac{18 \times 9}{60} = 2,7 \sim 3 \end{array}$$

deci :

$$\begin{aligned} \log \cos 35^{\circ}40'18'' &= \bar{1},90978 - 0,00003 \\ &= \bar{1},90975 \end{aligned}$$

II. Se cunoaște logaritmul și se cere unghiul. Distingem și aci cazurile :

A. **Logaritmul se găsește în tabelă. Exemple:** 1) Se dă : $\log \sin x = \bar{1},57793$ și se cere x .

La pag. 82, pe coloana sinusului (citit sus) găsim că $\bar{1},57793$ corespunde la unghiul de $22^{\circ}14'$.

2) Se dă : $\log \cos x = \bar{1},93420$ și se cere x . La pag. 99 pe coloana cosinusului (citit sus) găsim că $x = 30^{\circ}45'$.

3) Se dă : $\log \operatorname{tg} x = 0,11110$; la pag. 113 găsim că $0,11110$ este pe coloana în josul căreia este înscrisă tangenta; aceasta înseamnă că unghiul este mai mare de 45° și anume $x = 52^{\circ}15'$.

4) Se dă : $\log \operatorname{cotg} x = 0,57959$; la pag. 67 găsim pe coloana cotangentei (citită sus): $x = 14^{\circ}45'$.

B. **Logaritmul nu se găsește în tabelă. Exemple:** 1) Se dă : $\log \sin x = \bar{1},76030$ și se cere x ,

La pag. 108, găsim pe coloana sinusului (citit sus).

$$\bar{1},76021 < \bar{1},76030 < \bar{1},76039$$

Admițând că creșterile logaritmilor sunt proporționale cu creșterile unghiului, putem judeca astfel : dacă logaritmul crește de la $\bar{1},76021$ la $\bar{1},76039$ adică cu $0,00018$ (cu 18 unități de al cincilea ordin zecimal), unghiul crește de la $35^{\circ}9'$ la $35^{\circ}40'$ adică cu $60''$; dar dacă logaritmul ar crește de la $\bar{1},76021$ la $\bar{1},76030$ (adică cu 9 unități de al cincilea ordin zecimal) cu cât ar crește unghiul?

Avem deci regula de trei:

$$\begin{array}{r} 18 \dots \dots \dots \rightarrow \dots \dots 60'' \\ 9 \dots \dots \dots \rightarrow \dots \dots x \\ \hline x = \frac{9 \times 60''}{18} = 30'' \end{array}$$

Rezultă că $x = 35^{\circ}9'30''$.

2) Se dă: $\log \cotg x = 0,04551$ și se cere x .

La pag. 122 găsim:

$$0,04556 > 0,04551 > 0,04531$$

Să observăm că atunci când unghiul crește, logaritmul cotangentei scade.

Dacă logaritmul scade cu: $0,04556 - 0,04531 = 0,00025$ (25 de unități de al cincilea ordin zecimal), unghiul crește dela 42° la $42^{\circ}1'$ adică cu $60''$; dar dacă logaritmul scade dela $0,04556$ la $0,04551$ adică cu 5 unități de al cincilea ordin zecimal, cu cât va crește unghiul?

$$\begin{array}{r} 25 \dots \dots \dots \rightarrow \dots \dots 60'' \\ 5 \dots \dots \dots \rightarrow \dots \dots x \\ \hline x = \frac{5 \times 60''}{25} = 12'' \end{array}$$

Rezultă că $x = 42^{\circ}12''$.

Observare importantă. Calculul logaritmului liniei trigonometrice a unui unghi, care nu se găsește în tabele, precum și aflarea unui unghi, când logaritmul unei linii trigonometrice a lui nu este în tabelă, se bazează după cum s'a arătat, pe ipoteza că: *creșterile sau descreșterile logaritmului liniei sunt proporționale cu creșterile unghiului.*

Pentru unghiuri mici, cuprinse între 0° și $2^{\circ}12'$, nu se admite proporționalitatea între unghi și creșterile logaritmului sinusului și tangentei; ci proporționalitatea între valoarea sinusului (sau tangentei) și unghi; tot astfel pentru unghiuri cuprinse între $87^{\circ}48'$ și 90° , pentru cosinus și cotangentă.

În tabela *Dupuis* se arată la pag. 172 și 173 cum trebuie procedat în aceste cazuri.

R E Z U M A T .

CAP. VIII. — TABELE TRIGONOMETRICE DE LOGARITMI.

Întrebuințarea lor.

*Rezolvarea triunghiurilor este o operațiune care se poate face :

1) grafic, 2) prin calcul (trigonometric).

Prin calcul, rezultatele sunt mai exacte decât grafic.

*Rezolvarea prin calcul trigonometric se poate face :

a) folosind tabelele de valori naturale,

b) folosind tabelele trigonometrice de logaritmi cu 5 și 7 zecimale.

Mijlocul cel mai exact de rezolvare este acesta din urmă.

*Pentru unghiurile cuprinse între $2^{\circ}12'$ și 90° se admite pentru calculul logaritmilor *sinusului* și *tangentei*, unui unghiur dat (precum și pentru problema inversă), că *există proporționalitate între creșterile logaritmilor și creșterile unghiului*;

Tot astfel pentru logaritmii *cosinusului* și *cotangentei* unghiurilor cuprinse între 0° și $87^{\circ}48'$:

Pentru unghiurile cuprinse între 0° și $2^{\circ}12'$ se admite că există proporționalitate între *valoarea sinusului* (sau *tangentei*) și a unghiului.

Tot astfel pentru *valoarea cosinusului* (sau a *cotangentei*) și a unghiului între $87^{\circ}48'$ și 90° .

E X E R C I Ț I I.

1. Să se afle logaritmi:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \log \sin 18^{\circ}15'27'' & \text{b) } \log \cos 24^{\circ}19'34'' \\ \text{c) } \log \operatorname{tg} 48^{\circ}27'38'' & \text{d) } \log \operatorname{cotg} 39^{\circ}4'8'' \end{array}$$

R: a) $\bar{1},49594$; b) $\bar{1},95962$; c) $0,05259$; d) $0,09057$.

2. Să se calculeze logaritmi:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \log \sin 73^{\circ}29'3'' & \text{b) } \log \cos 77^{\circ}4'35'' \\ \text{c) } \log \operatorname{tg} 80^{\circ}41'17'' & \text{d) } \log \operatorname{cotg} 55^{\circ}51'14'' \end{array}$$

R: a) $\bar{1},98170$; b) $\bar{1},34957$; c) $0,78523$; d) $\bar{1},83138$.

3. Să se afle unghiul x , când se dă:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \log \sin x = \bar{1},82946 & \text{b) } \log \cos x = \bar{1},88282 \\ \text{c) } \log \operatorname{tg} x = \bar{1},86770 & \text{d) } \log \operatorname{cotg} x = 0,20910 \end{array}$$

R: a) $42^{\circ}28'21''$; b) $40^{\circ}13'27''$; c) $36^{\circ}24'18''$; d) $31^{\circ}42'39''$.

4. Să se afle unghiul x , când se dă:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \log \sin x = \bar{1},93112 & \text{b) } \log \cos x = \bar{1},72210 \\ \text{c) } \log \operatorname{tg} x = 0,43140 & \text{d) } \log \operatorname{cotg} x = \bar{1},83840 \end{array}$$

R: a) $58^{\circ}34'34''$; b) $58^{\circ}10'24''$; c) $69^{\circ}40'42''$; d) $54^{\circ}10'46''$.

5. Să se calculeze cu logaritmi expresiunile:

$$E_1 = 453,2 \sqrt[3]{\sin^2 4^{\circ}10'20''}$$

$$E_2 = \frac{852}{4573} \cos^3 48^{\circ}19'7''$$

$$E_3 = \sqrt[4]{1259} \frac{\operatorname{tg} 19^{\circ}45'2''}{\operatorname{cotg} 23^{\circ}4'17''}$$

R: $E_1 = 78,98$; $E_2 = 0,054786$; $E_3 = 0,911$

CAP. IX.

**TRANSFORMAREA IN PRODUSE, A SUMEI ȘI
DIFERENȚEI A DOUĂ FUNCȚIUNI
TRIGONOMETRICE.**

(Formule calculabile prin logaritmi).

Se știe din Algebră, că prin logaritmi, putem calcula cu înlesnire expresiuni formate din cantități legate între ele prin semnele: înmulțirii, împărțirii, ridicării la putere și extragerii rădăcinii de un ordin oarecare; calculul cu logaritmi *reduce* operațiile de înmulțire și împărțire, respectiv la adunări și scăderi, iar operațiile de ridicări la putere și extragere de rădăcini, respectiv la înmulțiri și împărțiri.

Exemple: 1. Expresiunea :

$$E = A \times B$$

se calculează astfel :

$$\log E = \log A + \log B$$

cunoscând $\log E$, deducem pe E , adică aflăm produsul $A \times B$ printr'o *adunare*.

2. Fie :

$$E = \frac{A}{B}$$

Avem :

$$\log E = \log A - \log B$$

adică în loc de o împărțire facem o *scădere*.

3. Se dă :

$$E = A^m$$

$$\log E = m \log A ;$$

adică o *ridicare la putere* s'a înlocuit cu o *înmulțire*.

4. Fie:

$$E = \sqrt[n]{A};$$

avem:

$$\log E = \frac{\log A}{n}$$

adică o *extragere de rădăcină* s'a redus la o *împărțire*.

Zicem că toate expresiunile de mai sus, sunt *calculabile prin logaritmi*.

Observare. Expresiuni de forma:

$$A + B \quad A - B$$

nu sunt calculabile prin logaritmi, deoarece unei sume sau unei diferențe neefectuate nu li putem aplica logaritmi.

Asemenea expresiuni se întâlnesc des în Trigonometrie; uneori însă ele pot fi transformate în alte expresiuni cuprinzând cantități legate între ele prin semnele înmulțirii, împărțirii etc., *adică pot fi făcute calculabile prin logaritmi*.

În cele ce urmează vom examina câteva din cazurile mai importante ce sunt utile în Trigonometrie.

I. Expresiunea: $E = \sin p + \sin q$.

Această expresiune formată din suma a două sinusuri, se poate transforma în alta, calculabilă prin logaritmi; astfel din formulele (pag. 114):

$$(1) \quad \begin{aligned} \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{aligned}$$

în care a și b sunt două unghiuri oarecări, obținem, prin adunare membru cu membru:

$$(2) \quad \sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b$$

Să notăm:

$$a + b = p \quad \text{și} \quad a - b = q$$

din aceste relațiuni obținem, adunându-le membru cu membru și apoi scăzându-le membru cu membru:

$$1_a) \quad 2a = p + q, \quad a = \frac{p + q}{2}$$

$$2_a) \quad 2b = p - q, \quad b = \frac{p - q}{2}$$

astfel că formula (2) ia forma:

$$(1) \quad E = \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

care este acum calculabilă prin logaritmi, deoarece în ultimul membru avem o înmulțire de trei factori:

$$2 \quad \sin \frac{p + q}{2} \quad \cos \frac{p - q}{2}$$

De aici:

Regula I. *Suma a două sinusuri este egală cu de două ori produsul sinusului semisumei unghiurilor prin cosinusul semidiferenței lor.*

Aplicație. *Să calculăm cu logaritmi expresia:*

$$E = \sin 15^\circ + \sin 7^\circ$$

În baza formulei (1) putem scrie:

$$E = \sin 15^\circ + \sin 7^\circ = 2 \sin \frac{15^\circ + 7^\circ}{2} \cos \frac{15^\circ - 7^\circ}{2}$$

$$E = 2 \sin 11^\circ \cos 4^\circ$$

aplicând logaritmi avem:

$$\begin{aligned} \log E &= \log 2 + \log \sin 11^\circ + \log \cos 4^\circ \\ &= 0,30103 + \bar{1},28060 + \bar{1},99894 = \bar{1},58057 \end{aligned}$$

deci:

$$E = 0,38069$$

Dacă am fi calculat expresia E cu ajutorul tabelii de valori naturale, găseam :

$$\sin 15^\circ = 0,259; \sin 7^\circ = 0,122$$

deci :

$$E = 0,259 + 0,122 = 0,381$$

Deosebirea între acest rezultat și cel de mai sus se datorește diferenței de aproximație cu care este calculată tabela de logaritmi (cu cinci zecimale exacte) și tabela de valori naturale (cu trei zecimale exacte).

II. *Expresiunea*: $E = \sin p - \sin q$.

Expresiunea se transformă într'alta calculabilă prin logaritmi, dacă scădem relațiile (1) membru cu membru

$$\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \sin b \cos a$$

procedând ca mai sus, găsim :

$$(II) \quad E = \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

De aci:

Regula II. *Diferența a două sinusuri este egală cu de două ori produsul între sinusul semidiferenței unghiurilor, prin cosinusul semisumei lor.*

Aplicație. Să calculăm cu logaritmi expresia:

$$E = \sin 21^\circ 30' - \sin 10^\circ.$$

Avem :

$$E = \sin 21^\circ 30' - \sin 10^\circ = 2 \sin \frac{21^\circ 30' - 10^\circ}{2} \cos \frac{21^\circ 30' + 10^\circ}{2}$$

sau :

$$E = 2 \sin \frac{11^\circ 30'}{2} \cos \frac{31^\circ 30'}{2} = 2 \sin 5^\circ 45' \cos 15^\circ 45'$$

și aplicând logaritmi:

$$\begin{aligned}\log E &= \log 2 + \log \sin 5^{\circ}45' + \log \cos 15^{\circ}45' \\ &= 0,30103 + 1,00082 + 1,98338 \\ &= 1,28523\end{aligned}$$

deci:

$$E = 0,19285.$$

Dacă folosim tabela valorilor naturale, obținem:

$$\sin 21^{\circ}30' = 0,367; \quad \sin 10^{\circ} = 0,174$$

deci:

$$E = 0,367 - 0,174 = 0,193$$

Exercițiu. Să se arate că formula (II) se poate deduce din formula (I) schimbând unghiul q în $-q$; ceea ce este posibil deoarece aceste formule sunt adevărate oricare ar fi valorile lui p și q .

III. *Expresiunea: $\cos p + \cos q$.*

Pornim de la formulele (pag. 115).

$$(3) \quad \begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b\end{aligned}$$

pe care adunându-le membru cu membru găsim:

$$(4) \quad \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

sau punând ca mai sus:

$$a + b = p \qquad a - b = q$$

din care se deduce:

$$a = \frac{p+q}{2} \qquad b = \frac{p-q}{2}$$

găsim:

$$(III) \quad \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

și:

Regula III. Suma a două cosinusuri este egală cu de două ori produsul cosinusului semisumei unghiurilor prin cosinusul semi-diferenței lor.

Aplicație. Fie: $E = \cos 18^\circ + \cos 25^\circ$:
avem:

$$E = \cos 18^\circ + \cos 25^\circ = 2 \cos \frac{18^\circ + 25^\circ}{2} \cos \frac{18^\circ - 25^\circ}{2}$$

$$E = 2 \cos 21^\circ 30' \cos (-3^\circ 30')$$

dar:

$$\cos (-3^\circ 30') = \cos 3^\circ 30'$$

deci:

$$\begin{aligned} \log E &= \log 2 + \log \cos 21^\circ 30' + \log \cos 3^\circ 30' \\ &= 0,30103 + 1,96868 + 1,99919 = 0,26890 \end{aligned}$$

$$E = 1,857375$$

Cu ajutorul tabelor de valori naturale găsim:

$$\cos 18^\circ = 0,951; \quad \cos 25^\circ = 0,906$$

deci:

$$E = 0,951 + 0,906 = 1,857$$

IV. *Expresiunea: $\cos p - \cos q$.*

Scăzând membru cu membru formulele (3), obținem:

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b$$

și înlocuind $a+b$ prin p , iar $a-b$ prin q :

$$(IV) \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

de aci:

Regula IV. *Diferența cosinusurilor a două unghiuri este egală cu produsul dintre de două ori sinusul semisumei unghiurilor prin sinusul semidiferenței lor, luat cu semn schimbat.*

Observare. Deoarece:

$$\sin \frac{p-q}{2} = -\sin \frac{q-p}{2} \quad (11)$$

formula (IV) se mai poate scrie:

$$(IV) \quad \cos p - \cos q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{q-p}{2}$$

care prezintă avantajul că nu are semnul — înaintea produsului din membrul al 2-lea.

Aplicație. 1) Să aflăm: $E = \cos 15^\circ - \cos 37^\circ$.

Avem formula (VI):

$$\begin{aligned} E &= \cos 15^\circ - \cos 37^\circ = -2 \sin \frac{15^\circ + 37^\circ}{2} \sin \frac{15^\circ - 37^\circ}{2} \\ &= -2 \sin 26^\circ \sin (-11^\circ) = +2 \sin 26^\circ \sin 11^\circ \end{aligned}$$

deci:

$$\begin{aligned} \log E &= \log 2 + \log \sin 26^\circ + \log \sin 11^\circ \\ &= 0,30103 + 1,64184 + 1,28060 = 1,22347 \\ E &= 0,1672 \end{aligned}$$

prin valori naturale găsim:

$$E = \cos 15^\circ - \cos 37^\circ = 0,966 - 0,799 = 0,167$$

2) Să calculăm: $E = \cos 29^\circ - \cos 8^\circ$.

Avem, aplicând formula (IV):

$$\begin{aligned} E &= \cos 29^\circ - \cos 8^\circ = -2 \sin \frac{29^\circ + 8^\circ}{2} \sin \frac{29^\circ - 8^\circ}{2} \\ &= -2 \sin 18^\circ 30' \sin 10^\circ 30' \end{aligned}$$

Expresiunea aceasta este negativă, ceea ce se putea constăta dela început, deoarece $\cos 29^\circ < \cos 8^\circ$; heputându-i aplica logaritmi, vom calcula expresiunea $(-E)$ care este pozitivă:

$$-E = \cos 8^\circ - \cos 29^\circ = 2 \sin 18^\circ 30' \sin 10^\circ 30'$$

și la rezultat îi vom schimba semnul:

$$\begin{aligned} \log (-E) &= \log 2 + \log \sin 18^\circ 30' + \log \sin 10^\circ 30' \\ &= 0,30103 + 1,50148 + 1,26063 = 1,06314 \\ -E &= 0,11565; \text{ deci } E = -0,11565 \end{aligned}$$

Dață întrebuintăm tabela valorilor naturale, obținem:

$$E = \cos 29^\circ - \cos 8^\circ = 0,875 - 0,990 = -0,115$$

Observare. Expresiunile de forma:

$$1) \sin p + \cos q; \quad 2) \sin p - \cos q$$

formate din doi termeni, dintre care unul este sinus, celălalt cosinus

se pot reduce la o sumă (sau diferență) de sinusuri sau cosinusuri, astfel :

$$\sin p + \cos q = \sin p + \sin (90^\circ - q)$$

care se calculează cu logaritmi prin formula (I), dacă $q < 90^\circ$ și cu formula (II) în cazul $q > 90^\circ$.

Mai putem proceda și astfel :

$$\sin p + \cos q = \cos (90^\circ - p) + \cos q$$

căreia îi aplicăm formula (III).

În mod analog avem :

$$\sin p - \cos q = \sin p - \sin (90^\circ - q)$$

sau :

$$\sin p - \cos q = \cos (90^\circ - p) - \cos q$$

pentru care s'au stabilit mai sus formulele calculabile prin logaritmi.

Exemplu: $E = \sin 14^\circ + \cos 32^\circ = \sin 14^\circ + \sin (90^\circ - 32^\circ)$

$$\begin{aligned} &= \sin 14^\circ + \sin 58^\circ = 2 \sin \frac{14^\circ + 58^\circ}{2} \cos \frac{14^\circ - 58^\circ}{2} \\ &= 2 \sin 36^\circ \cos (-22^\circ) = 2 \sin 36^\circ \cos 22^\circ \end{aligned}$$

sau :

$$\begin{aligned} E &= \cos (90^\circ - 14^\circ) + \cos 32^\circ = \cos 76^\circ + \cos 32^\circ \\ &= 2 \cos \frac{76^\circ + 32^\circ}{2} \cos \frac{76^\circ - 32^\circ}{2} = 2 \cos 54^\circ \cos 22^\circ \end{aligned}$$

care este identică cu prima expresiune, dacă observăm că $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$.

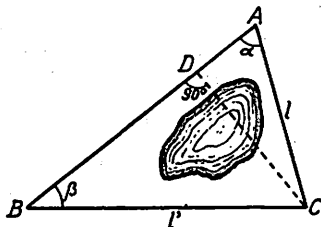


Fig. 73

Aplicație. Fiind date trei puncte A, B, C , se cunoaște suma $AC + CB = L$, precum și unghiurile $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{CBA} = \beta$; se cere distanța $h = CD$, dela punctul C la dreapta AB (fig. 73).

(Aplicație numerică : $L = 5877 \text{ m}$, $\alpha = 71^\circ 3' 28''$, $\beta = 21^\circ 32' 5''$).

R: Din triunghiurile dreptunghice ACD și CDB găsim:

$$h = l \sin a \quad h = l' \sin \beta$$

$$\frac{h}{\sin a} + \frac{h}{\sin \beta} = l + l' = L \text{ (cunoscut)}$$

sau:

$$\frac{h (\sin a + \sin \beta)}{\sin a \sin \beta} = L$$

sau:

$$h = \frac{L \sin a \sin \beta}{\sin a + \sin \beta} = \frac{L \sin a \sin \beta}{2 \sin \frac{a+\beta}{2} \cos \frac{a-\beta}{2}}$$

$$\begin{aligned} \log h &= \log L + \log \sin a + \log \sin \beta + \operatorname{colog} 2 + \operatorname{colog} \sin \frac{a+\beta}{2} \\ &\quad + \operatorname{colog} \cos \frac{a-\beta}{2} \end{aligned}$$

In cazul numeric găsim:

$$\log h = 3,52768$$

$$h = 3370,3846$$

Observare. Acest caz se prezintă în practică, dacă voim să cunoaștem distanța $h = CD$ dela punctul C la direcția AB, punctele A și B fiind însă separate între ele, precum și punctul C de punctul D printr'un obstacol (spre ex. un lac); se pot măsura însă distanțele $CA = l$, $CB = l'$ și unghiurile a și β .

V. Expresiunea: $E = \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q$.

Expresiunea aceasta se poate transforma într'o formulă calculabilă prin logaritmi astfel:

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q + \sin q \cos p}{\cos p \cos q}$$

sau:

(V)

$$E = \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin (p + q)}{\cos p \cos q}$$

Aplicație. $E = \operatorname{tg} 38^\circ + \operatorname{tg} 44^\circ = \frac{\sin (38^\circ + 44^\circ)}{\cos 38^\circ \cos 44^\circ}$

deci:

$$\log E = \log \sin 82^\circ + \operatorname{colog} \cos 38^\circ + \operatorname{colog} \cos 44^\circ \\ = \bar{1},99575 + 0,10347 + 0,14307 = 0,24229$$

deci:

$$E = 1,747.$$

Prin tabela de valori naturale găsim:

$$E = \operatorname{tg} 38^\circ + \operatorname{tg} 44^\circ = 0,781 + 0,966 = 1,747$$

VI. Expresiunea: $\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q$.

In mod analog găsim:

$$(V) \quad E = \operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin (p - q)}{\cos p \cos q}$$

Aplicație. $E = \operatorname{tg} 5^\circ - \operatorname{tg} 24^\circ = \frac{\sin (5^\circ - 24^\circ)}{\cos 5^\circ \cos 24^\circ} = \frac{\sin (-19^\circ)}{\cos 5^\circ \cos 24^\circ}$

sau:

$$E = \frac{\sin 19^\circ}{\cos 5^\circ \cos 24^\circ}$$

expresiune negativă, cum era și de așteptat, deoarece $\operatorname{tg} 5^\circ < \operatorname{tg} 24^\circ$.

Vom calcula expresia $(-E)$ care este pozitivă și vom deduce apoi pe E :

$$\log (-E) = \log \sin 19^\circ - \log \cos 5^\circ - \log \cos 24^\circ \\ = \bar{1},51264 - \bar{1},99834 - \bar{1},96073 = \bar{1},51264 + 0,00166 + 0,03927 = \bar{1},55357 \\ (-E) = 0,35774$$

deci:

$$E = -0,35774$$

Altfel, prin valori naturale:

$$E = \operatorname{tg} 5^\circ - \operatorname{tg} 24^\circ = 0,087 - 0,445 = -0,358.$$

VII. **Expresiunea:** $E = \cotg p + \cotg q$.

Se poate scrie:

$$E = \cotg p + \cotg q = \frac{\cos p}{\sin p} + \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\cos p \sin q + \sin p \cos q}{\sin p \sin q}$$

sau:

$$(VII) \quad E = \cotg p + \cotg q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}$$

Aplicație. $E = \cotg 17^\circ + \cotg 44^\circ$

$$= \frac{\sin(17^\circ + 44^\circ)}{\sin 17^\circ \sin 44^\circ} = \frac{\sin 61^\circ}{\sin 17^\circ \sin 44^\circ}$$

$$\log E = \log \sin 61^\circ - \log \sin 17^\circ - \log \sin 44^\circ$$

$$= 1,94182 - 1,46594 - 1,84177 = 0,63411$$

$$E = 4,3064$$

sau (prin valori naturale):

$$E = \cotg 17^\circ + \cotg 44^\circ = 3,271 + 1,036 = 4,307$$

VIII. **Expresiunea:** $E = \cotg p - \cotg q$.

În mod analog găsim:

$$(VIII) \quad E = \cotg p - \cotg q = \frac{\sin(q-p)}{\sin p \sin q}$$

care se mai poate scrie și astfel:

$$(VIII)_1 \quad E = \cotg p - \cotg q = \frac{\sin(p-q)}{\sin p \sin q}$$

$$\text{Aplicație. } E = \cotg 25^\circ - \cotg 81^\circ = \frac{\sin(81^\circ - 25^\circ)}{\sin 25^\circ \sin 81^\circ}$$

expresiune pozitivă, ceea ce se putea observa dela început, deoarece $\cotg 25^\circ > \cotg 81^\circ$.

Avem:

$$\begin{aligned}\log E &= \log \sin 56^\circ - \log \sin 25^\circ - \log \sin 81^\circ \\ &= 1,91857 - 1,62595 - 1,99462 = 0,29800 \\ E &= 1,9861\end{aligned}$$

Altfel:

$$E = \cotg 25^\circ - \cotg 81^\circ = 2,145 - 0,158 = 1,987$$

Observare. Expresiunile de forma:

$$1) \operatorname{tg} p + \cotg q \quad 2) \operatorname{tg} p - \cotg q, \text{ etc.}$$

formate din doi termeni (o tangentă și o cotangentă) se pot reduce la una din formulele V, VI, VII sau VIII.

Spre exemplu:

$$\operatorname{tg} p + \cotg q = \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} (90^\circ - q)$$

sau:

$$\operatorname{tg} p + \cotg q = \cotg (90^\circ - p) + \cotg q.$$

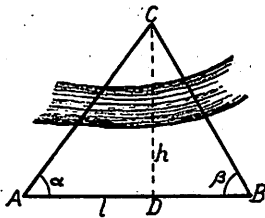


Fig. 74

Aplicație. Se cunoaște distanța $AB = l$ între două puncte A și B precum și unghiurile $\widehat{CAB} = \alpha$, $\widehat{CBA} = \beta$; se cere să se calculeze distanța $h = CD$ dela punctul C la dreapta AB (aplicație numerică: $l = 1350$ m, $\alpha = 53^\circ 30' 4''$, $\beta = 60^\circ 40' 13''$) (fig. 74).

R: Din triunghiurile dreptunghice ACD și CDB , obținem:

$$h = AD \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad h = DB \cdot \operatorname{tg} \beta$$

deci:

$$\frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{h}{\operatorname{tg} \beta} = AD + DB = l$$

sau:

$$h \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = l$$

prin urmare:

$$h = \frac{l \cdot \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

această formulă poate fi făcută calculabilă prin logaritmi, deoarece :

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (a + \beta)}{\cos a \cos \beta}$$

deci :

$$h = \frac{l \sin a \sin \beta}{\sin (a + \beta)}$$

$$\log h = \log l + \log \sin a + \log \sin \beta + \operatorname{colog} \sin (a + \beta)$$

În cazul numeric găsim :

$$\log h = 3,01579$$

$$h = 1037,002 \text{ m.}$$

Observare. Cazul de mai sus se poate prezenta în practică, dacă nu putem ajunge la punctul C (se zice în acest caz că punctul C este inaccesibil).

Se măsoară în acest caz distanța $AB = l$ (de pe o șosea spre ex.) și unghiurile a și β , iar h este depărtarea dela punctul inaccesibil C, la această șosea.

IX. Expresiunile : $E = 1 + \cos a$ și $E_1 = 1 - \cos a$.

Aceste expresiuni sunt calculabile prin logaritmi; într'adevăr s'a stabilit (pag. 124):

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

sau :

$$\cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1$$

prin urmare :

(IX)

$$E = 1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

este o expresiune calculabilă prin logaritmi.

Tot astfel (vezi pag. 125):

$$\cos a = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

deci :

(IX)₁

$$E_1 = 1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

Aplicație. 1) $E = 1 - \cos 15^\circ = 2 \sin^2 \frac{15^\circ}{2} = 2 \sin^2 7^\circ 30'$.

$$\log E = \log 2 + 2 \log \sin 7^\circ 30'$$

$$= 0,30103 + 2,23140 = 2,53243$$

$$E = 0,03407$$

Direct: $E = 1 - \cos 15^\circ = 1 - 0,966 = 0,034$.

2) $E_1 = 1 + \cos 73^\circ = 2 \cos^2 \frac{73^\circ}{2} = 2 \cos^2 36^\circ 30'$

$$\log E_1 = \log 2 + 2 \log \cos 36^\circ 30'$$

$$= 0,30103 + 2 \times 1,90518 = 0,11139$$

$$E = 1,29238$$

Prin tabela de valori naturale găsim:

$$E_1 = 1 + \cos 73^\circ = 1 + 0,292 = 1,292$$

Exercițiu. Să se stabilească formulele (IX) și (IX)₁ observând că:
 $1 \pm \cos a = \cos 0^\circ \pm \cos a$, căreia îi putem aplica formulele (III) și (IV).

X. Expresiunile: $E = 1 + \sin a$ și $E_1 = 1 - \sin a$.

Se pot reduce la precedentele, scriind:

$$E = 1 + \sin a = 1 + \cos (90^\circ - a) = 2 \cos^2 \frac{90^\circ - a}{2}$$

sau:

$$(X) \quad E = 1 + \sin a = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)$$

și:

$$E_1 = 1 - \sin a = 1 - \cos (90^\circ - a) = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)$$

sau:

$$(X)_1 \quad E = 1 - \sin a = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)$$

Aplicații. 1) $E = 1 + \sin 24^\circ = 1 + \cos 66^\circ = 2 \cos^2 33^\circ$

$$\begin{aligned} \log E &= \log 2 + 2 \log \cos 33^\circ \\ &= 0,30103 + 2 \times 1,92359 = 0,14821 \\ E &= 1,406733 \end{aligned}$$

Altfel:

$$E = 1 + \sin 24^\circ = 1 + 0,407 = 1,407$$

2) $E_1 = 1 - \sin 81^\circ = 1 - \cos 9^\circ = 2 \sin^2 4^\circ 30'$

$$\begin{aligned} \log E_1 &= \log 2 + 2 \log \sin 4^\circ 30' \\ &= 0,30103 + 2 \times 2,89464 = 2,09031 \\ E &= 0,012311 \end{aligned}$$

sau prin tabela de valori naturale:

$$E = 1 - \sin 81^\circ = 1 - 0,988 = 0,012$$

Exercițiu. Să se stabilească formulele (X) și (X)₁ observând că $1 \pm \sin a = \sin 90^\circ \pm \sin a$ și aplicând formulele (I) și (II).

Aplicație. Se unește un punct A cu centrul unui cerc O , de rază necunoscută x și se duc tangentele AT și AT' (fig. 75). Tangenta AT face cu dreapta hAh' perpendiculară pe AO , unghiul a . Se cere să se afle x , când se cunoaște $AA' = H$ și $\widehat{h'AT} = a$. (Să se aplice când $H = 510$ m, $a = 72^\circ 15'$).

R: Din triunghiul dreptunghiu OAT avem:

$$OT = OA \sin (90^\circ - a) = OA \cos a$$

sau:

$$x = (x + H) \cos a$$

deci:

$$x(1 - \cos a) = H \cos a$$

$$x = \frac{H \cos a}{1 - \cos a} = \frac{H \cos a}{2 \sin^2 \frac{a}{2}}$$

$$\log x = \log H + \log \cos a + \operatorname{colog} 2 + 2 \operatorname{colog} \sin \frac{a}{2}$$

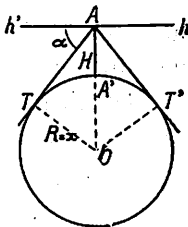


Fig. 75

In cazul numeric avem :

$$\log x = \log 510 \text{ m} + \log \cos 72^{\circ}15' + \operatorname{colog} 2 + 2 \operatorname{colog} \sin 36^{\circ}7'30''$$

$$\log x = 2,34961$$

$$x = 2 \text{ } 3,67 \text{ m}$$

Observare. Această aplicație este utilă în Astronomie pentru calcularea razei x a pământului, când cunoaștem înălțimea H a unui observator deasupra unui loc B de pe pământ și depresiunea orizontului a .

Intrebuintarea logaritmiilor la calculul expresiunilor necalculabile prin logaritmi.

Exemple : 1) Expresiunea :

$$E = \sqrt{285,34} + \sqrt[3]{5867}$$

nu este *calculabilă prin logaritmi*, deoarece ea nu poate fi pusă sub una din formele cărora li se pot aplica logaritmi.

Totuși, putem calcula fiecare termen *in parte* cu ajutorul logaritmilor și aduna apoi rezultatele; se găsește astfel :

$$\log \sqrt{285,34} = 1,22768$$

$$\sqrt{285,34} = 16,892$$

$$\log \sqrt[3]{5867} = 1,25614$$

$$\sqrt[3]{5867} = 18,036$$

deci :

$$E = \sqrt{285,34} + \sqrt[3]{5867} = 34,928$$

2) Expresiunea :

$$E = 2 \sin^2 48^{\circ} - \sqrt[3]{\operatorname{tg} 64^{\circ}}$$

nu este calculabilă prin logaritmi; găsim însă :

$$\log (2 \sin^2 48^{\circ}) = 0,04317$$

$$2 \sin^2 48^{\circ} = 1,1045$$

$$\log \sqrt[3]{\operatorname{tg} 64^{\circ}} = 0,10394$$

$$\sqrt[3]{\operatorname{tg} 64^{\circ}} = 1,2704$$

deci :

$$E = 2 \sin^2 48^{\circ} - \sqrt[3]{\operatorname{tg} 64^{\circ}} = -0,1659$$

Din aceste exemple reiese că putem întrebuința logaritmi și pentru calcularea expresiunilor, care nu se pot transforma în altele *calculabile prin logaritmi*; în acest scop se calculează prin logaritmi diferenții termeni ai expresiunii și apoi se efectuează calculele indicate de semnele ce figurează în expresiunile considerate.

EXEMPLE

EXEMPLUL I. Să se calculeze valoarea expresiunii $\log \frac{1}{1000000}$

Soluție. Pentru a calcula valoarea expresiunii $\log \frac{1}{1000000}$ trebuie să scriem expresiunea în formă de fracție și să calculăm logaritmul numărătorului și al numitorului. Astfel avem:

$$\log \frac{1}{1000000} = \log 1 - \log 1000000$$

Știind că $\log 1 = 0$ și $\log 1000000 = 6$, rezultă că:

$$\log \frac{1}{1000000} = 0 - 6 = -6$$

Deci valoarea expresiunii este -6 .

EXEMPLUL II. Să se calculeze valoarea expresiunii $\log \frac{1000000}{1}$

Soluție. Pentru a calcula valoarea expresiunii $\log \frac{1000000}{1}$ trebuie să scriem expresiunea în formă de fracție și să calculăm logaritmul numărătorului și al numitorului. Astfel avem:

$$\log \frac{1000000}{1} = \log 1000000 - \log 1$$

Știind că $\log 1000000 = 6$ și $\log 1 = 0$, rezultă că:

$$\log \frac{1000000}{1} = 6 - 0 = 6$$

Deci valoarea expresiunii este 6 .

EXEMPLUL III. Să se calculeze valoarea expresiunii $\log \frac{1000000}{1000000}$

Soluție. Pentru a calcula valoarea expresiunii $\log \frac{1000000}{1000000}$ trebuie să scriem expresiunea în formă de fracție și să calculăm logaritmul numărătorului și al numitorului. Astfel avem:

$$\log \frac{1000000}{1000000} = \log 1000000 - \log 1000000$$

Știind că $\log 1000000 = 6$ și $\log 1000000 = 6$, rezultă că:

$$\log \frac{1000000}{1000000} = 6 - 6 = 0$$

Deci valoarea expresiunii este 0 .

R E Z U M A T.

CAP. IX. — FORMULE CALCULABILE PRIN LOGARITMI.

* Prin logaritmi se pot calcula expresiuni formate din monoame legate prin semnele înmulțirii, împărțirii, ridicării la putere și extragerii rădăcinii de un ordin oarecare.

Astfel de expresiuni se numesc *calculabile prin logaritmi*.

* Unele expresiuni formate din monoame, care se adună sau se scad, pot fi transformate în altele calculabile prin logaritmi.

* Exemple de expresiuni trigonometrice, transformabile în altele, calculabile prin logaritmi:

$$(I) \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$(II) \quad \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$(III) \quad \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$(IV) \quad \begin{aligned} \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{q-p}{2} \end{aligned}$$

$$(V) \quad \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin (p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$(VI) \quad \operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin (p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$(VII) \quad \cotg p + \cotg q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}$$

$$(VIII) \quad \cotg p - \cotg q = -\frac{\sin(p-q)}{\sin p \sin q} \\ = \frac{\sin(q-p)}{\sin p \sin q}$$

$$(IX) \quad 1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$(IX)_1 \quad 1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$(X) \quad 1 + \sin a = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{a}{2} \right)$$

$$(X)_1 \quad 1 - \sin a = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{a}{2} \right)$$

E X E R C I Ț I I.

1. Să se transforme expresiunile ce urmează în altele calculabile prin logaritmi și să se afle valorile lor numerice :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sin 11^{\circ}37' + \sin 34^{\circ}43' & \text{b) } \sin 84^{\circ}37' - \sin 23^{\circ}32' \\ \text{c) } \cos 18^{\circ}14' + \cos 63^{\circ}17' & \text{d) } \cos 4^{\circ}52' - \cos 17^{\circ}4' \\ \text{e) } \sin 16^{\circ}4' + \cos 3^{\circ}8' & \text{f) } \cos 34^{\circ}2' - \sin 6^{\circ}39' \end{array}$$

R: a) 0,7709; b) 0,5963; c) 1,3993; d) 0,040432; e) 1,2753; f) 0,7129.

2. La fel pentru expresiunile :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \operatorname{tg} 17^{\circ}12' + \operatorname{tg} 14^{\circ}39' & \text{b) } \operatorname{tg} 35^{\circ}17' - \operatorname{tg} 4^{\circ}3' \\ \text{c) } \operatorname{cotg} 23^{\circ}18' + \operatorname{cotg} 3^{\circ}17' & \text{d) } \operatorname{cotg} 33^{\circ}2' - \operatorname{cotg} 18^{\circ}1' \\ \text{e) } \operatorname{cotg} 14^{\circ}1' - \operatorname{tg} 3^{\circ}43' & \text{f) } \operatorname{tg} 55^{\circ} + \operatorname{cotg} 80^{\circ}42' \end{array}$$

R: a) 0,57095; b) 0,6368; c) 19,754; d) -1,53675; e) 3,9408; f) 1,5919.

3. Să se transforme expresiunile ce urmează în altele, calculabile prin logaritmi și să se afle valorile lor numerice.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 1 + \cos 15^{\circ}30' & \text{b) } 1 - \sin 27^{\circ}34' & \text{c) } 1 + \operatorname{tg} 41^{\circ}32' \\ \text{d) } 1 - \cos 83^{\circ}4' & \text{e) } 1 + \sin 8^{\circ}37' & \text{f) } 1 - \operatorname{tg} 38^{\circ}1' \end{array}$$

R: a) 1,96345; b) 0,5372; c) 1,8857; d) 0,8792; e) 1,1498; f) 0,218245.

4. Să se calculeze prin logaritmi, expresiunile :

$$\text{a) } \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{b) } \sqrt{3} + \operatorname{tg} 18^{\circ} \quad \text{c) } \frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{tg} 73^{\circ} \quad \text{d) } \sqrt{2} + 2 \cos 500^{\circ}$$

Indicație: Se va observa că : a) $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^{\circ}$, $\frac{1}{2} = \sin 30^{\circ}$; b) $\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^{\circ}$;

$$\text{c) } \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30^{\circ}; \text{ d) } 2 + 2 \cos 500^{\circ} = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 500^{\circ} \right).$$

R: a) 1,366; b) 2,05095; c) -2,6934; d) -0,117857, etc.

5. Intr'un triunghi oarecare ABC , se cunosc unghiurile $B = 64^{\circ}13'12''$ și $C = 14^{\circ}28'34''$ (fig. 76); se cere să se calculeze raportul $\frac{h}{a}$ între înălțimea $h=AD$ coborâtă din A pe latura BC și lungimea a , a acestei laturi.

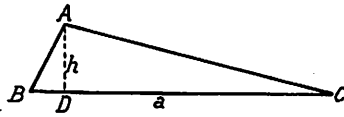


Fig. 76

Indicație: Avem: $h = BD \cdot \operatorname{tg} B$,

$h = DC \cdot \operatorname{tg} C$

deci:

$$\frac{h}{\operatorname{tg} B} + \frac{h}{\operatorname{tg} C} = \frac{h(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)}{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} = a, \text{ etc.}$$

R: 0,229552.

CAPITOLUL X.

REZOLVAREA TRIUNGHIIULUI OARECARE.
RELAȚIUNI TRIGONOMETRICE INTRE ELEMENTELE UNUI
TRIUNGHIU OARECARE.

La rezolvarea triunghiurilor dreptunghice s'a arătat că această operație se face cu ajutorul unor *relațiuni*, care există între laturile și unghiurile triunghiului; aceste relațiuni permit aflarea unora din elementele triunghiului, când se cunosc celelalte.

Tot astfel pentru rezolvarea diferitelor cazuri de triunghiuri oarecari este necesar, mai întâiu, să se stabilească anumite *relațiuni*, care să lege laturile de unghiurile triunghiului oarecare.

CAZUL I.

Se dă: o latură a și unghiurile alăturate B și C și se cere să se calculeze laturile b, c, unghiul A și suprafața S (fig. 77).

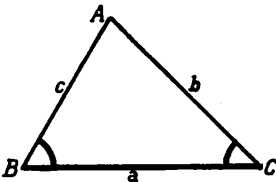


Fig. 77

Să observăm mai întâiu că datele problemei fiind în număr de *trei* (și ne-fiind toate unghiuri) rezolvarea este posibilă (vezi și pag. 7).

In acest scop este necesar să stabilim:

Relațiunile sinusului. Fie CC' înălțimea dusă din vârful unghiului C (fig. 78); din triunghiurile dreptunghice ACC' și BCC' obținem:

$$CC' = b \sin A \quad \text{și} \quad CC' = a \sin B$$

prin urmare:

$$b \sin A = a \sin B$$

sau împărțind ambii membri cu produsul $\sin A \sin B$

$$(1) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Dacă am fi folosit înălțimea BB' și triunghiurile dreptunghice ABB' , CBB' găseam în acelaș mod:

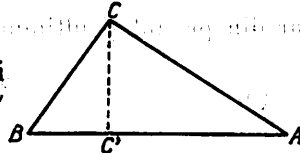


Fig. 78

$$(2) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

iar dacă folosiam înălțimea AA' și triunghiurile dreptunghice BAA' și CAA' , obținem:

$$(3) \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Relațiile (1), (2), (3) se pot scri mai strâns, astfel:

(I)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

care exprimă că *lungimile laturilor unui triunghi oarecare sunt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse.*

Relațiile (I) se numesc și *relațiile sinusului*. Cu ajutorul lor putem acum rezolva triunghiul ABC , când se dau elementele a, B, C .

Intr'adevăr:

$$(4) \quad A = 180^\circ - (B + C)$$

și deoarece unghiurile A și $(B + C)$ sunt suplimentare

$$\sin A = \sin [180^\circ - (B + C)] = \sin (B + C)$$

În primele două rapoarte din (I), cunoaştem pe a , $\sin B$, $\sin A = \sin (B + C)$, deci putem afla a *patra proporţională*, b :

$$(5) \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{a \sin B}{\sin (B + C)}$$

iar din primul şi ultimul raport (I) găsim în acelaş fel:

$$(6) \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{a \sin C}{\sin (B + C)}$$

Formulele (4), (5), (6) sunt *formulele de rezolvare* ale triunghiului în cazul considerat.

Ele ne dau laturile necunoscute b şi c în funcţiune numai de elementele date: a , B , C .

Din (5) şi (6) aflăm pe b şi c cu ajutorul logaritmilor.

$$\log b = \log a + \log \sin B + \text{colog} \sin (B + C)$$

$$\log c = \log a + \log \sin C + \text{colog} \sin (B + C)$$

Calculul suprafeţei S a triunghiului, cu ajutorul elementelor date a , B , C . Avem:

$$S = \frac{BC \times AA'}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2}$$

în care, dacă înlocuim pe c prin valoarea sa din (6), găsim:

$$(7) \quad S = \frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{2 \sin (B + C)} \quad ^1$$

Cu ajutorul logaritmilor avem:

$$\log S = 2 \log a + \log \sin B + \log \sin C + \text{colog} 2 + \text{colog} \sin (B + C).$$

¹⁾ În mod analog putem găsi: $S = \frac{b^2 \sin C \sin A}{2 \sin (C + A)}$ sau $S = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin (A + B)}$ care se întrebunţează când se dă respectiv (b, C, A) sau (c, A, B) .

Observare: Rezolvarea este totdeauna posibilă, deoarece $B + C < 180^\circ$.

Aplicație. Într'un triunghi se dă: $a = 457 \text{ m}$, $B = 62^\circ 14'$, $C = 23^\circ 29'$ (fig. 79). Să se rezolve triunghiul.

Răspuns :

$$\begin{aligned} A &= 180^\circ - (B + C) \\ &= 180 - (62^\circ 14' + 23^\circ 29') \end{aligned}$$

sau

$$A = 94^\circ 17'$$

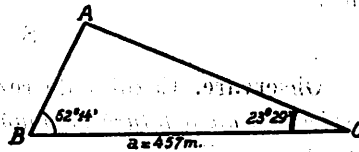


Fig. 79

apoi :

$$b = \frac{a \sin B}{\sin (B + C)} = \frac{457 \sin 62^\circ 14'}{\sin 85^\circ 43'}$$

$$\log b = \log 457 + \log \sin 62^\circ 14' + \operatorname{colog} \sin 85^\circ 43'$$

$$= 2,65992 + 1,94687 + 0,00121 = 2,60800$$

$$b = 405,509 \text{ m.}$$

Tot astfel din relația

$$c = \frac{a \sin C}{\sin (B + C)} = \frac{457 \sin 23^\circ 29'}{\sin 85^\circ 43'}$$

aflăm :

$$\log c = \log 457 + \log \sin 23^\circ 29' + \operatorname{colog} \sin 85^\circ 43'.$$

Observăm că mai avem de aflat numai $\log \sin 23^\circ 29'$ deoarece $\log 457$ și $\operatorname{colog} \sin 85^\circ 43'$ sunt găsiți mai sus, deci :

$$\log c = 2,65992 + 1,60041 + 0,00121 = 2,26154$$

$$c = 182,62 \text{ m.}$$

Pentru aflarea suprafeței scriem :

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)} = \frac{457^2 \sin 62^\circ 14' \sin 23^\circ 29'}{2 \sin 85^\circ 43'}$$

deci :

$$\log S = 2 \log 457 + \log \sin 62^\circ 14' + \log \sin 23^\circ 29' + \operatorname{colog} 2 + \operatorname{colog} \sin 85^\circ 43'$$

toți logaritmi necesari, sunt aflați mai sus; găsim:

$$\log S = 5,31984 + \bar{1},94687 + \bar{1},60041 + \bar{1},69897 + 0,00121$$

$$\log S = 4,56730$$

deci

$$S = 36923,33\text{m}^2$$

Observare. Cazul I de rezolvare, se poate enunța mai general astfel: se dă o latură și două unghiuri oarecare (nu neapărat alăturate laturii a).

Intr'adevăr având două unghiuri putem avea imediat și unghiul al treilea.

CAZUL II.

Se dă: două laturi b , c , și unghiul cuprins A ; se cere latura a , unghiurile B și C și suprafața S (fig. 80).

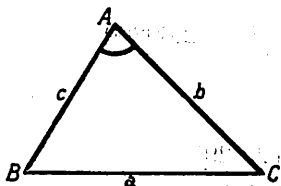


Fig. 80

Să observăm mai întâiu că relațiile sinusului:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

nu ne pot ajuta la rezolvarea triunghiului, deoarece oricum am alege două câte două rapoartele de mai sus, proporțiile astfel formate cuprind două necunoscute; spre exemplu:

1) luând raportul I-u și al II-lea cunoaștem: $\sin A$ și b ; necunoscute sunt a și $\sin B$;

2) luând rapoartele I și III: cunoaștem $\sin A$ și c ; necunoscute sunt a și $\sin C$;

3) luând rapoartele II și III: cunoaștem b și c ; necunoscute sunt $\sin B$ și $\sin C$.

Din această cauză este necesar să stabilim alte relațiuni care să ne permită aflarea unei laturi (a) și a unghiurilor alăturate (B și C) în funcțiune de celelalte laturi (b , c) și unghiul cuprins (A).

Relațiunea lui Pitagora¹⁾ generalizată. Fie un triunghi uoarecare ABC; să ducem înălțimea AA'. In triunghiurile dreptunghice AA'B și AA'C putem scri relațiunile (fig. 81):

$BA' = c \cos B$, $A'C = b \cos C$
pe care, adunându-le membru cu membru, găsim:

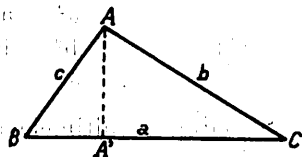


Fig. 81

$$BA' + A'C = c \cos B + b \cos C$$

înșă

$$BA' + A'C = a$$

deci:

(1)

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

Să observăm că ducând înălțimea AA' am putut afla o expresiune a laturii opuse a ; dacă am fi dus înălțimea BB' și am fi repetat calculele de mai sus, găsim, următoarea expresiune pentru latura opusă b :

(2)

$$b = c \cos A + a \cos C.$$

iar dacă foloseam în acelaș mod înălțimea CC', găseam:

(3)

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

Am obținut relațiile:

(II)

$$\begin{cases} a = b \cos C + c \cos B \\ b = c \cos A + a \cos C \\ c = a \cos B + b \cos A \end{cases}$$

¹⁾ Pitagora, filosof și matematician grec din secolul VI înainte de Hristos; s'ar fi născut la Samos.

A fondat o școală a pitagoricienilor, ai cărei elevi erau supuși unei vieți austere. I se atribuie *tabla înmulțirii* și teorema relativă la relația dintre pătratul ipotenușei și suma pătratelor catetelor, într'un triunghi dreptunghi.

Să înmulțim ambii termeni ai primei relații (II) cu a , pe a doua cu b , pe a treia cu c ; găsim :

$$(4) \quad \begin{aligned} a^3 &= ab \cos C + ac \cos B \\ b^3 &= bc \cos A + ba \cos C \\ c^3 &= ca \cos B + cb \cos A \end{aligned}$$

Să adunăm ultimele două egalități membru cu membru :

$$b^2 + c^2 = 2 bc \cos A + ac \cos B + ab \cos C$$

și să scădem această relație din prima; obținem :

$a^2 - b^2 - c^2 = ab \cos C + ac \cos B - 2 bc \cos A - ac \cos B - ab \cos C$
 reducând termenii asemenea și oprind în primul membru numai pe a^2 , avem :

(5)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 bc \cos A$$

In mod analog, găsim relațiile :

(6)

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 ac \cos B$$

și

(7)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 ab \cos C$$

Dacă unghiul $A = 90^\circ$, triunghiul ABC este dreptunghiu în A, iar relațiunea (5) ia forma : $a^2 = b^2 + c^2$, care este relația lui *Pitagora*; această relație dă lungimea unei laturi (ipotenusei a) când se cunosc celelalte două laturi (catetele b și c) și unghiul cuprins $A = 90^\circ$; relațiunile (5), (6), (7), permit acelaș lucru pentru cazul unui triunghi oarecare. De aci numele dat relațiilor (5), sau (6), sau (7) de relația lui *Pitagora* generalizată.

Observare. Formula (2) se poate obține din (1), înlocuind literele din șirul

(α) $a, b, c, \quad A, B, C$

respectiv prin literele din șirul

(β) $b, c, a, \quad B, C, A$

iar formula (3) se poate obține înlocuind literele din șirul (β) prin literele din șirul (γ):

$$(\gamma) \quad c, a, b, \quad C, A, B.$$

Tot astfel se poate obține formula (6) din (5) și formula (7) din (6).

Această operație s'a putut face, deoarece am notat elementele triunghiului în mod simetric: la unghiul A se opune latura a , la unghiul B latura b , etc. Dacă am înșirui pe un cerc oarecare (fig. 82) într'o ordine de parcurs, (spre ex. în sensul săgeții) literele în ordine alfabetică, operația de mai sus revine la a înlocui o literă cu litera următoare pe care o întâlnim pe cerc; din această cauză, această operație se chiamă și *permutare circulară*.

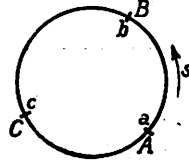


Fig. 82

Permutările circulare, sunt foarte folosite în calcule: ele ne dau posibilitatea ca în figuri, în care am avut grija să notăm elementele în mod simetric, și în care există mai multe relațiuni asemănătoare, să stabilim numai una din ele, iar pe celelalte să le deducem prin permutări circulare.

Putem acum rezolva triunghiul ABC, în cazul când cunoaștem două laturi și unghiul cuprins.

Astfel, dacă se cunosc laturile b , c , și unghiul A , formula (5) ne dă pe a ; atunci formulele (6) și (7), în care se cunosc toate laturile, ne dau unghiurile B și C; din (6) avem:

$$(8) \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

iar din (7)

$$(9) \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Formulele: (5) care dă latura a , (8) și (9) care dau unghiurile B și C nu sunt calculabile prin logaritmi!

¹⁾ În mod analog procedăm dacă se dă elementele: (c, a, B) sau (a, b, C).

Ele sînt totuși întrebuințate uneori în calcule, servindu-ne în aplicarea lor, de *tabelele de valori naturale*.

Exemple. 1. Intr'un triunghi ABC se dă : $b = 300$ m, $c = 250$ m,

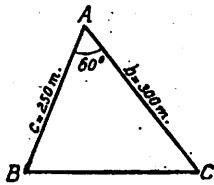


Fig. 83

$A = 60^\circ$; se cere a , B , C (fig. 83).

Răspuns: Aplicând formula (5) avem :

$$a^2 = 300^2 + 250^2 - 2 \times 300 \times 250 \cos 60^\circ$$

sau

$$a^2 = 90000 + 62500 - 75000 = 77500$$

$$a = \sqrt{77500} = 278,874 \text{ m.}$$

Din formula (8) găsim :

$$\cos B = \frac{62500 + 77500 - 90000}{2\sqrt{77500} \times 250} = 0,359$$

iar din *tabela de valori naturale* aflăm : $B = 68^\circ 54' 4''$

Din formula (9) avem :

$$\cos C = \frac{77500 + 90000 - 62500}{2\sqrt{77500} \times 300} = 0,629$$

iar din *tabela de valori naturale* găsim : $C = 51^\circ$

suma $A + B + C = 60^\circ + 68^\circ 54' 4'' + 51^\circ = 179^\circ 54' 4''$ în loc de 180° .

2. Intr'un paralelogram se cunosc lungimile laturilor $AB = 460$ m. $AC = 180$ m. și unghiul cuprins $BAC = 30^\circ$; se cere să se afle lungimea diagonalei : $d = AD$ și unghiurile ei cu laturile AB și AC : $\alpha = \widehat{BAD}$ și $\beta = \widehat{CAD}$ (fig. 84).

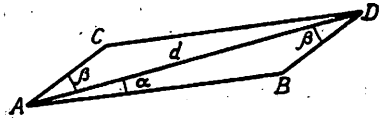


Fig. 84

Răspuns: Să considerăm triunghiul ABD , în care cunoaștem laturile :

$$AB = 460 \text{ m, } BD = AC = 180 \text{ m}$$

și unghiul cuprins : $\widehat{ABD} = 180^\circ - A = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Avem: $\widehat{BAD} = \alpha$ și $\widehat{ADB} = \beta$; ne găsim deci în cazul II de rezolvare a unui triunghi.

Prin aplicarea formulelor stabilite mai sus, obținem:

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 + BD^2 - 2 AB \cdot BD \cdot \cos \widehat{ABD} \\ &= 460^2 + 180^2 - 2 \times 460 \times 180 \cos 150^\circ ; \quad \left(\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 211600 + 32400 + 360 \times 460 \times 0,866 \\ &= 387409,60 \end{aligned}$$

Deci:

$$AD = \sqrt{387.409,60} = 622,4$$

Din relația $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 AB \cdot AD \cos \alpha$, scoatem:

$$\cos \alpha = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 AB \cdot AD} = \frac{460^2 + 622,4^2 - 180^2}{2 \times 460 \times 622,4}$$

$$\cos \alpha = 0,989$$

$$\alpha = 8^\circ 30'$$

iar din relația:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 AD \cdot BD \cos \beta$$

obținem:

$$\cos \beta = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2 AD \cdot BD} = \frac{622,4^2 + 180^2 - 460^2}{2 \times 622,4 \times 180}$$

$$\cos \beta = 0,929$$

$$\beta = 21^\circ 40'$$

Avem că suma: $150^\circ + 8^\circ 30' + 21^\circ 40' = 180^\circ 10'$ în loc de 180° .

Observare. În cazul când într'un triunghi ABC se dă: b, c, A și se cere a, B, C , putem proceda și astfel; aflăm pe a , cu formula (5):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 bc \cos A$$

iar pentru aflarea unghiurilor B și C folosim relațiile sinusului:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Din primele două rapoarte scoatem $\sin B$:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

în care b și A sunt date, iar a , calculat mai sus; apoi din prima și ultima relație avem:

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a}$$

în care c și A sunt date, iar a este calculat.

În modul acesta putem calcula unghiurile B și C , fie prin tabela de valori naturale, fie prin tabela de logaritmi.

Prin aplicarea formulelor (8) și (9), calculul cu logaritmi nu era posibil.

Aplicație. Într'un triunghi ABC , se cunoaște: $a = 40$ m, $b = 70$ m, $C = 30^\circ$. Se cere: c , A , B (fig. 85).

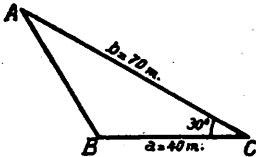


Fig. 85

Răspuns:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2 ab \cos C \\ &= 40^2 + 70^2 - 2 \times 40 \times 70 \cos 30^\circ \\ &= 1600 + 4900 - 2800 \sqrt{3} = 1656 \\ c &= 40,69 \end{aligned}$$

Pentru a afla unghiurile A și B , scriem relațiile sinusului:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

sau

$$\frac{40}{\sin A} = \frac{70}{\sin B} = \frac{40,69}{\sin 30^\circ}$$

Din primul și ultimul raport avem:

$$\sin A = \frac{40 \sin 30^\circ}{40,69} = 0,491$$

în tabela de valori naturale aflăm:

$$A = 29^\circ 25' 43''$$

Din rapoartele 2 și 3 găsim :

$$\sin B = \frac{70 \sin 30^\circ}{40,69} = 0,860$$

iar cu tabela de valori naturale, avem :

$$B = 120^\circ 42'$$

avem astfel :

$$A + B + C = 180^\circ 7' 43'', \text{ în loc de } 180^\circ.$$

Dacă folosim logaritmii obținem :

$$\begin{aligned} \log \sin A &= \log 20 + \operatorname{colog} 40,69 = \bar{1},69154 \\ A &= 29^\circ 26' 26'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin B &= \log 35 + \operatorname{colog} 40,69 = \bar{1},93458 \\ B &= 120^\circ 39' 53''. \end{aligned}$$

Observare. Inconvenientul procedeelor arătate mai sus, este că aflarea unghiurilor necunoscute B și C se face folosind valoarea laturii calculate (a); prin urmare, dacă aceasta este greșit aflată, greșite vor fi și valorile lui B și C.

Pentru a se remedia acest inconvenient vom stabili o altă serie de relațiuni, care au și avantajul de a fi calculabile prin logaritmi.

Formula lui Neper¹⁾. Se știe că dacă avem o proporție :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

putem deduce din ea o altă proporție, scriind :

$$\frac{A - B}{A + B} = \frac{C - D}{C + D}$$

care are ca termeni diferența și suma termenilor rapoartelor dela început.

Din relațiile sinusului :

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

¹⁾ Vezi pag. 140.

obținem :

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}$$

și aplicând proprietatea amintită mai sus :

$$\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{b - c}{b + c}$$

Inlocuind în primul membru, diferența și suma sinusurilor prin formulele calculabile prin logaritmi avem :

$$\frac{2 \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2}}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \frac{b-c}{b+c}$$

sau

$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} \operatorname{cotg} \frac{B+C}{2} = \frac{b-c}{b+c}$$

Suma unghiurilor A, B, C, fiind 180°, avem :

$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

deci :

$$\operatorname{cotg} \frac{B+C}{2} = \operatorname{cotg} \left(90^\circ - \frac{A}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

deci :

$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{b-c}{b+c}$$

sau împărțind ambii termeni cu $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ și observând că

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} = \operatorname{cotg} \frac{A}{2}, \text{ găsim formula lui Neper :}$$

(10)

$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$$

Prin permutări circulare, obținem și formulele analoge:

$$(11) \quad \boxed{\operatorname{tg} \frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a} \operatorname{cotg} \frac{B}{2}}$$

$$(12) \quad \boxed{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}}$$

Formulele (10), (11) și (12) sunt calculabile prin logaritmi.

Avem: $\log \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \log (b-c) + \operatorname{colog} (b+c) + \log \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$, etc.

Revenind la rezolvarea triunghiului ABC, când se dă două laturi (b , c) și unghiul cuprins (A), să observăm că formula (10) cuprinde în membrul al 2-lea numai cantități cunoscute; vom putea afla astfel semi-diferența $\frac{B-C}{2}$ a unghiurilor B și C și deci

pe $B-C$; avem pe de altă parte, cunoscută suma $B+C=180^\circ-A$.

Va rezulta de aci B și C .

Pentru aflarea laturii a putem, sau să aplicăm relațiile sinusului:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

în care $\sin A$, b sunt date iar unghiul B calculat; aflarea lui a se poate face astfel tot prin logaritmi; sau putem aplica formula:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

care ne dă pe a , în funcțiune numai de valorile date (b , c , A), însă nu printr'un calcul cu logaritmi.

Aplicație. Pe o șosea trec două vehicule, B și C . La un moment anumit ele se găesc față de un punct A din plan, la distanțele $BA = 1700$ m și $CA = 3970$ m, iar unghiul BAC măsurat în acel moment de un observator așezat în A , este de $39^\circ 48'$.

Se cere să se calculeze distanța $BC = a$ dintre vehicule și unghiurile B și C (fig. 86).

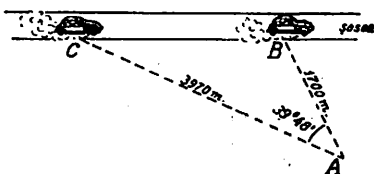


Fig. 86

Răspuns: Avem de rezolvat un triunghi ABC în care cunoaștem două laturi AB și AC și unghiul cuprins A ; să aplicăm formula lui Neper:

$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{avem: } b - c &= 3970 - 1700 = 2270 & \frac{A}{2} &= \frac{39^\circ 48'}{2} = 19^\circ 54' \\ b + c &= 3970 + 1700 = 5670 & & \end{aligned}$$

$$\text{deci: } \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{2270}{5670} \operatorname{cotg} 19^\circ 54'$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \log 2270 + \operatorname{colog} 5670 + \log \operatorname{cotg} 19^\circ 54'$$

$$\frac{B-C}{2} = 47^\circ 52' 53''$$

$$B-C = 95^\circ 45' 46''$$

$$B + C = 180^\circ - A = 180^\circ - 39^\circ 48' = 140^\circ 12'$$

relațiuni care ne dau:

$$B = 117^\circ 58' 53'' \quad C = 22^\circ 13' 7''$$

Pentru aflarea lui $BC = a$, scriem:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{3970 \sin 39^\circ 48'}{\sin 117^\circ 58' 53''}$$

Calculând prin logaritmi găsim:

$$\log a = \log 3970 + \log \sin 39^\circ 48' + \operatorname{colog} \sin 117^\circ 58' 53''$$

deci:

$$a = 2877,6$$

Altfel: Din formula lui *Pitagora* generalizată, avem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 3970^2 + 1700^2 - 2 \times 3970 \times 1700 \cos 39^\circ 48'$$

Calculând cu tabela de valori naturale găsim:

$$a^2 = 8.284.436 \quad a = 2878$$

care diferă de valoarea aflată mai sus, cum era și de așteptat.

Observare. In formula:

$$(1) \quad \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$$

dacă $b < c$, înmulțim ambii membri cu -1 și observăm că:

$$-\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \operatorname{tg} \frac{C-B}{2}$$

găsim:

$$(1) \quad \operatorname{tg} \frac{C-B}{2} = \frac{c-b}{c+b} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$$

In aplicații, se dă b , c și A , deci se poate ști dela început dacă $b > c$ sau $b < c$. In primul caz formula lui *Neper* se scrie sub forma (1).

Calculul suprafeței S a triunghiului cu ajutorul elementelor b , c , A .

Avem (vezi fig. 78):

$$S = \frac{AB \times CC'}{2}$$

dar in triunghiul dreptunghiu ACC' :

$$CC' = AC \sin A = b \sin A$$

deci:

$$S = \frac{bc \sin A}{2}$$

CAZUL III:

Se dă laturile a , b , c , și se cere să se afle unghiurile A , B , C , și suprafața S (fig. 87).

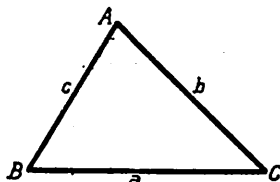


Fig. 87

Pentru ca problema să fie posibilă trebuie ca oricare dintre laturile date să fie mai mică decât suma celorlalte două și mai mare decât diferența lor.

Problema se poate rezolva cu ajutorul relațiilor:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

din care scoatem:

$$(1) \quad \begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

aceste formule nu pot fi făcute *calculabile prin logaritmi*; aflăm numeric valorile lui $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ și apoi, fie cu tabela de logaritmi, fie cu tabela de valori naturale, găsim pe A , B , C .

Odată cunoscute laturile și unghiurile putem afla și suprafața.

O verificare este ca suma unghiurilor aflate ($A + B + C$) să fie egală cu 180° .

Aplicație. Se dă: $a = 7 \text{ m}$, $b = 9,5 \text{ m}$, $c = 6 \text{ m}$ și se cerc unghiurile: A , B , C .

Răspuns: Avem din formulele (1) de mai sus:

$$\cos A = \frac{9,5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \times 9,5 \times 6} = 0,677$$

cu tabela de valori naturale găsim: $A = 47^\circ 25'$

$$\cos B = \frac{6^2 + 7^2 - 9,5^2}{2 \times 6 \times 7} = -0,062$$

cu tabela de valori naturale găsim: $B = 93^\circ 33' 20''$

$$\cos C = \frac{7^2 + 9,5^2 - 6^2}{2 \times 7 \times 9,5} = 0,776$$

cu tabela de valori naturale aflăm: $C = 39^\circ 6'$.

Suma unghiurilor aflate cu tabela de valori naturale:

$$A + B + C = 180^\circ 4' 20''$$

Rezolvarea triunghiului prin formule calculabile prin logaritmi când se dă cele trei laturi. Formulele de mai sus, pot fi făcute calculabile prin logaritmi, astfel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

să adunăm la ambii membri unitatea:

$$1 + \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1 = \frac{b^2 + c^2 + 2bc - a^2}{2bc}$$

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

sau

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$$

Să notăm pentru prescurtare perimetrul cu $2p$:

$$a + b + c = 2p$$

deci

$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$$

deci:

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$$

sau

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

Observare. S'a luat semnul plus în fața radicalului deoarece $A < 180^\circ$ deci $\frac{A}{2} < 90^\circ$.

Prin permutări circulare găsim expresii analoge pentru $\cos \frac{B}{2}$,
 $\cos \frac{C}{2}$.

Obținem astfel formulele:

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \\ \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \end{array} \right. \text{ în care } \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{a+b+c}{2} \\ p-a = \frac{b+c-a}{2} \\ p-b = \frac{c+a-b}{2} \\ p-c = \frac{a+b-c}{2} \end{array} \right.$$

care sunt calculabile prin logaritmi și care ne dau unghiurile $\frac{A}{2}$,

$\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ în funcție de laturile a , b , c .

Putem afla și $\sin \frac{A}{2}$, $\sin \frac{B}{2}$, $\sin \frac{C}{2}$; am găsit mai sus:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

sau:

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc} = \frac{4(p-b)(p-c)}{2bc}$$

sau

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

de unde formulele:

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}} \\ \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \end{array} \right.$$

care sunt *calculabile prin logaritmi* și ne dau și ele, unghiurile $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ în funcțiune de laturile a , b , c .

Din formulele (I) și (II) putem găsi expresiile lui $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$ și $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$; într'adevăr:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}$$

de unde, formulele calculabile prin logaritmi:

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{array} \right.$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \left[\log(p-b) + \log(p-c) + \operatorname{colog} p + \operatorname{colog}(p-a) \right], \text{ etc.}$$

Observare. Care din formulele (I), (II), (III), le aplicăm în calcule?

Am putea să ne servim de oricare din ele, deoarece fiecare din aceste formule ne dau unghiurile $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$.

Formulele (III) sunt însă mai practice și iată pentru ce:

Aplicând formulele (I) trebuie să căutăm în logaritmi: $\log p$, $\log(p-a)$, $\log(p-b)$, $\log(p-c)$, $\log a$, $\log b$, $\log c$, adică șapte logaritmi.

Aplicând formulele (II) trebuie să căutăm în logaritmi: $\log(p-a)$, $\log(p-b)$, $\log(p-c)$, $\log a$, $\log b$, $\log c$, adică șase

logaritmi, pe când dacă aplicăm formula (III) nu vom căuta decât patru logaritmi și anume:

$$\log p, \log(p-a), \log(p-b), \log(p-c).$$

Un al doilea motiv pentru care sunt mai practice formulele (III) s'a arătat la explicarea tabelelor trigonometrice.

Expresiunea suprafeței triunghiului în funcțiune de laturi.

S'a stabilit la pag. 186 formula:

$$S = \frac{bc \sin A}{2}$$

însă

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

și înlocuind $\sin \frac{A}{2}$ și $\cos \frac{A}{2}$ prin formulele stabilite mai sus, găsim:

$$S = bc \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

sau

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Dacă aplicăm logaritmi, obținem:

$$\log S = \frac{1}{2} \left[\log p + \log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c) \right].$$

Aplicație. Să se rezolve un triunghi când se dă laturile:

$$a = 302,7 \text{ m}, \quad b = 537,9 \text{ m}, \quad c = 420,8 \text{ m}.$$

R: Calculul se așează astfel:

$$2p = a + b + c = 1261,4$$

$p = 630,7$	$\log p = 2,79982,$	$\text{colog } p = \bar{3},20018$
$p - a = 328$	$\log(p-a) = 2,51587,$	$\text{colog}(p-a) = \bar{3},48413$
$p - b = 92,8$	$\log(p-b) = 1,96755,$	$\text{colog}(p-b) = \bar{2},03245$
$p - c = 209,9$	$\log(p-c) = 2,32201,$	$\text{colog}(p-c) = \bar{3},67799$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1,96755 + 2,32201 + \bar{3},20018 + \bar{3},48413}{2} = \frac{\bar{2},97387}{2} = \bar{1},48693$$

$$\frac{A}{2} = 17^{\circ}3'32'', \quad \hat{A} = 34^{\circ}7'4''$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{2,51587 + 2,32201 + \bar{3},20018 + \bar{2},05245}{2} = \frac{0,07051}{2} = 0,03526$$

$$\frac{B}{2} = 47^{\circ}19'24'', \quad \hat{B} = 94^{\circ}38'48''$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{2,51587 + 1,96755 + \bar{3},20018 + \bar{3},67799}{2} = \frac{\bar{1},36159}{2} = \bar{1},68079$$

$$\frac{C}{2} = 25^{\circ}37'4'', \quad \hat{C} = 51^{\circ}14'8''$$

Ca verificare, facem suma:

$$A + B + C = 34^{\circ}7'4'' + 94^{\circ}38'48'' + 51^{\circ}14'8'' = 180^{\circ}$$

Pentru suprafața S a triunghiului avem:

$$\log S = \frac{1}{2} \left[\log p + \log (p - a) + \log (p - b) + \log (p - c) \right] = \frac{9,60525}{2} = 4,80262$$

$$S = 63477 \text{ m}^2.$$

CAZUL IV.

Se dă două laturi: a , c , și unghiul A , opus uneia din ele (fig. 88).

Să reamintim mai întâiu rezolvarea grafică a acestui caz.

Deosebim trei cazuri:

1. unghiul $A < 90^{\circ}$; se construiește unghiul dat A și se ia pe una din laturi: $AB = c$ (lungime dată) apoi din B ca centru

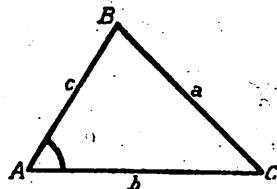


Fig. 88

cu o rază egală cu latura dată a , descriem un arc de cerc (fig. 89).

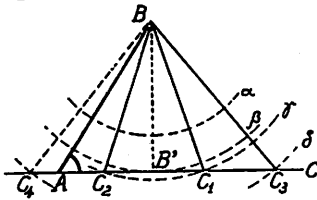


Fig. 89

Se pot întâmpla următoarele cazuri :

a) arcul de cerc (α) să nu taie latura AC a unghiului : *nici o soluție.*

b) arcul de cerc (β) să fie tangent laturii AC ; avem ca soluție triunghiul dreptunghiu ABB' .

c) arcul de cerc (γ) taie latura AC în punctele C_1 și C_2 , ambele situate la dreapta lui A ; acest caz se întâmplă dacă :

$$BB' < a < AB = c$$

avem *două soluții* : triunghiurile ABC_1 și ABC_2 .

d) arcul de cerc (δ) taie latura AC în C_3 și prelungirea ei în C_4 , ceea ce se petrece dacă

$$BB' < a > AB = c$$

În acest caz obținem o singură soluție, triunghiul ABC_3 , deoarece triunghiul ABC_4 nu are unghiul A dat, ci suplementul lui :

$$C_4AB = 180^\circ - A.$$

Se vede de aci că dela început trebuie să cercetăm care sunt valorile relative ale lungimilor a , c și a perpendicularei $BB' = c \sin A$, ca să știm în ce caz ne aflăm.

Exemple: 1. Se dă : $A = 30^\circ$, $a = 35$ m, $c = 58$ m. (fig. 90).

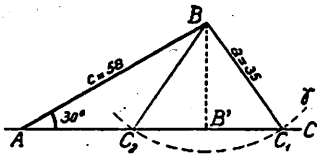


Fig. 90

Avem : $a = 35$ m, $c = 58$ m, $BB' = c \sin A = 58 \sin 30^\circ = 29$ m. deci $a > BB'$ și $a < c$.

Vom avea două soluții, un triunghi ABC_1 , și un altul ABC_2 (cazul γ).

2. $A = 60^\circ$, $a = 230$ m, $c = 116$ m (fig. 91).

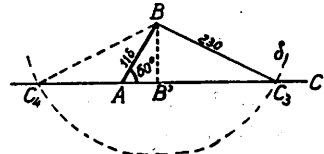


Fig. 91

Avem :

$$BB' = c \sin A = 116 \frac{\sqrt{3}}{2} = 100,34$$

deci $BB' < a > c$.

Ne găsim în cazul (δ) cu o singură soluție: triunghiul ABC_3 .

3. Se dă: $A = 30^\circ$, $a = 9,14$ m, $c = 18,28$ m (fig. 92).

Avem :

$$BB' = c \sin A = 18,28 \sin 30^\circ = 9,14 \text{ m}$$

deci

$$a = \overline{BB'}$$

singura soluție este un triunghi dreptunghiu $AB'B$ (cazul β).

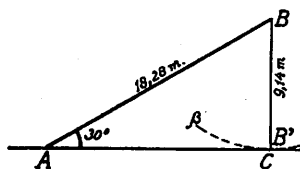


Fig. 92

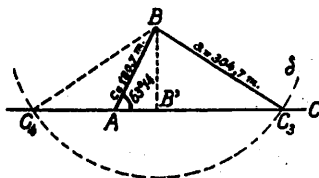


Fig. 93

4. Să rezolvim efectiv următorul triunghi : se dă $A = 63^\circ 14'$; $a = 304,7$ m, $c = 180,7$ m (fig. 93).

Procedând ca mai sus găsim :

$$BB' = c \sin A$$

$$\log BB' = \log 180,7 + \log \sin 63^\circ 14' = 2,25696 + \bar{1},95078 = 2,20774$$

deci :

$$BB' = 161,34 \text{ m}$$

se vede că :

$$BB' < a > c$$

ne găsim deci în cazul (δ) ; vom avea o singură soluție.

Pentru rezolvare, folosim relațiile sinusului :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

din care scoatem :

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a}$$

deci

$$\begin{aligned} \log \sin C &= \log c + \log \sin A + \operatorname{colog} a \\ &= \log 180,7 + \log \sin 63^\circ 14' + \operatorname{colog} 304,7 \\ &= 2,25696 + \bar{1},95078 + \bar{3},51613 = \bar{1},72387. \end{aligned}$$

Unghiul \widehat{AC}_3B fiind ascuțit avem :

$$C = 31^\circ 58' 18''.$$

Rezultă :

$$\begin{aligned} B &= 180^\circ - A - C = 180^\circ - 63^\circ 14' - 31^\circ 58' 18'' \\ B &= 84^\circ 47' 42'' \end{aligned}$$

iar

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

$$\begin{aligned} \log b &= \log a + \log \sin B + \operatorname{colog} \sin A \\ \log b &= \log 304,7 + \log \sin 84^\circ 47' 42'' + \operatorname{colog} \sin 63^\circ 14' \\ &= 2,48387 + \bar{1},99821 + 0,04922 = 2,53130 \\ b &= 339,86 \end{aligned}$$

Pentru a afla suprafața S a triunghiului avem : (vezi și pag. 185)

$$S = \frac{ac \sin B}{2}$$

$$\begin{aligned} \log S &= \log a + \log c + \log \sin B + \operatorname{colog} 2 \\ &= \log 304,7 + \log 180,7 + \log \sin 84^\circ 47' 42'' + \operatorname{colog} 2 \\ &= 2,48387 + 2,25696 + \bar{1},99821 + \bar{1},69897 \\ &= 4,43801 \\ S &= 27416,25 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

5. Se dă: $A = 63^\circ 15'$, $a = 109 \text{ m}$, $c = 118,4 \text{ m}$.

Se cere \widehat{B} , \widehat{C} , b și S .

Calculul se așează astfel (cazul γ):

Datele problemei.

$$A = 63^{\circ}15'$$

$$a = 109$$

$$c = 118,4$$

Rezultatele calculului.

$$C_1 = 75^{\circ}55'20''$$

$$C_2 = 104^{\circ}4'40''$$

$$AC_1 = 79,805 \text{ m}$$

$$AC_2 = 26,778 \text{ m}$$

$$B_1 = 40^{\circ}49'40''$$

$$B_2 = 75^{\circ}55'20'' - 63^{\circ}15' = 12^{\circ}40'20''$$

$$S_1 = 4218,80 \text{ m}^2$$

$$S_2 = 1415,60 \text{ m}^2$$

Calculul

$$1. \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\begin{aligned} \log \sin C &= \log 118,4 + \log \sin 63^{\circ}15' + \text{colog } 109 \\ &= 2,07335 + \bar{1},95084 + \bar{3},96257 = \bar{1},98676 \end{aligned}$$

$$\hat{C}_1 = 75^{\circ}55'20'' \quad ; \quad \hat{C}_2 = 104^{\circ}4'40''$$

$$2. \quad \frac{AC_1}{\sin 40^{\circ}49'40''} = \frac{109}{\sin 63^{\circ}15'}$$

$$\begin{aligned} \log AC_1 &= \log 109 + \log \sin 40^{\circ}49'40'' + \text{colog } \sin 63^{\circ}15' \\ &= 2,03743 + \bar{1},81544 + 0,04916 \\ &= 1,90203 \end{aligned}$$

$$AC_1 = 79,805 \text{ m.}$$

$$3. \quad \frac{AC_2}{\sin 12^{\circ}40'20''} = \frac{109}{\sin 63^{\circ}15'}$$

$$\begin{aligned} \log AC_2 &= 2,03743 + \bar{1},34119 + 0,04916 \\ &= 1,42778 \end{aligned}$$

$$AC_2 = 26,778 \text{ m.}$$

$$4. \quad s_1 = \frac{118,4 \times 26,778 \times \sin 63^\circ 15'}{2}$$

$$\log s_1 = 2,07335 + 1,42778 + \bar{1},95084 + \bar{1},69897 = 3,15094$$

$$S_1 = 1415,60 \text{ m}^2.$$

$$5. \quad s_2 = \frac{118,4 \times 79,805 \times \sin 63^\circ 15'}{2}$$

$$\log s_2 = 2,07335 + 1,90202 + \bar{1},95084 + \bar{1},69897 = 3,62519$$

$$S_2 = 4218,80 \text{ m}^2$$

2. unghiul $A > 90^\circ$ (fig. 94).

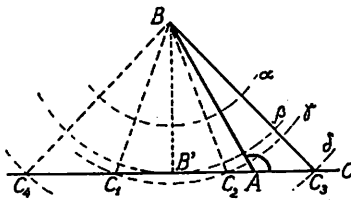


Fig. 94

Se pot întâmpla următoarele :

a) arcul α descris din punctul B ca centru cu raza a , nu taie latura AC; nu avem în acest caz nici o soluție.

b) arcul β descris atinge latura AC în B' ; nici o soluție, deoarece triunghiul dreptunghiu ABB' nu conține unghiul dat $\widehat{BAC} > 90^\circ$, ci suplimentul lui: $\widehat{B'AB} = 180^\circ - A$; acest caz se petrece când $a = BB'$.

c) arcul γ taie latura AC în două puncte C_1 și C_2 , amândouă situate la stânga lui C; nici o soluție, deoarece triunghiurile BAC_1 , BAC_2 nu conțin unghiul $\hat{A} > 90^\circ$. În acest caz :

$$BB' < a < c$$

d) arcul δ taie latura AC în punctele C_3 și C_4 ; avem o singură soluție deoarece numai triunghiul AC_3B conține elementele date a , c , A .

Acest caz se întâmplă când :

$$BB' < a > c$$

Exemple. 1) Se dă: $A = 120^\circ$, $a = 13$ m, $c = 28$ m.

avem:

$$BB' = c \sin A = 28 \sin 120^\circ = 28 \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$$

deci

$$a < BB'$$

nu avem nici o soluție (cazul α).

2) Se dă: $\hat{A} = 135^\circ$, $a = 210\sqrt{2}$ m, $c = 420$ m.

$$\text{Avem: } BB' = c \sin A = 420 \sin 135^\circ = 210\sqrt{2}$$

deci:

$$a = BB'$$

Nu există nici o soluție (cazul β).

3) Se dă: $\hat{A} = 150^\circ$, $a = 23$ m, $c = 39,2$ m.

$$\text{Avem: } BB' = c \sin A = 39,2 \sin 150^\circ = 19,6 \text{ m.}$$

deci

$$BB' < a < c.$$

Nici o soluție: ne găsim în cazul γ .

4) Se dă: $A = 150^\circ$, $a = 130$ m, $c = 80$ m.

$$\text{Avem: } BB' = c \sin A = 80 \sin 150^\circ = 40.$$

deci

$$BB' < a > c$$

avem o singură soluție (cazul δ).

Aplicație. Să se rezolve triunghiul ABC , când se dă:

$$A = 120^\circ 28', \quad a = 128,8 \text{ m}, \quad c = 90,72 \text{ m.}$$

R: Avem:

$$BB' = c \sin A$$

$$\begin{aligned} \log BB' &= \log 90,72 + \log \sin 120^\circ 28' \\ &= 1,95770 + \bar{1},93547 = 1,89317 \end{aligned}$$

$$BB' = 78,19 \text{ m.}$$

Se vede deci că:

$$BB' < a > c.$$

Ne găsim prin urmare în cazul δ , adică vom avea o singură soluție.

Aplicăm relațiunile sinusului:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a}$$

$$\begin{aligned} \log \sin C &= \log c + \log \sin A + \text{colog } a \\ &= \log 90,72 \text{ m} + \log \sin 120^\circ 28' + \text{colog } 128,8 \text{ m} \\ &= 1,95770 + \bar{1},93547 + \bar{3},89008 \\ &= \bar{1},78325 \end{aligned}$$

$$C = 37^\circ 22' 45''.$$

$$\text{Apoi: } B = 180^\circ - A - C = 180^\circ - 120^\circ 28' - 37^\circ 22' 45''$$

$$\hat{B} = 22^\circ 9' 15''$$

Observare. Procedând astfel găsim unghiul $\widehat{ABC}_3 = B$ din triunghiul care răspunde chestiunii, deoarece în triunghiul ABC_4 avem: $B = 180^\circ - (180^\circ - 120^\circ 28') - 37^\circ 22' 45''$.

Aflăm apoi pe b :

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

$$\begin{aligned} \log b &= \log 128,8 + \log \sin 22^\circ 9' 15'' + \text{colog } \sin 120^\circ 28' \\ &= 2,10992 + \bar{1},57646 + 0,06453 = 1,75091 \\ b &= 56,3525 \sim 56,35 \text{ m} \end{aligned}$$

Suprafața:
$$S = \frac{ac \sin B}{2}$$

$$\begin{aligned} \log S &= \log 128,8 + \log 90,72 + \log \sin 22^\circ 9' 15'' + \text{colog } 2 \\ &= 2,10992 + 1,95770 + \bar{1},57646 + \bar{1},69897 = 3,34305 \\ S &= 2203,20 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

3. **unghiul $A = 90^\circ$** (fig. 95). În acest caz avem de rezolvat un triunghi dreptunghi ABC în care se cunoaște cateta $AB = c$ și ipotenușa $BC = a$.

Dacă $a < c$, nu avem nici o soluție, deoarece arcul de cerc (a) cu centrul în B și rază a , nu taie latura AC.

Dacă $a = c$, triunghiul dreptunghi se reduce la dreapta ABA, deoarece arcul (β) este tangent la AC în A.

Dacă $a > c$, arcul (γ) taie dreapta AC în două puncte C_1 și C_2 ; obținem două triunghiuri egale, a căror rezolvare s'a arătat la pag. 44 (cap. III).

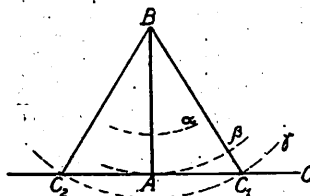


Fig. 95

APLICAȚII ¹⁾.

Să rezolvăm un triunghi ABC în cazurile ce urmează:

Cazul I.

Datele problemei.

$$a = 237,2 \text{ m}$$

$$B = 37^\circ 49'$$

$$C = 49^\circ 5' 17''$$

Rezultatele calculului.

$$\hat{A} = 93^\circ 5' 43''$$

$$b = 145,65 \text{ m}$$

$$c = 179,52 \text{ m}$$

$$s = 13054,24 \text{ m}^2.$$

Formule de rezolvare.

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

$$A = 180^\circ - (B + C) = 93^\circ 5' 43''$$

¹⁾ În aplicații, elevii vor da o deosebită atențiune *redactării* rezolvării triunghiurilor; într-o astfel de redactare trebuie să se vadă clar care sunt *datele* problemei și care sunt *rezultatele*.

Calcul.*Calculul lui b.*

$$\begin{aligned} \log a &= 2,37511 \\ \log \sin B &= \bar{1},78756 \\ \text{colog} \sin A &= 0,00064 \\ \log b &= 2,16331 \\ b &= 145,65 \text{ m.} \end{aligned}$$

Calculul lui c.

$$\begin{aligned} \log a &= 2,37511 \\ \log \sin C &= \bar{1},87836 \\ \text{colog} \sin A &= 0,00064 \\ \log c &= 2,25411 \\ c &= 179,52 \text{ m.} \end{aligned}$$

Calculul suprafeței S.

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)}$$

$$\log S = 4,75022 + \bar{1},78756 + \bar{1},87836 + \bar{1},69897 + 0,00064$$

$$\log S = 4,11575 \quad ; \quad S = 13054,24 \text{ m}^2.$$

Cazul II.*Datele problemei.*

$$\begin{aligned} b &= 338,7 \text{ m} \\ c &= 139,2 \text{ m} \\ A &= 47^\circ 28' \end{aligned}$$

Rezultatele calculului.

$$\begin{aligned} \hat{B} &= 109^\circ 46' 55'' \\ \hat{C} &= 22^\circ 45' 5'' \\ a &= 265,156 \text{ m} \\ s &= 17371,20 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Formule de rezolvare.

$$\text{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cotg \frac{A}{2} \quad \text{și} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

*Calcul.**Calculul unghiurilor B și C.*

$$\text{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cotg \frac{A}{2} = \frac{199,5}{477,9} \cotg 23^\circ 44'$$

$$\log \text{tg} \frac{B-C}{2} = 2,29994 + \bar{3},32066 + 0,35688 = \bar{1},97748$$

$$\frac{B - C}{2} = 43^{\circ}30'55''$$

$$\begin{cases} B - C = 87^{\circ}1'50'' & B = \frac{219^{\circ}33'50''}{2} = 109^{\circ}46'55'' \\ B + C = 132^{\circ}32' & C = \frac{45^{\circ}30'10''}{2} = 22^{\circ}45'5'' \end{cases}$$

Calculul lui a .

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}; \log a = 2,52982 + \bar{1},86740 + 0,02628 = 2,42350$$

$$a = 265,156 \text{ m.}$$

Prin formulele dela pag. 176

$$a^2 = 114.717,69 + 19376,64 - 63742,798 = 70351,532$$

$$a = \sqrt{70351,532} = 265,238 \text{ m.}$$

Calculul suprafeței S .

$$S = \frac{bc \sin A}{2}$$

$$\log S = 2,52982 + 2,14364 + \bar{1},86740 + \bar{1},69897 = 4,23983$$

$$S = 17371,20 \text{ m}^2$$

Cazul **III**.

Datele
problemei
 $a = 40,73 \text{ m}$
 $b = 85,41 \text{ m}$
 $c = 90,08 \text{ m.}$

Rezultatul calculului.

prin logaritmi

cu valori naturale

$$A = 26^{\circ}40'10''$$

$$\cos A = 0,893$$

$$A = 26^{\circ}45'$$

$$B = 70^{\circ}15'8''$$

$$\cos B = 0,338$$

$$B = 70^{\circ}15'$$

$$C = 83^{\circ}4'9''$$

$$\cos C = 0,121$$

$$C = 83^{\circ}3'20''$$

$$A + B + C =$$

$$A + B + C = 180^{\circ}3'20''$$

$$179^{\circ}59'47''$$

$$S = 1726,68 \text{ m}^2$$

Formule de rezolvare.

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Calculul.

p=108,11	log p = 2,03387	colog p = $\bar{3},96613$
p-a = 67,38	log (p-a) = 1,82853	colog (p-a) = $\bar{2},17147$
p-b = 22,70	log (p-b) = 1,35603	colog (p-b) = $\bar{2},64397$
p-c = 18,03	log (p-c) = 1,25600	colog (p-c) = $\bar{2},74400$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1,35603 + 1,25600 + \bar{3},96613 + \bar{2},17147}{2} = \frac{\bar{2},74963}{2}$$

$$= \bar{1},37481; \quad \frac{\hat{A}}{2} = 13^{\circ}20'5''$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{1,82853 + 1,25600 + \bar{3},96613 + \bar{2},64397}{2} = \frac{\bar{1},69463}{2}$$

$$= \bar{1},84731; \quad \frac{\hat{B}}{2} = 35^{\circ}7'44''$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1,82853 + 1,35603 + \bar{3},96613 + \bar{2},74400}{2} = \frac{\bar{1},89469}{2}$$

$$= \bar{1},94734; \quad \frac{\hat{C}}{2} = 41^{\circ}32'4',8$$

$$\log S = \frac{2,03387 + 1,82853 + 1,35603 + 1,25600}{2} = \frac{6,47443}{2} = 3,23721$$

$$S = 1726,68 \text{ m}^2.$$

CÂTEVA RELAȚIUNI REMARCABILE ÎNTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHIU OARECARE.

RAZA CERCULUI CIRCUMSCRIS.

Fie triunghiul ABC (fig. 96); cercul, care trece prin vârfurile A, B, C, se numește *cercul circumscris* al triunghiului; centrul lui, O, se găsește la intersecția mediatoarelor (perpendiculararelor ridicate pe mijloacele laturilor: OA_1, OB_1, OC_1).

Ne propunem să calculăm raza R a cercului circumscris; ducem diametrul AOA' ; triunghiul ABA' este dreptunghi, deoarece unghiul ABA' este înscris într'un semicerc.

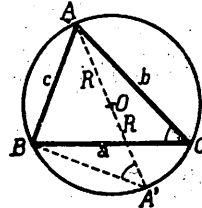


Fig. 96

Avem:

$$AB = AA' \cdot \sin \widehat{AA'B}$$

înșă

$$AB = c; \quad AA' = 2R; \quad \widehat{AA'B} = \widehat{ACB} = \widehat{C}$$

deci

$$c = 2R \sin C$$

sau

$$R = \frac{c}{2 \sin C}$$

Dacă ducem diametrul BOB' sau COB' am fi găsit:

$$R = \frac{a}{2 \sin A} \quad \text{sau} \quad R = \frac{b}{2 \sin B}$$

rezultă de aci:

$$(1) \quad R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}$$

Avem deci:

$$(2) \quad \boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$

adică am regăsit relația sinusurilor și că: *valoarea comună a raportelor dintre lungimea unei laturi și sinusul unghiului opus este egală cu diametrul cercului circumscris triunghiului.*

Altă expresiune pentru R; s'a stabilit (pag. 185) formula :

$$S = \frac{ab \sin C}{2}$$

(S = suprafața triunghiului ABC), însă;

$$\frac{c}{\sin C} = 2R$$

deci

$$\sin C = \frac{c}{2R}$$

valoare, pe care înlocuind-o în expresiunea lui S, aflăm:

$$(3) \quad S = \frac{abc}{4R}$$

sau

(4)

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Formula (3) ne dă suprafața triunghiului în funcțiune de laturile a , b , c , și raza R a cercului circumscris, iar formula (4) ne dă raza cercului circumscris R în funcțiune de laturile triunghiului și suprafața S .

Observare. Să nu uităm că un triunghi este determinat când se dau trei elemente (nu toate unghiuri).

Rezultă că în membrul al 2-lea din formulele (3) și (4), numai trei elemente se pot da *după voie* (arbitrar), al patrulea rezultă.

Astfel, în formula (3), dacă ne dăm laturile a , b , c , raza R a cercului circumscris *rezultă* deoarece aflăm cu ajutorul lui a , b , c , unghiurile (vezi cazul III de rezolvare a triunghiului oarecare) și odată determinate unghiurile, avem și pe R , prin formulele (1).

Tot așa în formula (4), dacă avem date a , b , c , S rezultă (vezi pag. 190):

iar

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$(4)_1 \quad R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Pentru a calcula prin logaritmi, fie pe S fie pe R , avem din formula (3):

$$\log S = \log a + \log b + \log c + \text{colog } 4 + \text{colog } R$$

iar din formulele (4) și (4)₁:

$$\log R = \log a + \log b + \log c + \text{colog } 4 + \text{colog } S$$

$$\log R = \log a + \log b + \log c + \text{colog } 4 + \frac{1}{2} \left[\text{colog } p + \text{colog } (p-a) + \text{colog } (p-b) + \text{colog } (p-c) \right]$$

Aplicații. 1. Să se calculeze raza R a cercului circumscris unui triunghi ABC , în care se cunoaște:

$$a = 397,8 \text{ m} \quad B = 48^\circ 39' \quad C = 66^\circ 2'$$

R : Aplicând formulele (1), trebuie să găsim întâiu pe A :

$$A = 180^\circ - 48^\circ 39' - 66^\circ 2' = 65^\circ 19'$$

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{397,8}{2 \sin 65^\circ 19'}$$

$$\log R = \log 397,8 + \text{colog } 2 + \text{colog } \sin 65^\circ 19'$$

$$= 2,59966 + \bar{1},69897 + 0,04161 = 2,34024$$

$$R = 218,89 \text{ m.}$$

2. Intr'un triunghi ABC , se dă laturile:

$$a = 3240 \text{ m}, \quad b = 1975 \text{ m}, \quad c = 3904 \text{ m},$$

și se cere să se calculeze raza R a cercului circumscris.

R : Am putea afla mai întâiu unghiurile A , B , C , prin formulele (III), pag. 189, dar este mai bine să aplicăm direct formula (4)₁ în care figurează numai laturile:

Avem :

$$R = \frac{abc}{4 \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$\log R = \log a + \log b + \log c + \operatorname{colog} 4 + \frac{1}{2} [\operatorname{colog} p + \operatorname{colog} (p-a) + \operatorname{colog} (p-b) + \operatorname{colog} (p-c)].$$

Așezăm calculul astfel :

$$a = 3240$$

$$b = 1975$$

$$c = 3904$$

$$2p = a + b + c = 9119$$

$$p - a = 1319,5$$

$$p - b = 2584,5$$

$$p - c = 655,5$$

$$p = \frac{a + b + c}{2} = 4559,5$$

$$\log a = 3,51055; \quad \log p = 3,65891; \quad \operatorname{colog} p = \bar{4},34109$$

$$\log b = 3,29557; \quad \log (p - a) = 3,12040; \quad \operatorname{colog} (p - a) = \bar{4},87960$$

$$\log c = 3,59151; \quad \log (p - b) = 3,41237; \quad \operatorname{colog} (p - b) = \bar{4},58763$$

$$\text{Suma log.} \quad \log (p - c) = 2,81657; \quad \operatorname{colog} (p - c) = \bar{3},18343$$

$$= 10,39763;$$

$$\frac{1}{2} \text{Suma colog.} = \bar{7},49587$$

$$\text{deci:} \quad \log R = 10,39763 + \bar{1},39794 + \bar{7},49587 = \bar{3},29144$$

$$R = 1956,31 \text{ m.}$$

RAZA CERCULUI INSCRIS.

Cercul tangent la cele trei laturi ale unui triunghi ABC și situat în interiorul lui, se cheamă *cerc înscris* (fig. 97); centrul I al acestui cerc, se găsește la intersecția celor trei bisectoare AA' , BB' , CC' . Fie A_1 , B_1 , C_1 , punctele de contact ale cercului înscris cu laturile triunghiului.

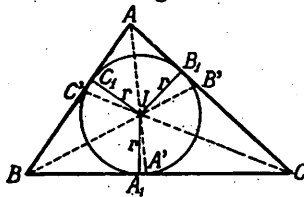


Fig. 97

Ne propunem să aflăm raza r a cercului înscris; unind centrul I cu vârfurile A , B , C , triunghiul se descompune în trei triunghiuri și avem:

$$\text{aria } ABC = \text{aria } IBC + \text{aria } ICA + \text{aria } IAB$$

dar aria $ABC = S$ (suprafața triunghiului)

$$\text{aria } IBC = BC \cdot IA_1 = \frac{a \cdot r}{2}$$

$$\text{aria } ICA = CA \cdot IB_1 = \frac{b \cdot r}{2}$$

$$\text{aria } IAB = AB \cdot IC_1 = \frac{c \cdot r}{2}$$

deci:
$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{(a + b + c) r}{2}$$

însă:
$$a + b + c = 2p$$

deci:

$$(5) \quad S = pr$$

și

$$(6) \quad \boxed{r = \frac{S}{p}}$$

Formula (5) dă suprafața triunghiului ABC în funcțiune de semi-perimetrul p și raza r , iar formula (6) dă raza cercului înscris, când cunoaștem suprafața S și semi-perimetrul p .

Înlocuind în (6) pe S prin expresiunea sa în funcțiune de laturile: $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ găsim:

$$(6)_1 \quad r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Calculul lui r se face cu logaritmi astfel:

$$\log r = \frac{1}{2} \left[\log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c) + \text{colog } p \right]$$

Aplicații. 1. Un triunghi are suprafața $S = 4002 \text{ m}^2$ și perimetrul $2p = 310 \text{ m}$; să se afle raza r a cercului înscris.

R: Aplicând formula (6) găsim:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{4002}{155}$$

$$\begin{aligned} \log r &= \log 4002 + \text{colog } 155 \\ &= 3,60228 + \bar{3},80967 = 1,41195 \\ r &= 25,819 \text{ m.} \end{aligned}$$

2. Intr'un triunghi se dă: $a = 29,5$ m, $b = 37,6$ m, $c = 42,07$ m și se cere raza cercului înscris r .

R: Deoarece cunoaștem laturile vom aplica formula (6)₁:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$\log r = \frac{1}{2} \left[\log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c) + \operatorname{colog} p \right]$$

așezăm calculele astfel:

$$a = 29,5$$

$$b = 37,6$$

$$c = 42,07$$

$$2p = a + b + c = 109,17$$

$$p = 54,585, \quad p - a = 25,085, \quad p - b = 16,985, \quad p - c = 12,515$$

$$\log(p-a) = 1,39941 \quad \log p = 1,73707$$

$$\log(p-b) = 1,23006 \quad \operatorname{colog} p = \bar{2},26293$$

$$\log(p-c) = 1,09734$$

$$\text{Suma logaritm.} = 3,72690$$

$$\log r = \frac{1}{2} 1,98983 = 0,99491 \quad ; \quad r = 9,8835 \text{ m.}$$

RAZELE CEROURILOR EXINSCRISE.

Se numește cerc exinscris unui triunghi ABC, un cerc tangent la una din laturi și la prelungirile celorlalte două; spre exemplu cercul O (fig. 98) care are centrul la intersecția bisectoarei interioare AO cu bisectoarele exterioare BO, CO.

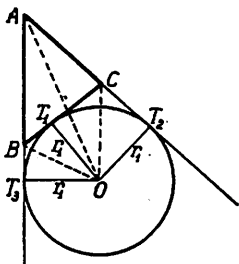


Fig. 98

Fiecare triunghi are deci trei cercuri exinscrise; fie O_1, O_2, O_3 , centrele lor, r_1, r_2, r_3 razele lor.

Să însemnăm cu T_1 punctul de tangență al cercului O cu latura BC, T_3 și T_2 punctele de tangență ale laturilor AB și AC cu acelaș cerc; se știe din geometrie că:

$$AT_3 = AT_2, \quad BT_1 = BT_3, \quad CT_1 = CT_2$$

deci: $AT_2 = AC + T_1C$ și $AT_3 = AB + BT_1$

sau $AT_2 + AT_3 = AB + AC + BC = 2p$

deci $AT_3 = AT_2 = p$

Din triunghiul dreptunghiu OT_3A avem:

$$r_1 = AT_3 \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = p \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

deci:

$$r_1 = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

sau

$$r_1 = \frac{S}{p-a}$$

In mod analog găsim:

$$r_2 = \frac{S}{p-b}$$

$$r_3 = \frac{S}{p-c}$$

Din relațiile:

$$r = \frac{S}{p}, \quad r_1 = \frac{S}{p-a}, \quad r_2 = \frac{S}{p-b}, \quad r_3 = \frac{S}{p-c}$$

obținem:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{p-a}{S}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{p-b}{S}, \quad \frac{1}{r_3} = \frac{p-c}{S}$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{3p - (a+b+c)}{S} = \frac{p}{S}$$

deci:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

adică: *inversa razei cercului înscris este egală cu suma inverselor razelor cercurilor exînscrise.*

REZUMAT.

CAP. X. — REZOLVAREA TRIUNGHIIURILOR OARECARI
RELATIUNI INTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHIU OARECARE.

* Relațiile sinusului :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (R \equiv \text{raza cercului circumscris}).$$

* Relațiile :

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

* Relația lui *Pitagora* generalizată :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

* Relația lui *Neper* :

$$\operatorname{tg} \frac{B+C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a} \operatorname{cotg} \frac{B}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}.$$

* Relațiile lui $\sin \frac{A}{2}$, $\cos \frac{A}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \text{ etc. ; } \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \text{ etc.}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \text{ etc.}$$

* Formule pentru suprafața triunghiului:

$$(1) \quad S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B + C)}, \text{ etc.} \quad (2) \quad S = \frac{bc \sin A}{2}$$

$$(3) \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

* Cazuri de rezolvare ale triunghiurilor oarecari:

I. Se dă: a, B, C . Necunoscute: A, b, c, S .

Formule de rezolvare:

$$A = 180^\circ - (B + C) \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A} \quad C = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B + C)}$$

II. Se dă: b, c, A . Necunoscute: B, C, a, S .

Formule de rezolvare:

$$\operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} B + C = 180^\circ - A \\ B - C = x \end{array} \right.$$

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} \quad S = \frac{bc \sin A}{2}$$

III. Se dă: a, b, c . Necunoscute: A, B, C .

Formule de rezolvare:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \text{ etc.}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

IV. Se dă: a, c, A . Necunoscute: B, C, b, S .

Se calculează întâiu: $h = c \sin A$ și se compară a cu h și c .

Se deosebesc cazurile :

1°. $A < 90^\circ$.

$a < h$: nici o soluție

$a = h$: o soluție

$h < a < c$: 2 soluții

$h < a > c$: 1 soluție

2°. $A = 90^\circ$.

$a < h$: nici o soluție

$a = h$: o soluție redusă la o dreaptă

$a < h > c$: o soluție

3°. $A > 90^\circ$.

$a < h$: nici o soluție

$a = h$: nici o soluție

$h < a < c$: nici o soluție

$h < a > c$: o soluție

Formule de rezolvare:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad S = \frac{bc \sin A}{2}.$$

Notându-se cu a, b, c laturile, S = suprafața triunghiului; p semi-perimetrul lui :

* Raza cercului circumscris (R) :

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

* Raza cercului înscris (r) :

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}.$$

* Razele cercurilor exinscrise (r_1, r_2, r_3) :

$$r_1 = \frac{S}{p-a}, \quad r_2 = \frac{S}{p-b}, \quad r_3 = \frac{S}{p-c}.$$

* Intre razele r, r_1, r_2, r_3 există relațiunea :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}.$$

E X E R C I Ț I I .

1. Să se cerceteze, ce devin relațiile sinusului în cazul triunghiului dreptunghiu?

R: Aceste relații se reduc la: $b = a \sin B$, $c = a \sin C$.

2. Să se rezolve un triunghi oarecare când se dă:

$$\alpha) a = 348\text{m}; B = 49^{\circ}17'; C = 81^{\circ}20'$$

$$\beta) a = 4002\text{m},5; B = 102^{\circ}, A = 34^{\circ}34'$$

R: $\alpha) A = 49^{\circ}23'; b = 347,48\text{ m}; c = 453,21\text{ m}; S = 59771,25\text{ m}^2$.

$\beta) C = 43^{\circ}26'; b = 5694,4\text{ m}; c = 3303\text{ m}; S = 30561,33\text{ m}^2$.

3. Ce devine relația: $\text{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cotg \frac{A}{2}$ în cazul triunghiului dreptunghiuc?

$$\text{R:} \quad \text{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}$$

4. Să se stabilească formula:

$$\text{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cotg \frac{A}{2},$$

folosind proprietatea: unghiul format de o înălțime a unui triunghi și de o bisectoare ce pornesc din același vârf, este egal cu semidiferența unghiurilor din celelalte două vârfuri.

5. Să se calculeze latura c a unui triunghi oarecare ABC , cu ajutorul relației lui Pitagora generalizată, când se cunoaște: $a = 50\text{m}$, $b = 31\text{m}$, $C = 41^{\circ}$.

R: $c = 33,4\text{ m}$.

6. Să se rezolve un triunghi oarecare, când se cunoaște:

$$B = 51^{\circ}30', a = 32\text{m},45, c = 81\text{m},57.$$

R: $b = 66,4157\text{ m}$, $A = 22^{\circ}28'50''$, $C = 106^{\circ}1'10''$, $S = 1035,74\text{ m}^2$.

7. Să se stabilească formula:

$$\text{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

folosind expresiunea unei bisectoare în funcțiune de laturile triunghiului.

8. Să se rezolve un triunghi când se cunoaște:

$$a = 453\text{m},2 \quad , \quad b = 637\text{m},1 \quad , \quad c = 390\text{m},9$$

$$\text{R:} \quad A = 44^\circ 48' 50'' \quad , \quad B = 97^\circ 46' 4'' \quad , \quad C = 37^\circ 25' 2''$$

$$S = 87720 \text{ m}^2$$

9. Aceiași chestiune când se dă:

$$b = 40\text{m},27 \quad , \quad C = 18^\circ 30' \quad , \quad c = 60\text{m},17$$

$$\text{R:} \quad B = 11^\circ 59' 22'' \quad a = 96,21\text{m} \quad A = 149^\circ 30' 38''$$

$$S = 614,70\text{m}^2$$

10. In cazul triunghiului definit la exercițiul 8; să se calculeze: a) raza cercului circumscris; b) raza cercului înscris.

$$\text{R:} \quad R = 321,5\text{m} \quad ; \quad r = 118,44\text{m}.$$

CAP. XI.

IDENTITĂȚI ȘI ECUAȚIUNI TRIGONOMETRICE.

Generalități. Egalitățile sunt de două feluri:

a) Unele sunt *adevărate* oricare ar fi valorile ce dăm literilor ce figurează în ele, spre exemplu:

$$a + b = b + a \quad ; \quad 4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Astfel de egalități, care sunt verificate oricare ar fi valorile ce dăm literilor ce figurează în ele, se numesc identități.

Identitățile în care figurează și linii trigonometrice, se numesc *identități trigonometrice*; spre exemplu:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \quad , \quad \operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

sunt identități trigonometrice, deoarece aceste egalități sunt adevărate, oricare ar fi valoarea unghiului a .

b) Alte egalități sunt adevărate numai dacă dăm literii sau literilor care figurează în ele, anumite valori; spre exemplu, egalitatea

$$2x = 1$$

este adevărată numai dacă înlocuim pe x prin $\frac{1}{2}$; egalitatea

$$x^2 - 3x = -2$$

este adevărată numai în cazul când înlocuim pe x prin 1 sau prin 2.

Egalitatea:

$$x + y = 1$$

este adevărată dacă $x = 0, y = 1$ sau $x = 1, y = 0$ sau $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$, etc.

Definiție. Astfel de egalități, care sunt verificate numai pentru anumite valori date literilor (sau necunoscutelor) ce figurează în ele, se numesc *ecuațiuni*.

Valorile, pe care trebuie să le punem în locul literilor pentru ca ecuațiunea să fie verificată, se cheamă *rădăcinile* sau *soluțiunile* ecuației.

Operația prin care aflăm rădăcinile unei ecuații se numește *rezolvarea ecuației*; odată rădăcinile aflate, facem *proba* sau *verificarea*, care constă în a înlocui literile (sau necunoscutele) prin rădăcinile găsite și a vedea dacă ecuațiunea se reduce la o identitate.

Exemple. 1. Ecuația: $3x - 2 = 0$, are rădăcina $x = \frac{2}{3}$; verificarea:

$$3 \cdot \frac{2}{3} - 2 = 2 - 2 = 0$$

2. Ecuația: $x^2 - 5x + 6 = 0$, are ca rădăcini pe 2 și 3; verificarea:

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0 \quad \text{și} \quad 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$$

3. Ecuația: $x + 2y = 1$, admite ca rădăcini, între altele, și numerele $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$; într'adevăr:

$$\frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

Definiție. Ecuațiunile în care necunoscuta (sau necunoscutele) este un unghi întovărășit de una sau mai multe linii trigonometrice, se numesc *ecuațiuni trigonometrice*; spre exemplu:

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad \sin x + \cos x = 1, \quad \sin(x + y) = \frac{1}{2}, \quad \text{etc.}$$

sunt ecuațiuni trigonometrice cu o necunoscută, două necunoscută, etc.

IDENTITĂȚI TRIGONOMETRICE.

Identitățile trigonometrice sunt, ca și identitățile algebrice, de două feluri :

a) Unele sunt *evidente*, adică reiese imediat că primul membru este egal cu membrul al 2-lea, *oricare ar fi valorile literelor* ce figurează în ele; spre exemplu :

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin(y + x) \\ \sin a \cos b &= \cos b \sin a, \text{ etc.}\end{aligned}$$

sunt identități evidente.

b) Altele, și acestea sunt cele mai numeroase, necesită oarecari operațiuni, în urma cărora primul membru apare ca evident egal cu membrul al doilea; spre exemplu, pentru a verifica identitatea

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a} = \cos^2 a$$

este necesar să transformăm membrul întâiu astfel :

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a}} = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a + \sin^2 a} = \cos^2 a.$$

Alteori este mai ușor să transformăm membrul al doilea până ce devine evident egal cu membrul întâiu. Spre exemplu, în identitatea :

$$(2) \quad \operatorname{cotg} a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a}}$$

Vom scrie

$$\sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a}} = \frac{\sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}}{\sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}}$$

însă dela formulele pentru împărțirea unghiurilor (arcelor) :

$$\sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}} = \cos a \quad \text{și} \quad \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}} = \sin a$$

deci :

$$\sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a}} = \frac{\cos a}{\sin a} = \cotg a$$

In alte cazuri este necesar să transformăm și membrul întâiu și membrul al doilea până când fiecare din ei devine egal cu o aceeași expresiune. Spre exemplu, pentru a verifica identitatea:

$$(3) \quad 2\sqrt{2} \sin a \cos a = \sqrt{1 - \cos 4a}.$$

Vom împărți întâiu, ambii membri cu $\sqrt{2}$:

$$2 \sin a \cos a = \sqrt{\frac{1 - \cos 4a}{2}}$$

Însă :

$$2 \sin a \cos a = \sin 2a$$

dar

$$\sqrt{\frac{1 - \cos 4a}{2}} = \sin 2a$$

Ambii membri ai identității (3) fiind egali cu $\sin 2a$, vor fi egali și între ei, iar identitatea este verificată (sau demonstrată).

Rezultă de aci :

A verifica (sau demonstra) o identitate, înseamnă a transforma unul sau ambii membri în alte expresiuni echivalente, până ce ei devin evident egali.

Observare. Nu se pot da reguli generale pentru verificarea (sau demonstrarea) identităților trigonometrice; această operațiune este ușurată atunci când stăpânim bine formulele trigonometrice stabilite până aci.

Uneori, pentru a se atrage mai bine atențiunea că egalitatea este o identitate, se scrie între membrul I și membrul II, în loc de semnul =, semnul \equiv și se citește „identic egal”. Spre exemplu :

$$\sin a \operatorname{tg} a \equiv \frac{1 - \cos^2 a}{\cos a}.$$

Aplicații. 1. Să se verifice identitatea :

$$\sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

R: Membrul întâiu fiind mai simplu, se impune să transformăm membrul al 2-lea până devine egal cu $\sin a$:

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} &= \frac{2 \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}}} = \frac{2 \sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} \cdot \frac{\cos^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}} \\ &= \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{1} = \sin a. \end{aligned}$$

2. Să se demonstreze identitatea :

$$\cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

Vom porni tot dela membrul al 2-lea :

$$\begin{aligned} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} &= \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}}} = \frac{\frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}}} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{1} = \cos a. \end{aligned}$$

3. Să se verifice identitatea :

$$\operatorname{tg}(a+b) \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b}{1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b}$$

Aci este cazul să transformăm membrul întâiu; avem relațiile :

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

pe care înmulțindu-le membru cu membru, aflăm :

$$\operatorname{tg}(a+b) \operatorname{tg}(a-b) = \frac{(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)(\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b)}{(1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b)(1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b)} = \frac{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b}{1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b}$$

4. Să se verifice că dacă a și b au expresiile :

$$a = \frac{A}{\sqrt{1+m^2}} \quad \text{și} \quad b = \frac{A m}{\sqrt{1+m^2}} \quad \text{iar} \quad m = \operatorname{tg} a$$

putem scri:

$$a = A \cos a \quad \text{și} \quad b = A \sin a.$$

R: Putem scri:

$$a = \frac{A}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{A}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}};$$

însă din formulele corelative avem :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \cos \alpha$$

deci

$$a = A \cos \alpha$$

Tot astfel :

$$b = \frac{A \cdot m}{\sqrt{1 + m^2}} = A \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = A \sin \alpha.$$

5. Să se arate, că dacă :

$$a = \frac{A}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad b = \frac{A m}{\sqrt{1 + m^2}} \quad (m = \operatorname{tg} \alpha)$$

atunci avem identitatea :

$$a \sin x + b \cos x = A \sin (x + \alpha)$$

R: Intr'adevăr, ținând seama de aplicația (4) avem :

$$a = A \cos \alpha, \quad b = A \sin \alpha$$

deci :

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= A \cos \alpha \sin x + A \sin \alpha \cos x \\ &= A (\sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x) \\ &= A \sin (x + \alpha) \end{aligned}$$

6. Să se demonstreze identitatea :

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin (x + \alpha)$$

în care :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

R: Primul membru se poate scrie :

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= a \left(\sin x + \frac{b}{a} \cos x \right) = a (\sin x + \operatorname{tg} \alpha \cos x) \\ &= a \left(\sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos x \right) = a \frac{\sin (x + \alpha)}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

însă :

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

deci :

$$\frac{a}{\cos \alpha} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

și :

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha).$$

Observare. Din cele ce preced se vede că există : a) identități evidente : b) identități ce trebuiesc verificate (sau demonstrate).

Din acestea din urmă, unele sunt adevărate, numai dacă literele ce figurează în ele îndeplinesc anumite condițiuni, spre exemplu identitățile din aplicațiile (4), (5), (6).

ECUAȚIUNI TRIGONOMETRICE.

În algebră se arată că pentru rezolvarea ecuațiilor de forma :

$$ax + b = 0; \quad ax^2 + bx + c = 0; \quad ax^4 + bx^2 + c = 0, \text{ etc.}$$

există anumite reguli de urmat, care ne conduc la găsirea unei formule de rezolvare, aplicabilă în toate cazurile asemănătoare; astfel pentru ecuația de gradul II : $ax^2 + bx + c = 0$, rădă-

cinile sunt date de formula : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Nu tot astfel se petrec lucrurile cu ecuațiile trigonometrice; pentru acestea nu există reguli generale de rezolvare.

Vom examina în cele ce urmează câteva tipuri de ecuații trigonometrice care se întâlnesc mai des în aplicațiuni, cu deosebire în Mecanică.

I. Ecuațiuni care exprimă că linia trigonometrică a unui unghi necunoscut are o valoare dată.

Exemple. I. $\sin x = 0,5$. Pentru a rezolva această ecuație, cercetăm în tabele, care este unghiul x , care are sinusul egal cu

0,5: găsim în tabele: $x_1 = 30^\circ$ (sau $\frac{\pi}{6}$ rad.); $x = 30^\circ$ este deci o rădăcină; dar și unghiul $x_2 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ are același *sinus*.

Am văzut însă (pag. 84) că la un *sinus* dat, corespund o infinitate de unghiuri; în cazul de mai sus ele sunt date de formulele:

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &= k \times 360^\circ + 30^\circ && \left(\text{sau } x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \right) \\ x_2 &= (2K + 1) 180^\circ - 30^\circ && \left(\text{sau } x_2 = (2K + 1)\pi - \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

în care k este un întreg pozitiv sau negativ oarecare.

Rezultă de aci că ecuația $\sin x = 0,5$ are o infinitate de soluțiuni, date de formulele (1).

Dacă voim să reținem însă numai soluțiile ecuației (1) cuprinse între 0° și 360° , găsim: $x = 30^\circ$ și $x = 150^\circ$, care se obțin din formulele (1), făcând $k = 0$.

2. $\cos x = -\frac{1}{2}$. În tabele găsim că la $\cos x = +\frac{1}{2}$ corespunde $x = 60^\circ$; pentru $\cos x = -\frac{1}{2}$ corespunde, între 0° și 360° ,

unghiul $x_1 = 120^\circ$ și unghiul $x_2 = 240^\circ$ și în general o infinitate de unghiuri date de formulele:

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 &= k \times 360^\circ \pm 120^\circ && \left(\text{sau } x_1 = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \right) \\ x_2 &= k \times 360^\circ \pm 240^\circ && \left(\text{sau } x_2 = 2k\pi \pm \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

care pot fi scrise și sub forma mai strânsă:

$$(2') \quad x = k \cdot 360^\circ \pm 120^\circ \quad \text{sau} \quad x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

Ecuția are deci o *infinitate* de soluțiuni.

3. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$. Cu ajutorul tabelelor de logaritmi găsim:

$x_1 = 26^\circ 33' 58''$; dar și unghiul $x_2 = 180^\circ + 26^\circ 33' 58'' = 206^\circ 33' 58''$ corespunde aceleiași *tangente*; ecuația are deci o *infinitate* de soluțiuni date de formula:

$$(3) \quad x = k \cdot 180^\circ + 26^\circ 33' 58''$$

Soluția $x_1 = 26^\circ 33' 58''$ se obține făcând în (3): $k = 0$ și soluția $x_2 = 206^\circ 33' 58''$ făcând $k = 1$.

Observare. Dacă am fi întrebuințat tabela de valori naturale nu am fi găsit rădăcinile x cu o aproximație atât de bună.

4. $\operatorname{cotg} x = 3$. Din tabele găsim: $x_1 = 18^\circ 26' 6''$; dar și $x_2 = 180^\circ + 18^\circ 26' 6'' = 198^\circ 26' 6''$ este o soluțiune.

In general, avem o *infinitate* de soluțiuni:

$$x = k \cdot 180^\circ + 18^\circ 26' 6''$$

Observare. In general ecuațiile:

$$\sin x = a, \quad \cos x = b$$

au o *infinitate* de soluții reale, cu condiția ca a și b să fie în valoare absolută mai mici decât unitatea.

Ecuțiile:

$$\operatorname{tg} x = c, \quad \operatorname{cotg} x = d$$

au, *oricare* ar fi valorile lui c și d , o *infinitate* de soluțiuni reale.

II. Ecuțiuni trigonometrice reductibile la ecuațiuni algebrice de gradul II.

a) *Fie ecuația:*

$$(1) \quad 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$$

să însemnăm:

$$(2) \quad \sin x = y$$

ecuația (1) devine:

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

adică o ecuație de gradul II.

Avem:

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \text{ sau } \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Din (2) avem deci:

$$\sin x = 2 \text{ și } \sin x = \frac{1}{2}$$

Prima ecuație nu are rădăcini reale, deoarece sinusul nu poate fi mai mare decât unitatea.

Din ecuația (2) care este de forma I, obținem:

$$x_1 = k \cdot 360^\circ + 30^\circ, \quad \left(\text{sau } x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \right)$$

și

$$x_2 = (2k+1) \cdot 180^\circ - 30^\circ, \quad \left(\text{sau } x_2 = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \right)$$

Verificare. Introducând în (1) soluția:

$$x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

găsim:

$$2 \sin^2 \left(2k\pi + \frac{\pi}{6} \right) - 5 \sin \left(2k\pi + \frac{\pi}{6} \right) + 2 = 0$$

Însă:

$$\sin \left(2k\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

deci:

$$2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 5 \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2 = 0.$$

În mod analog se poate verifica soluția:

$$x_2 = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}$$

b) Fie ecuația $\operatorname{tg} x + 8 \operatorname{cotg} x = 8$

Necunoscuta x figurând sub două linii trigonometrice, înlocuim una din ele în funcțiune de cealaltă;

$$\operatorname{tg} x + 8 \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 8$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x + 8 = 0.$$

Insemnăm

$$(3) \quad \operatorname{tg} x = y$$

ecuația precedentă devine:

$$y^2 - 8y + 8 = 0$$

$$y = 4 \pm \sqrt{8} = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

deci

$$y_1 = 4 + 2\sqrt{2} = 6,82$$

$$y_2 = 4 - 2\sqrt{2} = 1,18$$

Din ecuația (3) care este de forma III găsim:

$$\operatorname{tg} x = 6,82 \quad \text{deci } x_1 = k \cdot 180^\circ + 81^\circ 39' 29''$$

$$\operatorname{tg} x = 1,18 \quad \text{deci } x_2 = k \cdot 180^\circ + 49^\circ 43' 12''$$

Dacă am introduce în ecuația: $\operatorname{tg} x + 8 \operatorname{cotg} x = 8$, valorile x_1, x_2 , nu vom obține o identitate, deoarece valorile x_1, x_2 sunt aflate cu aproximație.

c) Fie ecuația $\operatorname{tg} x = \cos x$.

$$\text{Putem scri: } \frac{\sin x}{\cos x} = \cos x \quad \text{sau} \quad \sin x = \cos^2 x$$

sau

$$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

și luând ca necunoscută pe $\sin x$:

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Din ecuația: } \sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ găsim:}$$

$$x_1 = 2k\pi + 38^\circ 10' 15'' \quad \text{și} \quad x_2 = (2k + 1)\pi + 141^\circ 49' 45''$$

iar din ecuația

$$\sin x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ nu găsim nicio valoare reală, deoarece } \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ este mai mic decât } -1.$$

III. Ecuațiuni de forma: $a \sin x + b \cos x = 0$.

Fie ecuația: $5 \sin x - 4 \cos x = 0$ (adică $a = 5$, $b = -4$).

Procedăm astfel:

$$5 \sin x = 4 \cos x$$

sau:

$$\operatorname{tg} x = \frac{4}{5}$$

adică am înlocuit $\sin x$ și $\cos x$ cu o singură linie trigonometrică: $\operatorname{tg} x$; ecuația $\operatorname{tg} x = \frac{4}{5}$ este de tipul I_3 . Găsim o infinitate de soluțiuni:

$$x = k \cdot 180^\circ + 38^\circ 39' 34''$$

Deoarece valoarea lui x este aflată cu aproximație, ea nu va verifica *exact* ecuația: $5 \sin x - 4 \cos x = 0$.

IV. Ecuațiuni de forma: $a \sin x + b \cos x = c$.

Fie ecuația: $2 \sin x + 3 \cos x = 1$; ($a = 2$, $b = 3$, $c = 1$) împărțind cu 2 găsim:

$$(2) \quad \sin x + \frac{3}{2} \cos x = \frac{1}{2}$$

La valoarea $\frac{3}{2}$ corespunde un unghi $\alpha < 90^\circ$ a cărui *tangentă* să fie egală cu $\frac{3}{2}$ adică: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$; într'adevăr din tabele găsim:

$$(3) \quad \alpha = 56^\circ 18' 35''$$

Ecuatia (2) devine succesiv

$$\sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x = \frac{\cos \alpha}{2}$$

sau

$$\sin(x + \alpha) = \frac{\cos \alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{9}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\sin(x + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

ecuație care este de forma I_1 .

Găsim deci rădăcinile

$$x_1 + \alpha = k \cdot 360^\circ + 16^\circ 6' 8''$$

și

$$x_2 = \alpha + (2k + 1) 180^\circ - 16^\circ 6' 8''$$

sau

$$x_1 = k \cdot 360^\circ + 40^\circ 12' 27''$$

$$x_2 = (2k + 1) 180^\circ - 40^\circ 12' 27''$$

Observare. Ecuatia de tipul III este un caz particular al ecuatiei IV când $c = 0$.

V. Ecuatiuni, in care figurează linii trigonometrice de unghiuri diferite ($x, \frac{x}{2}, 2x$, etc.).

a) Fie ecuația: $\sin 2x = \cos x$

Vom înlocui $\sin 2x$ prin $2 \sin x \cos x$, ca să nu mai figureze decât linii trigonometrice ale unghiului x ; obținem:

$$2 \sin x \cos x = \cos x$$

sau

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

sau

$$\cos x (2 \sin x - 1) = 0$$

Pentru ca produsul factorilor : $\cos x$ și $2 \sin x - 1$ să fie egal cu zero, trebuie ca unul din acești factori să fie zero, adică :

$$\cos x = 0$$

sau

$$2 \sin x - 1 = 0$$

Din prima ecuațiune găsim ca soluțiuni cuprinse între 0° și 360°

$$x = 90^\circ, \left(\text{sau } \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{și} \quad x = 270^\circ, \left(\text{sau } \frac{3\pi}{2} \right)$$

în general

$$(1) \quad x_1 = k \cdot 360^\circ + 90^\circ \quad \text{sau} \quad x = 2k + \frac{\pi}{2}.$$

Din ecuația II-a obținem :

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

deci între 0° și 360° aflăm :

$$x = 30^\circ, \left(\text{sau } \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{și} \quad x = 150^\circ, \left(\text{sau } \frac{5\pi}{6} \right)$$

și în general :

$$(2) \quad x_1 = k \cdot 360^\circ + 30^\circ \quad \text{sau} \quad x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$(3) \quad x_2 = (2k + 1) 180^\circ - 30^\circ \quad \text{sau} \quad x_2 = (2k + 1) \pi - \frac{\pi}{6}.$$

Soluțiile ecuației :

$$\sin 2x = \cos x$$

sunt deci date, de formulele (1), (2), (3).

Observare. Reiese de aci, că în unele cazuri este necesar să transformăm ecuația dată într'alta care să cuprindă un număr de linii trigonometrice ale aceluiaș unghiu sau arc (x sau $\frac{x}{2}$, sau $2x$, etc.).

b) Să rezolvim ecuația: $\sin x + \sin 3x = 0$.

Vom aplica formula de transformare a unei sume de sinusuri într'un produs (pag. 6 VII):

$$\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$$

deci:

sau: a) $\sin 2x = 0$, de unde: $2x = k \times 180^\circ$ (sau $2x = k\pi$)

adică:

$$(1) \quad x = \frac{k}{2} \cdot 180^\circ, \quad \left(\text{sau: } x = \frac{k\pi}{2} \right)$$

sau: b) $\cos x = 0$ de unde:

$$(2) \quad x = k \times 180^\circ + 90^\circ, \quad \left(\text{sau } x = k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

Soluțiile ecuației $\sin x + \sin 3x$ sunt (1) și (2).

Observație. Din acest exemplu, rezultă că atunci când membrul al 2-lea al ecuației este zero este bine să căutăm să transformăm primul membru al ecuației, într'un produs de mai mulți factori pe care îi egalăm, pe rând cu zero.

Verificarea. a) Inlocuim în ecuația:

$$\sin x + \sin 3x = 0$$

pe x prin $\frac{k\pi}{2}$; găsim

$$\sin \frac{k\pi}{2} + \sin \frac{3k\pi}{2} = 0$$

sau

$$\sin \frac{k\pi}{2} = -\sin \frac{3k\pi}{2}$$

relație adevărată oricare este k deoarece

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{3k\pi}{2} = \frac{4k\pi}{2} = 2k\pi.$$

și știm că în acest caz *sinusurile* sunt egale și de semn contrar.

b) Înlocuind pe x prin $k\pi + \frac{\pi}{2}$, obținem

$$\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \sin 3\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

relație adevărată oricare ar fi k , cum ne putem convinge procedând ca mai sus.

c) Să rezolvim ecuația

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = 0$$

Vom scrie:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{\sin x \cos 3x + \sin 3x \cos x}{\cos x \cos 3x} = 0$$

sau:

$$\frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x} = 0$$

Ecuația: $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = 0$ se poate înlocui deci cu următoarea ecuație cu care este echivalentă

$$\frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x} = 0$$

Judecăm astfel:

Această fracțiune este egală cu zero dacă numărătorul ei este zero fără ca și numitorul ei să fie în același timp zero (deoarece am avea $\frac{0}{0}$, care este o nedeterminare), deci trebuie ca:

$$\sin 4x = 0$$

din care obținem:

$$\begin{aligned} 4x &= k \cdot 180^\circ & (\text{sau: } 4x &= k\pi) \\ x &= \frac{k \cdot 180}{4} & \left(\text{sau } x &= \frac{k\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

E necesar să observăm că aceste soluțiuni nu sunt rădăcini ale numitorului ecuației, adică $\cos x$ și $\cos 3x$ nu sunt egali cu zero pentru aceste valori.

Intr'adevăr, ecuația: $\cos x = 0$ este satisfăcută pentru $x_1 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ iar ecuația $\cos 3x = 0$, pentru:

$$3x_2 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

sau

$$x_2 = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6}$$

Valorile x_1 și x_2 sunt diferite de $x = \frac{k\pi}{4}$ deci $x = \frac{k\pi}{4}$ sunt soluțiile ecuației propuse.

Verificare. Trebuie să avem:

$$\operatorname{tg} \frac{k\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{3k\pi}{4} = 0$$

sau

$$\operatorname{tg} \frac{k\pi}{4} = -\operatorname{tg} \frac{3k\pi}{4}$$

cece este adevărat deoarece

$$\frac{k\pi}{4} + \frac{3k\pi}{4} = K\pi$$

Observare. Să considerăm ecuația algebrică:

$$(x-1)^2 x - 2x^2(x-1) = 0$$

Pentru a o rezolva, dăm pe $x(x-1)$ factor comun:

$$x(x-1)(x-1-2x) = 0$$

și obținem soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Dacă am fi împărțit prin $x(x-1)$, găseam

$$x-1-2x = 0 \text{ sau } x = -1$$

adică *pierdeam* rădăcinile $x = 0$, $x = 1$.

Această operație nu este însă permisă, *deoarece nu putem împărți ambii membri ai unei ecuații decât cu un factor care să nu conțină necunoscuta.*

Fie acum ecuația trigonometrică :

$$2 \cos x = \cotg x$$

avem

$$2 \cos x - \frac{\cos x}{\sin x} = 0$$

Nu putem împărți cu factorul $\cos x$ ci trebuie să scriem :

$$\cos x \left(2 - \frac{1}{\sin x} \right) = 0.$$

de unde

$$\cos x = 0, \quad \text{deci: } x_1 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

și

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad \text{deci: } x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x_3 = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{6}$$

Soluțiile ecuației $\cos x = \cotg x$ sunt date de x_1, x_2, x_3 .

Dacă împărțeam cu $\cos x$, am fi pierdut soluțiile $x_1 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

A P L I C A Ț I I.

1. Dintr'un punct S se duce tangenta SA la cercul de centrul T și rază TA . Care este valoarea unghiului $x = \widehat{AST}$ (sub care se vede din S raza cercului) dacă distanța ST este de 6 ori mai mare decât raza cercului O ? (fig. 99).

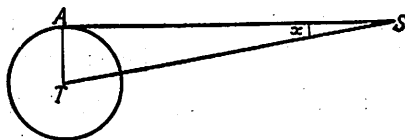


Fig. 99

R.: Din triunghiul dreptunghiu ATS obținem :

$$\sin x = \frac{TA}{TS} = \frac{1}{6}$$

care este o *ecuație trigonometrică* de forma I_1 . Avem :

$$\log . \sin x = \operatorname{colog} 6 = \bar{1},22185$$

deci

$$x = 9^{\circ}35'39''$$

Formulele generale ale unghiurilor, care satisfac ecuația $\sin x = \frac{1}{6}$ sunt :

$$(1) \quad x_1 = k \cdot 360^{\circ} + 9^{\circ}35'39''$$

$$(2) \quad x_2 = (2k + 1) 180^{\circ} - 9^{\circ}35'39''$$

din acestea *nu reținem* însă decât valoarea $x = 9^{\circ}35'39''$, care fiind mai mică de 90° , singură convine problemei; ea se poate obține din formula (1) făcând $k = 0$.

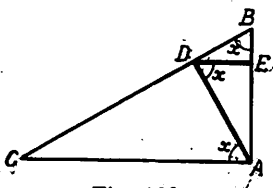


Fig. 100

2. In triunghiul dreptunghiu ABC (fig. 100) se duce perpendiculara AD pe ipotenușă, iar din piciorul D al acestei perpendiculare, perpendiculara DE pe cateta AB.

Se cere să se determine unghiul $x = \widehat{ABC}$ astfel ca AC să fie de 4 ori mai mare ca DE.

R.: Din triunghiul dreptunghiu ADC, avem :

$$AD = AC \cos DAC$$

însă $\widehat{DAC} = x$ deoarece aceste două unghiuri au laturile perpendiculare, două câte două; deci :

$$(1) \quad AD = AC \cos x .$$

Din triunghiul dreptunghiu ADE, avem :

$$DE = AD \cos ADE = AD \cos x$$

ținând seama de relația (1) găsim :

$$DE = AC \cos^2 x .$$

deci :
$$\cos^2 x = \frac{DE}{AC} = \frac{1}{4}$$

am dat deci peste o ecuație trigonometrică, care se rezolvă astfel :

$$\cos x = \pm \frac{1}{2}$$

Unghiurile x , care corespund la $\cos x = +\frac{1}{2}$, sunt :

$$(2) \quad x_1 = k 360^\circ \pm 60^\circ, \quad \left(\text{sau } x_1 = 2 k\pi \pm \frac{\pi}{3} \right)$$

iar acelea care satisfac relația $\cos x = -\frac{1}{2}$:

$$(3) \quad x_2 = (2k + 1) 180^\circ \pm 60^\circ, \quad \left(\text{sau } x_2 = (2k + 1) \pi \pm \frac{\pi}{3} \right)$$

Din această *dublă infinitate* de soluțiuni ale ecuației $\cos^2 x = \frac{1}{4}$, vom reține numai pe acelea care *convin* problemei.

Unghiul $x = \widehat{ABC}$ este prin ipoteză *pozitiv și ascuțit*; prin urmare soluția căutată este : $x_1 = 60^\circ$, care se obține din (2) făcând $k = 0$.

3. Un tablou $ABCD$ în formă de dreptunghi (fig. 101) era prins pe un perete vertical în două puncte A și B ; desprinzându-se din B , tabloul a oscilat câteva timp și s'a oprit în pozițiunea, în care diagonala AOC este verticală.

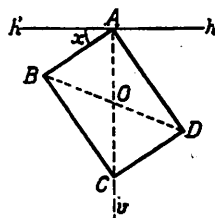


Fig. 101

Se cere să se calculeze unghiul $x = \widehat{h'AB}$ pe care latura AB a tabloului o face cu orizontala Ah' , știind că $\frac{AB}{AD} = \frac{2}{3}$.

R: In pozițiunea din figură, se vede că $\widehat{CAD} = \widehat{h'AB}$, deoarece aceste unghiuri au laturile respectiv perpendiculare; din triunghiul ACD găsim:

$$\operatorname{tg} x = \frac{CD}{AD} = \frac{AB}{AD} = \frac{2}{3}$$

deci

$$x = 33^{\circ} 41' 24''$$

Ecuatiă $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$ este satisfăcută de o infinitate de valori, date de formula:

$$x_1 = k \cdot 180^{\circ} + 33^{\circ} 41' 24''$$

dar dintre acestea numai $x = 33^{\circ} 41' 24''$ convine problemei, valoare ce rezultă și din formula generală, în care facem $k = 0$.

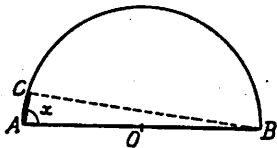


Fig. 102

4. Intr'un semicerc AB de centru O se duce coarda AC (fig. 102), și se cere să se determine unghiul $\widehat{BAC} = x$, astfel ca această coardă să fie o optime din diametru.

R: Triunghiul ACB fiind dreptunghiu în C, avem:

$$\cos x = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{8}$$

Avem deci de rezolvat o ecuație trigonometrică de forma I_2 ; găsim:

$$\log \cos x = \operatorname{colog} 8$$

deci

$$x = 82^{\circ} 49' 9''$$

Formula generală a unghiurilor, care satisfac ecuația $\cos x = \frac{1}{8}$ este:

$$x_1 = k \cdot 360^{\circ} \pm 82^{\circ} 49' 9''$$

Deoarece \widehat{BAC} este ascuțit, dintre aceste unghiuri, numai soluția $x = 82^{\circ} 49' 9''$ convine problemei și corespunde valorii $k = 0$.

5. Spița OM a unei roți pornește din poziția OA (fig. 103) și face o rotație completă (de 360°) în sensul săgeții; se cere să se determine care este poziția spiței OM , pentru care distanța AN , dela punctul A la direcția spiței să fie o cincime din lungimea razei.

R: Poziția spiței este bine hotărâtă dacă cunoaștem unghiul $AON = x$; să determinăm deci acest unghi ținând seamă de condițiunea din enunț.

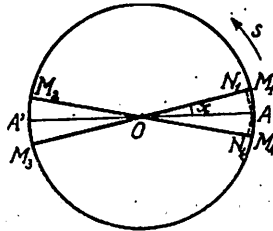


Fig. 103

Din triunghiul dreptunghiu OAN găsim:

$$\sin x = \frac{AN}{OA} = \frac{1}{5}$$

avem deci de rezolvat o ecuație trigonometrică; luând logaritmi găsim:

$$\log \sin x = \text{colog } 5 = \bar{1},30103$$

$$x = 11^\circ 32' 13''$$

Unghiurile, care satisfac ecuația $\sin x = \frac{1}{5}$, sunt date de formulele:

$$x_1 = k \cdot 360^\circ + 11^\circ 32' 13''$$

$$x_2 = (2k + 1) 180^\circ - 11^\circ 32' 13''$$

Nu toate aceste unghiuri convin însă problemei. Într'adevăr prin ipoteză spița OM face o singură învârtitură, deci x nu poate fi mai mare decât 360° ; făcând $k = 0$ în formulele de mai sus găsim valorile:

$$x' = 11^\circ 32' 13'', \quad x'' = 168^\circ 27' 47''$$

care corespund pozițiilor OM_1 și OM_2 ale spiței.

Observare. Dacă am considera și cazurile când punctul N s'ar găsi pe prelungirea spiței OM atunci am mai avea și rădăcinile:

$$x''' = 180^\circ + 11^\circ 32' 13'' \quad \text{și} \quad x^{VI} = 360^\circ - 11^\circ 32' 13''$$

care corespund pozițiilor OM_3 și OM_4 ale spiței.

R E Z U M A T.

CAP. XI. — IDENTITĂȚI ȘI ECUAȚIUNI TRIGONOMETRICE.

*Egalitățile, care sunt verificate oricare ar fi valorile ce dăm literelor ce figurează în ele, se numesc *identități*.

*Egalitățile, care sunt verificate numai pentru anumite valori date literelor (sau necunoscutelor) ce figurează în ele, se numesc *ecuațiuni*.

*Valorile, care puse în locul literelor *verifică* ecuația, se numesc *rădăcinile* sau *soluțiunile* ei.

*Operația prin care aflăm rădăcinile se cheamă *rezolvarea ecuației*.

Proba sau verificarea unei ecuații se face înlocuind literele prin rădăcinile aflate; dacă obținem o identitate, rezolvarea este bine făcută.

*Identitățile, în care figurează și linii trigonometrice, sunt *identități trigonometrice*.

Verificarea unei identități se face : *a)* sau transformând membrul I până ce devine evident egal cu membrul al II-lea ; *b)* sau transformând membrul II până ce devine evident egal cu membrul I ; *c)* sau transformând ambii membri până ce fiecare din ei devine egale cu o aceeași expresiune.

*O ecuațiune este *trigonometrică* când necunoscuta (sau necunoscutele) este unghiul (sau unghiurile) uneia sau mai multor linii trigonometrice ce figurează în acea ecuațiune.

*Nu există reguli generale pentru rezolvarea ecuațiilor trigonometrice.

Iată câteva criterii generale de rezolvare:

a) Când într'o ecuație trigonometrică figurează mai multe linii trigonometrice, căutăm să le înlocuim cu o singură linie trigonometrică.

b) Când aceeași linie trigonometrică a unghiului x se află la puterea 2-a și 1-a, rezolvăm ecuația, înlocuind-o cu o altă necunoscută ajutătoare y și rezolvim ecuația de forma:

$$ay^2 + by + c = 0$$

cu ajutorul formulei:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

c) Când ecuația este de forma:

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

ea se reduce la forma: $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$

d) Ecuația de forma:

$$a \sin x + b \cos x = c$$

se rezolvă împărțind ambii ei membri cu a :

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$$

și înlocuind $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$, α fiind un unghi ajutător, se găsește

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

din care aflăm pe $x + \alpha$ și deci și pe x .

e) Dacă într'o ecuație figurează linii trigonometrice de unghiul necunoscut x , $\frac{x}{2}$, $2x$, etc., căutăm să o transformăm într'o altă ecuație în care să nu fie decât linii trigonometrice ale unui singur unghi: x , sau $\frac{x}{2}$, sau $2x$, etc.

Alteori, trecem toți termenii în membrul I; transformăm expresiunea într'un produs de factori, pe care egalându-i pe rând cu zero, găsim în general ecuații trigonometrice mai simple.

EXERCITII.

1. Să se rezolve ecuațiile ce urmează: să se scrie formulele generale ale unghiurilor care le satisfac și să se aleagă soluțiunile cuprinse între 0° și 180° .

a) $5 \sin x = 2$; b) $\cos x - \frac{1}{7} = 0$; c) $4 \operatorname{tg} x = 9 = 0$; d) $4 \operatorname{cotg} x = 1$.

R: a) $x_1 = 23^\circ 34' 41''$ b) $x_1 = 81^\circ 47' 12''$ c) $x_1 = 66^\circ 2' 14''$
 $x_2 = 156^\circ 25' 19''$ $x_2 = 278^\circ 12' 48''$ $x_2 = 246^\circ 2' 14''$

d) $x_1 = 75^\circ 57' 50''$
 $x_2 = 255^\circ 57' 50''$

2. Să se rezolve ecuațiile:

a) $6 \cos^2 x - 5 \cos x + 1 = 0$.

R: $\cos x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{1}{3}$, etc., $x = 70^\circ 31' 43''$.

b) $10 \sin^2 x - 7 \sin x + 1 = 0$.

R: $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = \frac{1}{5}$; $x_1 = 30^\circ$, $x_2 = 11^\circ 32' 13''$.

c) $8 \sin^2 x - 17 \sin x + 2 = 0$.

R: $\sin x = \frac{1}{8}$, $\sin x = 2$; (x imaginar), $x = 7^\circ 10' 50''$.

d) $\cos^2 x + 2\sqrt{2} = \frac{3 + \sqrt{2}}{2} \cos x$.

R: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $\cos x = \frac{1}{2}$ (x e' imaginar).

e) $\sin x + 2 \sin^2 x = 0$.

R: $\sin x = 0$, $\sin x = -\frac{1}{2}$.

f) $4 \cos^2 x - 1 = 0$.

R: $\cos x = +\frac{1}{2}$

g) $3 \cos x = \cotg x$

R: $\cos x = 0$, $\sin x = \frac{1}{3}$, etc; $x_1 = 90^\circ$, $x_2 = 13^\circ 28' 17''$.

h) $\operatorname{tg} x = 2 \sin x$.

R: $\sin x = 0$, $\cos x = \frac{1}{2}$, etc.

3. Să se rezolve ecuațiile ce urmează și să se determine valorile lui x cuprinse între 0° și 90° care le satisfac:

a) $2 \sin^4 x - 3 \sin^2 x + 1 = 0$;

b) $\cos^4 x + 2 = 3 \cos^2 x$;

c) $4 \sin^4 x - 3 \cos^2 x = -3$.

R: a) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$, $\sin x = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}$, $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$

b) $\cos^2 x = 1$, $\cos x = 1$, $x = 0$

$\cos^2 x = 2$ (x imaginar)

c) $\sin^2 x = 0$, $x_1 = 0$

$4 \sin^2 x + 3 = 0$, $x_2 = 60^\circ$

4. Să se afle cel mai mic unghi care satisface ecuațiile:

a) $\sin x - 2 \cos x = 0$; b) $2 \cos x - 4 \sin x = 0$;

c) $\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0$ d) $\sin 3x - 7 \cos 3x = 0$

R: a) $x = 63^\circ 26' 6''$; b) $x = 26^\circ 33' 54''$; c) $\frac{x}{2} = 45^\circ$; $x = 90^\circ$;

d) $3x = 81^\circ 52' 12''$, $x = 27^\circ 17' 24''$

5. Să se afle unghiurile cuprinse între 0 și π , care satisface ecuațiile:

a) $\sin x - \cos x = 1$;

b) $\sin x + 5 \cos x = 2$;

c) $\cos x - 3 \sin x = -1$;

d) $\cos 2x - 3 \sin 2x = 1$

6. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\cos 2x = \cos x - 1$;

b) $\sin 4x = \cos 2x$;

c) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x$;

d) $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \sin \frac{x}{2}$.

R. a) Se reduce la: $\cos x (2 \cos x - 1) = 0$, etc., $x = 90^\circ$, $x = 60^\circ$;

b) $\cos 2x = 0$, $\sin 2x = \frac{1}{2}$ etc., $x = 180$, $x = 15^\circ$;

c) $\operatorname{tg}^2 x = -1$ (rădăcini imaginare);

d) se reduce la $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2}$ și $\cos^2 \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2}$, etc.,

$x = 0$, $x = 0$, sau 90° .

7. In semicercul de centru O și rază $R = 3,78$ m. (fig 104), se duce coarda AM care face unghiul x cu diametrul AB al semicercului; se cere să se afle x ; astfel ca aria triunghiului AMB să fie egală cu 10 m^2 ?

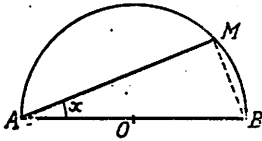


Fig. 104

$$R. 20 = AB \sin x \cos x = \frac{AB^2}{2} \sin 2x,$$

deci $\sin 2x = \frac{40'}{7,562}$ și observând că $x < 90^\circ$,
 $x = 22^\circ 12' 30''$.

8. In triunghiul dreptunghiu ABC (fig. 105) se dă: $AB = 5,27$ m. și $C = 19^\circ 28' 15''$; se ia pe ipotenusă lungimea

$CD = \frac{1}{4} BC$ și se cere să se afle lungimea

$AD = x$ și $\widehat{CAD} = y$.

Indicație: Se duce perpendiculara DD' și

se va observa că $DD' = \frac{1}{4} AB$, $D'C = \frac{1}{4} AC$;

prin urmare în triunghiul ADD' se cunosc elementele necesare pentru a afla x și y .

Se găsește ecuația:

$$\operatorname{tg} y = \frac{DD'}{AD'} = \frac{\frac{AB}{4}}{\frac{3}{4} AB \operatorname{cotg} C} = \frac{1}{3 \operatorname{cotg} C}; \quad y = 6^\circ 43' 17''; \quad x = 11,256 \text{ m.}$$

9. Se consideră unghiul $AOB = 2x$ și bisectrița sa OC (fig. 106); dintr'un punct M al laturei OB se coboară perpendiculara MN pe OA iar din N , perpendiculara NP pe bisectrița OC ; se cere să se determine unghiul x astfel ca să avem:

$$\frac{MN}{OM} = \frac{OP}{2ON}$$

indicație: Se va observa că din triunghiurile dreptunghice OMN, ONP, avem:

$$\frac{MN}{OM} = \sin 2x, \quad \frac{OP}{ON} = \cos x$$

avem deci de rezolvat ecuațiunea:

$$\sin 2x = \frac{\cos x}{2}$$

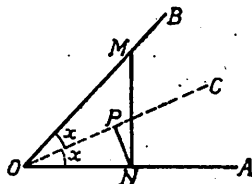


Fig. 106

care ne dă: $\cos x = 0$ și $\sin x = \frac{1}{4}$, deci $x = 90^\circ$ și $x = 23^\circ 34' 41''$.

Se va verifica că ambele soluții satisfac problema.

10. O placă dreptunghiulară OABC în care $OA = \frac{OC}{4}$ este suspendată

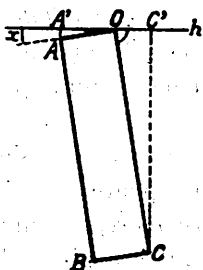


Fig. 107

într'un plan vertical, în poziția din figura 107; știind că în această poziție există relația:

$$2OA' = 3OC'$$

se cere să se determine unghiul x .

$$\text{R: avem: } \begin{aligned} OA' &= OA \cdot \cos x; \\ OC' &= OC \cos (90^\circ - x) \end{aligned}$$

$$\text{Deci: } \frac{OA'}{OC'} = \frac{OA}{OC} \frac{\cos x}{\cos (90^\circ - x)} = \frac{3}{2};$$

$$\text{sau cu } \frac{OA}{OC} = \frac{1}{4}$$

$$\cos x = 6 \cos (90^\circ - x) = 6 \sin x$$

$$\log \operatorname{tg} x = \overline{1,22185}; \operatorname{tg} x = \frac{1}{6}; \quad x = 9^\circ 27' 45''.$$

CAP. XII.

APLICAȚIUNI ALE TRIGONOMETRIEI LA AGRIMENSURA.

Una din aplicațiunile cele mai interesante ale Trigonometriei este măsurarea dimensiunilor și ariei unei părți din suprafața pământului.

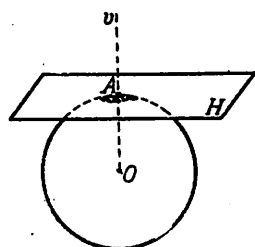


Fig. 108

Dacă suprafața care ne interesează este mare, trebuie să ținem seama de *sfericitatea* (de curbura) globului pământesc. Știința care studiază acest fel de probleme se numește **GEODEZIE** ¹⁾.

Dacă însă suprafața pe care voim s'o măsurăm este relativ mică, ea poate fi considerată, *fără a face o eroare mare*, ca fiind o suprafață plană, situată într'un plan H tangent la globul pământesc (fig. 108).

Studiul măsurării suprafețelor relativ mici de pe pământ, *fără a ține seama de sfericitatea globului pământesc, îl face TOPOGRAFIA.*

¹⁾ Agrimensura (sau Arpentajul) erau cunoscute din antichitate, de Chaldeenii și Egipteni.

Topografia modernă s'a dezvoltat însă odată cu cercetările întreprinse de geometrie și astronomie pentru *măsurarea unui arc de meridian pământesc.*

Geometrul *Snellius Willebrord* din Leida (1591—1626), astronomii *Riccioli* (1598—1671, născut la *Ferrare*) și *Picard* (1620—1682, născut la *La Flèche* în Franța) au făcut primele măsurători moderne ale arcului de meridian pământesc, măsurători care au fost continuu perfecționate până în zilele noastre.

Partea din Topografie care se ocupă în special cu măsurarea terenurilor productive: câmpuri semănate, vii, livezi, etc., se numește AGRIMENSURA ¹⁾ sau ARPENTAJ ²⁾.

PLANIMETRIE ȘI ALTIMETRIE.

Un teren este în general o suprafață curbă ABCDEF... (ondulată, accidentată) (fig. 109).

La măsurarea unui teren intervin cu deosebire două categorii de probleme.

I. *Exemple: 1.* Să considerăm o suprafață de teren înclinată AB (fig. 110 a) care este semănată sau pe care se găsesc plantați pomi;

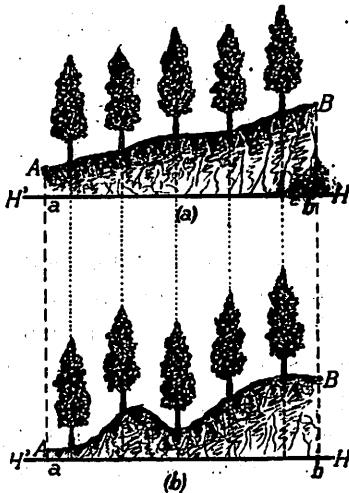


Fig. 110

nu depind de înclinarea terenului ci numai de proiecțiunea lui, ab ,

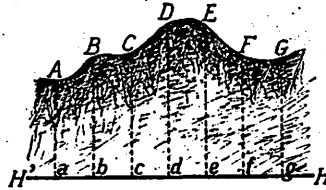


Fig. 109

să observăm că deoarece semănăturile, pomii, ... cresc vertical, cantitatea de vegetație nu depinde de undulațiile terenului AB ci de mărimea proiecțiunii ab a lui, pe un plan orizontal.

În fig. 110 a și b se arată două terenuri de forme diferite cu pomi, însă având aceeași proiecțiune orizontală $ab = a'b'$; pe amândouă aceste suprafețe de teren, numărul pomilor ce se pot sădi este același.

2. Dacă pe un teren înclinat, vom să clădim o casă (fig. 111), suprafețele podelelor și a tavanelor,

¹⁾ Agrimensură înseamnă măsurarea câmpurilor.

²⁾ Arpentajul este numirea ce se dă obișnuit operațiilor de măsurare a unui teren de întindere mică: o curte, o livadă, etc.

pe un plan orizontal; aceasta deoarece podelele și tavanele se fac orizontale și avem: $AC = ED = ab$ iar costul unei clădiri se socotește ținând seama de prețul unui m^2 de construcție, în proiecție orizontală.



Fig. 111

Din aceste exemple rezultă că în unele chestiuni interesează numai *proiecțiunea unui teren pe un plan orizontal*.

Definiție. Partea din Topografie care se ocupă numai de reproducerea pe desen a proiecțiunii pe un plan orizontal al unui teren, se chiamă *Planimetrie*; desenul astfel obținut este *planul terenului*.

II. În alte chestiuni interesează însă și forma ondulată pe care o are terenul și anume diferențele dintre cotele diferitelor puncte, spre ex.: $BB' = Bb - Aa$; $CC' = Cc - Bb$, etc. (fig. 112).

Exemple: 1. Când voim să facem o șosea sau să construim o cale ferată, într'o regiune cu teren accidentat (în relief) este adeseori necesar să tăiem pământul în unele locuri și să împlinim (să umplem) în alte locuri; pentru acest scop trebuie să putem evalua cantitățile de pământ ce vor trebui săpate sau cu ajutorul cărora va trebui să umplem anume regiuni; aceste volume de pământ depind prin urmare de forma reliefului și este necesar deci să cunoaștem cotele punctelor lui (vezi și pag. 265).

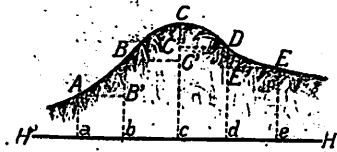


Fig. 112

2. Dacă voim să facem o hartă pe care să se arate și înălțimile diferitelor locuri de pe pământ, trebuie de asemenea să aflăm cotele diferitelor puncte de pe teren.

Definiție. Partea din Topografie care se ocupă cu relieful terenului și stabilește cotele punctelor lui în raport cu un plan orizontal de comparație, se numește *Altimetrie* sau *Nivelment*.

Desenul obținut prin aceste operațiuni se numește *profilul terenului*.

Instrumente întrebuințate în argimensură.

Pentru însemnarea diferitelor puncte, care delimitează terenul al cărui plan voim să-l ridicăm, se întrebuințează: țaruși, fișe și jaloane.

a) *Țarușul* este o bucată de lemn, de 40—50 cm, ascuțită la unul din capete; înfigerea lui în pământ se face lovindu-l cu un ciocan sau cu un alt corp tare. (fig. 113).



Fig. 113

b) *Fișa* este o vergea de fier de aproximativ 50 cm lungime, terminată la un capăt cu un vârf ascuțit, iar la capătul celălalt cu un inel. Fișa se întrebuințează cu deosebire pentru însemnarea provizorie a punctelor pe teren (fig. 114).

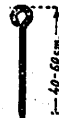


Fig. 114

c) *Jalonul*. Dacă este necesar însă ca punctele însemnate pe teren să fie văzute din depărtare se întrebuințează *jalonul*, care este o tijă (prăjină) în mod obișnuit de 1,50—2,50 m înălțime și cu o grosime de 3—4 cm; la capătul care se înfige în pământ, jalonul are o îmbrăcăminte de fier, terminată cu un vârf ascuțit, spre a putea pătrunde cu ușurință în teren (fig. 115). La capătul superior, jalonul prezintă o tăietură verticală, în care se poate fixa o tablă de fier (miră). Pentru ca jalonul (care servește și ca semnal), să poată fi văzut din depărtare se vopsește în mod alternativ cu roșu și alb, iar tabla de fier deasemeni este vopsită în alb și roșu.



Fig. 115

Jaloanele trebuiesc înfipite în pământ, în poziție verticală, ceea ce se verifică cu ajutorul *firului cu plumb* (fig. 116).

Aplicații. 1. Stabilirea unei linii drepte pe teren. O dreaptă fiind determinată prin două puncte A, B, este suficient să înfigem în

teren, în aceste puncte, doi țaruși sau două jaloane.

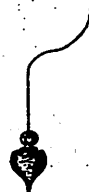


Fig. 116

Dacă punctele A și B sunt prea depărtate, se poate întinde o sfoară, care legată de cele două jaloane, hotărăște poziția pe teren, a dreptei AB.

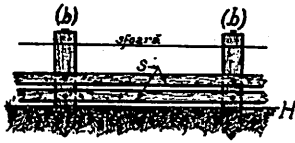


Fig. 117

Așa se procedează când se construiesc gardurile, ce separă două proprietăți; jaloanele sunt înlocuite în acest caz cu stâlpii de lemn (b) (sau bulamacii) ce formează împreună cu scândurile (s) gardul (fig. 117).

Se spune în vorbirea obișnuită că s'au așezat bulamacii la sfoară.

Dacă punctele A și B sunt relativ depărtate (distanța între ele fiind mai mare de 15—20 metri) se obișnuiește să se fixeze, între A și B și alte puncte C, D, ... pentru ca dreapta AB să fie cât mai bine hotărâtă. În acest scop se procedează astfel: un observator (de obicei conducătorul operației) se așează de o parte a jaloanelor A, B la oarecare distanță și astfel încât privind jalonul A, acesta să acopere complet jalonul B (fig. 118) aceasta înseamnă că raza sa vizuală coincide cu direcția AB.

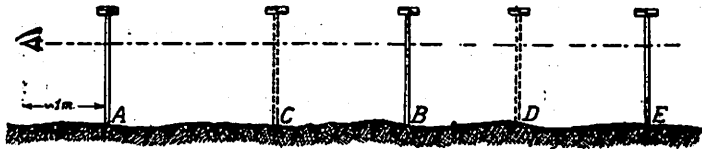


Fig. 118

În această situație, el face semn unui ajutor care poartă cu el jalonul C spre ex., să-l țină mai spre dreapta sau mai spre stânga, până ce jalonul A acoperă jalonul C. În această poziție, la un semn al său, ajutorul înfige jalonul C în pământ.

Acest procedeu este întrebuințat și la prelungirea dreptei AB, dincolo de B, sau dincoace de A.

Punctele A, C, B, D... astfel fixate se zice că sunt în *alinia-*
ment, iar operația de mai sus se chiamă și *trasarea aliniamentului*
(sau *aliniera* jaloanelor, sau *jalonarea* dreptei AB, sau *trasarea*
pe teren a dreptei AB).

2. *Determinarea punctului de intersecție a două drepte de pe teren.*

Fie două aliniamentele AB și CD, jalonate cum s'a arătat mai
sus (fig. 119); pentru a fixa
pe teren punctul lor O de
intersecție, operatorul pri-
vește neconținut în direcția
AB, iar ajutorul său ține
cu mâna întinsă, în fața sa,
un al 2-lea jalon și se mișcă
astfel ca jalonul său să aco-
pere complet jaloanele D
și E. În modul acesta el
se mișcă în direcția CDE;
când operatorul face semn ajutorului, să înfigă jalonul în pământ,
acest jalon se va găsi și pe aliniamentul AB, adică la intersecția
aliniamentelor.

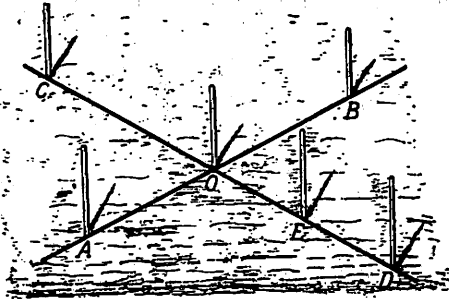


Fig. 119

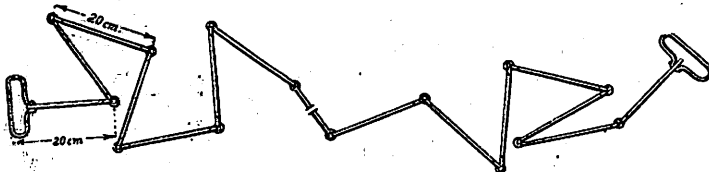


Fig. 120

Pentru măsurarea unei lungimi pe teren, se întrebunțează cu
deosebire: lanțul, ruleta și panglica.

a) *Lanțul* are de obicei o lungime de 10 metri și este format
din 50 verzele de sârmă groasă (fig. 120), terminate la capete cu
câte un inel; două verzele consecutive sunt legate prin inele de

legătură de fier; vergelele sunt astfel construite, încât distanța dintre centrele a două inele de legătură este 20 cm, astfel că:

$$50 \text{ vergele} \times 20 \text{ cm} = 10 \text{ metri}$$

După fiecare cinci vergele consecutive, inelul de legătură în loc să fie de fier, este de alamă, spre a se deosebi cu ușurință metrii; inelul dela mijlocul lanțului, are un mic apendice și marchează 5 metri; la capete, lanțul se termină prin câte un mâner, de care ține câte un operator.

b) *Ruleta* (sau lanțul de buzunar) (fig. 121) este o pânză îngustă de 1,5—2 cm lățime și având o lungime de 10 m. sau 20 m. care se poate înfășura pe un ax O, situat într'o cutie rotundă. Ruleta este un instrument foarte practic pentru măsurări de mică importanță, spre exemplu pentru dimensiunile unui teren de casă, lățimii unei străzi, etc.



Fig. 121

Din cauza umidității și a întinderii pânzei, ruleta nu este un instrument de precizie.

c) *Panglica*. Lanțul are o lungime relativ mică (10 m) și măsurarea unei lungimi mai mari, cere timp, iar pe de altă parte, lanțul se sugrumă lesne, adică face noduri ceea ce poate da naștere la erori; din această cauză se întrebuițează o panglică de metal, de 50 m lungime, înfășurată într'o cruce de lemn (fig. 122). Panglica este un instrument mai precis decât lanțul.

Aplicație: *Măsurarea unei drepte situată pe un teren orizontal.*

Pentru a măsură cu lanțul distanța dintre două puncte A și B un operator ține de un capăt al lanțului în A, iar al doilea operator pleacă înaintea și are grija ca lanțul să nu facă noduri;

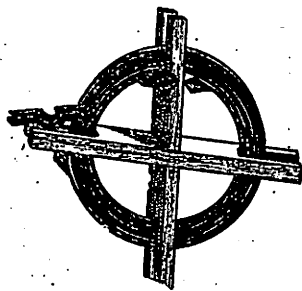


Fig. 122

când lanțul e complet întins, al doilea operator a parcurs zece metri. În această situație, operatorii după ce s'au convins că lanțul este întins în direcția liniei AB, înfig în teren câte un jalon la capetele lanțului; apoi al doilea operator scoate jalonul și înfige în pământ o fișă din cele 10 pe care le are cu el și pleacă înainte fiind urmat de primul operator. Când acesta din urmă a ajuns în dreptul fișei, al doilea operator a mai parcurs zece metri și înfige în pământ o a doua fișă, rămânând (în mână) numai cu 8 fișe, etc.

După 100 metri, dela locul de plecare, primul operator care a strâns cele 10 fișe înfipte în pământ de al doilea operator, i le restituie acestuia și operația începe din nou. Astfel, dacă în urma ajungerii în punctul B, s'a făcut de 5 ori schimbarea fișelor și al doilea operator mai are trei fișe în mână, iar între punctul B și locul ultimei fișe este o distanță de 3,20 m, distanța AB va fi:

$$AB = 5 \times 100 + 7 \times 10 + 3,20 \text{ m} = 573,20 \text{ m.}$$

Pentru măsurarea (sau ridicarea) unghiurilor a două direcțiuni de pe teren se întrebuințează: 1) *grafometrul*; 2) *tachimetrul*, 3) *planșeta*.

1. *Grafometrul* este compus dintr'un limb semicircular gradat (fig. 123); la extremitățile diametrului AB se găsesc fixate două pinule (p , p') care determină un plan de vizare fix; aceasta este *alidada fixă*.

În jurul centrului se mișcă o *alidadă mobilă*, prevăzută și ea cu pinule (p_1 , p_1'), care determină un al doilea plan de vizare mobil.

Grafometrul se așează pe un tripied și este prevăzut cu un dispozitiv pentru verificarea orizontalității grafometrului (nivelul cu bulă de aer) și un fir cu plumb pentru ca centrul O

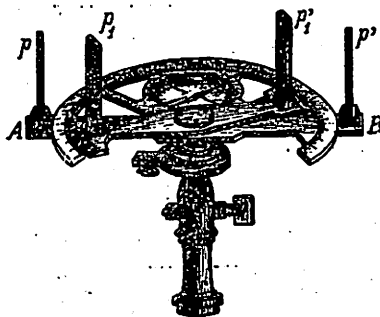


Fig. 123

al instrumentului să se proiecteze exact în vârful o al unghiului xoy de măsurat (fig. 124).

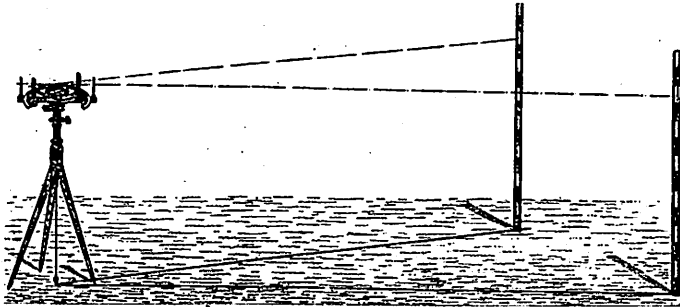


Fig. 124

Se procedează astfel: *se pune aparatul în stație*, adică se aranjează ca planul grafometrului să fie orizontal, iar centrul lui O să fie pe verticala vârfului o al unghiului xoy , ale cărui direcții sunt fixate prin jaloanele din x și y .

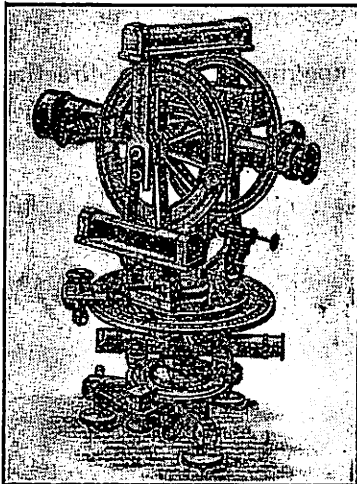


Fig. 125

Alidada fixă se așează în direcția laturii Ox , spre $ex.$ și se rotește alidada mobilă, până ce vizăm jalonul din punctul y ; în această poziție, citim pe grafometru xoy .

2. *Tachimetrul* este un instrument mai perfecționat (fig. 125), de care se servesc inginerii atât pentru operațiuni de planimetrie cât și de altimetrie. El permite:

1. Măsurarea unghiurilor situate în plane orizontale (sau proiecția unghiurilor pe plane orizontale).
2. Măsurarea unghiurilor situate în plane verticale.

3. Măsurarea distanțelor dela diferite puncte de pe teren la stația în care ne aflăm.

În fig. 125 se arată un tachimetru, instrument delicat și scump și care presupune la operator nu numai cunoașterea funcționării lui dar și o deosebită grijă în manipulare.

3. *Planșeta* se compune dintr'o planșetă de desen, așezată pe un tripied (fig. 126).

Pe hârtia de desen, întinsă pe planșetă se găsește o *riglă de metal* divizată în cm, care servește atât la trasarea liniilor drepte cât și pentru măsurarea diferitelor lungimi.

La capetele riglei și perpendicular pe ea, sunt două plăci dreptunghiulare de metal (p, p') numite *pinule* prevăzute fiecare cu câte o fereastră, ca și la echerul (fig. 127) care servește la trasarea perpendicularelor.

Rigla și cu pinulele ei constituie o *alidada*.

Cu planșeta putem trasa direct pe hârtia de desen, unghiuri egale cu acelea de pe teren, spre ex. \widehat{BAC} (fig. 126).

În acest scop, după ce așezăm planșeta în stație (vezi mai sus: grafometrul), vizăm cu ochiul direcția laturii AB spre ex. și trasăm pe marginea riglei o dreaptă; întoarcem alidada, până ce vizăm direcția AC a celeilalte laturi și repetăm operațiunea.

În modul acesta avem pe desen trasat un unghi \widehat{bac} egal cu \widehat{BAC} de pe teren.

Pentru trasarea pe teren a două drepte perpendiculare, se folosește echerul.

Echerul (sau pantometrul) este compus dintr'o prismă octogonală regulată; pe fețele A, B, C, D (fig. 127 și 128) se găsește câte o fereastră numită *pinulă*, formată dintr'o parte ab mai largă

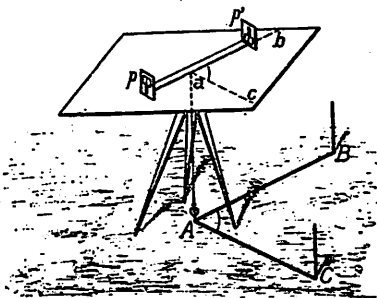


Fig. 126

și alta cd mai îngustă; pe partea ab și în prelungirea deschiderii cd se găsește un fir subțire. Pe fața opusă B a echerului fereastra are partea mai largă sus și partea mai îngustă jos.

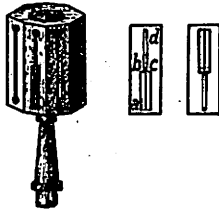


Fig. 127

Observatorul poate viza prin ferestrele a două fețe opuse; întreg aparatul se poate așeza pe un tripied.

Pentru a ridica o perpendiculară CD pe dreapta AB , așezăm aparatul astfel ca centrul lui O să fie pe verticala punctului O de pe teren, iar unul din planele de vizare (de pe fețele 1 și 2) să fie în direcția AB ; un ajutor este trimis cu un jalon în direcția OD , și este îndreptat mai la stânga sau mai la dreapta, până ce este văzut în direcția de vizare (3, 4) care este perpendiculară pe prima.

Echerul mai poate servi și pentru trasarea a două direcții care să facă între ele un unghi de 45° , sau pentru trasarea unui aliniament.

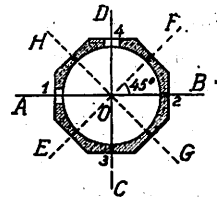


Fig. 128

APLICAȚII.

Aflarea distanței dintre două puncte accesibile, despărțite printr'un obstacol. Fie punctele accesibile A, B (fig. 129), care sunt despărțite prin obstacolul O ; din această cauză nu putem măsura cu instrumentele distanța $x = AB$, ci trebuie să o aflăm prin calcule. În acest scop alegem pe teren un punct C din care să se vadă ambele puncte A și B , iar distanțele CA, CB , să se poată măsura.

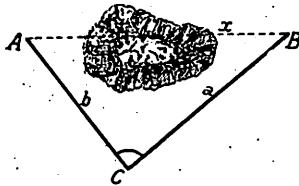


Fig. 129

Măsurăm deci, lungimile $AC = b$, $BC = a$ și \widehat{ACB} ; în triunghiul ACB se cunosc astfel două laturi și unghiul cuprins,

deci se poate afla prin calcul și latura a treia AB (vezi cazul II pag. 174).

Aplicație numerică: $a = 437$ m, $b = 592$ m., $\hat{C} = 39^\circ 34'$. Se găsește prin formula:

$$\operatorname{tg} \frac{B-A}{2} = \frac{b-a}{b+a} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}; \quad B-A = 45^\circ 26' 44''; \quad A+B = 140^\circ 26'$$

$B = 92^\circ 56' 22''$, $A = 47^\circ 29' 38''$, iar prin relația sinusului:

$$x = c = \frac{a \sin C}{\sin A}, \quad c = 377,58 \text{ m.}$$

Aflarea distanței dintre un punct accesibil și altul inaccesibil.
Fie A un punct accesibil, B un punct inaccesibil (fig. 130); pentru a măsura distanța $AB = x$, alegem pe teren un al doilea punct accesibil C din care să se vadă și punctul B.

Măsurăm cu instrumentele ce au fost descrise:

lungimea $AC = b$, \widehat{BCA} și \widehat{CAB}

În triunghiul ABC cunoaștem acum o latură și unghiurile adiacente.

Aplicând cele stabilite la cazul I (pag. 170), găsim:

$$\frac{x}{\sin C} = \frac{a}{\sin (180^\circ - A - C)} = \frac{a}{\sin B}$$

deci

$$x = \frac{a \sin C}{\sin B}$$

Aplicație numerică: $AC = 879$ m, $\hat{A} = 75^\circ 20'$, $\hat{B} = 48^\circ 36'$.

Se găsește $x = 794,717$ m.

Prelungirea unei drepte pe teren dincolo de un obstacol. Se cunoaște distanța $AB = l$ și se pune chestiunea să prelungim dreapta AB dincolo de obstacolul O (fig. 131).

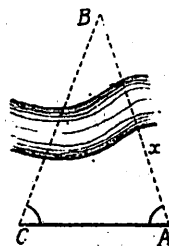


Fig. 130

În acest scop alegem pe teren un punct C, din care un observator să poată vedea atât punctele A și B cât și locul în care trebuie prelungită dreapta AB.

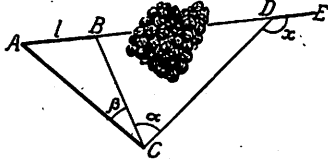


Fig. 131

Chestiunea va fi rezolvată, dacă vom putea determina poziția unui punct D al direcției AB (spre exemplu lungimea CD) situat dincolo de obstacol, precum și unghiul $x = \widehat{CDE}$ format de prelungirea

căutată DE și de direcția CD *aleasă de noi în mod arbitrar*.

1. Pe teren măsurăm: distanța $AB = l$, unghiul CAB, unghiul ABC și unghiul BCD = a .

2. Prin calcul rezolvim triunghiul ABC astfel:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{[\sin 180^\circ - (A + B)]} = \frac{l}{\sin (A + B)}$$

deci aflăm lungimea

$$(1) \quad BC = \frac{l \sin A}{\sin (A + B)}$$

unghiul $x = \widehat{EDC}$ fiind exterior triunghiului BCD, avem:

$$(2) \quad x = (180^\circ - B) + a = 180^\circ - (B - a)$$

care este cunoscut, deoarece unghiurile B și a au fost măsurate.

Din triunghiul CBD găsim:

$$\frac{CD}{\sin (180^\circ - B)} = \frac{BC}{\sin x}$$

sau

$$\frac{CD}{\sin B} = \frac{BC}{\sin (B - a)}$$

sau

$$CD = \frac{BC \sin B}{\sin (B - a)}$$

înlocuind pe BC cu valoarea sa din (1) obținem:

$$(3) \quad CD = \frac{l \sin A \sin B}{\sin(A+B) \sin(B-a)}$$

Aplicație numerică. $l = 1.020$ m, $\hat{B} = 117^\circ 20' 36''$; $\hat{A} = 29^\circ 38'$;
 $\hat{a} = 62^\circ 18'$;

Se găsește: $x = B - a = 156^\circ 56'$

$$CD = \frac{1020 \sin 29^\circ 38' \sin 117^\circ 20' 36''}{\sin(117^\circ 20' 36'' + 29^\circ 38') \sin(117^\circ 20' 36'' - 62^\circ 18')}$$

$$\log CD = 3,95353$$

$$CD = 8985,4 \text{ m}$$

Aflarea distanței între două puncte inaccesibile. Fie A și B două puncte inaccesibile, a căror distanță voim s'o aflăm ($x = AB$) (fig. 132); în acest scop, alegem două puncte C și D în regiunea ce ne este accesibilă și din care putem viza punctele A și B.

Se măsoară: lungimea CD (căreia i se zice și baza măsurătorii) precum și unghiurile $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$ și $\hat{4}$.

Din triunghiul BCD, găsim:

$$BC = \frac{CD \sin \hat{2}}{\sin(\hat{2} + \hat{3} + \hat{4})}$$

Din triunghiul ACD aflăm:

$$AC = \frac{CD \sin(\hat{1} + \hat{2})}{\sin(\hat{1} + \hat{2} + \hat{3})}$$

Observăm acum că în triunghiul ABC cunoaștem: laturile AC și BC (calculate) și unghiul cuprins $\hat{ACB} = \hat{4}$ (măsurat).

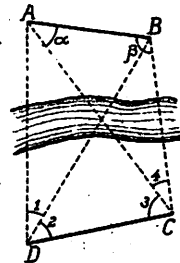


Fig. 132

Putem deci rezolva acest triunghi (vezi cazul II, pag. 174) și afla lungimea $x = AB$.

Aplicație numerică. $DC = 485$ m, $\hat{1} = 39^\circ 48'$, $\hat{2} = 27^\circ 34'$,
 $\hat{3} = 64^\circ 8'$, $\hat{4} = 40^\circ 28'$.

Măsurarea înălțimilor dela distanță. Pentru a măsura înălțimea

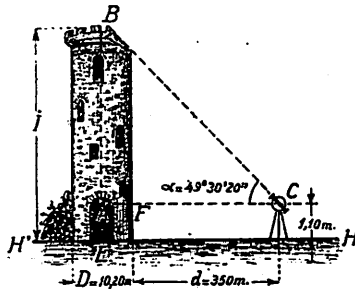


Fig. 133

$EB = I$ a turnului clădit pe un teren orizontal așezăm tachimetrul în punctul C și măsurăm $\widehat{BCA} = \alpha$, iar cu lanțul sau panglica măsurăm distanța $CA = l^1$ (fig. 133).

Din triunghiul dreptunghi CBA, avem: $AB = l \operatorname{tg} \alpha$; dacă h este înălțimea punctului C deasupra orizontalei:

$$I = BE = BA + h = l \operatorname{tg} \alpha + h$$

Aplicație numerică $h = 1,10$ m; $\alpha = 49^\circ 30' 20''$, $D = 10,20$ m
 $d = 350$ m.

PLANIMETRIE.

S'a arătat mai sus (pag. 246) că planimetria are de obiect reprezentarea pe un plan orizontal, a proiecțiunii unui teren, a unei clădiri, etc.

A *ridica planul* unui teren, înseamnă a efectua pe teren, măsurătorile de unghiuri și distanțe, care determină forma și mărimea terenului.

¹⁾ În practică măsurăm distanța $C'E = CA$. Dacă turnul are o bază circulară spre ex. și nu putem intra înăuntru sau nu avem posibilitatea să-i măsurăm diametrul, atunci măsurăm lungimea cercului pe dinafară și deducem diametrul, deci și distanța AF care adăugată la C'E ne dă lungimea CD.

Așezarea pe o hârtie de desen, a mărimilor *ridicate pe teren* se chiamă *raportarea planului*.

Deoarece, pe desen, nu putem raporta un plan în *adevărată mărime*, se desenează o figură *asemenea* cu figura reală.

Scara de reducere este raportul dintre lungimile desenate pe plan și lungimile reale de pe teren.

Scara unui desen, se poate reprezenta:

1. *Printr'o fracțiune al cărei numărător este unitatea*; spre ex.

scara $\frac{1}{1000}$, înseamnă că 1 metru de pe plan, reprezintă 1000

metri de pe teren; aceasta înseamnă că 4,3 dm, de pe desen, reprezintă 430 m din natură, 12,3 cm de pe desen vor reprezenta 123 metri din natură, etc.

Pentru planuri de clădiri, se obișnuște să se scrie, în josul planului: spre ex. *scara: 2 cm = 1 m*, adică 2 cm de pe plan reprezintă 1 metru de pe teren; această scară este echivalentă cu

scara $\frac{1}{50}$.

2. *Grafic*. Fie spre exemplu scara $\frac{1}{50.000}$; aceasta înseamnă

că 1 metru de pe desen reprezintă 50.000 metri de pe teren, sau

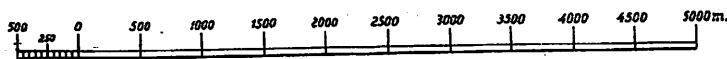


Fig. 134

1 cm de pe desen va reprezenta 500 metri de pe teren. Pentru a face o scară grafică pentru acest caz, desenăm două linii paralele foarte apropiate (la 1—2 mm distanță) și însemnăm pe ea în dreptul diviziunilor 1 cm, 2 cm, 3 cm . . . , 500 m, 1000 m, 1500 m . . . (fig. 134).

Pentru a aprecia fracțiuni de cm de pe desen, se prelungește scara spre stânga punctului 0 cu un cm și se împarte acest cm în 10 mm. Această prelungire se chiamă *talonul* scării. Astfel dacă avem de măsurat pe desen o lungime de pe teren de 1750 metri,

punem piciorul compasului în dreptul diviziunii 1500 și celălalt capăt în dreptul diviziunii 250 de pe talon.

Metode de ridicare a planului unui teren.

I. Metoda perpendicularelor. Fie de ridicat terenul în forma unui pentagon ABCDE (fig. 135). Se alege diagonala cea mai lungă

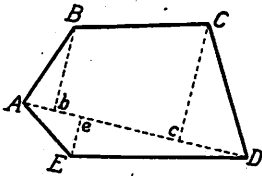


Fig. 135

AD și se coboară cu ajutorul echerului perpendicularele Bb, Cc, Ee (așa precum s'a arătat la pag. 254). Se măsoară apoi cu lanțul distanțele Ab, be, ec, cD, precum și lungimile perpendicularelor Bb, eE, cC.

Cu aceste elemente putem desena apoi planul, la o scară oarecare și calcula aria terenului, ca fiind suma unor triunghiuri și trapeze.

Observare. În metoda perpendicularelor, instrumentele necesare sunt deci lanțul și echerul.

II. Metoda prin radiere (sau prin raze concurente) constă în a alege un punct interior O, din care ducem razele OA, OB, ... OE (fig. 136); poligonul se descompune astfel într'o sumă de triunghiuri. În aplicarea acestei metode putem proceda în mai multe chipuri:

1. Ridicarea numai cu lanțul. Se măsoară cu lanțul, laturile tuturor triunghiurilor și apoi se construiește la scară planul poligonului.

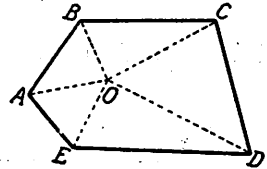


Fig. 136

Ca verificare, trebuie ca atunci când desenăm triunghiurile OAB, OBC, OCD, ODE, OEA, primul și ultimul triunghi (OAB și OEA), să aibă o latură comună: OA, adică suma unghiurilor din jurul punctului O să fie de 360° .

2. Ridicarea cu lanțul și grafometrul constă în a măsura cu lanțul lungimile razelor OA, OB... OE, iar cu grafometrul, unghiurile AOB, BOC... EOA.

3. Ridicarea cu lanțul și planșeta. S'a descris la pag. 253 planșeta și modul de operațiune cu ea, pentru ridicarea unui

unghiuri de pe teren și desenarea lui pe planșetă. Ridicarea cu planșeta constă (în cazul *metodei prin radiere*) în a așeza planșeta în punctul O, a viza pe rând vârfurile A, B, ... E și a desena pe planșetă unghiurile AOB, BOC, ... DOE (fig. 137).

Cu ajutorul lanțului, măsurăm pe teren, lungimile razelor OA, OB ... OE și le raportăm la scară, pe desenul de pe planșetă.

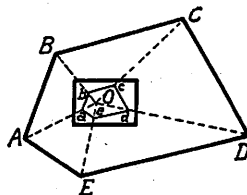


Fig. 137

Observare. Se vede de aci că planșeta cu alidada ei servește la ridicarea unui unghi, care este raportat direct, în mod grafic, pe desen.

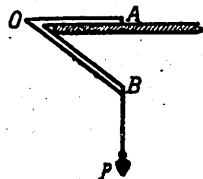


Fig. 138

Operațiunea cu planșeta, este precedată de punerea în stație, adică aranjarea (cu ajutorul firului cu plumb sau al unei cumpăne de metal sau de lemn (fig. 138) ca punctul O de pe planșetă să se găsească exact pe verticala punctului O de pe teren; la rândul

ei planșeta trebuie să fie orizontală, ceea ce se verifică cu o nivelă cu bulă de aer.

Când dimensiunile terenului nu sunt prea mari (fig. 139) punctul O se alege chiar într'unul din vârfurile poligonului, spre exemplu în A de unde se duc diagonalele AD, AC și se descompune astfel poligonul în triunghiuri.

III. Metoda de ridicare prin intersecții constă în alegerea unei baze MN în interiorul terenului care se măsoară cât mai exact. Din extremitatea M a acestei baze ducem razele MA, MB ... ME și măsurăm unghiurile AMB, BMC, etc.; repetăm operația, în cealaltă extremitate N, măsurând unghiurile ANB, BNC, ... (fig. 139).

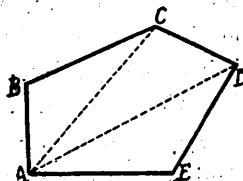


Fig. 139

Desenând pe plan, la scară, baza MN în m_n și unghiurile de mai sus, intersecțiile dreptelor MA și NA, MB și NB și NC ... etc. care

formează unghiurile de mai sus, ne dau vârfurile A, B, C, ... E ale poligonului.

Metoda prin intersecții, ne scutește deci să mai măsurăm lungimile razelor MA, MB ..., este suficient să măsurăm exact baza MN.

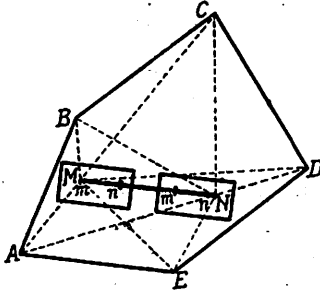


Fig. 140

Practic, această metodă se aplică:

1. *Intrebuințând planșeta.* În care scop se trasează pe ea în mn , la scara aleasă, lungimea bazei MN și așezând-o în stație în punctul M, facem ca direcția mn de pe planșetă să fie paralelă cu direcția MN de pe teren. În această pozițiune, *trasăm* pe planșetă unghiurile AMB, BMC... (fig. 140).

Mutăm planșeta în N și aranjăm întâiu ca direcția nm să fie paralelă cu direcția NM și *trasăm* pe planșetă unghiurile ANB, BNC...

Din *intersecțarea* dreptelor AM și AN, BM și BN, ... etc. rezultă *pe desen* vârfurile A, B, ... E ale poligonului.

1. *Intrebuințând grafometrul.* Prin acest procedeu în loc de a *trasa* direct pe desen unghiurile ca în cazul folosirii planșetei, *se măsoară* unghiurile AMB, ANB, ... și se raportează aceste unghiuri pe desen.

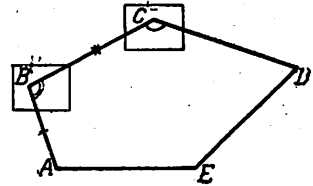


Fig. 141

IV. *Metoda prin îndrumuire,* se aplică cu deosebire atunci când nu putem face măsurători în interiorul terenului de ridicat, spre exemplu când ridicăm o pădure, un oraș mărginit de șosele, etc.

Metoda constă în a măsura laturile AB, BC... EA și unghiurile A, B, ... E (fig. 141).

Ca instrumente putem întrebuința: 1) *lanțul și planșeta* sau 2) *lanțul și grafometrul.*

Comparație între metodele de ridicare a planelor. Fiecare din metodele de mai sus se întrebuițează cu deosebire în anumite cazuri care convin procedului respectiv.

Când voim să ridicăm un teren, și procedăm la o triangulație, punctele mai importante — cum ar fi într'un oraș, o piață, o clădire importantă, etc. — se numesc *puncte principale*; punctele de mai mică importanță sunt *puncte secundare*.

Astfel, *metoda perpendiculararelor* se aplică în cazul unui teren de întindere mai mică; *metoda intersecțiilor* pentru terenuri mari; iar *metoda radierii* pentru detalii.

Metoda îndrumirii se întrebuițează cum s'a arătat mai sus, când nu putem pătrunde în interiorul terenului.

Ridicarea cu planșeta se întrebuițează când terenul este deschis și putem viza punctele.

Astfel pentru ridicarea unui oraș, se face o îndrumire ABCD pe arterele mai importante; ABCD sunt *puncte principale*; din această îndrumire, prin metoda perpendiculararilor (1, 1), (2, 2)... sau a radierii (Da, Db...) se ridică și punctele vecine secundare (fig. 142).

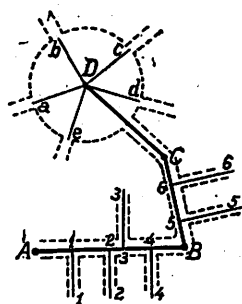


Fig. 142

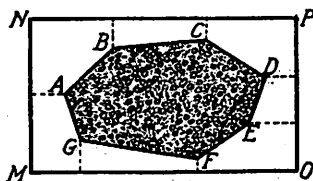


Fig. 143

Calculul suprafeței terenului ridicat.

Se face prin calcularea ariilor figurilor (triunghiuri, trapeze) în care se descompune terenul ridicat.

Pentru calcularea ariei unei păduri (fig. 143) (sau al unui teren în care nu putem pătrunde) se face o îndrumire ABCD... pe marginea pădurii și se circumscrie un dreptunghi MNPQ, ridicându-se partea exterioară a pădurii prin metoda perpendiculararelor; aria terenului ABCD se află scăzând din aria dreptunghiului circumscriș ariile trapezelor formate pe margine.

Calculul unei arii limitată de o curbă.

Dacă un teren este limitat și de o curbă precum BCD (fig. 144), se încearcă să se ducă o dreaptă MN astfel ca aria (1) + (2) să fie egală cu aria (3).

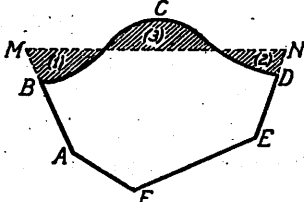


Fig. 144

În modul acesta, aria terenului dat, se poate înlocui cu a terenului poligonal ABMDEF.

Trasarea liniei MN nu este însă lesnicioasă; ea presupune o deosebită experiență din partea operatorului.

Un procedeu mai exact este următorul: pe curba BCD se iau punctele a, b, c, \dots (fig. 145) și se proiectează în a', b', c', \dots pe diagonala BE; aria BCDB se descompune într-o sumă de trapeze (și două triunghiuri la capete). Cu cât punctele a, b, c, \dots sunt mai numeroase și mai dese, cu atât rezultatul calculului este mai exact, întru cât porțiunile lăsate de o parte (neglijate) sunt mai mici.

Uneori, pentru o primă aproximație, alteori numai pentru verificarea calculului, se întrebuințează un instrument de aflare al ariilor numit *planimetru*.

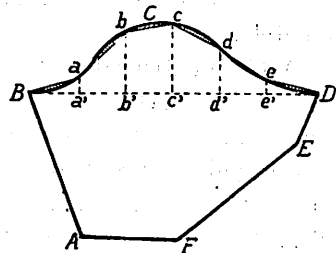


Fig. 145

ALTIMETRIE (NIVELMENT).

S'a arătat mai sus (pag. 245) că *Altimetria* sau *Nivelmentul* are ca scop determinarea distanțelor pe verticală a punctelor unui teren în *relief*, în raport cu un *plan de comparație*.

Pentru reprezentarea hărților, se obișnuiește să se ia ca plan de comparație, *suprafața mării*.

Pentru nivelmentul unui teren oarecare, făcut în scopul construirii unui drum, a unei căi ferate, a unei construcții, se ia ca plan de comparație un plan orizontal nu prea depărtat de punctele ce voim să reprezentăm.

Exemple. 1. Dacă voim să nivelăm un teren, situat în oraș (fig. 146) pentru a construi o clădire putem lua ca plan orizontal

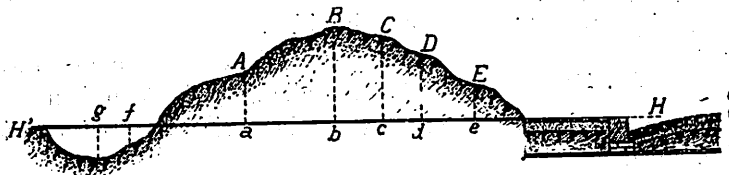


Fig. 146

de comparație, planul HH' care este suprafața superioară a trotuarului. Punctele A, B, C, ... au față de acest plan respectiv cotele pozitive Aa, Bb, Cc, adică sunt mai sus decât trotuarul; punctele D și E corespunzătoare unei gropi, au respectiv cotele negative Dd, Ee...

În urma operației de nivelare se poate afla prin calcul, cantitatea de pământ ce trebuie săpată și aceea ce trebuie adăogată (corespunzătoare gropii).

2. Pentru a construi o cale ferată, într'un teren de forma ABCD din fig. 147 se cunoaște de obicei cota h a planului orizontal al șinii (s) în raport cu un plan de comparație $H'H$ (a cărui cotă în raport cu nivelul mării este înscris pe o placă în găurile mai importante).

Prin operația de nivelment, se pot afla cotele Aa, Mm, Nn, Pp, etc. și deci calcula cantitatea de pământ (PCRQ) ce trebuie săpată și cantitatea de pământ MNPB ce trebuie adăogată pentru a putea construi platforma căii: MNQR.

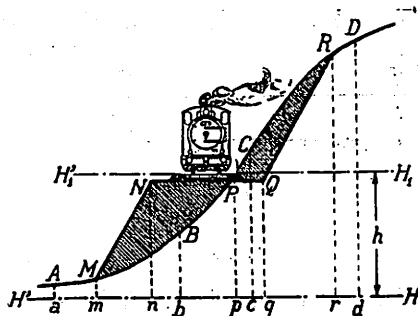


Fig. 147

Instrumentele necesare nivelmentului sunt: nivelele, tachimetrele și mirele.

1. *Nivela cu bula de aer* este compusă dintr'un tub de sticlă AB, puțin curbat pe porțiunea din mijloc și plin cu apă sau alcool, afară de un mic spațiu cu aer (bula de aer *b*) (fig. 148).

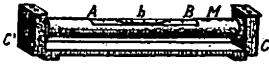


Fig. 148

Tubul de sticlă este închis într'un cilindru metalic (M) fixat pe un cadru de lemn (CC'). Bula de aer servește la verificarea *orizontalității* unei direcții sau unui plan.

Când voim să verificăm că o direcție AB este orizontală, așezăm pe ea nivela cu bula de aer; dacă bula de aer se oprește la mijlocul tubului de sticlă, iar extremitățile ei ating două liniițe gravate pe sticlă, direcția AB este orizontală.

Pentru a verifica că o suprafață plană P (fig. 149) este orizontală, verificăm ca două direcții AB și CD (de preferință perpendiculare una pe alta) să fie orizontale.

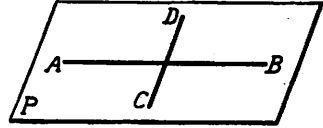


Fig. 149

2. *Nivela cu apă* servește la determinarea unei direcții orizontale. Construcția ei se bazează pe proprietatea vaselor comunicante; ea se compune dintr'un tub metallic (AB) lung de 1—1,20 m și curbat la capete în unghi drept; la capetele tubului metallic sunt prevăzute două tuburi de sticlă (t) fără fund, de același diametru (fig. 150).

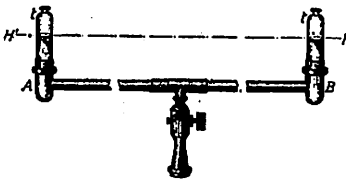


Fig. 150

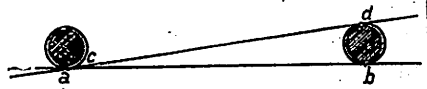


Fig. 151

În aceste tuburi (sau fiole) se toarnă apă; suprafața superioară a apei, H'H, determină un plan orizontal.

Operatorul se așează cam la 80 cm de una din fiole și astfel ca raza sa vizuală să fie tangentă la suprafețele superioare ale apei (de-a-lungul lui *ab* sau *ed*) (fig. 151).

3. *Nivela cu lunetă* (fig. 152) este un instrument care conține la un loc și nivela cu bulă de aer (n) și o lunetă (L) al cărui ax optic servește pentru vizarea punctelor A și B de pe aceeași orizontală.

4. *Tachimetrul* (aparăt care permite măsurări repezi; metron = măsură, tahus = repede) și a cărui descriere a fost făcută la pag. 252 este prevăzut cu o nivelă cu bulă de aer și o lunetă, astfel că poate servi și la determinarea orizontalelor.

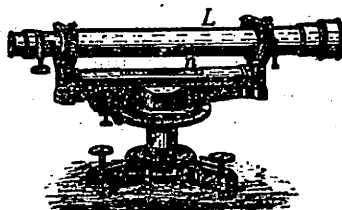


Fig. 152

5. *Nivela de pantă* (sau eclimetrul) este o nivelă care servește la măsurarea înclinării unui teren plan pe planul orizontal. Re-

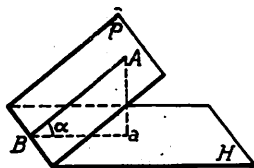


Fig. 153

amintim că unghiul α al unui plan P pe planul orizontal H (fig. 153) este unghiul plan aBA obținut prin intersectarea planelor P și H cu un plan perpendicular pe intersecția lor, (AB se numește linie de cea mai mare pantă a planului P în raport cu planul H , iar aB este proiecția liniei AB pe planul H).

Nivela de pantă este formată dintr'un cadran în formă de pătrat $ABCD$ (fig. 154), prevăzut cu un arc de cerc gradat mn și un fir cu plumb OP . Cadrul se așează pe o riglă EF , în direcția unei linii de cea mai mare pantă a planului P în raport cu planul H .

Unghiul $\alpha = \widehat{mOP}$ citit pe nivelă, având laturile $Om \perp A'B'$ și $OP \perp aB'$, este egal cu unghiul $p = \angle B'A'$, al planelor P și H .

Operații de nivelare (nivelment).

Se poate face prin două procedee: *nivelare directă* (sau geometrică), în care folosim nivelul cu apă și *nivelare indirectă* (sau trigonometrică) în care folosim nivela de pantă și tachimetrul iar pentru altitudini mari, *barometrul*.

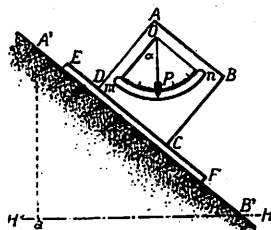


Fig. 154

A) Nivelarea directă (sau geometrică) este de două feluri:
 1. *Nivelare simplă*, care se face folosind o singură pozițiune (stațiune) a nivelului.

În fig. 155 se arată cum se face *nivelarea între două puncte A și B* (adică stabilirea diferenței cotelor acestor puncte, în raport cu un plan oarecare de comparație). Nivelul N se așează între punctele A și B, și se citește pe miră cotele acestor puncte.

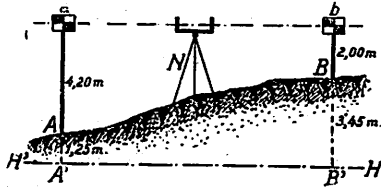


Fig. 155

Astfel dacă: $Aa = 4,20$ m și $Bb = 2,00$ m, diferența de cote este: $4,20$ m — $2,00 = 2,20$ m, adică punctul B este deasupra lui A cu $2,20$ m.

Dacă cota punctului A deasupra unui plan orizontal de comparație este $AA' = 1,25$ m, atunci

cota punctului B deasupra aceluiaș plan va fi:

$$BB' = 2,20 \text{ m} + 1,25 = 3,45 \text{ m.}$$

În figura 156, se arată cum se face din *aceiași stațiune*, nivelarea punctelor A, B, C, D, care se găsesc în linie dreaptă (aliniament). Acest procedeu se poate aplica dacă terenul este puțin accidentat, așa fel ca din stația N să putem viza toate punctele și dacă posedăm o miră mai lungă.

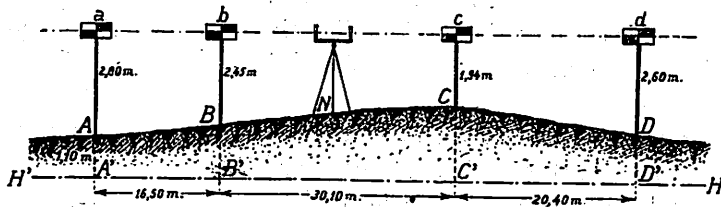


Fig. 156

Fie $AA' = 1,10$ m, cota punctului A deasupra planului orizontal de comparație $H'H'$; avem: $A'a = 2,80$ m + $1,10$ m = $3,90$ m. Să presupunem că cotele citite pe miră sunt: $Aa = 2,80$ m, $Bb = 2,45$ m, $Cc = 1,94$ m, $Dd = 2,60$ m.

Pentru a afla cotele punctelor A, B, C, D... de pe teren, în raport cu planul H'H scădem din cota Aa = 2,80 m, cotele citite pe miră găsim:

$$AA' = 3,90 \text{ m} - 2,80 \text{ m} = 1,10 \text{ m}; \quad BB' = 3,90 \text{ m} - 2,45 \text{ m} = 1,45 \text{ m}$$

$$CC' = 3,90 \text{ m} - 1,94 \text{ m} = 1,96 \text{ m}; \quad DD' = 3,90 \text{ m} - 2,60 \text{ m} = 1,30 \text{ m}$$

Aceste rezultate se așează de obicei într'un tablou:

Punctele	Distanțele între puncte pe orizont	Cotele citite	Diferențe de cotă		Cota punctelor față de planul de comparație
			Urcând	Coborind	
A	0	2,80	—	—	1,10
B	16,50 m	2,45	0,35	—	1,45
C	30,10 m	1,94	0,51	—	1,96
D	20,40 m	2,60	—	0,76	1,30

și apoi se desemnează *profilul în lung al terenului* (fig. 157).

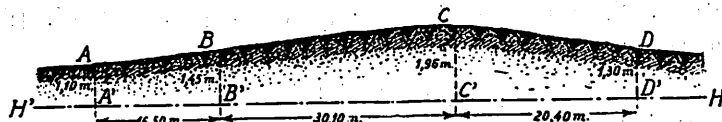


Fig. 157

2. *Nivelarea compusă* este o nivelare simplă repetată, cu așezarea nivelului în diferite stațiuni (fig. 158).

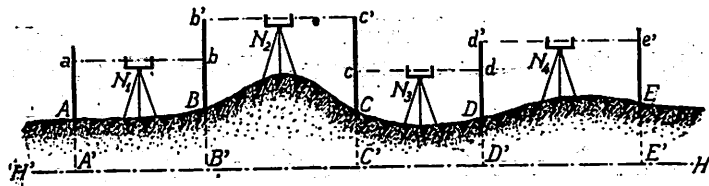


Fig. 158

Ea se aplică când distanța pe care voim s'o nivelăm este mare (depășește 100 m).

Ca și la o nivelare simplă, se poate alcătui un tablou pentru însemnarea datelor măsurate și a rezultatelor calculate.

B) Nivelare indirectă (sau trigonometrică) constă în a ridica cu echerul de pantă sau tachimetrul, anume elemente geometrice (pante, distanțe, etc.) de pe teren și a calcula apoi pe celelalte.

Exemplu. Fie punctele M și N de pe teren a căror diferență de nivel s'o însemnăm cu h (fig. 159); fie d proiecția orizontală a distanței oblice MN, iar $p = \operatorname{tg} a$, panta terenului. Din triunghiul dreptunghiu MNP, avem: $h = d \operatorname{tg} a = d \cdot p$. Dacă d este cunoscut (de pe hartă, sau prin alt mijloc) iar p măsurat cu echerul de pantă, relația precedentă ne dă pe h .

Invers: dacă avem pe h și p , putem afla pe d .
Dacă din O vizăm pe rând două puncte A și B de pe mira așezată în N, și notăm $aA = h_1$; $\widehat{aOA} = \alpha_1$; $aB = h_2$; $\widehat{aOB} = \alpha_2$ putem scrie:

$h_1 = p_1 d$ și $h_2 = p_2 d$
din care deducem:

$$d = \frac{h_2 - h_1}{p_2 - p_1}$$

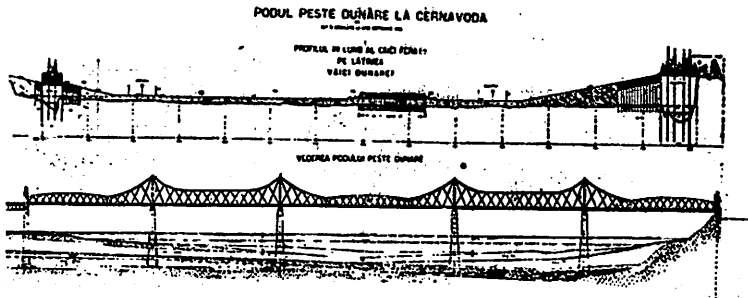


Fig. 160

relație care ne dă pe d în funcție de pantele p_1 , p_2 și citirile pe miră: h_1 , h_2 .

Cu tachimetrul se află, direct prin citire, sau prin calcul simplu, distanța d , proiecția orizontală a unei linii oblice MN.

În fig. 160 se arată profilul în lung al celui mai important pod de metal din România: *podul Regele Carol I*, construit de inginerul român *Anghel Saligny*¹⁾.

¹⁾ *Anghel Saligny* (născut la Șerbănești jud. Tecuci în anul 1854, mort la București în anul 1925). Inginer diplomat al Școlii din Charlottenburg (Germania).

Lucrarea sa de căpetenie este construcția podului Regele Carol I peste Dunăre, la Cernavodă (1889—1895); la data construirii lui, acest pod era cel mai lung din Europa.

A construit docurile și silozurile din Constanța.

A fost membru și președinte al Academiei Române și Ministru al Lucrărilor Publice.

R E Z U M A T.

CAP. XII. — APLICAȚIUNI ALE TRIGONOMETRIEI LA AGRIMENSURĂ.

**Geodezia* se ocupă cu studiul măsurării suprafețelor de pe pământ, ținând seama de sfericitatea globului pământesc.

**Topografia* are ca obiect studiul măsurării suprafețelor de pe pământ, relativ mici (fără a ține seama că pământul este rotund, ci presupunându-l plan).

**Planimetria* este acea parte a Topografiei care se ocupă cu ridicarea de pe teren și raportarea pe desen, a proiecțiunii orizontale a unui teren, clădire, etc.

**Altimetria* (sau Nivelmentul) este partea din Topografie care are ca obiect studiul reliefului unui teren.

*Instrumentele necesare pentru fixarea punctelor pe teren, trasarea unei linii drepte, etc. sunt:

a) țarușul, b) fișa, c) jalonul, d) mira, e) firul cu plumb.

*Instrumentele necesare pentru măsurarea lungimilor de pe teren sunt:

a) lanțul, b) ruleta, c) panglica, d) tachimetrul.

*Instrumentele pentru măsurarea și pentru trasarea directă pe desen a unghiurilor sunt:

a) grafometrul, b) tachimetrul, c) planșeta.

**Echerul* (sau pantometrul) este un instrument care servește la ridicarea perpendiculărilor pe teren, la trasarea de aliniamente, etc.

**Planul* este reprezentarea prin desen, a unei figuri din natură, printr'o figură asemenea cu ea.

Scara unui plan este raportul dintre lungimile de pe desen și lungimile respective din natură; scările pot fi *numerice* și *grafice*.

*Metodele mai importante pentru ridicarea planelor sunt:

1. Metoda perpendicularelor.
2. Metoda prin radiere: a) numai cu lanțul, b) cu lanțul și grafometrul, c) cu planșeta.
3. Metoda prin intersecții: a) cu planșeta, b) cu grafometrul.
4. Metoda prin îndrumuire: a) cu lanțul și planșeta, b) cu lanțul și grafometrul.

*Calculul suprafeței unui teren se face:

A) dacă este limitat numai din linii drepte: împărțindu-l în triunghiuri și trapeze;

B) dacă este mărginit și de o linie curbă: a) prin compensare, înlocuind linia curbă printr'o dreaptă, b) prin înlocuirea liniei curbe printr'o linie poligonală și descompunerea ariei în trapeze, etc....

*In Altimetrie (sau Nivelment) se ia ca *plan orizontal de comparație*, suprafața mării, sau un plan paralel cu acesta; spre ex. planul orizontal al unui trotuar, planul suprafeței superioare a șinelor de cale ferată, etc.

*Instrumentele necesare pentru nivelment sunt: a) nivela cu bula de aer, b) nivela cu apă, c) nivela cu lunetă, d) nivela de pantă.

*Nivelmentul se poate face prin mai multe metode:

A) *Nivelare directă* (sau geometrică) și anume:

a) *nivelare simplă* în care nivelul cu apă ocupă o singură pozițiune (stațiune);

b) *nivelare compusă* (în care nivelul cu apă ocupă diferite pozițiuni).

B) *Nivelare tachimetrică*, în care se folosește tachimetrul, cu care putem măsura toate elementele geometrice necesare nivelării.

*Desenul obținut în urma unui nivelment se *chiamă profilul în lung* al terenului, clădirii, etc.

CAP. XIII.

APLICAȚIUNI ALE TRIGONOMETRIEI LA STATICA.

Noțiuni preliminare. *Mecanica* este știința, care se ocupă cu studiul mișcării corpurilor și a cauzelor, care produc aceste mișcări.

Intr'o problemă de Mecanică putem întâlni următoarele noțiuni :

1) *traectoria* corpului, adică drumul descris de acel corp în spațiu. Spre ex. : drumul efectuat de o piatră când cade, curba descrisă de o pasăre în zbor, etc.

2) *timpul* în care se efectuează mișcarea;

3) *forțele* sau *cauzele*, care produc sau împiedică o mișcare.

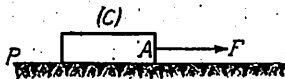


Fig. 161

Exemple. 1. Un corp (C) este tras pe un plan (P); cauza care produce această mișcare este o *forță* F (fig. 161).

2. Mișcarea pe care o are pistonul unei mașini, este datorită tot unei *forțe* (forța aburului) (fig. 162).

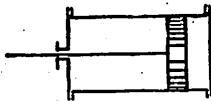


Fig. 162



Fig. 163

3. Un vagonet se mișcă în sensul săgeții (s); cauza care produce oprirea vagonetului (care împiedică deci mișcarea sa), poate fi o *forță* F (fig. 163).

Clasificarea Mecanicii. I. Partea din Mecanică, în care se ține seama de toate elementele ce intervin în Mecanică: traectorie, timp, forțe... se cheamă *Dinamica*.

Exemplu. Când se studiază mersul unui tren, trebuie să se țină seama de *traectoria* pe care o descrie, *de timpul* în care o va parcurge și de *forța* necesară spre a trage trenul, adică de locomotiva ce va trebui să fie aleasă.

II. Partea din Mecanică, în care se ține seama *numai* de traecțiilor și de timp, fără a se lua în considerare cauzele, care produc mișcarea (adică forțele), se cheamă *Cinematica*.

Exemplu: când se întocmește mersul trenurilor (graficul trenurilor) se ține seama *numai* de drumurile descrise de trenuri și de timpul pus spre a le parcurge; nu se consideră și *forța* aburului datorită căreia se mișcă trenurile.

III. Partea din Mecanică, care studiază *condițiunile*, pe care trebuie să le îndeplinească forțele $F_1, F_2, F_3, F_4 \dots$ ce acționează un corp (C) (fig. 164), pentru ca acest corp să rămână în *repaos* (echilibru) se numește *Statica*.

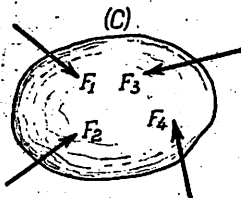


Fig. 164

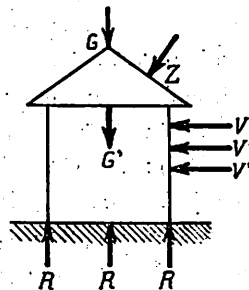


Fig. 165

Exemplu. Când se studiază condițiile, în care o construcție este în echilibru, se ține seama *numai* de forțe: de greutatea $G, G' \dots$ de forța zăpezii Z , de forța vântului $V, V' \dots$ de rezistența $R \dots$ a terenului, etc. (fig. 165).

Toate aceste forțe trebuie să-și facă echilibru.

Statica este deci știința echilibrului corpurilor.

Reprezentarea forțelor. În figurile ce preced s'au desenat forțele prin segmente cu o săgeată la un capăt; iată explicația:

1. Orice forță acționează într'o anumită *direcție* DD' , care se chiamă și *linia de acțiune* a forței (fig. 166).

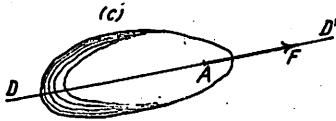


Fig. 166

2. Forțele se pot *compara* între ele, după efectele pe care le produc asupra unui acelaș corp, prin apăsare, întindere, etc. Ele sunt deci

niște mărimi; se cunoaște din Fizică, cum se măsoară *mărimea* sau *intensitatea* forțelor cu dinamometrul (fig. 167).

Unitatea de măsură pentru forțe este *kilogramul-forță*, adică forța cu care pământul atrage 1 dm³ de apă distilată, la + 4° Celsius; multiplii și submultiplii mai întrebuințați ai kilogramului-forță sunt: tona-forță, gramul-forță, etc. Pentru prescurtare se obișnuiește să se pună numai: gram, kilogram, tonă...

Pe desen, mărimea sau intensitatea unei forțe F , este arătată la scară, prin lungimea segmentului AF (fig. 166): spre ex. 1 kg se reprezintă printr'un centimetru, sau 10 tone prin 3 cm, etc. după cum sunt forțele care intervin în problemă și după mărimea hârtiei pe care desenăm.

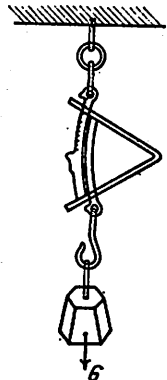


Fig. 167

3. Pe aceeași direcție DD' o forță poate acționa dela stânga spre dreapta (sau invers); forța are deci și *un sens*, care arată cum lucrează pe linia de acțiune; sensul este arătat pe desen prin săgeata dela unul din capete: astfel în fig. 166 forța AF are linia de acțiune DD' și sensul dela A spre F .

4. *Punct de aplicație* al unei forțe este punctul de care forța *apucă* corpul pe care-l acționează; în reprezentarea din fig. 166 A este punctul de aplicație al forței AF .

Forța se poate citi prin două litere cu o bară deasupra: \overline{AF} , sau numai prin litera de la capătul ei (fără bară): F ; în primul caz prima literă arată *punctul de aplicație* (sau origina) forței, iar cel de al doilea *extremitatea ei*.

Exemple. 1. Punctul, de care apucăm cu degetul mânerul unui sertar, este punctul de aplicație al forței mușchiulare ce întrebuițăm spre a deschide sertarul.

2. Punctul, de care cârligul unei macarale prinde greutatea G , este punctul de aplicație al forței, care produce ridicarea macaralei (fig. 168).

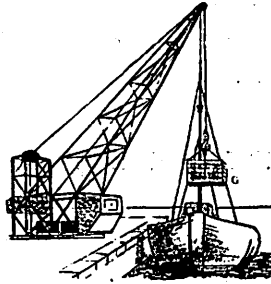


Fig. 168

Punct material. Pentru înlesnirea raționamentului, precum și pentru ușurarea reprezentării prin desen, se *presupune* uneori despre corpurile de dimensiuni relativ mici, că se reduc la câte un punct, în care ar fi strânsă (concentrată) toată materia ce compune acele corpuri; astfel de puncte se numesc *puncte materiale*.

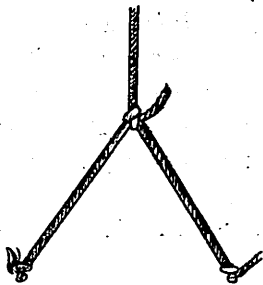


Fig. 169

Exemple. 1. Nodul unei frânghii (fig. 169), deși are dimensiuni, se consideră în mod obișnuit ca un punct material.

2. Fie un corp (C), de care tragem cu forțele OF , OF' care au punctul de aplicație în cârligul O (fig. 170); deși cârligul O nu este, din punct de vedere geometric, un punct, obișnuim să-l considerăm ca un punct material, iar forțele F și F' concurente în O .

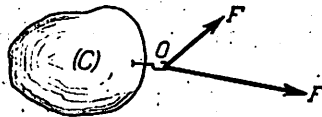


Fig. 170

Observare. Din cele de mai sus reiese că spre deosebire de punctele geometrice, punctele materiale diferă unele de altele nu numai prin poziția lor în spațiu dar și prin materia, pe care presupunem că o conțin și care provine din concentrarea corpului ce s'a redus la un punct.

COMPUNEREA ȘI DESCOMPUNEREA FORTELOR CONCURENTE. REGULA PARALELOGRAMULUI.

COMPUNEREA A DOUĂ FORȚE.

Experiența arată că efectul produs de două forțe MP și MQ, concurente în M, este acelaș ca al unei singure forțe MR, reprezentată în mărime, direcție și sens prin diagonala paralelogramului construit pe forțele considerate (fig. 171).

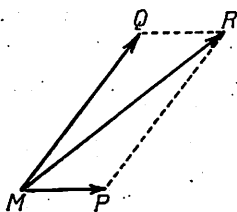


Fig. 171

Acest rezultat al experienței, care se poate verifica, dar nu se poate demonstra, se chiamă *regula paralelogramului*; ea permite să înlocuim două forțe concurente P și Q printr'o singură forță R, diagonala paralelogramului construit pe forțele P și Q;

această operația se chiamă compunerea (sau reducerea) forțelor P și Q.

Reciproc, regula paralelogramului ne dă posibilitatea să înlocuim o forță dată MR, prin două forțe MP și MQ, care să aibă direcțiile date Mx și My ce se întretaie pe direcția forței R; operația aceasta, inversă compunerii, se numește descompunerea unei forțe R după două direcțiuni Mx și My concurente pe direcția forței (fig. 172).

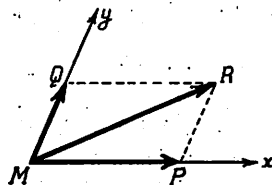


Fig. 172

Forța MR, care poate înlocui forțele concurente MP și MQ se chiamă *rezultanta* lor; forțele MP și MQ se numesc *componentele* forței MR.

Valoarea rezultantei R a două forțe concurente date P și Q . Se dau două forțe de intensități P și Q și unghiul α , al direcțiilor lor; se cere: a) intensitatea rezultantei R și b) unghiurile pe care le face direcția rezultantei MR cu direcțiile forțelor MP și MQ (fig. 173).

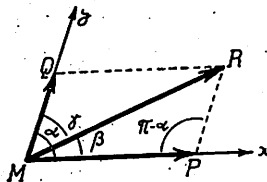


Fig. 173

Chestiunea se poate rezolva:

a) *grafic*: desenând la o scară convenabilă forțele MP și MQ , construind paralelogramul ($MPRQ$) și cetind la scară intensitatea rezultantei R , iar cu raportorul, unghiurile β și γ .

b) *prin trigonometrie*: paralelogramul ($MPRQ$) (fig. 178) este despărțit de diagonala MR în două triunghiuri egale; în triunghiul (MPR) cunoaștem: laturile MP și $PR = MQ$ și unghiul cuprins: $\widehat{MPR} = \pi - \alpha$; latura a treia, MR este dată de formula (pag. ...).

$$MR^2 = MP^2 + PR^2 - 2 MP \cdot PR \cos (\pi - \alpha)$$

sau, însemnând laturile cu câte o singură literă, care arată intensitățile forțelor, și observând că:

$$\cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \text{ obținem:}$$

(1)

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2 P \cdot Q \cdot \cos \alpha$$

relație care dă intensitatea R a rezultantei când cunoaștem intensitățile P și Q ale componentelor și unghiul lor α .

Pentru a afla unghiul β al rezultantei MR cu forța MP să proiectăm linia poligonală (MPR), a cărei linie de închidere este MR , pe direcția MP ; aplicând teorema II (pag. 112) obținem:

$$(\text{pr. } MR)_{MP} = (\text{pr. } MP)_{MP} + (\text{pr. } PR)_{MP}$$

și în baza teoremei I (pag. 110).

$$R \cdot \cos \beta = P + Q \cos \alpha$$

înlocuind pe R prin valoarea sa din (1) găsim:

$$(2) \quad \cos \beta = \frac{P + Q \cos \alpha}{\sqrt{P^2 + Q^2 + 2 \cdot P \cdot Q \cos \alpha}}$$

în mod analog, proiectând acelaș contur (MPR) pe direcția MQ, găsim :

$$(\text{pr MR})_{MQ} = (\text{pr MP})_{MQ} + (\text{pr PR})_{MQ}$$

și observând că PR fiind paralelă cu MQ, se proiectează pe aceasta din urmă în adevărată mărime, obținem :

$$R \cos \gamma = P \cos \alpha + Q$$

sau

$$(3) \quad \cos \gamma = \frac{P \cos \alpha + Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}}$$

Formulele (2) și (3) ne dau deci unghiurile căutate β și γ , în funcțiune de P, Q.

Aplicație: Fie: $P = 5$ kg, $Q = 7$ kg, $\alpha = 60^\circ$. Să se afle R, β și γ (fig. 178).

Avem :

$$R^2 = 5^2 + 7^2 + 2 \times 5 \times 7 \times \cos 60^\circ = 25 + 49 + 70 \times \frac{1}{2} = 109$$

$$R = \sqrt{109} = 10,4 \text{ kg.}$$

din (2) și (3) găsim :

$$\cos \beta = \frac{5 + 7 \cos 60^\circ}{10,4} = \frac{8,5}{10,4} \quad \beta = 35^\circ 11'$$

$$\cos \gamma = \frac{5 \cos 60^\circ + 7}{10,4} = \frac{9,5}{10,4} \quad \gamma = 24^\circ 40''$$

Cazuri particulare ale regulii paralelogramului. 1. Forțele P și Q au intensități egale ($P=Q$), însă direcții diferite (fig. 174).

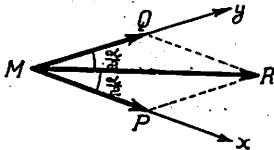


Fig. 174

Paralelogramul (MPRQ) este în acest caz un romb; rezultanta MR are ca direcție bisectoarea unghiului \widehat{PMQ} , ceea ce și din punct de vedere fizic era de așteptat :

dacă spre exemplu tragem de punctul material M, cu două forțe egale $P=Q$ în direcții diferite, direcția rezultantei R, va fi egal inclinată pe forțele date, adică va fi pe bisectoarea unghiului format de ele.

Formula (1) devine:

$$R^2 = P^2 + P^2 + 2 \times P \times P \cos \alpha$$

sau
$$R^2 = 2 P^2 (1 + \cos \alpha)$$

însă (pag. 124).
$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

deci
$$R^2 = 4 \cdot P^2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

sau

(1)₁

$$R = 2 P \cos \frac{\alpha}{2}$$

formulă utilă în aplicațiuni.

Exercițiu. Să se arate că dacă în formulele (2) și (3) facem $P=Q$, găsim:

(2)₁
$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$
 și (3)₁
$$\gamma = \frac{\alpha}{2}$$

Aplicație. Pe o apă liniștită, o barcă este trasă cu ajutorul a două frânghii, cu forțele egale $P = 58 \text{ kg}$, în două direcții ce fac între ele unghiul $\alpha = 34^\circ 30'$ (fig. 175); se cere să se găsească forța rezultantă R , care le poate înlocui (în mărime, direcție și sens).

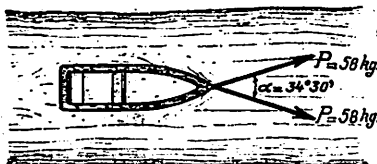


Fig. 175

Răspuns. Cele două forțe pot fi înlocuite cu o singură forță R , îndreptată după bisectoarea unghiului α ; intensitatea ei este egală cu diagonala rombului:

$$R = 2 P \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \times 58 \text{ kg} \times \cos \frac{34^\circ 30'}{2} = 2 \times 58 \times 0,955$$

sau

$$R = 110,780 \text{ kg.}$$

Exercițiu. Fiind date două forțe constante egale cu P , și de direcții diferite, care fac între ele un unghi x , se cere să se studieze variația intensității rezultantei R . Să se facă reprezentarea grafică în cazul $P = 5 \text{ tone}$.

Indicație: Avem: $R = 2 P \cos \frac{x}{2}$; R variază deci ca și $\cos \frac{x}{2}$; R este maxim când $x = 0$, și minim când $x = 180^\circ$.

2. Forțele P și Q au direcțiile perpendiculare ($\alpha = 90^\circ$);
avem în acest caz: $R^2 = P^2 + Q^2$
sau

$$(1)_2 \quad R = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

rezultat ce se poate obține și din formula (1), făcând $\alpha = 90^\circ$;
din triunghiul MPQ obținem:

$$(1)_3 \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{Q}{P} \quad (1)_4 \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{P}{Q}$$

care ne dau unghiurile rezultantei R cu direcțiile componentelor
 P și Q ; mai putem scrie și relațiile:

$$P = R \cos \beta, \quad Q = R \cos \gamma = R \sin \beta$$

care dau valorile componentelor când avem pe R și pe β .

Exercițiu. Să se stabilească rezultatele (1)₃ și (1)₄ pornind dela formulele
(1) și (3) în care se va face $\alpha = 90^\circ$.

Indicație: Se va găsi $\cos \beta = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$; $\cos \gamma = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$ și se va ex-
prima apoi $\operatorname{tg} \beta$ și $\operatorname{tg} \gamma$ în funcțiune de $\cos \beta$ și $\cos \gamma$ (vezi formulele core-
lative, pag. 77).

Aplicație. O minge M este atârnată într'un plan vertical, de
punctul O , printr'un fir ce face cu verticala Ox
un unghi $\alpha = 17^\circ$ (fig. 176); mingea este ac-
ționată de două forțe: o forță verticală $G = 20$
grame și o forță orizontală Q , de intensitate ne-
cunoscută. Se cere: a) să se afle intensitatea
forței Q , astfel ca direcția rezultantei R a for-
țelor G și Q , să fie în prelungirea firului OM ; b)
să se afle intensitatea rezultantei R .

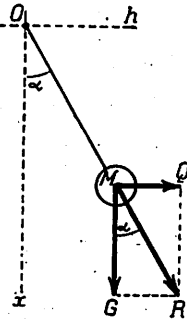


Fig. 176

Răspuns. 1. Pentru ca rezultanta R să fie
în prelungirea firului OM , trebuie ca $\widehat{GMR} = \alpha$,
deci:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q}{G}$$

sau

$$Q = G \cdot \operatorname{tg} \alpha = 20 \text{ gr} \times \operatorname{tg} 17^\circ = 20 \text{ gr} \times 0,306 = 6,12 \text{ gr.}$$

2. Din triunghiul dreptunghiu MGR avem:

$$G = R \cdot \cos \alpha, \quad R = \frac{G}{\cos \alpha} = \frac{20 \text{ gr}}{\cos 17^\circ} = \frac{20}{0,956} = 20,92 \text{ kg}$$

Putem face o verificare:

$$R = \sqrt{G^2 + Q^2} = \sqrt{20^2 + (6,12)^2} = 20,91 \text{ kg.}$$

Forțele G și Q putând fi înlocuite cu rezultanta lor R , firul OM va fi întins cu o forță de 20,91 grame.

3. Forțele P și Q au aceeași direcțiune și acelaș sens. (fig. 177).Formula (1) ne dă ($\cos \alpha = 1$):

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha = (P + Q)^2$$

deci:

(4)

$$\boxed{R = P + Q}$$

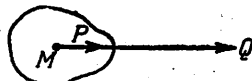


Fig. 177

adică intensitatea rezultantei R este egală cu suma aritmetică a intensităților forțelor P și Q ; din relațiile (2) și (3) se găsește $\beta = \gamma = 0$, deci direcția și sensul rezultantei sunt aceleași cu ale forțelor P și Q .

4. Forțele P și Q au aceeași direcție, dar sensuri contrare ($\alpha = 180^\circ$).Presupunem $P > Q$ (fig. 178);

din (1) găsim ca mai sus:



Fig. 178

(5)'

$$\boxed{R = P - Q}$$

intensitatea rezultantei R , este deci egală cu diferența dintre intensitățile forțelor P și Q ; din (2) și (3) obținem: $\beta = 0$, $\gamma = 180^\circ$; R are deci direcția comună a forțelor P și Q , iar sensul este acela

al forței P (a cărei intensitate este mai mare decât a forței Q).

În cazul forțelor P și Q care au aceeași direcție (cazul 3 și 4), se mai poate spune că intensitatea rezultantei este egală cu suma algebrică a intensităților forțelor componente.

Exercițiu. Forțele P și Q fiind constante în intensitate, iar unghiul lor α variabil, se cere să se studieze variația rezultantei R, cu ajutorul formulei

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha$$

Se va face și o reprezentare grafică a variației lui R.

Observare. Se poate întâmpla ca forțele P și Q să nu aibă dela

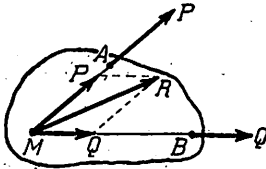


Fig. 179

început același punct de aplicație, dar direcțiile lor să fie situate în același plan; astfel forța P are punctul de aplicație în A, iar Q în B (fig. 179); dacă aceste forțe sunt aplicate aceluiaș corp (C), putem prelungi direcțiile AP și BQ până se întâlnesc în M și muta forța AP pe direcția ei în MP, și forța BQ pe direcția ei în MQ¹⁾; rezultanta forțelor AP și BQ este MR.

Compunerea mai multor forțe dintr'un plan, ale căror direcțiuni se întâlnesc în acelaș punct.

Fie mai multe forțe $\overline{OF_1}$, $\overline{OF_2}$, $\overline{OF_3}$, $\overline{OF_4}$, ... care acționează un corp și au toate acelaș punct de aplicație O (fig. 180).

A compune aceste forțe înseamnă a le înlocui cu o singură forță R, numită rezultanta lor; acest lucru este posibil, deoarece potrivit regulii paralelogramului, putem înlocui forțele $\overline{OF_1}$ și $\overline{OF_2}$ prin rezultanta $\overline{OF'_2}$, care este diagonala paralelogramului con-

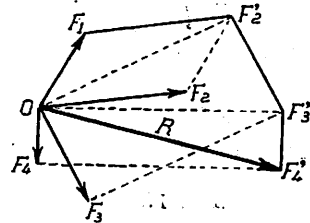


Fig. 180

¹⁾ Dacă (C) este un corp rigid (nedeformabil):

struit pe \overline{OF}_1 și \overline{OF}_2 . La rândul lor, forțele \overline{OF}'_2 și \overline{OF}'_3 , se pot înlocui cu diagonala OF'_3 a paralelogramului (\overline{OF}'_2 , $\overline{F}'_3\overline{F}_3$); forțele \overline{OF}'_3 și \overline{OF}'_4 se pot înlocui cu forța $\overline{OF}'_4 = R$, care este rezultanta forțelor date F_1, F_2, F_3, F_4 .

Aplicație grafică. Se va repeta operația de compunere de mai sus, schimbând ordinea în care înlocuim două din forțele date prin rezultanta lor și se va verifica că se obține aceeași rezultantă $\overline{OF}'_4 = R$.

Observare. Din această aplicație se deduce că rezultanta mai multor forțe concurente este *independentă de ordinea în care compunem succesiv forțele*, după cum și în Aritmetică și Algebră, suma mai multor numere nu depinde de ordinea în care însumăm termenii.

Poligonul forțelor. Să observăm că pentru a obține rezultanta R , nu este nevoie să construim rezultantele parțiale $\overline{OF}'_2, \overline{OF}'_3$ ci putem proceda astfel: prin extremitatea forței \overline{OF}_1 , ducem segmentul $\overline{F}_1\overline{F}'_2$ egal, paralel și de acelaș sens cu forța \overline{OF}_2 ; prin extremitatea F'_2 ducem $\overline{F}'_2\overline{F}'_3$ egal, paralel și de acelaș sens cu forța \overline{OF}_3 , iar prin F'_3 ducem $\overline{F}'_3\overline{F}'_4$ egal, paralel și de acelaș sens cu \overline{OF}_4 ; găsim astfel pe $\overline{OF}'_4 = R$.

Poligonul ($OF_1F'_2F'_3F'_4$) se numește și poligonul forțelor, iar linia de închidere \overline{OF}'_4 este rezultanta forțelor date.

Consecință. Din cele de mai sus rezultă că forțele $\overline{OF}_1, \overline{OF}_2, \overline{OF}_3, \overline{OF}_4 \dots$ se pot înlocui cu o singură forță $\overline{OF}'_4 = R$. Pentru ca aceste forțe să fie în echilibru trebuie ca forța R să fie egală cu zero deci punctul F'_4 să coincidă cu O și reciproc. *Așa dar: mai multe forțe, ale căror direcții trec prin acelaș punct, își fac echilibru, dacă poligonul forțelor este închis (linia de închidere este egală cu zero).*

Aplicațiune asupra teoremelor proiecțiilor: aflarea prin calcul, a rezultantei R a mai multor forțe concurente F_1, F_2, F_3, F_4 , (vezi și pag. 109 și urm.).

Se dă intensitățile F_1, F_2, F_3, F_4 și unghiurile direcțiilor lor: $\alpha_{12} = (\overline{F_1, F_2})$, $\alpha_{13} = (\overline{F_1, F_3})$; etc.; să aflăm intensitatea rezultantei R și unghiul β_1 spre exemplu pe care direcția ei o face cu direcția forței F_1 .

Să proiectăm linia poligonală formată din laturile $\overline{OF_1}, \overline{F_1F'_2}, \overline{F'_2F'_3}, \overline{F'_3F'_4}$ pe \overline{OR} , pe rând pe direcțiile $\overline{OF_1}, \overline{OF_2}, \overline{OF_3}, \overline{OF_4}$; găsim:

$$\begin{aligned} (OF_1): \quad R \cos (R, F_1) &= F_1 + F_2 \cos (F_2, F_1) + F_3 \cos (F_3, F_1) + F_4 \cos (F_4, F_1) \\ (OF_2): \quad R \cos (R, F_2) &= F_1 \cos (F_1, F_2) + F_2 + F_3 \cos (F_3, F_2) + F_4 \cos (F_4, F_2) \\ (OF_3): \quad R \cos (R, F_3) &= F_1 \cos (F_1, F_3) + F_2 \cos (F_2, F_3) + F_3 + F_4 \cos (F_4, F_3) \\ (OF_4): \quad R \cos (R, F_4) &= F_1 \cos (F_1, F_4) + F_2 \cos (F_2, F_4) + F_3 \cos (F_3, F_4) + F_4 \end{aligned}$$

Să înmulțim ambii membri ai acestor relațiuni respectiv cu F_1, F_2, F_3, F_4 și să-i adunăm; în primul membru găsim:

$$R [F_1 \cos (R, F_1) + F_2 \cos (R, F_2) + F_3 \cos (R, F_3) + F_4 \cos (R, F_4)] = R^2$$

deoarece expresiunea din croșete reprezintă *suma proiecțiilor poligonului forțelor pe direcția lui R*, sumă, care în baza teoremei II, (pag. 112) este egală cu proiecția rezultantei R , pe direcția lui R .

În membrul II se obține termeni formați din pătrățele: $F_1^2, F_2^2, F_3^2, F_4^2$ și termeni de forma $2 F_1 F_2 \cos (F_1, F_2)$ luați în toate modurile posibile; deci

$$(9) \quad R^2 = \sum_1^4 F_i^2 + 2 \cdot \sum_{i \neq k}^4 F_i F_k \cos (F_i, F_k)$$

care cuprinde formula (...) pag. ... ca un caz particular.

Pentru a obține unghiul β_1 al rezultantei R spre ex. cu forța F_1 , proiectăm poligonul forțelor pe direcția forței F_1 , găsim:

$$R \cos \beta_1 = F_1 + F_2 \cos (F_2, F_1) + F_3 \cos (F_3, F_1) + F_4 \cos (F_4, F_1)$$

din care scoatem :

$$\cos \beta_1 = \frac{F_1 + F_2 \cos(F_2, F_1) + F_3 \cos(F_3, F_1) + F_4 \cos(F_4, F_1)}{R};$$

în membrul II, toate cantitățile dela numărătorul fracției sunt date, iar numitorul R se află din relația (9).

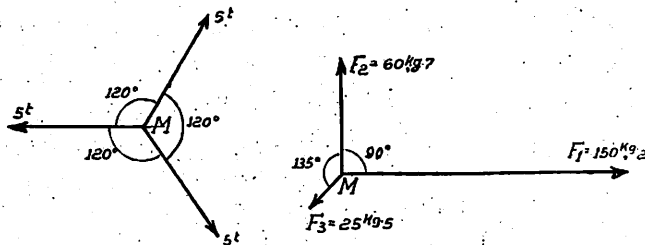


Fig. 181

Exercițiul. 1. Să se afle intensitatea rezultantei R a forțelor din figurile 181 și unghiurile ei cu fiecare din forțele componente.

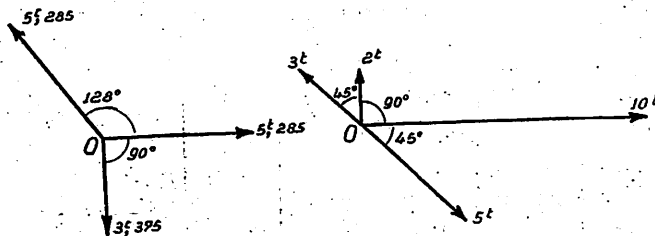


Fig. 182

Răspuns: a) $R = 0$

b) $R = \beta_1 = \beta_2 = 0$

2. Care este forța R , în mărime, direcție și sens care trebuie introdusă în O , pentru ca forțele din figură să fie în echilibru (fig. 182)?

Compunerea forțelor concurente, ale căror direcțiuni nu sunt situate în acelaș plan (forțe în spațiu).

Fie trei forțe concurente OF_1, OF_2, OF_3 , ale căror direcțiuni nu sunt situate în acelaș plan. Pentru a le compune, putem proceda astfel: compunem potrivit regulii paralelogramului

forțele OF_1 , OF_2 și obținem forța OR_1 ; compunem apoi forța OR_1 cu OF_3 și găsim forța OR care poate înlocui forțele date (fig. 183).

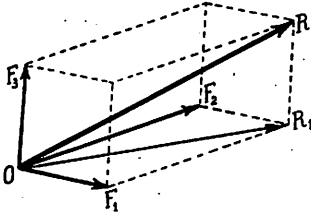


Fig. 183

Forța OR este *rezultanta* forțelor OF_1 , OF_2 , OF_3 , iar acestea se numesc *componentele forței OR*.

Se observă că rezultanta OR , este *diagonala paralelipipedului* construit pe cele trei forțe date.

Aplicație. Să se arate că, dacă am compune forța OF_2 cu OF_3 iar rezultanta lor cu OF_1 , găsim tot rezultanta OR ; la fel, dacă am compune pe OF_3 cu OF_1 și rezultanta lor cu OF_2 .

Rezultă de aci, că *rezultanta a trei forțe este aceeași, oricare este ordinea în care le compunem*.

Acest rezultat este adevărat *oricare* ar fi numărul forțelor concurente, ce voim să compunem.

Aplicație. Să compunem trei forțe OF_1 , OF_2 , OF_3 , ale căror direcțiuni sunt *perpendiculare două câte două* (fig. 184).

Procedând ca mai sus, putem înlocui forțele OF_1 , OF_2 prin forța OR_1 (diagonala dreptunghiului construit pe OF_1 și OF_2).

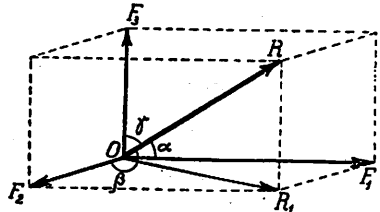


Fig. 184

Forțele OR și OF_3 se pot înlocui cu forța OR , care este rezultanta forțelor date; ea este egală cu diagonala paralelipipedului dreptunghic, care are ca laturi pe OF_1 , OF_2 , OF_3 .

În acest caz putem calcula cu înlesnire și *valoarea rezultantei și unghiurile ei cu forțele componente*.

Avem din triunghiul dreptunghiu OF_1R_1 :

$$(1) \quad \overline{OR}^2 = \overline{OF_1}^2 + \overline{F_1R_1}^2 = \overline{OF_1}^2 + \overline{OF_2}^2$$

iar din triunghiul dreptunghiu OR_1R :

$$OR^2 = OR_1^2 + R_1R^2 = OF_1^2 + OF_2^2 + OF_3^2$$

deci

$$OR^2 = OF_1^2 + OF_2^2 + OF_3^2$$

adică: *pătratul rezultantei a trei forțe concurente, ale căror direcțiuni sunt perpendiculare două câte două, este egal cu suma pătratelor forțelor componente.*

Insemnăm cu α , β , γ unghiurile rezultantei OR respectiv cu forțele OF_1 , OF_2 , OF_3 , avem, din triunghiul dreptunghiu OF_1R ($\widehat{OF_1R} = 90^\circ$):

$$\cos \alpha = \frac{OF_1}{OR} = \frac{OF_1}{\sqrt{OF_1^2 + OF_2^2 + OF_3^2}}$$

In mod analog aflăm:

$$\cos \beta = \frac{OF_2}{\sqrt{OF_1^2 + OF_2^2 + OF_3^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{OF_3}{\sqrt{OF_1^2 + OF_2^2 + OF_3^2}}$$

Aplicație numerică: $OF_1 = 5,2$ kg; $OF_2 = 10,3$ kg; $OF_3 = 9$ kg.

$$R = \sqrt{5,2^2 + 10,3^2 + 9^2} = 14,6 \text{ kg}$$

$$\cos \alpha = \frac{5,2}{14,6} \quad \alpha = 69^\circ 8' 7''$$

$$\cos \beta = \frac{10,3}{14,6} \quad \beta = 45^\circ 7' 51''$$

$$\cos \gamma = \frac{9}{14,6} \quad \gamma = 51^\circ 56' 37''$$

DESCOMPUNEREA UNEI FORȚE (R) DUPĂ DOUĂ DIRECȚIUNI CONCURRENTE.

Operațiunea descompunerii unei forțe după două direcțiuni, este, după cum s'a mai spus, operațiua inversă compunerii: se dă o forță R și două direcțiuni Mx, My concurente în M cu direcțiunea forței R; se dă deci unghiul α dintre direcțiile Mx, My și unghiul β pe care-l face R cu Mx; se cere să se afle componentele forțelor P și Q ale lui R

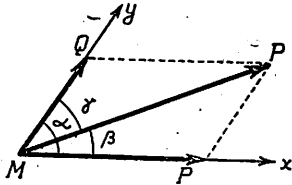


Fig. 185

după direcțiile date.

Chestiunea se poate rezolva, ca și în cazul compunerii, grafic și numeric.

a) *Grafic*: se reprezintă la o scară convenabil aleasă, direcțiile Mx, My și forța MR; se duce prin extremitatea forței R paralele la direcțiile Mx, My; se obțin componentele P și Q, care se măsoară la scara aleasă pentru forțe.

b) *Prin calcul trigonometric*: să observăm că triunghiul (MPR) (fig. 186) are ca laturi intensitățile forței R și ale componentelor ei P și Q (vezi și fig. ?..); triunghiul astfel format se chiamă și *triunghiul forțelor*; este util să observăm că cele două componente P și Q formează împreună o *linie poligonală*, care are ca *linie de închidere rezultanta* R; reciproca este și ea adevărată: ori de câte ori două laturi MP și MQ ale unui triunghi, *parcuse în acelaș sens*, reprezintă intensitățile a două forțe, a treia latura MR (adică linia de închidere), reprezintă intensitatea rezultantei forțelor concurente MP și MQ; justificarea este imediată dacă folosim regula paralelogramului.

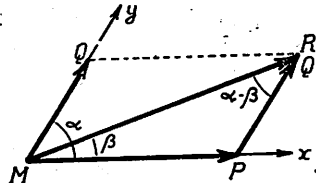


Fig. 186

Să observăm că unghiurile triunghiului forțelor sunt:

$$\widehat{PMR} = \beta \quad ; \quad \widehat{MPR} = 180^\circ - \alpha \quad ; \quad \widehat{MRP} = \alpha - \beta$$

aplicând *relațiunea sinusului* (pag. 171) și observând că $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, găsim:

$$(5) \quad \frac{P}{\sin (\alpha - \beta)} = \frac{Q}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha}$$

dacă însemnăm pentru prescurtare unghiul direcțiilor forțelor P și Q prin (P, Q), al forțelor Q și R prin (Q, R) și al forțelor R și P prin (R, P) și observând că sinusurile unghiurilor suplimentare sunt egale, relațiile de mai sus devin:

$$(6) \quad \frac{P}{\sin (Q, R)} = \frac{Q}{\sin (R, P)} = \frac{R}{\sin (P, Q)}$$

numite și relațiile sunt *Stevin*. Aceste relațiuni sunt foarte utile în aplicațiuni; ele dau valorile componentelor P și Q când cunoaștem intensitatea rezultantei R, direcțiile componentelor (adică unghiul α) și poziția rezultantei (adică unghiul β); avem:

$$(7) \quad P = R \frac{\sin (Q, R)}{\sin (P, Q)}, \quad Q = R \frac{\sin (R, Q)}{\sin (P, Q)}$$

Aplicație. $R = 10,2$ kg; $\alpha = 27^\circ 14'$; $\beta = 8^\circ 30'$
avem:

$$(P, Q) = 27^\circ 14' \quad , \quad (Q, R) = 27^\circ 14' - 8^\circ 30' = 18^\circ 44'$$

Răspuns. Aplicând formulele (7), găsim:

$$P = 10,2 \text{ kg} \frac{\sin 18^\circ 44'}{\sin 27^\circ 14'} = 10,2 \frac{0,321}{0,458} = 7,15 \text{ kg}$$

$$Q = 10,2 \text{ kg} \frac{\sin 8^\circ 30'}{\sin 27^\circ 14'} = 10,2 \frac{0,148}{0,458} = 3,29 \text{ kg}$$

Caz particular. Dacă $\beta = \frac{\alpha}{2}$, forța R are direcția bisectoarei unghiului xMy; componentele P și Q au intensitățile egale ($P = Q$).

Exercițiu. Să se găsească acest rezultat cu ajutorul formulelor (7) și să se arate că:

$$P = Q = \frac{R}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

rezultat foarte util în aplicațiuni. (Vezi și pag. 281).

Aplicație. Se dau două forțe P și Q , ale căror direcții fac între ele unghiul $(P, Q) = \alpha$ (fig. 187); să se arate că intensitatea forței R' care împreună cu forțele P și Q se echilibrează este dată de formula:

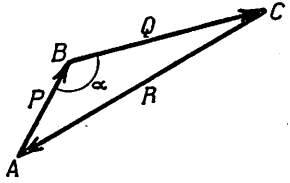


Fig. 187

$$R' = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}$$

Indicație: Se va admite mai întâi ca un rezultat al experienței că două forțe de aceeași direcție și intensitate, însă de sensuri contrare, se echilibrează; în acest caz forța R' este

egală și direct opusă cu rezultanta R a forțelor P și Q , etc.

2. Să se demonstreze că dacă trei forțe concurente P, Q, R își fac echilibru, intensitățile și unghiurile direcțiilor sunt legate prin relațiile lui Stevin.

$$\frac{P}{\sin(Q, R)} = \frac{Q}{\sin(R, P)} = \frac{R}{\sin(P, Q)}$$

Indicație: Se va observa că după condițiile din enunț, forțele P, Q, R sunt laturile unui triunghi, parcurs în întregime în acelaș sens și ale cărui unghiuri sunt respectiv suplimentele unghiurilor $(P, Q), (Q, R), (R, P)$ (fig. 187).

Componentele unei forțe după două direcții perpendiculare.

Fie direcțiile perpendiculare Mx, My și forța MR (fig. 188); în acest caz $\alpha = 90^\circ$; fie β unghiul direcției lui R cu direcția Mx .

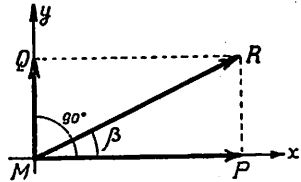


Fig. 188

Avem din triunghiul (MPR) :

$MP = MR \cos \beta$ și $PR = MR \sin \beta$ sau

$$(8) \quad P = R \cos \beta \quad \text{și} \quad Q = R \sin \beta$$

care ne dau intensitățile componentelor P și Q .

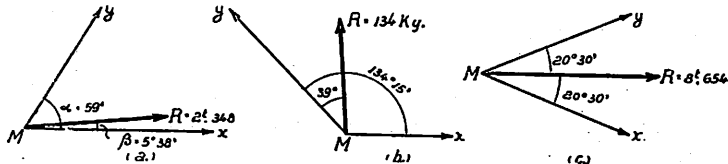


Fig. 189

Exerciții. 1. Să se afle grafic și cu ajutorul Trigonometriei, componentele forței R în cazurile din figura 189.

2. Să se descompună forța $R = 5,275$ tone după direcțiile perpendiculare Mx , My , în cazurile din figura 190.

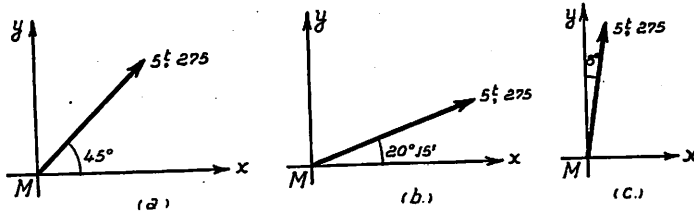


Fig. 190

R: (a) $P_{Mx} = Q_{My} = 3,729$ t. (b) $P_{Mx} = 4,953$ t. (c) $P_{Mx} = 0,733$ t.
 $Q_{My} = 1,825$ t. $Q_{My} = 5,222$ t.

3. In cazul fig. 188 se presupune că forța R (variabilă ca intensitate și direcție) rămâne neconținut în unghiul xMy și are componenta P constantă și egală cu 1 tonă; se cere să se studieze variația componentei Q .

Să se facă și reprezentarea grafică a funcțiunii Q în raport cu două axe OP , OQ , alegând scările respective.

Indicație: Avem: $Q = P \operatorname{tga} = 1 \text{ tonă} \times \operatorname{tga}$; Q variază deci ca și tangenta unghiului α .

4. Să se demonstreze că trei forțe cunoscute P , Q , R , ale căror intensități formează un triunghi iar sensurile forțelor sunt astfel că laturile triunghiului este parcurs în acelaș sens, sunt în echilibru.

5. Se dă un unghi $xMy = \alpha$ și o forță MR îndreptată după bisectoarea acestui unghi, având intensitatea $R = 15$ kg; se cere să se studieze variația componentelor $P = Q$ ale forței R după direcțiile Mx , My , când α variază; să se facă și reprezentarea grafică a lui $P = Q$.

Indicație: $P = Q = \frac{R}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$; se va considera în special cazurile $\alpha = 0$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 135^\circ$ și $\alpha = 180^\circ$; se va deduce că, cu cât unghiul α este mai obtus componentele P și Q au intensități mai mari și că mărind pe α foarte mult, P și Q pot crește peste orice limită.

Observare. Descompunerea unei forțe R după trei direcțiuni nesituate în acelaș plan și concurente cu R , este operația inversă a compunerii.

R E Z U M A T.

CAP. XIII. — APLICAȚIUNI ALE TRIGONOMETRIEI LA STATICĂ.

* *Mecanica* este știința care se ocupă cu studiul mișcării corpurilor și a cauzelor, care produc aceste mișcări.

* *Traectoria* unui corp este drumul descris de acel corp în spațiu.

* *Forța* este cauza care produce sau împiedică o mișcare.

* *Mecanica* se împarte obișnuit în :

a) *Cinematică*, care studiază acele probleme de Mecanică, în care se ține seama numai de *traectoriile* corpurilor și de *timpul* întrebuințat pentru parcurgerea lor, fără a considera și forțele, care dau naștere mișcării.

b) *Statică*, al cărei obiect este studiul condițiilor pe care trebuie să le îndeplinească forțele ce acționează un corp, pentru ca acel corp să rămână în *repaos* (echilibru).

c) *Dinamică* sau Mecanica propriu zisă, în care se ține seamă și de forțe și de traectorii și de timp.

*La o forță deosebim : a) o direcțiune sau o *linie de acțiune*, b) o mărime sau *intensitate*, c) un sens, d) un *punct de aplicație*.

*Unitatea de măsură pentru forțe este *kilogramul-forță* (este forța cu care pământul atrage un dm^3 de apă distilată, la $+ 4^\circ$ Celsius).

**Punctul*, în care o forță acționează un corp, se cheamă și *punct de aplicație al forței*.

*Pentru ușurarea raționamentului se presupune că corpurile de dimensiuni foarte mici se reduc la puncte, numite *puncte materiale*.

*Operația de înlocuire a două sau mai multe forțe concurente, printr'o singură forță, care să producă acelaș efect se chiamă *compunerea forțelor*.

Forța, care poate înlocui mai multe forțe date, se numește *rezultanta* lor; forțele date sînt *componentele* rezultantei.

*Experiența a dovedit că două forțe se pot înlocui printr'una singură, care este reprezentată, în *mărime, direcție și sens*, prin diagonala paralelogramului construit pe acele forțe (*Regula paralelogramului*).

*Intensitatea rezultantei R a două forțe P și Q, ale căror direcții fac între ele unghiul α , are expresiunea:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2 PQ \cos \alpha} .$$

*Dacă forța R are, după două direcții ce fac unghiul α , componentele P și Q, iar β este unghiul direcției lui R cu direcția P, avem *relațiile* lui *Stevin*:

$$\frac{P}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{Q}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha}$$

care servesc la aflarea componentelor P și Q când se dă R, α , β și în general la aflarea a două din cantitățile: P, Q, R, α , β când cunoaștem pe celelalte trei.

*Compunerea mai multor forțe concurente se face, aplicând regula paralelogramului la două oarecare din aceste forțe, apoi rezultantei lor și unei a treia din forțele date, etc.

*Rezultanta mai multor forțe concurente este reprezentată în mărime, direcție și sens prin *linia de închidere* a unui poligon, ale cărui laturi sunt paralele, egale și de acelaș sens cu forțele date; acest poligon se chiamă și *poligonul forțelor*.

*Dacă poligonul mai multor forțe concurente este închis (rezultanta egală cu zero), forțele își fac *echilibrul*.

*Se dă forțele concurente: $F_1, F_2 \dots F_n$ și însemnăm cu (F_1, F_2) unghiul *direcțiilor* forțelor F_1 și F_2 , etc.; intensitatea rezultantei R a acestor forțe are expresiunea:

$$R = \sqrt{\sum_1^n F_i^2 + 2 \sum_{i \neq k}^n F_i F_k \cos (F_i F_k)}.$$

*Compunerea a două sau mai multor forțe, ale căror direcțiuni nu sunt toate situate în acelaș plan, se face aplicând regula paralelogramului la două din ele, apoi rezultantei astfel obținute și la o a treia forță, etc.

*In cazul a trei forțe concurente OF_1, OF_2, OF_3 nesituate în acelaș plan, rezultanta este reprezentată în mărime, direcție și sens, prin diagonala paralelipipedului construit pe forțele date, ca laturi.

Dacă forțele sunt două câte două perpendiculare avem:

$$R = \sqrt{OF_1^2 + OF_2^2 + OF_3^2}$$

*Operația aflării componentelor OF_1, OF_2, OF_3 când se cunoaște R și poziția ei față de direcțiile componentelor, se chiamă descompunerea unei forțe.

**Descompunerea* unei forțe R după două direcții *concurente* cu direcția lui R , este operația inversă compunerii.

EXERCITII.

1. Să se afle rezultanta R a forțelor din figură, grafic și prin calcul; să se afle unghiul γ al rezultantei cu forța F_1 (fig. 131).

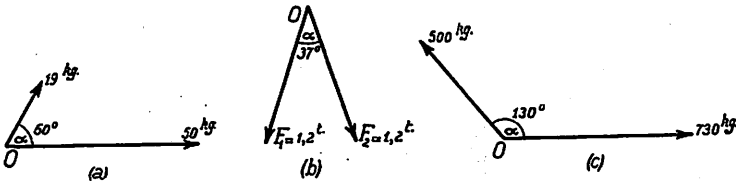


Fig. 191

R : Se va reprezenta forțele la o scară convenabilă și se va măsura lungimea diagonalei paralelogramului construit pe forțele date.

Prin calcul: se va aplica formulele $R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos \alpha$ și $\cos \gamma = \frac{F_1 \cos \alpha + F_2}{R}$; se găsește:

- | | | |
|---|--|---|
| a) $R = 61,7 \text{ kg}$
$\gamma = 44^\circ 30'$ | b) $R = 2,276 \text{ tone}$
$\gamma = 18^\circ 30'$ | c) $R = 559 \text{ kg}$
$\gamma = 86^\circ 53' 18''$ |
|---|--|---|

2. Să se afle componentele P și Q ale forței R , după direcțiile OA , OB , în cazurile de mai jos (fig. 152):

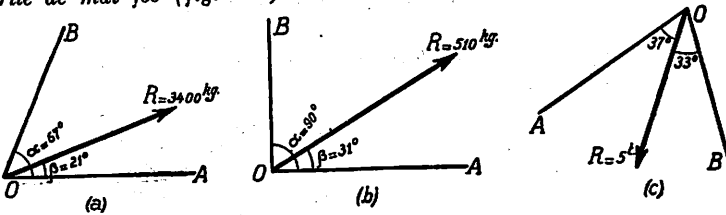


Fig. 192

R : Se vor aplica relațiile lui Stevin:

$$\frac{P}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{Q}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha}$$

Se găsește:

- a) $P = 2654 \text{ kg}$, $Q = 1321 \text{ kg}$; b) $P = 437,07 \text{ kg}$, $Q = 262,65 \text{ kg}$;
 c) $P = 2,865 \text{ tone}$, $Q = 3,310 \text{ tone}$.

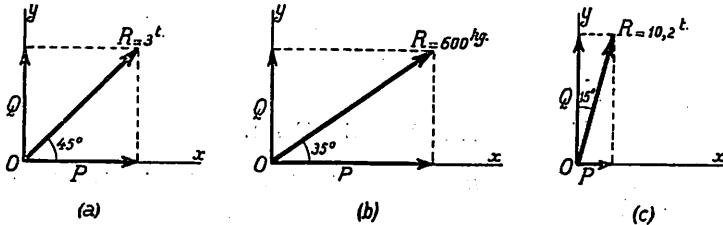


Fig. 193

3. Să se afle componentele forței R după direcțiile perpendiculare Ox , Oy , în cazurile din figură (fig. 193):

- R.: (a) $P = 2,121 \text{ t}$ $Q = 2,121 \text{ t}$,
 (b) $P = 491,4 \text{ kg}$ $Q = 344,4 \text{ kg}$
 (c) $P = 2,642 \text{ t}$ $Q = 9,853 \text{ t}$.

4. Se consideră triunghiul oarecare ABC (fig. 194) și punctul de întâlnire G al medianelor lui; să se arate că forțele reprezentate prin GA , GB , GC își fac echilibrul.

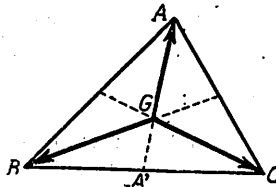


Fig. 194

Indicație: Se va observa că rezultanta forțelor GB și GC trece prin A' și este egală cu $2.GA$.

5. Să se afle, grafic și prin calcul, intensitatea rezultantei forțelor (fig. 195):

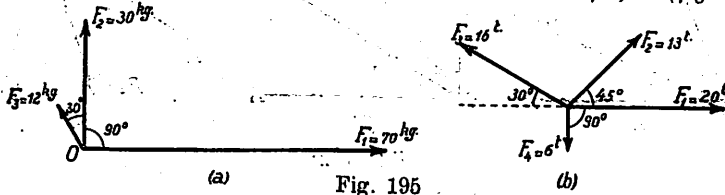


Fig. 195

R.: Grafic, se va construi poligonul forțelor; prin calcul se va aplica formula

$$R^2 = \sum F_1^2 + 2 \sum F_1 F_2 \cos(\angle F_1 F_2)$$

Se găsește: (a) $R = 75,6$ kg, b) $R = 32,010$ tone.

6. Patru forțe concurente au punctul de aplicație în O , iar extremitățile în vârfurile unui dreptunghi $ABCD$, situat într-o poziție oarecare, în același plan cu O .

Să se arate că rezultanta R a acestor forțe trece prin centrul O' al dreptunghiului și este reprezentată printr'un segment egal cu $4\overline{OO'}$ (fig. 196).

Indicație: Se va compune deoparte forțele OA și OD , a căror rezultantă trece prin mijlocul M al laturii AD și este egală cu $2\overline{OM}$; tot astfel rezultanta forțelor OB , OC trece prin mijlocul N al laturii BC și este egală cu $2\overline{ON}$. Se vor compune apoi aceste două rezultante.

7. Să se afle componentele greutății $G = 730$ kg după direcțiile barelor AB și AC (grafic și prin calcul) (fig. 197). (Este cazul unei lămpi susținute de două bare de fier).

R: Componenta după AB : $P = 1032,5$ kg
 » » AC : $Q = 730$ kg

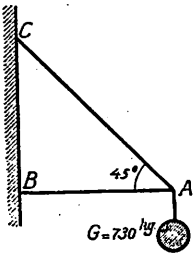


Fig. 197

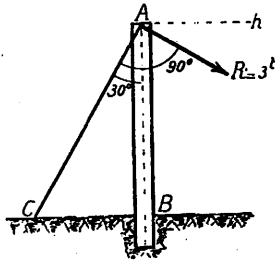


Fig. 198

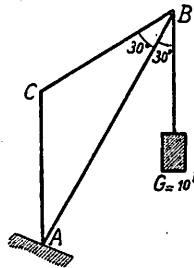


Fig. 199

8. Să se afle componentele forței $R = 3$ tone după direcțiile stâlpului AB și a sârmei AC (grafic și prin calcul) (fig. 198). (Este cazul unui stâlp de telegraf și a sârmei, care îl susține).

R: Componenta după AB : $P = 6$ tone.
 » » AC : $Q = 5,196$ tone

9. Să se afle componentele forței $G = 10$ tone după direcțiile barelor AB și AC , grafic și prin calcul. (Este cazul unei macarale) (fig. 199).

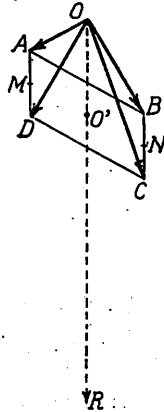


Fig. 196

R: Componenta după CB: $P = 10$ tone
 » » AC: $Q = 17,320$ tone.

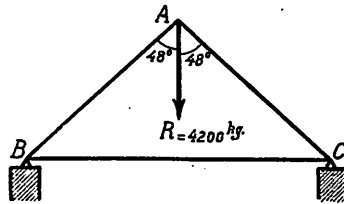


Fig. 200

10. Să se afle componentele forței $R = 4.200 \text{ kg}$ după direcțiile AB și AC , grafic și prin calcul. (Este cazul unei construcții, care susține un acoperiș de casă) (fig. 200).

R: Componenta după AB: $P = 3139 \text{ kg}$
 » » AC: $Q = 3139 \text{ kg}$

EXERCIȚII RECAPITULATIVE.

1. Raza $OM = 0,72$ m. a unui cerc, face cu diametrul Ox unghiul de 20° (fig. 201); se cere să se afle distanțele MN și MP ale punctului M la diametrul Ox și la diametrul Oy perpendicular pe primul.

$$\begin{aligned} R: MN &= r \cdot \sin 20^\circ \\ MN &= 0,24625 \text{ m.} \sim 0,25 \text{ m.} \\ MP &= r \cdot \cos 20^\circ \\ MP &= 0,7866 \text{ m.} \sim 0,78 \text{ m.} \end{aligned}$$

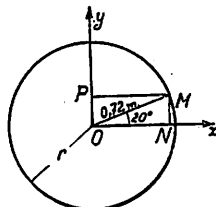


Fig. 201

2. Se împart laturile $BC = CD = a$ ale unui pătrat $ABCD$ în trei părți egale și se unesc punctele M și N (fig. 202). Să se afle unghiul

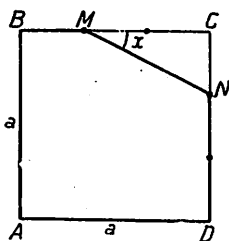


Fig. 202

(fig. 202). Să se afle unghiul
 $x = \widehat{NMC}$.

$$R: \operatorname{tg} x = \frac{CN}{CM} = \frac{\frac{1}{3}a}{\frac{2}{3}a} = \frac{1}{2}$$

$$x = 26^\circ 33' 54''.$$

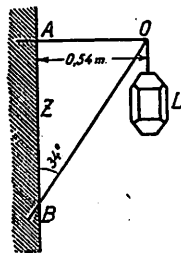


Fig. 203

3. O lampă L este susținută prin două bare de fier OA, OB prinse în zidul Z (fig. 203); știind că $OA = 0,54$ m., iar $\angle ABO = 34^\circ$, se cere să se afle lungimea barei OB .

$$R: OB = \frac{OA}{\sin 34^\circ} \log AB = 1,98483$$

$$OB = 0,9657 \text{ m.} \sim 0,966 \text{ m.}$$

4. Cât de lungă trebuie să fie o scară AB, care reazimă pe un zid vertical OA și pe o podea Ox, dacă înclinarea ei față de verticală este de 20° , iar înălțimea pe care trebuie să o atingem cu scara, este: $OA = 4,57$ m. (fig. 204).

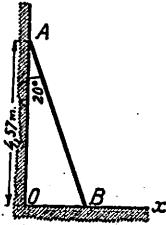


Fig. 204

$$R: OA = AB \cdot \cos 20^\circ; AB = \frac{OA}{\cos 20^\circ}; \log AB = 0,68693$$

$$AB = 4,863 \text{ m.}$$

5. O sferă C de diametru $D = 15,2$ cm., este prinsă cu un fir OA = 0,64 m. într'un plan vertical (fig. 205); știind că firul OA face cu orizontala Oh un unghi de $62^\circ 15'$, se cere să se calculeze distanța CC' dela centrul sferei la verticala Av.

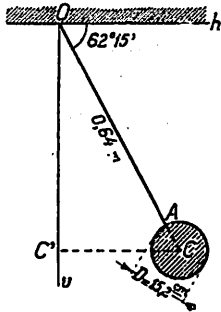


Fig. 205

$$R: CC' = CO \cdot \cos 62^\circ 15' = \left(64 + \frac{15,2}{2}\right) \cos 62^\circ 15'$$

$$\log CC' = 1,52294.$$

$$CC' = 33,337 \text{ m.} \sim 33,3 \text{ m.}$$

6. Dintr'un punct O se duc tangentele OT, OT' la cercul dat C, de rază $CT = CT' = 4,54$ m. (fig. 206); știind că unghiul $T'OT = 42^\circ$ se cere să se afle distanța dela punctul O la centrul C al cercului.

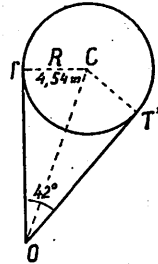


Fig. 206

$$R: TC = OC \sin \frac{42^\circ}{2}$$

$$OC = \frac{4,54 \text{ m}}{\sin 21^\circ} = 12,669 \text{ m.} \sim 12,67 \text{ m.}$$

7. Cât de lungă trebuie să fie bara AB (fig. 207) știind că ea trebuie să facă cu dreapta OV unghiul $\alpha = 18^\circ 30'$ iar distanța $OB = 20,3$ dm.

R: Avem relația:

$$\cos 18^{\circ}30' = \frac{OB}{AB} = \frac{20,3 \text{ dm.}}{AB}$$

$$AB = \frac{20,3 \text{ dm.}}{\cos 18^{\circ}30'}$$

$$\log AB = 1,33054$$

$$AB = 21,406 \text{ dm.}$$

8. Turnul care poartă antena unui post de radio are o înălțime $AB = 85 \text{ m.}$ (fig. 208), și este susținut cu o sârmă groasă BC , C fiind la distanța $d = CA = 25,5 \text{ m.}$ de punctul A . Presupunând că sârma BC ar fi în linie dreaptă se cere să se afle: 1) lungimea l a cablului AC ; 2) unghiul $\alpha = \widehat{ACB}$ pe care-l face cablul cu orizontala.

$$R: l = AC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{85^2 + 25,5^2} = \sqrt{7875,25} = 88,742 \text{ m.} \sim 88,74 \text{ m.}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{85 \text{ m.}}{25,5 \text{ m.}}; \log \operatorname{tg} \alpha = 0,52288; \alpha = 73^{\circ}18'3''.$$

9. O bară AB de lungime $l = 3,20 \text{ m.}$ rezăimă pe două drepte

perpendiculare OH, OV (fig. 209).

Știind că $OA = 7,2 \text{ dm.}$, să se afle unghiul α cu care bara este înclinată pe dreapta OH .

$$R.: \cos \alpha = \frac{OA}{AB} = \frac{0,72 \text{ m.}}{3,20 \text{ m.}}$$

$$\log \cos \alpha = \bar{1},35218$$

$$\alpha = 76^{\circ}59'50''$$

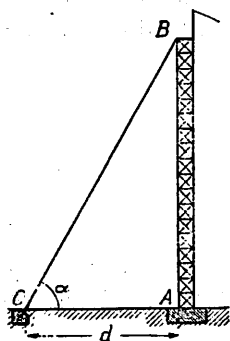


Fig. 208

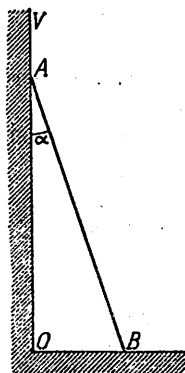


Fig. 207

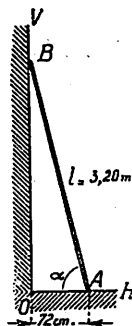


Fig. 209

10. Un balon sferic O , de rază $R = 2,75 \text{ m.}$ este ancorat de punctul A , cu ajutorul frânghiei (cablului) $L = AB = 120 \text{ m.}$ (fig. 210); știind că din cauza vântului balonul a fost mișcat din poziția verticală AV astfel că

$O'A O' = \widehat{5^{\circ}30'}$ se cere să se afle înălțimea centrului O al balonului (măsurată pe verticală).

$$R: AO' = AO \cos 5^{\circ}30' = (120 + 2,75) \cos 5^{\circ}30' = 122,186 \text{ m.}$$

11. Să se rezolve un triunghi dreptunghiu când se cunoaște ipotenusa a și raportul $\frac{b}{c} = k$ al catetelor.

(Aplicație numerică: $a = 104,17 \text{ m.}$, $k = 2,3$).

$$\text{Indicație: } k = \frac{b}{c} = \frac{a \sin B}{a \sin C} = \operatorname{tg} B; \text{ se găsește } B = 66^{\circ}30'5''$$

12. Să se rezolve un triunghi dreptunghiu când se cunoaște ipotenusa a și produsul $bc = k^2$ al catetelor.

(Aplicație numerică: $a = 304,7 \text{ m.}$, $k^2 = 58 \text{ m}^2$).
 $C = 23^{\circ}29'55''$ $b = 95,53 \text{ m.}$ $c = 41,53 \text{ m.}$ $S = 1983,92 \text{ mp.}$

Indicație. $k^2 = b \cdot c = a^2 \sin B \sin C = \frac{a^2}{2} \sin 2B$; se găsește:

$$B = 2^{\circ}17'43'' \quad C = 87^{\circ}42'17'' \quad b = 12,203 \text{ m.} \quad c = 304,45 \text{ m.}$$

$$S = \sim$$

13. Un cerc are raza $TA = 5,27 \text{ m.}$ iar unghiul tangentei AS cu dreapta TS este: $\alpha = 3^{\circ}40'$. Se cere să se afle distanța TS (fig. 211).

R: Avem:

$$AT = TS \sin 3^{\circ}40'; \quad 5,27 \text{ m.} = TS \sin 3^{\circ}40'$$

$$TS = \frac{5,27 \text{ m.}}{\sin 3^{\circ}40'}$$

$$TS = 82,406 \text{ m.}$$

Observare. In astronomie, dacă cercul T reprezintă pământul, iar S un astru oarecare, unghiul α se chiamă paralaxa astrului S iar calculul de mai sus servește la aflarea distanței dintre pământ și astrul S .

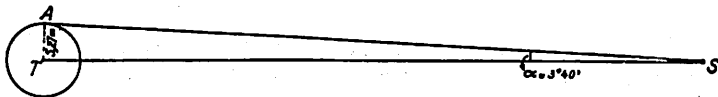


Fig. 211

14. Un aeroplan A situat la 1250 m. deasupra orizontului Oh , este văzut din punctul O sub unghiul $\angle hOA = 65^\circ 30'$; aeroplanul execută apoi un viraj în planul hOA și coboară pe un drum în arc de cerc cu centrul în O , până în B , în care poziție este văzut din O sub unghiul $\angle hOB = 28^\circ 18'$ (fig. 212).

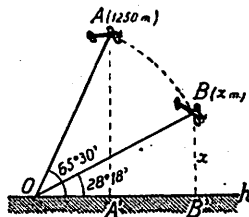


Fig. 212

Se cere înălțimea aeroplanului deasupra orizontului în poziția B .

R: Fie A' și B' proiecțiile lui A și B pe orizontala Oh din triunghiul OAA' avem:

$$OA = \frac{1250 \text{ m}}{\sin 65^\circ 30'}; \log OA = 3,13789; OA = 1373,7 \text{ m.}$$

din triunghiul OBB' avem:

$$x = BB' = OB \sin 28^\circ 18' = 1373,7 \sin 28^\circ 18'$$

$$\log x = 2,81375; x = 651,26 \text{ m.}$$

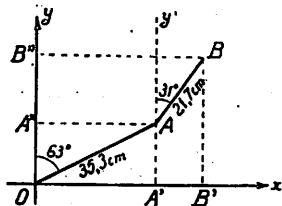


Fig. 213

15. Bara $OA = 35,3$ cm face axa Oy unghiul $\angle AOy = 63^\circ$, iar baza $AB = 21,7$ cm. face cu aceeași axă unghiul $\angle BAy' = 31^\circ$. Se cere distanțele BB'' și BB' ale extremității B la axa Oy și la axa Ox perpendiculară pe aceasta (fig. 213).

R: Se găsește:

$$BB' = 35,3 \sin 27^\circ + 21,7 \sin 59^\circ = 16,026 + 18,601 = 34,627$$

$$BB'' = 21,7 \sin 31^\circ + 35,3 \sin 63^\circ = 11,176 + 31,452 = 11,176 + 31,452 = 42,628$$

16. Se împarte ipotenuza $BC = 1,70$ m. a unui triunghi dreptunghiu, în care $\hat{C} = 30^\circ$, în trei părți egale prin punctele M și N . Se cere să se calculeze unghiurile: $x = \widehat{CAN}$ și $y = \widehat{CAM}$ (fig. 214).

$$R.: \text{Observăm că: } MM' = \frac{2}{3} AB, \text{ iar } NN' = \frac{1}{3} AB$$

$$AB = BC \sin 30^\circ = 1,70 \cdot \frac{1}{2} = 0,85 \text{ m.}$$

$$AN' = \frac{2}{3} AC = \frac{2}{3} BC \cos 30^\circ = \frac{2}{3} BC \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,70 \frac{\sqrt{3}}{3} = \dots$$

Se găsește: $\begin{matrix} \text{tg } x = 0,2883 & x = 16^\circ 5' 4'' \\ \text{tg } y = 1,153 & y = 49^\circ 4' 24'' \end{matrix}$

17. O șosea în linie dreaptă OA este înclinată pe orizontala OH, cu unghiul HOA = 7°30'; știind că un vehicul a parcurs pe șosea distanța OM = 1500 m., să se afle înălțimea punctului M deasupra orizontalei OH (fig. 215).

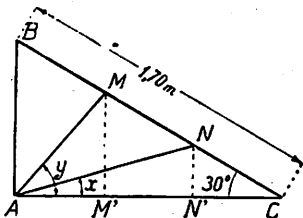


Fig. 214



Fig. 215

țimea punctului M deasupra orizontalei OH (fig. 215).

R.: $MN = OM \sin 7^\circ 30'$
 $\log MN = 2,29179$
 $MN = 195,79 \text{ m.}$

18. Un zid care mărginește un bazin are în secțiune, forma unui trapez dreptunghi A'BCD (fig. 216):

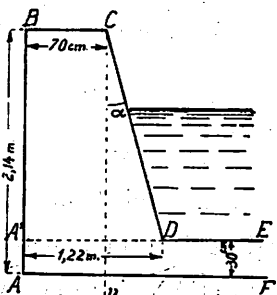


Fig. 216

$AB = 2,14 \text{ m.}$ $BC = 70 \text{ cm.}$
 $AD = 1,22 \text{ m.}$

Se cere să se afle înclinarea α a laturei CD cu verticala (această înclinare se cheamă „fructul” zidului).

R. $\text{tg } \alpha = \frac{A'D - BC}{A'B} = \frac{122 - 70}{184} = \frac{52 \text{ cm}}{184 \text{ cm.}}$
 $\log \text{tg } \alpha = 1,45118$
 $= 15^\circ 46' 50''$

19. Un plan înclinat OP, face cu planul orizontal OH, un unghi de 32°15'. O bilă A, se găsește la o distanță $d = 1,20 \text{ m.}$ de planul orizontal (fig. 217); dacă bila se deplasează pe planul

încalinat (pe o linie de cea mai mare pantă a planului) până în A' ($AA' = 0,80$ m.) se cere să se afle la ce distanță x se va găsi ea de planul OH când va veni în poziția A' ?

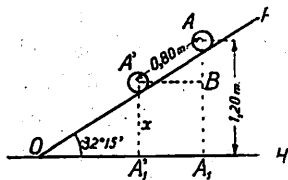


Fig. 217

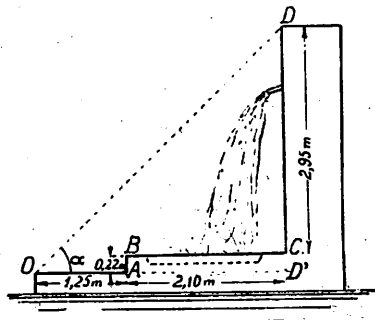


Fig. 218

R: Avem $AB = AA' \sin 32^\circ 15' = 0,80 \times \sin 32^\circ 15' = 0,42689$, deci:
 $x = 1,20$ m. — $AB = 0,77311$ m.

20. O fântână are forma din figura 218, în care: $OA = 1,25$ m., $AB = 22$ cm., $BC = 2,10$ m., $CD = 2,95$ m. Se cere să se afle înclinarea α pe care o face raza vizuală OD cu orizontala OA .

R: În triunghiul ODD' se poate scrie:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{DD'}{OD'} = \frac{2,95 \text{ m.} + 0,22 \text{ m.}}{1,25 \text{ m.} + 2,10 \text{ m.}} = \frac{3,17}{3,35}$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 1,97602$$

$$\alpha = 43^\circ 25' 9''.$$

21. O sondă are forma din figura 219; se cere să se afle înclinarea α a muchiiilor AC , BD , ale sondei pe teren, știind că: $AB = 7,00$ m., $CD = 3,50$ m., $H = 20$ m.

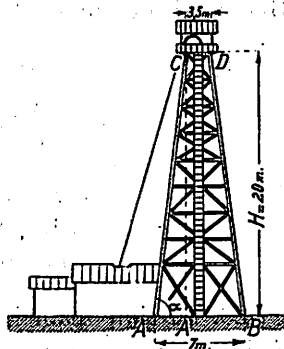


Fig. 219

R: Din triunghiul dreptunghiu AA'C, avem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H'}{\frac{1}{2}(AB - CD)} = \frac{20}{\frac{1}{2}(7 - 3,50)} = \frac{20}{1,75}$$

$$\alpha = 84^{\circ}59'57''$$

22. Se dau două axe rectangulare Ox , Oy și o semidreaptă OD_1 care face cu axa pozitivă Ox , unghiul α ; prin două puncte A și B luate oricum pe această

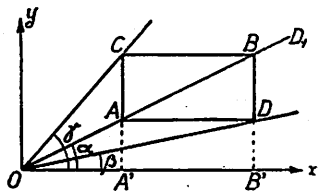


Fig. 220

A și B luate oricum pe această semidreaptă, se duc paralele cu axele Ox și Oy . Se obține astfel un dreptunghi $ACBD$; fie β unghiul semidreptei OD cu axa Ox și γ unghiul semidreptei OC cu aceeași axă (fig. 220).

Se cere să se demonstreze relațiunea:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$$

(Chestiune propusă de d-l Prof. univ. *D. Pompeiu* la examenul de capacitate pentru clasa VIII, la Liceul Mateiu Basarab din București în Iunie 1915).

R: Fie A' și B' intersecțiile dreptelor AC și BD cu axa Ox ; avem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'}, \operatorname{tg} \beta = \frac{DB'}{OB'}, \operatorname{tg} \gamma = \frac{CA'}{OA'}$$

deci

$$\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma = \frac{DB' \cdot CA'}{OA' \cdot OB'} = \frac{AA'}{OA'} \times \frac{BB'}{OB'} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

23. În timpul unei zile, într'o localitate de pe ecuator, soarele S descrie pe bolta cerească un semicerc (dela răsăritul H la apusul H') astfel că în timpuri egale, arcele descrise sunt egale; se cere să se afle cât timp a trecut dela răsăritul soarelui

dacă umbra AA' aruncată de un turn AB = 40,3 m. pe orizontala HH', este egală cu 102 m. (fig. 221).

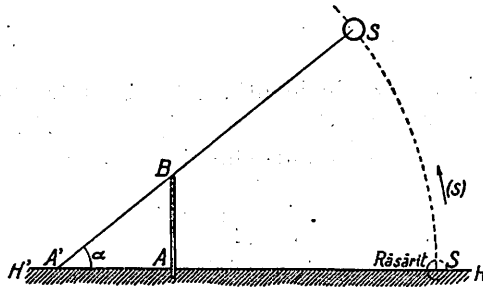


Fig. 221

R.: Din figură reese că:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{AA'} = \frac{40,3 \text{ m.}}{102 \text{ m.}}$$

Pe de altă parte, soarele descrie în 12 ore un arc de 180° deci într'o oră un unghi de $\frac{180}{12} = 15^\circ$.

Soarele fiind foarte depărtat de pământ putem presupune că A' este centrul semicercului HSH', deci: arcul HS are $75^\circ 47' 49''$ și prin urmare dela răsăritul soarelui a trecut

$$\frac{75^\circ 47' 49''}{15^\circ} \text{ ore} = 5 \text{ ore } 3 \text{ minute } 11 \text{ sec.}$$

24. Fie dreapta AB și perpendiculara (normala) pe ea N'IN.

Din punctul I pornesc două drepte: IS care face cu IN unghiul $i = 35^\circ 30'$ și IR care face cu IN' unghiul r necunoscut (fig. 222).

Se cere să se determine r știind că:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = 1,21$$

R. Se găsește $r = 28^\circ 40' 47''$

Observare. Asemenea chestiuni se întâlnesc în optică, la refracția atmosferică (legile lui Descartes); SI este raza incidentă IR raza refractată; i unghiul de incidență, r unghiul de refracție.

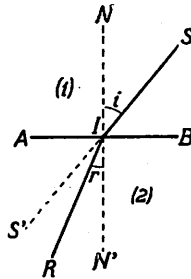


Fig. 222

Numărul $n = \frac{\sin i}{\sin r}$ este *indicele de refracție* al celor două medii: mediul

(1) din care vine raza SI și mediul (2) în care se produce raza refractată IR.

25. SI fiind o rază incidentă, IR raza refractată, iar i și r unghiurile de incidență și de refracție (fig. 222), se cere:

a) Care este valoarea indicelui de refracție

$$n = \frac{\sin i}{\sin r}$$

a mediului (1) față de mediul (2), dacă $i = 64^{\circ}38'$ și $r = 19^{\circ}29'$?

b) Dacă indicele de refracție n are valoarea 0,412, cât trebuie să fie unghiul de incidență i , pentru ca să avem refracție totală (raza IR să ia direcția IA).

R. a) $n = 2,709125$

b) $i = 24^{\circ}18'45''$

26. Se dă distanța $OO' = 1,45$ m. dintre centrele O, O' a două roți, de raze $R = 30$ cm., $R' = 12$ cm., care sunt angrenate cu o curea perfect întinsă (fig. 223).

Se cere să se calculeze lungimea L a curelei.

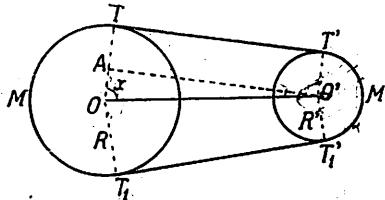


Fig. 223

R: Fie $O'A \perp OT$; din triunghiul dreptunghiu OAC' , avem:

$$\cos x = \frac{R - R'}{OO'} = \frac{30 - 12}{145}$$

$$x = 82^{\circ}52'9''$$

$$O'A = TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{145^2 - (30 - 12)^2} = 143,9$$

$$\text{deci } L = 2 TT' + \text{arc } TMT_1 + \text{arc } T'M'T_1' = 287,8 + 101,6 + 34,6 = 424,09.$$

27. Se ia ca cerc trigonometric, un cerc cu raza $R = 2$ m; ce lungimi au, în acest cerc, segmentele care reprezintă: $\sin 135^{\circ}$, $\cos 210^{\circ}$, $\text{tg } 300^{\circ}$, $\text{cotg } 330^{\circ}$.

$$R. \sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 300^\circ = \frac{\sin 300^\circ}{\cos 300^\circ} = \frac{-\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg} 330^\circ = \frac{\cos 330^\circ}{\sin 330^\circ} = \frac{\cos 30^\circ}{-\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

Deci lungimile sunt:

$$\begin{aligned} \sin 135^\circ &= 1,41 \text{ m.} \\ \cos 210^\circ &= 1,73 \text{ m.} \\ \operatorname{tg} 300^\circ &= 3,46 \text{ m.} \\ \operatorname{cotg} 330^\circ &= 3,46 \text{ m.} \end{aligned}$$

28. Ce unghi (în grade și radiani), descrie secundarul unui ceasornic în timp de o jum. oră? Ce semn are acest unghi?

29. Care este valoarea (în grade și radiani) și semnul unghiului descris de OA, în sensul săgeții 1 (sau 2) până se așterne peste OB (fig. 224).

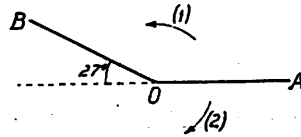


Fig. 224

R. 28) -180° ; π rad.
 29) $+153^\circ$; 2,66 rad; -207° ; 3,61 rad.

30. Se dă: $\sin a = \frac{2}{5}$, $\cos b = \frac{7}{9}$, a și b fiind unghiuri mai mici de 90° ; se cere să se calculeze:

$$\sin (a + b); \quad \sin (a - b); \quad \cos (a + b); \quad \cos (a - b).$$

R. $0,9642$; $0,4615$; $0,2650$; $0,8871$
 $\sin (a + b)$ $\sin (a - b)$ $\cos (a + b)$ $\cos (a - b)$

31. Se dă: $\operatorname{tg} 786^\circ = 1,246$; $\operatorname{cotg} 433^\circ = 0,306$ și se cere: $\operatorname{tg} 17^\circ$, $\operatorname{cotg} 17^\circ$; $\operatorname{tg} 114^\circ$, $\operatorname{cotg} 114^\circ$.

Să se compare valorile aflate cu cele date de tabelele naturale.

R. Se va observa că:

1. $786^\circ = 2 \times 360^\circ + 66^\circ$ iar $114^\circ + 66^\circ = 180^\circ$
 2. $433^\circ = 360^\circ + 73^\circ$ iar $73^\circ + 17^\circ = 90^\circ$ etc.

32. Să se afle liniile trigonometrice ale unghiului de 195° , cunoscând $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$

$$R, \sin 195^\circ = \frac{\sqrt{6} (\sqrt{3} - 1) + 4 \sqrt{2} + \sqrt{3}}{8};$$

$$\cos 195^\circ = \frac{\sqrt{2} (\sqrt{3} - 1) - 12}{8}; \quad \text{tg } 195^\circ = \frac{\sqrt{6} (3 - 1) + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} (\sqrt{3} - 1) - 12};$$

$$\text{cotg. } 195^\circ = \frac{\sqrt{2} (3 - 1) - 12}{\sqrt{6} (\sqrt{3} - 1) + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

33. Se dă $\sin a = \frac{1}{4}$, $\cos b = \frac{2}{3}$; se cere să se calculeze

$\sin (a + b)$; $\sin (a - b)$; $\cos (a + b)$, $\cos (a - b)$.

R. $\sin (a + b) = \sin 62^\circ 43' 10'' = 0,8887$; $\sin (a - b) = \sin -33^\circ 45' 50'' = 0,5556$; $\cos (a + b) = 0,4583$; $\cos (a - b) = 0,8313$.

34. Se dă $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$, $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; să se afle $\sin 225^\circ$, $\cos 225^\circ$; $\sin 195^\circ$, $\cos 195^\circ$. *Indicație:* Formulele adunarea arcelor.

$$R. \sin 225^\circ = \frac{\sqrt{6} (\sqrt{3} - 1) - 4 \sqrt{2} + \sqrt{3}}{8};$$

$$\cos 225^\circ = \frac{\sqrt{2} (1 - \sqrt{3}) - 12}{8} \quad \sin 195^\circ = \frac{\sqrt{6} (\sqrt{3} - 1) + 4 \sqrt{2} + \sqrt{3}}{8};$$

$$\cos 195^\circ = \frac{\sqrt{2} (\sqrt{3} - 1) - 12}{8}$$

35. Se dă $\text{tg } 1098^\circ = 0,325$, $\text{cotg } 784^\circ = 0,488$ și se cere: $\text{tg } 72^\circ$, $\text{cotg } 72^\circ$; $\text{tg } 16^\circ$, $\text{cotg } 16^\circ$ și să se compare cu valorile aflate din tabele.

Indicație: Formulele înmulțirea și diviziunea arcelor.

$$\text{tg. } 1098^\circ = \text{tg } 18^\circ; \quad \text{tg } 72^\circ = \text{tg } 2 (2,18^\circ); \quad \text{tg } 784^\circ = \text{tg } 64^\circ;$$

$$\text{tg. } 16^\circ = \text{tg. } \frac{1}{2} \left(\frac{64^\circ}{2} \right)$$

$$R. = \text{tg } 72^\circ = 3,078; \quad \text{cotg } 72^\circ = 0,325; \quad \text{tg } 16^\circ = 0,287; \quad \text{cotg } 16 = 3,487$$

36. Să se verifice că relațiile

$$\sin (a - b) \sin (a + b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

$$\cos (a - b) \cos (a + b) = \cos^2 a - \cos^2 b$$

sunt adevărate. (C.d.P.). *Indicație:* Se înlocuiesc primii membri prin formulele adunării arcelor.

37. Să se explice pentru ce când ni se dă valoarea lui $\cos a$ se obține o singură valoare pentru $\cos 2a$ și două valori egale și de semne contrare pentru $\sin 2a$.

R. Se va scrie formula generală a unghiurilor a , care au un cosinus dat și se va înmulți cu 2; arcele $2a$ astfel obținute au un singur cosinus; iar sinusurile sunt egale și de semne contrare.

38. Să se stabilească formulele:

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a; \quad \text{tg } 3a = \frac{3\text{tg}a - \text{tg}^3a}{1 - 3\text{tg}^2a}$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a; \quad \text{cotg } 3a = \frac{\text{cotg}^3a - 3\text{cotg}a}{3\text{cotg}^2a - 1}$$

R. Se va porni dela relațiile $\sin 3a = \sin (2a+a)$, $\cos 3a = \cos (2a+a)$ etc.

39. Să se stabilească formula care dă $\sin 2a$ și $\cos 2a$ în funcțiune de $\cotg 2a$.

$$R. \sin 2a = \frac{2 \cotg a}{1 + \cotg^2 a}; \quad \cos 2a = \frac{\cotg^2 a - 1}{\cotg^2 a + 1}$$

40. Să se transforme într'o expresiune calculabilă cu logaritmi expresiunile, și să se afle valorile lor numerice:

$$a) \sin 138^\circ 4' 30'' + \cos 37^\circ 28' 6''$$

b) $1 + \sin 1002^\circ$

c) $\operatorname{tg} 304^\circ 38' 2'' - \operatorname{cotg} 403^\circ 27' 8''$

R. a) 1,4618; b) 1,9781; c) 0,345775.

41. Să se calculeze cu logaritmi expresiunile:

a) $\frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1) - \cos 67^\circ$ b) $1 - \operatorname{tg} 372^\circ$

c) $\sqrt{3} - \operatorname{cotg} 77^\circ$ d) $1 + 2 \sin 17^\circ 13'$

Indicație. Se va observa că:

a) $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$; b) $1 = \operatorname{tg} 45^\circ$; c) $\sqrt{3} = \operatorname{cotg} 30^\circ$;

d) $1 + 2 \sin 17^\circ 13' = 2 \left(\frac{1}{2} + \sin 17^\circ 15' \right)$ etc.

42. Într'un triunghi oarecare ABC, se cunosc unghiurile $B = 49^\circ 54' 6''$, $C = 18^\circ 32' 4''$; fie AD înălțimea coborită din vârful A pe latura BC (fig. 225); se cere să se calculeze expresiunea:

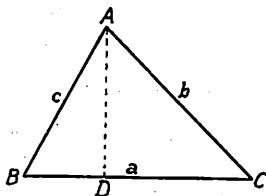


Fig. 225

$$\frac{DC}{b} - \frac{BD}{c}$$

Indicație. Putem scrie:

$$\frac{DC}{b} - \frac{BD}{c} = \cos C = \cos C - \cos B \text{ etc.}$$

și se face aceasta din urmă calculabilă prin log. R = 0,304708.

43. Se dă perimetrul $2p = 854$ m și unghiurile $A = 64^\circ$, $B = 39^\circ$, $C = 77^\circ$; se cere să se afle laturile a, b, c și suprafața.

Indicație. $2p = 854 = a + b + c = 2R (\sin A + \sin B + \sin C)$.

$$R = \frac{854}{2 (\sin A + \sin B + \sin C)} = \frac{427}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \text{ x)}$$

prin logaritmi găsim: R = 170,616 m.

apoi $a = 2 R \sin A$, $b = 2 R \sin B$, $c = 2 R \sin C$.
 deci $S = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{abc}{4R} = 2 R^2 \sin A \sin B \sin C$

cu logaritmi aflăm: $S = 32092,14 \text{ m}^2$.

44. Ce devine formula

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 S}$$

dacă triunghiul ABC este dreptunghiu în A.

$$R \cdot S = \frac{bc}{2}, \text{ deci } R = \frac{a}{2}, \text{ ceea ce este evident.}$$

45. Ce devine formula:

$$S = \frac{a b c}{4 R}$$

dacă triunghiul ABC este echilateral.

$$R \cdot a = b = c, \text{ iar } R = \frac{a}{\sqrt{3}}, \text{ deci}$$

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

46. Se consideră un triunghi oarecare ABC ale cărui elemente sunt cunoscute; să se exprime în funcțiune de acestea, laturile $B'C' = a'$, $C'A' = b'$, $A'B' = c'$ și unghiurile A' , B' , C' ale triunghiului ortic (triunghiul care are ca vârfuri picioarele înălțimilor triunghiului ABC) (fig. 226).

Indicație. Se vor găsi geometric:

$$A' = 180^\circ - 2A, B' = 180^\circ - 2B, C' = 180^\circ - 2C$$

$$\text{avem apoi: } C'A = b \cos A, AB' = c \cos A$$

$$C'B'^2 = AC'^2 + AB'^2 - 2 AC' \cdot AB' \cos A$$

$$= \cos^2 A (b^2 + c^2 - 2bc \cos A = a^2 \cos^2 A$$

deci

$$C'B' = a' = a \cos A, b' = b \cos B, c' = c \cos C$$

Altfel. Se va observa că cercul $A'B'C'$ este cercul lui Euler al triunghiului

$$ABC, \text{ iar raza sa este } \frac{R}{2}; \text{ deci}$$

$$\frac{a'}{\sin(180^\circ - 2A)} = 2 \frac{R}{2} \text{ sau } a' = a \cos A$$

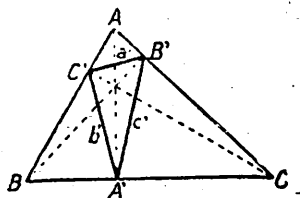


Fig. 226

47. Să se calculeze raza r' a unui cerc O' tangent la laturile AC și BC ale triunghiului și la cercul înscris (fig. 227) cunoscându-se laturile $2a$, $3a$, $4a$ ale triunghiului.

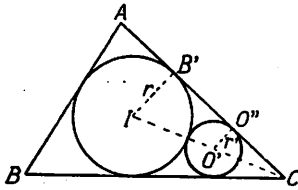


Fig. 227

Indicație. Se va considera triunghiurile asemenea ICB' și $O'CO''$.

48. Se dă un trapez ABCD în care se cunoaște:

$$AD = 1350 \text{ m.}, BC = 425 \text{ m.}, A = 64^{\circ}52' \text{ și } AB = 701 \text{ m.}$$

Se cere să se ducă o paralelă MN la baze, astfel ca suprafața (AMND) = 430.000 m² (fig. 228).

(Această problemă se întâlnește des la parcelări).

49. Se cere să se rezolve grafic triunghiul ABC în care se dă $2p$ și unghiurile A, B, C.

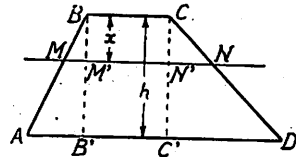


Fig. 228

Indicație. Se va construi un triunghi având o latură egală cu $2p$ și unghiurile adiacente egale cu $\frac{B}{2}$ și $\frac{C}{2}$ etc.

50. În exercițiul precedent s'au dat patru elemente: $2p$, A, B, C; nu sunt prea multe pentru determinarea triunghiului ABC?

R. Se va observa că de fapt sunt numai trei elemente date $2p$, A, B, deoarece $\hat{C} = 180^{\circ} - \hat{A} - \hat{B}$.

51. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sin 3x = \cos 4x$

b) $2 \operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} 3x$.

52. Să se rezolve ecuația:

$$(\sin x + \cos x)^2 - 8 \sin^2 x \cos^2 x = 0$$

(G. M. Vol. XVIII p. 396)

Indicație. Se va descompune într'o sumă, înmulțită prin diferență etc.

R: $n_1 = 45^{\circ}$ $n_2 = 210^{\circ}$; 330° .

53. Să se calculeze valoarea expresiunii:

$$\cos^8 \frac{\pi}{8} + \cos^8 \frac{5\pi}{8}.$$

R. $\frac{17}{32}$

(G. M. Vol. XVIII p. 396).

54. Fiind date lungimea coardei și săgeții unui arc de cerc, să se calculeze raza cercului.

Indicație. Insemnând coarda cu a și săgeata cu b avem:

R.
$$r = \frac{4b^2 + a^2}{8b}$$

55. Să se rezolve ecuația:

$$\cos^2 x = \cos^2 3x.$$

R. $\cos x = \pm 1, \cos x = \pm \frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{3}}}{2}$

56. Din relația

$$\frac{\cos x}{1 + \sin 2x} = a$$

să se deducă:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 - a}{1 + a}$$

(G. M. Vol. XVIII p. 397).

57. Să se demonstreze identitatea:

$$a \sqrt{4R^2 - a^2} + b \sqrt{4R^2 - b^2} + c \sqrt{4R^2 - c^2} = 4S$$

(G. M. Vol. XVIII p. 237).

Indicație. Se va scrie :

$$\sqrt{4R^2 - a^2} = a \sqrt{\frac{4R^2}{a^2} - 1} = a \sqrt{\frac{1}{\sin^2 A} - 1} = a \cotg A;$$

identitatea se reduce la :

$$a^2 \cotg A + b^2 \cotg B + c^2 \cotg C = 4S$$

(Vezi C. d. P. XVIII p. 28).

58. Într'un triunghi oarecare ABC, există relațiunile:

$$\begin{aligned} \frac{(b+c)^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{(b-c)^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} &= \frac{(c+a)^2}{\cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{(c-a)^2}{\sin^2 \frac{B}{2}} \\ &= \frac{(a+b)^2}{\cos^2 \frac{C}{2}} + \frac{(a-b)^2}{\sin^2 \frac{C}{2}} = 16 R^2 \end{aligned}$$

(G. M. Vol. XVIII, p. 37).

R. Efectuând calculele, se găsește că primul membru are expresia:

$$\frac{a^2}{\cos^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{4 a^2}{\sin^2 A} = 16 R^2 \text{ etc.}$$

59. Să se arate că dacă înlocuim în expresiunea:

$$E = x^2 + y^2$$

x prin $X \cos \alpha - Y \sin \alpha$ și y prin $X \sin \alpha + Y \cos \alpha$ găsim identitatea:

$$x^2 + y^2 = X^2 + Y^2$$

R. $x^2 + y^2 = (X \cos \alpha - Y \sin \alpha)^2 + (X \sin \alpha + Y \cos \alpha)^2$ etc.

60. Să se arate că dacă înlocuim în expresiunea:

$$E = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

pe x_1, x_2, y_1, y_2 , prin valorile:

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &= X_1 \cos \alpha - Y_1 \sin \alpha, & x_2 &= Y_2 \cos \alpha - Y_2 \sin \alpha \\ y_1 &= X_1 \sin \alpha + Y_1 \cos \alpha, & y_2 &= X_2 \sin \alpha + Y_2 \cos \alpha \end{aligned}$$

obținem identitatea:

$$E = x_1 x_2 + y_1 y_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2$$

R. Se va înlocui x_1, x_2, y_1, y_2 prin valorile (1) etc.

61. Ce relație există între x , y și r dacă:

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha?$$

R. Avem: $x^2 = r^2 \cos^2 \alpha$, $y^2 = r^2 \sin^2 \alpha$
sau $x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = r^2$

62. Ce relație există între x , y , p , dacă

$$x = \frac{p \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}, \quad y = \frac{p \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha}.$$

R. Eliminând unghiul α , găsim:

$$x^2 y^2 \left(x^2 + y^2 + \frac{3p^2}{4} \right) - \left(\frac{p}{2} \right)^6 = 0$$

(Vezi Geometrie analitică de N. Abramescu, 1927).

63. Ce relație există între x , y , c și d dacă:

$$x = a \cos \alpha \quad \text{și} \quad y = b \sin \alpha$$

R. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

64. Ce relație există între x , y , p dacă:

$$x = \frac{p}{2 \cos \alpha}, \quad y = \frac{p}{2 \sin \alpha}.$$

R. $4x^2 y^2 - p^2(x^2 + y^2) = 0.$

65. Se știe că valorile $\operatorname{tg} \alpha_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2$ sunt rădăcinile ecuației date:

$$C x^2 + 2 B x + A = 0$$

și se cere să se exprime $\operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_2)$ cu ajutorul coeficienților cunoscuți A , B , C .

R.
$$\operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}{1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{-2B}{1 - \frac{A}{C}} = \frac{2B}{A - C}$$

66. Să se discute natura rădăcinilor ecuației

$$(m^2 + 1) \sin^2 x + 2 m \cos x + m^2 - 1 = 0$$

în care m poate varia dela $-\infty$ la $+\infty$.

67. Se dă:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

și se cere să se afle relațiile dintre $\operatorname{tg} a$ și $\operatorname{tg} b$ astfel ca:

a) $\alpha = 0^\circ$

b) $\alpha = 90^\circ$

R. a) Se va scrie că $\operatorname{tg} \alpha = 0$, se află $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b$, $a = b$

b) $\operatorname{tg} \alpha = \infty$, $1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = 0$ sau $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = -1$.

68. Să se arate că A , B , fiind două cantități reale oarecare, se poate afla un unghi α , astfel ca să avem identitatea:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} y - p \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha - p.$$

R. Dacă luăm $\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{A}$, găsim:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}}} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ etc.}$$

69. Ce relație există între x , y , a și b dacă

$$x = a \cos^3 \alpha, \quad y = b \sin^3 \alpha$$

R. Avem: $\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3} = \cos \alpha$, $\left(\frac{y}{b}\right)^{1/3} = \sin \alpha$

$$\text{deci } \frac{x^{2/3}}{a^{2/3}} + \frac{y^{2/3}}{b^{2/3}} = 1.$$

70. Ce relație există între x , y , a , b , dacă:

$$x = \frac{a}{\cos \alpha}, \quad y = b \operatorname{tg} \alpha.$$

R. Avem: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1$

71. Să se afle înălțimea h a unui trapez ABCD, când se cunoaște baza mică $b = BC$, unghiurile B, C și suprafața S .

Aplicație numerică: $b = 18,7$ m;
 $B = 137^\circ$, $C = 159^\circ$, $S = 194$ m².

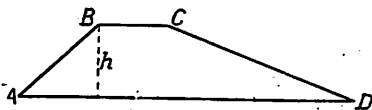


Fig. 229

72. Pe un drum întâlnim un deal; cum putem măsura înălțimea dealului fără a ne abate din drum?

A P E N D I C E

UNITĂȚI DE MĂSURĂ.

Orice cantitate, ce se poate măsura, se cheamă *mărime*.

A măsura o mărime înseamnă a o compara cu altă mărime de acelaș fel, numită *unitate de măsură*.

O bună unitate de măsură trebuie să îndeplinească calitatea de a fi *invariabilă* în timp și spațiu, adică să nu se modifice cu trecerea timpului, nici să nu se schimbe când ne mutăm dintr'un loc într'altul.

În Trigonometrie intervin mai ales următoarele mărimi: *lungimi, suprafețe, unghiuri*.

Să reamintim unitățile de măsură respective.

Unitățile de măsură pentru lungimi.

Unitatea de măsură pentru lungimi este *metrul*¹⁾; decimetrul, centimetrul, milimetrul sunt unități submultiple. Ele se scriu prescurtat: m., dm., cm., mm.

Când lungimea de măsurat este mai mare, se întrebuițează decimetrul (egal cu 10 metri), hectometrul (egal cu 100 metri) și kilometrul (egal cu 1000 metri).

Decimetrul, hectometrul și kilometrul sunt multiplii metrului; se scrie prescurtat: dam., hm., km.

Unități de măsură pentru suprafețe.

Pentru măsurarea suprafețelor se întrebuițează *metrul pătrat*; se scrie m².

¹⁾ Metrul este prin definiție exact a patruzecă milioana parte din lungimea meridianului pământesc. (Măsurători ulterioare au dovedit o mică eroare de ordinul zecimei de milimetru).

Submultiplii metrului pătrat sunt:

$$\text{decimetrul pătrat (dm}^2\text{)} = \frac{1}{100} \text{ m}^2$$

$$\text{centimetrul pătrat (cm}^2\text{)} = \frac{1}{10.000} \text{ m}^2$$

$$\text{milimetrul pătrat (mm}^2\text{)} = \frac{1}{1.000.000} \text{ m}^2$$

Pentru suprafețe mari se întrebuițează:

$$\text{decametrul pătrat (dam}^2\text{)} = 100 \text{ m}^2$$

$$\text{hectometrul pătrat (hm}^2\text{)} = 10.000 \text{ m}^2$$

$$\text{kilometrul pătrat (km}^2\text{)} = 1.000.000 \text{ m}^2$$

Unități practice sunt:

$$\text{hectarul} = 10.000 \text{ m}^2$$

$$\text{pogonul} = \frac{1}{2} \text{ hectar} = 5000 \text{ m}^2$$

Observare importantă. Explicarea suprafețelor în numere zecimale se va face cu două, patru sau șase zecimale, deoarece submultiplii unității de suprafață sunt a suta parte din unitatea imediat superioară.

Nu vom scri la rezultate:

4,573 m² ci 4,5730 m², care se citește 4 metri pătrați, 57 decimetri pătrați și 30 centimetri pătrați.

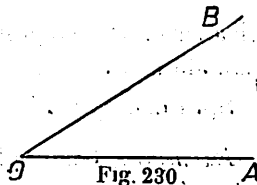
Nu vom scri:

180,45937 km² ci 180,459370 km² care se citește: 180 kilometri pătrați, 45 hectometri pătrați, 93 decimetri pătrați, 70 m².

Unități de măsură pentru unghiuri. 1)

Pentru măsurarea unui unghi, adică a deschiderii dintre două drepte OA, OB (fig. 230) se întrebuițează următoarele unități de măsură:

1) *gradul sexagesimal*, 2) *gradul centesimal*, 3) *unghiul drept*, 4) *cercul*, 5) *radianul*.



¹⁾ Vezi și pag. 10: *Radianul*.

1. Gradul sexagesimal. Unitatea de măsură, numită grad sexagesimal, se obține împărțind lungimea unui cerc în 360 de părți egale (fig. 231); a trei sute șasezecea parte din circonferință spre exemplu: arcul MN, se cheamă *grad de arc*, iar unghiul la centru MON se cheamă *grad de unghiu*.

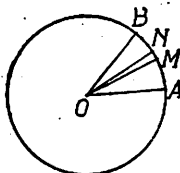


Fig. 231

Se înțelege de aci că circonferința are 360 *grade de arc*; un semicerc are 180 *grade de arc*, un sfert de cerc 90 *grade de arc*, etc.; tot de aci reiese că unghiul la centru, care corespunde la un arc de un sfert de cerc, are 90 *grade de unghiu*, acela ce corespunde unui semicerc, 180 *grade de unghiu* etc.

Când un unghiu are spre exemplu 15 grade, se scrie astfel: 15°.

Observare importantă. Proprietatea unghiului AOB, cu vârful în centrul cercului, de a avea acelaș număr de grade de unghiu ca și numărul de grade de arc al arcului corespunzător AB, se datorește faptului că *am ales ca grad de unghiu, unghiul căruia îi corespunde pe cerc gradul de arc*.

Submultiplii gradului sexagesimal sunt:

$$a) \text{ minutul sexagesimal} = \frac{\text{un grad sexagesimal}}{60}$$

adică minutul sexagesimal este a 60-a parte dintr'un grad.

Spre exemplu 18 minute se notează 18'.

$$b) \text{ secunda sexagesimală} = \frac{\text{un minut}}{60} = \frac{\text{un grad sexagesimal}}{3600}$$

adică secunda sexagesimală este a 60-a parte dintr'o minută sexagesimală sau a 3600-a parte dintr'un grad sexagesimal.

Spre exemplu 21 de secunde se notează 21''.

Exemplu. Un unghiu de 15°13'18'',3 sexagesimale, se citește astfel: 15 grade sexagesimale, 13 minute sexagesimale, 18 secunde sexagesimale și 3 zecimi dintr'o secundă sexagesimală.

2. Gradul centesimal. Dacă am împărți cercul întreg în 400 părți egale, am obține un grad de arc și un grad de unghi, mai mici decât gradul sexagesimal, deoarece acelaș cerc se împarte de astădată într'un număr mai mare de părți.

Gradul de arc și gradul de unghi obținute prin împărțirea cercului în 400 părți egale, se numesc grade centesimale.

Submultipli gradului centesimal sunt:

$$a) \text{ minutul centesimal} = \frac{\text{un grad centesimal}}{100}$$

$$b) \text{ secunda centesimală} = \frac{\text{un minut centes.}}{100} = \frac{\text{un grad centesimal}}{10.000}$$

Exemplu. Un unghi de $15^{\circ}3'2''$ centesimale se citește astfel: cincisprezece grade centesimale, 3 minute centesimale și 2 secunde centesimale; acest unghi se poate scri $15^{\circ},0302$, adică în sistemul centesimal, sutimile de grad sunt minute iar zecimile de miimi, secunde.

Transformarea gradelor sexagesimale în grade centesimale și invers.

În (fig. 232), MN reprezintă un grad sexagesimal, iar M'N' un grad centesimal (mărite).

360 grade sexagesimale corespund cu 400 grade centesimale

$$1 \text{ grad} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \frac{400}{360} = \frac{10}{9} \text{ grade centesimale,}$$

deci n grade centesimale se exprimă prin $\frac{9}{10} n$

grade centesimale.

Invers:

n° grade centesimale se exprimă prin $\frac{9}{10} n$

grade sexagesimale.

De aci rezultă:

Regula I. Pentru a afla în grade centesimale un unghi (sau un arc) dat în grade sexagesimale, înmulțim gradele sexagesimale cu 10 și rezultatul îl împărțim cu 9.

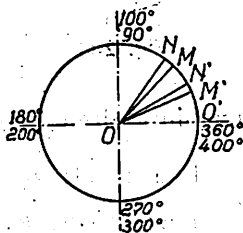


Fig. 232

Regula II. Pentru a afla în grade sexagesimale un unghi (sau un arc) dat în grade centesimale, înmulțim gradele centesimale cu 9 și rezultatul îl împărțim cu 10.

Formulele de transformare, sunt:

$$n^{\circ} \text{ sexag.} = \frac{10}{9} \cdot n \text{ grade centesimale}$$

$$^{\circ} \text{ centes.} = \frac{9}{10} \cdot n \text{ grade sexagesimale}$$

Observare. În cele ce urmează vom folosi numai gradele sexagesimale (sistemul sexage simal); gradele centesimale (sistemul centesimal) sunt între buințate în Topometrie și Cadastru (știința măsurătorii terenurilor).

3. Unghiul drept. Poate fi ales ca unitate de măsură pentru unghiuri (fig. 233); astfel unghiurile:

1) 20° sexagesimale este egal cu $\frac{4 \text{ unghiuri drepte}}{18} = \frac{2}{9}$

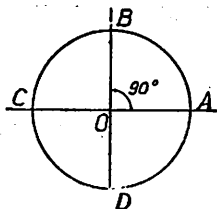


Fig. 233

unghiuri drepte.

2) 45° sexag. corespunde cu $\frac{1}{2}$ unghiuri drepte

3) 270° sexag. corespunde cu 3 unghiuri drepte

4) 300° sexag. corespunde cu $\left(3 + \frac{1}{3}\right)$

unghiuri drepte = $\frac{10}{3}$ unghiuri drepte.

În general: un unghi de n grade sexagesimale corespunde cu $\frac{n^{\circ}}{90}$ unghiuri drepte.

4. Cercul. Uneori unghiurile se exprimă în fracțiuni de cerc astfel:

1) unghiul de 90° corespunde cu $\frac{1}{4}$ din cerc

2) unghiul de 30° corespunde cu $\frac{1}{12}$ din cerc etc.

In general: un unghi de n° grade sexagesimale corespunde cu $\frac{n^\circ}{360}$ din cerc.

Aplicație. Să se exprime unghiurile:

15 grade sexag., 110 grade sexag., 1170 grade sexag. în toate felurile de unități enumerate mai sus.

1) 15 grade sexagesimale corespund cu:

$$a) 15 \cdot \frac{10}{9} = \frac{50}{3} = 16,66 \text{ grade centesimale}$$

$$b) \frac{15}{90} = \frac{1}{6} \text{ unghiuri drepte; adică unghiul de } 15^\circ \text{ sexag.}$$

este a șasea parte din unghiul drept.

c) $\frac{15}{360} = \frac{1}{24}$ cerc., adică unghiul de 15 grade sexag. corespunde, pe cercul descris din vârful lui ca centru, cu a 24-a parte din lungimea cercului.

$$d) 15 \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12} = \frac{3,14}{12} = 0,261.799 \text{ radiani.}$$

2) 110° sexagesimale corespund cu:

$$a) 110 \cdot \frac{10}{9} = \frac{1100}{9} = 122,22 \text{ grade centesimale}$$

$$b) \frac{110}{90} = \frac{11}{9} = 1,233 \text{ unghiuri drepte}$$

$$c) \frac{110}{360} = 0,408 \text{ cercuri}$$

$$d) 110 \cdot \frac{\pi}{180} = 1,919 \text{ radiani.}$$

3) $1170^\circ = 3 \times 360^\circ + 90^\circ$ sexagesimale, corespunde cu:

$$a) 3 \times 400^\circ + 100^\circ = 1300 \text{ grade centesimale}$$

$$b) \frac{1170}{90} = 13 \text{ unghiuri drepte}$$

$$c) \frac{1170}{360} = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4} \text{ cercuri.}$$

$$d) 1170 \frac{\pi}{180} = 3 \times 2\pi \text{ radiani} + \frac{\pi}{2} \text{ radiani} = \frac{13\pi}{2} \text{ radiani.}$$

Exerciții.

1. Să se exprime în grade, minute și secunde sexagesimale, unghiul de 15,8 grade sexagesimale.

R: 15°48'.

2. Să se exprime în fracție zecimală de grade sexagesimale; arcul de 48°18'.

R: 48,3 grade sexagesimale de arc.

3. Să se afle expresiunea unghiului de 18°14'48'' grade sexagesimale printr'un număr zecimal.

R: 18,24666... grade sexagesimale.

4. Să se exprime în grade, minute și secunde sexagesimale, unghiul de 15,338 grade sexagesimale.

R: 15°20'16'',8.

5. Să se exprime în grade, minute și secunde centesimale, unghiul de 38,153 grade centesimale.

R: 38°15'30''.

6. Câte grade sexagesimale și centesimale are un arc a cărui lungime este a 12-a parte dintr'un cerc?

R: 30 grade sexagesimale; 33°3333 grade centesimale.

7. Să se transforme în grade, minute și secunde centesimale, unghiurile următoare, din sistemul sexagesimal:

a) 29038' b) 79°40' c) 134°2'34''

R: a) 32°32'59'' b) 88°52'25'' c) 38°3'68''

8. Se dau în grade, minute și secunde centesimale, unghiurile:

a) 49°30' b) 170°4' c) 200°4'10''

și se cere să se transforme în sistemul sexagesimal.

R: a) 44°22'12'' b) 153°2'10'' c) 180°2'13''

9. Să se exprime în unghiuri drepte și în cercuri, unghiurile următoare din sistemul sexagesimal:

a) 34° b) 29°30' c) 142°28'

R: a) 0,378 dr b) 0,328 dr c) 1,585 dr

0,094 cerc. 0,082 cerc. 0,396 cerc.

SECANTA. COSECANTA.

In afară de liniile trigonometrice, $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cog} a$, studiate mai sus, mai există două linii trigonometrice și anume:

1. Secanta unui unghi, care prin definiție este inversa cosinusului aceluși unghi; se scrie:

(1)

$$\sec a = \frac{1}{\cos a}$$

Din însăși această definiție rezultă că secanta este *totdeauna* un număr *supra unitar*, deoarece provine din împărțirea unității cu un număr subunitar: $\cos a$.

Cosinusul variind între $(-1$ și $0)$ și $(0$ și $+1$ și secanta va varia între $(-1$ și $-\infty)$ și $(+\infty$ și $+1)$, adică ea poate lua orice valoare între $-\infty$ și $+\infty$, cu excepțiunea valorilor cuprinse între -1 și $+1$.

2. Cosecanta unui unghi, este prin definiție: inversa sinusului, se scrie:

(2)

$$\operatorname{cosec} a = \frac{\sin a}{1}$$

Ca și secanta, cosecanta este un număr supraunitar, care variază între $(-1$ și $-\infty)$ și $(+\infty$ și $+1)$.

Perioada secantei și cosecantei este 360° (sau 2π); aceasta reiese tot din definiția acestor linii trigonometrice.

Semnele acestor linii trigonometrice în cele patru cadrane sunt:

	Cadr. I	Cadr. II	Cadr. III	Cadr. IV
Sec a	+	-	-	+
cosec a	+	+	-	-

adică secanta are aceleași semne ca și cosinusul iar cosecanta are aceleași semne ca și sinusul.

Acest rezultat reiese lesne din relațiile (1) și (2).

Tabloul de variație al secantei și cosecantei.

Cu ajutorul relațiilor (1) și (2) se poate întocmi următorul tablou de variație pentru $\sec a$ și $\operatorname{cosec} a$

a	0°	90°	180°	270°	360°
sec a	1.....	$\pm \infty \dots$	-1.....	$\pm \infty \dots$	1
cosec a	$\infty \dots$	1...	$\pm \infty \dots$	-1.....	$-\infty$

Aplicații. Să se calculeze secanta și cosecanta unghiurilor de 30°, 45°, 60°.

Avem:

$$\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad \operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$$

$$\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad , \quad \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad , \quad \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Proprietăți. Din relațiile: (4) pag. 35.

$$\sin a = \cos (90^\circ - a)$$

obținem prin inversare

$$\frac{\sin a}{1} = \frac{1}{\cos (90^\circ - a)}$$

sau

$$\operatorname{cosec} a = \sec (90^\circ - a)$$

și (3)

$$\sec a = \operatorname{cosec} (90^\circ - a)$$

adică:

Secanta unui unghi este egală cu cosecanta unghiului complementar.

In mod analog se pot obține proprietăți relative la relațiile între secantele și cosecantele a două unghiuri suplimentare, a două unghiuri egale și de semne contrare, etc.

Aplicații. Să se arate că:

$$\begin{array}{ll} \sec a = \sec (-a), & \operatorname{cosec} a = -\operatorname{cosec} (-a) \\ \sec a = -\sec (180^\circ - a), & \operatorname{cosec} a = \operatorname{cosec} (180^\circ - a) \\ \sec a = -\sec (180^\circ + a), & \operatorname{cosec} a = -\operatorname{cosec} (180^\circ + a) \end{array}$$

Reprezentarea geometrică a secantei și cosecantei. Fie cercul trigonometric O (fig. 234) și unghiul $\text{AOM} = a$; fie T punctul în care raza OM întâlnește tangenta la cerc în punctul A și U, punctul în care aceeași rază taie tangenta la cerc în punctul B.

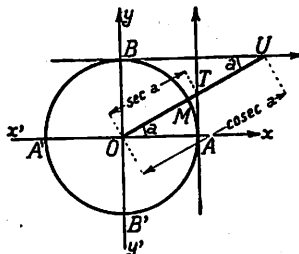


Fig. 234

Din triunghiul dreptunghiu OAT, avem:

$$\overline{OA} = \overline{OT} \cdot \cos a$$

și cum $\overline{OA} = 1$, rezultă:

(4)

$$\overline{OT} = \frac{1}{\cos a} = \sec a$$

adică: *secanta unui arc poate fi reprezentată geometriceste, prin porțiunea din raza ce trece prin extremitatea arcului, cuprinsă între centrul cercului trigonometric și tangenta la acest cerc, însă în originea arcelor.*

Din triunghiul dreptunghiu OBU obținem:

$$\overline{OB} = \overline{OU} \cdot \sin a$$

și cum $OB = 1$,

(5)

$$\overline{OU} = \frac{\sin a}{1} = \operatorname{cosec} a$$

adică: *cosecanta unui arc poate fi reprezentată geometriceste, prin porțiunea din raza ce trece prin extremitatea sa, cuprinsă între centrul cercului trigonometric și tangenta la acest cerc, dusă în punctul B ($\widehat{AOM} = 90^\circ$).*

Altă reprezentare geometrică. Fie N și P, punctele în care tangenta geometrică la cercul unitar, dusă în extremitatea M a arcului, întâlnește respectiv axa Ox (a cosinusului) și axa Oy (a sinusului).

Avem din figură (...)

$$\overline{OM} = \overline{ON} \cos a \quad (\overline{OM} = 1)$$

deci

(4₁)

$$\overline{ON} = \frac{1}{\cos a} = \sec a$$

și

$$\overline{OM} = \overline{OP} \sin a$$

deci

(5₁)

$$\overline{OP} = \frac{1}{\sin a} = \operatorname{cosec} a$$

Secanta este deci reprezentată prin segmentul \overline{ON} , iar cosecanta prin segmentul \overline{OP} .

Se vede de aci lesne că atât secanta cât și cosecanta sunt totdeauna *mai mari în valoare absolută decât unitatea.*

Aplicație. *Să se studieze variația sec a și cosec a cu ajutorul celor două reprezentări geometrice de mai sus.*

Formule fundamentale. Referindu-ne la rezultatele stabilite la cap. V pag 69, și ținând seama și de relațiile (1) și (2) pag. 69,

se pot scrie următoarele *cinci* relații între liniile trigonometrice ale aceluiași unghi a și anume:

$$(1) \quad \sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$(3) \quad \operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

$$(4) \quad \sec a = \frac{1}{\cos a}$$

$$(5) \quad \operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$$

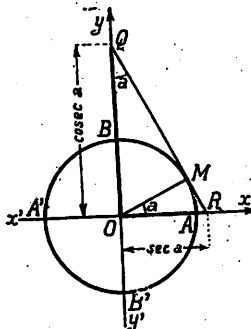


Fig. 235

Aceste *cinci* relații permit să aflăm *patru* din liniile trigonometrice ale unui unghi, când cunoaștem pe a cincea; ele se numesc și *formule fundamentale*.

Aplicații. 1. Se dă: $\sec a = 4$; se cere celelalte linii trigonometrice.

2. Se dă: $\operatorname{cosec} a = -3$; se cere celelalte linii trigonometrice.

Logaritmul secantei și cosecanei unui unghi.

Avem:

$$\log \sec a = \log \frac{1}{\cos a} = \operatorname{colog} a$$

și

$$\log \operatorname{cosec} a = \log \frac{1}{\sin a} = \operatorname{çolog} \sin a$$

Prin urmare *tabelele trigonometrice de logaritmi*, în care se găsesc logaritmi liniilor $\sin a$, $\cos a$, pot servi și la aflarea logaritmilor lui $\sec a$ și $\operatorname{cosec} a$.

Exerciții. Să se calculeze:

1. $\log \sec 15^{\circ}28'$

3. $\log \sec 84^{\circ}2'$

5. $\log \sec 229^{\circ}15'8''$

7. $\log \operatorname{cosec} 111^{\circ}27'$

2. $\log \sec 139^{\circ}49'$

4. $\log \operatorname{cosec} 192^{\circ}17'$

6. $\log \sec 350^{\circ}20''$

8. $\log \operatorname{cosec} 299^{\circ}1'48''$

NOȚIUNI DESPRE OMOGENITATEA FORMULELOR ÎN TRIGONOMETRIE.

Din operațiile elementare se știe că nu putem aduna sau scădea decât *cantitățile de acelaș fel*; spre exemplu:

$$5 \text{ m} + 7 \text{ m} = 12 \text{ m}, \quad 13 \text{ m}^2 - 5 \text{ m}^2 = 8 \text{ m}^2, \text{ etc.}$$

iar rezultatul este o cantitate *de acelaș fel* (omogenă) cu cantitățile care au fost adunate sau scăzute.

Exemple: 1. In suma:

$$7 \text{ metri} + 2$$

termenul 2 ce fel de cantitate reprezintă?

R: Deoarece primul termen este o lungime, numărul 2 trebuie neapărat să reprezinte o lungime, exprimată printr'o unitate oarecare: cm, dm, metru, etc.

2. In diferența:

$$10 \text{ m}^2 - 2 \text{ m} \times 3$$

ce fel de mărime reprezintă factorul 3 dela scăzător?

R: Descăzutul fiind 10 m^2 , el reprezintă o suprafață (o arie).

Rezultă că scăzătorul $2 \text{ m} \times 3$ trebuie să reprezinte tot o arie și cum primul factor este o lungime, al doilea factor va fi tot o lungime, pentru ca înmulțit cu primul să dea o arie.

3. In expresiunea:

$$15 \text{ m}^3 + 3 \text{ m} \times 4$$

ce fel de mărime reprezintă factorul 4 din termenul al doilea?

R: Judecând ca mai sus, găsim că 4 trebuie să reprezinte o arie, deoarece înmulțit cu lungimea 3 m trebuie să dea un volum, așa cum este și primul termen: 15 m^3 .

4. In expresiunea:

$$5 \times 4^2 - 3$$

numărul 5 reprezintă un unghi în radiani iar numărul 4 o lungime; ce fel de mărime reprezintă numărul 3?

R: Radianul este un număr abstract (vezi cap. I, pag. 9), 4^2 este o arie (și anume: aria pătratului cu latura 4), iar de 5 ori o arie este tot o arie; rezultă că termenul 3 trebuie să reprezinte o arie (adică un număr de m^2 , dm^2 , cm^2 , etc.).

5. In expresiunea:

$$ab + 3R^2$$

literile a , b și R reprezintă lungimi; ce reprezintă numărul 3?

R: a și b fiind lungimi, produsul ab reprezintă o arie; R fiind o lungime, R^2 va reprezenta o arie, prin urmare $3R^2$ trebuie să fie tot o arie, adică numărul 3 arată că aria R^2 a fost repetată de 3 ori.

Rezultă că numărul 3 este în acest caz un număr abstract.

6. In expresiunea:

$$x^2 + px = q$$

să presupunem că x reprezintă o lungime; ce reprezintă literle p și q ?

R: Judecând ca mai sus, găsim: x^2 este o arie; px trebuie să fie tot o arie, căci altfel nu s'ar putea aduna cu x^2 ; cum x este o lungime, p trebuie să fie deasemeni o lungime; apoi $x^2 + px$ fiind o arie, q care este egal cu această arie trebuie să fie tot o arie (m^2 , dm^2 , etc.).

7. Relația lui Pitagora:

$$c^2 = b^2 + a^2$$

dintre ipotenușa a și catetele b și c cuprinde termeni de același fel: a^2 este aria pătratului de latură a , b^2 și c^2 deasemeni reprezintă câte o arie, a pătratelor de laturi b și c .

8. In expresiunea:

$$a^2 \sin a = bc + d$$

a și b sunt lungimi; ce reprezintă literile c și d ?

R: $\sin a$ este un număr abstract; $a^2 \sin a$ este deci o arie; b , c trebuie să fie o arie și cum b este o lungime, c va fi o lungime; d trebuie să reprezinte o arie.

9. Formula stabilită la cap. X, pag. 204.

$$S = \frac{abc}{4R}$$

în care S este suprafața unui triunghi ABC , a , b , c , laturile și R raza cercului circumscris, este *omogenă*. Într'adevăr putem scri:

$$abc = 4RS$$

abc fiind un produs de trei lungimi a , b , c , reprezintă un volum (spre ex. volumul unui paralelipiped) iar $4R \cdot S$ este de asemenea un volum, deoarece R este o lungime, S o arie iar 4 un număr abstract.

Observare. Din exemplele de mai sus rezultă că în orice expresiune sau formulă în care există termeni care se adună sau se scad acțiunea trebuie să reprezinte mărimi de același fel.

Această proprietate generală a expresiunilor și formulelor se numește *principiul sau regula omogenității*.

Expresiunile, relațiunile sau formulele de Geometrie ale Trigonometriei, etc., trebuie să fie *omogene*, iar operația de a recunoaște această proprietate generală se cheamă *verificarea omogenității*.

Câteva exemple, ne vor arăta foloasele cunoașterii și aplicării acestei reguli.

Exemple: 1. Să presupunem că a , b , c , fiind cele trei laturi ale unui triunghi, am găsi pentru suprafața lui, în urma unui calcul, formula:

$$S = \frac{a \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)}$$

Aplicând regula omogenității putem fără să mai refacem calculele să spunem că formula este greșită.

Într'adevăr S reprezintă o arie, deci și $\frac{a \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)}$ trebuie să reprezinte o arie. Dar $\sin B$, $\sin C$, $\sin (B + C)$ sunt numere

abstracte, iar a o lungime, adică membrul al 2-lea reprezintă o lungime.

O arie nu poate fi egală cu o lungime.

In urma acestei constatări, dacă refăcem calculele obținem formula

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)}$$

care de data aceasta satisface *regula omogenității* deoarece a^2 este o arie.

2. Fie r raza cercului înscris într'un triunghi, S suprafața și p semiperimetrul lui.

Poate fi exactă formula?

$$r = \frac{p}{S}$$

R: Nu. Intr'adevăr *verificând* dacă formula este *omogenă*, găsim: $p = Sr$; adică primul membru reprezintă o lungime pe când al doilea o arie înmulțită cu o lungime adică un volum; o lungime nu poate fi egală cu un volum.

Formula exactă este: $r = \frac{S}{p}$; aceasta este *omogenă* deoarece se mai poate scrie: $S = p \cdot r$ și o arie poate proveni din produsul a două lungimi: p și r .

Rezultă de aci că dacă aveam o îndoială, care din formulele

$$r = \frac{p}{S}, \quad r = \frac{S}{p}$$

este adevărată, *regula omogenității* ne arată fără a mai face calcule, că prima formulă nu este exactă.

Observare importantă. S'a arătat mai sus că regula omogenității permite cu înlesnire, fără a face calcule, ci numai pe cale de raționament, să spunem dacă o formulă este greșită.

Despre o formulă, care nu este omogenă, *putem spune cu siguranță că nu este exactă*, deoarece potrivit regulii omogeneității, *toate formulele (sau expresiunile) trebuie să fie omogene.*

Reciproca nu este adevărată: adică, *se poate ca o formulă să fie omogenă și totuși să nu fie exactă* din cauza unui coeficient numeric (unui număr abstract) care a fost scris sau obținut printr'un calcul greșit.

Exemple: 1. Formula suprafeței unui triunghi:

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{4 \sin (B + C)}$$

deși este omogenă, nu este exactă, deoarece din calculul exact rezultă formula:

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)}$$

adică prima formulă conținea la numitorul fracției un factor numeric 4 în loc de 2.

2. Formula:

$$r = \frac{2S}{p}$$

deși este omogenă, nu este exactă; formula exactă pe care o obținem din calcule este:

$$r = \frac{S}{p}$$

Concluzie. Din cele ce preced rezultă că *regula omogeneității* este foarte utilă în aplicațiuni, cu deosebire în calculele numerice, deoarece ne permite:

1. Să înlăturăm formulele sau expresiunile neexacte, deoarece sunt *neomogene.*

2. Să verificăm la fiecare pas, calculele ce facem, observând ca toate expresiunile sau formulele ce scriem să fie omogene.

Observare. Să reținem însă că nu putem conchide că o formulă este exactă, numai din constatarea că ea este *omogenă*.

Exactitatea unei formule reiese din verificarea calculelor care au condus la ea.

Regula omogenității aplicată în Trigonometrie. Să trecem în revistă câteva din formulele stabilite până aci spre a constata dacă sunt omogene.

1. Relațiunile dintr'un triunghi dreptunghiu $b = a \sin B$, $c = a \cos B$, $b = c \cotg C$, etc. sunt *omogene*, deoarece $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} C$ sunt numere abstracte, deci $a \sin B$ este o lungime ca și b ; $a \cos B$ este o lungime ca și c ; $c \cotg C$ este o lungime ca și b .

2. Relațiunile sinusului (cap. X, pag. 171):

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

sunt *omogene*, căci fiecare raport rezultând dintr'o lungime a, b, c , împărțită cu un număr abstract ($\sin A, \sin B, \sin C$) este tot o lungime. Se putea deci prevedea că valoarea comună a acestor rapoarte va fi o lungime (cum s'a și găsit: Cap. X, pag. 204: $2R =$ diametrul cercului circumscris).

3. Relațiunea:

$$a = b \cos C + c \cos B$$

ca și analoagele (cap. X, pag. 175), este omogenă deoarece $a, b \cos C, c \cos B$ sunt fiecare lungimi.

4. Relația lui *Pitagora* generalizată (cap. X, pag. 176)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

este omogenă, deoarece:

$$a^2, b^2, c^2, 2bc \cos A$$

reprezintă fiecare o arie.

Exerciții.

1. Ce fel de mărime reprezintă litera b și coeficientul 2, în relațiunea:

$$a = b \cos C + 2 \cos B$$

dacă a este o lungime.

R: $b \cos C$ și $2 \cos B$ trebuie să fie lungimi, deci b și 2 sunt lungimi.

2. Să se verifice că formulele (cap. X, pag. 189) sunt omogene:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

R: $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ este un număr abstract; $(p-b)(p-c)$ și $p(p-a)$ reprezintă câte o arie, deci câtul lor este un număr abstract; produsul $p(p-a)(p-b)(p-c)$ reprezintă două suprafețe înmulțite; deci rădăcina patrată a produsului este o suprafață.

3. Să se verifice omogeneitatea formulei:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

r , fiind raza cercului înscris și r_1, r_2, r_3 razele cercurilor exînscrișe unui triunghi.

4. Care din relațiile de mai jos nu sunt exacte, din cauză că nu sunt omogene?

a) $a^3 \cos A = b^3 \sin B$ (a și b sunt lungimi)

b) $S = \frac{aR}{2}$ (S este o suprafață, a un unghi exprimat în radiani, R o lungime);

c) $S = a^2 \sin A + b \cos A$.

R: Relațiile precedente nefiind omogene, nu pot fi exacte.

5. În relația:

$$S \cdot a = 4r^3 + b \cdot R^2$$

S este o arie, a și R lungimi; ce mărime reprezintă litera b ?

R: b trebuie să reprezinte o lungime.

CÂTEVA DIN FIGURILE CARI AU CONTRIBUIT LA PROGRESUL ȘTIINȚEI ȘI INVĂȚĂMÂNTULUI MATEMATIC ÎN ROMÂNIA.

SPIRU HĂRET (născut la Iași la 15 Februarie 1851, mort la București la 17 Decembrie 1912) este primul român care a obținut doctoratul în Matematici la Sorbona (Paris) cu o teză de Mecanică cerească, care a adus rezultate importante și neașteptate.

A fost profesor de *Mecanică* la Facultatea de Științe și profesor de *Geometrie analitică* la Școala Națională de Poduri și Șosele din București.

Fost Ministru al Instrucțiunii Publice, *Spiru Haret* a fost și un mare reformator; lui i se datorește, între altele, introducerea secției reale în liceu, reformă care a dat rezultate strălucite pentru progresul științei matematice pure și aplicate.

DAVID EMMANUEL (născut la 1854 la București) este al doilea român care a obținut doctoratul în Matematici la Sorbona cu o teză de Teoria funcțiilor.

Reîntors în țară, a ocupat catedra de *Teoria funcțiilor* dela Facultatea de Științe din București, pe care a ilustrat-o timp de 45 ani; a fost în acelaș timp și profesor de *Analiză matematică* la Școala Națională de Poduri și Șosele (transformată în 1921 în Școală Politehnică).

Marea majoritate a profesorilor de matematici de liceu și de universitate, precum și un număr foarte mare de ingineri și ofițeri de arme speciale, au fost elevii profesorului *David Emmanuel*, care a contribuit într-o largă măsură la progresul matematicilor române.

DIMITRIE POMPEIU (născut la 4 Octombrie 1873 la Dorohoi) a urmat Școala normală la Iași și a fost câțva timp insti-

tutor. Plecat la Paris, s'a simțit atras spre studiul matematicilor și după ce a dat diferența de liceu, s'a înscris la Sorbona unde a fost remarcat de marele savant *Henry Poincaré*.

Teza sa de doctorat, cu subiect de Teoria funcțiunilor, este o lucrare fundamentală care a făcut epocă și care împreună cu lucrările ce i-au urmat, sunt cunoscute și apreciate de întreaga lume științifică, situând pe autorul lor printre marii savanți de astăzi.

D. Pompeiu a fost mai întâiu profesor de *Mecanică rațională* la Facultatea de Științe din Iași și a succedat apoi la aceeași catedră lui *Spiru Haret* la Facultatea de Științe din București.

După retragerea lui *David Emmanuel* (1929), trece dela catedra de *Mecanică* la aceea de *Teoria funcțiunilor*; la Școala Politehnică din București, ocupă dela 1929, (după încetarea din viață a lui *Traian Lalescu*) catedra de *Geometrie analitică*.

Este membru al Academiei Române și profesor agreat la Sorbona.

GH. ȚIȚEICA (născut la 17 Octomvrie 1873 la Turnu-Severin). După absolvirea liceului Carol I din Craiova și a obținerii licenței în Matematici la Universitatea din București, este trimis ca bursier la Paris ca elev al Școlii Normale Superioare.

După obțineria doctoratului în specialitatea Geometriei superioare, se reîntoarce în țară și este numit profesor de *Geometrie analitică* la Facultatea de Științe din București; în 1911 succede lui *Spiru Haret* la Academia Română, iar în 1928 este numit la catedra de *Analiză* dela Școala Politehnică din București, după retragerea lui *David Emmanuel*.

Împreună cu inginerii *Ion Ionescu*, *A. G. Ioachimescu* și *Vasile Cristescu*, — „stâlpi ai Societății Gazetei Matematice” — publică vestita „*Culegere de Probleme*” care a avut o atât de bună înrăurire asupra pregătirii matematice a elevilor de liceu.

Ca om de știință, *G. Țițeica* este unul din cei mai fecunzi matematicieni; lucrările sale, cu deosebire în domeniul Geometriei, i-au creat o faimă universală, fiind socotit, — ca și *D. Pompeiu* în domeniul Teoriei Funcțiunilor, — ca unul din marii matematicieni de astăzi.

În afară de activitatea sa de om de știință și de profesor, *G. Țițeica* a desfășurat, cu deosebire în anii de după războiul 1916—1918, o intensă și rodnică activitate culturală, prin scrieri și conferințe. Este profesor agreat la Sorbona.

ION IONESCU (născut la 22 Noembrie 1870 în comuna Creța-Leșile (Ilfov). A urmat Școala Comercială, iar la 1888 se înscrie la Școala Națională de Poduri și Șosele, fiind în toți anii șef de promoție și o absolvă în 1893. Ia parte la lucrările podului Regele Carol I peste Dunăre la Cernavoda sub conducerea lui *Anghel Saligny*, al cărui colaborator a fost.

Profesor de *Lucrări grafice* la Școala Națională de Poduri și Șosele, a succedat apoi lui *Anghel Saligny* la catedra de *Poduri*, pe care o deține și astăzi cu o deosebită autoritate.

Este unul din fondatorii *Gazetei Matematice*, căreia i-a închinat o bună parte din marea sa putere de muncă și din dragostea pentru știință, contribuind într-o largă măsură la formarea curentului pentru studiul *Matematicii*.

Pasionat pentru cercetările în domeniul istoric al *Matematicilor* române, a fost ales membru corespondent al *Academiei Române*.

Ion Ionescu este una din figurile reprezentative ale Școlii românești.

TRAIAN LALESCU (născut la București la 18 Iulie 1882, mort la București la 16. Iunie 1929).

A urmat Liceul Internat din Iași, iar în 1902 intră clasificat întâiul în Școala Națională de Poduri și Șosele; după ce urmează doi ani, se retrage pentru a se dedica în mod exclusiv studiului științelor matematice, în care se relevă dela început ca un spirit pătrunzător și original. Licențiat în *Matematici* al *Universității* din București, *Lalescu* pleacă la Paris unde trece în mod strălucit doctoratul, cu o teză asupra *ecuațiilor integrale*, care l-a și consacrat ca mare matematician.

Își continuă studiile la *Universitatea* din Göttingen și reintors în țară ocupă mai întâi postul de profesor la gimnaziul din

Giurgiu, de asistent de *Geometrie descriptivă* al profesorului *Pan-gratti* la Facultatea de Științe și asistent de *Statică Grafică* al profesorului *Ion Ionescu* la Școala Națională de Poduri și Șosele.

Conferențiar și apoi profesor la Universitatea din București de *Algebră superioară și înalta teorie a numerelor*, *Lalescu* succede lui *Spiru Haret* la catedra de *Geometrie analitică* dela Școala Națională de Poduri și Șosele.

Lalescu s'a relevat nu numai ca om de știință, — ale cărui lucrări, cu deosebire acelea din teoria ecuațiilor integrale — au devenit clasice și sunt citate în toate tratatele de specialitate, dar și ca profesor.

Lui i se datorește înființarea Școlii Politehnice din Timișoara, al cărui prim rector a fost și a Revistei Matematice din Timișoara.

Lalescu moare în 1929, în vârstă numai de 47 ani.

REVISTE ROMÂNEȘTI DE MATEMATICI PENTRU ELEVII DE LICEU

Gazeta Matematică. este una din cele mai vechi publicațiuni de știință românească și cea mai veche revistă de Matematici din România.

Primul număr a apărut la 15 Septembrie 1895 și de atunci, timp de 40 de ani, apare fără întrerupere, la 15 ale fiecărei luni, cu o exactitate adevărat matematică; ea conține cu deosebire probleme și exerciții, note și articole în legătură cu materia de matematici de liceu.

Patruzeci de generații, astăzi în marea lor majoritate, profesori secundari și universitari, ingineri și ofițeri de arme speciale, și-au făcut prima pregătire matematică, ca elevi de liceu, corespondând la *Gazeta Matematică*, cu rezolvări de probleme, note și articole și în a cărei atmosferă de idealism și-au dezvoltat nu numai gustul pentru științele exacte dar și acele calități de muncă continuă și disciplină, care le-au folosit mai târziu în cariera pe care au urmat-o.

Cu începere din toamna anului 1934, pe lângă *Gazeta Matematică* mai apare și un *Supliment*, cu exerciții propuse și rezolvate, mai elementare, care are de scop să intereseze un număr cât mai mare din elevii liceelor.

Inițiatorii *Gazetei Matematice* (transformată dela 1909 în Soc. *Gazeta Matematică*) au fost inginerii ¹⁾ *Ion Ionescu*, *Victor Balaban*, *Vasile Cristescu*, *Mihail Rocco*, *Ion Zottu*, *Emanoil Davidescu* ¹⁾ *Tancred Constantinescu*, ¹⁾ *Andrei Ioachimescu*, ¹⁾ *Mauriciu Kinbaum*, *Nicolae Nicolescu*, cărora li s'a adăugat puțin mai târziu *Gheorghe Țițeica* ¹⁾ și care au susținut personal și cheltuielile de aparițiune în primii ani ai revistei.

Dintre fondatori, Inginerului inspector general *Ion Ionescu*, profesor la Școala Politehnică Regele Carol II din București — i se datorește în mare parte spiritul de muncă, disciplină și exactitate, care caracterizează această publicațiune.

Revista Matematică din Timișoara. a fost fondată de regretatul profesor universitar *Traian Lalescu*, care în timpul liceului fusese unul din străluciții corespondenți ai *Gazetei Matematice*, iar mai târziu, unul din membrii ei cei mai de seamă.

În 1920 *Lalescu* înființează Școala Politehnică din Timișoara, fiind și primul ei rector; observând slaba pregătire la matematici a elevilor de liceu, după războiul 1916—1918 și în special a elevilor din teritoriile alipite, a creat în 1920 *Revista Matematică* din Timișoara care are un caracter mai elementar decât acela al *Gazetei Matematice* și este în genul *Suplimentului* ei de astăzi.

¹⁾ În viață.

TABLA DE MATERIE

	Pag.
In loc de prefață	3—4

CAP. I. — GENERALITĂȚI

Introducere	5
Construcția sau rezolvarea unui triunghi	5—9
Obiectul Trigonometriei	9
Scrierea și citirea unghiurilor	10
Radianul	10—13
Tablou de unghiurile mai importante în grade și radiani	14
Unghiuri mai mari de 360°	14—15
Cercul. Lungimea cercului	15—16
Construcția grafică a unui unghi când se cunoaște raportul a două din laturile unui triunghi dreptunghi, format cu acel unghi	17—18
Rezumat	19—20
Exerciții	21—21 bis

CAP. II. — LINII TRIGONOMETRICE ALE UN- GHIURILOR CUPRINSE ÎNTRE 0° ȘI 90°

Sinus. Cosinus. Tangentă	22—28
Cotangentă	28—29
Intrebuințarea tabelor de valori naturale	29—34
Relațiuni între liniile trigonometrice a două unghiuri compli- mentare	35
Valorile liniilor trigonometrice pentru unghiurile de 0° , 30° , 45° , 60° , 90°	36—39
Relații între elementele liniare și unghiulare ale unui triunghi dreptunghi	39—40
Rezumat	41—42
Exerciții	43

CAP. III. — REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR DREPTUNGHICE

Cazul I	44— 46
Cazul II	46— 47
Cazul III	47— 49
Cazul IV	49— 50
Rezumat	51
Exerciții	52— 53

CAP. IV. — CERCUL TRIGONOMETRIC

Unghiuri și arce pozitive	54— 56
Cercul trigonometric	56— 62
O aplicațiune a cercului trigonometric în Fizică	62— 64
Rezumat	65— 66
Exerciții	67— 68

CAP. V. — RELAȚIUNI ÎNTRE LINIILE TRIGONO- METRICE ALE ACELUIAȘI UNGHIU

Relațiuni între liniile trigonometrice ale aceluiaș unghiu	69— 77
Rezumat	78
Exerciții	79

CAP. VI. — FUNCȚIUNI TRIGONOMETRICE

Variația sinusului și cosinusului în cele patru cadrane	80— 85
Reprezentarea grafică a variației sinusului	85— 87
Reprezentarea grafică a variației cosinusului	88— 89
Variația tangentei și cotangentei	89— 91
Periodicitatea lui tgx și $cotgy$	91
Reprezentarea grafică a funcției $y = tgx$, și $u = cotgx$	92— 93
Perioadă. Funcțiuni periodice	93— 94
Proprietăți rezultate din variația sinusului, cosinusului, tangentei și cotangentei	94—101
Reducerea unghiurilor la primul cadran	101—104
Rezumat	105—106
Exerciții	107—108

**CAP. VII. — FUNCȚIUNI TRIGONOMETRICE ALE
SUMEI ȘI DIFERENȚEI A DOUĂ ARCE; ALE INDOI-
TULUI ȘI JUMĂȚĂȚII UNUI ARC**

Proiecțiuni. Teoreme	109—112
Formule pentru adunarea și scăderea unghiurilor	113—122
Funcțiuni trigonometrice ale înđoitului unui unghi (sau arc)	122—127
Funcțiuni trigonometrice ale jumătății unui unghi (sau arc)	127—132
Rezumat	133—135
Exerciții	135—139

**CAP. VIII. — TABELE TRIGONOMETRICE DE
LOGARITMI CU CINCI ZECIMALE**

Tabele trigonometrice de logaritmi	140—142
Intrebuințarea tabelor de logaritmi	142—146
Rezumat	147
Exerciții	148

**CAP. IX. — TRANSFORMAREA IN PRODUSE A
SUMEI ȘI DIFERENȚEI A DOUĂ FUNCȚIUNI
TRIGONOMETRICE**

Formule calculabile prin logaritmi	149—164
Intrebuințarea logaritmilor la calculul expresiunilor necalcula- bile prin logaritmi	164—165
Rezumat	166—167
Exerciții	168—169

**CAP. X. — REZOLVAREA TRIUNGHIULUI OARE-
CARE. RELAȚIUNI TRIGONOMETRICE INTRE
ELEMENTELE UNUI TRIUNGHIU OARECARE**

Cazul I. Relațiunea sinusului	170—174
Cazul II. Relațiunea lui <i>Pitagora</i> generalizată	175—181
Formula lui <i>Neper</i>	181—183
Aplicație	183—185
Cazul III	185—191
Cazul IV	191—202
Raza cercului circumscris	203—206
Raza cercului înscris	206—209
Rezumat	210—212
Exerciții	213—214

CAP. XI. — IDENTITĂȚI ȘI ECUAȚIUNI
TRIGONOMETRICE

Generalități	215—216
Identități trigonometrice	217—222
Ecuatiuni trigonometrice	222—233
Aplicații	233—237
Rezumat	238—239
Exerciții	240—243

CAP. XII. — APLICAȚIUNI ALE TRIGO-
NOMETRIEI LA AGRIMENSURĂ

Generalități	244
Planimetrie și Altimetrie	245—246
Instrumente întrebuințate în Agrimensură	247—254
Aplicații	254—258
Planimetrie	258—260
Metode de ridicare a planului unui teren	260—263
Comparație între metodele de ridicare a planelor	263
Calculul suprafeței terenului ridicat	263—263
Altimetrie (Nivelment)	264—267
Operații de nivelare	267—271
Rezumat	272—273

CAP. XIII. — APLICAȚIUNI ALE TRIGONOMETRIEI
LA STATICĂ

Noțiuni preliminare	274
Clasificarea mecanicii	275
Reprezentarea forțelor	276—278
Compunerea și descompunerea forțelor concurente. Regula paralelogramului	278—284
Compunerea mai multor forțe dintr'un plan, ale căror direcțiuni se întâlnesc în același punct. Poligonul forțelor	284—287
Compunerea forțelor concurente nesituate în același plan	287—290
Descompunerea unei forțe (R) după două direcțiuni concurente	290—293
Rezumat	294—296
Exerciții	297—300
Exerciții recapitulative	301—321

APENDICE

Unități de măsură	322—328
Secanta și cosecanta	329—333
Noțiuni despre omogeneitatea formulelor	334—339
Exerciții	340
Câteva din figurile care au contribuit la progresul științei și învățământului matematic în România	341—344
Reviste românești de matematici pentru elevii de liceu	344—346
